А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г.Майер

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Содержание

Предисловие 9
Введение 11
Глава I. Динамические системы в плоской области и на сфере 19
§1. Динамические системы в плоской области 19
1. Введение 19
2. Геометрическая интерпретация динамической системы (I) в пространстве R^3 20
3. Простейшие свойства решений системы (I) 21
4. Геометрическая интерпретация динамической системы на фазовой плоскости (x, y) 24
5. Разбиение области G фазовой плоскости на траектории. Некоторые элементарные сведения о траекториях 20
6. Сопоставление геометрической интерпретации в пространстве R^3 и геометрической интерпретации на фазовой плоскости 30
7. Направление на траектории. Изменение параметризации 31
8. Терминология и обозначения 34
9. Теорема о непрерывной зависимости от начальных значений 36
10. Замена переменных 37
11. Дифференциальное уравнение, соответствующее динамической системе 38
12. Изоклины 41
13. Понятия "интеграл", "интегральная кривая", "общий интеграл", использующиеся в классической литературе при рассмотрении аналитических систем 41
14. Примеры 43
15. Замечания по поводу примеров 56
§2. Динамические системы на сфере 58
1. Введение 58
2. Определение динамической системы на сфере 58
3. Динамическая система на сфере как векторное поле на сфере 61
4. Решения и траектории динамической системы на сфере 61
5. Примеры динамических систем на сфере 66
Глава II. Предельные точки множества. Основные свойства траекторий 69
Введение 69
§3. Вспомогательные предложения о характере пересечения траектории с циклами и дугами без контакта 71
1. Дуга без контакта 71
2. Обобщенная дуга без контакта 73

3. Пересечение траектории с дугой без контакта 73
4. Расположение траекторий в окрестности дуги без контакта 74
5. Некоторые свойства функций Φ(t, s), Ψ(t, s) 77
6. Траектории, пересекающие две дуги без контакта. Функция соответствия 81
7. Случай, когда траектория имеет с дугой без контакта более одной общей точки 86
8. Функция последования 90
9. Замкнутые кривые, составленные из дуги траектории и дуги без контакта, и ограниченные ими области 92
10. Цикл без контакта 95
11. Семейство циклов без контакта. Траектории, входящие в область, заполненную циклами без контакта 96
12. Цикл однократного пересечения 97
13. Дифференцирование функции в силу системы (I) 98
14. Цикл без контакта между двумя последовательными витками траектории, пересекающей дугу без контакта 99
§4. Предельные точки и множества. Основные свойства траекторий 102
1. Предельные точки полутраектории и траектории 102
2. Примеры предельных точек 104
3. Основные свойства множества предельных точек 104
4. Свойства траекторий, характерные для динамических систем на плоскости или на сфере 106
5. Некоторые свойства предельных траекторий 109
6. Предельные траектории динамических систем, имеющих конечное число состояний равновесия. Возможные типы траекторий 112
7. Теорема о наличии состояния равновесия внутри замкнутой траектории 114
8. Основная теорема о состоянии равновесия 118
9. Изолированная замкнутая траектория - предельный цикл. Возможное расположение траекторий в окрестности предельного цикла 119
Глава III. Основные понятия качественной теории динамических систем **122**
§5. Количественное и качественное исследование динамических систем 122
1. Введение 122
2. Топологическая структура динамической системы 124
3. Локальная топологическая структура 131
4. Свойства разбиения на траектории в целом и эффективные методы качественного исследования 133
Глава IV. Простое состояние равновесия **135**
Введение 135
§6. Приведение динамической системы в окрестности простого состояния равновесия к каноническому виду 137
1. Аналитические условия, характеризующие простое состояние 137

равновесия
2. Приведение динамической системы в окрестности простого состояния равновесия к каноническому виду 139
3. Инвариантность характеристического уравнения при регулярном преобразовании 144
4. Некоторые предварительные замечания относительно возможной топологической структуры простых состояний равновесия 145
§7. Расположение траекторий в окрестности простых состоянии равновесия с характеристическими корнями, имеющими не равные нулю действительные части 146
1. Случай 1): характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и одинаковых знаков (состояние равновесия типа узел) 146
2. Случай 2): характеристические корни-комплексные сопряженные: $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ (состояние равновесия типа фокус) 151
3. Случай 3): характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и различных знаков, т. е. $\lambda_1\lambda_2<0$ (состояние равновесия типа седло) 153
4. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия 160
5. Замечания по поводу других методов исследования характера состояний равновесия с неравными нулю действительными частями характеристических корней 161
6. Примеры 162
7. Простейшие примеры сложных состояний равновесия 164
§8. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями 166
1. Вводные замечания 166
2. Переход к полярной системе координат 166
3. Сопоставление траекторий системы (I) и интегральных кривых уравнения (7) 170
4. Построение функции последования на полупрямой $\theta=\text{const}$ 172
5. Возможный характер отдельной траектории, проходящей через точку достаточно малой окрестности состояния равновесия 174
6. Возможный характер разбиения на траектории достаточно малой окрестности состояния равновесия 0 176
7. Примеры 179
§9. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия 182
1. Основное определение 182
2. Угловой коэффициент направления, в котором траектория может стремиться к простому состоянию равновесия 185
3. Узел с различными характеристическими корнями 187
4. Дикритический узел 191
5. Вырожденный узел 195
6. Седло и фокус 199

7. Сводка сведений о простых состояниях равновесия с неравными нулю действительными частями характеристических корней 200
8. Примеры 203
Глава V. Теория индекса и ее приложения к динамическим системам **205**
Введение 205
§10. Индекс Пуанкаре 205
1. Вращение векторного поля 205
2. Индекс простой замкнутой кривой по отношению к заданному на ней векторному полю 208
3. Поле касательных к замкнутой кривой 212
4. Определение индекса, данное Пуанкаре 213
§11. Приложение теории индекса к динамическим системам 214
1. Две основные теоремы 214
2. Индекс изолированной особой точки 214
3. Индекс как криволинейный интеграл 216
4. Вычисление индексов простых состояний равновесия динамической системы 217
Глава VI. Некоторые приемы качественного исследования конкретных динамических систем **220**
Введение 220
§12. Признаки отсутствия и существования замкнутых траекторий 223
1. Некоторые общие замечания о кольцеобразных областях, заполненных замкнутыми траекториями 223
2. Случай, когда об отсутствии предельных циклов можно заключить непосредственно на основании расположения изоклин горизонтальных и вертикальных наклонов и характера поля между ними 224
3. Критерий Дюлака и Бендиксона 226
4. Применение индексов Пуанкаре и циклов однократного пересечения к решению вопросов существования предельных циклов 229
5. Топографическая система кривых и контактная кривая 231
6. Примеры 232
§13. Поведение траекторий на бесконечности 237
1. Общие замечания. Преобразование Бендиксона 237
2. Рассмотрение динамической системы, правые части которой многочлены на "сфере Пуанкаре" 241
3. Пример исследования экватора 249
§14. Использование методов приближенного вычисления для определения качественной структуры разбиения на траектории 249
1. Общие замечания 249
2. Метод изоклин 250
3. Специфика использования численных методов при определении качественной структуры разбиения на траектории 252
4. Случай, когда доказательство существования предельного цикла 253

возможно при помощи приближенного построения дуг траекторий
5. Случай, когда топологическая структура разбиения на траектории принципиально не может быть установлена путем приближенного вычисления (построения) траекторий 254
Глава VII. "Особые" траектории и ячейки динамической системы 256
Введение 256
§15. Орбитно-устойчивые и орбитно-неустойчивые траектории и полутраектории 257
1. Основные определения 257
2. Простейшие примеры орбитно-устойчивых и орбитно-неустойчивых траекторий 260
3. Возможные типы орбитно-неустойчивых полутраекторий и траекторий 262
4. Вспомогательные леммы о поведении полутраекторий в окрестности состояния равновесия 263
5. Орбитно-неустойчивые траектории, стремящиеся к состоянию равновесия 266
6. Сепаратрисы состояния равновесия 275
7. Некоторые вспомогательные предложения 277
8. Полутраектории, среди предельных точек которых есть отличные от состояний равновесия 280
9. Возможные типы особых и неособых траекторий в случае конечного числа состояний равновесия. Случаи конечного числа особых траекторий 284
§16. Ячейки динамической системы в случае конечного числа особых траекторий 285
1. Вводные замечания 280

3. Леммы о множестве точек, принадлежащих особым элементам 287
4. Доказательство конечности числа ячеек (в случае конечного числа особых элементов) 288
5. Случай динамической системы на сфере 290
6. Поведение траекторий, близких к орбитно-устойчивым траекториям 291
7. Некоторые предложения о незамкнутых орбитно-устойчивых траекториях 296
8. Возможный характер неособых элементов внутри одной и той же ячейки 299
9. Ячейки, заполненные замкнутыми траекториями 300
10. Ячейки, заполненные незамкнутыми траекториями 304
11. Свойства границы двусвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями 307
13. Полное качественное исследование динамической системы. Схема динамической системы 315
Глава VIII. Схема состояния равновесия 316

Введение 317
§17. Состояние равновесия, к которому стремится хотя бы одна полутраектория 317
1. Вспомогательные предложения 317
2. Возможный характер криволинейного сектора. Гиперболический (седловой), параболический и эллиптический сектор 322
3. Леммы об эллиптических областях 328
§18. "Элементарные области". Типы элементарных областей 330
1. Проведение дуги без контакта в параболическом секторе 330
2. Проведение дуг без контакта в эллиптической области 336
3. Правильная седловая область 337
4. Топологическая тождественность разбиений на траектории элементарных областей одинакового типа 339
§19. Локальная и полная (глобальная) схема состояния равновесия 346
1. Циклический порядок сепаратрис и эллиптических областей состояния равновесия, не являющегося центром 346
2. Каноническая замкнутая кривая вокруг состояния равновесия 349
3. Локальная схема состояния равновесия, не являющегося центром 351
4. Полная (или глобальная) схема состояния равновесия, не являющегося центром 356
5. Состояние равновесия типа центр 360
Глава IX. Методы исследования некоторых типов сложных состояний равновесия **362**
Введение 362
§20. Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия 363
1. Переход к полярным координатам 363
2. Общий случай 364
3. Особый случай 367
4. Примеры 372
§21. Топологическая структура сложного состояния равновесия в случае $\sigma = P'_x(0,0) + Q'_y(0,0) \neq 0$ 372
1. Вспомогательные преобразования и леммы 372
2. Возможные топологические структуры сложного состояния равновесия в случае $\sigma \neq 0$ 377
§22. Топологическая структура сложного состояния равновесия в случае $\sigma=0$ 385
1. Вспомогательные леммы 385
2. Возможные топологические структуры сложного состояния равновесия в случае $\sigma=0$ 397
3. Упрощение исследования. Примеры 404
Глава X. Схема предельного континуума и границы области G* **411**
Введение 411

§23. Свойства предельных континуумов и континуумов, входящих в границы ячеек, заполненных замкнутыми траекториями 412
1. Свойства ω- и α-предельных континуумов, не являющихся состоянием равновесия 412
2. Нуль-предельные континуумы и их свойства 417
3. Теорема о континууме, состоящем из особых траекторий, являющихся продолжением одна другой 420
§24. Локальная схема предельного континуума и каноническая окрестность 421
1. ω(α)-перечисление ω-, α- и 0-предельных континуумов 421
2. Тождественность перечислений двух предельных континуумов 423
3. "Односторонняя" каноническая окрестность предельного континуума 424
4. Локальные схемы ω-, α- и 0-предельных континуумов и теорема о тождественности разбиения на траектории канонических окрестностей континуумов с одинаковыми локальными схемами 426
§25. Полная схема предельного континуума 432
1. Простые замкнутые кривые, образованные траекториями, составляющими предельный континуум 432
2. Односторонние и двусторонние предельные континуумы 435
3. Взаимное расположение континуумов и их канонических кривых 439
4. Свободные и несвободные континуумы 441
5. Полная (глобальная) схема предельного континуума 442
§26. Схема границы области 447
1. Угловые точки граничных кривых 447
2. Схема граничной кривой, схема границы и тождественность двух схем границы 449
Глава XI. Схема динамической системы и основная теорема 453
Введение 453
§27. Правильная система канонических окрестностей. ω(α)-дуги и ω(α)-циклы 454
1. Обозначения для особых элементов динамической системы 454
2. Правильные системы канонических окрестностей 454
3. Элементарные дуги и свободные циклы без контакта 458
4. Сопряженные элементарные ω- и α-дуги и сопряженные свободные ω- и α-циклы 461
§28. Сопряженные свободные ω(α)-предельные и нуль-предельные континуумы и области между их каноническими окрестностями 463
1. Взаимное расположение двух свободных сопряженных ω- и α-циклов 463
2. Сопряженные ω- и α-предельные континуумы 465
3. Сопряженные нуль-предельные континуумы 466
4. Траектории, проходящие через концы сопряженных ω- и α-дуг 467

5. Леммы о граничных особых элементах и ω- и α-дугах, являющихся частями граничных дуг без контакта 469
6. Цепочки из особых элементов, траекторий и граничных дуг, соединяющих концы сопряженных ω- и α-дуг 472
7. Области между сопряженными каноническими кривыми и между сопряженными элементарными дугами 478
§29. Схема динамической системы и теорема о тождественности топологических разбиений на траектории 481
1. Схема динамической системы 481
2. Соответствие по схеме между каноническими кривыми и дугами канонических кривых 486
3. Сопряженные ω- и α-дуги двух систем *D* и *D*' с тождественными схемами 488
4. Основная теорема 490
5. Схема динамической системы на сфере. Схема динамической системы, определенной на плоскости и отображенной на сферу Пуанкаре 497
Глава XII. Качественное исследование "в целом" конкретных динамических систем **499**
30. Примеры 499
Дополнение **519**
§1. Элементарные сведения о множествах в евклидовом пространстве 519
1. Некоторые обозначения 519
2. Сегмент и интервал 519
3. Точка сгущения, граничная и внутренняя точка множества 519
4. Множества открытые и замкнутые. Граница 520
5. Расстояние между множествами. Компактные множества 520
6. Связные множества. Континуум и область 520
7. Области с общей границей 520
8. Множества всюду плотные и нигде не плотные 521
9. Окрестности, покрытия 521
10. Топологический предел 521
11. Отображение множеств друг на друга 521
12. Топологическое отображение 522
13. Теорема Брауэра об инвариантности области 522
14. Системы функций, описывающие отображение множеств 522
15. Простая дуга 522
16. Простая замкнутая кривая 523
§2. Простые замкнутые кривые и простые дуги на плоскости. Ориентация плоскости (направление обхода простых замкнутых кривых). Типы топологических отображений 523
1. Две основные теоремы 523
2. Леммы о простой замкнутой кривой 523

3. Направление обхода простых замкнутых кривых. Циклический порядок точек на простой замкнутой кривой 525
4. Индуцированное направление на простой дуге, являющейся частью простой замкнутой кривой 525
5. Ориентация плоскости 525
6. Некоторые предложения о направлениях обхода простых замкнутых кривых, имеющих общую дугу или общую точку 527
7. Два предложения о связи между порядком точек на непересекающихся простых замкнутых кривых 528
8. Два типа топологических отображений плоскости в себя (сохраняющие ориентацию и изменяющие ориентацию) 528
§3. Положительная и отрицательная "сторона" простой дуги 529
1. Области, характеризующие различные "стороны" простой дуги 529
2. Определение областей, характеризующих различные стороны простой дуги, с помощью введения криволинейной системы координат 531
3. Некоторые предложения о взаимном расположении дуг и простых замкнутых кривых 532
4. Ограниченные области на плоскости 532
§4. Лемма Адамара и теорема о неявных функциях 533
1. Классы функций 533
2. Лемма Адамара 533
3. Теорема о неявных функциях 534
§5. Угол между векторами. Гладкая простая дуга и гладкая простая замкнутая кривая. Угол между двумя гладкими дугами 536
1. Угол между векторами 536
2. Гладкая простая дуга 536
3. Гладкая простая замкнутая кривая и кусочно-гладкая простая замкнутая кривая 536
4. Гладкая линия 537
§6. Регулярное отображение. Криволинейные координаты. Некоторые предложения о гладких дугах и гладких замкнутых кривых 538
1. Регулярное отображение 538
2. Криволинейные координаты 539
3. Преобразование компонент вектора при регулярном отображении. Контравариантный вектор. Преобразование касательного вектора 540
4. Изменение угла между векторами при регулярном отображении. Роль якобиана преобразования 541
5. Использование регулярного отображения при рассмотрении областей, характеризующих различные стороны простой гладкой дуги 541
6. Один способ введения функций $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ 542
7. Пересечение двух гладких дуг и пересечения гладкой дуги с гладкой и кусочно-гладкой простой замкнутой кривой 544
8. Два предложения о построении функций по заданным условиям 545
§7. Сфера в евклидовом пространстве 547

1. Окрестность точки сферы 547
2. Простая дуга и простая замкнутая кривая на сфере 548
3. Покрытие сферы и координаты на сфере 548
4. Одно частное простейшее координатное покрытие сферы 550
5. Ориентация сферы и типы топологических отображений сферы в себя 551
6. Функции, заданные на сфере 551
§8. Основные теоремы теории дифференциальных уравнений 552
1. Теорема о существовании и единственности решения 552
2. Теорема о непрерывной зависимости от начальных значений 553
3. Производные по независимому переменному и по начальным значениям 553
§9. К вопросу о понятии "качественной структуры" разбиения на траектории и о понятии особых и неособых траекторий 554
1. Сопоставление инвариантов топологических и регулярных отображений 554
2. Различные подходы к выделению областей, заполненных траекториями "одинакового поведения" 555
3. Случай бесконечного числа орбитно-неустойчивых траекторий 557
4. Геометрический пример А.Г.Майера всюду плотного множества орбитно-неустойчивых траекторий-сепаратрис состояния равновесия 557
10. Теорема Бендиксона об индексе сложного состояния равновесия 559
Литература 563
Алфавитный указатель **566**

Алфавитный указатель

Автоколебания 16
Автономная динамическая система 19
Бендиксона критерий отсутствия предельных циклов 226
- преобразования 239
- сфера 222
- теорема об индексе сложного состояния равновесия 559
Векторное поле непрерывно-дифференцируемое 25
- - непрерывное без особенностей 206
Виток траектории 86
Внешний предельный континуум 465
- цикл без контакта 464
Внешняя угловая точка 448
Внутренний предельный континуум 4c5
- цикл без контакта 464
Внутренняя угловая точка 448
Вращение векторного поля 205, 207
Вырожденное состояние равновесия 397
Вырожденный узел 195
Гиперболическая область 316
- (ω, α)-дуга 350
Гиперболический (седловой) сектор 322
Гладкая простая дуга 536, 537
- - замкнутая кривая 537
Граница нормальная 286
Граничные дуги без контакта 286
- - траекторий 286
- траектории 286
- циклы без контакта 286
Движение на траектории 35
Двусторонний континуум 417
Дикритический узел 151, 191

Динамическая система аналитическая 19
- - на поверхностях 58
- - - сфере 58
Дифференцирование в силу системы (I) 98
Дуга без контакта 72
- - - обобщенная 73
- целая неособая 286
- элементарная [(ω, α)-дуга] 458
Дюлака критерий 226
Замкнутая кривая простая 523
- - - гладкая 537
- траектория 30
Замкнутое множество 520
Изменение параметризации па траектории 31
Изоклина вертикальных наклонов 41
- горизонтальных наклонов 41
Изолированное состояние равновесия 112
Индекс замкнутой кривой 208
- - траектории 215
- как криволинейный интеграл 216
- простых состояний равновесия 217
- Пуанкаре 205
- седла 219
- сложного состояния равновесия 559
- узла 219
- фокуса 219
- цикла без контакта 215
Индуцированное направление на простой дуге 525
- - - - замкнутой кривой 525
- топологическое отображение 495
Интеграл, общий интеграл, интегральная кривая уравнения *Pdx-Qdy*=0 41
Каноническая замкнутая кривая вокруг состояния равновесия 349, 351
- кривая ω- и α-предельного континуума 426
- окрестность ω(α)-предельного континуума 424
- - состояния равновесия 351
- - (нуль)-предельного континуума 425
- - центра 361
Канонические дуги канонической кривой 353
- области данной канонической окрестности состояния равновесия 359
Канонический вид динамической системы (в окрестности состояния равновесия) 137
Качественное исследование 123, 129
- свойство 124
Конец полутраекторпи 35
- элементарной циклической дуги 159
Контакт 72
Контактная кривая 221, 231
Континуум несвободный 459
- нуль-предельный 417
- - с положительной стороны (K_0^+, K_0^-) 420
- ω(α)-предельный (K_ω^+, K_α^-) 412
- - - с положительной (отрицательной) стороны (K_ω^+, K_ω^-, K_α^+, K_α^-) 416, 417
- предельный для полутраектории 56, 106, 412
- свободный 441, 454
Континуум сопряженный 465
Координатное покрытие 59, 548
Криволинейный сектор 268, 322
Линейный элемент 40
Локальная схема предельного континуума 411
- - состояния равновесия, не являющегося центром 351
- топологическая структура 131, 132
Метод изоклин 250
Множество предельное для полутраектории 106

Направление на траектории 33
- обхода, согласованное с направлением по t 425
Незамкнутая траектория 33
Неособая траектория, полутраектория 259
- целая дуга 282
Несвободный континуум 459
Неустойчивые состояния равновесия 169
Неустойчивый узел 45
- - дикритический 203
- - невырожденный, вырожденный 202
- фокус 47, 203
Нормальная граница 286
Нуль-предельный континуум (K_0) 419
- - - с положительной (отрицательной) стороны (K_0^+, K_0^-), 419
Область 520
- между сопряженными дугами 480
- отталкивания 458
- притяжения 458
Ограниченная полутраектория 102
- траектория 102
Орбитно-неустойчивая траектория ($\omega(\alpha)$)-орбитно-неустойчивая траектория) 256, 259, 260, 262
Орбитно-неустойчивые траектории, стремящиеся к состоянию равновесия 266
Орбитно-устойчивая полутраектория (($\omega(\alpha)$-орбитно-устойчивая траектория) 257
Особая дуга 259, 287
- линия 33
- точка векторного поля 25
- - дифференциального уравнения 40
Особые направления 368
- элементы 285
Параболическая дуга без контакта 350
- область (правильный параболический сектор) 316, 322
Перечисление ω-, α-, предельного, континуума, 421
Периодическое решение 30
Петля 304
Поле линейных элементов 40
Полная (глобальная) схема предельного континуума 443
- - - состояния равновесия 316, 357
Полная параболическая (узловая) область 336
- схема граничной кривой 443
- - динамической системы 453
Положение равновесия 26
Положительная (отрицательная) дуга без контакта 448
Полутраектория орбитно-неустойчивая 259
- орбитно-устойчивая 259
- отрицательная (L^-) 34, 35
- положительная (L^+) 34, 35
Последующая точка 90
Правильная параболическая область 322
- система канонических окрестностей 454, 458
Предельная точка полутраектории, траектории, предельная $\omega(\alpha)$-точка 102
- траектория 105
Предельное множество 56, 106
Предельный континуум для полутраектории с положительной (отрицательной) стороны 416, 417
- цикл 59, 119, 121
Предыдущая точка 90
Преобразование Пуанкаре 243

Продолжаемая траектория с положительной (отрицательной) стороны 276
Продолжение граничной угловой дуги, угловой полутраектории 448
- полутраектории относительно окружности с положительной (отрицательной стороны) 266, 270
Простая дуга 522
- замкнутая кривая 523
Разбиение области на траектории 28
Разрезанная плоскость 371
Регулярное отображение 75, 538
Решение, соответствующее траектории 23
Свободный граничный цикл без контакта 459
- континуум 441, 454
- цикл без контакта 458
Связные множества 520
Седло 49, 153, 199, 203
Седло-узел 165, 404
Седловая дуга без контакта 339, 350
Седловой сектор (область) 316
Сектор гиперболический 329
- криволинейный 268, 322
- параболический 322
- седловой 322
- циклический 320
- эллиптический 322
Сепаратрисы седла 49, 160
- состояния равновесия 276
Соответствие по схеме 445, 446, 484
Сопряженные концы сопряженных дуг 474
- нуль-предельные континуумы 465
- ω(α)-предельные континуумы 465
- ω- и α-дуги 463
- ω- и α-циклы 463
Состояние равновесия 26
- - простое 135
- - сложное 164
Состояние равновесия с эллиптической областью 397
Стороны простои дуги 530, 531, 541
Сфера Бендиксона 239
- Пуанкаре 241
Схема границы 449, 451
- граничной кривой 449
- динамической системы 481
- - - на сфере 497
- предельного континуума локальная 411
- - - полная 443
- состояния равновесия локальная 351
- - - полная 316, 357
- - - типа центр 361
Схематический рисунок 392, 497
Тождественность двух схем границы 449
- (ω(α)-перечислений, ω-, α- и предельных, континуумов, 423
- полных схем континуумов 448
- схем состояний равновесия локальных 353
- - - - полных 359
- - центров 361
- топологических структур разбиений 125
Топографическая система кривых 221, 231
Топологическая структура динамической системы 124, 490
- - локальная 131
- - разбиения на траектории 125
- - состояния равновесия 132
Топологический инвариант динамической системы 453
- предел 278, 521
- узел 327
Топологическое отображение 76, 124, 522
- седло 379
Точка покоя 26

- сгущения 519
Траектория ограниченная 102
- орбитно-неустойчивая 259
- орбитно-устойчивая 259
- фазовая 34
- целая 34
Угловая дуга 287
- полутраектория 287
- точка 286
- функция 206
Угол между векторами 536
Угол полярный 206
Узел вырожденный 151, 195
- дикритический 151, 191
- неустойчивый 202
- с различными характеристическими корнями 146, 187
- топологический 327
- устойчивый 202
Устойчивые состояния равновесия 169
Устойчивый фокус 203
Фазовая плоскость 25
- траектория 25
Фокус неустойчивый 151, 199, 203
- устойчивый 151, 199, 203
Функция последования 90
- соответствия 81
Целая неособая дуга 286
- траектория 34
Цепочка из особых траекторий и граничных дуг, соединяющих концы сопряженных дуг 472
Цикл без контакта 52, 95
- - - континуума 425
- - - несвободный 459
- - - свободный 458
- предельный 119, 120, 121
Циклическая элементарная дуга 459
Циклический порядок полутраекторий (вокруг состояний равновесия) 348
- - точек 317, 442
- сектор 320
Элемент особый 285
- схемы динамической системы 482
Элементарная циклическая дуга 459
- - $\omega(\alpha)$-дуга 459
Элементарные области 316, 339
Элементарный топологический четырехугольник 86, 339
Элементы, соответствующие по схеме 484
Эллиптическая область 328
Эллиптический сектор 328
Ячейка 257, 288
- двусвязная 304, 307
- заполненная замкнутыми траекториями 300
- - незамкнутыми траекториями, односвязная 307
Ячейки, в границу которых входят граничные дуги 313

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга была начата в 1949 году А. А. Андроновым совместно с Е. А. Леонтович и А. Г. Майером и после смерти А. А. Андронова (в 1952 г.) и А. Г. Майера (в 1951 г.) дописана Е. А. Леонтович и И. И. Гордоном. Окончательный вариант принадлежит Е. А. Леонтович.

Книга содержит, во-первых, классические результаты по качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости, в основном принадлежащие Пуанкаре и Бендиксону, и, во-вторых, некоторые новые результаты, непосредственно по своему содержанию примыкающие к этим классическим результатам (см. гл. VII — XI).

Книга является, с одной стороны, законченным целым, а с другой, может рассматриваться как реализация первого тома задуманной А. А. Андроновым монографии по динамическим системам второго порядка и их приложениям. В эту монографию кроме материала, содержащегося в настоящей книге, должны были войти: теория грубых динамических систем, работы А. А. Андронова по теории бифуркаций динамических систем и приложения методов теории бифуркаций к различным задачам теории колебаний.

Кроме авторов книги в ее написании участвовали: Н. А. Губарь, которой принадлежит глава IX, и Р. М. Минц, которая собрала и рассмотрела примеры, приведенные в главах IV (§§ 7 и 9), VI и XII. Редактирование книги было проведено Ю. М. Романовским.

Главы в книге частично независимы друг от друга. Материал, изложенный в главах I — VI, IX и XII, может служить для первоначального ознакомления с качественной теорией дифференциальных уравнений. При этом в главе II можно опустить доказательства целого ряда предложений (леммы I — XIII), фиксируя внимание лишь на их геометрическом значении. Этот материал можно рассматривать как содержание вводного курса качественной теории дифференциальных уравнений для студентов III — V курсов физико-математических и механико-математических факультетов университетов.

Главами IV, V, VI и IX можно пользоваться для справок.

Главы VII, VIII, IX, X и XI содержат полное изложение оригинальных работ.

Результаты, изложенные в главах VII, VIII, X и XI, принадлежат Е. А. Леонтович и А. Г. Майеру. Исследование сложных состояний рав-

новесия при помощи метода Бендиксона, излагаемое в главе IX, выполнено Н. А. Губарь.

Для понимания глав VII, VIII, X и XI достаточно знакомства с главами I, II и III.

В дополнении приводится ряд элементарных понятий и предложений, на которые опирается изложение в книге, а также дается некоторый дополнительный материал.

Книга снабжена большим количеством рисунков и примеров, иллюстрирующих излагаемые методы; некоторые из примеров имеют самостоятельный интерес, как возникшие из приложений. Каждой главе предшествует введение, в которой кратко излагается ее содержание.

Нумерация параграфов, теорем и рисунков проводится сквозная по всей книге. Нумерация лемм, формул и примеров проводится по параграфам. При ссылке на лемму или формулу указывается номер параграфа, а затем номер соответствующей леммы или формулы.

Горький,
1965 г.

Е. Леонтович,
И. Гордон

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга является книгой математической. Однако круг математических вопросов, которому она посвящена, непосредственно и органически связан с задачами естествознания и техники. Нам представляется необходимым кратко остановиться на этой связи.

Точное естествознание, начало которого можно считать со времени Ньютона, неразрывно связано с созданием адекватного математического языка, с созданием «дифференциального и интегрального исчисления» и аппарата дифференциальных уравнений.

Со времени Ньютона законы явлений стали записываться дифференциальными уравнениями. Небесная механика явилась первой областью науки, в которой соответствующие законы (взаимодействия между телами по закону всемирного тяготения) были записаны дифференциальными уравнениями. Рассмотрение решений этих дифференциальных уравнений позволило на основании сведений о расположении и скоростях тел в данный момент времени с большой точностью *предсказать* расположение их во всякий другой момент времени (предсказать, например, точное время солнечных и лунных затмений, расположение планет в то или другое время и т. д.).

Влияние небесной механики на создание научного мировоззрения огромно. Именно небесная механика впервые внушила твердую уверенность в самом существовании неизменных законов природы, в возможности на основании знания этих законов по сведениям о настоящем узнавать прошедшее и предсказывать будущее. Небесная механика явилась прочным фундаментом *детерминизма*, впервые с полной отчетливостью сформулированным в начале XIX столетия Лапласом, являющимся после Ньютона одним из создателей небесной механики *).

Дифференциальные уравнения небесной механики — это обыкновенные дифференциальные уравнения, удовлетворяющие теоремам существования и единственности решения. Математическим аспектом лапласовского детерминизма является тот факт, что решение таких дифференциальных уравнений однозначно определяется начальными условиями.

После Ньютона естествознание и, в частности, физика по мере своего развития все больше и больше в разных своих областях используют дифференциальные уравнения как средство математического описания явлений. При этом в целом ряде областей физики, например в теории электромагнитного поля, в теории тепла, в статистической физике и др., основную роль играют уже не обыкновенные дифференциальные уравне-

*) Лапласовский детерминизм представляет собой «идеальную форму причинной связи» (см. Бор [3]). Последующее развитие физики, и главным образом квантовой механики, внесло некоторые изменения в «идеальный» лапласовский детерминизм, оставив его, однако, нетронутым в своей основе.

ния, а дифференциальные уравнения в частных производных со своей спецификой. Однако и обыкновенные дифференциальные уравнения не только полностью сохраняют свое значение, но завоевывают новые области естествознания.

Говоря о дифференциальных уравнениях как о средстве математического описания законов явлений, необходимо подчеркнуть, что само написание, «составление» дифференциальных уравнений, относящихся к той или другой области естествознания, очевидно, выходит за рамки математики и принадлежит самой изучаемой области естествознания. При этом составление дифференциальных уравнений всегда связано с некоторой идеализацией действительности, так что соответствующие дифференциальные уравнения всегда являются математическим описанием некоторой упрощенной модели реальных явлений. Кроме того, даже в таких областях, в которых общие принципы составления дифференциальных уравнений для очень широкого класса задач известны, как, например, в механике, где существует рецептура составления дифференциальных уравнений движения (уравнения Лагранжа 1-го и 2-го рода), рассмотрение частных задач, как правило, всегда требует не формальных соображений. Эти соображения заведомо выходят за рамки математики.

Однако мы здесь ни в какой мере не собираемся касаться вопросов идеализации при изучении действительности. Нас интересуют лишь те *математические* вопросы и задачи, относящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые выдвигались естествознанием.

Остановимся прежде всего на тех вопросах, которые были выдвинуты развитием небесной механики.

Одна из классических задач небесной механики — задача о движении n материальных точек под действием ньютоновского тяготения, так называемая «задача n-тел», записывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где N, очевидно, зависит от числа материальных точек. Как уже было сказано, правые части этой системы удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решения при заданных начальных условиях.

В системе (1) независимое переменное — время — явно не входит в правые части. Системы такого вида называются «автономными системами» в противоположность неавтономным *) системам, в правые части которых независимое переменное входит явно, т. е. системам, которые должны записываться в виде

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_N, t). \tag{2}$$

---

*) Разделение систем на автономные и неавтономные в каком-то смысле условно. Действительно, добавляя в системе (2) еще одно зависимое переменное τ такое, что

$$\frac{d\tau}{dt} = 1,$$

мы можем систему (2) заменить эквивалентной автономной системой вида

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_N, \tau), \qquad \frac{d\tau}{dt} = 1.$$

Тем не менее с некоторых точек зрения деление дифференциальных уравнений на автономные и неавтономные является весьма целесообразным.

Система вида (1), а также иногда системы вида (2) часто носят название «динамических систем», которое отражает роль этих систем в механике и, в частности, в небесной механике.

Уравнения движения небесной механики, кроме своей автономности, обладают еще некоторыми специфическими свойствами. Они являются консервативными уравнениями, обладающими «интегралом энергии», т. е. могут быть записаны в так называемой канонической или гамильтоновой форме

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Итак, пусть мы имеем «уравнения движения» небесной механики. На основании теоремы о существовании и единственности решения известно, что задание начальных значений в некоторый данный момент времени однозначно определяет решение.

Это означает, что «знание состояния системы (3)», т. е. знание координат материальных точек и их скоростей в некоторый данный момент времени, позволяет определить состояние этой системы (координаты и скорости точек) в любой будущий и прошедший момент времени. Таким образом, вопрос сводится к тому, чтобы найти решение системы (3) или, другими словами, проинтегрировать ее.

В случае $n = 2$, т. е. в случае двух тел, соответствующие уравнения вида (3) элементарно интегрируются в квадратурах. Полученные аналитические выражения позволяют сделать исчерпывающие заключения о возможном характере движения, а также найти расположение тел в любой данный момент времени по заданным начальным условиям. Картина сразу же неизмеримо осложняется, когда мы переходим к $n = 3$ — «проблеме трех тел»— и тем более к $n > 3$. Как выразился французский математик Борель —«в небесной механике, как в счете дикарей, много — равняется трем».

В случае $n \geqslant 3$ сами слова «проинтегрировать систему» или найти ее решение без дополнительного уточнения не имеют смысла. Действительно, если под «интеграцией системы (3)» понимать нахождение аналитического выражения для решения, то естественным образом встает вопрос, каковы требования, которые можно предъявлять к характеру такого аналитического выражения. Уже в начале XIX столетия было установлено, что выразить решение системы (3) при $r \geqslant 3$ через интегралы от *элементарных* функций (т. е. решить систему (3) в квадратурах) возможно лишь в очень частных случаях. Кроме того, даже в случае, когда такое решение возможно, полученные выражения могут быть столь сложными, что непосредственный анализ их может быть чрезвычайно затруднительным и фактически может потребовать специальных методов.

Интеграцию системы (3) можно считать выполненной, если решение удается найти в виде равномерно и абсолютно сходящихся рядов. Однако оказалось, что такие ряды могут сходиться настолько медленно, что ими фактически нельзя пользоваться *).

---

*) Математику Зундману удалось в случае задачи трех тел найти решения в виде рядов, абсолютно и равномерно сходящихся для любого t. Однако впоследствии было показано, что этими рядами фактически нельзя пользоваться, так как они слишком медленно сходятся. Оказалось, что для получения нужной (например, при расчете обычных солнечных затмений) точности необходимо брать такое число членов, которое больше так называемого «числа электронов во вселенной по Эйнштейну».

Проблемой трех тел занимались многие замечательные математики XIX столетия. Еще в XVIII веке под влиянием настоятельных требований астрономии стали развиваться приближенные и численные методы нахождения решений. Правда, в основном эти методы дают возможность вычислять одно частное решение на заданном промежутке изменения независимой переменной (времени t), однако, в целом ряде вопросов такое приближенное вычисление тех или других частных решений системы достаточно для решения поставленной задачи. Приближенное и численное нахождение частных решений имеет смысл и значение не только в задачах небесной механики, где оно в настоящее время доведено до большой степени совершенства, но также и для многих задач физики и техники.

Существует много вопросов, в которых такое вычисление исчерпывающим образом решает задачу.

В настоящее время для численного нахождения решений существуют весьма мощные средства в виде современных вычислительных машин. «Интеграция» дифференциальных уравнений, в смысле численного нахождения решений, используется весьма широко в различных вопросах и может быть проведена с большой точностью.

Однако, несмотря на это, для решения многих вопросов, выдвигаемых естествознанием, приближенное вычисление частных решений на конечных промежутках значений независимого переменного оказалось принципиально недостаточным. Наличие современных мощных вычислительных средств ничего не изменило здесь по существу. Такие вопросы впервые, естественно, возникли в самой небесной механике. Это — вопросы, относящиеся к проблемам космогонии. Так, если ограничиться для определенности проблемой трех тел, то вопросами космогонического характера в этой проблеме являются, например, следующие вопросы, перечисленные Пуанкаре во введении к одному из своих классических мемуров [5]: «Будет ли одно из тел всегда оставаться в некотором участке неба или оно сможет удалиться в бесконечность? Будет ли расстояние между двумя из этих тел неограниченно убывать или, напротив, это расстояние будет всегда заключено в определенных границах», и многие другие вопросы такого характера. Очевидно, приближенное знание некоторого числа частных решений на конечном промежутке значений времени (независимого переменного t) не может дать никакого ответа на эти вопросы. Для ответа на них нужно знать решения в течение сколь угодно большого промежутка времени, т. е. нужно, если так можно выразиться, знать характер решения «в целом».

Исследование решений дифференциальных уравнений с этой точки зрения получило название «качественного исследования или качественного интегрирования», а теория, необходимая для качественного исследования,— качественной теории дифференциальных уравнений. Вопросами, относящимися к ведению качественной теории дифференциальных уравнений, являются, например, такие вопросы:

Существуют ли у рассматриваемой системы (1) интегральные кривые, являющиеся замкнутыми кривыми (или в другой принятой терминологии — существуют ли замкнутые траектории)?

Являются ли решения, соответствующие данному состоянию равновесия, «устойчивыми» или «неустойчивыми» (т. е. возвращается ли к этому состоянию равновесия точка после отклонения от него или нет)? Каковы области значений переменных, на которых точки на интегральных кривых при возрастании t стремятся к данному состоянию равновесия?

Впервые задача качественного исследования дифференциальных уравнений в нетривиальных своих аспектах с полной отчетливостью была поставлена Пуанкаре (в конце прошлого столетия).

Примерно в то же время Ляпунов поставил весьма важную частную задачу качественного исследования дифференциальных уравнений, задачу об устойчивости движения (решения), и эта задача была рассмотрена им для очень широкого класса случаев.

Пуанкаре поставил задачу качественного исследования в общем виде для простейшего случая системы двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y). \tag{I}$$

Основные факты качественной теории системы (I) изложены им в ставшей классической книге «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». Одновременно в другом своем трехтомном труде «Новые методы небесной механики» Пуанкаре рассмотрел ряд вопросов качественной теории в связи с проблемой трех тел. Исследование вопросов устойчивости движения, рассмотренных Ляпуновым, изложено в книге «Общая задача об устойчивости движения». Позднее исследования Пуанкаре, касающиеся системы вида (I), были дополнены Бендиксоном, а исследования Пуанкаре, относящиеся к уравнениям небесной механики, были уточнены Биркгофом, использовавшим в своих работах методы теории множеств.

Некоторые исследования Пуанкаре, получившие развитие в работах Биркгофа, легли в основу так называемой «метрической теории динамических систем», которую можно рассматривать как совсем особую часть качественной теории дифференциальных уравнений со своими специфическими аспектами и своими специфическими методами. Областью приложений, с которой теснейшим образом связаны метрическая теория динамических систем, является статистическая физика.

Не останавливаясь на более поздних публикациях по качественной теории дифференциальных уравнений, перейдем к вопросу о ее проникновении в другие области естествознания. До начала XX столетия областью естествознания, питавшей качественную теорию дифференциальных уравнений, была небесная механика. Однако к началу XX века положение существенно изменилось. Рассмотрение периодических процессов, периодических явлений в различных областях физики — в механике, оптике, акустике и др. к XX столетию оформилось под названием «теории колебаний». В конце столетия появилось первое развернутое изложение общего учения о колебаниях — знаменитая «Теория звука» Рэлея.

Развивающаяся техника также вынуждена была в той или другой степени использовать теорию колебаний. В инженерном деле и в машиностроении в связи с увеличением скоростей и размеров машин возникла настоятельная необходимость уметь избегать тех вредных, а иногда и просто разрушающих сооружение колебаний, которые возникают при некоторых критических скоростях или периодах (например, благодаря резонансу).

При этом до нашего столетия основным превалирующим математическим аппаратом, использовавшимся теорией колебаний, были линейные дифференциальные уравнения. Многие вопросы физики и техники связаны с такими линейными системами. Если говорить только об обыкновенных дифференциальных уравнениях, то основными уравнениями классической теории колебаний были линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и периодической правой частью. С помощью этого

аппарата классическая теория колебаний в основном хорошо справлялась с рядом задач, в частности, например, с вопросами о резонансе и о мерах его предотвращения. Аппарат линейных дифференциальных уравнений очень прост и, если так можно выразиться, весьма эффективен.

Картина резко меняется в начале XX столетия в связи с развитием радиофизики и радиотехники. Оказалось, что большая часть явлений в радиотехнике никак не может быть описана линейными дифференциальными уравнениями. Эти явления описываются существенно нелинейными дифференциальными уравнениями. При этом колебательные задачи, выдвинутые радиотехникой, в каком-то смысле противоположны задаче классической теории колебаний. Основная задача классической теории колебаний, возникающая в технике ранее,— это задача подавления вредных колебаний. Одной из основных задач радиотехники в настоящее время является задача генерации колебаний. Если для генерирования колебаний в радиотехнических устройствах пользуются не зависящим от времени источником энергии,— то это так называемые «автоколебания». Математически это отображается тем, что системы дифференциальных уравнений, описывающих радиотехнические устройства, автономны, т. е. имеют вид (I). В силу создавшейся в теории колебаний традиции в течение довольно долгого времени заведомо «нелинейные» явления пытались втиснуть в линейный математический аппарат. Это не только не позволило сколько-нибудь правильно описать явления, часто имеющие место в радиотехнике, но и просто приводило к прямым ошибкам.

Вопрос о математическом аппарате, адекватном явлениям в радиотехнике, очень остро поставленный Л. И. Мандельштамом в 20-х годах настоящего столетия, был разрешен А. А. Андроновым.

Оказалось, что таким аппаратом является математический аппарат, содержащийся в работах Пуанкаре и Ляпунова, который как мы говорили выше, начал разрабатываться ими для нужд небесной механики. Это — аппарат качественной теории дифференциальных уравнений. Правда, системы дифференциальных уравнений, описывающих явления радиотехники, не являются гамильтоновыми, как в небесной механике. Но в своей книге «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», в которой Пуанкаре закладывает основы качественной теории дифференциальных уравнений, он не предполагает систему непременно гамильтоновой.

Некоторым основным вопросам, интересующим радиотехнику, соответствуют в математической постановке вопросы качественной теории дифференциальных уравнений, например, вопросу о наличии или отсутствии колебаний при тех или других значениях параметров соответствует вопрос о наличии или отсутствии у соответствующей системы дифференциальных уравнений изолированной замкнутой кривой, так называемого предельного цикла. При этом вопросы приближенного вычисления частных решений на заданном конечном промежутке времени, играющие первостепенную роль в астрономии, в дифференциальных уравнениях, возникающих при рассмотрении радиотехнических устройств, играют, пожалуй, значительно меньшую роль или во всяком случае гораздо сильнее подчинены качественному рассмотрению соответствующих дифференциальных уравнений.

Мы говорили сейчас о сравнительно узкой области — о радиотехнике, для которой математический аппарат качественной теории дифференциальных уравнений оказался адекватным математическим аппаратом. Однако уже при рассмотрении задач радиотехники было совершенно очевидно,

нто математические вопросы, возникающие в связи с этими задачами, имеют гораздо более широкое значение. Существуют многие вопросы в различных областях естествознания и техники, которые приводят к совершенно аналогичному математическому рассмотрению, т. е. к использованию качественной теории дифференциальных уравнений. Не говоря уже о механических и акустических задачах, в качестве таких задач можно указать, например, вопрос о переменных звездах, так называемых цефеидах, вопрос о некоторых периодических химических реакциях, вопрос о фотосинтезе в биологии и многие, многие другие. Теория автоматического регулирования является еще одной большой областью применения качественной теории дифференциальных уравнений (правда, в несколько специфической форме).

Таким образом, качественная теория дифференциальных уравнений оказалась адекватным математическим аппаратом для описания явлений в целом ряде областей, как таких, которые могут быть отнесены к теории колебаний, так и выходящих за рамки теории колебаний (например, небесной механики).

Явления, имеющие одинаковое описание, с точки зрения «качественной теории дифференциальных уравнений», протекают в известном смысле аналогично: в таких явлениях независимо от их физической природы существует «изоморфизм закономерностей». При этом для такого изоморфизма закономерностей нет необходимости, чтобы явления описывались совпадающими дифференциальными уравнениями. Достаточно, чтобы эти уравнения имели одинаковую «качественную структуру» разбиения на траектории.

В том круге идей, который в настоящее время носит название «кибернетики», вопрос об общности, изоморфизме закономерностей в различных областях естествознания и техники поставлен очень широко. В обширном арсенале математических средств, которым располагает кибернетика, дифференциальные уравнения и, в частности, аппарат качественной теории дифференциальных уравнений составляют лишь небольшую часть. Тем не менее этот аппарат и сейчас сохраняет весь свой смысл и актуальность и несомненно будет завоевывать новые и новые области.

Настоящая книга посвящена качественной теории динамических систем второго порядка, т. е. систем двух автономных дифференциальных уравнений (1), рассматриваемых на плоскости (x, y).

Случай динамических систем второго порядка естественно представляется первым и наиболее простым и его изучение необходимо как само по себе, так и для перехода к более сложным случаям систем трех, четырех и т. д. автономных дифференциальных уравнений. Кроме того, системы вида (1) сохраняют самостоятельный интерес для приложений, так как многие явления и задачи в различных областях физики и техники могут быть при разумной идеализации описаны системами такого вида.

Для систем трех и большего числа автономных дифференциальных уравнений картина делается неизмеримо более сложной. Качественная теория таких динамических систем до настоящего времени располагает еще довольно скудным запасом сведений, хотя и развивается интенсивно в течение последнего десятилетия.

Задача качественного исследования может быть естественным образом поставлена не только для автономных динамических систем, о которых мы в основном говорили до сих пор, но также и для широких классов неавтономных динамических систем. Хотя в случае неавтономных систем эта задача имеет свою специфику, но она органически связана по своему

содержанию и методам (методу точечных отображений) с задачей качественного исследования автономных динамических систем и, в частности, с качественной теорией динамических систем второго порядка.

Даже в простейшем случае системы двух неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими относительно t правыми частями

$$\dot{x} = F(x,\ y,\ t), \qquad \dot{y} = \Phi(x,\ y,\ t),$$

где $F(x,\ y,\ t+\tau) \equiv F(x,\ y,\ t)$,

$$\varphi(x,\ y,\ t+\tau) \equiv \varphi(x,\ y,\ t) \qquad (\tau\text{ — период}),$$

возникают трудности того же характера, что и при рассмотрении автономных динамических систем порядка $n = 3$.

Наконец, постановка вопроса о качественном исследовании распределенных систем, т. е. в случае систем уравнений в частных производных, естественным образом возникает при рассмотрении многочисленных задач из различных областей физики. Качественная теория распределенных систем в настоящее время еще только начинается. Нет сомнений, что ей также предстоит интенсивное развитие. Такая теория, несомненно, должна существенным образом опираться на качественную теорию обыкновенных уравнений и, в частности, на качественную теорию динамических систем второго порядка.

ГЛАВА I

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ И НА СФЕРЕ

§ 1. Динамические системы в плоской области

1. Введение. Мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,\ y), \tag{I}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции, определенные в некоторой области G евклидовой плоскости (x, y — декартовы координаты) и имеющие в этой области непрерывные частные производные до порядка не ниже первого. Область может быть как ограниченной, так и неограниченной. В частности, область G может совпадать со всей плоскостью (x, y).

Системы вида (I) являются частным случаем систем двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями: независимое переменное t в их правые части явно не входит. Системы дифференциальных уравнений, правые части которых не содержат явно независимое переменное, называются *автономными*. Автономные системы дифференциальных уравнений называются также *динамическими системами*.

Систему (I) мы будем называть *динамической системой на плоскости или в плоской области*. Мы будем также говорить, что *динамическая система задана или определена в области* G. В дальнейшем мы будем опускать слова «на плоскости» и «в плоской области».

Динамическая система (I), заданная в области G, называется *системой класса* C_n, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются функциями класса C_n, т. е. имеют в области G непрерывные частные производные до порядка n включительно.

Динамическая система (I) называется системой аналитического класса или *аналитической* системой, если функции P и Q являются аналитическими функциями в области G.

Очевидно, всякая система класса C_k ($k > 1$) является одновременно системой класса C_{k_1}, где $k_1 < k$, в частности, системой класса C_1. Аналитическая система является системой класса C_k для любого натурального k.

Все рассматриваемые в этой книге динамические системы являются системами класса C_1. Поэтому всюду в дальнейшем под *динамической системой* мы будем во всяком случае всегда подразумевать систему класса C_1, не оговаривая этого явно.

В настоящем параграфе излагаются простейшие свойства динамических систем в плоской области. Свойства эти характерны для автономных систем дифференциальных уравнений.

Неавтономные системы (т. е. системы, в правые части которых t входит явно), вообще говоря, ими не обладают *).

2. Геометрическая интерпретация динамической системы (I) в пространстве R^3. Рассмотрим обычную для системы двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями геометрическую интерпретацию, т. е. геометрическую интерпретацию в трехмерном пространстве с декартовыми координатами x, y, t.

Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ нужно при этом рассматривать как функции трех переменных x, y и t. Но так как эти функции от t не зависят, то в трехмерном пространстве R^3 областью определения правых частей системы (I) является бесконечная цилиндрическая область H, образованная всеми прямыми, параллельными оси t, пересекающими плоскость (x, y) в точках области G **).

Решения

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

системы (I) интерпретируются как кривые, расположенные в области H. Эти кривые называются *интегральными кривыми* системы (I) (см. дополнение, § 8). Мы будем здесь и всюду в дальнейшем под решением системы дифференциальных уравнений подразумевать решение, продолженное на *максимальный возможный интервал значений* t (см. дополнение, § 8).

Так как функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ во всяком случае являются функциями класса C_1, то для системы (I) во всех точках области H выполняются условия теоремы существования и единственности (см. дополнение, § 8), а следовательно и сама эта теорема. Мы сформулируем ее для системы (I) следующим образом:

Теорема 1. *Для любой точки* $M_0(x_0, y_0) \in G$ *и для любого* t_0, $-\infty < t_0 < +\infty$, *существует одно и только одно решение*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

системы (I), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$x_0 = \varphi(t_0), \qquad y_0 = \psi(t_0),$$

определенное для всех значений t *в некотором определенном интервале* (τ, T), *содержащем* t_0. (*В частности, решение может быть определено при всех значениях* t, *т. е.* t *может быть равно* $-\infty$, *а* T *может быть равно* $+\infty$).

Геометрически теорема 1 означает, что через каждую точку области H проходит интегральная кривая системы (I) и при этом только одна.

Для системы вида (I) справедлива также следующая теорема, которая существенно используется в дальнейшем:

Теорема 2. *Пусть* $\overline{G_1}$ — *замкнутая ограниченная область, содержащаяся в области* G $(\overline{G_1} \subset G)$,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{1}$$

— *решение системы* (I), *определенное в интервале* (τ, T) *и такое, что при всех* t *на интервале* (τ, T) *точка* $N(\varphi(t), \psi(t))$ *все время остается*

*) Изложенные в настоящем параграфе свойства рассматриваемых систем с очевидными изменениями справедливы для динамических систем любого порядка, т. е. для динамических систем вида (1), рассмотренных во введении, при любом n.

**) Когда область G совпадает со всей плоскостью (x, y), то H совпадает со всем пространством R^3.

в области $\overline{G}_1$. *Тогда* $\tau = -\infty$, $T = +\infty$, *т. е. решение* (1) *определено для всех значений* t.

Доказательство. Предположим, что решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определено при значении $t = t_0$.

Пусть τ_1 и τ_2 — два произвольных числа, причем $\tau_1 < t_0$, $\tau_2 > t_0$. Обозначим через $\overline{H}_1$ конечную цилиндрическую область пространства R^3, состоящую из всех точек $M(t, x, y)$ таких, что $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, а x, y таковы, что точка $(x, y) \in \overline{G}_1$ (рис. 1). Интегральная кривая, соответствующая решению (1), проходит через точку $M_0(t_0, \varphi(t_0), \psi(t_0))$, принадлежащую области H_1. Но тогда, в силу теоремы (A′) дополнения (о продолжаемости решения до границы области определения, см. § 8), эта интегральная кривая выходит из области $\overline{H}_1$, как при значении, большем t_0, так и при значении, меньшем t_0. Однако выйти из цилиндрической области $\overline{H}_1$ через боковую поверхность этой области интегральная кривая не может, так как в этом случае, очевидно, нашлась бы точка $N(\varphi(t), \psi(t))$, лежащая вне замкнутой области $\overline{G}_1$, что противоречит условию теоремы.

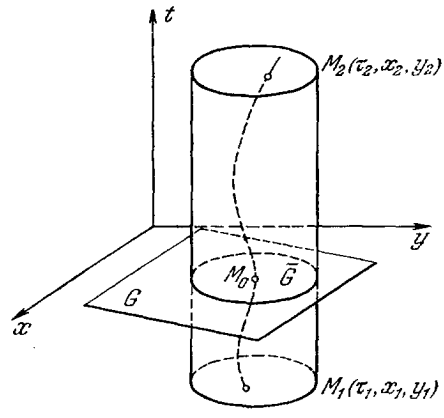


Рис. 1.

Следовательно, рассматриваемая интегральная кривая выходит из $\overline{H}_1$ через нижнее и верхнее основания (рис. 1). Но это значит, что решение (1) определено при $t = \tau_1$ и $t = \tau_2$. Так как τ_1 и τ_2 произвольны, то решение (1) определено при всех значениях t. Теорема доказана.

3. Простейшие свойства решений системы (I). Мы установим некоторые свойства решений системы (I), являющиеся следствием автономности этой системы.

Лемма 1. *Если*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

есть решение системы (I), *определенное на интервале* (τ, T), *то*

$$x = \varphi(t + C), \qquad y = \psi(t + C), \tag{2}$$

где C *— любая постоянная, также есть решение системы* (I) *и это решение определено на интервале* $(\tau - C, T - C)$.

Доказательство. Так как (1) есть решение системы (I), то при всех $t \in (\tau, T)$ имеет место тождественное равенство

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = P(\varphi(t), \psi(t)), \qquad \frac{d\psi(t)}{dt} = Q(\varphi(t), \psi(t)).$$

Если заменить в этих равенствах t на $t + C$, то при всех $t \in (\tau - C, T - C)$ мы будем иметь тождественное равенство

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t + C)}{d(t + C)} &= P(\varphi(t + C), \psi(t + C)), \\ \frac{d\varphi(t + C)}{d(t + C)} &= Q(\varphi(t + C), \psi(t + C)). \end{aligned} \tag{3}$$

Но, очевидно,

$$\frac{d\varphi(t+C)}{d(t+C)} \equiv \frac{d\varphi(t+C)}{dt}, \qquad \frac{d\psi(t+C)}{d(t+C)} \equiv \frac{d\psi(t+C)}{dt},$$

и, следовательно, равенства (3) могут быть записаны в виде

$$\frac{d\varphi(t+C)}{dt} = P(\varphi(t+C), \quad \psi(t+C)), \qquad \frac{d\psi(t+C)}{dt} = Q(\varphi(t+C), \quad \psi(t+C)).$$

Последние равенства показывают, что функции (2) являются решением системы (I). Тот факт, что это решение определено на интервале $(\tau - C, T - C)$, устанавливается простым рассуждением, которое мы опускаем. Лемма доказана.

С точки зрения геометрической интерпретации в трехмерном пространстве утверждение леммы 1 означает, что линия, получающаяся из любой интегральной кривой путем сдвига ее вдоль оси t на любой отрезок, также есть интегральная кривая.

В самом деле, интегральная кривая

$$x = \varphi(t+C), \qquad y = \psi(t+C)$$

получается из интегральной кривой

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

сдвигом вдоль оси t на величину C *).

Лемма 2. а) *Решения системы* (I)

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{1}$$

и

$$x = \varphi(t+C), \qquad y = \psi(t+C) \tag{2}$$

можно рассматривать как решения, удовлетворяющие начальным условиям с одинаковыми начальными значениями x_0 и y_0 и различными начальными значениями переменного t.

б) *Два решения, удовлетворяющие начальным условиям с одинаковыми начальными значениями переменных x_0, y_0 и различными начальными значениями t, могут быть получены одно из другого заменой t на $t + C$ с надлежащим выбором постоянной C.*

Доказательство. Если решение (1) соответствует начальным значениям t_0, x_0, y_0 так, что

$$\varphi(t_0) = x_0, \qquad \psi(t_0) = y_0, \tag{3}$$

то в силу очевидных равенств

$$\varphi(t_0 - C + C) = \varphi(t_0) = x_0, \qquad \psi(t_0 - C + C) = \psi(t_0) = y_0$$

---

*) Отметим здесь еще следующий элементарный факт: в силу того, что уравнение интегральной кривой имеет вид

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где φ и ψ — однозначные функции, всякому t, при котором решение определено, соответствует единственная точка интегральной кривой, и ни в одной точке интегральной кривой касательная не может быть параллельна плоскости (x, y). Действительно, направляющие косинусы касательной к интегральной кривой пропорциональны $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ и 1, т. е. угол между касательной и осью t не может быть равен π. В частности, отсюда следует, что у интегральной кривой не может быть максимумов или минимумов.

решение (2) соответствует начальным значениям $t_0 - C$, x_0, y_0, что и доказывает утверждение а).

Далее, рассмотрим наряду с решением (1), соответствующим начальным значениям t_0, x_0, y_0, решение

$$x = \varphi^*(t), \qquad y = \psi^*(t), \tag{4}$$

соответствующее начальным значениям t_0^*, x_0, y_0, где $t_0^* \neq t_0$. Если в решении (2)

$$x = \varphi(t + C), \qquad y = \psi(t + C)$$

величину C взять равной $t_0 - t_0^*$, то оно, очевидно, будет соответствовать тем же начальным значениям t_0^*, x_0, y_0, что и решение (4). В силу единственности решения, удовлетворяющего данным начальным условиям, отсюда следует

$$\varphi^*(t) \equiv \varphi(t + t_0 - t_0^*), \qquad \psi^*(t) \equiv \psi(t + t_0 - t_0^*),$$

что и доказывает утверждение б) леммы.

В дальнейшем, рассматривая наряду с решением (1) решение (2), мы будем часто говорить, что рассматриваются *решения, отличающиеся выбором начального значения* t.

Решение всякой системы двух дифференциальных уравнений, соответствующее любым произвольным начальным значениям t_0, x_0, y_0, очевидно, является функцией t, t_0, x_0, y_0 (см. дополнение, § 8), т. е. записывается в виде

$$x = \Phi(t, t_0, x_0, y_0), \qquad y = \Psi(t, t_0, x_0, y_0). \tag{5}$$

При этом по самому смыслу функций $\Phi(t, t_0, x_0, y_0)$ и $\Psi(t, t_0, x_0, y_0)$ $\Phi(t_0, t_0, x_0, y_0) \equiv x_0$, $\Psi(t_0, t_0, x_0, y_0) \equiv y_0$. Однако в случае системы (1), вследствие автономности этой системы, функции (5) являются по существу не функциями переменных t и t_0, а функциями разности $t - t_0$. Это устанавливается в следующей лемме:

Лемма 3. *Решение системы* (1) *как функции от* t *и от начальных значений* t_0, x_0, y_0 *может быть записано в виде*

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0). \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим наряду с решением (5) решение

$$x = \Phi(t, 0, x_0, y_0), \qquad y = \Psi(t, 0, x_0, y_0),$$

удовлетворяющие начальным условиям: при $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$.

В силу леммы 1 функции

$$x = \Phi(t - t_0, 0, x_0, y_0), \qquad y = \Psi(t - t_0, 0, x_0, y_0) \tag{7}$$

также являются решением системы (1). Решения (5) и (7) соответствуют одним и тем же начальным значениям t_0, x_0, y_0. Но тогда эти решения совпадают, т. е.

$$\Phi(t, t_0, x_0, y_0) \equiv \Phi(t - t_0, 0, x_0, y_0),$$
$$\Psi(t, t_0, x_0, y_0) \equiv \Psi(t - t_0, 0, x_0, y_0).$$

Введение обозначений

$$\Phi(t - t_0, 0, x_0, y_0) = \varphi(t - t_0, x_0, y_0),$$
$$\Psi(t - t_0, 0, x_0, y_0) = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$$

устанавливает справедливость утверждения леммы.

В дальнейшем решение системы (I), соответствующее начальным значениям t_0, x_0, y_0, мы всегда будем записывать в виде (6).

Лемма 4. *Если решение*

$$x=\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0),\qquad y=\psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0) \tag{8}$$

определено при значении $t=t_1$ *и*

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t_1-t_0,\ x_0,\ y_0)&=x_1,\\ \psi(t_1-t_0,\ x_0,\ y_0)&=y_1,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

то

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)&\equiv\varphi(t-t_1,\ x_1,\ y_1),\\ \psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)&\equiv\psi(t-t_1,\ x_1,\ y_1).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Доказательство. Из соотношений (9), очевидно, следует, что решение (8) и решение

$$x=\varphi(t-t_1,\ x_1,\ y_1),\qquad y=\psi(t-t_1,\ x_1,\ y_1)$$

являются решениями, соответствующими одним и тем же начальным значениям t_1, x_1, y_1. Но тогда эти решения совпадают, т. е. имеют место равенства (10).

Замечание. Полагая в тождествах (10) $t=t_0$, мы получим

$$x_0=\varphi(t_0-t_1,\ x_1,\ y_1),\qquad y_0=\psi(t_0-t_1,\ x_1,\ y_1).$$

Это, очевидно, справедливо при любых t_1, x_1, y_1, удовлетворяющих соотношениям (10). Опуская индексы, мы получаем

$$x_0=\varphi(t_0-t,\ x,\ y),\qquad y_0=\psi(t_0-t,\ x,\ y).$$

Лемма 5. *Если система* (I) *является системой класса* C_n, *то функции* $x=\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)$, $y=\psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)$ *при всех значениях, входящих в них переменных, при которых эти функции определены, имеют непрерывные (по совокупности всех переменных) частные производные*:

1) *по* t (*или* t_0) *до порядка* $n+1$ *включительно*,

2) *по* x_0 *и* y_0 *до порядка* n *включительно*

$$\left(\frac{\partial^k\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)}{\partial x_0^i\,\partial y_0^{k-i}},\ \frac{\partial^k\psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)}{\partial x_0^i\,\partial y_0^{k-i}}\qquad \begin{matrix}i=0,\ 1,\ \ldots,\ k\\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\end{matrix}\right),$$

3) *по* t (*или* t_0) *и по* x_0 *и* y_0 *— содержащие по крайней мере одно дифференцирование по* t (*или* t_0) *— до порядка* $n+1$

$$\left(\frac{\partial^{k+l}\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)}{\partial t^l,\ \partial x_0^i\,\partial y_0^{k-i}},\ \frac{\partial^{k+l}\psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0)}{\partial t^l\,\partial x_0^i\,\partial y_0^{k-i}}\qquad \begin{matrix}i=0,\ \ldots,\ k\\ k+l=1,\ 2,\ \ldots,\ n\\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1\end{matrix}\right).$$

Справедливость этой леммы непосредственно вытекает из теоремы B′ и B″ дополнения, § 8.

4. Геометрическая интерпретация динамической системы на фазовой плоскости (x, y). Геометрическая интерпретация системы (I) в трехмерном пространстве (x, y, t) в настоящей книге является вспомогательной. Основная геометрическая интерпретация автономной системы (I)

связана с рассмотрением плоскости (x, y). Эта плоскость называется *фазовой плоскостью системы* (I).

Будем в каждой точке $M(x, y)$ области G плоскости (x, y) рассматривать вектор v с компонентами $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Динамическая система (I) определяет, таким образом, в области G *векторное поле* *).

В силу того, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ по предположению имеют непрерывные частные производные, векторное поле, определяемое системой (I), является так называемым *непрерывно дифференцируемым векторным полем*.

Пусть в точке $M(x, y)$ хотя бы одна из величин $P(x, y)$, $Q(x, y)$ не обращается в нуль. Тогда длина вектора в этой точке

$$r = \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$$

отлична от нуля, а синус и косинус угла $\varphi(x, y)$ между положительным направлением оси x и направлением вектора даются выражениями

$$\sin\theta = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

(см. дополнение, § 5).

В тех точках, в которых одновременно

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0,$$

длина вектора обращается в нуль, а направление вектора становится неопределенным. Такие точки называются *особыми точками векторного поля* (или особыми точками системы (I)); точки, в которых хотя бы одна из величин $P(x, y)$, $Q(x, y)$ не равна нулю,— *обыкновенными или неособыми* точками этого векторного поля. Во всякой неособой точке M векторного поля угол $\theta(x, y)$ непрерывен. В особой точке угол $\theta(x, y)$ неопределен и при стремлении x и y к координатам особой точки $\lim \theta(x, y)$ может не существовать.

Пусть

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{11}$$

— какое-нибудь решение системы (I). Множество точек $M(\varphi(t), \psi(t))$, где t принимает все значения, при которых определено решение (11), называется *траекторией*, соответствующей данному решению, а также траекторией векторного поля, заданного динамической системой (I), или просто траекторией данной динамической системы (а также иногда фазовой траекторией).

Уравнения (11), очевидно, являются параметрическими уравнениями траектории. Обратно, если дана какая-нибудь траектория, то решение, которому она соответствует, мы будем называть *решением, соответствующим данной траектории*.

---

*) В математической литературе весьма употребительно векторное обозначение для системы дифференциальных уравнений. Система (I) в этом обозначении запишется в виде векторного уравнения

$$\dot{x} = F(x).$$

Векторное обозначение чрезвычайно удобно при рассмотрении систем, состоящих из большого числа уравнений. Однако в рассмотренном нами случае системы только двух дифференциальных уравнений в этом обозначении нет особой необходимости, и мы не будем пользоваться им для того, чтобы не загромождать изложение различными символиками. Мы используем векторное обозначение при рассмотрении динамических систем на сфере.

Если точка $M(x, y)$ траектории не является особой точкой векторного поля, то вектор $(P(x, y), Q(x, y))$ является касательным вектором к траектории (рис. 2). Действительно, в силу того, что $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ есть решение системы (I), имеют место тождества:

$$\dot{\varphi}(t) \equiv P(\varphi, \psi), \qquad \dot{\psi}(t) \equiv Q(\varphi, \psi). \tag{12}$$

Но вектор с компонентами $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$, очевидно, является касательным вектором к траектории, и в силу равенств (12) он совпадает с вектором поля, заданного системой (I).

Рассматривая параметр t как «время», можно дать следующую *«кинематическую»* интерпретацию системы (I): решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ можно рассматривать как закон движения точки по траектории на фазовой плоскости. В каждой точке фазовой плоскости вектор, заданный системой (I), т. е. вектор $P(x, y)$, $Q(x, y)$, очевидно, равен *скорости движущейся точки* или *«фазовой скорости»*. Решениям с одними и теми же начальными значениями x_0 и y_0 и различными начальными значениями t_0 соответствуют движения, начинающиеся в одной и той же точке, но в различные начальные моменты «времени» (t_0 и t^*). Точка с координатами $(\varphi(t), \psi(t))$ называется также «изображающей» или «представляющей» точкой.

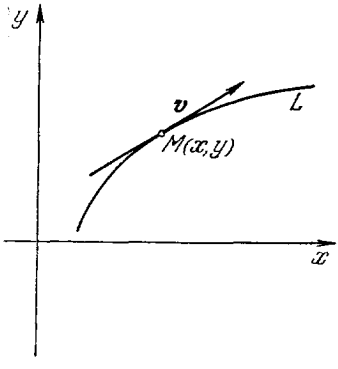


Рис. 2.

Пусть $M(a, b)$ — особая точка системы (I), так что

$$P(a, b) = Q(a, b) = 0. \tag{13}$$

Тогда, очевидно, $x = a$, $y = b$ есть решение системы (I), и, следовательно, *особая точка векторного поля сама является отдельной траекторией.* Такая траектория называется *состоянием равновесия* *). Очевидно, также обратно, если у системы (I) есть решение

$$x = a, \qquad y = b \tag{14}$$

(a и b — некоторые постоянные), то точка a, b непременно является состоянием равновесия (особой точкой векторного поля), т. е. для нее выполняются равенства (13). Решение (14), очевидно, вследствие того, что t в него не входит, определено для всех t.

В дальнейшем для точек x, y области G, для которых $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, в основном будет использоваться термин «состояние равновесия» (а не особая точка).

Состояние равновесия $M(a, b)$ системы (I) называется *изолированным*, если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в ε_0-окрестности кроме M не лежит уже более ни одного состояния равновесия.

5. Разбиение области G фазовой плоскости на траектории. Некоторые элементарные сведения о траекториях.

Лемма 6. *Всяким двум решениям, отличающимся только выбором начального значения t_0, соответствует одна и та же траектория.*

*) В другой терминологии — «положением равновесия» или «точкой покоя».

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 всякие два решения, отличающиеся выбором начальных значений t_0 (но имеющие одни и те же начальные значения x_0, y_0), могут быть получены одно из другого заменой t на $t + C$. Но если даны два решения

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{15}$$

и

$$x = \varphi(t + C), \qquad y = \psi(t + C), \tag{16}$$

причем решение (15) определено на интервале (τ, T), а решение (16) — на интервале $(\tau - C, T - C)$, то, очевидно, им соответствует одна и та же траектория (так как замена в (15) t через $t + C$ является просто заменой обозначений переменного). Лемма доказана.

Теорема 3. *Через каждую точку области G проходит одна и только одна траектория динамической системы* (1).

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка области G. Тогда в силу теоремы 1 (о существовании и единственности решения) при всяком t существует решение, соответствующее начальным значениям t_0, x_0, y_0:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Это, очевидно, и означает, что через точку x_0, y_0 проходит хотя бы одна траектория L.

Предположим теперь, что через одну и ту же точку $M_0(x_0, y_0)$ области G проходят две различные траектории L и L^*.

Пусть

$$x = \varphi^*(t), \quad y = \psi^*(t)$$

— решение, соответствующее траектории L^*. Это решение, очевидно, непременно должно быть таким, чтобы при некотором значении $t = t^*$ мы имели бы

$$x = \varphi^*(t^*) = x_0, \qquad y = \psi^*(t^*) = y_0,$$

но тогда в силу леммы 2 при надлежащем выборе C мы должны иметь

$$\varphi^*(t) = \varphi(t + C), \qquad \psi^*(t) = \psi(t + C),$$

и, следовательно (см. лемму 6), траектории L и L^* вопреки предположению не могут быть различны. Теорема доказана.

Замечание 1. Из проведенного в теореме рассуждения непосредственно вытекает, что всякие два различных решения, соответствующих одной и той же траектории, получаются друг из друга заменой t на $t + C$, т. е. отличаются друг от друга только выбором начального значения t_0 (см. лемму 2).

Замечание 2. Пусть при каком-либо выборе решения, соответствующего траектории L, точке M_0 этой траектории соответствует значение t_0, а точке M_1 — значение $t_0 + \tau$. Тогда из замечания 1 следует, что если при некотором другом выборе решения, соответствующего траектории L, точке M_0 соответствует значение t^*, то значению $t^* + \tau$ соответствует точка M_1.

Замечание 3. Если траектория целиком лежит в ограниченной замкнутой области $\overline{G_1} \subset G$, то в силу теоремы 2 соответствующее ей решение определено при всех значениях t $(-\infty < t < +\infty)$.

В силу теоремы 3 динамическая система, заданная в области G, определяет некоторое семейство траекторий или, как мы будем говорить, некоторое *разбиение области G на траектории*.

Качественная теория динамических систем, основы которой излагаются в настоящей книге, занимается изучением такого разбиения на траектории. Существенной частью этого изучения является установление возможного характера отдельной траектории. Мы укажем здесь некоторые основные свойства траекторий. Выше мы уже останавливались на одном частном типе траекторий, именно, на состояниях равновесия. Как мы видели,

$$x = a, \qquad y = b$$

тогда и только тогда является состоянием равновесия, когда выполняются условия

$$P(a, b) = Q(a, b) = 0.$$

Предположим теперь, что траектория L, соответствующая решению

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

не является состоянием равновесия. Во всех точках такой траектории, очевидно, выполняется неравенство

$$[\dot{\varphi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2 \equiv [P(\varphi, \psi)]^2 + [Q(\varphi, \psi)]^2 \neq 0.$$

Действительно, если бы в какой-нибудь точке $M^*(x^*, y^*)$ траектории L, соответствующей значению t^*, имело место равенство

$$\dot{\varphi}^2(t^*) + \dot{\psi}^2(t^*) = [P(\varphi(t^*), \psi(t^*))]^2 + [Q(\varphi(t^*), \psi(t^*))]^2 = 0,$$

т. е. одновременно

$$\dot{\varphi}(t^*) = P(\varphi(t^*), \psi(t^*)) = 0, \qquad \dot{\psi}(t^*) = Q(\varphi(t^*), \psi(t^*)) = 0,$$

и это, очевидно, означало бы, что точка x^*, y^* является состоянием равновесия. Но состояние равновесия само является отдельной траекторией, и в силу теоремы 3 точка $M^*(x^*, y^*)$ не может принадлежать отличной от состояния равновесия траектории L.

Рассмотрим вопрос о том, могут ли быть у траектории, отличной от состояния равновесия, «самопересечения», т. е. возможно ли, чтобы существовали значения t_1 и t_2, $t_1 \neq t_2$ такие, чтобы соответствующие им точки траектории совпадали.

Ответ на этот вопрос дается следующей леммой:

Лемма 7. *Пусть траектория L, соответствующая решению*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (\tau < t < T), \tag{17}$$

отлична от состояния равновесия, и пусть существуют значения t, t_1 и t_2 $(\tau < t_1 < t_2 < T)$ такие, что

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \qquad \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Тогда решение (17) определено при всех значениях t (т. е. $\tau = -\infty$, $T = +\infty$), функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются периодическими функциями t, а соответствующая траектория — простой гладкой замкнутой кривой.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x_0, \qquad \psi(t_1) = \psi(t_2) = y_0. \tag{18}$$

Рассмотрим наряду с решением (17) решение

$$x = \varphi(t + t_2 - t_1), \qquad y = \psi(t + t_2 - t_1), \tag{19}$$

определенное на интервале $(\tau - C, T - C)$, где $C = t_2 - t_1$ (см. лемму 1).

Из равенств (18) следует, что решения (17) и (19) удовлетворяют одним и тем же начальным условиям (при $t = t_1$, $x = x_0$, $y = y_0$). Но тогда эти решения совпадают, а следовательно, совпадают интервалы значений t, на которых они определены. Но интервалы (τ, T) и $(\tau - C, T - C)$ при $C \neq 0$ могут совпадать лишь в том случае, когда $\tau = -\infty$, $T = +\infty$. Таким образом, мы показали, что решения (17) и (19) определены для всех t $(-\infty < t < +\infty)$.

Далее, из совпадения решений (17) и (19) следует, что при всех t $(-\infty < t < +\infty)$

$$\varphi(t + C) \equiv \varphi(t), \qquad \psi(t + C) \equiv \psi(t), \tag{20}$$

где $C = t_2 - t_1 > 0$. Это, очевидно, означает, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — периодические функции с общим периодом $0 = t_2 - t_1$.

Пусть

$$\theta_0 \; (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant t_2 - t_1) \tag{21}$$

— наименьшее положительное число, при котором имеют место равенства

$$\varphi(t + \theta_0) = \varphi(t), \quad \psi(t + \theta_0) = \psi(t). \tag{22}$$

Такое число непременно существует. Действительно, в противном случае можно было бы указать последовательность положительных чисел $\{\theta_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\theta_n\} \to 0$ и

$$\varphi(t + \theta_n) \equiv \varphi(t), \qquad \psi(t + \theta_n) \equiv \psi(t).$$

Очевидно, тогда при любом n и любом целом $|k|$

$$\varphi(t + k\theta_n) \equiv \varphi(t), \qquad \psi(t + k\theta_n) \equiv \psi(t)$$

или, зафиксировав какое-нибудь t_0, можно написать

$$\varphi(t_0 + k\theta_n) = \varphi(t_0), \qquad \psi(t_0 + k\theta_n) = \psi(t_0).$$

Таким образом, каждая из функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ принимает одно и то же значение, равное соответственно $\varphi(t_0)$ и $\psi(t_0)$ при всех следующих значениях t:

$$\ldots t_0 - N\theta_n, \ldots, t_0 - \theta_n, t_0, t_0 + \theta_n, \ldots, t_0 + N\theta_n, \ldots,$$

где N может быть любым целым числом, а θ_n сколь угодно мало при достаточно большом n. Следовательно, какое бы значение t^* мы ни взяли, либо $t^* = t \pm k\theta_n$, и тогда $\varphi(t^*) = \varphi(t_0)$, $\psi(t^*) = \psi(t_0)$, либо t^* попадает в некоторый интервал $(t_0 + (k-1)\theta_n, t_0 + k\theta_n)$ или $(t_0 - (k-1)\theta_n, t_0 - k\theta_n)$ и в силу того, что θ_n сколь угодно мало при достаточно большом n, существуют сколь угодно близкие к t^* значения t', при которых

$$\varphi(t') = \varphi(t_0), \qquad \psi(t') = \psi(t_0).$$

Но тогда в силу непрерывности функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ мы, очевидно, также имеем

$$\varphi(t^*) = \varphi(t_0), \qquad \psi(t^*) = \psi(t_0).$$

Это означает, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — постоянные, т. е. траектория L — состояние равновесия, что противоречит условию теоремы.

Очевидно, все точки траектории L могут быть получены при изменении t в уравнениях (17) от t_0 до $t_0 + \theta_0$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta_0$), где t_0 — любое фиксированное число. Так как по самому определению θ_0 есть наименьшее число, при котором выполняются равенства (22), то всяким двум значениям t' и t'', $t_0 \leqslant t' < t'' \leqslant t_0 + \theta_0$, заведомо соответствуют различные точки траектории L. Это и означает (ср. дополнение, § 5), что траектория L является простой замкнутой кривой. В силу леммы 5 эта замкнутая кривая, очевидно, гладкая. Таким образом, лемма доказана.

Решение, в котором функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — периодические функции t, называется *периодическим решением*. Наименьшее число $\theta_0 > 0$, при котором выполняются равенства (22),— *периодом этого решения*.

Траектория L, соответствующая периодическому решению, называется *замкнутой траекторией*. Очевидно, все решения, соответствующие данной замкнутой траектории, являются периодическими решениями с одним и тем же периодом. Всякая траектория, не являющаяся замкнутой траекторий или состоянием равновесия, называется *незамкнутой траекторией*.

Из леммы 7 следует, что у траекторий системы (I) не может быть «самопересечений», т. е. что всякая часть незамкнутой траектории, соответствующая значениям t в любом конечном сегменте, является *простой гладкой дугой*.

Таким образом, мы получили следующие основные элементарные сведения о траекториях. Траектория может быть: 1) состоянием равновесия, 2) замкнутой траекторией, 3) незамкнутой (несамопересекающейся) траекторией. Эти сведения являются предварительными, так как возможный характер незамкнутых траекторий остается невыясненным. Детальное рассмотрение возможного характера незамкнутой траектории будет проведено в § 4.

6. Сопоставление геометрической интерпретации в пространстве R^3 и геометрической интерпретации на фазовой плоскости. Как мы уже указывали, каждому решению системы (I) соответствует в R^3 интегральная кривая.

Траектория, очевидно, является *проекцией* этой интегральной кривой на плоскость (x, y). Из леммы 4 следует, что в траекторию проектируются те и только те интегральные кривые пространства R^3, которые получаются из одной такой кривой (и, следовательно, друг из друга) сдвигом на произвольный отрезок вдоль оси t. Таким образом, устанавливается естественное соответствие между траекториями динамической системы на фазовой плоскости и интегральными кривыми в пространстве R^3. При этом могут представиться следующие случаи в зависимости от характера траектории L:

1) L есть состояние равновесия $M(a, b)$. Соответствующая интегральная кривая в R^3 является прямой $x = a$, $y = b$, параллельной оси t и проходящей через точку M. При сдвиге вдоль оси t эта прямая переходит сама в себя.

2) L есть замкнутая траектория, соответствующая решению с периодом θ_0. Соответствующие интегральные кривые имеют характер «винтовых линий» с шагом θ_0 и проектируются в траекторию L. При сдвиге вдоль оси t на отрезок C каждая интегральная кривая переходит в другую кривую, если C не кратно θ_0, и сама в себя, если C кратно θ_0 (рис. 3).

3) L — незамкнутая траектория. Каждая интегральная кривая, соответствующая траектории L, при любом сдвиге вдоль оси t, отличном от нулевого, переходит в другую интегральную кривую (рис. 4).

Подчеркнем следующие элементарные факты. Точка, двигаясь по траектории, отличной от состояния равновесия (т. е. «изображающая точка» с координатами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$), не может стремиться к точке какой-либо отличной от нее траектории при t, стремящемся к *конечному значению*. Действительно, в противном случае интегральные кривые в пространстве (x, y, t) пересекались бы, что невозможно

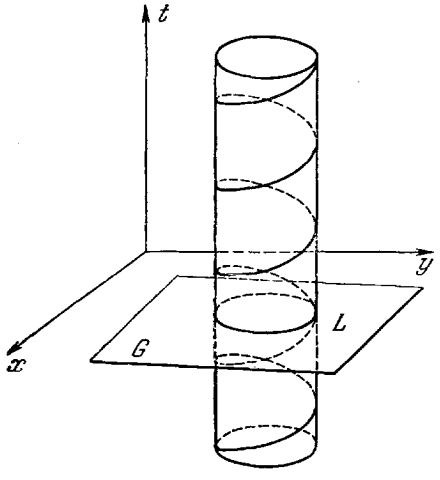


Рис. 3.

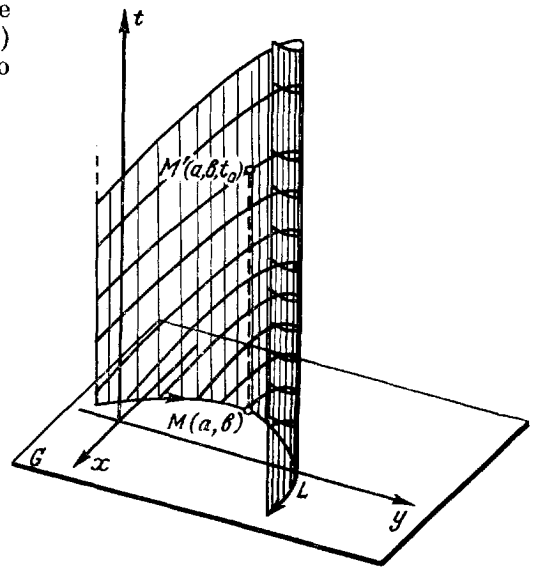


Рис. 4.

в силу теоремы 1. В частности, точка, двигаясь по траектории, отличной от состояния равновесия, *может стремиться к состоянию равновесия либо при* t *стремящемся к* $+\infty$, *либо при* $t \to -\infty$.

7. Направление на траектории. Изменение параметризации. Пусть L — траектория системы (I) и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — какое-нибудь соответствующее ей решение.

Мы введем на траектории L определенное направление в качестве положительного. Именно, будем считать положительным направлением на L направление в сторону возрастания t. При таком определении можно сказать, что положительное направление в каждой точке траектории L совпадает с направлением вектора, заданного в этой точке системой (I).

Пользуясь «кинематической» интерпретацией, можно сказать, что положительное направление на L есть то направление, в котором точка с координатами $\varphi(t)$, $\psi(t)$ движется по траектории при возрастании t и при котором направление ее скорости в каждой точке совпадает с направлением фазовой скорости.

Введенное таким образом положительное направление на L не зависит от того, какое из решений, соответствующих траектории L, мы возьмем (так как все такие решения получаются одно из другого заменой t на $t + C$).

В дальнейшем мы будем обычно опускать слово «положительное», т. е. *под направлением на траектории L системы* (I) *мы будем подразумевать положительное направление, определяемое* (*или, как говорят, индуцируемое*) *на L этой системой.*

Рассмотрим наряду с системой (I) систему

$$\frac{dx}{dt} = -P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = -Q(x, y). \tag{I'}$$

Векторное поле системы (I′) получается из векторного поля системы (I), если изменить направление каждого вектора на противоположное (не меняя длин векторов).

Непосредственной проверкой устанавливается, что каждому решению

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{23}$$

системы (I) соответствует решение

$$x = \varphi(-t), \qquad y = \psi(-t) \tag{24}$$

системы (I′). Отсюда очевидно, что *системы* (I) *и* (I′) *имеют одинаковые траектории*, но индуцируют на траекториях противоположные направления. Таким образом, переход от системы (I) к системе (I′) можно рассматривать, как изменение параметризации на траекториях, именно, как замену параметра t параметром $-t$.

Рассмотрим более общий случай изменения параметризации на траекториях системы (I). Пусть $f(x, y)$ — функция класса C_1, заданная в области G. Предположим, что функция $f(x, y)$ отлична от нуля во всех точках области G, отличных от состояний равновесия системы (I), и имеет в них один и тот же знак.

Рассмотрим наряду с системой (I) систему

$$\frac{dx}{ds} = P^*(x, y) = P(x, y) f(x, y), \qquad \frac{dy}{ds} = Q^*(x, y) = Q(x, y) f(x, y). \tag{I*}$$

В силу предположений, сделанных относительно функции $f(x, y)$, очевидно, что состояния равновесия системы (I) совпадают с состояниями равновесия системы (I*).

Лемма 8. *Если*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{25}$$

есть решение системы (I), *причем соответствующая ему траектория отлична от состояния равновесия, то существует монотонная функция класса C_1 $t = \beta(s)$ такая, что пара функций*

$$x = \varphi(\beta(s)) = \varphi^*(s), \qquad y = \psi(\beta(s)) = \psi^*(s) \tag{26}$$

является решением системы (I*).

Доказательство. Задавая какое-нибудь начальное значение t_0, $t_0 \in (\tau, T)$, где (τ, T) — интервал определения решения (25), и произвольное s_0, рассмотрим следующую функцию $s(t)$:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{f(\varphi(t), \psi(t))}.$$

Так как $f(x, y)$ не обращается в нуль в точках, отличных от состояний равновесия, то $s(t)$ является монотонной функцией класса C_1, определенной на интервале (τ, T). Очевидно, существует обратная функция

$\beta(s)$, определенная в некотором интервале (σ, S), также класса C_1 монотонная. Очевидно,

$$\frac{d\beta(s)}{ds} = f(\varphi(\beta(s)),\ \psi(\beta(s))).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(\beta)}{ds} &= \frac{d\varphi(\beta)}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{ds} = P(\varphi(\beta),\ \psi(\beta))\cdot f(\varphi(\beta),\ \psi(\beta)), \\ \frac{d\psi(\beta)}{ds} &= \frac{d\psi(\beta)}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{ds} = Q(\varphi(\beta),\ \varphi(\beta))\cdot f(\varphi(\beta),\ \psi(\beta)). \end{aligned} \tag{27}$$

Последние соотношения показывают, что функции (26) являются решением системы (I*). Нетрудно видеть, что (σ, S) является максимальным интервалом определения решения (26), так как в противном случае интервал (τ, T) не был бы максимальным для решения (25). Лемма доказана.

Уравнения (25) и (26) являются, очевидно, различными параметрическими уравнениями одной и той же траектории. Поэтому из леммы 8 следует, что *динамические системы* (I) *и* (I*) *имеют одни и те же траектории, но с различными параметризациями на них.* При переходе от системы (I) к системе (I*) направления на траекториях остаются неизменными, если $f(x, y) > 0$, и меняются, если $f(x, y) < 0$.

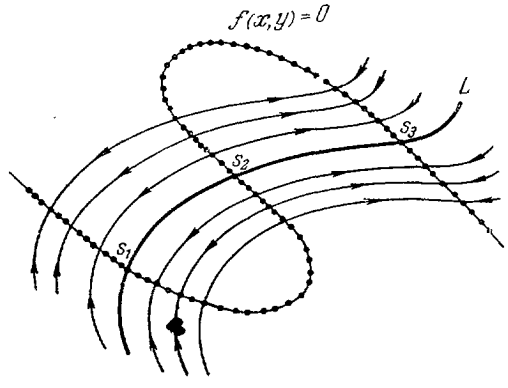


Рис. 5.

Предположим теперь, что функция $f(x, y)$ может обращаться в нуль в точках, отличных от состояний равновесия системы (I), а также может менять знак в области G. Рассмотрим снова систему (I*). Очевидно, состояниями равновесия системы (I*) являются все состояния равновесия системы (I), а также все точки области G, которые не являются состояниями равновесия системы (I), но в которых $f(x, y) = 0$.

Кривая

$$f(x, y) = 0$$

называется *особой линией* системы (I*) (каждая точка этой кривой является состоянием равновесия системы (I*)).

Рассмотрим теперь траекторию L системы (I), отличную от состояния равновесия. Если на траектории L функция $f(x, y) \neq 0$, то так же, как и выше, L является траекторией системы (I*) с измененной, вообще говоря, параметризацией.

Если же на траектории L имеются точки кривой $f(x, y) = 0$, то все точки L, отличные от этих точек, распадаются, как легко видеть, на конечное или счетное число гладких кривых, являющихся траекториями системы (I*) (рис. 5). Направление на каждой такой траектории совпадает с направлением на L, если на этой траектории $f(x, y) > 0$, и не совпадает в противном случае.

Таким образом, каждая траектория системы (I) либо является траекторией системы (I*), либо состоит из конечного или бесконечного множества траекторий системы (I*) *).

В дальнейшем, в ряде предложений и в примерах мы неоднократно будем встречаться с динамическими системами вида

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P(x, y)}{f(x, y)}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{Q(x, y)}{f(x, y)}, \tag{I**}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — функции класса C_N ($N \geqslant 1$) или аналитические, $f(x, y)$ — функция класса C_N или аналитическая, которая может обращаться в нуль в области G (в которой рассматривается система). Очевидно, в точках, где $f(x, y) = 0$, правые части рассматриваемой системы (I**) не определены. Однако при указанном виде правых частей можно путем замены параметра t привести рассмотрение системы (I**) к рассмотрению системы вида (I).

Действительно, полагая при x и y, необращающих в нуль $f(x, y)$, $dt = f(x, y)\, d\tau$, мы получаем систему

$$\frac{dx}{d\tau} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{d\tau} = Q(x, y). \tag{I***}$$

Эту же систему мы будем рассматривать при x и y, обращающих в нуль функцию $f(x, y)$ (что соответствует доопределению по непрерывности), так что система (I***) будет определена во всей области G. Очевидно, во всякой части области G, в которой $f(x, y)$ не обращается в нуль, траектории системы (I**) и (I***) совпадают как точечные множества, однако, параметры на них различны. При этом там, где $f(x, y) > 0$, направление по τ совпадает с направлением по t, а там, где $f(x, y) < 0$ — противоположно ему. Точки с координатами x и y, обращающими в нуль функцию $f(x, y)$, в которых правые части системы (I**) не определены, естественно выделять и считать не принадлежащими траекториям системы (I**) (к таким точкам, как нетрудно убедиться на простых примерах, точка по траектории может стремиться при t, стремящемся к конечному значению).

8. Терминология и обозначения. В случае, когда решения, соответствующие данной траектории L, определены для всех значений t ($-\infty < t < +\infty$), мы будем иногда, желая подчеркнуть это, называть такую траекторию L *целой траекторией*. В силу теоремы 2 всякая траектория, лежащая в ограниченной части плоскости, у которой расстояние любой ее точки от границы области G больше некоторого $\varrho_0 > 0$, заведомо является целой траекторией.

Обратное неверно. Траектория, у которой есть точки, сколь угодно близкие к границе области G, может как быть, так и не быть целой траекторией.

Пусть M_0 — точка траектории L, которая при выбранном решении соответствует значению $t = t_0$. Если решение определено при всех t ($t \geqslant t_0$), то множество точек траектории L, соответствующих значениям $t \geqslant t_0$, называется *положительной полутраекторией*, выделенной из

) Это множество может быть и несчетным, так как на траектории L может лежать несчетное множество состояний равновесия системы (I), т. е. точек кривой $f(x, y) = 0$. Однако число траекторий системы (I*), лежащих на L и отличных от состояния равновесия, всегда либо конечно, либо счетно. На рис. 4 траектория L системы (I) состоит из 7 траекторий системы (I*), три из которых — состояния равновесия S_1, S_2, S_3.

траектории L, и обозначается через $L^{(+}$ или $L^{(+)}_{M_0}$. Аналогично если решение определено при всех $t \leqslant t_0$, то множество точек траектории L, соответствующих значениям $t \leqslant t_0$, называется *отрицательной полутраекторией*, выделенной из траектории L, и обозначается через $L^{(-}$ или $L^{(-)}_{M_0}$.

Очевидно, если взять другое решение, соответствующее траектории L, при котором точке M_0 соответствует значение $t_1 \neq t_0$, то точки полутраектории $L^{(+)}_{M_0}$ (или $L^{(-)}_{M_0}$) будут соответствовать значениям $t \geqslant t_1 (t \leqslant t_1)$. Точку M_0 мы иногда будем называть *«концом» полутраектории*. В дальнейшем нам часто придется рассматривать полутраекторию без указания на то, является ли она положительной или отрицательной. В этом случае мы будем обозначать полутраекторию через $L^{(\ )}$ или $L^{(\ )}_{M_0}$.

В случае, когда траектория L является состоянием равновесия или замкнутой траекторией, всякая положительная и всякая отрицательная полутраектория, выделенная из нее, совпадает с ней самой. Полутраекторию, выделенную из незамкнутой траектории, мы будем называть *незамкнутой полутраекторией*, а полутраекторию, выделенную из замкнутой траектории (очевидно, совпадающую с этой траекторией), будем называть *замкнутой полутраекторией*.

В математической литературе решение системы (I) часто называют *движением*. Эта терминология находится в соответствии с «кинематическим» истолкованием динамической системы. Мы также будем пользоваться этой весьма употребительной терминологией. Таким образом, мы будем говорить о движении, соответствующем данным начальным значениям, о траектории, соответствующей данному движению, о движении, соответствующем данной траектории, или, иначе, о движении на траектории (т. е. о решении, соответствующем данной траектории), о периодическом движении и т. д.

Будем также говорить, что *траектория L при $t = t_0$ проходит через точку M_0*, подразумевая при этом, что на траектории L выбрано некоторое определенное движение и при этом движении точке M_0 соответствует значение $t = t_0$. Точно так же мы будем говорить: «точка M_1 траектории L соответствует значению $t = t_1$» или «траектория при $t = t_1$ пересекает данную дугу l» и т. д., подразумевая под этим, что при *данном выбранном движении на L точка M_1* или общая точка траектории L и дуги l соответствует значению $t = t_1$ и т. д.

Мы будем часто пользоваться следующими выражениями: «траектория L при возрастании (или убывании) входит в данную область или выходит из данной области», «траектория при $t > T_0$ остается в данной области» и другими аналогичными выражениями, не требующими пояснения. Кроме того, укажем следующие обозначения. Если

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{28}$$

— какое-нибудь движение (т. е. решение), то точку с координатами $\varphi(t)$, $\psi(t)$ мы будем обозначать через $M(t)$ и решение (28) — через $M = M(t)$. Если указаны начальные значения, которым соответствует рассматриваемое движение, т. е. движение (решение) записано в виде

$$x = \varphi(t - t_0,\ x_0,\ y_0), \qquad y = \psi(t - t_0,\ x_0,\ y_0), \tag{29}$$

то, обозначая через M_0 точку x_0, y_0, мы будем записывать точку с координатами $\varphi(t - t_0,\ x_0,\ y_0)$, $\psi(t - t_0,\ x_0,\ y_0)$ в виде $M(t - t_0,\ M_0)$ и решение (29) — в виде $M = M(t - t_0,\ M_0)$.

9. Теорема о непрерывной зависимости от начальных значений. Наряду с теоремой о существовании и единственности решения основной теоремой теории дифференциальных уравнений является теорема о непрерывной зависимости от начальных значений (см. дополнение, § 8).

Мы сформулируем здесь эту теорему для рассматриваемых нами автономных систем вида (1).

Теорема 4. *Пусть* $x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0)$, $y = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$ — *решение системы* (1), *определенное на интервале* (τ, T), *а* τ_1 *и* τ_2 $(\tau_1 < \tau_2)$ — *два произвольных числа из этого интервала. Тогда, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такое* $\eta > 0$, *что, если*

$$|x_0 - x_0^*| < \eta, \qquad |y_0 - y_0^*| < \eta,$$

то решение $x = \varphi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)$, $y = \psi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)$ *определено при всех значениях* t, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, *и при всех этих значениях* t *выполняются неравенства*

$$|\varphi(t - t_0, x_0^*, y_0^*) - \varphi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)| < \varepsilon,$$
$$|\psi(t - t_0, x_0^*, y_0^*) - \psi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)| < \varepsilon.$$

Замечание. Функции $\varphi(t - t_0, x_0, y_0)$, $\psi(t - t_0, x_0, y_0)$ по самому своему определению являются непрерывными функциями $t - t_0$. Так как в силу настоящей теоремы эти функции непрерывны по переменным x_0, y_0 и равномерно непрерывны относительно t на всяком замкнутом конечном промежутке значений t, то, очевидно, эти функции *непрерывны по совокупности своих аргументов при всех тех значениях этих аргументов, при которых они определены.*

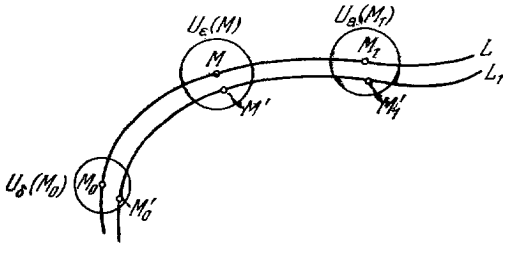


Рис. 6.

Теорема 4 может быть также сформулирована в следующей геометрической форме, которой мы в основном будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 4'. *Пусть* $M_0(x_0, y_0)$ *и* $M_1(x_1, y_1)$ — *две точки произвольной траектории* L, *соответствующие значениям* t_0 *и* t_1 *переменного* t. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что если точка* $M_0' \in U_\delta(M_0)$, *то проходящая через эту точку при* $t = t_0$ *траектория* L' *определена для всех* t *в промежутке* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (*или* $t_0 \geqslant t \geqslant t_1$) *и точка* M' *траектории* L', *соответствующая любому значению* t *из этого промежутка, лежит в* ε-*окрестности точки* M *траектории* L, *соответствующей тому же* t (рис. 6).

Докажем лемму, непосредственно вытекающую из теоремы 4.

Лемма 9. *Пусть* K — *замкнутое ограниченное множество, целиком лежащее в* G. *Всегда существует* $h_0 > 0$ *такое, что при любом* t_0 *решение*

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0) \tag{30}$$

для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in K$ *заведомо определено при всех значениях* t *из промежутка* $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0 + h$.

Доказательство. Предположим, что лемма несправедлива, т. е. для любого $h > 0$ найдется такая точка $\tilde{M} \in K$, что решение (30), которое мы для краткости запишем в виде

$$M = M(t - t_0, \tilde{M}),$$

не определено на всем сегменте $[t_0 - h, t_0 + h]$. Тогда существует последовательность стремящихся к нулю положительных чисел $\{h_i\}$ и последовательность точек $\{M_i\}$ множества K таких, что решение

$$M = M(t - t_0, M_n)$$

не определено на всем сегменте $[t_0 - h_n, t_0 + h_n]$. Так как по предположению K — замкнутое ограниченное множество, то из $\{M_i\}$ всегда можно выбрать последовательность, сходящуюся к некоторой точке M^* множества K. Поэтому мы можем без ограничения общности считать, что сама последовательность $\{M_i\}$ сходится к некоторой точке $M^* \in K$.

Рассмотрим решение

$$M = M(t - t_0, M^*).$$

Всегда существует $h^* > 0$ такое, что это решение во всяком случае определено при значениях t на сегменте $[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$. В силу теоремы 4 тогда и всякое решение

$$M = M(t - t_0, M_n)$$

при достаточно большом n определено на сегменте $[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$. Но $h_n < h^*$ при достаточно большом n (так как $h_n \to 0$), и, следовательно, решение $M = M(t - t_0, M_n)$ должно быть определено при всех значениях t из сегмента $[t_0 - h_n, t_0 + h_n]$, что противоречит выбору точек M_n. Лемма доказана.

10. Замена переменных. Предположим, что область определения G системы (I) ограничена, и рассмотрим *регулярное отображение* этой области на некоторую область G^* плоскости (u, v) (о регулярном отображении см. дополнение, § 6).

Пусть это отображение задается формулами

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v) \tag{T}$$

или эквивалентными им формулами

$$u = f^*(x, y), \qquad v = g^*(x, y), \tag{T*}$$

где функции f, g, f^*, g^* являются функциями класса C_2. Мы будем предполагать также, что G^* — ограниченная область; для этого необходимо и достаточно, чтобы функции f^* и g^* были ограниченными в области G.

Переменные u и v можно рассматривать, как известно, не только как декартовы координаты на плоскости (u, v), но и как криволинейные координаты в области G плоскости (x, y). Тогда (T) и (T^*) являются формулами *замены переменных* или *преобразования координат*.

Пусть после перехода к координатам u, v система (I) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = U(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = V(u, v). \tag{31}$$

При этом мы имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} U(u, v) &= \frac{\partial f^*}{\partial x} P(f(u, v), g(u, v)) + \frac{\partial f^*}{\partial y} Q(f(u, v), g(u, v)), \\ V(u, v) &= \frac{\partial g^*}{\partial x} P(f(u, v), g(u, v)) + \frac{\partial g^*}{\partial y} Q(f(u, v), g(u, v)). \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, при переходе к новым координатам u, v вектор $\boldsymbol{r}$ с координатами $P(x, y)$, $Q(x, y)$ преобразуется в вектор $\boldsymbol{r}^*$ с координатами $U(u, v)$, $V(u, v)$, связанными с $P(x, y)$, $Q(x, y)$ выражениями (32).

При отображении (T) всякая траектория системы (I)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

переходит в траекторию системы (31)

$$u = \varphi^*(t) = f^*(\varphi(t), \psi(t)), \qquad v = \psi^*(t) = g^*(\varphi(t), \psi(t)), \tag{33}$$

и, обратно, при отображении (T*) траектории системы (31) переходят в траектории системы (I). Нетрудно убедиться непосредственно, что пара функций (33) является решением системы (31).

В дальнейшем мы будем рассматривать не только *регулярные* преобразования координат. В частности, мы часто будем пользоваться переходом к полярной системе координат, который, очевидно, не является регулярным преобразованием координат *). По поводу перехода к полярной системе координат мы сделаем необходимые пояснения в дальнейшем, при его использовании.

11. Дифференциальное уравнение, соответствующее динамической системе. Если разделить одно уравнение системы (I) на другое, то мы получим либо дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{II}$$

либо дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{II*}$$

Рассмотрим сначала уравнение (II). Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — какая-нибудь точка области G. В силу теоремы о существовании и единственности решения, если при значениях x_0, y_0, $P(x_0, y_0) \neq 0$, то существует единственное решение

$$y = f(x),$$

соответствующее начальным значениям x_0, y_0, и, следовательно, единственная интегральная кривая уравнения (II), проходящая через точку

*) Действительно, при преобразовании к полярным координатам

$$x = \varrho \cos\theta, \quad y = \varrho \sin\theta,$$

во-первых, нарушается взаимная однозначность, а во-вторых, функциональный детерминант

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \varrho$$

обращается в нуль при $\varrho = 0$.

$M_0(x_0, y_0)$. В каждой точке этой кривой угловой коэффициент касательной задается уравнением (II).

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — решение системы (I), соответствующее начальным значениям t_0, x_0, y_0. Выражая t вблизи значений t_0, x_0, y_0 как функцию x, $t = \gamma(x)$ (это возможно в силу того, что по условию $\varphi'(t_0) = P(x_0, y_0) \neq 0$) и подставляя в функцию $y = \psi(t)$, мы, как нетрудно видеть, получаем решение уравнения (II)

$$y = \psi(\gamma(x)) = f(x).$$

Очевидно, интегральная кривая уравнения (II) в точках, в которых она определена, совпадает с траекторией системы (I) или является частью этой траектории.

Предположим, что решение $y = f(x)$ определено на интервале (x_1, x_2) *), и пусть x стремится к одному из концов этого интервала, например $x \to x_1$ (все сказанное в этом случае может быть повторено для случая, когда $x \to x_2$). На основании общих теорем нетрудно видеть, что если при $x \to x_1$ точка с координатами $(x, f(x))$ не стремится к границе области G, то она стремится к точке $M(x_1, f(x_1))$, для которой $P(x_1, f(x_1)) = 0$, т. е. к точке, в которой уравнение (II) теряет смысл. Если при этом $Q(x_1, f(x_1)) \neq 0$, то точка M, очевидно, является такой точкой траектории системы (I), в которой касательная параллельна оси y (рис. 7). В окрестности такой точки естественно рассматривать уравнение (II*), и как «продолжение» интегральной кривой, соответствующей данному решению $y = f(x)$ уравнения (II), рассматривать интегральную кривую уравнения (II*), проходящую через точку $M(x_1, f(x_1))$. Очевидно, в окрестности всякой точки, в которой ни $P(x, y)$, ни $Q(x, y)$ не обращается в нуль, решение уравнения (II*) может быть получено из решения $y = f(x)$ уравнения (II), если в нем x выразить как функцию y, $x = g(y)$, а части соответствующих интегральных кривых уравнений (II) и (II*), лежащие в достаточно малой окрестности такой точки, совпадают.

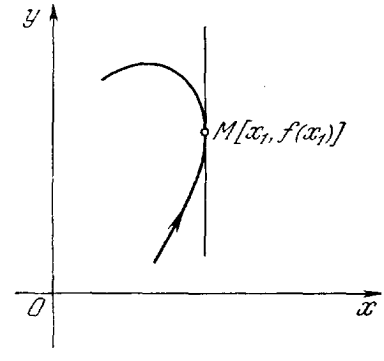


Рис. 7.

Совершенно аналогично в точке $N(g(y_1), y_1)$, в которой $Q(g(y_1), y_1) = 0$, а $P(g(y_1), y_1) \neq 0$, естественно «продолжением» интегральной кривой уравнения (II*) считать проходящую через эту точку интегральную кривую уравнения (II).

Нетрудно убедиться в том, что множество точек, состоящее из точек интегральной кривой уравнения (II), проходящей через некоторую, отличную от состояния равновесия системы (I) точку $M_0(x_0, y_0)$ области G и всех «продолжений» этой интегральной кривой в указанном выше смысле, совпадает с траекторией, проходящей через точку M_0.

Таким образом, *одновременное задание уравнений* (II) *и* (II*) *определяет все траектории системы* (I), *отличные от состояний равновесия*. Но в то время, как при рассмотрении системы (I) траектории определяются

*) Напомним, что решением дифференциального уравнения мы всегда называем решение, продолженное на максимально возможный интервал значений независимого переменного (см. дополнение, § 8).

с помощью параметрических уравнений, при рассмотрении уравнений (II) и (II*) траектории определяются уравнениями в переменных x и y (уравнениями в декартовых координатах). В дальнейшем, рассматривая одновременно дифференциальные уравнения (II) и (II*), мы не будем выписывать оба эти уравнения: выписывая одно из этих уравнений, мы будем подразумевать, что рассматриваются оба. Мы будем также пользоваться следующими симметричными относительно x и y записями уравнений (II) и (II*), именно:

$$P(x,\ y)\,dy - Q(x,\ y)\,dx = 0$$

или

$$\frac{dx}{P(x,\ y)} = \frac{dy}{Q(x,\ y)}\,. \tag{III}$$

Траектории системы (I), отличные от состояния равновесия, мы будем называть *интегральными кривыми* уравнения (III) (а также, не совсем точно, интегральными кривыми уравнения (II) или (II*)).

Точки, в которых одновременно

$$P(x,\ y) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x,\ y) = 0$$

и оба уравнения (II) и (II*) теряют смысл, называются *особыми точками* уравнений (II), (II*) или (III). Таким образом, состояниям равновесия системы (I) соответствуют особые точки уравнений (II), (II*) или (III) и, наоборот, особым точкам — состояния равновесия.

В то время, как система (I) определяет в области G фазовой плоскости *векторное поле*, состоящее из векторов $\mathbf{r}(x,\ y)$ с компонентами $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ (см. п. 5), уравнение (III) (или пара уравнений (II) и (II*)) определяет *поле направлений* или *поле линейных элементов*. Линейным элементом называется точка M и проходящий через эту точку ненаправленный прямолинейный отрезок, для которого M является внутренней точкой. Поле линейных элементов, определенное уравнением (III), получается, если через каждую точку $M(x,\ y)$ области провести прямолинейный отрезок, имеющий угловой коэффициент $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ (если $P(x,\ y) = 0$, то соответствующий отрезок параллелен оси y).

Очевидно, линейный элемент, соответствующий точке $M(x,\ y)$, лежит на касательной к траектории, проходящей через точку M.

Если функция класса C_1 $f(x,\ y)$ не обращается в нуль в области G, то системе

$$\frac{dx}{dt} = P(x,\ y)\,f(x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,\ y)\,f(x,\ y) \tag{I*}$$

(см. п. 7) соответствует, очевидно, то же дифференциальное уравнение (III)

$$\frac{dx}{P(x,\ y)} = \frac{dy}{Q(x,\ y)}\,,$$

что и системе

$$\frac{dx}{dt} = P(x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,\ y). \tag{I}$$

Отсюда вторично вытекает доказанное в п. 7 утверждение, что системы (I) и (I*) имеют одни и те же траектории *).

) Если функция $f(x,\ y)$ обращается в нуль в точках области G, то, рассматривая уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, мы, очевидно, «теряем» особые точки системы (I) (не являющиеся состояниями равновесия системы (I)), для которых $f(x,\ y) = 0$.

12. Изоклины. Кривые, расположенные в области G и имеющие уравнение

$$Q(x, y) - C \cdot P(x, y) = 0 \tag{34}$$

(C — постоянное) или уравнение

$$P(x, y) = 0, \tag{35}$$

называются *изоклинами* (линиями равного наклона) системы (I) или уравнения (III). Эти кривые обладают, очевидно, тем свойством, что траектории системы (I), проходящие через все отличные от состояний равновесия точки каждой кривой, имеют в этих точках одинаковые направления касательных. Именно, угловые коэффициенты траекторий в точках изоклины (34) равны C, а в точках изоклины (35) равны ∞. Таким образом, направление касательной к траектории меняется только при переходе точки с одной изоклины на другую. Изоклины $Q(x, y) = 0$ и $P(x, y) = 0$ называются *главными изоклинами*. В точках первой из них касательные к траекториям горизонтальны, а в точках второй — вертикальны. Поэтому главные изоклины называют также *изоклинами горизонтальных*, соответственно *вертикальных*, наклонов.

Очевидно, все состояния равновесия лежат на каждой из изоклин и, обратно, общие точки любых двух изоклин (различных) являются состояниями равновесия системы. В частности, состояния равновесия являются общими точками двух главных изоклин.

13. Понятия «интеграл», «интегральная кривая», «общий интеграл», использующиеся в классической литературе при рассмотрении аналитических систем. В этом пункте мы введем понятия «интеграл», «интегральная кривая», «общий интеграл» дифференциального уравнения или системы уравнений так, как это обычно делается в классической литературе при рассмотрении аналитических дифференциальных уравнений и систем. При этом термин «интегральная кривая», имеет несколько иное содержание, чем то, которое внесено в этот термин в дополнении, § 8.

Мы останавливаемся здесь на указанных понятиях, не играющих роли в излагаемой дальше теории ввиду того, что они часто используются в дальнейшем при рассмотрении примеров.

Пусть рассматриваемая система (I):

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

является аналитической в области G. Соответствующее этой системе дифференциальное уравнение запишем в симметричной форме (III)

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) она является аналитической во всех точках кривой, заданной соотношением

$$F(x, y) = 0, \tag{36}$$

б) во всех точках кривой (36) тождественно выполняется равенство

$$F'_x(x, y)\, P(x, y) + F'_y(x, y)\, Q(x, y) = 0. \tag{37}$$

Тогда соотношение (36) называется *интегралом* или *частным интегралом* уравнения (III) или системы (I), а кривая, определяемая этим соотношением, *интегральной кривой уравнения* (III) *или системы* (I).

Пусть $F(x, y) = 0$ — интеграл системы (I). Рассмотрим соответствующую интегральную кривую. Эта кривая может иметь в числе своих точек состояния равновесия системы (I), а также точки, в которых одновременно $F'_x(x, y) = F'_y(x, y) = 0$, т. е. особые точки кривой (36).

Покажем, что *всякий «кусок» интегральной кривой, не содержащий состояний равновесия системы* (I) *и не имеющий особых точек, является траекторией системы* (I) *или представляет часть такой траектории.*

В самом деле, рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ такого куска кривой (36). Предположим, что в этой точке $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки M_0 кривая может быть задана уравнением вида $y = f(x)$, причем $\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ для всех точек кривой в этой окрестности. Так как $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то в окрестности точки M_0 $F'_y(x, y)$ также отлична от нуля. Из соотношения (37)

$$F'_x(x, y) P(x, y) + F'_y(x, y) Q(x, y) = 0$$

следует, что $P(x, y) \neq 0$ в окрестности точки M_0 и что

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Но это значит, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению (II):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Таким образом, рассматриваемый кусок кривой (36) является куском интегральной кривой в смысле п. 11, т. е. представляет траекторию или часть траектории системы (I).

Рассмотрим теперь семейство кривых

$$F(x, y, C) = 0, \tag{38}$$

определенное для значений C в некоторой области (обычно в некотором интервале). *Соотношение* (38) *называется общим интегралом уравнения* (III) *или системы* (I), *если каждая кривая семейства* (38) *является интегральной кривой в определенном выше смысле и если каждая точка области G принадлежит по крайней мере одной из кривых* (38).

Из этого определения следует, в частности, что если некоторая функция $\Phi(x, y)$ определена в области G и является аналитической во всех точках этой области, за исключением, быть может, состояний равновесия системы (I), и удовлетворяет в области тождеству

$$\Phi'_x(x, y) \cdot P(x, y) + \Phi'_y(x, y) \cdot Q(x, y) \equiv 0,$$

то соотношение

$$\Phi(x, y) = C \tag{39}$$

является общим интегралом системы (I).

Если у системы (I) (или уравнения III) существует общий интеграл вида (39), причем $\Phi(x, y)$ есть функция, аналитическая во всех точках

области G, то, говорят, что *система* (I) (*или уравнение* (III)) *имеет в области* G *аналитический интеграл* *).

Знание аналитического интеграла системы (I) в некоторых частных случаях помогает проводить качественное исследование системы (I).

14. Примеры. Мы приведем здесь ряд простых примеров динамических систем, поясняющих материал, изложенный в предыдущих пунктах.

Во всех указанных примерах динамические системы определены на всей плоскости.

Приведем сначала два простейших примера динамических систем без состояний равновесия.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Траектории — прямые, параллельные оси x:

$$y = c_1, \qquad x = t + c_2.$$

Состояний равновесия, очевидно, нет, все траектории (совпадающие с интегральными кривыми) являются целыми траекториями.

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 1 + y^2,$$

$$y = \operatorname{tg}(t + c_1), \qquad x = t + c_2.$$

Состояний равновесия нет, траектории не являются «целыми траекториями» ввиду того, что точки на этих траекториях уходят в бесконечность при t, стремящемся к конечному значению. Именно, $y = \operatorname{tg}(t + c_1) \to \infty$ при $t + c_1 \to \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

Пример 3.

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2 y, \tag{40}$$

где a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки.

На плоскости (x, y) (т. е. на фазовой плоскости системы (40)) эта система задает векторное поле, примерно изображенное на рис. 8, *а* при $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ и на рис. 8, *б* при $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Прямые на этом рисунке являются изоклинами.

Система (40), очевидно, имеет единственное состояние равновесия O (0, 0). Решая систему (40) как линейную с постоянными коэффициентами, легко видеть, что решение, соответствующее начальным значениям t_0, x_0, y_0, имеет вид

$$x = x_0 e^{a_1 (t - t_0)}, \qquad y = y_0 e^{a_2 (t - t_0)}. \tag{41}$$

Очевидно, в согласии с леммой 3 это решение является функцией $t - t_0$.

---

*) В частности, системами вида (I), имеющими аналитический интеграл, являются так называемые гамильтоновы системы, о которых уже говорилось во введении:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

где $H(x, y)$ — аналитическая функция. $H(x, y) = C$ является аналитическим интегралом (так называемым «интегралом энергии») этой системы.

Траектории системы (40) проще всего получить, исключая t в уравнениях (41), т. е. переходя к декартовым координатам.

Мы получаем

$$y - y_0 \frac{x^{a_2/a_1}}{x_0^{a_2/a_1}} = 0.$$

Полагая при $y_0 \neq 0$ $\frac{y_0}{x_0^{a_2/a_1}} = C$, мы получим «параболы»

$$y - Cx^{a_2/a_1} = 0, \tag{42}$$

а при $y_0 = 0$

$$x = 0. \tag{43}$$

Из (42) при $C = 0$ мы получаем $y = 0$.

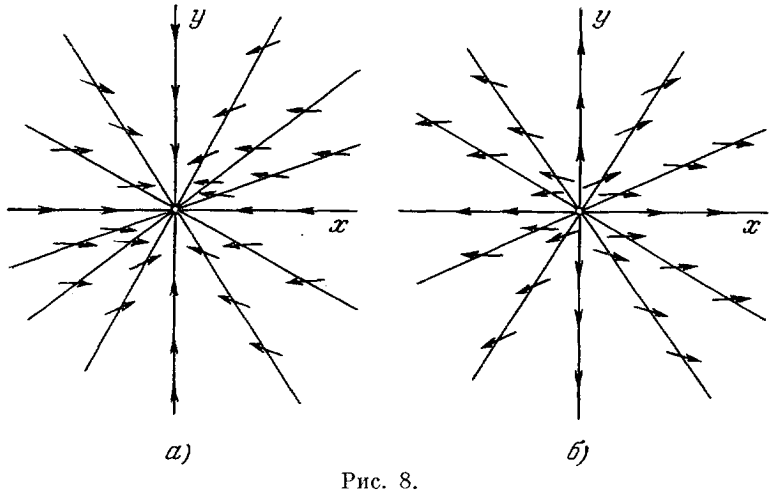
Нетрудно видеть, что если перейти от системы (40) к одному уравнению, например, записанному в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 y}{a_1 x}$$

или в виде

$$\frac{dy}{a_2 y} = \frac{dx}{a_1 x}, \tag{44}$$

и проинтегрировать его, то в качестве интегральных кривых в смысле п. 13 мы получим «параболы» (42) и две оси координат.



а) *б)*

Рис. 8.

Отметим здесь же, что, как было указано в п. 13, уравнение (44) задает поле линейных элементов: оно представлено на рис. 9.

Траекториями системы (40) являются те части (половины) парабол (42) и координатных осей $x = 0$ и $y = 0$, на которые эти кривые разбиваются состоянием равновесия O (0, 0). Из соотношений (41) видно, что если $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, то точка на любой, отличной от O траектории, стремится к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$, а если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то при $t \to -\infty$. Мы будем сокращенно говорить, что траектория стремится к состоянию равновесия O соответственно при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Напоминаем, что когда «изображающая» точка, двигаясь по отличной от состояния равновесия траектории, стремится к некоторому состоянию равновесия $A\ (x_0,\ y_0)$, то при этом $|t| \to \infty$. Действительно, как это уже указывалось в п. 6, если бы t стремилось к конечному значению τ, то это означало бы, что через точку пространства $(x,\ y,\ t)$ с координатами τ, x_0, y_0 проходят две интегральные кривые: одна — прямая, параллельная оси t, соответствующая состоянию равновесия $A\ (x_0,\ y_0)$, и другая, соответствующая траектории L. Это, очевидно, противоречит теореме о существовании и единственности решения.

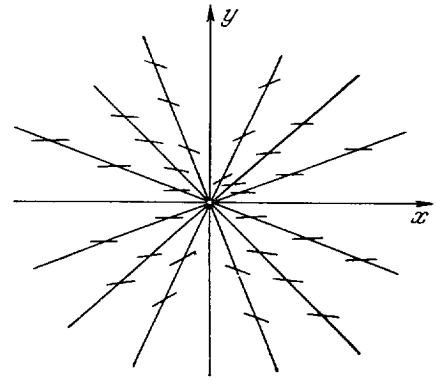
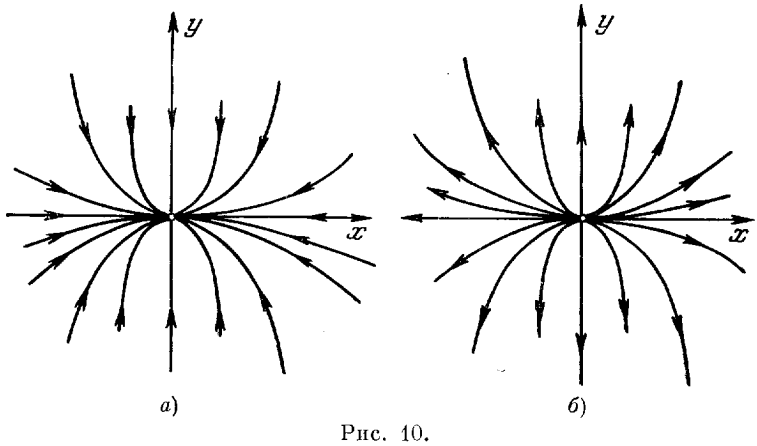


Рис. 9.

Таким образом, разбиение на траектории, определенное системой (40) (с указанными на траекториях направлениями *)), имеет вид, указанный на рис. 10. Состояние равновесия такого типа называется *узлом*, *устойчивым* в случае $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ (рис. 10, *а*) и *неустойчивым* в случае $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (рис. 10, *б*).

Рассмотрим еще интерпретацию решений системы (40), т. е. интегральные кривые системы (40) в трехмерном пространстве R^3 с координатами



а) *б*)

Рис. 10.

x, y, t. Из формул (41) следует, что интегральными кривыми системы (40) в пространстве $(x,\ y,\ t)$ являются:

1) ось t, т. е. $x = 0$, $y = 0$ (эти уравнения получаются из уравнений (41) при $x_0 = y_0 = 0$); она проектируется в состояние равновесия O фазовой плоскости;

*) Если особых линий нет, то для того, чтобы наметить направление на траекториях, достаточно наметить направление в какой-либо одной точке, тогда во всех других точках направление определяется из соображений непрерывности. Определить же направление в какой-либо точке x_0, y_0, в которой $P\ (x_0,\ y_0) \neq 0$, можно, вычисляя в этой точке $P\ (x_0,\ y_0)$ и определяя в этой точке знак $P\ (x_0,\ y_0)$; если $P\ (x_0,\ y_0) > 0$, то в точке $(x_0,\ y_0)$ $dx/dt > 0$, а значит, вблизи этой точки при движении по траектории в сторону возрастания t x возрастает, что и определяет направления на траектории, проходящей через точку $(x_0,\ y_0)$. Совершенно аналогично можно наметить направления на траекториях, рассматривая знак dy/dt в точке, в которой $Q\ (x_0,\ y_0) \neq 0$.

2) показательные кривые

$$x = x_0 e^{a_1 (t-t_0)}, \qquad y = 0,$$

расположенные в координатных полуплоскостях $x > 0$, $y = 0$ или $x < 0$, $y = 0$ и асимптотически стремящиеся к оси t при $t \to +\infty$, если $a_1 < 0$ (рис. 11, *а*), и при $t \to -\infty$, если $a_1 > 0$; эти кривые проектируются в положительную и отрицательную полуоси абсцисс, являющиеся траекториями системы;

3) показательные кривые

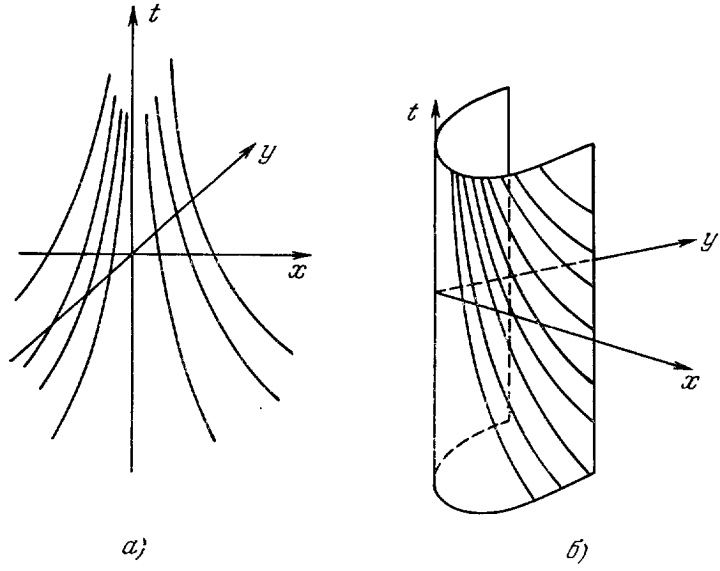
$$x = 0, \qquad y = y_0 e^{a_2 (t-t_0)},$$

аналогичные кривым типа 2);

4) кривые

$$x = x_0 e^{a_1 (t-t_0)}, \qquad y = y_0 e^{a_2 (t-t_0)} \qquad (x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0),$$

расположенные на параболических цилиндрах $y - Cx^{a_2/a_1} = 0$ $(C \neq 0)$ с образующими параллельными оси t. Ось t разбивает каждый такой



а) *б)*

Рис. 11.

цилиндр на две «половины» и каждая интегральная кривая типа 4) лежит целиком в одной половине цилиндра и асимптотически стремится к оси t при $t \to +\infty$, если $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ (рис. 11, *б*), при $t \to -\infty$, если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Интегральные кривые типа 4) получаются друг из друга сдвигом вдоль оси t. То же справедливо для интегральных кривых типа 2) или 3).

Пример 4.

$$\frac{dx}{dt} = -y + \alpha x, \qquad \frac{dy}{dt} = x + \alpha y \tag{45}$$

(α — отличная от нуля постоянная).

Векторное поле, определенное этой системой (при $\alpha < 0$), изображено на рис. 12. Решая систему (45) как линейную систему с постоянными коэф-

фициентами, мы получим решение, соответствующее начальным значениям t_0, x_0, y_0 в следующем виде (оно, очевидно, является функцией $t - t_0$ в согласии с леммой 3):

$$\begin{aligned} x &= e^{\alpha(t-t_0)}[x_0\cos(t-t_0) - y_0\sin(t-t_0)], \\ y &= e^{\alpha(t-t_0)}[x_0\sin(t-t_0) + y_0\cos(t-t_0)]. \end{aligned} \tag{46}$$

Характер траекторий рассматриваемой системы удобнее исследовать, переходя к полярным координатам. Пусть ϱ_0 и θ_0 — полярные координаты точки $M_0(x_0, y_0)$. Полагая $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, нетрудно найти уравнение траекторий $\theta = \theta(t)$, $\varrho = \varrho(t)$ в полярных координатах (здесь $\theta(t)$, $\varrho(t)$ — непрерывные функции от t, $\theta(t) \geqslant 0$, $\theta(t_0) = \theta_0$, $\varrho(t_0) = \varrho_0$). Мы получим после элементарных вычислений

$$\varrho = \varrho_0 e^{\alpha(t-t_0)}, \qquad \theta = t - t_0 + \theta_0. \tag{47}$$

Исключая t, получаем

$$\varrho = \varrho_0 e^{\alpha(\theta-\theta_0)}. \tag{48}$$

Уравнение (48) дает, очевидно, все траектории системы (46). Если $\varrho \neq 0$, эти траектории являются логарифмическими спиралями. При $\varrho_0 = 0$ получается состояние равновесия O (0, 0).

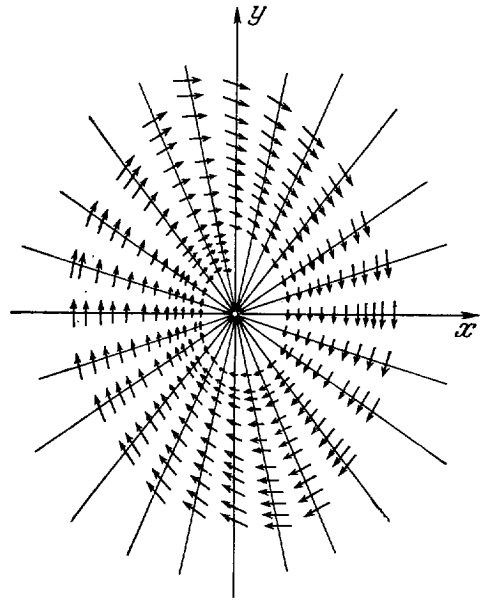


Рис. 12.

Первое из двух уравнений (47) показывает, что все траектории стремятся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$, если $\alpha < 0$ (рис. 13, *а*), и при $t \to -\infty$, если $\alpha > 0$ (рис. 13, *б*). Состояние равновесия такого типа, как в данном примере, называется фокусом, устойчивым в случае $\alpha < 0$ и неустойчивым при $\alpha > 0$ (точное определение фокуса будет дано в дальнейшем, в главе IV).

Уравнение

$$\frac{dx}{-y + \alpha x} = \frac{dy}{x + \alpha y},$$

соответствующее системе (45), является однородным. Интегрируя его с помощью подстановки $\frac{y}{x} = u$ или $\frac{x}{y} = u$, мы получим соотношение

$$x^2 + y^2 - Ce^{2\alpha\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = 0 \tag{49}$$

или

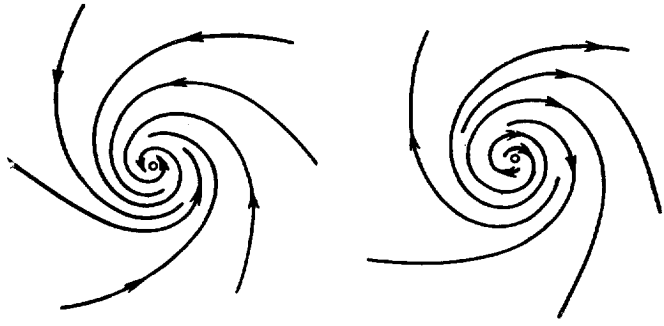
$$x^2 + y^2 - Ce^{2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} = 0. \tag{50}$$

Первое из соотношений является общим интегралом системы (в смысле п. 13) во всякой области, не содержащей точек оси y (т. е. точек $x = 0$), а второе — во всякой области, не содержащей точек оси x. Однако, ни одно из этих соотношений не является в строгом смысле слова общим

интегралом системы в области, содержащей точку O. «Целую» интегральную кривую, расположенную в такой области, можно получить, «склеивая» куски кривых (49) и (50).

Рассмотрим интерпретацию в трехмерном пространстве. Как и в предыдущем примере, ось t является интегральной кривой системы (45) в пространстве (x, y, t). Остальные интегральные кривые расположены на цилиндрических поверхностях, имеющих своими направляющими спирали (48), а образующими — прямые, параллельные оси t. Эти интегральные кривые асимптотически приближаются к оси t при $t \to +\infty$, если $\alpha < 0$, и при $t \to -\infty$, если $\alpha > 0$.

Отметим, что хотя формы траекторий в примерах 3 и 4 при $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ и $\alpha < 0$ ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и $\alpha > 0$) соответственно существенно



а) *б)*

Рис. 13.

отличаются, но в некотором смысле поведение траекторий в том и в другом случае одинаково: именно, в обоих примерах все отличные от состояния равновесия траектории при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$) стремятся к состоянию равновесия.

Впоследствии, уточнив понятие «качественной структуры» разбиения на траектории, мы будем считать в примерах 3 и 4 «качественную структуру» разбиения на траектории одинаковой.

Пример 5.

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x. \tag{51}$$

Эта система получается как частный случай системы (45) при $\alpha = 0$. Решения, соответствующие начальным значениям t_0, x_0, y_0, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(t - t_0) - y_0 \sin(t - t_0), \\ y &= x_0 \sin(t - t_0) + y_0 \cos(t - t_0). \end{aligned} \tag{52}$$

Непосредственной проверкой (или используя (52)) нетрудно убедиться, что

$$x^2 + y^2 = C \tag{53}$$

является общим интегралом системы. Таким образом, в этом случае система имеет аналитический интеграл.

Траекториями системы, очевидно, являются состояние равновесия O (0, 0) и замкнутые траектории — концентрические окружности с цен-

тром в начале (рис. 14). Решения (52), соответствующие замкнутым траекториям — окружностям, являются периодическими функциями с периодом 2π.

Интегральными кривыми в трехмерном пространстве (x, y, t) являются ось t и винтовые линии, расположенные на круглых цилиндрах с направляющими (53). Шаг каждой винтовой линии равен 2π (рис. 15).

Пример 6.

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = -y. \tag{54}$$

Векторное поле изображено на рис. 16.

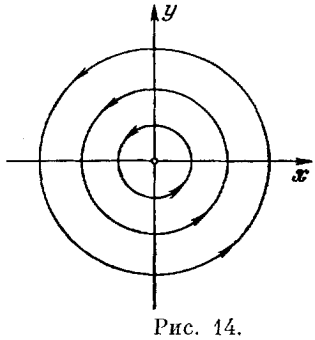


Рис. 14.

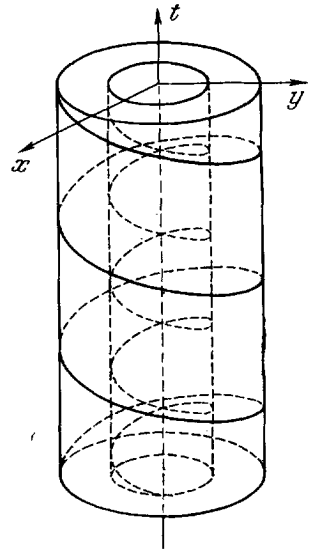


Рис. 15.

Решение системы, соответствующее начальным значениям t_0, x_0, y_0, имеет вид

$$x = x_0 e^{(t-t_0)}, \qquad y = y_0 e^{-(t-t_0)}. \tag{55}$$

Точка $O(0, 0)$ — состояние равновесия.

Система имеет аналитический интеграл

$$xy = C. \tag{56}$$

Интегральными кривыми являются при $C \neq 0$ гиперболы (56) и при $C = 0$ — координатные оси $x = 0$ и $y = 0$. Каждая гипербола состоит из двух траекторий (ее ветвей) и каждая из координатных осей — из трех траекторий (состояния равновесия O и двух полуосей). Соответствующее разбиение на траектории указано на рис. 17.

Из выражений (55) очевидно, что траектории, являющиеся полупрямыми оси x (получающаяся из (55) при $y_0 = 0$), стремятся к состоянию равновесия при $t \to -\infty$, а траектории, являющиеся полупрямыми оси y, при $t \to +\infty$. Других траекторий, стремящихся к состоянию равновесия O, система не имеет.

Состояние равновесия такого типа, как у данной системы, называется *седлом*. Траектории, стремящиеся к седлу O, в данном случае полупрямые $x = 0$ и $y = 0$ — называются *сепаратрисами седла*.

Траектории, сколь угодно близкие к сепаратрисе седла, при неограниченном возрастании t удаляются от сепаратрис. Такое поведение траекторий, очевидно, ни в какой мере не противоречит теореме 4 (о непрерывной зависимости от начальных значений), так как эта теорема рассматривает поведение близких траекторий только на конечном промежутке значений t. Нетрудно убедиться в том, что если взять за исходную

траекторию сепаратрису, то для любого конечного промежутка значений t теорема 4, очевидно, выполняется. Но при увеличении рассматриваемого промежутка величину δ (см. теорему 4′) нужно брать все меньше и меньше.

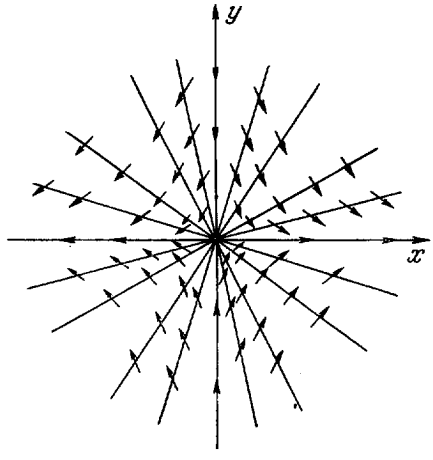


Рис. 16.

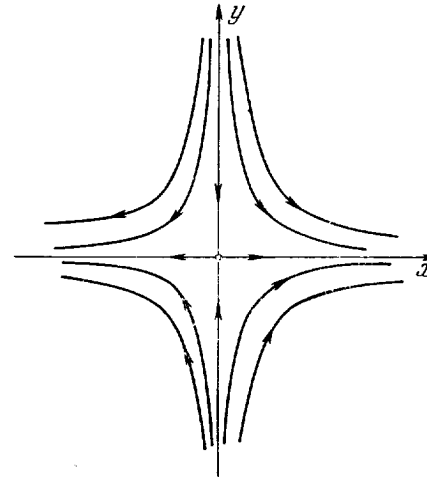


Рис. 17.

Рассмотрение интегральных кривых системы (54) в пространстве (x, y, t) аналогично проведенному в предыдущих примерах, и мы его опускаем.

Рассмотрим теперь несколько более сложных примеров, именно, несколько примеров нелинейных динамических систем. При этом будем рассматривать только разбиение на траектории фазовой плоскости, заданное этими системами, не обращаясь уже больше к пространству (x, y, t), как в примерах линейных систем.

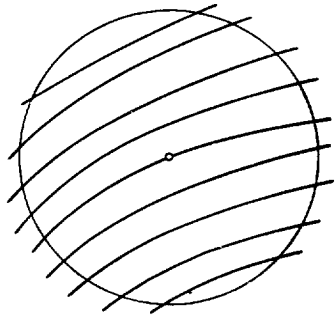


Рис. 18.

Сделаем предварительно следующее элементарное замечание, являющееся, однако, весьма существенным для понимания некоторых основных свойств разбиения на траектории: в окрестности всякой точки, отличной от состояния равновесия в «малом», траектории ведут себя «аналогично параллельным прямым». Это наглядно иллюстрируется рис. 18. Точный смысл этого утверждения, а также относящиеся сюда доказательства будут даны в п. 3 § 3. Далее, сделаем еще одно предварительное замечание.

Пусть наряду с системой

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{I}$$

задана система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) - f(x, y)\,Q(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + f(x, y)\,P(x, y), \tag{I_f}$$

где $f(x, y)$ — функция класса C_N, или аналитическая, определенная в той же области, что и система (I).

Легко видеть, что состояния равновесия системы (I) совпадают с состояниями равновесия системы (I_f). В каждой точке области G рассмотрим векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_f$, определенные соответственно системой (I) и (I_f). Если обозначить через θ и θ_f углы между положительным направлением оси x и векторами $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_f$, соответственно, то, очевидно,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)},\qquad \operatorname{tg}\theta_f=\frac{Q(x,\ y)+fP(x,\ y)}{P(x,\ y)-fQ(x,\ y)}.$$

Тогда тангенс угла между вектором $\boldsymbol{v}$ и вектором $\boldsymbol{v}_f$ дается выражением *)

$$\operatorname{tg}(\theta_f-\theta)=\frac{\dfrac{Q+fP}{P-fQ}-\dfrac{Q}{P}}{1+\dfrac{Q}{P}\left(\dfrac{Q+fP}{P-fQ}\right)}=f. \tag{57}$$

Формулы (57) означают, как мы будем сокращенно говорить, что векторное поле системы (I_f) *повернуто по отношению к векторному полю системы* (I) *на острый угол, тангенс которого равен* f.

Пример 7.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-y-x(x^2+y^2-1),\\ \frac{dy}{dt}&=x-y(x^2+y^2-1).\end{aligned} \tag{58}$$

Легко видеть, что система (58) имеет вид системы (I_f), в которой $P(x,\ y)=-y$, $Q(x,\ y)=x$ и $f(x,\ y)=x^2+y^2-1$. Системой же $\frac{dx}{dt}=P(x,\ y)$, $\frac{dy}{dt}=Q(x,\ y)$ является система (51) примера 5. Отсюда следует, что система (58), так же как и (51), имеет единственное состояние равновесия $O(0,\ 0)$ и что векторное поле системы (58) повернуто по отношению к полю системы (51) на острый угол, тангенс которого равен x^2+y^2-1.

Этот угол, очевидно, положителен в точке, где $(x^2+y^2-1)>0$, и отрицателен, где $(x^2+y^2-1)<0$, и равен нулю на окружности $x^2+y^2-1=0$.

Учитывая знак выражения x^2+y^2-1, нетрудно убедиться в том, что при $C>1$ траектории системы (58) *входят внутрь* окружностей $x^2+y^2=C$ и *выходят* из таких окружностей при $C<1$. На рис. 19 показаны направления векторов поля системы (58) (нарисованные векторы имеют одинаковую длину и этим отличаются от векторов системы (58)).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что окружность

$$x^2+y^2-1=0$$

есть интегральная кривая системы (58) и, следовательно, является ее замкнутой траекторией. В силу установленной выше связи между векторными полями систем (51) и (58) траектории

$$x^2+y^2=C \tag{59}$$

системы (51) являются *циклами без контакта* для траекторий системы (58), т. е. траектории системы (58) при $C\neq 1$ ни в одной точке не касаются

*) Отметим, что в любой неособой точке области G скалярное произведение $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_f)=P^2+Q^2>0$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_f$ не перпендикулярны.

окружностей (59). Окружность же

$$x^2+y^2=1$$

является одновременно траекторией обеих систем (51), (58).

На основании всего вышеизложенного представляется геометрически очевидным, что траектории системы (58) имеют характер, представленный

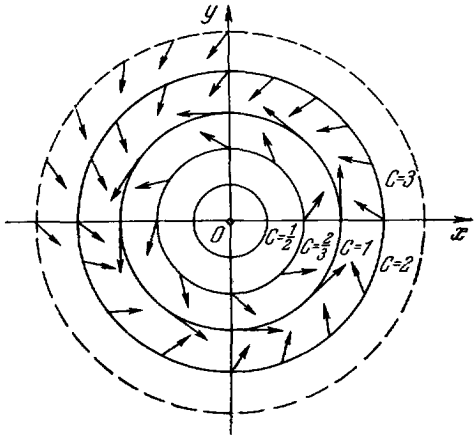


Рис. 19.

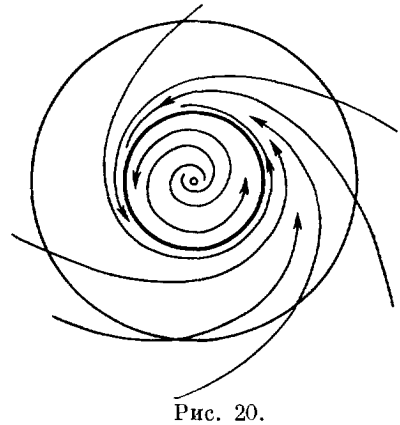


Рис. 20.

на рис. 20. Строго можно доказать это либо, пользуясь общей теорией, изложенной в пп. 11—13 § 3, либо, найдя уравнения траекторий в полярных координатах.

Полагая

$$x=\varrho\cos\theta, \qquad y=\varrho\sin\theta$$

или

$$\varrho^2=x^2+y^2, \qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

мы найдем

$$\frac{d\varrho^2}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2\varrho^2(\varrho^2-1),$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}}{x^2+y^2}=1 \tag{60}$$

и

$$\frac{d\varrho^2}{d\theta}=2\varrho^2(\varrho^2-1). \tag{61}$$

Интегрируя последнее уравнение, мы получим

$$\varrho^2=\frac{1}{1-Ce^{-2\theta}}, \qquad \varrho=\frac{1}{\sqrt{1-Ce^{-2\theta}}}.$$

Это и есть уравнение траекторий в полярных координатах. Траектории, проходящей через точку $M_0(\varrho_0, \theta_0)$, соответствует значение $C=\dfrac{(\varrho_0^2-1)\,e^{2\theta_0}}{\varrho_0^2}$. Если $\varrho_0>1$, то $C>0$ и $\varrho>1$; $\varrho\to 1$ при $\theta\to+\infty$ и $\varrho\to+\infty$ при

$\theta \to \frac{\lg C}{2} + 0$. (Очевидно, при этом θ изменяется в интервале $\frac{\lg C}{2} < \theta < +\infty$.) $\rho = 1$ является решением уравнения (61). Если $\rho_0 < 1$, то $C < 0$ и $\rho < 1$. Тогда $\rho \to 0$ при $\theta \to -\infty$ и $\rho \to 1$ при $\theta \to +\infty$. Отсюда следует, что траектории системы имеют вид, указанный на рис. 20. Второе из уравнений (60) показывает, что если траектория проходит через точку $M_0(\rho_0, \theta_0)$ при $t = t_0$, то $\theta = t + (\theta_0 - t_0)$. Состояние равновесия $O(0, 0)$ так же, как и в случае линейной системы (45) примера 4, является фокусом, причем неустойчивым.

Траектория $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (в отличие от того, что было в примере 6) не окружена замкнутыми траекториями. Она сама является изолированной замкнутой траекторией, и все траектории, проходящие через точки достаточно малой ее окрестности, стремятся к ней при $t \to +\infty$. Такая замкнутая траектория называется *предельным циклом*.

Подчеркнем, что на каждой траектории, лежащей вне предельного цикла, t изменяется от *конечного значения* $\frac{\lg C}{2}$ до $+\infty$. Это можно выразить, сказав, что при убывании t точка на такой траектории *уходит на бесконечность в конечное время*. Таким образом, траектории, лежащие вне предельного цикла, не являются целыми. Напротив, все траектории, лежащие внутри предельного цикла, очевидно, являются целыми, т. е. t на них меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Направление на траекториях может быть установлено непосредственно из системы. Так, например, при $x = 0$ и $y > 0$ мы имеем $\frac{dx}{dt} < 0$, т. е. в точках оси y с возрастанием t x убывает. Этого, очевидно, достаточно для определения направления на всех траекториях рассматриваемой системы.

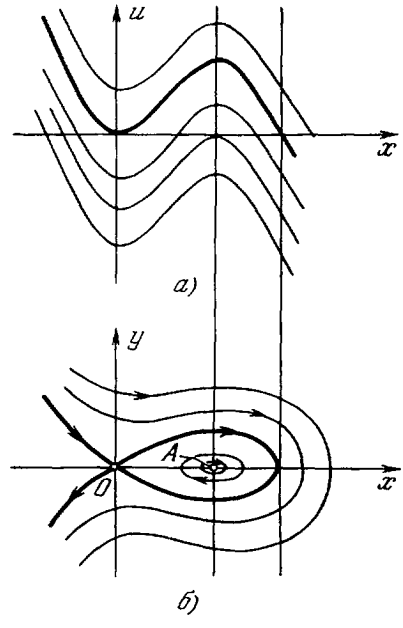


Рис. 21.

Пример 8.

$$\frac{dx}{dt} = 2y, \qquad \frac{dy}{dt} = 12x - 3x^2. \tag{62}$$

Система имеет два состояния равновесия $O(0, 0)$ и $A(4, 0)$. Система, очевидно, имеет аналитический интеграл

$$y^2 - 6x^2 + x^3 = C. \tag{63}$$

Характер семейства кривых (63) нетрудно установить, рассматривая вспомогательное семейство кривых:

$$u = 6x^2 - x^3 + C. \tag{64}$$

Так как $y = \sqrt{u}$, то семейство кривых (64) имеет вид, представленный на рис. 21, *а*, а семейство кривых (63) — вид, представленный на рис. 21, *б*.

Состояние равновесия O (0, 0) лежит на интегральной кривой (63) при $C = 0$. Эта интегральная кривая состоит из четырех траекторий состояния равновесия O, двух незамкнутых траекторий, одна из которых стремится к O при $t \to -\infty$, а другая при $t \to +\infty$ и «петли», стремящейся к состоянию равновесия O как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$.

Нетрудно убедиться в том, что состояние равновесия A (4, 0) принадлежит кривой (63), соответствующей $C = -32$. Эта кривая состоит из одной ветви и изолированной точки-состояния равновесия A. Остальные интегральные кривые не содержат состояний равновесия. При $C < -32$ кривая (63) имеет одну ветвь, расположенную левее бесконечных ветвей кривой (63) при $C = 0$. Если $-32 < C < 0$, то соответствующая кривая (63) состоит из двух ветвей, одна из которых есть замкнутая кривая (овал), содержащая точку A внутри себя. Наконец, при $C > 0$ кривая состоит из одной ветви (расположенной справа от кривой (63) при $C = 0$). Каждая ветвь интегральной кривой (при $C \neq 0$) является траекторией.

Состояние равновесия A является центром (см. пример 5). Состояние равновесия O — седло, стремящиеся к нему при $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$ траектории — сепаратрисы седла (см. пример 6).

Точное определение сепаратрисы будет дано в п. 4 § 5. Здесь мы заметим, что сепаратрисой седла называется не траектория, а полутраектория. При этом, говоря *о сепаратрисах, стремящихся к седлу*, мы не считаем различными сепаратрисы, из которых одна является частью другой (например, C_1O и C_2O на рис. 22). С этой точки зрения в рассматриваемом примере к седлу стремится 4 сепаратрисы. Две из этих сепаратрис принадлежат одной и той же траектории —«петле».

Направление на траекториях может быть установлено, если, например, в первом уравнении (62) положить $x = 0$, $y > 0$. Мы получаем

$$\frac{dx}{dt} = 2y > 0,$$

что позволяет определить направление на траекториях (рис. 21, *б*).

Пример 9.

$$\frac{dx}{dt} = 2y - \alpha(12x^2 - 3x^3), \qquad \frac{dy}{dt} = 12x - 3x^2 + 2\alpha y. \tag{65}$$

Поле системы (65) может быть получено, если поле системы (62) повернуть на постоянный угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = \alpha$. Следовательно, траектории системы (65) ни в одной точке не касаются траекторий системы (62). В частности, замкнутые траектории системы (62) являются циклами без контакта для траекторий системы (65).

Используя этот факт, можно на основании доказанных в § 3 предложений (см. пп. 11—13) установить расположение траекторий системы (65). Здесь мы дадим лишь наглядные геометрические пояснения. Для определенности предположим, что угол $\varphi < 0$. Тогда всякая траектория системы (65), пересекающая при $t = t_0$ какую-нибудь замкнутую траекторию системы (62) при $t \to +\infty$, стремится к состоянию равновесия (A), а при возрастании t выходит из области, заполненной замкнутыми траекториями.

Состояние равновесия O (0, 0) системы (65) является так же, как у системы (62), седлом. Однако расположение сепаратрис седла у системы (65) (рис. 22) отличается от расположения сепаратрис системы (62).

Можно сказать, что сепаратриса системы (62) после поворота поля, т. е. после перехода к системе (64), «разделяется» на две сепаратрисы.

Сепаратрисы L системы (65), лежащие слева от оси y, расположены аналогично сепаратрисам системы (62).

Пример 10.

$$\frac{dx}{dt} = 2y, \qquad \frac{dy}{dt} = 4x - 4x^3. \tag{66}$$

Приравнивая нулю правые части, мы находим состояния равновесия системы O (0, 0), F_1 (−1, 0), F_2 (1, 0).

Легко убедиться, что

$$y^2 - 2x^2 + x^4 = C \tag{67}$$

есть общий аналитический интеграл системы (66).

Исследование системы кривых (67) легко провести полностью аналогично тому, как это было сделано в примере 8. Пользуясь вспомогательным семейством кривых

$$u = 2x^2 - x^4 + C, \tag{68}$$

нетрудно построить семейство кривых (67) (рис. 23). Интегральная кривая $y^2 - 2x^2 + x^4 = 0$ состоит из трех траекторий — двух петель и состояния равновесия O (0, 0). При $C > 0$ каждая кривая (67) представляет

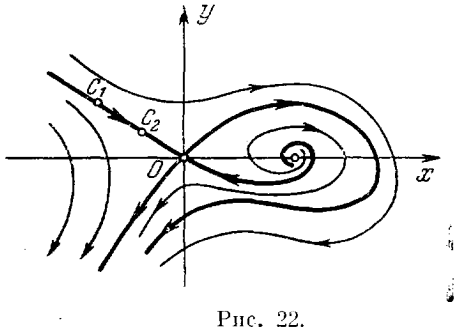


Рис. 22.

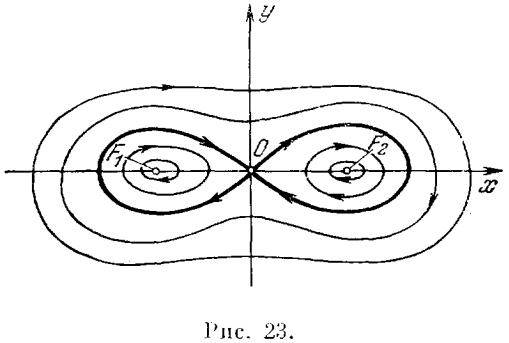


Рис. 23.

собой одну замкнутую кривую (овал), при $C < 0$ — два овала. Каждый из овалов является траекторией. При $C = -1$ мы получаем две изолированные точки — состояния равновесия F_1 и F_2.

Состояние равновесия O — седло, состояния равновесия F_1 и F_2 — центры.

Пример 11.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2y - \mu (y^2 - 2x^2 + x^4)(4x - 4x^3), \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 4x^3 + \mu (y^2 - 2x^2 + x^4)\, 2y. \end{aligned} \tag{69}$$

Легко видеть, что векторное поле системы (69) повернуто по отношению к векторному полю системы (66) примера 10 на острый угол, тангенс которого равен $\mu (y^2 - 2x^2 + x^4)$. Далее, непосредственно проверяется, что соотношение

$$y^2 - 2x^2 + x^4 = 0 \tag{70}$$

является интегралом системы (69). Поэтому кривая (70), представляющая интегральную кривую системы (66), является также интегральной кривой системы (69).

Наконец, заметим, что внутри кривой (70) выражение $y^2 - 2x^2 + x^4$ меньше 0, а вне — больше нуля.

Сравнивая векторные поля систем (66) и (69), нетрудно видеть, что все замкнутые траектории системы (66) (рис. 23) являются циклами без контакта для траекторий системы (69).

На основании этого, используя приведенные в пп. 11—13 § 3 леммы, можно показать, что разбиение на траектории имеет вид, представленный на рис. 24, *а*, при $\mu > 0$ и на рис. 24, *б* при $\mu < 0$. При $\mu > 0$ все траектории, лежащие вне кривой (70) при t возрастающем, уходят на бесконечность, а при $t \to -\infty$ «накручиваются» на кривую (70). Траектории, лежащие внутри кривой (70) при $t \to +\infty$, «накручиваются» на одну

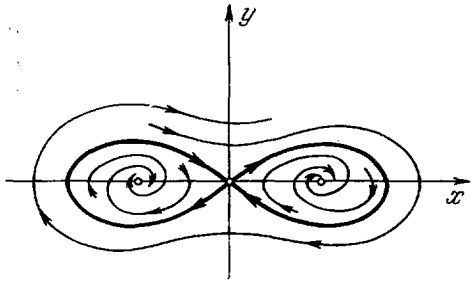


Рис. 24а.

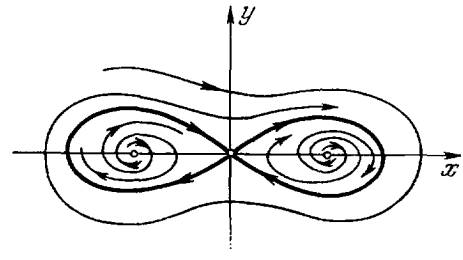


Рис. 24б.

из простых замкнутых кривых, составляющих часть кривой (70), а при $t \to -\infty$ стремятся к одному из состояний равновесия F_1 и F_2, которые являются «фокусами» (см. главу IV).

Состояние равновесия O — седло, кривая (70) является *предельным континуумом* (см. § 4) для траекторий, расположенных вне нее, а каждая ее петля (вместе с состоянием равновесия O) — предельным континуумом для траекторий, расположенных внутри этой петли. Аналогично обстоит дело при $\mu < 0$.

15. Замечания по поводу примеров. Приведенные выше примеры, на которых был проиллюстрирован целый ряд установленных выше предложений, одновременно являются примерами «исчерпывающего» исследования «качественной структуры» разбиения на траектории, т. е. «исчерпывающего» качественного исследования динамической системы.

Точное определение того, что называется «качественным характером» разбиения на траектории и качественным исследованием динамической системы, будет дано в главе III. Здесь мы опираемся пока лишь на непосредственно геометрически наглядные представления. С точки зрения качественного исследования знание точной формы траекторий не представляет интереса: мы уже подчеркивали это, указывая на одинаковое «качественное поведение» траекторий в случае узла и фокуса.

Однако существенный интерес представляет, например, знание числа состояний равновесия, факт наличия или отсутствия изолированной замкнутой траектории — предельного цикла, ход сепаратрис и так далее.

В приведенных выше примерах «исчерпывающее» качественное исследование разбиения на траектории удалось провести ввиду крайней простоты рассматриваемых динамических систем. В примерах 1—6 динамические системы являлись линейными. В других примерах получены обозримые аналитические выражения для решения или интегралов. Это позволяло

полностью решить вопрос о характере разбиения на траектории. Исследование характера разбиения на траектории в примерах 9 и 11 было проведено, опираясь на результаты примеров 8 и 10, на понятие циклов и кривых без контактов (о которых подробнее говорится в дальнейшем) и на свойства поворота поля.

Конечно, такое элементарное и исчерпывающее качественное исследование, как правило, не удается провести в случае произвольной динамической системы вида (I).

Мы не можем рассчитывать получить элементарные выражения для решений или интегралов в случае произвольной динамической системы. Вследствие этого даже очень простые по виду динамические системы, имеющие интерес в прикладных вопросах, требуют для своего качественного исследования создания специальных приемов. Примером этому может служить «система Ван-дер-Поля»

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = k(1 - x^2)\, y - x,$$

качественному исследованию которой посвящено большое количество работ.

Таким образом, естественно встает вопрос об отыскании *регулярных методов* качественного исследования динамических систем или хотя бы о достаточно эффективных приемах такого исследования.

Подчеркнем еще раз, что даже в тех случаях, когда у рассматриваемой динамической системы существует аналитический интеграл (в смысле п. 13) и найдено его аналитическое выражение

$$\Phi(x,\ y) = C \tag{71}$$

(как это имело место в примерах 8 и 9), вопрос качественного исследования разбиения на траектории, как правило, не делается тривиальным. Он сводится, правда, к вопросу качественного исследования семейства кривых (71). Однако в настоящее время не существует регулярных методов качественного исследования семейства кривых (71) или отдельной кривой

$$F(x,\ y) = 0.$$

Такие методы отсутствуют даже в том случае, когда функции $\Phi(x,\ y)$ и $F(x,\ y)$ являются многочленами.

Поэтому ни в какой мере не следует думать, что знание аналитического интеграла (в тех случаях, когда он существует) сразу же решает задачу качественного исследования динамической системы: оно просто сводит одну задачу — задачу непосредственного исследования разбиения на траектории, заданного системой (I) — к задаче качественного исследования семейства кривых вида (71).

Поэтому представляется целесообразным отыскание методов или приемов непосредственного качественного исследования системы (I), без предварительного нахождения аналитических выражений для решений. Такие приемы указываются в главах IV, V, VI и IX.

Прежде чем переходить к описанию таких приемов, естественно установить некоторые общие свойства разбиения на траектории. Необходимо выяснить: каким вообще может быть разбиение на траектории, определенное системой (I). Вопросом, который при этом возникает первым, является вопрос о том, какие типы траекторий *вообще* возможны у динамических систем вида (I).

В п. 5 было установлено, что траектории могут быть состояниями равновесия, замкнутыми и незамкнутыми траекториями. Однако это еще слишком общие, неконкретные сведения о возможном характере траектории (в случае незамкнутой траектории).

В рассматриваемых примерах уже встречались различные типы незамкнутых траекторий или, точнее, полутраекторий: полутраектории, стремящиеся к замкнутой траектории при $t \to +\infty$, полутраектории, стремящиеся к некоторому «предельному континууму», состоящему из двух петель сепаратрис седла и самого седла. Можно ли сказать, что в рассматриваемых примерах представлены все возможные типы траекторий или возможны траектории совсем иного характера? Этому вопросу посвящена глава II.

Кроме вопроса о возможном характере отдельной траектории возникает ряд вопросов, касающихся разбиения на траектории в целом. Мы остановимся на этих вопросах позднее.

Заключим эту главу рассмотрением динамических систем на сфере.

§ 2. Динамические системы на сфере

1. Введение. В настоящем параграфе дается определение динамической системы на сфере и устанавливаются некоторые ее основные свойства.

Динамические системы на сфере вводятся в рассмотрение вследствие того, что они, с одной стороны, сохраняют все существенные черты плоских систем (1), а с другой стороны, освобождены от некоторых их свойств, вносящих осложнения: именно, при изучении плоских динамических систем, определенных в *открытой* плоской области G, возникают трудности, связанные с тем, что такая область некомпактна. Если же рассматривать систему в замкнутой ограниченной плоской области $\overline{G}$, возникают осложнения из-за неравноправности точек такой области — наличия внутренних и граничных точек. Сфера же компактна, и все ее точки равноправны.

Динамическая система на сфере является частным случаем динамической системы на замкнутой ориентируемой поверхности любого данного рода $k \geqslant 0$ *) [15]. Определение всякой такой динамической системы может быть дано полностью аналогично приведенному ниже определению динамической системы на сфере. Однако среди динамических систем на замкнутых ориентируемых поверхностях только динамические системы на поверхностях рода нуль сохраняют все существенные свойства плоских систем: только у таких систем отдельные траектории и разбиение на траектории сохраняют тот же характер, что и у плоских систем. Напротив, динамические системы на замкнутых поверхностях более сложной топологической структуры — на ориентируемых поверхностях рода $k \geqslant 1$, а также на неориентируемых, обладают некоторыми свойствами, существенно отличающимися от свойств плоских систем.

Так, например, у систем на поверхности рода 1 (на торе) могут существовать траектории, всюду плотно заполняющие всю поверхность. Как мы увидим, этого не может быть у динамических систем на плоскости и на поверхности рода нуль.

Таким образом, желая рассмотреть динамические системы на поверхностях, сохраняющих все основные черты плоских систем, мы должны были бы рассмотреть динамические системы на произвольных поверхностях рода нуль. Мы ограничимся только случаем сферы ввиду того, что при этом мы можем использовать элементарные аналитические средства.

2. Определение динамической системы на сфере. Будем для простоты предполагать, что рассматривается сфера, расположенная в трехмерном пространстве R^3

*) К рассмотрению динамических систем на поверхностях непосредственно приводят многие прикладные задачи. Так, например, к рассмотрению динамических систем на цилиндре приводят задача Жуковского о динамике симметричного полета самолета (см. [16]), задача об автоподстройке частоты и многие другие. К рассмотрению динамической системы на торе приводит, например, задача об устойчивости параллельной работы синхронных машин и др. [17]. Необходимость рассмотрения динамических систем на поверхности, естественно, возникает также при изучении свойств динамических систем в пространстве трех и большего числа измерений. О динамических системах на поверхностях см. [18].

и имеющая уравнение $x^2+y^2+z^2=1$. Очевидно, такое предположение не ограничивает общности рассуждений.

Пусть на сфере введено некоторое регулярное координатное покрытие класса r (или аналитическое). Это означает (см. дополнение, § 7, п. 3), что задано некоторое покрытие сферы областями $g_1, g_2, \ldots, g_N$, гомеоморфными плоским областям, и в каждой области g_i этого покрытия введена система координат с помощью функций

$$x=\varphi_i(u_i, v_i), \qquad y=\psi_i(u_i, v_i), \qquad z=\chi_i(u_i, v_i), \tag{1}$$

удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции (1) дают топологическое отображение некоторой области H_i плоскости (u_i, v_i) на область сферы g_i;

б) φ_i, ψ_i, χ_i являются функциями класса C_r или аналитическими;

в) ни в одной точке области H_i функциональные определители

$$\frac{D(\varphi_i, \psi_i)}{D(u_i, v_i)}, \qquad \frac{D(\varphi_i, \chi_i)}{D(u_i, v_i)}, \qquad \frac{D(\psi_i, \chi_i)}{D(u_i, v_i)}$$

не обращаются одновременно в нуль.

Уравнения (1) мы можем рассматривать так же, как параметрические уравнения области g_i сферы, а u_i, v_i — как *криволинейные координаты*, введенные в области g_i сферы.

Если две области заданного покрытия g и $\widetilde{g}$ (мы воспользуемся здесь другими обозначениями, без индексов) имеют общие точки и, следовательно, общую область

$$\omega=g\cap\widetilde{g},$$

то в области ω введены как координаты u, v, так и координаты $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$. Тогда функции

$$\widetilde{u}=f(u, v), \quad \widetilde{v}=h(u, v) \quad \text{или} \quad u=\widetilde{f}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \ v=\widetilde{h}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \tag{2}$$

выражающие одни координаты через другие, определяют в области регулярное преобразование координат класса C_r (аналитическое) (см. дополнение, § 6 и § 1, п. 10).

Определение I. *Мы скажем, что на сфере s задана динамическая система класса C_k (или соответственно аналитическая), если при некотором координатном покрытии сферы класса C_{k+1} (или аналитическом) выполняется следующее:*

1) *в каждой области g_i покрытия задана динамическая система*

$$\frac{du_i}{dt}=U_i(u_i, v_i), \qquad \frac{dv_i}{dt}=V_i(u_i, v_i) \tag{3}$$

($u_i v_i$ — локальные координаты, введенные в области g_i) класса C_k (или аналитическая), определенная во всех точках области H_i значений u_i, v_i;

2) *в точках, общих двум областям покрытия g и $\widetilde{g}$, т. е. в точках области $\omega=g\cap\widetilde{g}$, соответствующие динамические системы переходят друг в друга путем преобразования координат, переводящего одну координатную систему в другую; т. е. если*

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt}=\widetilde{U}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \qquad \frac{d\widetilde{v}}{dt}=\widetilde{V}(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \tag{4}$$

— динамическая система, заданная в области $\widetilde{g}$, то в области ω эта система получается из системы (1), *заданной в области g, путем преобразования координат* (2), *так что*

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\widetilde{u}, \widetilde{v})&=\frac{\partial f}{\partial u}U(\widetilde{f}, \widetilde{g})+\frac{\partial f}{\partial v}V(\widetilde{f}, \widetilde{g}),\\ \widetilde{V}(\widetilde{u}, \widetilde{v})&=\frac{\partial h}{\partial u}U(\widetilde{f}, \widetilde{g})+\frac{\partial h}{\partial v}V(\widetilde{f}, \widetilde{g})\end{aligned} \tag{5}$$

(u, наоборот, система вида (3) *может быть получена из системы* (4) *путем соответствующего преобразования координат).*

Систему (3) мы будем называть *системой соответствующей области g_i.*

Введем определение тождественности динамических систем на сфере.

Пусть на сфере S заданы два различных координатных покрытия Σ_1 и Σ_2 класса C_{k+1} (аналитических). Будем локальные координаты одного покрытия обозначать через u_i, v_i, а другого — через ξ_i, η_i. Если область g покрытия Σ_1 и область γ покрытия Σ_2 пересекаются, то каждой точке их пересечения

$$\lambda=g\cap\gamma$$

соответствуют как координаты u, v, так и координаты ξ, η (индексы мы опускаем). Преобразование от одних из этих координат к другим, заданное формулами

$$\begin{aligned} \xi &= f^*(u, v), \qquad u = f^{**}(\xi, \eta), \\ \eta &= h^*(u, v), \qquad v = h^{**}(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{6}$$

является (в силу теоремы VIII § 6 дополнения, совершенно так же как и в случае областей g и $\widetilde{g}$, принадлежащих одному и тому же покрытию) регулярным преобразованием класса C_{k+1} или аналитическим.

Предположим, что на сфере при покрытиях Σ_1 и Σ_2 заданы динамические системы, которые мы обозначим соответственно через D_1 и D_2.

Мы скажем, что эти динамические системы тождественны или эквивалентны, если в точках пересечения двух областей g и γ, принадлежащих двум различным покрытиям, переход от одной динамической системы D_1 к другой D_2 совершается с помощью преобразования, переводящего одну координатную систему в другую.

Таким образом, если система D_1 тождественна системе D_2 и если система D_1 в области g имеет вид

$$\frac{du}{dt} = U(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = V(u, v), \tag{7}$$

а система D_2 в области γ имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi(\xi, \eta), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \Psi(\xi, \eta), \tag{8}$$

то в области $\lambda = g \cap \gamma$ система (8) получается из системы (7) путем преобразования (6), так что (полностью аналогично тому, что мы имели в случае двух пересекающихся областей одного и того же покрытия)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f^*}{\partial u} U(f^{**}, h^{**}) + \frac{\partial f^*}{\partial v} V(f^{**}, h^{**}) = \Phi(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial h^*}{\partial u} U(f^{**}, h^{**}) + \frac{\partial h^*}{\partial v} V(f^{**}, h^{**}) = \Psi(\xi, \eta).$$

Введенное определение тождественности динамических систем на сфере позволяет при рассмотрении таких систем переходить от одного координатного покрытия к другому.

Мы будем по преимуществу пользоваться простейшим координатным покрытием, которое описано в § 7 дополнения. В этом случае одна из областей покрытия g состоит из всех точек сферы, кроме одной — N, а другая — $\widetilde{g}$ из всех точек сферы, кроме точки $\widetilde{N}$, диаметрально противоположной точке N. Тогда если u, v — координаты в области g, а $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ — координаты в области $\widetilde{g}$, то во всех точках, общих областям g и $\widetilde{g}$, мы имеем

$$\widetilde{u} = \frac{4u}{u^2 + v^2}, \qquad \widetilde{v} = \frac{4v}{u^2 + v^2} \tag{9}$$

и совершенно симметрично

$$u = \frac{4\widetilde{u}}{\widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2}, \qquad v = \frac{4\widetilde{v}}{\widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2}. \tag{10}$$

Если D — динамическая система на сфере и g — какая-нибудь область сферы, отличная от всей сферы в целом, то система D в области g эквивалентна динамической системе в плоской области. В самом деле, всегда можно ввести такое координатное покрытие сферы, чтобы область g целиком лежала в одной и той же области покрытия. Для этого достаточно выбрать точку N, не принадлежащую области g, и ввести на сфере простейшее координатное покрытие, описанное выше, с помощью стереографических проекций с центрами в точке N и диаметрально противоположной точке $\widetilde{N}$. В случае когда не только сама область g, но и ее замыкание $\overline{g}$ отлично от всей сферы в целом, то, очевидно, динамическая система D в замкнутой области $\overline{g}$ сферы эквивалентна динамической системе в замкнутой плоской области.

Сделаем еще одно замечание, касающееся аналитических динамических систем. Аналитическая динамическая система на сфере однозначно и полностью определена,

если она известна в произвольной области g сферы (как бы мала она ни была) в силу того, что аналитические функции можно продолжить единственным образом. Однако не всякая система, заданная на некоторой части сферы и аналитическая на этой части, может быть продолжена на всю сферу. (Так как при продолжении у правых частей системы могут оказаться полюсы или существенно особые точки.)

3. Динамическая система на сфере как векторное поле на сфере. Совершенно аналогично случаю системы в плоской области задание динамической системы на сфере может быть интерпретировано как задание векторного поля на сфере.

Пусть u, v — координаты в области g рассматриваемого покрытия сферы, и

$$\frac{du}{dt}=U(u, v), \qquad \frac{dv}{dt}=V(u, v)$$

— динамическая система в этой области. Будем записывать параметрические уравнения

$$x=\varphi(u, v), \qquad y=\psi(u, v), \qquad z=\chi(u, v) \tag{11}$$

области g сферы в векторной форме

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\Phi}(u, v),$$

где $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор произвольной точки M области g в пространстве (x, y, z). Рассмотрим в каждой точке $M(u, v)$ области g сферы вектор

$$\boldsymbol{v}(M)=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(u, v)}{\partial u}U(u, v)+\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(u, v)}{\partial v}V(u, v).$$

Этот вектор, как линейная комбинация векторов $\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u}$, $\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial v}$, лежит в плоскости касательной к сфере в точке M. Нетрудно видеть, что этот вектор не зависит от системы координат, введенной на сфере. Действительно, пусть в некоторой области ω сферы наряду с координатами u, v рассматриваются координаты $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, связанные с u и v соотношениями вида (2). Тогда по определению тождественности динамических систем на сфере в области ω динамическая система в координатах $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ будет иметь вид

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\tilde{U}(\tilde{u}, \tilde{v}), \qquad \frac{du}{dt}=\tilde{V}(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

где $\tilde{U}(\tilde{u}, \tilde{v})$ и $\tilde{V}(\tilde{u}, \tilde{v})$ выражаются через $U(u, v)$ и $V(u, v)$ по формулам (5).

Если $\boldsymbol{r}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tilde{u}, \tilde{v})$ — векторное параметрическое уравнение части сферы ω в координатах $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ (аналогичное уравнениям вида (11)), то для определенного выше вектора $\boldsymbol{v}$, очевидно, будет иметь место соотношение

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial\tilde{u}}\tilde{U}+\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial\tilde{v}}\tilde{V}=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u}U+\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial v}V. \tag{12}$$

Таким образом, динамическая система в каждой точке сферы определяет вектор, касательный к сфере, т. е. задает на сфере *векторное поле*. Очевидно, в точках, в которых одновременно $u=v=0$, вектор $\boldsymbol{v}$ имеет нулевую длину. Эти точки являются особыми точками векторного поля.

4. Решения и траектории динамической системы на сфере. Определим, что называется решением динамической системы на сфере. Сделаем сначала некоторые предварительные замечания.

Пусть по-прежнему g — некоторая область заданного покрытия сферы, в которой введены координаты u и v,

$$x=\varphi(u, v), \qquad y=\psi(u, v), \qquad z=\chi(u, v),$$

т. е. даны параметрические уравнения области g сферы, которые мы будем как и выше записывать в векторной форме

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\Phi}(u, v).$$

Пусть

$$\frac{du}{dt}=U(u,\ v),\qquad \frac{dv}{dt}=V(u,\ v)$$

— система, соответствующая области g,

$$u=u(t),\qquad v=v(t) \tag{13}$$

— какое-нибудь решение этой системы. Рассмотрим функции

$$x=\varphi(u,\ v)=f_1(t),\qquad y=\psi(u,\ v)=f_2(t),\qquad z=\chi(u,\ v)=f_3(t)$$

или эквивалентную им вектор-функцию

$$r=F(t)=\Phi(u(t),\ v(t)). \tag{14}$$

При всех t, при которых определено решение (13), функция (14) непрерывна. Эту вектор-функцию, естественно, считать решением или «частью решения» динамической системы на сфере. Может случиться, что при некотором значении t_0 точка M_0 сферы с координатами $u_0=u(t_0)$, $v_0=v(t_0)$ будет принадлежать области $\widetilde{g}$ заданного покрытия сферы, пересекающейся с областью g (рис. 25). Пусть

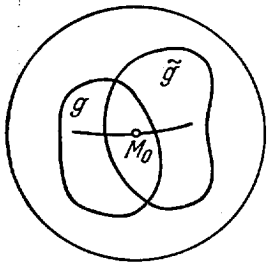


Рис. 25.

$$\omega=g\cap\widetilde{g},$$

$\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ — координаты в области $\widetilde{g}$, связанные в области ω с координатами u и v соотношениями

$$\widetilde{u}=f(u,\ v),\qquad \widetilde{v}=h(u,\ v)\ (u=\widetilde{f}(\widetilde{u},\ \widetilde{v}),\qquad v=\widetilde{h}(\widetilde{u},\ \widetilde{v})),$$

а

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt}=\widetilde{U}(\widetilde{u},\ \widetilde{v}),\qquad \frac{d\widetilde{v}}{dt}=\widetilde{V}(\widetilde{u},\ \widetilde{v}) \tag{15}$$

— динамическая система, соответствующая области $\widetilde{g}$. Рассмотрим решение системы (15) при $t=t_0$, принимающее значения

$$\widetilde{u}_0=f(u_0,\ v_0),\qquad \widetilde{v}_0=h(u_0,\ v_0),$$

и обозначим его через

$$\widetilde{u}=\widetilde{u}(t),\qquad \widetilde{v}=\widetilde{v}(t).$$

Принимая во внимание сказанное в § 1, п. 10, очевидно, что в точках области ω мы имеем

$$\widetilde{u}(t)\equiv f(u(t),\ v(t)),\qquad \widetilde{v}(t)\equiv h(u(t),\ v(t)). \tag{16}$$

Пусть

$$x=\widetilde{\varphi}(\widetilde{u},\ \widetilde{v}),\qquad y=\widetilde{\psi}(\widetilde{u},\ \widetilde{v}),\qquad z=\widetilde{\chi}(\widetilde{u},\ \widetilde{v})$$

— параметрические уравнения области $\widetilde{g}$ сферы, которые мы будем записывать в векторной форме

$$r=\widetilde{\Phi}(\widetilde{u},\ \widetilde{v}).$$

Рассмотрим вектор-функцию (аналогичную вектор-функции $r=\Phi(u,\ v)$)

$$r=\widetilde{\Phi}(\widetilde{u},\ \widetilde{v}). \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что при всех значениях t, при которых точка с координатами $u(t)$, $v(t)$ (или соответственно $\widetilde{u}(t)$, $\widetilde{v}(t)$) принадлежит области ω, имеет место тождество

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{u},\ \widetilde{v})\equiv\Phi(u,\ v). \tag{18}$$

Это непосредственно вытекает из того, что по самому определению вектор-функций $\Phi(u,\ v)$ и $\Phi(\widetilde{u},\ \widetilde{v})$ в точках области ω имеют место тождества

$$\widetilde{\Phi}(f,\ h)\equiv\Phi(u,\ v),$$

а также из равенств (16). В частности, может случиться, что функции

$$\widetilde{u}=\widetilde{u}(t),\qquad \widetilde{v}=\widetilde{v}(t)$$

определены не только в точках области ω, но и в отличных от точек ω точках области $\tilde{g}$.

Определим тогда вектор-функцию

$$r = F(t)$$

так, чтобы

$$F(t) \equiv \Phi(u(t), v(t))$$

при тех значениях t, при которых точка $u(t)$, $v(t)$ принадлежит области g сферы, и

$$F(t) \equiv \tilde{\Phi}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$$

при тех значениях t, при которых точка $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ принадлежит области $\tilde{g}$. Вектор-функция

$$r = F(t)$$

является в силу (18) *непрерывной* вектор-функцией, которую естественно считать «решением» или частью решения динамической системы на сфере. Можно сказать, что вектор-функция $r = \tilde{\Phi}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ является *продолжением* на область $\tilde{g}$ вектор-функции $r = \Phi(u(t), v(t))$, определенной в области g. Если бы точка сферы с координатами $\tilde{u}(t)$, $\tilde{v}(t)$ принадлежала бы некоторой области $\tilde{\tilde{g}}$ заданного покрытия, пересекающейся с $\tilde{g}$, то мы могли бы рассмотреть непрерывную вектор-функцию, определенную совершенно аналогичным образом и для точек области $\tilde{\tilde{g}}$ и т. д. После этих предварительных замечаний дадим определение решения динамической системы на сфере.

Система непрерывных функций $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ *или эквивалентная им непрерывная вектор-функция* $r = F(t)$, *определенная на интервале* (α, β) *значений* t, *называется решением динамической системы* D *на сфере, если*:

а) в каждой области g покрытия сферы

$$F(t) \equiv \Phi(u(t), v(t)),$$

где $r = \Phi(u, v)$ — вектор-функция, дающая при выбранных координатах параметрические уравнения части g сферы, а функции $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют в соответствующей области g системе, так что

$$\frac{du(t)}{dt} \equiv U(u(t), v(t)), \qquad \frac{dv(t)}{dt} = V(u(t), v(t));$$

б) не существует непрерывной вектор-функции $r = F(t)$, определенной на интервале более широком, чем (α, β) *), удовлетворяющей условию а) и совпадающей с функцией $F(t)$ на интервале (α, β).

Последнее условие означает, что решение рассматривается на *максимальном возможном интервале значений* t.

Принимая во внимание правила замены переменных и соотношения вида (18), нетрудно убедиться в том, что *решение динамической системы на сфере не зависит от выбора координатного покрытия сферы*. Из теоремы 1 § 1 (о существовании и единственности решения) и самого определения решения динамической системы на сфере непосредственно вытекает следующая теорема:

Теорема 5. *Для всякой точки* M_0 *на сфере и для любого* t_0 *существует одно и только одно решение* $r = F(t)$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$r_0 = F(t_0),$$

где r_0 — *радиус-вектор точки* M_0.

Для решения $r = F(t)$ динамической системы на сфере справедливы также предложения, аналогичные леммам 1—5 § 1. В частности, например, если $r = F(t)$ — решение, определенное на интервале (α, β), то $r = F(t + C)$ также является решением, определенным на интервале $(\alpha - C, \beta - C)$.

Траекторией динамической системы на сфере называется множество точек на сфере, определяемое уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ или эквивалентным векторным уравнением $r = F(t)$. Каждому решению соответствует вполне определенная траектория L. Решение, которому соответствует траектория L, будем, как и в случае динамической системы на плоскости, называть *решением, соответствующим данной траектории*.

Решение будем также называть *движением*, соответствующим траектории, или *движением на траектории*.

---

*) То есть на интервале, содержащем (α, β), как свою истинную часть.

В каждой точке M_0 сферы, не являющейся особой точкой того векторного поля, которое определяется на сфере заданием динамической системы, соответствующий вектор является касательным вектором в точке M_0 к траектории, проходящей через эту точку. Действительно, пусть

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}(t)$$

— какое-нибудь решение рассматриваемой системы D и L — соответствующая траектория. Пусть при значении t_0 точка M_0 сферы с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{F}(t_0)$ принадлежит области покрытия g сферы с координатами u, v. Обозначим через u_0, v_0 координаты точки M_0. Пусть

$$\frac{du}{dt}=U(u, v), \qquad \frac{dv}{dt}=V(u, v)$$

— соответствующая области g система. Мы имеем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\frac{d\boldsymbol{F}(t)}{dt}\right)_{t=t_0}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(u, v)}{\partial u}\frac{d(u)}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(u, v)}{\partial v}\frac{d(v)}{dt}\right).$$

$\left(\frac{d\boldsymbol{F}(t)}{dt}\right)_{t=t_0}$, очевидно, является касательным вектором к траектории L_0 в точке M_0. Так как $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}(t)$ есть решение системы D, то по самому определению

$$\left(\frac{du(t)}{dt}\right)_{t=t_0}=U(u_0, v_0), \qquad \left(\frac{dv(t)}{dt}\right)_{t=t_0}=V(u_0, v_0),$$

и, следовательно, мы имеем

$$\left(\frac{d\boldsymbol{F}(t)}{dt}\right)_{t=t_0}=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0)}{\partial u}U(u_0, v_0)+\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0)}{\partial v}V(u_0, v_0).$$

Но выражение в правой части и есть вектор $\boldsymbol{v}$, который в точке M_0 задается рассматриваемой динамической системой.

Таким образом, получается следующая «кинематическая» интерпретация динамической системы на сфере и ее решений, не связанная ни с какими координатами на сфере: динамическая система — заданное на сфере поле касательных векторов $\boldsymbol{v}(M)$, называемых фазовыми скоростями точек M; решение динамической системы — движение $z=\boldsymbol{F}(t)$ на сфере, обладающее тем свойством, что скорость точки в момент ее прохождения через произвольное положение M_0 равна фазовой скорости в точке M_0; траектория динамической системы — путь, описываемый точкой при движении.

Имеет место следующая теорема, доказательство которой, полностью аналогичное доказательству такой же теоремы для системы в плоской области, мы опускаем:

Т е о р е м а 6. *Через каждую точку сферы проходит одна и только одна траектория динамической системы.*

Сделаем еще некоторое замечание, касающееся траектории динамической системы на сфере.

Рассмотрим при некотором заданном координатном покрытии какую-нибудь траекторию L динамической системы D на сфере.

Возможны два случая: 1) траектория L лежит целиком в одной и той же области покрытия; 2) у траектории L существуют точки в различных областях покрытия g, $\widetilde{g}$, $\widetilde{\widetilde{g}}$ и т. д.

Пусть в первом случае u, v — координаты в области g и

$$\frac{du}{dt}=U(u, v), \qquad \frac{dv}{dt}=V(u, v) \tag{19}$$

— система, соответствующая области g. Будем рассматривать u и v как прямоугольные координаты на плоскости и предположим, что система (19) определена в области h плоскости (u, v). Тогда согласно п. 2 функции (1) задают отображение T области h плоскости (u, v) на область g сферы, обладающее свойствами а), б) и в), сформулированными в п. 2. При этом из самого определения траектории системы D очевидно, что в рассматриваемом случае траектория L динамической системы на сфере является отображением некоторой траектории L' системы (19) плоскости (u, v).

Рассмотрим случай 2), когда у траектории L есть точки в различных областях заданного покрытия. Тогда эти области покрытия должны попарно пересекаться. Предположим для определенности, что траектория L имеет точки в двух областях g и $\widetilde{g}$ (случай большего числа областей рассматривается полностью аналогично).

Пусть

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\tilde{U}(\tilde{u},\tilde{v}),\qquad \frac{d\tilde{v}}{dt}=\tilde{V}(\tilde{u},\tilde{v}) \tag{20}$$

— система, соответствующая области $\tilde{g}$. Как и в случае области g, будем считать $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ прямоугольными координатами на плоскости $(\tilde{u},\ \tilde{v})$ и предположим, что система (20) определена в области $\tilde{h}$ плоскости $(\tilde{u},\ \tilde{v})$. Функции вида (1) будут тогда давать отображение области $\tilde{h}$ плоскости $(\tilde{u},\ \tilde{v})$ на область $\tilde{g}$ сферы. При этом на траектории L есть части (одна или несколько), являющиеся отображением траекторий (одной или нескольких), системы (19) и есть части (одна или несколько), являющиеся отображением траекторий системы (20). Части траектории L, лежащие в области $\omega = g \cap \tilde{g}$, являются одновременно отображением частей траектории как системы (19), так и системы (20).

Докажем теперь еще одну основную теорему, касающуюся траекторий на сфере. Аналогичной теоремы нет в случае динамических систем на плоскости.

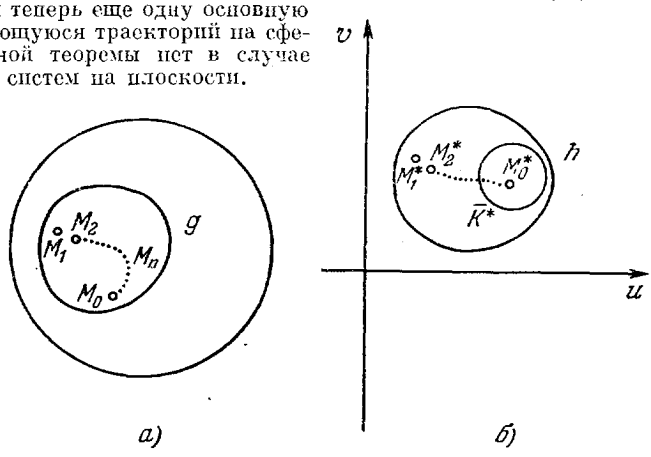


Рис. 26.

Теорема 7. *Каждая траектория на сфере является целой траекторией, т. е. всякое решение динамической системы на сфере определено для всех значений t от $-\infty$ до $+\infty$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что какое-нибудь решение $r=F(t)$ определено лишь для значений $t<\tau_0$, где τ_0 — некоторое конечное число. Обозначим через L траекторию, соответствующую решению $F(t)$.

Рассмотрим последовательность значений $\{t_i\}$ $(t_i<\tau_0)$, стремящихся к τ_0. Обозначим через $M_1, M_2, \ldots, M_n \ldots$ точки траектории L, соответствующие указанным значениям t. В силу компактности сферы мы можем считать, что последовательность M_n является сходящейся (если это не так, мы можем выбрать из нее сходящуюся подпоследовательность). Пусть последовательность $\{M_n\}$ сходится к точке M_0. Рассмотрим какую-нибудь содержащую точку M_0 область g сферы, в которой введены координаты u, v; и пусть T — отображение области h в g (рис. 26). Обозначим через M_n^* точки плоскости $(u,\ v)$, которые отображаются в точку M_n, $M_n^*=T^{-1}(M_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, и через u_n, v_n — координаты точки M_n^*.

Рассмотрим какую-нибудь замкнутую область $\overline{K}^*$, лежащую в h и содержащую точку M_0^* внутри себя (рис. 26, *б*). В силу леммы 8 (§ 1, п. 9) существует такое число $\eta_0>0$, что всякое решение

$$u=u(t),\qquad v=v(t)$$

системы вида (20) (соответствующей области g), проходящее при $t=t_0$ через точку области $\overline{K}^*$, определено для всех значений t в интервале $t_0-\eta_0\leqslant t\leqslant t_0+\eta_0$. Выберем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$0<\tau_0-t_n<\frac{\eta_0}{2}\ . \tag{21}$$

Такое n существует в силу соотношений $M_n\to M_0$, $t_n\to\tau_0$. Рассмотрим решение

$$u=u(t-t_n;\ u_n;\ v_n),\qquad v=v(t-t_n;\ u_n;\ v_n) \tag{22}$$

системы (20). Это решение в силу выбора n определено для значений t в интервале $t_n \leqslant t \leqslant t_n + \eta_0$. В силу (21) $\tau_0 - \frac{\eta_0}{2} < t_n < \tau_0$. Таким образом, решение (22) и определено в интервале $t_n \leqslant t \leqslant \tau_0 + \frac{\eta_0}{2}$. Так как после «переноса» этого решения с помощью отображения T $(h \to g)$ оно должно совпасть с решением $r = F(t)$, то это последнее также определено на интервале $t_n \leqslant t \leqslant \tau_0 + \frac{\eta_0}{2}$. Но тогда по самому определению решения динамической системы на сфере очевидно, что и рассматриваемое решение $r = F(t)$ во всяком случае определено при всех значениях t, $t_n \leqslant t \leqslant \tau_0 + \frac{\eta_0}{2}$.

Мы пришли к противоречию с предположением, что решение $F(t)$ определено только для значений $t < \tau_0$. Теорема доказана.

В силу теоремы 6 динамическая система на сфере определяет разбиение сферы на траектории, причем в силу теоремы 7 все траектории являются целыми.

Выше мы указали некоторые основные элементарные свойства траекторий динамических систем на плоскости. Теми же свойствами обладают и траектории на сфере. Траектории на сфере так же, как и на плоскости, являются либо *состояниями равновесия*, либо *незамкнутыми*, либо *замкнутыми траекториями*. Это доказывается в точности так же, как и в плоской области (см. § 1).

Состояния равновесия соответствуют *особым точкам* векторного поля на сфере, т. е. точкам, в которых соответствующий вектор $\sigma(M) = 0$. Далее, для траектории на сфере справедлива теорема о непрерывной зависимости от начальных значений. Ее можно сформулировать в точности в такой же геометрической форме, как в случае плоскости (см. § 1, п. 9, теорема 4′).

В п. 7 § 1 мы ввели термины: положительная полутраектория, отрицательная полутраектория, просто полутраектория, и ввели обозначения для них. Мы будем пользоваться этими же терминами и обозначениями и в случае сферы.

5. Примеры динамических систем на сфере. Во всех приводимых ниже примерах мы будем предполагать, что рассматривается простейшее координатное покрытие сферы (см. п. 2 и дополнение, § 7). Будем, как и в п. 2, обозначать области этого простейшего покрытия через g и $\tilde{g}$ (g состоит из точек всей сферы, за исключением одной точки N, а $\tilde{g}$ — из точек всей сферы, за исключением точки $\tilde{N}$, диаметрально противоположной точке N).

Переход от локальных координат u, v в области g к локальным координатам в области $\tilde{g}$ задается формулами (9) и (10)

$$\tilde{u} = \frac{4u}{u^2 + v^2}, \qquad \tilde{v} = \frac{4v}{u^2 + v^2},$$

$$u = \frac{4\tilde{u}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}, \qquad v = \frac{4\tilde{v}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}.$$

Пример 1. Динамическая система A определена уравнениями

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{1 + u^2 + v^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{v}{1 + u^2 + v^2} \tag{23}$$

в области g и уравнениями

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \frac{-\tilde{u}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)}{16 + \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}, \qquad \frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{-\tilde{v}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)}{16 + \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2} \tag{24}$$

в области $\tilde{g}$.

Легко проверить с помощью формул (9) и (10), что правые части уравнений (23) и (24) удовлетворяют соотношениям (5).

Состояниями равновесия системы A являются точка N в области g и точка $\tilde{N}$ в области $\tilde{g}$. Система (23) отличается от системы

$$\frac{du}{dt} = u, \qquad \frac{dv}{dt} = v \tag{25}$$

только не обращающимся в нуль множителем $\frac{1}{1 + u^2 + v^2}$ правых частей. Поэтому траектории системы (23) отличаются только параметризациями (см. § 1, п. 17) от

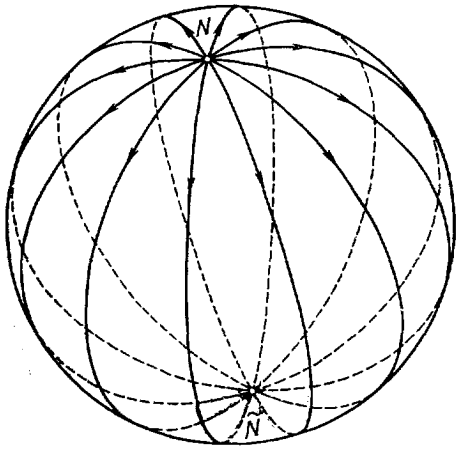


Рис. 27.

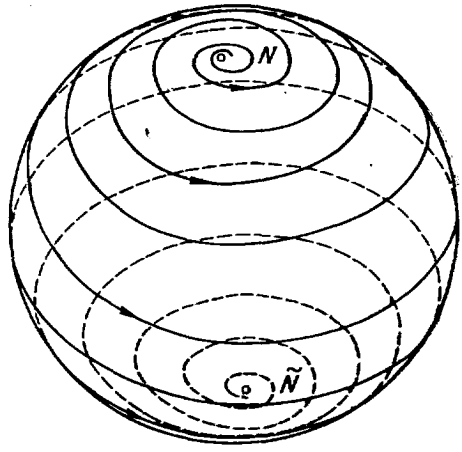


Рис. 28.

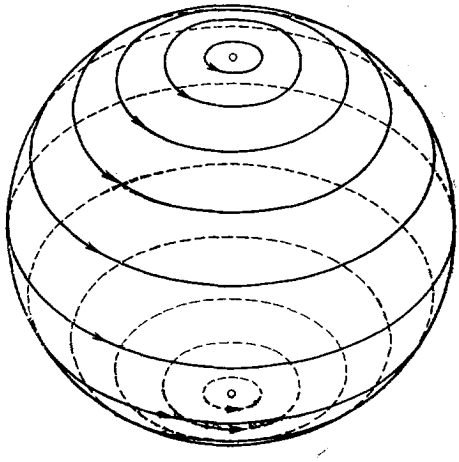


Рис. 29.

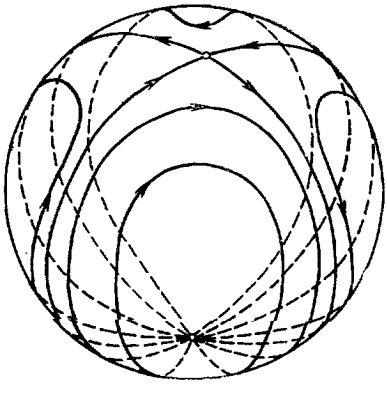


Рис. 30.

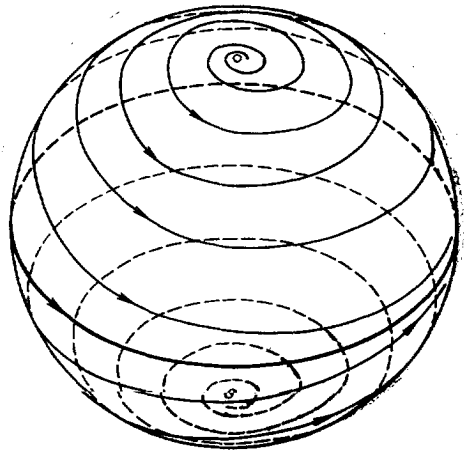


Рис. 31.

траекторий системы (40) при $a_1 = a_2 = 1$. «Перенося» эти траектории с плоскости (u, v) на сферу и принимая во внимание, что точка $\widetilde{N}$ является состоянием равновесия, мы убеждаемся, что траектории системы A имеют вид, изображенный на рис. 27, т. е. совпадают с меридианами сферы.

Пример 2. Динамическая система A определена уравнениями

$$\frac{du}{dt} = \frac{-v + \alpha u}{1 + u^2 + v^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{u + \alpha v}{1 + u^2 + v^2} \tag{26}$$

в области g и уравнениями

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \frac{(-\widetilde{v} - \alpha\widetilde{u})(\widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2)}{16 + \widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2}, \qquad \frac{d\widetilde{v}}{dt} = \frac{(\widetilde{u} - \alpha\widetilde{v})(\widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2)}{16 + \widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2} \tag{27}$$

в области $\widetilde{g}$. Так же, как в предыдущем примере, можно проверить, что правые части уравнений (26) и (27) удовлетворяют соотношениям (5) п. 2. Состояниями равновесия системы являются точки N и $\widetilde{N}$. Система (26) отличается от системы (45) примера 4 § 1 только обозначениями и отличным от нуля множителем $\frac{1}{1 + u^2 + v^2}$, поэтому ее траектории на плоскости (u, v) имеют вид, изображенный на рис. 13. «Перенося» эти траектории на сферу так же, как в предыдущем примере, мы убедимся, что разбиение на траектории будет таким, как представлено на рис. 28 ($\alpha > 0$).

В случае, когда $\alpha = 0$, разбиение плоскости (u, v) на траектории системы (26) имеет вид, изображенный на рис. 14. Соответствующее разбиение сферы на траектории показано на рис. 29.

Пример 3. Динамическая система A определена уравнениями

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{1 + u^2 + v^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{-v}{1 + u^2 + v^2} \tag{28}$$

в области g и уравнениями

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \frac{\widetilde{u}(3\widetilde{v}^2 - 4\widetilde{v}^2)}{16 + \widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2}, \qquad \frac{d\widetilde{v}}{dt} = \frac{\widetilde{v}(4\widetilde{v}^2 - 3\widetilde{u}^2)}{16 + \widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2} \tag{29}$$

в области $\widetilde{g}$.

Сравнивая (28) с системой примера 6 (см. § 1, рис. 17), нетрудно показать, что разбиение сферы на траектории имеет вид, представленный на рис. 30.

Пример 4. Динамическая система A определена уравнениями

$$\frac{du}{dt} = \frac{-v - u(u^2 + v^2 - 1)}{1 + u^2 + v^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{u - v(u^2 + v^2 - 1)}{1 + u^2 + v^2} \tag{30}$$

в области g и уравнениями

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \frac{16\widetilde{u} - (\widetilde{u} + \widetilde{v})(\widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2)}{16 + \widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2}, \qquad \frac{d\widetilde{v}}{dt} = \frac{16\widetilde{v} + (\widetilde{u} - \widetilde{v})(\widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2)}{16 + \widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2} \tag{31}$$

в области $\widetilde{g}$.

Сравнивая систему (30) с системой (58) (§ 1, пример 7), нетрудно убедиться, что разбиение сферы на траектории системы A имеет вид, представленный на рис. 31.

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И МНОЖЕСТВА. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ

Введение

Настоящая глава посвящена одному из вопросов, лежащих в основе качественной теории динамических систем, именно, вопросу о возможном поведении и «форме» *отдельной траектории*.

Мы уже касались этого вопроса в п. 10 § 1. В настоящей главе излагаются классические результаты, содержащие исчерпывающее решение этого вопроса для случая динамической системы вида (I). Эти результаты были в общих чертах получены А. Пуанкаре [5], а затем уточнены и обобщены И. Бендиксоном, использовавшим методы теории множеств.

В § 1 были получены некоторые основные сведения о траекториях: именно, было установлено, что траектория может быть либо состоянием равновесия, либо замкнутой траекторией, либо незамкнутой траекторией. С точки зрения *качественной* теории динамических систем характер траектории описан исчерпывающим образом,— если известно, что она является состоянием равновесия (т. е. отдельной точкой) или замкнутой траекторией (т. е. простой замкнутой кривой). Однако в случае, когда известно, что траектория незамкнута — очевидно требуется дополнительное исследование. В приведенных в § 1 конкретных динамических системах мы встречались с несколькими различными типами незамкнутых траекторий. Естественно постараться выяснить, каковы вообще все возможные типы таких траекторий.

Незамкнутая траектория является «линией», заданной параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

и ($\varphi(t)$ и $\psi(t)$ во всяком случае функции класса C_1, определенные на некотором интервале $\tau < t < T$) не имеющей «*самопересечений*», то есть для незамкнутой траектории, ни для каких двух различных значений t, t_1 и t_2 из интервала (τ, T) не могут одновременно выполняться равенства

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \qquad \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Однако далеко не всякая отдельная «линия», удовлетворяющая указанным выше условиям, может быть траекторией динамической системы вида (I).

Мы увидим, что при сделанных предположениях относительно системы (I) траектория не может, например, иметь вид, аналогичный графику функции $y = \sin \frac{1}{x}$. Траектория не может всюду плотно заполнять

целую область *), хотя такие линии (удовлетворяющие указанным выше для незамкнутой траектории условиям) существуют. Тот факт, что траектория является одной из «линий» целого семейства — *семейства траекторий динамической системы вида* (I) (в области G), накладывает дополнительные ограничения на возможное для нее поведение. Результаты Пуанкаре и Бендиксона о возможном характере незамкнутой траектории системы (I) являются по существу следствием двух теорем (справедливых во всей рассматриваемой области G): теоремы о существовании и единственности решения и теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений.

Настоящая глава состоит из двух параграфов.

§ 3 является вспомогательным, в нем содержится ряд элементарных, но основных лемм, на которые опираются предложения настоящей и последующих глав. В нем вводятся понятия «дуги без контакта» и «цикла без контакта», которые в качестве основного вспомогательного средства используются в дальнейших предложениях. Далее устанавливается хотя и элементарное, но основное предложение о локальной структуре траекторий в окрестности точки, не являющейся состоянием равновесия (предварительно об этом было сказано в п. 14 § 1), именно, доказывается, что расположение траекторий в окрестности такой точки аналогично расположению параллельных отрезков. Кроме того, в § 3 доказан ряд лемм, в которых устанавливается возможный характер пересечения траекторий с дугами и циклами без контакта.

В связи с доказательством вспомогательных лемм, содержащихся в § 3, необходимо сделать некоторые замечания. Утверждения большинства этих лемм геометрически совершенно очевидны. Естественно возникает вопрос, нужно ли вообще доказывать эти предложения, не следует ли их привести просто как очевидные, тем более, что в настоящей книге некоторые основные геометрические факты неизбежно не могут быть приведены с доказательствами ввиду того, что доказательства их требуют специальных рассмотрений и методов, не имеющих никакого отношения к содержанию настоящей книги **).

Более того, возникает вопрос, не является ли доказательство многих элементарных геометрических очевидных утверждений (например, утверждение леммы 2 или леммы 4 § 3) в некотором смысле тавтологией — сведение одного геометрически очевидного утверждения к другому, нисколько не более очевидному, а приведение таких доказательств — загромождением и усложнением текста. Однако на это сейчас же можно сделать следующее возражение: если какое-либо утверждение приводится без доказательств с ссылкой на геометрическую очевидность, то это, естественно,

---

*) Пример «гладкой» линии без самопересечения, всюду плотно заполняющей некоторую область (см. [20]).

**) Например, тот факт, что всякая простая замкнутая кривая разделяет плоскость на две области и при этом является общей границей этих двух областей. Теорема, в которой этот факт устанавливается, носит название теоремы Жордана. Необходимость доказательства этого предложения часто вызывает недоумение у начинающих. В связи с этим мы рекомендуем читателю обратиться, например, к книге Куранта и Роббиса «Что такое математика», гл. V, § 3.

Необходимость доказательства некоторых с первого взгляда интуитивно совершенно «очевидных» предложений может быть сделана весьма убедительной на ряде примеров, когда, казалось бы, совершенно очевидные геометрически утверждения оказываются неверными. Эффектный пример такого рода см., например, П. С. Александров «Комбинаторная топология», стр. 68 («абсолютная и регулярная граница»).

оправдывает отсутствие доказательства у целого ряда других простых утверждений, представляющимися столь же геометрически очевидными.

Голая ссылка на «геометрическую очевидность» не дает никакого настоящего критерия, в силу которого то или другое утверждение приводится без доказательств. Вступая на шаткий и неясный путь ссылки на геометрическую очевидность, мы можем либо незаметно прийти к заведомо неочевидным предложениям, либо просто к неясности и прямым ошибкам.

Таким образом, соблюдения элементарной математической корректности требует от нас во всяком случае выделения некоторых *совершенно определенных фактов или утверждений*, которые принимаются за известные, очевидные (число их желательно свести к минимуму). Все другие утверждения необходимо *доказывать*, опираясь на выделенные предложения, считающиеся данными и известными.

В настоящей книге предположения, считающиеся известными, указаны в дополнении. В частности, те факты и предложения, на которые непосредственно опирается доказательство лемм § 3, указаны в §§ 1—6 дополнения. Это — некоторые элементарные факты, касающиеся простых дуг, элементарные предположения о простых замкнутых кривых и свойства так называемого регулярного отображения. Доказательство этих фактов в свою очередь либо приводится в дополнении, либо может быть найдено в литературе, указанной в дополнении.

Все леммы § 3 независимо от их геометрической очевидности (в частности, например, весьма очевидные леммы 1 и 3) подробно доказываются, основываясь на указанных предложениях дополнения. Однако без ущерба для понимания дальнейшего читатель может при чтении опустить доказательства некоторых представляющихся очевидными лемм, ознакомившись только с их формулировками, и к их доказательству обращаться лишь при возникновении каких-либо неясностей в дальнейшем.

§ 4 посвящен основному содержанию настоящей главы — выяснению возможного характера траекторий системы (I). При этом вводится понятие *предельной точки* и *предельного множества* полутраектории, играющее первостепенную роль не только при решении вопроса о поведении отдельной траектории, но также и при рассмотрении характера разбиения в целом, которое проводится в главах VII, VIII, X и XI. В заключение в § 4 приводится два классических предложения, касающихся некоторых основных свойств разбиения на траектории в целом, а также рассматривается изолированная замкнутая траектория — *предельный цикл* и устанавливается возможный характер разбиения на траектории окрестности предельного цикла.

§ 3. Вспомогательные предложения о характере пересечения траекторий с циклами и дугами без контакта

Всюду в дальнейшем, говоря о траекториях, мы будем предполагать, что речь идет о траекториях некоторой динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{I}$$

заданной в некоторой области G плоскости и удовлетворяющей условиям п. 1 § 1.

1. Дуга без контакта. Пусть l — какая-нибудь простая гладкая дуга (см. дополнение, § 3, п. 5), лежащая в области G, и M — точка на этой дуге, не являющаяся состоянием равновесия системы (I).

Если траектория, проходящая через точку M, в этой точке не касается дуги l, то мы будем говорить, что «дуга l в точке M не имеет контакта». Если же проходящая через точку M траектория касается дуги l, то мы будем говорить, что дуга l в точке M «имеет контакт».

Простая гладкая дуга l называется *дугой без контакта* динамической системы (I), если: а) на дуге l не лежит ни одного состояния равновесия; б) ни в одной своей точке дуга l не имеет контакта. Мы будем говорить, что дуга без контакта l *проведена через точку M или проходит через точку M*, если M является точкой дуги без контакта l, отличной от ее концов (рис. 32). Очевидно, через каждую точку M области G, отличную от состояния равновесия, можно провести дугу без контакта. Такой дугой является, например, достаточно малый отрезок нормали к траектории в точке M.

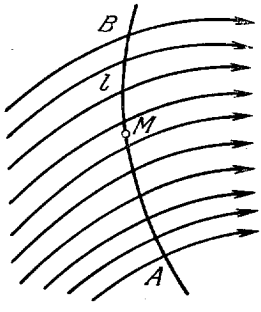


Рис. 32.

Пусть l — дуга без контакта, заданная параметрическими уравнениями

$$x = f(s), \qquad y = g(s),$$

где $f(s)$ и $g(s)$ — функции класса C_1, определенные при значениях s, $a \leqslant s \leqslant b$. Точки $A(f(a), g(a))$ и $B(f(b), g(b))$ являются концами дуги l. Так как l — простая гладкая дуга, то при всех значениях s, $a \leqslant s \leqslant b$, $[f'(s)]^2 + [g'(s)]^2 \neq 0$ (см. дополнение, § 5, п. 5).

Из условия а) следует, что при всех s имеет место неравенство

$$P^2(f(s), g(s)) + Q^2(f(s), g(s)) \neq 0. \tag{1}$$

Из условия б) следует, далее, что при всех s выполняется неравенство (см. дополнение, § 5, п. 5)

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} P(f(s), g(s)) & f'(s) \\ Q(f(s), g(s)) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Знак этого детерминанта определяет знак угла между дугой без контакта и траекторией. Так как угол между дугой без контакта l и любой пересекающей ее траекторией *) не обращается в нуль, то, очевидно, этот угол сохраняет постоянный знак.

Если

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$$

— решение системы (I) (см. § 1, п. 3), то

$$x = \varphi(t - t_0, f(s), g(s)), \qquad y = \psi(t - t_0, f(s), g(s))$$

при всяком $s \in [a, b]$ представляют уравнение той траектории системы (I), которая проходит при $t = t_0$ через точку $(f(s), g(s))$ дуги без контакта l. Условие (2) может быть записано в виде

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \varphi'(0, f(s), g(s)) & f'(s) \\ \psi'(0, f(s), g(s)) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

*) Об угле между двумя векторами и между двумя гладкими дугами см. дополнение, § 5.

Дуга l может быть задана не параметрическими уравнениями, а уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

где x (или y) меняется в определенных пределах, например $a \leqslant x \leqslant b$. В этом случае из условия а) следует, что в точках дуги l

$$P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0, \tag{4}$$

а из условия б), что в точках дуги l

$$F'_x(x, y) P(x, y) + F'_y(x, y) Q(x, y) \neq 0. \tag{4'}$$

Сделаем еще одно замечание. Пусть l — дуга без контакта, A и B — ее концы. Так как по определению дуга l в точках A и B не имеет контакта, то, очевидно, она *может быть продолжена*, т. е. всегда существует такая дуга без контакта l_1, частью которой является дуга l, для которой A и B являются внутренними точками (рис. 32).

2. Обобщенная дуга без контакта. В ряде вопросов роль, аналогичную дуге без контакта, играет «обобщенная дуга без контакта».

Мы скажем, что простая дуга l (эта дуга может быть как гладкой, так и негладкой) является «обобщенной дугой без контакта для системы (I)», если: а) на дуге l не лежит ни одного состояния равновесия; б) у всякой траектории, проходящей при $t = t_0$ через какую-нибудь точку M дуги l, отличную от концов, точки, соответствующие достаточно близким к t_0 значениям $t > t_0$, лежат по положительную сторону l, а точки, соответствующие достаточно близким к t_0 значениям $t < t_0$, лежат по отрицательную сторону от l *) (или наоборот). В частности, например, гладкая дуга l является «обобщенной дугой без контакта» системы (I), если в некоторых своих точках дуга l имеет с траекториями соприкосновение четного порядка (рис. 33).

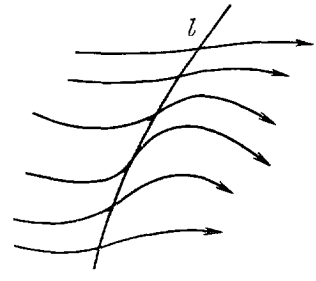


Рис. 33.

3. Пересечение траектории с дугой без контакта.

Лемма 1. *Пусть l — дуга без контакта, $M_0(x_0, y_0)$ — точка, отличная от ее концов, L — траектория, проходящая через точку M_0 при $t = t_0$.*

Существует такое $h > 0$, что часть траектории L, соответствующая значениям t, для которых $|t - t_0| \leqslant h$, удовлетворяет условиям: а) *она является простой дугой,* б) *эта дуга, кроме точки M_0, не имеет других общих точек с дугой без контакта l,* в) *часть этой дуги, соответствующая значениям t, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, лежит по одну сторону дуги l, а часть, соответствующая значениям $t_0 < t \leqslant t_0 + h$, — по другую сторону l* (рис. 34).

Лемма 1 непосредственно следует из леммы 1 § 5 дополнения и из свойств траекторий, установленных в п. 4 § 1. Очевидно, если L —

*) О положительной и отрицательной стороне простой дуги см. дополнение, § 3 и § 6, п. 5.

замкнутая траектория, то число h заведомо меньше, чем половина периода, соответствующего траектории L периодического решения.

Докажем еще одно предложение. Предположим, что выбранное на траектории L движение определено при всех t, $\tau < t < T$ (T и τ могут быть соответственно $-\infty$ и $+\infty$).

Л е м м а 2. *Всякая часть траектории L, соответствующая значениям t из произвольного заданного сегмента $[\alpha, \beta]$, $\tau < \alpha < \beta < T$, может иметь лишь конечное число точек пересечения с любым отрезком без контакта.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. что траектория L имеет бесчисленное множество точек пересечения с некоторой дугой без контакта l, причем эти точки соответствуют значениям t, принадлежащим сегменту $[\alpha, \beta]$. Выберем из этих значений t сходящуюся последовательность $\{t_n\}$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t^*$. Очевидно, $t^* \in [\alpha, \beta]$. Точку траектории, соответствующую значению t^*, обозначим через M^*, точки, соответствующие значениям t_n — через M_n. Так как M^* является точкой сгущения *) для точек M_n, лежащих на дуге l, то она также лежит на дуге l. При этом можно предполагать, что она отлична от концов дуги l, так как в противном случае вместо дуги без контакта l можно рассмотреть какую-нибудь содержащую l дугу без контакта l' (см. п. 1).

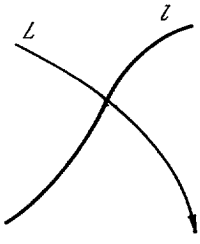


Рис. 34.

В силу леммы 1 существует такое $h > 0$, что все точки траектории L, соответствующие значениям t на сегменте $|t - t^*| \leqslant h$, кроме точки M^*, не лежат на дуге l. Но при больших n $|t_n - t^*| < h$, и, следовательно, точка M_n не может лежать на дуге l, что противоречит сделанному предположению. Лемма доказана.

4. Расположение траекторий в окрестности дуги без контакта. В предыдущем пункте рассматривалось пересечение дуги без контакта с отдельной траекторией. Сейчас мы рассмотрим всю совокупность траекторий, пересекающих дугу без контакта в окрестности этой дуги.

Пусть

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$$

— решение системы (I), а

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad a \leqslant s \leqslant b,$$

— параметрическое уравнение дуги без контакта l. Тогда

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Phi(t, s), \\ y &= \psi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Psi(t, s) \end{aligned} \tag{5}$$

при всяком фиксированном $s \in [a, b]$ есть движение на траектории, пересекающей при $t = t_0$ дугу без контакта l в точке, соответствующей данному значению s.

*) Мы пользуемся здесь и всюду термином «точка сгущения» вместо более распространенного в математической литературе термина «предельная точка» ввиду того, что в настоящей книге используется термин «предельная точка полутраектории», имеющий другое содержание, чем «предельная точка» — в смысле теории множеств.

Следующая простая лемма описывает структуру расположения траекторий вблизи дуги без контакта. Она является одним из основных вспомогательных предложений для всего дальнейшего.

Лемма 3. *Существует* $h_0 > 0$ *такое, что при всех значениях* s *и* t *из сегментов*

$$a \leqslant s \leqslant b, \qquad |t - t_0| \leqslant h_0 \tag{6}$$

функции (5) *дают регулярное отображение* T *прямоугольника* R *плоскости* (t, s), *определенного соотношениями* (6), *на некоторую замкнутую область* $\overline{W}$ *плоскости* (x, y), *причем*: а) $\overline{W}$ *ограничена простой замкнутой кривой*; б) $\overline{W}$ *содержит внутри себя все точки дуги* l, *за исключением ее концов, лежащих на границе* $\overline{W}$; в) *при отображении* T *отрезок прямой*

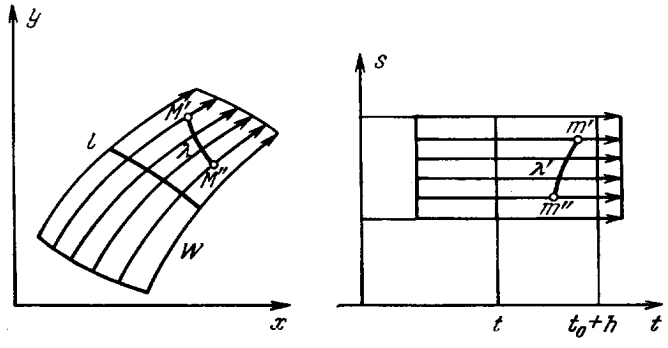


Рис. 35.

$t = t_0$ *переходит в дугу без контакта* l, *а отрезки прямых* $s = \text{const}$ *переходят в дуги траекторий, пересекающих дугу без контакта* l (рис. 35) *).

Доказательство. В силу леммы 6 § 1 функции $\varphi(t - t_0, x_0, y_0)$, $\psi(t - t_0, x_0, y_0)$ имеют непрерывные частные производные по t, t_0, x_0, y_0. Так как, кроме того, функции $f(s)$ и $g(s)$ имеют непрерывные производные по s, то функции (5) $\Phi(t, s)$, $\Psi(t, s)$ имеют непрерывные частные производные по s и t при всех значениях s и t, при которых эти функции определены, т. е. при всех $s \in [a, b]$, и для каждого s — при всех t, для которых определено решение $\varphi(t - t_0, f(s), g(s))$, $\psi(t - t_0, f(s), g(s))$. В силу леммы 8 § 1 существует такое $h > 0$, что для всех $s \in [a, b]$ решения $\varphi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Phi(t, s)$, $\psi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Psi(t, s)$ заведомо определены при значениях t на сегменте $|t - t_0| \leqslant h^*$. Кроме того, так как l есть дуга без контакта, то при $t = t_0$ и при всех $s \in [a, b]$ мы имеем

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \Phi'_t(t_0, s) & \Phi'_s(t_0, s) \\ \Psi'_t(t_0, s) & \Psi'_s(t_0, s) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

*) В случае, когда дуга l является обобщенной дугой без контакта, справедливо аналогичное предложение: существует $h_0 > 0$ такое, что при всех значениях s и t из сегментов $a \leqslant s \leqslant b$, $|t - t_0| \leqslant h_0$ функции (5) дают *топологическое* (но не обязательно регулярное) отображение T прямоугольника R плоскости (t, s), определенного соотношениями (6) на некоторую замкнутую область W, удовлетворяющую условиям а), б) и в) леммы 3.

(см. соотношения (3) п. 1). Но это значит, что функции $\Phi(t, s)$ и $\Psi(t, s)$ удовлетворяют всем условиям леммы 3 § 6 дополнения, и в силу этой леммы существует такое $h_0 > 0$, $h_0 \leqslant h^*$, для которого выполняются все утверждения нашей леммы. Лемма доказана.

Замечание. Из свойств функций $\Phi(t, s)$, $\Psi(t, s)$, в частности, следует:

а) Существует $h_0 > 0$ такое, что все траектории, пересекающие при $t = t_0$ дугу без контакта l, при всех значениях t, $0 < |t - t_0| \leqslant h_0$, не имеют более общих точек с дугой l.

б) Всякая траектория, проходящая при $t = t^*$ через какую-нибудь точку M^* области $\overline{W}$, непременно пересечет дугу без контакта l при некотором значении t', удовлетворяющем условию

$$|t' - t^*| \leqslant h_0.$$

При этом такое значение t' существует только одно.

в) Пусть M' и M'' — точки на двух дугах траекторий, при $t = t_0$, пересекающих l, принадлежащие $\overline{W}$, лежащие по одну и ту же сторону дуги l и соответствующие значениям t' и t'', удовлетворяющим неравенствам $|t_0 - t'| \leqslant h$, $|t_0 - t''| \leqslant h$, где h — произвольное положительное число $h \leqslant h_0$. Тогда эти точки можно соединить простой дугой λ, лежащей в замкнутой области $\overline{W}$ и не пересекающей дугу l, причем все точки дуги λ соответствуют на проходящих через эти точки траекториях значениям t, $0 < |t - t_0| \leqslant h$ (рис. 35) (точки m', m'' и дуга λ' на плоскости (t, s) с помощью функций (5) отображаются соответственно в точки M', M'' и в дугу λ плоскости (x, y)).

Очевидно, значения величин t и s можно рассматривать как криволинейные координаты в области $\overline{W}$.

Следующая теорема, непосредственно вытекающая из леммы 3, характеризует «локальную качественную структуру» динамической системы в окрестности любой точки, отличной от состояния равновесия.

Теорема 8. *Пусть M — точка области G, не являющаяся состоянием равновесия системы* (I). *Существует такая замкнутая область $\overline{W}$, ограниченная простой замкнутой кривой и содержащая точку M внутри себя, и такое топологическое отображение* (см. дополнение, § 1, п. 12) *этой области на прямоугольник R евклидовой плоскости со сторонами, параллельными осям координат, при котором отрезки траектории, лежащие в $\overline{W}$, переходят в отрезки прямых, параллельных одной из осей координат.*

Для доказательства теоремы 8 достаточно провести через точку M какую-нибудь дугу без контакта и применить предыдущую лемму.

В связи с теоремой 8 напомним, что мы уже останавливались на вопросе о характере разбиения на траектории в окрестности точки, отличной от состояния равновесия (см. § 1, п. 14). Ссылаясь на наглядность, мы говорили там, что в окрестности всякой точки, отличной от состояния равновесия, «в малом» траектории ведут себя «аналогично семейству параллельных прямых». Приведенная теорема вносит точный смысл в эти слова. Здесь для характеристики качественного свойства разбиения на траектории мы впервые воспользовались понятием *топологического отображения* (см. дополнение, § 1, п. 12).

Как мы увидим в главе III, при уточнении понятий «качественного характера траекторий», «качественного исследования динамической систе-

мы» и т. д. понятие топологического отображения играет первостепенную роль.

Перейдем к следующей, также весьма простой, но основной лемме:

Лемма 4. *Пусть l — дуга без контакта, M_0 — какая-нибудь ее точка, отличная от концов. Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$, всегда существует $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon, \Delta)$) такое, что всякая траектория L, проходящая при $t = t_0$ через точку $M^* \in U_\delta(M_0)$, при некотором $t = t^*$ пересекает дугу без контакта, причем $|t^* - t_0| < \Delta$ и при изменении t от t^* до t_0 траектория L не выходит из $U_\varepsilon(M_0)$* (рис. 36).

Доказательство. Пусть точка M_0 соответствует на дуге l значению $s = s_0$ ($a < s_0 < b$). В силу непрерывности функций

$$x = \varphi(t - t_0,\ f(s),\ g(s)) = \Phi(t, s),$$
$$y = \psi(t - t_0,\ f(s),\ g(s)) = \Psi(t, s)$$

при любом $\varepsilon > 0$ можно указать также h и σ, $\Delta > h > 0$ и $\sigma > 0$, чтобы при всех s и t

$$|t - t_0| \leqslant h, \qquad |s - s_0| \leqslant \sigma \tag{8}$$

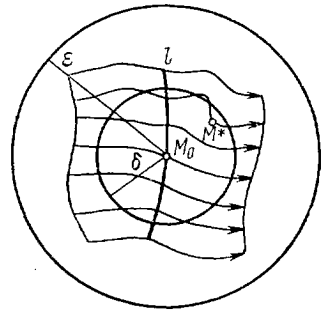


Рис. 36.

соответствующая замкнутая область $\overline{W}$ (см. лемму 3) целиком лежала в $U_\varepsilon(M_0)$. При этом точка M_0 является внутренней точкой области $\overline{W}$. Поэтому всегда можно указать $\delta > 0$ такое, чтобы $U_\delta(M_0)$ целиком содержалось в $\overline{W}$, т. е. чтобы точкам $U_\delta(M_0)$ соответствовали значения t и s, удовлетворяющие неравенствам (8). Но тогда в силу замечания б) к лемме 3 всякая траектория, проходящая через точку $U_\delta(M_0)$, непременно пересечет дугу l при значении t', $|t' - t_0| < h < \Delta$, что и доказывает лемму.

Следующая лемма непосредственно вытекает из леммы 4 и из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений:

Лемма 5. *Пусть L_0 — траектория, при $t = t_0$ проходящая через точку M_0 и при $t = t_1$ пересекающая дугу без контакта l в точке M_1, отличной от концов дуги l. Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее следующему условию: всякая траектория L, при $t = t_0$ проходящая через произвольную точку $M' \in U_\delta(M_0)$, при некотором $t = t'$ пересекает дугу l в точке M_1', причем: а) $|t_1' - t_1| < \Delta$; б) $M_1' \in U_\varepsilon(M_1)$; в) всякая точка траектории L, соответствующая значению $t \in [t_0, t_1']$, лежит в ε-окрестности точки L_0, соответствующей тому же значению t.*

Доказательство очевидно.

5. Некоторые свойства функций $\Phi(t, s)$, $\Psi(t, s)$. Мы рассматривали функции

$$x = \varphi(t - t_0,\ f(s),\ g(s)) = \Phi(t, s),$$
$$y = \psi(t - t_0,\ f(s),\ g(s)) = \Psi(t, s) \tag{9}$$

($x = f(s)$, $y = g(s)$ — параметрические уравнения дуги без контакта l, $a \leqslant s \leqslant b$) при значениях t, достаточно близких к t_0, $|t - t_0| \leqslant h_0$. В дальнейшем, однако, нам придется рассматривать эти функции при *всех* тех значениях $t > t_0$, при которых они определены. Установим некоторые свойства этих функций.

Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма 6. а) *Функции* $x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0)$, $y = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$ *удовлетворяют уравнениям в частных производных*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} P(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} Q(x_0, y_0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x_0} P(x_0, y_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} Q(x_0, y_0); \quad (10)$$

б) *функциональный детерминант*

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} = e^{\int_{t_0}^{t} [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)]\, dt}.$$

Доказательство. Докажем сначала пункт а). В силу замечания к лемме 4 § 1, если

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \qquad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0), \quad (11)$$

то

$$x_0 = \varphi(t_0 - t, x, y), \qquad y_0 = \psi(t_0 - t, x, y).$$

Но тогда по самому определению функций $\varphi(t - t_0, x_0, y_0)$ и $\psi(t - t_0, x_0, y_0)$

$$\frac{\partial x_0}{\partial t_0} = P(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial y_0}{\partial t_0} = Q(x_0, y_0). \quad (12)$$

Подставляя выражения x_0 и y_0 в (11), мы получаем тождества

$$x \equiv \varphi[t - t_0, \varphi(t_0 - t, x, y), \psi(t_0 - t, x, y)],$$
$$y \equiv \psi[t - t_0, \varphi(t_0 - t, x, y), \psi(t_0 - t, x, y)].$$

Дифференцируя эти тождества по t_0 и используя равенства (12), мы получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} P(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} Q(x_0, y_0) = 0, \\ &\frac{\partial \psi}{\partial t_0} + \frac{\partial \psi}{\partial x_0} P(x_0, y_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} Q(x_0, y_0) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Но мы, очевидно, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t_0} = -\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Подставляя эти выражения в (13), получим выражение (10).

Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). С этой целью вычислим сначала $\frac{dI}{dt}$. Мы имеем

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} P(x, y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial}{\partial x_0} Q(x, y) & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial y_0} P(x, y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial y_0} Q(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + P'_y \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ Q'_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + Q'_y \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & P'_x \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} + P'_y \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & Q'_x \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} + Q'_y \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} = (P'_x + Q'_y) I(t).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = [P'_x(\varphi(t-t_0, x_0, y_0), \psi(t-t_0, x_0, y_0)) + Q'_y(\varphi(t-t_0, x_0, y_0), \psi(t-t_0, x_0, y_0))]\, I(t). \quad (14)$$

Найдем $I(t_0)$. При $t = t_0$ по определению функций φ и ψ

$$\varphi(0, x_0, y_0) \equiv x_0, \qquad \psi(0, x_0, y_0) \equiv y_0.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)_{t=t_0} = 1, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)_{t=t_0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0}\right)_{t=t_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_0}\right)_{t=t_0} = 1$$

и

$$I(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (15)$$

Считая, что t_0, x_0, y_0 фиксированы, и решая линейное однородное дифференциальное уравнение (14) при начальном условии (15), мы получаем

$$I = e^{\int_{t_0}^{t} [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)]\, dt}. \quad (16)$$

Лемма доказана.

Пусть, как и выше, l — дуга без контакта, заданная параметрическими уравнениями $x = f(s)$, $y = g(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$.

Лемма 7. *При любых значениях t и s, при которых определены функции*

$$x = \varphi(t-t_0, f(s), g(s)) = \Phi(t, s), \qquad y = \psi(t-t_0, f(s), g(s)) = \Psi(t, s), \quad (9)$$

якобиан

$$\Delta(t, s) = \frac{D(\Phi, \Psi)}{D(t, s)} = \begin{vmatrix} \Phi'_t & \Phi'_s \\ \Psi'_t & \Psi'_s \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль.

Доказательство. Действительно, мы имеем

$$\Delta(t, s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} f'(s) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} g'(s) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial x_0} f'(s) + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} g'(s) \end{vmatrix}.$$

Подставляя вместо $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ их выражения из (10) и принимая во внимание, что роль x_0 и y_0 играют сейчас соответственно $f(s)$ и $g(s)$, мы получим

$$\Delta(t, s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} P(f(s), g(s)) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} Q(f(s), g(s)) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} f'(s) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} g'(s) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} P(f(s), g(s)) + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} Q(f(s), g(s)) & \frac{\partial \psi}{\partial x_0} f'(s) + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} g'(s) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P(f(s), g(s)) & g'(s) \\ Q(f(s), g(s)) & f'(s) \end{vmatrix} =$$

$$= [P(f(s), g(s))\, g'(s) - Q(f(s), g(s))\, f'(s)]\, I(t).$$

Выражение в квадратных скобках отлично от нуля, так как l есть дуга без контакта (см. (2) п. 1), а $I(t) \neq 0$ в силу предыдущей леммы. Поэтому $\Delta(t, s) \neq 0$. Лемма доказана.

Предположим теперь, что функции (9)

$$x = \varphi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Phi(t, s), \qquad y = \psi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Psi(t, s)$$

определены при всех значениях s и t, $a \leqslant s \leqslant b$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau(s)$ (или $t_0 \geqslant t \geqslant \tau(s)$), где $\tau(s)$ — однозначная и непрерывная функция от s.

Лемма 8. *Пусть каждая траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку $(f(s), g(s))$ дуги без контакта l, $a \leqslant s \leqslant b$, не имеет больше общих точек с дугой l, когда $t_0 < t \leqslant \tau(s)$ (соответственно $t_0 > t \geqslant \tau(s)$). Тогда уравнения (9) определяют регулярное отображение T области R плоскости t, s, заданной неравенствами*

$$a \leqslant s \leqslant b, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \tau(s)$$

(или $t_0 \geqslant t \geqslant \tau(s)$), на некоторую замкнутую область W плоскости (x, y) (рис. 37).

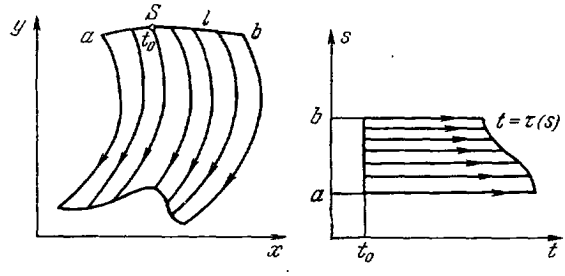


Рис. 37.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $t_0 \leqslant t \leqslant \tau(s)$. В силу предыдущей леммы якобиан $\Delta(t, s) = \dfrac{D(\Phi, \Psi)}{D(t, s)}$ не равен нулю ни в одной точке области R. Поэтому для доказательства регулярности отображения T, определенного функцией (9), достаточно показать, что это отображение взаимно однозначно, т. е. любые две различные точки $K_1(t_1, s_1)$ и $K_2(t_2, s_2)$, $t_0 < t_1 < \tau(s_1)$, $t_0 < t_2 < \tau(s_2)$, области R переходят при отображении T в различные точки области W. Рассмотрим сначала случай, когда $s_1 \neq s_2$. Пусть L_1 — траектория, пересекающая при $t = t_0$ дугу l в точке M_1, соответствующей значению s_1, а L_2 — траектория, при $t = t_0$ пересекающая дугу l в точке M_2 (отличной от M_1), соответствующей значению s_2.

По самому определению функций (9) точка $T(K_1)$ плоскости (x, y), в которую отображается точка $K_1(t_1, s_1)$ плоскости (s, t), лежит на траектории L_1, а точка $T(K_2)$, в которую отображается $K_2(t_2, s_2)$,— на траектории L_2. По условию леммы дуги этих траекторий, соответствующие значениям t, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau(s_1)$ и $t_0 \leqslant t \leqslant \tau(s_2)$, кроме точек M_1 и M_2 больше уже не имеют общих точек с дугой l (и «не пересекаются»). Отсюда, очевидно, следует, что точки $T(K_1)$ и $T(K_2)$ различны.

Рассмотрим теперь случай, когда $s_1 = s_2$. Пусть для определенности $t_0 < t_1 < t_2$. При этом точки $T(K_1)$ и $T(K_2)$ лежат на одной и той же траектории L_1, пересекающей дугу l в точке M_1, соответствующей $s = s_1$. Если бы эти точки совпадали, то траектория L_1 должна была бы быть замкнутой, а число $t_2 - t_1$ кратно периоду θ_0, соответствующему этой траектории периодического движения.

Точка M траектории L, лежащая на дуге l, соответствовала бы тогда как значению t_0, так и значению $t_0' = t_0 + (t_2 - t_1)$. При этом $t_0' = t_0 + (t_2 - t_1) < t_2 < \tau(s_1)$. Но это противоречит условию леммы. Таким образом, лемма доказана.

Замечание 1. Если система (I), а также функции $f(s)$, $g(s)$ (в параметрических уравнениях дуги l) принадлежат классу C_k или

являются аналитическими, то регулярное отображение T, заданное уравнениями (9), также принадлежит классу C_k или соответственно является аналитическим.

Замечание 2. Рассмотрим множество точек области W, для которых $t = h(s)$, где $t_0 < h(s) < \tau(s)$, а $a \leqslant s \leqslant b$. Пусть $h(s)$ — однозначная непрерывная функция. Очевидно, это множество точек представляет собой обобщенную дугу без контакта. Параметрические уравнения ее в декартовых координатах имеют вид

$$x = \Phi(h(s),\ s), \qquad y = \Psi(h(s),\ s).$$

Если функция $h(s)$ имеет непрерывную производную, то эта дуга является гладкой. Легко видеть, что если $h(s) \equiv t_0 + h_0$, где h_0 — постоянное, достаточно малое положительное число $(0 < h_0 < \tau(s))$, то линия $t = t_0 + h_0$ является дугой без контакта.

Замечание 3. Всякие две точки M_1 и M_2 области W, соответствующие значениям $(t_1,\ s_1)$ и $(t_2,\ s_2)$, где $s_1 < s_2$, $t_0 < t_1 < \tau(s_1)$, $t_0 < t_2 < \tau(s_2)$, можно соединить дугой без контакта, имеющей уравнение $t = h(s)$, где $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ и $h(s)$ — функция класса C_1. Кроме того, эту дугу можно взять так, чтобы в точках M_1 и M_2 она имела произвольные, наперед заданные направления, отличные от направления траекторий в этих точках (см. дополнение, § 6, п. 7).

6. Траектории, пересекающие две дуги без контакта. Функция соответствия. В дальнейшем нам неоднократно придется рассматривать траектории, пересекающие две дуги без контакта. Мы рассмотрим ряд предложений, относящихся к этому случаю.

Пусть l и $\tilde{l}$ — две дуги без контакта, не имеющие друг с другом общих точек, а

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad a \leqslant s \leqslant b,$$

и

$$x = \tilde{f}(\tilde{s}), \qquad y = \tilde{g}(\tilde{s}), \qquad \tilde{a} \leqslant \tilde{s} \leqslant \tilde{b},$$

— их параметрические уравнения. Будем обозначать точку на дуге l $(\tilde{l})$, соответствующую значению параметра s $(\tilde{s})$, через $M(s)$ $(\tilde{M}(\tilde{s})$ соответственно). Предположим, что некоторая траектория L_0 пересекает дугу l в точке M_0, а дугу $\tilde{l}$ — в точке $\tilde{M}_0$, причем M_0 и $\tilde{M}_0$ являются точками этих дуг, отличными от концов, и пусть при выбранном на траектории L_0 движении

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{17}$$

точка M_0 соответствует значению $t = t_0$, а точка $\tilde{M}_0$ — значению $t = \tilde{t}_0$. Будем для определенности считать, что $t_0 < \tilde{t}_0$.

Предположим, далее, что часть траектории L_0, соответствующая значениям $t \in [t_0,\ \tilde{t}_0]$, является простой дугой (так что в случае, когда L_0 — замкнутая траектория, разность $\tilde{t}_0 - t_0$ меньше периода движения) и что эта дуга кроме M_0 и $\tilde{M}_0$ не имеет других общих точек с дугами l и $\tilde{l}$ (рис. 38). Пусть точке M_0 соответствует на дуге l значение параметра $s = s_0$, а точке $\tilde{M}_0$ на дуге $\tilde{l}$ — значение $\tilde{s} = \tilde{s}_0$ (т. е. $M_0 = M(s_0)$, $\tilde{M}_0 = \tilde{M}(\tilde{s}_0)$).

Мы будем считать, что $s_0 = \tilde{s}_0 = 0$ (этого всегда можно добиться, взяв вместо s и $\tilde{s}$ в качестве параметров $s - s_0$ и $\tilde{s} - \tilde{s}_0$). Так как l и $\tilde{l}$ — дуги без контакта, то

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} P(f(s),\ g(s)) & Q(f(s),\ g(s)) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

и

$$\tilde{\Delta}(\tilde{s}) = \begin{vmatrix} P(\tilde{f}(\tilde{s}),\ \tilde{g}(\tilde{s})) & Q(\tilde{f}(\tilde{s}),\ \tilde{g}(\tilde{s})) \\ \tilde{f}'(\tilde{s}) & \tilde{g}'(\tilde{s}) \end{vmatrix} \neq 0$$

(см. (2) п. 1; оба неравенства имеют место при $s \in [a,\ b]$ и $\tilde{s} \in [\tilde{a},\ \tilde{b}]$).

Будем предполагать параметры s и $\tilde{s}$ выбранными так, что величины $\Delta(0)$ и $\tilde{\Delta}(0)$, а следовательно, и углы между траекторией L_0 и дугами l и $\tilde{l}$ имеют одинаковые знаки (см. дополнение, § 5). Этого можно добиться, заменив в случае необходимости параметр s на $-s$. Пусть для определенности $\Delta(0) > 0$, $\tilde{\Delta}(0) > 0$.

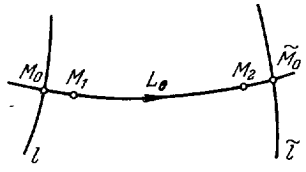


Рис. 38.

Л е м м а 9. *Существует такое* $\sigma_0 > 0$, $a < -\sigma_0 < \sigma_0 < b$, *и такие функции* $t = \chi(s) > t_0$ *и* $\tilde{s} = \Omega(s)$, *определенные для значений* s, $|s| < \sigma_0$, *что если траектория* L *пересекает при* $t = t_0$ *дугу* l *в точке* $M(s)$ ($|s| < \sigma_0$), *то эта траектория пересекает дугу* $\tilde{l}$ *при значении* $t = \chi(s)$ *в точке* $\tilde{M}(\tilde{s})$, *где* $\tilde{s} = \Omega(s)$, *причем выполняются следующие условия*: а) $\chi(s)$ *и* $\Omega(s)$ *являются функциями класса* C_1; б) *при значениях* t, $t_0 < t < \chi(s)$, *траектория* L *не имеет общих точек с дугами* l *и* $\tilde{l}$; в) $\Omega'(s) > 0$, *так что* $\tilde{s} = \Omega(s)$ — *монотонно-возрастающая функция от* s.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем, как и выше (см. (9)), функции $\Phi(t,\ s)$, $\Psi(t,\ s)$. Эти функции при всяком фиксированном s, $a \leqslant s \leqslant b$, определяют такое движение на траектории, при котором общей с дугой l точке $M(s)$ соответствует значение $t = t_0$. Когда $s = 0$,

$$x = \Phi(t,\ 0) = \varphi(t), \qquad y = \Psi(t,\ 0) = \psi(t),$$

т. е. мы получаем выбранное движение (17) на траектории L_0. По условию это движение определено для всех значений $t \in [t_0,\ \tilde{t}_0]$, следовательно, оно заведомо определено и для значений $t \in [t_0,\ t^*]$, где t^* — некоторое число, несколько большее $\tilde{t}_0$. Но тогда, в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений (см. § 1), существует такое $\sigma^* > 0$, что все движения на траекториях, пересекающих дугу l в точках $|s| < \sigma^*$, определены при тех же значениях t, т. е. функции (9) при всех $|s| < \sigma^*$ определены при всех значениях $t \in [t_0,\ t^*]$.

Если траектории, пересекающие дугу l, пересекают при некотором $t > t_0$ дугу $\tilde{l}$, то это, очевидно, означает, что система уравнений

$$\Phi(t,\ s) = \tilde{f}(\tilde{s}), \qquad \Psi(t,\ s) = \tilde{g}(\tilde{s}) \tag{18}$$

имеет решение.

Функции

$$\Phi_1(t,\ s,\ \tilde{s}) \equiv \Phi(t,\ s) - \tilde{f}(\tilde{s}), \qquad \Psi_1(t,\ s,\ \tilde{s}) \equiv \Psi(t,\ s) - \tilde{g}(\tilde{s})$$

во всяком случае определены при значениях $|s| < \sigma^*$, $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, $\widetilde{a} \leqslant \widetilde{s} \leqslant \widetilde{b}$, и являются функциями класса C_1. Так как по условию траектория L_0 пересекает дугу l при значении $t = \widetilde{t}_0$, то система уравнений (18) удовлетворяется при значениях $t = t_0$, $s = \widetilde{s} = 0$, т. е.

$$\Phi_1(\widetilde{t}_0,\ 0,\ 0) = 0, \qquad \Psi_1(\widetilde{t}_0,\ 0,\ 0) = 0. \tag{19}$$

Наконец, якобиан

$$\Delta(t,\ s,\ \widetilde{s}) = \frac{D(\Phi_1,\ \Psi_1)}{D(t,\ \widetilde{s})} = \begin{vmatrix} \Phi_t'(t,\ s) & -\widetilde{f}'(\widetilde{s}) \\ \Psi_t'(t,\ s) & -\widetilde{g}'(\widetilde{s}) \end{vmatrix}$$

при $t = \widetilde{t}_0$, $s = 0$, $\widetilde{s} = 0$ обращается в

$$\Delta(\widetilde{t}_0,\ 0,\ 0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_t'(\widetilde{t}_0 - t_0,\ f(0),\ g(0)) & -\widetilde{f}'(0) \\ \psi_t'(\widetilde{t}_0 - t_0,\ f(0),\ g(0)) & -\widetilde{g}'(0) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} P(\widetilde{f}(0),\ \widetilde{g}(0)) & -\widetilde{f}'(0) \\ Q(\widetilde{f}(0),\ \widetilde{g}(0)) & -\widetilde{g}'(0) \end{vmatrix},$$

и, следовательно, так как l есть дуга без контакта,

$$\Delta(\widetilde{t}_0,\ 0,\ 0) = D_1 \neq 0. \tag{20}$$

Соотношения (19) и (20) показывают, что для уравнений (18) выполняются все условия теоремы о неявных функциях (см. дополнение, § 4). В силу этой теоремы существует единственная пара функций

$$t = \chi(s), \qquad \widetilde{s} = \Omega(s),$$

определенных в интервале $|s| \leqslant \sigma_1$, где σ_1 — некоторое положительное число, $\sigma_1 < \sigma^*$, удовлетворяющих системе уравнений (18). При этом $\chi(s)$ и $\Omega(s)$ — функции класса C_1, и

$$\chi(0) = \widetilde{t}_0, \qquad \Omega(0) = 0.$$

Тем самым для любого числа $\sigma_0 \leqslant \sigma_1$ доказано утверждение леммы о существовании функций $\chi(s)$ и $\Omega(s)$ и доказана справедливость утверждения а).

Перейдем к утверждению б). Пусть α — положительное число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) при всех $|s| < \sigma_1$ $\quad \alpha < \dfrac{\chi(s) - t_0}{2}$;

2) при всех $|s| < \sigma_1$ траектории

$$x = \varphi(t - t_0,\ f(s),\ g(s)), \qquad y = \psi(t - t_0,\ f(s),\ g(s))$$

при значениях t, $t_0 < t < t_0 + \alpha$, и при значениях t, $\chi(s) - \alpha < t < \chi(s)$, не имеют общих точек с дугами без контакта l и $\widetilde{l}$. Такое α существует в силу замечания а) к лемме 3 (см. п. 4), а также ввиду того, что дуги l и $\widetilde{l}$ по предположению не имеют общих точек (рис. 38).

По условию леммы траектория L_0 на участке $t_0 < t < \widetilde{t}_0 = \chi(0)$ не имеет общих точек с дугами l и $\widetilde{l}$.

Следовательно, дуга этой траектории, соответствующая при выбранном на ней движении (17) значениям t, $t_0 + \alpha \leqslant t \leqslant \widetilde{t}_0 - \alpha$ (дуга M_1M_2

на рис. 38), находится на положительном расстоянии от дуг без контакта l и $\tilde{l}$. Но тогда, очевидно (в силу непрерывности функций φ, ψ, f, g и χ), и при достаточно малом σ_0, $0<\sigma_0<\sigma_1$, у всех траекторий, пересекающих l в точках со значениями $|s|<\sigma_0$ дуги, соответствующие в уравнениях (16) значениям $t\in[t_0+\alpha,\ \chi(s)-\alpha]$ также находятся на положительном расстоянии от дуг l и $\tilde{l}$. Отсюда следует, если принять во внимание, как выбрано число α, справедливость утверждения б) леммы.

Для доказательства утверждения в) найдем выражение для $\Omega'(s)$. Так как функции $\chi(s)$ и $\Omega(s)$ являются решениями уравнений (18), то

$$\Phi(\chi(s),\ s)\equiv\tilde{f}(\Omega(s)),\qquad \Psi(\chi(s),\ s)\equiv\tilde{g}(\Omega(s)),$$

($|s|\leqslant\sigma$). Дифференцируя по s, мы получим

$$\Phi'_t(\chi(s),\ s)\,\chi'(s)+\Phi'_s(\chi(s),\ s)=\tilde{f}'(\Omega(s))\,\Omega'(s),$$
$$\Psi'_t(\chi(s),\ s)\,\chi'(s)+\Psi'_s(\chi(s),\ s)=\tilde{g}'(\Omega(s))\,\Omega'(s),$$

откуда

$$\Omega'(s)=\frac{\begin{vmatrix}\Phi'_t(\chi(s),\ s) & \Phi'_s(\chi(s),\ s)\\ \Psi'_t(\chi(s),\ s) & \Psi'_s(\chi(s),\ s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Phi'_t(\chi(s),\ s) & \tilde{f}'(\Omega(s))\\ \Psi'_t(\chi(s),\ s) & \tilde{g}'(\Omega(s))\end{vmatrix}} \tag{21}$$

(знаменатель не равен нулю, так как $\tilde{l}$ есть дуга без контакта).

Числитель полученной дроби представляет, очевидно, выражение $\Delta(\chi(s),\ s)$ из леммы 7 (см. п. 4) и равен

$$\Delta(\chi(s),\ s)=\begin{vmatrix}P(f(s),\ g(s)) & f'(s)\\ Q(f(s),\ g(s)) & g'(s)\end{vmatrix}I(\chi(s)), \tag{22}$$

где $I(\chi(s))>0$ в силу формулы (16). Знаменатель дроби (21)

$$\begin{vmatrix}\varphi'_t(\chi(s)-t_0,\ f(s),\ g(s)) & \tilde{f}'(\Omega(s))\\ \psi'_t(\chi(s)-t_0,\ f(s),\ g(s)) & \tilde{g}'(\Omega(s))\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix}P[\tilde{f}(\Omega(s)),\ \tilde{g}(\Omega(s))] & \tilde{f}'(\Omega(s))\\ Q[\tilde{f}(\Omega(s)),\ \tilde{g}(\Omega(s))] & \tilde{g}'(\Omega(s))\end{vmatrix}. \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в выражение (21) и пользуясь обозначениями $\Delta(s)$ и $\tilde{\Delta}(\tilde{s})$, введенными в начале этого пункта, мы получим

$$\Omega'(s)=\frac{\Delta(s)}{\tilde{\Delta}(\Omega(s))}I(\chi(s)). \tag{24}$$

Так как $I(\chi(s))>0$, а знаки определителей $\Delta(s)$ и $\tilde{\Delta}(\Omega(s))$ по предположению одинаковы, то $\Omega'(s)>0$ и, следовательно, $\Omega(s)$ есть монотонно-возрастающая функция. Лемма доказана.

Замечание 1. Утверждению, что $\tilde{s}=\Omega(s)$ является возрастающей функцией от s, может быть придана элементарная геометрическая форма. Именно, обозначим через λ часть траектории L_0, соответствующую значениям t, $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$, где $\tau_0<t_0$, $\tau_1>\chi(s)$, причем τ_0-t_0

и $\tau_1 - \chi(s)$ настолько малы, что λ является простой дугой *). Тогда тот факт, что $\Omega(s)$ есть возрастающая функция, означает, что если какая-нибудь траектория при $t = t_0$ пересекает часть дуги l, лежащую по положительную (отрицательную) сторону от дуги λ в точке $M(s^*)$, достаточно близкой к точке M_0, то при значении $s^* = \chi(s^*)$ эта траектория пересекает часть дуги $\tilde{l}$, также лежащую по положительную (отрицательную) сторону от λ в точке $\tilde{M}(s^*)$ (рис. 39).

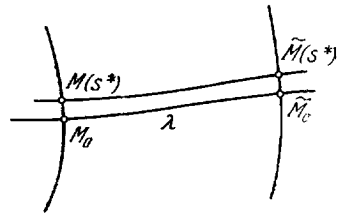


Рис. 39.

Замечание 2. Если система (I), а также функции $f(s)$, $g(s)$, $\tilde{f}(s)$, $\tilde{g}(s)$ принадлежат классу C_k (являются аналитическими), то функции $\Omega(s)$ и $\chi(s)$ также принадлежат классу C_k (соответственно являются аналитическими).

Мы предположим теперь, что функции $\Omega(s)$ и $\chi(s)$, обладающие установленными в лемме 9 свойствами, определены для всех $s \in [a, b]$ и что

$$\Omega(a) = \tilde{a}, \quad \Omega(b) = \tilde{b}. \tag{25}$$

Пусть A — конец дуги l, соответствующий $s = a$, B — конец l, соответствующий $s = b$. Обозначим через L_A и L_B траектории, проходящие через концы A и B дуги l. В силу условия (25) траектории L_A и L_B проходят соответственно через концы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ дуги $\tilde{l}$; здесь $\tilde{A}$ — конец $\tilde{l}$, соответствующий значению $\tilde{s} = \tilde{a}$, а $\tilde{B}$ — конец, соответствующий $\tilde{s} = \tilde{b}$.

Рассмотрим простую замкнутую кривую γ, состоящую из дуг $A\tilde{A}$ и $B\tilde{B}$ траекторий L_A и L_B и частей AB и $\tilde{A}\tilde{B}$ дуг без контакта l и $\tilde{l}$. Обозначим через Γ область, заключенную внутри кривой γ, $\bar{\Gamma}$ — ее замыкание.

Лемма 10. *Любая траектория, проходящая через точку области* Γ *при убывании* t, *пересекает дугу* l, *а при возрастании* t — *дугу* $\tilde{l}$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 8 и введенными в ней обозначениями, считая, что роль функции $\tau(s)$ играет $\chi(s)$. В силу этой леммы (все условия которой в нашем случае выполняются) отображение T, заданное уравнениями (9)

$$x = \varphi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Phi(t, s), \quad \varphi = \psi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Psi(t, s),$$

является регулярным отображением области $\bar{R}$:

$$a \leqslant s \leqslant b, \quad \tau_0 \leqslant t \leqslant \chi(s)$$

на некоторую область плоскости (x, y). Обозначим через C границу области R. Нетрудно видеть, что $T(C) = \gamma$.

Следовательно, регулярное отображение T переводит границу односвязной области R в границу односвязной области Γ. Но тогда, в силу ограниченности обеих областей R и Γ (см. дополнение, § 1, п. 7), $T(R) = \Gamma$. А это и означает, что все точки области Γ лежат на траекториях, при убывании t пересекающих дугу без контакта l, а при возрастании — дугу $\tilde{l}$.

*) В случае, когда траектория L_0 не замкнута, очевидно, (см. § 1) всякая ее часть, соответствующая любому конечному сегменту $[\tau_0, \tau_1]$ значений t, всегда является простой дугой.

Поэтому выбор значений τ_0 и τ_1 достаточно близкими к t_0 и t_1 нужен лишь в случае, когда L_0 является замкнутой траекторией.

Замечание 1. Все траектории, пересекающие дугу l в отличных от концов точках, при возрастании t, очевидно, входят внутрь Г, а пересекающие дугу $\tilde{l}$ в отличных от концов точках — при возрастании t выходят из области Г.

Замечание 2. Предположим, что точка A фиксирована, а B является переменной точкой дуги l. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $B \in U_\delta(A)$, то соответствующая область Г целиком лежит в ε-окрестности дуги $A\tilde{A}$ траектории L_A. Это непосредственно следует из непрерывности функций $\chi(s)$ и $\Omega(s)$.

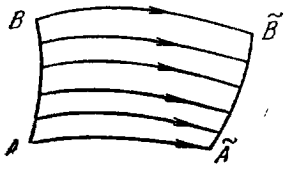


Рис. 40.

Замкнутую область типа Г, т. е. замкнутую односвязную область, ограниченную двумя непересекающимися дугами без контакта AB и $\tilde{A}\tilde{B}$ и двумя дугами траекторий $A\tilde{A}$ и $B\tilde{B}$, которая удовлетворяет утверждению леммы 10, мы будем называть *элементарным топологическим четырехугольником* или просто — элементарным четырехугольником (рис. 40).

7. Случай, когда траектория имеет с дугой без контакта более одной общей точки. Установленные выше леммы справедливы не только для динамических систем на плоскости и на поверхности рода нуль, но и для систем на поверхностях более высокого рода, так как при доказательствах мы не пользовались специфическими свойствами плоскости. В отличие от этого, доказательства лемм, рассматриваемых в настоящем пункте, существенно используют специфическое свойство плоскости или сферы — их *односвязность*, т. е. тот факт, что всякая простая замкнутая кривая делит плоскость (или сферу) на две области. Поверхности более высокого рода не являются односвязными. Поэтому для таких поверхностей леммы, а также основанные на этих леммах предложения, излагаемые ниже, не имеют места.

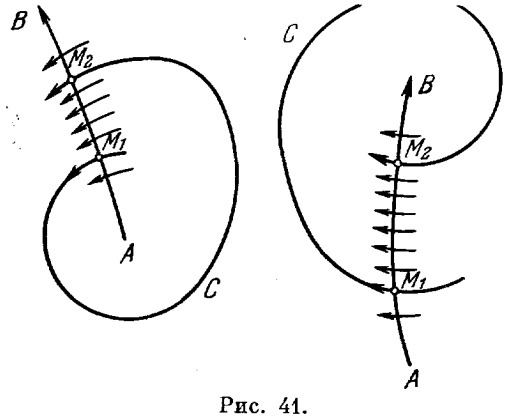


Рис. 41.

Пусть как и выше, l — дуга без контакта, параметрическое уравнение которой

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad s \in [a, b],$$

причем, концы A и B дуги соответствуют значениям a и b параметра s. Предположим, что некоторая траектория L_0 имеет с дугой l две различные общие точки $M_1(s_1)$ и $M_2(s_2)$, отличные от концов дуги l и соответствующие при некотором движении на L_0

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{26}$$

значениям t_1 и t_2 параметра t ($t_1 < t_2$). Пусть, кроме того, при значениях $t \in [t_1, t_2]$ у траектории L нет больше общих точек с дугой l. Дугу M_1M_2 траектории L мы будем называть *«витком траектории»*. Предположим для определенности, что $s_1 < s_2$. Геометрически очевидно, что при указанных условиях возможно одно из двух расположений траектории L_0 и дуги l, схематически изображенных на рис. 41 (или их зеркальные

отображения). Очевидно, траектория не может пересекать дугу, как указано на рис. 42, так как тогда дуга l не была бы дугой без контакта.

Обозначим через C простую замкнутую кусочно-гладкую кривую, образованную дугой M_1M_2 траектории L (соответствующей значениям t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) и частью M_1M_2 дуги l.

Так как l — дуга без контакта, то все траектории, ее пересекающие, образуют с ней угол одного знака. Тогда в силу леммы 4 § 6 дополнения траектории, пересекающие часть M_1M_2 дуги l в точках, отличных от ее концов, либо все входят внутрь C, либо все выходят из C (рис. 43).

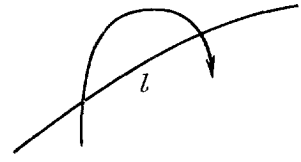


Рис. 42.

Л е м м а 11. *Если C — простая замкнутая кривая, образованная дугой M_1M_2 траектории L_0 и частью M_1M_2 дуги без контакта l, то:* а) *точки траектории L_0, соответствующие значениям $t < t_1$, лежат внутри (вне) кривой C, а точки, соответствующие значениям $t > t_2$, лежат вне (внутри) кривой C;* б) *всякая траектория L, при $t = t_0$ пересекающая дугу l между точками M_1 и M_2, при других значениях t уже не пересекает эту часть дуги l;* в) *часть AM_1 дуги l лежит внутри (вне) кривой C, а часть BM_2 — вне (внутри) кривой C* (рис. 43).

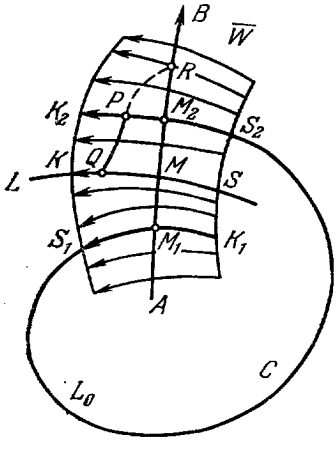


Рис. 43.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство леммы опирается на свойства области W леммы 3, построенной около дуги l, и на лемму 4 § 6 дополнения, уже упоминавшуюся выше.

Рассмотрим траектории, при $t = t_0$ пересекающие дугу l. Во избежание путаницы будем обозначать на этих траекториях параметр («время») не буквой t, как в уравнениях (26) траектории L_0, а буквой T. Таким образом, уравнения этих траекторий запишутся в виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi(T - t_0,\ f(s),\ g(s)) = \Phi(T,\ s), \\ y &= \psi(T - t_0,\ f(s),\ g(s)) = \Psi(T,\ s). \end{aligned} \tag{27}$$

При достаточно малом h множество $\overline{W}$ точек с координатами

$$x = \Phi(T,\ s), \qquad y = \Psi(T,\ s)$$

$$(t_0 - h \leqslant T \leqslant t_0 + h, \qquad a \leqslant s \leqslant b)$$

обладает свойствами, установленными в лемме 3. (При этом для h заведомо должны выполняться неравенства $t_1 + h < t_2 - h$, в противном случае, как нетрудно видеть, отображение, заданное функциями (27), не может быть регулярным.) Область $\overline{W}$ указана на рис. 43.

Отметим, что, полагая в уравнениях (27) $s = s_1$ и $s = s_2$, мы получим два отличных от (26) движения на траектории L_0. Одно из этих движений

$$x = \varphi(T - t_0,\ f(s_1),\ g(s_1)),\ y = \psi(T - t_0,\ f(s_1),\ g(s_1)),$$

получается из движения

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

заменой $t = T - T_0 + t_2$, а другое —

$$x = \varphi(T - t_0,\ f(s_2),\ g(s_2)), \qquad y = \psi(T - t_0,\ f(s_2),\ g(s_2))$$

получается из движения (26) заменой $t = T - T_0 + t_1$.

Рассмотрим часть дуги M_1M_2 траектории L_0, соответствующую значениям t, $t_1 + h < t < t_2 - h$, т. е. открытую дугу S_1S_2. Так как при значениях t в интервале (t_1, t_2) траектория L_0 по условию не имеет общих точек с дугой l, то открытая дуга S_1S_2 траектории L_0 не может иметь общих точек с областью $\overline{W}$. Действительно, в противном случае в силу замечания б) к лемме 3 у L_0 непременно должна была бы существовать общая с l точка, соответствующая некоторому значению t, $t_1 < t < t_2$.

Таким образом, кроме части M_1M_2 дуги l, частей M_2S_2 и M_1S_1 траектории L_0 (соответствующих значениям t, $t_2 - h \leqslant t \leqslant t_2$ и $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + h$) *) в области $\overline{W}$ нет больше никаких точек кривой C. Дуга l разделяет $\overline{W}$ на две части $\overline{W}^-$ и $\overline{W}^+$. Точкам $\overline{W}^-$ соответствуют значения T, $t_0 - h \leqslant T < t_0$, точкам $\overline{W}^+$ — значения T, $t_0 < T \leqslant t_0 + h$.

Пусть L — какая-нибудь траектория, пересекающая дугу l в точке M, лежащей между точками M_1 и M_2 (рис. 43). Принимая во внимание лемму дополнения, предположим для определенности, что часть траектории L, соответствующая значениям $t_0 \leqslant T < t_0 + h$ (т. е. «полуоткрытая дуга» MK), лежит вне C (в $\overline{W}^+$), а часть, соответствующая значениям T, $t_0 - h \leqslant T < t_0$ (т. е. «полуоткрытая» дуга MS), внутри C (в $\overline{W}^-$).

Рассмотрим теперь часть траектории L_0, соответствующую значениям $t > t_2$, $t_2 < t \leqslant t_2 + h$ **) (т. е. «полуоткрытую» дугу M_2K_2 на рис. 43). Она, очевидно, лежит в $\overline{W}^+$. В силу свойств области W любую точку P этой дуги можно соединить с точкой Q дуги MK траектории L непрерывной линией PQ, целиком лежащей в $\overline{W}$ и не имеющей общих точек с кривой C (см. замечание к лемме 3). Отсюда следует, что полуоткрытая дуга M_2K_2 траектории L_0, так же как и дуга MK траектории L, лежит вне C. Совершенно аналогично, рассматривая дуги M_1K_1 и MS траекторий L_0 и L, мы покажем, что обе эти дуги лежат внутри C.

Очевидно, далее, что у траектории L_0 не может быть ни одной точки, соответствующей значениям $t < t_1$ и лежащей вне C. В противном случае, траектория L_0 должна была бы выйти из C при убывании t. Но это невозможно, так как траектория L_0 не может пересечь свою собственную дугу M_1M_2 и не может пересечь дугу без контакта l при убывании t, выходя из C (в силу того, что по предположению, траектория L, а значит, и все пересекающие дугу без контакта l траектории при убывании t входят внутрь C).

Совершенно таким же рассуждением мы покажем, что точки траектории L, соответствующие в уравнениях (26) значениям $t > t_2$, лежат вне C. Таким образом, пункт а) доказан.

Перейдем к доказательству утверждения б). Пусть L — какая-нибудь траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку M, лежащую между точками M_1 и M_2. При убывании t эта траектория входит в область, заклю-

*) В уравнениях (27) часть M_2S_2 траектории L_0 соответствует значениям t, $t_0 - h \leqslant T < t_0$, а часть M_1S_1 — значениям t, $t_0 + h \geqslant T > t_0$.

**) Или значениям T, $t_0 < T \leqslant t_0 + h$, в уравнениях (27).

ченную внутри C. Выйти из этой области через точки, лежащие между точками M_1 и M_2, она не может (так как тогда она должна пересечь дугу l в противоположном направлении, что невозможно).

Очевидно, при убывании t она не может пройти и через сами точки M_1 и M_2.

Действительно, допустим, что траектория L при убывании t попадет, например, в точку M_1, оставаясь до этого внутри C. Но через точку M_1 проходит траектория L_0, у которой нет точек, близких к точке M_1, лежащих внутри C.

Таким образом, отрицательная полутраектория L_M^-, имеющая началом внутреннюю точку M отрезка M_1M_2 дуги l, остается целиком, кроме точки M, внутри C. Также устанавливается, что положительная полутраектория L_M^+ лежит целиком (кроме ее начала M) вне кривой C. Этим доказано утверждение б) леммы.

Перейдем к доказательству утверждения в). Рассмотрим часть M_2B дуги l. Нетрудно видеть, что всякая, отличная от M_2, точка R этой части может быть соединена с точкой Q части M_2K_2 траектории L_0 непрерывной кривой, целиком лежащей в $\overline{W}$ и не имеющей общих точек с кривой C. (Эта непрерывная кривая изображена пунктиром на рис. 43.) Следовательно, полуоткрытая дуга M_2B (соответствующая значениям s, $s_2 < s \leqslant b$), так же как и полуоткрытая дуга M_2K_2 траектории L_0, лежит вне C. Совершенно аналогично мы покажем, что полуоткрытая дуга M_1A лежит внутри C. Таким образом, лемма доказана полностью.

Следствие 1. Если у траектории L есть две различные общие точки M_1 и M_2 с дугой без контакта l, соответствующие значениям t_1 и t_2, и при значениях t, $t_1 < t < t_2$, у траектории L больше нет общих точек с дугой l, то на дуге l между точками M_1 и M_2 нет больше уже ни одной точки L.

Это непосредственно следует из утверждения а) настоящей леммы.

Следствие 2. Предположим, что траектория L имеет более двух точек пересечения с дугой без контакта l, и пусть M_1, M_2, M_3, ... —конечное или счетное множество таких точек. Предположим, далее, что при каком-нибудь движении по траектории эти точки являются *последовательными* точками пересечения с дугой l, т. е. соответствующие им значения времени t, t_1, t_2, t_3, ... меняются монотонно — скажем, возрастают:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots,$$

и при промежуточных значениях t, $t_i < t < t_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, траектория L не пересекается с дугой l. Тогда соответствующие точкам M_i значения s_i параметра s на дуге l также меняются монотонно, т. е. либо

$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots,$$

либо

$$s_1 > s_2 > s_3 > \ldots$$

(рис. 44). При этом траектория L не имеет с дугой l общих точек, расположенных (на дуге l) между точками M_i и M_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots$).

Следствие 2 вытекает из утверждений а) и в) леммы. Коротко содержание его можно выразить следующим образом: *последовательные по t точки пересечения траектории L с дугой без контакта l являются также точками, последовательными по s.*

Лемма 12. *Замкнутая траектория не может иметь более одной общей точки с дугой без контакта.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что замкнутая траектория L имеет не менее двух различных точек пересечения с дугой без контакта l. Пусть M_1 и M_2 — две такие точки, соответствующие значениям параметров t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$). Мы будем предполагать, что при промежуточных значениях времени $t_1 < t < t_2$ траектория L не пересекается с дугой l.

В силу предыдущей леммы либо полутраектория $L^+_{M_1}$ лежит внутри, а полутраектория $L^+_{M_2}$ — вне кривой C, составленной из дуги M_1M_2 траектории L и части M_1M_2 дуги l, либо наоборот. Предположим для определенности, что $L^+_{M_1}$ лежит внутри C (рис. 45). Рассмотрим точку M^* траектории L, соответствующую значению $t = t^* < t_1$. Очевидно, $M^* \in L^+_{M_1}$.

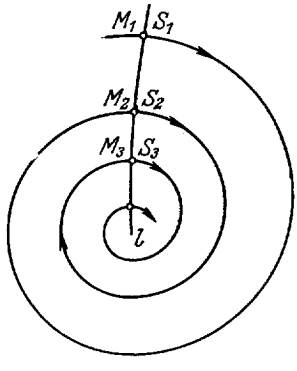


Рис. 44.

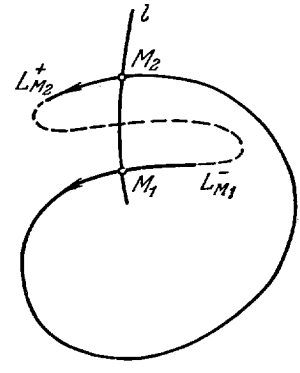


Рис. 45.

По предположению L — замкнутая траектория. Обозначим период движения на L через θ_0. Тогда все точки траектории L, соответствующие значениям $t = t^* + n\theta_0$ (n — целое), совпадают с точкой M^*. Но если n достаточно велико, то $t^* + n\theta_0 > t_2$, а это значит, что $M^* \in L^+_{M_2}$. Мы пришли к противоречию — одна и та же точка M^* лежит и внутри и вне простой замкнутой кривой C. Лемма доказана.

8. Функция последования. Пусть, как и выше, некоторая траектория L_0 пересекает дугу без контакта l в двух последовательных по t точках M_1 и M_2, отличных от концов дуги l и соответствующих значениям времени t_1 и t_2, $t_1 < t_2$. Траектория L_0 может быть как незамкнутой, так и замкнутой. В первом случае M_1 и M_2 — различные точки на дуге l, соответствующие разным значениям s_1 и s_2 параметра s.

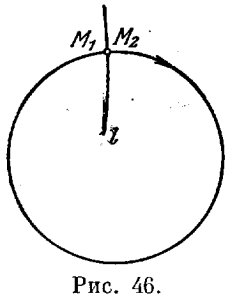


Рис. 46.

Во втором случае точки M_1 и M_2 совпадают, $s_2 = s_1$, но t_1 и t_2 различны; именно, $t_2 = t_1 + \theta_0$, где θ_0 — период движения на траектории (рис. 46). Случай, когда траектории пересекают дважды одну и ту же дугу без контакта, можно рассматривать как предельный для случая траекторий, пересекающих две различные дуги без контакта l_1 и l_2 при значениях t_0 и $t = \chi(s)$ соответственно — когда дуга l_1 сливается с дугой l_2, но при этом так, что промежуток значений t, $t_0 < t < \chi(s)$, не стремится к нулю. Имеет место лемма, аналогичная лемме 9.

Л е м м а 13. *Существует такое* $\sigma_0 > 0$ *и такие функции* $t = \chi(s) > t_1$ *и* $\widetilde{s} = \Omega(s)$, *определенные для значений* s, $|s - s_1| < \sigma_0$, *что если какая-нибудь траектория* L *пересекает при* $t = t_1$ *дугу* l *в точке* $M(s)$ $(|s - s_1| < \sigma_0)$, *то эта траектория при некотором значении* $t = \chi(s) > t_1$ *пересекает дугу* l *в точке* $M(\widetilde{s})$, *где* $\widetilde{s} = \Omega(s)$ (*рис.* 47), *причем выполняются следующие условия*: 1) $\chi(s)$ *и* $\Omega(s)$ *являются функциями класса* C_1; 2) *при значениях* t_2, $t_1 < t_2 < \chi(s)$, *траектория* L *не имеет общих точек с дугой* l; 3) $\Omega'(s) > 0$, *так что* $\widetilde{s} = \Omega(s)$ — *монотонно-возрастающая функция от* s. (*Аналогичное утверждение имеет место, если* $t_1 > t_2$. *В этом случае* $\chi(s) < t_1$.)

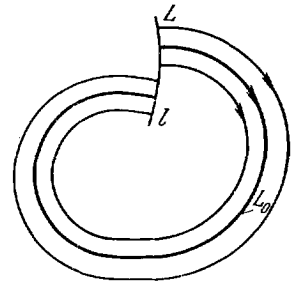


Рис. 47.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнения

$$x = \varphi(t - t_1,\ f(s),\ g(s)) = \Phi(t, s),$$
$$y = \psi(t - t_1,\ f(s),\ g(s)) = \Psi(t, s),$$

определяющие для всякого фиксированного s движение по траектории, при котором в момент времени t_1 траектория пересекает дугу l в точке $M(s)$ $(a \leqslant s \leqslant b)$.

Если функции

$$t = \chi(s), \qquad \widetilde{s} = \Omega(s),$$

о которых говорится в настоящей лемме, существуют, то, очевидно, они должны удовлетворять системе уравнений

$$\Phi(t, s) = f(\widetilde{s}), \qquad \Psi(t, s) = g(\widetilde{s}).$$

Но эта система по условию леммы заведомо удовлетворяется при значениях $t = t_2$, $s = s_1$, $\widetilde{s} = s_2$. Проводя, далее, рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям, приведенным при доказательстве леммы 9, нетрудно убедиться в справедливости настоящей леммы.

З а м е ч а н и е 1. Если система (I), а также функции $f(s)$ и $g(s)$ принадлежат классу C_k (являются аналитическими), то $\Omega(s)$ и $\chi(s)$ также являются функциями класса C_k (соответственно аналитическими).

З а м е ч а н и е 2. Из свойств функции $\widetilde{s} = \Omega(s)$ следует, что существует однозначная обратная функция

$$s = \Omega^{-1}(\widetilde{s}).$$

Функция $\widetilde{s} = \Omega(s)$ и обратная функция $s = \Omega^{-1}(\widetilde{s})$ называются *функциями последования*, определенными на дуге без контакта l.

Очевидно, функция последования может быть определена не на всякой дуге, а лишь на такой, которую траектории пересекают более одного раза.

Пусть $\widetilde{s} = \Omega(s)$ — функция последования на дуге без контакта l. Пусть точке $M(s)$ соответствует значение $t = t_1$. Тогда точке $M(\widetilde{s})$, т. е. точке $M(\Omega(s))$ соответствует значение $t = \chi(s)$. Если $t_2 > t_1$, то $\chi(s) > t_1$ для всех s, где определена функция последования; если же $t_2 < t_1$, то $\chi(s) < t_1$. В первом случае говорят, что *функция последования* $\widetilde{s} = \Omega(s)$ *построена при движении на траектории в сторону возрастания* t, *а во втором — в сторону убывания* t.

Очевидно, из двух функций последования $\widetilde{s} = \Omega(s)$ и $s = \Omega^{-1}(\widetilde{s})$ одна построена при движении на траекториях в сторону возрастания t,

а другая — в сторону убывания. В случае, когда $\chi(s) > t_1$, $M(\Omega(s))$ называется *последующей для* $M(s)$ *точкой*, а $M(s)$ *точкой, предыдущей для* $M(\Omega(s))$.

Из леммы 12 следует, что траектория, проходящая через точку $M(s)$, является замкнутой в том и только в том случае, когда $\Omega(s) = s$.

9. Замкнутые кривые, составленные из дуги траектории и дуги без контакта, и ограниченные ими области. Предположим, что функция последования $\tilde{s} = \Omega(s)$ на дуге l определена для всех $s \in [a, b]$ и каждая траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку $M(s)$, $s \in [a, b]$, проходит через точку $M(\Omega(s))$ при $t = \chi(s)$. Будем для определенности считать, что $\chi(s) > t_0$, т. е. функция последования $\Omega(s)$ построена при движении на траекториях в сторону возрастания t. Обозначим $\Omega(a)$ и $\Omega(b)$

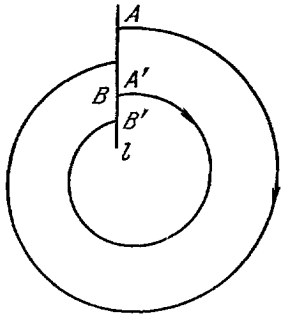


Рис. 48.

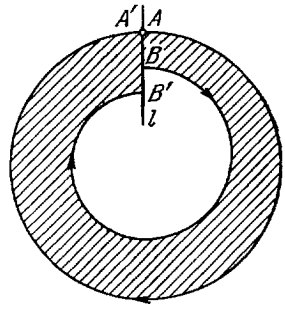


Рис. 49.

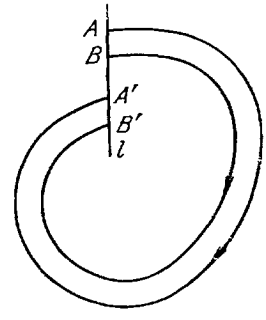


Рис. 50.

соответственно через a' и b', и пусть A, B, A', B' — точки на дуге l, для которых значения параметра s равны соответственно a, b, a', b' (рис. 48). Траектории, проходящие через точки A и B, обозначим соответственно через L_A, L_B. Точки A и A' или B и B' могут как быть различными, так и совпадать. В случае, когда A и A' совпадают, траектория L_A является замкнутой и $a' = \Omega(a) = a$ (рис. 49).

Так как функция последования $\Omega(s)$ является возрастающей функцией s и по условию $a < b$, то

$$a' = \Omega(a) < \Omega(b) = b' \tag{28}$$

и для любого $s \in (a, b)$

$$a' < \Omega(s) < b'. \tag{29}$$

Части AB и $A'B'$ дуги l могут как иметь общие точки, так и не иметь их. Случай, когда дуги AB и $A'B'$ не имеют общих точек (рис. 50), сводится, очевидно, к рассмотренному в п. 5 случаю траекторий, пересекающих две различные дуги без контакта.

Пусть дуги AB и $A'B'$ имеют общие точки. Тогда точка B не может лежать между точками A и A' (когда эти точки различны). Действительно, если бы точка B лежала между точками A и A', то в силу (28) и (29) имело бы место неравенство

$$a < b < a' < b',$$

при выполнении которого, вопреки предположению, части AB и $A'B'$ дуги l не имеют общих точек. Точно так же точка A не может лежать между

точками B и B'. Таким образом, в случае, когда части AB и $A'B'$ дуги l имеют общие точки, части AA' и BB' этой дуги либо не имеют общих точек, либо имеют только одну общую точку (если точки A' и B совпадают) (рис. 51). Нетрудно найти все возможные типы расположения точек в рассматриваемом случае (например, рис. 52).

В случае, когда траектория L_A незамкнута, мы обозначим через C_1 простую замкнутую кривую, состоящую из дуги AA' траектории L_A и части AA' дуги l; в случае же, когда L_A — замкнутая траектория, будем понимать под C_1 саму эту траекторию. Аналогично обозначим через C_2 простую замкнутую кривую, состоящую из дуги BB' траектории L_B и части BB' дуги l, или всю траекторию L_B. C_1 и C_2 либо не имеют общих точек (рис. 48, 49, 52), либо имеют только одну общую точку (рис. 51)—в зависимости от того, имеют или нет общую точку отрезки AA' и BB' дуги l. Через Γ_1 и Γ_2 обозначим области, ограниченные соответственно кривыми C_1 и C_2.

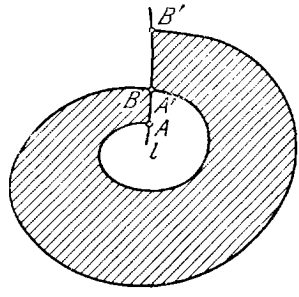


Рис. 51.

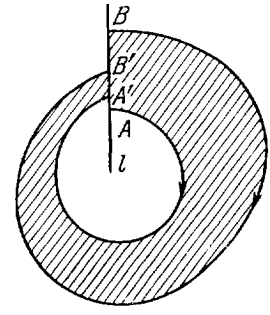


Рис. 52.

Лемма 14. *В случае, когда части AB и $A'B'$ дуги l имеют общие точки, одна из областей Γ_1 и Γ_2 лежит внутри другой, так что кривые C_1 и C_2 ограничивают конечную область. Всякая траектория, проходящая через точку этой области, не лежащую на дуге l, при убывании t пересекает часть AB и, следовательно, при возрастании t пересекает часть $A'B'$ дуги l (на рис. 51 и 52 области между кривыми C_1 и C_2 заштрихованы).*

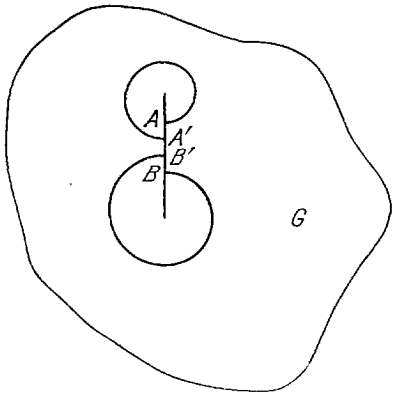


Рис. 53.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение леммы. С этой целью предположим противное, т. е. предположим, что области Γ_1 и Γ_2 лежат одна вне другой (рис. 53).

Пусть Γ^* — область, в границу которой входят обе кривые C_1 и C_2 и кроме точек этих кривых — больше ни одна точка области G (G — область, в которой определена рассматриваемая динамическая система). Такой областью является область $G - \Gamma_1 - \Gamma_2$. Очевидно, в границу этой области кроме кривых C_1 и C_2 входит так же граница области G. Пусть λ — дуга без контакта, являющаяся соединением (теоретико-множественной суммой) частей AB и $A'B'$ дуги l. Одним концом дуги λ является либо точка A (как на рис. 48), либо точка A', а другим — либо точка B, либо точка B'.

Нетрудно видеть, принимая во внимание лемму 11 и сделанное допущение относительно областей Γ_1 и Γ_2, что:

а) все точки дуги λ, отличные от точек ее части AA', лежат вне кривой C_1, а все точки этой дуги, отличные от точек ее части BB', лежат вне

кривой C_2. Следовательно, каждая точка дуги λ либо является граничной точкой области Γ^*, либо ее внутренней точкой;

б) если траектория при $t = t_0$ пересекает дугу λ в точке $M(s)$, расположенной между точками A и B (так что $a < s < b$), то все точки этой траектории, соответствующие значениям t, $t_0 < t < \chi(s)$, принадлежат области Γ^*.

Обозначим через W^* множество (открытое) точек $M(x, y)$ с координатами

$$x = \varphi(t - t_0, f(s), g(s)), \qquad y = \psi(t - t_0, f(s), g(s)),$$

где $t_0 < t < \chi(s)$, а $a < s < b$. (Очевидно, $W^* \subset \Gamma^*$, и W^* не имеет общих точек с дугой l и, следовательно, с дугой λ). Эти уравнения в силу леммы 8 дают регулярное отображение области R плоскости (s, t), определяемой неравенствами

$$t_0 < t < \chi(s), \qquad a < s < b,$$

на множество*) W^*. Следовательно (см. дополнение, § 6), W^* является областью, и граница этой области является отображением границы области R. При этом вся граница области W^* состоит из дуги AA' траектории L_A, дуги BB' траектории L_B и части λ дуги без контакта l, т. е. состоит только из замкнутых кривых C_1 и C_2 и из дуги λ. Этого не может быть, так как если области Γ_1 и Γ_2 лежат одна вне другой, то кривые C_1 и C_2 вместе с отрезком λ, «соединяющим» эти кривые, не могут быть границей какой-нибудь области, целиком лежащей в G. (Такая область, очевидно, состоящая из точек области Γ^*, за исключением точек дуги S, непременно имеет своими точками граничные для области G точки.)

Мы приходим к противоречию, и, следовательно, утверждение а) леммы доказано, т. е. одна из областей Γ_1 и Γ_2 лежит внутри другой. В этом случае существует область Γ, граница которой состоит *только* из точек кривых C_1 и C_2.

Для доказательства утверждения б) заметим прежде всего, что в силу леммы 11 все точки дуги λ либо принадлежат границе области Γ, либо самой области Γ. Поэтому $\Gamma \setminus \lambda$ является областью, граница которой состоит из кривых C_1, C_2 и дуги λ. Как было выше показано, граница области W^* также состоит из кривых C_1 и C_2 и дуги λ, т. е. совпадает с границей области $\Gamma \setminus \lambda$. Но тогда (см. дополнение, § 1, п. 7) область $\Gamma \setminus \lambda$ совпадает с областью W. А это и значит, принимая во внимание определение области W^*, что справедливо утверждение б) леммы. Лемма доказана.

Замечание 1. Предположим, что точка A фиксирована, а точка B может занимать различные положения на дуге l. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $B \in U_\delta(A)$, то область Γ целиком лежит в ε-окрестности дуги AA' траектории L_A. Это следует из замечания 2 к лемме 10 и из настоящей леммы.

Замечание 2. Пусть L_0 — замкнутая траектория, A_0 — ее точка, и пусть сколь угодно близко к точке A_0 имеются точки, через которые проходят замкнутые траектории, отличные от L_0. Тогда можно указать такое $\delta > 0$, что все замкнутые траектории, проходящие через точки окрестности $U_\delta(A_0)$, лежат одна внутри другой. Это непосредственно вытекает из леммы 4 и из настоящей леммы. Действительно, проводя через точку A_0 дугу без контакта l, мы всегда можем, в силу леммы 4 и леммы 5, взять δ

*) Заметим, что в лемме 8 указанное отображение области R на W является однозначным и на границе области, в то время как в рассматриваемом случае это не имеет места.

таким, чтобы все траектории, проходящие через точки этой окрестности, пересекали эту дугу дважды. А тогда, в силу настоящей леммы, области, заключенные между любыми двумя замкнутыми траекториями, проходящими через $U_\delta(A_0)$, лежат одна внутри другой, т. е. эти замкнутые траектории лежат одна внутри другой.

10. Цикл без контакта. Пусть C — гладкая простая замкнутая кривая, лежащая в области G, а M — какая-нибудь ее точка. Мы будем говорить так же, как и в случае простой гладкой дуги l, что *кривая C в точке M имеет или не имеет контакта* (с траекториями системы (1)) в соответствии с тем, касается ли кривая C в этой точке траектории системы (I) или нет.

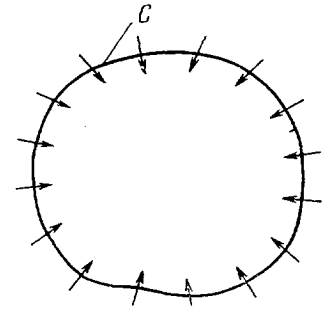


Рис. 54.

Гладкая простая замкнутая кривая C называется *циклом без контакта* динамической системы (I), если а) на кривой C не лежит ни одного состояния равновесия; б) ни в одной своей точке кривая C не имеет контакта. Если цикл без контакта C задан параметрическим уравнением

$$x = f_0(s), \qquad y = g_0(s),$$

где $s \in [s_0, s_0 + \tau]$, то $f_0(s)$ и $g_0(s)$ — функции класса C_1 на этом сегменте в силу того, что цикл C — гладкая замкнутая кривая, и выполняются условия:

$$f_0(s_0) = f_0(s_0 + \tau), \qquad g_0(s_0) = g_0(s_0 + \tau),$$
$$f_0'(s_0) = f_0'(s_0 + \tau), \qquad g_0'(s_0) = g_0'(s_0 + \tau).$$

Для цикла без контакта C выполняются следующие условия, аналогичные условиям (4) и (4′) п. 1:

$$P^2(f_0(s),\ g_0(s)) + Q^2(f_0(s),\ g_0(s)) \neq 0, \tag{30}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} P(f_0(s),\ g_0(s)) & f_0'(s) \\ Q(f_0(s),\ g_0(s)) & g_0'(s) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{30'}$$

при всех $s \in [s_0,\ s_0 + \tau]$.

Если цикл без контакта C задан неявным уравнением

$$\Phi(x, y) = 0,$$

то в точках этого цикла выполняются условия

$$P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0, \tag{31}$$

$$\Phi_x'(x, y)\, P(x, y) + \Phi_y'(x, y)\, Q(x, y) \neq 0, \tag{31'}$$

аналогичные условиям (7) и (8) для дуги без контакта.

Так же, как в случае дуги без контакта (см. § 3, п. 1), угол между циклом без контакта C и любой траекторией, пересекающей его, не обращается в нуль и имеет, следовательно, во всех точках цикла C один и тот же знак (этот знак, очевидно, зависит от знака выражения $\Delta(s)$). Отсюда вытекает, что траектории, пересекающие в некоторый момент $t = t_0$ цикл C при возрастании t либо одновременно все входят внутрь, либо одновременно все выходят наружу (см. дополнение, § 6). Как следствие этого, мы получаем, в частности, что *каждая траектория, пересекающая цикл без контакта, имеет с ним одну и только одну общую точку* (рис. 54).

Очевидно, всякая дуга цикла без контакта является дугой без контакта. Циклы без контакта встречались нам в примерах 7 и 9 (§ 1, п. 14).

11. Семейство циклов без контакта. Траектории, входящие в область, заполненную циклами без контакта. Пусть C_0 и C_1 — два цикла без контакта, причем C_0 лежит внутри C_1. Обозначим через Г кольцевую область, ограниченную циклами C_0 и C_1 и предположим, что область Г покрыта циклами без контакта, обладающими следующими свойствами:

а) через каждую точку области Г проходит один и только один цикл C; б) все циклы без контакта лежат один внутри другого, содержат внутри себя цикл C_0 и содержатся внутри цикла C_1.

При этих условиях мы будем говорить, что семейство этих кривых в области Г является семейством циклов без контакта.

Пусть семейство циклов без контакта задано уравнением

$$F(x, y) = \gamma,$$

где $F(x, y)$ — функция класса C_k, $k \geqslant 1$, и пусть циклам, лежащим в области Г, соответствуют значения γ, заключенные между значениями γ_0 и γ_1, $\gamma_0 < \gamma_1$. Тогда, очевидно, во всех точках области Г выражение

$$F'_x(x, y) P(x, y) + F'_y(x, y) Q(x, y) \tag{32}$$

не обращается в нуль и, следовательно, сохраняет знак. Это означает, что при возрастании t траектории либо входят внутрь каждого из циклов без контакта C, либо выходят из этих циклов. Предполагая для определенности, что траектории пересекают каждый из рассматриваемых циклов без контакта C, при возрастании t входя внутрь его, докажем следующую лемму:

Лемма 15. *Всякая траектория, пересекающая цикл без контакта C_1, при возрастании t пересечет все циклы заданного в* Г *семейства и выйдет из области* Г *через цикл C_1.*

Доказательство. Пусть L — траектория, при $t = t_1$ пересекающая цикл C_1. Заметим прежде всего, что если L при $t = t^*$ пересекает некоторый цикл C^* заданного семейства, то она, очевидно, пересекает (при значении $t < t^*$) все циклы, содержащие C внутри.

Предположим, что траектория L пересекает не все циклы без контакта, заданные в области Г. Тогда среди этих циклов можно указать циклы двух типов: циклы первого типа, которые траектория L пересекает, и циклы второго типа, которые траектория не пересекает. Все циклы второго типа лежат внутри циклов первого типа. При этом непременно должен существовать цикл C, являющийся либо «последним» циклом первого типа, либо «первым» циклом не первого типа, т. е. траектория L пересекает все циклы, содержащие C^* внутри, но не пересекает ни одного цикла, содержащегося внутри C^*. Но последнего цикла первого типа существовать не может. Действительно, у всякой траектории, пересекающей при некотором $t = \tau$ какой-либо цикл без контакта C^* все точки, соответствующие достаточно близким к τ значениям $t > \tau$, лежат внутри C^*, а значит, эта траектория заведомо пересекает при $t > \tau$ циклы без контакта, лежащие внутри C^*.

Предположим, следовательно, что C^* является первым циклом не «первого типа». Так как по самому определению цикла C^* траектория L пересекает все циклы без контакта, содержащие C_0 внутри, то на L найдутся точки, сколь угодно близкие к циклу C^*, и, следовательно, на C^* найдется

по крайней мере одна точка сгущения для этих точек. Пусть P — эта точка и l — некоторая дуга цикла C^*, содержащая эту точку внутри. Тогда, в силу леммы 4, дуга l, очевидно, является дугой без контакта, и траектория L непременно пересечет дугу l, т. е. пересечет цикл C^*. Следовательно, цикл C^* будет циклом без контакта первого типа, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма остается справедливой с надлежащим изменением в формулировке и в том случае, когда траектория входит внутрь l_0 при убывании t.

Л е м м а 16. *Пусть C_1 и C_2 — два цикла без контакта, из которых один лежит внутри другого, например C_2 внутри C_1, и пусть все траектории, при $t = t_0$ пересекающие один цикл — C_1, при некотором значении $t > t_0$ пересекают цикл C_2.*

Тогда через каждую точку кольцевой области между циклами C_1 и C_2 проходит траектория, которая при возрастании t пересекает цикл C_2, а при убывании t — цикл C_1.

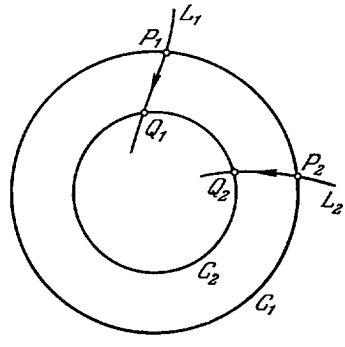


Рис. 55.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P_1 и P_2 — какие-нибудь точки на цикле C_1, L_1 и L_2 — траектории, проходящие через эти точки, Q_1 и Q_2 — точки, в которых они пересекают цикл C_2 (рис. 55). Кольцевая область R между циклами C_1 и C_2, очевидно, разделяется дугами P_1Q_1 и P_2Q_2 траекторий L_1 и L_2 на два элементарных четырехугольника.

Для доказательства настоящей леммы достаточно применить к каждому из этих четырехугольников лемму 10.

В дальнейшем семейство циклов без контакта неоднократно рассматривается не в области, ограниченной двумя циклами без контакта, как здесь, а в двусвязной области, граница которой состоит из цикла без контакта и состояния равновесия, лежащего внутри этого цикла без контакта. Таково семейство окружностей без контакта

$$x^2+y^2=c, \qquad 0<c\leqslant 1,$$

которое рассматривалось в примере 7 § 1 п. 14.

12. Цикл однократного пересечения. В некоторых случаях роль цикла без контакта может играть «обобщенный цикл без контакта или цикл однократного пересечения». Мы скажем, что простая замкнутая кривая C (эта кривая может и не быть гладкой) есть «цикл однократного пересечения» для траекторий системы (I), если: а) на кривой C не лежит ни одного состояния равновесия; б) у всякой траектории, при $t = t_0$ проходящей через какую-нибудь точку кривой C, точки, соответствующие достаточно близким к t_0 значениям $t > t_0$ ($t < t_0$), лежат внутри C, а точки, соответствующие достаточно близким к t значениям $t < t_0$ ($t > t_0$), вне цикла C. В частности, например, гладкая простая замкнутая кривая, не являющаяся циклом без контакта, является «циклом однократного пересечения» в том случае, когда в некоторых своих точках *) она имеет точки соприко-

*) Траектории не могут касаться гладкой замкнутой кривой во всех ее точках, так как в этом случае кривая также была бы интегральной кривой. Это невозможно, так как по предположению для рассматриваемой динамической системы выполняются условия теоремы существования и единственности.

сновения *четного* порядка с траекториями, и во всех других точках не имеет контактов (рис. 56). Очевидно, если цикл однократного пересечения является гладким и

$$F(x, y) = 0$$

—его уравнение, то в точках этого цикла выражение

$$F'_x(x, y)P(x, y) + F'_y(x, y)Q(x, y)$$

может обращаться в нуль. В дальнейшем (см. главу VI) мы будем иногда вместо семейства циклов без контакта рассматривать семейства циклов однократного пересечения, обладающего с некоторой точки зрения теми же свойствами, что и семейство циклов без контакта.

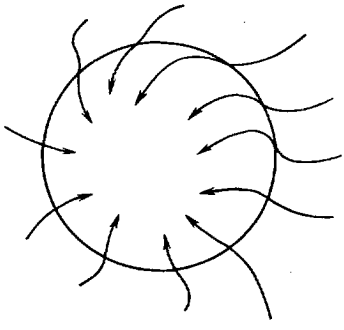


Рис. 56.

13. Дифференцирование функции в силу системы (I). К условиям (4'), (30'), (31'), которыми определяются дуга без контакта, цикл без контакта, а также к условиям, определяющим семейство циклов без контакта и семейство гладких циклов однократного пересечения, можно подойти с несколько другой по форме стороны, если ввести понятие «*дифференцирование в силу системы* (I)». Пусть

$$z = F(x, y)$$

— некоторая функция класса C_k ($k \geqslant 1$) (аналитическая), определенная в области G_1, либо совпадающей с областью G, в которой рассматривается данная динамическая система, либо являющейся ее частью.

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — движение на некоторой траектории системы (I), причем точка, соответствующая определенному значению $t = t_0$, т. е. точка с координатами $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, принадлежит области G_1.

Рассмотрим функцию

$$z(t) = F(\varphi(t), \psi(t)).$$

Эта функция описывает изменение функции $F(x, y)$ вдоль траектории L. Мы имеем при $t = t_0$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=t_0} = F'_x(x_0, y_0)P(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0)Q(x_0, y_0). \tag{33}$$

Очевидно, производная $\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)_{t=t_0}$ не зависит от выбора движения на траектории, а зависит только от точки x_0, y_0.

Выражение

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}[F(x, y)] = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}Q(x, y)$$

называется «производной от функции $F(x, y)$ в силу системы (I)».

Если

$$F(x, y) = 0$$

является уравнением простой дуги l, то в случае, когда эта дуга является дугой без контакта, в точках этой дуги

$$\frac{dF(\varphi, \psi)}{dt} = F'_xP + F'_yQ \neq 0.$$

Если же в какой-нибудь точке дуги l

$$\frac{dF(\varphi, \psi)}{dt} = F'_x P + F'_y Q = 0,$$

то, очевидно, в этой точке дуга l имеет контакт с траекторией.

Совершенно аналогичные высказывания можно сделать в случае, когда $F(x, y) = 0$ является простой замкнутой кривой C_1. Предположим, в частности, что кривая C_1 не является циклом без контакта, но является циклом однократного пересечения. Тогда в некоторых точках ее

$$\frac{dF(x, y)}{dt} = F'_x P + F'_y Q = 0,$$

т. е. в этих точках кривая C имеет с траекторией соприкосновение четного порядка. Если динамическая система и функция $F(x, y)$ принадлежат классу C_k, где $k \geqslant 2$, то в этих точках по самому смыслу соприкосновения четного порядка мы будем иметь

$$\frac{d^2F(\varphi, \psi)}{dt^2} = 0.$$

Предположим теперь, что кривые

$$F(x, y) = C$$

при всех значениях C из некоторого промежутка ($C_1 \leqslant C \leqslant C_2$) являются простыми гладкими замкнутыми кривыми, вложенными друг в друга, причем кривые с меньшими значениями C лежат внутри кривых с большими значениями C.

Условие

$$\frac{dF(x, y)}{dt} = F'_x P + F'_y Q \not\equiv 0,$$

очевидно, эквивалентно тому, что семейство кривых $F(x, y) = C$ является семейством циклов без контакта. Если, кроме того, $\frac{dF(x, y)}{dt} < 0$ во всех точках замкнутой области Γ между циклами

$$F(x, y) = C_1, \qquad F(x, y) = C_2,$$

то это означает, что всякая траектория, проходящая через точку области Γ, при возрастании t, входит внутрь каждого из циклов данного семейства.

Если в области Γ $\frac{dF}{dt} > 0$, то каждая траектория выходит при возрастании t из циклов данного семейства.

Если $F(x, y) = C$ есть семейство циклов однократного пересечения, не обязательно являющихся циклами без контакта, то выражение

$$F'_x P + F'_y Q$$

не меняет знак, но может обращаться в нуль.

14. Цикл без контакта между двумя последовательными витками траектории, пересекающей дугу без контакта. Предположим, что траектория L имеет с дугой без контакта более двух общих точек. Пусть $M_1(s_1)$, $M_2(s_2)$ и $M_3(s_3)$ — такие общие точки, последовательные по t. В силу следствия 2 к лемме 11 эти точки являются последовательными и по s, т. е. либо $s_1 < s_2 < s_3$, либо $s_1 > s_2 > s_3$. Будем считать для определен-

ности, что $s_1 < s_2 < s_3$ (рис. 44). Допустим, далее, что каждая траектория, пересекающая при $t = t_0$ часть M_1M_2 дуги l в точке $M(s)$, пересекает при $t = \chi(s) > t_0$ ($s_1 \leqslant s \leqslant s_2$) часть M_2M_3 дуги l и при промежуточных значениях t, $t_0 < t < \chi(s)$, не имеет общих точек с дугой l (траекторией, проходящей при $t = t_0$ через точку M_1, а также через точку M_2, является, очевидно, траектория L_0). Пусть C_1 — простая замкнутая кривая, состоящая из витка M_1M_2 траектории L_0 и части M_1M_2 дуги l, а C_2 — аналогичная кривая, состоящая из витка M_2M_3 траектории L_0 и части M_2M_3 дуги l. Предположим для определенности, что кривая C_1 (за исключением точки ее M_2) лежит внутри кривой C_2.

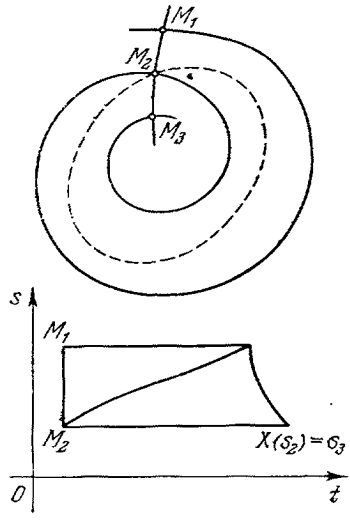


Рис. 57.

Рассмотрим замкнутую область $\bar{\Gamma}$ (ср. лемму 14), состоящую из точек $M(x, y)$ с координатами (9):

$$x = \varphi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Phi(t, s),$$
$$y = \psi(t - t_0, f(s), g(s)) = \Psi(t, s),$$

где $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, $t_0 \leqslant t \leqslant \chi(s)$. Уравнения (9) дают отображение замкнутой области $\bar{R}$ плоскости (t, s), определяемой неравенствами

$$s_1 \leqslant s \leqslant s_2, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \chi(s), \tag{34}$$

на замкнутую область $\bar{\Gamma}$ (см. лемму 14). Это отображение является, очевидно, регулярным во всех точках области $\bar{R}$, за исключением двух точек $(\chi(s_1), s_1)$ и (t_0, s_2), переходящих в одну точку M_2 плоскости (x, y).

Л е м м а 17. *Через точку M_2 всегда можно провести цикл без контакта, целиком лежащий в области $\bar{\Gamma}$ и пересекающий все траектории, проходящие в области $\bar{\Gamma}$ (т. е. все траектории, проходящие через часть M_1M_2 и, следовательно, через часть M_2M_3 дуги l).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k < 0$ и $r < 0$ — два произвольных отрицательных числа. В силу замечания 3 к лемме 10 (см. также дополнение, § 6) существует функция $\lambda(s)$ класса C_1, определенная на сегменте $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ и обладающая следующими свойствами:

а)
$$\lambda(s_1) = \chi(s_1), \qquad \lambda(s_2) = t_0; \tag{35}$$

б) при всех значениях s в интервале (s_1, s_2) выполняется неравенство

$$t_0 < \lambda(s) < \chi(s);$$

в)
$$\lambda'(s_2) = k, \qquad \lambda'(s_1) = \chi(s_1) + r. \tag{36}$$

Рассмотрим на плоскости (t, s) кривую, заданную уравнением

$$t = \lambda(s), \qquad s_1 \leqslant s \leqslant s_2.$$

Эта кривая (рис. 57) расположена целиком в области R, определяемой неравенствами (34), и ни в одной своей точке не касается прямых $s = \text{const}$ (так как функция $\lambda(s)$ дифференцируема) *).

*) Если бы кривая $t = \lambda(s)$ касалась некоторой прямой $s = s_0$, то при $s \to s_0$ мы должны были бы иметь $\lambda'(s) \to \infty$, и следовательно, функция $\lambda(s)$ не была бы дифференцируема при всех рассматриваемых s.

При отображении (9) кривая $t = \lambda(s)$ переходит в некоторую кривую C плоскости (x, y), параметрические уравнения которой суть:

$$\begin{aligned} x &= \Phi(\lambda(s), s) = \varphi(\lambda(s) - t_0, f(s), g(s)), \\ y &= \Psi(\lambda(s), s) = \psi(\lambda(s) - t_0, f(s), g(s)). \end{aligned} \tag{37}$$

Очевидно, кривая C является простой замкнутой кривой, проходящей через точку M_2, лежит целиком в области $\overline{\Gamma}$ и имеет с каждой траекторией, из области $\overline{\Gamma}$, в точности одну общую точку. Из свойств функций φ, ψ, f, g следует, что C является гладкой кривой во всех своих точках, за исключением, вообще говоря, точки M_2. Так как кривая $t = \lambda(s)$ ни в одной своей точке не касается прямых $s = \text{const}$, то в силу свойств регулярного отображения (см. дополнение, § 6) кривая C ни в одной своей точке, отличной от M_2, не касается траекторий.

Покажем теперь, что при произвольном $k < 0$ можно выбрать $r < 0$ так, что кривая C будет гладкой в точке M_2. Очевидно, она в этом случае не будет касаться траектории L также и в точке M_2 и, следовательно, будет требуемым циклом без контакта. Для того чтобы кривая (37) была гладкой в точке M_2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\left.\frac{\dfrac{d\Psi(\lambda(s), s)}{ds}}{\dfrac{d\Phi(\lambda(s), s)}{ds}}\right|_{s=s_1+0} = \left.\frac{\dfrac{d\Psi(\lambda(s), s)}{ds}}{\dfrac{d\Phi(\lambda(s), s)}{ds}}\right|_{s=s_2-0}, \tag{38}$$

которое можно записать, пользуясь выражениями (35) и (36), в виде

$$\frac{\Psi'_t(\chi(s_1), s_1)[\chi'(s_1) + r] + \Psi'_s(\chi(s_1), s_1)}{\Phi'_t(\chi(s_1), s_1)[\chi'(s_1) + r] + \Phi'_s(\chi(s_1), s_1)} = \frac{\Psi'_t(t_0, s_2)k + \Psi'_s(t_0, s_2)}{\Phi'_t(t_0, s_2)k + \Phi'_s(t_0, s_2)}. \tag{39}$$

Заметим теперь, что параметрические уравнения части M_2M_3 дуги l могут быть записаны либо в виде

$$x = \Phi(t_0, s), \qquad y = \Psi(t_0, s) \qquad (s_2 \leqslant s \leqslant s_3), \tag{40}$$

либо в виде

$$x = \Phi(\chi(s), s), \qquad y = \Psi(\chi(s), s) \qquad (s_1 \leqslant s \leqslant s_2). \tag{41}$$

В первом случае точке M_2 соответствует значение s_2, во втором — значение s_1 параметра s.

Подсчитывая угловой коэффициент касательной к дуге l в точке M_2 сначала при помощи уравнений (41), а потом (40) и приравнивая полученные значения, мы приходим к соотношению

$$\frac{\Psi'_t(\chi(s_1), s_1)\chi'(s_1) + \Psi'_s(\chi(s_1), s_1)}{\Phi'_t(\chi(s_1), s_1)\chi'(s_1) + \Phi'_s(\chi(s_1), s_1)} = \frac{\Psi'_s(t_0, s_2)}{\Phi'_s(t_0, s_2)}. \tag{42}$$

Далее, параметрические уравнения траектории L_0 могут быть записаны либо в виде

$$x = \Phi(t, s_2), \qquad y = \Psi(t, s_2), \tag{43}$$

либо в виде

$$x = \Phi(t, s_1), \qquad y = \Psi(t, s_1). \tag{44}$$

В первом случае точке M_2 соответствует значение t_0, а во втором — значение $\chi(s_1)$ параметра t. Подсчитывая двумя способами угловой коэффициент касательной к траектории L_0 в точке M_2, мы получаем

соотношение

$$\frac{\Psi'_t(\chi(s_1), s_1)}{\Phi'_t(\chi(s_1), s_1)} = \frac{\Psi'_t(t_0, s_2)}{\Phi'_t(t_0, s_2)}. \tag{45}$$

Воспользовавшись равенствами (42) и (45), нетрудно показать с помощью простых вычислений, что соотношение (39) эквивалентно соотношению

$$r = \frac{\begin{vmatrix} \Psi'_t(t_0, s_2) & \Psi'_s(\chi(s_1), s_1) \\ \Phi'_t(t_0, s_2) & \Phi'_s(\chi(s_1), s_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Psi'_t(\chi(s_1), s_1) & \Psi'_s(t_0, s_2) \\ \Phi'_t(\chi(s_1), s_1) & \Phi'_s(t_0, s_2) \end{vmatrix}} k,$$

которое можно записать, принимая во внимание (42) и (45), в виде

$$r = \frac{\begin{vmatrix} \Psi'_t(t_0, s_2) & \Psi'_t(\chi(s_1), s_1)\ \chi'(s_1) + \Psi'_s(\chi(s_1), s_1) \\ \Phi'_t(t_0, s_2) & \Phi'_t(\chi(s_1), s_1)\ \chi(s_1) + \Phi'_s(\chi(s_1), s_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Psi'_t(\chi(s_1), s_1) & \Psi'_s(t_0, s_2) \\ \Phi'_t(\chi(s_1), s_1) & \Phi'_s(t_0, s_2) \end{vmatrix}} k. \tag{46}$$

Покажем, что число r, определяемое соотношениями (46), отрицательно. Для этого заметим, что элементы первого столбца каждого из детерминантов выражения (46) суть компоненты вектора, касательного к траектории L_0 в точке M_2 и направленного в сторону возрастания t. Поэтому первые столбцы обоих детерминантов отличаются постоянным положительным множителем. Точно так же постоянным положительным множителем отличаются вторые столбцы детерминантов (их элементы — компоненты вектора, касательного к дуге l в точке M_2 и направленного в сторону возрастания s).

Отсюда следует, что детерминанты в числителе и знаменателе дроби (46) имеют одинаковые знаки, а так как $k < 0$, то $r < 0$. Таким образом, если r есть отрицательное число, определяемое формулой (46), то кривая C является циклом без контакта. Лемма доказана.

§ 4. Предельные точки и множества. Основные свойства траекторий

1. Предельные точки полутраектории и траектории. Как уже было сказано во введении, § 4 посвящен главному содержанию настоящей главы, именно, установлению возможного характера отдельной траектории.

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{I}$$

— динамическая система, заданная в плоской области G.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать отдельные полутраектории или целые траектории такой системы, лежащие в некоторой ограниченной замкнутой области $\bar{G}_1$, $\bar{G}_1 \subset G$. Такие полутраектории или целые траектории мы будем называть *ограниченными*. Очевидно, всякая полутраектория, выделенная из ограниченной полутраектории или ограниченной целой траектории, также является ограниченной. Ограниченная полутраектория или ограниченная целая траектория не имеет точек, сколь угодно далеких в случае, когда область G не ограничена, или сколь угодно близких к границе области G в случае, когда G ограничена.

В этой главе *под полутраекторией или траекторией мы будем, как правило, понимать ограниченную полутраекторию или ограниченную целую траекторию* и не будем оговаривать этого особо. Кроме того, мы будем рассматривать также отдельные траектории или полутраектории динамических систем на сфере. Напомним, что всякая траектория на сфере является целой траекторией (§ 2, теорема 7).

Определение II. *Точка M называется предельной точкой положительной (отрицательной) полутраектории L^+ (L^-), если при всяком $\varepsilon > 0$ и при всяком $T > 0$ в $U_\varepsilon(M)$ имеется по крайней мере одна точка полутраектории L^+ (L^-) (отличная от точки M или совпадающая с ней), соответствующая при любом выборе движения на траектории значению времени $t > T$ ($t < -T$).*

Это определение без изменения сохраняется также и для случая полутраекторий на поверхностях любого рода, а также и для случая динамических систем в пространстве любого числа измерений.

Из определения II следует, что если точка M является предельной точкой положительной полутраектории L^+, то либо а) существует последовательность *различных* точек M_k полутраектории L^+, соответствующих значениям времени t_k ($k = 1, 2, \ldots$) таких, что $M_k \to M$, а $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$, либо б) сама точка $M \in L^+$ соответствует бесчисленному множеству значений $t = t_k$ таких, что $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Аналогично обстоит дело с предельной точкой отрицательной полутраектории.

Всякие две положительные (отрицательные) полутраектории, выделенные из одной и той же траектории, имеют одни и те же предельные точки. Рассматриваемые нами полутраектории (ограниченные на плоскости или произвольные на сфере) непременно имеют в силу компактности ограниченной замкнутой области или сферы по крайней мере одну предельную точку. Если полутраектория лежит целиком в области $\overline{G_1} \subset G$, то и предельные точки ее принадлежат области $\overline{G_1}$.

Предельная точка полутраектории может как принадлежать самой полутраектории, так и не принадлежать.

Пусть L^+ — положительная полутраектория, M^* — какая-нибудь точка сгущения последовательности точек L^+, не принадлежащая самой полутраектории. Покажем, что M^* является предельной точкой для L^+. В самом деле, пусть M_k — последовательность точек полутраектории L^+, сходящихся к точке M^*. Пусть точка M_k соответствует значению t_k ($k = 1, 2, \ldots$). Если последовательность t_k не ограничена сверху, то очевидно, что M^* есть предельная точка полутраектории L^+. Если же последовательность t_k ограничена сверху, то мы можем сказать, что она сходится к какому-то числу t^* (если это не так, то нужно из последовательности точек M_k выбрать сходящуюся подпоследовательность). Но тогда последовательность M_k сходится к точке полутраектории L^+, соответствующей значению $t = t^*$, и не может сходиться к точке M^*, по условию не лежащей на L^+. Следовательно, последовательность t_k не ограничена. Это справедливо и для отрицательной полутраектории L^-.

В дальнейшем, для краткости, мы будем через $M(t)$ обозначать точку траектории, соответствующую значению параметра t. Кроме того, все доказательства, относящиеся к свойствам полутраекторий (а иногда и сами формулировки этих свойств), мы будем давать только для положительных полутраекторий, не оговаривая каждый раз, что они справедливы и для отрицательных.

Рассмотрим теперь целую (ограниченную) траекторию L динамической системы (I) или траекторию динамической системы на сфере.

Определение III. *Точка M называется предельной точкой траектории L, если она является предельной точкой для положительной полутраектории L^+ или отрицательной полутраектории L^-, выделенной из L. В первом случае точка M называется также ω-предельной, а во втором α-предельной точкой траектории L.*

2. Примеры предельных точек. Поясним введенное понятие предельной точки на примерах.

Всякое состояние равновесия имеет, очевидно, единственную предельную точку, являющуюся самим этим состоянием равновесия. Эта точка является одновременно и α- и ω-предельной точкой.

Рассмотрим теперь замкнутую траекторию L. Пусть период движения по ней равен θ_0. Если принадлежащая L точка M соответствует какому-то значению времени t_0, то она соответствует и бесчисленному множеству значений

$$\ldots, t_0 - n\theta_0, \ldots, t_0 - 2\theta_0, \quad t_0 - \theta_0, t_0, t_0 + \theta_0, \quad t_0 + 2\theta_0, \ldots, t_0 + n\theta_0, \ldots,$$

где n стремится к $+\infty$. Но тогда в силу определений II и III она является как α-, так и ω-предельной точкой траектории L. Таким образом, все точки замкнутой траектории L являются ее α- и ω-предельными точками. Очевидно, что предельных точек, не принадлежащих ей самой, замкнутая траектория не имеет.

Если хоть одна предельная точка траектории L принадлежит самой этой траектории, то L называется *самопредельной траекторией*. Таким образом, *состояние равновесия и замкнутая траектория являются самопредельными траекториями.*

Рассмотрим теперь примеры § 1, п. 14. Полутраектория, «стремящаяся» к состоянию равновесия как в случае узла или фокуса, так и в случае седла (примеры 3, 4, 5) *), имеет своей единственной предельной точкой это состояние равновесия. В примере 4 все траектории, имеющие вид спиралей и расположенные внутри замкнутой траектории (предельного цикла) $x^2 + y^2 = 1$, имеют единственную α-предельную точку — состояние равновесия O; ω-предельными точками таких траекторий являются все точки предельного цикла.

Траектории, лежащие вне предельного цикла, не имеют α-предельных точек (точки на них уходят в бесконечность в конечное время); ω-предельными точками их также являются все точки предельного цикла.

В примере 8 отличная от состояния равновесия траектория, входящая в состав «петли», имеет состояние равновесия и своей α-, и своей ω-предельной точкой. В примере 11 при $\mu > 0$ (рис. 24, *а*) траектории, отличные от состояния равновесия, лежащие внутри «петель», имеют состояния равновесия (фокусы) своими ω-предельными точками, а своими α-предельными точками — все точки «петель». Рассмотрение предельных точек траекторий в примере 11, лежащих вне «восьмерки», также не представляет затруднений.

3. Основные свойства множества предельных точек.

Лемма 1. *Если M_0 — предельная точка полутраектории L^+, то все точки траектории, проходящей через точку M_0, являются предельными для полутраектории L^+.*

---

*) Не следует забывать, что к состоянию равновесия полутраектории, отличные от этого состояния, могут «стремиться» только при $|t| \to +\infty$.

Доказательство. Справедливость леммы очевидна, если M_0 — состояние равновесия, рассматриваемой динамической системы. Допустим поэтому, что M_0 не является состоянием равновесия, и обозначим через L_0 траекторию, проходящую через точку M_0. Для доказательства леммы достаточно показать, что любая, отличная от M_0 точка M^* траектории L_0 является предельной для L^+.

Предположим, что точка M_0 соответствует на траектории значению $t = t_0$, а точка M^* — значению $t_0 + \tau = t^*$ (τ — может быть как положительным, так и отрицательным числом). Выберем на L_0 какое-нибудь другое движение, при котором точке M_0 соответствует значение $\tilde{t}_0$, тогда значение $\tilde{t}_0 + \tau$ (τ — та же величина, что и выше) соответствует точке M^*. Если принять это во внимание, то в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий при любом $\varepsilon > 0$ и надлежащим образом выбранном $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) любая траектория, проходящая при $t = t'$ (t' —произвольное фиксированное число) через какую-нибудь точку $M' \in U_\delta(M_0)$, при значении $t = t' + \tau$ проходит через точку окрестности $U_\varepsilon(M^*)$. Так как M_0 есть предельная точка полутраектории L^+, то существует бесконечная последовательность точек $M_n(t_n)$ полутраектории L^+ таких, что $t_n \to +\infty$, а $M_n(t_n) \in U_\delta(M_0)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). В силу выбора числа δ последовательность точек $M'_n(t_n + \tau)$ траектории L, из которой выделена полутраектория L^+, обладает следующими свойствами: а) $M'_n(t_n + \tau) \in U_\varepsilon(M')$; б) $t_n + \tau \to \infty$; в) все точки $M^*_n(t_n + \tau) \in L^+$ *). Из произвольности числа $\varepsilon > 0$ и существования последовательности M'_n, обладающей указанными свойствами, следует, что M' — предельная точка полутраектории L^+. Лемма доказана.

Траектория L_0, все точки которой являются предельными для полутраектории L^+, называется *предельной траекторией полутраектории* L^+.

Очевидно, лемму 1 можно сформулировать следующим образом: траектория, проходящая через точку, предельную для какой-нибудь полутраектории L^+, является предельной траекторией для L^+.

Теорема 9. *Множество K всех предельных точек полутраектории L^+ (или, что то же самое, множество всех ω-предельных точек траектории L^+) а) замкнуто; б) связно; в) состоит из целых траекторий.*

Доказательство. Утверждение а) непосредственно вытекает из определения предельной точки полутраектории. В самом деле, пусть M_0 — точка сгущения множества K. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(M_0)$ имеются предельные точки полутраектории L^+, а следовательно, имеются точки самой полутраектории L^+, соответствующие сколь угодно большим значениям t. Но это и значит, что M_0 есть предельная точка полутраектории L^+, т. е. $M_0 \in K$.

Докажем утверждение б). Предположим противное, т. е. что множество K несвязно. Так как оно замкнуто, то его можно представить как сумму двух замкнутых непересекающихся непустых множеств A и B (см. дополнение, § 1).

Обозначим через ρ расстояние между множествами A и B. Очевидно $\rho > 0$. Положим, что $\delta = \rho/4$, и рассмотрим окрестности $U_\delta(A)$ и $U_\delta(B)$. Эти окрестности не имеют общих точек. Так как A и B состоят из предельных точек полутраектории L^+, то нетрудно видеть, что существуют две

*) Точки полутраектории L^+ при каком-то выбранном на ней движении соответствуют значениям $t > t_0$ (t_0 — некоторое фиксированное число). Очевидно, что в случае, когда $\tau > 0$, все точки $M'_n(t_n + \tau)$ принадлежат L^+. В случае же, когда $\tau < 0$, точка $M'_n(t_n + \tau)$ принадлежит L^+, лишь начиная с такого t_n, для которого $t_n + \tau > t_0$.

бесконечные последовательности t_n и t'_n значений t ($n = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющие следующим условиям:

1) $t_n \to +\infty$, $t'_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

2) Точки полутраектории L^+, соответствующие значениям t_n, лежат в $U_\delta(A)$, а точки, соответствующие значениям t'_n, — в $U_\delta(B)$.

3) $t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \ldots < t_n < t'_n < \ldots$

Но тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует такое τ_n, $t_n < \tau_n < t'_n$, что точка $M_n(\tau_n)$ полутраектории L^+ лежит вне окрестностей $U_\delta(A)$ и $U_\delta(B)$.

Рассмотрим множество $\{M_n(\tau_n)\}$. Так как L^+ — ограниченная полутраектория или полутраектория на сфере, то множество $\{M_n(\tau_n)\}$ имеет по крайней мере одну точку сгущения M^*, лежащую вне или на границе $U_\delta(A)$ и $U_\delta(B)$. M^* является, очевидно, предельной точкой для полутраектории L^+ (в силу самого определения предельной точки). Но это противоречит предположению, что множество K, содержащееся в $U_\delta(A)$ и $U_\delta(B)$, есть множество *всех* предельных точек полутраектории L^+. Утверждение б) доказано.

Утверждение в) непосредственно вытекает из леммы 1.

Таким образом, теорема доказана.

Множество K, будучи замкнутым и связным, является *континуумом* (см. дополнение, § 1).

Множество K всех предельных точек полутраектории L^+ называется предельным множеством или предельным континуумом L^+. В случае положительной (отрицательной) полутраектории это множество называют также ω-предельным (α-предельным) множеством или континуумом. Аналогично множество всех α (ω)-предельных точек траектории L называют α (ω)-предельным континуумом траектории L. Для обозначения предельных континуумов траекторий или полутраекторий мы будем иногда пользоваться символами K_α и K_ω или $K_\alpha(L)$ и $K_\omega(L)$.

Вместо того чтобы говорить «K является предельным множеством полутраектории L^+ или ω (α)-предельным множеством траектории L», мы будем говорить иногда, что «*полутраектория L^+ стремится к множеству K*» или «траектория L стремится к множеству K при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$)» *).

Заметим, что лемма 1 и теорема 9 справедлива не только для траекторий в плоской области или на сфере, но и для траекторий на любом замкнутом многообразии, а также для траекторий, расположенных в ограниченной области пространства любого числа измерений.

4. Свойства траекторий, характерные для динамических систем на плоскости или на сфере. Все следующие предложения, излагаемые в этом параграфе, существенно опираются на лемму 11 § 3 и поэтому справедливы только для плоской области или на сфере. Утверждение следующей теоремы справедливо не только для ограниченной, но и для всякой траектории системы (I).

Т е о р е м а 10. а) *Всякая траектория системы* (I), *заданной в плоской области G, нигде не плотна в G.* б) *Всякая траектория динамической системы на сфере нигде не плотна на сфере.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала утверждение а). Предположим противное, т. е. что какая-нибудь траектория L системы (I)

*) Термином «полутраектория стремится к состоянию равновесия» мы уже пользовались при рассмотрении примеров.

всюду плотна в некоторой области G_1, лежащей в области G. Очевидно, L не может быть состоянием равновесия. Возьмем произвольную точку M траектории L, $M \subset G_1$, и проведем через M дугу без контакта l, лежащую в G_1. Все точки дуги l, как и все точки области G_1, являются точками сгущения для траектории L. Но тогда из леммы 4 § 3 следует, что точки траектории L всюду плотны на дуге l. Пусть $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ — две лежащие на дуге l и последовательные по t точки траектории L, т. е. такие точки, что при значениях t, заключенных между t_1 и t_2, траектория L не пересекается с дугой l. Такие последовательные по t точки существуют в силу леммы 1 § 3. Из леммы 11 § 3 вытекает, что между точками M_1 и M_2 на дуге l нет точек траектории L. Но это противоречит тому, что точки траектории расположены на дуге l всюду плотно. Полученное противоречие доказывает утверждение а).

Утверждение б) относительно траектории на сфере доказывается в точности таким же образом, как а) *).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 10 следует, в частности, что рассмотрение траектории или полутраектории на сфере S сводится к рассмотрению ограниченной траектории или полутраектории на плоскости. В самом деле, пусть L — какая-нибудь траектория на сфере. Так как траектория L нигде не плотна на сфере, то существует точка S сферы, не лежащая на L и не являющаяся точкой сгущения для точек L. Существует, следовательно, область G_1, не содержащая ни одной точки L. Если взять за центр стереографической проекции любую точку N области G_1, то замкнутая область $H = S^2 \setminus G_1$ спроектируется в ограниченную замкнутую плоскую область $\widetilde{H}$, а траектория L — в траекторию $\widetilde{L}$, лежащую вместе со своим замыканием внутри H ($\widetilde{H}$ — образ области $H = S^2 \setminus \overline{G_1}$ при стереографической проекции). Это и означает, что *рассмотрение траектории L на сфере сводится к рассмотрению ограниченной траектории L на плоскости.*

Все дальнейшие предложения справедливы для ограниченных полутраекторий и траекторий.

Л е м м а 2. *Пусть незамкнутая полутраектория L^+ имеет отличную от состояния равновесия предельную точку M^*. Пусть l — дуга без контакта, проведенная через точку M, имеющая M^* своей внутренней точкой. Тогда траектория L^+ пересекается с дугой l в счетном множестве точек, стремящихся к точке M^*. Если перенумеровать эти точки в порядке возрастания соответствующих им значений t*

$$M_1(t_1), \qquad M_2(t_2), \qquad M_n(t_n) \to M^*$$

($\{t_n\}$ — *монотонно-возрастающая последовательность*, $t_n \to \infty$), *то последовательность s_n значений параметра на дуге l, соответствующих этим точкам* (*значение s_n соответствует точке M_n*), *также является монотонной и* $\lim s_n = s^*$, *где s^* — значение параметра s, соответствующее точке M^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения предельной точки следует, что в любой окрестности точки M^* имеются точки, соответствующие сколь угодно большим значениям t. Но из леммы 4 § 3 следует тогда, что и на дуге l

*) Теорема 10 не имеет места в случае динамических систем на поверхностях, в частности на торе. Классический пример динамической системы на торе, имеющей всюду плотные на торе траектории, приведен, например, в книге [23].

также будут точки, соответствующие сколь угодно большим значениям t, сколь угодно близкие к M^*. Из леммы 2 § 3, очевидно, вытекает, что множество этих точек счетно. Остальные утверждения леммы вытекают из следствия 2 к лемме 11 § 3.

Следствие 1. На дуге без контакта l может лежать только одна предельная точка полутраектории L^+. В противном случае последовательность чисел s_n не могла бы быть монотонной.

Следствие 2. Точки пересечения полутраектории L^+ с дугой без контакта l лежат на дуге l по одну сторону от точки M^*. Следствие 2 также непосредственно вытекает из того, что последовательность s_n монотонна.

Следующая теорема, опирающаяся на лемму 2, устанавливает одно из основных свойств траекторий динамических систем в плоской области и на сфере.

Теорема 11. *Если траектория L_0 незамкнута и имеет хотя бы одну предельную точку, отличную от состояния равновесия, то она не может быть предельной ни для какой траектории.*

Доказательство. Пусть L_0 — незамкнутая траектория, имеющая предельную точку M^*, отличную от состояния равновесия. Проведем через точку M^* дугу без контакта l. В силу предыдущей леммы на дуге l имеется счетное множество точек M_n траектории L_0.

Предположим теперь, что траектория L_0 является предельной для какой-нибудь полутраектории, например для L^+ (полутраектория L^+ выделена, очевидно, из незамкнутой траектории, отличной от L_0 или совпадающей с L_0). Тогда, в силу определения, все точки траектории L_0 и, в частности, точки M_n являются предельными для L^+. Таким образом, на дуге без контакта l лежит счетное множество предельных точек полутраектории L^+. Но это противоречит следствию 1 предыдущей леммы. Теорема доказана.

Следствие. Ни одна точка незамкнутой траектории L не является предельной для самой траектории L.

Это следствие непосредственно вытекает из теоремы 11 и может быть сформулировано следующим образом: *незамкнутая траектория не может быть предельной для самой себя.* На основании этой теоремы можно доказать следующее предложение: всякая незамкнутая траектория гомеоморфна бесконечной прямой (т. е. интервалу).

Действительно, пусть L — незамкнутая траектория,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{1}$$

— какое-нибудь движение на ней. Из теоремы 11 вытекает, что незамкнутая траектория является однозначным и непрерывным образом бесконечной прямой и уравнения (1) дают отображение T этой прямой на траекторию L. При этом T является взаимно однозначным отображением. Для доказательства сформулированного предложения нужно показать непрерывность отображения T^{-1}. Именно, нужно показать, что если дана последовательность точек M_n $(t_n) \in L$, стремящаяся к точке M^* (t^*), то когда t^* конечно, $t_n \to t^*$, а когда $t_n \to \infty$, эта последовательность M_n не может стремиться к точке траектории L. Первое из этих утверждений является непосредственным следствием свойств незамкнутой траектории, а второе — следствием теоремы 11.

Совершенно такое же предложение может быть установлено и в случае, когда незамкнутая траектория L не является целой.

Таким образом, всякая *отдельная траектория* системы (1) либо а) является точкой; либо б) является простой замкнутой кривой; либо в) гомеоморфна интервалу.

Это дает исчерпывающие сведения относительно характера отдельной траектории на плоскости и на сфере. Однако для нас представляет основной интерес свойство траектории не самой по себе, а как множества точек плоской области или сферы.

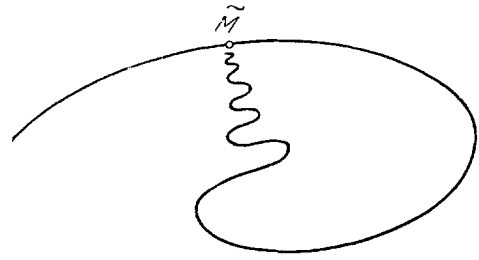


Рис. 58.

Из теоремы 11 следует, что незамкнутая траектория не может вести себя так, как это изображено на рис. 58, т. е. при $t \to +\infty$ (или при $t \to -\infty$) стремится к точке самой этой траектории.

Мы приведем еще ряд предложений, уточняющих возможный характер траекторий системы (1). Все эти предложения опираются на уточнение свойств предельных континуумов траекторий и полутраекторий, которые даются теоремой 11.

5. Некоторые свойства предельных траекторий. Излагаемые здесь свойства также характерны для траекторий динамических систем в плоской области и на сфере. Прежде, чем переходить к ним, отметим еще одно свойство дуги без контакта.

Пусть L — траектория, отличная от состояния равновесия, M_0 — точка на ней и l — дуга без контакта, проходящая через точку M_0.

Лемма 3. *Существует такая, содержащая точку M_0 внутри себя часть дуги l, на которой кроме M_0 не лежит больше ни одной точки траектории L.*

Доказательство. В случае, когда траектория L замкнута, утверждение леммы очевидно, так как замкнутая траектория может иметь только одну общую точку с дугой без контакта (см. лемму 12 § 3). Пусть L — незамкнутая траектория, причем точка M_0 на ней соответствует значению t_0. В силу теоремы 11 все предельные точки незамкнутой траектории L ей самой не принадлежат. Поэтому всегда можно указать $T_2 < t_0$ и $T_1 > t_0$, $T_2 < t_0 < T_1$ и $\varepsilon > 0$ такие, чтобы в $U_\varepsilon(M_0)$ не лежало ни одной точки траектории L_1, соответствующей значениям $t < T_2$ и $t > T_1$. Тогда на части дуги l, лежащей в $U_\varepsilon(M_0)$ (эта часть имеет точку M_0 своей внутренней точкой) могут лежать только точки траектории L, соответствующие значениям t, $T_2 \leqslant t \leqslant T_1$ (среди них — точка M_0). Но в силу леммы 2 § 3 таких точек может быть только конечное число. Отсюда следует справедливость настоящей леммы.

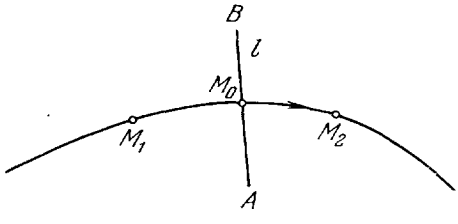


Рис. 59.

Предположим теперь, что на дуге без контакта l, проходящей через точку M_0 траектории L, кроме M_0 нет других точек этой траектории. Пусть A и B — концы дуги l. (Точка M_0 отлична от концов.)

Рассмотрим какую-нибудь дугу M_1M_2 траектории L, содержащую точку M_0 внутри себя, и будем считать, что положительное направление на этой дуге совпадает с положительным направлением траектории L (рис. 59). Предположим для определенности, что часть $(M_0A]$ (полуоткрытая дуга) дуги l лежит по отрицательную, а часть $(M_0B]$ — по положительную сторону дуги M_1M_2 траектории L (см. дополнение, § 3). *Мы будем*

тогда говорить, что часть $(M_0A]$ лежит по отрицательную, а часть $(M_0B]$ — по положительную сторону траектории L. Очевидно, свойство частей $(M_0A]$, $(M_0B]$ — лежать по определенную сторону от траекторий L не зависит от выбора дуги M_1M_2 траектории L.

Вернемся теперь к рассмотрению свойств предельных траекторий. Пусть L^+ — полутраектория, L_0 — ее предельная траектория, отличная от состояния равновесия, M_0 — точка траектории L_0 и l_0 — дуга без контакта, проходящая через точку M_0. В силу следствия 1 из леммы 2 на дуге l_0 кроме точки M_0 не лежит ни одной точки траектории L_0, а в силу следствия 2 той же леммы все точки пересечения полутраектории L^+ с дугой без контакта l_0 лежат на этой дуге по одну сторону от точки M_0.

Рассмотрим какую-нибудь отличную от точки M_0 точку M траектории L_0 и проходящую через M дугу без контакта l (на дуге l кроме M_1 не лежит ни одной точки траектории L_0). Полутраектория L^+ пересекается с дугой l в бесчисленном множестве точек. При этом имеет место следующая:

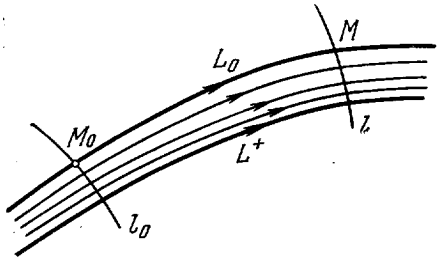


Рис. 60.

Л е м м а 4. *Если точки пересечения полутраектории* L^+ *с дугой без контакта* l_0 *расположены на части дуги* l_0, *лежащей по положительную (отрицательную) сторону траекторий* L_0, *то точки пересечения той же полутраектории* L^+ *с дугой без контакта* l *также расположены на части дуги* l, *лежащей по положительную (отрицательную) сторону от* L_0. (На рис. 60 точки пересечения полутраектории L^+ с дугами l_0 и l лежат по отрицательную сторону от L_0.)

Справедливость леммы 4 непосредственно вытекает из того факта, что M также является предельной точкой для полутраектории L^+, и из замечания 1 к лемме 9 § 3.

О п р е д е л е н и е IV. *Мы будем говорить, что траектория* L_0 *является предельной для полутраектории* $L^{(\,)}$ *с положительной (отрицательной) стороны, если на дугах без контакта, проведенных через точки траектории* L_0, *точки полутраектории* $L^{(\,)}$ *лежат по положительную (отрицательную) сторону от* L_0. *Мы будем также говорить, что траектория* L_0 *является* ω- *(или* α)-*предельной для траектории* L *с положительной стороны, если* L_0 *является предельной с положительной стороны для полутраектории* L^+ (L^-), *выделенной из траектории* L.

Л е м м а 5. *Если траектория имеет более одной общей точки с какой-нибудь дугой без контакта, то* α- *и* ω-*предельные множества этой траектории не имеют общих точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, в силу леммы 12, что всякая траектория, имеющая с дугой без контакта более одной общей точки, не замкнута. Пусть L — такая траектория, а l — дуга без контакта, имеющая с траекторией L более одной общей точки. Тогда существуют две последовательные по t общие точки траектории L и дуги l, которые мы обозначим M_1 (t_1) и M_2 (t_2). Пусть для определенности $t_1 < t_2$.

Рассмотрим простую замкнутую кривую C, образованную дугой M_1M_2 траектории L и частью M_1M_2 дуги l (рис. 61). В силу леммы 11 § 3 одна из полутраекторий $L^-_{M_1}$, $L^+_{M_2}$ лежит целиком (кроме начальной ее точки) внутри кривой C, а другая — вне этой кривой. Ни одна точка самой кривой C не может быть предельной для полутраекторий $L^-_{M_1}$ и $L^+_{M_2}$. Поэтому

предельные множества этих полутраекторий лежат одно целиком внутри, а другое — целиком вне кривой C. Следовательно, они не имеют общих точек. Лемма доказана.

Т е о р е м а 12. *Если среди предельных точек незамкнутой (целой) траектории L есть точка, отличная от состояния равновесия, то α- и ω-предельные множества $K_\alpha(L)$ и $K_\omega(L)$ не имеют общих точек.*

Теорема 12 является непосредственным следствием лемм 2 и 5.

Т е о р е м а 13. *Если полутраектория $L^{(+)}$ не имеет среди своих предельных точек состояний равновесия, то она имеет замкнутую предельную траекторию.*

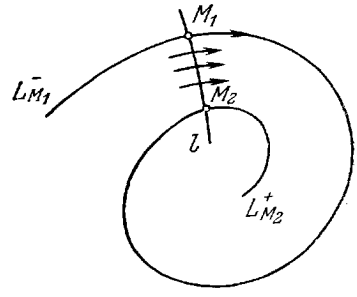


Рис. 61.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L^+ — рассматриваемая полутраектория. Если она выделена из замкнутой траектории, то последняя является для полутраектории L^+ предельной замкнутой траекторией. Предположим поэтому, что L^+ — полутраектория незамкнутой траектории; пусть L_0 — одна из ее предельных траекторий. Допустим, что L_0 — незамкнута и $\tilde{M}$ — какая-нибудь ее предельная точка. В силу теоремы 11 $\tilde{M}$ является состоянием равновесия. Но очевидно, точка $\tilde{M}$, как предельная для L_0, является предельной и для полутраектории L^+ (в силу замкнутости предельного множества), и это противоречит условию теоремы.

Таким образом, траектория L_0 замкнута. Теорема доказана.

Т е о р е м а 14. *Если полутраектория L^+ имеет замкнутую предельную траекторию L_0, то L_0 является единственной предельной траекторией полутраектории L^+, т. е. является ее предельным континуумом.*

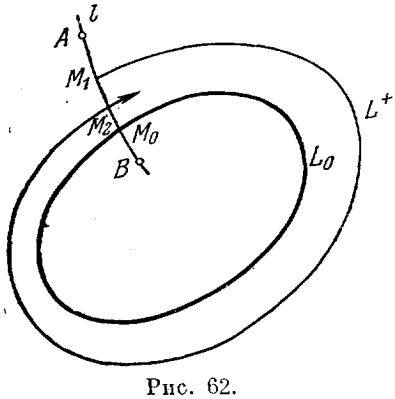


Рис. 62.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если полутраектория L^+ выделена из самой замкнутой траектории L_0, то теорема очевидна. Предположим поэтому, что L^+ принадлежит незамкнутой траектории.

Пусть M_0 — какая-нибудь точка траектории L_0 и l — дуга без контакта, проходящая через M_0 (рис. 62).

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такое τ, чтобы все точки полутраектории L^+, соответствующие значениям $t > \tau$, целиком лежали в $U_\varepsilon(L_0)$. Пусть 0_0 — период движения по траектории L_0. Если M_0 — точка траектории L_0, соответствующая (при выбранном на L_0 движении) значению $t = t_0$, то эта же точка соответствует значению $t = t_0 + 0_0$ (т. е. можно сказать, что замкнутая траектория, проходящая через точку M_0 при $t = t_0$, проходит через эту точку и при $t = t_0 + 0_0$).

Используя лемму 13 § 3, нетрудно видеть, что существует часть AB дуги l, имеющая точку M_0 своей внутренней точкой и обладающая следующим свойством: каждая траектория, проходящая через точку части AB, при возрастании t снова пересекает дугу l. Пусть M_1 — какая-нибудь

точка полутраектории L^+, расположенная на части AB дуги l в $U_\delta(M_0)$, где δ — некоторое положительное число, а M_2 — последующая для M_1 точка (на дуге l). Очевидно, точка M_2 лежит на дуге ближе к M_0, чем точка M_1. Рассмотрим замкнутую кривую C, состоящую из дуги M_1M_2 полутраектории L^+ и части M_1M_2 дуги l. В силу леммы 14 § 3 одна из кривых C и L_0 лежит внутри другой, и обе эти кривые ограничивают некоторую область Г. В силу замечания 1 к той же лемме 14, если δ достаточно мало (т. е. если точка M_1 достаточно близка к M_0), область Г целиком лежит в $U_\varepsilon(L_0)$. И, наконец, из леммы 11 § 3 (утверждение а)) вытекает, что полутраектория L^+ (начиная с точки M_2) целиком расположена в области Г. Но тогда и все предельные точки полутраектории L^+, т. е. предельный континуум $K_\omega(L^+)$, лежат в $U_\varepsilon(L_0)$:

$$K_\omega(L^+) \in U_\varepsilon(L_0).$$

Это справедливо при любом $\varepsilon > 0$. Но тогда, очевидно, никакой отличной от L_0 предельной для L^+ точки не существует. Действительно, всякая не принадлежащая L_0 точка Q находится на ненулевом расстоянии от L_0. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ она не может лежать в $U_\varepsilon(L_0)$ и, следовательно, не принадлежит $K_\omega(L^+)$. С другой стороны, траектория L_0 заведомо входит в $K_\omega(L^+)$. Но тогда $K_\omega(L^+)$ совпадает с L_0. Теорема доказана.

6. Предельные траектории динамических систем, имеющих конечное число состояний равновесия. Возможные типы траекторий. Состояние равновесия O динамической системы называется *изолированным*, если существует такая окрестность его $U_\varepsilon(O)$, которая не содержит ни одного состояния равновесия, кроме O.

Очевидно, в случае, когда динамическая система имеет только конечное число состояний равновесия, все ее состояния равновесия изолированные. Обратное справедливо при добавочном условии компактности области, где рассматривается система.

Именно, если система рассматривается на сфере или в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$ плоскости и имеет только изолированные состояния равновесия, то число их конечно. В самом деле, если бы это было не так, то существовала бы точка сгущения состояний равновесия, также являющаяся состоянием равновесия, причем неизолированным.

Т е о р е м а 15. *Если полутраектория L^+ не имеет предельных точек, отличных от изолированных состояний равновесия, то ее предельное множество состоит только из одного состояния равновесия.*

Теорема 15 непосредственно вытекает из того факта, что предельное множество полутраектории связно.

З а м е ч а н и е. Если предельное множество полутраектории L^+ состоит из одного состояния равновесия O, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $T = T(\varepsilon)$, что все точки $M(t)$ полутраектории L^+, для которых $t > T(\varepsilon)$, лежат в $U_\varepsilon(O)$. Другими словами, если O — единственная предельная точка полутраектории L^+, то $M(t) \to O$ при $t \to +\infty$. (Доказательство легко проводится рассуждением от противного.) Обратное утверждение — если $M(t) \to O$ при $t \to +\infty$, то O является предельной точкой полутраектории L^+, очевидно, также справедливо.

В дальнейшем мы будем рассматривать почти исключительно динамические системы (в плоской области или на сфере), имеющие конечное число состояний равновесия. Из теорем 9, 11, 13, 14 и 16 следует, что предельное множество каждой полутраектории L^+ такой системы может представлять собой множество одного из следующих типов: а) одно состояние

равновесия; б) одна замкнутая траектория; в) некоторое связное множество, состоящее из целых траекторий, часть которых является состояниями равновесия, а остальные—незамкнутые траектории, стремящиеся к состояниям равновесия как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$ (рис. 63).

Примеры главы I показывают, что существуют предельные множества всех указанных типов. В примерах 3 и 4 состояния равновесия являются предельными для незамкнутых траекторий. В примере 7 замкнутая траектория является предельной для траекторий вне и внутри нее. В примере 11 предельным континуумом является «восьмерка», состоящая из трех траекторий (среди которых одна — состояние равновесия).

Всякая ограниченная полутраектория $L^{(\ )}$ стремится к предельному множеству одного из типов а), б) и в).

Таким образом, при сделанном предположении относительно конечности числа состояний равновесия полутраектория $L^{(\ )}$ может быть: 1) состоянием равновесия; 2) замкнутой траекторией; 3) незамкнутой

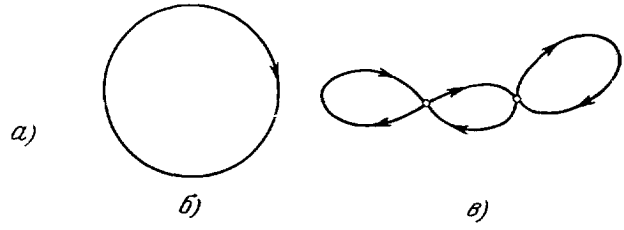


Рис. 63.

полутраекторией, стремящейся к состоянию равновесия; 4) незамкнутой полутраекторией, стремящейся к замкнутой траектории; 5) незамкнутой полутраекторией, стремящейся к предельному континууму типа в).

Указанные пять типов исчерпывают все возможные типы полутраекторий.

Динамическая система примера 7 § 1 имеет полутраектории типов 1)—4) (рис. 20). Полутраектории типа 5 встречаются в примере 11.

Нетрудно перечислить теперь все типы ограниченных *целых траекторий* динамической системы с конечным числом состояний равновесия. Очевидно, целая траектория L может быть 1) состоянием равновесия, 2) замкнутой траекторией или 3) незамкнутой траекторией, стремящейся при $t \to +\infty$ к предельному множеству $K_\omega(L)$, а при $t \to -\infty$ — к предельному множеству $K_\alpha(L)$, при чем каждое из множеств K_α и K_ω — множество одного из типов а), б), в).

В силу теоремы 12, множества K_α и K_ω могут иметь общие точки только в том случае, когда каждое из них является состоянием равновесия. Но тогда эти множества совпадают, и траектория L является «петлей» (рис. 21, *б*); траектории типа петли встречаются также в примере 11 § 1. Во всех остальных случаях α- и ω-предельные множества незамкнутой целой траектории не имеют общих точек.

На рис. 64 приведены некоторые типы незамкнутых целых траекторий L динамической системы (1).

Заметим в заключение, что сделанные выводы относительно характера предельного множества справедливы лишь при предположении о конечности числа состояний равновесия. Они уже не будут справедливы, если отказаться от условия изолированности состояния равновесия. Так, например,

рассмотрим систему:

$$\frac{dx}{dt} = [-y - x(x^2+y^2-1)](x^2+y^2-1),$$
$$\frac{dy}{dt} = [x - y(x^2+y^2-1)](x^2+y^2-1),$$

получающуюся из системы примера 7 § 1 умножением правых частей на $x^2 + y^2 - 1$. В силу результатов п. 6 § 1 каждая точка окружности

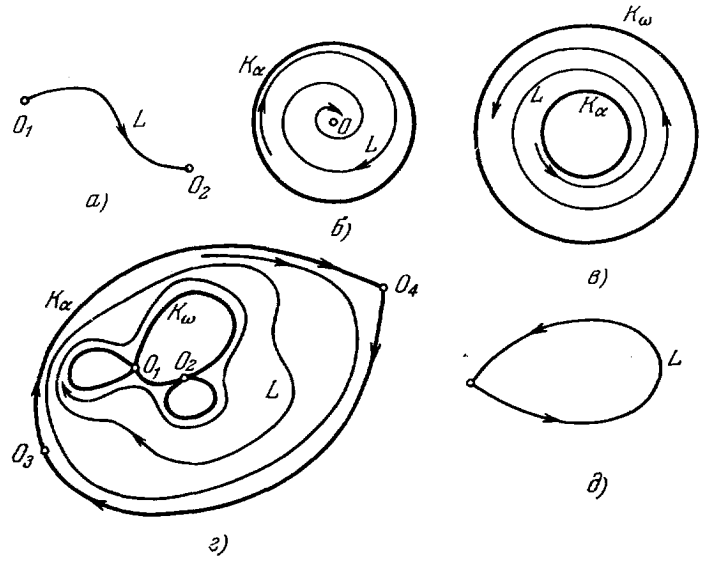


Рис. 64.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ является состоянием равновесия новой системы, все же остальные ее траектории совпадают с соответствующими траекториями указанного примера 7. Принимая во внимание знак выражения $x^2 + y^2 - 1$, нетрудно определить направление на траекториях. Расположение траекторий этой системы и направления на них показаны на рис. 65. Предельное множество каждой положительной полутраектории, расположенной вне окружности $x^2 + y^2 - 1 = 0$, и каждой отрицательной полутраектории, расположенной внутри окружности, есть сама окружность, т. е. континуум, состоящий сплошь из состояний равновесия. Таким образом, в данном случае утверждение теоремы 15 не имеет места.

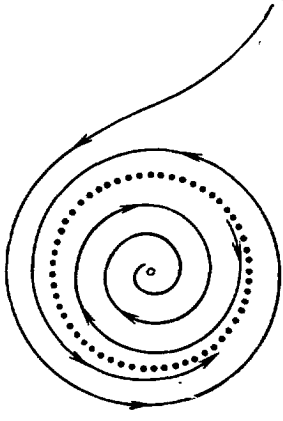


Рис. 65.

7. Теорема о наличии состояния равновесия внутри замкнутой траектории. Мы приведем одну основную теорему, дающую некоторые сведения о разбиении на траектории в целом, именно, теорему, устанавливающую наличие хотя бы одного состояния равновесия внутри всякой замкнутой траектории.

Проводимое здесь доказательство принадлежит Бендиксону. Оно существенным образом использует ряд лемм и теорем, доказанных выше.

В дальнейшем, в § 8, мы дадим другое доказательство этой теоремы, независимое от приводимого здесь и основанное на рассмотрении вращения векторного поля вдоль замкнутой кривой.

Пусть L_0 — замкнутая траектория системы (I) и M_0 — точка на ней. Предположим, что в любой окрестности точки M_0 найдутся точки, через которые проходят замкнутые траектории, отличные от L_0 (лежащие внутри или вне L_0). Тогда, очевидно (в силу теоремы 3 о непрерывной зависимости от начальных условий), через всякую окрестность любой точки L_0 также проходят отличные от L_0 замкнутые траектории.

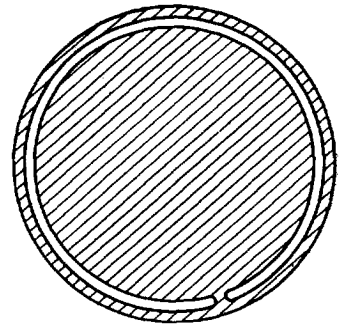


Рис. 66.

Лемма 6. *Если K — какое-нибудь замкнутое множество, лежащее внутри (вне) L_0, то существует такая окрестность точки M_0, что все проходящие через точки этой окрестности замкнутые траектории лежат одна внутри другой и множество K лежит внутри (вне) всех этих траекторий.*

Доказательство. Справедливость леммы вытекает из замечаний 1 и 2 к лемме 14 § 3.

В силу этих замечаний при всяком заданном $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, чтобы все замкнутые траектории, проходящие через точки $U_\delta(M_0)$, лежали одна внутри другой и чтобы область, заключенная между замкнутой траекторией L_0 и любой другой замкнутой траекторией, проходящей через $U_\delta(M_0)$, целиком лежала в $U_\varepsilon(L_0)$. Очевидно (рис. 66), возможен случай, когда в семействе замкнутых кривых C при сколь угодно малом $\delta > 0$ можно указать кривую C, целиком лежащую в δ-окрестности данной замкнутой кривой C_0, но при этом область, ограниченная кривыми C и C_0, всегда имеет точки, лежащие вне $U_\varepsilon(C_0)$, где ε — некоторая фиксированная величина.

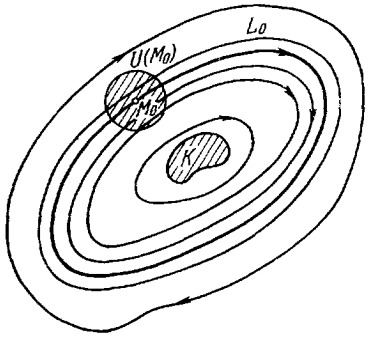


Рис. 67.

Допустим теперь для определенности, что замкнутое множество K лежит внутри L_0, и пусть расстояние от множества K до L_0, $\varrho(K, L_0) = \varrho_0$. По условию, $\varrho_0 > 0$. Возьмем в качестве ε число меньшее, чем ϱ_0 и найдем указанное выше δ. Рассмотрим $U_\delta(M_0)$ и замкнутую траекторию L_1, проходящую через точку окрестности $U_\delta(M_0)$.

Если L_0 лежит внутри L_1, то и множество K лежит внутри L_1. Пусть L_1 лежит внутри L_0. Тогда если K не лежит целиком внутри L_1, то K имеет точки, лежащие в Γ, т. е. K пересекается с $U_\varepsilon(L_0)$. Следовательно, $\varrho_0 = \varrho(L_0, K) < \varepsilon$, что противоречит выбору ε. Таким образом, множество K лежит целиком внутри L_1. Лемма доказана (рис. 67).

Лемма 7. *Пусть L — незамкнутая траектория, имеющая среди своих предельных точек отличные от состояния равновесия, и M_0 — какая-нибудь точка на L. Тогда через точки достаточно малой окрестности точки M_0 не может проходить ни одна замкнутая траектория.*

Доказательство. Пусть $\tilde{M}$ — предельная точка полутраектории L, отличная от состояния равновесия. Проведем через точку $\tilde{M}$ дугу

без контакта l, и пусть M_1 и M_2 — какие-нибудь две (различные) точки пересечения траектории L с дугой l (в силу леммы 2 такие точки существуют). Предположим, что точки M_0, M_1, M_2 соответствуют значениям времени t_0, t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$). Можно также считать, что M_0 отлична от точек M_1 и M_2 (рис. 68).

Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что окрестности $U_\varepsilon(M_1)$ и $U_\varepsilon(M_2)$ не пересекаются. В силу леммы 5 § 3 существует число $\delta > 0$, обладающее следующими свойствами: всякая траектория L', при $t = t_0$ проходящая через точку окрестности $U_\delta(M_0)$, при значении t, близком к t_1, пересекает дугу l в некоторой точке M_1', принадлежащей $U_\varepsilon(M_1)$, а при значении t, близком к t_2, пересекает дугу l в точке M_2', принадлежащей $U_\varepsilon(M_2)$. Так как окрестности $U_\varepsilon(M_1)$ и $U_\varepsilon(M_2)$ не пересекаются, то точки M_1' и M_2' различны. Но тогда, в силу леммы 12 § 3, траектория L не может быть замкнутой.

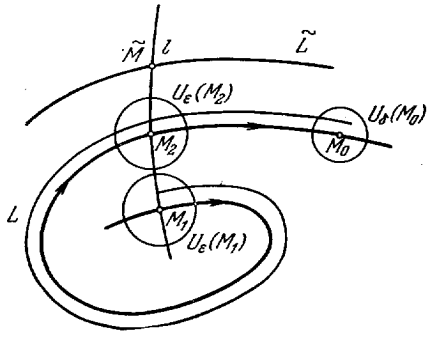


Рис. 68.

Таким образом, все траектории, проходящие через точки окрестности $U_\delta(M_0)$, не замкнуты. Лемма доказана.

Замечание. Если незамкнутая траектория L имеет в качестве своих предельных точек только состояния равновесия, то сколь угодно близко от нее могут проходить замкнутые траектории. Так, в примере 10 § 1 сколь угодно близко к незамкнутой траектории «петле» (входящей в интегральную кривую типа восьмерки) проходят замкнутые траектории.

Перейдем теперь к доказательству, следующей теоремы:

Теорема 16. *Если область, заключенная внутри замкнутой траектории L_0 динамической системы, целиком принадлежит области определения G системы, то внутри L_0 лежит по крайней мере одно состояние равновесия.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что область, заключенная внутри замкнутой траектории L_0, целиком принадлежит области G и не содержит ни одного состояния равновесия системы. Обозначим эту область через Г. Пусть L — траектория, проходящая через какую-нибудь точку области Г. Если L не замкнута, то в силу теорем 12, 13, 14 ее α- и ω-предельные континуумы являются замкнутыми траекториями, причем различными. Следовательно, внутри области Г непременно лежит хотя бы одна замкнутая траектория. Такое же рассуждение показывает, что внутри *каждой* замкнутой траектории, лежащей в области Г, непременно будут находиться замкнутые траектории.

Определим теперь в замкнутой области $\bar{\Gamma}$ функцию $F = F(M)$ следующим образом: если через точку M проходит замкнутая траектория L, то мы положим, что $F(M)$ равна площади области, заключенной внутри L; если же через M проходит незамкнутая траектория, то мы будем считать, что $F(M)$ равна площади I_0 области, заключенной внутри L_0 (т. е. площади самой области Г). Так как по предположению внутри L_0 нет состояний равновесия, то функция $F(M)$ определена во всех точках области Г. Наибольшее значение ее равно I_0. По определению $F(M) > 0$, поэтому значения функции F в области $\bar{\Gamma}$ имеют точную нижнюю грань, которую

мы обозначим через m. Очевидно, $0 \leqslant m < I_0$. Допустимы две возможности: либо 1) функция $F(M)$ принимает значение m в какой-нибудь точке $\widetilde{M}$ области Г; либо 2) функция Г (M) не принимает значения m ни в одной точке области. Тогда существует последовательность точек $\{M_n\}$ области Г такая, что $F(M_n) \to m$ при $n \to \infty$. В этом случае мы можем считать, что последовательность M_n является сходящейся к точке, которую мы обозначим через $\widetilde{M}$. В обоих случаях нижняя грань значения функции $F(M)$ в любой окрестности точки $\widetilde{M}$ равна m.

Рассмотрим траекторию $\widetilde{L}$, проходящую через точку $\widetilde{M}$. Эта траектория не может быть незамкнутой. В самом деле, если $\widetilde{L}$ не замкнута, то в силу леммы 7 существует такая окрестность точки $\widetilde{M}$, что все пересекающие эту окрестность траектории не замкнуты. Но тогда значение функции $F(M)$ в любой точке этой окрестности равно I_0, и точная нижняя грань этих значений не может быть равна $m < I_0$, что противоречит указанному выше свойству точки $\widetilde{M}$. Следовательно, траектория $\widetilde{L}$ замкнута. Пусть L_1 — замкнутая траектория, лежащая внутри $\widetilde{L}$, а L_2 — замкнутая траектория, лежащая внутри L_1 (рис. 69) (такие траектории, как мы знаем, существуют).

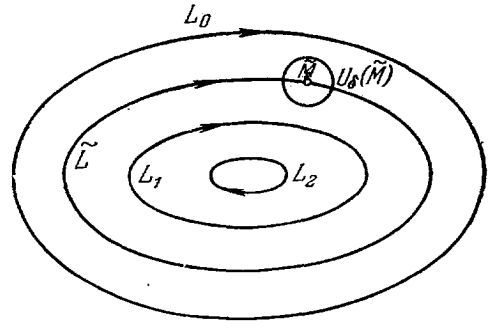


Рис. 69.

Обозначим через I_1 и I_2 площади областей, ограниченных соответственно траекториями L_1 и L_2. Очевидно, $I_2 < I_1$. Пусть $U_\delta(\widetilde{M})$ — достаточно малая окрестность точки $\widetilde{M}$. Всякая траектория, проходящая через точки этой окрестности, либо не замкнута, либо замкнута и содержит, в силу леммы 6, траекторию L_1 внутри себя. Поэтому в точках окрестности $U_\delta(\widetilde{M})$ значения функции $F(M) > I_1$, а следовательно, точная нижняя грань этих значений $\inf F(M) \geqslant I_1 > I_2$. С другой стороны, эта нижняя грань равна m. Отсюда следует, что $m > I_2$. Но это противоречит определению числа m как нижней грани значений $F(M)$ в области Г.

Таким образом, предположение, что внутри L_0 нет состояний равновесия, приводит к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть L — незамкнутая траектория, пересекающая дугу без контакта l более чем в одной точке; $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$ — две последовательные по t точки ее пересечения с дугой l $(t_1 < t_2)$ и C — простая замкнутая кривая, состоящая из дуги M_1M_2 траектории L и части M_1M_2 дуги l (рис. 68). Если область Г, лежащая внутри кривой C, не содержит граничных точек области G, то она содержит по крайней мере одно состояние равновесия. Действительно, в силу леммы 11 § 3, одна из двух полутраекторий $L^-_{M_1}$ или $L^+_{M_2}$ лежит целиком (если не считать ее начала) внутри кривой C. Пусть для определенности это полутраектория $L^-_{M_1}$. Все ее предельные точки лежат, очевидно, в области Г. Либо среди этих предельных точек есть состояние равновесия, и тогда наше утверждение доказано, либо множество этих предельных точек является замкнутой траекторией, лежащей в области Г. Но тогда по теореме 16 внутри этой замкнутой траектории, а следовательно, в области Г имеется хотя бы одно состояние равновесия. Утверждение доказано.

Следствие 2. Если область Г внутри цикла без контакта C не содержит граничных точек области G, то она содержит по крайней мере одно состояние равновесия (это утверждение устанавливается рассуждением, аналогичным проведенному в следствии 1).

Следствие 3. Если Г — замкнутая односвязная область, лежащая целиком в области G и не содержащая состояний равновесия, то всякая траектория, проходящая через точку этой области, и при убывании и при возрастании t выходит из нее. Действительно, в противном случае область Г содержала бы α- или ω-предельный континуум такой траектории, а следовательно, по крайней мере одну точку, являющуюся состоянием равновесия.

Теорема 17. *Всякая динамическая система на сфере имеет по крайней мере одно состояние равновесия.*

Доказательство. Пусть L — произвольная траектория динамической системы на сфере, K_ω — ее предельный континуум. Либо K_ω содержит состояние равновесия, и тогда теорема доказана, либо K_ω есть замкнутая траектория (см. теорему 14). Две области, на которые эта траектория разбивает сферу, гомеоморфны плоским областям. Поэтому в силу предыдущей теоремы в каждой из этих областей лежит по крайней мере одно состояние равновесия. Теорема доказана *).

8. Основная теорема о состоянии равновесия. Приводимая здесь основная теорема о состоянии равновесия также принадлежит Бендиксону.

Теорема 18. *Если O — изолированное состояние равновесия, то либо в любой окрестности O лежит замкнутая траектория, содержащая O внутри себя, либо существует полутраектория, стремящаяся к O.*

Доказательство. Предположим, что существует замкнутая окрестность $\overline{U}$-состояния равновесия O, в которой не лежит ни одна замкнутая траектория, содержащая O внутри. Покажем, что в этом случае существует полутраектория, стремящаяся к O.

Мы можем без ограничения общности считать, что U есть круг с центром в точке O, внутри и на границе которого не содержится других состояний равновесия кроме точки O (так как O — изолированное состояние равновесия). Обозначим граничную окружность круга U через σ. Покажем сначала, что существует положительная или отрицательная полутраектория, целиком лежащая в $\overline{U}$. Допустим, что такой полутраектории нет. Пусть σ' — окружность с центром в O, лежащая в U (т. е. внутри σ), M — произвольная ее точка, L — траектория, проходящая при $t = t_0$ через M (рис. 70). В силу сделанного допущения траектория L выходит из области $\overline{U}$ как при убывании, так и при возрастании t. Рассмотрим дугу AB этой траектории, где A — ближайшая по t к значению t_0 точка входа L в $\overline{U}$, а B — ближайшая по t к значению t_0 точка выхода L из $\overline{U}$ (эта дуга кроме своих концов A и B, через которые траектория L входит в $\overline{U}$ и выходит из $\overline{U}$, может иметь внутренние точки, лежащие на окружности σ. Тогда в этих точках траектории L касается окружности σ (рис. 70)). Обозначим расстояние от точки O до дуги AB траектории L через $f(M)$. $f(M)$ является положительной функцией, определенной на окружности σ'.

Точную нижнюю грань функции $f(M)$ обозначим через ϱ_0. Из определения точной нижней грани и из компактности окружности следует, как легко

*) Эта теорема так же, как и предыдущая, может быть доказана другим способом, основанным на рассмотрении векторных полей.

видеть, что существует такая точка $M_0 \in \sigma'$, в каждой окрестности которой на σ' $\inf \{f(M)\} = \varrho_0$.

Докажем, что $f(M_0) = \varrho_0$. Действительно, допустим, что $f(M_0) \neq \varrho_0$. Тогда $f(M_0) = \varrho_0 + \gamma$, где $\gamma > 0$. Пусть траектория L_0, проходящая через точку M_0 при $t = t_0$, входит в круг $\bar{U}$ и выходит из круга $\bar{U}$ через точки $A_0(t_1)$ и $B_0(t_2)$ $(t_1 < t_0 < t_2)$. Если число $\tau > 0$ достаточно мало, то на траектории L_0 существуют точки $C(t_1 - \tau)$ и $D(t_2 + \tau)$, причем дуги A_0C и B_0D траектории лежат вне окрестности U.

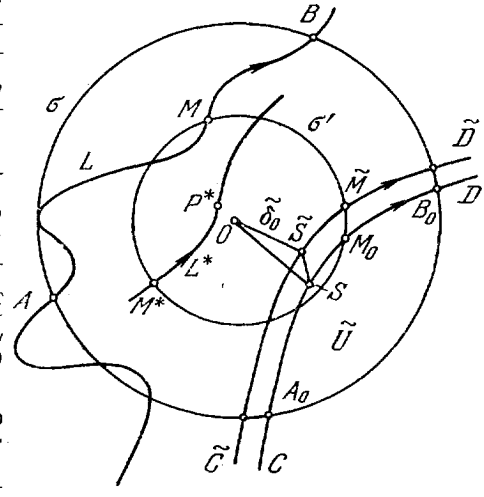


Рис. 70.

Из теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений следует, что существует число $\delta > 0$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) траектория $\tilde{L}$, при $t = t_0$ проходящая через точку $\tilde{M} \in U_\delta(M_0)$, определена для всех значений t, $t_1 - \tau \leqslant t \leqslant t_2 + \tau$; б) точки этой траектории $\tilde{C}(t_1 - \tau)$, $\tilde{D}(t_2 + \tau)$ лежат вне круга $\bar{U}$; в) дуга $\tilde{C}\tilde{D}$ траектории $\tilde{L}$ лежит в $\gamma/2$-окрестности дуги CD траектории L.

Возьмем теперь произвольную точку $\tilde{M}$, лежащую на окружности σ' в $U_\delta(M_0)$. Пусть $f(\tilde{M}) = \tilde{\delta}_0$ есть расстояние $\varrho(O, \tilde{S})$, где $\tilde{S} \in \tilde{L}$, а S — точка дуги CD траектории L такая, что $\varrho(S, \tilde{S}) < \gamma/2$ (см. условие в)). Тогда $\tilde{\delta}_0 + \varrho(S, \tilde{S}) > \varrho(O, S) \geqslant f(M_0) = \tilde{\delta}_0 + \gamma$, следовательно, $f(\tilde{M}) = \tilde{\delta}_0 \geqslant \tilde{\delta}_0 + \gamma - \varrho(S, \tilde{S}) \geqslant \varrho + \gamma/2$. А это противоречит условию, что точная нижняя грань значений функции $f(M)$ в любой окрестности точки M_0 равна ϱ_0.

Таким образом, $f(M_0) = \varrho_0$, и, следовательно, $\varrho_0 > 0$. Но этого не может быть. В самом деле, пусть P^* — произвольная точка, лежащая в $U_{\varrho_0/2}(O)$, L^* — проходящая через нее траектория, M^* — первая при убывании t точка траектории L^*, лежащая на окружности σ'. Тогда, очевидно, $f(M^*) < \varrho_0/2$, что противоречит определению ϱ_0 как точной нижней грани значений функции $f(M)$ на окружности σ'. Полученное противоречие доказывает, что существует полутраектория L^+, целиком лежащая в $\bar{U}$. Так как по предположению в $\bar{U}$ нет ни одной замкнутой траектории, то предельное множество полутраектории L^+ либо состоит из точки O, либо из точки O и траекторий, стремящихся к O. В обоих случаях теорема доказана.

9. Изолированная замкнутая траектория — предельный цикл. Возможное расположение траекторий в окрестности предельного цикла. Изолированная замкнутая траектория, т. е. такая замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой, кроме нее самой, нет больше других замкнутых траекторий, называется *предельным циклом*.

Предельный цикл мы имели в примере 7 § 1.

Мы дадим здесь некоторые основные сведения о предельных циклах. Пусть L_0—предельный цикл. Тогда имеет место следующая теорема, описывающая поведение траекторий в его окрестности.

Теорема 19. *Все траектории, проходящие через достаточно близкие к предельному циклу L_0 точки, лежащие вне L_0 (внутри L_0), стремятся к L_0 либо при $t \to +\infty$ (и тогда они при убывании t выходят из окрестности L_0), либо при $t \to -\infty$ (и тогда они при возрастании t выходят из окрестности L_0).*

Доказательство. Возьмем такое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы в ε_0-окрестности предельного цикла L_0 не лежало ни одного состояния равновесия и ни одной отличной от L_0 замкнутой траектории. Выбор такого ε_0, очевидно, всегда возможен.

Рассмотрим дугу без контакта l, проведенную через какую-нибудь точку M_0 предельного цикла L_0 и имеющую точку M_0 своей внутренней точкой (рис. 71). Возьмем на дуге l по разные стороны точки M_0 точки A и B, столь близкие к M_0, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Все траектории, при $t = t_0$ пересекающие часть дуги AB, пересекают эту дугу еще раз при $t > t_0$. Пусть, в частности, траектории L_A и L_B, проходящие через точки A и B, соответственно, пересекают дугу l при $t > t_0$ в точках A_1 и B_1 (причем дуги AA_1 и BB_1 траекторий L_A и L_B не имеют общих точек с дугой l).

2. Если C_1 — простая замкнутая кривая, состоящая из дуги AA_1 траектории L_A и части AA_1 дуги l, а C_2 — простая замкнутая кривая, состоящая из дуги BB_1, траектории L_B и части BB_1 дуги l_1, то область Γ, ограниченная простыми замкнутыми кривыми C_1 и C_2, целиком содержится в ε_0-окрестности предельного цикла L_0.

Такой выбор точек A и B всегда возможен в силу леммы 17 § 3 и замечания 1 к этой лемме. При этом одна из полуоткрытых дуг $(M_0A]$ или $(M_0B]$ лежит вне предельного цикла L_0, а другая — внутри L_0. Предположим для определенности, что часть $(M_0A]$ дуги l лежит вне L_0. Так как по предположению в $U_\varepsilon(L_0)$ нет отличных от L_0 замкнутых траекторий, то точка A отлична от A_1 и лежит либо ближе к M_0, чем точка A, либо

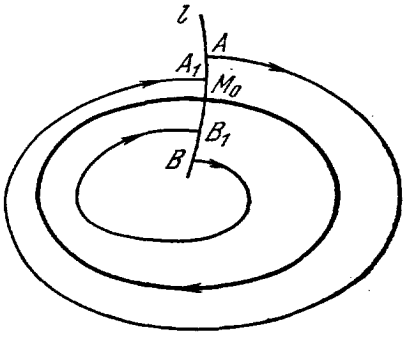


Рис. 71.

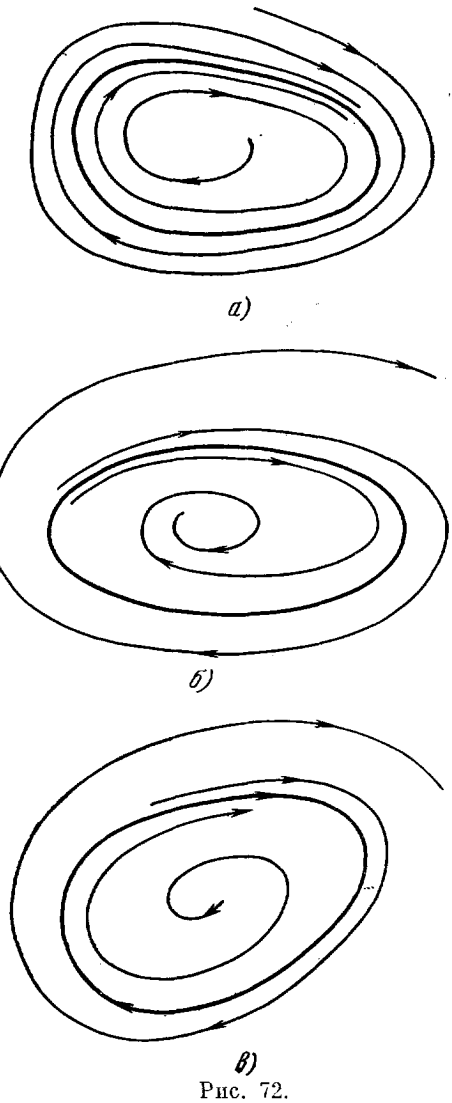


Рис. 72.

дальше, чем точка A_1. Пусть значению t_1 соответствует точка A_1, которая лежит между точками M_0 и A. Нетрудно видеть, опираясь на лемму 11 § 3, что в этом случае в точке A_1 траектория L_A при $t = t_1$ входит в кольцевую область Γ_1, ограниченную предельным циклом L_0 и кривой C_1, и при дальнейшем возрастании t не

может выйти из этой области. Все предельные точки L_A лежат, следовательно, в области Γ_1 и на ее границе. Так как в силу выбора ε_0 и условия 2 в области Γ_1 и на ее границе нет ни одного состояния равновесия, то в силу теоремы 13 ω-предельным множеством траектории L_A является замкнутая траектория. Но единственной замкнутой траекторией, лежащей в δ_0-окрестности L_0, а значит, и в замкнутой области $\bar{\Gamma}_1$, является предельный цикл L_0.

Следовательно, траектория L_A при $t \to +\infty$ стремится к предельному циклу L_0. Покажем, что вообще все траектории, проходящие через отличные от M_0 точки части дуги $(M_0A]$, при $t \to +\infty$ стремятся к предельному циклу L_0. Действительно, в силу леммы 11 § 3 все отличные от A_1 и M_0 точки части $(A_1M_0]$ дуги l целиком лежат в области Γ_1, и все траектории, пересекающие дугу l в этих точках, при возрастании t не могут выйти из области Γ_1.

Кроме того, все траектории, пересекающие часть (A_1A) дуги l, при возрастании t входят в область Γ_1 и тоже больше уже не могут выйти из этой области. Тогда для каждой из этих траекторий можно повторить рассуждение, проведенное выше для траектории L_A, а следовательно, все эти траектории стремятся к предельному циклу L_0.

Таким образом, мы показали, что все траектории, проходящие через точки части $(AM_0]$, при $t \to +\infty$ стремятся к предельному циклу L_0. Но в силу леммы 14 § 3 все траектории, проходящие через точки области Γ_1, непременно пересекают дугу $(AM_0]$. Следовательно, все траектории, проходящие через точки области Γ_1, стремятся к предельному циклу L_0 при $t \to +\infty$. Это, очевидно, означает, что через *все* достаточно близкие к предельному циклу L_0 точки, лежащие вне L_0, проходят траектории, при $t \to +\infty$ стремящиеся к L_0. Принимая во внимание, что через точки области Γ_1 и ее граничные точки, кроме предельного цикла L_0, не проходит больше ни одной замкнутой траектории, можно видеть на основании теоремы 12, что все траектории, проходящие через точки области Γ_1, при убывании t выходят из области Γ_1, пересекая часть (AA_1) дуги l.

Полностью аналогично с очевидными изменениями может быть рассмотрен случай, когда точка A лежит на дуге l между точками A_1 и M_0. В этом случае все траектории, проходящие через точки части $[AM_0)$ дуги l, а следовательно, все траектории, проходящие через точки соответствующей области Γ_1, стремятся к предельному циклу L_0 при $t \to -\infty$, а при возрастании t выходят из области Γ_1.

Совершенно так же может быть рассмотрена часть $(M_0A]$ дуги l.

Таким образом, теорема доказана.

Если все траектории, проходящие через точки некоторой окрестности предельного цикла L_0 вне и внутри L_0 и отличные от L_0 при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), стремятся к предельному циклу, то L_0 называется *устойчивым* (соответственно *неустойчивым*) *предельным циклом* (рис. 72, *а*, *б*).

Если все траектории, проходящие через достаточно близкие от предельного цикла L_0 точки, лежащие вне (внутри) L_0, стремятся к L_0 при $t \to +\infty$, а лежащие внутри (вне) при $t \to -\infty$, то L_0 называется *полуустойчивым предельным циклом* *) (рис. 72, *в*).

*) Часто, в особенности в прикладных задачах, «неустойчивым» называется всякий цикл, не являющийся устойчивым, т. е. как неустойчивый в приведенном тексте смысле, так и полуустойчивый.

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 5. Количественное и качественное исследование динамических систем

1. Введение. Вопрос о возможном характере отдельной траектории, ответ на который дан в § 4, естественно возникает одним из первых при качественном рассмотрении динамических систем. Но кроме сведений о характере отдельной траектории при качественном исследовании системы (I) необходимы также сведения о возможных свойствах разбиения на траектории в целом. Основные простейшие свойства такого рода описываются теоремами 16, 17, а также 18 § 4.

Однако, для того чтобы перейти к более подробному исследованию «качественных свойств» разбиения в целом, необходимо сначала точно определить понятия «качественного свойства», «качественной структуры разбиения на траектории», «качественного исследования», которыми мы пользовались до сих пор, опираясь лишь на их наглядный, но весьма расплывчатый смысл. Введению точных определений для этих понятий и посвящен настоящий параграф.

Остановимся сначала на различных аспектах исследования динамических систем и на роли, которую при этом играет качественное исследование. При рассмотрении динамических систем, возникающих в связи с задачами естествознания (в связи с задачами небесной и «земной» механики, теории колебаний и др.), возникают вопросы, которые грубо могут быть разбиты на два типа. С одной стороны — это такие вопросы, как нахождение аналитических выражений для решений (например, в виде элементарных функций или квадратур, или в виде рядов по тем или другим функциям), а также приближенное вычисление решений, которое в свою очередь располагает целым арсеналом вычислительных методов. Этот круг вопросов может быть отнесен к «количественному интегрированию» или количественному исследованию динамических систем *).

С другой стороны это вопросы о числе и характере (в частности, устойчивости или неустойчивости) состояний равновесия динамической системы, о наличии у нее замкнутых траекторий (т. е. о наличии перио-

*) В небесной механике к этому кругу вопросов относятся различные методы интегрирования рядами в задаче n тел (метод Зундмана, например), в классической задаче о движении твердого тела, методы, позволяющие находить «полностью интегрируемые случаи». В указанных здесь случаях динамические системы являются, очевидно, системами не второго, а более высокого порядка. О многочисленных методах вычисления отдельных траекторий см., например, [43], [44], [45].

дических решений) об областях притяжения того или другого устойчивого состояния равновесия и т. д.

Эти вопросы относятся к «качественному исследованию» динамической системы. Хотя при «качественном исследовании мы можем совершенно не интересоваться ни точной формой траектории, ни размерами замкнутых траекторий, ни многими другими свойствами, характеризующими разбиение на траектории с количественной стороны, тем не менее качественная структура отражает весьма существенные черты динамической системы, представляющие как математический интерес, так и большой интерес для приложений *).

Таким образом, качественное исследование существенно отличается от количественного интегрирования по своим целям и задачам. Поэтому оно имеет свои специфические методы. Количественное интегрирование в указанном выше классическом смысле не может заменить собой качественного исследования, а во многих случаях не может даже существенно помочь ему. Часто проще и удобнее исследовать качественное поведение траекторий непосредственно путем рассмотрения векторного поля, определенного динамической системой, чем при помощи аналитических выражений, полученных в результате интегрирования. Мы уже говорили в § 1 п. 14, что такие аналитические выражения могут полностью решить задачу качественного интегрирования лишь в простейших случаях. В общем же случае знание аналитических выражений для интегралов может не облегчить качественного исследования: оно просто сведет задачу непосредственного качественного исследования динамической системы к «качественному исследованию» некоторой функции $F(x, y, c) = 0$.

Последняя задача может оказаться не более простой и легкой, чем первая, она фактически является той же задачей, только в другой форме. Лишь в частных случаях знание аналитических выражений для интегралов помогает качественному исследованию.

Необходимо подчеркнуть, что качественное исследование ни в какой мере не является, так сказать, «суррогатом» количественного исследования, т. е. что оно проводится не из-за трудностей или невозможности количественного интегрирования. Как уже неоднократно указывалось, качественное исследование имеет свои специфические цели, не исчерпывающиеся количественным интегрированием. Более того, качественное интегрирование нередко бывает очень полезно для количественного, помогая ориентироваться в том, приближенное вычисление каких именно траекторий и в каких пределах представляет интерес для рассматриваемой задачи.

До сих пор мы продолжали пользоваться расплывчатыми терминами «качественное свойство», «качественная структура» и так далее. Перейдем теперь к их точному определению. При математическом исследовании

*) Отметим, что понятие «качественного исследования» имеет смысл и значение не только в случае динамических систем, но также и в других математических объектах. В качестве простейшего примера укажем рассмотрение алгебраического уравнения данной степени: существуют вопросы, для решения которых нужно знать *лишь число действительных корней* данного уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

но не нужно знать их точные или приближенные значения. Такое исследование этого уравнения естественно назвать «качественным». Другой пример — исследование характера кривых, например алгебраических кривых. Мы можем, не интересуясь точными размерами, интересоваться, например, числом не связанных кусков алгебраической кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, и взаимным расположением этих кусков. Такое исследование алгебраических кривых также естественно назвать качественным.

свойств динамических систем, а также при внимательном рассмотрении того, что подразумевается под «качественным» свойством в многочисленных задачах, возникающих из приложений, выкристаллизовалось адекватное математическое понятие: оказалось, что «качественными» свойствами являются свойства траектории, множества траекторий, разбиения на траектории, являющиеся топологически инвариантными, т. е. свойства, остающиеся неизменными при всевозможных *топологических* отображениях рассматриваемой области или множества.

Топологическое отображение рассматривается в дополнении. Однако здесь мы дадим некоторые пояснения.

Топологическим отображением плоскости в себя (или некоторого множества плоскости в другое или в то же множество плоскости) называется взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение, т. е. отображение, при котором каждой точке M соответствует одна и только одна точка M' той же плоскости (или множества), всяким двум различным точкам M_1' и M_2' соответствуют две различные точки M_1 и M_2 и, кроме того, всяким двум сколь угодно близким точкам M_1 и M_2 соответствуют сколь угодно близкие точки M_1 и M_2. Отображение, обратное топологическому, очевидно, также является топологическим.

Наглядное пояснение того, что такое топологическое отображение плоскости в себя может быть дано следующим образом: представим себе, что плоскость «сделана из резины» и будем различным образом деформировать ее, растягивать и сжимать в разных местах, но при этом нигде не разрывая и не делая складок.

Всякому топологическому отображению плоскости в себя либо непосредственно соответствует некоторая такая деформация плоскости (без складок и разрывов), либо соответствует предварительное зеркальное отображение плоскости с последующей деформацией, обладающей указанными свойствами (в первом случае топологическое отображение «сохраняет ориентацию», во втором — «изменяет ориентацию») (см. дополнение, § 2). Очевидно, вид кривых и областей и вообще множеств на плоскости при топологическом отображении может сильно измениться, однако некоторые свойства остаются неизменными. Так, замкнутая кривая, например, окружность, после любого топологического отображения останется замкнутой, хотя вид ее может сильно отличаться от вида исходной кривой. Отрезок прямой после топологического отображения, вообще говоря, делается некоторой дугой («простой дугой»), но эта дуга заведомо не имеет самопересечений и т. д.

В связи с уточнением понятия «качественного свойства», «качественной структуры» мы изменим также и терминологию. В дальнейшем вместо того, чтобы говорить «качественная структура», «качественные свойства» и т. д. мы по преимуществу будем пользоваться терминами «топологическая структура», «топологические свойства» и т. д. *).

Перейдем теперь к точным формулировкам основных понятий.

2. Топологическая структура динамической системы. Мы дадим определение топологической структуры динамической системы в *открытой плоской области*, совпадающей с областью определения системы или представляющей ее часть. Точно так же можно определить топологическую структуру динамической системы *на любом подмножестве M области ее определения*, в частности, в замкнутой ограниченной области $\bar{G}_1 \subset G$, а также на *сфере*. Для этого нужно только в приводимом определении слова «в области G» заменить соответственно словами «в замкнутой области $\bar{G}_1$» или на «сфере» и т. д.

Заметим, что данное ниже определение является так называемым *косвенным* (определением через «абстракцию»): мы не говорим, что называется топологической структурой, а определяем, в каком случае две дина-

*) Термин «качественный» употребляется в весьма различных смыслах, в то время как термин «топологический» имеет однозначный смысл.

мические системы имеют одинаковые топологические структуры *). Пусть даны две динамические системы

$$\frac{dx}{dt} = P_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_1(x, y) \tag{A$_1$}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y), \qquad \frac{dx}{dt} = Q_2(x, y), \tag{A$_2$}$$

рассматриваемые в ограниченных плоских областях G_1 и G_2 соответственно.

Системы (A$_1$) и (A$_2$) так же, как и области G_1 и G_2, могут совпадать. Если, например, совпадают области G_1 и G_2, то это означает, что две различные системы рассматриваются в одной и той же области. Возможен также случай, когда некоторая система (I), определенная в области G, рассматривается в двух несовпадающих (но могущих иметь общие точки) областях $G_1 \subset G$ и $G_2 \subset G$.

Определение V. *Мы будем говорить, что разбиения на траектории, определенные двумя динамическими системами* (A$_1$) *и* (A$_2$), *имеют соответственно в областях G_1 и G_2 одинаковую или тождественную топологическую (или качественную) структуру, если существует отображение T области G_1 на область G_2, удовлетворяющее следующим требованиям*:

1) *T есть топологическое отображение*;

2) *если две точки области G_1 принадлежат одной и той же траектории системы* (A$_1$), *то их образы при отображении T принадлежат одной и той же траектории системы* (A$_2$);

3) *если две точки области G_2 принадлежат одной и той же траектории системы* (A$_2$), *то их образы при отображении T^{-1} принадлежат одной и той же траектории системы* (A$_1$).

Отображение, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3), будем называть «*отображением, переводящим траектории системы* (A$_1$) *в траектории системы* (A$_2$)», или «отождествляющим отображением», соответствующим системам (A$_1$) и (A$_2$). Там, где это не может повести к недоразумениям, мы будем говорить короче: «отображение, переводящее траектории в траектории», или «отождествляющее отображение».

Рассматривая некоторую заданную динамическую систему (I)

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

мы будем часто в дальнейшем говорить о *всевозможных* отождествляющих отображениях (или отображениях, переводящих траектории в траектории), подразумевая под этим, что рассматриваются все возможные топологические отображения, при которых траектории системы (I) отображаются в линии, являющиеся траекториями некоторой другой системы (I′) (в частности, могущей совпадать с системой (I′), удовлетворяющей условиям п. 1, § 1).

Очевидно, далеко не всякое топологическое отображение может быть отождествляющим в указанном выше смысле. Действительно, если задана динамическая система (I), то всякое отождествляющее отображение переводит траектории системы (I) в траектории некоторой другой динамической системы (I′), удовлетворяющей условиям § 1. Всякая траектория такой системы, отличная от состояния равновесия, является гладкой линией, и, следовательно, отождествляющее отображение, изменяя форму траекторий, заведомо не нарушает их гладкости. Между тем всегда можно указать

*) Косвенными определениями являются, например, определение функции, определение мощности множества и др.

топологическое отображение, переводящее траектории рассматриваемой системы в негладкие линии. Вследствие этого, естественно, напрашивается мысль: под «качественными» свойствами динамических систем понимать свойства, остающиеся инвариантными при всевозможных *гладких* топологических отображениях. Однако (см. дополнение, § 9) требование *гладкости* топологического отображения заставляет под «качественными» свойствами динамической системы понимать такие свойства, которые ни в какой мере не соответствуют содержанию того понятия «качественного», о котором идет речь в настоящей книге и которое возникает как при чисто математических рассмотрениях, так и при рассмотрениях, связанных с приложениями. Мы остановимся на этом вопросе в дополнении.

В связи с введением понятия отождествляющего отображения сделаем еще следующее замечание. Если для заданных систем (A_1) и (A_2) существует одно отождествляющее отображение T, то таких отображений непременно существует бесчисленное множество. Множество таких отображений можно, например, получить следующим образом. Пусть

$$x=\varphi(t-t_0,\ x_0,\ y_0), \qquad y=\psi(t-t_0,\ x_0,\ y_0) \tag{1}$$

—решение рассматриваемой системы (I). При всяком фиксированном τ функции

$$x=\varphi(\tau,\ x_0,\ y_0), \qquad y=\psi(\tau,\ x_0,\ y_0) \tag{2}$$

дают, как нетрудно видеть, топологическое отображение H_τ плоскости в себя, при котором в силу свойств функций (1) точка, лежащая на траектории системы (I), отображается в точку, лежащую на той же траектории. Очевидно, отображений H_τ существует бесчисленное множество (так как величина τ может принимать бесчисленное множество значений). Нетрудно видеть, что если отображение T является отождествляющим, то отождествляющим является также отображение вида $T' = TH_\tau$ (при любом τ).

Возможно также и бесчисленное множество отождествляющих отображений, имеющих вид, отличный от указанного.

Вместо того, чтобы говорить: «разбиения на траектории, определенные динамическими системами (A_1) и (A_2) соответственно в областях G_1 и G_2, имеют одинаковую топологическую структуру» мы будем говорить короче: «динамические системы (A_1) и (A_2) имеют соответственно в областях G_1 и G_2 одинаковую топологическую структуру». Мы будем также часто для краткости говорить: «динамические системы (A_1) и (A_2) имеют одинаковую топологическую структуру» либо «топологические структуры разбиения на траектории областей G_1 и G_2 одинаковы». При этом подразумевается, что в первом случае известно, о каких областях, а во втором—о каких системах идет речь.

В связи с введенным определением сделаем некоторые замечания. Отметим прежде всего, что условие 3), наложенное на отображение T, очевидно, не вытекает из условий 1) и 2). Действительно, в этом можно убедиться, рассматривая следующий простой пример: в качестве систем (A_1) и (A_2) возьмем системы

$$\frac{dy}{dt}=0, \qquad \frac{dx}{dt}=1, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt}=0, \qquad \frac{dx}{dt}=x^2+y^2, \tag{4}$$

в качестве каждой из областей G_1 и G_2 — всю плоскость, а под отображением T будем понимать тождественное отображение. Траектории систем (3) и (4) изображены на рис. 73, *а* и 73, *б*. Отображение T в рассматриваемом случае, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2), но не удовлетворяет условию 3): так, точки, лежащие на оси x, всегда лежат на одной и той же траектории системы (3), но могут лежать на различных траекториях системы (4). (Ось x, являющаяся траекторией системы (3), состоит из трех траекторий системы (4): двух полуосей и состояния равновесия, совпадающего с началом координат.) Отметим, кроме того, что при данном выше опреде-

лении вопрос о том, переходит ли при отображении T положительное направление на траекториях в положительное или нет, вообще не ставится.

Таким образом, при отождествляющих отображениях допускается, чтобы положительному направлению на траекториях системы (A_1) соответствовало как положительное, так и отрицательное направление на траекториях системы (A_2). Нетрудно привести простые примеры, при которых осуществляется каждая из этих возможностей. В дальнейшем рассматриваются главным образом динамические системы с конечным числом состояний равновесия (отметим, что в основном именно такие системы представляют наибольший интерес для приложений). В этом

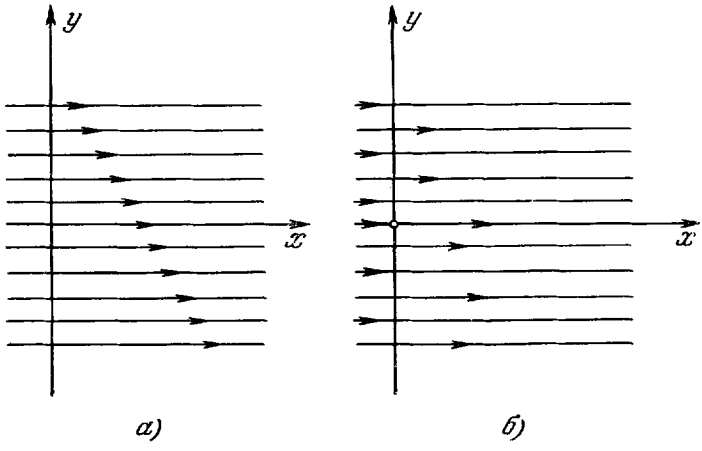


Рис. 73.

случае для систем могут представиться только следующие две возможности. 1) При отождествляющем отображении T положительному направлению на траекториях системы (A_1) ставится в соответствие положительное же направление на всех траекториях системы (A_2). Отображение T будем тогда называть *отождествляющим отображением, сохраняющим направление по t*. Эта возможность осуществляется, например, в случае, когда обе системы (A_1) и (A_2) линейны и у обеих устойчивые узлы или фокусы (одна из этих систем может, например, иметь устойчивый узел, а другая устойчивый фокус) (ср. со сказанным в § 6 п. 3). 2) При отождествляющем отображении T положительному направлению на траекториях системы (A_1) ставится в соответствие отрицательное направление на траекториях системы (A_2). Отображение T будем тогда называть отождествляющим отображением, *изменяющим направление по t*. Эта возможность осуществляется, например, в случае, когда обе системы (A_1) и (A_2) линейны и у одной из них устойчивый узел или фокус, а у другой — неустойчивый. В некоторых особых случаях могут существовать отождествляющие отображения обоих типов (например, в случае, когда все траектории замкнуты (рис. 74)).

Подчеркнем, что в случае конечного числа состояний равновесия положительному направлению на траекториях системы (A_1) соответствует либо на всех траекториях системы (A_2) положительное, либо на всех — отрицательное направление. Так как, кроме того, топологическое отображение может сохранять или не сохранять ориентацию, то, очевидно, отождествляющее отображение, сохраняющее (соответственно изменяющее)

направление по t, в свою очередь может быть двух типов: сохраняющим ориентацию и меняющим ориентацию на обратную.

В случае бесконечного числа состояний равновесия у двух систем (A_1) и (A_2), имеющих одинаковые топологические структуры, может представиться еще следующая возможность, отличная от указанных выше: при отождествляющем отображении положительному направлению на некоторой части траекторий системы (A_1) соответствует положительное направление на траекториях системы (A_2), а на другой части траекторий системы (A_1) положительному направлению соответствует отрицательное направление на траекториях системы (A_2).

Рассмотрим, например, системы

$$\frac{dx}{dy} = -y\,(x^2+y^2-1)^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x\,(x^2+y^2-1)^2, \tag{5}$$

$$\frac{dx}{dt} = -y\,(x^2+y^2-1), \qquad \frac{dy}{dt} = x\,(x^2+y^2-1). \tag{6}$$

В обеих этих системах окружность $x^2 + y^2 = 1$ есть особая линия. Направления на траекториях, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 1$, у систем (5) и (6) противоположны. В рассматриваемом примере тождественное отображение, очевидно, является отождествляющим отображением. Но при этом отображении на части траекторий, лежащих вне окружности $x^2 + y^2 = 1$, положительному направлению соответствует положительное, а на части траекторий, лежащих внутри этой окружности, положительному направлению соответствует отрицательное. Можно показать, что в рассматриваемом случае не существует отождествляющего отображения, сохраняющего (или меняющего) направления по t на *всех* траекториях.

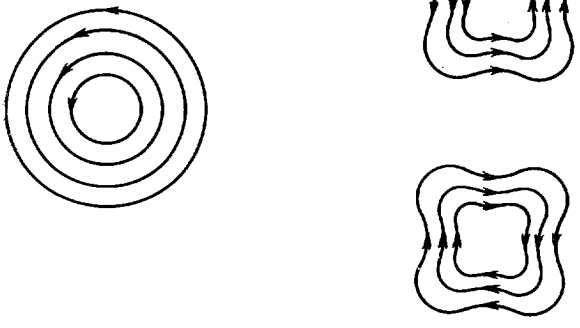


Рис. 74.

Введенное определением V понятие тождественности топологических структур динамических систем удовлетворяет, как легко убедиться, всем условиям *эквивалентности*, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности. Поэтому все динамические системы разбиваются на непересекающиеся классы систем, имеющих одинаковые топологические структуры. Каждая динамическая система принадлежит одному и только одному такому классу.

Используя введенное понятие отождествляющего отображения (т. е. отображения, переводящего траектории в траектории), дадим также определение *топологического свойства и топологического инварианта* разбиения на траектории (или множества траекторий).

Определение VI. *Топологическим (качественным) свойством разбиения области G_1 на траектории или множества траекторий или также топологическим инвариантом разбиения на траектории называется свойство или величина, остающиеся инвариантными при всевозможных отождествляющих отображениях.*

Вместо того, чтобы говорить: «топологическое свойство траектории или множества траекторий, или разбиения на траектории», мы будем говорить короче: «топологическое свойство динамической системы», а также «топологический инвариант» динамической системы. Очевидно, свойство траектории, являющейся состоянием равновесия, «быть состоянием равно-

весия» или свойство замкнутой траектории «быть замкнутой», являются топологическими свойствами *).

Предположим для определенности, что рассматриваются только динамические системы с конечным числом состояний равновесия и конечным числом предельных циклов. Тогда, очевидно, *число* состояний равновесия и *число* предельных циклов являются топологически инвариантными (т. е. остаются неизменными при всевозможных отождествляющих отображениях). Топологическими свойствами являются, например, также при наличии замкнутых траекторий их взаимное расположение, наличие (или отсутствие) кольцевых областей, сплошь заполненных замкнутыми траекториями, наличие определенного числа состояний равновесия типа фокус и узел и др. С другой стороны, например, расстояние между состояниями равновесия и предельными циклами, точная форма замкнутых траекторий не являются топологически инвариантными свойствами, они могут изменяться при отождествляющих отображениях.

Если совокупность некоторых свойств разбиения на траектории, заданного динамической системой, такова, что две динамические системы, каждая из которых обладает этими свойствами, имеют одинаковую топологическую структуру, то такую совокупность будем называть совокупностью определяющих свойств или *полной системой топологических инвариантов.*

Качественное исследование динамической системы состоит в установлении ее топологических свойств и топологических инвариантов (например, числа и характера состояний равновесия, числа и взаимного расположения предельных циклов и т. д.).

Полным качественным исследованием динамической системы является установление топологической структуры разбиения на траектории, определенного этой системой.

Последняя формулировка имеет весьма общий и неопределенный характер. Естественно поэтому постараться конкретизировать, *в чем заключается задача установления топологической структуры разбиения на траектории, заданного динамической системой.* Сделать это в общем виде для всевозможных динамических систем не представляется возможным. Однако если ограничиться рассмотрением некоторых более узких классов динамических систем, то в *понятие установления топологической структуры* можно внести точный и конкретный смысл.

В настоящей книге выделяется некоторый определенный класс динамических систем («динамические системы с конечным числом особых траекторий»), который, естественно, представляется наиболее интересным как с точки зрения приложений, так и с математической точки зрения. Для этого класса систем впоследствии (в главах VII, X, XI) вводится *понятие схемы разбиения на траектории* или в другой терминологии — *схемы динамической системы.* Схема играет роль *полной системы топологических свойств.* Мы не останавливаемся здесь на этом вопросе, подробно рассматривающемся в главах VII, X, XI).

Для иллюстрации понятия тождественности топологической структуры разбиения на траектории приведем простые, в основном геометрические, примеры. Рассмотрим разбиение круга C радиуса единицы на траектории системы (40) примера 3 и системы (45) примера 4 § 1 (рис. 10 и 13). Начало координат является у системы (40) состоянием равновесия типа

*) Свойство «быть точкой» или свойство кривой быть замкнутой кривой так же, как и все далее перечисленные свойства линий, являющихся траекториями, инвариантны не только при отождествляющих, но и при любых топологических отображениях.

узел, а у системы (45) — состоянием равновесия типа фокус. Хотя форма траекторий у этих двух систем сильно отличается, но нетрудно показать,

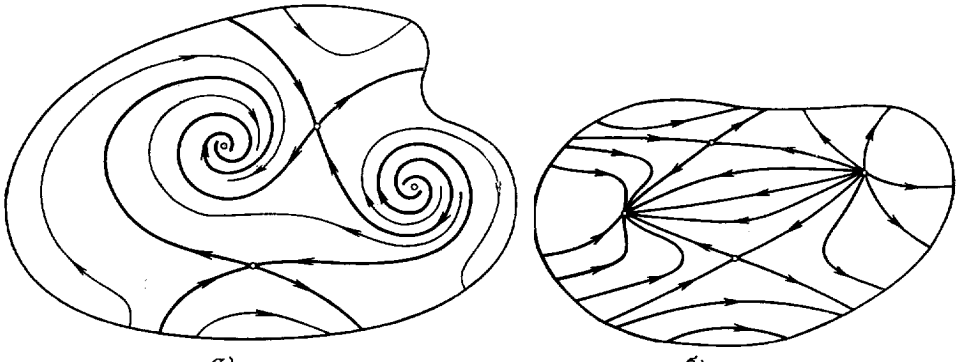


Рис. 75.

что разбиения круга C на траектории системы (40) и на траектории системы (45) имеют одинаковую топологическую структуру. Другими словами,

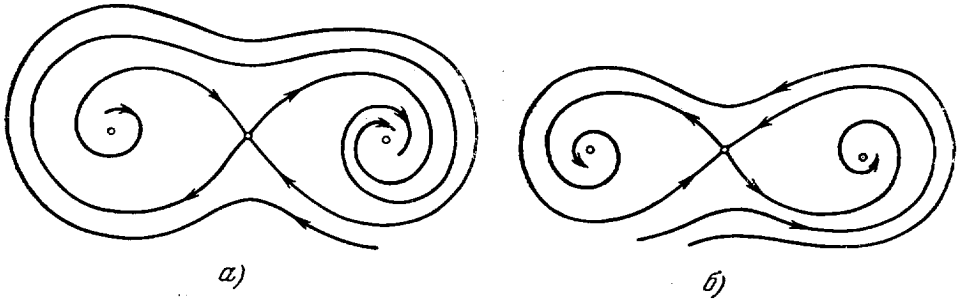


Рис. 76.

нетрудно указать топологическое отображение круга в себя, при котором траектории системы (40) отображаются в траектории системы (45). Мы не

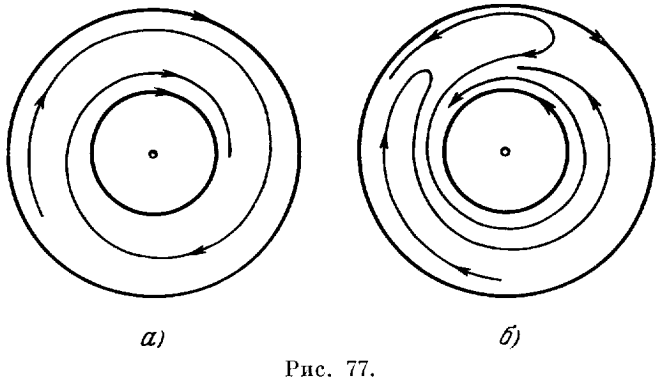


Рис. 77.

останавливаемся на построении этого отображения ввиду того, что этот вопрос подробно рассматривается в главе VIII. Разбиения на траектории,

изображенные на рис. 74, так же топологически тождественны *) (этот факт может быть точно установлен на основании изложенного в главе VIII, § 18). На рис. 75, *а* и 75, *б* изображены разбиения на траектории, сильно отличающиеся по форме, но имеющие одинаковую топологическую структуру. На рис. 76, *а* и 76, *б* представлены «похожие» разбиения, имеющие различную топологическую структуру. Различные топологические структуры имеют также разбиения на рис. 77, *а* и *б*, которые с первого взгляда могут показаться «похожими».

3. Локальная топологическая структура. Мы уже касались в п. 14 § 1 и в п. 2 § 3 вопроса о характере разбиения на траектории «в малом». Здесь мы остановимся на этом вопросе подробнее и введем естественно напрашивающееся понятие *локальной топологической структуры*.

Пусть P — внутренняя точка области определения G динамической системы (I). Точка P может быть как обыкновенной точкой, так и состоянием равновесия.

Определение VII. *Мы скажем, что динамическая система* (I) *имеет в данной точке P локальную топологическую структуру, если существует содержащая точку P область w_0, удовлетворяющая следующему условию: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти область w_0' и отображение T такие, что: а) область w_0' содержит точку P и содержится в $U_\varepsilon(P)$; б) T является отождествляющим отображением, при котором область w_0 отображается на w_0' и точка P отображается сама в себя* **).

Область w_0, обладающую указанными в определении свойствами, мы будем называть *областью (или окрестностью) локальной топологической структуры*. В частности, если взять достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, то окрестность $U_{\varepsilon_0}(P)$ точки P (в которой динамическая система имеет локальную топологическую структуру) будет окрестностью локальной топологической структуры точки P.

Прежде, чем переходить к примерам существования и отсутствия локальной топологической структуры, дадим определение *тождественности локальных топологических структур*.

Определение VIII. *Пусть P_1 и P_2 — точки динамических систем* (A_1) и (A_2) *соответственно, в которых эти системы имеют локальные топологические структуры. (Системы* (A_1) *и* (A_2)*, а также точки P_1 и P_2 могут совпадать.) Мы будем говорить, что локальные топологические структуры этих точек одинаковы или тождественны, если какую-нибудь окрестность точки P_1 можно отобразить на какую-нибудь окрестность точки P_2, причем так, что P_1 переходит в P_2 и траектории отображаются в траектории.*

Легко видеть, что в данном определении достаточно предполагать существование локальной топологической структуры лишь у одной из точек (P_1, P_2). Если существует указанное в определении отображение окрестности одной из них на окрестность другой, то вторая точка «автоматически» будет иметь локальную топологическую структуру, причем такую же, как первая. Из теоремы 8 § 3 и из элементарных рассуждений следует, что

---

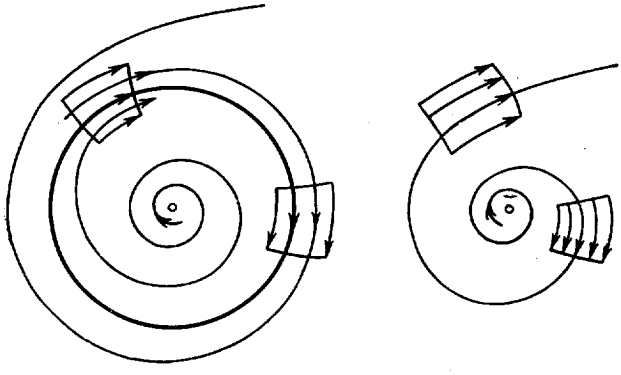
*) Можно считать, например, что траектории, изображенные на рис. 74, даются системами

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = y^3, \qquad \frac{dy}{dt} = -x^3.$$

**) В данном случае отображение T переводит траектории (или, точнее, дуги траектории системы (I)) в траектории (дуги) той же системы (см. начало п. 2 § 5).

у всякой динамической системы рассматриваемого типа (удовлетворяющей условиям § 1) в каждой отличной от состояния равновесия точке существует локальная топологическая структура и при этом одна и та же: эта локальная структура всегда такая же, как и в случае семейства параллельных прямых.

Локальная топологическая структура может существовать также в точке, являющейся состоянием равновесия. Нетрудно показать, что это имеет место во всех примерах, рассмотренных в п. 14 § 1.



а) *б)*

Рис. 78.

Если в точке, являющейся состоянием равновесия, существует локальная топологическая структура, то мы будем называть ее *топологической структурой состояния равновесия*.

Приведем геометрический пример отсутствия локальной топологической структуры *). Рассмотрим бесконечную последовательность окружностей уменьшающегося радиуса с центром в точке O. Перенумеруем эти окружности в порядке уменьшения радиуса $\{C_i\}$. Построим следующее семейство линий: пусть между окружностями C_1 и C_2, C_3 и C_4 и вообще между окружностями C_{2i-1} и C_{2i} ($i=1, 2, \ldots$) — все линии являются замкнутыми, а между всякими двумя окружностями C_{2i}, C_{2i+1} находится i предельных циклов, лежащих один внутри другого, и больше ни одной замкнутой траектории. Тогда в точке O локальной топологической структуры в указанном выше смысле не существует.

В настоящей книге в основном рассматриваются динамические системы, имеющие локальную топологическую структуру во всех точках. Так как в точках, отличных от состояний равновесия, локальная топологическая структура всегда существует, причем одна и та же, то, очевидно, системами, имеющими локальную топологическую структуру, являются системы, у которых состояния равновесия имеют локальную топологическую структуру.

Необходимо еще отметить следующий основной, хотя и весьма элементарный факт. Знание локальной топологической структуры во всех

*) Мы не занимаемся здесь вопросом построения соответствующего аналитического примера (возможность такого построения не вызывает сомнений) в виду того, что в дальнейшем будем заниматься системами, имеющими локальную топологическую структуру во всех своих точках.

точках той области, в которой определена динамическая система, не позволяет сделать исчерпывающих заключений о поведении траекторий в целом, хотя и доставляет некоторые сведения об этом поведении. В этом можно убедиться, рассматривая простые примеры. Так, например, на рис. 78, *а* и *б* представлены разбиения на траектории, у которых локальные топологические структуры одинаковы во всех точках. Тем не менее топологические структуры этих разбиений на траектории «в большом», очевидно, существенно различны: у разбиения, представленного на рис. 78, *а*, существует предельный цикл, в то время как у разбиения на траектории, представленного на рис. 78, *б* предельного цикла не существует.

4. Свойства разбиения на траектории в целом и эффективные методы качественного исследования. Качественное изучение разбиения на траектории в целом, другими словами, изучение топологической структуры разбиения на траектории можно считать основной задачей качественной теории динамических систем. Эта задача имеет два различных аспекта.

Первый аспект — это выяснение того, каковы вообще возможные свойства разбиения на траектории (при тех или других ограничениях на правые части). Как по своему характеру, так и по своим методам круг вопросов, который при этом возникает, непосредственно примыкает к содержанию главы II, т. е. к исследованию возможных типов отдельной траектории, а также к рассмотрению простейших основных свойств разбиения на траектории в целом, которое дается предложениями § 4. Дальнейшее исследование свойств разбиения на траектории, естественно, поднимает целый ряд новых вопросов. Простейшие примеры разбиений на траектории (§ 1) показывают, что не все траектории равноправны, что среди траекторий существуют некоторые исключительные траектории, которые естественно назвать «особыми». Такими траекториями являются, например, состояния равновесия и замкнутые траектории. Естественно поставить вопрос о внесении точного смысла в понятие «особой» траектории, о выделении вообще всех возможных типов «особых» траекторий, об их роли в разбиении и т. д. Наконец, возникает вопрос, каковы сведения о траекториях, в частности об особых траекториях, необходимые для определения топологической структуры разбиения на траектории, хотя бы в случае некоторых сравнительно узких классов динамических систем. Последний вопрос непосредственно и органически связан с вопросом, затронутым в п. 2, о конкретизации того, что означает «определить топологическую структуру разбиения».

Другой аспект качественного исследования разбиения на траектории в целом заключается в отыскании эффективных приемов или методов качественного исследования, т. е. эффективных методов определения топологической структуры разбиения или тех и других топологически инвариантных свойств его при заданных конкретных правых частях динамической системы *).

---

*) Существует далеко идущая аналогия между указанными двумя аспектами при качественном исследовании динамических систем и такими же двумя аспектами при «качественном исследовании» других математических объектов, например уравнений, кривых и т. д. Так, например, при качественном исследовании алгебраических кривых данной степени можно поставить вопрос о том, какие вообще возможны типы таких кривых — это соответствует первому аспекту. С другой стороны, можно поставить вопрос об эффективных методах или приемах качественного исследования алгебраической кривой по уравнению $F(x, y) = 0$, которыми она задана.

Первым вопросом, который здесь возникает, является вопрос отыскания эффективных методов исследования топологической структуры состояний равновесия, так как состояния равновесия, очевидно, играют фундаментальную роль в разбиении на траектории. Кроме того, исследование характера состояний равновесия имеет также большой интерес для приложений.

Следующим чрезвычайно важным вопросом является вопрос нахождения методов или приемов, с помощью которых можно было бы установить наличие или отсутствие предельных циклов. Этот вопрос также имеет очень большой интерес для приложений. Он является значительно более трудным, чем вопрос определения топологической структуры состояний равновесия, и значительно менее изученным. Для того чтобы ставить дальнейшие вопросы об эффективных приемах качественного исследования заданной динамической системы, нужно иметь сведения о том, *что́ именно* необходимо знать о траекториях для определения топологической структуры разбиения на траектории. Но это, очевидно, означает, что мы должны иметь полный ответ на вопросы, принадлежащие первому аспекту.

Таким образом, логически последовательный путь изучения разбиения на траектории, казалось, должен был бы заключаться сначала в исчерпывающем решении вопросов первого круга, т. е. вопросов о том, каковы вообще свойства разбиения на траектории, чем определяется его топологическая структура и т. д., а затем уже в нахождении эффективных приемов исследования разбиения в целом. Однако порядок изложения, принятый в настоящей книге, не следует этому, если так можно выразиться, «формально последовательному» порядку: мы сначала излагаем (в следующих трех главах) основные классические приемы эффективного исследования, которые позволяют рассмотреть ряд примеров и накопить некоторый наглядный материал, а затем уже переходим к более детальному исследованию свойств разбиения на траектории в целом. Отметим, что фактическое развитие качественной теории динамических систем не шло указанным «формально последовательным» путем. Такими классическими приемами эффективного исследования являются прежде всего методы исследования простейших состояний равновесия, излагаемые в следующей главе.

Далее мы укажем также некоторые приемы, с помощью которых можно установить наличие или отсутствие предельных циклов. Опираясь на эти приемы, мы приведем качественное (полное или не полное) исследование целого ряда конкретных примеров.

ГЛАВА IV

ПРОСТОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Введение

Настоящая глава посвящена изучению так называемых простых состояний равновесия *).

Если

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{I}$$

— данная динамическая система, то, как мы видели (см. § 1), ее состояния равновесия являются общими точками кривых

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0. \tag{1}$$

Состояние равновесия $M(x_0, y_0)$ называется *простым*, если точка $M(x_0, y_0)$ является точкой пересечения кривых (1), т. е. такой общей точкой, в которой кривые (1) не имеют особенностей и касательные к этим кривым различны. Простое состояние равновесия является изолированным.

Глава IV состоит из пяти параграфов (§§ 6—10). Главным ее содержанием является исследование топологической структуры простых состояний равновесия.

При исследовании топологической структуры простых состояний равновесия основную роль играет так называемое «характеристическое уравнение» и его корни —«характеристические корни (числа)»— состояния равновесия. В случае простого состояния равновесия характеристические корни не равны нулю. В зависимости от корней характеристического уравнения (в зависимости от того, являются ли они действительными или комплексными, а также от того — различны они или равны) система (I) может быть надлежащей линейной заменой переменных приведена в окрестности состояния равновесия к особенно простому, так называемому «каноническому виду». Приведение к «каноническому виду» излагается в § 6.

Параграфы 7 и 8 посвящены уже самому исследованию топологической структуры простого состояния равновесия. При этом исследовании используется полученный канонический вид системы. В § 7 рассмотрены все возможные случаи характеристических корней, кроме случая, когда они чисто мнимые. Устанавливается, что в этих случаях знаки характеристических корней или знаки их действительных частей полностью определяют

*) По поводу роли исследования характера состояний равновесия в полном качественном исследовании см. главу III. Материал § 6 содержится также в книгах Степанова [22] и Понтрягина [11]. Однако мы помещаем его здесь, желая дать в этой книге изложение всех основных классических приемов качественного исследования динамических систем вида (I).

топологическую структуру состояния равновесия: состояние равновесия может быть узлом (характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и одинаковых знаков), фокусом (характеристические корни комплексны, но не чисто мнимы) и седлом (характеристические корни действительны и различных знаков). При этом узел и фокус имеют одинаковую топологическую структуру *). Таким образом, в этом случае мы получаем эффективный прием определения топологической структуры состояния равновесия, заключающийся в вычислении характеристических корней и определении их знаков (или знаков их действительных частей).

В § 8 рассмотрен значительно более сложный случай, когда характеристические корни чисто мнимые. В этом случае характеристические корни не определяют топологической структуры состояния равновесия, и необходимо дополнительное исследование. При этом состояние равновесия может либо иметь характер фокуса, либо быть центром, а также быть так называемым центрофокусом.

§ 9 посвящен вопросу, хотя и выходящему за рамки чисто топологических рассмотрений динамической системы, но совершенно естественно возникающему при рассмотрении простых состояний равновесия,— это вопрос о том, стремятся ли траектории к состоянию равновесия в *определенном направлении* или нет (точные определения см. § 9, п. 1). В связи с этим между узлом и фокусом устанавливается следующее различие, не являющееся топологическим: в случае узла все траектории стремятся к нему в определенном направлении, а в случае фокуса траектории, стремящиеся к нему, имеют вид спиралей **).

В § 10 рассматриваются примеры исследования простых состояний равновесия.

Состояние равновесия, не являющееся простым, называется сложным. В то время как простое состояние равновесия является простой точкой пересечения кривых (1), сложное состояние равновесия либо является точкой касания этих кривых, либо точкой, в которой одна или обе эти кривые имеют особенность. По крайней мере один характеристический корень сложного состояния равновесия равен нулю. Некоторые основные типы изолированных сложных состояний равновесия будут рассмотрены в главе IX. Сложное состояние равновесия может быть изолированным или неизолированным. Мы уже говорили (см. § 1, п. 4), что состояние равновесия O называется изолированным, если существует такая его окрестность, в которой кроме него нет ни одного состояния равновесия. Во всякой сколь угодно малой окрестности неизолированного состояния равновесия O всегда существуют отличные от него состояния равновесия, т. е. неизолированное состояние равновесия является точкой сгущения состояний равновесия. Справедливо также обратное: всякая точка сгущения для состояний равновесия является состоянием равновесия.

---

*) Все эти типы состояний равновесия встречались в примерах, рассмотренных в § 1. При этом нужно знать координаты состояния равновесия, т. е. нужно уметь находить общие корни уравнений (1). Получение эффективных приемов для нахождения общих корней уравнений вида (1), как известно, далеко не является тривиальным и требует специального рассмотрения. Однако здесь мы на этом не останавливаемся и всюду в этой главе исходим из предположения, что координаты рассматриваемого состояния равновесия найдены.

**) В задачах, возникающих из приложений, различие между узлом и фокусом представляет интерес при рассмотрении характера так называемых «переходных процессов», т. е. при рассмотрении того, как устанавливается стационарный режим, соответствующий данному состоянию равновесия: является ли при этом процесс осциллирующим или нет.

Остановимся на вопросе, касающемся состояний равновесия, возможных у динамических систем аналитического класса, так как в этом вопросе есть существенное различие между системами аналитического и неаналитического класса. Предположим, что правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ динамической системы аналитического класса не имеют общего множителя, обращающегося в нуль, т. е. не могут быть представлены в виде

$$P(x, y) = P_1(x, y) f(x, y), \qquad Q(x, y) = Q_1(x, y) f(x, y) \tag{2}$$

(P, Q, P_1, Q_1 — аналитические функции и $f(x, y)$ — функция, могущая обращаться в нуль), тогда у такой динамической системы во всякой ограниченной области плоскости может существовать лишь конечное число состояний равновесия.

Это вытекает из следующего утверждения: две аналитические функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, определенные в замкнутой ограниченной области $\bar{G}$, из которых ни одна не равна тождественно нулю и которые не имеют вида (2), не могут одновременно обращаться в нуль в бесчисленном множестве точек, принадлежащих замкнутой области $\bar{G}$. Действительно, пусть рассматриваемые аналитические функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ обращаются в нуль в бесчисленном множестве точек $M_i(x_i, y_i)$ области $\bar{G}$, так что

$$P(x_i, y_i) = Q(x_i, y_i) = 0.$$

Пусть $M_0(a, b) \subset \bar{G}$ — одна из точек сгущения точек M_i. Очевидно, $P(a, b) = 0$, $Q(a, b) = 0$. Предположим, что хотя бы одна из частных производных P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y не обращается в нуль в точке $M_0(a, b)$. Для определенности предположим, что $P'_y(a, b) \neq 0$. Так как $P(a, b) = 0$, то по теореме о неявных функциях из соотношения $P(x, y) = 0$ мы найдем в окрестности точки $M_0(a, b)$ y как функцию x. Функция $y = \varphi(x)$ является аналитической и при этом $\varphi(x_i) = y_i$. Рассмотрим функцию $F(x) = Q(x, \varphi(x))$. Она обращается в нуль при бесчисленном множестве значений

$$F(x_i) = Q(x_i, \varphi(x_i)) = 0,$$

но не равна нулю тождественно в силу предположений, сделанных относительно функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Тогда (по теореме Ролля) существует бесчисленное множество значений ξ_i таких, что $\xi_i \to a$ и $F'(\xi_i) = 0$. Из непрерывности $F'(x)$ отсюда следует, что $F'(a) = 0$. Далее, совершенно также мы покажем, что $F''(a) = F'''(a) = \ldots = 0$. Но тогда аналитическая функция $F(x)$ должна тождественно равняться нулю, что противоречит сделанному предположению. Указанное утверждение может быть доказано и без предположения, что хотя бы одна из производных P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y не равна нулю, но только несколько сложнее.

Таким образом, у всякой аналитической динамической системы во всякой ограниченной области плоскости существует либо только конечное число состояний равновесия, либо у нее существуют особые линии, все точки которых — состояния равновесия (точки кривой $f(x, y) = 0$). Бесчисленного множества изолированных состояний равновесия, имеющих точку сгущения, могущее быть у систем неаналитического класса в силу сказанного, у динамических систем аналитического класса быть не может.

§ 6. Приведение динамической системы в окрестности простого состояния равновесия к каноническому виду

1. Аналитические условия, характеризующие простое состояние равновесия. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

— динамическая система, определенная в некоторой плоской области G, и $M(x_0, y_0)$ — ее состояние равновесия ($M \subset G$).

Состояние равновесия M называется простым, если оно является *точкой пересечения* кривых

$$P(x,\ y)=0, \qquad Q(x,\ y)=0, \tag{2}$$

т. е. если в общей точке этих кривых касательные к ним различны. Следовательно, состояние равновесия $M\ (x_0,\ y_0)$ называется простым, если выполняется условие

$$\Delta(x_0,\ y_0)=\begin{vmatrix} P'_x(x_0,\ y_0) & P'_y(x_0,\ y_0) \\ Q'_x(x_0,\ y_0) & Q'_y(x_0,\ y_0) \end{vmatrix}\neq 0, \tag{3}$$

т. е. если якобиан

$$\frac{D(P,\ Q)}{D(x,\ y)}=\Delta(x,\ y)$$

отличен от нуля в точке $M\ (x_0,\ y_0)$. Таким образом, в случае простого состояния равновесия выполняются условия

$$P(x_0,\ y_0)=0, \qquad Q(x_0,\ y_0)=0, \qquad \Delta(x_0,\ y_0)\neq 0$$

и, следовательно, в силу теоремы о неявных функциях (см. дополнение, § 4, п. 3, теорема VI, замечание II) простое состояние равновесия M является *изолированным*, т. е. существует окрестность точки M, которая кроме точки M не содержит больше ни одного состояния равновесия.

Представим в окрестности рассматриваемого состояния равновесия $M\ (x_0,\ y_0)$ функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ в виде

$$P(x,\ y)=P'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+P'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0)+\varphi(x,\ y),$$
$$Q(x,\ y)=Q'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+Q'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0)+\psi(x,\ y).$$

Очевидно, функции $\varphi(x,\ y)$ и $\psi(x,\ y)$ являются функциями класса C_1, причем

$$\varphi(x_0,\ y_0)=\psi(x_0,\ y_0)=0,$$
$$\varphi'_x(x_0,\ y_0)=\varphi'_y(x_0,\ y_0)=\psi'_x(x_0,\ y_0)=\psi'_y(x_0,\ y_0)=0.$$

Мы будем считать для упрощения, что рассматриваемое состояние равновесия лежит в начале координат, т. е. что $x_0=y_0=0$ (к этому случаю можно прийти, производя замену переменных по формулам $x'=x-x_0$, $y'=y-y_0$ и возвращаясь затем к старым обозначениям; поэтому сделанное предположение не уменьшает общности рассмотрений). Обозначим числа $P'_x(0,\ 0)$, $P'_y(0,\ 0)$, $Q'_x(0,\ 0)$, $Q'_y(0,\ 0)$ соответственно через a, b, c, d. Тогда система (1) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt}=ax+by+\varphi(x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt}=cx+dy+\psi(x,\ y), \tag{4}$$

где

$$\varphi(0,\ 0)=\psi(0,\ 0)=0,$$
$$\varphi'_x(0,\ 0)=\varphi'_y(0,\ 0)=\psi'_x(0,\ 0)=\psi'_y(0,\ 0)=0. \tag{5}$$

При этом

$$\Delta=\frac{D(P,\ Q)}{D(x,\ y)}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0, \tag{6}$$

так как точка $O(0,\ 0)$ по предположению есть простое состояние

равновесия. Из условия (5) следует, что

$$\varphi(x, y) = O(\varrho), \qquad \psi(x, y) = O(\varrho), \tag{7}$$

где $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Приведение динамической системы в окрестности простого состояния равновесия к каноническому виду. Мы покажем прежде всего, что с помощью неособенного линейного преобразования систему (1) можно привести к некоторому, так называемому «каноническому виду», более удобному для исследования.

Пусть

$$X = p_{11}x + p_{12}y, \qquad Y = p_{21}x + p_{22}y \tag{8}$$

— линейное неособенное преобразование *), т. е. преобразование, детерминант которого

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для него существует обратное преобразование

$$x = q_{11}X + q_{12}Y, \qquad y = q_{21}X + q_{22}Y, \tag{9}$$

также являющееся не особенным.

Применяя преобразование (8) в системе (1), мы получаем систему вида

$$\frac{dX}{dt} = a_1X + b_1Y + \varphi_1(X, Y), \qquad \frac{dY}{dt} = c_1X + d_1Y + \psi_1(X, Y), \tag{10}$$

где коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 выражаются через a, b, c, d и p_{ik}. Соответствующие выражения нетрудно найти простыми вычислениями. Если обозначить матрицу при линейных членах в системе (4) через A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

матрицу преобразования (8) — через

$$S = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

матрицу обратного преобразования (9) — через S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

---

*) Для нас представляет интерес лишь *неособенное преобразование*, т. е. преобразование, отображающее плоскость в плоскость. Преобразование, у которого не все p_{ik} равны нулю, но соответствующий детерминант D равен нулю, отображает, как нетрудно видеть, всю плоскость на прямую. Действительно, если $D = 0$, то, очевидно, $p_{21} = \mu p_{11}$, $p_{22} = \mu p_{12}$ и соответствующее преобразование имеет вид

$$X = p_{11}x + p_{12}y, \qquad Y = \lambda(p_{11}x + p_{12}y),$$

и, следовательно, вся плоскость (x, y) с помощью этого преобразования отображается в прямую $Y + \mu X = 0$.

и матрицу коэффициентов при линейных членах системы (10) — через B

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

то, проводя несложные вычисления, получим

$$B = SAS^{-1}, \tag{11}$$

где под умножением в (11) подразумевается матричное умножение. Функции $\varphi_1(X, Y)$, $\psi_1(X, Y)$, очевидно, выражаются через функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned}\varphi_1(X, Y) &= p_{11}\varphi(x, y) + p_{12}\psi(x, y) = \\ &= p_{11}\varphi(q_{11}X + q_{12}Y, \quad q_{21}X + q_{22}Y) + p_{12}\psi(q_{11}X + q_{12}Y, \quad q_{21}X + q_{22}Y), \quad (12)\\ \psi_1(X, Y) &= p_{21}\varphi(x, y) + p_{22}\psi(x, y) = p_{21}\psi(q_{11}X + q_{12}Y, \quad q_{21}X + q_{22}Y) + \\ &\quad + p_{22}\psi(q_{11}X + q_{12}Y, \quad q_{21}X + q_{22}Y).\end{aligned}$$

Из (5) и (12) следует, что

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0, 0) = \psi_1(0, 0,) = 0,\\ &\varphi_1'x(0, 0) = \varphi_1'y(0, 0) = \psi_1'x(0, 0) = \psi_1'y(0, 0) = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, функции φ_1 и ψ_1 играют ту же роль для системы (1), что функции φ и ψ для системы (4).

Рассмотрим квадратное уравнение

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \tag{14}$$

Здесь $\sigma = a + d$ и $\Delta = ac - bd$ (Δ имеет тот же смысл, что и в (3)). Уравнение (14) называется *характеристическим уравнением состояния равновесия O, а корни его характеристическими корнями или характеристическими числами состояния равновесия O.* Характеристическое уравнение и его корни играют основную роль при исследовании топологической структуры состояния равновесия. Уравнение вида (14) встречается в целом ряде различных вопросов. Оно называется также иногда «вековым». Числа λ_1 и λ_2, удовлетворяющие этому уравнению, являются характеристическими числами или собственными значениями матрицы A.

Лемма 1 *). *Пусть λ_1 и λ_2 — характеристические корни состояния равновесия O. Тогда*: 1) *если λ_1 и λ_2 действительны и различны, то существует неособое действительное преобразование* (8), *приводящее систему* (4) *к виду*

$$\frac{dX}{dt} = \lambda_1 X + \varphi_1(X, Y), \qquad \frac{dY}{dt} = \lambda_2 Y + \psi_1(X, Y); \tag{15}$$

2) *Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то существует действительное неособое преобразование, приводящее систему* (4) *к виду*

$$\frac{dX}{dt} = \lambda_1 X + \varphi_1(X, Y), \qquad \frac{dY}{dt} = \mu X + \lambda_1 Y + \psi_1(X, Y), \tag{16}$$

*) Эта лемма является непосредственным следствием известной теоремы линейной алгебры о приведении квадратичной матрицы второго порядка к жордановой форме (см., например, [21]). Мы приводим здесь рассмотрение непосредственно, без обращения к этой теореме и без использования матричной символики. Подготовленный читатель может пропустить доказательство леммы 1 и обратиться лишь к самой ее формулировке.

где в зависимости от равенства или неравенства нулю коэффициента b и c в системе (4) μ *или равно нулю, или не равно нулю* (*и в последнем случае может быть задано произвольно*);

3) *если* λ_1 *и* λ_2 — *комплексные*: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, *а может быть как равным, так и не равным нулю, то существует действительное неособое преобразование* (8), *приводящее систему* (4) *к виду*

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta Y + \varphi_1(X, Y), \qquad \frac{dY}{dt} = \beta X + \alpha Y + \psi_1(X, Y). \tag{17}$$

Доказательство. Попробуем подобрать коэффициенты p_{ik} преобразования (8) так, чтобы после перехода к переменным X, Y система (10) принимала следующий вид, который мы назовем «каноническим»:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda_1 X + \varphi_1(X, Y), \qquad \frac{dY}{dt} = \lambda_2 Y + \psi_1(X, Y). \tag{18}$$

Выясним, при каких условиях приведение системы (4) к такому «каноническому» виду (18) возможно. Мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{X} &= p_{11}\dot{x} + p_{12}\dot{y} = p_{11}P(x, y) + p_{12}Q(x, y) = \\ &= p_{11}(ax + by) + p_{12}(cx + dy) + p_{11}\varphi(x, y) + p_{12}\psi(x, y), \\ \dot{Y} &= p_{21}\dot{x} + p_{22}\dot{y} = p_{21}P(x, y) + p_{22}Q(x, y) = \\ &= p_{21}(ax + by) + p_{22}(cx + dy) + p_{21}\varphi(x, y) + p_{22}\psi(x, y). \end{aligned} \tag{19}$$

С другой стороны, если с помощью преобразования (8) система (4) приводится к виду (14), то мы должны иметь

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \lambda_1 X + \varphi_1(X, Y) = \lambda_1(p_{11}x + p_{12}y) + \varphi_1(p_{11}x + p_{12}y, p_{21}x + p_{22}y), \\ \dot{Y} &= \lambda_2 Y + \psi_1(X, Y) = \lambda_2(p_{21}x + p_{22}y) + \psi_1(p_{11}x + p_{12}y, p_{21}x + p_{22}y), \end{aligned} \tag{20}$$

и тогда правые части выражений (19) и (20), очевидно, должны быть тождественно равны. Приравнивая отдельно линейные и нелинейные части этих выражений, мы получаем следующие тождества относительно x и y:

$$\begin{aligned} p_{11}(ax + by) + p_{12}(cx + dy) &\equiv \lambda_1(p_{11}x + p_{12}y), \\ p_{21}(ax + by) + p_{22}(cx + dy) &\equiv \lambda_2(p_{21}x + p_{22}y), \\ p_{11}\varphi(x, y) + p_{12}\psi(x, y) &\equiv \varphi_1(p_{11}x + p_{12}y, p_{21}x + p_{22}y), \\ p_{21}\varphi(x, y) + p_{22}\psi(x, y) &\equiv \psi_1(p_{11}x + p_{12}y, p_{21}x + p_{22}y). \end{aligned} \tag{21}$$

Из второй пары этих тождеств следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(X, Y) &= p_{11}\varphi(q_{11}X + q_{12}Y, q_{21}X + q_{22}Y) + p_{12}\psi(q_{11}X + q_{12}Y, q_{21}X + q_{22}Y), \\ \psi_1(X, Y) &= p_{21}\varphi(q_{11}X + q_{12}Y, q_{21}X + q_{22}Y) + p_{22}\psi(q_{11}X + q_{12}Y, q_{21}X + q_{22}Y). \end{aligned}$$

Из этих выражений и из равенств (5) очевидно, что для функций $\varphi_1(X, Y)$ и $\psi_1(X, Y)$ выполняются условия (13). Собирая в первой паре тождеств (21) члены с x и y, мы получаем

$$\begin{aligned} [p_{11}(a - \lambda_1) + p_{12}c]x + [p_{11}b + p_{12}(d - \lambda_1)]y &\equiv 0, \\ [p_{21}(a - \lambda_2) + p_{22}c]x + [p_{21}b + p_{22}(d - \lambda_2)]y &\equiv 0. \end{aligned}$$

Так как эти выражения должны выполняться тождественно, то коэффициенты при x и y равняются нулю, и мы получаем следующие соотношения, которым должны удовлетворять p_{ik}, λ_1 и λ_2 в случае, когда приведение системы (4) к виду (14) возможно:

$$p_{11}(a - \lambda_1) + p_{12}c = 0, \qquad p_{11}b + p_{12}(d - \lambda_1) = 0. \tag{22}$$

Совершенно аналогичные уравнения мы получаем и для p_{21} и p_{22}:

$$p_{21}(a - \lambda_2) + p_{22}c = 0, \qquad p_{21}b + p_{22}(d - \lambda_2) = 0. \tag{23}$$

Для нас, очевидно, представляют интерес лишь нетривиальные решения этих (однородных) систем (так как преобразование (8) должно быть неособым). Нетривиальные

решения возможны лишь в случае, когда детерминанты этих систем равны нулю, т. е. когда λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения *)

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \tag{24}$$

Пусть λ_1 и λ_2 — корни этого уравнения.

Рассмотрим последовательно все указанные в формулировке леммы случаи 1), 2), 3).

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как детерминанты систем (22) и (23) равны нулю, то только одно из уравнений в каждой из этих систем может быть независимым. Предположим сначала, что мы имеем одновременно $b = c = 0$, тогда характеристическое уравнение принимает вид

$$(a-\lambda)(d-\lambda) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = d$ (в силу предположения, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Но это, очевидно, означает, что уже сама исходная система имеет требуемый канонический вид (14). Искомое неособое действительное преобразование является, очевидно, тождественным преобразованием.

Предположим теперь, что b и c не равны нулю одновременно, пусть, например, $c \neq 0$. Тогда из первых уравнений систем (22) и (23) мы найдем отношения

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{\lambda_1 - a}{c}, \qquad \frac{p_{22}}{p_{21}} = \frac{\lambda_2 - a}{c}.$$

При таком выборе величин p_{ik}, очевидно, $D \neq 0$. Действительно, нетрудно видеть, что из равенства нулю детерминанта D должно было бы следовать

$$\frac{\lambda_1 - a}{c} = \frac{\lambda_2 - a}{c},$$

т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, мы показали, что в рассматриваемом случае существует линейное неособое преобразование, приводящее систему (4) к виду (18).

2) $\lambda_1 = \lambda_2$. При этом системы (22) и (23) для определения p_{ik} совпадают, так что рассуждение, проведенное в случае 1), здесь неприменимо. Предположим сначала, как и в случае 1), что $b = c = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$(a-\lambda)(d-\lambda) = 0,$$

а так как $\lambda_1 = \lambda_2$, то $a = d$, и, следовательно, сама исходная система имеет канонический вид (18) с $\mu = 0$.

Пусть одна из величин b или c (22) не равна нулю, например $c \neq 0$. Тогда в первом из уравнений (22) не все коэффициенты равны нулю. Отметим, что в этом случае приведение системы (4) к каноническому виду (18) невозможно, так как величин, удовлетворяющих системе (22), таких, чтобы было $D \neq 0$, очевидно, существовать не может. Поэтому мы приведем систему (4) к другому виду, именно к виду (16).

Из первого уравнения системы (22) мы, как и выше, найдем

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{\lambda_1 - a}{c}.$$

Так как по предположению $\lambda_1 = \lambda_2$, то, очевидно,

$$\sigma^2 - 4\Delta = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{a+d}{2}.$$

---

*) Очевидно, характеристическое уравнение (20) совпадает с характеристическим уравнением, к которому мы приходим, решая линейную систему

$$\dot{x} = ax + by, \qquad \dot{y} = cx + dy$$

(получающуюся из системы (1) отбрасыванием нелинейных членов). Действительно, подставляя в линейную систему $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$, мы получим для определения λ уравнение (24), а для определения величины α и β — системы вида (22) и (23).

Полагая $p_{11}=c$, мы получим $p_{12}=\frac{d-a}{2}$. Коэффициенты в первом из линейных соотношений (8) мы определим, таким образом, так, что можем положить

$$X=\frac{d-a}{2}y+cx.$$

Как уже было отмечено, коэффициентов p_{ik}, удовлетворяющих системе (22) и таких, что $D\neq 0$, в рассматриваемом случае не существует. Поэтому мы возьмем в качестве второго линейного соотношения в (8) функцию $Y=\mu y$. Мы получим, таким образом, следующее линейное неособое преобразование:

$$X=\frac{d-a}{2}y+cx, \qquad Y=\mu y.$$

Нетрудно видеть, что после перехода к переменным X и Y система (4) примет вид (16), который мы и будем считать каноническим видом в случае кратных корней характеристического уравнения.

3) Если характеристические корни — комплексные сопряженные, то $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ (причем $\beta\neq 0$, а α может быть как равным, так и не равным нулю). Тогда в силу таких же рассуждений, как и в случае 1), можно привести систему (4) к каноническому виду (14), с комплексными сопряженными λ_1 и λ_2. При этом коэффициенты линейных преобразований (8), с помощью которых система (4) приводится к этому виду, также являются величинами комплексными сопряженными, именно,

$$\frac{p_{12}}{p_{11}}=\frac{\alpha+i\beta-a}{c}, \qquad \frac{p_{22}}{p_{21}}=\frac{\alpha-i\beta-a}{c} \tag{25}$$

(при этом можно считать, что $p_{11}=p_{21}=c$). Но мы рассматриваем динамическую систему, правые части которой — действительные функции действительных переменных. Поэтому канонический вид, в котором X и Y принимают комплексные значения при действительных x и y, не представляет для нас никакого интереса. Воспользуемся другим каноническим видом, который получается следующим образом. Так как в рассматриваемом случае коэффициенты преобразований (8) являются комплексными сопряженными величинами, то X и Y в формулах (8) также будут комплексными сопряженными. Полагая $p_{11}=p_{12}=c$, мы получим

$$X=(\alpha+i\beta-a)x+cy=u+iv, \qquad Y=(\alpha-i\beta-a)x+cy=u-iv,$$

откуда

$$u=\frac{X+Y}{2}=(\alpha-a)x+cy, \qquad v=\frac{X-Y}{2i}=\beta x. \tag{26}$$

Преобразование (26), очевидно, является неособым, так как детерминант этого преобразования

$$\begin{vmatrix}\alpha-a & b\\ \beta & 0\end{vmatrix}=-\beta b\neq 0$$

в силу того, что $\beta\neq 0$ и по предположению $c\neq 0$. Коэффициенты этого преобразования действительны. Перейдем в динамической системе (4) к переменным u и v. Линейные члены в полученной таким образом динамической системе проще всего найти следующим образом:

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{dX}{dt}+\frac{dY}{dt}\right]=\frac{1}{2}[\lambda_1X+\varphi_1+\lambda_2Y+\psi_1],$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2i}\left[\frac{dX}{dt}-\frac{dY}{dt}\right]=\frac{1}{2i}[\lambda_1X-\lambda_2Y+\varphi_1(X,\ Y)+\psi_1(X,\ Y)],$$

откуда, подставляя вместо X, Y их выражения, через u и v нетрудно получить

$$\frac{du}{dt}=\alpha u-\beta v+\varphi_1(u,\ v), \qquad \frac{dv}{dt}=\beta u+\alpha v+\psi_1(u,\ v), \tag{27}$$

т. е. при других обозначениях для переменных вид (17). Таким образом, лемма доказана.

Замечание. При доказательстве леммы 1 мы не пользовались тем фактом, что $\Delta \neq 0$. Поэтому утверждение леммы справедливо также и в случае, когда $\Delta = 0$.

Во всем приведенном выше рассмотрении мы предполагали, что состояние равновесия лежит в начале координат. В общем случае, когда состояние равновесия лежит в точке $M(x_0, y_0)$ (не обязательно совпадающей с началом координат), характеристическое уравнение запишется в виде

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0)-\lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x, y_0) & Q'_y(x_0, y_0)-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

Очевидно, теперь

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0), \qquad \Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_y(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

3. Инвариантность характеристического уравнения при регулярном преобразовании. Предположим, что в исходной системе (4) сделано какое-нибудь преобразование (8), приводящее систему (4) к виду (10) (который, вообще говоря, не является каноническим). Характеристическое уравнение, написанное в случае системы (10), имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ c_1 & d_1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Естественно думать, что корни этого уравнения совпадают с корнями характеристического уравнения, написанного для системы (4). Это действительно имеет место, и мы сформулируем этот факт в виде следующей леммы:

Лемма 2. *При линейном неособом преобразовании переменных в системе* (4) *характеристические корни состояния равновесия не изменяются.*

Доказательство этой леммы непосредственно вытекает из того факта, что матрица B линейных членов преобразованной системы связана с матрицей A линейных членов исходной системы соотношением

$$B = SAS^{-1},$$

где S — матрица рассматриваемого преобразования, а S^{-1} — матрица преобразования, ему обратного. В силу известных предложений алгебры матрица A и любая «подобная» ей матрица B *) имеют одинаковые характеристические числа.

Замечание. При любом *регулярном преобразовании переменных* (см. дополнение, § 5) $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ характеристическое уравнение состояния равновесия $M_0(x_0, y_0)$ изменяется так же, как при линейном преобразовании с коэффициентами

$$p_{11} = f'_x(x_0, y_0), \qquad p_{12} = f'_y(x_0, y_0),$$
$$p_{21} = g'_x(x_0, y_0), \qquad p_{22} = g'_y(x_0, y_0).$$

Отсюда, очевидно, следует, что при любом регулярном преобразовании переменных характеристические корни состояния равновесия не меняются. Из того, что характеристические корни не меняются при любом регулярном преобразовании, очевидно, следует, что при всяком таком преобразовании величины σ и Δ не изменяются, т. е. они являются инвариантами регулярного преобразования.

*) Матрица A и любая матрица вида SAS^- (S — неособая матрица) называются подобными.

4. Некоторые предварительные замечания относительно возможной топологической структуры простых состояний равновесия. Рассмотрим систему (1), предполагая, как и выше, что состояние равновесия O (0, 0) является простым (т. е. $\Delta \neq 0$, так что ни один из корней λ_1 и λ_2 не равен нулю).

В силу леммы 1 мы всегда можем привести такую систему путем надлежащим образом выбранного линейного неособого преобразования к одному из трех указанных в этой лемме видов, которые мы будем называть *каноническими*.

Нашей целью в этой главе является исследование топологической структуры простого состояния равновесия. Это исследование достаточно провести для систем, имеющих канонический вид. Действительно, в силу леммы 1 мы можем произвольную систему (4) при помощи некоторого действительного неособого преобразования (8) перевести в систему, имеющую канонический вид. Так как неособое линейное преобразование заведомо является топологическим, то у состояния равновесия O (0, 0) системы, имеющей канонический вид, очевидно, та же топологическая структура, что и у состояния равновесия O (0, 0) системы (4).

При рассмотрении вопроса о том, какую топологическую структуру может иметь простое состояние равновесия, естественным является, как мы увидим, разделение на следующие случаи: 1) характеристические числа λ_1 и λ_2 действительны и имеют одинаковые знаки (состояние равновесия называется узлом), 2) характеристические числа комплексно-сопряженные и действительные части их не равны нулю (состояние равновесия называется фокусом), 3) характеристические числа действительны, но разных знаков (состояние равновесия называется седлом), 4) характеристические числа чисто мнимые.

Мы увидим, что в первых трех случаях топологическая структура состояния равновесия *определяется линейными членами системы* (4). При этом топологическая структура состояний равновесия такая же, как и у линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \tag{28}$$

которая получается из системы (4) отбрасыванием нелинейных членов.

Случаи 1) — 3) можно выделить как случаи, когда *характеристические корни имеют не равные нулю действительные части* *). Кроме того, мы увидим, что топологическая структура состояния равновесия в первых двух случаях одинакова. Эти случаи иногда объединяют в один, называя его случаем, когда действительные части характеристических корней не равны нулю и имеют одинаковые знаки.

Случай 4) — чисто мнимых характеристических корней — является более сложным. Топологическая структура состояния равновесия в этом случае не определяется характеристическими корнями, т. е. не определяется линейными членами. Она зависит от членов более высоких степеней и в зависимости от них может быть различной. Этот случай рассматривается в § 8.

---

*) Систему (28) часто называют линеаризованной системой (по отношению к системе (4)), а отбрасывание нелинейных членов и заключение о характере состояния равновесия нелинейной системы на основании рассмотрения «линеаризованной системы» иногда называют «линеаризацией системы». Изложенное в следующем параграфе исследование можно охарактеризовать как «доказательство законности линеаризации в случае не равных нулю действительных частей характеристических корней».

В дальнейшем нам будет удобно представлять функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в правых частях системы (4) в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = xg_1(x, y) + yg_2(x, y),$$
$$\psi(x, y), = xf_1(x, y) + yf_2(x, y),$$

где $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ — непрерывные функции, причем $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$. Такое представление функций φ и ψ всегда возможно, что нетрудно установить, пользуясь формулой Тейлора (или же леммой Адамара).

В данном случае лемма Адамара доказывается очень просто следующим образом (например, для функции φ):

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(0, 0) = \int_0^1 \varphi_t(tx, ty)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \varphi'_x(tx, ty)\, x\, dt + \int_0^1 \varphi'_y(tx, ty)\, y\, dt = xg_1(x, y) + yg_2(x, y),$$

где g_1 и g_2 равны соответственно $\int_0^1 \varphi'_x(tx, ty)\, dt$ и $\int_0^1 \varphi'_y(tx, ty)\, dt$. Непрерывность функций g_1 и g_2 следует из непрерывности частных производных φ'_x и φ'_y, а равенства $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$ вытекают из равенства $\varphi'_x(0, 0) = \varphi'_y(0, 0) = 0$.

§ 7. Расположение траекторий в окрестности простых состояний равновесия с характеристическими корнями, имеющими не равные нулю действительные части *)

1. Случай 1): характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и одинаковых знаков (состояние равновесия типа узел). В обозначениях формул (24) § 6 для равновесия типа узла имеем

$$\sigma^2 - 4\Delta \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \Delta > 0.$$

Случай неравных и равных характеристических корней мы рассмотрим отдельно.

1 а) Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то в силу леммы 1 § 6 система принимает канонический вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1 x + \varphi(x, y) = \lambda_1 x + xg_1(x, y) + yg_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_2 y + \psi(x, y) = \lambda_2 y + xf_1(x, y) + yf_2(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

(Здесь, как и всюду в дальнейшем, мы пользуемся представлением функций φ и ψ в виде, указанном в конце предыдущего § 6.)

*) Заметим, что излагаемое ниже исследование топологической структуры перечисленных состояний равновесия можно провести при несколько более общих предположениях относительно функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Именно, вместо существования у них непрерывных частных производных можно потребовать только, чтобы выполнялись соотношения (см. [22]):

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\varphi(x, y)}{\rho} = 0, \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{\psi(x, y)}{\rho} = 0, \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Предположим для определенности, что λ_1 и λ_2 отрицательны. (Случай положительных λ_1 и λ_2 приводится к рассматриваемому заменой t на $-t$.) Покажем, что *всякая, не являющаяся состоянием равновесия траектория динамической системы, проходящая через точку, достаточно близкую к началу координат при* $t \to +\infty$, *стремится к началу координат, а при* t *убывающем — удаляется от начала координат.* Рассмотрим некоторую окрестность состояния равновесия O, кроме O, не содержащую ни одного состояния равновесия и пусть

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

— уравнение какой-нибудь траектории L, отличной от состояния равновесия, проходящей через точку этой окрестности.

Рассмотрим для этой траектории выражение (ср. § 3, п. 13)

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2x[\lambda_1 x + x g_1(x, y) + y g_2(x, y)] + \\ + 2y[\lambda_2 y + x f_1(x, y) + y f_2(x, y)]. \quad (2)$$

Переходя к полярным координатам, т. е. полагая $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, будем рассматривать уравнение траектории в полярных координатах

$$\varrho = \varrho(t), \qquad \theta = \theta(t).$$

При этом

$$\varrho^2(t) = x^2(t) + y^2(t).$$

Полярный угол $\theta(t)$ при движении по траектории, очевидно, меняется непрерывно. Переходя в выражении (2) к полярным координатам, мы получаем

$$\frac{d\varrho^2}{dt} = 2\varrho^2\{\lambda_1\cos^2\theta + \lambda_2\sin^2\theta + \cos^2\theta\, g_1(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta) + \\ + \cos\theta\sin\theta[g_2(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta) + f_1(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)] + \\ + \sin^2\theta f_2(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)\}. \quad (3)$$

Выражение $\lambda_1\cos^2\theta + \lambda_2\sin^2\theta$ ограничено по абсолютной величине, периодично по θ и при всех (действительных) значениях θ отрицательно. Поэтому у него имеется наибольшее и наименьшее значение $-m$ и $-M$, где $M > 0$ и $m > 0$, $M > m$.

В силу непрерывности функций g_1, g_2, f_1, f_2 и равенства их нулю в точке $O(0, 0)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\varrho_0 > 0$, что если $\varrho(t) < \varrho_0$, то

$$|\cos^2\theta g_1 + \cos\theta\sin\theta(g_2 + f_1) + \sin^2\theta f_2| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon < \frac{m}{2}$. Тогда если $\varrho(t) \leqslant \varrho_0$, то выражение в фигурных скобках в соотношении (3) меньше $-\frac{m}{2}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\frac{d\varrho^2(t)}{dt} < 2\varrho^2(t)\left(-\frac{m}{2}\right) < -m\varrho^2(t). \quad 4)$$

С другой стороны, так как $\varepsilon < \frac{m}{2} < \frac{M}{2}$, то, когда $\varrho(t) \leqslant \varrho_0$, выражение в скобках в соотношении (3) больше $-\frac{3M}{2}$, и, следовательно,

справедливо неравенство

$$\frac{d\varrho^2(t)}{dt} > -3M\varrho^2(t), \tag{5}$$

так что

$$-3M\varrho^2(t) < \frac{d\varrho^2(t)}{dt} < -m\varrho^2(t). \tag{6}$$

Пусть при $t = t_0$ точка рассматриваемой траектории находится на окружности C^* радиуса $\varrho^* < \varrho_0$ с центром в точке O, т. е.

$$x^2(t_0) + y^2(t_0) = \varrho^{*2}.$$

Из соотношения (4) следует, что при $t = t_0$ функция $\varrho^2(t)$, а значит и $\varrho(t)$, убывает, т. е. что при $t > t_0$ траектория входит внутрь окружности C^*. Другими словами, условие (4) означает, что всякая окружность

$$x^2 + y^2 = C \tag{7}$$

радиуса, меньшего ϱ_0, в частности окружность C^*, является «циклом без контакта» (см. § 3, п. 10) для траекторий системы. (Условие касания окружности (7) и траекторий есть $\frac{d\varrho^2}{dt} = 0$, что противоречит условию (4).) Поэтому точка на траектории L при возрастании t уже не может выйти из области, ограниченной окружностью (циклом без контакта) C^*, и, следовательно, траектория L заведомо определена для всех значений $t > t_0$ (в силу теоремы 2 § 1 *)) и для всех этих значений t, $\varrho(t) < \varrho^* < \varrho_0$. Но тогда неравенство (4) выполняется при всех $t \geqslant t_0$. Разделяя в этом неравенстве переменные и интегрируя его от t до t_0, мы получим

$$\lg \frac{\varrho^2(t)}{(\varrho^*)^2} < -m(t - t_0),$$

т. е.

$$\varrho^2(t) < (\varrho^*)^2 e^{-m(t-t_0)}.$$

Отсюда следует, что при $t \to +\infty$ $\varrho(t) \to 0$, т. е. траектория L стремится к состоянию равновесия O.

Рассмотрим теперь, что происходит с точкой на траектории L, когда t убывает ($t < t_0$). Так как окружность C^* есть цикл без контакта, то при убывании t траектория не может войти внутрь этой окружности. При этом до тех пор, пока $\varrho^*(t) < \varrho_0$, справедливо неравенство (5)

$$\frac{d\varrho^2}{dt} > -3M\varrho^2$$

и, следовательно, неравенство

$$\varrho^2 > \varrho^{*2} e^{-3M(t-t_0)}.$$

Но это, очевидно, означает, что при убывании t ($t < t_0$) $\varrho^2(t)$ возрастает, во всяком случае до тех пор, пока справедливо неравенство (5), т. е. до тех пор, когда $\varrho(t)$ делается равным ϱ_0. При $\varrho(t) = \varrho_0$ неравенство (5) по условию также справедливо. Поэтому окружность ($x^2 + y^2 = \varrho_0^2$) является циклом без контакта. При *убывании* t траектория L выходит из

*) Теорема 2 была сформулирована и доказана нами для траектории. Однако соответствующим образом измененное утверждение ее имеет место, как легко видеть, и для полутраектории. Здесь мы пользуемся указанным утверждением для полутраектории.

этой окружности и при дальнейшем убывании не может уже больше войти в нее. А это доказывает сделанное утверждение для рассматриваемого случая различных характеристических корней (рис. 79) *).

1б) $\lambda_1 = \lambda_2$ (кратный корень).

Система имеет канонический вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x + x g_1(x, y) + y g_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda y + \mu x + x f_1(x, y) + y f_2(x, y), \end{aligned} \tag{8}$$

где λ, как и в случае 1а), для определенности будем считать отрицательным.

Если $\mu = 0$, то рассмотрение проводится совершенно так же, как и в предыдущем случае. Пусть $\mu \neq 0$. Покажем, что окружности $x^2 + y^2 = C$ могут уже не быть циклом без контакта. Действительно, первым членом в разложении для $\frac{d\varrho^2}{dt}$ в этом случае является

$$\varrho^2 (\lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_1 \sin^2\theta + \mu \cos\theta \sin\theta),$$

и выражение в скобках, вообще говоря, уже может менять знак (когда $\mu^2 - 4\lambda_1^2 > 0$). Однако доказательство может быть проведено аналогично, только вместо выражения

$$\varrho^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

(квадрата расстояния точки траектории L до начала координат) рассматривается выражение

$$\sigma(t) = x^2(t) + k y^2(t),$$

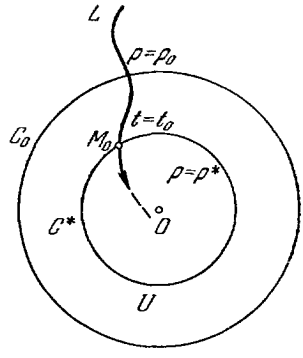


Рис. 79.

где $k > 0$ и будет выбрано позже. $\sigma(t)$ стремится к нулю в том и только в том случае, когда $x^2(t) + y_2(t) \to 0$. Из уравнений (8) следует, что

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d(x^2 + ky^2)}{dt} = 2\{\lambda x^2 + k\mu xy + \lambda k y^2 + x^2 g_1(x, y) + xy[g_2(x, y) + k f_1(x, y)] + k y^2 f_2(x, y)\}.$$

Умножая и деля правую часть на $x^2 + ky^2$ и переходя затем к полярным координатам, мы получим

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = 2\sigma(t)\left[\frac{\lambda\cos^2\theta + k\mu\cos\theta\sin\theta + \lambda k\sin^2\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta} + \frac{g_1\cos^2\theta + (f_1 k + g_2)\cos\theta\sin\theta + f_2 k\sin^2\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta}\right]. \tag{9}$$

Выберем теперь $k > 0$ так, чтобы выполнялось условие $k^2\mu^2 - 4\lambda k < 0$. Тогда числитель первой дроби в фигурных скобках представляет отрицательно определенную квадратичную форму относительно $\cos\theta$ и $\sin\theta$ и принимает, следовательно, только отрицательные значения. Знаменатели обеих дробей в квадратных скобках принимают только положительные значения и ограничены сверху и снизу положительными числами. Числитель второй дроби стремится к нулю при $x \to 0$ и $y \to 0$. В силу

*) Заметим, что здесь не устанавливается, стремятся ли траектории к состоянию равновесия с определенной касательной (как в примере 3 § 1) или имеют вид спиралей.

периодичности тригонометрических функций первая дробь в квадратных скобках имеет наибольшее и наименьшее значения $-m$ и $-M$, где $m>0$, $M>0\,(m<M)$. Вторая дробь стремится к 0 при $\varrho\,(t)\to 0$. Поэтому, рассуждая далее в точности так же, как в предыдущем случае, мы покажем, что если

$$\sigma(t)=x^2(t)+ky^2(t)<\varrho_0^2,$$

где ϱ_0 — достаточно малое положительное число, то

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}<-m\sigma(t). \tag{10}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что при надлежащем выборе ϱ_0 имеет место неравенство

$$\frac{d\sigma}{dt}>-3M\sigma,$$

так что при $\varrho<\varrho_0$

$$-3M\sigma<\frac{d\sigma}{dt}<-m\sigma. \tag{11}$$

Значит, семейство эллипсов

$$x^2+ky^2=C<\varrho_0^2$$

является семейством циклов без контакта для траекторий рассматриваемой системы, и с ростом t выражение

$$\sigma(t)=x^2(t)+ky^2(t)$$

монотонно убывает и стремится к нулю, т. е. все траектории, проходящие через точки области u, заключенной внутри эллипса $x^2+ky^2=\varrho_0^2$, и отличные от точки O, при возрастании t стремятся к началу координат, не выходя из u. При убывании t все траектории выходят из области u. Это устанавливается рассуждением, аналогичным проведенному выше, в случае различных λ_1 и λ_2 с использованием неравенства (11) (аналогичного неравенству (6)) *).

Сделанное нами утверждение доказано.

Совершенно аналогично рассматривается случай, когда $\lambda_1>0$ и $\lambda_2>0$.

Таким образом, в случае, когда корни характеристического уравнения имеют одинаковые знаки и отрицательны, все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность состояния равновесия O, стремятся к O при $t\to+\infty$, а при убывании t — выходят из этой окрестности. В слу-

*) В случае кратных характеристических корней можно также провести исследование несколько иначе. Именно, нетрудно видеть, что можно предварительно, путем замены

$$x=\alpha\bar{x}$$

с надлежащим образом выбранной величиной α, сделать коэффициент μ столь малым, чтобы выражение

$$\mu^2-4\lambda^2$$

было отрицательным. Тогда в разложении для $\frac{d\varrho^2}{dt}$ коэффициент при первом члене (при ϱ^2)

$$\lambda_1\cos^2\theta+\lambda\sin^2\theta+\mu\sin\theta\cos\theta,$$

очевидно, уже не будет менять знак, и можно провести такое же рассуждение, как и в случае 1а).

чае же, когда корни характеристического уравнения положительны, все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность состояния равновесия, стремятся к нему при $t \to -\infty$, а при возрастании t выходят из этой окрестности.

В первом случае состояние равновесия называется *устойчивым узлом*, во втором — *неустойчивым узлом*. Когда характеристические корни —кратные, узел называется *вырожденным*, если $\mu \neq 0$, и *дикритическим*, если $\mu = 0$.

2. Случай 2): характеристические корни — комплексные сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ (состояние равновесия типа фокус). При этом, очевидно, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$. Система имеет канонический вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta y + \varphi(x, y) = \alpha x - \beta y + x g_1(x, y) + y g_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x + \alpha y + \psi(x, y) = \beta x + \alpha y + x f_1(x, y) + y f_2(x, y). \end{aligned} \tag{12}$$

Предположим для определенности, что $\alpha < 0$ (случай $\alpha > 0$ приводится к нему заменой t на $-t$). Покажем, что, как и в случае действительных характеристических корней одинаковых и отрицательных знаков, все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность состояния равновесия O, при $t \to +\infty$ стремятся к этому состоянию равновесия, а при убывании t выходят из этой окрестности. Для этого так же, как и в случае 1а), рассмотрим выражение

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = 2\{\alpha(x^2+y^2) + x^2 g_1(x, y) + xy[g_2(x, y) + f_1(x, y)] + y^2 f_2(x, y)]\},$$

или в полярных координатах

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho^2}{dt} = 2\varrho^2 \{\alpha + \cos^2\theta\, g_1(\varrho\cos\theta, \ \varrho\sin\theta) + \cos\theta\sin\theta\,[g_2(\varrho\cos\theta, \ \varrho\sin\theta) + \\ + f_1(\varrho\cos\theta, \ \varrho\sin\theta)] + \sin^2\theta f_2(\varrho\cos\theta, \ \varrho\sin\theta)\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как по предположению $\alpha \neq 0$, то это соотношение имеет такой же вид, как соотношение (3) в п. 1. Поэтому здесь можно воспользоваться почти без всяких изменений методом, примененным при исследовании узла. Проведя соответствующее рассуждение, мы придем к тем же заключениям, что в п. 1. Если $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$), то каждая траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку достаточно малого круга C_0 с центром в O и отличная от точки O, определена для всех значений $t > t_0$ ($t < t_0$) и при возрастании t (убывании t) стремится к состоянию равновесия O, не выходя при этом из окружности C_0, а при убывании (возрастании t) выходит из окружности C_0.

Состояние равновесия называется *устойчивым фокусом*, когда все траектории стремятся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$, и *неустойчивым фокусом*, когда траектории стремятся к O при $t \to -\infty$.

Мы уже отмечали в § 1 при рассмотрении примеров, что поведение траекторий вблизи узла и фокуса в некотором смысле одинаково. Данные в § 5 определения позволяют привести следующую точную формулировку этого утверждения: *топологическая структура узла и фокуса одинакова.*

Это и делает естественным указанное выше объединение случаев 1) и 2). Отметим, что исследование характера состояния равновесия в рассматриваемых случаях 1)

и 2) может быть проведено несколько отличающимся по форме рассуждением и использованием леммы 15 и леммы 16 § 3. Именно, из соотношения (6) или соответственно (11) следует, как уже указывалось, что окружность $x^2 + y^2 = C$ или в случае 1б) эллипс $x^2 + ky^2 = C$ при $C \leqslant \varrho_0^2$ являются циклами без контакта для траекторий системы (1). При этом в случае, когда $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ или соответственно $\alpha < 0$, траектории пересекают каждый из этих циклов, при возрастании t входя внутрь него (так как правые части соотношений (3) и (13) отрицательны).

Выбирая цикл C_0' сколь угодно малого радиуса $\varrho_0' < \varrho_0$ и используя лемму 15 и лемму 16 § 3, нетрудно убедиться в справедливости сделанного утверждения относительно поведения траекторий в окрестности рассмотренных состояний равновесия 1), 2).

Укажем на связь между проведенным здесь рассмотрением и так называемой «функцией Ляпунова». Ляпуновым при исследовании устойчивости состояния равновесия автономной динамической системы произвольного порядка были даны достаточные условия устойчивости состояния равновесия, которые могут быть сформулированы следующим образом: пусть дана система

$$\dot{x}_i = p_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для которой начало координат является состоянием равновесия. Если существует функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности u начала, обращающаяся в нуль в начале, а во всех других точках окрестности u принимающая только положительные значения (такая функция называется знакоопределенно-положительной), и если производная от этой функции в силу системы

$$\dot{x}_i = p_i(x_1, \ldots, x_n), \text{ т. е. } \sum \frac{\partial v}{\partial x_i} p_i,$$

является функцией постоянного знака, и при этом противоположного знаку $v(x_1, \ldots, x_n)$, то состояние равновесия (O) устойчиво. Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая указанным выше условиям, часто называется функцией Ляпунова. В рассматриваемых нами случаях 1) и 2) функция Ляпунова существует. Именно, в случае 1а) и 2) функцией Ляпунова является функция $v(x, y) = x^2 + y^2$, а в случае 1б) $v(x, y) = x^2 + y^2 k$.

Мы не останавливаемся здесь подробно на вопросе о топологической тождественности состояний равновесия типа узел и фокус так, как он рассматривается в главе VIII.

Приведем все же построение топологического отображения в случае, когда для системы в плоскости (x, y)

$$\frac{dx}{dt} = P_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_1(x, y), \tag{14}$$

начало координат O_1 является узлом, характеристические корни которого различны, а для системы в плоскости (ξ, η)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = P_2(\xi, \eta), \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = Q_2(\xi, \eta) \tag{15}$$

(плоскость (ξ, η), в частности, может совпадать с плоскостью (x, y)) начало O_2 является фокусом.

В силу изложенного в тексте, все окружности достаточно малого радиуса на плоскостях (ξ, η) и (x, y), соответственно, с центрами в O_1 и O_2 являются циклами без контакта.

Возьмем среди них две окружности C_1 и C_2, одну в плоскости (x, y), другую в плоскости (ξ, η) одинакового радиуса. Выберем такие движения на траекториях этих систем, при которых точкам окружностей C_1 и C_2 соответствуют значения $t = t_0$ и $\tau = \tau_0$. Поставим друг другу в соответствие точки траекторий системы (17) и (15), пересекающих соответственно окружности C_1 и C_2 в точках с одинаковыми координатами, таким образом, чтобы соответствующими друг другу точками были точки с одинаковыми значениями параметров t и τ.

Кроме того, поставим друг другу в соответствие точки O_1 и O_2. Мы получаем, таким образом, отображение замкнутой области, ограниченной окружностью C_1, на замкнутую область, ограниченную окружностью C_2. Нетрудно убедиться, что это отображение является топологическим.

Как уже было сказано в начале главы, между узлом и фокусом существует различие, которое не является топологическим (и поэтому не является существенным с точки зрения *чисто качественного* рассмотрения): именно, в случае узла каждая траектория, проходящая в его окрестности, стремится к нему в *определенном* направлении (точное определение см. в § 9), в случае же фокуса стремящиеся к нему траектории имеют вид спиралей (см. § 9, п. 7).

3. Случай 3): характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и различных знаков, т. е. $\lambda_1\lambda_2<0$ (состояние равновесия типа «седло») *).

В этом случае, очевидно, $\Delta < 0$ и система может быть приведена к каноническому виду:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_1 x+\varphi(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=\lambda_2 y+\psi(x,\ y), \tag{16}$$

где, для определенности, можно считать $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$. Функции $\varphi(x,\ y)$, $\psi(x,\ y)$, как и раньше, могут быть представлены в виде

$$\varphi(x,\ y)=xg_1(x,\ y)+yg_2(x,\ y),\qquad \psi(x,\ y)=xf_1(x,\ y)+yf_2(x,\ y), \tag{17}$$

где

$$g_1(0,\ 0)=g_2(0,\ 0)=f_1(0,\ 0)=f_2(0,\ 0).$$

Топологическая структура состояния равновесия в этом случае устанавливается совсем другим методом, чем в предыдущих двух случаях. Согласно этому методу в окрестности точки O, $U_\varepsilon(O)$, не содержащей отличных от O состояний равновесия, выделяются отрезки без контакта, позволяющие судить о поведении траекторий в окрестности состояния равновесия O.

Возьмем произвольное фиксированное число $k_0>0$ и рассмотрим прямые $y=\pm k_0x$.

Пусть траектория L, соответствующая решению

$$x=x(t),\qquad y=y(t),$$

при $t=t_0$ пересекает прямую $y=k_0x$ (или $y=-k_0x$) в точке, отличной от начала координат.

Мы имеем **)

$$\left[\frac{d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)}{dt}\right]_{t=t_0}=\left\{\frac{x(t)\left[\lambda_2 y(t)+x(t)\,f_1(x(t),\ y(t))+y(t)\,f_2(x(t),\ y(t))\right]}{[x(t)]^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{y(t)\left[\lambda_1 x(t)+x(t)\,g_1(x(t),\ y(t))+y(t)\,g_2(x(t),\ y(t))\right]}{[x(t)]^2}\right\}_{t=t_0}. \tag{18}$$

---

*) Исследование топологической структуры в окрестности седла проводится здесь так же, как в [22]. Несколько другое, тоже геометрическое исследование дано в [11]. См. также по этому вопросу п. 5.

**) Выражение в скобках, очевидно, является «производной от функции $z=y/x$ в силу системы (1)» (см. § 3, п. 13). Знак его показывает, увеличивается или уменьшается $z(t)=y(t)/x(t)$ при движении по траектории в сторону возрастания t, и позволяет, следовательно, определить характер пересечения прямых $y=\pm k_0x$ с траекториями.

Так как $\frac{y(t_0)}{x(t_0)} = \pm k_0$, то

$$\left[\frac{d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)}{dt}\right]_{t=t_0} = \{\pm k_0(\lambda_2 - \lambda_1) + f_1(x(t),\ y(t)) \pm$$
$$\pm k_0[f_2(x(t),\ y(t)) - g_1(x(t),\ y(t))] - g_2(x(t),\ y(t))\,k_0^2\}_{t=t_0}. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь отрезки прямых $x = \text{const} \neq 0$, состоящие из точек этих прямых, для которых $\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant k_0$, т. е. отрезки вертикальных прямых, заключенные между прямыми $y = \pm k_0 x$ (рис. 80).

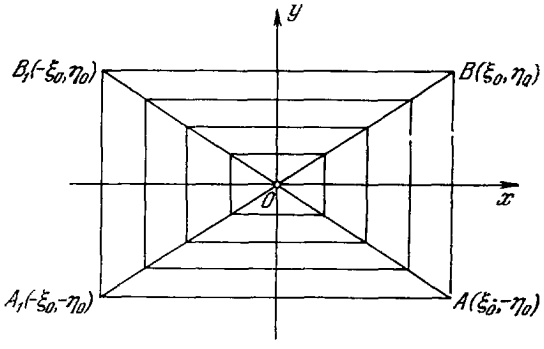


Рис. 80.

Если траектория $x = x(t)$, $y = y(t)$ пересекает такой отрезок при $t = t_0$, то

$$\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]_{t=t_0} = \left\{x(t)\left[\lambda_1 + g_1(x(t),\ y(t)) + \frac{y(t)}{x(t)}\,g_2(x(t),\ y(t))\right]\right\}_{t=t_0}, \quad (20)$$

причем

$$\left|\frac{y(t_0)}{x(t_0)}\right| \leqslant k_0. \quad (21)$$

Наконец, рассмотрим отрезки прямых $y = \text{const} \neq 0$, состоящие из точек этих прямых, для которых $\left|\frac{y}{x}\right| \geqslant k_0$, т. е. отрезки горизонтальных прямых, заключенные между прямыми $y = \pm k_0 x$ (рис. 80). Если траектории $x = x(t)$, $y = y(t)$ пересекают такой отрезок при $t = t_0$, то

$$\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]_{t=t_0}\left\{y(t)\left[\lambda_2 + \frac{x(t)}{y(t)}f_1(x(t),\ y(t)) + f_2(x(t),\ y(t))\right]\right\}_{t=t_0}, \quad (22)$$

причем

$$\left|\frac{x(t_0)}{y(t_0)}\right| \leqslant \frac{1}{k_0}. \quad (23)$$

Выберем теперь настолько малое положительное число ξ_0, чтобы выполнялись одновременно следующие условия:

1) если $|x| \leqslant \xi_0$, $|y| \leqslant k_0\xi_0$, то

$$|f_1(x,\ y) \pm k_0[f_2(x,\ y) - g_1(x,\ y)] - g_2(x,\ y)\,k_0^2| < \frac{k_0}{2}(\lambda_2 - \lambda_1); \quad (24)$$

2) если $|x| \leqslant \xi_0$, $|y| \leqslant k_0\xi$ и $\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant k_0$, то

$$\left|g_1(x,\ y) + \frac{y}{x}\,g_2(x,\ y)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\lambda_1|; \quad (25)$$

3) если $|x| \leqslant \xi_0$, $|y| \leqslant k_0\xi_0$ и $\left|\frac{x}{y}\right| \leqslant \frac{1}{k_0}$, то

$$\left|f_1(x,\ y)\,\frac{x}{y} + f_2(x,\ y)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\lambda_2|. \quad (26)$$

Существование такого числа ξ_0 вытекает из свойств функций f_1, f_2, g_1, g_2.

Рассмотрим прямоугольник $\bar{H}$ с центром в начале координат, определяемый неравенствами $|x| \leqslant \xi_0$, $|y| \leqslant \eta_0$, где $\eta_0 = k_0\xi$ (рис. 80). Пусть $A(\xi_0, -\eta_0)$, $B(\xi_0, \eta_0)$, $A_1(-\xi_0, -\eta_0)$ и $B_1(-\xi_0, \eta_0)$ — его вершины *). Из соотношений (19) и (24) следует, что если точка $(x(t), y(t))$ траектории лежит на диагонали A_1B прямоугольника $\bar{H}$, т. е. на прямой $y = k_0x$ (но не является точкой O), то

$$\frac{d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)}{dt} > \frac{k_0}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) > 0. \tag{27}$$

Если же она лежит на диагонали AB_1, т. е. на прямой $y = -k_0x$, то

$$\frac{d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)}{dt} < -\frac{k_0(\lambda_1 - \lambda_2)}{2} < 0. \tag{28}$$

Из соотношений (20) и (25) следует, что если точка $(x(t), y(t))$ траектории лежит на одном из указанных вертикальных отрезков прямоугольника $\bar{H}$ и если $x(t) > 0$, то

$$\frac{3\lambda_1}{2}x < \frac{dx}{dt} < \frac{\lambda_1}{2}x < 0. \tag{29}$$

Из соотношений (22) и (26) следует, что если точка $x(t)$, $y(t)$ лежит на одном из указанных горизонтальных отрезков прямоугольника $\bar{H}$ и если $y(t) > 0$, то

$$\frac{3\lambda_2}{2}y > \frac{dy}{dt} > \frac{\lambda_2}{2}y > 0. \tag{30}$$

Совершенно аналогичные неравенства имеют место при $x(t) < 0$ и $y(t) < 0$ (они получаются из неравенств (29) и (30) изменением знаков неравенств на обратные).

Из соотношений (27) и (28) следует, что диагонали A_1B и AB_1 прямоугольника ABB_1A_1 ни в одной своей точке, отличной от O, не имеют касания с проходящей через эту точку траекторией **).

Аналогично из условий (29) и (30) следует, что все указанные горизонтальные и вертикальные отрезки прямоугольника $\bar{H}$ являются для нашей динамической системы отрезками без контакта.

Диагонали A_1B и AB_1 делят прямоугольник $\bar{H}$ на четыре треугольника. Рассмотрим один из них, например, треугольник OAB. Полученные для него результаты и их доказательства переносятся с соответствующими изменениями на все остальные треугольники. Из равенств (28), (29) и (30), очевидно, следует:

1) всякая траектория, при $t = t_0$ пересекающая сторону OA (OB) треугольника OAB в точке, отличной от O и A (O и B), при убывании t входит внутрь треугольника, а при возрастании t выходят из него;

2) всякая траектория, при $t = t_0$ пересекающая сторону AB треугольника в точке, отличной от ее концов A и B, при возрастании t входит внутрь треугольника, а при убывании t выходит из него;

---

*) Диагонали прямоугольника H являются отрезками прямых $y = \pm k_0x$.

**) Условия касания $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y(t)}{x(t)}$, т. е. $\frac{d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)}{dt} = 0$. Таким образом, всякий замкнутый отрезок, принадлежащий диагонали A_1B и AB_1 и не содержащий точки O, является отрезком без контакта.

Рассмотрим прямоугольник $\overline{H}$ с центром в начале координат, определяемый неравенствами $|x| \leqslant \xi_0$, $|y| \leqslant \eta_0$, где $\eta_0 = k_0\xi$ (рис. 80). Пусть $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$, $A_1(-\xi, \eta)$ и $B_1(-\xi, \eta)$ его вершины*).

$t > t_0$ выполняется неравенство (29) и, следовательно, неравенство

$$x(t) < x_0 e^{\frac{\lambda_1}{2}(t-t_0)},$$

из которого следует, что при $t \to \infty$ $x(t) \to 0$ и $y(t) \to 0$.

Возможности а) и б) заведомо осуществляются. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть, как это было сделано выше, траектории, проходящие через внутренние точки сторон OA и OB треугольника OAB. При этом очевидно, что если траектория L (L'), проходящая через внутреннюю точку M (M') стороны AB, при возрастании t пересекает сторону OA (OB) в некоторой точке N (N'), не выходя до этого из треугольника, то всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через внутреннюю точку отрезка AM (BM), при возрастании t входит внутрь треугольника OAB и при некотором $t > t_0$ пересечет, не выходя до этого из треугольника, часть AN (BN') отрезка AO (BO) (рис. 82).

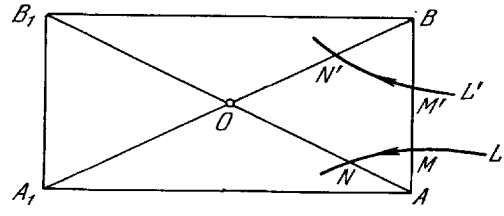


Рис. 82.

Покажем, что осуществляется также возможность в), причем только для одной точки отрезка AB. Именно, покажем, что на отрезке AB существует в точности одна точка C_0, обладающая тем свойством, что проходящая через нее при $t = t_0$ траектория при возрастании t входит в треугольник OAB и остается внутри него и, следовательно, стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия O. Для доказательства заметим прежде всего, что если траектория, проходящая через точку M отрезка AB, пересечет при возрастании t отрезок OA (OB), то, в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, траектории, проходящие через все достаточно близкие к точке M точки отрезка AB, обладают тем же свойством. Разделим теперь все внутренние точки отрезка AB на два класса. К первому классу отнесем все точки, обладающие тем свойством, что проходящие через них траектории при возрастании t выходят из треугольника OAB через сторону OA, ко второму — все остальные точки. Очевидно, оба класса не пусты, и каждая точка первого класса лежит (на отрезке AB) ниже точки второго класса. Поэтому существует пограничная точка C_0, ниже которой лежат все точки первого класса, а выше — все точки второго класса. Пусть L_0 — траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку C_0. Если траектория L_0 при возрастании t выходит из треугольника OAB через сторону OA (OB), то в силу сделанного выше замечания все достаточно близкие к точке C_0 точки отрезка AB принадлежат первому классу (второму классу), что противоречит свойству пограничной точки C_0. Поэтому траектория L_0 при $t = t_0$ входит в треугольник OAB и при возрастании t остается внутри него, т. е., как было показано выше, стремится к состоянию равновесия O. Покажем, что точка C_0 является единственной точкой отрезка AB, обладающей тем свойством, что проходящая через нее траектория при возрастании t стремится к состоянию равновесия O, оставаясь внутри треугольника OAB. Допустим, что существует еще одна такая точка, и обозначим ее через C_1. Заметим, что если $x = x(t)$, $y = y(t)$ — уравнения траектории, проходящей в треугольнике OAB, то в силу условия (29) $\frac{dx}{dt} < 0$, $x(t)$ есть монотонная функция от t, и уравнение такой траектории может быть записано в явном виде: $y = y(x)$, причем

функция $y(x)$ удовлетворяет, очевидно, дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda_2 y+\psi(x, y)}{\lambda_1 x+\varphi(x, y)}. \tag{31}$$

Пусть $y=y_0(x)$ и $y=y_1(x)$ — уравнения траекторий, проходящих соответственно через C_0 и C_1 и остающихся, следовательно, при возрастании t внутри треугольника OAB. Для $y_0(x)$ и $y_1(x)$ выполняются, следовательно, неравенства

$$\left|\frac{y_0(x)}{x}\right|\leqslant k_0, \qquad \left|\frac{y_1(x)}{x}\right|\leqslant k_0$$

и, кроме того, по условию $y_0(x)\to 0$ и $y_1(x)\to 0$ при $x\to 0$. Так как различные траектории не могут пересекаться, то для всех достаточно больших t (т. е. для всех достаточно малых x) знак разности $y_0(x)-y_1(x)$ не может меняться. Обозначим эту разность через $z(x)$:

$$z(x)=y_0(x)-y_1(x)$$

и предположим для определенности, что $z(x)>0$. В силу (31)

$$z'(x)=\frac{dy_0(x)}{dx}-\frac{dy_1(x)}{dx}=\frac{\lambda_2 y_0+\psi(x, y_0)}{\lambda_1 x+\varphi(x, y_0)}-\frac{\lambda_2 y_1+\psi(x, y_1)}{\lambda_1 x+\varphi(x, y_1)}. \tag{32}$$

Введем обозначения

$$\varphi(x, y_0)=\varphi_0, \qquad \varphi(x, y_1)=\varphi_1,$$
$$\psi(x, y_0)=\psi_0, \qquad \psi(x, y_1)=\psi_1.$$

Нетрудно убедиться, что равенство (32) может быть записано в виде

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\lambda_2 z+\psi_0-\psi_1}{\lambda_1 x+\varphi_0}+\frac{(\lambda_2 y_1+\psi_1)(\varphi_1-\varphi_0)}{(\lambda_1 x+\varphi_0)(\lambda_1 x+\varphi_1)}$$

или

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}\left[\frac{\lambda_2+\dfrac{\psi_0-\psi_1}{z}}{\lambda_1+\dfrac{\varphi_0}{x}}+\frac{\left(\lambda_2\dfrac{y_1}{x}+\dfrac{\psi_1}{x}\right)\left(\dfrac{\varphi_1-\varphi_0}{z}\right)}{\left(\lambda_1+\dfrac{\varphi_0}{x}\right)\left(\lambda_1+\dfrac{\varphi_1}{x}\right)}\right]. \tag{33}$$

В силу формулы Лагранжа

$$\begin{aligned}\varphi_0-\varphi_1&=\varphi(x, y_0(x))-\varphi(x, y_1(x))=\varphi'_y(x, \xi)\,z(x),\\ \psi_0-\psi_1&=\psi(x, y_0(x))-\psi(x, y_1(x))=\psi'_y(x, \eta)\,z(x),\end{aligned} \tag{34}$$

где ξ и η — величины, заключенные между $y_0(x)$ и $y_1(x)$. Далее, y_1/x есть величина ограниченная $\left(\left|\dfrac{y_1}{x}\right|\leqslant k_0\right)$, а $\varphi'_y(x, \xi)$ и $\psi'_y(x, \eta)$ стремится к нулю при $x\to 0$ в силу свойств функций φ и ψ. Наконец, $\dfrac{\varphi_0}{x}$, $\dfrac{\varphi_1}{x}$, $\dfrac{\psi_1}{x}$ стремятся к 0 при $x\to 0$. В самом деле,

$$\frac{\varphi_0}{x}=\frac{\varphi(x, y_0(x))}{x}=\frac{xg_1(x, y_0(x))+y_0 g_2(x, y_0(x))}{x}=g_1(x_1, y_0(x))+\frac{y_0}{x}g_2(x_1, y_0(x)),$$

а последнее выражение $\to 0$ в силу свойств функций $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ и неравенства $\left|\dfrac{y_0}{x}\right|<k_0$. Из соотношений (34) и сделанных только что замечаний следует, что выражение в квадратных скобках в соотноше-

нии (33) имеет своим пределом $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Следовательно,

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{z(x)}{x}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + f(x)\right], \tag{35}$$

где $f(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Полагая $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\gamma$ ($\gamma > 0$, так как $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < 0$) и записывая равенство (35) в виде

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}(-\gamma + f(x)),$$

проинтегрируем его в пределах от x до $x_0 > x$, где x_0 будет определено ниже. Мы получаем

$$z = z(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{[-\gamma + f(x)]\,dx}{x}} = z(x_0)\, e^{\int_{x}^{x_0} \frac{[\gamma - f(x)]\,dx}{x}}.$$

Так как $f(x) \to 0$ при $x \to 0$, то x_0 всегда можно взять таким, чтобы мы имели при $x < x_0$ ($x > 0$) $|f(x)| < \frac{\gamma}{2}$ и, следовательно, $\gamma - f(x) > \frac{\gamma}{2}$. Тогда, очевидно,

$$z > z(x_0)\, e^{\frac{1}{2}\int_{x}^{x_0} \frac{\gamma}{x}\,dx} = z(x_0)\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{2}\gamma}. \tag{36}$$

Так как $\gamma > 0$, то из неравенства (36) следует, что при $x \to 0$ $z(x) \to \infty$. Но это противоречит тому, что по предположению $z(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Полученное противоречие показывает, что на отрезке AB существует только одна точка C_0 такая, что проходящая через нее траектория L_{C_0} при возрастании t стремится к состоянию равновесия O, оставаясь внутри треугольника OAB (рис. 83). Очевидно, эта траектория пересекает каждый отрезок вертикальной прямой, заключенной между прямыми OA и OB, в одной и только одной точке.

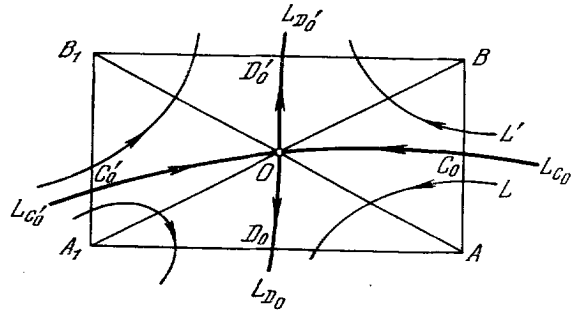


Рис. 83.

Результаты, полученные для треугольника OAB, переносятся с соответствующими изменениями на остальные три треугольника прямоугольника $\bar{H}$, и мы приходим, таким образом, к следующему заключению: на сторонах AB и A_1B_1 существуют соответственно точки C_0 и C_0' такие, что проходящие через них траектории L_{C_0} и $L_{C_0'}$ при *возрастании* t не выходят из прямоугольника $\bar{H}$ и при $t \to +\infty$ стремятся к состоянию равновесия O. На сторонах A_1A и B_1B существуют такие точки, соответственно D_0 и D_0', что проходящие через них траектории L_{D_0} и $L_{D_0'}$ при *убывании* t не выходят из прямоугольника $\bar{H}$ и при $t \to -\infty$ стремятся к состоянию равновесия O.

И, наконец, если M есть произвольная точка прямоугольника $\bar{H}$, отличная от O и не принадлежащая полутраекториям $L^+_{C_0}$, $L^+_{C'_0}$, $L^-_{D_0}$, $L^-_{D'_0}$, то проходящая через точку M при $t = t_0$ траектория L_M при возрастании t выходит из $\bar{H}$ через одну из горизонтальных сторон прямоугольника $\bar{H}$ A_1A или BB_1, а при убывании t — через одну из вертикальных сторон A_1B_1 или AB (рис. 83).

Мы рассмотрели случай, когда $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, то картина, очевидно, получается аналогичная, с тем отличием, что траектории системы через вертикальные стороны прямоугольника $\bar{H}$ выходят из $\bar{H}$, а через горизонтальные — входят в $\bar{H}$. В качестве $\bar{H}$ можно взять любой прямоугольник с центром в точке O со сторонами, параллельными координатным осям при условии, что он достаточно мал.

Рассмотренное состояние равновесия называется *седлом* (рис. 83). Траектории L_{C_0}, $L_{C'_0}$, L_{D_0}, $L_{D'_0}$ называются *сепаратрисами* седла O. Наряду с этим сепаратрисой седла называют также любую положительную полутраекторию, выделенную из траектории L_{C_0} или $L_{C'_0}$ (такие полутраектории называются ω-сепаратрисами), и любую отрицательную полутраекторию, выделенную из траектории L_{D_0} или $L_{D'_0}$, (α-сепаратрисы). При этом обычно все ω-сепаратрисы (или все α-сепаратрисы), выделенные из одной и той же траектории (например, все α-сепаратрисы, выделенные из L_{D_0}), не считают отличными друг от друга. При таком условии каждое седло имеет всегда в точности четыре сепаратрисы — две α- и две ω-сепаратрисы *).

Сепаратрисы, понимаемые как полутраектории, называются также иногда «усами седла». Топологическая структура седла отлична от топологической структуры узла или фокуса.

4. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия. Мы рассмотрели состояния равновесия с точки зрения их топологической структуры. При этом очевидно, что если не принимать во внимание направление движения по t, то топологическая структура устойчивого узла и фокуса и неустойчивого узла и фокуса одинакова. В то же время топологическая структура седла, очевидно, отлична от топологической структуры узла и фокуса. Однако часто в задачах, связанных с приложениями, состояния равновесия рассматриваются просто с точки зрения их устойчивости или неустойчивости без детализации их топологической структуры **). С этой точки зрения состояния равновесия разделяются на два типа.

а) Устойчивые состояния равновесия. Очевидно, для того, чтобы состояние равновесия было устойчиво, *достаточно*, чтобы все характеристические корни имели отрицательные действительные части. Состояния равновесия с отрицательными действительными частями у характеристических корней — это устойчивый узел и устойчивый фокус.

б) Неустойчивые состояния равновесия. Среди рассмотренных выше состояний равновесия те состояния равновесия, у которых действительная часть хотя бы одного из корней положительна,

*) Если сепаратрисами считать не полутраектории, выделенные из L_{C_0}, $L_{C'_0}$, L_{D_0}, $L_{D'_0}$, а сами эти траектории, то седло может иметь 2, 3 или 4 сепаратрисы (см. примеры 1, 6, 8 § 1). В этих примерах точка O (0, 0) является седлом, имеющим соответственно 2, 3, 4 сепаратрисы.

**) Такой аспект характерен для работ Ляпунова.

являются неустойчивыми. Такими состояниями равновесия, очевидно, являются неустойчивые узлы, неустойчивые фокусы и седла.

5. Замечания по поводу других методов исследования характера состояний равновесия с не равными нулю действительными частями характеристических корней. Характер состояний равновесия в рассмотренных нами случаях 1), 2) и 3) может быть установлен так же методами, отличными от проведенных в настоящем параграфе.

Метод исследования таких состояний равновесия, развитый в классических работах Пуанкаре, Пикара и Ляпунова для случая аналитических систем, заключается в следующем: ищутся аналитические функции

$$u = f(x, y), \qquad v = g(x, y),$$

с помощью которых система

$$\dot{x} = \lambda_1 x + P(x, y), \qquad \dot{y} = \lambda_2 y + Q(x, y)$$

в окрестности начала координат может быть приведена к линейной системе, т. е. к системе вида

$$\dot{u} = \lambda_1 u, \qquad \dot{v} = \lambda_2 v.$$

При некоторых условиях, наложенных на характеристические корни λ_1 и λ_2 (одним из которых является неравенство нулю выражения $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2$, где p_1 и p_2 — произвольные целые положительные числа; это условие, в частности, всегда выполняется, когда характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и одинаковых знаков, а также в случае, когда они — комплексные, с не равной нулю действительной частью); аналитические функции u и v, обладающие указанными выше свойствами, заведомо существуют. Не останавливаясь подробнее на вопросе о том, как при выполнении этих условий исследуется характер состояния равновесия, отошлем интересующихся к работам Дюлака [26]. Скажем вкратце о совсем другом методе, приложимом к динамическим системам более широких классов, именно, к системам класса C_1. Этот метод развит в работах Перрона, Петровского и др. [23]. Он заключается в рассмотрении некоторых интегральных уравнений, полученных из данной системы дифференциальных уравнений. Так, например, в случае, когда характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и различны, рассматривается система интегральных уравнений

$$x = x_0 e^{\lambda_1 t} + \int_0^t e^{\lambda_1 (t-\tau)} \varphi(x, y)\, d\tau,$$

$$y = y_0 e^{\lambda_2 t} + \int_0^t e^{\lambda_2 (t-\tau)} \psi(x, y)\, d\tau,$$

эквивалентная системе (I) (она может быть получена путем использования формулы решения неоднородной системы линейных уравнений). Затем методом последовательных приближений устанавливается, что всякая траектория, проходящая через достаточно близкую к началу координат точку, стремится к нему при $t \to +\infty$, когда λ_1 и λ_2 отрицательны, и при $t \to -\infty$, когда λ_1 и λ_2 положительны (траектории, стремящиеся к началу при $t \to \infty$, называются 0^+-траекториями, а стремящиеся при $t \to -\infty$ — 0^--траекториями).

Если λ_1 и λ_2 имеют различные знаки, например, если $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$, то нетрудно показать, что все решения, соответствующие траекториям, стремящимся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$ (т. е. 0^+-траектории), удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$x = x_0 e^{\lambda_1 t} + \int_0^t e^{\lambda_1 (t-\tau)} \varphi(x, y)\, d\tau, \qquad y = -\int_t^{\infty} e^{\lambda_2 (t-\tau)} \psi(x, y)\, d\tau, \tag{37}$$

а все решения, соответствующие 0^--траекториям,— несколько другой, но аналогичной (37) системе интегральных уравнений. Далее, используя метод последовательных приближений, можно установить, что существуют решения этих интегральных уравнений, соответствующие двум 0^+- и двум 0^--траекториям, и других 0-траекторий не существует (см. [23] и [29]).

6. Примеры. Приведем простые примеры на исследование характера состояний равновесия рассмотренных выше типов.

Пример 1.

$$\dot{x} = y \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = -(1 + x^2 + x^4)\, y - x \equiv Q(x, y). \tag{38}$$

Состояния равновесия системы (38) являются, очевидно, решениями системы уравнений

$$y = 0, \qquad (1 + x^2 + x^4)\, y + x = 0.$$

Эта система имеет единственное решение $x = y = 0$. Значит, $O(0, 0)$ — единственное состояние равновесия системы (38). Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$. Значит, состояние равновесия является устойчивым фокусом.

Пример 2 [61].

$$\dot{x} = y \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = 2(1 - xy) \equiv Q(x, y).$$

Система $y = 0$, $2(1 - xy) = 0$ не имеет решений, следовательно, у рассматриваемой динамической системы состояний равновесия нет.

Пример 3 [66].

$$\dot{x} = y \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = x + x^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x)\, y \equiv Q(x, y),$$

где ε_1 и ε_2 — произвольные действительные параметры. Состояния равновесия следующие: $O(0, 0)$ и $A(-1, 0)$. Найдем частные производные от правых частей системы (при $y = 0$):

$$P_x = 0, \qquad P'_y = 1, \qquad Q'_x = 1 + 2x, \qquad Q'_y = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x).$$

Для состояния равновесия $O(0, 0)$ имеем $P'_x Q'_y - P'_y Q'_x = -1 < 0$, значит $O(0, 0)$ — седло. Характеристическое уравнение для состояния равновесия $A(-1, 0)$: $\lambda^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\lambda + 1 = 0$, значит $\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4} - 1}$.

Состояние равновесия $A(-1, 0)$ имеет, таким образом, следующий характер в зависимости от значений параметров ε_1 и ε_2:

1) $0 < \varepsilon_1 - \varepsilon_2 < 2$ — устойчивый фокус,
2) $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqslant 2$ — устойчивый узел,
3) $0 < \varepsilon_2 - \varepsilon_1 < 2$ — неустойчивый фокус,
4) $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \geqslant 2$ — неустойчивый узел.

При $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ состояние равновесия A имеет чисто мнимые корни. Этот случай нами пока не рассматривался.

В следующем примере рассмотрим систему с неаналитическими правыми частями.

Пример 4 [74].

$$\dot{x} = y \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = 7y + x\left(x^{\frac{1}{2}} - 12\right) \equiv Q(x, y),$$

где $x \geqslant 0$. Доопределим систему для $x < 0$ так, чтобы она обладала центральной симметрией:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 7y + x\left(|x|^{\frac{1}{2}} - 12\right).$$

Состояния равновесия $O(0, 0)$ и $A(144, 0)$. Исследуем их характер. Мы имеем

$$P'_x = 0, \qquad P'_y = 1, \qquad Q'_x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 12, \qquad Q'_y = 7.$$

Характеристическое уравнение для состояния равновесия O будет

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$. Значит O — неустойчивый узел. Характеристическое уравнение для состояния равновесия A будет

$$\lambda^2 - 7\lambda - 6 = 0,$$

откуда $\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 6}$. Значит, корни λ_1 и λ_2 разных знаков и состояние равновесия A — седло.

Пример 5 [83].

$$\dot{x} = -[x + (4 + x)y + \delta] \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = [-y + (4 + x)x] \equiv Q(x, y), \quad (39)$$

где параметр $\delta > 0$.

Координаты состояний равновесия являются решениями системы

$$x + (4 + x)y + \delta = 0, \qquad -y + (4 + x)x = 0.$$

Подставляя $y = (4 + x)x$ из второго уравнения в первое, получим $x^3 + 8x^2 + 17x + \delta = 0$. Таким образом, для абсцисс состояний равновесия мы получим кубическое уравнение. Пользоваться непосредственно формулой решения этого уравнения крайне неудобно. Можно, однако, не имея явного выражения для координат состояний равновесия, выяснить их число и характер в зависимости от параметра δ. На плоскости (x, δ) построим кривую

$$x^3 + 8x^2 + 17x + \delta = 0$$

или

$$\delta = -x(x^2 + 8x + 17). \quad (40)$$

Эта кривая имеет только одну точку пересечения с осью x, так как трехчлен $x^2+8x+17$ сохраняет знак. Абсциссы точек экстремума кривой (40)

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{13}}{3},$$

$$\delta_1=-\frac{-8+\sqrt{13}}{3}\left[\left(\frac{-8+\sqrt{13}}{3}\right)^2+8\left(\frac{-8+\sqrt{13}}{3}\right)+17\right],$$

$$\delta_2=-\frac{8-\sqrt{13}}{3}\left[\left(\frac{-8-\sqrt{13}}{3}\right)^2+8\left(\frac{-8-\sqrt{13}}{3}\right)+17\right]$$

— соответствующие значения δ. Абсциссы состояний равновесия при данном значении параметра δ соответствуют точкам пересечения построенной кривой с прямой $\delta=\text{const}$. Очевидно, при $\delta>\delta_1$ и $\delta<\delta_2$ система (39) имеет одно состояние равновесия, при $\delta_2<\delta<\delta_1$—три состояния равновесия. При $\delta=\delta_1$ и при $\delta=\delta_2$ система имеет два состояния равновесия. Таким образом, мы установили число состояний равновесия в зависимости от параметра δ. Установим теперь характер этих состояний равновесия. Имеем

$$P'_x=-(1+y),\quad P'_y=-(4+x),\quad Q'_x=4+2x,\quad Q'_y=-1.$$

Отсюда

$$\sigma\equiv+(P'_x+Q'_y)=-(x^2+4x+2),\qquad \Delta\equiv P'_xQ'_y-P'_yQ'_x=3x^2+16x+17.$$

Характер состояний равновесия определяется знаками выражений σ и Δ. Очевидно, $\Delta=0$ при $x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{13}}{3}$, т. е. в точках экстремумов кривой (40). Легко видеть, что для состояния равновесия с абсциссами $x>x_1$ и $x<x_2$ имеем $\Delta>0$, т. е. эти состояния равновесия являются узлами или фокусами, а для состояний равновесия с абсциссами, удовлетворяющими неравенству $x_2<x<x_1$, имеет $\Delta<0$, т. е. эти состояния равновесия являются седлами. Установим характер устойчивости узлов и фокусов. Очевидно, $\sigma=0$ при $\bar{x}_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$; соответствующие значения δ:

$$\bar{\delta}_{1,2}=-(-2\pm\sqrt{2})\left[(-2\pm\sqrt{2})^2+8(-2\pm\sqrt{2})+17\right].$$

Значит, для состояния равновесия с абсциссами $x>\bar{x}_1$ и $x<\bar{x}_2$ имеем $\sigma<0$, т. е. состояния равновесия, не являющиеся седлами, устойчивы, а для состояния равновесия с абсциссами, удовлетворяющими неравенствам $\bar{x}_2<x<\bar{x}_1$, имеем $\sigma>0$, т. е. соответствующие узлы или фокусы неустойчивы. Таким образом, получим:

1) $\delta<\delta_2$ — одно состояние равновесия — устойчивый узел или фокус;

2) $\delta_2<\delta<\bar{\delta}_1$ — три состояния равновесия — два устойчивых узла или фокуса и седло;

3) $\bar{\delta}_1<\delta<\delta_1$ — три состояния равновесия — устойчивый узел или фокус, седло и неустойчивый узел или фокус;

4) $\delta>\delta_1$ — одно состояние равновесия — устойчивый узел или фокус.

Значения $\delta=\delta_1$ и $\delta=\delta_2$ мы не рассматриваем, так как при этих значениях состояния равновесия системы не являются простыми.

7. Простейшие примеры сложных состояний равновесия. Прежде, чем переходить к последнему, значительно более сложному случаю про-

стого состояния равновесия, именно, к случаю чисто мнимых корней, рассмотрению которого посвящен § 8, приведем несколько элементарных примеров не «простых» или так называемых «сложных» состояний равновесия. В случае сложного состояния равновесия $M(x_0, y_0)$ мы имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. по крайней мере один характеристический корень равен нулю.

В приводимых ниже примерах динамические системы интегрируются в квадратурах, что и позволяет исследовать структуру состояния равновесия*).

Пример 6.

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y^2. \tag{41}$$

Корни характеристического уравнения для состояния равновесия $O(0, 0)$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, значит, O — сложное состояние равновесия. Легко видеть,

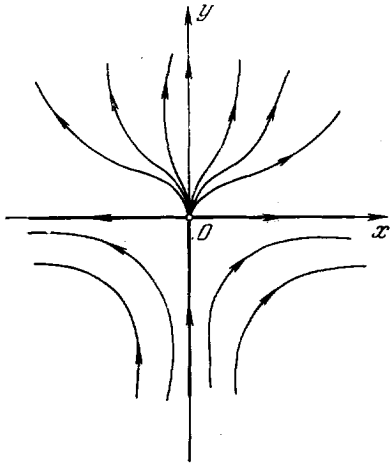


Рис. 84.

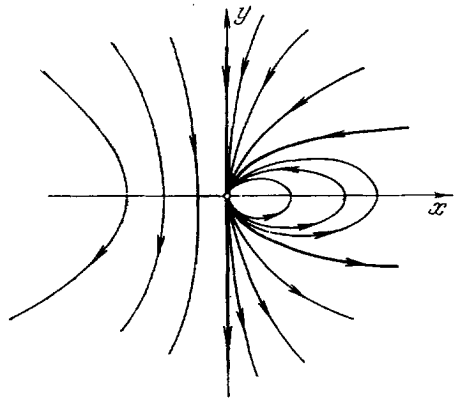


Рис. 85.

что система (41) может быть проинтегрирована. Ее решение: $xe^{\frac{1}{y}} = C$. Поведение траекторий в окрестности состояния равновесия изображено на рис. 84. Такое состояние равновесия называется «седло — узел».

Пример 7.

$$\dot{x} = -xy, \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}x - y^2.$$

Характеристическое уравнение для состояния равновесия $O(0, 0)$ будет $\lambda^2 = 0$, т. е. оба корня λ_1 и λ_2 равны нулю. Нетрудно видеть, что $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{-xy}$ есть уравнение Бернулли. Его общее решение $\frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x} = C$. Расположение траекторий в окрестности состояния равновесия изображено на рис. 85. При $C < 0$ получаются эллипсы, при $C > 0$ — гиперболы, при $C = 0$ — парабола $x = y^2$.

*) В главе VIII даются общие методы исследования некоторых типов сложных состояний равновесия.

Поведение траекторий в окрестности сложного состояния равновесия топологически может быть такое же, как у простого состояния равновесия, как показывают следующие примеры.

Пример 8.

$$\dot{x} = x^3, \qquad \dot{y} = y.$$

Один из корней характеристического уравнения для состояния равновесия O (0, 0) равен нулю. Общее решение имеет вид $ye^{\frac{1}{2x^2}} = C$. Поведение траекторий в окрестности состояния равновесия такое же, как в окрестности простого узла. Такое состояние равновесия естественно назвать «сложным узлом».

Пример 9.

$$\dot{x} = x^3, \qquad \dot{y} = -y.$$

Один из корней характеристического уравнения для состояния равновесия O равен нулю. Общее решение $ye^{-1/2\,x^2} = C$. Поведение траекторий в окрестности состояния равновесия такое же, как в окрестности простого седла. Такое состояние равновесия естественно назвать «сложным седлом».

§ 8. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями

1. Вводные замечания. В настоящем параграфе мы рассмотрим последний из перечисленных в § 6 случаев простого состояния равновесия, именно, случай 4), когда корни характеристического уравнения чисто мнимые. Как уже было сказано, исследование в этом случае значительно более сложно, чем в случаях 1) — 3), и требует привлечения членов правых частей степени выше первой. Метод исследования, которым мы воспользуемся, применим, однако, как для чисто мнимых, так и для комплексных характеристических корней с действительными частями, не равными нулю. Поэтому мы будем вести изложение для более общего случая комплексных характеристических чисел

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \qquad \lambda_2 = \alpha - \beta i \quad (\beta \neq 0),$$

хотя случай $\alpha \neq 0$ был уже выше рассмотрен. Таким образом, мы предположим, что рассматриваемая система имеет канонический вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) = \alpha x + \beta y + \varphi(x, y) = \alpha x + \beta y + x g_1 + y g_2, \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) = \beta x - \alpha y + \psi(x, y) = \beta y - \alpha x + x f_1 + y f_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции φ, ψ, g_1, g_2, f_1, f_2 удовлетворяют указанным в § 6 условиям 1 и 2. Мы будем для определенности считать, что

$$\beta > 0. \tag{2}$$

Величина α может быть как равной, так и не равной нулю.

2. Переход к полярной системе координат. Для удобства изучения характера расположений траекторий в окрестности рассматриваемого состояния равновесия O мы перейдем к полярным координатам с помощью

формул

$$x = \varrho \cos \theta, \qquad y = \varrho \sin 0. \tag{3}$$

Сделаем прежде всего несколько замечаний по поводу перехода от декартовых координат к полярным. Мы будем считать, что радиус-вектор ϱ может принимать кроме нулевого и положительных также и отрицательные значения. Кроме того, мы будем рассматривать ϱ и θ не только как полярные координаты точки M (x, y) на плоскости (x, y), а так же как декартовы координаты на плоскости (ϱ, θ). В этом случае формулы (3) определяют однозначное непрерывное отображение плоскости (ϱ, θ) на плоскость (x, y). Это отображение, очевидно, не является взаимно однозначным и обладает следующими свойствами:

а) точки полосы $0 \leqslant \varrho < \varrho^*$, где ϱ^* — некоторое положительное число, отображаются на внутренность круга C^* плоскости (x, y) с центром в начале координат и с радиусом, равным ϱ^*;

б) все точки оси $\varrho = 0$ плоскости (ϱ, θ) отображаются в одну точку — начало координат плоскости (x, y);

в) все точки (ϱ, θ), имеющие одно и то же ϱ и значения θ, отличающиеся на кратные 2π, т. е. все точки $(\varrho, \theta + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ отображаются в одну и ту же точку плоскости (x, y);

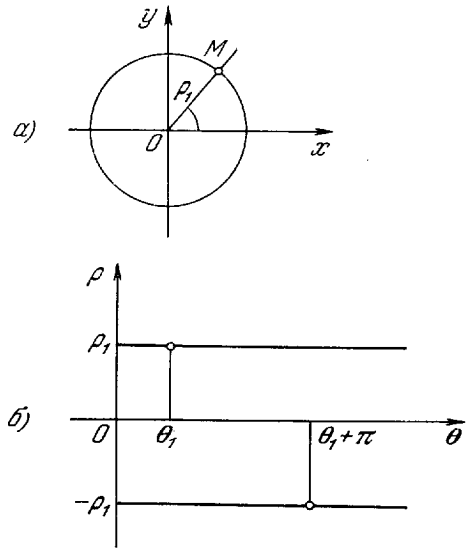


Рис. 86.

г) всякие две точки (ϱ, θ) и $(-\varrho, \theta + \pi)$ переходят в одну и ту же точку плоскости (x, y);

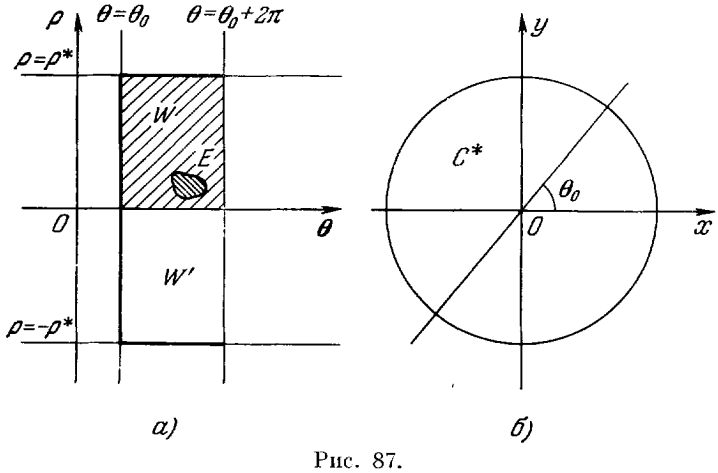
д) прямым $\theta = \text{const}$ плоскости (ϱ, θ) соответствуют прямые плоскости (x, y), проходящие через начало координат O и разделенные этой точкой на две полупрямые; точкам одной из этих полупрямых соответствуют значения $\varrho > 0$, точкам другой $\varrho < 0$. Прямым $\varrho = \text{const}$ соответствуют в плоскости (x, y) окружности с центром в начале координат (рис. 86, *а*, *б*).

Заметим, что при произвольном фиксированном θ_0 отображение (3) является взаимно однозначным на «полуоткрытом» прямоугольнике W, определенном соотношениями $0 < \varrho \leqslant \varrho^*$, $\theta_0 \leqslant \theta < \theta_0 + 2\pi$, или на прямоугольнике W', определенном соотношениями $0 > \varrho \geqslant -\varrho^*$, $\theta_0 \leqslant \theta < \theta_0 + 2\pi$ (рис. 87, *а*, *б*). Каждый из этих прямоугольников отображается на круг C^* (с центром в O радиуса ϱ^*), у которого удален центр. Каждой точке такого «проколотого» круга соответствует в точности одна точка прямоугольника W (или W'). Таким образом, на «проколотом» круге C^* определено обратное отображение, переводящее этот круг в W (или W'). Это отображение не является непрерывным. Нетрудно видеть, однако, что *в любой области E плоскости* (ϱ, θ), *имеющей достаточно малый диаметр и не содержащей точек оси* $\varrho = 0$, отображение (3) является регулярным (так как в любой такой области оно является взаимно однозначным и непрерывным и, кроме того, соответствующий

функциональный детерминант

$$\frac{D(x, y)}{D(\varrho, \theta)} = \varrho$$

не равен нулю при $\varrho \neq 0$). Мы будем выражать это свойство, говоря, что *отображение* (3) *является локально-регулярным.*



а) *б)*

Рис. 87.

Произведем теперь в системе (1) замену переменных, перейдя к полярным координатам. Мы имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}\cos\theta - \varrho\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}\sin\theta + \varrho\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Предполагая, что $\varrho \neq 0$, и решая эти уравнения относительно $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, мы получим

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\varrho}\left(-\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta\right).$$

После простых преобразований мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= \alpha\varrho + \varphi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\cos\theta + \psi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \beta + \frac{\psi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho}\cos\theta - \frac{\varphi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho}\sin\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} F(\varrho,\ \theta) &= \alpha\varrho + \varphi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\cos\theta + \psi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\sin\theta, \\ \Phi(\varrho,\ \theta) &= \frac{\psi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho}\cos\theta - \frac{\varphi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho}\sin\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

мы запишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= F(\varrho,\ \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \beta + \Phi(\varrho,\ \theta). \end{aligned} \tag{4'}$$

Принимая во внимание соотношения (5), а также свойства функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, легко видеть, что если $\rho^* > 0$ достаточно мало, то функции $F(\rho, \theta)$ и $\Phi(\rho, \theta)$ заведомо определены в области Ω, описываемой неравенствами $0 < |\rho| < \rho^*$, $-\infty < \theta < +\infty$ *), и являются в этой области функциями класса C_1. Далее, эти функции периодичны по θ с периодом 2π и при $\rho \to 0$ обе они стремятся к нулю, причем *равномерно относительно* θ **). Из последнего свойства вытекает, в частности, что если ρ^* достаточно мало, то в области Ω выполняется соотношение $|\Phi(\rho, \theta)| < \frac{\beta}{2}$ и, следовательно,

$$\frac{\beta}{2} < \beta + \Phi(\rho, \theta) < \frac{3}{2}\beta. \tag{6}$$

Мы будем считать ρ^* настолько малым, чтобы это условие выполнялось. Тогда $\beta + \Phi(\rho, \theta) \neq 0$, и траектории системы (1) в области Ω совпадают с интегральными кривыми уравнения

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{F(\rho, \theta)}{\beta + \Phi(\rho, \theta)} = R(\rho, \theta), \tag{7}$$

получающегося делением первого из уравнений (4′) на второе (см. § 1, п. 7).

Для исследования уравнения (7) нам будет удобнее рассматривать его не только при значениях ρ, $0 < |\rho| < \rho^*$, но и при $\rho = 0$. С этой целью мы доопределим функцию $R(\rho, \theta)$, положив при любом θ $R(0, \theta) = 0$.

Так как $\lim\limits_{\rho \to 0} F(\rho, \theta) = \lim\limits_{\rho \to 0} \Phi(\rho, \theta) = 0$, а $\beta \neq 0$, то $\lim\limits_{\rho \to 0} R(\rho, \theta) = 0$, и, следовательно, доопределенная таким образом функция $R(\rho, \theta)$, являющаяся, очевидно, периодической функцией θ, непрерывна во всей полосе $-\rho^* < \rho < \rho^*$. Функция $R(\rho, \theta)$ имеет в этой полосе непрерывную частную производную по ρ. Действительно, при $\rho \neq 0$, она имеет непрерывную производную по ρ в силу того, что функции $\Phi(\rho, \theta)$, $\Psi(\rho, \theta)$ при $\rho \neq 0$ являются функциями класса C_1.

Покажем, что функция $R(\rho, \theta)$ имеет непрерывную производную так же и при $\rho = 0$. Для этого, умножая при $\rho \neq 0$ числитель и знаменатель правой части уравнения (7) на ρ, запишем функцию $R(\rho, \theta)$ в виде

$$R(\rho, \theta) = \frac{\alpha\rho^2 + \rho\varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + \rho\psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta}{\rho\beta + \psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta - \varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta}.$$

Продифференцировав правую часть по ρ и переходя к пределу при $\rho \to 0$, мы увидим, принимая во внимание свойства функций φ и ψ, что

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\partial R(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{8}$$

---

*) Эта область состоит из двух открытых бесконечных горизонтальных полос, имеющих в качестве общей границы ось $\rho = 0$.

**) Действительно,

$$\frac{\varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho} = \frac{\rho\cos\theta\, g_1(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho} + \frac{\rho\sin\theta\, g_2(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho} =$$

$$= \cos\theta\, g_1(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\, g_2(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

В силу свойств функций g_1 и g_2 это выражение стремится к нулю при $\rho \to 0$. Совершенно аналогично рассматривается выражение $\frac{\psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho}$.

С другой стороны, непосредственное вычисление производной $\frac{\partial R(\varrho, 0)}{\partial \varrho}$ при $\varrho = 0$ дает

$$\frac{\partial R(0, \theta)}{\partial \varrho} = \lim \frac{R(\varrho, 0) - R(0, \theta)}{\varrho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{R(\varrho, 0)}{\varrho} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что функция $R(\varrho, \theta)$ имеет непрерывную производную по ϱ также и при $\varrho = 0$, а следовательно, и во всей полосе $-\varrho^* < \varrho < \varrho^*$. Отсюда вытекает, что для уравнения (7), доопределенного условием (8), в полосе $-\varrho^* < \varrho < \varrho^*$ справедлива как теорема существования и единственности, так и теорема непрерывной зависимости от начальных значений (см. дополнение, § 8).

Таким образом, при любых θ_0 и ϱ_0 существует единственное решение уравнения (7)

$$\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0) \quad (f(\theta_0, \theta_0, \varrho_0) \equiv \varrho_0),$$

определенное на некотором (максимальном) интервале (θ_1, θ_2), содержащем точку θ_0. При этом в силу того, что $R(0, \theta) \equiv 0$, очевидно, $\varrho = 0$ является решением, т. е. ось θ на плоскости (ϱ, θ) является интегральной кривой уравнения (7).

Все интегральные кривые уравнения (7), расположенные в полосе Ω^*, совпадают с траекториями системы (4). Если

$$\varrho = \varrho(t), \qquad \theta = \theta(t)$$

— уравнения какой-нибудь траектории L системы (4) и θ_0, ϱ_0 — точка на этой траектории, то решение уравнения (7)

$$\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0)$$

является уравнением этой траектории в координатах ϱ и θ. Так как $\frac{d\theta}{dt} = \beta + \Phi(\varrho, \theta) > 0$ при $|\varrho| < \varrho^*$, то вдоль каждой траектории системы (4) θ есть монотонно-возрастающая функция от t. Из равенств (6) следует, что при движении по траектории в сторону возрастания (убывания) t обе величины t и $\theta(t)$ либо одновременно ограничены сверху (снизу), либо обе возрастают до $+\infty$ (убывают до $-\infty$). В самом деле, если, например, величина t ограничена сверху, $t < T$ и $\theta(t_0) = \theta_0$, то в силу (6)

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{d\theta}{dt}\, dt < \theta_0 + \frac{3}{2}\beta(t - t_0),$$

т. е. функция θ тоже ограничена сверху. Аналогично можно рассмотреть случай, когда θ ограничена сверху, а также случай, когда t (или θ) ограничена снизу.

3. Сопоставление траекторий системы (I) и интегральных кривых уравнения (7). Будем сначала интерпретировать введение полярных координат как отображение плоскостей (x, y) и (ϱ, θ) друг на друга. Рассмотрим интегральные кривые уравнения (7) (или что то же, траектории системы (4)), расположенные в полосе плоскости (ϱ, θ), определенной неравенствами

$$0 < \varrho \leqslant \varrho^*, \qquad -\infty < \theta < +\infty \tag{10}$$

(полностью аналогично может быть рассмотрена полоса плоскости (ϱ, θ), определенная неравенствами $-\varrho^* < \varrho \leqslant 0$, $-\infty < \theta < +\infty$).

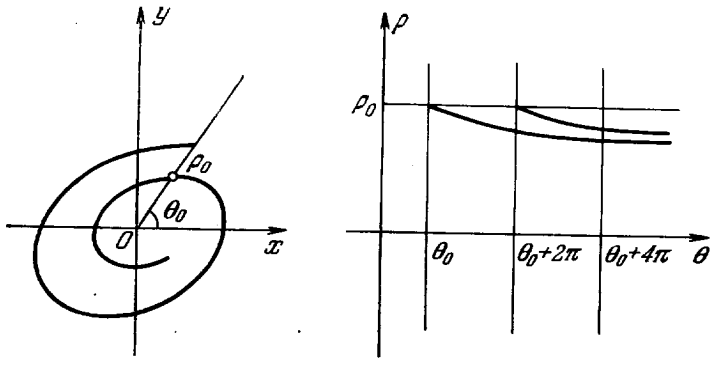
Пусть $\hat{L}$ — какая-нибудь траектория, лежащая в этой полосе, $\varrho = \varrho(t)$, $\theta = \theta(t)$ — решение системы (4), соответствующее этой траектории, определенное в интервале (t, t_0), и

$$\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0) \tag{11}$$

— решение уравнения (7), являющееся уравнением траектории $\hat{L}$ в координатах ϱ, θ. При отображении (3) траектория $\hat{L}$ переходит в кривую

$$x = \varrho(t)\cos\theta(t), \qquad y = \varrho(t)\sin\theta(t), \tag{12}$$

являющуюся (в силу локальной регулярности отображения (3)) траекторией системы (1), расположенной внутри круга C^* радиуса ϱ^*. Обозначим



а) *б)*

Рис. 88.

эту траекторию через L. Нетрудно видеть, что в силу периодичности по θ правых частей системы (4) кривые

$$\varrho = \varrho(t), \qquad \theta = \theta(t) + 2k\pi \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{13}$$

также являются траекториями системы (4), расположенными в полосе (10) и переходящими при отображении (3) в траекторию L, и они исчерпывают все такие траектории. Очевидно, траектории (13) получаются друг из друга сдвигом вдоль оси θ на отрезок, кратный 2π. Соответствующие им решения уравнения (7) получаются из (11) заменой θ на $\theta_0 + 2k\pi$, т. е. являются решениями

$$\varrho = f(\theta, \theta_0 + 2k\pi, \varrho_0).$$

Пусть, напротив, задана траектория $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (1), расположенная внутри круга C^* и определенная в некотором интервале (t_1, t_2). В силу локальной регулярности отображения (3) каждой такой траектории соответствует по крайней мере одна траектория системы (4) $x = \varrho(t)$, $y = \theta(t)$, а наряду с этой траекторией и все траектории вида (13) *) (рис. 88, *а*, *б*).

*) Нетрудно показать, что в случае, когда L есть незамкнутая траектория системы (1), все переходящие в нее при отображении (3) траектории (13) различны, в случае же, когда L замкнута, все траектории (13) ($k = 0, 1, 2, \ldots$) совпадают друг с другом, т. е. в траекторию L в этом случае переходит одна траектория системы (4).

Будем теперь рассматривать переход к полярным координатам ϱ, θ не как отображение плоскости (x, y) на плоскость с декартовыми координатами ϱ, θ, а как введение полярных координат на плоскости (x, y). Тогда, очевидно, уравнения (12), а также уравнения (13) являются параметрическими уравнениями в полярных координатах траектории L системы (1) на плоскости (x, y). Решение уравнения (7) $\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0)$ является уравнением в полярных координатах траектории L. В дальнейшем мы почти исключительно будем пользоваться этой последней интерпретацией.

4. Построение функции последования на полупрямой $\theta = \text{const}$. Непосредственно из того факта, что при всех θ и всех достаточно малых ϱ $(0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho^*)$, мы имеем (в силу того, что $\beta \neq 0$)

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta + \Phi(\varrho, \theta) \neq 0$$

или, другими словами, что $R(\varrho, \theta)$ ограничена при всех достаточно малых ϱ, вытекает следующая лемма:

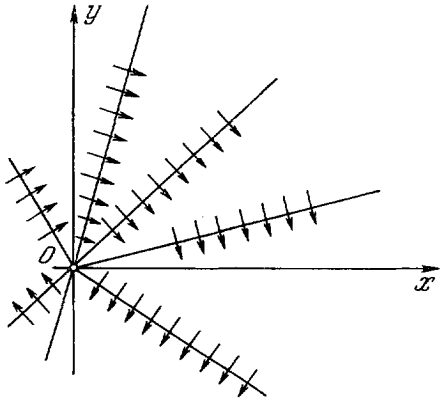


Рис. 89.

Лемма 1 *). *Если $\varrho^* > 0$ достаточно мало, то любая прямая $\theta = \text{const}$ плоскости (x, y) не имеет контактов с траекториями системы (1) в точках, для которых $0 < |\varrho| < \varrho^*$ (и всякая прямая $\theta = \text{const}$ плоскости ϱ, θ не имеет контактов с траекториями системы (4)).*

Таким образом, всякий достаточно малый отрезок полупрямой $\theta = \text{const}$ плоскости (x, y), имеющий одним из своих концов точку O, аналогичен отрезку без контакта (только один из концов его — состояние равновесия) (рис. 89). Мы построим на таком отрезке функцию последования, воспользовавшись уравнением траектории в полярных координатах, т. е. решением уравнения (7):

$$\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0) \qquad (f(\theta_0, \theta_0, \varrho_0) \equiv \varrho_0).$$

Предварительно установим некоторые свойства этого решения. Как мы уже говорили, в силу того, что $R(0, \theta) = 0$, решением уравнения (7), в частности, является

$$\varrho \equiv 0$$

(на плоскости (ϱ, θ) соответствующей интегральной кривой является ось θ). Это решение определено, очевидно, для всех θ, т. е. на интервале $-\infty < \theta < +\infty$. Поэтому при любых θ и θ_0

$$f(\theta, \theta_0, 0) = 0. \tag{14}$$

*) Справедливость утверждения леммы 1 вытекает еще также из следующего утверждения: условие касания траектории с прямой $\theta = \text{const}$, т. е. с прямой $y = kx$, очевидно, имеет вид $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$ или в полярных координатах $\varrho^2 \frac{d\theta}{dt} = 0$. Но при достаточно малых $\varrho \neq 0$ мы имеем $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$, и, следовательно, это условие выполняться не может.

Из единственности решения следует, что если $\varrho_0 > 0$ ($\varrho_0 < 0$), то $f(\theta, \theta_0, \varrho_0) > 0$ (< 0) при всех θ, при которых решение определено.

Дальнейшие рассуждения мы проведем, основываясь на следующей лемме, непосредственно вытекающей из того факта, что $\varrho = 0$ есть решение уравнения (7), определенное при всех θ.

Л е м м а 2. *Пусть* θ_1', θ_1, θ_2', θ_2 — *произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам* $\theta_1' \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_2'$.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что всякое решение уравнения* (7) $\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0)$, *где* $\theta_1 \leqslant \theta_0 \leqslant \theta_2$, *а* $|\varrho_0| < \delta$, *определено на сегменте* $[\theta_1', \theta_2']$ *и в любой точке этого сегмента* $|f(\theta, \theta_0, \varrho_0)| < \varepsilon$.

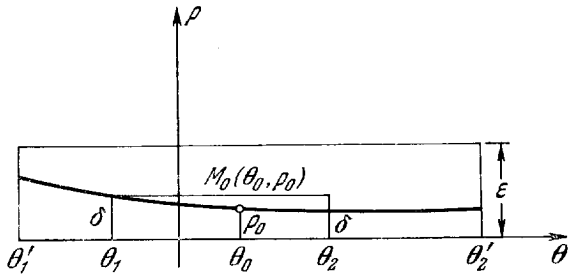


Рис. 90.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 может быть проведено элементарным рассуждением, использующим теорему о непрерывной зависимости от начальных значений и компактность сегмента $[\theta_1, \theta_2]$ (рис. 90).

В следующей лемме, непосредственно вытекающей из леммы 2, рассматриваются уже траектории исходной системы (1).

Л е м м а 3. *При любом* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что всякая траектория системы* (1) *при* $t = t_0$, *проходящая через какую-нибудь отличную от* O *точку* M *окрестности* $U_\delta(O)$, *пересекает как при возрастании, так и при убывании* t *всякую полупрямую* $\theta = \text{const}$, *не выходя при этом из* $U_\varepsilon(O)$ (рис. 91).

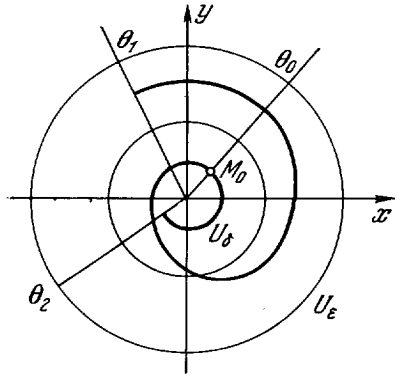


Рис. 91.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся предыдущей леммой, положив, что $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$, а θ_1' и θ_2' — произвольные числа такие, что $\theta_1' \leqslant -2\pi$, $\theta_2' \geqslant 4\pi$. В силу леммы 2 существует такое $\delta > 0$, что всякое решение $\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0)$, для которого $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$ и $0 < \varrho_0 < \delta$, определено при всех θ, $\theta_1' \leqslant \theta \leqslant \theta_2'$, и при всех этих значениях θ выполняется неравенство $0 < f(\theta, \theta_0, \varrho_0) < \varepsilon$. Мы будем считать, что $\varepsilon \leqslant \varrho^*$, очевидно, это не уменьшает общности рассуждения. Пусть теперь M_0 — произвольная точка окрестности $U_\delta(O)$, θ_0, ϱ_0, $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$ — ее полярные координаты, L — проходящая через нее при $t = t_0$ траектория. Интегральная кривая $\varrho = f(\theta, \theta_0, \varrho_0)$ уравнения (7) является, как мы раньше установили, траекторией $\hat{L}$ системы (4) и переводится отображением (3) в траекторию (L) системы (1). Пусть

$$\varrho = \varrho(t), \qquad \theta = \theta(t)$$

— движение на траектории $\hat{L}$, выбранное так, что

$$\varrho(t_0) = \varrho_0 \quad \theta(t_0) = \theta_0.$$

Пусть при этом движении траектория $\hat{L}$ проходит через точки

$$\hat{M}_1(\theta_1', f(\theta_1', \theta_0, \varrho_0)) \quad \text{и} \quad \hat{M}_2(\theta_2', f(\theta_2', \theta_0, \varrho_0))$$

соответственно при значениях t_1 и t_2. Тогда $t_0 \in (t_1, t_2)$ (в силу монотонности функции $\theta(t)$), и когда t возрастает от t_1 до t_2, $\theta(t)$ принимает все значения между θ_1' и θ_2', причем каждое только один раз. В частности, $\theta(t)$ принимает все значения от -2π до 4π. Но это значит, что траектория L системы (1), при $t = t_0$ проходящая через точку $M_0 \in U_\delta(O)$, пересекает как при возрастании, так и при убывании t всякую полупрямую $\theta = \text{const}$. Тот факт, что траектория L не выходит при этом из $U_\varepsilon(O)$, следует из неравенства $0 < f(\theta, \theta_0, \rho_0) < \varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание. Из леммы 3 следует, что если θ_0 — произвольное число, то *среди траекторий системы* (1), *проходящих через точки отрезка* $\theta = \theta_0$, $0 < \rho < \varepsilon$, *на плоскости* (x, y) *содержатся все отличные от* O *траектории, проходящие через точки окрестности* $U_\delta(O)$.

Зафиксируем какую-нибудь полупрямую $\theta = \theta_0$, $\rho > 0$ (или $\rho < 0$).

Из леммы 3 следует, что когда ρ_0 достаточно мало, например $|\rho_0| < \varepsilon$, то решение

$$\rho = f(\theta, \theta_0, \rho_0) \qquad (f(\theta_0, \theta_0, \rho_0) \equiv \rho_0)$$

определено при всех θ, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + 2\pi$, и является уравнением (в полярных координатах) траекторий, пересекающих прямую $\theta = \theta_0$ в точках, соответствующих значениям $|\rho_0| < \varepsilon_1$, $\rho_0 > 0$ (или $\rho_0 < 0$). При этом в силу замечания к лемме 3 мы рассмотрим *все* траектории, проходящие через точки достаточно малой окрестности точки O, если рассмотрим траектории, пересекающие часть любого данного луча $\theta = \theta_0$, соответствующую значениям $\rho > 0$ (или $\rho < 0$), $|\rho| < \varepsilon$ (где ε — надлежащим образом выбранная величина). Рассмотрим выражение

$$\rho_1 = f(\theta_0 + 2\pi, \theta_0, \rho_0) = f_{\theta_0}(\rho_0). \qquad (15)$$

Очевидно, точки M_0 и M_1 с полярными координатами соответственно (ρ_0, θ_0) и (ρ_1, θ_0) являются двумя последовательными при возрастании t (при $\beta > 0$) точками пересечения траектории системы (1) с лучом $\theta = \theta_0$, т. е. функция (15) является *функцией последования* на отрезке полупрямой $\theta = \theta_0$.

Так как функция $R(\rho, \theta)$ в правой части уравнения (7) имеет непрерывную частную производную по ρ, то решение (11) имеет непрерывную производную по начальному значению ρ_0, и, следовательно, функция последования $f_{\theta_0}(\rho_0)$ также имеет производную.

Для определения характера рассматриваемого состояния равновесия мы воспользуемся этой функцией последования.

5. Возможный характер отдельной траектории, проходящей через точку достаточно малой окрестности состояния равновесия. Опираясь на лемму 3, можно сделать исчерпывающие заключения относительно того, как может вести себя отдельная траектория, проходящая через точки достаточно малой окрестности рассматриваемого состояния равновесия. Именно, имеет место следующая лемма:

Лемма 4. *Траектория, проходящая через достаточно малую окрестность* $U_\delta(O)$ *состояния равновесия* O *с комплексными характеристическими корнями, может быть одного из следующих типов: 1) замкнутой траекторией, содержащей состояние равновесия* O *внутри; 2) незамкнутой траекторией при* $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$ *стремящейся к состоянию равновесия* O *(но уже не стремящейся к этому состоянию равновесия при* $t \to -\infty$ *(соответственно* $t \to +\infty$*)); 3) незамкнутой траекторией, которая либо при* $t \to +\infty$, *либо при* $t \to -\infty$ *стремится к замк-*

нутой траектории, содержащей состояние равновесия O (и только это состояние равновесия) внутри.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что в $U_\varepsilon(O)$ кроме O не лежит более других состояний равновесия, и $\delta > 0$ — число, удовлетворяющее утверждению леммы 3. Возьмем произвольную точку M_1 окрестности $U_\delta(O)$, отличную от точки O. Обозначим какое-нибудь значение полярного угла точки M_1 через θ_1, и пусть L_0 — траектория системы (1), проходящая через точку M_1 при $t = t_1$. В силу леммы 3 существует такое значение $t = t_2 > t_1$, при котором траектория пересекает луч $\theta = \theta_1$ в некоторой точке M_2, не пересекая этот луч при промежуточных значениях t, $t_1 < t < t_2$, и оставаясь при всех t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, внутри $U_\varepsilon(O)$. Очевидно, при изменении t на интервале (t_1, t_2) траектория L_0 пересекает каждый луч, отличный от луча $\theta = \theta_1$, и при этом в точности один раз (рис. 92).

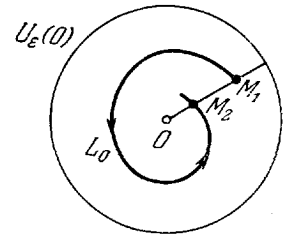


Рис. 92.

Возможны следующие случаи.

а) Точки M_1 и M_2 совпадают. Тогда траектория L_0 является замкнутой траекторией, целиком лежащей в $U_\varepsilon(O)$. В силу теоремы 16 § 4 внутри L_0 лежит по крайней мере одно состояние равновесия. Таким состоянием равновесия может являться только точка O, так как $U_\varepsilon(O)$ не содержит других состояний равновесия. Отсюда следует, что L_0 является траекторией типа 1).

б) Точки M_1 и M_2 различны. Траектория L_0 является тогда незамкнутой (см. лемму 12, § 3). Предположим для определенности, что точка M_2 лежит на луче $\theta = \theta_1$ между точкой O и точкой M_1 (случай, когда точка M_1 лежит между O и M_2, рассматривается аналогично). Рассмотрим простую замкнутую кривую C, состоящую из дуги M_1M_2 траектории L и отрезка M_1M_2 луча $\theta = \theta_1$. В силу леммы 3 каждый сегмент луча $\theta = \text{const}$, лежащий в $U_\varepsilon(O)$ и не содержащий точки O, есть отрезок без контакта. Но тогда применима лемма 11 § 3, и из нее следует, что все точки траектории L_0, соответствующие значениям $t < t_1$, лежат вне кривой C_0, а все точки, соответствующие значениям $t > t_2$, лежат внутри кривой C. Состояние равновесия O лежит внутри кривой C — это видно как из утверждения в) леммы 11 § 3, так и непосредственно. Отсюда вытекает, что траектория L_0, проходящая через точку M_1, не может стремиться к состоянию равновесия O и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$. А так как M_1 — произвольная точка окрестности $U_\delta(O)$, отличная от O, то *всякая траектория, проходящая через такую точку, не может стремиться к O и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.*

Рассмотрим теперь, как может вести себя траектория L_0 при $t \to +\infty$. Так как она остается при возрастании t внутри кривой C, а следовательно, внутри $U_\varepsilon(O)$, то при $t \to +\infty$ она либо стремится к состоянию равновесия O, тогда она является траекторией типа 2), либо стремится к предельному континууму K_ω, целиком лежащему внутри $U_\varepsilon(O)$. Таким континуумом может быть только замкнутая траектория, содержащая точку O внутри себя. Действительно, если этот континуум не является замкнутой траекторией, то в силу теоремы 11 § 4 он должен состоять из траекторий, стремящихся при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$ к состоянию равновесия O (так как в $U_\delta(O)$ нет других состояний равновесия). Но в силу сказанного выше никакая траектория не может стремиться к O и при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$. Таким образом, предельный континуум является замкнутой траекторией. Так же, как в случае а), устанавливается, что эта замкнутая

траектория (мы обозначим ее через L_ω) содержит O внутри себя. Легко видеть, что траектория L_0 не может лежать внутри L_ω. Следовательно, при $t \to +\infty$ траектория L_0 стремится к L_ω, т. е. L_0 является траекторией типа 3. Лемма доказана *).

Полностью аналогично, если рассматриваемая траектория L_0 при $t < t_1$ не выходит из $U_\varepsilon(O)$, то она непременно стремится при $t \to -\infty$ к замкнутой траектории, целиком лежащей в $U_\varepsilon(O)$, содержащей состояние равновесия O внутри.

Замечание. Незамкнутая траектория L_0 при некотором значении $t_3 > t_2$ пересекает отрезок M_2O луча $\theta = \theta_1$ в некоторой точке M_3, затем при некотором значении $t_4 > t_3$ L_0 пересекает отрезок M_3O в некоторой точке M_4 и так далее. Таким образом, траектория L_0 пересекает полупрямую $\theta = \theta_1$ в бесчисленном множестве точек. Точно так же она пересекает в бесчисленном множестве точек *каждую* полупрямую $\theta = \text{const}$, выходящую из точки O, т. е. *является спиралью*.

6. Возможный характер разбиения на траектории достаточно малой окрестности состояния равновесия O. Мы выяснили, как может вести себя отдельная траектория, проходящая вблизи состояния равновесия с комплексными корнями. Перейдем теперь к рассмотрению возможных структур *разбиения на траектории в целом* в малой окрестности такого состояния равновесия O.

Пусть ε, δ и θ_1 имеют тот же смысл, что в лемме 4. Могут представиться две возможности: 1) существует точка M_1 окрестности $U_\delta(O)$ такая, что проходящая через нее траектория L_0 при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$) стремится к состоянию равновесия O, не выходя при этом из $U_\varepsilon(O)$; 2) ни через одну точку окрестности $U_\delta(O)$ не проходит траектория, стремящаяся к состоянию равновесия O (при $t \to -\infty$ или при $t \to +\infty$).

Рассмотрим случай 1). Пусть для определенности траектория L_0, проходящая при $t = t_1$ через точку M_1, стремится к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$. В силу замечания к лемме 4 L_0 пересекает полупрямую $\theta = \theta_1$ в счетном множестве точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, соответствующих монотонно-возрастающим значениям t, $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ Очевидно, что $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. В самом деле, если бы последовательность t_n была ограничена сверху, то мы имели бы $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t^*$, где t^* — конечное число. Точка M^* траектории L, соответствующая значению $t = t^*$, так же лежала бы на луче $\theta = \theta_1$ и была бы точкой сгущения для точек M_n. Но это противоречит лемме 2 § 3 (так как луч $\theta = \theta_1$ не имеет контактов с траекториями системы в окрестности точки M^*). Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Из того, что $t_n \to +\infty$, а траектория L при $t_n \to +\infty$ стремится к O, вытекает, что O является точкой сгущения для последовательности точек M_n: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$. Поэтому каждая точка отрезка OM (кроме точки O) луча $\theta = \theta_1$ принадлежит одному из отрезков $M_{n-1}M_n$. Но в силу леммы 3 всякая траектория, пересекающая отрезок $M_{n-1}M_n$, при возрастании t пересекает этот отрезок еще раз и при этом, как нетрудно видеть, на части M_nM_{n+1}. Отсюда, очевидно, следует, что всякая траектория L_n, пересекающая отрезок $M_{n-1}M_n$ в некоторой точке $\hat{M}_{n-1}$, пересечет каждый отрезок M_nM_{n+1}, $M_{n+1}M_{n+2}, \ldots$ соответственно

*) Утверждения настоящей леммы можно доказать, не ссылаясь на предложения § 4, а непосредственно рассматривая свойства решения (7).

в точках $\hat{M}_n$, $\hat{M}_{n+1}$, . . . , соответствующих значениям

$$\hat{t}_n < \hat{t}_{n+1} < \ldots,$$

(рис. 93), так что

$$\lim_{n\to\infty} \hat{t}_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \hat{M}_n = 0.$$

В силу замечания к лемме 3 отсюда следует, что все траектории, проходящие через точки некоторой достаточно малой окрестности $U_\delta(O)$, при $t \to +\infty$ стремятся к O. При убывании t все траектории выходят из окрестности состояния равновесия O.

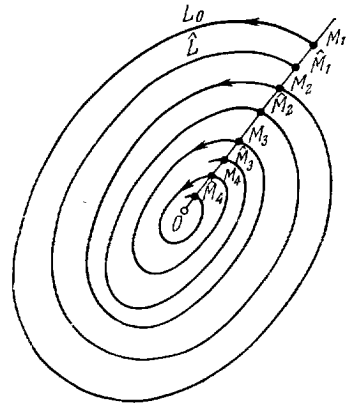
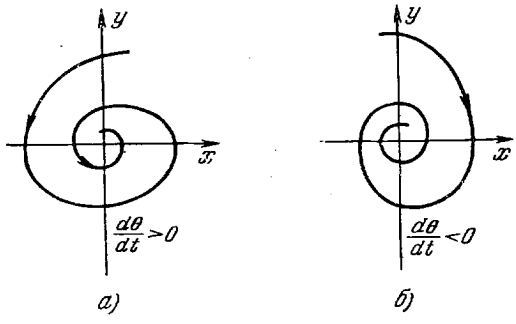


Рис. 93.

Состояние равновесия O называется в этом случае *устойчивым фокусом*. Таким же образом устанавливается, что если траектория стремится к O при $t \to -\infty$, то и все траектории, проходящие через близкие к O точки, являются спиралями, стремящимися к O при $t \to -\infty$, и состояние равновесия O является *неустойчивым фокусом*.

Отметим, кроме того, что если состояние равновесия является устойчивым фокусом, то в случае, когда $\beta > 0$, мы имеем $\frac{d\theta}{dt} > 0$, и при возрастании t точка двигается по траектории, вращаясь вокруг точки O по спирали против часовой стрелки, в случае, когда $\beta < 0$ и, следовательно, $\frac{d\theta}{dt} < 0$ — точка по траектории двигается по часовой стрелке (рис. 94, *а*, *б*). Аналогичные утверждения могут быть сделаны и в случае, когда фокус неустойчивый. В рассматриваемом случае 1), т. е. в случае фокуса, топологическая структура состояния равновесия та же, что и у узла.



а) *б)*

Рис. 94.

Рассмотрим теперь случай 2), когда не существует траекторий, стремящихся к состоянию равновесия O. Из лемм 3 и 4 следует, что в этом случае в любой окрестности точки O существуют замкнутые траектории, содержащие O внутри *). Эти траектории лежат одна внутри другой. Пусть L_0 — одна из замкнутых траекторий, лежащая в достаточно малой окрестности точки O (например, в окрестности $U_\varepsilon(O)$), и пусть Γ_0 — ограниченная ею область. Рассмотрим произвольный луч $\theta = \theta_0$ ($\varrho > 0$), выходящий из O. Пусть траектория L_0 пересекает его в точке M_0. Обозначим через ϱ_0 радиус-вектор точки M_0. В силу замечания к лемме 3 каждая траектория, проходящая через точки Γ_0, пересекает отрезок OM_0 луча $\theta = \theta_0$, и для того чтобы рассмотреть все траектории, проходящие внутри

*) Это следует также из теоремы 16, § 3.

области Γ_0, достаточно рассмотреть траектории, проходящие через точки отрезка OM_0. Для исследования этих траекторий воспользуемся функцией последования на каком-нибудь луче $\theta = \theta_0$ (см. п. 4). Возьмем для определенности $\theta_0 = 0$. Пусть M — произвольная точка отрезка OM_0 с радиусом-вектором ρ ($0 < \rho \leqslant \rho_0$) (рис. 95). Тогда, как мы видели, функция последования

$$\bar{\rho} = f(2\pi,\ 0,\ \rho) = f_0(\rho)$$

определена при всех ρ, $0 < \rho < \rho_0$, непрерывна при этих значениях и имеет непрерывную производную (см. п. 4).

В силу того, что $\rho \equiv 0$ есть решение уравнения (7), так что $\bar{f}(\theta,\ 0,\ 0) = 0$, мы, очевидно, имеем

$$f_0(0) = 0. \tag{16}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$d(\rho) = f_0(\rho) - \rho,$$

определенную при тех же значениях ρ, что и функция $f_0(\rho)$. При этом в силу (16) $d(0) = 0$. Траектория, проходящая через точку $M(0, \rho)$, является замкнутой в том и только в том случае, если $d(\rho) = 0$.

Рассмотрим множество F всех точек $M(O, \rho)$ сегмента OM_0, для

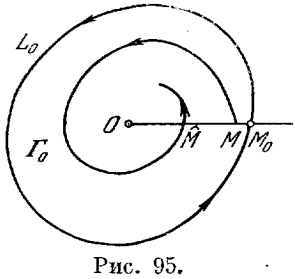


Рис. 95.

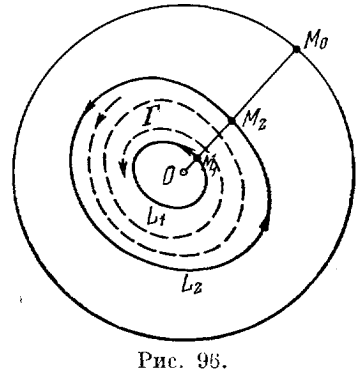


Рис. 96.

которых $d(\rho) = 0$. Это множество является замкнутым (так как $d(\rho)$ непрерывна) и содержит кроме точки O все точки отрезка OM_0, через которые проходят замкнутые траектории. Очевидно, в рассматриваемом нами сейчас случае (когда через сколь угодно близкие к O точки проходят замкнутые траектории) множество F содержит отличные от O точки, сколь угодно близкие к O. Дополнение к множеству F на сегменте $[OM]$ мы обозначим через H. Траектории, проходящие через точки множества H, являются незамкнутыми. Так как H — дополнение к замкнутому множеству, то оно является открытым множеством и, следовательно, либо является пустым, либо состоит из конечного или счетного числа интервалов $J_1, J_2, \ldots$, концы которых принадлежат множеству F.

Рассмотрим какой-нибудь из этих интервалов J. Обозначим его концы через $M_1(\theta, \rho_1)$ и $M_2(\theta, \rho_2)$, а проходящие через них замкнутые траектории — соответственно через L_1 и L_2. Пусть для определенности $\rho_1 < \rho_2$ (рис. 96). Тогда при $\rho_1 < \rho < \rho_2$, $d(\rho) \neq 0$ и, следовательно, при этих значениях ρ $d(\rho)$ имеет один и тот же знак. Всякая траектория L, проходящая через точку «кольца» Γ, ограниченного траекториями L_1 и L_2, пересекает луч $\theta = 0$ между точками M_1 и M_2 и является, следовательно,

спиралью. Из теорем 12 и 13 (§ 4) вытекает, что L есть целая траектория, стремящаяся при $t \to -\infty$ к одной из траекторий L_1, L_2, а при $t \to +\infty$ к другой из них. Ясно, что если при $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ $d(\rho) < 0$, то все траектории, проходящие через точки кольца Γ при $t \to +\infty$, стремятся к траектории L_1, а при $t \to -\infty$ — к траектории L_2, если же $d(\rho) > 0$, то, наоборот, при $t \to +\infty$ эти траектории стремятся к L_2, а при $t \to -\infty$ к L_1.

В рассматриваемом случае могут представиться две возможности.

а) Для всех достаточно малых $\rho > 0$ $d(\rho) = 0$. Тогда все траектории, проходящие через достаточно близкие к O точки, являются замкнутыми и содержат O внутри себя. Состояние равновесия O называется в этом случае *центром*.

б) Существует сколь угодно малое $\rho > 0$, для которого $d(\rho) \neq 0$. Другими словами, в любой близости точки O проходят незамкнутые траектории, т. е. в любой близости ее имеются описанные выше кольцевые области, заполненные спиралями. В этом случае мы будем называть состояние равновесия O *центрофокусом*.

Тот или другой характер разбиения на траектории окрестности *центрофокуса* зависит от наличия или отсутствия кольцевых областей, сплошь заполненных замкнутыми траекториями, от характера кольцевых областей, заполненных незамкнутыми траекториями, и от взаимного расположения кольцевых областей того или другого типа. Очевидно, поведение траекторий в окрестности центрофокуса определяется распределением нулей функции $d(\rho)$ в окрестности точки $\rho = 0$ и знаками функции $d(\rho)$ на тех интервалах $J_1, J_2, \ldots$, где она не обращается в нуль.

Таким образом, мы показали, что *простое состояние равновесия O с комплексными характеристическими числами $\alpha \pm \beta i$ является либо фокусом, устойчивым или неустойчивым, либо центром, либо центрофокусом*. В случае $\alpha \neq 0$, который рассматривался в предыдущем параграфе, все траектории стремятся к состоянию равновесия O в зависимости от знака α при $t \to +\infty$ ($\alpha < 0$) или при $t \to -\infty$ ($\alpha > 0$), и, следовательно, состояние равновесия является устойчивым или неустойчивым фокусом.

7. Примеры. С примером состояния равновесия, имеющим чисто мнимые характеристические корни и являющегося центром, мы уже встречались, рассматривая линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x$$

(см. пример 5, § 1).

Приведем примеры, показывающие, что состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями может быть фокусом или центрофокусом.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y - x\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = x - y\sqrt{x^2+y^2}. \tag{17}$$

Непосредственные вычисления показывают, что точка $O(0, 0)$ есть единственное состояние равновесия системы (17), что (17) есть система класса C_1 и что характеристические числа точки O $\lambda_{1,2} = \pm i$. Чтобы выяснить характер траекторий, перейдем к полярным координатам. Произведя

вычисления, мы убедимся, что система (4) и уравнение (7) имеют в данном случае вид соответственно

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho^2, \tag{18}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1,$$

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = -\varrho^2. \tag{19}$$

Интегрируя последнее уравнение при начальных условиях $\varrho = \varrho_0$, $\theta = \theta_0$, мы получим

$$\varrho = \frac{1}{\theta + \frac{1}{\varrho_0} - \theta_0}. \tag{20}$$

Уравнение (20) является полярным уравнением траекторий системы (17). Так как нас интересуют только значения $\varrho > 0$, то θ меняется в интервале $\left(\theta_0 - \frac{1}{\varrho_0}, +\infty\right)$. Кривая (20) есть гиперболическая спираль. При $\theta \to +\infty$ $\varrho \to 0$, а при $\theta \to \theta_0 - \frac{1}{\varrho_0}$, $\varrho \to \infty$. Таким образом, все траектории системы (17) являются гиперболическими спиралями, при $t \to +\infty$ стремящимися к точке O и уходящими на бесконечность при убывании t (причем в конечное время, см. замечание в конце примера 7 § 1), и O есть *устойчивый фокус* (рис. 97).

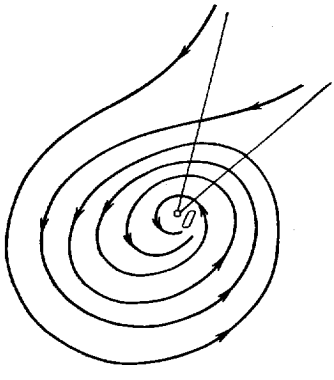


Рис. 97.

Рассмотрим функцию $d(\varrho)$, соответствующую данному примеру. Полагая $\theta_0 = 0$ и принимая во внимание, что (20) есть решение уравнения (19) (т. е. уравнения вида (7)), мы будем иметь

$$d(\varrho) = f(2\pi, 0, \varrho) - \varrho = \frac{1}{2\pi + 1/\varrho} - \varrho = \varrho\left(\frac{1}{1 + 2\pi\varrho} - 1\right).$$

Так как при $\varrho > 0$ $d(\varrho) < 0$, то в соответствии с полученными выше результатами мы снова убеждаемся, что точка O есть устойчивый фокус.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{21}$$

считая, что правые части ее равны 0 в точке O (0, 0). При этом условии система (21) (так же, как и система (17)) является системой класса C_1 и имеет единственное состояние равновесия O с характеристическими числами $\pm i$ — это проверяется непосредственными вычислениями. Переходя так же, как в предыдущей системе, к полярным координатам, мы убедимся, что система (4) и уравнение (7) имеют в данном случае соответственно вид

$$\frac{d\varrho}{dt} = \varrho^3 \sin\frac{\pi}{\varrho}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1 \tag{22}$$

и

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^3 \sin\frac{\pi}{\varrho}. \tag{23}$$

Из уравнения (23) сразу видно, что кривые $\varrho = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ являются замкнутыми траекториями системы (21). Далее,

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \varrho > 1, && \text{то} \quad \frac{d\varrho}{d\theta} > 0, \\ &\text{если} \quad \frac{1}{2k} < \varrho < \frac{1}{2k-1}, && \text{то} \quad \frac{d\varrho}{d\theta} < 0, \\ &\text{если} \quad \frac{1}{2k+1} < \varrho < \frac{1}{2k}, && \text{то} \quad \frac{d\varrho}{d\theta} > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{24}$$

Замкнутые траектории $\varrho = \frac{1}{n}$ разбивают плоскость (x, y) на счетное число колец (одно из которых, именно $\varrho > 1$, уходит на бесконечность). Покажем, что траектории, проходящие через внутренние точки этих колец, не могут быть замкнутыми. Пусть M_0 (θ_0, ϱ_0), $\varrho_0 \neq 0$, $\varrho_0 \neq \frac{1}{n}$, — такая точка, L_0 — проходящая через нее при $t = t_0$ траектория. Очевидно, эта траектория находится целиком внутри одного кольца, поэтому для всех ее точек $\frac{d\varrho}{dt}$ имеет один и тот же знак, например, $\frac{d\varrho}{dt} > 0$. Если траектория L_0 замкнута и имеет период $T > 0$, то точка, соответствующая значению времени $t_0 + T > t_0$, совпадает с точкой M_0, т. е. $\varrho(t_0 + T) = \varrho_0 = \varrho(t_0)$. Но это противоречит условию $\frac{d\varrho}{dt} > 0$.

Таким образом, система (21) не имеет других замкнутых траекторий, кроме окружностей $\varrho = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Но тогда из общих теорем § 4 следует, что траектории, расположенные внутри одного из указанных выше колец (отличного от кольца $\varrho > 1$), при $t \to -\infty$ стремятся к одной из граничных окружностей этого кольца, а при $t \to +\infty$ — к другой. Из соотношений (24) следует, что все траектории, расположенные внутри кольца $\frac{1}{2k} < \varrho < \frac{1}{2k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, являются спиралями, стремящимися при $t \to -\infty$ к замкнутой траектории $\varrho = \frac{1}{2k-1}$, а при $t \to +\infty$ — к замкнутой траектории $\varrho = \frac{1}{2k}$. Траектории внутри кольца $\frac{1}{2k+1} < \varrho < \frac{1}{2k}$ являются спиралями, «скручивающимися» с окружности $\varrho = \frac{1}{2k+1}$ и «накручивающимися» на окружность $\varrho = \frac{1}{2k}$; наконец, траектории, проходящие через точки области $\varrho > 1$, являются спиралями, стремящимися к окружности $\varrho = 1$ при $t \to -\infty$ и уходящими на бесконечность при возрастании t. Очевидно, для системы (21) окружности $\varrho = \frac{1}{n}$ являются *устойчивыми предельными циклами* (см. § 3, п. 9) при n четном и *неустойчивыми* при n нечетном *). Приведенные примеры

*) Нетрудно также привести пример состояния равновесия с чисто мнимыми корнями, у которого кольца, сплошь заполненные замкнутыми траекториями, чередуются с кольцами, заполненными незамкнутыми траекториями. В этом случае можно привести геометрический пример состояния равновесия, не имеющего *определенной*

показывают, что в случае чисто мнимых характеристических корней поведение траекторий в окрестности состояния равновесия не определяется характеристическими числами, или, другими словами, не определяется линейными относительно x и y членами.

Таким образом, в этом случае для определения характера состояния равновесия нужно дополнительное исследование.

Когда динамическая система является аналитической, так что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ разлагаются в ряды по степеням x и y, можно выделить случаи, в которых исследование характера состояния равновесия удается провести полностью. При этом мы получаем критерий того, что состояние равновесия является фокусом. В этом исследовании фигурируют члены разложения правых частей степени выше первой *).

§ 9. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия

1. Основное определение. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{I}$$

— рассматриваемая динамическая система, а $O(0, 0)$ — ее изолированное состояние равновесия. O может быть как простым, так и сложным состоянием равновесия, так что детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(0, 0) & P'_y(0, 0) \\ Q'_x(0, 0) & Q'_y(0, 0) \end{vmatrix}$$

может быть как не равным, так и равным нулю.

Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1}$$

— траектория системы (I), стремящаяся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Так как оба случая ($t \to +\infty$ и $t \to -\infty$) исследуются вполне аналогично, то мы рассмотрим только один из них, например, случай, когда $t \to +\infty$.

Таким образом, мы предполагаем, что при $t \to +\infty$ $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$, причем $x(t)$ и $y(t)$ не равны нулю одновременно.

Определение IX. *Пусть OM — луч* (полупрямая), *имеющий своим началом точку O и проходящий через точку $M(t)$ траектории. Если луч OM при $t \to +\infty$ стремится к некоторому предельному положению — лучу OM^*, то мы будем говорить, что при $t \to +\infty$ траектория* (1) *стремится к состоянию равновесия O в направлении θ^*, где θ^* — угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом OM^**

топологической структуры в смысле, указанном в п. 3 § 5; так, например, это будет иметь место в случае, когда бесчисленное множество колец Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n, ..., заполненных замкнутыми траекториями, разделенными кольцами с незамкнутыми траекториями, стягивается к началу координат, и при этом число колец, заполненных незамкнутыми траекториями, лежащими между кольцами Γ_i и Γ_{i+1}, увеличивается с номером i.

*) Исследование таких сложных фокусов представляет большой интерес при рассмотрении динамических систем, содержащих параметры. Если при некотором значении параметра у динамической системы есть фокус с чисто мнимыми характеристическими корнями, то при изменении параметра из этого фокуса может появиться («родиться») один или несколько предельных циклов (вопрос о таком рождении рассмотрен в [6]).

(рис. 98). (Угол θ определяется, конечно, с точностью до соответствующего кратного 2π.)

Замечание 1. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться данным определением в следующей форме: *траектория L стремится к состоянию равновесия O в направлении θ^*, если для любого $\varepsilon > 0$ все точки траектории L, соответствующие достаточно большим значениям t,*

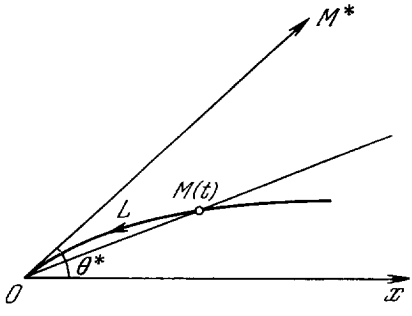


Рис. 98.

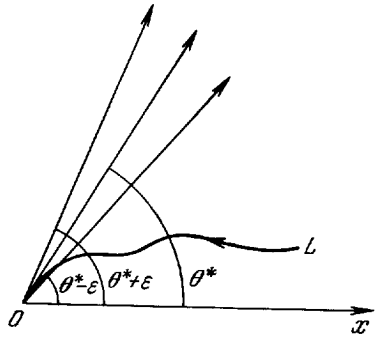


Рис. 99.

находятся в области, ограниченной лучами $\theta = \theta^* - \varepsilon$ и $\theta = \theta^* + \varepsilon$ и заключающей луч $\theta = \theta^*$ (рис. 99).

Замечание 2. Вместо того, чтобы говорить: траектория L при $t \to +\infty$ стремится к точке O в данном направлении, мы будем говорить: полутраектория L^+ стремится к O в данном направлении.

Как уже было сказано во введении, вопрос о том, стремятся ли траектории системы к состоянию равновесия в определенных направлениях и в каких именно, выходит за рамки чисто топологических рассмотрений динамической системы. Однако знание указанных направлений позволяет представить более конкретно характер расположения траекторий вблизи состояния равновесия. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем (см. главу IX), нахождение направлений, в которых траектории могут стремиться к состоянию равновесия в случае сложного состояния равновесия (для которого $\Delta = 0$), является одной из составных частей метода исследования его топологической структуры.

Из данного выше определения непосредственно следует, что если полутраектория L^+ стремится к состоянию равновесия в направлении θ^*, то существует (конечный или бесконечный) предел отношения $\frac{y(t)}{x(t)}$, причем этот предел равен $\operatorname{tg}\theta^*$:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \operatorname{tg}\theta^*.$$

Покажем, что справедливо обратное утверждение, именно, если полутраектория L^+ стремится к состоянию равновесия O и существует конечный или бесконечный предел k^* отношения $\frac{y(t)}{x(t)}$, то L^+ стремится к O в определенном направлении θ^*, причем $\operatorname{tg}\theta^* = k^*$.

Для доказательства предположим, что $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = k^*$, и проведем через точку O прямую $M_1^*M_2^*$ с угловым коэффициентом k^* (рис. 100). Далее, проведем через O две прямые A_1A_2 и B_1B_2, образующие с прямой $M_1^*M_2^*$ соответственно углы $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, где ε — достаточно малое поло-

жительное число. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=k^*$, то *прямая* OM (t) при $t\to+\infty$ стремится к *прямой* $M_1^*M_2^*$. Следовательно, участок траектории L, соответствующий достаточно большим значениям t, лежит в заштрихованной на рис. 100 области, заключенной между прямыми A_1A_2 и B_1B_2. Так как, однако, траектория L не «проходит» через точку O, то указанный участок траектории L либо целиком лежит в области I, либо целиком лежит в области II. Но тогда, очевидно, луч OM (t) при $t\to+\infty$ стремится либо к лучу OM_1^*, либо к лучу OM_2^*, и наше утверждение доказано.

Знание одного только числа k^* $\left(k^*=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}\right)$ еще недостаточно для того, чтобы определить, в каком именно направлении траектория L стремится к состоянию равновесия O. Действительно, соотношению $\operatorname{tg}\theta^*=k^*$ $(0\leqslant\theta^*\leqslant\pi)$ удовлетворяют два (взаимопротивоположных) направления.

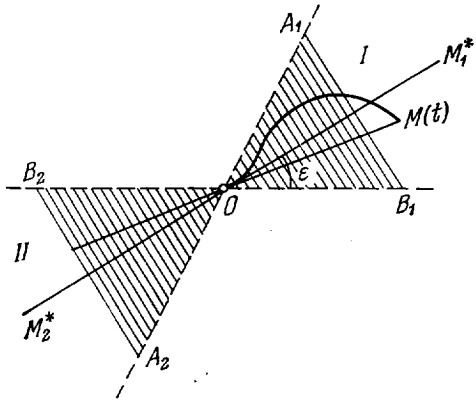


Рис. 100.

В дальнейшем при рассмотрении сложных состояний равновесия мы часто будем говорить об отыскании *траекторий, стремящихся к состоянию равновесия с угловым коэффициентом или наклоном* k^*. При этом мы будем иметь в виду как траектории, стремящиеся к рассматриваемому состоянию равновесия в направлении θ^*, так и траектории, стремящиеся в направлении $\pi+\theta^*$ $(0\leqslant\theta^*\leqslant\pi,\ \operatorname{tg}\theta^*=k^*)$.

Поставленный выше вопрос о существовании для луча OM предельного положения OM^* можно рассматривать как вопрос о существовании касательной в точке O у кривой, представляющей из себя траекторию L, дополненную точкой O *). Наряду с этим можно рассматривать вопрос о существовании *предельного положения* касательной к траектории L в точке M (t) (при $t\to+\infty$). Мы покажем в п. 2, что в случае простого состояния равновесия касательная к траектории L в точке O и предельное положение касательной к траектории L в точке M (t) при $t\to+\infty$ существуют или не существуют одновременно, а в том случае, когда они существуют, они совпадают.

В более общих случаях данное утверждение, вообще говоря, не справедливо. Рассмотрим, например, кривую, заданную уравнением

$$y=x^2\sin\frac{1}{x}\quad\text{при}\quad x\neq0,$$
$$y=0\qquad\text{при}\quad x=0.$$

Эта кривая имеет касательную в каждой точке, в том числе в точке с абсциссой $x=0$, однако касательная в точке M с абсциссой x не стремится, как легко видеть, ни к какому предельному положению при $x\to0$.

*) При этом касательную надо понимать как предельное положение секущей OM при $t\to+\infty$. Это замечание приходится делать ввиду того, что траектория L, дополненная точкой O, не является кривой, заданной параметрически (точка O не соответствует никакому значению параметра t), а обычное определение касательной дается для кривых заданных параметрическими (или явными) уравнениями.

Настоящий параграф посвящен изучению простых состояний равновесия. При этом, как правило, будут рассматриваться системы класса C_1. Однако в случае кратного корня характеристического уравнения, т. е. в случае «вырожденного» ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu \neq 0$) и «дикритического» узла ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu = 0$), нам придется усилить требования, налагаемые на систему и предполагать, что рассматриваемая система имеет класс C_2.

Вопрос о направлениях, в которых траектории стремятся к сложным состояниям равновесия, рассматривается в § 20 при предположении, что динамическая система является аналитической.

2. Угловой коэффициент направления, в котором траектория может стремиться к простому состоянию равновесия. Запишем рассматриваемую систему, как обычно, в виде

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y), \tag{2}$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — функции класса C_1, обращающиеся вместе со своими первыми производными в нуль в точке $O(0, 0)$ (см. § 6). Состояние равновесия O предполагается простым, так что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Лемма 1. *Пусть* (I) — *динамическая система класса* C_1, $O(0, 0)$ — *ее состояние равновесия* (*простое*) *и* $x = x(t)$, $y = y(t)$ — *полутраектория системы, стремящаяся к точке* O. *Тогда* $\frac{dy}{dx}$ *имеет при* $t \to +\infty$ *предел* (*конечный или бесконечный*) *в том и только в том случае, когда имеет предел отношение* $\frac{y(t)}{x(t)}$, *причем в случае существования этих пределов они равны*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Доказательство. Так как функции φ и ψ со своими первыми производными обращаются в нуль в точке $(0, 0)$, то $\varphi(x, y) = o(\varrho)$, $\psi(x, y) = o(\varrho)$, где $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Предположим сначала, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ существует и равен конечному числу k. Это может быть только в том случае, когда для всех достаточно больших t $x(t) \neq 0$, т. е. $x(t)$ не меняет знак. Мы имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c + d\frac{y}{x} + \frac{\psi}{\varrho}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{a + b\frac{y}{x} + \frac{\varphi}{\varrho}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}. \tag{3}$$

Так как $\Delta \neq 0$, то $c + dk$ и $a + bk$ не могут одновременно обращаться в нуль, и из соотношения (3) следует, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{dy}{dx}$ существует и равен $\frac{c + dk}{a + bk}$ $\left(\frac{\psi}{\varrho} \to 0 \text{ и } \frac{\varphi}{\varrho} \to 0 \text{ при } \varrho \to 0\right)$.

Если $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\infty$, то $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{y(t)}=0$. Тогда из рассуждений, аналогичных только что проведенным, следует, что существует $\lim\frac{dx}{dt}$, а следовательно, и $\lim\frac{dy}{dt}$. Таким образом, мы доказали, что из существования $\lim\frac{y(t)}{x(t)}$ следует существование $\lim\frac{dy}{dx}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}$ существует и равен k. Предположим сначала, что k — конечное число. Это может быть, очевидно, лишь в том случае, когда при достаточно больших t $x'(t)\neq 0$, т. е. $x'(t)$ сохраняет знак. Но тогда при больших t $x(t)$ есть монотонная функция от t, следовательно, t можно представить как функцию от x, $t=t(x)$, и уравнение полутраектории L в окрестности начала можно записать в виде $y=y(x)$. Так как $x(t)$ не может равняться 0 ни при каком t ($x(t)\to 0$ при $t\to+\infty$), то функция $y(x)$ не определена при $x=0$. Доопределим ее, положив $y(x)=0$ при $x=0$. Тогда

$$\frac{y}{x}=\frac{y(x)}{x}=\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=y'(\gamma x),\qquad \text{где}\qquad 0<\gamma<1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\infty}y'(\gamma x)=k=\lim_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}.$$

Если $k=\infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dx}{dy}=0$ и в силу проведенных рассуждений $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x(t)}{y(t)}=0$, т. е. $\lim\frac{y}{x}=\infty$. Таким образом, мы показали, что, во-первых, если существует $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$, то существует $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}$, и, во-вторых, что если существует $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}$, то существует $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$, и оба предела равны. Лемма доказана.

Следствие. Угловой коэффициент направления, в котором полутраектория может стремиться к состоянию равновесия O, удовлетворяет квадратному уравнению

$$bk^2+(a-d)\,k-c=0 \tag{4}$$

(при этом, если $b=0$, то одним из корней уравнения (4) считается обычно ∞).

В самом деле, если k — конечное число, то, переходя в соотношении (3) к пределу при $t\to+\infty$, мы получим

$$k=\frac{c+dk}{a+bk},$$

откуда и вытекает соотношение (4). Если же $k=\infty$, то $\lim\frac{dx}{dy}=\lim\frac{x}{y}=0$. Очевидно, при этом $y(t)\neq 0$ при достаточно больших t. Поэтому

$$\frac{dx}{dy}=\frac{a\frac{x}{y}+b+\frac{\varphi(x,\,y)}{y}}{c\frac{x}{y}+d+\frac{\psi(x,\,y)}{y}}.$$

Переходя к пределу, мы получим $0 = b/d$, т. е. $b = 0$. Утверждение доказано.

Отметим, что дискриминант квадратного уравнения (4) совпадает с дискриминантом характеристического уравнения. Поэтому в случае, когда этот дискриминант отрицателен, т. е. в случае фокуса (простого или сложного), не существует направлений, в которых траектории могут стремиться к состоянию равновесия. Нетрудно показать, что корни уравнения (4) k_1 и k_2 связаны с характеристическими корнями λ_1 и λ_2 соотношениями

$$k_1 = \frac{d-\lambda_2}{b}, \qquad k_2 = \frac{d-\lambda_1}{b}.$$

Все дальнейшие рассмотрения этого параграфа мы будем проводить, считая, что исследуемая вблизи простого состояния равновесия (0, 0) система (I) приведена к каноническому виду.

3. Узел с различными характеристическими корнями. В этом случае система может быть приведена к виду

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y + \psi(x, y). \tag{5}$$

Пусть для определенности $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Как было показано в § 7, в этом случае существует $\delta_0 > 0$ такое, что всякая полутраектория, проходящая через точку окрестности узла $U_{\delta_0}(O)$ при возрастании t стремится к точке O, причем так, что $\varrho(t)$ монотонно стремится к нулю, т. е. каждая окружность $\varrho = \delta$ с радиусом $\delta < \delta_0$ является циклом без контакта. Пусть $\varrho = \varrho(t)$, $\theta = \theta(t)$ — уравнение траектории системы (5) в полярных координатах. При этом, переходя в системе (5) к полярным координатам, мы получаем *)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\sin 2\theta + \frac{\psi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\cos\theta - \varphi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\sin\theta}{\varrho}. \tag{6}$$

Второе слагаемое правой части при $\varrho \to 0$ стремится к нулю равномерно относительно θ. Поэтому мы можем написать

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\sin 2\theta + \varrho\Phi(\varrho, \theta),$$

где $\Phi(\varrho, \theta)$ — ограниченная функция при всех достаточно малых ϱ (предположим, что при $|\varrho| < \delta_0$) и всех θ.

При произвольном ε, $0 \leqslant \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, рассмотрим 4 сектора T_i^ε ($i = 1$, 2, 3, 4) круга $\varrho \leqslant \delta_0$, определяемые следующими неравенствами (рис. 101):

$$|\theta| \leqslant \varepsilon \quad (i=1), \qquad |\theta-\pi| \leqslant \varepsilon \quad (i=2),$$
$$\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right| \leqslant \varepsilon \quad (i=3), \qquad \left|\theta-\frac{3}{2}\pi\right| \leqslant \varepsilon \quad (i=4).$$

*) После перехода к полярным координатам в случае комплексных характеристических корней мы получали систему, для которой при всех достаточно малых ϱ ($|\varrho| < \varrho^*$) мы имели $d\theta/dt \neq 0$, т. е. там у полученной системы не было состояний равновесия в полосе $|\varrho| < \varrho^*$ (ось $\varrho = 0$ являлась интегральной кривой). В рассматриваемом нами сейчас случае действительных характеристических корней это, очевидно, уже не так: $d\theta/dt$ обращается в нуль в точках оси $\varrho = 0$, т. е. у полученной после перехода к полярным координатам системы есть состояния равновесия, лежащие на оси $\varrho = 0$.

На лучах

$$\theta = \varepsilon, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \theta = \pi + \varepsilon, \quad \theta = \frac{3}{2}\pi - \varepsilon \tag{7}$$

$\sin 2\theta > 0$, а на остальных лучах, входящих в границы секторов T_i^ε, $\sin 2\theta < 0$. Поэтому при достаточно малом $\delta(\varepsilon) < \delta_0$ на указанных лучах $d\theta/dt > 0$, так как $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, а на остальных четырех лучах, входящих в границы секторов T_i^ε, $d\theta/dt > 0$.

Тогда, очевидно, в точках границ секторов T_1^ε и T_2^ε траектории при возрастании t входят внутрь этих секторов, так что все траектории, проходящие через точки секторов T^ε, T^ε и их границ, больше уже не могут выйти из них, а в точках границ секторов T_3^ε и T_4^ε все траектории при возрастании t выходят из этих секторов, так что всякая траектория, проходящая через точку рассматриваемого круга, лежащую вне T_3^ε, T_4^ε, не может войти в эти секторы.

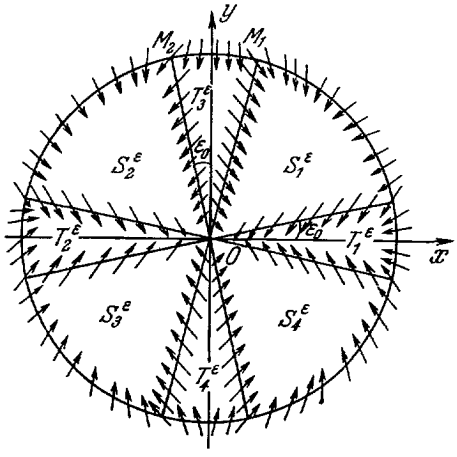


Рис. 101.

Обозначим через S_1^ε, S_2^ε, S_3^ε, S_4^ε остальные секторы круга $\rho \leqslant \delta_0$ (рис. 101). Имеет место следующая лемма:

Лемма 2. *Всякая траектория, проходящая через точку какой-нибудь из областей S_i^ε, при возрастании t входит в одну из областей T_1^ε и T_2^ε.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности полутраекторию L^+, параметрические уравнения которой (в полярных координатах) $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$, проходящую через точку области S_1^ε. Предположим, что она не входит в область T_1^ε и, следовательно, не выходит из области S_1^ε. Тогда для всех достаточно больших t будем иметь для этой траектории

$$\varepsilon < \theta(t) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad 2\varepsilon < 2\theta < \pi - 2\varepsilon$$

и, следовательно, $\sin 2\theta > \sin 2\varepsilon$. Тогда из (6), принимая во внимание, что $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, мы получаем

$$\frac{d\theta}{dt} < \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \sin 2\varepsilon + \rho\Phi(\rho, \theta).$$

Так как $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$ (см. § 7), то при t достаточно большом $\frac{d\theta}{dt} < \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} \sin 2\varepsilon$.

Пусть $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} \sin 2\varepsilon = -A$, где $A < 0$. Кроме того, предположим, что при $t = t_0$ $\theta(t_0) = \theta_0$ $\left(\text{очевидно, можно считать, что } \theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда при $t > t_0$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \theta'(t)\,dt < \theta_0 - A(t - t_0) < \frac{\pi}{2} - A(t - t_0),$$

и если $A(t-t_0)>\frac{\pi}{2}$, то $\theta(t)<0$. Это противоречит сделанному допущению, что полутраектория L^+ не выходит из области S_1^ε. Лемма доказана.

Теорема 20. *Если* $\lambda_2<\lambda_1<0$, *то все полутраектории, стремящиеся к узлу, стремятся к нему в определенных направлениях. В случае, когда динамическая система в окрестности узла* O *имеет канонический вид* (5), *этими направлениями являются* $\pi/2$ *и* $\frac{3}{2}\pi$, 0 *и* π, *причем в направлениях* $\pi/2$ *и* $\frac{3}{2}\pi$ *к узлу* O *стремится только по одной полутраектории. Все остальные траектории стремятся к узлу* O *в направлениях* 0 *или* π, *причем в каждом из этих направлений стремится бесчисленное множество полутраекторий.*

Соответствующим образом измененное утверждение имеет место для случая $\lambda_1<\lambda_2<0$, *а так же для случая, когда* O — *неустойчивый узел* ($0<\lambda_1<\lambda_2$ или $0<\lambda_2<\lambda_1$).

Доказательство. При любом заданном $\varepsilon>0$ рассмотрим любую полутраекторию L^+, проходящую внутри круга $\rho<\delta(\varepsilon)$ ($\delta(\varepsilon)$, как и выше, выбирается так, чтобы границы секторов T_i^ε круга радиуса $\delta(\varepsilon)$ не имели в отличных от O точках контактов с траекториями). Предположим, что траектория L^+ проходит через точку сектора S_1^ε, S_4^ε или T_1^ε. Тогда в силу леммы 1 полутраектория L^+ попадает в сектор T_1^ε и в силу свойств этого сектора из него не выйдет. Так как все окружности $\delta<\delta_0$ являются окружностями без контакта, то нетрудно видеть, что это справедливо для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$. Но в силу замечания 1 п. 1 это и означает, что полутраектория L^+ стремится к состоянию равновесия O в направлении $\theta=0$.

Полностью аналогично устанавливается, что если полутраектория L^+ проходит через точки сектора S_2^ε, S_3^ε или T_2^ε, то она стремится к точке O в направлении $\theta=\pi$. Кроме того, очевидно, что как в направлении $\theta=0$, так и в направлении $\theta=\pi$ к состоянию равновесия O стремится бесчисленное множество траекторий.

Рассмотрим теперь секторы T_3^ε и T_4^ε. Допустим, что при некотором фиксированном ε_0 полутраектория L^+ лежит целиком внутри T_3^ε. Докажем, что в этом случае L^+ стремится к точке O в направлении $\pi/2$. В самом деле, возможны два случая: либо для любого ε полутраектория L^+, начиная с некоторого момента, попадает в сектор T_3^ε и остается там. Но это значит, что L^+ стремится к точке O в направлении $\pi/2$. Либо для некоторого ε полутраектория L^+, попадая в круг радиуса $\delta(\varepsilon)$, соответствующий данному ε, имеет в этом круге точки, лежащие вне сектора T_3^ε. Но тогда в силу леммы 1 полутраектория L^+ должна попасть в сектор T_1^ε или T_2^ε и, следовательно, вопреки предположению, не лежит целиком в секторе T_3^ε. В точности так же устанавливается, что если полутраектория L^+ целиком лежит в некотором секторе T_4^ε ($\varepsilon<\varepsilon_0$), то она стремится к точке O в направлении $\frac{3}{2}\pi$.

Покажем теперь, что в каждом из секторов T_3^ε, T_4^ε существует в точности по одной полутраектории, не выходящей при возрастании t из этого сектора. Покажем это для сектора T_3^ε. Пусть ε фиксировано, и пусть M_1M_2 — дуга окружности $\rho=\delta(\varepsilon)$, входящей в границу сектора T_3^ε. Сектор T_3^ε полностью аналогичен рассматривавшимся при установлении характера расположения траекторий в окрестности седла треугольникам — например, треугольнику OAD.

Нетрудно убедиться в том, что все траектории, входящие в сектор T_3^ε через дугу M_1M_2 в точках, достаточно близких к M_1, выходят из этого сектора через отрезок OM_1, а все траектории, входящие в сектор T_3^ε через ту же дугу в точках, достаточно близких к точке M_2, выходят через дугу OM_2. Отсюда такими же рассуждениями, как и при рассмотрении седла (выделении среди точек дуги M_1M_2 точек двух типов), устанавливается, что по крайней мере одна траектория, входящая в сектор T_3^ε через дугу M_1M_2, не может выйти из этого сектора. Доказательство того, что такая траектория — единственная, проводится совершенно так же, как и при рассмотрении седла. Действительно, запишем второе из уравнений (5) в виде

$$\frac{dy}{dt} = y\left(\lambda_2 + \frac{\psi(x, y)}{y}\right) = y\left(\lambda_2 + \frac{x}{y}g_1 + g_2\right)$$

где g_1 и g_2 — те же функции, что и в § 7 (см. формулу (1) § 7). В точках сектора T_3^ε $\frac{x}{y} < \operatorname{tg}\varepsilon$, т. е. ограничено. Если полутраектория L^+, параметрические уравнения которой $x = x(t)$, $y = y(t)$, не выходя из T_3^ε, стремится к узлу O, то при достаточно больших t из выражения (8) мы получаем (в силу того, что $\lambda_2 < 0$, а $y > 0$) $\frac{dy}{dt} < 0$. Это означает, что $y = y(t)$ есть монотонная функция t, и мы можем, выразив t через x, написать уравнение траектории L^+ в виде $x = x(y)$ ($x \to 0$ при $y \to 0$).

Далее, доказательство проводится совершенно так же, как и доказательство единственности сепаратрисы в § 7 с очевидными изменениями, вызванными тем, что уравнение траекторий здесь имеет вид $x = x(y)$, а не как в рассматривавшемся в § 7 случае. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из самой теоремы 20 следует, что полутраектории системы (5)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y + \psi(x, y)$$

(λ_1, λ_2 — действительные не равные числа одинаковых знаков) ведут себя в смысле направления этих полутраекторий при стремлении их к состоянию равновесия так же, как полутраектории соответствующей линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y$$

Это же замечание справедливо и для системы, не приведенной к каноническому виду

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y)$$

в случае, когда O (0, 0) является узлом. Таким образом, на направления, в которых полутраектории системы стремятся к узлу, члены $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ влияния не оказывают.

С использованием полученных выше сведений (уже не являющихся чисто топологическими) относительно стремления траекторий к узлу в определенном направлении расположение траекторий в окрестности узла (с не равными характеристическими корнями) схематически изображено на рис. 104, *а*, *б* (на рис. 104, *а* в случае, когда система имеет канонический вид, так что направления, по которым траектории стремятся к узлу, совпадают с направлением осей координат, а на рис. 104, *б* — в общем случае).

4. Дикритический узел. Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и при этом $\mu = 0$ (см. § 7, п. 2, случай 1б при $\mu = 0$). В этом случае система может быть приведена к виду

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y + \psi(x, y). \tag{8}$$

Пусть для определенности $\lambda < 0$, т. е. узел устойчивый. Предположим сначала, что функции φ и ψ — любые функции класса C_1, обращающиеся в точке O (0, 0) в нуль вместе со своими первыми производными. Покажем, что при таком предположении вопрос о существовании направлений, в которых положительные полутраектории стремятся к точке O, зависит, вообще говоря, от функций φ и ψ, т. е. система (7) и соответствующая линейная система

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y \tag{9}$$

могут вести себя в этом отношении по-разному (сравните с замечанием к предыдущей теореме). С этой целью рассмотрим следующий пример, принадлежащий Перрону:

$$\frac{dx}{dt} = -x - \frac{y}{\lg\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{dy}{dt} = -y + \frac{x}{\lg\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{10}$$

В этой системе правые части не определены в точке (0, 0). Мы определим их, положив $\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$.

Очевидно, при этом φ и ψ являются непрерывными функциями в окрестности точки O, а сама эта точка есть изолированное состояние равновесия. Непосредственные вычисления показывают, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ имеют непрерывные первые частные производные в окрестности точки O (включая и саму точку), причем значения этих производных в O равны нулю:

$$\varphi'_x(0, 0) = \varphi'_y(0, 0) = \psi'_x(0, 0) = \psi'_y(0, 0) = 0.$$

Найдем теперь траектории системы (10). Мы имеем

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\varrho\varrho' = xx' + yy' = x\left(-x - \frac{y}{\lg\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y\left(-y + \frac{x}{\lg\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\varrho^2,$$

$$\varrho' = -\varrho; \quad \varrho = Ce^{-t}$$

(C можно считать положительным числом). Далее, положив, что на траектории системы полярный угол $\theta = \theta(t)$, мы будем иметь

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}.$$

Подставляя сюда x' и y', выраженные через ϱ и θ, получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\lg\varrho} = \frac{1}{\lg Ce^{-t}},$$

т. е.

$$d\theta = -\frac{dt}{t - \lg C}.$$

Интегрируя по t от t_0 до $t > t_0$, получим

$$\theta(t) - \theta(t_0) = -\lg(t - \lg C) + \lg(t_0 - \lg C).$$

Отсюда видно, что при $t \to +\infty$ $\theta(t) \to -\infty$. Но это значит, что ни одна из рассматриваемых полутраекторий нашей системы не стремится к точке O в определенном направлении, а все они бесчисленное множество раз обходят вокруг точки O, т. е. являются спиралями, накручивающимися на точку O.

Что касается соответствующей линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y,$$

то ее траекториями являются лучи

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \qquad y = C_2 e^{\lambda t}.$$

Следовательно, каждая траектория при $t \to \infty$ стремится к точке O в определенном направлении и для каждого направления имеется в точности одна траектория, входящая в точку по этому направлению. Таким образом, пример Перрона показывает, что если в качестве φ и ψ брать всевозможные функции класса C_1, то направления полутраекторий, вообще говоря, не определяются линейными членами правых частей.

Оказывается, однако, что если наложить на функции φ и ψ более сильные ограничения, то эти функции—«возмущения» линейных членов—уже не будут влиять на направления траекторий. Мы докажем это, взяв в качестве указанного ограничения принадлежность функций φ и ψ к классу C_2.

Теорема 21. *Если в системе* (7)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y + \psi(x, y)$$

($\lambda < 0$) *функции* $\varphi(x, y)$ *и* $\psi(x, y)$ *являются в окрестности точки* O *функциями класса* C_2, *причем*

$$\varphi(0, 0) = \varphi'_x(0, 0) = \varphi'_y(0, 0) = 0, \qquad \psi(0, 0) = \psi'_x(0, 0) = \psi'_y(0, 0) = 0,$$

то каждая полутраектория, стремящаяся к узлу O, *стремится к нему в определенном направлении, причем для любого направления имеется в точности одна соответствующая ему полутраектория.*

Доказательство. Разлагая функции φ и ψ по формуле Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= A_1 x^2 + 2B_1 xy + C_1 y^2 + \alpha_1 x^2 + 2\beta_1 xy + \gamma_1 y^2, \\ \psi(x, y) &= A_2 x^2 + 2B_2 xy + C_2 y^2 + \alpha_2 x^2 + 2\beta_2 xy + \gamma_2 y^2, \end{aligned} \tag{11}$$

где каждая из величин $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_2$ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Перейдем к полярным координатам, считая, что $\rho > 0$. Мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \lambda\rho + \varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + \psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho}\cos\theta - \frac{\varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho}\sin\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

Как мы знаем (см. § 8), каждой траектории $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$ системы (11), расположенной в полосе Ω^+ [$-\infty < \theta < +\infty$, $0 < \rho < \rho^*$) плоскости (ρ, θ) (ρ^* достаточно мало), соответствует определенная траектория системы (8) (отличная от состояния равновесия O), расположенная в $U_{\rho^*}(O)$, причем

$$x = \rho(t)\cos\theta(t), \qquad y = \rho(t)\sin\theta(t)$$

являются ее параметрическими уравнениями. Напротив, каждой траектории системы (8), расположенной в $U_{\rho^*}(O)$, соответствует в полосе Ω^+ бесчисленное множество траекторий системы (11), получающихся друг из друга сдвигом вдоль оси θ на отрезки, кратные 2π. Так как при малых ρ

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\left[\lambda + \frac{\varphi}{\rho}\cos\theta + \frac{\psi}{\rho}\sin\theta\right] \neq 0,$$

то траектории системы (12) являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\frac{\psi}{\rho^2}\cos\theta - \frac{\varphi}{\rho^2}\sin\theta}{\lambda + \frac{\varphi}{\rho}\cos\theta + \frac{\psi}{\rho}\sin\theta}. \tag{13}$$

Уравнение (13) определено, очевидно, не только при малых положительных, но и при отрицательных ρ. Как и в § 8, п. 2, мы доопределим функции φ/ρ, ψ/ρ, φ/ρ^2 и ψ/ρ^2 в точках оси θ, положив, что при любом θ $(-\infty < \theta < +\infty)$ и при $\rho = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\varphi(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{\rho}\right]_{\rho=0} = \left[\frac{\psi(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{\rho}\right]_{\rho=0} = 0,\\
&\left[\frac{\varphi(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{\rho^2}\right]_{\rho=0} = A_1\cos^2\theta + 2B_1\cos\theta\sin\theta + C_1\sin^2\theta,\\
&\left[\frac{\psi(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{\rho^2}\right]_{\rho=0} = A_2\cos^2\theta + 2B_2\cos\theta\sin\theta + C_2\sin^2\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Доопределенную таким образом правую часть уравнения (13) обозначим через $\Phi(\rho, \theta)$. Уравнение

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \Phi(\rho, \theta) \tag{15}$$

определено теперь в полосе $\Omega\ [|\rho| < \rho^*]$ (ρ^* достаточно мало) и при $\rho \neq 0$ совпадает с уравнениями (13). Докажем, что $\Phi(\rho, \theta)$ есть непрерывная функция в полосе Ω и имеет там непрерывную производную по θ. Для этого достаточно показать, что функции φ/ρ, φ/ρ^2, ψ/ρ, ψ/ρ^2 непрерывны и имеют непрерывные производные по θ в точках оси θ (т. е. при $\rho = 0$). Непрерывность этих функций непосредственно следует из соотношений (11) и (14). Непрерывность частных производных докажем для функций φ/ρ, φ/ρ^2. Мы имеем

$$\frac{\varphi}{\rho} = \frac{\varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho} \quad \text{при} \quad \rho \neq 0,$$

$$\frac{\varphi}{\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0.$$

При $\rho \neq 0$

$$\frac{\partial(\varphi/\rho)}{\partial\theta} = -\varphi'_x(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\sin\theta + \varphi'_y(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cos\theta, \tag{16}$$

при $\rho = 0$ $\frac{\varphi}{\rho} = 0$ для любого θ. Поэтому $\frac{\partial(\varphi/\rho)}{\partial\theta} = 0$ в точке $(0, \theta)$ в силу определения частной производной.

С другой стороны, из соотношения (16) следует, что

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\partial(\varphi/\rho)}{\partial\theta} = 0.$$

Таким образом, непрерывность производной $\frac{\partial(\varphi/\rho)}{\partial\theta}$ доказана.

Переходим к рассмотрению функций φ/ρ^2. Из ее определения (см. (14)) следует, что при $\rho = 0$

$$\frac{\partial(\varphi/\rho^2)}{\partial\theta} = 2\left[(B_1\cos\theta + C_1\sin\theta)\cos\theta - (A_1\cos\theta + B_1\sin\theta)\sin\theta\right] \quad (17)$$

(θ — любое).

Если же $\rho \neq 0$, то

$$\frac{\partial(\varphi/\rho^2)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\varphi(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{\rho^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[-\varphi'_x(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\sin\theta + \varphi'_y(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cos\theta\right]. \quad (18)$$

Но

$$\begin{aligned}\varphi'_x(x,\ y) &= \varphi''_{xx}(0,\ 0)\,x + \varphi''_{xy}(0,\ 0)\,y + \alpha x + \beta y,\\ \psi'_y(x,\ y) &= \varphi''_{xy}(0,\ 0)\,x + \varphi''_{yy}(0,\ 0)\,y + \gamma x + \delta y,\end{aligned} \quad (19)$$

где α, β, γ, δ — бесконечно малые одновременно с ρ, а

$$\varphi''_{xx}(0,\ 0) = 2A_1, \qquad \varphi''_{xy}(0,\ 0) = 2B_1, \qquad \varphi''_{yy}(0,\ 0) = 2C_1.$$

Поэтому

$$\frac{\partial(\varphi/\rho^2)}{\partial\theta} = 2[(-A_1\cos\theta - B_1\sin\theta)\sin\theta + (B_1\cos\theta + C_1\sin\theta)\cos\theta] + o(1) \quad (20)$$

($o(1)$ — бесконечно малая).

Переходя в (20) к пределу при $\rho \to 0$, мы получаем (17). Непрерывность производной $\frac{\partial(\varphi/\rho^2)}{\partial\theta}$ доказана. Точно так же доказываются соответствующие утверждения для функций ψ/ρ, ψ/ρ^2.

Таким образом, в полосе $\Omega\ \{|\rho| < \rho^*\}$ функция $\Phi(\rho, \theta)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по θ. Но тогда для уравнения (15) в этой полосе справедлива теорема существования и единственности. Любой отрезок прямой $\rho = 0$ является для интегральных кривых уравнений (15) отрезком без контакта, и, следовательно, интегральные кривые ведут себя в полосе Ω (если ρ^* мало) так, как показано на рис. 102. Но это значит, если принять во внимание связь между траекториями системы (7) и отрезками интегральных кривых уравнения (15), что вдоль каждой полутраектории угол θ стремится к определенному пределу при $t \to +\infty$, т. е. каждая полутраектория стремится к 0 в определенном направлении. Из рассмотрения рис. 102 вытекает также справедливость второго утверждения теоремы.

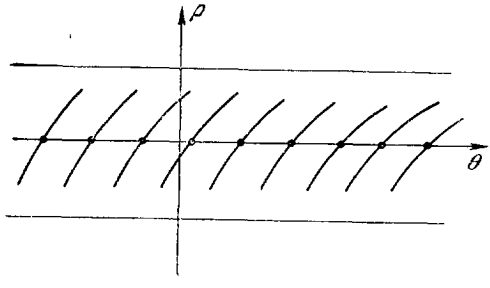


Рис. 102.

Таким образом, теорема доказана.

На рис. 106 (см. стр. 203) схематически изображено расположение траектории в окрестности дикритического узла.

5. Вырожденный узел. В случае, когда точка O (0, 0) является вырожденным узлом динамической системы, мы всегда можем с помощью «преобразования масштабов» привести систему к виду *)

$$\frac{dx}{dt} = x + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + y + \psi(x, y). \tag{21}$$

Поэтому мы ограничимся рассмотрением такой системы. Относительно функций φ и ψ мы предположим так же, как в случае дикритического узла, что они являются функциями класса C_2, причем в точке O (0, 0) эти функции равны нулю вместе со своими первыми производными. Как было показано в § 7, точка O (0, 0) является неустойчивым узлом системы (1): все траектории, проходящие в достаточно малой окрестности точки O, при $t \to -\infty$ стремятся к O. В силу следствия из леммы 1 (см. п. 2) угловые коэффициенты направлений, в которых траектории могут стремиться к O, определяются из уравнения

$$bk^2 + (a - d)k - c = 0. \tag{22}$$

В данном случае $b = 0$, $a - d = 0$, $c = 1$, оба корня уравнения (22) равны бесконечности, и мы получим два возможных направления $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

Теорема 22. *При сделанных выше предположениях относительно функций φ и ψ каждая полутраектория системы* (21), *стремящаяся к состоянию равновесия O, стремится к нему в определенном направлении, именно, либо в направлении $\pi/2$, либо в направлении $\frac{3}{2}\pi$; при этом имеется как бесчисленное множество полутраекторий, стремящихся к O в направлении $\pi/2$, так и бесчисленное множество полутраекторий, стремящихся к O в направлении $\frac{3}{2}\pi$.*

Доказательство. Считая, что $\varrho \neq 0$, и переходя обычным способом к полярным координатам, мы получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{d\varrho}{dt} &= \varrho\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + 1 + \frac{\varphi(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)}{\varrho}\cos\theta + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\psi(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)}{\varrho}\sin\theta\right) = R(\theta, \varrho), \\
\frac{d\theta}{dt} &= \cos^2\theta + \frac{\psi(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)}{\varrho}\cos\theta - \frac{\varphi(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)}{\varrho}\sin\theta = \Omega(\theta, \varrho).
\end{aligned} \tag{23}$$

Эта система определена для всех достаточно малых по абсолютной величине ϱ, отличных от нуля. Доопределим эту систему в точках $\varrho = 0$,

*) Как мы видели, в случае кратных корней характеристического уравнения система приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \ldots, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda y + \mu x + \ldots$$

Полагая $x = \alpha\xi$, $y = \eta$, $t = \beta\tau$, нетрудно видеть, что

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \beta\lambda\xi + \ldots, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \lambda\beta\eta + \alpha\beta\mu\xi + \ldots$$

Всегда можно α и β взять такими, чтобы мы имели $\beta\lambda = 1$, $\alpha\beta\mu = 1$.

положив при $\varrho = 0$

$$\frac{\varphi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\psi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho} = 0.$$

В п. 4 было показано, что таким образом доопределенные функции φ/ϱ, ψ/ϱ имеют в полосе Ω [$|\varrho| < \varrho^*$] непрерывные частные производные первого порядка по θ. С помощью непосредственных вычислений нетрудно показать, что эти функции имеют также непрерывные частные производные первого порядка по ϱ.

Для решения поставленной нами задачи достаточно выяснить, каково возможное поведение отрицательной полутраектории

$$\varrho = \varrho(t), \qquad \theta = \theta(t),$$

расположенной в полосе Ω, и установить, как ведет себя функция $\theta = \theta(t)$ при $t \to -\infty$ *). Заметим прежде всего, что если ϱ^* достаточно мало, то состояния равновесия системы (23), расположенные в полосе Ω, лежат на оси $\varrho = 0$, следовательно, для них $\cos^2\theta = 0$, т. е. $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Из первого уравнения системы (23) вытекает, что каждый отрезок оси $\varrho = 0$, заключенный между точками $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\theta = \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$, является траекторией системы (23), причем возрастанию времени t соответствует на этой траектории возрастание параметра θ. Указанные состояния равновесия на плоскости (ϱ, θ) не являются простыми. Действительно, рассмотрим, например, состояние равновесия $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В окрестности этого состояния равновесия система (23) может быть (принимая во внимание, что функции ψ/ϱ и φ/ϱ имеют непрерывные производные по θ и ϱ) представлена в виде **)

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= \varrho + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\varphi_1(\varrho,\ \theta) + \varrho\psi_1(\varrho,\ \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + a\varrho + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 \varphi_2(\theta) + \varrho\psi_2(\varrho,\ \theta), \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}} \varphi_1(\varrho,\ \theta) = 0, \qquad \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}} \psi_1(\varrho,\ \theta) \to 0,$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}} \varphi_2(\varrho,\ \theta) \to 0, \qquad \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}} \psi_2(\varrho,\ \theta) \to 0,$$

*) В случае узла с различными характеристическими корнями можно было бы вместо проведенного в теореме 20 доказательства провести рассмотрение, полностью аналогичное тому, которое мы проводим в настоящей теореме.

**) Обозначая через $R(\varrho,\ \theta)$ и $\Omega(\varrho,\ \theta)$ правые части соответственно первого и второго из уравнений (23), мы, очевидно, получим

$$R'_\theta\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right) = 0,\ R'_\rho\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right) = 1,\ \Omega'_\theta\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right) = 0$$

и

$$\Omega'_\rho\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right) = \left[\frac{\partial}{\partial\varrho}\left\{\frac{\psi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho}\cos\theta - \frac{\varphi(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)}{\varrho}\sin\theta\right\}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2},\ \rho=0} = a.$$

и α — некоторая постоянная, которая может быть как равной, так и не равной нулю. Мы имеем, следовательно, в рассматриваемом состоянии равновесия

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

А это означает, что состояние равновесия не является простым.

Поэтому изложенные в §§ 6 и 7 методы к нему неприменимы. Это состояние равновесия может быть исследовано методами, изложенными в §§ 11 и 22. Однако здесь мы даем его непосредственное рассмотрение.

Как было указано, для нас представляет интерес поведение отрицательной полутраектории $\varrho = \varrho(t)$, $\theta = \theta(t)$ $(t < t_0)$ системы (23), расположенной в полосе Ω. Из первого из уравнений (23), очевидно, следует, что если ϱ^* достаточно мало, то при $\varrho < \varrho^* (\varrho > 0)$ $\frac{d\varrho}{dt} \neq 0$, т. е. прямые $\varrho = \text{const}$, проходящие в полосе Ω, являются дугами без контакта для траекторий системы (23). Поэтому в полосе Ω, $\varrho(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to -\infty$.

Относительно $\theta(t)$ мыслимы три предположения: 1) при $t \to -\infty$ $\theta(t) \to +\infty$ или $\theta(t) \to -\infty$, 2) при $t \to -\infty$ функция $\theta(t)$ остается ограниченной; 3) при $t \to -\infty$ функция $\theta(t)$ не ограничена, но не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$ (например, как $t \sin t$).

Нетрудно видеть, что третий случай не может иметь место. Для этого рассмотрим, например, прямые $\theta = k\pi$. Когда ϱ^* достаточно мало, то на частях этих прямых, расположенных в полосе Ω, $\frac{d\theta}{dt} > 0$, $\frac{d\varrho}{d\theta} \neq 0$, и, следовательно, эти части являются отрезками без контакта. Если бы третий случай мог осуществляться, то траектория должна была бы пересекать отрезки без контакта $\theta = n\pi$ в противоположных направлениях, что не может быть. В случае же 2) полутраектория остается в ограниченной части плоскости и, следовательно, имеет предельный α-континуум, расположенный на оси $\varrho = 0$. Очевидно, такой континуум является состоянием равновесия, т. е. одной из точек $\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Покажем, что первый случай тоже не имеет места. Для этого покажем сначала, что к каждому из состояний равновесия $\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ стремится при $t \to -\infty$ по крайней мере одна полутраектория системы (23), расположенная в полосе Ω. Для определенности рассмотрим состояние равновесия $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, в окрестности которого правые части системы (23) имеют вид (24).

Проведем через точку $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ прямую

$$\varrho = \varkappa\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \tag{25}$$

где $\varkappa$ — некоторая положительная величина, которая будет подобрана позднее. Установим, как ведут себя траектории в точках прямой (25). Предполагая, что $\varrho(t_0) = \varkappa(\theta_0 - \pi/2)$, найдем выражение (ср. § 7, п. 3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho(t)}{\theta(t) - \frac{\pi}{2}}\right)\Bigg|_{t=t_0}.$$

После несложных вычислений мы получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho(t)}{\theta(t)-\frac{\pi}{2}}\right)\Big|_{t=t_0}=\left(\frac{\frac{d\varrho}{dt}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{d\theta}{dt}\varrho}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)\Bigg|_{t=t_0}=$$

$$=\left\{\frac{\left[\varrho+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\varphi_1+\varrho\psi_1\right]\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\varrho\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2+d\varrho+\ldots\right]}{(\theta-\pi/2)^2}\right\}\Bigg|_{t=t_0}=$$

$$=\varkappa-\varkappa^2\alpha+\left(\theta(t_0)-\frac{\pi}{2}\right)\Phi(\theta(t_0)).$$

При всяком α мы можем взять столь малое (фиксированное) $\varkappa$, чтобы $\varkappa-\varkappa^2\alpha>0$, и, далее, выбрать столь малое $\eta>0$, чтобы при всех θ, $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}+\eta$, мы имели бы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho}{\theta-\frac{\pi}{2}}\right)\Big|_{t=t_0}>0.$$

Рассмотрим треугольник CAB, образованный отрезком CA прямой (25) и отрезком прямой $\theta=\frac{\pi}{2}+\eta$ (рис. 103). Кроме того, выберем столь малое $\varrho^*>0$, чтобы при всех $|\varrho|<\varrho^*$ на прямой $\theta=\frac{\pi}{2}+\eta$

$$\left[\frac{d\theta}{dt}\right]>0.$$

Из рис. 103 нетрудно видеть, что всякая траектория, пересекающая отрезок CE прямой (25), отрезок ED прямой $\varrho=\varrho^*$ и отрезок DB прямой $\theta=\frac{\pi}{2}+\eta$, при убывании t входит внутрь области w, ограниченной этими отрезками и частью оси $\varrho=0$ (являющейся частью траектории), и при дальнейшем убывании t уже не может выйти из области w. Очевидно, и всякая траектория, проходящая через точки области w, при убывании t тоже не может выйти из этой области. А тогда всякая такая траектория должна непременно при $t\to-\infty$ стремиться к состоянию равновесия $C\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

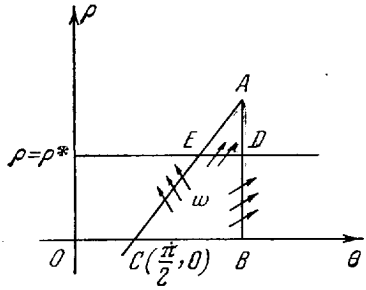


Рис. 103.

Но это значит, что существует бесчисленное множество траекторий системы (21), стремящихся при $t\to-\infty$ к состоянию равновесия O (0,0) в направлении $\frac{\pi}{2}$. В точности таким же образом устанавливается, что существует бесчисленное множество траекторий системы (21), стремящихся к точке O (0,0) в направлении $\frac{3}{2}\pi$. Отсюда следует, что для каждого состояния равновесия $\left(0,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ системы (23) на плоскости (ϱ, θ) имеются полутраектории этой системы, расположенные выше оси θ и стремящиеся к этому состоянию равновесия при $t\to-\infty$. Но тогда система (23) не может иметь траекторий $\varrho=\varrho(t)$, $\theta=\theta(t)$, для которых при $t\to-\infty$ $\varrho(t)\to0$, а $\theta(t)\to\infty$. Следовательно, каждая полутраектория систе-

мы (21), стремящаяся к состоянию равновесия O, стремится к нему в определенном направлении, т. е. в одном из направлений $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$. Теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что траектории системы класса C_2 ведут себя в окрестности вырожденного узла таким же образом (в смысле направления траекторий, входящих в узел), как траектории соответствующей линейной системы.

На рис. 105, *а* изображен «вырожденный» узел в случае системы, приведенной к каноническому виду (21). На рис. 105, *б* изображен вырожденный узел в общем случае.

6. Седло и фокус. Рассмотрим сначала случай *седла*. Система (приведенная к канонической форме) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y + \psi(x, y), \tag{26}$$

где $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Относительно функций φ и ψ достаточно допустить, что они класса C_1.

В § 7, п. 3 было показано, что одна из сепаратрис седла O, стремящаяся к O при $t \to +\infty$ (обозначим ее через L_1), обладает следующим свойством: каково бы ни было число $K_0 > 0$, все точки сепаратрисы L_1, соответствующие достаточно большим t, лежат в области, ограниченной полупрямыми $y = +K_0 x$ и $y = -K_0 x$, содержащими положительную полуось x (т. е. луч $\theta = 0$). Но это означает (см. замечание 1 в начале п. 1), что сепаратриса L_1 стремится к точке O в направлении $\theta = 0$. Точно так же остальные три сепаратрисы стремятся к состоянию равновесия O в направлениях π, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$. Таким образом, мы получаем следующую теорему:

Теорема 23. *В случае, когда точка O (0, 0) является седлом, все полутраектории системы* (26), *стремящиеся к точке O, т. е. сепаратрисы седла O, стремятся к нему в определенных направлениях. При этом две сепаратрисы стремятся к точке O в направлениях 0 и π, а остальные две — в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$.*

Из теоремы 23 следует, что относительно направления траекторий, входящих в седло, система (26) ведет себя в точности так же, как соответствующая линейная система

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y,$$

т. е. члены $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ при этом роли не играют.

В случае, когда система не приведена к каноническому виду

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y),$$

направления k_1 и k_2, по которым сепаратрисы стремятся к состоянию равновесия O, определяются из квадратного уравнения

$$bk^2 - (d - a)k + c = 0.$$

На рис. 107, *а* изображено расположение траекторий в окрестности седла в случае, когда система имеет канонический вид, а на рис. 107, *б* — в общем случае.

Переходим к рассмотрению простого *фокуса*, либо сложного фокуса, не являющегося центром или центрофокусом.

Канонический вид системы:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y + \psi(x, y).$$

Будем считать, что $\alpha \leqslant 0$, $\beta > 0$. Тогда, как известно (см. § 8), все полутраектории, проходящие в окрестности состояния равновесия, являются спиралями, стремящимися к точке O при $t \to +\infty$, причем вдоль каждой полутраектории угол $\theta(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, ни одна полутраектория, стремящаяся к фокусу, не стремится к нему в определенном направлении. В силу леммы 1 касательная к полутраектории не стремится ни к какому предельному положению. Покажем, что касательная так сказать «неограниченно вращается» в одном и том же направлении. Это утверждение сейчас будет уточнено.

Пусть L^+ — рассматриваемая полутраектория (спираль), $M(t)$ — точка ее, соответствующая значению t времени. Рассмотрим функцию $\omega(t)$, определенную и непрерывную для всех достаточно больших значений t и равную при каждом t значению угла между положительным направлением оси абсцисс и положительным направлением касательной к полутраектории L^+ в точке $M(t)$ (таких функций $\omega(t)$ существует бесчисленное множество, и все они отличаются друг от друга на кратное 2π (см. § 8, п. 1), мы берем одну из них).

Докажем, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t) = +\infty$. Для этого заметим, что в достаточно малой окрестности точки O отрезки $\theta = \text{const}$, $\rho > 0$ являются отрезками без контакта для траекторий системы (см. § 8, п. 5, лемма 3). Поэтому ни для какой точки окрестности радиус-вектор не коллинеарен с касательной к траектории, проходящей через эту точку.

Рассмотрим разность $d(t) = \omega(t) - \theta(t)$. Очевидно, $d(t)$ есть непрерывная функция, которая не может в силу указанной неколлинеарности принимать значения, кратные π. Поэтому все значения функций $d(t)$ расположены в одном из интервалов $(k\pi, (k+1)\pi)$ (k — целое), т. е. $d(t)$ ограничена. Но тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \omega(t) = \lim_{t \to +\infty} [\theta(t) + d(t)] = +\infty.$$

В случае, когда $\beta < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t) = -\infty$. Расположение траектории в окрестности фокуса изображено на рис. 108, *а* и *б*.

7. Сводка сведений о простых состояниях равновесия с не равными нулю действительными частями характеристических корней *). Сводка, которая здесь дается, может оказаться полезной при качественном рассмотрении конкретных динамических систем.

В предположении, что рассматриваемое состояние равновесия лежит в начале координат, система в окрестности этого состояния равновесия записывается в виде (§ 7)

$$\dot{x} = ax + by + \varphi(x, y), \qquad \dot{y} = cx + dy + \psi(x, y).$$

Характеристическое уравнение состояния равновесия O

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0 \tag{27}$$

$$[\sigma = a + d, \ \Delta = ad - bc].$$

*) Состояния равновесия с чисто мнимыми корнями, рассмотренные в § 8, здесь, очевидно, не фигурируют.

Для простого состояния равновесия по самому его определению $\Delta \neq 0$, т. е. корни уравнения (27) — характеристические корни — отличны от нуля. Уравнение, определяющее направления, по которым траектории стремятся к состояниям равновесия:

$$bk^2 - (d - a)k + c = 0. \tag{28}$$

Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (27) и корни k_1 и k_2 уравнения (28) связаны соотношениями

$$k_1 = \frac{d - \lambda_1}{b}, \qquad k_2 = \frac{d - \lambda_2}{b}.$$

Очевидно, корни k_1 и k_2 действительны тогда и только тогда, когда действительны λ_1 и λ_2.

В зависимости от того, каковы характеристические корни состояния равновесия, система может быть в окрестности этого состояния равновесия приведена линейным преобразованием переменных к одному из следующих видов, которые называются «каноническими» (обозначения переменных сохраняются прежними).

1. Характеристические корни действительны и различны ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Канонический вид системы:

$$\dot{x} = \lambda_1 x + \varphi(x, y), \qquad \dot{y} = \lambda_2 y + \psi(x, y).$$

2. Характеристические корни равны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Канонический вид системы:

$$\dot{x} = \lambda x + \varphi(x, y), \qquad \dot{y} = \lambda y + \mu x + \psi(x, y)$$

(μ может быть как равным, так и не равным нулю).

3. Характеристические корни — комплексно сопряженные

$$(\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \qquad \beta \neq 0).$$

Канонический вид системы:

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y + \varphi(x, y), \qquad \dot{y} = \beta x - \alpha y + \psi(x, y).$$

Мы перечислим ниже все возможные типы состояний равновесия с не равными нулю действительными частями характеристических корней и приведем схематические рисунки расположения траекторий в окрестности этих состояний равновесия, используя полученные в §§ 8 и 9 сведения о возможном характере стремления траекторий к состоянию равновесия *). Для узлов и фокусов рисунки даются лишь в случае, когда эти состояния равновесия устойчивы. Полностью аналогичные рисунки лишь с измененными направлениями стрелок могут быть даны для случая, когда они неустойчивы.

Кроме того, для не дикритического узла и для седла мы приводим рисунки, как в случае, когда рассматриваемая система имеет канонический вид, когда направления, по которым к состоянию равновесия стремятся траектории, совпадают с направлением координат, так и в «общем случае», т. е. в случае, когда система не имеет канонического вида, так что направления k_1 и k_2 могут быть любыми.

*) При этом нужно иметь в виду, что результаты, полученные в случаях вырожденного и дикритического узлов, справедливы лишь в случае, когда система принадлежит классу C_2.

I. Узел (характеристические корни действительны и одинаковых знаков):

a_1) Невырожденный *устойчивый* узел $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ ($\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, $\sigma < 0$).

a_2) Невырожденный *неустойчивый* узел $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

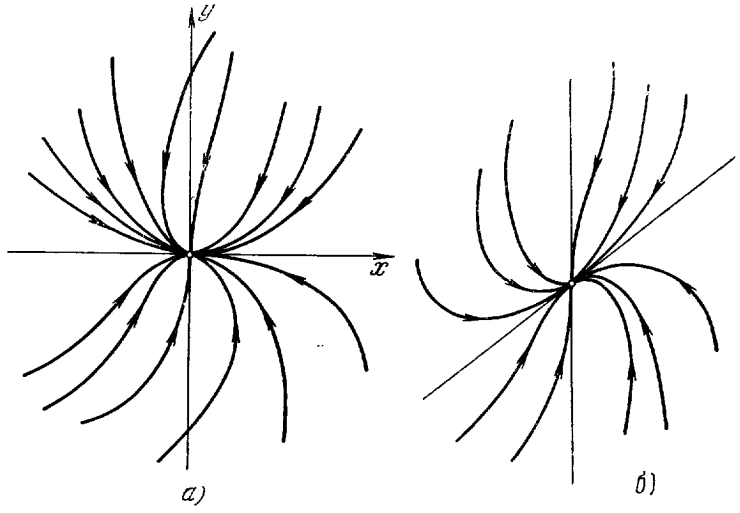


Рис. 104.

Рис. 104, *а* и рис. 104, *б* соответствуют устойчивому узлу, при этом рис. 104, *а* — случаю, когда система имеет канонический вид, а рис. 104, *б* —«общему» случаю.

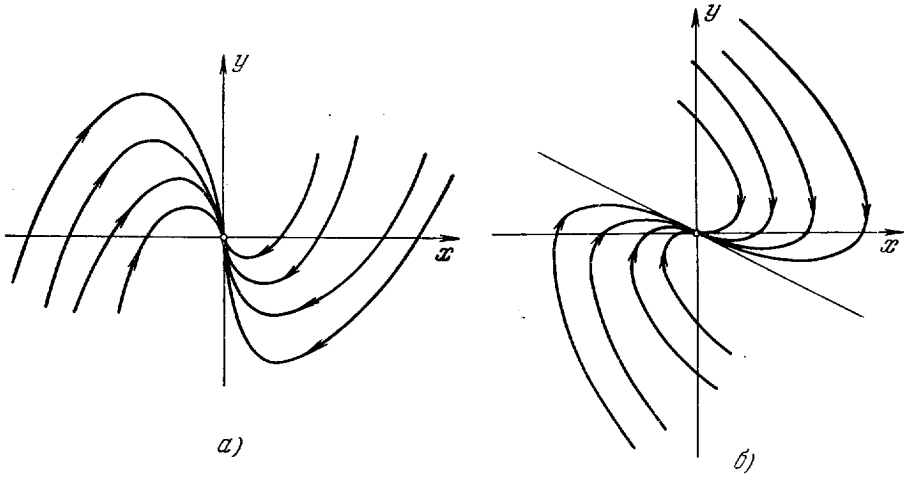


Рис. 105.

$б_1$) Устойчивый вырожденный (не дикритический) узел $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, $\mu \neq 0$ (т. е. $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta = 0$, $\sigma < 0$).

$б_2$) Неустойчивый вырожденный узел $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, $\mu \neq 0$.

Рис. 105, *а* соответствует случаю системы в каноническом виде, рис. 105, *б* — общему случаю.

$в_1$) Устойчивый дикритический узел (рис. 106) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, $\mu = 0$.

$в_2$) Неустойчивый дикритический узел $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, $\mu = 0$.

II. Седло (характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и разных знаков) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ (или $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$), т. е. $\Delta < 0$. Рис. 107, *а* соответствует случаю системы в каноническом виде, рис. 107, *б* «общему» случаю. (При $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ направления на траекториях должны быть изменены на противоположные.)

III. Фокус (характеристические корни комплексно-сопряженные)

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0$$

(т. е. $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$).

$г_1$) Устойчивый фокус $\alpha < 0$.

$г_2$) Неустойчивый фокус $\alpha > 0$.

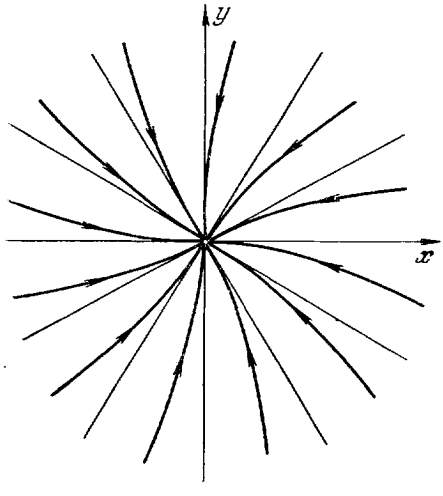


Рис. 106.

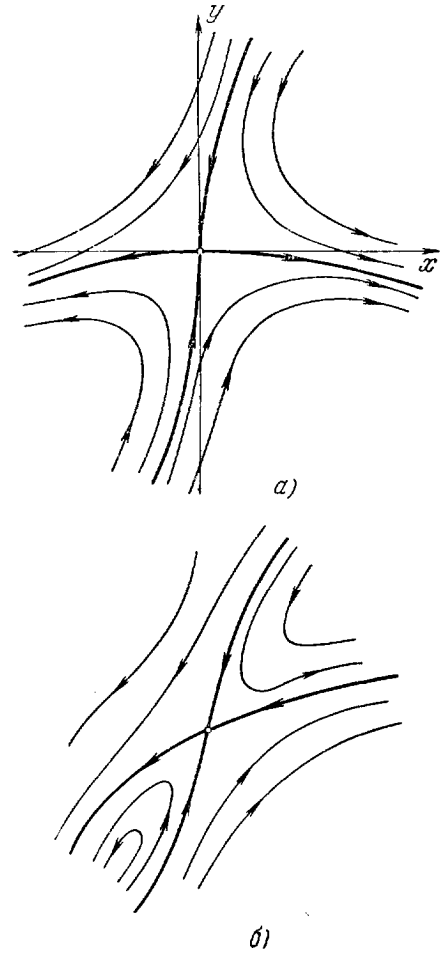


Рис. 107.

Рис. 108, *а* соответствует случаю устойчивого фокуса при $\beta > 0$ (а рис. 108, *б* при $\beta < 0$).

Напомним, что топологическая структура расположения траекторий в окрестности узла и фокуса одинакова.

8. Примеры.

Пример 1.

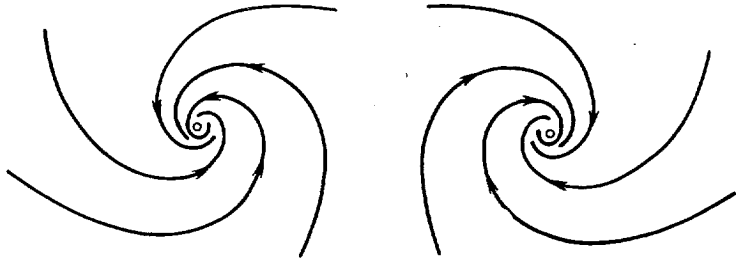
$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = x(a^2 - x^2) + by.$$

Состояние равновесия O (0, 0) — седло. Определим направления сепаратрис в седле. Уравнение для нахождения углового коэффициента сепаратрис в седле имеет вид $k^2 - bk - a^2 = 0$, откуда $k_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$.

Пример 2 [72].

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 7y + x(|x|^{1/2} - 12).$$

Состояние равновесия O (0, 0)—неустойчивый узел. Определим возможные



а) *б)*

Рис. 108.

направления траекторий в узле O. Получим $k^2 - 7k + 12 = 0$, откуда $k_1 = 3$, $k_2 = 4$.

Пример 3 [73].

$$\dot{x} = -x(2 + y), \qquad \dot{y} = x + \beta y.$$

Состояние равновесия O (0, 0) — седло. Уравнение для определения направлений сепаратрис в седле $(\beta + 2)\, k + 1 = 0$, откуда $k = -\frac{1}{2+\beta}$. Нетрудно видеть, что второе значение k есть ∞, а сепаратриса с наклоном $k = \infty$ есть прямая $x = 0$.

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ИНДЕКСА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Введение

Понятие индекса Пуанкаре (вместе с его обобщениями) относится к теории векторных полей и в настоящее время играет важную роль не только в качественной теории динамических систем, но и в ряде других областей (топологии, функциональном анализе и их приложениях). Используя теорию индекса, мы можем получить весьма важные сведения о некоторых основных свойствах динамических систем.

Понятие индекса основано на понятии *вращения векторного поля*. Если на простой замкнутой кривой задано непрерывное векторное поле, то вращением этого поля вдоль кривой называется, грубо говоря, число полных оборотов, которое делает вектор поля при однократном обходе этой кривой в положительном направлении (точное определение дано в п. 2 § 6). Индекс Пуанкаре изолированного состояния равновесия O динамической системы есть вращение векторного поля, определяемого этой системой, вдоль любой достаточно малой замкнутой кривой, содержащей точку O внутри себя.

Ряд приложений теории индекса основан на том, что индекс замкнутой кривой равен сумме индексов состояний равновесия, расположенных внутри этой кривой (теорема 27), и что индекс замкнутой траектории, а также цикла без контакта равен 1 (теоремы 28 и 29). Из этих теорем вытекают некоторые основные условия возможности совместного существования замкнутых траекторий динамической системы и состояний равновесия того или иного типа.

В конце § 11 вычисляются индексы простых состояний равновесия.

§ 10. Индекс пуанкаре

1. Вращение векторного поля. Введем основные понятия теории индекса.

Понятия, о которых пойдет речь, имеют смысл и значение для векторных полей более общего типа, чем векторные поля, определяемые рассматриваемыми нами динамическими системами (т. е. чем «непрерывно дифференцируемые векторные поля»). Именно, эти понятия имеют смысл для любых *непрерывных полей*. Так как при выводе некоторых основных фактов, касающихся динамических систем (индекса замкнутой траектории), в дальнейшем используется рассмотрение непрерывного недифференцируемого поля, то все основные понятия мы введем в предположении, что рассматриваемое поле непрерывно и может не быть дифференцируемым.

Говорят, что на множестве K плоскости (x, y) (в частности, в некоторой области плоскости) задано некоторое векторное поле, если в каждой точке $M(x, y)$ множества K задан вектор $\boldsymbol{v}(M)$, причем компоненты этого вектора $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ являются непрерывными функциями точки. Далее, говорят, что *векторное поле не имеет особенностей, если оно не содержит нулевых векторов*, т. е. таких, для которых компоненты X и Y одновременно равны нулю. В каждой неособой точке определена длина вектора и его направление. Угол ω между положительным направлением оси x и направлением вектора определяется соотношениями (см. дополнение, § 5)

$$\cos\omega = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \qquad \sin\omega = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Очевидно, при сделанных предположениях длина вектора и угол ω определяются однозначно и являются непрерывными функциями точки *).

Для введения основных понятий теории индекса достаточно рассматривать векторное поле, определенное только на заданной кривой (а не в некоторой области плоскости).

Под полем, *заданным на кривой*, мы будем в дальнейшем всегда подразумевать *непрерывное векторное поле без особенностей* и не будем оговаривать это каждый раз особо.

Рассмотрим сначала случай, когда поле v задано на простой дуге l. Определим для такого поля *угловую функцию*. Пусть на плоскости (x, y) имеется система координат. *Полярным* углом ненулевого вектора $\boldsymbol{v}$ мы будем называть угол между положительным направлением оси Ox и вектором $\boldsymbol{v}$, отсчитываемый против часовой стрелки. Полярный угол определен неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Мы будем называть *угловой функцией векторного поля* v, заданного на дуге l относительно данной системы координат, всякую функцию $\alpha = F(M)$, обладающую следующими двумя свойствами: 1) $F(M)$ есть однозначная функция, определенная и непрерывная для всех точек $M \in l$; 2) для любой точки $M \in l$ $F(M)$ представляет из себя полярный угол вектора $\boldsymbol{v}(M)$ (конечно, уже вполне определенный).

Докажем прежде всего, что угловые функции существуют. Напомним, что углом между векторами $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{v}_1$ на плоскости ($\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{v}_1$ — два ненулевых вектора) называется наименьший по величине угол, на который надо повернуть вектор $\boldsymbol{v}_0$ до совпадения его по направлению с вектором $\boldsymbol{v}_1$ (см. по этому поводу дополнение, § 5).

Будем обозначать угол между векторами $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{v}_1$ через

$$\theta(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1).$$

Мы имеем (см. дополнение, § 5)

$$-\pi < \theta(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1) \leqslant \pi.$$

Легко показать, если принять во внимание замкнутость множества точек кривой l и непрерывность, а следовательно, и равномерную непрерывность вектор-функции $\boldsymbol{v}(M)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение кривой C точками $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$ (M_0, M_n — концевые точки кривой, а увеличение номера n соответствует движению по C в какомнибудь определенном ее направлении рис. 109), удовлетворяющее следующему требованию: для любых двух точек M', M'', принадлежащих

*) В особых точках направление вектора не определено.

одному и тому же отрезку $M_{k-1}M_k$ кривой l,

$$|\theta(\boldsymbol{v}(M'), \boldsymbol{v}(M''))| < \varepsilon.$$

Построение угловой функции $\alpha = F(M)$ векторного поля, заданного на дуге l, можно произвести следующим образом: выберем в качестве ε число меньшее π и возьмем какое-нибудь соответствующее этому ε разбиение $M_0, M_1, \ldots, M_n$ кривой l. Положим, что $F(M_0) = \alpha_0$, где α_0 — какое-нибудь (произвольное, но фиксированное) значение полярного угла вектора $\boldsymbol{v}(M_0)$. Далее, для каждой точки M части M_0M_1 дуги l положим, что $F(M) = \alpha_0 + \theta(\boldsymbol{v}(M_0), \boldsymbol{v}(M))$. Предполагая, что $F(M)$ уже построена для всех точек отрезков $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{k-2}M_{k-1}$, мы положим, далее, что если M принадлежит отрезку $M_{k-1}M_k$, то

$$F(M) = F(M_{k-1}) + \theta(\boldsymbol{v}(M_{k-1}), \boldsymbol{v}(M)) \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Таким образом, мы получим функцию $F(M)$, определенную для всех точек $M \in l$. Легко видеть, что эта функция обладает свойствами 1) и 2), т. е. является угловой функцией поля v.

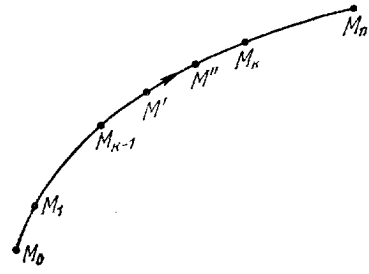


Рис. 109.

Выясним, чем отличаются различные угловые функции заданного поля.

Л е м м а 1. Если $F(M)$ и $F_1(M)$ — *две угловые функции векторного поля* v, *заданного на дуге* l (*относительно одной и той же системы координат на плоскости*), *то при всех* $M \in l$ $F_1(M) = F(M) + 2\pi r$, *где* r — *постоянное целое число. Если же* $F(M)$ и $\Phi(M)$ — *угловые функции поля* v *на дуге* l *относительно двух различных прямоугольных систем координат на плоскости, то*

$$\Phi(M) = F(M) + \text{const}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $F(M)$ и $F_1(M)$ — две угловые функции, соответствующие одной и той же системе координат на плоскости (x, y), то в силу условия 2) для любой точки $M \in l$ $F_1(M) - F(M) = 2\pi r(M)$, где r — целое. Но тогда в силу непрерывности, $r(M)$ есть постоянное число.

Предположим теперь, что $F(M)$ — угловая функция поля v относительно системы координат xOy, а $\Phi(M)$ — относительно системы координат $x'O'y'$. Пусть α_0 — угол между осью Ox и $O'x'$. Тогда очевидно, что $\Phi(M) + \alpha_0$ есть угловая функция поля v по отношению к системе xOy, и в силу выше доказанного $\Phi(M) + \alpha_0 = F(M) + 2\pi r$. Следовательно,

$$\Phi(M) = F(M) + (2\pi r - \alpha_0) = F(M) + \text{const}.$$

Лемма доказана.

Определим теперь вращение векторного поля вдоль простой дуги.

О п р е д е л е н и е X. *Пусть* l — *простая дуга,* $v(M)$ — *векторное поле, заданное на ней,* M_1M_2 — *какая-нибудь часть дуги* l, *на которой выбрано направление от начальной точки* M_1 *к конечной* M_2, *и пусть* $F(M)$ — *какая-нибудь угловая функция поля* v, *заданного на дуге* l. Мы будем называть *вращением поля* v *вдоль части* M_1M_2 *дуги* l *и обозначать через* $w(v, M_1M_2)$ *число*

$$w(v, M_1M_2) = [F(M_2) - F(M_1)]. \qquad (1)$$

В частности, когда M_1 и M_2 — начальная и соответственно конечная точка рассматриваемой дуги l, то мы будем говорить о *вращении вектора вдоль простой дуги* l и будем обозначать его через $w(v, l)$. Из леммы 1 и определения X следует, что вращение векторного поля вдоль простой дуги l не зависит ни от выбора системы координат на плоскости (x, y), ни от выбора угловой функции $F(M)$ поля v относительно данной системы координат.

Отметим следующие два очевидных свойства, непосредственно вытекающих из формулы (1):

а) при замене на дуге направления на противоположное вращение векторного поля на этой дуге меняет знак, т. е.

$$w(v,\ M_1M_2) = -w(v,\ M_2M_1);$$

б) если $M_1M_2M_3$ — произвольные три точки дуги, то

$$w(v,\ M_1M_3) = w(v,\ M_1M_2) + w(v,\ M_2M_3)$$

(аддитивность).

2. Индекс простой замкнутой кривой по отношению к заданному на ней векторному полю. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что на рассматриваемой замкнутой кривой выбрано положительное направление обхода.

Пусть C — какая-нибудь замкнутая кривая, M_1 и M_2 точки на ней. Под дугой M_1M_2, соответственно, M_2M_1 мы будем понимать дугу кривой C с начальной точкой M_1 и конечной M_2 (соответственно, M_2 и M_1), на которой направление от точки M_1 к M_2 (от M_2 к M_1) совпадает с направлением, индуцированным (см. дополнение, § 2) положительным обходом кривой C. Дуги M_1M_2 и M_2M_1 являются, таким образом, вполне определенными и различными дугами кривой C с общими концами (рис. 110).

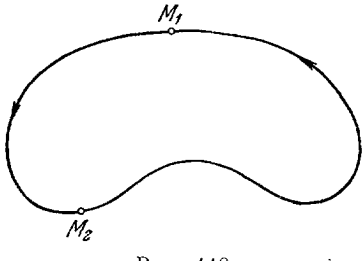


Рис. 110.

Определение XI. *Индексом простой замкнутой кривой C плоскости (x, y) по отношению к заданному на ней векторному полю мы будем называть число*

$$I(C,\ v) = \frac{1}{2\pi}[w(v,\ M_1M_2) + w(v,\ M_2M_1)]. \qquad (2)$$

Мы будем обозначать индекс простой замкнутой кривой C через $I(C)$. Очевидно, данное определение индекса замкнутой кривой не зависит от того, какие именно точки M_1 и M_2 выбраны на кривой C. Это легко доказывается при помощи свойства б) (аддитивности) вращения поля на дуге.

Пусть кривая C задана параметрическим уравнением $M = M(u)$, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, причем точки $M(\alpha)$ и $M(\beta)$ совпадают, и возрастанию u соответствует положительное направление обхода кривой C (рис. 111). Угловой функцией векторного поля v, заданного на кривой C, можно назвать функцию $F(u)$, определенную и непрерывную при всех u, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, и такую, что при любом u $F(u)$ есть полярный угол вектора $v(u)$. Существование угловой функции $F(u)$ доказывается в точности так же, как существование угловой функции $F(M)$ в п. 1. Однако в данном случае функция $F(u)$ связана с определенной параметризацией кривой C.

Легко видеть, что

$$I(C) = \frac{1}{2\pi}[F(\beta) - F(\alpha)]. \qquad (3)$$

Из этого равенства следует, в частности, что число $F(\beta) - F(\alpha)$ не зависит от выбора параметризации на кривой C. Таким образом, для вычисления индекса замкнутой кривой C (по отношению к заданному полю) можно взять произвольную параметризацию кривой, построить опять-таки произвольную угловую функцию $F(u)$ и воспользоваться формулой (3). Из формулы (3) вытекает, что индекс замкнутой кривой есть всегда целое число, так как $F(\beta)$ и $F(\alpha)$ являются полярными углами одного и того же вектора $\boldsymbol{v}(M(\alpha)) = \boldsymbol{v}(M(\beta))$, и, следовательно, $[F(\beta) - F(\alpha)]$ — число, кратное 2π.

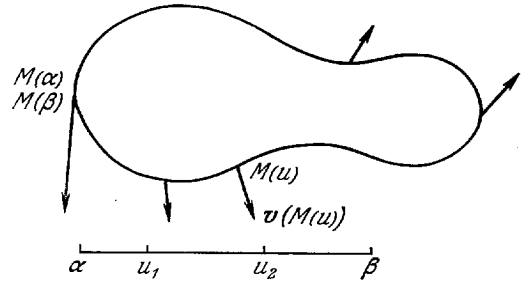


Рис. 111.

Мы докажем сейчас несколько важных предложений.

Лемма 2. *Если на простой замкнутой кривой C заданы два поля $v(M)$ и $v^*(M)$ и если ни в одной точке $M \in C$ векторы $\boldsymbol{v}(M)$ и $\boldsymbol{v}^*(M)$ не имеют противоположных направлений, то $I(C, v) = I(C, v^*)$.*

Доказательство. Зададим на замкнутой кривой C параметризацию $M = M(u)$, и пусть $F(u)$ — угловая функция поля v, соответствующая данной параметризации. Пусть $\theta(u) = \theta[\boldsymbol{v}(M(u)), \boldsymbol{v}^*(M(u))]$ — наименьший угол между вектором $\boldsymbol{v}(M(u))$ и вектором $\boldsymbol{v}^*(M(u))$. В силу условия леммы $|\theta(u)| < \pi$. Легко видеть, что $\theta(u)$ является непрерывной функцией u на сегменте $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, причем $\theta(\alpha) = \theta(\beta)$. Рассмотрим функцию $F^*(u) = F(u) + \theta(u)$. Очевидно, $F^*(u)$ является угловой функцией поля v^* (рис. 112). Мы имеем

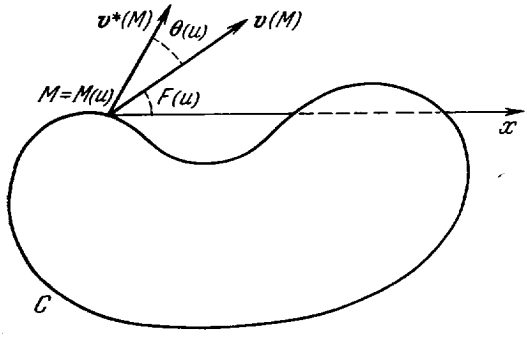


Рис. 112.

$$w(v^*, C) = \frac{1}{2\pi}[F^*(\beta) - F^*(\alpha)] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}[F(\beta) - F(\alpha) + \theta(\beta) -$$
$$- \theta(\alpha)] = \frac{1}{2\pi}[F(\beta) - F(\alpha)] =$$
$$= w(v, C).$$

Лемма доказана.

Определение XII. *Пусть v и v^* — два поля, заданных на кривой C. Говорят, что поле v можно деформировать в v^*, если существует соединяющее эти поля семейство полей, т. е. такое непрерывное семейство полей v_τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, определенных на C, что $v = v_0$ и $v^* = v_1$ (непрерывность означает здесь, что вектор $\boldsymbol{v}_\tau(M)$, $M \in C$, $\tau \in [0, 1]$, есть непрерывная функция обоих своих аргументов τ и M. Все рассматриваемые поля — поля без особенностей).*

Лемма 3. *Если поле v можно деформировать в поле v^*, то индексы кривой C по отношению к этим полям равны, т. е.*

$$I(C, v) = I(C, v^*).$$

Доказательство. Пусть $v_\tau(M)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ есть семейство, соединяющее поля v и v^*. Вектор-функция $\boldsymbol{v}_\tau(M)$ является непрерывной функцией, заданной на компактном множестве (топологическом произведении кривой C и сегмента $[0, 1]$), и, следовательно, равномерно-непрерывна. Поэтому при всяком $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $|\tau' - \tau''| < \delta$, $\tau' \in [0, 1]$, $\tau'' \in [0, 1]$, то $|\boldsymbol{v}_{\tau'}(M) - \boldsymbol{v}_{\tau''}(M)| < \varepsilon$ для любого $M \in C$. Далее, так как по условию v_τ — поле без особенностей, то $\boldsymbol{v}_\tau(M) \neq 0$, и $|\boldsymbol{v}_\tau(M)|$ достигает наименьшего значения, которое мы обозначим через m:

$$m = \min \{|\boldsymbol{v}_\tau(M)|\}; \quad M \in C, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

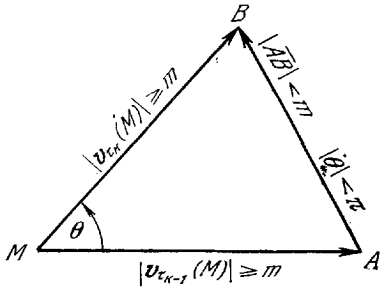


Рис. 113.

Возьмем в качестве ε число m, найдем соответствующее ему число δ и разобьем отрезок $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ точками

$$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{k-1} < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = 1$$

так, чтобы разность $\tau_k - \tau_{k-1}$ была меньше δ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда для любой точки $M \in C$, очевидно, векторы $\boldsymbol{v}_{\tau_{k-1}}(M)$ и $\boldsymbol{v}_{\tau_k}(M)$ не имеют противоположных направлений (рис. 113), и, следовательно, в силу предыдущей леммы

$$I(C, v_{\tau_{k-1}}) = I(C, v_{\tau_k}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что

$$I(C, \boldsymbol{v}_0) = I(C, v_1),$$

т. е.

$$I(C, v) = I(C, v^*).$$

Лемма доказана.

Приведем еще одну вспомогательную лемму, в которой рассматривается векторное поле, определенное уже не на кривой, а в области, ограниченной простой замкнутой кривой.

Лемма 4. *Пусть C — простая замкнутая кривая, Γ — область внутри нее, $\overline{\Gamma}$ — замыкание этой области. Если v — векторное поле без особенностей, заданное на $\overline{\Gamma}$, то индекс кривой C по отношению к этому полю* *) *равен нулю*

$$I(C, v) = 0.$$

Доказательство: а) Предположим сначала, что кривая C есть окружность радиуса 1 с центром S, и, следовательно, Γ есть круг. Введем в круге $\overline{\Gamma}$ систему координат (полярную), определяя положение каждой точки круга $\overline{\Gamma}$ координатами ϱ и θ (ϱ — расстояние до центра S, $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$, θ — полярный угол, рис. 114). Пусть вектор $\boldsymbol{v}(\varrho, \theta)$ есть вектор поля v, соответствующий точке круга с координатами (ϱ, θ). Рассмотрим на круге C семейство полей $v_\tau(\theta)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $0 \leqslant 0 \leqslant 2\pi$,

*) Точнее надо сказать: «По отношению к полю v, рассматриваемому на кривой C, или к полю, индуцированному полем v на кривой C».

определенное соотношениями

$$\boldsymbol{v}_\tau(\theta) = \boldsymbol{v}(\tau, \theta).$$

Очевидно, это есть семейство, соединяющее поле $v_0(\theta)$ с полем $v_1(\theta)$. Следовательно, в силу предыдущей леммы $I(C, v_0) = I(C_1, v_1)$. Однако поле v_1, как ясно из конструкции, совпадает с полем v (рассматриваемым на C), а поле $v_0(\theta)$ состоит из равных векторов (именно, из векторов, равных вектору поля v, соответствующему точке S, т. е. вектору $\boldsymbol{v}(0, \theta)$). Поэтому угловой функцией $F(\varrho)$ поля v_0 является константа, т. е. $I(C, v_0) = 0$. Но тогда и $I(C, v) = 0$.

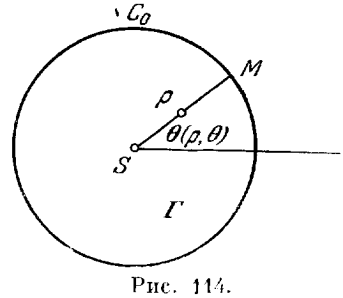


Рис. 114.

б) Пусть теперь C — произвольная простая замкнутая кривая, ограничивающая область Γ плоскости (x, y). Пусть K — единичный круг плоскости R^2 с границей C_0 (рис. 115) и T — топологическое отображение области $\bar{\Gamma}$ на круг K, сохраняющее ориентацию (см. дополнение, § 2).

По условию в области Γ определено поле v. «Перенесем» это поле при помощи отображения T на круг K, т. е. построим на K поле u^*, совпадающее с полем v^*, положив, что $\boldsymbol{v}^*(T(M)) = \boldsymbol{v}(M)$. Очевидно, v^* есть поле без особенностей, и в силу доказанного выше $I(C_0, v^*) = 0$. Нетрудно видеть, однако, что $I(C, v) = I(C_0, v^*)$. В самом деле, для вычисления $I(C, v)$ надо параметризовать кривую C, положив, что $M = M(u)$

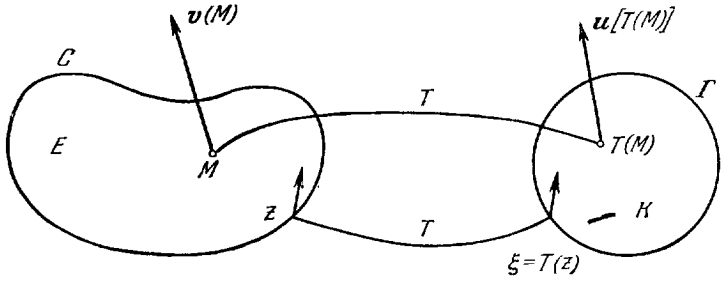


Рис. 115.

$(M \in C, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$, построить угловую функцию $F(u)$ поля v и вычислить $\frac{1}{2\pi}[F(\beta) - F(\alpha)]$. Перенеся при помощи отображения T параметризацию с кривой C на окружность C_0, т. е. положив, что

$$\xi(u) = T(M(u)) \qquad (\xi \in C_0;\ M \in C),$$

и принимая во внимание, что $\boldsymbol{v}^*(\xi) = \boldsymbol{v}(M)$, мы непосредственно убеждаемся, что построенная нами для поля v, заданного на кривой C, угловая функция $F(u)$, является одновременно и угловой функцией поля $\boldsymbol{v}^*$, заданного на C_0. Поэтому $I(C, v) = I(C_0, v^*) = 0$. Лемма доказана.

Следующая теорема, опирающаяся на лемму 4, существенно используется при рассмотрении динамических систем. Мы приведем ее доказательство, принадлежащее Хопфу.

3. Поле касательных к замкнутой кривой.

Теорема 24 (Пуанкаре). *Индекс гладкой простой замкнутой кривой по отношению к полю своих касательных равен* $+1$.

Доказательство. Пусть C — рассматриваемая простая замкнутая кривая. Ввиду ее гладкости C является спрямляемой кривой. Будем считать для определенности, что длина кривой C равна 1 и направление касательного вектора v в каждой точке кривой C соответствует положительному направлению обхода на C (длины векторов v роли не играют, лишь бы они отличались от нуля: можно, например, считать, что v представляет поле единичных касательных векторов).

Пусть M_0 — точка кривой C с наименьшей ординатой, по крайней мере одна такая точка существует. Тогда касательная к C в точке M_0 горизонтальна, и вся кривая C лежит выше этой касательной (рис. 116).

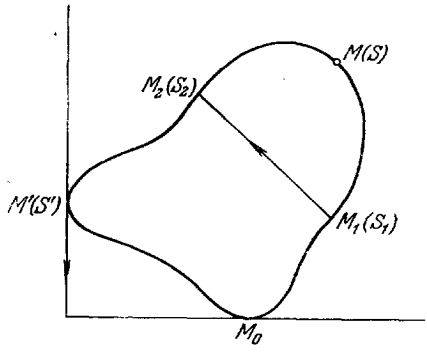


Рис. 116.

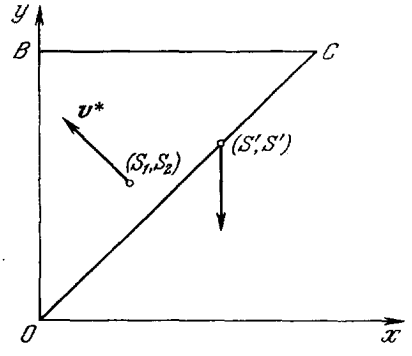


Рис. 117.

Мы будем отсчитывать длину дуги на C от точки M_0 в положительном направлении. Тогда каждую точку M кривой C, отличную от M_0, можно охарактеризовать определенным значением s $(0 < s < 1)$ — координатой этой точки на кривой C. Точке M_0 соответствуют два значения: $s = 0$ и $s = 1$.

Рассмотрим треугольник OBC плоскости (x, y), ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 1$, $x = y$ (рис. 117). Каждой точке этого треугольника с координатами (s_1, s_2) (очевидно, $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant 1$) поставим в соответствие единичный вектор v^* (s_1, s_2), имеющий направление вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, где M_1 (s_1), M_2 (s_2) — точки кривой C с координатами s_1 и s_2. При этом, естественно, точке (s', s') отрезка OC ставится в соответствие единичный касательный вектор v (M'), т. е. v^* $(s', s') = v$ (M').

Мы получаем непрерывное векторное поле v^*, определенное внутри и на границе треугольника OCB и не имеющее особых точек. Поэтому в силу леммы 4 индекс замкнутой кривой $OCBO$ по отношению к полю v^* равен нулю

$$I\,(OCBO,\ v^*) = 0.$$

Но индекс ломаной $OCBO$ равен сумме вращения поля v^* вдоль отрезков OC, CB, BO. Поэтому

$$w\,(v^*,\ OC) + w\,(v^*,\ CB) + w\,(v^*,\ BO) = 0.$$

Легко видеть, что $w\,(v^*,\ OC) = I\,(C,\ v)$, так как при надлежащей параметризации соответствующие угловые функции (поля v^* на отрезке OC и поля v на кривой C) будут одинаковы.

Рассмотрим теперь поле v^* на отрезке OB. Векторы этого поля не могут быть направлены вниз, так как они имеют направления векторов, идущих из точки M_0 в точки кривой C (любая точка C лежит по условию не ниже точки M_0). Далее, направление вектора $\boldsymbol{v}(B) = \boldsymbol{v}^*(0, 1)$ совпадает с отрицательным направлением оси Ox, а направление вектора $\boldsymbol{v}^*(0) = \boldsymbol{v}^*(0, 0)$ — с положительным направлением оси Ox. Пусть $F(M)$ — угловая функция поля v^*, заданного на BO, такая, что $F(B) = +\pi$. Тогда $F(0) = 2\pi r$, где r — целое. Если $r \neq 0$, то в силу непрерывности $F(M)$ существуют точки M отрезка BO, в которых соответствующие векторы $\boldsymbol{v}^*(M)$ направлены вниз, чего не может быть. Поэтому $r = 0$, $F(0) = 0$, $F(0) - F(B) = -\pi$ и $w(v^*, BO) = \frac{1}{2\pi}(-\pi) = -\frac{1}{2}$. Аналогично устанавливается, что $w(v^*, CB) = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $I(C, v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$; $I(C, v) = 1$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть v — поле, заданное на кривой C, причем такое, что ни в одной точке $M \in C$ вектор поля $\boldsymbol{v}(M)$ не имеет направления касательной к C в точке M (т. е. либо все векторы поля v направлены внутрь кривой C, либо все они направлены наружу). Тогда $I(C, v) = 1$. Доказательство непосредственно получается из леммы 2, если в этой лемме под v^* понимать поле касательных к кривой C.

4. Определение индекса, данное Пуанкаре. Приведем здесь в несколько измененной форме определение индекса, данное Пуанкаре (см. [5], гл. III и XIV). Этим определением в ряде случаев удобно пользоваться для вычисления индекса замкнутой кривой.

Пусть C — рассматриваемая простая замкнутая кривая, v — заданное на ней поле, а d — какая-нибудь прямая плоскости (x, y). Предположим, что существует только конечное число точек M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) кривой C, в которых вектор $\boldsymbol{v}(M)$ направлен параллельно прямой d. Предположим, что кривая C обходится точкой M в положительном направлении, и пусть p есть число точек M_k, при прохождении через которые вектор $\boldsymbol{v}(M)$ проходит через направление прямой d, двигаясь против часовой стрелки. Пусть, далее, q — число точек M_k, в которых вектор $\boldsymbol{v}(M)$ проходит направление прямой d, двигаясь по часовой стрелке. Точки M_k, в которых вектор $\boldsymbol{v}(M)$ достигает, двигаясь, скажем, по часовой стрелке, направления d, а потом начинает двигаться в обратном направлении (или наоборот), мы не будем принимать во внимание.

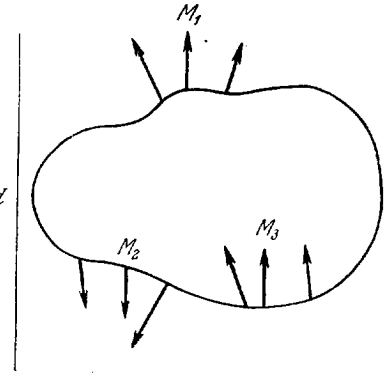


Рис. 118.

Тогда

$$I(C, v) = \frac{p - q}{2}. \tag{4}$$

На рис. 118 изображены три точки M_k каждого из указанных типов. Справедливость соотношения (4) следует из того, что переход через направление прямой d регистрирует увеличение или уменьшение значения угловой функции на π. Поэтому общее приращение угловой функции при обходе

кривой C равно $(p-q)\pi$ и, следовательно, индекс кривой C равен $\frac{(p-q)\pi}{2\pi}=\frac{p-q}{2}$. Точное доказательство может быть получено путем рассмотрения пересечения графика угловой функции $\alpha = F(M)$ с графиком прямых $\alpha = r\pi$, где r — целое.

Мы предлагаем читателю провести это доказательство.

§ 11. Приложение теории индекса к динамическим системам

1. Две основные теоремы. Задание динамической системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=Q(x, y) \tag{I}$$

можно интерпретировать как задание векторного поля (см. § 1). Пусть система (I) определена в области G плоскости (x, y). Каждой точке $M(x, y) \in G$ ставится в соответствие вектор $\boldsymbol{v}(M)$ или $\boldsymbol{v}(x, y)$ с компонентами $P(x, y)$, $Q(x, y)$, и мы получаем указанное векторное поле $v(M)$ или $v(x, y)$. Точки области G, в которых $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, т. е. состояния равновесия системы (I), очевидно, являются *особыми* точками векторного поля, соответствующего системе (I).

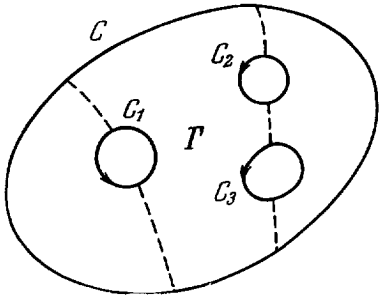


Рис. 119.

Пусть C — какая-нибудь простая замкнутая кривая, лежащая в области G. В каждой точке этой кривой поле, соответствующее динамической системе (I), задает определенный вектор, т. е. «индуцирует» на этой кривой определенное векторное поле. В дальнейшем, говоря об индексе замкнутой кривой C, мы всегда будем подразумевать индекс этой кривой по отношению к полю, индуцированному полем $\boldsymbol{v}(M)$, соответствующему рассматриваемой динамической системе. Для такого поля, соответствующего динамической системе, сформулируем лемму 4 в виде следующей теоремы:

Т е о р е м а 25. *Пусть C — простая замкнутая кривая, лежащая в области G, и Γ — внутренняя область, ограничиваемая ею. Если Γ целиком принадлежит области G и в $\bar{\Gamma}$ нет ни одной особой точки динамической системы* (I), *то индекс кривой C равен нулю: $I(C) = 0$.*

Теорема 25 легко обобщается следующим образом:

Т е о р е м а 26. *Если Γ — часть области G, ограниченная простыми замкнутыми кривыми C, C_1, C_2, . . ., C_n* (рис. 119), *причем C — внешняя граница области $\bar{\Gamma}$, и если в области $\bar{\Gamma}$ нет особых точек системы* (I), *то*

$$I(C) = I(C_1) + I(C_2) + \ldots + I(C_n).$$

Доказательство непосредственно следует из предыдущей теоремы, если провести указанные на рис. 119 «разрезы» и воспользоваться аддитивностью вращения.

2. Индекс изолированной особой точки. Рассмотрим в плоской области G простую замкнутую кривую C, внутри которой лежит особая точка O системы (I), и предположим, что ни внутри C, ни на ней самой нет других особых точек поля.

Докажем, что индекс любой такой кривой один и тот же.

Пусть имеются две такие кривые C и C' (рис. 120). Предположим сначала, что эти кривые не имеют общих точек. Тогда в силу теоремы 26 $I(C') = I(C)$, и наше утверждение доказано. В случае, когда кривые C и C' имеют общие точки, можно взять вспомогательную кривую C'', не имеющую общих точек ни с C, ни с C' (например, окружность с центром в O, достаточно малого радиуса). Тогда $I(C) = I(C'')$ и $I(C') = I(C'')$, т. е. $I(C') = I(C)$.

Определение XIII. *Индексом (или индексом Пуанкаре) изолированной особой точки O векторного поля v, соответствующего динамической системе, или индексом состояния равновесия системы* (I), *называется индекс любой замкнутой кривой C, содержащей внутри себя точку O, причем такой, что ни внутри C, ни на ней самой нет других особых точек поля v.*

Мы будем обозначать индекс изолированной особой точки O системы (I) через $I(O)$.

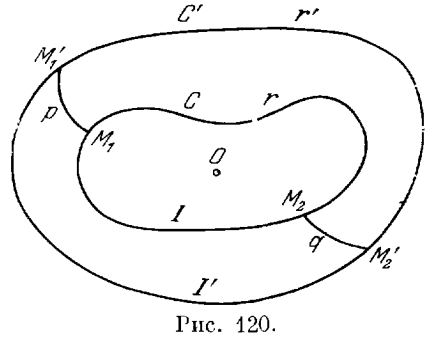


Рис. 120.

Лемма 1. *Пусть Γ — часть области G, ограниченная простой замкнутой кривой C, содержащая n особых точек $O_1, O_2, \ldots, O_n$ динамической системы, причем все эти точки лежат внутри C. Тогда индекс кривой C равен сумме индексов особых точек, заключенных внутри C:*

$$I(C) = \sum_{k=1}^{n} I(O_k).$$

Справедливость леммы непосредственно следует из теоремы 26 и из определений индекса замкнутой кривой и особой точки.

Лемма 1 очевидным образом обобщается на случай, когда $\bar{\Gamma}$ является многосвязной областью. Из этой леммы мы сразу получаем ряд предложений о динамической системе:

Теорема 27. *Пусть C — простая замкнутая кривая в области G, а Γ — внутренняя область, ограничиваемая ею. Если Γ целиком принадлежит G и содержит конечное число состояний равновесия, а на кривой C их нет совсем, то индекс кривой C равен сумме индексов всех состояний равновесия, расположенных внутри C (т. е. в Γ).*

Теорема 27 просто обобщается на случай многосвязной области Γ, расположенной в G.

Из теоремы 24 и ее следствия мы получаем теорему:

Теорема 28. *Индекс любой замкнутой траектории динамической системы равен $+1$.*

Теорема 29. *Индекс любого цикла без контакта динамической системы равен $+1$.*

Следствие 1. Если L — замкнутая траектория динамической системы, внутренность которой целиком принадлежит области G, то сумма индексов состояний равновесия, лежащих внутри L, равна $+1$.

Следствие 2. Если внутренность замкнутой траектории L принадлежит G, то внутри L имеется по крайней мере одно состояние равновесия системы *).

*) Следствие 2 совпадает с теоремой 17 (§ 4, п. 7). Мы получаем другое доказательство этой теоремы, основанное на общих свойствах векторных полей.

Следствие 3. Если внутренность цикла без контакта C принадлежит области G, то сумма индексов состояний равновесия, лежащих целиком внутри C, равна $+1$.

Следствие 4. Если внутренность цикла без контакта C принадлежит области G, то она содержит по крайней мере одно состояние равновесия системы.

3. Индекс как криволинейный интеграл. В случае, когда C является простой гладкой замкнутой кривой и на ней не лежит ни одной особой точки системы (I), индекс кривой C можно представить в виде криволинейного интеграла.

Покажем это.

Пусть

$$x = x(\sigma), \qquad y = y(\sigma)$$

— параметрические уравнения кривой C.

Мы предполагаем, что функции $x(\sigma)$ и $y(\sigma)$ определены для значений σ, $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \alpha + T$, и непрерывно дифференцируемы, причем

$$x(\alpha + T) = x(\alpha), \qquad y(\alpha + T) = y(\alpha),$$

и что возрастанию σ соответствует обход кривой C в положительном направлении.

В силу предположений относительно системы (I) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные производные. Далее, в силу того, что по условию на кривой C не лежит ни одного состояния равновесия, $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$ во всех точках кривой C.

Пусть $F(\sigma)$ — какая-нибудь угловая функция векторного поля, индуцированного на кривой C динамической системой (I).

Рассмотрим какое-нибудь значение σ^*, $\sigma^* \in [\alpha, \alpha + T]$. Если

$$P(x(\sigma^*), y(\sigma^*)) \neq 0,$$

то такое же неравенство будет выполняться для всех σ, достаточно близких к σ^*, и, очевидно (см. определение угловой функции), при всех этих σ

$$F(\sigma) = \operatorname{arctg} \frac{Q(x(\sigma), y(\sigma))}{P(x(\sigma), y(\sigma))} + 2\pi r,$$

где r — постоянное число (целое). Следовательно,

$$F'(\sigma) = \frac{P(x(\sigma), y(\sigma)) \frac{dQ(x(\sigma), y(\sigma))}{d\sigma} - Q(x(\sigma), y(\sigma)) \frac{dP(x(\sigma), y(\sigma))}{d\sigma}}{P^2(x(\sigma), y(\sigma)) + Q^2(x(\sigma), y(\sigma))}. \qquad (1)$$

Если $P(x(\sigma^*), y(\sigma^*)) = 0$, то $Q(x(\sigma^*), y(\sigma^*)) \neq 0$, и в окрестности точки σ^* функция $F(\sigma)$ отличается постоянным слагаемым от

$$\operatorname{arctg} \frac{P(x(\sigma), y(\sigma))}{Q(x(\sigma), y(\sigma))}.$$

Следовательно, формула (1) справедлива и в этом случае, т. е. она имеет место для всех σ, $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \alpha + T$. Тогда

$$F(\sigma) = \int_{\alpha}^{\sigma} \frac{P(x(\sigma), y(\sigma)) \frac{dQ(x(\sigma), y(\sigma))}{d\sigma} - Q(x(\sigma), y(\sigma)) \frac{dP(x(\sigma), y(\sigma))}{d\sigma}}{P^2(x(\sigma), y(x)) + Q^2(x(\sigma), y(\sigma))} d\sigma + F(\alpha),$$

и, следовательно, индекс кривой C относительно поля v

$$I(c,\ v)=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\frac{P(x(\sigma),\ y(\sigma))\dfrac{dQ(x(\sigma),\ y(\sigma))}{d\sigma}-Q(x(\sigma),\ y(\sigma))\dfrac{dP(x(\sigma),\ y(\sigma))}{d\sigma}}{P^2(x(\sigma),\ y(\sigma))+Q^2(x(\sigma),\ y(\sigma))}\,d\sigma. \tag{2}$$

Интеграл, стоящий в правой части последней формулы, есть, очевидно, криволинейный интеграл

$$\int_C\frac{P(x,\ y)\left(\dfrac{\partial Q(x,\ y)}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial Q(x,\ y)}{\partial y}\,dy\right)-Q(x,\ y)\left(\dfrac{\partial P(x,\ y)}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}\,dy\right)}{P^2(x,\ y)+Q^2(x,\ y)},$$

взятый по кривой C, обходимой в положительном направлении; мы будем для краткости обозначать его через

$$\int_C\frac{P\,dQ-Q\,dP}{P^2+Q^2}. \tag{3}$$

Таким образом, мы получаем формулу

$$I(C)=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{P\,dQ-Q\,dP}{P^2+Q^2}. \tag{4}$$

4. Вычисление индексов простых состояний равновесия динамической системы. Пусть (I) — динамическая система класса C_1. Мы предполагаем, что рассматриваемое состояние равновесия находится в начале координат. Тогда система (I) может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt}=ax+by+\varphi(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=cx+dy+\psi(x,\ y), \tag{5}$$

где a, b, c, d — значения первых частных производных от $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ в точке (0, 0). Мы предполагаем, что C — простое состояние равновесия, поэтому $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$. Как мы знаем, $\varphi(x,\ y)=O(\varrho)$ и $\psi(x,\ y)=O(\varrho)$ (см. § 5).

Обозначим через v векторное поле, определяемое системой (5). Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\qquad \frac{dy}{dt}=cx+dy \tag{6}$$

и через v^* обозначим векторное поле, определяемое системой (6). Обозначим через $I(O,\ v)$ индекс состояния равновесия системы (5) и через $I(O,\ v^*)$ — индекс состояния равновесия системы (6).

Докажем прежде всего, что

$$I(O,\ v)=I(O,\ v^*).$$

Поле v^* определено, очевидно, на всей плоскости. В силу условия $\Delta\neq 0$ вектор $\boldsymbol{v}^*(ax+by,\ cx+dy)$ равен нулю только при $x=y=0$. Поэтому в точках единичной окружности $\varrho=1$, $\boldsymbol{v}^*$ отличен от нуля. Обозначим через m минимум $|\boldsymbol{v}^*|$ на этой окружности. В любой другой точке плоскости

$$|\boldsymbol{v}^*(x,\ y)|=\sqrt{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}=$$

$$=\varrho\sqrt{\left(a\frac{x}{\varrho}+b\frac{y}{\varrho}\right)^2+\left(c\frac{x}{\varrho}+d\frac{y}{\varrho}\right)^2}>\varrho m,$$

так как точка $\left(\frac{x}{\varrho}, \frac{y}{\varrho}\right)$ лежит на единичной окружности ($\varrho = x^2 + y^2$). С другой стороны,

$$|\boldsymbol{v}^*(x, y) - \boldsymbol{v}(x, y)| = \sqrt{[\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2} = O(\varrho).$$

Рассмотрим окружность C_ρ радиуса ϱ с центром в начале координат. Пусть точка $(x, y) \in C_\rho$ и пусть θ — наименьший по абсолютной величине угол между вектором $\boldsymbol{v}(x, y)$ и $\boldsymbol{v}^*(x, y)$. Из рис. 121 ясно, что

$$|\sin\theta| \leqslant \frac{|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^*|}{|\boldsymbol{v}^*|} < \frac{O(\varrho)}{\varrho m},$$

т. е. $|\sin\theta| \to 0$ при $\varrho \to 0$. С другой стороны, при малых ϱ θ не может быть тупым углом, так как этот угол лежит против наименьшей стороны треугольника. Отсюда следует, что при $\varrho \to 0$ $\theta \to 0$. Поэтому если ϱ достаточно мало, то ни в одной точке окружности C_ρ векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}^*$ не имеют противоположных направлений.

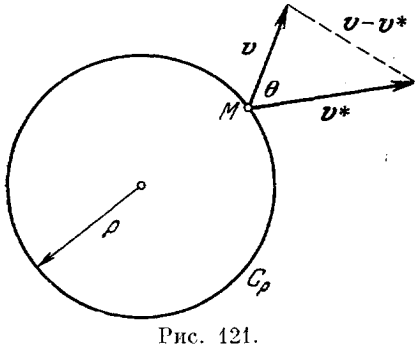


Рис. 121.

Заметив теперь, что если ϱ достаточно мало, то

$$I(O, v) = I(C_\rho, v), \quad I(O, v^*) = I(C_\rho, v^*),$$

и воспользовавшись леммой 2, мы сразу убедимся, что

$$I(O, v) = I(O, v^*).$$

Таким образом, задача о вычислении индекса простых состояний равновесия O системы (5) свелась к задаче о вычислении индекса состояния равновесия O линейной системы (6).

Замечание. Проведенное рассуждение остается справедливым и в том случае, когда рассматриваемая система (I) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = P_k(x, y) + O(\varrho^k), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_k(x, y) + O(\varrho^k),$$

где $P_k(x, y)$, $Q_k(x, y)$ — однородные многочлены k-й степени и $\sqrt{P_k^2(x, y) + Q_k^2(x, y)}$ обращается в нуль только в точке $O(0, 0)$. Индекс состояния равновесия O такой системы равен индексу состояния равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = P_k(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = Q_k(x, y).$$

Возвращаемся к поставленной задаче. Нам нужно теперь вычислить индекс состояния равновесия O системы (6). С этой целью воспользуемся формулой (4) и в качестве замкнутой кривой C, содержащей внутри состояние равновесия O, возьмем эллипс

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1. \tag{7}$$

Таким образом,

$$I(O) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(ax + by)\, d(cx + dy) - (cx + dy)\, d(ax + by)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_C [(ax + by)\, d(cx + dy) - (cx + dy)\, d(ax + by)],$$

где C — эллипс (7), обходимый в положительном направлении. Если положить, что

$$ax + by = \xi, \qquad cx + dy = \eta, \tag{8}$$

то эллипс C перейдет в окружность $\xi^2 + \eta^2 = 1$ плоскости (ξ, η). На этой окружности введем обычную параметризацию, положив $\xi = \cos\vartheta$, $\eta = \sin\vartheta$. Заметим, что при возрастании ϑ от 0 до 1 окружность $\xi^2 + \eta^2 = 1$ пробегается один раз в положительном направлении. Эллипс C пробегается в положительном направлении, если $\Delta = ad - bc > 0$, и в отрицательном, если $\Delta < 0$. Поэтому при $\Delta > 0$

$$I(O) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos\vartheta\, d(\sin\vartheta) - \sin\vartheta\, d(\cos\vartheta)] = +1,$$

а при $\Delta < 0$

$$I(O) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{0} [\cos\vartheta\, d(\sin\vartheta) - \sin\vartheta\, d(\cos\vartheta)] = -1.$$

Полученный результат мы сформулируем в следующем виде:

Теорема 30. *Индекс простого состояния равновесия динамической системы равен* $+1$ *в случае узла или фокуса и равен* -1 *в случае седла.*

ГЛАВА VI

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

Мы уже говорили в п. 1 § 3, что одним из основных вопросов качественной теории динамических систем является вопрос о том, какие вообще сведения относительно траекторий необходимы для полного качественного исследования динамической системы.

Еще до исчерпывающего ответа на этот вопрос (он дается в главах VII, VIII, X и XI) можно указать некоторые основные элементы, которые заведомо необходимо знать при качественном исследовании.

В первую очередь, конечно, необходимо знать число и характер состояний равновесия. В том случае, когда координаты состояний равновесия известны, эффективные методы для определения их характера существуют, как было показано в главе IV, в случае простых состояний равновесия (т. е. в случае, когда действительные части характеристических корней не равны нулю). Кроме того, такие методы существуют также для многих типов сложных состояний равновесия (исследованию некоторых типов сложных состояний равновесия посвящена глава IX настоящей книги). Правда, само определение координат состояний равновесия или хотя бы установление числа состояний равновесия далеко не является простой задачей. Однако в некоторых случаях, и в частности, когда правые части рассматриваемой системы — многочлены, можно указать общие методы определения числа состояний равновесия, сводящиеся к определению числа общих точек двух многочленов *).

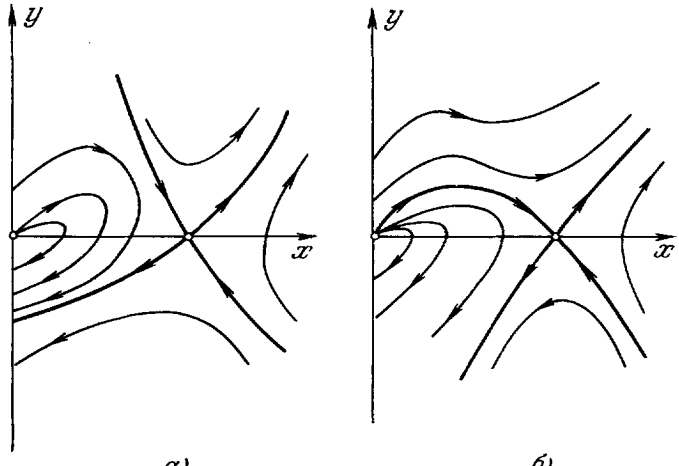
Кроме сведений о числе и характере состояний равновесия необходимо иметь также сведения о замкнутых траекториях, нужно знать, заполняют ли замкнутые траектории целые области или являются изолированными, т. е. являются предельными циклами; нужно знать число предельных циклов, их взаимное расположение, а также нужно знать, какие циклы устойчивы, а какие — неустойчивы.

Очевидно, знание характера состояний равновесия для этого заведомо недостаточно, в чем легко убедиться, рассматривая простейшие примеры. Так, например, в случае динамической системы в примере 1 § 7 (в этом

*) Задачу о числе общих точек двух кривых в том случае, когда не ищутся точные координаты этих общих точек, а решается только вопрос об их числе, естественно, считать задачей «качественного характера». Эта задача теснейшим образом связана с более простой задачей о числе действительных корней данной функции $F(x)$. В случае, когда функция $F(x)$ — многочлен, последняя задача полностью решается методом Штурма. (В связи с этим вопросом см. также пример 5 п. 5 главы IV.)

примере существует единственное состояние равновесия типа фокус) предельных циклов может не быть или их может быть любое конечное число. Выяснение этого вопроса требует дополнительного исследования.

Однако регулярных методов, с помощью которых можно было бы устанавливать отсутствие или наличие предельных циклов у данных конкретных динамических систем не существует. Более того, сам вопрос о возможном характере таких методов в настоящее время остается неясным, а отыскание таких методов было и остается одним из наиболее трудных и важных вопросов качественной теории динамических систем.



а) *б)*

Рис. 122.

Вследствие отсутствия общих методов большое значение приобретают даже частные признаки, при помощи которых можно судить о наличии или отсутствии предельных циклов хотя бы для отдельных классов динамических систем.

В § 12 излагаются некоторые из таких, сравнительно простых, иногда с успехом применимых признаков. Простейший из них — *критерий Бендиксона* — утверждает, что если в односвязной области выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

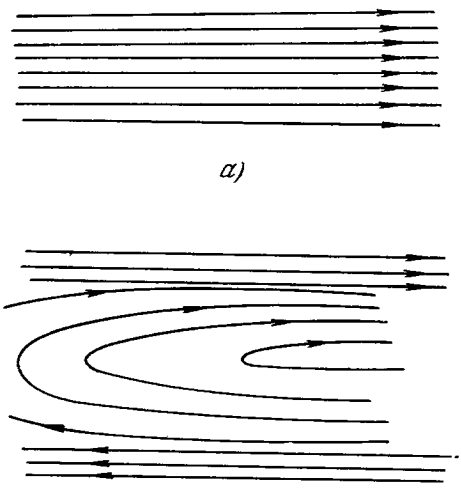
не меняет знака, то система не имеет в этой области замкнутых траекторий. Этот признак является частным случаем несколько более сложного *критерия Дюлака* (см. теорему 28 § 11). В конце § 12 излагается данный Пуанкаре метод отыскания предельных циклов при помощи так называемой *топографической системы кривых и контактной кривой*. Этот метод не является регулярным, однако в некоторых частных случаях его удается с успехом применять. Он иллюстрируется на примерах.

Нетрудно убедиться в том, что при качественном исследовании динамических систем кроме сведений о состояниях равновесия и предельных циклах необходимы также сведения о «ходе» (т. е. о расположении) сепаратрис седел. Так, в примере 4 (§ 7) существуют два состояния равновесия — узел и седло. Сепаратрисы седла могут иметь различное поведение.

Две из различных логических возможностей, которые здесь могут представиться, указаны на рис. 122, *а* и *б* (читатель может убедиться в том, что логически возможны еще и другие случаи расположения

сепаратрис). Для определения хода сепаратрис не существует регулярных методов и приходится довольствоваться частными приемами. Некоторые из них использованы в примерах 4, 9, 12, 13, 14 главы XII. Отметим, что сведения относительно расположения сепаратрис могут быть весьма полезны при установлении существования предельных циклов (см. примеры 16, 17 главы XII). Кроме того, нетрудно убедиться в том, что для знания качественной структуры нужно еще знать «ход» траекторий при неограниченно возрастающих x и y.

Рассмотрим, например, простейший случай динамической системы на плоскости, когда у нее нет ни одного состояния равновесия. И здесь все же возможны различные качественные структуры. Так нетрудно убедиться в том, что качественные структуры, представленные на рис. 123, *а* и *б*, различны. При наличии состояний равновесия топологическая структура тем более может быть различной в зависимости от поведения траекторий при неограниченном возрастании x и y.



а)

б)

Рис. 123.

Таким образом, в случае, когда система рассматривается на всей плоскости, естественно встает вопрос об исследовании поведения траекторий «в окрестности бесконечности». В случае, когда правые части динамической системы — многочлены, очень удобно и естественно рассматривать систему не на плоскости, а на сфере, на которую плоскость проектируется тем или другим способом (именно, на «сфере Бендиксона» или на «сфере Пуанкаре»). При этом точки сферы (северный полюс сферы — в случае «сферы Бендиксона» и точки «экватора» — в случае «сферы Пуанкаре»), которым при рассматриваемой проекции не соответствует ни одна точка плоскости, считаются соответствующими бесконечно удаленным точкам плоскости *). Этому исследованию бесконечно удаленных точек (которое делается путем надлежащим образом введенной замены переменных) посвящен § 14. Такое исследование может помочь качественному исследованию динамической системы в конечной части плоскости. Оно иногда помогает решить вопрос о ходе сепаратрис или о существовании предельного цикла.

Приведенные в настоящей главе приемы качественного исследования далеко не исчерпывают имеющихся в математической литературе приемов такого рода. В частности, обширная литература посвящена рассмотрению некоторых типов динамических систем, именно, так называемому уравнению Льенара и его обобщениям, правые части которых удовлетворяют специальным предположениям**). Для этих типов динамических систем

*) Отметим, однако, что при таком рассмотрении на сфере мы не приходим к динамической системе на сфере в смысле § 2; некоторые основные требования могут не выполняться.

**) Динамическая система, соответствующая «уравнению Льенара», имеет вид

$$\dot{x}=y, \qquad \dot{y}=-\varphi(y)-x.$$

при помощи соображений, специфичных для данного типа, удается доказать существование или отсутствие предельных циклов, а также в случае существования предельного цикла — его единственность. Мы не останавливаемся на уравнении Льенара и отсылаем читателя к соответствующей литературе (см. [37], [38], [39])*).

В § 15 затрагивается вопрос об использовании вычислительных методов для определения качественной структуры.

§ 12. Признаки отсутствия и существования замкнутых траекторий

1. Некоторые общие замечания о кольцеобразных областях, заполненных замкнутыми траекториями. Одним из первых важных вопросов, встающих в связи с установлением наличия или отсутствия замкнутых траекторий, является вопрос о том, существуют ли целые области, заполненные замкнутыми траекториями, или замкнутые траектории изолированны, т. е. являются предельными циклами.

Когда динамическая система принадлежит аналитическому классу, существенную роль в этом вопросе играет следующая лемма:

Лемма 1. *Если L_0 — замкнутая траектория динамической системы аналитического класса, то она либо является изолированной, либо все траектории в ее окрестности замкнуты.*

Доказательство. Пусть l — аналитическая дуга без контакта (например, отрезок без контакта), проведенная через какую-либо точку траектории L_0, s — параметр на этой дуге и $\bar{s} = \omega(s)$ — функция последования на дуге l, определенная при значениях s, $a \leqslant s \leqslant b$. Значения s, соответствующие точкам пересечения замкнутых траекторий, в частности, траектории L_0, с дугой l являются нулями функции $s - \omega(s)$ и, обратно, нули функции $s - \omega(s)$ соответствуют замкнутым траекториям (см. § 3, п. 8). При сделанном предположении относительно аналитичности динамической системы и аналитичности дуги l функция

*) В технической литературе очень распространенным приемом отыскания периодических решений является так называемый «метод гармонического баланса». В случае динамических систем 2-го порядка, рассматриваемых в настоящей книге, «метод гармонического баланса» заключается в следующем: предполагается, что искомое периодическое решение имеет вид

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = A\sin\omega t, \tag{a}$$

(т. е. предполагается, что в случае, если у рассматриваемой динамической системы есть предельный цикл, то он является окружностью). Выражения (а) для x и y подставляются в рассматриваемую систему

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y)$$

и в разложении в ряд Фурье выражений $P(A\cos\omega t, A\sin\omega t)$ и $Q(A\cos\omega t, A\sin\omega t)$ отбрасываются все высшие гармоники. Таким образом, получаются два соотношения, содержащие A и ω, из которых эти величины определяются. Очевидно, непосредственно в описанной здесь форме без всяких дополнительных предположений относительно функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ этот метод не является корректным и его применение может привести (и приводит) к нелепым выводам. Однако обычно при использовании «метода гармонического баланса» implicite делается предположение относительно близости рассматриваемой системы к линейной консервативной, т. е. предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют вид

$$P(x, y) = y + \mu f_1(x, y), \qquad Q(x, y) = -x + \mu f_2(x, y),$$

где μ — малый параметр. В этом случае «метод гармонического баланса» фактически совпадает с так называемым «методом Пуанкаре» (или, в другой терминологии, «методом малого μ») [6].

последования $\omega(s)$ также является аналитической функцией (см. замечание 1 к лемме 13, § 3). В силу свойств аналитических функций функция $s - \omega(s)$ может иметь либо конечное число нулей, либо тождественно равняться нулю. Но это, очевидно, и означает, что либо всякая замкнутая траектория L_0 является изолированной, либо все траектории в окрестности L_0 замкнуты, что и доказывает утверждение леммы.

Таким образом, в случае когда динамическая система — аналитического класса, у нее не может существовать замкнутой траектории, в любой окрестности которой есть как замкнутые, так и не замкнутые траектории. В частности, не может существовать бесчисленного множества предельных циклов, накапливающихся к замкнутой траектории (с одной или с обеих ее сторон). Так же не может существовать и такой замкнутой траектории, с внешней (внутренней) стороны которой все достаточно близкие траектории замкнуты, а с внутренней (соответственно внешней) стороны все достаточно близкие траектории — не замкнуты.

На основании леммы 1 можно показать, что если у динамической системы аналитического класса существует «кольцеобразная» область, заполненная замкнутыми траекториями, то граница этой области состоит из траекторий, стремящихся к состояниям равновесия, и из состояний равновесия. Если все состояния равновесия рассматриваемой динамической системы простые, то траектории, отличные от состояний равновесия, входящие в границу кольцеобразной области, могут быть только сепаратрисами седел. Геометрические примеры таких кольцеобразных областей представлены на рис. 21 и рис. 24 (глава I).

Отметим, что одним из признаков существования области, заполненной замкнутыми траекториями, может служить существование у динамической системы аналитического интеграла в области, где существует состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями (которое в этом случае является центром). Это обстоятельство встречается в ряде рассмотренных ниже примеров (см. примеры 4, 7, 8, 11 § 12).

2. Случай, когда об отсутствии предельных циклов можно заключить непосредственно на основании расположения изоклин горизонтальных и вертикальных наклонов и характера поля между ними. Иногда частный характер расположения изоклин и поля между ними позволяет непосредственно сделать заключение об отсутствии замкнутых траекторий. Мы укажем здесь один такой элементарный случай.

Пусть O — простое состояние равновесия данной системы, рассматриваемой в некоторой области G плоскости (x, y), содержащей точку O. Пусть изоклины $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$ разделяют область G на четыре области, определяемые следующими неравенствами:

$$\text{I)}\ \dot{x}>0,\ \dot{y}>0, \quad \text{II)}\ \dot{x}<0,\ \dot{y}>0,$$
$$\text{III)}\ \dot{x}<0,\ \dot{y}<0, \quad \text{IV)}\ \dot{x}>0,\ \dot{y}<0,$$

(рис. 124). Нетрудно видеть, что в областях I и III отрезки $y = C$ являются отрезками без контакта с траекториями, а в областях II и IV отрезки $x = C$ являются отрезками без контакта с траекториями. Отсюда следует, что система не имеет замкнутых траекторий, в частности, предельных циклов. В самом деле, траектория, проходящая при некотором $t = t_0$ через произвольную точку M изоклины $P(x, y) = 0$, не может возвращаться с ростом t в точку M, а может только приближаться к точке O.

Пример 1.

$$\dot{x}=\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(\frac{1}{2}y-x\right), \qquad \dot{y}=\left(y-\frac{4}{3}\right)(x+y).$$

Состояния равновесия: O (0, 0), $A\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $B\left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ и $C\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Легко показать, что O — устойчивый фокус. Интегральные прямые $x=-\frac{7}{3}$ и $y=\frac{4}{3}$ проходят через состояния равновесия A, B и C. Значит, если существует предельный цикл, то он содержит внутри одно состояние равновесия O.

Рассмотрим изоклину вертикальных наклонов $y=2x$ и изоклину горизонтальных наклонов $y=-x$, проходящих через точку O. Предельный

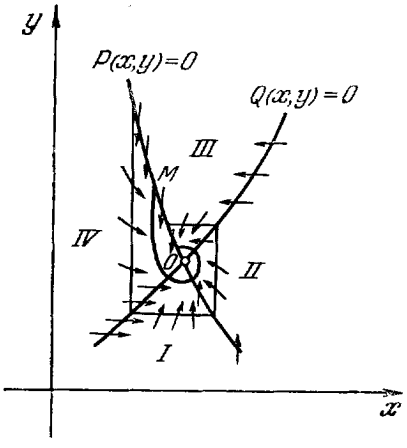


Рис. 124.

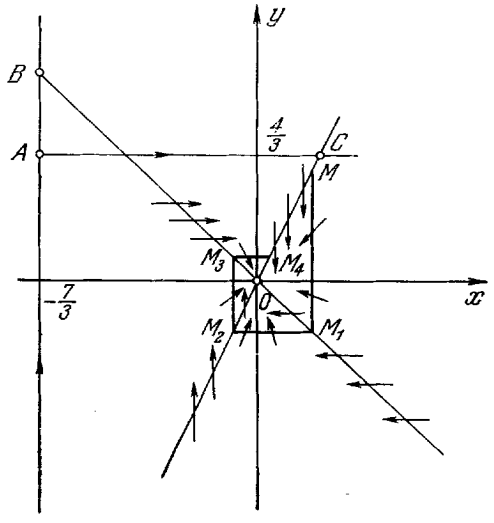


Рис. 125.

цикл должен пересекать отрезок изоклины OC. Возьмем на отрезке OC произвольную точку M и построим ломаную линию $MM_1M_2M_3M_4$, состоящую из отрезков вертикальных и горизонтальных прямых (рис. 125). Все эти отрезки являются отрезками без контакта с траекториями системы, причем траектории, попадающие на эти отрезки, с ростом t входят внутрь многоугольника $MM_1M_2M_3M_4M$. Следовательно, траектория, проходящая через точку M при $t=t_M$, совершив один оборот вокруг точки O, не может вернуться в точку M, а пересекает изоклину ближе к точке O, т. е. предельный цикл существовать не может. Мы предоставляем читателю убедиться в том, что аналогичным образом может быть установлено отсутствие циклов в случае системы

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{axy}{x+y}+vy^2, \qquad \frac{dx}{dt}=\frac{axy}{x+y}-a,$$
$$x+y>0.$$

Указанный в настоящем пункте случай, когда можно судить об отсутствии предельных циклов непосредственно на основании характера поля, является весьма частным.

В следующих пунктах приводятся еще другие критерии отсутствия замкнутых траекторий.

3. Критерий Дюлака и Бендиксона. Мы приведем два критерия, на основании которых можно судить об отсутствии замкнутых траекторий и замкнутых контуров, составленных из траекторий.

Теорема 31 (*критерий Дюлака для односвязной области*). *Пусть*

$$\frac{dx}{dt} = P(x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,\ y) \tag{I}$$

— аналитическая динамическая система, G — некоторая односвязная область, входящая в область определения системы (I). *Если существует определенная в G функция $B(x,\ y)$ первого класса такая, что выражение*

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \tag{1}$$

знакопостоянно, то в области G не существует простых замкнутых кривых, составленных из траекторий системы (I) *).

(При этом мы считаем выражение (1) знакопостоянным и в том случае, когда оно обращается в нуль на множестве, состоящем из конечного числа отдельных точек и гладких кривых, но имеет один и тот же знак во всех остальных точках области G.)

Доказательство. Докажем сначала, что если выполняются условия теоремы, то в области G не существует замкнутых траекторий. Предположим противное, что в G существует замкнутая траектория L. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_{(L)} (-BQ\,dx + BP\,dy).$$

Легко видеть, что $I = 0$. В самом деле, пусть

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

— уравнения траектории L, $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда

$$I = \int\limits_0^T B(\varphi(t),\ \psi(t))\,[-Q(\varphi(t),\ \psi(t))\,\varphi'(t) + P(\varphi(t),\ \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt,$$

причем

$$\varphi'(t) = P(\varphi(t),\ \psi(t)),\ \psi'(t) = Q(\varphi(t),\ \psi(t)),$$

так как $(\varphi(t),\ \psi(t))$ есть решение системы (I). Поэтому выражение в квадратных скобках, стоящее под знаком интеграла, тождественно равно нулю, а следовательно, и $I = 0$.

С другой стороны, по формуле Грина

$$I = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)\right] dx\,dy,$$

где Ω — область, ограниченная замкнутой траекторией L ($\Omega \subset G$). Но последний интеграл не может равняться нулю в силу знакопостоянства

*) Простая замкнутая кривая, составленная из траекторий системы либо представляет из себя замкнутую траекторию, либо составлена из чередующихся между собой целых незамкнутых траекторий и состояний равновесия (см., например, рис. 21 и 24 гл. I).

подынтегральной функции. Мы пришли к противоречию. Таким образом утверждение теоремы об отсутствии замкнутых траекторий доказано.

Покажем теперь, что в области G не может существовать простой замкнутой кривой, представляющей из себя «петлю», т. е. состоящей из состояния равновесия O и замкнутой траектории L, стремящейся к O как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$. Предположим, что такая петля существует. Проведем окружность C_ε с центром в O радиуса ε, настолько малого, чтобы вне этой окружности имелись точки траектории L. Так как мы предположили, что (I) — аналитическая система, то L является аналитической линией и, следовательно, пересекается с окружностью C_ε в конечном числе точек, разбивающих траекторию L и окружность C_ε на конечное число отрезков. Обозначим через Ω область, ограниченную нашей петлей, а через Ω_ε — множество точек этой области, находящихся от состояния равновесия O на расстоянии большем, чем ε. Ω_ε представляет собой открытое множество (см. дополнение, § 1), причем граница каждой компоненты его состоит, очевидно, из указанных отрезков траектории L и отрезков окружности C_ε. Поэтому Ω_ε состоит из конечного числа компонент. Обозначим эти компоненты через $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, их границы, положительно ориентированные, через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Эти границы являются кусочно-гладкими линиями (рис. 126).

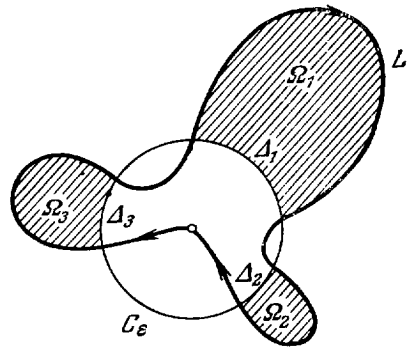


Рис. 126.

Рассмотрим интеграл

$$I_\varepsilon = \iint\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \right] dx\, dy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \right] dx\, dy.$$

В силу знакоопределенности подынтегрального выражения этот интеграл отличен от нуля, причем если ε уменьшается, $|I_\varepsilon|$ возрастает (так как расширяется область Ω_ε). Поэтому для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|I_\varepsilon| > |I_{\varepsilon_0}| > 0. \tag{2}$$

С другой стороны, в силу формулы Грина

$$I_{\varepsilon_0} = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} (-BQ\, dx + BP\, dy).$$

Так как криволинейный интеграл от выражения $-BQ\, dx + BP\, dy$, взятый по любому отрезку траектории L системы (I), равен, как было выше показано, нулю, то I_ε равен сумме интегралов, взятых по дугам окружности C_ε, входящих в границы областей Ω_k. Обозначим эти дуги через Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Тогда

$$I_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} (-BQ\, dx + BP\, dy).$$

Переходя к криволинейному интегралу по длине дуги, получим

$$I_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} (-BQ\cos\varphi + BP\sin\varphi)\, ds,$$

где φ — угол между касательной к окружности C_ε и положительным направлением оси Ox. Обозначим через M наибольшее значение выражения $|BQ| + |BP|$ в области Ω. Оценивая последнее выражение для I_ε и принимая во внимание, что сумма длин всех отрезков Δ_k меньше длины окружности C_ε, т. е. меньше $2\pi\varepsilon$, мы получим

$$|I_\varepsilon| < 2\pi M\varepsilon.$$

При достаточно малом ε последнее неравенство противоречит неравенству (2). Таким образом, утверждение, что в области G не может существовать петли, доказано.

Доказательство того, что в области G не может существовать замкнутой кривой, составленной из нескольких траекторий и состояний равновесия $O_1, O_2, \ldots, O_m$, проводится вполне аналогично предыдущему доказательству, нужно только провести окружности $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, \ldots, C_{m\varepsilon}$ вокруг каждого состояния равновесия. Таким образом, теорема доказана.

Замечание. В проведенном выше доказательстве отсутствия замкнутых *траекторий*, предположение об аналитичности системы не используется, в этом случае достаточно предполагать, что (I) есть система класса C_1.

Следствие (критерий Бендиксона для односвязной области). Если для аналитической системы (I) выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

знакопостоянно в односвязной области G, то в области G не существует простых замкнутых кривых, состоящих из траекторий системы.

Критерий Бендиксона непосредственно вытекает из критерия Дюлака, если функция $B(x, y) = 1$. Очевидно, сделанное выше замечание относится и к критерию Бендиксона.

В случае многосвязной области G существование функции $B(x, y)$, для которой выражение $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ знакопостоянно в G, позволяет сразу утверждать, что в G отсутствуют замкнутые траектории (или кривые, составленные из траекторий), внутренность которых принадлежит области. Что касается других замкнутых траекторий, то они могут существовать, но относительно них также можно сделать некоторые заключения. Мы ограничимся тем, что приведем соответствующее утверждение для наиболее часто встречающегося случая двусвязной области, которую мы будем называть кольцевой.

Теорема 32 (*критерий Дюлака для кольцевой области*). *Пусть G — двусвязная область, входящая в область определения системы* (I). *Если существует определенная в G функция $B(x, y)$ класса C_1 такая, что выражение $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ знакопостоянно, то в области G не может существовать более одной простой замкнутой кривой, составленной из траекторий системы, содержащей внутри себя внутреннюю границу области G.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что система (I) имеет в кольцеобразной области G две замкнутые траектории L_1 и L_2. Пусть g_1 — область, ограниченная траекториями L_1 и L_2. Соединим какую-нибудь точку M_1 на L_1 с какой-нибудь точкой M_2 на L_2 простой гладкой дугой l, все точки которой кроме концов M_1 и M_2 лежат в g_1.

Рассмотрим замкнутый контур $M_1mM_1M_2MM_2M_1$ (рис. 127), состоящий из точек траекторий L_1, L_2 и дуги l.

Для этого замкнутого контура

$$\int B(P\,dy - Q\,dx) = 0$$

(так как на траекториях L_1 и L_2 подынтегральное выражение тождественно равно нулю, а дуга l при обходе этого контура проходится дважды в противоположных направлениях).

По теореме Грина

$$\int B(P\,dy - Q\,dx) = \iint\limits_{g_1} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)\right] dx\,dy.$$

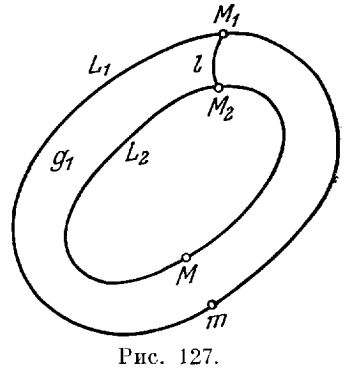


Рис. 127.

Таким образом, интеграл

$$\iint\limits_{g_1} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)\right] dx\,dy$$

должен равняться нулю. Но интегрирование в нем берется по области g_1 между траекториями L_1 и L_2, а в области g_1, являющейся частью кольцевой области G, подынтегральное выражение по предположению знакопостоянно. Следовательно, в области G не может существовать более одной замкнутой траектории.

Совершенно аналогичным рассуждением устанавливается, что в G может существовать не более одной простой замкнутой кривой, составленной из траекторий.

Отметим, что в сформулированном критерии Дюлака для подбора функции $B(x, y)$, соответствующей данным, конкретным, динамическим системам, не дается никаких методов. Таким образом, в каждом конкретном случае подбор такой функции может удасться или не удасться — в зависимости от вида системы и искусства подбирающего.

4. Применение индексов Пуанкаре и циклов однократного пересечения к решению вопросов существования предельных циклов. Мы будем в настоящем пункте рассматривать гладкие циклы однократного пересечения (см. § 3, п. 12). Напомним, что гладким циклом однократного пересечения называется простая гладкая замкнутая кривая C, обладающая следующими свойствами:

1) На кривой C не лежит ни одного состояния равновесия.

2) Во всех точках кривой C кроме, быть может, конечного числа траектории не имеют с ней касания и либо все входят внутрь области, ограниченной кривой C, либо все выходят из этой области. При этом траектории, которые касаются кривой C (если такие существуют), входят или выходят из области, ограниченной кривой C, вместе со всеми остальными траекториями.

Всякий цикл без контакта, очевидно, является циклом однократного пересечения (но, конечно, не наоборот). В силу теоремы 29 главы V индекс цикла без контакта равен $+1$.

Рассмотрение циклов без контакта или циклов однократного пересечения, а также индексов состояния равновесия позволяет в ряде случаев сделать определенное заключение относительно существования замкнутых траекторий или предельных циклов. Приведем сначала несколько простых *признаков* отсутствия замкнутых траекторий — признаков, вытекающих из свойств индексов Пуанкаре. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема 33. *Пусть G — односвязная область, принадлежащая области определения системы* (I). *Тогда*: 1) *Если в области G нет состояний равновесия системы, то в ней нет и замкнутых траекторий.* 2) *Если в области G имеется конечное число состояний равновесия, причем индекс каждого из них, а также сумма индексов любой комбинации их не равна $+1$, то в G нет замкнутых траекторий. В частности, если в области имеется только одно состояние равновесия с индексом, отличным от единицы (например, седло), то в G нет замкнутых траекторий.* 3) *Если в области G имеется конечное число состояний равновесия, причем для каждого состояния равновесия O с положительным индексом существует стремящаяся к O траектория, уходящая на бесконечность или имеющая точки вне G, то в G нет замкнутых траекторий.*

Справедливость настоящей теоремы непосредственно следует из теорем 25 и 26 § 11.

Приведем теперь несколько признаков, основанных на рассмотрении циклов однократного пересечения. Заметим, что построение циклов однократного пересечения (в частности, циклов без контакта) с целью изучения предельных циклов является одним из часто применяемых приемов исследования.

Теорема 34. *Пусть C — цикл однократного пересечения, а G — ограниченная им область, принадлежащая области определения системы* (I). *Если выполняются следующие условия*: 1) *все траектории, пересекающие C, при возрастании t входят в G*; 2) *в области G имеется единственное состояние равновесия O, являющееся неустойчивым узлом или фокусом*; 3) *в области G имеется лишь конечное число замкнутых траекторий системы, тогда число расположенных в G устойчивых предельных циклов системы на единицу больше числа неустойчивых. (Следовательно, существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл.)*

Доказательство. Так как все траектории, пересекающие цикл однократного пересечения C, по условию входят в область G, а O — неустойчивый узел или фокус, то в G обязательно должен существовать по крайней мере один предельный цикл (см. теорему 13 § 4).

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_s$ — все предельные циклы системы, расположенные в G, причем L_{i+1} содержит L_i внутри себя. Легко видеть, что все эти циклы одновременно не могут быть полуустойчивыми. Пусть $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ — те из предельных циклов, которые не являются полуустойчивыми. Так как O — неустойчивое состояние равновесия, то L_{i_1} является устойчивым предельным циклом, далее неустойчивые и устойчивые предельные циклы идут чередуясь (с возрастанием номера i_j), а цикл L_{i_k} является, очевидно, устойчивым. Но тогда среди циклов $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ устойчивых имеется на 1 больше, чем неустойчивых. (Число полуустойчивых предельных циклов, которые при этом могут существовать в G, не связано никакими условиями кроме конечности их числа.)

Аналогичное утверждение имеет место, если предположить, что траектории системы через цикл без контакта C *выходят* из G, а состояние равновесия O является устойчивым узлом или фокусом. Если же траектории системы через C входят в G (выходят из G), а O является устойчивым (неустойчивым) узлом или фокусом, то число устойчивых предельных циклов в области G равно числу неустойчивых, в частности, тех и других может не быть совсем.

Приведем еще аналогичную теорему для кольцевой области.

Т е о р е м а 35. *Пусть G — двусвязная область, ограниченная двумя циклами без контакта C_1 и C_2, не содержащая состояний равновесия и имеющая конечное число замкнутых траекторий. Если все траектории, пересекающие C_1 и C_2, при возрастании t входят в G (выходят из G), то число устойчивых предельных циклов, расположенных в G, на единицу больше (меньше) числа неустойчивых предельных циклов* (рис. 128).

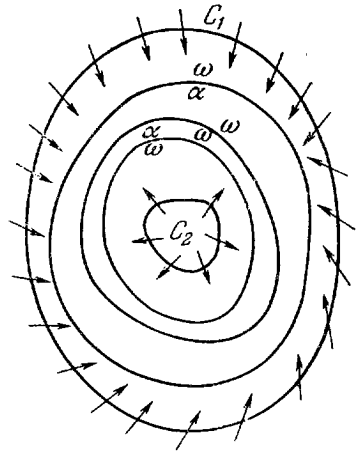


Рис. 128.

Отсюда следует, в частности, что при этих условиях в G существует по крайней мере один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл. Если же траектории, пересекающие один из граничных циклов без контакта, входят в G, а пересекающие другой — выходят из G, то число устойчивых предельных циклов в области G равно числу неустойчивых, в частности, тех и других может не быть совсем.

Доказательство теоремы 35 вполне аналогично доказательству предыдущей.

5. Топографическая система кривых и контактная кривая. Для того чтобы применять теоремы 31 и 32, нужно иметь соответствующие области, ограниченные циклами без контакта. Регулярные методы для отыскания циклов без контакта неизвестны. В некоторых случаях эти циклы удается найти с помощью удачного подбора так называемой *топографической системы кривых*.

Топографической системой называют, следуя Пуанкаре, систему простых замкнутых гладких непересекающихся кривых

$$F(x, y) = C, \tag{3}$$

вложенных одна в другую и заполняющих некоторую двусвязную область (например, концентрические окружности с центром в начале координат или семейство софокусных эллипсов). Мы будем считать, что каждой кривой семейства соответствует единственное C. Далее, будем предполагать для определенности, что кривая с заданным C содержит внутри себя все кривые с меньшими C, так что при увеличении C «размеры» кривых (3) увеличиваются. И, наконец, мы будем предполагать, что на кривых (3) не лежит состояний равновесия рассматриваемой динамической системы.

Пусть топографическая система кривых (3) заполняет область G. Пусть, далее,

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

— траектория системы (I), расположенная в G. Рассмотрим функцию $F(x(t), y(t))$.

Найдем производную от этой функции в силу динамической системы (I) (см. § 3, п. 13):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y} Q(x, y) = \Phi(x, y).$$

Очевидно, траектория L касается кривой топографической системы в их общей точке $M(x, y)$ в том и только в том случае, когда $\Phi(x, y) = 0$. Поэтому каждая кривая топографической системы, на которой функция $\Phi(x, y)$ знакоопределенна *), является циклом однократного пересечения. Если при этом во всех точках такой кривой

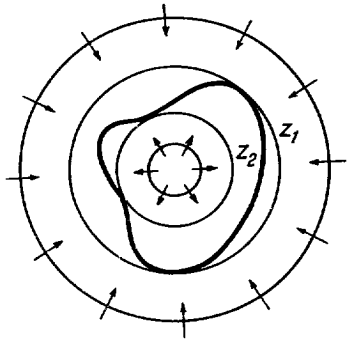


Рис. 129.

$$\Phi(x, y) \leqslant 0, \quad \text{то} \quad \frac{dF}{dt} \leqslant 0.$$

F уменьшается, и все траектории при возрастании t входят в область, лежащую внутри рассматриваемого цикла, однократного пересечения. Если, напротив, $\Phi(x, y) \geqslant 0$ на кривой топографической системы, то все траектории при возрастании выходят из области, лежащей внутри этой кривой. Отсюда следует, что если в некоторой кольцеобразной области G, составленной из кривых топографической системы, функция $\Phi(x, y)$ знакопостоянна, то в такой области замкнутых траекторий и, в частности, предельных циклов — быть не может.

Кривая $\Phi(x, y) = 0$, т. е. кривая

$$P(x, y) \cdot F'_x(x, y) + Q(x, y) \cdot F'_y(x, y) = 0$$

называется *контактной кривой*. Контактная кривая состоит из всех точек, в которых траектории системы (I) касаются кривых топографической системы. Если топографическая система выбрана так, что кривая контактов является замкнутой, то существует, очевидно, «наибольшая» и «наименьшая» среди кривых топографической системы, пересекающихся с контактной кривой. Обозначим эти две кривые соответственно через Z_1 и Z_2 (рис. 129). Очевидно, контактная кривая лежит целиком в кольцевой замкнутой области W_1, ограниченной кривыми Z_1 и Z_2, и касается этих кривых. Все кривые топографической системы, лежащие вне кривой Z_1 или внутри кривой Z_2, являются циклами однократного пересечения. Отсюда следует, что если существуют замкнутые траектории, расположенные в области G (G — область, покрытая кривыми топографической системы), то она лежит между кривыми Z_1 и Z_2. Если функция $\Phi(x, y)$ не меняет знака, но обращается в нуль (в точках контактной кривой), то мы будем говорить, что в точках контактной кривой контакт «ложный».

6. Примеры.

Пример 2.

$$\dot{x} = y \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = -(1 + x^2 + x^4)\, y - x \equiv Q(x, y).$$

*) То есть во всех точках которой, за исключением конечного их числа, $\Phi(x, y)$ имеет один и тот же знак; в конечном числе точек $\Phi(x, y)$ может быть равна нулю.

Система имеет единственное состояние равновесия O (0, 0) — устойчивый фокус (см. § 7, п. 5, пример 1).

Покажем, что предельных циклов система не имеет. Применим критерий Бендиксона. Выражение $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=-(1+x^2+x^4)$ не меняет знака на плоскости, следовательно, предельных циклов нет.

Пример 3 [60].

$$\dot{x}=y+x(1+\beta y)(x^2+y^2+1), \qquad \dot{y}=-x+(y-\beta x^2)(x^2+y^2+1).$$

Покажем, что предельных циклов система не имеет. Рассмотрим топографическую систему — семейство окружностей $x^2+y^2=C$. Находя производную $\frac{d(x^2+y^2)}{dt}$, в силу системы (§ 3, п. 13) получим $\frac{d(x^2+y^2)}{dt}=2(x^2+y^2+1)(x^2+y^2)$. Это выражение больше 0 для всех точек плоскости (x, y), кроме точки $O(0, 0)$, являющейся состоянием равновесия. Значит, семейство $x^2+y^2=C$ является семейством замкнутых кривых без контакта для траекторий системы. Вдоль любой траектории C растет с ростом t. Таким образом, предельных циклов нет.

Пример 4.

$$\dot{x}=1+x^2-y^2+2xy, \qquad \dot{y}=1-x^2+y^2+2xy. \tag{4}$$

Введем в эту систему параметр α следующим образом:

$$\dot{x}=-\alpha(1-x^2+y^2)+2xy, \qquad \dot{y}=1-x^2+y^2+2\alpha xy. \tag{5}$$

Очевидно, при $\alpha=1$ имеем систему (4). При $\alpha=0$ имеем систему

$$\dot{x}=2xy, \qquad \dot{y}=1-x^2+y^2. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что система (5) получена поворотом векторного поля на угол, тангенс которого равен α, из системы (6). Состояния равновесия, общие системам (5) и (6), будут следующие: A (1, 0) и B (— 1, 0). Систему (6) можно проинтегрировать. Ее общий интеграл $\left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2=\frac{C^2}{4}-1$ (рис. 130). Систему (6) можно взять в качестве топографической системы для системы (5). Если существует предельный цикл системы (5), то он должен лежать целиком в полуплоскости $x>0$ или $x<0$, так как ось y траектории системы (5) пересекают в одном направлении. Но полуплоскости $x>0$ и $x<0$ заполнены замкнутыми кривыми без контакта с траекториями системы (5), значит, система (5) не имеет предельных циклов.

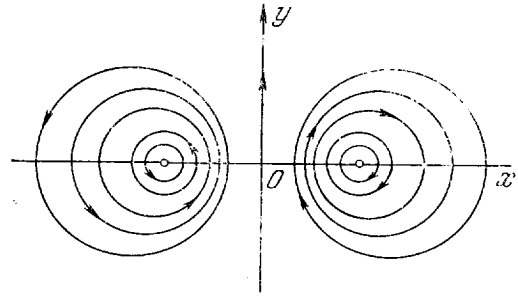


Рис. 130.

Пример 5 [61].

$$\dot{x}=y, \qquad \dot{y}=2(1-xy).$$

Эта система не имеет состояний равновесия в конечной части плоскости. Поскольку внутри замкнутой траектории должно лежать хотя бы одно состояние равновесия, система не имеет предельных циклов.

Пример 6 [62].

$$\dot{x} = y \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = -ax - by + ax^2 + \beta y^2 \equiv Q(x, y).$$

Эта система не имеет предельных циклов. В этом можно убедиться с помощью критерия Дюлака, выбирая в качестве функции Дюлака $B(x, y) = be^{-2\beta x}$. В самом деле, выражение $\frac{\partial (PB)}{\partial x} + \frac{\partial (QB)}{\partial y} = -b^2 e^{-2\beta x}$ не меняет знака на плоскости (x, y), следовательно, предельных циклов нет.

В некоторых случаях выражение, получаемое с помощью применения критерия Дюлака, может менять знак на некоторых кривых; однако, используя индивидуальные особенности данной системы, иногда можно показать, что предельный цикл не может пересекать эти кривые.

Пример 7 [63].

$$\dot{x} = x(a_1 x + b_1 y + c_1), \qquad \dot{y} = y(a_2 x + b_2 y + c_2).$$

Можно показать, что эта система не имеет предельных циклов. Возьмем в качестве функции Дюлака $B(x, y) = x^{k-1} y^{h-1}$, где $k = \frac{b_2 (a_2 - a_1)}{\Delta}$, $h = \frac{a_1 (b_1 - b_2)}{\Delta}$ $(\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0)$. Тогда

$$\frac{\partial (PB)}{\partial x} + \frac{\partial (QB)}{\partial y} = \left(\frac{a_1 c_2 (b_1 - b_2)}{\Delta} + \frac{b_2 c_1 (a_2 - a_1)}{\Delta} \right) x^{k-1} y^{h-1}.$$

Это выражение при $\sigma \equiv a_1 c_2 (b_1 - b_2) + b_2 c_1 (a_2 - a_1) \neq 0$ обращается в нуль только вдоль интегральных прямых $x = 0$ и $y = 0$. Отсюда следует, что предельных циклов быть не может, так как траектории не пересекаются. Можно показать, что в этом случае не может быть также замкнутых контуров, составленных из траекторий. Допустим, что имеется замкнутый контур, в границу которого входят отрезки осей x и y. Такой контур целиком лежит в одной из четвертей плоскости (x, y). В этом случае выражение $\frac{\partial (PB)}{\partial x} + \frac{\partial (QB)}{\partial x}$ хотя и обращается в нуль на осях x и y, но в каждой четверти плоскости знак этого выражения не меняется. Значит, $\iint \left(\frac{\partial (PB)}{\partial x} + \frac{\partial (QB)}{\partial y} \right) dx\, dy \neq 0$ и замкнутый контур существовать не может. В случае $\sigma = 0$ система имеет аналитический интеграл, при этом одно из состояний равновесия будет типа центр, т. е. имеется целая область плоскости, целиком заполненная замкнутыми траекториями.

Пример 8 [64].

$$\dot{x} = (y - k)x, \qquad \dot{y} = \gamma x + \beta y + q y^2.$$

Покажем, что эта система не имеет предельных циклов. Воспользуемся критерием Дюлака. В качестве функции Дюлака возьмем $B(x, y) = x^{-(2q+1)}$. Тогда выражение

$$D(x, y) \equiv \frac{\partial (PB)}{\partial x} + \frac{\partial (QB)}{\partial y} = (2qk + \beta) x^{-(2q+1)} \text{ при } 2qk + \beta \neq 0$$

не обращается в нуль на полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$. Ось $x = 0$ — интегральная прямая. Следовательно, при $2qk + \beta \neq 0$ система не имеет также и замкнутых контуров, составленных из траекторий, так как такой контур должен целиком лежать в области $x \geqslant 0$ или $x \leqslant 0$, где выражение $D(x, y)$ сохраняет знак внутри области и обращается

в нуль только на линии $x = 0$. При $2qk + \beta = 0$ система имеет аналитический интеграл и существует целая область, заполненная замкнутыми траекториями.

Пример 9 [61].

$$\dot{x} = 3xy, \qquad \dot{y} = y^2 - 2x^2 - 4xy + 2x.$$

Покажем, что эта система не имеет предельных циклов.

Выясним сначала возможное местонахождение цикла. Легко видеть, что $x = 0$ — интегральная прямая, причем на ней $\dot{y} > 0$ при $y \neq 0$. Состояния равновесия следующие: O (0, 0) и A (1, 0). Корни характеристического уравнения для O (0, 0) оба равны нулю, значит, O — сложное состояние равновесия. Поскольку через O (0, 0) проходит интегральная прямая, предельный цикл не может окружать точку O. Состояние равновесия A (1, 0) — устойчивый фокус. Таким образом, если существует предельный цикл, то он лежит в области $x > 0$ и окружает состояние равновесия A (1, 0). Поскольку O (0, 0) — сложное состояние равновесия, можно предположить также существование замкнутого предельного контура, состоящего из точки O и траектории, выходящей из точки O и возвращающейся в нее же, внутри которого находится состояние равновесия A. Применим критерий Дюлака. В качестве функции Дюлака возьмем $B(x, y) = \frac{1}{x(x+y)^2}$. Выражение $\frac{\partial (PB)}{\partial x} + \frac{\partial (QB)}{\partial y} = -\frac{4x^2(x+y)}{x^2(x+y)^4}$ меняет знак на прямой $x + y = 0$. Значит, если существует замкнутый предельный контур, составленный из траекторий, то он должен пересекать прямую $x + y = 0$. Найдем наклоны траекторий системы на прямой $x + y = 0$. Подставляя $y = -x$ в уравнения, получим $\frac{dy}{dx} = -\frac{x(3x+2)}{3x^2}$. Отсюда видно, что при $x > 0$ имеем $\frac{dy}{dx} < -1$, т. е. все траектории пересекают прямую $x + y = 0$ в одном направлении. Следовательно, ни предельный цикл, ни замкнутый предельный контур, составленный из траекторий, существовать не могут.

В некоторых системах предельный цикл существует при одних значениях параметров и отсутствует при других значениях параметров. Иногда удается доказать отсутствие предельных циклов в некоторой области значений параметров. Приведем некоторые примеры.

Пример 10 [65].

$$\dot{x} = y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda], \qquad \dot{y} = -xy.$$

Покажем, что при $\lambda \leqslant -1$ система не имеет предельных циклов. Легко видеть, что при $\lambda \leqslant -1$ система имеет три состояния равновесия в конечной части плоскости: $A(-1, 0)$, $B(1 + \sqrt{|\lambda|}, 0)$ и $C(1 - \sqrt{|\lambda|}, 0)$. Все эти состояния равновесия лежат на интегральной прямой $y = 0$. Следовательно, при $\lambda \leqslant -1$ система не имеет предельных циклов. Покажем, что при $\lambda > 1$ система также не имеет предельных циклов. В этом случае система имеет следующие состояния равновесия: $A(-1, 0)$ — седло, $D(0, \sqrt{1+\lambda})$ и $E(0, -\sqrt{1+\lambda})$ — устойчивые фокусы или узлы. Заметим, что если существуют циклы, то они лежат целиком в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, так как $y = 0$ — интегральная прямая. Воспользуемся критерием Дюлака. В качестве функции Дюлака возьмем $B(x, y) = y$. Тогда выражение $\frac{\partial (PB)}{\partial x} + \frac{\partial (QB)}{\partial y} = -y(3x^2 + \lambda - 1)$ в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$ при $\lambda > 1$ сохраняет знак.

Пример 11 [66].

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x + x^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x)\, y. \tag{7}$$

Как было показано выше (см. § 7, п. 5, пример 3), эта система имеет два состояния равновесия: $O(0,\ 0)$ — седло и $A(-1,\ 0)$ — фокус или узел. Легко видеть, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ систему можно проинтегрировать. Ее общее решение: $y^2 - x^2 - \frac{2x^3}{3} = C$. При $C = 0$ получается декартов лист, пересекающий ось x в точках $x = 0$ и $x = -\frac{3}{2}$ (рис. 131). Эту систему можно использовать в качестве топографической системы. Найдем кривую контактов траекторий системы (7) и топографической системы

$$(\dot{y})_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} \cdot \dot{x} - (\dot{x})_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} \cdot \dot{y} = y^2\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x).$$

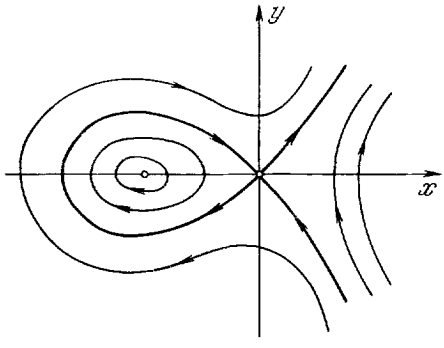


Рис. 132.

Нетрудно видеть, что контакт по прямой $y = 0$ «ложный». $\dot{y} = 0$ — изоклина вертикальных наклонов, общая обоим системам. Разность наклонов меняет знак на прямой $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x = 0$.

Возможны следующие три случая:

1) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \leqslant 0$. Если существует предельный цикл системы (7), то он расположен целиком в полуплоскости $x < 0$, так как охватывать фокус и седло он не может, а каждую из полуосей оси y траектории пересекают в одном направлении. Следовательно, пересекать прямую $x = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ $\left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \geqslant 0\right)$ предельный цикл не может. Значит, в этом случае предельных циклов нет.

2) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \geqslant \frac{3}{2}$. В этом случае контактная прямая $x = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ проходит слева от петли сепаратрисы, не пересекая ее $\left(\text{при } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{3}{2}\right.$ будет касание$\left.\right)$. Значит, петля сепаратрисы и все замкнутые кривые внутри нее являются замкнутыми кривыми без контакта с траекториями системы (7). Если бы существовал предельный цикл, он либо пересекал бы петлю сепаратрисы, либо лежал бы целиком внутри нее, что невозможно. Значит, и в этом случае предельных циклов нет.

3) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{3}{2}$. В этом случае контактная прямая пересекает петлю. Вопрос о существовании предельных циклов остается открытым.

В следующем примере доказывается единственность предельного цикла с помощью критерия Дюлака для кольца.

Пример 12.

$$\dot{x} = -y + ax + (3x^2 + 2y^2)\, x \equiv P(x,\ y),$$
$$\dot{y} = \quad x + ay + (3x^2 + 2y^2)\, y \equiv Q(x,\ y).$$

Нетрудно видеть, что единственное состояние равновесия O (0, 0) является неустойчивым фокусом при $a > 0$ и устойчивым фокусом при $a < 0$.

При $\alpha = 0$ $O(0, 0)$ является состоянием равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями.

Возьмем в качестве топографической системы семейство окружностей $x^2 + y^2 = C$. Дифференцируя выражение $x^2 + y^2$, в силу системы (§ 3, п. 13) получим

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = 2(x^2+y^2)(3x^2+2y^2+\alpha).$$

При $\alpha > 0$ это выражение сохраняет знак, значит, предельных циклов нет. При $\alpha < 0$ имеем $\frac{d(x^2+y^2)}{dt} > 0$ вне эллипса $3x^2+2y^2+\alpha = 0$ и $\frac{d(x^2+y^2)}{dt} < 0$ внутри этого эллипса. Таким образом, вне окружности $x^2+y^2+\frac{\alpha}{2} = 0$ и внутри окружности $x^2+y^2+\frac{\alpha}{3} = 0$ предельных циклов нет. Все траектории, проходящие через точки указанных двух окружностей, входят внутрь кольца между ними. Поэтому в кольце должно быть нечетное число циклов, причем число неустойчивых циклов должно быть на единицу больше числа устойчивых (рис. 132).

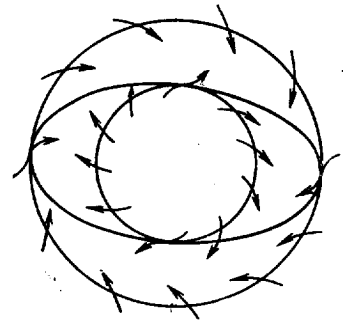


Рис. 132.

Покажем, что в кольце имеется единственный предельный цикл. Воспользуемся критерием Дюлака, согласно которому предельный цикл в кольцевой области будет единственным, если выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ в этой области сохраняет знак. Получим $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2(6x^2 + 4y^2 + \alpha)$. Нетрудно видеть, что эллипс $6x^2+4y^2+\alpha = 0$ лежит целиком внутри меньшей окружности кольца $x^2+y^2+\frac{\alpha}{3} = 0$, значит, внутри рассматриваемого кольца выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ сохраняет знак. Таким образом, предельный цикл единственный.

§ 13. Поведение траекторий на бесконечности

1. Общие замечания. Преобразование Бендиксона. При исследовании качественной структуры разбиения на траектории у конкретных динамических систем в тех случаях, когда системы определены на всей плоскости, большую роль могут играть сведения о поведении траекторий при неограниченно увеличивающихся значениях x и y или, как говорят, «на бесконечности». Знание поведения траекторий «на бесконечности» часто является очень полезным и при исследовании динамических систем в ограниченной части плоскости.

Так, например, с помощью исследования «на бесконечности» можно иногда установить вполне точно, к какому из состояний равновесия стремится сепаратриса, выходящая из данного седла (глава XII, § 30, примеры 5, 6, 9 и др.), или доказать существование у системы предельного цикла. Таким образом, вопрос об исследовании поведения траектории «на бесконечности», которому посвящен настоящий параграф, имеет существенное значение.

Укажем сначала один частный случай, когда этот вопрос решается очень просто. Пусть рассматриваемая система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,\ y) \tag{I}$$

такова, что для всех x, y, для которых $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ достаточно велико, например, больше некоторого положительного числа r_0, выражение

$$J = P(x,\ y)\cdot x + Q(x,\ y)\cdot y$$

отлично от нуля и, следовательно, сохраняет знак. Очевидно, это означает, что все окружности с центром в начале координат, с радиусом больше r_0, являются циклами без контакта для траекторий системы (I). Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ есть уравнение траектории, то

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\varrho^2(t)}{dt} = J.$$

Поэтому, если при $\varrho > r_0$, $J > 0$, то все траектории, пересекающие указанные окружности, с возрастанием t выходят из них, если же $J < 0$, то траектории входят внутрь этих окружностей. В первом случае говорят, что «бесконечность устойчива», во втором — что «бесконечность неустойчива». Иногда знание того, что бесконечность устойчива или неустойчива, может помочь доказать существование у системы предельного цикла. Так, например, если у аналитической системы имеется единственное состояние равновесия — устойчивый фокус — и если бесконечность устойчива, то у системы непременно существует по крайней мере один неустойчивый предельный цикл.

Указанный случай, когда J сохраняет знак при больших значениях ϱ, является, однако, весьма частным. Поэтому необходимо дать способы исследования системы на бесконечности, пригодные не только в этом частном случае. Обычно эти способы основаны на том, что плоскость дополняется «бесконечно удаленными элементами», превращаясь тем самым в компактное многообразие, а затем рассматривается поведение траекторий в окрестности указанных «бесконечно удаленных» элементов.

Как известно, такое дополнение плоскости может быть сделано различным образом. В этом пункте мы рассмотрим так называемую *сферу Бендиксона* и *преобразование Бендиксона*.

Пусть

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \tag{1}$$

— единичная сфера в пространстве R^3, N (0, 0, 1) и S (0, 0, -1) — ее соответственно северный и южный полюсы. Будем считать, что фазовой плоскостью (x, y) является плоскость α, касающаяся сферы Σ в полюсе S (ее уравнение $z = -1$). Наряду с ней будем рассматривать плоскость (u, v), касающуюся сферы Σ в полюсе N. Обозначим ее через α' (рис. 133). В качестве начал координат на плоскостях α и α' выберем соответственно точки S и N, и пусть направления осей y и v совпадают с направлением оси Y, а направления осей x и u — с направлением оси X.

Пусть Π — стереографическая проекция плоскости α на сферу Σ из центра N. Очевидно, Π является топологическим отображением плоскости α на сферу Σ, «проколотую» в точке N. При этом отображении траектории системы (I) переходят в линии на сфере Σ, которые мы будем называть *траекториями на сфере*, хотя мы не рассматриваем их как траек-

тории некоторой динамической системы на сфере — для нас они просто образы траекторий системы (I). При указанном проектировании плоскости на сферу плоскость дополняется одной «бесконечно удаленной» точкой, соответствующей полюсу. В этом случае говорят, что рассматривается «сфера Бендиксона». Для исследования поведения траекторий системы (I) «на бесконечности» нужно, очевидно, исследовать поведение траекторий на сфере в окрестности полюса N.

Для этого в свою очередь мы спроектируем — с помощью стереографической проекции Π' с центром S — сферу Σ на плоскость α'. Рассмотрим

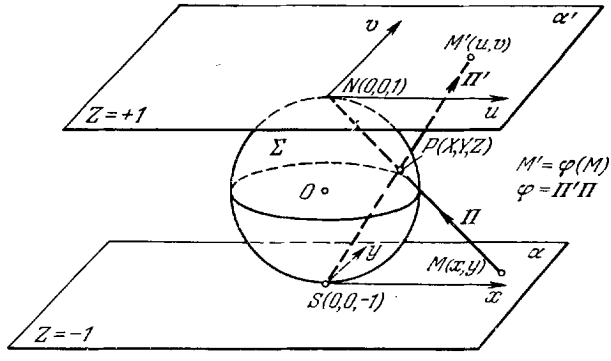


Рис. 133.

отображение $\varphi = \Pi'\Pi$. Оно является топологическим отображением «проколотой» в точке S плоскости α на «проколотую» в точке N плоскость α'. При отображении φ точка $M(x, y)$ плоскости α переходит в точку $\varphi(M) = \Pi'(\Pi(M)) = \Pi'(P) = M'(u, v)$ плоскости α' (рис. 133).

Из очевидных соотношений

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z-1}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{u}{X} = \frac{v}{Y} = \frac{2}{Z+1},$$

и из уравнения (1) вытекает после простых вычислений, что

$$x = \frac{4u}{u^2+v^2}, \qquad y = \frac{4v}{u^2+v^2}. \tag{2}$$

$$u = \frac{4x}{x^2+y^2}, \qquad v = \frac{4y}{x^2+y^2}. \tag{3}$$

Преобразование (2) (или эквивалентное ему преобразование (3)) называется *преобразованием Бендиксона*. Применяя его к системе (I), мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{4}(v^2-u^2)\cdot P\left(\frac{4u}{u^2+v^2}, \frac{4v}{u^2+v^2}\right) - \frac{1}{2}uvQ\left(\frac{4u}{u^2+v^2}, \frac{4v}{u^2+v^2}\right), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{2}uvP\left(\frac{4u}{u^2+v^2}, \frac{4v}{u^2+v^2}\right) + \frac{1}{4}(u^2-v^2)\cdot Q\left(\frac{4u}{u^2+v^2}, \frac{4v}{u^2+v^2}\right). \end{aligned} \tag{A}$$

Рассмотрим случай, когда (A) является алгебраической системой, т. е. функции P и Q — многочлены. В этом случае уравнения (A) имеют вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\Phi(u, v)}{(u^2+v^2)^m}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\Psi(u, v)}{(u^2+v^2)^m},$$

где Φ и Ψ — многочлены, не делящиеся одновременно на u^2+v^2, а m — целое число, $m \geqslant 0$.

Система (А), вообще говоря, не определена в точке (0, 0). Возьмем вместо нее систему

$$\frac{du}{dt} = \Phi(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = \Psi(u, v). \tag{Б}$$

На «проколотой» плоскости α' траектории системы (А) совпадают с траекториями системы (Б). Но система (Б) уже определена на всей плоскости α', в частности, в начале координат. Поэтому, исследуя расположение траекторий системы (Б) в некоторой окрестности начала координат и применяя отображение $\varphi^{-1} = \Pi^{-1}(\Pi')^{-1}$, мы сможем сделать заключения о поведении траекторий системы (А) на бесконечности.

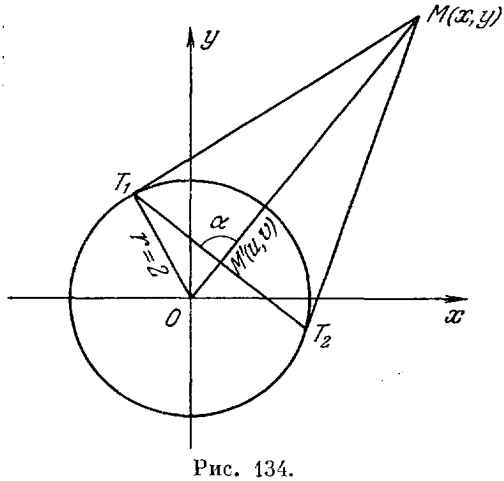


Рис. 134.

Сделаем несколько замечаний по поводу преобразования Бендиксона.

Замечание 1. В проведенных выше рассуждениях мы дополняли плоскость (x, y) *одной бесконечно удаленной несобственной точкой*, образом которой при стереографической проекции Π является полюс N сферы. Моделью дополненной таким образом плоскости является сама сфера Σ; при этом говорят, что исследование системы (I) проводится на «сфере» Бендиксона *).

Замечание 2. Возникает вопрос, определяют ли системы (I) и (А) *динамическую систему на сфере* в смысле § 2. Мы имеем дело с простейшей системой координат на сфере, определяемой покрытием, состоящим из двух элементов, и описанной в дополнении, § 7. Уравнения (I) относятся к первому элементу покрытия (сфера без северного полюса), а уравнения (А) — ко второму. Очевидно, динамическая система на сфере получается в том и только в том случае, когда функции $\frac{\Phi(u, v)}{(u^2+v^2)^m}$, $\frac{\Psi(u, v)}{(u^2+v^2)^m}$ могут быть доопределены в точке $u = 0$, $v = 0$ так, чтобы они были функциями класса C_1. Это всегда возможно, когда $m = 0$. Однако простые примеры показывают, что если $m > 0$, то такое доопределение, вообще говоря, невозможно. Таким образом, уравнения (I) и (А) не всегда определяют динамическую систему на сфере.

Замечание 3. Преобразование Бендиксона можно получить без пространственных рассмотрений. Именно, рассмотрим *преобразование обратными радиусами* или *инверсию плоскости* (x, y) относительно окружности $x^2+y^2=r^2$. Это преобразование ставит в соответствие каждой точке $M(x, y)$ плоскости точку M' (u, v) той же плоскости, причем точки M и M' лежат на одном луче, выходящем из начала координат O, и выполняется соотношение

$$OM \cdot OM' = r^2$$

*) В теории аналитических функций плоскость также дополняется одной бесконечно удаленной точкой. В этом случае соответствующую модель называют обычно *сферой Римана*.

(рис. 134). Нетрудно убедиться, что при $r = 2$ координаты x, y точки M выражаются через координаты u, v посредством формул (2), т. е. указанная инверсия является преобразованием Бендиксона.

Замечание 4. Преобразование Бендиксона, как и рассматриваемое в следующем пункте преобразование Пуанкаре, целесообразно применять лишь в тех случаях, когда система (1) является алгебраической (функции P и Q — многочлены). Для системы (Б), к которой это преобразование приводит, точка (0, 0) может быть неособой точкой. Так как, однако, каждая траектория системы (I), уходящая при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ на бесконечность, преобразуется в траекторию системы (Б), стремящуюся к точке (0, 0), то, как правило, преобразование Бендиксона приводит к появлению состояния равновесия, при этом еще сложной структуры, которое трудно исследовать. Поэтому преобразование Бендиксона дает хорошие результаты лишь в редких случаях и удобнее пользоваться *преобразованием Пуанкаре*, к описанию которого мы и переходим.

2. Рассмотрение динамической системы, правые части которой многочлены на «сфере Пуанкаре». Мы изложим здесь другой способ пополнения плоскости «бесконечно удаленными элементами». Он связан с другим (не взаимно однозначным в точках плоскости) проектированием плоскости на сферу и используется при рассмотрении динамических систем в случае, когда P и Q многочлены *).

Как и в предыдущем пункте, мы будем рассматривать сферу единичного радиуса с центром в начале координат O

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

и будем считать, что фазовая плоскость (x, y) есть плоскость α, касающаяся сферы в южном полюсе S.

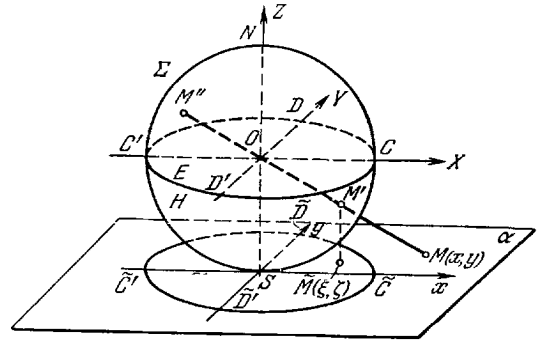


Рис. 135.

Пусть M — какая-нибудь точка плоскости (x, y). Рассмотрим прямую, соединяющую точку M с центром сферы O. Эта прямая пересекает сферу в двух диаметрально противоположных точках M' и M''. Обратно, всякой паре диаметрально противоположных точек, за исключением лишь точек, расположенных на большом круге, лежащем в плоскости $Z = 0$ (параллельной плоскости (x, y)), соответствует одна и только одна точка плоскости (x, y) (рис. 135). Большой круг сферы, лежащий в плоскости $Z = 0$, называется «экватором», а плоскость $Z = 0$ — плоскостью экватора. Точки экватора мы считаем соответствующими «бесконечно удаленным» точкам плоскости.

Всякие две не лежащие на экваторе диаметрально противоположные точки сферы, соответствуют одной и той же точке плоскости. Поэтому всякие две диаметрально противоположные точки экватора так же естественно считать соответствующими одной и той же «бесконечно удаленной точке» **).

*) Излагаемый ниже способ проектирования плоскости на сферу используется также при рассмотрении алгебраических кривых на плоскости.

**) Указанное пополнение плоскости «бесконечно удаленными элементами» приводит нас к рассмотрению сферы, у которой всякие две диаметрально противополож-

Сферу, указанным образом связанную с плоскостью, мы будем называть «сферой Пуанкаре». В то время, как при рассмотрении сферы Бендиксона мы пополняем плоскость одним «бесконечно удаленным элементом», соответствующим северному полюсу N сферы, при рассмотрении сферы Пуанкаре мы пополняем плоскость бесчисленным множеством бесконечно удаленных элементов, соответствующих попарно отождествленным точкам экватора сферы.

При описанном отображении плоскости на сферу прямые плоскости (x, y) отображаются в большие круги сферы, причем прямые, проходящие через начало координат, отображаются в большие круги, перпендикулярные экватору сферы. Траектории динамической системы (I) отображаются в некоторые линии на сфере, которые мы будем продолжать называть «траекториями динамической системы (I)» или «траекториями на сфере».

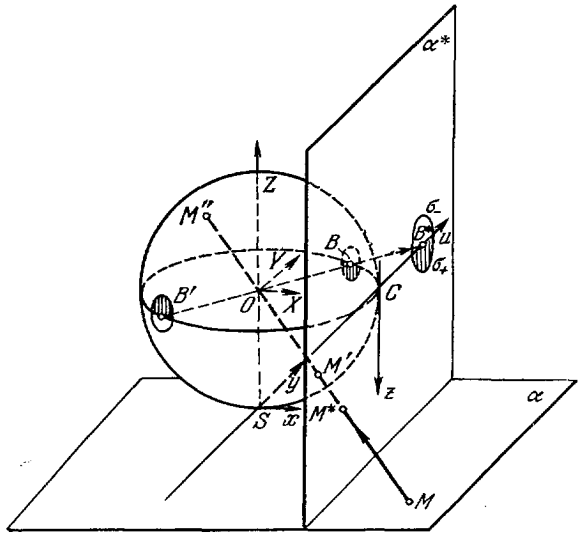


Рис. 136.

Для того чтобы определить поведение траекторий в окрестности точек экватора и в точках самого экватора, мы воспользуемся сначала следующим геометрическим построением.

Пусть C и C' — точки пересечения экватора E с осью X, а D и D' — точки оси Y, также принадлежащие E (рис. 135).

Проведем плоскость $X = 1$, касающуюся сферы Σ в точке C, обозначим эту плоскость через α^*. Введем на ней координаты u и z с началом в точке C и выберем в качестве осей u и z — прямые, параллельные соответственно осям Y и Z. При этом направление оси u выберем совпадающим с направлением оси Y, а оси z — противоположным направлению оси Z (т. е. направление оси z — вниз (рис. 136)). Пусть M' и M'' — две диаметрально противоположные точки сферы, не лежащие в плоскости $X = 0$, параллельной плоскости α^*. (Эта плоскость расположена относительно плоскости α^* так же, как плоскость экватора расположена относительно исходной плоскости α.)

С помощью центральной проекции точки M' и M'' отображаются в некоторую точку M^* плоскости α^*.

Если точки M' и M'' получены центральной проекцией некоторой не лежащей на оси y точки M плоскости α, то, очевидно, им заведомо будет соответствовать и некоторая точка M^* плоскости α^*. В этом случае точки M' и M'' не принадлежат экватору сферы. Но в случае, когда M' и M'' — два лежащие на экваторе E диаметрально противоположные точки сферы,

ные точки отождествляются (в силу того, что они соответствуют одной и той же точке плоскости). Как известно, мы получаем таким образом многообразие, являющееся одной из моделей проективной плоскости.

отличные от D и D', то им тоже соответствует некоторая определенная точка плоскости α^*, и эта точка лежит на оси $z = 0$.

Указанную центральную проекцию сферы на плоскость α^* естественно использовать при исследовании расположения траекторий в окрестности любой точки экватора, отличной от точек D и D'.

Для исследования окрестности точек D и D' экватора нужно вместо плоскости α^* рассмотреть плоскость $\hat{\alpha}$, касательную к сфере Σ в точке D, и поступать с ней полностью аналогично тому, как мы поступали с плоскостью α^*. Координаты в плоскости $\hat{\alpha}$ будем обозначать через v и z, причем ось v направлена так же, как ось X, а ось z направлена вниз.

Вернемся к плоскости α^*.

Пусть M — не лежащая на оси y точка плоскости α и M^* — соответствующая ей точка плоскости α^*. Так как точки M и M^* имеют соответственно пространственные координаты $(x, y, -1)$ и $(1, u, -z)$ и лежат на одной прямой, проходящей через точку O $(0, 0, 0)$, то мы имеем

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{u} = \frac{1}{z}, \tag{4}$$

откуда

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = -\frac{u}{z} \tag{5}$$

или

$$u = \frac{y}{x}, \quad z = \frac{1}{x}.$$

Для плоскости $\hat{\alpha}$ (касающейся сферы Σ в точке D) мы получаем полностью аналогичную связь между координатами x, y и z, v, именно,

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z}$$

или

$$v = \frac{x}{y}, \quad z = \frac{1}{y}. \tag{6}$$

Преобразования (5) и (6) называются «*преобразованиями Пуанкаре*». Применяя преобразование (5) к системе (I), мы получим систему

$$\frac{du}{dt} = -uzP\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \quad \frac{dz}{dt} = -z^2P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right). \tag{A$_1$}$$

При $z \neq 0$ (т. е. в точках, не лежащих на экваторе) траектории этой системы, очевидно, являются проекциями траекторий на сфере, или что то же, проекциями (через центр O) траекторий системы (I) на плоскости α.

По предположению правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ системы (I) — многочлены. Пусть n — наивысшая из степеней этих многочленов. Систему (A$_1$) в этом случае можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{P^*(u, z)}{z^n}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{Q^*(u, z)}{z^n}. \tag{A$_2$}$$

Система (A$_1$) (или, что то же — (A$_2$)) не определена при $z = 0$. Рассмотрим вместо нее систему

$$\frac{du}{d\tau} = P^*(u, z), \quad \frac{dv}{d\tau} = Q^*(u, z), \tag{A$_3$}$$

которая получается из системы (A$_2$) преобразованием параметра t:

$$\frac{dt}{z^n} = d\tau.$$

Заметим, что правые части системы (A_3), $P^*(u, z)$ и $Q^*(u, z)$ так же являются многочленами. Если $z \neq 0$, то траектории системы (A_3) совпадают с траекториями системы (A_2). При этом когда n — четное, то при переходе от системы (A_2) к системе (A_3) положительное направление на траекториях не меняется. Однако если n — нечетное, то при этом переходе направление на траекториях, лежащих в полуплоскости $z < 0$, меняется на противоположное.

Система (A_3) определена уже и при $z = 0$, т. е. на всей плоскости α^*. Нетрудно показать, что если многочлены P и Q взаимно просты, то многочлены P^* и Q^* тоже взаимно просты. В этом случае число особых точек системы (I) на сфере конечно.

Условимся считать, что в точках экватора, отличных от D и D', и в их окрестности траекториями на сфере (или траекториями системы (I)) *являются линии, получающиеся путем проекции из центра O траекторий системы* (A_3) *на плоскость α^*.*

В частности, отличными от D и D' особыми точками на экваторе являются проекции особых точек (состояний равновесия) системы (A_3), лежащих на оси $z = 0$.

Таким образом, отличные от D и D' особые точки системы (I), лежащие на экваторе, являются проекциями точек плоскости (u, z), удовлетворяющих соотношениям

$$P^*(0, u) = 0, \qquad Q^*(0, u) = 0. \tag{7}$$

В рассматриваемом нами случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены, изоклины $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ естественным образом рассматриваются на сфере. Все общие точки этих изоклин, как не лежащие, так и лежащие на экваторе, являются особыми точками системы (I) на сфере.

Однако нетрудно видеть непосредственно из выражений для $P^*(z, u)$, $Q^*(z, u)$, что особыми точками системы (I) *на экваторе* могут быть так же точки, не являющиеся общими точками изоклин. Для иллюстрации этого утверждения (которое может показаться парадоксальным) рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = b. \tag{8}$$

где $b \neq 0$ — константа. Очевидно, в этом случае функции $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = b$ нигде не обращаются в нуль одновременно. Траекториями этой системы являются прямые $x = C$. На сфере им соответствуют большие круги, пересекающиеся в двух диаметрально противоположных точках экватора, являющихся особыми точками системы (8). К тому же результату мы пришли бы, рассматривая соответствующие системе (8) функции $P^*(z, u)$ и $Q^*(z, u)$.

Для того чтобы рассмотреть окрестности точек D и D' экватора, нужно воспользоваться преобразованием (6). Применяя это преобразование к системе (I), мы получим систему (аналогичную системе (A))

$$\frac{dv}{dt} = zP\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) - zvQ\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right), \qquad \frac{dz}{dt} = -z^2Q\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right). \quad (\hat{A}_1)$$

Эта система после приведения выражений в правых частях к одному знаменателю может быть записана в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\hat{P}(v, z)}{z^n}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\hat{Q}(v, z)}{z^n}.$$

Наконец, после замены параметра $\frac{dt}{z^n} = d\tau$ получим

$$\frac{dv}{d\tau} = \hat{P}(z, v), \qquad \frac{dz}{d\tau} = \hat{Q}(z, v), \tag{$\hat{A}_3$}$$

где $\hat{P}(z, v)$ и $\hat{Q}(z, v)$ — многочлены. В то время, как система $(\hat{A}_1)$ не определена при $z = 0$, система $(\hat{A}_3)$ — определена при $z = 0$ (и, следовательно, на всей плоскости $\hat{\alpha}$). С помощью системы $(\hat{A}_3)$ определяются траектории на сфере в окрестности точек D и D'.

Исследуя системы (A_3) и $(\hat{A}_3)$ в окрестности оси $z = 0$, мы определим поведение траекторий в окрестности всех точек экватора.

Как правило, многочлены $Q^*(u, z)$ и $\hat{Q}(z, v)$ (в системах (A_3) и $(\hat{A}_3)$) содержат z в качестве множителя, т. е. ось $z = 0$ состоит из состояний равновесия и траекторий. Поэтому, как правило, экватор состоит из состояний равновесия и из траекторий *).

При том центральном проектировании плоскости α на «сферу Пуанкаре», которое мы здесь рассматриваем, каждой точке плоскости α соответствуют две диаметрально противоположные точки сферы. Для того чтобы избежать такого удвоения, мы можем рассматривать одну полусферу (вместе с экватором) — например, нижнюю полусферу, которую мы обозначили через $\overline{H}$. Отображение плоскости α на открытую полусферу H является топологическим; на экваторе диаметрально противоположные точки рассматриваются как отождествленные. Спроектируем ортогонально полусферу $\overline{H}$ на плоскость. Полученное таким образом отображение полусферы на круг $\overline{K}$ плоскости α с центром в точке S, радиуса единица, очевидно, является топологическим. Экватор сферы при этом отображается в граничную окружность Г круга $\overline{K}$, а траектории на сфере — в некоторые линии, которые мы будем называть *траекториями в круге* $\overline{K}$. В частности, особым точкам на полусфере $\overline{H}$ соответствуют особые точки в круге $\overline{K}$.

Круг $\overline{K}$ с соответствующим разбиением на траектории представляет весьма удобную для рассмотрения модель динамической системы (I), определенной на плоскости (дополненной бесконечно удаленными элементами). Каждой точке M плоскости соответствует (взаимно однозначно) некоторая точка M', лежащая внутри окружности Г. Точки окружности Г, в которые отображаются точки экватора сферы, соответствуют «бесконечно удаленным» точкам плоскости. При этом диаметрально противоположные точки окружности Г соответствуют диаметрально противоположным точкам экватора (рис. 135 и 137).

Сделаем некоторые замечания по поводу исследования поведения траекторий в окрестности точек окружности Г.

Пусть $\widetilde{B}$ и $\widetilde{B'}$ — какие-нибудь две диаметрально противоположные точки круга Г, являющиеся отображением двух диаметрально противоположных точек B и B' экватора (для определенности предположим, что B и B' отличны от точек D и D' (рис. 136 и 137).

Пусть B^* — точка плоскости α^*, лежащая на оси $z = 0$, соответствующая этим точкам B и B'. Рассмотрим некоторую окрестность σ точки B^*.

---

*) Нетрудно убедиться в том, что рассматриваемая на сфере Пуанкаре динамическая система так же, как и рассматриваемая на сфере Бендиксона, не является «динамической системой на сфере» в смысле § 2. В частности, точка, двигаясь на траектории, может стремиться к особой точке на экваторе при t, стремящемся к конечному значению.

Осью $z = 0$ эта окрестность разделяется на две полуокрестности: σ_+, лежащую в полуплоскости $z > 0$, и полуокрестность σ_-, лежащую в полуплоскости $z < 0$. На нижнюю полусферу одна из этих полуокрестностей σ_+ отображается в полуокрестность точки B, а другая — σ_- — в полуокрестность точки B' (рис. 136). Так как $x = \frac{1}{z}$, то на круг $\bar{K}$ полуокрестность σ_+ отображается в полуокрестность точки $\widetilde{B}$, соответствующую $x > 0$, а σ_- — в полуокрестность точки $\widetilde{B}'$ (соответствующую $x < 0$) (рис. 137).

Отметим, кроме того, что если координата u точки B^* есть u^*, то точки $\widetilde{B}$ и $\widetilde{B}'$ являются точками пересечения окружности Γ с прямой $y/x = u$.

Таким образом, при исследовании расположения траекторий в окрестности точек окружности Γ, сводящегося к исследованию окрестности точек экватора (т. е. окрестности точек оси z плоскости α^* или $\hat{\alpha}$), мы фактически отождествляем диаметрально противоположные точки окружности Γ.

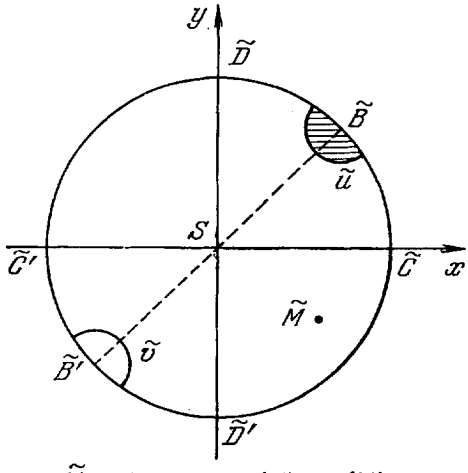


Рис. 137.

Круг, у которого диаметрально противоположные точки граничной окружности считаются отождествленными (так же как и сфера с отождествленными диаметрально противоположными точками), является одной из моделей проективной плоскости. Каждые две диаметрально противоположные точки граничной окружности, рассматриваемые как отождествленные, можно интерпретировать как бесконечно удаленную точку, соответствующую направлению прямой на плоскости (x, y). Однако если пользоваться в качестве модели плоскости кругом $\bar{K}$, не отождествляя диаметрально противоположные точки окружности Γ, то в этом случае мы можем интерпретировать каждую точку граничной окружности Γ как бесконечно удаленную, соответствующую *направлению* луча на плоскости (x, y). Так как на каждой прямой — на плоскости можно указать два направления, то мы считаем тем самым, что на каждой прямой имеется две бесконечно удаленные точки.

Всюду в дальнейшем при рассмотрении динамических систем, определенных на плоскости, правые части которых — многочлены, мы будем пользоваться изображением траекторий в круге $\bar{K}$.

В заключение дадим схему («рецептуру») исследования динамической системы на бесконечности, вытекающую из всего вышеизложенного.

Схема исследования. Мы считаем, что рассматривается динамическая система (A):

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где P и Q — взаимно простые многочлены.

1) Применяем преобразование Пуанкаре

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{u}{z}.$$

Получаем систему

$$\frac{du}{dt} = -uzP\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{P^*(u, z)}{z^n},$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{Q^*(u, z)}{z^n},$$

где n — минимальное неотрицательное число, возможное при таком представлении.

2) Рассматриваем систему (A_3):

$$\frac{du}{dt} = P^*(u, z), \qquad \frac{dz}{dt} = Q^*(u, z).$$

Находим все состояния равновесия этой системы, расположенные на оси $z = 0$ (число их конечно). Исследуем расположение траекторий системы (A_3) в окрестности каждого такого состояния равновесия $B^*(u, 0)$.

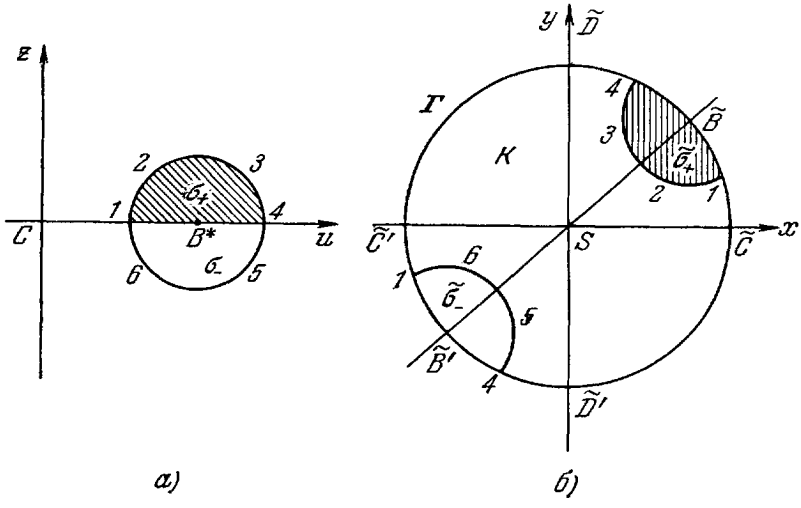


Рис. 138.

3) Для каждой точки $B^*(u, 0)$ строим соответствующие ей две точки $\tilde{B}$ и $\tilde{B}'$ окружности Γ, лежащие на пересечении ее с прямой $y/x = u$.

Пусть абсцисса точки $\tilde{B}$ положительна, а $\tilde{B}'$ — отрицательна.

Полуокрестность σ_+ точки B^* и расположенные в ней траектории отображаем на полуокрестность σ_+ точки $\tilde{B}$ в круге K в соответствии с тем, как это указано на рис. 138, *а*, полуокрестность σ_- — на полуокрестность $\tilde{\sigma}_-$ точки $\tilde{B}'$.

4) Если n — нечетное число, то при отображении полуокрестности σ_- на полуокрестность $\tilde{\sigma}_-$ направления на траекториях меняем на противоположные.

5) Применяем преобразование Пуанкаре

$$x = \frac{v}{z}, \qquad y = \frac{1}{z}$$

и переходим к системе

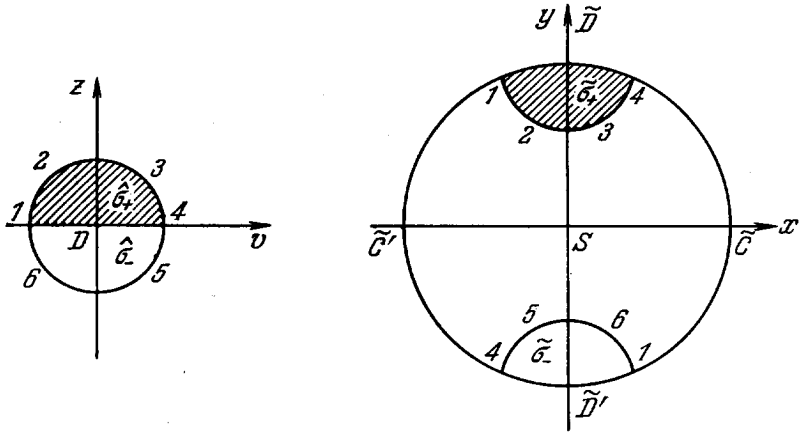
$$\frac{dv}{dt} = zP\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) - zvQ\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) = \frac{\hat{P}(v, z)}{z^m},$$

$$\frac{dz}{dt} = -z^2 Q\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) = \frac{\hat{Q}(v, z)}{z^m}$$

а затем к системе $(\hat{A}_3)$:

$$\frac{dv}{dt} = \hat{P}(v, z), \qquad \frac{dz}{dt} = \hat{Q}(v, z).$$

6) Исследуем расположение траекторий системы $(\hat{A}_3)$ в окрестности точки D (0, 0). Полуокрестность $\hat{\sigma}_+$ точки D отображаем на полуокрестность



а) б)

Рис. 139.

$\tilde{\sigma}_+$ точки $\tilde{D}$ в круге K в соответствии с тем, как это указано на рис. 139, а полуокрестность $\hat{\sigma}_-$ — на полуокрестность $\tilde{\sigma}_-$ точки $\tilde{D}'$.

7) Если m — нечетное число, то при отображении полуокрестности $\hat{\sigma}_-$ на полуокрестность $\tilde{\sigma}_-$ направления на траекториях меняем на противоположные.

Замечание. Как мы уже указали, обычно ось $z = 0$ состоит из траекторий системы (A_3), и соответствующие этим траекториям части окружности Γ можно рассматривать как траектории в круге $\overline{K}$. Однако в исключительных случаях это может быть не так. Так, например, легко убедиться, что система

$$\frac{dx}{dt} = x^2 y + x + y, \qquad \frac{dy}{dt} = xy^2 + x - y$$

соответствует системе

$$\frac{du}{dt} = z - zu^2 - 2uz, \qquad \frac{dz}{dt} = -u - z^2 - uz^2.$$

Эта система имеет на оси $z = 0$ единственное состояние равновесия (0, 0). Во всех остальных точках ее траектории пересекают ось под прямым углом.

3. Пример исследования экватора. Рассмотрим, например, поведение на бесконечности траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = x(3 - x - ny), \qquad \frac{dy}{dt} = y(-1 + x + y), \tag{9}$$

где $n > 3$.

С помощью преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{u}{z}$ получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{2u - 4uz + (n+1)u^2}{z}, \qquad \frac{dz}{dt} = 1 + n \cdot u - 3z. \tag{10}$$

Далее, умножая правые части на z, мы будем иметь

$$\frac{du}{dt} = 2u - 4uz + (n+1)u^2, \qquad \frac{dz}{dt} = z + nuz - 3z^2. \tag{11}$$

На оси $z = 0$ (соответствующей экватору сферы Пуанкаре) система имеет два состояния равновесия: C (0, 0) — неустойчивый узел и B $(-2/n+1, \ 0)$ — устойчивый узел. Ось $z = 0$ состоит из траекторий системы.

Для исследования точек D и D' воспользуемся вторым преобразованием Пуанкаре $x = v/z$, $y = 1/z$. Мы получаем систему

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4vz - 2v^2 - (n+1)v}{z}, \qquad \frac{dz}{dt} = z - v - 1, \tag{12}$$

и после умножения на z — систему

$$\frac{dv}{dt} = 4vz - 2v^2 - (n-1)v, \qquad \frac{dz}{dt} = z(z - v - 1). \tag{13}$$

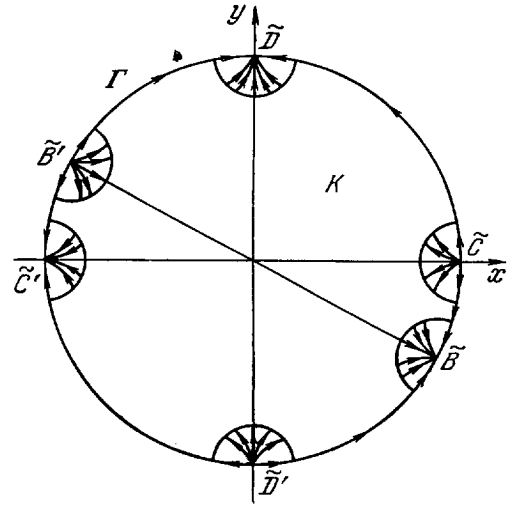


Рис. 140.

Точка D (0, 0) является для этой системы устойчивым узлом. Учитывая, что при переходе от системы (10) и (12) к системам (11) и (13), мы умножили правые части на z, и принимая во внимание пп. 4 и 7 схемы исследования, мы получаем расположение траекторий вблизи окружности Γ (или, как обычно говорят, *вблизи экватора*), изображенное на рис. 140.

§ 14. Использование методов приближенного вычисления для определения качественной структуры разбиения на траектории

1. Общие замечания. Ввиду отсутствия регулярных эффективных методов, с помощью которых можно было бы во всех конкретных примерах установить топологическую структуру, и ввиду того, что частные приемы, о которых мы говорили в § 12, далеко не всегда приводят к цели, естественно обратиться к вычислительным методам.

Использование численных методов интегрирования требует, конечно, задания определенных численных значений для всех параметров в системе

или в лучшем случае задания численных значений комбинаций из этих параметров. Между тем в динамические системы, возникающие из приложений, всегда входит то или другое число параметров, которые могут принимать различные значения. Необходимость задания параметров затрудняет обозрение всей задачи в целом. Поэтому там, где возможно применение аналитических методов, может быть даже и сложных, их всегда следует предпочитать методам приближенного численного интегрирования. Однако в некоторых случаях использование приближенного интегрирования является единственным возможным методом получения сведений о топологической структуре разбиения на траектории данной динамической системы. Подчеркнем, что при этом представляет интерес не приближенное вычисление траекторий на том или другом промежутке значений t, само по себе, которое, конечно, имеет смысл и значение во многих задачах, а то, как такое приближенное вычисление служит для установления качественной структуры разбиения на траектории или хотя бы для получения тех или других качественных характеристик разбиения на траектории.

Мы опишем здесь сначала вкратце один весьма распространенный метод графического интегрирования, носящий название «метода изоклин и заключающийся в приближенном построении «сетки» траекторий *).

2. Метод изоклин. Построение проводится следующим образом. Для рассматриваемой системы (в которой все параметры имеют определенные численные значения)

$$\frac{dx}{dt} = P(x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,\ y), \tag{I}$$

строим сетку изоклин

$$P(x,\ y) + CQ(x,\ y) = 0, \qquad C'Q(x,\ y) + P(x,\ y) = 0,$$

придавая C (или C') различные численные значения, достаточно близкие друг к другу. Как мы знаем, во всех точках всякой изоклины наклон интегральных кривых системы (I) один и тот же. В § 1 мы строили семейство изоклин для некоторых простейших примеров (рис. 8, 12 и 16). Точки пересечения всяких двух изоклин, очевидно, являются точками пересечения *всех* изоклин вообще и являются состояниями равновесия системы (I).

Построив изоклины достаточно густо, можно затем приближенно строить траектории рассматриваемой системы. Начнем построение с некоторой точки P (конечно, отличной от состояния равновесия) (рис. 141). Предположим для определенности, что точка P лежит на изоклине $C = 0$. Проводим из точки P два отрезка, один в направлении касательной, соответствующей $C = 0$ (т. е. параллельно оси x), а другой — в направлении касательной, соответствующей ближайшей по значению C построенной изоклине $C = -0{,}2$. Оба эти отрезка продолжаем до пересечения с изоклиной $C = -0{,}2$. Пусть a_1 и b_1 — точки пересечения этих отрезков с указанной изоклиной. Берем на изоклине $C = -0{,}2$ точку P_1, лежащую на равном расстоянии от точки a_1, и точки b_1. Эту точку примем за точку нашей траектории (проходящей через точку P). Из точки P_1 проводим две прямые под углами, соответствующими изоклинам $C = -0{,}2$ и $C = -0{,}4$, до пересечения с изоклиной $C = -0{,}4$ в точках a_2 и b_2. Точку P_2, лежащую на изоклине $C = -0{,}4$ на равных расстояниях от точек a_2, b_2, принимаем за следующую точку нашей траектории. Продолжая дальше такое же

*) Подробнее о методе изоклин см., например, [6].

построение, мы получим последовательность точек P, P_1, P_2, P_3, ... Соединяя эти точки последовательно отрезками, мы получаем ломаную линию, приближенно представляющую часть рассматриваемой траектории. Мы можем, таким образом, продолжать построение этой траектории, а также построить другие траектории, т. е. построить «сетку» траекторий.

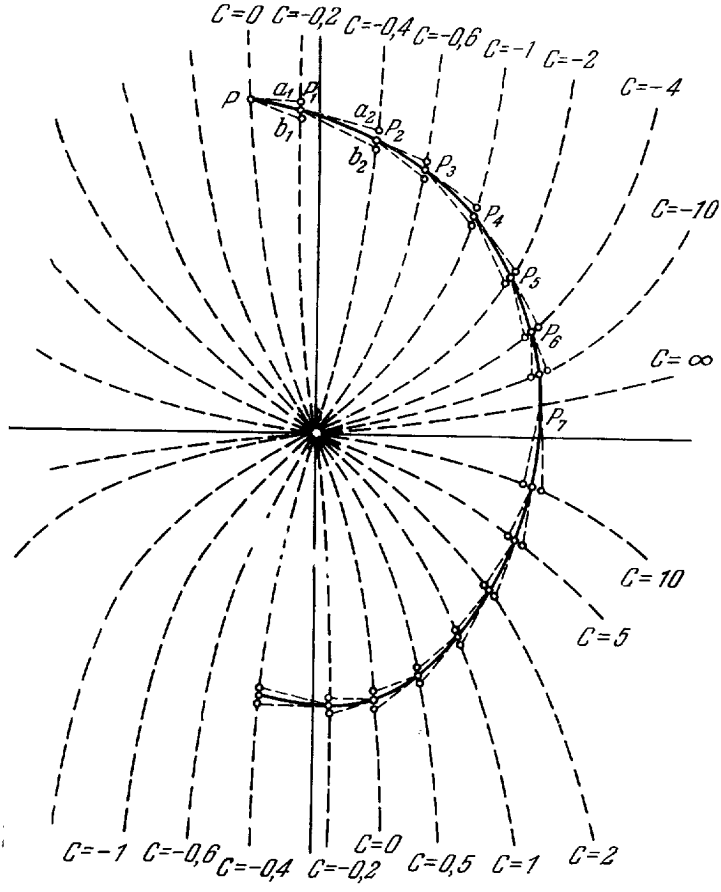


Рис. 141.

Построение такой сетки может иногда позволить «нащупать» предельные циклы, существующие у этой системы, а также «угадать», каково расположение сепаратрис.

Если в рассматриваемую систему входят параметры, то, задавая ряд значений этих параметров и строя для каждого из этих значений приближенную картину траекторий, мы можем получить целую «галерею картин» разбиений фазовой плоскости на траектории.

В описанном построении «сетки» траекторий не дается никаких оценок точности построения. Такая оценка, очевидно, может быть сделана. Однако здесь мы не будем останавливаться на этом. Укажем еще только, что при построении каждой отдельной траектории можно пользоваться не изложенным геометрическим методом (методом изоклин), а одним из методов приближенного численного интегрирования, в которых дается оценка ошибки. Такими методами являются, например, известный метод Адамса

и метод Рунге. Мы не останавливаемся на изложении этих методов, так как это не входит в задачи настоящей книги, и, кроме того, по описанию этих методов существует большая литература (см. [42], [43], [44]). Укажем еще на данное в работах [40] и [41] построение сетки траекторий, так называемой «ε-сети», в которой оценивается допускаемая погрешность. Мы не приводим здесь это построение ввиду того, что при качественном исследовании динамических систем адекватным представляется не построение «сетки траекторий», а несколько другое построение, описанное ниже.

3. Специфика использования численных методов при определении качественной структуры разбиения на траектории. При изложении в предыдущем пункте способа приближенного построения «сетки траекторий» методом изоклин (или какими-либо другими приближенными методами, например, путем построения ε-сети) элементы, необходимые для знания качественной структуры, непосредственно не определялись. В частности, непосредственно не определялись координаты состояний равновесия и их характер, а получались, если так можно высказаться, путем «пешего хождения», непосредственным построением в окрестности точек пересечения изоклин «сетки траекторий». Между тем, очевидно, что в случае, когда состояния равновесия простые, с отличными от нуля действительными частями характеристических корней, координаты таких состояний равновесия и их характер может быть довольно просто установлен путем непосредственного вычисления, а не путем построения сетки траекторий. Для этого нужно сначала вычислить координаты состояний равновесия, т. е. приближенно найти (вычислениями) общие точки кривых

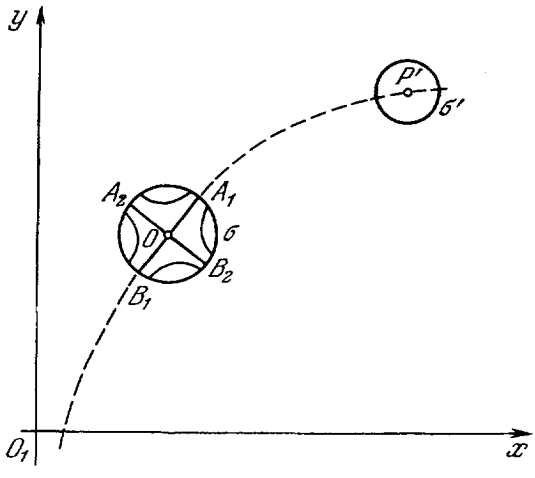


Рис. 142.

$$P(x,\ y)=0, \qquad Q(x,\ y)=0,$$

а затем для полученных состояний равновесия подсчитать характеристические корни. Это сразу же избавляет нас от необходимости построения сетки траекторий в окрестности состояний равновесия (точность которого, кстати, весьма мала). Для того чтобы получить сведения о ходе сепаратрис, также нет необходимости в построении «сетки траекторий», а достаточно непосредственно построить приближенно сами сепаратрисы.

Мы укажем здесь в весьма общих чертах, как это может быть сделано.

Рассмотрим какое-нибудь седло O (координаты которого вычислены).

Очевидно, пользуясь формулой (4) п. 2 § 9, можно вычислить направления $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, под которыми сепаратрисы стремятся к этому седлу O. Выбирая достаточно малую окрестность седла, т. е. окружность σ с центром в седле O, достаточно малого радиуса, можно части сепаратрис, лежащие внутри окружности σ заменить отрезками прямых, проходящих через седло O

и имеющих наклоны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Пусть A_1, A_2, B_1 и B_2 — точки пересечения этих прямых с окружностью σ (рис. 142).

Начиная с точек A_1, A_2, B_1, B_2, мы можем вести приближенное построение (вычисление) траекторий, проходящих через эти точки, и получить таким образом приближенный ход сепаратрис седла O.

Предположим, в частности, что какая-нибудь из сепаратрис, например сепаратриса L_1, у которой часть, лежащая внутри σ, приближенно заменяется отрезком OA_1, стремится к состоянию равновесия типа узел или фокус. Мы всегда можем выделить некоторую область σ', являющуюся «областью притяжения» этого узла или фокуса. Тогда можно путем приближенного вычисления дуги траектории (сепаратрисы), начинающейся от точки A_1, «довести» ее до области σ' и, следовательно, полностью установить ход сепаратрисы L_1.

Можно указать методы оценки ошибки, которая допускается при таком построении сепаратрис, однако здесь мы на этом не останавливаемся. Скажем еще несколько слов о возможном в некоторых случаях построении «колец», ограниченных витками траекторий, содержащих предельные циклы. Именно, в следующем пункте мы рассмотрим один простой частный случай, когда приближенное построение траекторий позволяет весьма просто установить существование предельного цикла.

4. Случай, когда доказательство существования предельного цикла возможно при помощи приближенного построения дуг траекторий. Мы сделаем следующее предположение, не носящее, однако, особенно частного характера: предположим, что существует линия, проходящая через все состояния равновесия, которая во всех отличных от состояний равновесия точках не имеет контактов с траекториями. Будем обозначать эту линию через Λ. В частности, такой линией может быть изоклина. В этом случае требование, чтобы она не имела контактов с траекториями в отличных от состояний равновесия точках, аналитически записывается следующим образом.

Пусть

$$P(x, y)+CQ(x, y)=0 \tag{1}$$

— изоклина соответствующего наклона C. Если касательная к этой изоклине нигде не имеет наклона C, то, очевидно, при выполнении (1) выражение

$$(P'_x+CQ'_x)P+(P'_y+CQ'_y)Q$$

не должно обращаться в нуль.

Предположим, что рассматривается часть такой линии Λ, на которой не лежит ни одного состояния равновесия, и что эта часть является простой дугой. Будем на этой дуге рассматривать некоторый параметр s, взаимно однозначно соответствующий точкам этой дуги.

Предположим, что, вычисляя дуги траекторий, проходящие через точки рассматриваемой линии Λ на некотором достаточно большом куске, оказалось возможным установить, что эти траектории вторично пересекают линию Λ. Кроме того, предположим, что:

1) *приближенно просчитанная дуга* некоторой траектории L_1, проходящей через точку A_1 линии Λ (соответствующую значению s_1), пересекает линию Λ вторично в некоторой точке A_2 со значением параметра s_2, причем

$$s_2 > s_1. \tag{2}$$

2) *приближенно просчитанная дуга* некоторой дуги траектории L_1', проходящей через точку A_1' линии Λ, соответствующую значению $s_1' > s_2$, пересекает линию Λ вторично в некоторой точке A_2' со значением параметра s_2', причем

$$s_2' < s_1'. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что при указанных условиях точки A_2 и A_2' лежат на линии Λ между точками A_1 и A_1' (рис. 143).

Обозначим теперь значение параметра s, при котором *истинная* (а не приближенно просчитанная) дуга траектории L_1 вторично пересекает линию Λ через s_2^*, а значение, при котором *истинная дуга* траектории L_2' пересекает линию Λ — через s_2^{**}.

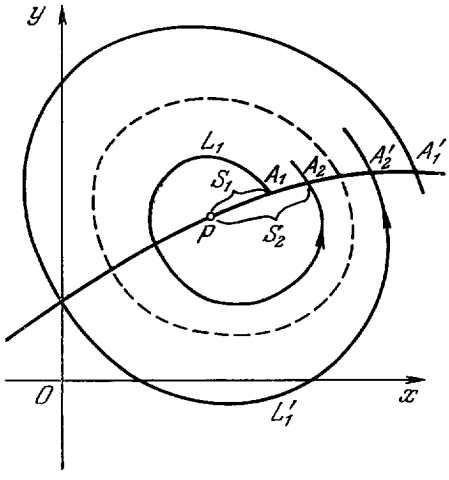


Рис. 143.

Предположим точность вычислений такой, чтобы соотношения (2) и (3) гарантировали «истинные неравенства»

$$s_2^* > s_1, \qquad s_2^{**} < s_1'. \tag{4}$$

Предположим, кроме того, что область Σ, ограниченная простой замкнутой кривой, состоящей из дуги A_1A_2 траектории L_1, дуги A_1A_2 линии Λ и простой замкнутой кривой, состоящей из дуги $A_1'A_2'$ траектории L_1' и дуги $A_1'A_2'$ линии Λ, является ограниченной кольцевой областью. Если в этой области нет состояний равновесия (этот факт, очевидно, может быть установлен на основании проведенных вычислений координат состояний равновесия и указанных дуг траекторий), то в силу неравенств (4) на основании теоремы 13 мы можем утверждать, что в кольцевой области Σ существует хотя бы один предельный цикл. Более того, если предположить, что среди этих предельных циклов нет полуустойчивых, то их должно быть нечетное число.

Если, кроме того, точка A_2 соответствует на траектории значению t, большему, чем точка A_1, а точка A_2' — большему, чем A_1', то число устойчивых предельных циклов на единицу больше, чем неустойчивых.

Мы видим, таким образом, что при указанных условиях приближенное вычисление дуг траекторий позволяет *доказать* существование хотя бы одного предельного цикла. При этом построение достаточно густой сети изоклин и «сети траекторий» может оказаться ненужным, все сведения может дать удачное построение только двух дуг траекторий.

5. Случай, когда топологическая структура разбиения на траектории принципиально не может быть установлена путем приближенного вычисления (построения) траекторий. Рассмотрим, например, случай, когда все траектории замкнуты. Действительно, в этом случае мы никогда не сможем, приближенно строя траектории (с любой данной степенью точности), ответить на вопрос, являются ли эти траектории замкнутыми или они являются «медленно раскручивающимися» спиралями.

Можно указать также другие, в некотором смысле более простые случаи: так, например, случай, когда у динамической системы есть «полу-

устойчивый» предельный цикл, т. е. предельный цикл, на который, с одной стороны, траектории накручиваются (т. е. стремятся к нему при $t \to +\infty$), а с другой стороны, с него скручиваются (т. е. стремятся к нему при $t \to -\infty$) (рис. 72,б). Сколь бы большую точность приближения мы ни брали, мы никогда не сможем установить приближенным вычислением траекторий, имеет ли рассматриваемая динамическая система «полуустойчивый» предельный цикл, или же некоторое уплотнение траекторий *).

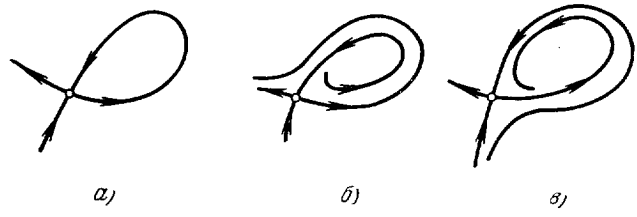


Рис. 144.

Рассмотрим еще случай, когда у динамической системы существует седло и одна сепаратриса этого седла «образует петлю», т. е. выходит из этого седла и возвращается в него же (рис. 144, *а*). Непосредственно путем приближенного вычисления траекторий, в частности сепаратрис, с любой степенью точности мы никогда не сможем установить, имеет ли рассматриваемая система «петлю» или же имеет место одна из картин, представленных на рис. 144, *б* и рис. 144, *в*. На этих рисунках сепаратрисы

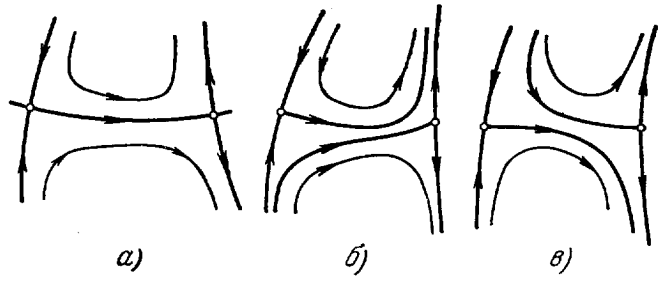


Рис. 145.

могут «расходиться» друг от друга на величину, которая не может быть обнаружена при любой точности проводимых вычислений.

Полностью аналогичная ситуация представлена на рис. 145, когда у рассматриваемой динамической системы существует сепаратриса, идущая из одного седла в другое. Непосредственно приближенным вычислением траекторий мы не сможем установить, какая из трех структур, представленных на рис. 145, в действительности имеет место.

Следует, однако, подчеркнуть, что здесь мы говорили о невозможности установления указанных топологических структур *непосредственным приближенным построением траекторий*. Это, однако, ни в какой мере не означает, что не существует косвенных методов, также связанных с вычислениями, при помощи которых можно установить наличие двойного цикла, петли сепаратрисы и т. д.

*) Этот факт полностью аналогичен тому, что, приближенно строя некоторую кривую, мы никогда не можем установить у нее точки касания с осью x.

ГЛАВА VII

«ОСОБЫЕ» ТРАЕКТОРИИ И ЯЧЕЙКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ *)

Введение

В главе II был исчерпывающе рассмотрен вопрос о том, какой характер может иметь *отдельная* траектория динамической системы вида (I).

Однако при качественном рассмотрении динамических систем нужно иметь сведения не только о возможном характере отдельной траектории, но и о свойствах разбиения на траектории в целом. Некоторые предложения, дающие такие сведения, приведены в § 4 (см. теоремы 16, 17, 18, 19). Но эти предложения дают только самые основные и весьма неполные сведения о свойствах разбиения на траектории в целом.

Необходимо дальнейшее, более полное изучение возможных свойств разбиения на траектории в целом.

Такому изучению и посвящена настоящая глава.

Рассмотрение частных примеров разбиений на траектории (например, разбиений в случае систем (9) и (11) § 1, п. 14) приводит к заключению, что не все траектории равноправны, что во всяком разбиении есть такие траектории, которые естественно назвать «особыми», в отличие от остальных «неособых» траекторий. В рассмотренных выше примерах такими особыми траекториями являлись состояния равновесия, предельные циклы и сепаратрисы седел. Непосредственно представляется очевидным, что при установлении топологической структуры разбиения на траектории знание числа и расположения таких «особых» траекторий играет фундаментальную роль.

Естественно возникают вопросы: исчерпываются ли встречавшимися в рассмотренных примерах типами вообще все возможные типы «особых» траекторий? Как могут быть охарактеризованы «особые» траектории в общем случае; какова их роль в разбиении на траектории?

Первые два вопроса рассматриваются в § 15. В этом параграфе дается общее определение особой и неособой траектории, справедливое в случае траектории любого типа. По смыслу этого определения траектория является особой или неособой не в зависимости от того, каковы ее свойства самой по себе, а в зависимости от ее поведения по отношению к близким траекториям. Кроме того, в § 15 устанавливаются все возможные типы особых траекторий.

В § 16 делается предположение, что число особых траекторий у рассматриваемой динамической системы — конечно. Устанавливается, что

*) Понятия орбитно-неустойчивых (особых) и орбитно-устойчивых (неособых) траекторий введены в заметке [46] и являются обобщением на случай произвольных динамических систем вида (I) аналогичных понятий, введенных ранее А. Андроновым и Л. Понтрягиным [6].

в этом случае особые траектории разбивают всю совокупность траекторий на конечное число областей —«ячеек». Каждая «ячейка» заполнена неособыми траекториями, поведение которых «одинаково»— в определенном смысле, уточняющемся в дальнейшем. Устанавливается, что ячейки могут быть либо односвязными, либо двусвязными.

Выделение особых траекторий и установление возможного характера ячеек позволяет получить весьма полное представление о возможном характере разбиения на траектории. При этом вносится известная ясность в вопрос о том, какие из траекторий динамической системы должны играть основную роль при установлении топологической структуры разбиения на траектории.

В настоящей главе для определенности рассматривается динамическая система на плоскости. Однако все введенные в ней понятия и предложения полностью справедливы и в случае динамической системы на сфере.

§ 15. Орбитно-устойчивые и орбитно-неустойчивые траектории и полутраектории

1. Основные определения. Предполагая, что данная динамическая система (I) определена в некоторой области G плоскости (x, y) (в частности, во всей плоскости), будем рассматривать только ограниченные полутраектории и траектории (см. § 4, п. 1), т. е. полутраектории и траектории, лежащие в некоторой ограниченной замкнутой области $\overline{G}_1 \subset G$. В дальнейшем не будем это каждый раз оговаривать.

Пусть L — траектория, у которой положительная полутраектория ограничена. Пусть на L выбрано какое-нибудь движение. Пусть M — точка L, соответствующая при выбранном движении некоторому значению τ, и L_M^+ — положительная полутраектория траектории L, точки которой соответствуют значениям $t \geqslant \tau$.

Определение XIV. *Мы скажем, что траектория L ω-орбитно-устойчива в точке M, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что у всякой траектории L', проходящей при $t = \tau$ через какую-нибудь точку M' окрестности $U_\delta(M)$, положительная полутраектория L'^+_M (соответствующая значениям $t \geqslant \tau$) лежит целиком в ε-окрестности полутраектории L_M^+* *).

Очевидно, если траектория L не является ω-орбитно-устойчивой в точке M, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что сколь бы малое $\delta > 0$ мы ни взяли, найдется траектория L', проходящая при $t = \tau$ через точку $U_\delta(M)$ и имеющая при значениях $t > \tau$ точки, лежащие вне ε_0-окрестности полутраектории L_M^+. Полностью аналогично дается также определение траектории α-орбитно-устойчивой в точке M.

Определение XV. *Траектория L (с ограниченной положительной полутраекторией) называется ω-орбитно-устойчивой или орбитно-устойчивой при $t \to +\infty$, если она ω-орбитно-устойчива в любой своей точке.*

Полностью аналогично определяется α-орбитно-устойчивая (или орбитно-устойчивая при $t \to -\infty$) траектория.

Лемма 1. *Если траектория L ω-орбитно-устойчива хотя бы в одной своей точке, то она ω-орбитно-устойчива в любой другой своей точке, т. е. она ω-орбитно-устойчива.*

*) Отметим, что ε-окрестность полутраектории L_M^+ непременно содержит ε-окрестность предельных точек L_M^+.

Доказательство. Предположим, что траектория L ω-орбитно-устойчива в точке M_1, которая при некотором выбранном на L движении соответствует $t = \tau_1$. Обозначим через L_{M_1} полутраекторию, соответствующую значениям $t \geqslant \tau_1$.

Пусть M_2 — какая-нибудь точка траектории L, соответствующая (при выбранном на L движении) $t = \tau_2$, и $L^+_{M_2}$ — положительная полутраектория, соответствующая $t \geqslant \tau_2$. Покажем, что траектория L орбитно-устойчива также и в точке M_2.

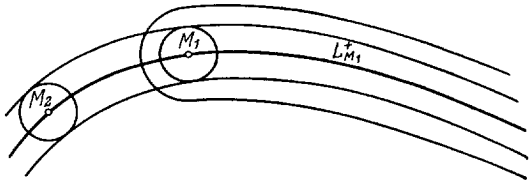


Рис. 146.

Возможны два случая.

1. $\tau_2 < \tau_1$. Так как в этом случае полутраектория $L^+_{M_1}$ является частью полутраектории $L^+_{M_2}$ (рис. 146), то, воспользовавшись теоремой о непрерывной зависимости от начальных условий, нетрудно видеть, что траектория L ω-орбитно-устойчива также и в точке M_2.

2. $\tau_2 > \tau_1$. В этом случае полутраектория $L^+_{M_2}$ является частью $L^+_{M_1}$ (рис. 147).

Предположим противное, т. е. предположим, что траектория L не является ω-орбитно-устойчивой в точке M_2. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что сколь бы малую окрестность $U_\delta(M_2)$ мы ни взяли, найдется траектория, проходящая при $t = \tau_2$ через точку этой окрестности, которая при $t > \tau_2$ выйдет из ε_0-окрестности полутраектории $L^+_{M_2}$.

Значит, выбирая последовательность стремящихся к нулю чисел: $\{\delta_i\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, можно указать последовательность траекторий $\{L_i\}$, обладающих следующим свойством: каждая траектория L_n при $t = \tau_2$ проходит через точку δ_n-окрестности точки M_2 и при некотором значении $t > \tau_2$ выходит из ε_0-окрестности $L^+_{M_2}$. На каждой траектории L_n найдется, следовательно, точка P_n, соответствующая значению $t = t_n > \tau_2$, лежащая вне ε_0-окрестности полутраектории $L^+_{M_2}$.

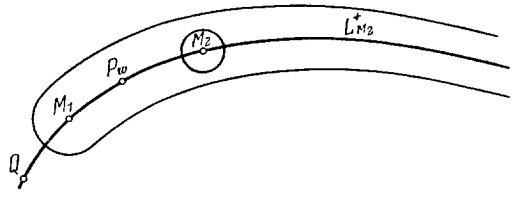


Рис. 147.

Заметим, что никакая бесконечная подпоследовательность последовательности чисел $\{t_i\}$ при $i \to \infty$ не может стремиться к конечному значению t, так как тогда мы имели бы противоречие с теоремой о непрерывной зависимости от начальных значений. Мы всегда можем, кроме того, предполагать, что последовательность точек

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{1}$$

имеет одну точку сгущения P_ω. Точка P_ω должна, очевидно, лежать на расстоянии, большем или равном ε_0, от полутраектории $L^+_{M_2}$, а значит, и от предельных точек этой полутраектории, совпадающих с предельными точками полутраектории $L^+_{M_1}$. Кроме того, точка P_ω непременно должна лежать на полутраектории $L^+_{M_1}$.

Действительно, предположим, что точка P_ω не лежит на полутраектории $L^+_{M_1}$ и, следовательно, находится на некотором расстоянии $\varrho_0 > 0$ от $L^+_{M_1}$.

Возьмем $\varepsilon < \varrho_0$. Точка P_ω заведомо лежит вне такой ε-окрестности $L^+_{M_1}$. Нетрудно видеть, что, в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений, все траектории L_n с достаточно большими номерами n при $t = \tau_1 < \tau_2$ проходят через точки сколь угодно малой окрестности точки M_1. Но при достаточно большом n точки P_n траектории L_n, соответствующие значению $t_n > \tau_2 > \tau_1$, лежат сколь угодно близко к точке P_ω, и значит, вне $U_\varepsilon(L^+_{M_1})$. Следовательно, через точки сколь угодно малой окрестности $U_{\delta_1}(M_1)$ проходят траектории, именно, траектории L_n с достаточно большими номерами, которые при возрастании t выходят из $U_\varepsilon(L^+_{M_1})$, т. е. траектория L не является ω-орбитно-устойчивой в точке M_1. А это противоречит предположению. Таким образом, точка P_ω должна лежать на полутраектории $L^+_{M_1}$ или, точнее, на части траектории L, соответствующей значениям t, $\tau_1 \leqslant t < \tau_2$.

Пусть при выбранном на L движении точка P_ω соответствует значению $t = T_1$, и пусть Q — точка на L, соответствующая $T_2 < \tau_1$ (рис. 147). Возьмем на каждой траектории L_n точку Q_n, соответствующую значению $t'_n = t_n - (T_1 - T_2)$. Так как $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то и $t'_n \to \infty$ при $n \to \infty$. В силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий последовательность точек $\{Q_i\}$ при $i \to \infty$ стремится к точке Q. Точка Q не может быть ω-предельной точкой траектории L, так как тогда (в силу теоремы 11 § 4) предельными для L были бы и все точки L и, в частности, точка P_ω, что противоречит тому, что точка P_ω находится на расстоянии, большем ε_0, от полутраектории $L^+_{M_2}$. Но тогда нетрудно видеть (принимая во внимание, что точка Q соответствует значению $T_2 < \tau_1$), что точка Q находится на конечном расстоянии от полутраектории $L^+_{M_1}$. А так как среди траекторий L_n всегда найдутся траектории, пересекающие сколь угодно малую окрестность точки M_1, то отсюда следует, что траектория L не является ω-орбитно-устойчивой в точке M_1. Мы приходим к противоречию и лемма доказана.

Определение XVI. *Траектория, не являющаяся ω (α)-орбитно-устойчивой, называется ω (α)-орбитно-неустойчивой траекторией* *).

Очевидно, ω (α)-орбитно-неустойчивая траектория L не является орбитно-устойчивой ни в одной своей точке, т. е. если M — какая-нибудь ее точка, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдется траектория L', проходящая через точку $U_\delta(M)$, и при $t > \tau$, выходящая из ε_0-окрестности L^+_M.

Положительная (отрицательная) полутраектория называется орбитно-устойчивой, если она является полутраекторией ω (α)-орбитно-устойчивой траектории.

Полутраектория (положительная или отрицательная), не являющаяся орбитно-устойчивой, называется орбитно-неустойчивой полутраекторией.

Определение XVII. *Ограниченная траектория называется орбитно-устойчивой или неособой, если она и ω- и α-орбитно-устойчива. Траектория, не являющаяся орбитно-устойчивой (и, следовательно, либо ω-, либо α-, либо и ω- и α-орбитно-неустойчивая), называется орбитно-неустойчивой или особой траекторией.*

Приведем следующую общую теорему:

Теорема 36. *Пусть даны две динамические системы, определенные или обе на сфере, или обе — в ограниченных плоских областях (G и G'). Если топологические структуры разбиения на траектории у этих*

*) Отметим, что все данные выше определения, лемма 1, а также теорема 36 и приведенные доказательства их справедливы не только для траекторий на плоскости, но и для траекторий динамических систем в пространстве любого числа измерений.

динамических систем одинаковы и T — отождествляющее отображение (т. е. отображение области определения одной системы G на другую — G', переводящее траектории в траектории), то при этом орбитно-устойчивые полутраектории одной системы отображаются в орбитно-устойчивые полутраектории другой, а орбитно-неустойчивые — в орбитно-неустойчивые.

Доказательство. В случае динамических систем на сфере справедливость теоремы непосредственно вытекает из того, что на сфере (в силу ее компактности) отображение T — равномерно непрерывно (и при этом все точки сферы являются внутренними точками), а также из самого определения орбитной устойчивости и неустойчивости полутраектории.

В случае динамических систем в плоских (ограниченных) областях рассмотрим ограниченную полутраекторию L^+ — одной из этих систем. Пусть G — область, в которой определена эта система. Полутраектория L^+ лежит в некоторой области $\bar{G}_1$ целиком вместе с границей, принадлежащей G ($\bar{G}_1 \subset G$).

Возьмем какую-нибудь область $\bar{G}_2$ целиком вместе с границей, содержащейся в G и содержащей область G_1 вместе с границей (т. е. $G \supset \bar{G}_2 \supset \supset G_2 \supset \bar{G}_1 \supset G_1 \supset L^+$). Отображение T равномерно непрерывно в области $\bar{G}_2$, и при этом точки полутраектории L^+ заведомо отличны от точек границы $\bar{G}_2$. А тогда справедливость теоремы, как нетрудно видеть, непосредственно вытекает из самого определения орбитной устойчивости и неустойчивости полутраектории.

Замечание. Если топологическое отображение T сохраняет ориентацию и направление по t, то ω-орбитно-неустойчивая траектория отображается в ω-орбитно-неустойчивую и α-орбитно-неустойчивая — в α-орбитно-неустойчивую.

2. Простейшие примеры орбитно-устойчивых и орбитно-неустойчивых траекторий. Поясним введенные понятия на примерах траекторий, встречавшихся в рассмотренных выше динамических системах.

Всякая полутраектория, стремящаяся к узлу или фокусу, орбитно-устойчива.

Действительно, пусть O — узел или фокус. В этом случае, как мы видели (§ 7), при любом $\varepsilon > 0$ можно указать цикл без контакта C_ε (являющийся окружностью или эллипсом), содержащий точку O внутри и целиком лежащий в ε-окрестности точки O. Очевидно, ε-окрестность всякой стремящейся к O полутраектории непременно содержит ε-окрестность точки O, и поэтому точки внутри такого цикла без контакта C_ε принадлежат ε-окрестности любой стремящейся к O полутраектории.

Пусть L^+ — одна из таких полутраекторий. Если точка M этой полутраектории лежит врутри C_ε, то все траектории, проходящие через достаточно малую ее окрестность, при возрастании t не выйдут из C_ε (и, следовательно, из ε-окрестности L^+_M). Если точка M лежит вне C_ε (или на C_ε), то в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений (или в силу леммы 4 § 3) всегда можно указать $\delta > 0$ такое, чтобы все траектории, при $t = t_0$, проходящие через точки $U_\delta(M)$, в течение конечного промежутка значений t достигли бы цикла без контакта, не выходя до этого из ε-окрестности полутраектории L^+_M (или, точнее, из ε-окрестности части L^+_M до ее пересечения с C_ε); войдя внутрь цикла без контакта C_ε, они из него больше уже не выйдут, и следовательно, не вый-

дут из ε-окрестности L_M^+. Так как все сказанное справедливо при любом $\varepsilon > 0$, то отсюда, очевидно, следует орбитная устойчивость L_M^+ (рис. 148). Орбитно-устойчивыми являются и все полутраектории, стремящиеся к предельному циклу.

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого геометрически очевидного утверждения, так как оно непосредственно вытекает из более общего предложения (леммы 8).

Орбитно-устойчивыми, т. е. неособыми траекториями, являются траектории, при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ стремящиеся к узлам или фокусам, или при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) стремящиеся к узлу, а при $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$) — к предельному циклу; а также траектории, стремящиеся к предельным циклам и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ (все такие траектории и ω- и α-орбитно-устойчивы).

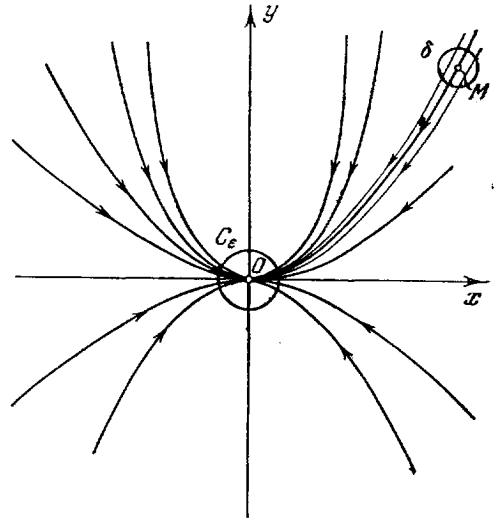


Рис. 148.

Из этих примеров нетрудно видеть, что в случае, когда траектория неособая (орбитно-устойчивая), все близкие к ней траектории ведут себя весьма «похожим» образом (в дальнейшем смысл этих слов уточняется). Но это совершенно не имеет места для тех траекторий, которые мы выше

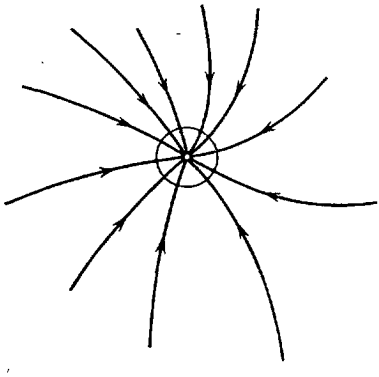


Рис. 149.

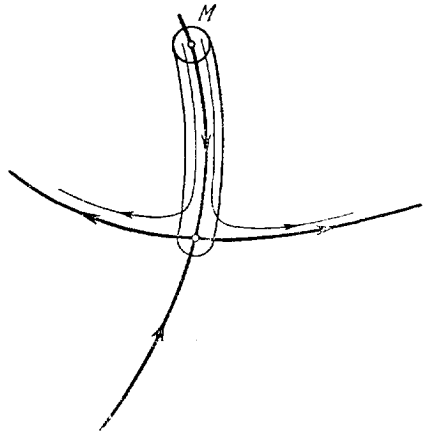


Рис. 150.

причисляли к «особым». Начнем с состояний равновесия. Устойчивые узлы и фокусы орбитно-устойчивы при $t \to +\infty$ и неустойчивые — при $t \to -\infty$. Но они орбитно-неустойчивы при $t \to -\infty$ или соответственно при $t \to +\infty$. Действительно, в случае, например, устойчивого узла или фокуса траектории, проходящие сколь угодно близко к нему, при убывании t, очевидно, выходят из всякой достаточно малой его окрестности (рис. 149).

Седло орбитно-неустойчиво и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

Устойчивые и неустойчивые предельные циклы в отношении орбитной устойчивости ведут себя так же, как узлы и фокусы, т. е. могут быть орбитно-устойчивыми, либо только при $t \to +\infty$, либо только при $t \to -\infty$, а соответственно при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$ они орбитно-неустойчивы, и, следовательно, предельные циклы, как и узел, седло и фокус являются особыми траекториями.

Полутраектории, стремящиеся к седлу (сепаратрисы седла), орбитно-неустойчивы. Действительно, если L^+ — стремящаяся к седлу полутраектория и M — какая-нибудь точка на ней, то всегда можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы при любом $\delta > 0$ полутраектории, отличные от L^+_M и проходящие через точки $U_\delta(M)$, при возрастании t непременно выходили бы из ε_0-окрестности точки L^+_M (рис. 150).

3. Возможные типы орбитно-неустойчивых полутраекторий и траекторий. Перейдем теперь к выяснению того, какие из траекторий рассматриваемых нами динамических систем второго порядка являются орбитно-устойчивыми, а какие орбитно-неустойчивыми.

При этом мы будем существенно опираться на теорему 11 § 4, касающуюся предельных траекторий и справедливую только для траекторий динамических систем в плоской области.

Докажем прежде всего следующую основную теорему:

Теорема 37. *Всякая траектория, являющаяся предельной хотя бы для одной отличной от нее траектории, или* ω, *или* α (*или и* ω *и* α), *орбитно-неустойчива.*

Доказательство. Пусть L — траектория, являющаяся ω-предельной хотя бы для одной отличной от нее самой траектории L'. Если L есть состояние равновесия, то на L', очевидно, всегда найдется точка M_1, отличная от этого состояния равновесия и, следовательно, находящаяся на ненулевом расстоянии от него.

Если L — траектория, отличная от состояния равновесия, то в силу теоремы 11 § 4 траектория L' заведомо не может быть предельной для траектории L. Следовательно, на траектории L' также найдется точка M_1, находящаяся на ненулевом расстоянии d от траектории L. Возьмем $\varepsilon_0 < d$ В обоих случаях точка M_1 будет лежать вне ε_0 окрестности траектории L. Но траектория L по условию является ω-предельной для L'; следовательно, сколь бы малое $\delta > 0$ мы ни взяли, в δ-окрестности любой точки траектории L будут находиться точки траектории L', соответствующие сколь угодно большим значениям t (в частности, бóльшим того значения t, которому соответствует точка M_1). А так как точка M_1 траектории L' лежит вне ε_0-окрестности траектории L, то отсюда, очевидно, следует, что L во всяком случае α-орбитно-неустойчива.

Совершенно так же мы покажем, что в случае, когда траектория L является α-предельной для некоторой отличной от нее траектории L', она заведомо является ω-орбитно-неустойчивой. Теорема доказана.

Как было выяснено в главе II, ограниченная полутраектория динамической системы (т. е. целиком лежащая в замкнутой области $G_1 \subset G$) может быть одного из следующих типов:

1) Состоянием равновесия. 2) Полутраекторией, стремящейся к состоянию равновесия. 3) Полутраекторией замкнутой траектории (совпадающей, следовательно, с этой замкнутой траекторией). 4) Полутраекторией, стремящейся к замкнутой траектории. 5) Полутраекторией, стремящейся к некоторому предельному континууму, состоящему из состояний равнове-

сия и траекторий, отличных от состояний равновесия, но стремящихся к состояниям равновесия и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ *).

Мы рассмотрим все возможные типы полутраекторий и установим, какие из этих полутраекторий могут быть орбитно-устойчивыми и какие орбитно-неустойчивыми.

Теорема 18 (§ 4) позволяет непосредственно решить вопрос о том, в каких случаях изолированные состояния равновесия O орбитно-устойчивы, а в каких случаях орбитно-неустойчивы. Именно в силу теоремы 18 возможны два случая:

1) либо в сколь угодно малой окрестности O лежит замкнутая траектория, содержащая O внутри, 2) либо существует траектория, стремящаяся к O (при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$).

В первом случае состояние равновесия O, очевидно, и ω- и α-орбитно-устойчиво. Во втором случае в силу теоремы 37 состояние равновесия O орбитно-неустойчиво. Этим вопрос об орбитной устойчивости и неустойчивости состояния равновесия решается полностью. Мы перейдем теперь к рассмотрению орбитно-неустойчивых полутраекторий, стремящихся к изолированному состоянию равновесия. Докажем сначала некоторые вспомогательные предложения.

4. Вспомогательные леммы о поведении полутраекторий в окрестности состояния равновесия. Всюду в дальнейшем предполагается, что плоскость ориентирована, т. е. что выбрано положительное направление обхода простых замкнутых кривых (например, направление против часовой стрелки).

Пусть теперь O — изолированное состояние равновесия и C — простая замкнутая кривая (гладкая или негладкая), содержащая состояние равновесия O внутри и такая, *что внутри C и на C кроме O больше нет ни одного состояния равновесия.*

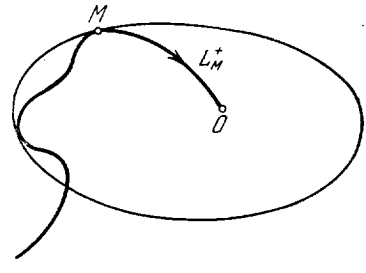


Рис. 151.

Предположим, что существует положительная полутраектория L^+, стремящаяся к состоянию равновесия O, у которой есть общие с кривой C точки.

Пусть на L^+ выбрано какое-нибудь движение. Общая у L^+ и C точка M, соответствующая при выбранном движении значению $t = \tau$, называется *последней общей с кривой C точкой полутраектории L^+*, если все точки L^+, соответствующие значениям $t > \tau$, лежат внутри C (рис. 151). Часть MO полутраектории L^+, соответствующую значениям $t \geqslant \tau$, согласно принятым обозначениям будем обозначать через L_M^+.

В случае, когда к состоянию равновесия O стремится отрицательная полутраектория L^- и у этой полутраектории есть общие с кривой C точки, мы совершенно так же будем говорить о «последней общей с кривой C точке полутраектории L^-».

Если L — траектория, из которой выделена полутраектория L^+ (L^-), то последнюю общую точку полутраектории L^+ (L^-) с замкнутой кривой C мы будем иногда также называть «*последней при возрастании (соответственно, при убывании) t общей точкой траектории L с замкнутой кривой C*».

---

*) При отсутствии предположения о конечном числе состояний равновесия полутраектории типа 5) могут иметь своим предельным множеством континуум из одних состояний равновесия.

Предположим теперь, что простая замкнутая кривая C, обладающая указанными выше свойствами, является окружностью, а стремящаяся к состоянию равновесия O полутраектория имеет точки вне C и является положительной полутраекторией L^+. (M — последняя общая точка L^+ с C, L_M^+ — часть OM полутраектории L^+.)

Докажем три леммы.

Лемма 2. *Если λ — дуга без контакта, целиком лежащая внутри C, на которой не лежит ни одной точки полутраектории L_M^+, то ни одна траектория, пересекающая λ, не может, не выходя из окружности C, пересечь эту дугу еще раз.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что траектория L', проходящая через точку P_1 дуги λ, не выходя из окружности C, пересекает дугу λ еще раз в точке P_2 (рис. 152). На дуге P_1P_2 траектории L' нет, следовательно, точек, лежащих вне окружности C (но могут быть точки самой окружности C). Кроме того, мы всегда можем предполагать, что на дуге λ между точками P_1 и P_2 нет больше точек траектории L'. Рассмотрим простую замкнутую кривую D, состоящую из дуги P_1P_2 траектории L' и части P_1P_2 дуги λ. Область внутри этой замкнутой кривой, очевидно, является частью области внутри C. В силу следствия 1 из теоремы 16 § 4 внутри D непременно должно лежать хотя бы одно состояние равновесия.

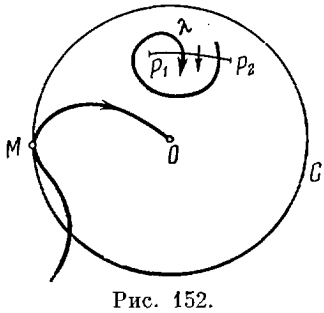


Рис. 152.

Полутраектория L_M^+, по предположению имеющая точки вне C, не может иметь точек внутри D, так как она не пересекает D — по самому выбору дуги без контакта λ. Поэтому L_M^+ не может стремиться к особой точке, лежащей внутри D. Следовательно, эта особая точка отлична от точки O, что противоречит самому выбору кривой C. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Всякая отличная от L_M^+ полутраектория L'^0, не имеющая точек вне окружности C, стремится к состоянию равновесия O.*

Доказательство. Предположим для определенности, что полутраектория L'^0 является положительной полутраекторией L'^+. Так как по условию леммы эта полутраектория лежит целиком внутри окружности C, то все ее предельные точки лежат либо внутри C, либо на самой окружности C. Докажем сначала, что у L'^+ не может быть лежащих внутри C предельных точек, отличных от состояния равновесия O. Предположим противное, т. е. что у полутраектории L'^+ существует предельная точка N, отличная от состояния равновесия O и лежащая внутри окружности C. Точка N не может лежать на полутраектории L_M^+, так как тогда все точки полутраектории L^+ (частью которой является полутраектория L_M^+) были бы предельными точками L'^+, в том числе и точки L^+, лежащие вне окружности C. Это невозможно, так как по условию у L'^+ нет точек вне C. Кроме того, точка N не может быть предельной точкой полутраектории L^+, так как эта полутраектория имеет единственную предельную точку O. А тогда через точку N можно провести дугу без контакта S, не пересекающую полутраекторию L^+, и на этой дуге должно лежать бесчисленное множество точек полутраектории L'^+. Но в силу леммы 2 это, очевидно, невозможно. Следовательно, у L'^+ не может быть отличных от O предельных точек, лежащих внутри окружности C. Таким образом, если

у полутраектории L'^{+} есть отличные от состояния равновесия O предельные точки, то все эти точки являются точками окружности C.

Покажем, что и это невозможно. Действительно, пусть N — точка окружности C, является предельной точкой L'^{+}. Тогда все точки траектории L_0, проходящей через точку N, должны быть предельными для полутраектории L'^{+}. Траектория L_0, по самому выбору окружности C, заведомо отлична от состояния равновесия. Кроме того, у L_0 не может быть ни точек, лежащих вне окружности C, ни (в силу доказанного выше) точек внутри C, так что все точки траектории L_0 должны быть точками окружности C. А тогда нетрудно видеть, что траектория L_0 должна быть замкнутой траекторией, совпадающей с окружностью C. Но это, очевидно, невозможно, так как по условию у полутраектории L^{+}, стремящейся к состоянию равновесия O, есть точки вне окружности C. Таким образом, лемма доказана.

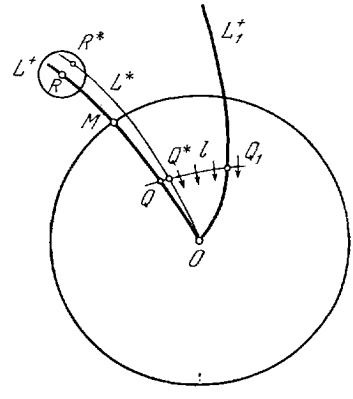


Рис. 153.

Л е м м а 4. *Пусть через точку Q полутраектории L_M^+, отличную от точки M, проведена дуга без контакта l с концом в точке Q, целиком лежащая внутри окружности C, причем кроме конца Q на ней не лежит уже больше ни одной точки полутраектории L_M^+. Тогда либо все траектории, пересекающие при $t = t_0$ дугу l в отличных от Q точках, при возрастании t выходят из окружности C, либо существует такая часть QQ_1 дуги l, что все пересекающие эту часть траектории, не выходя из окружности C, стремятся к состоянию равновесия O при $t \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что не все траектории, пересекающие дугу l в отличных от Q точках, при возрастании t выходят из окружности C, т. е. что существует точка Q_1 дуги l, через которую проходит при $t = T_0$ полутраектория L_1^+, не выходящая из окружности C (рис. 153). В силу леммы 1 полутраектория L_1^+ не может уже больше пересечь дугу l, в силу леммы 2 она стремится к состоянию равновесия O.

Рассмотрим простую замкнутую кривую S, состоящую из полутраектории L_Q^+ (т. е. части QO полутраектории L^+), полутраектории $L_{1Q_1}^+$ (т. е. части Q_1O полутраектории L_1^+) точки O и части QQ_1 дуги l. Кривая S лежит целиком внутри окружности C. Так как дуга QQ_1 является дугой без контакта, то пересекающие эту дугу траектории при возрастании t одновременно либо все входят внутрь кривой S, либо все выходят из нее. При этом каждая из этих траекторий, очевидно, пересекает дугу QQ_1 только один раз (в противном случае она должна была бы пересечь дугу QQ_1 в противоположном направлении, что невозможно).

Покажем, что все траектории, пересекающие дугу QQ_1 (в отличных от Q и Q_1 точках), при возрастании t входят внутрь кривой S. Пусть R — точка полутраектории L^+ (частью которой является полутраектория L_M^+), лежащая вне C — по условию леммы такая точка заведомо существует. Пусть при выбранном на L^+ движении точка Q соответствует значению $t = t_0$, тогда точка R соответствует некоторому значению $\tau < t_0$.

Пусть Q^* — достаточно близкая к Q точка дуги QQ_1, L^* — проходящая через эту точку траектория. Если на L^* выбрано движение, при котором точка Q^* соответствует значению $t = t_0$, то точка R^* траектории L^*, соответствующая значению τ, будет лежать сколь угодно близко к точке R (если

точка Q^* достаточно близка к точке Q) и, следовательно, вне окружности C (рис. 153). Так как $\tau < t_0$, то, очевидно, в точке Q^* траектория L^* при возрастании t входит внутрь кривой S. А тогда и все траектории, пересекающие дугу QQ_1 в отличных от Q и Q_1 точках при возрастании t входят внутрь кривой S. Так как эти траектории больше уже не могут выйти из кривой C, то в силу леммы 2 они стремятся к состоянию равновесия O при $t \to \infty$. Таким образом, лемма доказана.

5. Орбитно-неустойчивые траектории, стремящиеся к состоянию равновесия. Предполагая, что окружность C, дуга без контакта l, полутраектория L^+ и Q — общая точка l и L^+ удовлетворяют тем же условиям, что и выше, введем следующее определение:

О п р е д е л е н и е XVIII. *Если дуга без контакта l лежит по положительную сторону полутраектории L^+ и все траектории, при $t = t_0$*

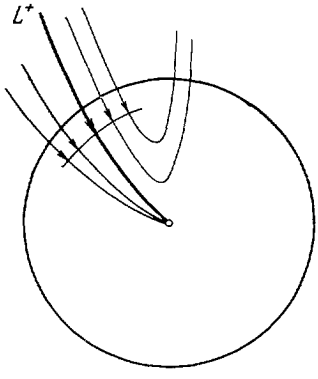


Рис. 154.

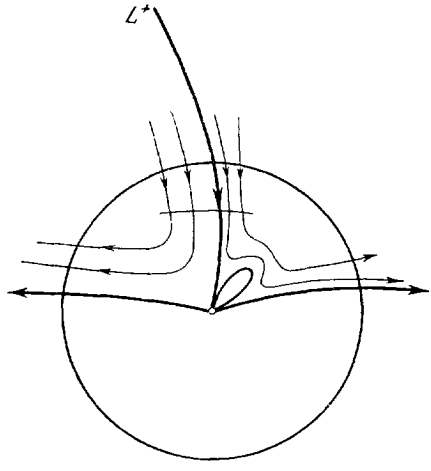


Рис. 155.

пересекающие эту дугу (в точках, отличных от Q), при возрастании t выходят из окружности C, то полутраектория L^+ называется продолжаемой (с положительной стороны) по отношению к окружности C.

Если все траектории, при $t = t_0$ пересекающие некоторую часть QQ_1 дуги l, при возрастании t не выходят из окружности C (и значит, при $t \to +\infty$ стремятся к состоянию равновесия), то мы будем говорить, что полутраектория L^+ непродолжаема с положительной стороны относительно окружности C (или не имеет продолжения относительно окружности C с положительной стороны) *).

Совершенно аналогичное определение дается в случае, когда дуга без контакта l лежит по отрицательную сторону полутраектории L^-, а также в случае, когда рассматриваемая полутраектория является отрицательной полутраекторией, стремящейся к состоянию равновесия O.

Полутраектория L^+ может быть продолжаема по отношению к окружности C с одной только стороны, например, с положительной, или с обеих сторон, и с положительной и с отрицательной.

На рис. 154 и 155 даны простейшие геометрические примеры полутраекторий, продолжаемых по отношению к данной окружности C. На рис. 154

*) Это определение дано Бендиксоном.

полутраектория L^+ продолжаема по отношению к окружности C только с одной стороны; на рис. 155 — с обеих сторон. Примеры полутраекторий, не продолжаемых по отношению к данной окружности C, представлены на рис. 156 и 157.

Теорема 38. *Полутраектория L^+, стремящаяся к состоянию равновесия O, орбитно-неустойчива в том и только в том случае, если существует окружность с центром в O, по отношению к которой она продолжаема по крайней мере с одной из своих сторон.*

Доказательство. Пусть все траектории, пересекающие дугу без контакта l, целиком лежащую внутри окружности C (конец Q которой лежит на L^+), при возрастании t выходят из этой окружности.

Всегда можно взять $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, чтобы ε_0-окрестность полутраектории L^+_Q (т. е. часть QO полутраектории L^+) целиком содержалась внутри окружности C. А тогда всякая пересекающая дугу l траектория, выходя при возрастании t из окружности C, заведомо выходит из ε_0-окрестности L^+_Q. Так как всегда можно взять траекторию, пересекающую дугу l сколь угодно близко к точке Q, то это, очевидно, означает, что полутраектория L^+_Q (а следовательно, в силу леммы 1 и L^+) орбитно-неустойчива.

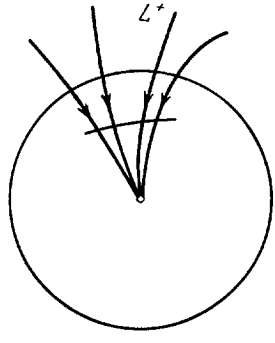


Рис. 156.

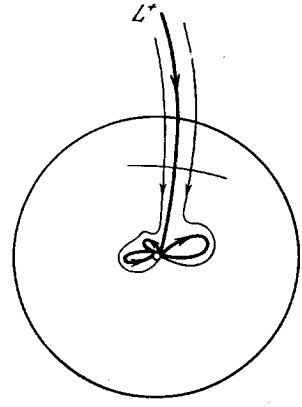


Рис. 157.

Обратно, пусть L^+ — полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия O и орбитно-неустойчивая. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что сколь бы малую окрестность любой точки R полутраектории L^+ мы ни взяли, среди пересекающих эту окрестность траекторий всегда найдется такая, которая выходит при возрастании t из $U_{\varepsilon_0}(L^+)$.

Рассмотрим окружность C (внутри и на которой нет состояний равновесия кроме O) радиуса r, меньшего ε_0, и пусть M — последняя общая точка полутраектории L^+ с этой окружностью C. Пусть через точку Q полутраектории L^+_M, отличную от M, проведена дуга без контакта λ, содержащая точку Q внутри, кроме Q не имеющая больше общих точек с полутраекторией L^+_M и целиком лежащая внутри окружности C. Нетрудно видеть, что на дуге λ нельзя выделить такую, содержащую точку Q внутри себя часть, чтобы все пересекающие эту часть траектории не выходили бы из окружности C (и, следовательно, стремились бы к состоянию равновесия O). В самом деле, тогда и вокруг каждой точки полутраектории L^+ можно было бы указать такую окрестность, чтобы все пересекающие эту окрестность траектории не выходили бы из ε_0-окрестности L^+, что невозможно по самому выбору числа ε_0. А отсюда следует, что в случае, когда полутраектория L^+ орбитно-неустойчива, все траектории, пересекающие либо часть дуги λ, лежащую по положительную сторону L^+_M, либо часть дуги λ, лежащую по отрицательную сторону L^+_M (либо и ту и другую части дуги λ), при возрастании t выходят из окружности C. Теорема доказана.

Рассмотрим более подробно продолжаемые относительно некоторой окружности полутраектории.

Предположим, что наряду с рассматриваемой полутраекторией L°, стремящейся к состоянию равновесия O и имеющей точки вне окружности C, существует еще одна полутраектория L'°, стремящаяся к состоянию равновесия и заведомо имеющая общие точки с окружностью C (но могущая не иметь точек вне C).

Пусть M и M' — последние общие точки полутраекторий L° и L'° с окружностью C и L°_M, $L'^{\circ}_{M'}$ — полутраектории (MO и $M'O$), являющиеся частями полутраекторий L° и L'°.

Рассмотрим простую замкнутую кривую σ, состоящую из полутраекторий L°_M, $L'^{\circ}_{M'}$ точки O и дуги MM' кривой C (т. е. дуги, на которой направление от точки M к M' совпадает с направлением, индуцированным положительным обходом кривой; см. § 11, п. 2). Область g внутри кривой σ, являющуюся частью области внутри окружности C, будем называть *криволинейным сектором* или просто сектором.

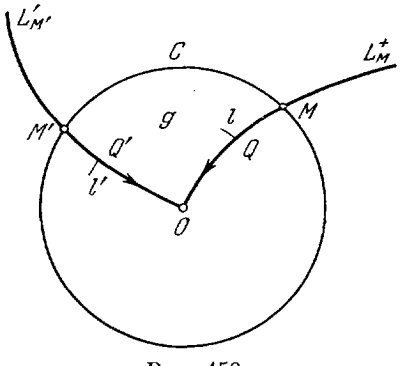


Рис. 158.

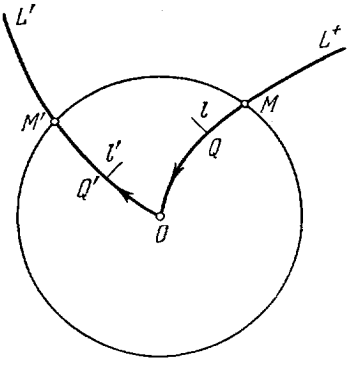


Рис. 159.

Если обе полутраектории L°_M и $L'^{\circ}_{M'}$, входящие в границу сектора g, положительны (отрицательны), то при положительном обходе кривой σ на одной из этих полутраекторий индуцируется направление, совпадающее с направлением по t, а на другой — противоположное направлению по t (рис. 158).

Если одна из полутраекторий L°_M положительна, а другая $L'^{\circ}_{M'}$ — отрицательна, то при положительном обходе кривой σ индуцированное на этих полутраекториях направление либо на обоих совпадает с направлением по t, либо на обоих противоположно направлению по t (рис. 159).

Возьмем на полутраекториях L°_M и $L'^{\circ}_{M'}$ соответственно точки Q и Q', отличные от M и M'. Пусть l — дуга без контакта с концом в точке Q, кроме точки Q не имеющая больше общих точек с полутраекторией L°_M, l' — дуга без контакта с концом в точке Q', не имеющая больше общих точек с полутраекторией $L'^{\circ}_{M'}$.

Предположим, что дуги l и l' целиком лежат внутри окружности C, не имеют друг с другом общих точек, кроме того, дуга l кроме конца Q не имеет общих точек с полутраекторией L°_M, а дуга l' кроме конца Q' не имеет общих точек с полутраекторией $L'^{\circ}_{M'}$.

Пусть обе рассматриваемые полутраектории являются положительными полутраекториями L^{+}_M и $L'^{+}_{M'}$. Если дуги без контакта l и l' лежат по положительную сторону полутраекторий L^{+}_M и $L'^{+}_{M'}$ соответственно, то все точки дуги l, отличные от точки Q, лежат в секторе g, а все точки дуги l', отличные от Q' — вне сектора g (и наоборот, в случае, когда дуги l и l'

лежат по отрицательную сторону полутраекторий L_M^+ и $L_{M'}^+$ соответственно) (рис. 158).

Пусть одна из рассматриваемых полутраекторий положительна, например L_M^+, а другая — отрицательна — $L_{M'}^-$.

Если дуги без контакта l и l' лежат по положительную сторону траекторий L_M^+ и $L_{M'}^-$, соответственно, то все точки обеих этих дуг (кроме точек Q и Q') принадлежат области g. Точки обеих дуг не принадлежат области g, если дуги l и l' лежат по отрицательную сторону L_M^+ и $L_{M'}^-$ соответственно.

Предположим теперь, что полутраектории L_M^+ и $L_{M'}^-$ таковы, что для них выполняется следующее условие. Все траектории, пересекающие некоторую часть QQ_1 дуги l (в отличных от Q точках), при возрастании t, не выходя до этого из окружности C, пересекают дугу l', причем точки их пересечения с дугой l' стремятся к точке Q', когда точки их пересечения с дугой l стремятся к точке Q.

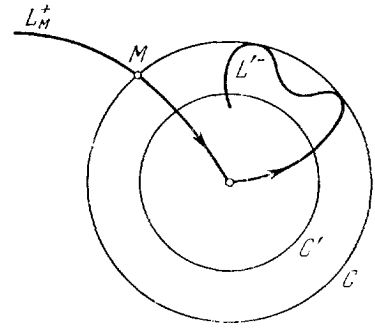


Рис. 160.

Нетрудно видеть (основываясь на лемме 10 § 3), что тогда на дуге l' тоже можно выделить часть $Q'Q_1'$ такую, что все траектории, пересекающие эту часть (в отличных от Q' точках), при убывании t, не выходя из окружности C, пересекают дугу l. Действительно, пусть Q_2 — какая-нибудь точка части QQ_1 дуги l, и все траектории, пересекающие часть Q_1Q_2 дуги l, при возрастании t, не выходя до этого из окружности C, пересекают дугу l' на части $Q_1'Q_2'$, причем траектории, проходящие через точки Q_1, Q_2, пересекают l' соответственно в точках Q_1' и Q_2'. Тогда, в силу леммы 10 § 3 и замечания 1 к ней, все траектории, пересекающие часть $Q_1'Q_2'$ дуги l', при убывании t (очевидно, также не выходя из окружности C) пересекут часть Q_1Q_2 дуги l. Но по условию точка Q_2' стремится к точке Q', когда точка Q_2 стремится к точке Q. Следовательно, все траектории, пересекающие часть $Q'Q_1'$ дуги l', при убывании t пересекают часть QQ_1 дуги l.

В этом случае полутраектории L_M^+ и $L_{M'}^-$ заведомо продолжаемы по отношению к некоторой окружности. Действительно, полутраектория L_M^+, по условию имеющая точки вне C, очевидно, продолжаема по отношению к окружности C. Если полутраектория $L_{M'}^-$ имеет точки вне C, то она также является согласно определению XVIII продолжаемой по отношению к окружности C *). Если же она не имеет точек вне C, а имеет лишь общие с окружностью C точки (рис. 160), то всегда можно взять окружность C' несколько меньшего, чем C, радиуса, по отношению к которой она будет продолжаемой.

Пусть для определенности дуги l и l' лежат по положительную сторону полутраектории L_M^+ и $L_{M'}^-$ соответственно.

Определение XIX. *Если все траектории, пересекающие некоторую часть Q_1Q дуги l, в отличных от Q точках при возрастании t, не выходя из окружности C, пересекают дугу l', причем точки их пересечения с дугой l' стремятся к точке Q', когда точки их пересечения с дугой l стре-*

*) В определении XVIII продолжаемой по отношению к данной окружности C полутраектории предполагалось, что эта полутраектория имеет точки вне C.

мятся к Q, то полутраектория $L'_{\bar{M}'}$ называется продолжением полутраектории L^+_M с положительной стороны относительно окружности C.

В случае, когда дуги без контакта l и l' лежат по отрицательную сторону полутраекторий L^+_M и $L'_{\bar{M}'}$ соответственно, полутраектория $L'_{\bar{M}'}$ называется *продолжением полутраектории L^+_M по отношению к окружности C — с отрицательной стороны.*

Совершенно аналогичное определение дается и в случае отрицательной полутраектории $L^-_{\bar{M}}$.

Мы будем называть продолжением полутраектории L^+ относительно окружности C не только саму полутраекторию $L'_{\bar{M}'}$, но и траекторию L', из которой полутраектория $L'_{\bar{M}'}$ выделена. Очевидно, полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия, не может иметь более двух продолжений по отношению к данной окружности C — одного с положительной, другого с отрицательной стороны.

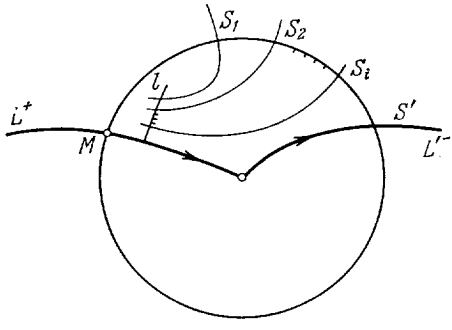


Рис. 161.

Следующая лемма сформулирована в предположении, что рассматривается положительная полутраектория L^+. Полностью аналогичное утверждение может быть доказано и для отрицательной полутраектории.

Окружность C, полутраектории L^+, L^+_M, дуга без контакта l и т. д. в этой лемме имеют тот же смысл, что и выше.

Л е м м а 5. *Если все траектории, пересекающие дугу без контакта l, лежащую по положительную (отрицательную) сторону полутраектории L^+_M, при возрастании t выходят из окружности C, т. е. полутраектория L^+ продолжаема с положительной (отрицательной) стороны относительно окружности C, то непременно существует отрицательная полутраектория $L'_{\bar{M}'}$, являющаяся продолжением L^+ с положительной (отрицательной) стороны относительно окружности C.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы нужно показать, что существует отрицательная полутраектория L'^-, стремящаяся к состоянию равновесия O и удовлетворяющая определению XIX. Предположим для определенности, что дуга l, конец Q которой лежит на L^+_M, находится по положительную сторону полутраектории L^+_M. Возьмем на дуге l последовательность точек $\{Q_i\}$, стремящихся к точке Q. По предположению траектория L_i, при $t = t_0$ проходящая через любую из точек Q_i, при $t > t_0$ должна выйти из окружности C. Пусть S_i — первая ее общая точка с окружностью C, соответствующая $t > t_0$, так что дуга Q_iS_i кроме точки S_i лежит целиком внутри C. Нетрудно видеть, принимая во внимание лемму 1, что при различных i все точки S_i различны. Следовательно, на окружности C лежит бесчисленное множество точек S_i, и эти точки должны иметь хоть одну точку сгущения (рис. 161). Без ограничения общности мы можем предполагать, что они имеют единственную точку сгущения S'.

Рассмотрим траекторию L', проходящую через точку S'.

Пусть при выбранном на L' движении точка S' соответствует значению $t = \tau$. Покажем, что на L' нет точек, соответствующих значениям $t < \tau$ и лежащих вне C. В самом деле, предположим сначала, что траектория L' выходит при значении $t < \tau$ из окружности C, не пересекая до этого отрезок без контакта l. Тогда и все траектории L_i, проходящие через точки

S_i, достаточно близкие к точке S', при убывании t выходят из окружности C, не пересекая до этого дугу l. Но это, очевидно, невозможно по самому определению точек S_i.

Предположим теперь, что траектория L' выходит при убывании t из окружности C, предварительно пересекая дугу l в некоторой точке, соответствующей значению $t = \tau_1$ ($\tau_1 < \tau$). Тогда в силу непрерывной зависимости от начальных условий эта точка должна быть точкой сгущения для точек Q_i, т. е. должна совпадать с точкой Q и, следовательно, траектория L' должна совпадать с траекторией L (полутраекторией которой является L^+_M). Но это невозможно, так как по условию леммы у траектории L все точки, соответствующие значениям $t > \tau_1$ (т. е. точки полутраектории L^+_Q), лежат внутри C, и у L^+ не может быть общей с окружностью C точки S', соответствующей значению $\tau > \tau_1$.

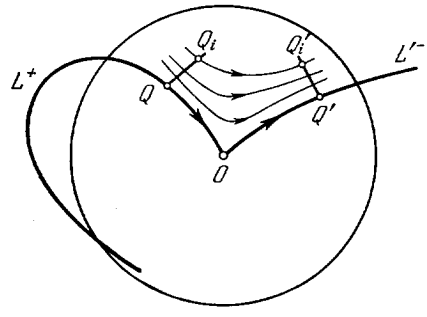


Рис. 162.

Таким образом, у полутраектории $L'^-_{S'}$, точки которой соответствуют значениям $t < \tau$, нет точек, лежащих вне окружности C, и, следовательно, полутраектория $L'^-_{S'}$ стремится к состоянию равновесия O.

Пусть M' — последняя общая точка полутраектории $L'^-_{S'}$ с окружностью C*) и Q' — какая-нибудь точка полутраектории $L'^-_{M'}$ (являющейся частью $L'^-_{S'}$ или совпадающей с ней). Пусть l' — дуга без контакта с концом в точке Q', лежащая по положительную сторону $L'^-_{M'}$, не имеющая общих точек ни с полутраекторией L^+_M, ни с дугой l и целиком лежащая внутри окружности C (с полутраекторией $L'^-_{M'}$ дуга l' не имеет, кроме Q', общих точек в силу леммы 2). Простая дуга, состоящая из полутраектории L^+_M, точки O и полутраектории $L^-_{M'}$, делит область внутри окружности C на две области. Пусть g' — та из этих областей, которой принадлежат точки дуги l (отличные от Q). Тогда отличные от Q' точки дуги l' также принадлежат области g' (рис. 159). Кроме того, очевидно, области g' принадлежат также и все, отличные от S_i точки дуг Q_iS_i траекторий L_i. При достаточно больших i каждая траектория L_i непременно пересечет дугу l' в некоторой точке Q_i' (в силу леммы 3 § 3 и в силу того, что точки дуг Q_iS_i принадлежат области g'). При $i \to \infty$ точка Q_i' стремится к точке Q'.

Покажем, что не только рассмотренные траектории L_i, но вообще все траектории, пересекающие некоторую часть Q_iQ дуги l, пересекают часть $Q_i'Q'$ дуги l'.

Рассмотрим область D внутри криволинейного четырехугольника $QQ_iQ_i'Q'$ (рис. 162), т. е. область внутри простой замкнутой кривой, состоящей из частей QQ_i и $Q'Q_i'$ дуг l и l', дуги Q_iQ_i' траектории L_i, полутраектории L^+_Q, точки O и полутраектории $L'^-_{Q'}$ (полутраектория L^+_Q — часть QO полутраектории L^+_M, а $L'^-_{Q'}$ — часть $Q'O$ полутраектории $L'^-_{M'}$). Область D, очевидно, целиком лежит внутри окружности C.

Все траектории, пересекающие дугу без контакта Q_iQ, входящую в границу области D, могут, не выходя из C, пересечь эту дугу только

*) В силу доказанного у полутраектории $L'^-_{S'}$ не может быть точек, лежащих вне C, но могут быть точки, лежащие на C, так что последняя общая точка этой полутраектории с окружностью C может не совпадать с точкой S', а соответствовать некоторому значению $\tau' < \tau$.

один раз (см. лемму 2). При этом нетрудно видеть, что при возрастании t все эти траектории входят внутрь области D. Действительно, по условию леммы при убывании t полутраектория L^+, проходящая через точку Q, выходит из окружности C. А тогда, в силу непрерывной зависимости от начальных значений, и все траектории, пересекающие дугу Q_iQ достаточно близко к точке Q, при убывании t тоже выходят из окружности C. Они не могут до этого пересечь дугу l', так как эта дуга находится на положительном расстоянии от полутраектории L_M^+, и значит, не могут до выхода из окружности C пересечь границу области g' еще раз. Следовательно, все траектории, пересекающие дугу QQ_i достаточно близко к точке Q, при убывании t выходят из области D, а при возрастании t входят внутрь этой области. Но тогда и вообще все пересекающие дугу Q_iQ траектории при возрастании t входят внутрь области D (см. дополнение, § 6, а также лемму 10 § 3).

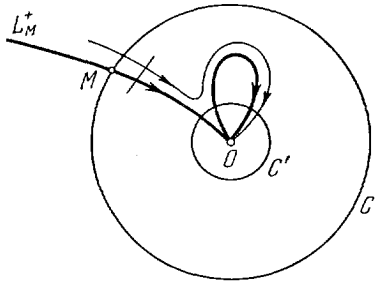


Рис. 163.

Так как по условию леммы всякая траектория, пересекающая дугу QQ_i, при возрастании t выходит из окружности C, то она, очевидно, выходит и из области D, целиком лежащей внутри C. Но выйти из области D эта траектория может только, пересекая часть $Q'Q_i'$ дуги l'. Таким образом, все траектории, пересекающие часть QQ_i дуги l при возрастании t, не выходя до этого из окружности C, пересекают часть $Q'Q_i'$ дуги l'. Кроме того, при $i \to \infty$ точки Q_i стремятся к точке Q, а точки Q_i' — к точке Q'. Отсюда, очевидно, следует, что полутраектория L_M^+ удовлетворяет определению XIX, и лемма доказана.

Дальнейшие предложения мы формулируем только для положительных полутраекторий, продолжаемых по отношению к некоторой окружности с положительной стороны. Полностью аналогичные предложения справедливы и для полутраекторий (как положительных, так и отрицательных), продолжаемых относительно некоторой окружности с отрицательной стороны.

Пусть полутраектория L^+, стремящаяся к состоянию равновесия O, непродолжаема по отношению к окружности C. Может случиться, что эта траектория продолжаема по отношению к окружности C' с центром в O, радиуса меньшего, чем C. Этот случай представлен на рис. 163.

Пусть полутраектория L^+ продолжаема с положительной стороны по отношению к окружности C. Тогда, очевидно, она продолжаема и по отношению к любой окружности (с центром в O) меньшего радиуса. Однако полутраектории, являющиеся продолжением полутраектории L^+ с положительной стороны, по отношению к разным окружностям могут быть различны. Такой случай представлен на рис. 164.

Имеет место следующая лемма (в этой лемме окружность C, полутраектории L^+ и L_M^+, точка Q_1, дуга l и т. д. сохраняют прежний смысл):

Лемма 5'. а) *Если полутраектория L^+, стремящаяся к состоянию равновесия O, не имеет продолжения с положительной стороны по отношению к окружности C, но имеет продолжение с положительной стороны по отношению к окружности C' меньшего, чем C, радиуса, то траектория L', являющаяся продолжением полутраектории L^+ по отношению к окружности C', не может иметь точек, лежащих вне окружности C*

б) *Если L'^- — траектория, являющаяся продолжением полутраектории L^+ с положительной стороны по отношению к окружности C, то траектория, являющаяся продолжением L^+ с положительной стороны по отношению к окружности C' меньшего, чем C, радиуса, либо совпадает с L', либо является траекторией, целиком лежащей внутри C.*

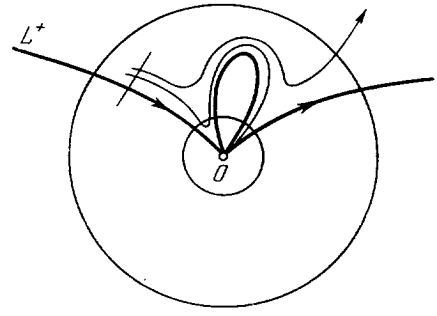


Рис. 164.

Доказательство. Докажем утверждение а). По условию полутраектория L^+ не имеет продолжения с положительной стороны по отношению к окружности C. Тогда на дуге без контакта l с концом в точке Q полутраектории L^+_M можно выделить часть, лежащую по положительную сторону L^+_M и такую, что все проходящие через точки этой части траектории, не выходя из C стремятся к состоянию равновесия O. Обозначим через $\widetilde{L}^+$ полутраекторию, проходящую через какую-нибудь точку Q^* этой части дуги l, и через $\widetilde{g}$—область внутри простой замкнутой кривой, состоящей из дуги QO полутраектории L^+, дуги Q^*O полутраектории $\widetilde{L}^+$, самой точки O и дуги без контакта Q^*Q. Очевидно, область $\widetilde{g}$ лежит целиком внутри окружности C. Кроме того, всякая траектория, пересекающая дугу без контакта Q^*Q в отличной от концов Q и Q^* точке, при возрастании t входит внутрь области $\widetilde{g}$ и больше уже не выходит из нее (рис. 165).

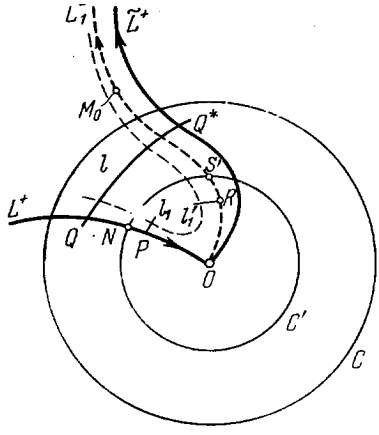


Рис. 165.

Пусть N — последняя общая точка полутраектории L^+ с окружностью C' радиуса меньшего, чем C, P — какая-нибудь отличная от N точка части NO этой полутраектории и l_1 — дуга без контакта с концом в точке P, лежащая с положительной стороны полутраектории L^+ и целиком внутри окружности C'. Обозначим через L_1 траекторию, являющуюся продолжением полутраектории L^+ с положительной стороны относительно окружности C' — по условию такая траектория существует. По самому своему определению траектория L_1 стремится при $t \to -\infty$ к состоянию равновесия O. Пусть S' — последняя общая с окружностью C' точка полутраектории L'^-_1 (имеющей общие точки с C'), выделенной из траектории L_1, R — отличная от S' точка части $S'O$ полутраектории L'^-_1 и, наконец, l'_1 — дуга без контакта с концом в точке R, лежащая по положительную сторону L_1.

Предположим, что утверждение леммы неверно и у траектории L_1 есть точки, лежащие вне окружности C. Пусть M_0 — такая точка. Все траектории, пересекающие дугу без контакта Q^*Q достаточно близко к точке Q, очевидно, пересекают дугу l_1 сколь угодно близко к точке P. А в силу того, что полутраектория L'_1 является продолжением полутраектории L^+ с положительной стороны по отношению к окружности C', все траектории,

пересекающие дугу l_1 достаточно близко к точке P, при возрастании t пересекают дугу l_1' сколь угодно близко к точке R. При дальнейшем возрастании t эти траектории должны пройти сколь угодно близко к точке M_0 и, следовательно, должны выйти из окружности C. Но отсюда следует, что все траектории, пересекающие дугу QQ^* достаточно близко к точке Q, при возрастании t должны выйти из окружности C. А это невозможно, так как все эти траектории при возрастании t входят в область $\tilde{g}$, целиком содержащуюся внутри окружности C, и больше из этой области не выходят. Полученное противоречие доказывает утверждение а). Перейдем к доказательству пункта б).

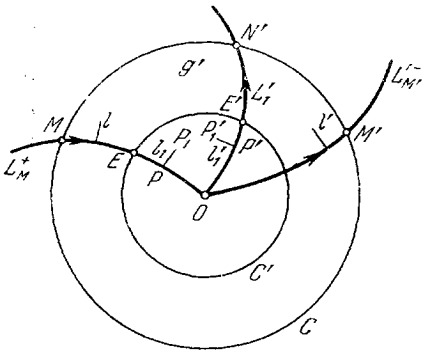


Рис. 166.

По условию полутраектория L^+ имеет продолжение с положительной стороны по отношению к окружности C. Пусть траектории L_M^+, $L_{M'}^-$ и дуги без контакта l и l' имеют тот же смысл, что и в определении XIX. Простая дуга, состоящая из полутраекторий L_M^+, $L_{M'}^-$ и точки O, делит окружность на два сектора. Обозначим через g' тот из секторов, который содержит точки дуг l и l' (рис. 166). Предположим для определенности, что в границу этого сектора входит дуга $M'M$ окружности C.

Рассмотрим теперь траекторию L_1', являющуюся продолжением полутраектории L^+ с положительной стороны, по отношению к окружности C'. Обозначим через E и E' последние общие точки полутраекторий L^+ и L_1^- с окружностью C'. Пусть P и P' — отличные от E и E' точки частей EO и $E'O$ полутраекторий L^+ и L_1^- соответственно, а l_1 и l_1' — дуги без контакта с концами в точках P и P', лежащие целиком внутри окружности C' и по положительную сторону полутраекторий L^+ и L_1^- соответственно.

Очевидно, все отличные от P точки дуги l_1 принадлежат области g'. Так как полутраектория L_1^- есть продолжение полутраектории L^+ с положительной стороны по отношению к окружности C', то все траектории, пересекающие некоторую часть PP_1 дуги l_1, при возрастании t, не выходя до этого из окружности C' и, очевидно, не выходя из области g', пересекают некоторую часть $P'P_1'$ дуги l_1'. При этом точки их пересечения с дугой l_1' стремятся к точке P', когда их точки пересечения с дугой l_1 стремятся к точке P. Отсюда, очевидно, следует, что все отличные от P_1' точки части $P'P_1'$ дуги l_1' принадлежат области g', а точка P' является либо точкой области g', либо точкой границы области g'.

Если точка P' лежит на границе области g', то, как нетрудно видеть, она может лежать только на полутраектории $L_{M'}^-$, и тогда траектории L' и L_1' совпадают. Если же траектории L' и L_1' различны, то точка P' должна быть точкой области g'.

Предположим теперь, что утверждение б) леммы неверно и у траектории L_1' есть точки, лежащие вне окружности C. Пусть N' — последняя общая точка полутраектории L_1' с окружностью C.

Простая дуга, состоящая из части $N'O$ траектории L_1' и точки O, у которой все точки, кроме концов O и N', принадлежат области g', разбивает эту область на две, не имеющие общих точек, области g_1' и g_2', и вхо-

дит в границу обеих этих областей. Кроме полутраектории $L^+_{N'}$ в границу одной из этих областей — пусть это область g'_1 — входит еще полутраектория L^+_M, и дуга $N'M$ окружности C, а в границу другой g'_2 — полутраектория $L^+_{M'}$ и дуга $M'N'$ окружности C. Из самого определения секторов g', g'_1 и g'_2 очевидно, что точки всякой достаточно малой дуги без контакта с концом на полутраектории L^+_M, лежащей по положительную сторону этой полутраектории, принадлежат области g'_1, а точки всякой достаточно малой дуги без контакта с концом на полутраектории $L^+_{M'}$, лежащей по положительную сторону этой полутраектории, принадлежат g'_2. Но тогда траектории, пересекающие дугу l, не могут, не выходя из g'_1, пересечь дугу l', так как они не могут выйти из области g'_1, пересекая отличные от дуги окружности C части границы этой области, являющиеся полутраекториями. Это противоречит тому, что $L^+_{M'}$ — есть продолжение L^+_M по отношению к окружности C, и лемма доказана.

Следствие. Для того чтобы продолжением полутраектории L^+ с положительной стороны по отношению к окружностям C и C' являлась одна и та же полутраектория, необходимо и достаточно, чтобы у полутраектории, являющейся продолжением L^+ с положительной стороны по отношению к окружности C', существовали бы точки, лежащие вне окружности C. (Необходимость этого следует из доказанной леммы, достаточность — непосредственно следует из самого определения продолжения полутраектории по отношению к данной окружности.)

Приведем еще следующую теорему:

Теорема 39 (Бендиксон). *Существует только конечное число траекторий, стремящихся к состоянию равновесия O и продолжаемых относительно данной окружности C.*

Доказательство. Предположим противное: пусть существует бесчисленное множество траекторий $\{L_n\}$, продолжаемых относительно окружности C. Без ограничения общности можно считать, что эти траектории стремятся к O при $t \to +\infty$. Пусть $\{A_n\}$ — их последние (при возрастании t) точки пересечения с окружностью C. Возьмем одну из точек сгущения множества точек $\{A_n\}$ и обозначим ее через A. Нетрудно видеть, что траектория L, при $t = \tau$ проходящая через точку A, при всех значениях $t > \tau$ не имеет точек вне C. А тогда в силу леммы 2 полутраектория L^+, выделенная из этой траектории, также стремится к состоянию равновесия O.

Возьмем теперь на L^+_A (т. е. на части AO полутраектории L^+) какую-нибудь точку B, лежащую внутри C, и проведем через нее дугу без контакта B_1B_2, содержащую точку B внутри. Тогда бесчисленное множество траекторий L_n пересечет либо дугу B_2B, либо дугу BB_1. Пусть, например, траектории L_{n_1} и L_{n_2} пересекают дугу BB_1, и пусть точка пересечения дуги BB_1 с L_{n_2} — S_2 лежит ближе к B, чем точка пересечения дуги BB_1 с L_{n_1} — S_1. В силу леммы 4 все траектории, пересекающие дугу BS_1, будут при возрастании t, не выходя из C, стремиться к точке O. Но это противоречит предположению, что траектория L_{n_1} продолжаема относительно окружности C. Таким образом, теорема доказана.

Отметим, что при уменьшении радиуса окружности C число продолжаемых относительно C траекторий может неограниченно возрастать.

6. Сепаратрисы состояния равновесия. Следующее определение является основным для дальнейшего:

Определение XX. *Если полутраектория L'^- является продолжением полутраектории L^+ с положительной (отрицательной)*

стороны по отношению ко всем окружностям радиуса, меньшего некоторого $\varepsilon_0 > 0$, *то полутраектория* L^+ *называется продолжаемой с положительной (отрицательной) стороны, а полутраектория* L'^- *— ее продолжением с положительной (отрицательной) стороны или полутраекторией, являющейся продолжением полутраектории* L^+ *с положительной (отрицательной) стороны.*

Совершенно аналогичное определение дается при рассмотрении отрицательной полутраектории. Если полутраектория L^+ продолжаема с положительной (отрицательной) стороны и L'^- — ее продолжение, то полутраектория L'^- тоже продолжаема с положительной (отрицательной) стороны и полутраектория L^+ является ее продолжением с положительной (отрицательной) стороны. Траектория L', из которой выделена полутраектория L'^-, являющаяся продолжением полутраектории L^+ с положительной (отрицательной) стороны, так же как и полутраектория L'^-, называется продолжением L^+ с положительной (отрицательной) стороны или траекторией, являющейся продолжением полутраектории L^+ с положительной (отрицательной) стороны.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих двух утверждений:

1) Всякая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия O, может иметь не более двух продолжений — одного с положительной, а другого — с отрицательной стороны.

2) Всякая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия O, может являться продолжением не более чем для двух полутраекторий, и при этом для одной с положительной, а для другой с отрицательной стороны.

Если полутраектория L^+, выделенная из траектории L, стремится к состоянию равновесия O и продолжаема с положительной (отрицательной) стороны, то траектория L называется ω-продолжаемой с положительной (отрицательной) стороны. При этом полутраектория L'^-, являющаяся продолжением полутраектории L^+, а также траектория L', из которой выделена полутраектория L'^-, называется ω-продолжением полутраектории L^+ с положительной (отрицательной) стороны (или полутраекторией и траекторией, являющейся ω-продолжением траектории L). Совершенно аналогично определяется α-продолжаемая траектория и ее α-продолжение.

Мы будем также иногда говорить, что траектория L ω-продолжаема с положительной (отрицательной) стороны по отношению к состоянию равновесия O, подразумевая под этим, что траектория L стремится к состоянию равновесия O и ω-продолжаема с положительной (отрицательной) стороны.

Отметим, что все рассматриваемые в дальнейшем орбитно-неустойчивые полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия, в силу дополнительного предположения о конечном числе орбитно-неустойчивых траекторий являются продолжаемыми полутраекториями.

Если полутраектория L^+ непродолжаема с положительной стороны, то возможны два случая: 1) у L^+ нет продолжения по отношению ни к какой окружности; 2) у L^+ есть продолжение по отношению к какой-либо окружности и, следовательно, ко всякой окружности меньшего радиуса. Но сколь бы малую окружность C_1 мы ни взяли, всегда можно указать меньшую окружность C_2, по отношению к которой продолжение полутраектории L^+ отлично от ее продолжения по отношению к окружности C_1.

Случаи 1) и 2) представлены на рис. 167, *а* и *б* (на рис. 167, *б* предполагается бесчисленное множество уменьшающихся «петель»).

Всякую орбитно-неустойчивую полутраекторию, стремящуюся к состоянию равновесия O, мы будем называть *сепаратрисой этого состояния равновесия*. При этом положительную полутраекторию будем называть ω-сепаратрисой состояния равновесия O, а отрицательную α-сепаратрисой состояния равновесия O. Мы будем также называть *сепаратрисой*

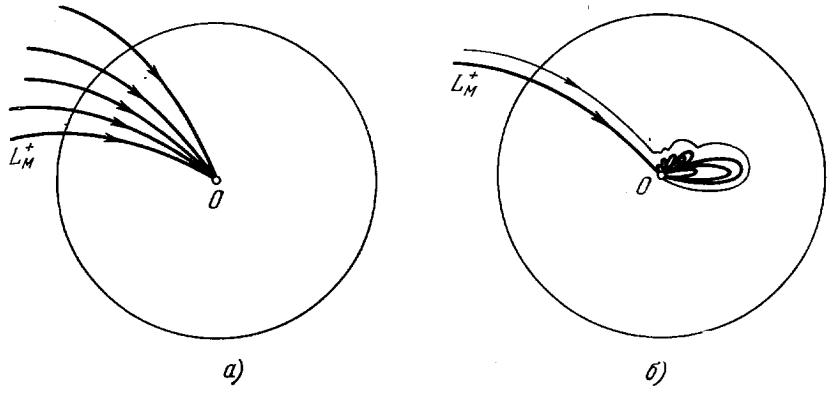


Рис. 167.

траекторию, у которой хотя бы одна из полутраекторий является орбитно-неустойчивой полутраекторией, стремящейся к состоянию равновесия (т. е. является сепаратрисой состояния равновесия).

7. Некоторые вспомогательные предложения. Ниже приводится ряд вспомогательных предложений, использующихся при рассмотрении полутраекторий, имеющих среди своих предельных точек отличные от состояний равновесия.

Пусть в ограниченной замкнутой области $\bar{g}$ плоскости дана последовательность простых замкнутых кривых $\{C_i\}$, ограничивающих области, содержащие одна другую, так что:

1) либо область, ограниченная кривой C_i, содержит область, ограниченную кривой C_{i+1},

2) либо область, ограниченная кривой C_i, содержится в области, ограниченной кривой C_{i+1}.

Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих условий:

а) либо кривые C_i не имеют друг с другом общих точек;

б) либо каждая кривая C_i имеет одну только общую точку с кривой C_{i+1}, и при этом общая точка кривых C_{i-1} и C_i отлична от общей точки кривых C_i и C_{i+1}.

Очевидно, при условии б) можно указать подпоследовательность последовательности $\{C_i\}$, в которой кривые не будут иметь друг с другом общих точек (например, подпоследовательность C_1, C_3, C_5, . . .).

Пусть $\{P_i\}$ последовательность точек, принадлежащих кривым C_j, такая, что $P_k \in C_{i_k}$ (i_k — натуральные числа) и при этом $i_1 < i_2 < \ldots$

Очевидно, точки определенной таким образом последовательности заведомо выделены из бесчисленного множества кривых C_j (см. условие б)).

Пусть K — множество всех точек сгущения всевозможных последовательностей такого рода. В любой сколь угодно малой окрестности каждой точки множества K лежат, следовательно, точки бесчисленного

множества кривых C_j. Но тогда в ней будут лежать точки всех кривых C_j, начиная с некоторого достаточно большого j.

Действительно, если внутри данной окрестности какой-нибудь точки множества K *) лежат точки P_n и P_m, $P_n \in C_{i_n}$, $P_m \in C_{i_m}$, то отрезок прямой, соединяющей эти точки, тоже лежит внутри этой окрестности. Так как, по условию, области, ограниченные кривыми C_j, содержат одна другую, то этот отрезок пересекает все промежуточные кривые C_j, т. е. все кривые C_j с номерами j между i_n и i_m. Отсюда нетрудно видеть, что внутри всякой окрестности любой точки множества K есть точки всех кривых C_j, начиная с некоторого достаточно большого j. Это означает, что последовательность (α) кривых C_j *топологически сходится*, и множество K есть ее *топологический предел* (см. дополнение, § 1, п. 10).

Очевидно, в случае 1) — множество K лежит внутри всех C_i, а в случае 2) — вне всех C_i.

Лемма 6. *Множество K замкнуто и связно* (*т. е. является континуумом*).

Доказательство. Замкнутость множества K очевидна.

Для доказательства связности множества K предположим противное, т. е. что K не связно. Тогда в силу замкнутости оно может быть представлено как сумма двух замкнутых множеств K_1 и K_2, не имеющих общих точек и, следовательно, находящихся на конечном расстоянии ϱ_0 друг от друга. Возьмем $\varepsilon < \frac{\varrho_0}{3}$, пусть $K_{1\varepsilon}$ и $K_{2\varepsilon}$ — ε-окрестности множеств K_1 и K_2.

Из самого определения множества K следует, что каждая кривая C_j (при достаточно больших j) имеет точку как в $K_{1\varepsilon}$, так и в $K_{2\varepsilon}$. Но тогда, так как замкнутая кривая есть связное множество, на каждой кривой C_j существуют точки, не принадлежащие ни $K_{1\varepsilon}$, ни $K_{2\varepsilon}$. Выберем по одной такой точке P_j на каждой кривой C_j, и пусть P — точка сгущения последовательности точек P_j. Очевидно, точка P принадлежит множеству K, и в то же время не принадлежит ни K_1, ни K_2, что не может быть. Таким образом, лемма доказана.

Пусть C_i и C_k — кривые последовательности $\{C_i\}$. Предполагая $k > i$, обозначим через h_{ik} область, граница которой состоит из кривых C_i и C_k (рис. 170). Такая область — единственная. При $j > k$ область h_{ij} содержит область h_{ik}. Кроме того, при $j \geqslant k + 2$ (а при условии а) даже при $j \geqslant k + 1$) кривая C_k целиком лежит в h_{ij}.

Предполагая i фиксированным, обозначим через γ_i область, являющуюся суммой областей h_{ij} при всевозможных j (см. дополнение, § 7, п. 6), т. е.

$$\gamma_i = h_{ii+1} \cup h_{ii+2} \cup \ldots$$

Область γ_i содержит все кривые C_j при $j \geqslant i + 2$, и все точки кривой C_{i+1} кроме может быть одной (именно, кроме общей точки кривых C_i и C_{i+1} в случае б)).

Отметим, что всякая принадлежащая области γ_i точка принадлежит какой-нибудь области h_{ik} ($k > i$). При $k > i$ $\gamma_k \subset \gamma_i$. По самому определению области γ_i все точки области γ_i лежат в случае 1) — внутри, а в случае 2) — вне кривой C_j при $j < i$.

Лемма 7. *Граница области γ_i состоит из кривой C_i и континуума K.*

*) Мы всегда можем считать, что окрестностью точки является окружность с центром в данной точке.

Доказательство. Докажем лемму для случая 1), когда область, ограниченная кривой C_i, содержит область, ограниченную кривой C_{i+1} (для случая 2) она доказывается совершенно аналогично).

Точки кривой C_i являются граничными для области γ_i по самому определению этой области. Точки континуума K не принадлежат области γ_i, так как континуум K лежит внутри всех кривых C_k и, следовательно, вне всех областей h_{ik}, но являются граничными для γ_i, так как каждая точка множества K является точкой сгущения для последовательности принадлежащих кривым C_j точек, т. е. для точек области γ_i.

Покажем теперь, что всякая граничная для области γ_i точка, отличная от точек кривой C_i, принадлежит континууму K.

Пусть N — не принадлежащая кривой C_i точка, являющаяся граничной для области γ_i. Точка N лежит внутри всех кривых C_j. Действительно, если бы она лежала вне какой-нибудь кривой C_{j_0} ($j_0 > i$, так как вне кривой C_i нет ни точек области γ_i, ни граничных для γ_i точек) — она принадлежала бы области h_{ij_0}, а значит, принадлежала бы области γ_i и, следовательно, не могла бы быть граничной для этой области.

Пусть $\{M_l\}$ — последовательность точек области γ_i, стремящаяся к точке N. Рассмотрим произвольную окрестность $U_\delta(N)$.

Пусть M_l — точка последовательности $\{M_l\}$, принадлежащая этой окрестности. Так как точка M_l принадлежит области γ_i, то она непременно принадлежит некоторой области h_{ij_0} и, следовательно, лежит вне кривой C_{j_0}. Но тогда точка M_l лежит вне всех кривых C_j с номерами $j > j_0$.

Пусть λ — отрезок прямой, соединяющий точку N с точкой M_l. Этот отрезок лежит целиком внутри окрестности $U_\delta(N)$ и, очевидно, пересекает все кривые C_j с номерами $j > j_0$, т. е. в окрестности $U_\delta(N)$ лежат точки всех кривых C_j при $j > j_0$. Таким образом, в каждой окрестности точки N лежат точки всех кривых C_j, начиная с некоторого значения j. Это означает, что точка N принадлежит континууму K, и, следовательно, кривая C_i и континуум K исчерпывают все множество граничных для области γ_i точек. Лемма доказана.

Замечание. Кроме области γ_i не существует больше ни одной области с границей, состоящей из кривой C_i и континуума K. Действительно, в силу того, что континуум K целиком лежит внутри (вне) кривой C_i, всякая область с границей, состоящей из кривой C_i и континуума K, заведомо содержит все достаточно близкие к кривой C_i точки, лежащие внутри (вне) этой кривой. Но всякая такая область имеет общие точки с областью γ_i и, следовательно, совпадает с ней (см. дополнение, § 1, п. 7).

Лемма 8. *При всяком $\varepsilon > 0$ существует целое число I такое, что при всех $i > I$:* а) *все замкнутые кривые C_i лежат целиком в ε-окрестности континуума K;* б) *все области γ_i целиком содержатся в ε-окрестности континуума K.*

Доказательство. Для доказательства (в случае 1) утверждения а) предположим противное, т. е. предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом натуральном числе I на некоторой кривой C_j, где $j > I$, найдется точка M_j, лежащая вне ε_0-окрестности $U_{\varepsilon_0}(K)$ континуума K. Тогда существует последовательность точек $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots$ таких, что 1) $M_{i_k} \in C_{i_k}$ и при этом $i_{k+1} > i_k$; 2) все точки M_{i_k} лежат вне $U_{\varepsilon_0}(K)$. Точки сгущения такой последовательности лежат вне или на границе окрестности $U_{\varepsilon_0}(K)$ и, следовательно, отличны от точек континуума K. Но это невозможно, так как, по определению континуума K, точки сгущения последовательности точек M_{i_k} должны принадлежать континууму K. Полученное противоречие доказывает пункт а).

Для доказательства утверждения б) также предположим противное, т. е. что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что сколь бы большое I мы ни взяли, у некоторой области γ_j, где $j > I$, найдется точка, лежащая вне ε_0-окрестности $U_\varepsilon(K)$ континуума K.

Тогда существует, очевидно, последовательность областей $\{\gamma_{i_k}\}$ и последовательность точек $\{M_{i_k}\}$ $(i_{k+1} > i_k)$ таких, что 1) $M_{i_k} \in \gamma_{i_k}$; 2) M_{i_k} лежит вне окрестности $U_{\varepsilon_0}(K)$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{M_{i_k}\}$ имеет единственную точку сгущения N, а точка N заведомо не принадлежит $U_{\varepsilon_0}(K)$. С другой стороны, нетрудно показать, что точка N является точкой континуума K и, следовательно, принадлежит $U_{\varepsilon_0}(K)$. Мы приходим к противоречию, и лемма доказана.

8. Полутраектории, среди предельных точек которых есть отличные от состояний равновесия. Пусть L^+ — незамкнутая ограниченная полутраектория, среди предельных точек которой есть отличные от состояния равновесия. Тогда в состав континуума K, предельного для полутраектории L^+, заведомо входит по крайней мере одна отличная от состояния равновесия траектория L_0. Пусть P — какая-либо точка траектории L_0 (очевидно, $P \in K$) и l — дуга без контакта, проведенная через точку P. В силу леммы 2 § 3 полутраектория L^+ пересекает дугу l в бесчисленном множестве точек $\{P_i\}$, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t_i, расположенных на l в порядке возрастания t и стремящихся к точке P. При этом (следствие 1 из леммы 2 § 3) кроме точки P на дуге l не лежит больше уже ни одной точки континуума K. Точки P_i разбивают полутраекторию L^+ на дуги соответственно между точками P_1 и P_2, P_2 и P_3, ..., P_i и P_{i+1}, ... Эти дуги, как и в § 3, мы будем называть «витками полутраектории L^+». Каждый виток имеет общими с дугой l только точки P_i и P_{i+1}, и вместе с частью P_iP_{i+1} дуги l образует простую замкнутую кусочно-гладкую кривую, которую мы будем обозначать через C_i (§ 3, п. 9).

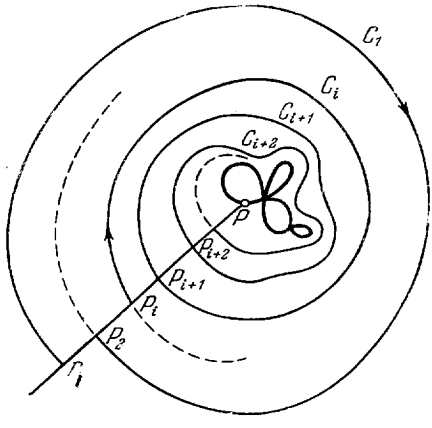


Рис. 168.

Лемма 9. а) *Начиная с некоторого номера i, простые замкнутые кривые C_i ограничивают области, содержащиеся одна внутри другой.* б) *Топологический предел последовательности замкнутых кривых C_i совпадает с континуумом K, предельным для полутраектории L^+.*

Доказательство. Для доказательства утверждения а) предположим сначала, что существует такое i, при котором кривая C_i содержит точку P внутри (рис. 168), а значит, в силу связности континуума K и весь этот континуум внутри. В этом случае все точки полутраектории L^+, соответствующие значениям $t > t_{i+1}$, очевидно, должны лежать внутри C_i (так как если бы они лежали вне C_i, то континуум K, предельный для L^+, не мог бы лежать внутри C_i). Следовательно, и область, ограниченная кривой C_{i+1}, содержится в области, ограниченной кривой

C_i. Для того чтобы установить справедливость утверждения а) леммы, нужно, очевидно, еще показать, что точка P, лежащая внутри кривой C_{i+2}, непременно лежит также и внутри кривой C_{i+1}. Но из того, что область, ограниченная кривой C_i, содержит область, ограниченную кривой C_{i+1}, следует, что точки L^+, соответствующие значениям $t < t_{i+1}$, лежат вне кривой C_{i+1}. А тогда в силу леммы 11 § 3 точки L^+, соответствующие значениям $t > t_{i+2}$, а значит, и точка P непременно лежат внутри кривой C_{i+1}. Таким образом, относительно кривых C_{i+1} и C_{i+2} можно повторить все сказанное относительно кривых C_i и C_{i+1}, и, следовательно, для рассматриваемого случая утверждение а) леммы доказано.

Предположим теперь, что ни при каком i кривые C_i не содержат внутри точки P (рис. 169) так, что точка P лежит вне всех кривых C_i. Тогда, какую бы кривую C_i мы ни взяли, точки полутраектории L^+, соответствующие значению $t > t_{i+1}$, должны лежать вне C_i. Предположим, что область, ограниченная кривой C_{i+1}, не содержит области, ограниченной кривой C_i, и, следовательно, не содержит точек полутраектории L^+, соответствующих значениям $t < t_{i+1}$. Тогда в силу леммы 11 § 3 точки полутраектории L^+, соответствующие значениям $t > t_{i+2}$, должны лежать внутри кривой C_{i+1} и, значит, внутри C_{i+1} непременно должна лежать и точка P. Но это противоречит сделанному предположению, и утверждение а) леммы доказано полностью.

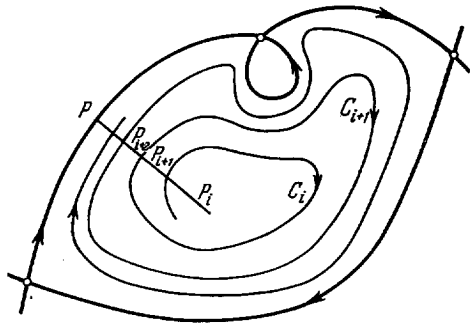


Рис. 169.

Для доказательства утверждения б) заметим прежде всего, что в силу утверждения а) настоящей леммы, последовательность кривых C_i, начиная с некоторой кривой с достаточно большим номером, очевидно, обладает свойствами рассмотренной выше последовательности (см. п. 4) простых замкнутых кривых. Обозначим через K^* топологический предел этой последовательности кривых.

Пусть N — какая-нибудь точка континуума K, предельного для полутраектории L^+. Тогда N является, очевидно, точкой сгущения для некоторой последовательности $\{M_i\}$ точек L^+, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t. Но полутраектория L^+ точками P_i разделяется на витки P_1P_2, P_2P_3, . . ., причем виток P_iP_{i+1} является дугой кривой C_i. Так как точки M_n, так же как и точки P_i, соответствуют неограниченно возрастающим значениям t, то нетрудно видеть, что при любом натуральном i всегда можно указать виток P_jP_{j+1}, где $j \geqslant i$, на котором будет лежать какая-нибудь точка M_n. В силу того, что виток P_jP_{j+1} является дугой кривой C_j, это, очевидно, и означает, что точка N принадлежит континууму K^*, являющемуся топологическим пределом последовательности кривых C_i. Следовательно,

$$K \subset K^*.$$

Пусть теперь Q — точка континуума K^*. Тогда существует сходящаяся к точке Q последовательность точек $\{M_i\}$, принадлежащих различным кривым C_i. Точки M_i принадлежат, следовательно, либо полутраектории L^+, либо дуге без контакта l. Если среди точек M_i есть

бесчисленное множество точек, принадлежащих полутраектории L^+, то точка Q является предельной точкой полутраектории L^+, т. е.

$$Q \subset K.$$

Если же только конечное число точек M_i принадлежит полутраектории L^+, то почти все точки последовательности $\{M_i\}$ принадлежат различным частям P_kP_{k+1} дуги без контакта l. Но тогда, очевидно, точка Q совпадает с точкой P, т. е. $Q \in K$, откуда следует, что $K^* \subset K$. Но отсюда и из (1), очевидно, вытекает

$$K^* = K,$$

что и доказывает лемму.

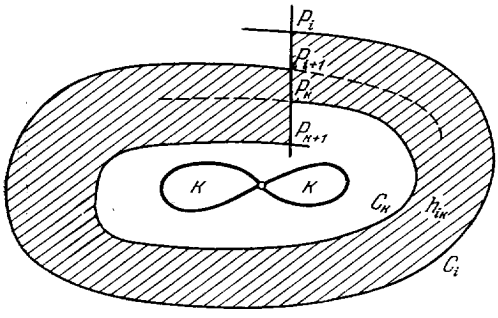


Рис. 170.

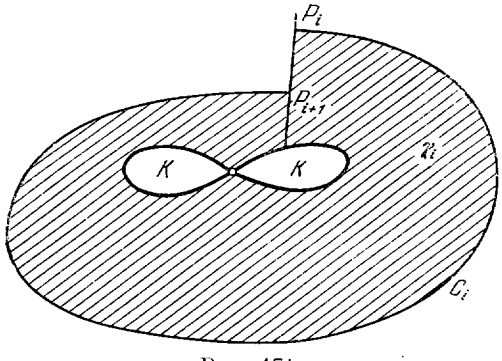


Рис. 171.

Из пункта а) настоящей леммы следует, что для рассматриваемой последовательности кривых C_i (составленных из витков P_iP_{i+1} полутраектории L^+ и частей P_iP_{i+1} дуги без контакта l), если начинать ее с достаточно большого номера i, справедливы все предположения, доказанные в п. 7.

Будем, как и в п. 7, обозначать через h_{ij} область, граница которой состоит из кривой C_i и C_j, а через γ_i область, граница которой состоит из замкнутой кривой C_i и континуума K (в силу замечания к лемме 6 такая область единственная) (рис. 170 и 171). Имеет место следующая основная теорема:

Т е о р е м а 40. *Незамкнутая полутраектория L^+ (L^-), имеющая среди своих ω (α)-предельных точек отличные от состояний равновесия, орбитно-устойчива.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сохраняя обозначения предыдущих лемм, рассмотрим при любом $\varepsilon > 0$ окрестность континуума K. $U_\varepsilon(K)$, очевидно, входит в ε-окрестность любой положительной полутраектории, выделенной из траектории L. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что все траектории, при $t = t_0$ проходящие через достаточно малую окрестность какой-либо точки полутраектории L^+, в течение конечного промежутка значений t войдут внутрь $U_\varepsilon(K)$ и при возрастании t больше уже не выйдут из $U_\varepsilon(K)$.

В силу леммы 7 при любом $\varepsilon > 0$ существует такое целое число I, что при всяком $j > I$ замкнутая кривая C_j и область γ_j (граница которой состоит из кривой C_j и континуума K) целиком лежат в $U_\varepsilon(K)$.

Пусть M — какая-нибудь точка полутраектории L^+ и j — какое-нибудь целое число, большее I. В силу леммы 5 § 3 всегда можно указать такую окрестность точки M, чтобы всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через точки этой окрестности при некотором значении $t = T$, не выходя до этого из ε-окрестности части MP_j полутраектории L^+,

пересекла бы часть P_jP_{j+2} дуги l. При значениях $t > T$ эта траектория попадает, следовательно, в область γ_j. Но при возрастании t она не может выйти из области γ_j. Действительно, в противном случае она должна была бы иметь общие точки, соответствующие значениям $t > T$, либо с кривой C_i, либо с континуумом K. Но с кривой C_i она не может иметь общих точек, соответствующих значениям $t > T$, в силу леммы 11 § 3. Если бы она имела общие точки с континуумом K, то она должна была бы совпадать с одной из траекторий, входящих в состав континуума K, а это тоже невозможно, так как траектории, входящие в его состав, заведомо не имеют общих точек с частью P_jP_{j+2} (континуум K лежит либо целиком вне, либо целиком внутри всех кривых C_i).

Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Всякая незамкнутая орбитно-неустойчивая траектория является сепаратрисой состояния равновесия.

Следующая теорема устанавливает, в каком случае замкнутая траектория является орбитно-устойчивой.

Теорема 41. *Замкнутая траектория L, не являющаяся предельной для незамкнутой траектории, орбитно-устойчива.*

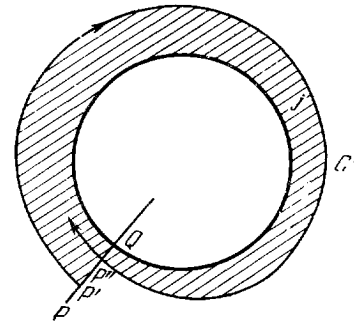


Рис. 172.

Доказательство. Пусть L — замкнутая траектория, не являющаяся предельной для незамкнутой. Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы в $U_\varepsilon(L)$ не лежало ни одного состояния равновесия. Проведем через какую-нибудь точку Q траектории L дугу без контакта l, содержащую точку Q внутри и целиком лежащую в $U_\varepsilon(L)$.

Покажем прежде всего, что на дуге l существуют по обе стороны от точки Q сколь угодно близкие к Q точки, через которые проходят замкнутые траектории. Предположим противное, т. е. предположим, что можно выделить часть дуги l с концом в точке Q такую, что все пересекающие ее траектории не замкнуты. Предположим для определенности, что такая часть дуги l лежит вне траектории L (случай, когда она лежит внутри траектории L, рассматривается совершенно так же). Возьмем точку P на этой части дуги l такую, чтобы все траектории, пересекающие сугу l между точками Q и P, при возрастании t, не выходя из $U_\varepsilon(L)$, пересекали дугу l еще раз (см. лемму 5 § 3).

Рассмотрим траекторию L', проходящую через какую-нибудь точку P' дуги l, лежащую между точками P и Q, и пусть P'' — следующая по t за точкой P' точка пересечения траектории L' с дугой l.

Рассмотрим простую замкнутую кривую C', состоящую из витка $P'P''$ траектории L' и части $P'P''$ дуги l. Очевидно, кривая C' целиком лежит в $U_\varepsilon(L)$. В силу леммы 14 § 3 п. 9 замкнутая траекторию L лежит внутри кривой C', а область γ', граница которой состоит из кривой C' и траектории L, целиком содержится в $U_\varepsilon(L)$ (см. замечание 1 к лемме 14 § 3).

Предположим для определенности, что точка P'', соответствующая значению t большему, чем точка P', лежит ближе к точке Q, чем точка P (рис. 172). (Случай, когда точка P' лежит ближе к точке Q, чем точка P'' рассматривается полностью аналогично.) Тогда в силу леммы 11 § 3 в точке P'' траектория L' входит при возрастании t внутрь кривой C'

и, следовательно, входит при возрастании t внутрь области γ и уже не может больше выйти из этой области. А тогда все ω-предельные точки траектории L' лежат либо в области γ, либо на границе этой области и, значит, заведомо в $U_\varepsilon(L)$. Но по выбору ε в $U_\varepsilon(L)$ нет ни одного состояния равновесия, следовательно, множество всех предельных точек траектории L' является замкнутой траекторией L^*. Так как по предположению траектория L не является предельной для незамкнутой траектории, то замкнутая траектория L^* заведомо отлична от L и, следовательно, целиком лежит в области γ. При этом в силу леммы 14 § 3 траектория L^* заведомо пересекает часть QP дуги l. Но это противоречит сделанному относительно части PQ дуги l предположению, что все, пересекающие эту часть, траектории не замкнуты.

Отсюда следует, что на дуге l сколь угодно близко к точке Q, по обе стороны от Q существуют точки, через которые проходят отличные от L замкнутые траектории. Докажем теперь, что траектория L орбитно-устойчива. На основании доказанного, а также на основании леммы 14 § 3 можно при любом $\varepsilon > 0$ взять замкнутые траектории L^* и L^{**}, одну вне, а другую внутри замкнутой траектории L, столь близко, чтобы область Γ между этими замкнутыми траекториями L^* и L^{**} целиком содержалась в $U_\varepsilon(L)$. Траектория L, очевидно, будет лежать внутри области Γ.

Пусть Q — любая точка траектории L и $\delta > 0$ — столь малая величина, что $U_\delta(Q)$ целиком содержится в области γ. Тогда, очевидно, всякая траектория, проходящая через точку окрестности $U_\delta(Q)$, и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ не выходит из области γ, а значит и из $U_\varepsilon(L)$. Но это и означает, что траектория L орбитно-устойчива. Теорема доказана.

9. Возможные типы особых и неособых траекторий в случае конечного числа состояний равновесия. Случай конечного числа особых траекторий. Предположим, что динамическая система имеет конечное число состояний равновесия. Тогда предложения, доказанные в настоящей главе, позволяют сделать исчерпывающие заключения относительно возможных типов орбитно-неустойчивых или особых траекторий.

Действительно, в случае, когда число состояний равновесия конечно, все возможные виды траекторий перечислены в п. 6 § 4. А тогда нетрудно видеть на основании теорем, доказанных в настоящей главе, что орбитно-неустойчивые траектории могут быть траекториями следующих типов:

1) Состояние равновесия, к которому стремится хотя бы одна отличная от него полутраектория. 2) Замкнутая траектория, являющаяся предельной для незамкнутой траектории. 3) Траектории, у которых хотя бы одна из полутраекторий является сепаратрисой состояния равновесия.

Отметим, что в случае, когда число состояний равновесия конечно — число орбитно-неустойчивых траекторий может быть как конечно, так и бесконечно велико. При этом существуют геометрические примеры с бесконечно большим числом орбитно-неустойчивых траекторий, когда множество точек, принадлежащих орбитно-неустойчивым траекториям, всюду плотно в некоторой области (см. дополнение, § 9).

Будем называть *особыми траекториями* все ограниченные орбитно-неустойчивые траектории и, кроме того, также состояния равновесия, являющиеся орбитно-устойчивыми (центры).

В дальнейшем мы будем рассматривать только тот случай динамической системы, определенной в плоской области, когда во всякой ограниченной части области определения *число особых траекторий конечно.*

Случай конечного числа особых траекторий, очевидно, являющийся самым простым, представляет наибольший интерес для приложений. Но он представляет также интерес с чисто математической точки зрения.

Из классических работ Бендиксона и Дюлака [33], [37] вытекает, что у всякой аналитической динамической системы, правые части которой не имеют общего множителя, не являющегося постоянным числом, число орбитно-неустойчивых траекторий во всякой ограниченной части плоскости конечно *).

Понятие орбитной устойчивости и неустойчивости полутраекторий и траекторий непосредственно переносится и на случай динамической системы на сфере. Мы не останавливаемся на этом ввиду полной очевидности такого перенесения.

§ 16. Ячейки динамической системы в случае конечного числа особых траекторий

1. Вводные замечания. В настоящем параграфе (так же как и в последующих главах VIII, X и XI) предполагается, что *число особых траекторий у рассматриваемых динамических систем — конечно.*

Кроме того, в случае динамической системы, определенной в плоской области, мы будем во избежание не принципиальных усложнений рассматривать эту систему не во всей области G, в которой она определена, а в некоторой ограниченной замкнутой области $\bar{G}^*$, целиком в ней лежащей со сравнительно простой границей, которую мы будем называть «нормальной».

В этом случае к множеству особых траекторий, целиком лежащих в замкнутой области $\bar{G}^*$ (т. е. к множеству лежащих в $\bar{G}^*$ орбитно-неустойчивых траекторий с добавлением всех орбитно-устойчивых состояний равновесия), присоединяется еще конечное число дуг без контакта, дуг траекторий и некоторых полутраекторий, характеризующих нормальную границу той области $\bar{G}^*$, в которой рассматривается динамическая система.

Все особые траектории, а также дуги и полутраектории, характеризующие границу, мы будем называть «особыми элементами».

В случае динамической системы на сфере множество особых элементов совпадает с множеством особых траекторий.

Особые элементы разделяют сферу или, соответственно, рассматриваемую плоскую область $\bar{G}^*$ на конечное число областей, которые мы будем называть *ячейками*. Каждая ячейка заполнена орбитно-устойчивыми или неособыми траекториями. В случае динамической системы в плоской области существуют также ячейки, заполненные не целыми орбитно-устойчивыми траекториями, а орбитно-устойчивыми полутраекториями, а также дугами траекторий.

В настоящем параграфе изучается возможный характер отдельных ячеек и возможное поведение особых элементов, неособых траекторий, полутраекторий и дуг траекторий внутри каждой ячейки. Кроме того, выясняется, какой связности могут быть ячейки, и более подробно рассматривается возможный характер ячеек как в случае, когда они заполнены незамкнутыми траекториями, так и в случае, когда они заполнены замкнутыми траекториями.

*) Число особых траекторий конечно также и в случае так называемых «грубых» систем, представляющих собой с некоторой точки зрения наиболее широкий класс динамических систем [6].

2. Нормальная граница ограниченной области $\bar{G}^*$, содержащейся в области определения динамической системы. Предположим, что рассматриваемая динамическая система (I), определенная в плоской области G (область G может, в частности, совпадать со всей плоскостью), имеет только конечное число особых траекторий во всякой ограниченной части своей области определения. Пусть $\bar{G}^*$ — замкнутая ограниченная область, целиком вместе с границей содержащаяся в области G ($\bar{G}^* \subset G$).

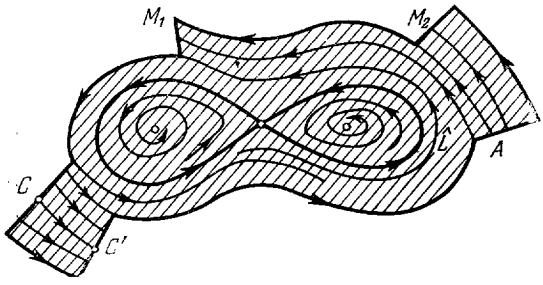


Рис. 173.

Границу области G^* будем называть *нормальной* для данной динамической системы, если выполняются следующие условия:

1. Она состоит из конечного числа простых замкнутых кривых.

2. Каждая из этих простых замкнутых кривых либо является циклом без контакта для траекторий данной динамической системы, либо замкнутой траекторией этой системы, либо замкнутой кривой, составленной из конечного (четного) числа чередующихся (попеременно) дуг без контакта и дуг траекторий.

3. Целые траектории, входящие в границу, и траектории, дуги которых входят в границу, не могут принадлежать орбитно-неустойчивым траекториям или полутраекториям, целиком лежащим в замкнутой области $\bar{G}^*$. В частности, никакое состояние равновесия заведомо не может быть точкой границы.

Примеры областей с нормальной границей представлены на рис. 173, 174.

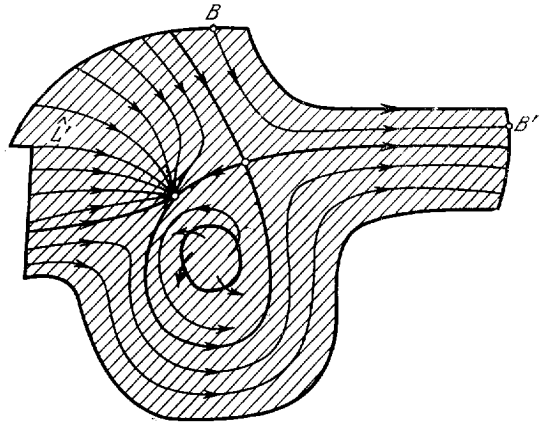


Рис. 174.

Траектории, дуги без контакта, дуги траекторий и циклы без контакта, входящие в границу, будем называть граничными траекториями, граничными дугами траекторий, граничными дугами без контакта и граничными циклами без контакта.

Общие точки граничных дуг без контакта и граничных дуг траекторий будем называть *угловыми точками* границы (например, точка M_1 и точка M_2 на рис. 173).

Рассмотрим дугу траектории с концами, являющимися точками граничных дуг без контакта, у которой все отличные от концов точки принадлежат области $\bar{G}^*$. Такая дуга называется угловой дугой, если хотя бы один из ее концов является угловой точкой границы (см. дугу AM_2 на рис. 173) и *целой неособой дугой*, если ни один из ее концов, являю-

щийся точкой граничной дуги без контакта, не является угловой точкой границы (см. дуги CC' на рис. 173 и BB' на рис. 174). Полутраектория, концом которой является угловая точка границы, а все точки, отличные от конца, принадлежат области $\overline{G}^*$, называется *угловой полутраекторией* (см. полутраектории $\hat{L}$ на рис. 173 и $\hat{L}'$ на рис. 174). В силу условия 3) угловая полутраектория всегда орбитно-устойчива. Очевидно, при сделанных предположениях число угловых дуг и угловых полутраекторий всегда конечно *).

Рассмотрим множество особых траекторий, лежащих в $\overline{G^*}$.

Из определения нормальной границы следует, что всякая особая траектория целиком лежит в открытой области G^* (см. условие 3)).

Траекторию, не являющуюся особой, будем называть *неособой*. Будем также называть *особой полутраекторией* всякую лежащую в $\overline{G}^*$ орбитно-неустойчивую полутраекторию, угловую полутраекторию, а также всякую полутраекторию особой траектории. Полутраекторию, не являющуюся особой, будем называть неособой. Неособая полутраектория всегда орбитно-устойчива. Но особая полутраектория, очевидно, может быть как орбитно-неустойчивой, так и орбитно-устойчивой. Она заведомо орбитно-устойчива, когда является угловой полутраекторией (в силу условия 3)), но она может быть орбитно-устойчивой также и в случае, когда является полутраекторией особой траектории (так как у орбитно-неустойчивой траектории одна из полутраекторий может быть орбитно-устойчивой).

Будем называть *особой дугой* граничную дугу без контакта, граничную или угловую дугу траектории.

Особую траекторию, угловую полутраекторию, особую полутраекторию, конец которой принадлежит граничной дуге без контакта, и особую дугу — будем также называть *особыми элементами*. При сделанном нами предположении, что число орбитно-неустойчивых траекторий конечно и граница той области $\overline{G}^*$, в которой данная динамическая система рассматривается — нормальна, число особых элементов конечно.

3. Леммы о множестве точек, принадлежащих особым элементам. Пусть $E \in G^*$ — множество всех точек, принадлежащих в замкнутой области $\overline{G}^*$ особым элементам.

Лемма 1. *Множество E замкнуто.*

Доказательство. Какую бы бесконечную последовательность точек множества E мы ни взяли, все ее точки в силу того, что особых элементов конечное число, принадлежат только конечному числу особых элементов. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что точки сгущения всякой последовательности точек, принадлежащих одному и тому же особому элементу, принадлежат множеству E. Но всякая точка сгущения последовательности точек особой траектории или полутраектории либо принадлежит ей самой, либо является ее предельной точкой, и, значит, также принадлежит особой траектории, т. е. множеству E. Точка же сгущения последовательности точек особой дуги, очевидно, принадлежит самой этой дуге. Лемма доказана.

---

*) Можно показать, что, когда область G ограничена, сколь бы малое $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, существует замкнутая область $\overline{G}^* \subset G$ с нормальной границей, целиком лежащей в ε-окрестности границы области G.

Множество точек замкнутой области $\overline{G}^*$, не принадлежащих множеству E, является открытым множеством. Оно может распадаться на конечное или счетное множество областей без общих точек. Ниже будет показано, что число этих областей конечно. Эти области мы будем называть *ячейками разбиения на траектории*, или, для краткости, просто ячейками.

Очевидно, точки ячеек принадлежат: а) либо целым неособым (орбитно-устойчивым) траекториям; б) либо неособым (орбитно-устойчивым) полутраекториям, концы которых лежат на граничной дуге без контакта; в) либо целым неособым дугам траекторий, т. е. дугам, концы которых лежат на граничных дугах без контакта.

Точки *всякой* неособой траектории или полутраектории или точки неособой целой дуги принадлежат какой-нибудь ячейке.

Мы приведем сначала ряд простых вспомогательных предложений, касающихся ячеек и их границ. На основании этих предложений, в частности, будет доказано, что число ячеек конечно.

Первая из этих лемм относится к любым областям, состоящим из целых траекторий, т. е. к таким областям, которые наряду со всякой принадлежащей им точкой содержат всю проходящую через эту точку траекторию.

Лемма 2. *Если какая-нибудь точка P является граничной для области, состоящей из целых траекторий (в частности, для ячейки, состоящей из целых траекторий), то и все точки траектории L_P, проходящей через точку P, являются граничными для этой области.*

Эта лемма может быть также сформулирована следующим образом: «Граница области, состоящей из целых траекторий, состоит из целых траекторий».

Лемма 3. *Если какая-нибудь отличная от угловой точка граничной дуги траектории или угловой дуги является граничной точкой некоторой ячейки, то и все точки этой дуги являются граничными для той же ячейки.*

Лемма 4. *Если какая-нибудь отличная от угловой точка особой полутраектории, пересекающей граничную дугу без контакта (т. е. точка угловой полутраектории или орбитно-неустойчивой полутраектории, пересекающей граничную дугу без контакта), является граничной точкой для какой-нибудь ячейки, то и все точки этой дуги или этой полутраектории являются граничными для той же ячейки.*

Справедливость лемм 2, 3, 4 непосредственно вытекает из непрерывной зависимости от начальных значений.

4. Доказательство конечности числа ячеек (в случае конечного числа особых элементов).

Лемма 5. *Всякая особая траектория, отличная от состояния равновесия, не являющаяся предельной ни для одной отличной от нее самой траектории или полутраектории, принадлежащей области $\overline{G}^*$, может входить в состав границы не более чем двух ячеек.*

Доказательство. Пусть L — особая траектория, не являющаяся предельной, и Q — точка на ней. Проведем через точку Q дугу без контакта l с серединой в точке Q, на которой не лежит ни одной точки особых дуг (это, очевидно, всегда возможно).

В силу леммы 3 § 3 все траектории, проходящие через точки достаточно малой окрестности точки Q, непременно пересекают дугу без контакта l. Поэтому на этой дуге лежат точки всех тех ячеек, для которых точка Q является граничной точкой. Покажем, что на дуге l можно выде-

лить часть Q_1Q_2, содержащую точку Q внутри, на которой кроме точки Q не лежит уже больше ни одной точки особой траектории или полутраектории. Действительно, предположим, что такую часть дуги l выделить нельзя. Тогда, очевидно, на дуге l существует последовательность стремящихся к Q точек, принадлежащих особым траекториям или полутраекториям. В силу того, что особых элементов по предположению — конечное число, бесчисленное множество точек этой последовательности принадлежит одной и той же особой полутраектории. Но тогда траектория L является предельной для отличной от нее полутраектории, принадлежащей области $\bar{G}^*$, что противоречит условию леммы. Следовательно, существует содержащая точку Q часть Q_1Q_2 дуги l, на которой, кроме точки Q больше уже нет точек особых элементов. А тогда все отличные от Q точки каждой из дуг Q_1Q и Q_2Q принадлежат одной и той же ячейке, и, следовательно, точка Q является граничной не более чем для двух ячеек. В силу леммы 2 то же справедливо и для всех других точек траектории L. Таким образом, лемма доказана.

Замечание. Все точки траектории L, очевидно, являются достижимыми граничными точками ячейки.

Лемма 6. *Все точки угловой дуги и угловой траектории, а также все точки орбитно-неустойчивой полутраектории, пересекающей граничную дугу без контакта, могут быть граничными не более, чем для двух ячеек.*

Доказательство. Покажем сначала, что угловая дуга, угловая полутраектория и орбитно-неустойчивая полутраектория, пересекающая граничную дугу, не могут быть предельными для траектории, целиком лежащей в $\bar{G}^*$, отличной от той, из которой они выделены. Для угловой дуги и угловой полутраектории это непосредственно вытекает из определения нормальной границы (см. условие 3)).

Рассмотрим теперь орбитно-неустойчивую полутраекторию $L_0^{(\cdot)}$, пересекающую граничную дугу без контакта. По самому определению нормальной границы полутраектория $L_0^{(\cdot)}$ пересекает граничную дугу без контакта в точке, отличной от ее концов. При этом, если существует полутраектория, для которой $L_0^{(\cdot)}$ является предельной, то она, очевидно, пересекает эту граничную дугу без контакта в бесчисленном множестве точек. Но ни одна полутраектория не может пересечь граничную дугу без контакта дважды, не выходя (и при возрастании и при убывании t) из области $\bar{G}^*$. Отсюда следует, что полутраектория $L_0^{(\cdot)}$ тоже не может быть предельной ни для одной принадлежащей области $\bar{G}^*$ полутраектории. А тогда справедливость утверждения леммы доказывается так же, как и в предыдущей лемме.

Лемма 7. *Всякая особая траектория L_0, отличная от состояния равновесия, являющаяся предельной для отличной от нее траектории, может быть граничной лишь для конечного числа ячеек.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что траектория L_0, а следовательно, и всякая ее точка (см. лемму 2) являются граничными для бесчисленного множества ячеек. Проведем через какую-нибудь точку Q траектории L_0 дугу без контакта l, не имеющую общих точек с граничными и угловыми дугами (это, очевидно, всегда возможно). Тогда (см. лемму 3 § 3) на дуге l сколь угодно близко к точке Q будут находиться точки каждой из ячеек, для которых Q является граничной. Возьмем на дуге l, стремящуюся к точке Q, последовательность точек $\{A_i\}$, принадлежащих разным ячейкам. Между каждыми двумя из этих точек лежат граничные точки B_1, B_2 *разных* ячеек, являющиеся точками

особых элементов. Так как особых элементов — конечное число, то бесчисленное множество из этих точек должно принадлежать одному и тому же особому элементу и, значит, одной и той же особой траектории L_1 (или полутраектории $L'^{(+)}_1$). А тогда эта траектория (или полутраектория) является граничной для бесчисленного множества различных ячеек. Траектория L_1 (или полутраектория $L'^{(+)}_1$) не замкнута, так как она заведомо имеет более одной общей точки с дугой без контакта l и имеет точку Q, отличную от состояния равновесия, своей предельной точкой. А значит, в силу теоремы 11 сама траектория L_1 (или полутраектория $L'^{(+)}_1$) не может быть предельной. Но тогда в силу леммы 3 она может быть граничной не более чем для двух ячеек. Мы приходим к противоречию, и лемма доказана.

Теорема 42. *Если у динамической системы, определенной в плоской области G, число орбитно-неустойчивых траекторий конечно во всякой ограниченной части G, то во всякой замкнутой ограниченной области $\bar{G}^* \subset G$, граница которой нормальна, число ячеек конечно.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что в области $\bar{G}^* \subset G$ с нормальной границей существует счетное множество ячеек $\{H_i\}$. Возьмем в каждой из них по точке $A_1, A_2, \ldots$ и соединим эти точки простыми дугами, целиком лежащими в области $\bar{G}^*$ и не содержащими состояний равновесия. Пусть B_i — граничная точка ячейки H_i, лежащая на дуге A_iA_{i+1}. Все точки B_i принадлежат особым элементам. Если среди точек B_i только конечное число различных точек, то тогда хотя бы одна из этих точек должна быть граничной для бесконечного множества ячеек. Это невозможно в силу лемм 5, 6 и 7. Следовательно, среди точек B_i существует бесконечное множество различных точек. А так как точки B_i принадлежат особым элементам и особых элементов — конечное число, то бесчисленное множество точек B_i лежит на одном и том же особом элементе. Этот особый элемент должен, следовательно, быть граничным для бесчисленного множества ячеек, что противоречит леммам 5, 6 и 7. Таким образом теорема доказана.

5. Случай динамической системы на сфере. Рассмотрим теперь динамическую систему на сфере. Будем так же, как и в случае динамической системы в плоской области, называть особой траекторией или особым элементом всякую орбитно-неустойчивую траекторию, а также всякое орбитно-устойчивое состояние равновесия. Траекторию, не являющуюся особой, т. е. орбитно-устойчивую, будем называть неособой. Будем также называть особой полутраекторией полутраекторию особой траектории. Пусть E — множество точек, принадлежащих особым траекториям. Имеет место лемма, доказательство которой проводится так же, как и доказательство леммы 1.

Лемма 1′. *Множество E замкнуто.*

Обозначим через S множество точек сферы. Множество точек сферы, не принадлежащих множеству E, т. е. множество $S \setminus E$, очевидно, является открытым множеством и, следовательно, может распадаться на конечное или счетное число областей. Эти области так же, как и в случае динамической системы в плоской области, мы будем называть ячейками разбиения на траектории. Очевидно, точки ячеек принадлежат целым орбитно-устойчивым траекториям.

Леммы 2, 5 и 7 справедливы и в случае динамической системы на сфере. Имеет место также следующая теорема, доказательство которой проводится так же, как и доказательство теоремы 42.

Теорема 43. *Число ячеек динамической системы на сфере в случае конечного числа особых траекторий конечно.*

6. Поведение траекторий, близких к орбитно-устойчивым траекториям. Как и раньше, предложения, относящиеся к полутраекториям, мы будем формулировать только для положительной полутраектории.

Лемма 8. *Пусть L^+ — неособая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия O. Вокруг каждой точки этой полутраектории существует такая окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности траектории при $t\to\infty$ стремятся к состоянию равновесия O и являются неособыми траекториями.*

Доказательство. Пусть C — окружность с центром в O, кроме состояния равновесия O не содержащая больше ни одного состояния равновесия, и P — последняя общая точка полутраектории L^+ с этой окружностью. Возьмем точку M_0 на части PO полутраектории L^+ и проведем через точку M_0 дугу без контакта, содержащую точку M_0 внутри.

Так как полутраектория L^+ орбитно-устойчива, то она непродолжаема относительно окружности C, и, следовательно, (см. теорему 38) существует часть AB дуги l, содержащая точку M_0 внутри, такая, что всякая траектория, пересекающая эту часть AB, при возрастании t не выходит из окружности C и стремится к состоянию равновесия O (см. определение XVIII).

Так как число особых траекторий конечно, а траектория L неособая и, следовательно, не является предельной ни для какой траектории, то легко видеть, что на части AB дуги l может существовать только конечное число точек особых траекторий и полутраекторий. Следовательно, существует часть A_1B_1 дуги AB, содержащая точку M_0 внутри и такая, что все ее точки принадлежат неособым траекториям, при $t\to\infty$ стремящимся к состоянию равновесия O. Но в силу леммы 5 § 3 главы 2 вокруг каждой точки полутраектории L^+ существует такая окрестность, что все траектории, проходящие через точки этой окрестности, пересекают часть A_1B_1 дуги l. Следовательно, справедливость утверждения леммы доказана.

Рассмотрим теперь полутраекторию L^+, выделенную из незамкнутой траектории, среди предельных точек которой есть точки, отличные от состояний равновесия.

Пусть K — предельный континуум полутраектории L^+ и P — какая-нибудь точка этого континуума, принадлежащая траектории $L_0\in K$, отличной от состояния равновесия. Проведем через точку P дугу без контакта l, содержащую точку P внутри. Пусть $\{P_i\}$ — лежащая на дуге l последовательность точек траектории L, стремящаяся к P.

Будем, как и выше (§ 15, п. 8), обозначать через C_i простую замкнутую кривую, состоящую из витка P_iP_{i+1} полутраектории L^+ и части P_iP_{i+1} дуги l, через h_{ik} область, граница которой состоит из кривых C_i и C_k (рис. 170), а через γ_i — область (см. лемму 7 § 15), граница которой состоит из кривой C_i и континуума K (рис. 171).

В силу леммы 8 § 15 при всех достаточно больших i либо простая замкнутая кривая C_{i+1} содержится (кроме точки P_i) внутри кривой C_i и все эти кривые содержат континуум K внутри себя, либо кривая C_i содержится (кроме точки P_i) внутри кривой C_{i+1} и континуум K находится вне всех этих кривых. Для определенности предположим, что имеет место первый случай.

Лемма 9. *При всех достаточно больших j и k и $j>k$ всякая траектория, проходящая через точки области h_{jk} и при возрастании, и при*

убывании t, выходит из этой области, причем при возрастании t она выходит из нее, пересекая кривую C_j на части P_jP_{j+1} дуги l, а при убывании t, пересекая кривую C_k на части P_kP_{k+1} дуги l.

Доказательство. Так как особых элементов — конечное число, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в $U_{\varepsilon_0}(K)$ кроме особых траекторий, входящих в состав континуума K, не лежит уже больше целиком ни одна особая траектория.

В силу леммы 7 § 15, начиная с некоторого достаточно большого i ($i > I$), все кривые C_i и области γ_i, а значит, и области h_{jk} ($j > k > I$) целиком лежат в $U_{\varepsilon_0}(K)$. Отсюда следует, что в области h_{jk} не лежит целиком ни одна особая траектория. Действительно, континуум K лежит внутри всех кривых C_i ($i > I$), а в окрестности $U_{\varepsilon_0}(K)$, в которой лежит область h_{jk}, кроме траекторий, входящих в состав континуума K, не лежит больше целиком ни одной особой траектории. Граница области h_{jk} также не является целой особой траекторией. А тогда всякая траектория L', проходящая через точки области h_{jk}, и при возрастании и при убывании t непременно должна выйти из этой области; в противном случае внутри h_{jk} должна была бы лежать целиком особая траектория, предельная для L', что в силу предыдущего невозможно. Но выйти из области h_{jk} всякая траектория L' может, только пересекая кривые C_j и C_k соответственно на частях P_jP_{j+1} и P_kP_{k+1} дуги l. Так как кривая C_j лежит внутри C_k ($j > k$), а континуум K лежит внутри кривой C_j, то, очевидно, всякая траектория L', выходя из области h_{jk}, при возрастании t пересекает часть P_jP_{j+1} дуги l, а выходя — при убывании t—пересекает часть P_kP_{k+1} дуги l. Таким образом, лемма доказана.

Следствие 1. Всякая траектория, пересекающая при $t = t_0$ часть P_iP_{i+1} дуги l, при некотором значении $t > t_0$ пересекает часть $P_{i+1}P_{i+2}$ этой дуги.

Следствие 2. Существует такая часть PA дуги без контакта l, содержащая все точки P_i с достаточно большими номерами i ($i > I$), что всякая траектория L', при $t = t_0$ пересекающая эту часть дуги l в отличной от P точке, при некотором значении $t = t_0$ пересекает ее еще раз.

Следствие 3. Всякая траектория, пересекающая часть P_iP_{i+1} дуги l с достаточно большим i ($i > I$), имеет точку P в качестве своей ω-предельной точки.

Следствие 4. Всякая траектория, проходящая через точку области γ_i, при убывании t выходит из нее, пересекая часть P_iP_{i+1} дуги l.

Лемма 10. *Если i достаточно велико, то все траектории, проходящие через точки области γ_i, имеют континуум K своим ω-предельным континуумом.*

Доказательство. Пусть, как и в предыдущей лемме, $\varepsilon_0 > 0$ таково, что в ε_0-окрестности континуума K не лежит целиком ни одна особая траектория, кроме траекторий, входящих в K. Пусть i_0 настолько велико, что область γ_{i_0} целиком лежит в $U_{\varepsilon_0}(K)$. Всякая траектория, проходящая через точки области γ_{i_0}, очевидно, не может выйти при возрастании t из γ_{i_0} (через часть $P_{i_0}P_{i_0+1}$ дуги без контакта l все траектории входят в эту область). Так как в области γ_{i_0} и на ее границе кроме траекторий, входящих в состав континуума K, не лежит целиком больше ни одна особая траектория, то все ω-предельные точки всякой траектории, проходящей через точки γ_{i_0}, могут быть только точками континуума K.

Докажем теперь, что *все* точки континуума K являются ω-предельными для всякой такой траектории.

Пусть L_0 — входящая в K траектория (отличная от состояния равновесия), на которой взята точка P (конец дуги l). Пусть, кроме того, $L_1, L_2, \ldots, L_r$ — все не являющиеся состояниями равновесия и отличные от L_0 траектории, входящие в состав континуума K (в силу предположения о конечном числе особых траекторий, этих траекторий — конечное число). Возьмем на каждой траектории L_m ($m = 1, 2, \ldots, r$) по точке P^m и проведем через каждую точку P^m дугу без контакта l_m, причем так, чтобы дуги l_m не имели друг с другом общих точек. На каждой дуге l_m будет лежать последовательность точек рассматриваемой полутраектории $L^+ — \{P_j^m\}$, стремящихся к точке P^m (и соответствующих неограниченно

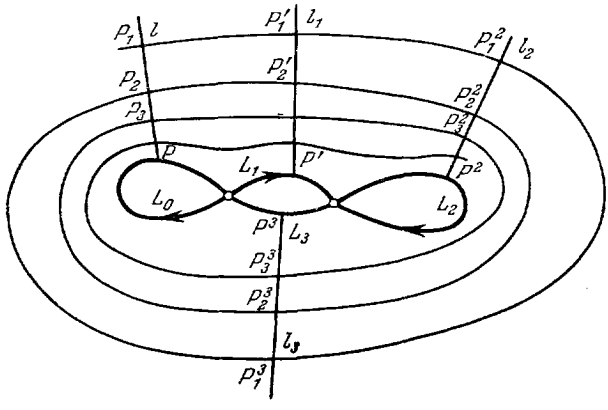


Рис. 175.

возрастающим значениям t). Будем обозначать через C_j^m простую замкнутую кривую, состоящую из витка $P_j^m P_{j+1}^m$ полутраектории L^+ и части $P_j^m P_{j+1}^m$ дуги l_m (рис. 175 дается в случае $r = 3$).

При всяком фиксированном m ($m = 1, 2, \ldots, r$) последовательность кривых $\{C_j^m\}$, очевидно, полностью аналогична последовательности кривых $\{C_i\}$.

Будем для единообразия обозначать через l_0 дугу l, через P_i^0 — точки, дуги, которые мы выше обозначали через P_i, и через $\{C_i^0\}$ простые замкнутые кривые, которые мы обозначали через $\{C_i\}$. Для всех кривых $\{C_j^m\}$, $m = 1, 2, \ldots, r$, справедливы леммы 8 и 9 § 15. Континуум K лежит внутри всех кривых $\{C_j^m\}$, $m = 1, 2, \ldots, r$ (начиная с достаточно большого j). Действительно, при достаточно больших значениях t точки полутраектории L^+ лежат внутри кривой C_i^0 ($i > i_0$), и, следовательно, при любом $i > i_0$ существует такое j, что виток $P_j^m P_{j+1}^m$ полутраектории L^+, а значит, и кривая C_j^m лежат внутри C_i^0.

Очевидно, и, наоборот, при всяком данном $m \neq 0$ и выбранном j всегда можно указать такое достаточно большое i, чтобы кривая C_i^0 лежала внутри C_j^m. Таким образом, континуум K лежит внутри всех кривых C_j^m, начиная с некоторого j, при любом $m = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Пусть теперь $i_1 > i$ (при заданном i) таково, что кривая C_{i_1}' лежит внутри C_i^0, $i_2 > i_1$ таково, что кривая $C_{i_2}^2$ лежит внутри C_{i_1}' и т. д. (в силу предыдущего такие целые числа $i_1, i_2, \ldots, i_r$, очевидно, всегда можно выбрать). Мы получим, таким образом, лежащие одна внутри другой

и внутри области γ_i простые замкнутые кривые C_i^0, $C_{i_1}^1$, $C_{i_2}^2$, . . ., $C_{i_r}^r$ (рис. 176). Континуум K лежит внутри всех этих простых замкнутых кривых. Всякая точка области γ_i, не лежащая на этих замкнутых кривых, лежит либо внутри C_{i_r}, т. е. в области, аналогичной γ_i, которую мы обозначим через γ_{i_r}, либо в области между двумя из этих замкнутых кривых (рис. 176). Кроме траекторий, входящих в состав континуума K, в рассматриваемой ε_0-окрестности K не лежит целиком больше ни одной особой траектории. А так как континуум K лежит внутри (вне) всех кривых $C_{i_k}^k$ ($k = 0, 1, \ldots, r$), то всякая траектория, проходящая через точку области между любыми двумя простыми замкнутыми кривыми $C_{i_k}^k$ и $C_{i_{k+1}}^{k+1}$, должна и при возрастании и при убывании t выйти из этой

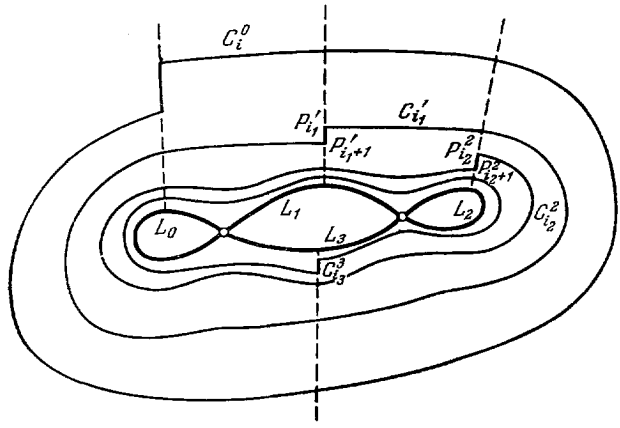


Рис. 176.

области и, следовательно (см. лемму 9, следствие 4), пересечь как часть $P_{i_k}^k P_{i_k+1}^k$ дуги l_k, так и часть $P_{i_{k+1}}^{k+1} P_{i_{k+1}+1}^{k+1}$ этой дуги. Всякая же траектория, проходящая через точку области γ_{ir}, должна пересечь часть $P_{i_r}^r P_{i_r+1}^r$ дуги l_r. Отсюда следует, что *всякая* траектория, проходящая через какую-нибудь точку области γ_i, пересекает некоторую часть $P_j^k P_{j+1}^k$ каждой дуги l_k.

В силу следствия 3 леммы 9 она имеет тогда каждую точку P^k ($k = 0, 1, \ldots, r$) своей предельной точкой и, следовательно, каждую траекторию L_k своей предельной траекторией. Но она будет иметь своей предельной точкой также всякое состояние равновесия, входящее в состав континуума K, так как всякое такое состояние равновесия является предельным для одной из траекторий L_k. Но это означает, что все точки K являются предельными для всякой траектории, проходящей через точки γ_i. Лемма доказана.

Лемма 11. *Вокруг каждой точки незамкнутой неособой полутраектории L^+, имеющей среди своих предельных точек отличные от состояний равновесия, можно указать такую окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности траектории или полутраектории не замкнуты, являются неособыми траекториями или полутраекториями и имеют те же ω-предельные точки, что и L^+.*

Доказательство. Пусть M — какая-нибудь точка полутраектории L^+. В силу леммы 7 § 3 существует окрестность точки M такая, что все траектории, проходящие через точки этой окрестности, не замкнуты. Далее, так как неособые траектории и полутраектории заполняют области, то существует окрестность точки M такая, что все проходящие через нее траектории или полутраектории являются неособыми.

Покажем теперь, что ω-предельные точки всех траекторий или полутраекторий, проходящих через достаточно малую окрестность точки M, совпадают с предельными точками L^+.

Пусть K — предельный континуум полутраектории L^+, P — отличная от состояния равновесия точка континуума K и l — дуга без контакта, проведенная через точку P. Полутраектория L^+ пересекает дугу l в бесчисленном множестве точек $\{P_i\}$.

Пусть замкнутые кривые C_i и области γ_i имеют тот же смысл, что и в предыдущих леммах, а i настолько велико, что все траектории, проходящие через точки области γ_i имеют континуум K своим ω-предельным континуумом (см. лемму 10). Пусть M^* — какая-нибудь точка полутраектории L^+, лежащая внутри γ_i. Тогда достаточно малая окрестность $U_\delta(M^*)$ точки M^* также принадлежит области γ_i, и, следовательно, всякая траектория, проходящая через точку окрестности $U_\delta(M^*)$, имеет K своим ω-предельным континуумом. В силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений, то же справедливо и для траекторий, проходящих через точки достаточно малой окрестности точки M.

Лемма 12. *Вокруг каждой точки неособой замкнутой траектории существует такая окрестность, что все пересекающие эту окрестность траектории являются неособыми и замкнутыми траекториями.*

Доказательство. Пусть L — рассматриваемая неособая замкнутая траектория. В силу того, что особых элементов — конечное число, все точки траектории L являются точками некоторой ячейки. Нетрудно видеть, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(L)$ также принадлежит этой ячейке, т. е. все траектории, проходящие через точки $U_\varepsilon(L)$, являются неособыми траекториями.

Пусть P — какая-нибудь точка траектории L. Пусть $\varepsilon' < \varepsilon$, а $\delta > 0$ настолько мало, что все траектории, пересекающие $U_\delta(P)$, не выходят из $U_{\varepsilon'}(L)$. Такое δ заведомо существует в силу орбитной устойчивости траектории L. Предположим, что окрестность $U_\delta(P)$ пересекают незамкнутые траектории. Так как они по условию не выходят из $U_{\varepsilon'}(L)$, то их предельные точки целиком лежат в $U_{\varepsilon'}(L)$ или на границе $U_{\varepsilon'}(L)$ — т. е. в $U_\varepsilon(L)$. Но множество предельных точек незамкнутой траектории состоит из особых траекторий. Следовательно, в $U_\varepsilon(L)$ лежит целиком по крайней мере одна особая траектория, что противоречит выбору ε.

Таким образом, все проходящие через точки этой δ-окрестности траектории замкнуты. В силу леммы 14 § 3 при достаточно малом δ все эти траектории лежат одна внутри другой. Лемма доказана.

Замечание. Если через сколь угодно малую окрестность замкнутой траектории L_0 проходят замкнутые траектории, то в рассматриваемом случае конечного числа особых элементов эта замкнутая траектория L_0 заведомо является неособой, т. е. *все* траектории, проходящие через достаточно малую ее окрестность, замкнуты.

Теорема 44. *Все траектории, проходящие через некоторую достаточно малую окрестность орбитно-устойчивого состояния равновесия O, являются неособыми замкнутыми траекториями (содержащими одна другую и содержащими O внутри).*

Доказательство. Если состояние равновесия O орбитно-устойчиво, то, очевидно, к нему не может стремиться ни одна траектория. Следовательно, в любой сколь угодно малой окрестности его лежат замкнутые траектории, содержащие это состояние равновесия O внутри. Так как особых элементов — конечное число, то всегда существует окрестность точки O, в которой не лежит ни одной особой траектории. А тогда (см. замечание к лемме 12) все лежащие в этой окрестности траектории являются неособыми замкнутыми траекториями, что и доказывает лемму.

Состояние равновесия в этом случае называется *центром*.

Приведем еще одну лемму, касающуюся неособых целых дуг, т. е. дуг траекторий, концы которых лежат на граничных дугах без контакта, причем не являются угловыми точками границы, а все отличные от концов точки принадлежат области $\bar{G}^*$ (см. § 16, п. 1), и неособых полутраекторий, концы которых лежат на граничной дуге (или цикле) без контакта. Справедливость этой леммы непосредственно следует из леммы 5 § 3.

Лемма 13. а) *Вокруг каждой точки неособой целой дуги траектории* Λ, *отличной от концов этой дуги, существует окрестность, через все точки которой проходят неособые целые дуги траекторий, пересекающие те же граничные дуги без контакта, что и дуга* Λ. б) *Вокруг каждой точки неособой полутраектории* L^+, *конец которой лежит на граничной дуге (или цикле) без контакта, существует окрестность, через которую проходят неособые положительные полутраектории, концы которых лежат на той же дуге (или цикле) без контакта, что и конец полутраектории* L^+. (Такое же утверждение справедливо и для отрицательной полутраектории.)

Замечание. Если среди неособых элементов данной ячейки есть неособые целые дуги траекторий или неособые полутраектории (концы которых лежат на граничной дуге без контакта), то, очевидно, в границу этой ячейки непременно входит *часть* этой граничной дуги, и среди точек этой части нет точек, принадлежащих другим особым элементам (т. е. граничным дугам траекторий или особым полутраекториям).

Очевидно также и обратное: если среди граничных точек ячейки есть точки граничных дуг без контакта, не принадлежащие другим особым элементам (т. е. граничным дугам траекторий или особым полутраекториям), то среди неособых элементов этой ячейки непременно должны быть либо неособые целые дуги траекторий, либо неособые полутраектории, концы которых лежат на граничной дуге без контакта *).

7. Некоторые предложения о незамкнутых орбитно-устойчивых траекториях.

Лемма 14. *Если через какую-нибудь точку* P *незамкнутой неособой траектории проведена дуга без контакта* l, *содержащая точку* P *внутри, то всегда можно выделить такую часть* l' *дуги* l, *также содержащую точку* P *внутри, что все траектории, пересекающие* l', *имеют с* l' *только одну общую точку.*

Доказательство. Мы можем предполагать в силу леммы 3 § 3, что у дуги l кроме точки P больше нет уже общих точек с траекторией L. В силу замечания к лемме 3 § 3 существует $\tau > 0$ такое, что у всех траекторий, при $t = t_0$ пересекающих дугу без контакта l (в частности,

*) Может случиться, что концы граничных дуг без контакта (т. е. угловые точки) входят в границу ячейки, но ни одна отличная от конца точка граничной дуги без контакта не входит в границу ячейки.

траектория L пересекает дугу l в точке P) при отличных от t_0 значениях t, удовлетворяющих неравенству

$$|t-t_0| \leqslant \tau,$$

больше уже нет общих точек с дугой l. Обозначим через P_1 точку траектории L, соответствующую значению $t_1 = t_0 - \tau$, и через P_2 — точку L, соответствующую значению $t_2 = t_0 + \tau$ (рис. 177).

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — столь малое положительное число, что окрестности $U_{\varepsilon_0}(L^-_{P_1})$ и $U_{\varepsilon_0}(L^+_{P_2})$ не имеют общих точек с окрестностью $U_{\varepsilon_0}(P)$ (друг с другом окрестности $U_{\varepsilon_0}(L^-_{P_1})$ и $U_{\varepsilon_0}(L^+_{P_2})$ могут иметь общие точки). Такое ε_0 существует в силу того, что траектория L не замкнута, и поэтому P

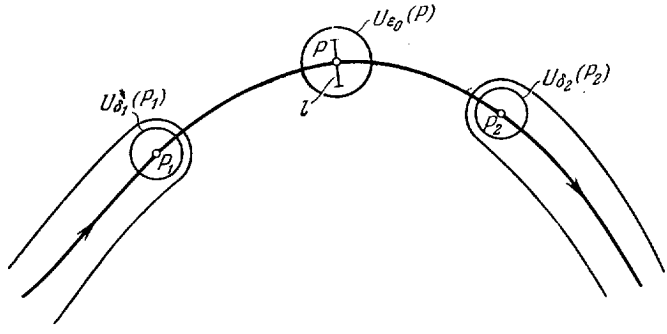


Рис. 177.

не может быть ее предельной точкой. В силу орбитной устойчивости траектории L существует $\delta_1 > 0$ такое, что все проходящие через точки δ_1-окрестности точки P_1 траектории при убывании t не выходят из ε_0-окрестности $L^-_{P_1}$, а также $\delta_2 > 0$ такое, что все проходящие через точки δ_2-окрестности точки P_2 траектории при возрастании t не выходят из ε_0-окрестности $L^+_{P_2}$. Пусть часть l' дуги l с серединой в точке P настолько мала, что она целиком лежит в $U_{\varepsilon_0}(P)$ и что все пересекающие ее при $t = t_0$ траектории при $t = t_1$ проходят через точки δ_1-окрестности точки P_1, а при $t = t_2$ — через точки δ_2-окрестности точки P_2. В силу выбора τ, ε_0, δ_1 и δ_2 дуга l', очевидно, удовлетворяет требованиям леммы, и лемма доказана.

Пусть по-прежнему L — незамкнутая неособая (орбитно-устойчивая) траектория и P — точка на ней.

Лемма 15. *При всяком $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если L' — произвольная траектория, пересекающая окрестность $U_\delta(P)$, то существует область H, граница которой состоит из траекторий L и L' и α- и ω-предельных точек траектории L, причем эта область целиком содержится в окрестности $U_\varepsilon(L)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ таково, что $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и что в окрестности $U_{\varepsilon_1}(L)$ и ее замыкании $\overline{U}_{\varepsilon_1}(L)$ не лежит целиком ни одна особая траектория, кроме траекторий α- и ω-предельных для траектории L.

Пусть l_0 — дуга без контакта, содержащая точку P внутри, и такая, что: а) все пересекающие ее траектории имеют с ней только одну общую точку; б) все пересекающие ее траектории не выходят из $U_{\varepsilon_1}(L)$. Такая дуга l_0 существует в силу предыдущей леммы и в силу того, что траектория L является неособой, т. е. орбитно-устойчивой траекторией.

Пусть $\delta > 0$ — число, удовлетворяющее тому требованию, что все траектории, проходящие через точки окрестности $U_\delta(P)$:

1) не выходя из $U_{\varepsilon_1}(P)$, пересекают дугу l_0; 2) не замкнуты; 3) орбитно-устойчивы; 4) имеют те же α- и ω-предельные точки, что и траектория L.

Существование такого числа δ вытекает из леммы 3 § 3 и лемм 8 и 11.

Пусть L' — отличная от L траектория, проходящая через какую-нибудь точку взятой δ-окрестности точки P, и P' — ее точка пересечения с дугой l_0. Рассмотрим множество точек, принадлежащих траекториям, проходящим через внутренние точки части PP' дуги l_0. Обозначим это множество через H. В силу выбора дуги l_0 и величины δ множество H целиком содержится в ε_1-окрестности траектории L.

Множество точек H есть область.

Действительно, пусть точка $M \in H$, т. е. принадлежит траектории, пересекающей дугу PP' в некоторой точке Q, отличной от концов P и P'. Тогда через все точки некоторой достаточно малой окрестности точки M

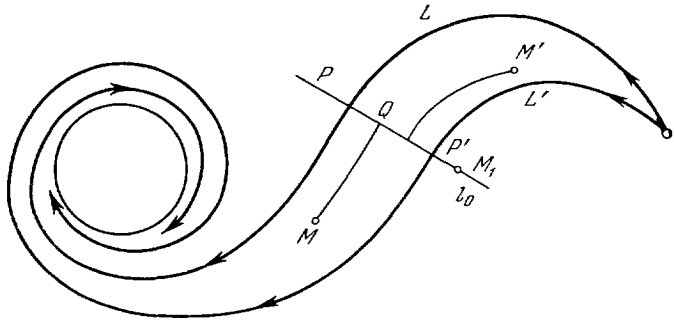


Рис. 178.

(см. лемму 5 § 3) проходят траектории, пересекающие дугу PP' сколь угодно близко к точке Q и, следовательно, в точках, отличных от концов P и P'. А это означает, что все точки некоторой достаточно малой окрестности точки M принадлежат H, т. е. все точки множества H внутренние. Кроме того, очевидно, что всякие две принадлежащие H точки могут быть соединены простой дугой (например, дугой, состоящей из дуг траекторий и части дуги PP') (рис. 178).

Точки дуги l_0, не лежащие на части PP' этой дуги, не принадлежат области H. Действительно, предположим, что существует точка M_1 дуги l_0, не лежащая на части PP' дуги l_0 и в то же время принадлежащая области H. Тогда по определению области H, проходящая через точку M_1 траектория L_1 проходит через некоторую точку Q_1, принадлежащую дуге l_0 и лежащую между точками P и P', т. е. отличную от точки M_1.

Таким образом, траектория L_1 имеет по крайней мере две общие точки с дугой l_0, что противоречит условию а), наложенному на эту дугу. Отсюда следует, что точки P и P' являются граничными для области H, а значит (в силу леммы 2), и все точки траекторий L и L' являются граничными для области H. Но тогда граничными для области H являются, очевидно, также и α- и ω-предельные точки траектории L', совпадающие в силу выбора ε_1 и условия б) соответственно с α- и ω-предельными точками траектории L'.

Покажем, что граница области H состоит только из точек траекторий L, L' и их α- и ω-предельных точек. Для доказательства предположим противное, т. е. предположим, что существует граничная для H точка R,

отличная от точек L, L' и их α- и ω-предельных точек. Тогда все точки траектории L_R, проходящей через точку R, также будут граничными для области H (см. лемму 2). Траектория L_R должна находиться на ненулевом расстоянии от части PP' дуги l_0. В самом деле, расстояние траектории L_R до части PP' дуги l_0 может быть равным нулю лишь в двух случаях: когда траектория L_R является одной из траекторий, пересекающих часть PP' дуги l_0, и в случае, когда траектория L_R имеет в качестве своей предельной одну из траекторий, пересекающих часть PP' дуги l_0. Ни тот ни другой случай невозможен в силу предположений, сделанных относительно точки R, и в силу того, что все траектории, пересекающие дугу l_0, орбитно-устойчивы.

Таким образом, траектория L_R находится на не равном нулю расстоянии, например d, от дуги PP'. Но тогда траектория L_R должна быть орбитно-неустойчивой. Действительно, так как точки траектории L_R являются граничными для области H, то через сколь угодно малую окрестность любой точки траектории L_R проходят траектории, пересекающие дугу PP'. Следовательно, при некотором надлежащим образом подобранном числе $\sigma > 0$ (например, при $\sigma < 1/3\ d$) они выходят из σ-окрестности траектории L_R, что и означает, что L_R орбитно-неустойчива. Но область H, а следовательно, и траектория L_R лежат целиком в $U_{\varepsilon_1}(L)$, а по самому выбору числа ε_1 в $U_{\varepsilon_1}(L)$ не лежит целиком ни одна орбитно-неустойчивая траектория, кроме траекторий α- и ω-предельных для L. Мы приходим к противоречию, и, следовательно, у области H кроме L, L' и их α- и ω-предельных точек больше нет никаких других граничных точек. Таким образом, область H удовлетворяет всем требованиям леммы, и лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Область, граница которой состоит из траекторий L, L' и их ω- и α-предельных точек, вообще говоря, может быть не единственной *).

Т е о р е м а 45. *Все предельные точки особой траектории L_0 (полутраектории L_0^+), отличные от состояний равновесия, являются предельными точками также и для неособых траекторий всякой ячейки, в границу которой входит эта траектория L_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P — отличная от состояния равновесия точка, являющаяся предельной для особой траектории L_0, и пусть l — дуга без контакта, проведенная через точку P. На дуге l лежит стремящаяся к точке P последовательность точек траектории L_0. Но тогда на этой дуге сколь угодно близко к точке P лежат такие точки всякой ячейки, для которой траектория L_0 является граничной. На основании следствия 3 из леммы 9 отсюда следует, что точка P является предельной и для неособых траекторий этой ячейки. Теорема доказана.

8. Возможный характер неособых элементов внутри одной и той же ячейки. Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 46. *Если внутри какой-нибудь ячейки существует неособый элемент, являющийся целой траекторией (или полутраекторией, пересекающей граничную дугу без контакта, или дугой траектории, концы которой лежат на граничных дугах или циклах без контакта), то все неособые элементы этой ячейки также являются целыми траекториями (или соответственно полутраекториями, пересекающими граничную дугу*

*) Если эта область содержится в ε-окрестности L, то при достаточно малом ε такая область единственная.

без контакта, или дугами, концы которых лежат на граничных дугах или циклах без контакта).

Доказательство. Предположим противное, т. е. что внутри какой-нибудь ячейки, содержащей целую (неособую) траекторию L, существует неособый элемент другого характера, например, неособая полутраектория L'^{+}, пересекающая граничную дугу без контакта. Соединим какую-нибудь точку A траектории L и какую-нибудь точку B полутраектории L'^{+} простой дугой λ, целиком лежащей внутри рассматриваемой ячейки. На дуге λ существуют точки двух типов: через точки первого типа проходят целые неособые траектории, через точки второго типа целые траектории не проходят и, следовательно, проходят неособые полутраектории, пересекающие граничную дугу без контакта (или дуги траектории, пересекающие граничную дугу).

В силу лемм 8, 11, 12 точками первого типа заведомо являются все достаточно близкие к точке A точки дуги λ, а точками второго типа — все достаточно близкие к точке B точки дуги λ. Двигаясь по дуге λ от точки A к точке B, мы переходим от точек первого типа к точкам второго типа. Следовательно, на дуге λ должна существовать некоторая точка C, являющаяся либо последней точкой первого типа, либо первой точкой второго типа. Но *последней* точки первого типа (т. е. *последней* точки, через которую проходит неособая целая траектория) в силу лемм 8, 11 и 12 существовать не может. Следовательно, точка C является первой точкой второго типа. Через эту точку проходит неособый элемент, не являющийся целой траекторией, т. е. либо полутраектория, пересекающая граничную дугу без контакта, либо дуга траектории, концы которой лежат на граничных дугах без контакта. Но в обоих этих случаях в силу леммы 13 точка C не может быть на дуге λ первой точкой второго типа. Следовательно, все неособые элементы рассматриваемой ячейки являются целыми траекториями. Совершенно такое же рассуждение справедливо также в случае, когда в данной ячейке существует полутраектория или дуга траектории, пересекающая граничную дугу без контакта. Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы и замечания к лемме 13 вытекает, что среди граничных точек ячейки, заполненной целыми траекториями, заведомо не могут быть точки граничных дуг без контакта, не являющиеся угловыми точками.

9. Ячейки, заполненные замкнутыми траекториями. Приведем сначала предложения, касающиеся ячеек, заполненных замкнутыми траекториями. Первое из этих предложений доказывается рассуждением, полностью аналогичным проведенному при доказательстве предыдущей теоремы, и поэтому мы его опускаем.

Теорема 47. *Если внутри какой-нибудь ячейки существует хоть одна замкнутая траектория, то и все траектории этой ячейки замкнуты.*

Теорема 48. *Внутри одной и той же ячейки не может существовать двух замкнутых траекторий, не лежащих одна внутри другой.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть L и L' — две замкнутые траектории, расположенные внутри одной и той же ячейки и не лежащие одна внутри другой. Пусть AB — простая дуга, соединяющая точку A на L с точкой B на L' и лежащая целиком кроме точек A и B внутри рассматриваемой ячейки и вне кривых L и L'. Такая дуга всегда существует.

Действительно, соединим какую-либо точку A' на L с точкой B' на L' простой дугой λ, целиком лежащей в рассматриваемой ячейке. Пусть A — последняя при движении от A' к B' общая точка дуги λ с траекторией L, а B — первая после точки A общая точка дуги λ с траекторией L'. Тогда часть AB дуги λ удовлетворяет поставленным требованиям (рис. 179).

Разобьем внутренние точки дуги AB на два типа. Именно, к первому типу отнесем те точки, через которые проходят замкнутые траектории, содержащие внутри себя траекторию L и не содержащие внутри траектории L'. Такими точками являются, например, все точки, достаточно близкие к точке A (см. лемму 14 § 3). Ко второму типу отнесем все остальные внутренние точки дуги AB. Точки второго типа заведомо существуют, именно, в силу леммы 14 § 3 такими точками являются все достаточно близкие к B точки дуги AB. Очевидно, на дуге AB должна быть точка C, в любой окрестности которой лежат как точки первого типа, так и точки второго типа. Пользуясь той же леммой 14 § 3, легко показать (рассуждением, полностью аналогичным проведенному в теореме 46), что такой точки C существовать не может. Таким образом, мы приходим к противоречию и теорема доказана.

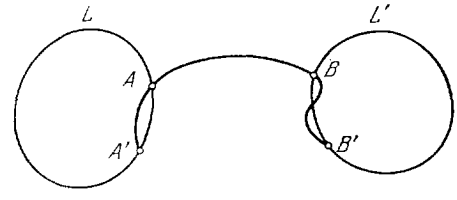


Рис. 179.

Т е о р е м а 49. *Все точки, лежащие между двумя замкнутыми траекториями одной ячейки, принадлежат этой ячейке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. предположим, что между двумя траекториями L и L', принадлежащими одной и той же ячейке, лежат точки, не принадлежащие этой ячейке, и, следовательно, хотя бы одна точка, принадлежащая особым элементам. Пусть M — эта точка, и пусть для определенности траектория L содержит траекторию L' внутри, так что точка M лежит внутри L и вне L'.

Проведем простую дугу, целиком лежащую в рассматриваемой ячейке, целиком (кроме концов) лежащую вне L' и внутри L, соединяющую точку A на L с точкой B на L'. В силу леммы 14 § 3 все траектории, проходящие через точки дуги AB, достаточно близкие к B, не будут содержать внутри точку M, а все траектории, проходящие через точки, достаточно близкие к B, будут содержать точку M внутри.

Проводя, далее, рассуждение, совершенно аналогичное проведенному в теоремах 46 и 48, мы придем к противоречию. Теорема доказана.

Л е м м а 16. *В ячейке, заполненной замкнутыми траекториями, всегда можно указать последовательность траекторий $\{L_i\}$, в которой каждая последующая траектория L_i содержит предыдущую L_{i-1}, и последовательность траекторий $\{L'_j\}$, в которой каждая последующая траектория L'_j содержится внутри предыдущей L'_{j-1}, такие что: какую бы траекторию L^* данной ячейки мы ни взяли, всегда существует траектория L_i последовательности $\{L_i\}$, внутри которой лежит эта траектория, и всегда существует траектория L'_j последовательности $\{L'_j\}$, вне которой она лежит.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — какая-нибудь траектория рассматриваемой ячейки (очевидно, замкнутая). Вне и внутри такой траектории заведомо существуют точки особых траекторий. Действительно, внутри такой траектории заведомо лежит хотя бы одно состояние

равновесия (см. теорму 16 § 4), а вне нее заведомо лежат точки границы области G^*, в которой рассматривается динамическая система *).

Пусть P_1 и P_2 — точки, принадлежащие особым траекториям, из которых одна P_1 лежит вне, а другая P_2 внутри замкнутой траектории L_1, и l — простая дуга, соединяющая точки P_1 и P_2. Дуга l заведомо имеет общую точку с траекторией L. Пусть N — такая точка, и пусть первой граничной точкой рассматриваемой ячейки при движении по дуге l от точки N к P_1 является точка R_1, а при движении по дуге l от точки N к P_2 — точка R_2 (в частности, точка R_1 может совпадать с точкой P_1, R_2 — с P_2). Таким образом, все отличные от концов точки дуги R_1R_2 принадлежат ячейке.

Возьмем на этой дуге какую-нибудь последовательность $\{M_n\}$ точек, стремящихся к точке R_1. Покажем, что из всякой такой последовательности всегда можно выделить подпоследовательность $\{M_{k_i}\}$ ($k_1 < k_2 < k_3, \ldots$), обладающую тем свойством, что при $k_i > k_j$ траектория L_i, проходящая через точку M_{k_i}, содержит внутри себя траекторию L_j, проходящую через точку M_{k_j}.

Действительно, предположим, что из последовательности $\{M_n\}$ выделено n точек M_{k_1}, M_{k_2}, $\ldots$, M_{k_n}, обладающих указанным свойством, и покажем, что всегда можно выделить $n+1$-ю точку $M_{k_{n+1}}$. Для этого рассмотрим траекторию L_n, проходящую через точку M_{k_n}. Точка R_1, являющаяся точкой границы ячейки и лежащая вне траектории L этой ячейки, очевидно, лежит также и вне L_n. А тогда вне L_n лежат и все точки последовательности $\{M_n\}$ стремящейся к точке R_1, начиная с достаточно большего номера $k_{n+1} > k_n$.

Траектория L_{n+1}, проходящая через точку $M_{k_{n+1}}$, будет содержать траекторию L_n внутри себя. Таким образом, требуемая последовательность точек $\{M_n\}$ всегда может быть выделена.

Рассмотрим теперь последовательность траекторий, проходящих через точки M_{k_i}. Покажем, что она и является последовательностью $\{L_i\}$, существование которой утверждается в лемме. Для этого покажем, что какую бы траекторию L^* ячейки мы ни взяли, всегда найдется траектория L_i последовательности $\{L_i\}$, содержащая L^* внутри.

Действительно, нетрудно видеть (принимая во внимание теоремы 47, 48, 49), что траектория L^* заведомо должна иметь общую точку с дугой R_1R_2. А тогда в силу такого же рассуждения, как и при построении последовательности $\{L_i\}$, все точки M_{k_i}, начиная с некоторого достаточно большого i ($i > I$), лежат вне L^* и, значит, все траектории L_i при $i > J$ содержат траекторию L^* внутри (см. теорему 48).

Совершенно аналогично доказывается существование последовательности $\{L_i'\}$. Таким образом, лемма доказана.

Рассмотрим одну из тех двух последовательностей замкнутых траекторий одной и той же ячейки g, существование которых доказано в предыдущей лемме, например последовательность $\{L_i\}$. Всякая замкнутая траектория этой ячейки лежит, следовательно, внутри некоторой траектории L_i последовательности $\{L_i\}$ и, следова-

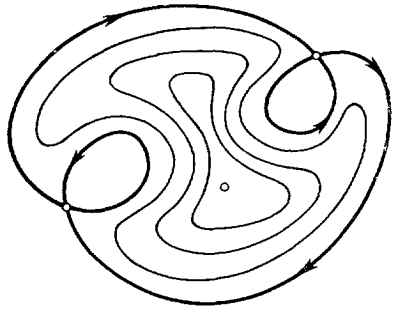
---

*) В случае динамической системы на сфере рассуждение проводится несколько иначе. Именно: замкнутая траектория L делит сферу на две односвязные области. В каждой из этих областей в силу теоремы 16 заведомо должно лежать хотя бы одно состояние равновесия, т. е. точка особой траектории.

тельно, внутри всех траекторий этой последовательности с большими номерами.

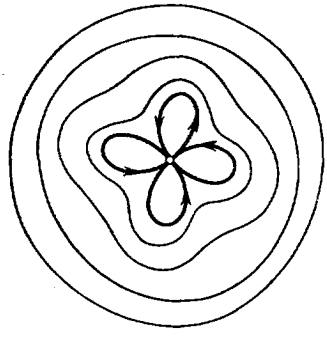
Пусть K — континуум, являющийся топологическим пределом последовательности $\{L_i\}$.

Лемма 17. *Все точки континуума K являются граничными для ячейки g, и кроме точек континуума K не существует никаких других граничных точек ячейки g, лежащих внутри траекторий этой ячейки.*

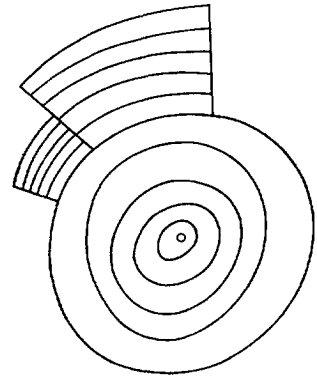


а)

Доказательство. Точки континуума K не принадлежат ячейке g, так как континуум K лежит внутри всех траекторий L_i последовательности $\{L_i\}$ (см. теорему 49) и, следовательно, в силу свойств этой последовательности внутри всех траекторий ячейки g. С другой стороны, так



б)



в)

Рис. 180.

как каждая точка K является точкой сгущения для точек, принадлежащих траекториям L_i, точки континуума K являются граничными для ячейки g. Докажем, что всякая граничная точка N ячейки g, лежащая внутри всех траекторий этой ячейки, принадлежит континууму K.

Возьмем произвольную окрестность точки N — $U_\delta(N)$ и какую-нибудь точку Q этой окрестности, принадлежащую рассматриваемой ячейке. Пусть λ — простая дуга, соединяющая точку N с точкой Q и целиком лежащая в $U_\delta(N)$. Рассмотрим траекторию L^*, проходящую через точку Q. Все траектории L_i с достаточно большими номерами i ($i > J$) лежат внутри траектории L^*. Так как точка N лежит внутри, а точка Q вне всех траекторий L_i с номерами $i > J$, то дуга λ, очевидно, пересекается с каждой из этих траекторий. Следовательно, на дуге λ, т. е. в $U_\delta(N)$, лежат точки всех траекторий L_i с номерами $i > J$. Так как окрестность $U_\delta(N)$ может быть взята сколь угодно малой, то это означает, что точка N принадлежит континууму K. Отсюда и следует справедливость утверждения леммы.

Теорема 50. *Всякая ячейка, заполненная замкнутыми траекториями, двусвязна.*

Доказательство. Так как внутри и вне всякой замкнутой траектории заведомо есть точки, принадлежащие особым элементам, то ячейка, заполненная замкнутыми траекториями, не менее чем двусвязна. Покажем, что она и не более чем двусвязна. Пусть $\{L_i\}$ и $\{L_j\}$ — последовательности траекторий, обладающие теми же свойствами, что и последовательности траекторий, рассмотренные в лемме 16. Пусть K_1 — континуум, являющийся топологическим пределом последовательности $\{L_i\}$, и K_2 — континуум, являющийся топологическим пределом последовательности $\{L_i\}$. В силу предыдущей леммы континуум K_1 состоит из всех граничных точек ячейки g, лежащих внутри, а континуум K_2 из всех граничных точек ячейки g, лежащих вне всех траекторий этой ячейки. В силу леммы 17 других граничных точек ячейка g иметь не может. Теорема доказана.

Принимая во внимание лемму 8, нетрудно видеть, что граница ячейки, заполненной целыми траекториями, либо состоит из целых орбитно-неустойчивых траекторий, целиком лежащих в области $\overline{G}^*$, либо является замкнутой траекторией (орбитно-устойчивой), образующей один из граничных континуумов области $\overline{G}^*$, либо является замкнутой траекторией, состоящей из угловых и граничных дуг (см., например, рис. 180, *а*, *б* и *в*).

При этом имеет место следующая теорема, являющаяся непосредственным следствием того факта, что траектории рассматриваемой ячейки замкнуты, и леммы 11.

Теорема 51. *Все особые траектории, входящие в границу ячейки, заполненной замкнутыми траекториями, могут иметь своими* ω- *и* α-*предельными точками только состояния равновесия.*

10. Ячейки, заполненные незамкнутыми траекториями. Имеет место следующая теорема, доказательство которой, опирающееся на теорему 46 и лемму 11 и полностью аналогичное доказательству теоремы 48 и 49, мы опускаем.

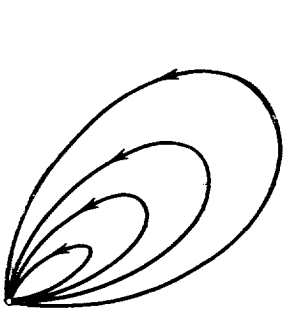


Рис. 181.

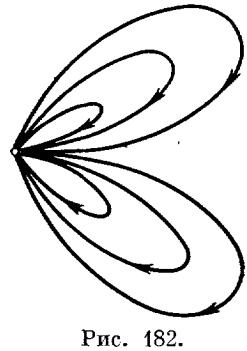


Рис. 182.

Теорема 52. *Если траектории одной и той же ячейки не замкнуты, то они имеют одни и те же* ω- *и одни и те же* α-*предельные точки (которые между собой, конечно, могут быть различны).*

Пусть теперь незамкнутая траектория L при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$ стремится к одному и тому же состоянию равновесия O. В этом случае простую замкнутую кривую, состоящую из траектории L и состояния равновесия O, мы будем называть «*петлей*» и будем говорить, что траектория L «*образует петлю*». Если две петли, имеющие общую точку O, ограничивают области, содержащие одна другую, то мы скажем, что *петли вложены друг в друга* (рис. 181); если они ограничивают области, не содержащие одна другую, то мы скажем, что петли лежат одна вне другой (рис. 182).

Рассмотрим подробнее случай, когда все траектории ячейки образуют петли.

Теорема 53. *Если траектории какой-нибудь ячейки образуют петли, то все эти петли вложены друг в друга.*

Доказательство. Пусть L — какая-нибудь траектория рассматриваемой ячейки и Q — точка на ней. Покажем сначала, что все траектории, проходящие через точки достаточно малой окрестности $U_\delta(Q)$, образуют петли, вложенные друг в друга.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь траекторию L', проходящую через окрестность $U_\delta(Q)$. В силу леммы 15 всегда можно взять $\delta > 0$ таким, чтобы область H, граница которой состоит из траекторий L, L' и их ω- и α-предельных точек, целиком лежала в $U_\varepsilon(L)$, где ε — какая-нибудь заданная величина. В рассматриваемом нами случае область H ограничена двумя простыми замкнутыми кривыми, именно, двумя петлями, образованными траекториями L и L'. Если бы эти петли лежали одна вне другой, то область H была бы неограниченной и не могла бы лежать в окрестности $U_\varepsilon(L)$, что противоречит лемме 15.

Таким образом, все петли, образованные траекториями, проходящими через точки достаточно малой окрестности точки Q, вложены одна в другую. А тогда, повторяя рассуждение, полностью аналогичное приведенному в теореме 48, нетрудно убедиться в том, что все петли, состоящие из траекторий одной и той же ячейки, вложены друг в друга. Теорема доказана.

В силу леммы 2 граница ячейки, заполненной целыми траекториями, состоит из целых траекторий, которые либо являются особыми, либо состоят из особых граничных элементов.

Рассмотрим теперь вопрос о возможной связности ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями. Отметим прежде всего, что в рассматриваемом нами случае конечного числа особых траекторий ячейка заведомо является конечно-связной. Действительно, каждый континуум, граничный для ячейки, состоит из особых элементов. Так как по предположению особых элементов — конечное число, то отсюда, очевидно, следует, что континуумов, граничных для ячейки, может быть лишь конечное число.

Предположим, что рассматриваемая ячейка n-связна, так что граница ее состоит из n континуумов $K_1, \ldots, K_n$ — без общих точек.

Лемма 18. *Если траектории данной ячейки не замкнуты, то на каждом континууме K_i, входящем в состав границы ячейки, лежит хотя бы одна ω- или α-предельная точка траектории ячейки.*

Доказательство. Пусть данная ячейка g n-связна и, следовательно, граница ее состоит из n континуумов $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Тогда существует n простых замкнутых кривых $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, обладающих следующими свойствами (см. дополнение § 4, п. 4):

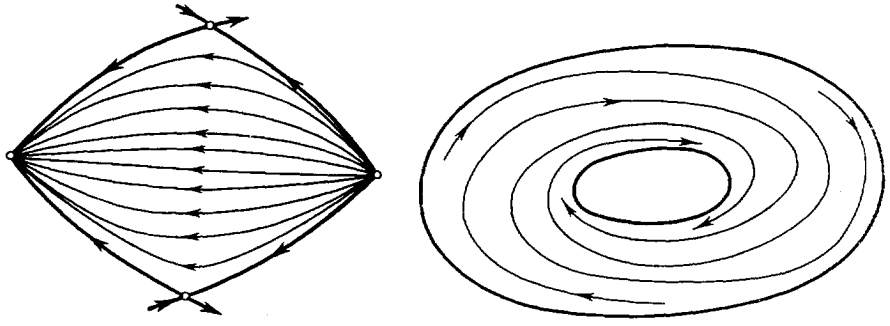
1. Все кривые π_i целиком лежат в g и не имеют общих точек. 2. Кривые $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ лежат одна вне другой и внутри π_n. 3. Вне π_n есть точки границы ячейки g. 4. Внутри каждой кривой π_i ($i = 1, \ldots, n-1$) лежит одна и только одна связная часть границы g.

Рассмотрим какую-нибудь кривую π_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) и лежащую внутри нее связную часть границы K_j. Если K_j состоит только из состояний равновесия, то в силу связности K_j и конечности числа состояний равновесия K_j состоит только из одной точки, эта точка должна быть ω- или α-предельной хотя бы для одной траектории ячейки g. Действительно, в противном случае все траектории в некоторой ее окрестности были бы замкнуты (см. теорему 18 § 4 и теорему 47 § 16), и она, очевидно, не могла бы быть граничной для ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями.

Пусть среди точек континуума K_i есть точки, отличные от состояний равновесия, и пусть P — одна из них. Проведем через P дугу без контакта l, целиком лежащую внутри π_i.

Так как P есть граничная точка ячейки g и так как все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность точки P, пересекают l, то на l найдется последовательность точек ячейки g : $P_1, P_2, \ldots$, стремящихся к точке P.

Если континуум K_i не содержит ни одной ω- или α- предельной точки для траектории ячейки g, то таких точек нет и внутри π_i. Тогда траектория L_j, проходящая при $t = \tau$ через точку P_j, должна в конце концов выйти из внутренней области кривой π_i, как при $t > \tau$, так и при $t < \tau$. При этом траектория L_j не может пересечь l дважды, не выходя



а) *б)*

Рис. 183.

во внешнюю часть кривой π_i, так как в противном случае она либо при $t > \tau$, либо при $t < \tau$ не выходила бы из внутренней области кривой π_i, и, следовательно, имела бы внутри π_i ω- или α-предельную точку, что противоречит предположению.

Пусть Q_j — точка пересечения кривой π_i с траекторией L_j, соответствующая наименьшему значению $t > \tau$. Точки Q_j $(j = 1, 2, \ldots)$ имеют хотя бы одну предельную точку $\bar{Q}$, лежащую на π_i.

Пусть $\bar{L}$ — траектория, проходящая через $\bar{Q}$. Так как по условию на K_i нет ни одной ω- или α-предельной точки траектории ячейки g, то можно указать такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность траектории $\bar{L}$ и ε-окрестность континуума K_i не имеют общих точек. Но через сколь угодно малую окрестность точки $\bar{Q}$ траектории $\bar{L}$ проходят траектории (именно траектории L_j с достаточно большим номером j), попадающие внутрь ε-окрестности континуума K_i и, следовательно, выходящие из ε-окрестности траектории $\bar{L}$. Следовательно, траектория $\bar{L}$ орбитно-неустойчива, чего не может быть, так как траектория $\bar{L}$ лежит целиком в ячейке g. Мы приходим к противоречию.

Совершенно аналогичное рассуждение прилагается и к границе K_n, лежащей вне кривой π_n, и, таким образом, лемма доказана.

Теорема 54. *Ячейка, заполненная незамкнутыми траекториями, не более чем двусвязна.*

Доказательство. Предположим, что ячейка g, заполненная незамкнутыми траекториями, n-связна, где $n > 2$. Тогда в силу предыдущей леммы по крайней мере на двух из континуумов K_i, входящих

в границу этой ячейки, должны лежать ω- или α-предельные точки траектории этой ячейки, одни и те же для всех траекторий этой ячейки. Предположим для определенности, что на двух граничных континуумах лежат ω-предельные точки траекторий ячейки. Обозначим через K_ω ω-предельный континуум траекторий ячейки. Так как все точки континуума K_ω являются граничными для ячейки, то в силу связности он должен целиком принадлежать одному какому-нибудь граничному континууму, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрение простейших примеров показывает, что ячейки, заполненные незамкнутыми траекториями, могут быть как односвязными (рис. 183, *а*), так и двусвязными (рис. 183, *б*).

11. Свойства границы двусвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями.

Лемма 19. *Пусть g — двусвязная ячейка, заполненная незамкнутыми траекториями, и K_1 и K_2 — континуумы, являющиеся граничными континуумами этой ячейки. Тогда*:

а) *если L' какая-нибудь траектория ячейки g, то множество, состоящее из точек этой ячейки, не принадлежащих траектории L', является односвязной областью g', граница которой состоит из точек континуумов K_1 и K_2 и точек траектории L'*;

б) *всякая траектория L'', принадлежащая области g', разделяет эту область на две односвязные области g_1'' и g_2'' и входит в состав границы обеих областей*;

в) *всякая траектория L''', принадлежащая области g_1'' (g_2''), разделяет эту область на две односвязные области и входит в состав границы обеих областей.*

Доказательство. Для доказательства леммы мы построим сначала некоторую вспомогательную двусвязную область g^* ($g^* \subset g$), которая определяется ниже, а затем покажем, что область g', определенная в пункте а), получается из этой области g^* удалением точек некоторой простой дуги, концы которой лежат на граничных континуумах области g^*. Отсюда в силу предложений п. 4 § 3 дополнения будет следовать, что область g' односвязна.

Вспомогательная область g^* строится следующим образом: пусть P_1 и P_2 — точки траектории L', соответствующие при некотором выбранном на L' движении значениям t_1 и t_2 параметра t ($t_2 > t_1$). Обозначим через g^* множество точек области g, не принадлежащих отрицательной полутраектории $L'^-_{P_1}$ и положительной полутраектории $L'^+_{P_2}$. Множество g^* есть, как нетрудно видеть, открытое множество. Покажем, что g^* есть область, именно покажем, что всякие две точки множества g^* могут быть соединены континуумом, состоящим из точек g^*. Для этого заметим прежде всего, что всякие две точки A и B множества g^* могут быть соединены простой дугой s, целиком лежащей в области g. При этом можно считать, без ограничения общности, что дуга s не проходит через точки P_1 и P_2. Если эта простая дуга не имеет общих точек с полутраекториями $L'^-_{P_1}$ и $L'^+_{P_2}$, то она целиком лежит в g^* и представляет из себя указанный континуум. Допустим теперь, что дуга s имеет общие точки хотя бы с одной из полутраекторий $L'^-_{P_1}$ или $L'^+_{P_2}$. Пусть для определенности она имеет общие точки только с полутраекторией $L'^-_{P_1}$. Пусть при движении по дуге s от точки A к точке B первая ее общая точка с полутраекторией $L'^-_{P_1}$ есть точка M, а последняя N. Предположим, что часть MA дуги s лежит

по отрицательную сторону полутраектории $L'_{P_1}^-$, а дуга NB — по положительную ее сторону (рис. 184).

Рассмотрим какую-нибудь точку R дуги P_1P_2 траектории L'. Пусть l' — дуга без контакта с концом в точке M, лежащая по положительную сторону траектории L', l'' — дуга без контакта с концом в точке N, лежащая по отрицательную сторону траектории L', и l — дуга без контакта, проведенная через точку R, содержащая точку R внутри. При этом пусть дуги l' и l'' настолько малы, что кроме точек M и N соответственно они не имеют уже больше общих точек с траекторией L' и не имеют общих точек друг с другом.

Относительно дуги l предположим, что все ее точки кроме точки R принадлежат области g^*, что она не имеет общих точек с дугами l' и l'' и что с траекторией L' она имеет только одну общую точку R.

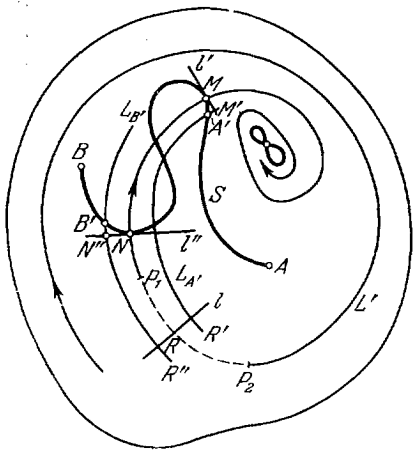


Рис. 184.

В силу леммы 4 и леммы 5 § 3, если точка A' дуги AM достаточно близка к точке M, то траектория $L_{A'}$, проходящая через эту точку, в некоторой точке M' пересекает дугу l'', а затем при убывании t пересекает в некоторой точке R' часть дуги l, лежащую так же, как и дуга l'', по отрицательную сторону траектории L'. Далее, если точка B' дуги NB достаточно близка к точке N, то траектория $L_{B'}$, проходящая через точку B' в некоторой точке N'', пересекает дугу l'', а затем при убывании t пересекает часть дуги l, лежащую по положительную сторону траектории L' в некоторой точке R''. Отметим, что траектории $L_{A'}$ и $L_{B'}$ заведомо отличны от траектории L', так как по самому выбору дуг l' и l'' на них кроме концов M и N нет больше точек траектории L'. Кроме того, по самому выбору дуги l, она не имеет общих точек с полутраекториями $L'_{P_1}^-$ и $L'_{P_2}^+$. Рассмотрим множество точек, состоящее из части AA' дуги s, дуги $A'R'$ траектории $L_{A'}$, части $R'R''$ дуги l, дуги $R''B'$ траектории $L_{B'}$ и части $B'B$ дуги s (рис. 184). Это множество есть континуум, этот континуум состоит из точек области g и не имеет общих точек с полутраекториями L'_{P}^- и $L'_{P_2}^+$, следовательно, все его точки принадлежат области g^*. В случае, когда части MA и NB дуги s лежат по одну сторону от полутраектории $L'_{P_1}^-$, а также в случае, когда дуга s имеет общие точки с полутраекторией $L'_{P_2}^+$ или с обеими полутраекториями $L'_{P_1}^-$ и $L'_{P_2}^+$, существование континуума, соединяющего точки A и B и лежащего целиком в области g^*, доказывается аналогично. Отсюда, очевидно, следует, что множество g^* есть область. Пользуясь теоремой 54, а также самим определением области g^*, нетрудно убедиться, что граничными точками g^* являются точки континуумов K_1 и K_2 и точки полутраекторий $L'_{P_1}^-$ и $L'_{P_2}^+$. Полутраектория $L'_{P_1}^-$ и ее предельные точки, лежащие, предположим, на континууме K_1, образуют континуум *), имеющий общие точки с континуумом K_1. Поэтому множество, состоящее из точек полутраектории $L'_{P_1}^-$ и точек континуума K_1, является континуумом. Обозначим этот конти-

*) Так как замыкание связного множества есть связное множество.

нуум через K_1^*. Точно так же множество, состоящее из точек полутраектории $L_{P_2}^+$ и точек континуума K_2, также является континуумом, который мы обозначим через K_2^*.

Континуумы K_1^* и K_2^* не имеют общих точек, следовательно, граница области g^* состоит из двух континуумов, т. е. g^* есть двусвязная область.

Рассматриваемая в п. а) область g получается из области g^* удалением точек, принадлежащих дуге P_1P_2 траектории L_1. Но эта дуга является простой дугой, соединяющей две точки граничных континуумов K_1^* и K_2^* двусвязной области g^*. А тогда из предложений п. 4 § 3 дополнения следует, что область g' является односвязной областью, что и доказывает утверждение а).

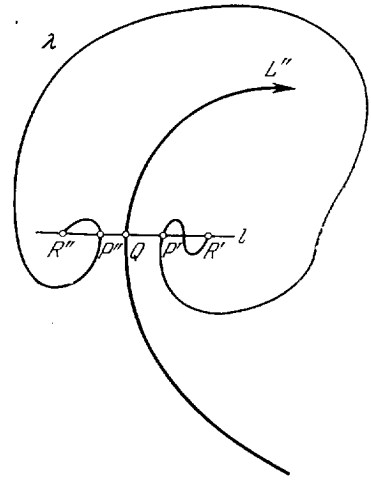


Рис. 185.

Перейдем к доказательству утверждения б). Пусть L'' — какая-нибудь траектория области g, отличная от L', и g'' — множества точек области g', не принадлежащих L''. Нетрудно видеть, что g'' — открытое множество, граничными точками которого являются точки, принадлежащие континуумам K_1 и K_2, и точки траекторий L' и L''.

Покажем, что g'' распадается на две области.

Убедимся сначала, что множество g'' не является связным. Для доказательства предположим противное, именно, предположим, что g'' есть область. Проведем через какую-нибудь точку Q траектории L'' дугу без контакта l, целиком лежащую в области g' и кроме точки Q не имеющую больше общих точек с траекторией L''.

Пусть R' и R'' — две точки дуги l, лежащие по разные стороны траектории L'' (рис. 185). Так как по предположению g'' — область, то точки R' и R'' можно соединить простой дугой λ, целиком лежащей в области g''. Будем двигаться по дуге λ от точки R' к R'', и пусть P' — последняя точка дуги λ, лежащая на части $R'Q$ дуги l, а P'' — первая точка дуги λ, лежащая на части $R''Q$ дуги l. Пусть λ' — часть $P'P''$ дуги λ. Очевидно, λ' является простой дугой, соединяющей точки P' и P'', целиком лежит в области g'' и не имеет с частью $P'P''$ дуги l других общих точек, кроме своих концов. Но тогда простая дуга λ' вместе с частью $P'P''$ дуги l образует простую замкнутую кривую C, целиком лежащую в области g'. Эта замкнутая кривая имеет с траекторией L'' одну только общую точку Q, причем в этой точке траектория L'' в силу того, что точка Q есть точка дуги без контакта $P'P''$, при возрастании t переходит из одной области, определенной кривой C, в другую, например из вне во внутрь кривой C. Но тогда ω-предельные точки траектории L'', принадлежащие континууму K_2, должны лежать внутри кривой C, а α-предельные точки, принадлежащие континууму K_1, вне кривой C. Таким образом, граничные точки области g' лежат как внутри кривой C, так и вне ее. Так как $C \subset g'$, то отсюда следует, что g' — двусвязная область. Но это противоречит утверждению а). Полученное противоречие показывает, что множество g'' не является областью.

Покажем теперь, что множество g'' распадается не более чем на две области.

Рассмотрим дугу без контакта l, проходящую через какую-нибудь точку Q траектории L'', целиком лежащую в области g' и кроме точки Q не имеющую больше общих точек с траекторией L''. Обозначим через l^+ и l^- части дуги l, лежащие соответственно с положительной и отрицательной стороны траектории L'' (рис. 186). Пусть A — произвольная точка области g''. Соединим A простой дугой λ, целиком лежащей в области g', с какой-нибудь точкой M_0 траектории L''. Пусть N — первая точка на дуге AM_0 при движении от точки A к точке M_0, принадлежащая траектории L''.

Проводя рассуждение, аналогичное проведенному при доказательстве двусвязности области g^*, нетрудно видеть, что точку A можно соединить простой дугой, состоящей целиком из точек множества g'', либо с точкой дуги l^+, либо с точкой дуги l^-. Отсюда очевидно, что множество g'' состоит из более чем двух областей. А это и доказывает утверждение б) полностью.

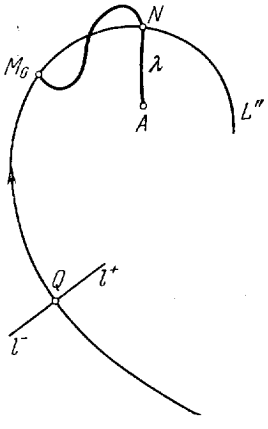


Рис. 186.

Доказательство утверждения в) проводится полностью аналогично доказательству утверждения б), и поэтому мы его опускаем.

Замечание. Если g_1'' и g_2'' — области, на которые траектория L'' разделяет область g', то все отличные от точек траектории L'' граничные точки этих областей являются граничными точками области g'. Аналогично если g_{11}''' и g_{12}''' или g_{21}''' и g_{22}''' — области, на которых траектория L''' разделяет область g_1'' или g_2'', то все отличные от точек траектории L''' граничные точки этих областей являются граничными точками области g_1'' (g_2'').

Теорема 55. *Все точки одного граничного континуума K_1 двусвязной ячейки g, заполненной незамкнутыми траекториями, являются α-предельными для траекторий этой ячейки, а все точки другого граничного континуума K_2 являются ω-предельными для траекторий этой ячейки.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. допустим, что среди точек континуумов K_1 и K_2, являющихся граничными для рассматриваемой двусвязной ячейки g, есть точки, не являющиеся предельными для траекторий ячейки. Пусть L — какая-нибудь траектория рассматриваемой ячейки. В силу предыдущей леммы множество точек g, не принадлежащих траектории L', есть односвязная область. Обозначим, как и в лемме 19, эту область через g'. Проведем через какую-нибудь точку Q траектории L' дугу без контакта l, целиком лежащую в g и кроме точки Q не имеющую уже больше ни одной общей точки с траекторией L'. Возьмем на дуге l точки P' и P'', расположенные по разные стороны от точки Q, и соединим эти точки простой дугой s, целиком лежащей в области g' (рис. 187), так, чтобы часть $P'P''$ дуги l и дуга s вместе составляли простую замкнутую кривую C (см. лемму 19). Кривая C имеет только одну общую точку с траекторией L'. В точке Q траектория L' при возрастании t переходит из одной из областей, определенных кривой C, в другую, предположим, например, что L' переходит из области вне C в область внутри C. Следовательно, континуум K_1, содержащий α-предельные точки траекторий, будет лежать вне C, а континуум K_2, содержащий ω-предельные точки траектории L', — внутри C. Но тогда, очевидно, всякая траектория ячейки g должна иметь как точки вне C, так

и точки внутри C и, следовательно, непременно пересечет кривую C. Всякая траектория L^*, в силу предыдущей леммы, разбивает область g' на две области. Будем эти области обозначать через $g_1''(L^*)$ и $g_2''(L^*)$. По самому определению областей $g_1''(L^*)$ и $g_2''(L^*)$ граничными точками этих областей являются кроме точек континуумов K_1 и K_2 точки траекторий L' и L^*. При этом все точки этих траекторий входят в границу как области $g_1''(L^*)$, так и области $g_2''(L^*)$. Пусть область $g_1''(L^*)$ лежит по положительную сторону траектории L', а область $g_2''(L^*)$ — по отрицательную сторону траектории L'. Так как по предположению среди точек континуумов K_1 и K_2 есть точки, не являющиеся предельными для траекторий рассматриваемой ячейки g, то хотя бы у одной из двух областей $g_1''(L^*)$, $g_2''(L^*)$ среди граничных точек должны существовать точки, отличные от точек траекторий L', L^* и их ω- и α-предельных точек. Будем обходить кривую C в отрицательном направлении и будем для каждой точки этой кривой строить области $g_1''(L^*)$ и $g_2''(L^*)$, где L^* — траектория, проходящая через данную точку кривой C. Если мы будем начинать обход от точки Q, то при этом мы будем сначала проходить точки, лежащие по положительную сторону траектории L'. Назовем точку кривой C *точкой первого типа*, если у области $g_1''(L^*)$ кроме точек траектории L', L^* и их ω- и α-предельных точек больше уже нет других граничных точек; тогда, как указано выше, у соответствующей области $g_2''(L^*)$ (см. замечание к предыдущей лемме) заведомо имеются граничные точки, отличные от точек траекторий L', L^* и их ω- и α-предельных точек. Точку кривой C назовем *точкой второго типа*, если область $g_1''(L^*)$ среди своих граничных точек имеет точки, отличные от точек траекторий L^*, L' и их ω- и α-предельных точек. Отметим при этом, что если у области $g_2''(L^*)$ нет граничных точек, отличных от точек траекторий L', L^* и их ω- и α-предельных точек, то у области $g_1''(L^*)$ непременно должны быть такие граничные точки, т. е. соответствующая точка кривой C является точкой второго типа.

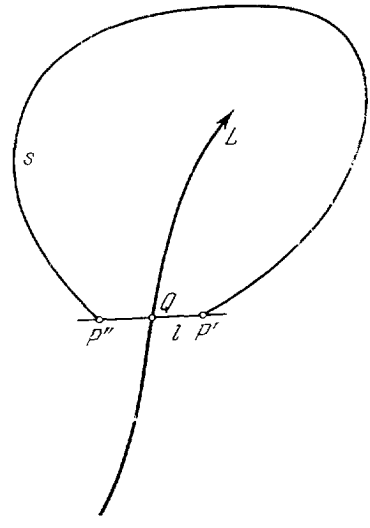


Рис. 187.

Покажем, что все достаточно близкие к Q точки кривой C, лежащие по положительную сторону траектории L', являются точками первого типа. Рассмотрим для этого траекторию L^*, пересекающую часть QP' дуги без контакта l, лежащую по положительную сторону траектории L' в некоторой точке Q^*. Нетрудно показать, что когда точка Q^* достаточно близка к точке Q, всякая точка области $g_1''(L^*)$ является точкой одной из траекторий, пересекающих дугу QQ^* в отличных от концов Q и Q^* точках. Действительно, обозначим через H область, состоящую из точек этих траекторий. Пусть точка Q^* достаточно близка к точке Q, так что (см. лемму 15) граница области H состоит из траекторий L', L^* и их предельных точек. Очевидно, $H \in g_1''$. Допустим, что область $g_1''(L^*)$ не совпадает с областью H, так что существуют точки области $g_1''(L^*)$, отличные от точек H. Пусть B — какая-нибудь такая точка ($B \in g_1''(L^*)$, но $B \notin H$). Соединим эту точку с какой-нибудь точкой A, принадлежащей H, а значит, и $g_1''(L^*)$ дугой λ, целиком лежащей в области $g_1''(L^*)$.

На дуге λ заведомо должны лежать точки, граничные для области H, так как $B \notin H$, т. е. точки траекторий L', L^* или их предельные точки. Но точки траекторий L', L^* и их предельные точки не принадлежат области $g_1''(L^*)$. Полученное противоречие показывает, что $H = g_1''(L^*)$. А отсюда следует, что все достаточно близкие к точке Q точки части $P'P''$ дуги l, лежащие по положительную сторону траектории L', являются точками первого типа. Точки же, лежащие по отрицательную сторону, в силу той же леммы 15 и в силу сделанного выше замечания, являются

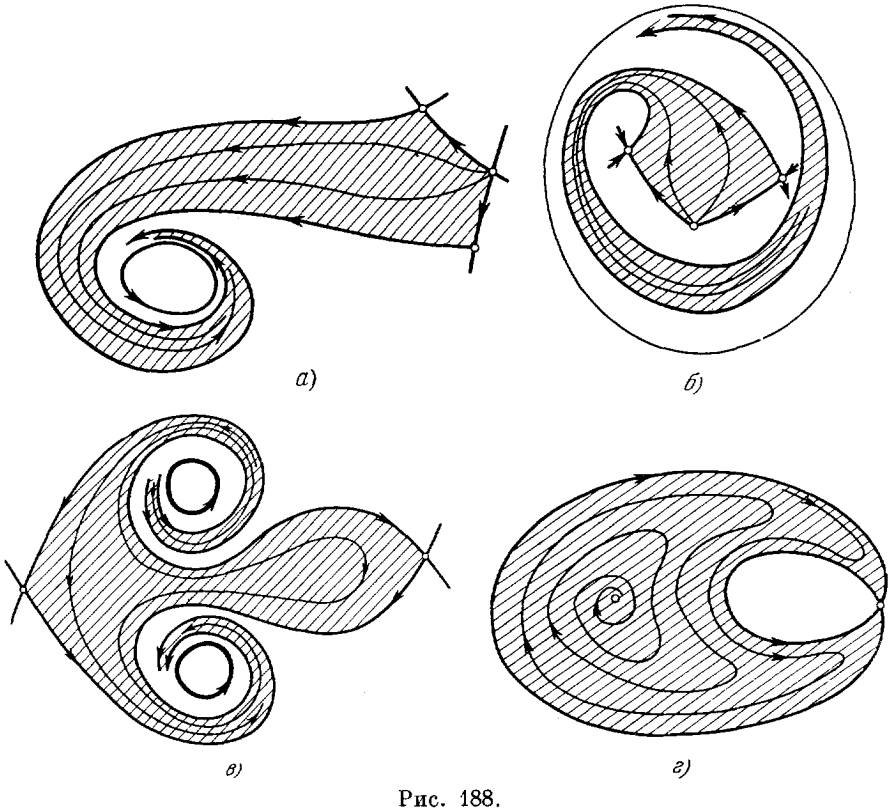


Рис. 188.

точками второго типа. При обходе кривой C в отрицательном направлении (начиная от точки Q) мы должны от точек первого типа перейти к точкам второго типа. Следовательно, на кривой C должна быть точка Q_0, являющаяся либо последней точкой первого типа, либо первой точкой не первого типа и, значит, первой точкой второго типа. Пусть L_0 — траектория, проходящая через точку Q_0, $g_1''(L_0)$ — соответствующая область. Предположим сначала, что Q_0 — точка первого типа, так что область $g_1''(L_0)$ среди своих граничных точек не имеет точек, отличных от точек траекторий L' и L_0 и их предельных точек. Но тогда, в силу леммы 15 и принимая во внимание замечание к предыдущей лемме, нетрудно видеть, что все точки, достаточно близкие к точке Q_0, также являются точками первого типа, что противоречит свойству точки Q_0. Следовательно, точка Q_0 не может быть точкой первого типа. Аналогичным рассуждением можно показать, что точка Q_0 не может быть также точкой второго типа. Таким образом, мы приходим к противоречию, которое и доказывает теорему.

Приведем еще одну теорему, непосредственно вытекающую из теорем 48 и 53 и конечности числа особых траекторий.

Теорема 56. *Существует только конечное число замкнутых траекторий, лежащих одна вне другой, и петель, лежащих одна вне другой.*

Примеры односвязных и двусвязных ячеек, заполненных целыми траекториями, приведены на рис. 188, *а*, *б*, *в*, *г*.

12. Ячейки, в границу которых входят граничные дуги. Перейдем теперь к рассмотрению ячеек, среди граничных точек которых есть части граничных дуг без контакта.

Рассмотрим часть граничной дуги без контакта с концами, принадлежащими угловым дугам или особым полутраекториям, у которой все точки кроме концов принадлежат неособым дугам или неособым полутраекториям. Будем называть такую часть граничной дуги особой ω-дугой или особой α-дугой, в зависимости от того, выходят ли из области G^* все пересекающие ее полутраектории или дуги траекторий при возрастании или убывании t.

Если в границу ячейки входит цикл без контакта, все точки которого принадлежат неособым дугам или неособым полутраекториям, то такой цикл называется особым ω- или α-циклом.

Используя лемму 3, нетрудно видеть, что если одна точка особой ω- или α-дуги, а также ω- или α-цикла является граничной для некоторой ячейки, то и все точки этой дуги (цикла) являются граничными для той же ячейки. Кроме того, рассуждением, аналогичным неоднократно употреблявшемуся, нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 57. *а) Если какая-нибудь полутраектория* $L(\ )$ *(или дуга траектории) ячейки пересекает некоторую особую* ω-(α-)*-дугу* λ, *то и все полутраектории (дуги траекторий) этой ячейки пересекают эту же дугу* λ *в отличных от ее концов точках и кроме дуги* λ *не могут пересекать больше никакой другой* ω-(α-)*-дуги.*

б) Если какая-нибудь полутраектория (дуга траектории) ячейки пересекает некоторый особый ω-(α-)*-цикл, то и все полутраектории (дуги траекторий) этой ячейки пересекут этот цикл.*

Имеет также место следующая лемма, доказательство которой полностью аналогично доказательству леммы 18:

Лемма 20. *На каждом континууме, граничном для ячейки и не содержащем точек особой* ω-(α-)*-дуги или особого цикла, непременно лежат предельные точки полутраекторий ячейки.*

Теорема 58. *Ячейка, в границу которой входит* ω *(или* α*)-дуга, односвязна.*

Доказательство. В случае, когда ячейка заполнена дугами траекторий, справедливость теоремы непосредственно следует из леммы 10 § 3.

Рассмотрим ячейку, заполненную полутраекториями, и для определенности предположим, что в ее границу входит ω-дуга (случай, когда в границу ячейки входит α-дуга, рассматривается совершенно аналогично).

Предположим противное, т. е. предположим, что такая ячейка не менее чем двусвязна, т. е. граница ее состоит не менее чем из двух континуумов K_1 и K_2. При этом существует простая замкнутая кривая C, целиком лежащая в рассматриваемой ячейке и содержащая внутри себя один из континуумов, например континуум K_2. Предположим для определенности, что точки ω-дуги λ, входящей в границу рассматриваемой

ячейки, принадлежат континууму K_1. Пусть A и B — концы дуги λ, являющиеся точками угловых дуг или особых полутраекторий. Возьмем на дуге λ последовательность различных точек $\{P_i\}$, стремящихся к одному из концов дуги λ, например к концу A. Пусть $L_i^{(\gamma)}$ — полутраектория с концом в точке P_i. Очевидно, всякие две полутраектории $L_i^{(\gamma)}$ и $L_j^{(\gamma)}$ при $i \neq j$ различны.

Так как на континууме K_2 заведомо есть предельные точки полутраекторий ячейки, то всякая полутраектория L_i при возрастании t в конце концов войдет внутрь кривой C и больше уже из нее не выйдет. Пусть Q_i — последняя при возрастании t общая точка кривой C и траектории L_i Мы получаем, таким образом, последовательность различных точек $\{Q_i\}$.

Пусть Q_0 — точка сгущения этой последовательности и L_0 — траектория, проходящая через эту точку. Так как эта точка Q_0, как и все точки кривой C,

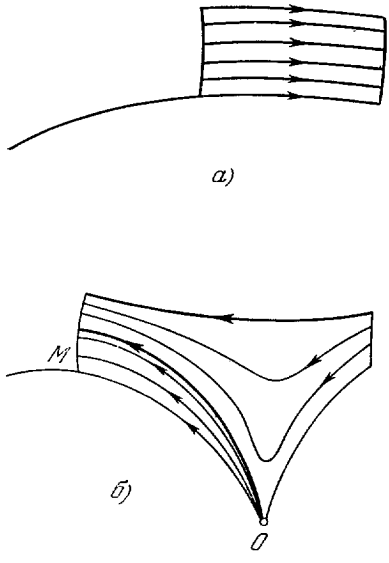


Рис. 189.

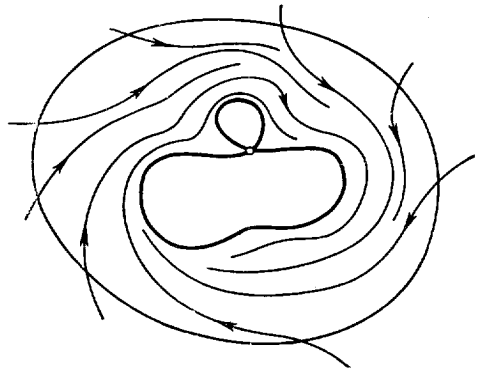


Рис. 190.

принадлежат ячейке, то траектория L_0 заведомо пересекает особую ω-дугу λ в некоторой отличной от концов точке P_0 этой дуги.

Возьмем часть λ' дуги λ с серединой в точке P_0, все точки которой находятся на некотором расстоянии $d > 0$ от конца A дуги λ. Все полутраектории $L_i^{(\gamma)}$, проходящие через точки Q_i, достаточно близкие к точке Q_0, т. е. через все точки Q_i с достаточно большим номером, пересекут дугу λ в точках части λ' этой дуги. Но кроме точек P_i у полутраекторий $L_i^{(\gamma)}$ не может быть других общих точек с дугой λ. А следовательно, все точки P_i с достаточно большими номерами лежат на дуге λ' и, значит, находятся на расстоянии, не меньшем d от конца A дуги λ. Но это противоречит самому выбору последовательности точек P_i. Мы приходим к противоречию, и теорема доказана.

На рис. 189, *а* и *б* представлены различные случаи односвязных ячеек, в границу которых входит ω-дуга.

Доказательство следующей теоремы проводится аналогичными рассуждениями, и поэтому мы его опускаем.

Теорема 59. *Ячейка, в границу которой входит особый* ω (α)-*цикл, двусвязна.*

Пример такой ячейки представлен на рис. 190.

13. Полное качественное исследование динамической системы. Схема динамической системы. Доказанные в настоящем параграфе предложения делают очевидной ту роль, которую играют особые траектории в разбиении на траектории в целом: особые траектории разделяют область $\overline{G}^*$, в которой рассматривается динамическая система, на частичные области — ячейки с одинаковым (в смысле теорем 47, 48, 49, 52, 53 и 57) поведением траекторий.

Если известно взаимное расположение ячеек и характер их разбиения на траектории, то естественно считать, что топологическая структура разбиения на траектории установлена полностью.

Очевидно, при этом должно быть известно расположение особых траекторий и, кроме того, относительно траекторий внутри каждой ячейки должно быть известно, замкнуты они или нет. В случае, когда они не замкнуты, кроме того, должно быть известно их поведение, в частности, их предельные точки.

Однако к вопросу о полном определении топологической структуры разбиения на траектории можно также подойти с несколько другой точки зрения, непосредственно не опираясь на рассмотрение ячеек.

Естественно полагать, что знание характера (топологической структуры) всех состояний равновесия, знание взаимного расположения особых траекторий, а также указание среди особых траекторий тех, которые входят в предельные континуумы, также дает исчерпывающие сведения о топологической структуре разбиения на траектории (и, следовательно, может полностью определить и разделение на ячейки).

В таком аспекте проводится в следующих главах рассмотрение вопроса о полном определении топологической структуры разбиения на траектории. Такой аспект, когда основными элементами, которыми *непосредственно* определяется качественная структура, являются: характер состояний равновесия и знание предельных континуумов (а не расположение и характер ячеек), представляется естественным также с точки зрения фактического качественного исследования конкретных примеров (см. исследование примеров главы XII).

Однако, при этом необходимо уточнить, что означает «знать характер состояния равновесия и взаимного расположения особых траекторий» и т. д.

Очевидно, при этом подразумевается, что дается некоторое *описание* характера состояний равновесия, описание расположения особых траекторий и описание предельных континуумов.

Мы назовем такое описание схемой.

В следующих главах вводится сначала понятие *схемы состояния* равновесия (локальной и полной), затем схемы предельного континуума (локальной и полной), схемы границы области и, наконец, состоящей из этих частичных схем — *схемы динамической системы*.

В главе XI будет показано, что схема динамической системы определяет топологическую структуру разбиения на траектории полностью, т. е. если у двух динамических систем схемы одинаковы, то у них одинакова и топологическая структура разбиений на траектории.

ГЛАВА VIII

СХЕМА СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Введение

В настоящей главе рассматривается окрестность состояния равновесия системы вида (I) при предположении, что число особых траекторий конечно. В главе IV мы рассматривали простое состояние равновесия системы (I), т. е. такое, для которого $\Delta \neq 0$. Таким образом, там мы делали определенное предположение, носящее аналитический характер.

В настоящей главе не делается никаких конкретных предположений относительно аналитической природы рассматриваемого состояния равновесия и не дается никаких методов установления характера состояния равновесия по его аналитическим характеристикам. Цель, которую мы сейчас себе ставим,— это установить, какая вообще возможна топологическая структура состояния равновесия системы (I) в случае, когда число особых траекторий конечно.

Кроме того, в настоящей главе дается *описание* топологической структуры состояния равновесия, т. е. вводится *схема* состояния равновесия.

Глава состоит из четырех параграфов. В § 17 проводится рассмотрение окрестности состояния равновесия, к которому стремится хотя бы одна полутраектория. Устанавливается, что окрестность такого состояния равновесия может быть разделена на области трех различных типов: *правильные параболические, эллиптические и гиперболические области.* Параболические, эллиптические и гиперболические области, а также элементарный прямоугольник (см. § 3) называются *«элементарными областями»*. § 18 посвящен доказательству того, что между всякими двумя элементарными областями одинакового типа может быть установлено отображение, переводящее траектории в траектории (этот факт геометрически является совершенно наглядным).

В § 19 вводится понятие *схемы* состояния равновесия, к которому стремится хотя бы одна полутраектория, сначала *локальной схемы*, а затем *полной* (или *«глобальной»*) схемы. В локальной схеме используются лишь сведения, полученные о состоянии равновесия при непосредственном рассмотрении только достаточно малой окрестности *этого состояния* равновесия. Как мы увидим, для написания полной схемы необходимы уже некоторые сведения о расположении сепаратрис других состояний равновесия, т. е. необходимы уже не только сведения, полученные из рассмотрения окрестности данного состояния равновесия, но также некоторые сведения о расположении особых траекторий (сепаратрис) в целом.

§ 17. Состояние равновесия, к которому стремится хотя бы одна полутраектория

1. Вспомогательные предложения. Предположим, что к рассматриваемому состоянию равновесия системы (I) стремится бесконечное или конечное число полутраекторий, но во всяком случае не меньшее некоторого данного числа $N^* \geqslant 2$. Рассмотрим N ($N \leqslant N^*$) из этих полутраекторий

$$L_1^{(\ )},\ L_2^{(\ )},\ \ldots,\ L_N^{(\ )} \tag{1}$$

(они могут быть как положительными, так и отрицательными, как орбитно-устойчивыми, так и орбитно-неустойчивыми).

Рассмотрим простую замкнутую кривую C, гладкую или негладкую, содержащую точку O внутри и такую, что у всех полутраекторий (1) есть точки, общие с кривой C.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_N$ — последние общие точки этих полутраекторий с кривой C (см. главу VII, § 15).

Напомним, что если на какой-либо простой замкнутой кривой C взяты две точки A и B, то «дугой AB» кривой C мы называем ту из двух дуг, на которой движение от точки A к точке B индуцирует положительное направление обхода кривой C (§ 10, п. 2). Пусть при положительном обходе кривой C точки M_i располагаются на этой кривой в порядке их нумерации, так что точки M_k, M_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots, N$, причем под точкой M_{N+1} мы понимаем точку M_1) являются «последовательными» точками, т. е. на каждой из дуг M_kM_{k+1} нет точек M_j, отличных от концов этой дуги. Очевидно, при $N \geqslant 3$ на дуге $M_{k+1}M_k$ заведомо будет лежать хотя бы одна точка M_j, отличная от концов этой дуги.

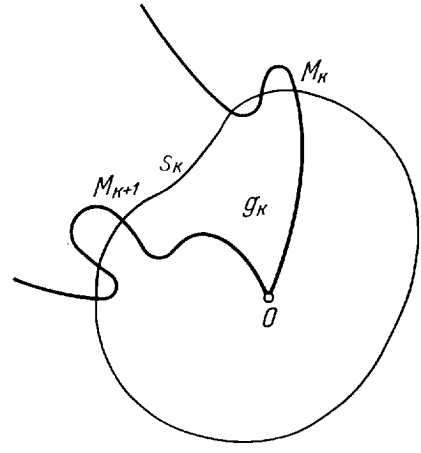


Рис. 191.

Порядок, в котором проходятся точки M_i при положительном обходе кривой C, называется *циклическим порядком этих точек на кривой* C.

Обозначим через s_k дугу M_kM_{k+1} кривой C. Пусть g_k — криволинейный сектор (см. § 15, п. 5), в границу которого входит дуга s_k и части M_kO и $M_{k+1}O$ полутраекторий $L_k^{(\ )}$ и $L_{k+1}^{(\ )}$, а σ_k — простая замкнутая кривая, состоящая из дуги s_k, полутраекторий M_kO, $M_{k+1}O$ и точки O, являющаяся границей g_k (рис. 191).

Пусть $\widetilde{C}$ — простая замкнутая кривая (гладкая или негладкая), отличная от кривой C, содержащая так же, как и кривая C, точку O внутри и такая, что у всех полутраекторий $L_k^{(\ )}$ есть точки, лежащие вне ее. Будем обозначать через $\widetilde{M}_k$ последнюю общую с кривой $\widetilde{C}$ точку полутраектории $L_k^{(\ )}$ (рис. 192).

Лемма 1 *). *Циклический порядок точек $\widetilde{M}_j$ на кривой $\widetilde{C}$ таков же, как и циклический порядок точек M_j на кривой C (т. е. если*

*) Без ущерба для дальнейшего читатель может пропустить доказательство этой геометрически очевидной леммы.

при положительном обходе кривой C точки M_j расположены в порядке $M_1, M_2, \ldots, M_N$, то при положительном обходе кривой C точки $\widetilde{M}_j$ располагаются в порядке $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \ldots, \widetilde{M}_N$).

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что на каждой из дуг $\widetilde{M}_k\widetilde{M}_{k+1}$ кроме концов не лежит больше ни одной точки $\widetilde{M}_j$.

Рассмотрим какие-нибудь две точки M_k и M_{k+1} и соответственно $\widetilde{M}_k$ и $\widetilde{M}_{k+1}$. Обозначим через $\widetilde{s}_k$ дугу $\widetilde{M}_k\widetilde{M}_{k+1}$ кривой $\widetilde{C}$ и через $\widetilde{g}_k$ область (сектор) внутри простой замкнутой кривой $\widetilde{\sigma}_k$, состоящей из дуги $\widetilde{s}_k$ частей $\widetilde{M}_kO$ и $\widetilde{M}_{k+1}O$ полутраекторий $L_k^{(\cdot)}$ и $L_{k+1}^{(\cdot)}$ и точки O *). Область $\widetilde{g}_k$ является частью области внутри кривой $\widetilde{C}_k$. По самому определению области $\widetilde{g}_k$ и кривой $\widetilde{\sigma}_k$ направление на дуге $\widetilde{s}_k$ от точки $\widetilde{M}_k$ к M_{k+1} индуцирует положительное направление обхода кривой $\widetilde{\sigma}_k$ (см. дополнение § 2, п. 3).

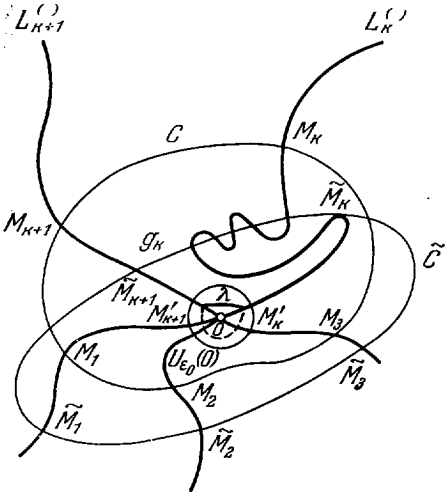


Рис. 192.

Построим вспомогательную простую дугу, основываясь на следующем элементарном свойстве простой замкнутой кривой (см. дополнение, § 2, п. 2): если R — любая точка простой замкнутой кривой γ_0 и $\varepsilon > 0$ — любое положительное число, то существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что всякие две точки P' и Q' кривой γ_0, принадлежащие окрестности $U_\delta(R)$, могут быть соединены простой дугой, целиком кроме концов лежащей внутри кривой γ_0, все точки которой принадлежат $U_\varepsilon(R)$. Отметим теперь, что все достаточно близкие к точке O точки полутраекторий $L_k^{(\cdot)}$ и $L_{k+1}^{(\cdot)}$ одновременно принадлежат и кривой σ_k и кривой $\widetilde{\sigma}_k$ (σ_k и $\widetilde{\sigma}_k$ являются соответственно границами областей g_k и $\widetilde{g}_k$). Поэтому всегда можно взять столь малое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы в окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$, кроме точек полутраекторий $L_k^{(\cdot)}$ и $L_{k+1}^{(\cdot)}$, принадлежащих одновременно обеим кривым σ_k и $\widetilde{\sigma}_k$, не лежало больше никаких других точек этих полутраекторий, а также не лежало точек кривых C и $\widetilde{C}$. При выбранном, таким образом, $\varepsilon_0 > 0$ возьмем, в согласии со сказанным выше, надлежащую, достаточно малую и целиком лежащую в $U_{\varepsilon_0}(O)$ окрестность $U_\delta(O)$ ($\delta(\varepsilon_0) < \varepsilon_0$) (рис. 192). Возьмем точки M'_k и M'_{k+1}, принадлежащие соответственно полутраекториям $L_k^{(\cdot)}$ и $L_{k+1}^{(\cdot)}$ и лежащие внутри $U_\delta(O)$. Соединим эти точки, являющиеся точками простой замкнутой кривой σ_k, простой дугой λ, целиком кроме концов лежащей в области g_k и внутри $U_{\varepsilon_0}(O)$.

В силу выбора ε_0 и δ точки M'_k и M'_{k+1} принадлежат одновременно кривой σ_k и кривой $\widetilde{\sigma}_k$, и на дуге λ кроме концов не может лежать больше ни одной точки кривой $\widetilde{\sigma}_k$.

*) Очевидно, пока еще нельзя утверждать, что в области $\widetilde{g}_k$ нет точек ни одной из полутраекторий $\widetilde{M}_jO$.

Отсюда, очевидно, следует, что дуга λ лежит либо целиком кроме концов внутри кривой $\widetilde{\sigma}_k$, т. е. в $\widetilde{g}_k$, либо целиком вне кривой $\widetilde{\sigma}_k$ (на рис. 192 указаны две возможности расположения дуги λ).

Покажем, что дуга λ, целиком кроме концов лежащая в области g_k, лежит целиком (кроме концов) также и в области $\widetilde{g}_k$. Для этого заметим прежде всего, что при положительном обходе кривой σ_k точки M_k, M_{k+1}, M'_k, M'_{k+1} и O проходятся в следующем порядке: M_k, M_{k+1}, M'_{k+1}, O, M'_k, M_k.

Дуга λ, целиком (кроме концов) лежащая в области g_k, делит эту область на две области, границами которых являются простые замкнутые кривые, имеющие дугу λ общей дугой. Обозначим через σ'_k ту из этих кривых, в границу которой входит точка O, и через g'_k — область, являющуюся частью области g_k, границей которой является кривая σ'_k (дуга s_k кривой σ_k заведомо не является дугой кривой σ'_k). Принимая во внимание порядок, в котором при положительном обходе кривой σ_k проходятся точки M_k, M_{k+1}, M'_k, M'_{k+1}, O, нетрудно видеть на основании лемм п. 3 § 2 дополнения, что при положительном обходе кривой σ'_k точки M'_k, M'_{k+1} и O проходятся в следующем порядке: M'_k, M'_{k+1}, O, M'_k.

Предположим теперь, что дуга λ кроме концов лежит вне области $\widetilde{g}_k$. Кривая σ'_k, очевидно, имеет с кривой $\widetilde{\sigma}_k$ общую дугу, состоящую из частей M'_kO и $M'_{k+1}O$ полутраекторий $L_k^{(\prime)}$ и $L_{k+1}^{(\prime)}$. Направление на этой дуге, противоположное направлению, индуцированному положительным обходом кривой σ'_k, т. е. направление $M'_kOM'_{k+1}$ в силу лемм п. 3 § 2 дополнения должно индуцировать положительный обход кривой $\widetilde{\sigma}_k$. Тогда при положительном обходе кривой $\widetilde{\sigma}_k$ на дуге $\widetilde{s}_k$ должно было бы индуцироваться направление от точки $\widetilde{M}_{k+1}$ к точке $\widetilde{M}_k$. Но положительный обход кривой $\widetilde{\sigma}_k$ должен индуцировать на дуге $\widetilde{s}_k$ то же направление, что и положительный обход кривой $\widetilde{C}$, т. е. направление от точки $\widetilde{M}_k$ к точке $\widetilde{M}_{k+1}$. Мы приходим к противоречию, и, следовательно, дуга λ лежит целиком кроме концов также и внутри области $\widetilde{g}_k$.

Отсюда сразу же вытекает утверждение леммы. Действительно, на дуге M_kM_{k+1} кривой C кроме концов не лежит ни одной точки M_j, а в области g_k не лежат точки ни одной из полутраекторий M_jO. Значит, ни одна отличная от концов точка дуги λ не может быть точкой такой полутраектории. Но если бы на дуге $\widetilde{M}_k\widetilde{M}_{k+1}$ лежала точка $\widetilde{M}_j$, отличная от концов $\widetilde{M}_k$ и $\widetilde{M}_{k+1}$, то тогда в области $\widetilde{g}_k$ должна была бы лежать полутраектория $\widetilde{M}_j O$, а точки этой полутраектории непременно должны были бы лежать на дуге λ, так как иначе, как нетрудно видеть, она не могла бы, не выходя из кривой $\widetilde{C}$, стремиться к состоянию равновесия O. В силу предыдущего это невозможно, и таким образом лемма доказана.

Замечание. Дуга λ, лежащая целиком (кроме концов) одновременно и в области g_k и в области $\widetilde{g}_k$, отделяет в каждой из этих областей одну и ту же, общую для этих двух областей область g'_k.

Очевидно, всегда можно взять $\varepsilon > 0$ таким, чтобы в $U_\varepsilon(O)$ кроме принадлежащих области g'_k точек областей g_k и $\widetilde{g}_k$ больше не было никаких других точек этих областей. Таким образом, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ все точки области g_k, лежащие в $U_\varepsilon(O)$, принадлежат области $\widetilde{g}_k$, и все точки области $\widetilde{g}_k$, лежащие в $U_\varepsilon(O)$, принадлежат g_k (рис. 193).

В силу доказанной леммы мы имеем возможность говорить о циклическом порядке расположения вокруг точки O самих полутраекторий системы (I). Именно, мы приписываем этим полутраекториям тот циклический порядок, в котором расположены на некоторой простой замкнутой кривой C (содержащей точку O, внутри и вне которой заведомо есть точки рассматриваемых полутраекторий) последние общие точки этих полутраекторий C с кривой C.

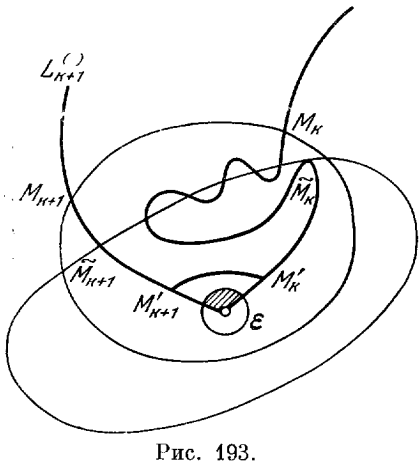


Рис. 193.

В самом деле, мы установили, что этот порядок не зависит от выбора обладающей указанными выше свойствами кривой C, т. е. определяется самими траекториями.

Мы будем говорить, что две полутраектории $L^{(\cdot)}_j$ и $L^{(\cdot)}_k$ системы (1) последовательны, если последовательны соответствующие им на кривой C точки M_j и M_k, т. е. если дуга $M_j M_k$ не содержит других точек M_i. Из двух последовательных полутраекторий одна предшествует другой. Например, $L^{(\cdot)}_j$ предшествует $L^{(\cdot)}_k$ (тогда на дуге $M_j M_k$ кривой C нет других точек M_i). Если полутраектория $L^{*(\cdot)}$ стремится к точке O и имеет точки вне C ($L^{*(\cdot)}$ отлична от полутраекторий $L^{(\cdot)}_j$ и $L^{(\cdot)}_k$, но может как быть, так и не быть одной из полутраекторий $L^{(\cdot)}_i$), то мы говорим, что полутраектория $L^{*(\cdot)}$ лежит между полутраекториями $L^{(\cdot)}_j$ и $L^{(\cdot)}_k$ (порядок здесь, очевидно, не безразличен), если последняя, общая с кривой C точка полутраектории $L^{*(\cdot)}$ лежит на дуге $M_j M_k$. Наконец, мы будем говорить, что траектория или полутраектория, целиком лежащая внутри C, лежит между полутраекториями $L^{(\cdot)}_j$ и $L^{(\cdot)}_k$, если она лежит внутри сектора h, граница которого состоит из полутраекторий $M_j O$, $M_k O$, точки O и дуги $M_j M_k$ кривой C.

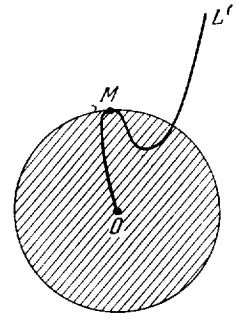


Рис. 194.

Мы предполагали выше, что число рассматриваемых нами полутраекторий, стремящихся к состоянию равновесия O, не менее двух. В дальнейшем мы иногда будем рассматривать одну стремящуюся к состоянию равновесия полутраекторию. Пусть $L^{(\cdot)}$ — такая стремящаяся к состоянию равновесия полутраектория, C — простая замкнутая кривая, содержащая состояние равновесия O внутри и такая, что все ее лежат точки полутраектории $L^{(\cdot)}$. Пусть M — последняя общая точка полутраектории $L^{(\cdot)}$ и кривой C. Тогда область, состоящую из точек, лежащих внутри C, за вычетом точек полутраектории MO и точки O, мы будем называть *криволинейным циклическим сектором*. Границей этой области является кривая C, полутраектория MO и точка O (рис. 194).

Если O — состояние равновесия, к которому стремится хотя бы одна полутраектория, то существует окрестность точки O, не содержащая ни одной замкнутой траектории (см. теорему 18). Так как, кроме того, по предположению число особых траекторий конечно, то всегда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в замкнутой окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$ не лежит ни од-

ной замкнутой траектории и ни одной особой траектории целиком кроме состояния равновесия O.

Лемма 2. *Если все точки траектории L, соответствующие значениям $t > t_0$ ($t < t_0$), лежат в замкнутой окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$, не содержащей ни одной замкнутой траектории и кроме состояния равновесия O ни одной особой траектории целиком, то траектория L при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) стремится к состоянию равновесия O.*

Доказательство. По условию рассматриваемая полутраектория лежит в $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$. Поэтому все ее ω (α)-предельные точки должны лежать в $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$. Так как в силу выбора ε_0 L не может быть замкнутой траекторией, то множество ее ω (α)-предельных точек состоит из целых орбитно-неустойчивых траекторий, расположенных в $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$, т. е. состоит из одного состояния равновесия O. А это и значит, что полутраектория стремится к состоянию равновесия O. Лемма доказана.

Рассмотрим сепаратрисы состояния равновесия O (см. § 15). Вследствие предположения о конечном числе орбитно-неустойчивых траекторий у рассматриваемой системы (I), очевидно, существует лишь конечное число сепаратрис всякого данного состояния равновесия O. При этом имеет место следующая теорема, непосредственно вытекающая из предположения о конечном числе особых траекторий и леммы 5 § 15.

Теорема 60. *Всякая ω (или α)-сепаратриса состояния равновесия O имеет продолжение либо с положительной, либо с отрицательной стороны (либо и с той и с другой стороны).*

Доказательство. Пусть, как и выше, $\varepsilon_0 > 0$ таково, что в замкнутой окрестности $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$ не содержится ни одной замкнутой траектории и кроме состояния равновесия O ни одной целой особой траектории. Пусть для определенности рассматриваемая сепаратриса является ω-сепаратрисой. Обозначим ее через L_0^+. Она заведомо продолжаема, по крайней мере с одной из сторон, например с положительной стороны, относительно некоторой окружности C (см. теорему 38 § 15). Мы всегда можем предполагать, что эта окружность C лежит целиком в $U_{\varepsilon_0}(O)$. Пусть C' — произвольная окружность с центром в точке O, лежащая внутри C. Если бы продолжение сепаратрисы L^+ по отношению к окружности C' было отлично от ее продолжения по отношению к окружности C, то в силу леммы 5 § 15 должна была бы существовать особая траектория, не являющаяся состоянием равновесия, целиком лежащая внутри окружности C, т. е. внутри $U_{\varepsilon_0}(O)$. Но в силу выбора $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$ это невозможно. Следовательно, продолжение сепаратрисы L_0^+ с положительной стороны по отношению ко всем окружностям с центром в O, лежащим в $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$, одно и то же. Это и означает, что *полутраектория* L_0^+ продолжаема относительно состояния равновесия O с положительной стороны (см. определение XX главы VII).

Теорема доказана.

Пусть C — окружность с центром в точке O радиуса, меньшего ε_0 (т. е. лежащая в открытой окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$). Рассмотрим какую-нибудь траекторию, проходящую через точки внутри этой окружности.

Очевидно, могут представиться следующие возможности: эта траектория 1) либо и при возрастании и при убывании t выходит из окружности C; 2) либо и при возрастании и при убывании t не выходит из окружности C (но может иметь общие с окружностью C точки); 3) либо при возрастании (убывании) t не выходит из окружности C, а при убывании (возрастании) t в конце концов выходит из нее.

В силу леммы 2 в случае 2) траектория, не выходя из окружности C, и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ стремится к состоянию равновесия O, а в случае 3) траектория стремится к состоянию равновесия при $t \to +\infty$ (или соответственно при $t \to -\infty$).

Отметим еще, что если траектория, проходящая через точку внутри окружности C, является сепаратрисой состояния равновесия O, то она непременно имеет точки вне окружности C. Это, очевидно, следует из того, что окружность C по предположению лежит в выбранной выше окрестности $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$.

2. Возможный характер криволинейного сектора. Гиперболический (седловый), параболический и эллиптический сектор. Предложения, которые приводятся в настоящем пункте, позволяют провести исчерпывающее рассмотрение возможного поведения траекторий в секторе, образованном траекториями, стремящимися к состоянию равновесия.

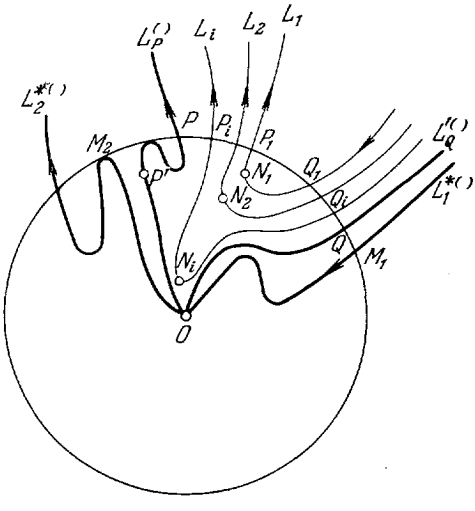


Рис. 195.

Пусть существуют две полутраектории $L_1^{*(*)}$ и $L_2^{*(*)}$, стремящиеся к состоянию равновесия O и имеющие точки вне окружности C (эти полутраектории могут быть как неособыми, так и особыми).

Пусть M_1 и M_2 — их последние общие точки с окружностью C, и g — криволинейный сектор, граница которого состоит из частей OM_1 и OM_2 полутраекторий $L_1^{*(*)}$ и $L_2^{*(*)}$, точки O и дуги M_1M_2 окружности C.

Лемма 3. *Пусть при любом $\varepsilon > 0$ существует точка криволинейного сектора g, лежащая в $U_\varepsilon(O)$, через которую проходит траектория, при возрастании и при убывании t выходящая из сектора g.*

Тогда существует по крайней мере одна ω-сепаратриса и по крайней мере одна α-сепаратриса состояния равновесия O, каждая из которых является полутраекторией, либо лежащей между полутраекториями $L_1^{*(*)}$ и $L_2^{*(*)}$, либо совпадающей с одной из этих полутраекторий.

Доказательство. В силу условий леммы существует последовательность точек сектора g $\{N_i\}$, стремящихся к точке O и таких, что проходящая при $t = t_0$ через каждую из точек N_i $(i = 1, 2, \ldots)$ траектория L_i как при $t < t_0$, так и при $t > t_0$ выходит из окружности C (рис. 195).

Обозначим через P_i общую точку траектории L_i с окружностью C, соответствующую наименьшему значению $t < t_0$, и через Q_i — общую точку L_i с окружностью C, соответствующую наибольшему значению $t > t_0$. Пусть t_i $(t_i < t_0)$ — значение параметра t, соответствующее точке P_i, а t_i' $(t_i' > t_0)$ — значение параметра t, соответствующее точке Q_i. Очевидно, точки P_i и Q_i лежат на дуге M_1M_2 кривой C и заведомо различны (иначе траектория L_i была бы замкнутой траекторией, целиком лежащей в окружности $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$, что невозможно).

Дуги $P_iN_iQ_i$ траекторий L_i (рис. 195) целиком кроме концов лежат в области g. При этом мы всегда можем предполагать, что все дуги $P_iN_iQ_i$ различны, т. е. другими словами, что на каждой дуге $P_iN_iQ_i$ кроме точки N_i не лежит больше точек N_j с номерами $j \neq i$. Действительно, каждая дуга P_iQ_i траектории находится на положительном расстоянии от точки O, и поэтому на ней может лежать самое большее лишь конечное число точек N_j. Но тогда мы можем взять такую подпоследовательность точек N_j, чтобы на каждой дуге P_iQ_i лежала только одна точка N_j.

Рассмотрим последовательность точек P_i и последовательность точек Q_i. Мы всегда можем предполагать, что каждая из этих последовательностей имеет одну точку сгущения (в противном случае мы рассмотрели бы подпоследовательность дуг P_iQ_i, для которой это имеет место). Пусть P — точка сгущения последовательности точек P_i и Q — точка сгущения последовательности точек Q_i.

Очевидно, точки P и Q лежат на дуге M_1M_2 окружности C. Пусть L и L' — траектории, проходящие соответственно через точки P и Q, и L_Q^- и L_P^+ — полутраектории, выделенные из этих траекторий.

Покажем, что эти полутраектории являются сепаратрисами точки O, существование которых утверждается в лемме. Для этого покажем сначала, что при $i \to \infty$ $|t_0 - t_i| \to \infty$ и $|t_0 - t_i'| \to \infty$. Действительно, предположим, что это не так и что существует $T > 0$ такое, что при всех i

$$|t_i - t_0| < T. \tag{2}$$

Предположим, что на полутраектории L_P^+ выбрано движение, при котором точке P соответствует значение $t = \tau$, и рассмотрим дугу этой полутраектории, соответствующую значениям t, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T$. Эта дуга лежит на ненулевом расстоянии d_0 от точки O. Возьмем на каждой траектории L_i движение, при котором точке P_i соответствует значение $t = \tau$, и рассмотрим дуги этих траекторий, соответствующие значениям t, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T$. Из неравенства (2) следует, что точки N_i лежат на этих дугах. Так как точка P является точкой сгущения для точек P_i, то, выбрав $\varepsilon < \frac{d_0}{2}$, всегда можно взять столь большое I, чтобы при всех $i > I$ дуги траекторий L_i, соответствующие значениям t, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T$, а значит, и точки N_i лежали в $\frac{d_0}{2}$ окрестности дуги полутраектории L_P^+, соответствующей тем же значениям t. А тогда точки N_i при всех $i > I$ должны были бы лежать вне $\frac{d_0}{2}$ окрестности точки O, что, очевидно, невозможно. Следовательно, $|t_i - t_0| \to \infty$ при $i \to \infty$. Совершенно также покажем, что $|t_i' - t_0| \to \infty$ при $i \to \infty$.

Покажем теперь, что у полутраектории L_P^+ нет точек, лежащих вне окружности C, и что, следовательно, эта полутраектория, не выходя из C, стремится к состоянию равновесия O. Действительно, предположим, что существует точка полутраектории L_P^+, соответствующая значению $t' > \tau$, лежащая вне окружности C. Нетрудно видеть тогда, что если на каждой траектории L_i выбрать движение, при котором точка P_i соответствует значению $t = \tau$, то при достаточно больших i точка траектории L_i, соответствующая значению $t = t'$, тоже будет лежать вне окружности C. Но это невозможно, так как в силу предыдущего при всех достаточно больших i мы имеем $t' - \tau < t_i - t_0$, а при сделанном выборе движения на L_i все отличные от P_i точки этой траектории, соответствующие значениям t, $\tau < t < \tau + (t_i - t_0)$, т. е. точки дуги P_iN_i, лежат внутри окружности C. Таким образом, полутраектория L_P^+ не выходит из окруж-

ности C, а значит, из замкнутого сектора $\bar{g}$ и, следовательно, стремится к состоянию равновесия O. Покажем теперь, что полутраектория L_P^+ орбитно-неустойчива.

Пусть $t' > \tau$ таково, что при всех $t \geqslant t'$ у полутраекторий L_P^+ нет общих точек с окружностью C. (Отметим, что последняя общая точка полутраектории L_P^+ с окружностью C может быть отлична от точки P, так как полутраектория L_P^+ не имеет точек вне окружности C, но может иметь общие точки с окружностью C (рис. 195).) Пусть P' — точка этой полутраектории, соответствующая значению $t = t'$. Очевидно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что ε-окрестность части $P'O$ полутраектории L_P^+ не имеет общих точек с окружностью C. Но сколько бы малую σ-окрестность ($\sigma > 0$, $\sigma < \varepsilon$) точки P' мы ни взяли, все траектории L_i, проходящие при $t = \tau$ через точки P_i с достаточно большими номерами при значении $t = t'$, пройдут через σ-окрестность точки P'. При дальнейшем возрастании t эти траектории непременно выйдут из ε-окрестности части $P'O$ полутраектории L_P^+. Действительно, точка Q_i каждой траектории L_i принадлежит кривой C и лежит вне ε-окрестности части $P'O$ полутраектории L_P^+. А при сделанном выборе движения на траектории L_i точка Q_i соответствует значению $T_i = \tau + (t_i' - t_i)$, которое заведомо больше t' для всех достаточно больших значений i. Это, очевидно, и означает, что полутраектория L_P^+ орбитно-неустойчива.

Совершенно аналогичное рассуждение может быть проведено и при рассмотрении полутраектории L_Q^-. Лемма доказана.

Замечание 1. Последние, общие с окружностью C точки полутраектории L_P^+ и L_Q^-, очевидно, различны.

Замечание 2. Сепаратрисы L_Q^- и L_P^+ являются продолжением одна другой. В этом нетрудно убедиться, повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве леммы 3.

В случае, когда полутраектории $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ — сепаратрисы, являющиеся продолжением одна другой, и через сколь угодно близкие к O точки сектора проходят траектории, при возрастании и при убывании t выходящие из сектора g, этот сектор называется «гиперболическим» или «седловым» сектором.

В следующей лемме полутраектории $L_1^{*(\,)}$, $L_2^{*(\,)}$, точки M_1 и M_2 и сектор g имеют тот же смысл, что и выше.

Лемма 4. *Пусть между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ не лежит ни одной сепаратрисы точки O, но лежит некоторая полутраектория $L^{(\,)}$, стремящаяся к состоянию равновесия O.*

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что ни через одну точку криволинейного сектора g, принадлежащего окрестности $U_\varepsilon(O)$, не проходит ни одна траектория, и при возрастании и при убывании t выходящая из области g.

Доказательство. Мы всегда можем предполагать, что у полутраектории $L^{(\,)}$, которая по условию леммы проходит через точки области g, есть точки, лежащие вне окружности C (в противном случае мы взяли бы окружность C' с центром в точке O радиуса меньшего, чем C, вне которой заведомо лежат точки этой полутраектории $L^{(\,)}$, и рассмотрели бы криволинейный сектор g', полностью аналогичный сектору g).

Пусть, следовательно, M — последняя общая точка полутраектории $L^{(\,)}$ с окружностью C. Обозначим через g_1 и g_2 криволинейные сектора, на которые полутраектория $L_M^{(\,)}$ делит сектор g. Предположим, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют точки сектора g, лежащие в $U_\varepsilon(O)$, через которые проходят траектории, и при возрастании и при убывании t выходящие из окружности C. Тогда, очевидно, хотя бы в одном из секторов g_1 или g_2

существуют лежащие в любой окрестности точки O, через которые проходят траектории, выходящие из окружности C и при убывании и при возрастании t. Предположим, что такие точки существуют в области g_1. В силу предыдущей леммы отсюда следует, что либо сама полутраектория $L^{(\,)}$ является сепаратрисой состояния равновесия O, либо существует сепаратриса состояния равновесия, лежащая между полутраекториями $L^{(\,)}$ и $L_1^{(\,)}$. Но это противоречит условию леммы, и, следовательно, лемма доказана.

Л е м м а 5. *Пусть между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ не лежит ни одной петли и ни одной сепаратрисы состояния равновесия O, но лежит не являющаяся сепаратрисой полутраектория $L^{(\,)}$, стремящаяся к состоянию равновесия O. Тогда у всякой траектории, проходящей через точки достаточно малой окрестности $U_\varepsilon(O)$, одна из полутраекторий лежит между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ (т. е. не выходя из сектора g, стремится к состоянию равновесия O). При этом лежащие между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ полутраектории, а также сами полутраектории $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$, все положительны или все отрицательны в зависимости от того, положительна или отрицательна полутраектория $L^{(\,)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства предположим противное, т. е. что среди стремящихся к состоянию равновесия O полутраекторий, лежащих между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ и самих этих граничных полутраекторий существует как положительная, так и отрицательная полутраектория.

В силу условий настоящей леммы и леммы 4 найдется $\varepsilon > 0$ такое, что через точки сектора g, принадлежащие $U_\varepsilon(O)$, не проходят траектории, и при возрастании и при убывании t выходящие из окружности C. Возьмем на полутраекториях $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ соответственно точки R_1 и R_2, столь близкие к точке O, чтобы они могли быть соединены простой дугой, целиком лежащей в секторе g и в окрестности $U_\varepsilon(O)$ (см. замечание к лемме 1). Пусть λ — такая дуга. Дуга λ делит сектор g на две области, при этом только одна из этих областей имеет точку O своей граничной точкой. Очевидно, всякая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия O и лежащая между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$, у которой есть точки вне окружности C, непременно должна войти в эту область и, следовательно, пересечь дугу λ. Кроме того, в силу условий леммы и выбора ε через все точки дуги λ (по построению содержащейся в $U_\varepsilon(O)$) могут проходить только лежащие между $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ и стремящиеся к O полутраектории, у которых есть точки вне окружности C.

Будем точку дуги λ (включая ее концы) называть точкой первого или второго типа в зависимости от того, проходит ли через нее положительная или отрицательная полутраектория. В силу сделанного предположения на дуге λ существуют точки обоих типов. При этом если какая-нибудь точка дуги λ является точкой первого (второго) типа, то и все близкие к ней точки дуги λ являются точками того же типа. Действительно, пусть, например, рассматриваемая точка P дуги λ первого типа, т. е. через нее проходит положительная полутраектория L^+, и пусть на ней точка P соответствует значению $t = t_0$. По условию леммы на полутраектории L^+ заведомо существуют соответствующие значениям $t < t_0$ точки, лежащие вне окружности C. В силу непрерывной зависимости от начальных значений у всех полутраекторий при $t = t_0$, проходящих через достаточно близкую к P точку дуги λ, также будут существовать лежащие вне окружности C точки, соответствующие значениям $t < t_0$. Но тогда у этих полутраекторий не может быть лежащих вне окружности C точек, соответ-

ствующих значениям $t > t_0$. Иначе через точки дуги λ проходили бы траектории, выходящие из окружности C и при возрастании и при убывании t, а это противоречит тому, что дуга λ лежит в $U_\varepsilon(O)$. Это, очевидно, означает, что все достаточно близкие к точке P точки дуги λ также являются точками первого типа. То же справедливо и для точек дуги второго типа. Но тогда, проводя рассуждение, полностью аналогичное неоднократно проводившемуся, мы покажем, что на дуге λ не могут одновременно существовать точки и первого и второго типа. Следовательно, все полутраектории, лежащие между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$, а также сами полутраектории $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ являются положительными или отрицательными в зависимости от того, является ли положительной или отрицательной полутраектория $L^{(\,)}$, существующая в силу условий леммы. Лемма доказана.

Следствие. Если одна из полутраекторий $L_1^{*(\,)}$, $L_2^{*(\,)}$ положительна, а другая отрицательна, то а) либо между полутраекториями $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ лежит хотя бы одна сепаратриса состояния равновесия O; б) либо полутраектории $L_1^{*(\,)}$ и $L_2^{*(\,)}$ — сепаратрисы, являющиеся продолжением одна другой; в) либо в секторе g существует петля.

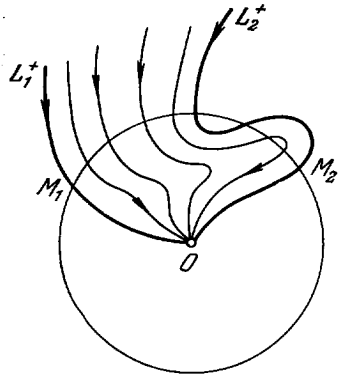


Рис. 196.

Сектор, через все точки которого, достаточно близкие к точке O, проходят только такие траектории, которые при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), не выходя из этого сектора, стремятся к состоянию равновесия O, а при убывании t (возрастании t) выходят из этого сектора, называется ω (α-)«*параболическим*» *сектором* (рис. 196).

Предположим теперь, что рассматривается только одна, стремящаяся к состоянию равновесия O полутраектория $L^{*(\,)}$. Пусть, как и выше, $\varepsilon_0 > 0$ таково, что в замкнутой окрестности $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$ кроме состояния равновесия O не лежит целиком ни одна особая траектория и C — окружность с центром в точке, радиуса меньшего ε_0, вне которой заведомо лежат точки полутраектории $L^{*(\,)}$.

Пусть M^* — последняя общая точка полутраектории $L^{*(\,)}$ с окружностью C и g — циклический сектор (т. е. область, граница которой состоит из окружности C и части M^*O полутраектории $L^{*(\,)}$).

Для циклического сектора справедливы леммы 6, 7 и 8, полностью аналогичные леммам 3, 4 и 5. Доказательство их опускается ввиду того, что оно совершенно такое же, как и доказательство лемм 3, 4, 5.

Лемма 6. *Пусть при любом* $\varepsilon > 0$ *существует точка области* g, *лежащая в* ε-*окрестности точки* O *такая, что проходящая через нее траектория и при возрастании и при убывании* t *выходит из окружности* C. *Тогда существует по крайней мере одна* ω- *и одна* α-*сепаратриса состояния равновесия* O, *одна из которых может совпадать с полутраекторией* $L^{*(\,)}$.

Лемма 7. *Если ни через одну точку криволинейного сектора* g *не проходит сепаратриса состояния равновесия* O, *но существует не являющаяся сепаратрисой полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия* O, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что через точки* $U_\varepsilon(O)$ *не проходят траектории и при возрастании и при убывании* t, *выходящие из окружности* C.

Лемма 8. *Пусть циклическом секторе* g *не лежит ни одной петли и ни одной сепаратрисы состояния равновесия* O, *но существует лежащая*

в g полутраектория $L^{()}$, не являющаяся сепаратрисой, стремящаяся к состоянию равновесия O. Тогда через все точки достаточно малой окрестности $U_\varepsilon(O)$ проходят только стремящиеся к состоянию равновесия полутраектории, имеющие точки вне окружности C, и все эти полутраектории, а также полутраектория $L^{()}$ положительны или все отрицательны в зависимости от того, является ли положительной или отрицательной полутраектория $L^{()}$.

Если через все точки некоторой окрестности состояния равновесия O проходят только положительные (отрицательные) полутраектории, стремящиеся к нему, то такое состояние равновесия называется *топологическим узлом* *). При этом топологический узел называется *устойчивым*, если все стремящиеся к нему полутраектории положительны, и *неустойчивым*, если все стремящиеся к нему полутраектории отрицательны.

Мы приведем ряд предложений, касающихся областей, заполненных петлями (т. е. траекториями, стремящимися к состоянию равновесия O и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$). Отметим, что при сделанном нами предположении относительно конечности числа особых элементов может существовать лишь конечное число ячеек, заполненных петлями (см. теорему 56 § 16).

Пусть, как и выше, окрестность $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$ не содержит целиком ни одной особой траектории кроме точки O, и пусть существует траектория L, целиком лежащая в $\overline{U_{\varepsilon_0}(O)}$ (стремящаяся, следовательно, к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, т. е. образующая петлю). Обозначим через σ простую замкнутую кривую, состоящую из траектории L и точки O, и через g_σ область внутри кривой σ. В силу выбора $U_{\varepsilon_0}(O)$ все траектории, проходящие через точки, лежащие внутри кривой σ, неособые и, следовательно, в силу теоремы 53 образуют петли, лежащие одна внутри другой.

Докажем следующую лемму:

Лемма 9. *При любом $\varepsilon > 0$ существует петля, лежащая внутри петли σ и в окрестности $U_\varepsilon(O)$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существует $\varepsilon > 0$ такое, что внутри окружности C радиуса ε с центром в точке O не может целиком лежать ни одной петли, принадлежащей области g_σ. Мы всегда можем считать, что $\varepsilon < \varepsilon_0$, и, кроме того, столь мало, что существуют точки траектории L, лежащие вне окружности C.

Обозначим через M^+ и M^- последние общие точки с окружностью C точки траектории L соответственно при возрастании и убывании t и через g и g' — криволинейные секторы, на которые полутраектории $L^+_{M^+}$ и $L^-_{M^-}$ делят круг C. Точки полутраекторий $L^+_{M^+}$ и $L^-_{M^-}$, очевидно, являются граничными и для областей g и g' и для области g_σ. Отсюда нетрудно видеть, что все достаточно близкие к точке O точки области g_σ являются точками одной (и только одной) из областей g и g', например области g. Наоборот, все достаточно близкие к точке O точки области g являются точками области g_σ.

В силу сделанного предположения в области g не может, следовательно, лежать ни одна петля целиком, так как всякая такая петля лежит и внутри σ_0 и внутри C. Но полутраектории $L^+_{M^+}$, $L^-_{M^-}$ — граничные для области g и не являются сепаратрисами (по самому выбору траектории L).

---

*) Очевидно, простой узел, как и простой фокус (см. главу IV), является топологическим узлом. Но топологическим узлом является и сложный фокус, а также другие сложные состояния равновесия (см. главу VIII).

Между ними не может лежать ни одной сепаратрисы (иначе внутри σ, а значит, и в окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$ лежала бы целиком особая траектория, что противоречит выбору ε_0).

А тогда в силу леммы 7 граничные для области g полутраектории L^+_{M+} и L^-_{M-} должны быть одновременно либо обе положительными, либо обе отрицательными, что противоречит определению этих полутраекторий. Полученное противоречие доказывает лемму.

Криволинейный сектор, содержащий петли и при этом только лежащие одна внутри другой, называется «*эллиптическим*» сектором (рис. 197).

Область внутри петли, образованной траекторией L, мы будем называть «*правильной эллиптической областью*» точки O или просто «*эллиптической областью*»*) (рис. 181) точки O, если в этой области не лежит ни одной особой траектории. Через все точки эллиптической области проходят петли, лежащие одна внутри другой, причем в силу доказанной леммы среди них можно указать петли, целиком лежащие внутри окружности с центром в точке O сколь угодно малого радиуса. Траекторию L, которая вместе с точкой O составляет замкнутую кривую σ, являющуюся границей рассматриваемой эллиптической области g_σ, мы также будем иногда называть «траекторией, образующей эллиптическую область» и будем также говорить, что эллиптическая область образована траекторией L. При этом траектория L может быть как особой, так и неособой. Если L — особая траектория, то соответствующая эллиптическая область g_σ, очевидно, является целой ячейкой, если L неособая, то g_σ является частью целой ячейки.

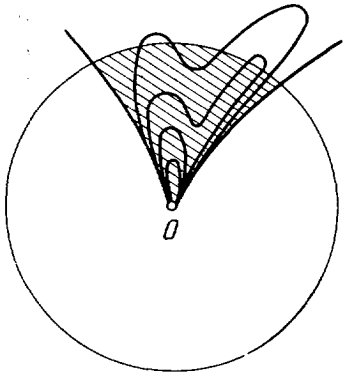


Рис. 197.

В настоящей главе всегда рассматривается только такая окрестность состояния равновесия O, которая кроме O не содержит целиком ни одной особой траектории. Поэтому все рассматриваемые в этой главе эллиптические области таковы, что образующие их траектории L являются неособыми траекториями.

3. Леммы об эллиптических областях. Пусть g_σ и g^*_σ — две эллиптические области, целиком лежащие в $U_{\varepsilon_0}(O)$. Возможны следующие случаи:

1) области g_σ и g^*_σ либо совпадают, либо одна из них является частью другой, т. е. траектории L и L^*, их образующие, либо совпадают, либо образуют петли, лежащие одна внутри другой;

2) области g_σ и g^*_σ не имеют общих точек, т. е. траектории L и L^* образуют петли, лежащие одна вне другой.

Очевидно, точки областей g_σ и g^*_σ в случае 1) принадлежат одной и той же ячейке, а в случае 2) — двум различным ячейкам. Мы будем говорить в случае 1), что эллиптические области g_σ и g^*_σ являются частью одна другой, а в случае 2), что область g_σ отлична от области g^*_σ или что области g_σ и g^*_σ *различны*. В дальнейшем, говоря, например, что у состоя-

*) В математической литературе «эллиптической областью» часто называется область, через все точки которой проходят траектории при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$, стремящиеся к состоянию равновесия O, среди которых могут быть как орбитно-устойчивые, так и орбитно-неустойчивые траектории.

ния равновесия O существует «n различных» «эллиптических областей», мы будем подразумевать, что эти области различны в указанном выше смысле. Пусть, как и в лемме 9, g_σ — эллиптическая область, образованная траекторией L. Имеет место следующая лемма:

Лемма 10. *Если у состояния равновесия O существует эллиптическая область g_σ, образованная траекторией L, то у этого состояния равновесия либо существует еще одна отличная от g_σ эллиптическая область, либо хотя бы одна ω- и одна α-сепаратриса.*

Доказательство. Пусть C — окружность с центром в точке O столь малого радиуса, что вне ее существуют точки траектории L, пусть N — одна из них. Пусть M_0^+ и M_0^- — последние общие с окружностью C точки полутраекторий L_N^+ и L_N^-, а g и g' — криволинейные секторы, на которые полутраектории L^+_{M+} и L^-_{M-} делят круг C. Предположим, что g — тот из секторов, у которого все достаточно близкие к O точки принадлежат области g_σ (см. предыдущую лемму). Рассмотрим сектор g'.

Одна из входящих в границу сектора g' полутраекторий положительна, а другая отрицательна, и эти полутраектории не являются сепаратрисами. Поэтому в силу следствия из леммы 5 либо существуют лежащие в секторе g' α- и ω-сепаратрисы состояния равновесия O, либо в этом секторе лежит петля σ'. В последнем случае эллиптическая область $g_{\sigma'}$ отлична от области g_σ, так как эти области содержатся соответственно в двух областях g и g', не имеющих общих точек. Лемма доказана.

Приведем еще одну лемму, касающуюся траекторий эллиптических областей. Пусть L_1 и L_2 — содержащиеся в окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$ траектории одной и той же эллиптической области точки O. Петли, образованные этими траекториями, лежат, следовательно, одна внутри другой. Предположим, что петля, образованная траекторией L_2, лежит внутри петли, образованной траекторией L_1. Обозначим через σ_1 простую замкнутую кривую, образованную траекторией L_1 и точкой O, и через σ_2 — простую замкнутую кривую, образованную траекторией L_2 и точкой O. Рассмотрим окружность C с центром в точке O, целиком лежащую в $U_{\varepsilon_0}(O)$ и столь малого радиуса, что у траекторий L_1 и L_2 существуют точки вне ее. Обозначим последние общие точки с окружностью C соответственно при возрастании и убывании t, у траекторий L_1^- — через M_1^+ и M_1^-, а у траектории L_2 — через M_2^+ и M_2^-. Выделенные из траекторий L_1 и L_2 полутраектории $L^+_{1M_1^+}$ и $L^-_{1M_1^-}$, $L^+_{2M_2^+}$ и $L^+_{2M_2^-}$ соответственно целиком лежат в круге C.

Обозначим через g_1 тот из криволинейных секторов, ограниченных полутраекториями $L^+_{1M_1^+}$ и $L^-_{1M_1^-}$, у которого все достаточные близкие к точке O точки лежат внутри кривой σ_1 (ср. лемму 9). Предположим, что дугой окружности C, входящей в границу этого сектора, является дуга $M_1^+M_1^-$. Так как петля, образованная траекторией L_2, лежит внутри петли, образованной траекторией L_1, то, очевидно, точки M_2^+ и M_2^- лежат на дуге $M_1^+M_1^-$.

Лемма 11. *На дуге $M_1^+M_1^-$ точка M_2^+ лежит между точками M_1^- и M_2^- (или что то же, точка M_2^- лежит между точкой M_2^+ и M_1^-* (рис. 198)).

Доказательство. Предположим противное, т. е. что точка M_2^+ не лежит между точками M_1^+ и M_2^- и что, следовательно, точка M_2^- лежит между точками M_1^+ и M_2^+.

Полутраектории $L^+_{2M_2^+}$ и $L^-_{2M_2^-}$ делят сектор g на три частичных сектора. При этом в один из этих секторов входят обе эти полутраектории. Обозначим его через g_1'. Нетрудно видеть, что все точки этого сектора, достаточно близкие к точке O, лежат внутри петли σ_2 и в этом секторе непременно лежат петли, содержащиеся внутри петли σ_2.

Так как мы предположили, что полутраектория $L^-_{2M_2^-}$ лежит между полутраекториями $L^+_{1M_1^+}$ и $L^+_{2M_2^+}$, то в границу одного из частичных секторов, на которые полутраектории $L^+_{2M_2^+}$ и $L^-_{2M_2^-}$ делят сектор g_1, входят полутраектории $L^+_{1M_1^+}$ и $L^-_{2M_2^-}$. Обозначим этот сектор через g_1''. Все точки этого сектора, достаточно близкие к точке O, лежат внутри кривой σ_1 и вне кривой σ_2. Так как одна из полутраекторий граничных для этого сектора положительна, а другая отрицательна, то в силу следствия из леммы 7 либо существует сепаратриса состояния равновесия O, лежащая между этими полутраекториями, либо существует лежащая между ними (т. е. в области g_1'') петля.

Но все достаточно близкие к точке O точки сектора g лежат внутри кривой σ_1, т. е. принадлежат одной ячейке. А отсюда, очевидно, следует, что сепаратрисы, лежащей между полутраекториями $L^+_{1M_1^+}$ и $L^-_{2M_2^-}$, не существует. Но не существует также и петли, лежащей в области g_1''. Действительно, такая петля лежала бы внутри кривой σ_1 и вне петли, лежащей в секторе g_1', которая в силу предыдущего заведомо существует и тоже лежит внутри кривой σ_1. Это невозможно, так как область внутри кривой σ_1 принадлежит одной эллиптической области g_{σ_1}, и все содержащиеся в ней петли лежат одна внутри другой. Полученное противоречие доказывает лемму.

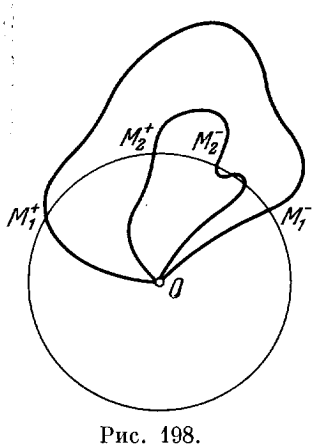


Рис. 198.

Следствие. Пусть g^* — тот из секторов, ограниченных двумя положительными (отрицательными) полутраекториями $L^+_{1M_1^+}$ и $L^+_{2M_2^+}$ ($L^-_{2M_2^-}$ и $L^-_{1M_1^-}$), выделенными из траекторий L_1 и L_2 одной и той же эллиптической области, у которой все достаточно близкие к O точки принадлежат той же эллиптической области.

Тогда: а) все достаточно близкие к O точки этого сектора лежат между петлями, образованными траекториями L_1 и L_2; б) этот сектор является ω (α)-параболическим. Полутраектории, лежащие в этом секторе, являются частями траекторий, образующих петли, лежащие вне петли, образованной траекторией L_2, и внутри петли, образованной траекторией L_1.

§ 18. «Элементарные области». Типы элементарных областей

1. Проведение дуги без контакта в параболическом секторе. Мы приведем сейчас три леммы, в которых рассматривается вопрос о проведении дуг без контакта и выделении с помощью дуг без контакта в окрестности состояния равновесия некоторых простейших областей.

Лемма 1. *Пусть l — простая дуга, не содержащая особых точек, а $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ — произвольные положительные числа. Тогда существуют: а) подразделение дуги l на частичные дуги $l_1, l_2, \ldots, l_n$; б) дуги без контакта $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ такие, что каждая из дуг λ_i лежит в ε-окрестности дуги l_i, и всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через точку дуги l_i, при некотором значении t^*, $|t^* - t_0| < \Delta$, пересекает дугу λ_i, не выходя до этого (т. е. при значениях между t_0 и t^*) из ε-окрестности дуги l_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы несправедливо. Пусть d — диаметр дуги l. Разделим дугу l на конечное

число частичных дуг диаметра $\frac{d}{2}$. Тогда, по крайней мере для одной из этих дуг, обозначим эту дугу через l',— утверждение леммы также не будет справедливым. Применяя то же рассуждение к дуге l' и т. д., мы получим последовательность вложенных друг в друга простых дуг

$$l \supset l' \supset l'' \supset l''' \supset \ldots$$

таких, что диаметр дуги l^j меньше, чем $\frac{d}{2^j}$, и для каждой из этих дуг утверждение леммы несправедливо (т. е. не существует подразделения дуги l^j на частичные дуги $l_i^{(j)}$ и дуг без контакта $\lambda_i^{(j)}$, лежащих в ε-окрестности $l_i^{(j)}$, для которых справедливо утверждение леммы). Обозначим общую точку дуг l^j через M_0. Пусть λ — какая-нибудь дуга без контакта, имеющая точку M_0 своей внутренней точкой и целиком лежащая в окрестности $U_\varepsilon(M_0)$. В силу леммы 1 § 3 каждая траектория, при $t = t_0$ проходящая через точки дуги λ с достаточно большим номером j (которая будет лежать в достаточно малой окрестности точки M_0), пересечет дугу λ при некотором значении t^*, $|t^* - t_0| < \Delta$, не выходя до этого из $U_\varepsilon(M_0)$. Но это, очевидно, означает, что для такой дуги l^j утверждение леммы справедливо, что противоречит сделанному предположению. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Аналогичная лемма справедлива и для простой замкнутой кривой C, на которой не лежит состояний равновесия. Для доказательства достаточно разбить кривую C на две простые дуги l_1 и l_2 и применить настоящую лемму к каждой из этих дуг.

Вернемся к рассмотрению криволинейного сектора g круга C. Пусть $\widetilde{L}^{(\,)}$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^{(\,)}$ — полутраектории, входящие в его границу, а M_1 и M_2 — последние общие точки этих полутраекторий с окружностью C. Рассмотрим случай, когда этот сектор ω-параболический. (Совершенно аналогично рассматривается случай α-параболического сектора.) Тогда через все точки сектора, лежащие в достаточно малой окрестности точки O, проходят только такие траектории, которые, не выходя из окружности C, при $t \to +\infty$ стремятся к состоянию равновесия O, а при убывании t выходят из окружности C, а входящие в его границу полутраектории являются положительными полутраекториями $\widetilde{L}^+_{M_1}$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$. Имеет место

Лемма 2. *Если криволинейный сектор g ω-параболический, то:* а) *всякие две точки P_0 и Q_0 входящих в его границу полутраекторий $\widetilde{L}_{M_1}$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$, соответственно, могут быть соединены дугой без контакта λ, целиком кроме концов лежащей в секторе g;* б) *дуга λ делит сектор g на две области и через все точки той из этих областей, в границу которой входит точка O (т. е. области, граница которой состоит из частей P_0O, Q_0O полутраекторий $\widetilde{L}^+_{M_1}$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$, точки O и дуги λ), проходят траектории, при $t \to +\infty$ стремящиеся к состоянию равновесия O, а при убывании t выходящие из этой области, пересекая дугу λ (и при этом в одной только точке).*

Доказательство. Покажем сначала, что существует хотя бы одна дуга без контакта, соединяющая некоторую точку полутраектории $\widetilde{L}^+_{M_1}$ с некоторой точкой полутраектории $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$. По самому определению ω-параболического сектора существует $\delta > 0$ такое, что через все точки сектора, принадлежащие $U_{\delta_0}(O)$, проходят траектории, которые при $t \to +\infty$, не выходя из сектора g, стремятся к состоянию равновесия O, а при убывании t выходят из этого сектора.

Пусть Q_1 и Q_2 — точки полутраекторий $\widetilde{L}^+_{M_1}$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$, соответственно, столь близкие к точке O, что существует соединяющая их простая дуга l (вообще говоря, конечно, не являющаяся дугой без контакта), целиком кроме концов лежащая в секторе g и в окрестности $U_\delta(O)$ (см. лемму 1 § 17). Очевидно, все траектории, которые при возрастании t, не выходя из сектора g, стремятся к состоянию равновесия O, имеют общие точки с этой дугой l.

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что ε-окрестность дуги l принадлежит $U_\delta(O)$, $U_\varepsilon(l) \subset U_\delta(O)$. В силу предыдущей леммы при указанном $\varepsilon > 0$ и любом $\Delta > 0$ *) существует такое подразделение дуги l на частичные дуги $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и такие дуги без контакта $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, где $\lambda_i \subset U_\varepsilon(l_i)$, что всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через точку дуги l_i, не выходя из $U_\varepsilon(l_i)$, пересекает дугу λ_i при значении t^*, $|t^* - t_0| < \Delta$.

Если бы какая-нибудь из траекторий сектора g или полутраектории $\widetilde{L}^+$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+$, не выходя из окружности C, дважды пересекали какую-нибудь из дуг λ_i, то эту дугу должны были бы пересекать все стремящиеся к состоянию равновесия O траектории. Тогда, очевидно, часть дуги λ_i между ее точками пересечения с полутраекториями $\widetilde{L}^+$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+$ была бы искомой дугой без контакта. Если же $n = 1$, т. е. все траектории, проходящие через точки дуги l, в частности полутраектории $\widetilde{L}^+$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+$, пересекают одну дугу без контакта λ, эта дуга и будет тогда искомой дугой без контакта. Пусть $n > 1$. Мы всегда можем, кроме того, считать дуги λ_i выбранными так, чтобы на них не было точек, лежащих вне сектора g, а также не было точек самой окружности C.

Предположим, что конец Q_1 дуги l является концом частичной дуги l_1, так что дуга l_1 лежит по отрицательную сторону полутраектории $\widetilde{L}^+$ **). Конец Q_2 дуги l является тогда концом дуги l_n, и эта дуга лежит по положительную сторону полутраектории $\widetilde{\widetilde{L}}^+$. Так как все траектории, проходящие через точки дуги l_1, пересекают дугу без контакта λ_1, то эта дуга λ_1 непременно имеет по одной (и только по одной) общей точке с полутраекторией $\widetilde{L}^+$ и с траекторией L_1, проходящей через отличный от точки Q_1 конец дуги l_1. Пусть A_0 и D_1 — общие точки полутраектории $\widetilde{L}^+$ и траектории L_1, соответственно, с дугой λ_1 (рис. 199).

Очевидно, траектория L_1 при $t \to +\infty$, не выходя из сектора g, стремится к состоянию равновесия O, а при убывании t выходит из окружности C.

Обозначим через N' последнюю при возрастании t общую точку траектории L_1 с окружностью C. Полутраектория $L^+_{1N'}$ делит криволинейный сектор g на два сектора g_1 и g_2 и входит в границу обоих этих секторов. Полутраектория $\widetilde{L}^+_{M_1}$ входит в границу одного сектора g_1, а полутраектория $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$ — в границу другого — g_2. При этом все точки части A_0D_1 дуги λ_1, отличные от концов, принадлежат сектору g_1.

Очевидно, все траектории, проходящие через часть A_0D_1 дуги без контакта λ_1, не выходя из части сектора g_1, ограниченной этой частью дуги λ_1, частями A_0O и D_1O полутраекторий $\widetilde{L}^+_{M_1}$ и $L^+_{1N'}$ и точкой O, при

*) Отметим, что в рассматриваемом случае, как это видно из дальнейшего, выбор $\Delta > 0$ не существен.

**) Это вытекает из того, что дуга кривой C, входящая границу сектора g, есть дуга M_1M_2.

$t \to +\infty$ стремятся к точке O. С другой стороны, все траектории, которые проходят через точки сектора g_1 и, не выходя из этого сектора, стремятся к состоянию равновесия O, имеют общие точки с частью A_0D_1 дуги λ_1.

Рассмотрим теперь последнюю при движении по дуге l от точки Q_1 к точке Q_2 общую точку этой дуги с полутраекторией $L^+_{1N'}$. Пусть E— эта точка. Часть EQ_2 дуги l не имеет, следовательно, общих точек с полутраекторией $L^+_{1N'}$, и все ее точки кроме концов принадлежат сектору g_2. Обозначим часть EQ_2 дуги l через l'. Сектор g_2 и дуга l' полностью аналогичны сектору g и дуге l.

Если точка E лежит на частичной дуге l_{i_2} $(i_2 > 1)$, то, очевидно, часть дуги l_{i_2} с концом в точке E, лежащая в секторе g_2, и дуги l_{i_2+1}, ..., l_n, а также часть дуги без контакта λ_{i_2}, лежащая в g_2, и дуги λ_{i_2+1}, . . ., λ_n являются для дуги l' частичными дугами подразделения и дугами без контакта, удовлетворяющими условиям леммы 1.

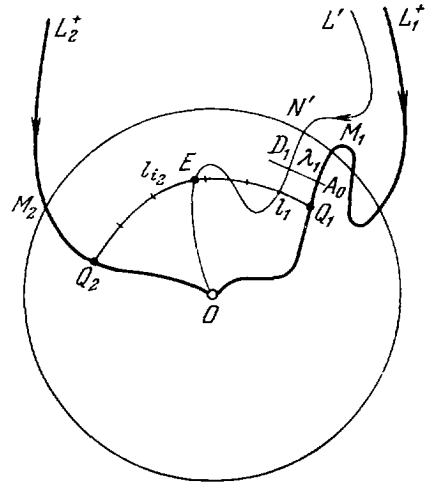


Рис. 199.

Если у дуги без контакта λ_{i_2} нет общей точки с полутраекторией $\widetilde{L}^+$, то нетрудно провести рассуждение, полностью аналогичное проведенному при рассмотрении сектора g. При этом части дуг l_{i_2} и λ_{i_2}, принадлежащие сектору g_2 (один из концов которых лежит на полутраектории $L^+_{1N'}$), траектория L_2, проходящая через конец дуги l_{i_2}, лежащий в секторе g_2, полностью аналогичны дугам l_1, λ_1 и траектории L_1. Мы получим, таким образом, подразделение сектора g_2 (с помощью полутраектории L_2^+) на два сектора, полностью аналогичное подразделению сектора g. При этом часть дуги λ_{i_2} между ее точками пересечения с траекториями L_1 и L_2, соответственно обозначим эти точки через A_1 и D_2, целиком кроме концов принадлежит тому из этих секторов, который имеет общую с сектором g_1 граничную полутраекторию $L^+_{1N'}$. Обозначим этот сектор через g_1'.

Рассуждая, далее, вполне аналогично и принимая во внимание, что дуг l_i — конечное число, мы в конце концов получим подразделение сектора g на некоторое число k $(k \leqslant n)$ частичных секторов

$$g_1 = g_1^0,\ g_1',\ \ldots,\ g_1^{(k)}.$$

Это подразделение осуществляется при помощи полутраекторий

$$L_1^+,\ L_2^+,\ \ldots,\ L_{k-1}^+,$$

выделенных из траекторий $L_1, L_2, \ldots, L_{k-1}$, проходящих через концы некоторых из дуг l_i: $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots$ Обозначим для единообразия полутраекторию $\widetilde{L}$ через L_0^+, а полутраекторию $\widetilde{\widetilde{L}}$ через L_k^+.

Полутраектории $L^+_{\alpha-1}$ и L^+_α входят в границу сектора $g_1^{(\alpha)}$ (рис. 200). Дуга без контакта λ_{i_α} имеет с полутраекториями $L_{\alpha-1}$ и L_α общие точки $A_{\alpha-1}$ и D_α соответственно, и часть $A_{\alpha-1}D_\alpha$ дуги λ_{i_α} целиком кроме концов лежит в секторе $g_1^{(\alpha)}$. Все траектории, которые, не выходя из этого сектора, при $t \to \infty$ стремятся к состоянию равновесия O, пересекают эту часть

дуги λ_{i_α} (и при этом в одной только точке). Рассмотрим сектор $g_1^{(\alpha)}$ вместе с граничными для него полутраекториями $L_{\alpha-1}$ и L_α.

Пусть на траекториях, пересекающих часть $A_{\alpha-1}D_\alpha$ дуги без контакта λ_{i_α}, выбрано движение, при котором точкам, лежащим на этой дуге, соответствует значение $t = t_0^{(\alpha)}$. При всех значениях $t > t_0^{(\alpha)}$ эти траектории не имеют общих точек с дугой λ_{i_α}. В силу леммы 8 § 3 всякие две точки P' и P'' полутраекторий $L_{\alpha-1}^+$ и L_α^+, соответствующие значениям $t' \geqslant t_0^{(\alpha)}$ и $t'' \geqslant t_0^{(\alpha)}$, можно соединить дугой без контакта, все точки которой являются точками траекторий, пересекающих дугу $A_{\alpha-1}D_\alpha$.

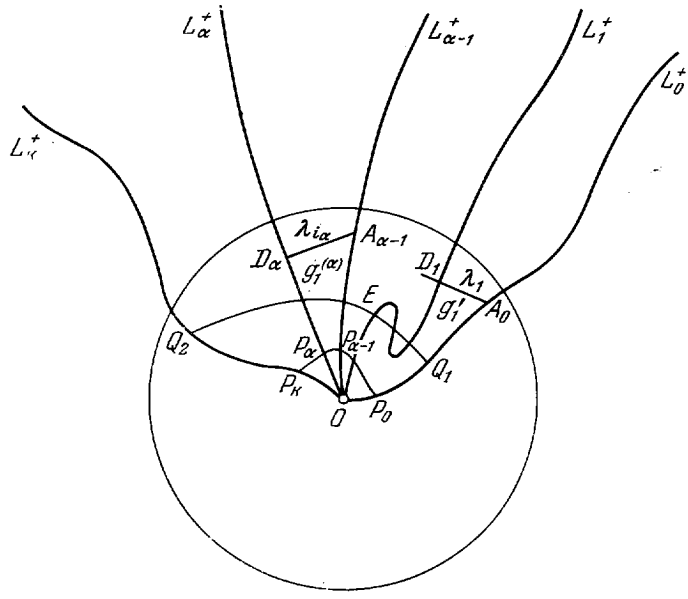


Рис. 200.

Возьмем теперь на полутраектории L_0^+ точку P_0, соответствующую значению $t > t_0^{(0)}$ на полутраектории L_k^+, точку P_k, соответствующую значению $t \geqslant t_0^{(k)}$, и на каждой полутраектории L_α^+ ($\alpha = 1, 2, \ldots, k-1$) по точке P_α, соответствующей значению $t \geqslant t_0^{(\alpha)}$.

Заметим, что в зависимости от того, рассматривается ли полутраектория $L_{\alpha-1}^+$ как граничная для сектора $g_1^{(\alpha-1)}$ или как граничная для сектора $g_1^{(\alpha)}$, на ней выбирается либо движение, при котором точке $D_{\alpha-1}$ соответствует $t = t_0^{\alpha-1}$, либо движение, при котором точке $A_{\alpha-1}$ соответствует $t = t_0^{(\alpha)}$. Эти движения могут быть различны. Точка P_α при первом из этих движений соответствует значению $t_1^{(\alpha-1)} > t_0^{(\alpha-1)}$, а при втором — $t_1^{(\alpha)} > t_0^{(\alpha)}$. В силу леммы 8 § 3 всякие две точки P_α и $P_{\alpha+1}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots, k-1$) можно соединить дугой без контакта, целиком (кроме концов) лежащей в секторе $g_1^{(\alpha)}$. Кроме того, дуги без контакта, соединяющие точки P_α, $P_{\alpha+1}$ и $P_{\alpha+1}$, $P_{\alpha+2}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, k-1$), можно взять такими (см. замечание к лемме 8 § 3), чтобы в их общем конце $P_{\alpha+1}$ у них была одинаковая касательная. А тогда дуга λ, составленная из всех таких дуг без контакта $P_\alpha P_{\alpha+1}$ ($\alpha = 1, \ldots, k-1$), будет дугой без контакта, соединяющей точки P_0 и P_k и целиком (кроме концов) лежащей в секторе g. Таким образом, доказано существование одной дуги без

контакта, соединяющей точку полутраектории $\widetilde{L}^+$ с точкой полутраектории $\widetilde{\widetilde{L}}^+$ и целиком кроме концов лежащей в секторе g.

Рассмотрим область, являющуюся частью сектора g, граница которой состоит из частей P_0O и P_kO, полутраекторий $\widetilde{L}^+$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+$, точки O и дуги λ. Обозначим эту область через g_N. Очевидно, все пересекающие дугу λ траектории имеют с этой дугой только одну общую точку, при возрастании t входят внутрь области g_N и, не выходя из нее, при $t \to +\infty$ стремятся к состоянию равновесия O. Кроме того, в силу предположений, сделанных относительно сектора g, в этом секторе, а следовательно, и в области g_N не лежит ни одна петля. Поэтому все траектории, проходящие через точки области g_N, при убывании t выходят из этой области и пересекают дугу λ. При возрастании t эти траектории, очевидно, не выходя из области g_N, стремятся к состоянию равновесия. Таким образом, для дуги λ утверждение леммы доказано.

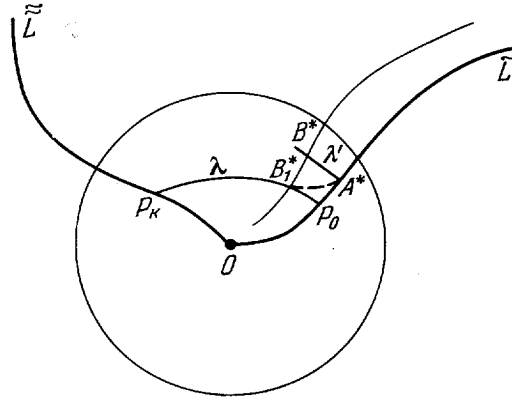


Рис. 201.

Покажем, что любая точка A^* полутраектории $\widetilde{L}^+_{M_1}$ может быть соединена с любой точкой D^* полутраектории $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$ дугой без контакта, целиком кроме концов лежащей в секторе g.

Для этого достаточно показать, что любая точка полутраектории $\widetilde{L}^+_{M_1}$ и любая точка полутраектории $\widetilde{\widetilde{L}}^+_{M_2}$ могут быть соединены с некоторой произвольно выбранной точкой дуги λ дугами без контакта, лежащими в секторе g и имеющими в выбранной точке ту же касательную, что и дуга λ.

Пусть на всех траекториях, пересекающих дугу λ, точкам, лежащим на этой дуге, соответствует значение $t = t_0$. Если точка A^* полутраектории $\widetilde{L}^+_{M_1}$ соответствует значению $t > t_0$, то существование дуги без контакта, соединяющей точку A^* с выбранной точкой дуги λ, непосредственно следует из замечания 3 к лемме 8 § 3. Рассмотрим случай, когда точка A_0 соответствует значению $t_1 < t_0$. Проведем вспомогательную дугу λ' с концом в точке A^*, кроме концов лежащую в секторе g. Возьмем на этой дуге λ' часть A^*B^* столь малую, чтобы все траектории, пересекающие эту часть при возрастании t, не выходя из сектора g, пересекали дугу λ (см. лемму 5 § 3), и при этом траектория, проходящая через точку B^*, пересекла дугу λ в точке B_1^*.

Очевидно, всегда можно соединить точки A^* и B_1^* дугой без контакта λ'', лежащей в элементарном четырехугольнике $A^*B^*B_1^*P_0$ (и, следовательно, лежащей в секторе g). Кроме того, эту дугу λ'' всегда можно взять так, чтобы в точке B_1^* касательная к ней совпадала с касательной к дуге λ. Тогда дуга, состоящая из дуги λ'' и части $B_1^*P_k$ дуги λ, является дугой без контакта, соединяющей точку A^* с P_k, обладающей требуемыми свойствами.

Аналогично рассуждая относительно точки D^*, можно доказать существование дуги без контакта, лежащей в g и соединяющей точки A^* и D^*.

Справедливость утверждения б) леммы в случае любой, лежащей в секторе g дуги без контакта, соединяющей точки полутраекторий $\widetilde{L}^+$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+$, устанавливается так же как и в случае дуги λ. Лемма доказана.

Замечание. Так как окружность C можно взять сколь угодно малого радиуса, то, очевидно, при любом $\eta > 0$ всегда существует дуга без контакта, соединяющая достаточно близкие к точке O точки A^* и D^* полутраекторий $\widetilde{L}^+$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+$, соответственно, целиком лежащая в $U_\eta(O)$.

Область g_N, граница которой состоит из частей A^*O и D^*O полутраекторий $\widetilde{L}^+$ и $\widetilde{\widetilde{L}}^+$ точки O и дуги без контакта λ^*, соединяющей точки A^* и D^*, мы будем называть *правильным параболическим сектором* (или иногда просто *параболическим сектором*, где это не может повести к недоразумению). При этом эта область называется ω-параболическим сектором или α-параболическим сектором в зависимости от того, стремятся ли полутраектории к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда через *все* отличные от точки O точки некоторой достаточно малой окрестности $U_\delta(O)$ проходят траектории, которые при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), не выходя из окружности C, стремятся к состоянию равновесия O, а при убывании (возрастании) t выходят из окружности C (так что O является топологическим узлом). Тогда имеет место следующая лемма, полностью аналогичная предыдущей.

Лемма 3. *Существует такой цикл без контакта, целиком лежащий внутри окружности C, содержащей точку O внутри, что все отличные от состояния равновесия O траектории, проходящие через точки внутри этого цикла при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), стремятся к состоянию равновесия O, а при убывании (возрастании) t выходят из цикла без контакта.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда все траектории, проходящие через точки $U_\delta(O)$, стремятся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$, а при убывании t выходят из окружности C. Пусть L_1^+ и L_2^+ — две такие полутраектории и M_1 и M_2 — их последние общие точки с окружностью C. Части M_1O и M_2O полутраекторий L_1^+ и L_2^+ вместе с точкой O делят область внутри окружности C на два сектора g_1 и g_2, для каждого из которых, очевидно, справедлива лемма 2. Мы можем, следовательно, провести дугу без контакта λ_1, соединяющую некоторую точку A на L_1^+ и некоторую точку B на L_2^+ и кроме концов A и B лежащую внутри g_1, и дугу без контакта λ_2, соединяющую точку A и точку B, кроме концов A и B лежащую внутри g_2. Кроме того, всегда можно взять дуги без контакта λ_1, λ_2 такими, чтобы в точках A и B они имели бы одинаковые касательные. Тогда дуги λ_1 и λ_2 вместе образуют цикл без контакта σ, целиком лежащий внутри окружности C. Очевидно, точка O лежит внутри кривой σ. С помощью рассуждения, полностью аналогичного проведенному при доказательстве пункта б) предыдущей леммы, нетрудно убедиться в справедливости последнего утверждения настоящей леммы.

Замечание. Сколь бы малое $\eta > 0$ мы ни взяли, всегда можно в рассматриваемом случае цикл без контакта провести так, чтобы он лежал целиком в $U_\eta(O)$. Область внутри цикла без контакта называется *полной параболической* (*узловой*) *областью* и при этом ω- или α-параболической в зависимости от того, стремятся ли проходящие через нее траектории к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

2. Проведение дуг без контакта в эллиптической области. Рассмотрим теперь вопрос о проведении дуг без контакта в эллиптических областях. Пусть, как и выше, окрестность $U_{\varepsilon_0}(O)$ кроме O, не содержит целиком

ни одной особой траектории. Предположим, что существуют траектории, целиком лежащие в окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$ и, следовательно, образующие петли. Пусть L_1 и L_2 — две траектории, принадлежащие одной и той же ячейке и, следовательно, образующие петли, лежащие одна внутри другой. Предположим для определенности, что петля, образованная траекторией L_2, лежит внутри петли, образованной траекторией L_1. Обозначим через σ_1 и σ_2 простые замкнутые кривые, соответственно состоящие из траектории L_1 и точки O и из траектории L_2 и точки O. Пусть w — область, состоящая из точек, лежащих внутри кривой σ_1 и вне кривой σ_2; все точки w принадлежат одной ячейке (рис. 202). Имеет место следующая лемма.

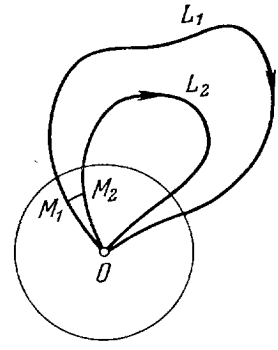


Рис. 202.

Лемма 4. *Существует дуга без контакта, соединяющая произвольную точку траектории L_1 с произвольной точкой траектории L_2, целиком кроме концов лежащая в области w и пересекающая все траектории, проходящие через точки области w, и каждую из этих траекторий в одной только точке.*

Доказательство этой леммы проводится следующим элементарным образом: сначала строится дуга без контакта, соединяющая какие-нибудь точки M_1 и M_2 (рис. 202) на частях траекторий L_1 и L_2 в некоторой достаточно малой окрестности точки O (см. лемму 2), а затем используется лемма 5 § 3.

Пусть теперь g_{σ_0} — правильная эллиптическая область внутри петли σ_0, образованной траекторией L_0 и точкой O.

Лемма 5. *Существует гладкая простая дуга, соединяющая произвольную точку A_0 траектории L_0 с точкой O, лежащая целиком (кроме концов A_0 и O) в области g_{σ_0}, которая во всех отличных от O точках не имеет контактов и пересекает все траектории, проходящие через точки области g_{σ_0}, и каждую в одной только точке.*

Доказательство. Пусть $\{C_i\}$ — последовательность окружностей с центром в точке O, радиусы которых стремятся к нулю при $n \to \infty$, и пусть $\{L_i\}$ — последовательность проходящих через точки области g_{σ_0} траекторий таких, что каждая траектория L_i целиком лежит внутри окружности C_i, в силу леммы 9 § 17 такие траектории всегда существуют. Обозначим через σ_i простую замкнутую кривую, образованную траекторией L_i и точкой O, и пусть w_i — область, состоящая из всех точек, расположенных внутри σ_i и вне σ_{i+1}. Возьмем на каждой из траекторий L_i точку A_i. В силу предыдущей леммы точки A_i и A_{i+1} можно соединить дугой без контакта λ_i, целиком (кроме концов A_i и A_{i+1}) лежащей в области w_i. Эта дуга пересекает все траектории области w_i и каждую в одной только точке. При этом дуги λ_i можно провести так, чтобы каждые две дуги λ_i и λ_{i+1} имели в их общей точке A_{i+1} общую касательную. Нетрудно видеть, что соединение всех этих дуг λ_i и точки O является простой дугой, обладающей всеми указанными в лемме свойствами.

3. Правильная седловая область. Пусть теперь L_1^+ и L_2^- — ω- и α-сепаратрисы состояния равновесия O, являющиеся продолжением друг друга с положительной (отрицательной) стороны. Пусть, как и выше, C — окружность с центром в точке O радиуса меньшего, чем ε_0 (не содержащая

внутри кроме O целых особых траекторий), а M_1 и M_2 — последние общие с окружностью C точки полутраектории L_1^+ и L_2^- (рис. 203). Рассмотрим произвольные точки Q и P, принадлежащие соответственно частям M_1O и M_2O полутраекторий L_1^+ и L_2^- и проходящие через эти точки дуги без контакта l_1 и l_2. В силу самого определения сепаратрисы и ее продолжения с положительной (отрицательной) стороны (см. § 15, пп. 5, 6) можно выделить части QA и PB, соответственно, дуг l_1 и l_2 такие, что

а) часть QA дуги l_1 лежит целиком внутри окружности C по положительную (отрицательную) сторону полусепаратрисы L_1^+; б) часть PB дуги l_2 лежит целиком внутри окружности C по положительную (отрицательную) сторону полусепаратрисы L_2^-; в) всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через отличную от Q точку дуги QA, при некотором значении $t > t_0$

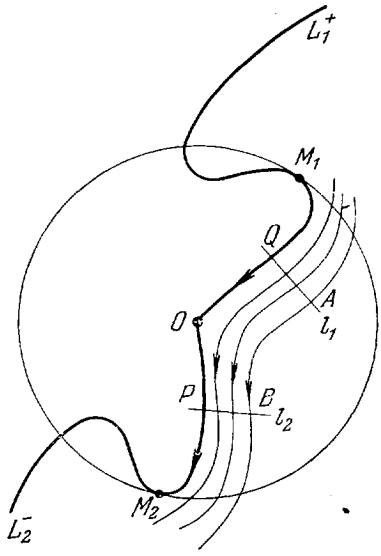


Рис. 203.

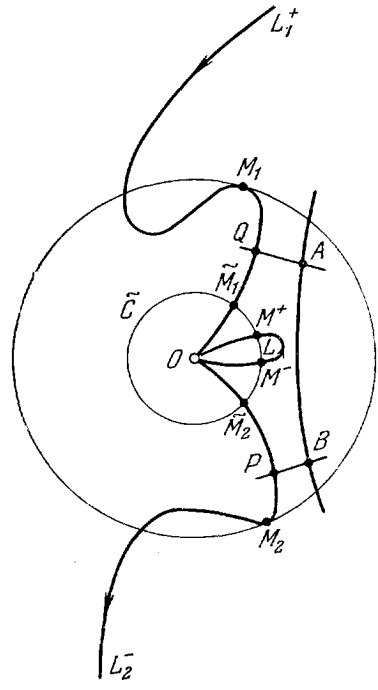


Рис. 204.

(не выходя до этого из окружности C) пересекает дугу PB и при дальнейшем возрастании t выходит из окружности C; при этом траектория, проходящая через точку A, пересекает дугу PB в точке B; г) всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через отличную от P точку дуги PB, при некотором значении $t < t_0$ (не выходя до этого из окружности C) пересекает дугу QA (причем траектория, проходящая через точку B, проходит и через точку A) и при дальнейшем убывании t выходит из окружности C.

Пусть γ — лежащая внутри окружности C простая замкнутая кривая, состоящая из части QO полутраектории L_1^+, точки O, части PO полутраектории L_2^-, дуги без контакта PB дуги AB траектории, проходящей через точки A и B и дуги без контакта QA (рис. 203). Обозначим через g_C область внутри кривой γ. Очевидно, эта область является частью одного из криволинейных секторов, ограниченных полутраекториями L_1^+ и L_2^-. Будем этот сектор обозначать через g.

Лемма 6. *Всякая траектория, проходящая через точку области g_C, при возрастании t пересекает дугу без контакта PB, а при убыва-*

нии t — дугу без контакта QA и каждую в точке, отличной от концов этих дуг.

Доказательство. Так как всякая траектория, проходящая через точку области g_C и пересекающая одну из дуг QA и PB, пересекает и вторую, то для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что не существует траектории, проходящей через точку g_C и не пересекающей ни одну из этих дуг. Предположим, что такая траектория существует. Обозначим ее через L. Она целиком лежит в области g_C (так как выйти из этой области траектории могут, только пересекая одну из дуг без контакта QA и PB) и, следовательно, образует петлю, целиком лежащую в области g_C (а значит, и в секторе g). Рассмотрим окружность $\widetilde{C}$ с центром в точке O столь малого радиуса, чтобы вне ее лежали точки траектории L (рис. 204). Пусть $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$ — последние общие точки с окружностью $\widetilde{C}$ полутраекторий L_1^+ и L_2^- соответственно и M^+ и M^- — последние общие точки с окружностью $\widetilde{C}$ при возрастании и убывании t траектории L. Точки M^+ и M^- лежат на дуге $\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2$ окружности $\widetilde{C}$, и, следовательно, полутраектория, являющаяся продолжением полутраектории L_1^+ с отрицательной (положительной) стороны, заведомо отлична от полутраектории L_2^-. Но это, очевидно, противоречит тому, что по условию леммы полутраектория L_2^- является продолжением полутраектории L_1^+ (т. е. продолжением относительно любой окружности радиуса меньшего, чем окружность C). Лемма доказана.

Замечание. При любом $\varepsilon > 0$ можно построить седловую область между сепаратрисами L_1^+ и L_2^-, аналогичную рассматриваемой в настоящей лемме, целиком лежащую в окрестности $U_\varepsilon(O)$.

Мы будем называть область g_C *правильной гиперболической (или седловой) областью* между полутраекториями L_1^+ и L_2^-, *опирающейся на дуги без контакта QA, PB*. Дуги без контакта QA и PB будем называть *седловыми дугами*. В дальнейшем мы будем также рассматривать замыкание такой области, т. е. замкнутую гиперболическую область $\bar{g}_C$.

4. Топологическая тождественность разбиений на траектории элементарных областей одинакового типа. Будем называть *элементарный четырехугольник* (рис. 205, *а*) (см. § 3, п. 6), а также выделенные в предыдущем параграфе замкнутые области— замкнутый *правильный параболический сектор* (рис. 205, *б*), *замкнутую правильную седловую область* (рис. 205, *в*) *и замкнутую правильную эллиптическую область* (рис. 205, *г*) *элементарными замкнутыми областями*. Эти элементарные замкнутые области являются теми «кирпичами», на которые может быть разложено, как мы увидим в дальнейшем, всякое разбиение на траектории. В настоящем параграфе рассматривается вопрос (геометрически совершенно очевидный) *о топологической тождественности разбиения на траектории* у всяких двух элементарных замкнутых областей одинакового типа.

Справедлива следующая лемма, элементарное доказательство которой мы опускаем:

Лемма 7. *Топологические структуры разбиения на траектории всех замкнутых элементарных областей следующих типов*: 1) *элементарного четырехугольника*; 2) *правильного параболического сектора*; 3) *правильной эллиптической области*; 4) *правильной седловой области — различны между собой.*

Перейдем теперь к доказательству тождественности топологической структуры разбиения на траектории замкнутых областей одного и того же

типа: двух элементарных четырехугольников $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}^*$, двух правильных параболических секторов $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$, двух седловых областей $\bar{g}_C$ и $\bar{g}_C^*$, двух замкнутых эллиптических областей $\bar{g}_\sigma$ и $\bar{g}_\sigma^*$. Каждая пара указанных замкнутых элементарных областей заполнена дугами траекторий, полутраекториями и траекториями, принадлежащими либо двум различным динамическим системам D и $\tilde{D}^*$, либо одной и той же динамической системе. В приводимых ниже леммах доказывается топологическая тождественность разбиения на траектории одноименных замкнутых элементарных областей и при этом одновременно доказывается существование такого топологического отображения этих замкнутых областей друг на друга, при котором сохраняется некоторое заданное соответствие между точками граничных дуг без контакта и граничных дуг траекторий, полутраекторий или траекторий.

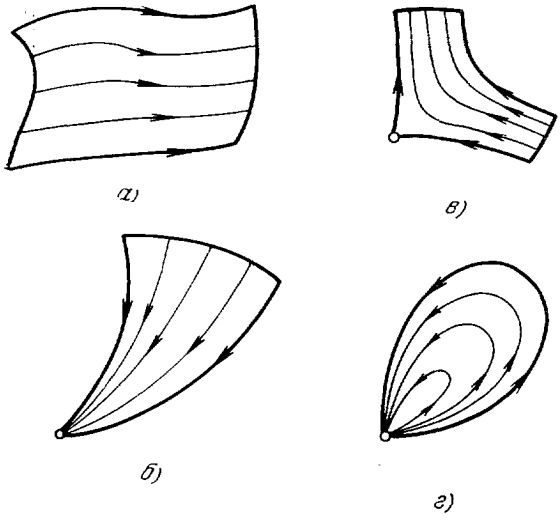


Рис. 205.

Так как мы рассматриваем всегда две одноименные замкнутые области, то мы будем говорить одновременно об обеих этих областях, помещая все касающееся одной из них в скобки.

Начнем с рассмотрения элементарного четырехугольника.

Обозначим входящие в границу четырехугольника $\bar{\Gamma}$ ($\bar{\Gamma}^*$) дуги без контакта через l_1 и l_2 (l_1^* и l_2^*), дуги траекторий — через S_1 и S_2 (S_1^* и S_2^*), кроме того, пусть A_1 (A_1^*) — общий конец дуг l_1 и S_1 (l_1^* и S_1^*), B_1 (B_1^*) — общий конец дуг l_1 и S_2 (l_1^* и S_2^*), A_2 (A_2^*) — общий конец дуг l_2 и S_1 (l_2^* и S_1^*), B_2 (B_2^*) — общий конец дуг l_2 и S_2 (l_2^* и S_2^*).

Предположим, что между точками дуг l_1 и l_1^*, а также S_1 и S_1^*, S_2 и S_2^* задано топологическое соответствие, при котором точка A_1 соответствует точке A_1^* и, следовательно, точка B_1 соответствует точке B_1^*, точка A_2 — точке A_2^*, и точка B_2 — точке B_2^*.

Лемма 8. *Существует топологическое отображение элементарных четырехугольников $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}^*$ друг на друга, переводящее траектории в траектории и сохраняющее заданное топологическое соответствие между точками дуг без контакта l_1 и l_1^* или l_2, l_2^* и дуг траекторий S_1 или S_1^* или S_2 и S_2^*.*

Доказательство. Пусть

$$x = f_1(s), \quad y = g_1(s), \qquad a_1 \leqslant s \leqslant b_1$$

и

$$x = f_1^*(s^*), \quad y = g_1^*(s^*), \qquad a_1^* \leqslant s^* \leqslant b_1^*$$

— параметрические уравнения дуги l_1 и l_1^* (значения a_1 и a_1^* соответствуют точкам A_1 и A_1^*, а значения b_1 и b_1^* точкам B_1 и B_1^*).

Пусть при выбранном на траекториях четырехугольника $\bar{\Gamma}$ движении общие точки этих траекторий с дугой l_1 соответствуют значению $t = t_0$,

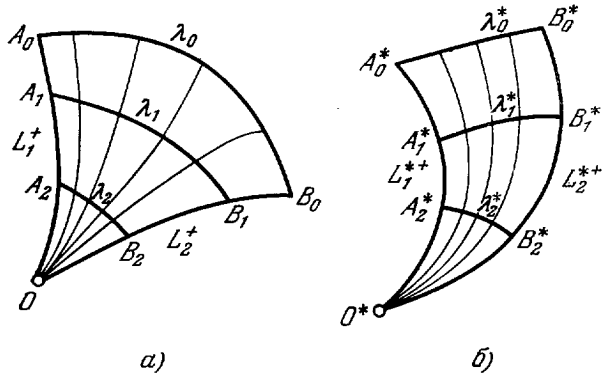
а общие точки с дугой l_2 — значениям $t = \chi(s)$. Совершенно аналогично пусть при выбранном на траекториях четырехугольника $\bar{\Gamma}^*$ движении общие точки этих траекторий с дугой l_1^* соответствуют значениям $t^* = t_0^*$, а общие точки с дугой l_2^* — значениям $t^* = \chi^*(s^*)$. С помощью регулярного отображения (см. лемму 10 § 3) четырехугольник $\bar{\Gamma}$ отображается на замкнутую область плоскости (s, t), определенную неравенствами

$$a_1 \leqslant s \leqslant b_1, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \chi(s), \tag{1}$$

а четырехугольник $\bar{\Gamma}^*$ — на замкнутую область плоскости (t^*, s^*), определенную неравенствами

$$a_1^* \leqslant s^* \leqslant b_1^*, \qquad t_0^* \leqslant t^* \leqslant \chi^*(s^*). \tag{2}$$

Заданное заранее топологическое отображение между дугами без контакта l_1 и l_1^* и дугами траекторий S_1 и S_1^*, S_2 и S_2^*, очевидно, индуцирует топологическое отображение между отрезками прямых плоскости (t,s) и (t^*,s^*), соответствующих этим дугам и входящим в границы замкнутых областей, определенных неравенствами (1) и (2). В силу леммы 8 п. 7 § 6 дополнения между замкнутыми областями, определенными неравенствами (1) и (2), можно установить топологическое отображение, при котором между точками граничных отрезков сохраняется заданное соответствие, и отрезки прямых $s = \text{const}$ отображаются в отрезки прямых $s^* = \text{const}$. Если затем поставить друг другу в соответствие точки $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}^*$ с соответствующими друг другу парами значений (t, s) и (t^*, s^*), то тем самым будет установлено топологическое отображение между четырехугольниками $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}^*$, обладающее требуемыми свойствами. Лемма доказана.



а) *б)*

Рис. 206.

Пусть теперь $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$ — два параболических сектора (рис. 206, *а*, *б*). Мы всегда можем предполагать, что оба сектора ω-параболические. В случае, когда оба эти сектора α-параболические или один ω-параболический, а другой α-параболический, можно заменой параметра t на $-t$ в одном или обоих секторах прийти к рассматриваемому случаю.

Пусть λ и λ^* — дуги без контакта, O и O^* — состояния равновесия, а L_1^+, L_2^+ и L_1^{*+} L_2^{*+} — полутраектории, входящие, соответственно, в границу $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$. Пусть A_0 и B_0 и, соответственно, A_0^* и B_0^* — концы дуг λ и λ^*, являющиеся концами полутраекторий L_1^+, L_2^+ и, соответственно, L_1^{*+}, L_2^{*+}. Предположим, что между точками дуг λ и λ^*, а также между точками L_1^+ и L_1^{*+}, L_2^+ и L_2^{*+} установлено топологическое соответствие, при котором точкам A_0 и B_0 соответствуют точки A_0^* и B_0^*.

Лемма 9. *Существует топологическое отображение замкнутого параболического сектора $\bar{g}_N$ на замкнутый параболический сектор $\bar{g}_N^*$, при котором между точками дуг без контакта λ и λ^* и полутраекто-*

рий L_1^+ и L_1^{*+}, L_2^+ и L_2^{*+} сохраняется заданное топологическое соответствие.

Доказательство. Рассмотрим последовательность стремящихся к нулю положительных чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$ ($\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$). Проведем в секторе $\bar{g}_N$ дугу без контакта λ_1 с концами в точках A_1 и B_1 полутраекторий L_1^+ и L_2^+ (отличных от точек A_0 и B_0) и в секторе $\bar{g}_N^*$ — дугу λ_1^* с концами в отличных от A_0^* и B_0^* точках A_1^* и B_1^* полутраекторий L_1^{*+} и L_2^{*+}, соответствующих точкам A_1 и B_1, по заданному в силу условий леммы топологическому соответствию между точками пары полутраекторий L_1^+ и L_1^{*+} и пары L_2^+ и L_2^{*+}. Дуга λ_1 (λ_1^*), очевидно, делит сектор $\bar{g}_N$ ($\bar{g}_N^*$) на две замкнутые области (при этом она — общая граничная дуга этих двух областей), именно, на: а) правильный параболический сектор $\bar{g}_{1N}$($\bar{g}_{1N}^*$), граница которого состоит из дуги λ_1 (λ_1^*) частей A_1O и B_1O ($A_1^*O^*$ и $B_1^*O^*$) полутраекторий L_1^+ и L_2^+ (L_1^{*+} и L_2^{*+}) и точки O (O^*); б) элементарный четырехугольник $\bar{\Gamma}_1$ ($\bar{\Gamma}_1^*$), граница которого состоит из дуг λ и λ_1 (λ^* и λ_1^*) и дуг A_0A_1 и B_0B_1 ($A_0^*A_1^*$ и $B_0^*B_1$) полутраекторий L_1^+ и L_2^+ (L_1^{*+} и L_2^{*+}). Принимая во внимание замечание к лемме 2, дуги λ_1 и λ_1^* всегда могут быть взяты так, чтобы сектор $\bar{g}_N$ целиком лежал в $U_{\varepsilon_1}(O)$, а $\bar{g}_N^*$ — в $U_{\varepsilon_1}(O^*)$. Установим топологическое отображение четырехугольника $\bar{\Gamma}_1$ на четырехугольник $\bar{\Gamma}_1^*$, при котором траектории переводятся в траектории и сохраняется заданное топологическое соответствие между точками дуг λ и λ^* и точками дуг полутраекторий L_1^+ и L_1^{*+}, L_2^+ и L_2^{*+}, входящих в границы этих четырехугольников. При этом мы получаем определенное топологическое соответствие между точками дуг λ_1 и λ_1^*.

Рассмотрим теперь замкнутые параболические секторы $\bar{g}_{1N}$ и $\bar{g}_{1N}^*$, полностью аналогичные $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$. Так же, как и секторы g_N и g_N^*, разделим каждый из секторов $\bar{g}_{1N}$ и $\bar{g}_{1N}^*$ надлежащим образом выбранными дугами без контакта λ_2 и λ_2^* соответственно (концы A_2B_2 и $A_2^*B_2^*$ этих дуг являются точками полутраекторий L_1^+, L_2^+, L_1^{*+}, и L_2^{*+}, соответствующими друг другу по заданному соответствию между точками этих полутраекторий) на две замкнутые области: а) замкнутый параболический сектор $\bar{g}_{2N} \in U_{\varepsilon_2}(O)$ ($\bar{g}_{2N}^* \in U_{\varepsilon_2}(O^*)$); б) элементарный четырехугольник $\bar{\Gamma}_2$ ($\bar{\Gamma}_2^*$). Так же, как и в случае четырехугольников $\bar{\Gamma}_1$ и $\bar{\Gamma}_1^*$, установим топологическое отображение четырехугольника $\bar{\Gamma}_2$ на $\bar{\Gamma}_2^*$, переводящее траектории в траектории и сохраняющее между точками дуг λ_1 и λ_1^* и полутраекторий L_1^+ и L_1^{*+}, L_2^+ и L_2^{*+}, входящих в границы этих четырехугольников, уже существующее соответствие. Продолжая аналогичные рассуждения через k шагов, мы получаем топологическое соответствие между всеми теми точками секторов $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$, которые не принадлежат параболическим секторам $\bar{g}_{kN}$ и $\bar{g}_{kN}^*$, являющимся частями $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$, причем $\bar{g}_{kN} \in U_{\varepsilon_k}(O)$ и $\bar{g}_{kN}^* \in U_{\varepsilon_k}(O^*)$. Поставим, наконец, друг другу в соответствие точки O и O^*. Мы получим, таким образом, взаимно однозначное соответствие между точками секторов $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$. Нетрудно видеть, что оно непрерывно во всех точках этих секторов. В точке O и O^* оно непрерывно в силу того, что секторы $\bar{g}_{kN}$ и $\bar{g}_{kN}^*$ лежат в $U_{\varepsilon_k}(O)$ и $U_{\varepsilon_k}(O^*)$ и при $k \to \infty$ $\varepsilon_k \to 0$. Лемма доказана.

Пусть $\bar{g}_N$ и $\bar{g}_N^*$ — замкнутые параболические области, границами которых являются циклы без контакта C и C^*. Пусть между точками

циклов C и C^* установлено топологическое соответствие. Имеет место лемма, доказательство которой, аналогичное предыдущему, опускается.

Лемма 10. *Существует топологическое отображение замкнутых областей $\bar{g}_N$ на $\bar{g}^*_N$, при котором между точками циклов без контакта C и C^* сохраняется заданное соответствие.*

Пусть теперь $\bar{g}_C$ и $\bar{g}^*_C$ — две различные правильные замкнутые седловые области (рис. 207, *а*, *б*). Граница $\bar{g}_C$ ($\bar{g}^*_C$) состоит: а) из частей QO и PO (Q^*O^* и P^*O^*) сепаратрис L_1^+ и L_2^- (L_1^{*+} и L_2^{*-}), являющихся продолжением одна другой; б) из дуг без контакта l_1 и l_2 (l_1^* и l_2^*) с концами Q и P (Q^* и P^*); в) из дуг S (S^*) траектории L (L^*), один конец A (A^*) которой является концом дуги l_1 (l_1^*), а другой конец B (B^*) — концом дуги l_2 (l_2^*); г) из состояния рввновесия O (O^*).

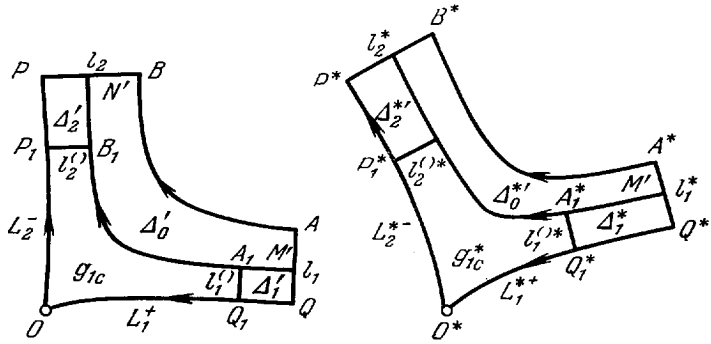


Рис. 207.

Предположим, что задано топологическое соответствие между точками дуг без контакта l_1 и l_1^* и дуг траекторий S и S^*, а также между входящими в границу $\bar{g}_C$ и $\bar{g}^*_C$ точками полутраекторий L_1^+ и L_1^{*+}, L_2^- и L_2^{*-}, при котором точки Q и Q^*, P и P^*, A и A^*, B и B^* соответствуют друг другу *).

Лемма 11. *Существует топологическое отображение правильных замкнутых гиперболических областей $\bar{g}_C$ и $\bar{g}^*_C$ друг на друга, переводящее траектории в траектории, при котором сохраняется заданное соответствие между точками дуг l_1 и l_1^*, S, S^* и точками полутраекторий L_1^+ и L_1^{*+}, L_2^- и L_2^{*-}.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность стремящихся к нулю положительных чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть $\bar{g}_{1C}$ и $\bar{g}^*_{1C}$ — правильные седловые области, являющиеся частями областей $\bar{g}_C$ и $\bar{g}^*_C$. Обозначим входящие в границу этих областей дуги без контакта через $l_1^{(1)}$ и $l_2^{(1)}$ ($l_1^{*(1)}$ и $l_2^{*(2)}$) и отличные от Q и P (Q^* и P^*), концы этих дуг, лежащие на сепаратрисах L_1^+ и L_2^- (L_1^{*+} и L_2^{*-}), через Q_1 и P_1 (Q_1^* и P_1^*), а концы, не лежащие на сепаратрисах — через A_1 и B_1 (A_1^* и B_1^*). Точки A_1 и B_1 не лежат на дуге S траектории L, а точки A_1^* и B_1^* — на дуге S^*. Траекторию, точками которой являются концы A_1 и B_1 (A_1^* и B_1^*), обозначим через L' ($L^{*\prime}$), кроме того, обозначим через M'

*) Между двумя седловыми областями может быть также установлено соответствие, при котром положительная сепаратриса L_1^+ отображается в отрицательную L_1^{*-}, а отрицательная в положительную. Этот случай, очевидно, может быть приведен к рассматриваемому заменой t на $-t$ в одной из областей.

и N' ($M^{*\prime}$ и $N^{*\prime}$) точки пересечения траектории L' ($L^{*\prime}$) с дугами l_1 (l_1^*) и l_2 (l_2^*) соответственно (рис. 207).

Замкнутые области $\bar{g}_{1C}$ и $\bar{g}_{1C}^*$ можно взять такими, чтобы: 1) $\bar{g}_{1C} \in U_{\varepsilon_1}(O)$ и $\bar{g}_{1C}^* \in U_{\varepsilon_1}(O^*)$; 2) Точки P_1 и P_1^*, Q_1 и Q_1^*, M' и M'^* являлись точками, соответствующими друг другу по заданному топологическому соответствию между точками полутраекторий L_1^+ и L_1^{*+}, L_2^+ и L_2^{*+} и дуг l_1 и l_1^*.

Дуга $M'N'$ ($M^{*\prime}N^{*\prime}$) траектории L' ($L^{*\prime}$) и дуги $l_1^{(\prime)}$, $l_2^{(\prime)}$ ($l_1^{*(\prime)}$ и $l_2^{*(\prime)}$) делят замкнутую область $\bar{g}_C$ ($\bar{g}_C^*$) на четыре области — три из этих областей являются элементарными четырехугольниками Δ_0', Δ_1', Δ_2' ($\Delta_0^{*\prime}$, $\Delta_1^{*\prime}$, $\Delta_2^{*\prime}$), а четвертая — седловой областью $\bar{g}_{1C}$ ($\bar{g}_{1C}^*$). Границы этих элементарных четырехугольников состоят: у Δ_0' из частей $M'A$ и $N'B$ дуг l_1 и l_2 и дуг AB и $M'N'$ траекторий L и L', у Δ_1' — из части $M'Q_1$ дуги l_1, дуги без контакта $l_1^{(\prime)}$, части $M'A_1$ траектории L' и части QQ_1 полутраектории L_1^+, у Δ_2' — из части $N'P$ дуги l_2, дуги $l_2^{(\prime)}$ части $N'B_1$ траектории L' и части PP_1 полутраектории L_2^-. Границы четырехугольников $\Delta_0^{*\prime}$, $\Delta_1^{*\prime}$ и $\Delta_2^{*\prime}$ полностью аналогичны (нужно только добавить звездочку в обозначениях букв). Установим топологическое отображение, переводящее траектории в траектории замкнутых элементарных топологических четырехугольников $\bar{\Delta}_0'$ и $\bar{\Delta}_0^{*\prime}$, сохраняя между точками дуг AB и A^*B^* траекторий L и L^* и дуг без контакта $M'A$ и $M^{*\prime}A^*$ заданное соответствие (см. лемму 8) и устанавливая между точками дуг $M'N'$ и $M^{*\prime}N^{*\prime}$ такое соответствие, при котором точки A_1 и A_1^*, B_1 и B_1^* соответствовали бы друг другу. Далее, установим топологическое отображение, переводящее траектории в траектории элементарных четырехугольников $\bar{\Delta}_1'$ и $\bar{\Delta}_1^{*\prime}$, сохраняя заданное соответствие между точками дуг $M'Q$ и $M^{*\prime}Q^*$, QQ_1 и $Q^*Q_1^*$ и сохраняя соответствие между точками дуг $M'A_1$ и $M^{*\prime}A_1^{*\prime}$, существующее в силу установленного отображения четырехугольников $\bar{\Delta}_0'$ и $\bar{\Delta}_0^{*\prime}$. Наконец, установим отображение четырехугольников $\bar{\Delta}_2'$ и $\bar{\Delta}_2^{*\prime}$ так, чтобы при этом между точками дуг PN' и $P^*N^{*\prime}$ было установлено соответствие, при котором траектории, проходящие через соответствующие друг другу точки, пересекали бы части $M'Q$ и $M^{*\prime}Q^*$ дуг l_1 и l_1^* в точках, соответствующих друг другу по заданному между точками дуг PP_1 и $P^*P_1^*$ топологическому соответствию, и, кроме того, чтобы между точками дуг PP_1 и $P^*P_1^*$, $N'B_1$ и $N^{*\prime}B_1^*$ сохранялось уже установленное соответствие. В силу уже установленного соответствия между Δ_0', Δ_1', Δ_2' и $\Delta_0^{*\prime}$, $\Delta_1^{*\prime}$, $\Delta_2^{*\prime}$, между точками дуг, а также точками полутраекторий, входящих в границы седловых областей $\bar{g}_{1C}$ и $\bar{g}_{1C}^*$, будет установлено соответствие. Рассмотрим теперь эти замкнутые седловые области $\bar{g}_{1C}$ и $\bar{g}_{1C}^*$. Они аналогичны замкнутым областям $\bar{g}_C$ и $\bar{g}_C^*$. Точно так же, как мы в $\bar{g}_C$ и $\bar{g}_C^*$ выделяли области $\bar{g}_{1C}$ и $\bar{g}_{1C}^*$, выделим в $\bar{g}_{1C}$ и $\bar{g}_{1C}^*$ замкнутые седловые области $\bar{g}_{2C}$ и $\bar{g}_{2C}^*$ такие, что

$$\bar{g}_{2C} \in U_{\varepsilon_2}(O), \qquad \bar{g}_{2C}^* \in U_{\varepsilon_2}(O^*).$$

При этом мы получим элементарные четырехугольники Δ_0'', Δ_1'', Δ_2'' и $\Delta_0^{*\prime\prime}$, $\Delta_1^{*\prime\prime}$, $\Delta_2^{*\prime\prime}$, аналогичные Δ_0', Δ_1', Δ_2' и $\Delta_0^{*\prime}$, $\Delta_1^{*\prime}$, $\Delta_2^{*\prime}$. Продолжая далее аналогично, мы при k-м шаге будем иметь топологическое соответствие между теми точками областей $\bar{g}_C$ и $\bar{g}_C^*$, которые не лежат внутри седловых областей $\bar{g}_{kC}$ и $\bar{g}_{kC}^*$, где

$$\bar{g}_{kC} \in U_{\varepsilon_k}(O), \qquad \bar{g}_{kC}^* \in U_{\varepsilon_k}(O^*).$$

Поставим, наконец, друг другу в соответствие точки O и O^*. Мы получаем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между точками замкнутых областей $\bar{g}_C$ и $\bar{g}^*_C$. Нетрудно видеть, что это соответствие также и непрерывное (непрерывность в точках O и O^*, очевидно, вытекает из того, что при достаточно большом k $\bar{g}_{kC} \in U_{\varepsilon_k}(O)$ и $\bar{g}^*_{kC} \in U_{\varepsilon_k}(O^*)$). Лемма доказана.

Пусть теперь даны две различные замкнутые эллиптические области $\bar{g}_\sigma$ и $\bar{g}^*_\sigma$. Пусть L и L^* — отличные от состояний равновесия траектории, а O и O^* — состояния равновесия, входящие в границу $\bar{g}_\sigma$ и $\bar{g}^*_\sigma$. Пусть между точками L и L^* установлено топологическое соответствие (рис. 208, *а*, *б*).

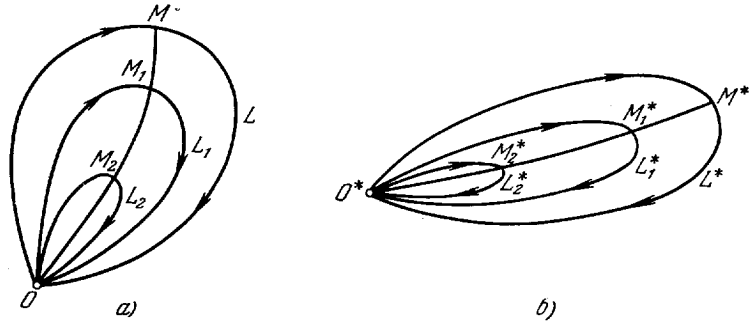


Рис. 208.

Лемма 12. *Существует топологическое отображение замкнутых эллиптических областей $\bar{g}_\sigma$ на $\bar{g}^*_\sigma$, переводящее траектории в траектории, при котором сохраняется заданное соответствие между точками L и L^*.*

Доказательство. В силу леммы 5 всегда существует дуга l (l^*), одним концом которой является данная точка M (M^*) траектории L (L^*), а другим концом — состояние равновесия O (O^*) и которая во всех отличных от O (O^*) точках не имеет контактов и пересекает все траектории, проходящие через точки области g_σ (g^*_σ). Предположим, что точка M соответствует точке M^* в силу заданного соответствия между точками траекторий L и L^*. Возьмем последовательность стремящихся к нулю положительных чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим траектории L_1 и L^*_1 эллиптических областей g_σ и $\bar{g}^*_\sigma$ соответственно (отличных от L и L^*) такие, что (см. лемму 9 § 17) $L_1 \in U_{\varepsilon_1}(O)$, $L^*_1 \in U_{\varepsilon_1}(O^*)$. Обозначим через w_1 и w^*_1 замкнутые области, границы которых соответственно состоят из петель, образованных траекториями L и L_1, L^* и L^*_1 и точек O и O^*.

Пусть M_1 (M^*_1) — точка пересечения (очевидно, единственная) траектории L_1 (L^*_1) и дуги l (l^*). Всегда можно установить топологическое отображение между замкнутыми областями w_1 и w^*_1, при котором траектории переводятся в траектории и сохраняется заданное соответствие между точками траекторий L и L^*. Действительно, дуга без контакта MM_1 ($M^*M^*_1$), очевидно, делит область w (w^*) на две правильные замкнутые параболические области и при этом входит в границу обеих этих параболических областей. На основании леммы 10 нетрудно убедиться в существовании отображения w_1 на w^*_1, обладающего указанными свойствами.

Рассмотрим, далее, траектории L_2 и L^*_2, образующие петли, лежащие соответственно внутри петель, образованных траекториями L_1 и L^*_1,

и такие что

$$L_2 \in U_{\varepsilon_2}(O), \qquad L_2^* \in U_{\varepsilon_2}(O^*),$$

и пусть w_2 и w_2^* — замкнутые области, границы которых состоят, соответственно, из петель, образованных траекториями L_1 и L_2, L_1^* и L_2^* и точек O и O^*.

Устанавливаем топологическое отображение между w_2 и w_2^*, переводящее траектории в траектории, при котором между точками траекторий L_1 и L_1^* сохраняется уже установленное соответствие. Поступая, далее, полностью аналогично и ставя, кроме того, точки O и O^* в соответствие друг другу, нетрудно убедиться в существовании топологического отображения, удовлетворяющего условиям леммы.

§ 19. Локальная и полная (глобальная) схема состояния равновесия

1. Циклический порядок сепаратрис и эллиптических областей состояния равновесия, не являющегося центром. Пусть, как и выше, $\varepsilon_0 > 0$ таково, что окрестность $U_{\varepsilon_0}(O)$ не содержит целиком ни одной особой траектории. В случае, который мы рассматриваем, когда состояние равновесия O не является центром и, следовательно, к нему стремится хотя бы одна полутраектория, могут представиться следующие две возможности.

1. У состояния равновесия O не существует ни одной сепаратрисы и ни одной эллиптической области.

2. У состояния равновесия O существует сепаратриса или эллиптическая область.

В первом случае в силу лемм 5 и 8 § 17 либо все траектории, проходящие через точки достаточно малой окрестности состояния равновесия O, стремятся к точке O при $t \to +\infty$, либо все они стремятся к точке O при $t \to -\infty$. Состояние равновесия O в этом случае является «топологическим узлом» (см. § 17, п. 2), при этом устойчивым, если траектории стремятся к нему при $t \to +\infty$, и неустойчивым, если траектории стремятся к нему при $t \to -\infty$. Рассмотрим вторую возможность подробно.

Пусть

$$L_1^+, \ L_2^+, \ \ldots, \ L_{n_1}^+ \tag{1}$$

— ω-сепаратрисы точки O и

$$L_1^-, \ L_2^-, \ \ldots, \ L_{n_1}^- \tag{2}$$

— α-сепаратрисы точки O (если таковые существуют).

В случае, когда у точки O имеются эллиптические области (различных областей такого типа существует лишь конечное число) (см. теорему 56 § 16), выберем во всех этих различных областях по одной траектории, целиком лежащей в $U_{\varepsilon_0}(O)$.

Пусть

$$L_1^*, \ L_2^*, \ \ldots, \ L_{n_3} \tag{3}$$

— эти траектории. Все они образуют петли, лежащие одна вне другой. Мы будем предполагать, что система петель является «максимальной» в том смысле, что всякая петля, лежащая в $U_{\varepsilon_0}(O)$ и отличная от петель, образованных траекториями (3), либо содержится внутри одной из этих петель, либо содержит одну из этих петель внутри себя. Траектории (3), очевидно, являются орбитно-устойчивыми (так как они лежат в $U_{\varepsilon_0}(O)$).

Выделим из каждой траектории (3) положительную и отрицательную полутраектории, и пусть

$$L_1^{*+},\ L_2^{*+},\ \ldots,\ L_{n_2}^{*+}, \tag{4}$$

$$L_1^{*-},\ L_2^{*-},\ \ldots,\ L_{n_2}^{*-} \tag{5}$$

— все эти полутраектории. Совокупность всех этих полутраекторий (1), (2), (4) и (5) будем обозначать через (L).

Пусть C — окружность с центром в точке O, радиуса меньшего, чем ε_0, вне которой имеются точки каждой из полутраекторий (L). Будем обозначать последние общие точки этих полутраекторий с окружностью C через M_i $(i = 1, 2, \ldots, N$, где $N = n_1 + n_2 + 2n_3)$ и предположим, что они перенумерованы в том порядке, в каком они встречаются на окружности C при положительном обходе ее. Кроме того, будем считать, что точка M_{N+1} есть точка M_1. При этих условиях на каждой из дуг M_iM_{i+1} кроме концов не лежит ни одной точки M_j.

В силу леммы 1 § 17 какую бы простую замкнутую кривую, целиком лежащую внутри окружности C (в частности, окружность с центром в точке O, радиуса, меньшего радиуса окружности C), мы бы ни взяли, последние, общие с этой кривой точки полутраекторий (L) расположены на этой кривой в том же циклическом порядке, как и точки M_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ на окружности C. Этот порядок определяет циклический порядок полутраекторий (L) (см. лемму 1). Таким образом, мы можем выписать все полутраектории в их циклическом порядке

$$L_{i_1}^{+},\ L_{i_2}^{-},\ \ldots,\ L_{i_k}^{*(\ )}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Две полутраектории L_i^{*+} и L_i^{*-}, принадлежащие одной и той же петле, являются последовательными в циклическом порядке среди полутраекторий (L).*

Доказательство. Пусть M_k и M_l — последние общие с окружностью точки полутраекторий L_i^{*+} и L_i^{*-}. Нужно показать, что либо $l = k + 1$, либо $k = l + 1$. Пусть g_σ — область внутри петли, образованной траекторией L_i^*. Части M_kO и M_lO полутраекторий L_i^{*+} и L_i^{*-} делят круг C на два криволинейных сектора g и g'.

Предположим, что g — тот из этих секторов, у которого все достаточно близкие к точке O точки принадлежат области g_σ. Пусть дуга кривой C, входящая в границу этого сектора, есть M_kM_l. Если бы на этой дуге существовала отличная от ее концов точка M_j, то между полутраекториями L_i^{*+} и L_i^{*-} лежала бы одна из полутраекторий (L). Но тогда эта полутраектория должна была бы проходить через точки эллиптической области g_σ, что, очевидно, невозможно, так как в этой области не лежит особых траекторий и не лежит ни одной из траекторий L_j^*. Лемма доказана.

Рассмотрим какую-нибудь траекторию $\bar{L}_i$, лежащую внутри петли, образованной траекторией L_i^*, но имеющую точки вне окружности C. Заменим траектории (3) траекториями

$$\bar{L}_1,\ \bar{L}_2,\ \ldots,\ \bar{L}_{n_2}. \tag{7}$$

Пусть

$$\bar{L}_1^{+},\ \bar{L}_2^{+},\ \ldots,\ \bar{L}_{n_2}^{+} \tag{8}$$

и

$$\bar{L}_1^{-},\ \bar{L}_2^{-},\ \ldots,\ \bar{L}_{n_2}^{-} \tag{9}$$

— положительные и отрицательные полутраектории, выделенные из этих траекторий. Будем совокупность всех полутраекторий (1), (2), (8) и (9)

обозначать через $(\bar{L})$. В силу леммы 11 § 17, если между полутраекториями L_i^{*+} и L_i^{*-} не лежит никаких других траекторий (L), то полутраектории $\bar{L}_i^+$ и $\bar{L}_i^-$ лежат между ними, и при этом полутраектория $\bar{L}_i^+$ лежит между полутраекториями L_i^{*+} и $\bar{L}_i^-$.

Полутраектории (L) и $(\bar{L})$ можно поставить друг другу в соответствие так, чтобы одинаковые сепаратрисы соответствовали друг другу, а полутраектории L_i^{*+}, L_i^{*-} соответствовали полутраекториям $\bar{L}_i^+$, $\bar{L}_i^-$ (выделенным из траектории той же эллиптической области, что и траектория L_i^{*+}, L_i^{*-}). При таком соответствии, очевидно, двум последовательным в циклическом порядке полутраекториям (L) соответствуют две последовательные в циклическом порядке полутраектории $(\bar{L})$.

Мы будем говорить, что циклический порядок полутраекторий (L) *и* $(\bar{L})$ *вокруг состояния равновесия* O *один и тот же* (*или что эти полутраектории одинаково расположены вокруг состояния равновесия* O).

Мы будем также говорить, что циклический порядок полутраекторий (L) или $(\bar{L})$ определяет циклический порядок сепаратрис и правильных эллиптических областей состояния равновесия O.

Пусть $g_{\sigma_1}, \ldots, g_{\sigma_{n_2}}$ — все различные эллиптические области состояния равновесия O. Мы можем, следовательно, выписать сепаратрисы и эллиптические области состояния равновесия в их циклическом порядке:

$$L_{i_1}^+, \; g_{\sigma_{i_2}}, \; L_{i_3}^{(\cdot)}, \ldots \tag{10}$$

В силу предыдущего очевидно, что последовательность (10) отличается от последовательности (L) тем, что вместо двух последовательных полутраекторий одной и той же эллиптической области поставлен знак $g_{\sigma i}$, соответствующий эллиптической области.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими выражениями: «последовательные в данном циклическом порядке эллиптические области» и «полутраектория $L^{(\cdot)}$, стремящаяся к точке O, лежит между эллиптическими областями g_{σ_k} и g_{σ_j}» (порядок не безразличен, см. п. 1 § 17), смысл которых понятен из предыдущего.

Рассмотрим при каком-либо выборе траекторий эллиптических областей все полутраектории (L), и пусть, как и выше, M_k — их последние общие точки с окружностью C (перенумерованные в их циклическом порядке). Пусть g_k — криволинейные секторы, на которые эти полутраектории разделяют круг C. Каждый сектор g_k есть область, граница которой состоит из частей M_kO и $M_{k+1}O$ двух из полутраекторий (L), точки O и дуги M_kM_{k+1} окружности C (на этой дуге нет точек M_l, отличных от концов дуги). Область внутри окружности C разделяется таким образом на N криволинейных секторов: $g_1, g_2, \ldots, g_N$. Сектор g_1 будем также обозначать через g_{N+1}. Секторы g_k, очевидно, не имеют общих точек, для всех этих секторов точка O является граничной точкой, и каждые два сектора g_k и g_{k+1} имеют общую граничную полутраекторию $L_{M_{k+1}}^{(\cdot)}$. Так как в число траекторий (L) входят все сепаратрисы состояния равновесия O, то ни в одном из секторов g_k, т. е. между двумя полутраекториями $L_{M_k}^{(\cdot)}$, $L_{M_{k+1}}^{(\cdot)}$, не лежит сепаратриса состояния равновесия O. Для сектора g_k может представиться одна из следующих трех возможностей.

1. Полутраектории $L_{M_k}^{(\cdot)}$ и $L_{M_{k+1}}^{(\cdot)}$, входящие в границу сектора g_k, являются полутраекториями, выделенными из траектории L_i^* эллиптической области.

Пусть $g_{\sigma i}$ — эллиптическая область, граница которой состоит из петли, образованной траекторией L_i^*. Точки сектора g_k, принадлежащие достаточно малой окрестности $U_\varepsilon(O)$, являются точками области $g_{\sigma i}$ и, наоборот, все принадлежащие $U_\varepsilon(O)$ точки $g_{\sigma i}$ являются точками g_k, т. е. множества $U_\varepsilon(O) \cap g_k$ и $U_\varepsilon(O) \cap g_{\sigma i}$ совпадают (см. замечание к лемме 1 § 17). Поэтому все лежащие внутри окружности C траектории эллиптической области $g_{\sigma i}$ лежат целиком в секторе g_k и, наоборот, всякая, целиком лежащая в секторе g_k траектория образует петлю, лежащую в области $g_{\sigma i}$.

Такой сектор является согласно введенной в п. 2 § 17 терминологии *эллиптическим сектором* (рис. 197). Так как в число полутраекторий (L) по самому их выбору входят полутраектории, выделенные из траекторий всех различных эллиптических областей состояния равновесия O, то всякая, лежащая внутри окружности C петля принадлежит какому-нибудь эллиптическому сектору.

2. Одна из полутраекторий $L^{(}_{M_k}$, $L^{(}_{M_{k+1}}$ является ω-сепаратрисой, а другая — α-сепаратрисой состояния равновесия O. В секторе g_k, т. е. между $L^{(}_{M_k}$ и $L^{(}_{M_{k+1}}$ не лежит ни одна сепаратриса, а в рассматриваемом случае не лежит также ни одна петля (так как всякая петля, содержащаяся внутри окружности C, лежит в каком-нибудь эллиптическом секторе). Поэтому рассматриваемый сектор заведомо не является эллиптическим. А тогда нетрудно убедиться на основании леммы 4 § 17 и следствия из леммы 5 § 17, что все проходящие через точки сектора g_k траектории и при возрастании и при убывании t выходят из этого сектора и сепаратрисы $L^{(}_{M_k}$ и $L^{(}_{M_{k+1}}$ являются продолжением одна другой. Такой сектор мы назвали (см. п. 2 § 17) *гиперболическим* сектором (рис. 205, *в*).

3. Полутраектории $L^{(}_{M_k}$ и $L^{(}_{M_{k+1}}$, входящие в границу сектора g_k: а) либо принадлежат различным траекториям L_i^* (т. е. двум различным петлям); б) либо являются двумя ω-сепаратрисами или двумя α-сепаратрисами состояния равновесия O; в) либо одна из них принадлежит траектории L_i^*, а другая является сепаратрисой состояния равновесия O.

Между $L^{(}_{M_k}$ и $L^{(}_{M_{k+1}}$ не лежит ни одной сепаратрисы и ни одной петли (ср. случай 2). Кроме того, по условию полутраектории $L^{(}_{M_k}$ и $L^{(}_{M_{k+1}}$ не могут быть сепаратрисами, являющимися продолжением одна другой. На основании леммы 5 § 17 нетрудно видеть, что в этом случае сектор g_k является ω- или α-параболическим сектором (и обе полутраектории $L^{(}_{M_k}$ и $L^{(}_{M_{k+1}}$ либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны) (рис. 196).

Рассмотренными типами 1, 2, 3, очевидно, исчерпываются все возможности для областей g_k. Имеет место следующая лемма, справедливость которой непосредственно следует из определения области типа 3:

Лемма 2. *Если g_k — эллиптический сектор, то оба смежных с ним сектора g_{k-1} и g_{k+1} являются параболическими секторами, причем один из них ω-, а другой α-параболический.*

2. Каноническая замкнутая кривая вокруг состояния равновесия. Используя указанное выше разделение круга C на криволинейные секторы различных типов, мы построим некоторую область вокруг состояния равновесия, которую будем называть его *канонической окрестностью*. Граница этой окрестности является простой замкнутой кривой, состоящей из конечного числа дуг траекторий и дуг без контакта, и называется *канонической кривой*.

Пусть сначала состояние равновесия O есть топологический узел (случай 1) предыдущего пункта. В силу замечания к лемме 3 § 18 в этом случае существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно провести целиком лежащий в окрестности $U_\varepsilon(O)$ цикл без контакта, содержащий состояние равновесия O внутри себя. Такой цикл без контакта мы будем в рассматриваемом случае называть «канонической замкнутой кривой» состояния равновесия O.

Рассмотрим теперь случай, когда состояние равновесия отлично от центра, но не является топологическим узлом (т. е. случай 2). Возьмем на каждой из полутраекторий $L^{(\cdot)}_{M_k}$, являющихся частями полутраекторий (L), по точке P_k (отличной от точки M_k, т. е. лежащей внутри окружности C), и пусть

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_N,\ P_{N+1} \equiv P_1$$

— все эти точки. Очевидно, что при обходе этих точек в данном порядке соответствующие полутраектории (L) обходятся в их циклическом порядке. Так как на каждой из полутраекторий (4) и (5) также лежит по одной точке P_k, то на каждой траектории L_i^*, принадлежащей эллиптической области, лежит в точности две точки P_j и P_{j+1}. Пусть S_j^* — дуга траектории L^* между точками P_j и P_{j+1}. Будем называть ее *эллиптической дугой*. Выделим в каждом из параболических секторов g_k правильную параболическую область, проводя дугу без контакта l_k, соединяющую соответственно точки P_k и P_{k+1} и целиком кроме концов лежащую в секторе g_k. Будем называть дугу l_k *параболической дугой без контакта*.

Выделим в каждом гиперболическом секторе g_i правильную гиперболическую область, опирающуюся на дуги без контакта λ_i^c и λ_{i+1}^c с концами в точках P_i и P_{i+1}, лежащих на сепаратрисах, ограничивающих сектор g_i. Обозначим через S_i^c дугу траектории, входящую в границу этой правильной седловой области, концами которой являются концы дуг λ_i^c и λ_{i+1}^c. Назовем дугу S_{i+1}^c *гиперболической дугой*, а дуги без контакта λ_i^c, λ_{i+1}^c — *«седловыми дугами без контакта»*. Как и раньше, ту из дуг λ_i^c, λ_{i+1}^c, конец которой лежит на ω-сепаратрисе, будем называть ω-седловой дугой без контакта, а ту из дуг, конец которой лежит на α-сепаратрисе, — α-седловой дугой без контакта.

При этом:

а) Дуги без контакта l_k лежат вне всех эллиптических областей g_{σ_j} (границы которых состоят из петель, образованных траекториями L_j^*). Действительно, если через некоторую точку дуги l_k проходит траектория какой-нибудь эллиптической области $g_{\sigma j}$, то эта траектория в конце концов и при возрастании и при убывании t должна выйти из параболического сектора g_k, в котором лежит дуга l_k, и войти в один из эллиптических секторов и остаться в нем. Но это, очевидно, невозможно, так как всякая траектория, пересекающая дугу l_k при $t \to +\infty$ (или при $t \to -\infty$), не выходя уже больше из параболического сектора g_k, стремится к состоянию равновесия O.

б) Дуги без контакта λ_q^c и λ_{q+1}^c можно взять такими, чтобы они не имели общих точек ни с одной из эллиптических дуг S_j^* траекторий L_j^*. Действительно, полутраектории L_q^+ и L_{q+1}^-, входящие в границу гиперболического сектора, заведомо не являются полутраекториями, выделенными из траекторий L_i^*, так как они особые, а траектории L_j^* — неособые. Кроме того, точки этих полутраекторий L_q^+ и L_{q+1}^-, в частности точки P_q

и P_{q+1}, не являются предельными ни для одной траектории L_j^*, так как единственной предельной точкой траектории L_j^* является точка O. Но тогда точки P_q и P_{q+1} находятся на положительном расстоянии от всех траекторий L_j^* и, следовательно, дуги λ_q^c и λ_{q+1}^c могут быть выбраны в согласии с пунктом б).

Рассмотрим множество H, состоящее из точек всех правильных параболических областей (выделенных в параболических секторах g_k), всех правильных гиперболических областей (выделенных в гиперболических секторах g_q) и всех эллиптических областей g_{σ_j} внутри петель, образованных траекториями L_j^* всех полутраекторий (L), за исключением точек P_k и, кроме того, из точки O. Нетрудно видеть, что множество H является ограниченным открытым множеством, граница которого состоит из точек всех дуг l_k, λ_q^c, S^* и S^c.

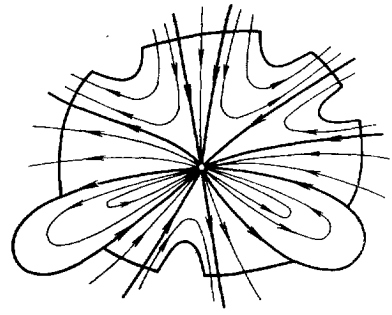


Рис. 209.

В силу условий а) и б) совокупность всех точек этих дуг образует простую замкнутую кривую. Обозначим ее через E.

Кривая E называется канонической замкнутой кривой состояния равновесия O, а область H внутри этой кривой—канонической окрестностью состояния равновесия O. В дальнейшем мы в основном будем рассматривать замкнутую каноническую окрестность $\bar{H}$ (рис. 209).

Мы будем получать различные канонические окрестности в зависимости от выбора траекторий эллиптических областей и от выбора правильных параболических и правильных гиперболических областей.

Точки P_i являются последними общими точками полутраекторий (L) с кривой E. В силу замечаний к леммам 2 и 6 § 18 и леммы 9 § 17 при любом $\varepsilon > 0$ можно построить каноническую кривую, целиком лежащую в $U_\varepsilon(O)$.

Приведем без доказательства одну элементарную лемму, касающуюся связи положительного направления обхода канонической кривой E и петель с направлением по t на петлях. Пусть g_σ — одна из эллиптических областей, являющаяся частью канонической окрестности H, и S^* — эллиптическая дуга, входящая в ее границу.

Лемма 3. *Если положительное направление обхода канонической кривой E индуцирует на эллиптической дуге S^* направление, совпадающее с направлением по t (или противоположное направлению по t), то направление положительного обхода петель, принадлежащих области H, также совпадает с направлением по t (противоположно направлению по t).*

3. Локальная схема состоянияр авновесия, не являющегося центром. Введем теперь понятие локальной схемы состояния равновесия, не являющегося центром.

Определение XXI. *Мы скажем, что дана локальная схема состояния равновесия O, не являющегося центром, если перечислены все его ω-сепаратрисы $(L_1^+, L_2^+, \ldots, L_{n_1}^+)$, все его α-сепаратрисы $(L_1'^-, L_2'^-, \ldots, L_{n_2}'^-)$, все различные между собой эллиптические области $(g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}, \ldots, g_{\sigma_{n_3}})$ и указан циклический порядок, в котором все эти полутраектории и области расположены вокруг состояния равновесия O.*

Локальная схема состояния равновесия может быть задана либо таблицей (записью), либо «графически»— *схематическим рисунком*.

В случае, когда она задается таблицей, эта таблица имеет вид

$$O\,|\,L'^{-}_{i_1},\ g_{\sigma_{i_2}},\ L^{\pm}_{i_3},\ \ldots$$

Здесь порядок, в котором выписаны полутраектории и эллиптические области, соответствует циклическому порядку, в котором они расположены вокруг состояния равновесия. При записи схемы мы можем начинать с любой траектории L_i^+ или L'^{-}_j или с любой эллиптической области g_{σ_i}, т. е. схема задана с точностью до циклического порядка.

Вместо того, чтобы рассматривать все различные между собой эллиптические области состояния равновесия O, очевидно, можно рассматривать все лежащие одна вне другой петли или все положительные и отрицательные полутраектории этих петель (L_1^{*+}, L_2^{*+}, . . ., $L_{n_3}^{*+}$ и L_1^{*-}, L_2^{*-}, . . ., $L_{n_3}^{*-}$). В последнем случае схема состояния равновесия может быть записана в виде

$$O\,|\,L'^{-}_{i_1},\ L^{*-}_{i_2},\ L^{*+}_{i_2},\ \ldots$$

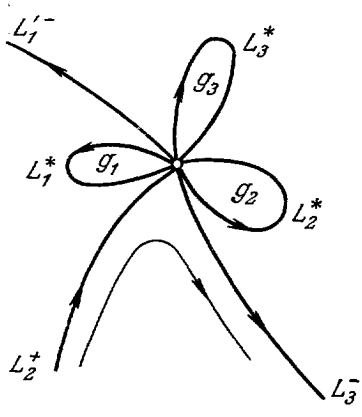


Рис. 210.

Из предыдущего следует:

1) Между двумя последовательными по схеме положительными (отрицательными) полутраекториями лежит ω-параболическая (α-параболическая) область. 2) Между двумя последовательными по схеме полутраекториями, из которых одна положительна, а другая отрицательна,не являющимися полутраекториями L_i^{*+} и L_i^{*-}, выделенными из одной петли, лежит гиперболическая область *).

Более наглядный способ задания схемы — схематический рисунок. На рисунке схематически наносятся в том циклическом порядке, в котором они расположены, сепаратрисы этого состояния равновесия с указанием на них направлений (с их обозначениями) и по одной траектории каждой из различных эллиптических областей (с указанием на них направлений по t).

Так, например, схеме, заданной таблицей

$$O\,|\,L'^{-}_1,\ g_1,\ L^{+}_2,\ L'^{-}_3,\ g_2,\ g_3,$$

соответствует рис. 210 (графическое изображение схемы).

В силу 1) и 2) очевидно, что между полутраекториями L_2^+ и L'^{-}_3 лежит гиперболическая область (сектор), а между L'^{-}_1 и L_1^{*-}, L_1^{**} и L_2^+ и т. д.—

*) В схеме состояния равновесия введены индивидуальные обозначения для траекторий эллиптических областей. Это необходимо для дальнейшего, именно, для описания схемы всего разбиения на траектории в целом. Когда состояние равновесия рассматривается изолированно, то можно соответственно обозначить: положительные полутраектории знаком плюс, отрицательные — знаком минус, эллиптические области — знаком 0. Тогда схема состояния равновесия может быть записана в виде чередующихся знаков +, —, 0. Такую схему естественно назвать абстрактной локальной схемой состояния равновесия. Очевидно, однако, что не всякая последовательность знаков +, — и 0 может быть абстрактной схемой состояния равновесия. Действительно, если после знака + стоит 0, то после нуля может стоять либо еще один 0, либо —. Знак + соответствует сепаратрисе $L^+_{i_1}$, если за ним стоит 0, и это, очевидно, означает, что в циклическом порядке за $L^+_{i_1}$ идет эллиптическая область. Если $L^*_{i_2}$ —

параболические секторы (L_1^*, L_2^* и L_3^* — траектории эллиптических областей).

Рассмотрим теперь два состояния равновесия O и $\widetilde{O}$ двух различных динамических систем D и $\widetilde{D}$ вида (I) или одной и той же динамической системы. Предположим, что даны схемы этих состояний равновесия.

Следовательно, у состояний равновесия O так же как и у $\widetilde{O}$ перечислены все ω-сепаратрисы ($\widetilde{L}_1^+, \widetilde{L}_2^+, \ldots, \widetilde{L}_{m_1}^+$), все α-сепаратрисы ($\widetilde{L}_1^-, \widetilde{L}_2^-, \ldots, \widetilde{L}_{m_1}^-$), все различные между собой эллиптические области ($\widetilde{g}_{\sigma_1}, \widetilde{g}_{\sigma_2}, \ldots, \widetilde{g}_{\sigma_{m_2}}$) и указан циклический порядок, в котором все эти полутраектории и области расположены вокруг состояния равновесия $\widetilde{O}$.

Схема состояния равновесия $\widetilde{O}$ так же, как и схема состояния равновесия O, может быть записана таблицей

$$\widetilde{O} \mid \widetilde{L}_{j_1}^-, \ \widetilde{g}_{\sigma_{j_2}}, \ \ldots$$

или в виде

$$\widetilde{O} \mid \widetilde{L}_{j_1}, \ \widetilde{L}_{j_2}^{*+}, \ \widetilde{L}_{j_3}^{*-}, \ \ldots,$$

если вместо областей $\widetilde{g}_\sigma$ рассматривать полутраектории петель.

Определение XXII. *Мы скажем, что локальные схемы состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ тождественны с сохранением ориентации и направления по t, если между всеми* ω-*сепаратрисами состояния равновесия O ($L_1^+, L_2^+, \ldots, L_{n_1}^+$) и всеми* ω-*сепаратрисами состояния равновесия $\widetilde{O}$ ($\widetilde{L}_1^+, \widetilde{L}_2^+, \ldots, \widetilde{L}_{m_1}^+$), между всеми* α-*сепаратрисами состояния равновесия O ($L_1^-, L_2^-, \ldots, L_{n_1}^-$) и всеми* α-*сепаратрисами состояния равновесия $\widetilde{O}$ ($\widetilde{L}_1^-, \widetilde{L}_2^-, \ldots, \widetilde{L}_{m_1}^-$), а также между всеми (различными) эллиптическими областями состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ ($g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}, \ldots, g_{\sigma_{n_2}}$) и ($\widetilde{g}_{\sigma_1}, \widetilde{g}_{\sigma_2}, \ldots, \widetilde{g}_{\sigma_{m_2}}$) существует взаимно однозначное соответствие* θ, *удовлетворяющее следующему условию: схема состояния равновесия $\widetilde{O}$ может быть получена из схемы состояния равновесия O, если в ней полутраектории и эллиптические области системы D заменить соответствующими им по соответствию* θ *полутраекториями и областями системы $\widetilde{D}$. Таким образом, если в системе D две полутраектории или полутраектория и эллиптическая область последовательны в циклическом порядке, то соответствующие им в системе $\widetilde{D}$ две полутраектории или полутраектория и эллиптическая область также последовательны в циклическом порядке.*

Когда схемы двух состояний равновесия тождественны (с сохранением ориентации и направления по t), то, очевидно, $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, и при надлежащей нумерации полутраекторий и эллиптических областей состояния равновесия $\widetilde{O}$-таблица, описывающая схему состояния равновесия $\widetilde{O}$, может быть получена из таблицы, описывающей схему состояния равновесия O, добавлением волнистой черты в обозначении полутраекторий и эллиптических областей.

траектория этой эллиптической области, то в схеме вида (10) вслед за $L_{i_1}^+$ (в силу леммы 1) непременно сначала идет $L_{i_2}^{*+}$, а затем $L_{i_2}^{*-}$, за $L_{i_2}^{*-}$ может (в силу той же леммы) идти либо отрицательная сепаратриса, либо еще одна эллиптическая область. Можно указать условия, которым должна удовлетворять последовательность знаков +, —, 0 для того, чтобы она могла быть абстрактной схемой некоторого состояния равновесия.

Очевидно и обратно, если таблицы, описывающие схемы состояний равновесия, отличаются только обозначением полутраекторий и эллиптических областей (например, добавлением волнистой черты), схемы этих состояний равновесия тождественны. В случае, когда схема задается графически (рисунком), очевидно, рисунок один и тот же, только изменяются обозначения для траекторий.

При тождественности схем двух состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ соответствующие друг другу полутраектории и эллиптические области этих состояний равновесия будем называть полутраекториями и эллиптическими областями, *соответствующими друг другу по схеме*. При тождественности локальных схем состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ существует также взаимно однозначное соответствие по схеме между полутраекториями L_j^{*+}, L_j^{*-} и $\widetilde{L}_j^{*+}$, $\widetilde{L}_j^{*-}$, выделенными из петель соответствующих друг другу по схеме эллиптических областей. Соответствующим друг другу по схеме полутраекториям и областям систем D и $\widetilde{D}$ будем приписывать одинаковые номера.

Полностью аналогично, с очевидными изменениями, дается определение *тождественности двух схем с сохранением ориентации и изменением направления по t, а также с изменением ориентации и с сохранением (изменением) направления по t.*

При тождественности двух схем с сохранением ориентации и изменением направления по t, очевидно, положительной полутраектории соответствует отрицательная полутраектория.

Изменяя соответственно при рассмотрении одного из состояний равновесия, например $\widetilde{O}$, либо ориентацию на противоположную, либо t на $-t$, либо и то и другое, мы вернемся к данному выше определению тождественности схем с сохранением ориентации и направления по t. *Поэтому всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только тождественность схем с сохранением ориентации и направления по t.*

Пусть, как и выше, схемы состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ тождественны. Рассмотрим какие-нибудь канонические окрестности этих состояний равновесия H и $\widetilde{H}$. Пусть E и $\widetilde{E}$ — ограничивающие их канонические кривые, l_k, λ_i^c, S_j^*, S_q^c и $\widetilde{l}_k$, $\widetilde{\lambda}_i^c$, $\widetilde{S}_j^*$, $\widetilde{S}_q^c$ — параболические, эллиптические и седловые дуги этих кривых. Соответствие по схеме между ω-сепаратрисами и α-сепаратрисами, а также полутраекториями эллиптических областей состояний равновесия O и $\widetilde{O}$, очевидно, индуцирует естественное соответствие между элементарными областями, составляющими части канонических окрестностей H и $\widetilde{H}$, дугами канонических кривых и их концами. Именно:

1. Соответствующими друг другу элементарными областями являются области, в границы которых входят соответствующие друг другу по схеме полутраектории. При этом соответствующие друг другу области имеют одинаковый характер, т. е. являются одновременно либо параболическими, либо эллиптическими, либо гиперболическими.

2. Соответствующими друг другу дугами l_k, λ_i^c, S_j^*, S_q^c и $\widetilde{l}_k$, $\widetilde{\lambda}_i^c$, $\widetilde{S}_j^*$, $\widetilde{S}_q^c$ являются дуги, концы которых принадлежат соответствующим друг другу по схеме полутраекториям. Соответствующие друг другу дуги входят в соответствующие друг другу области и являются одновременно либо параболическими, либо эллиптическими, либо седловыми дугами без контакта, либо седловыми дугами траекторий.

3. Соответствующими друг другу концами соответствующих друг другу дуг являются концы, принадлежащие соответствующим друг другу

по схеме полутраекториям или соответствующим друг другу дугам (эллиптическим и гиперболическим).

Это соответствие между элементарными областями, являющимися частями канонических окрестностей, и входящими в их границы дугами и концами этих дуг, мы будем также называть *«соответствием по локальной схеме этих состояний равновесия»*.

Докажем теперь следующую теорему:

Т е о р е м а 61. *Если локальные схемы двух состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ тождественны с сохранением ориентации и направления по t, то существует топологическое отображение любых их замкнутых канонических окрестностей H и $\widetilde{H}$ друг на друга, при котором траектории переводятся в траектории и сохраняется ориентация и направление по t.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущего между элементарными областями канонических окрестностей H и $\widetilde{H}$ существует взаимно однозначное соответствие. Перенумеруем произвольным образом все элементарные области канонических окрестностей H и $\widetilde{H}$ так, чтобы соответствующим друг другу по схеме элементарным областям был приписан одинаковый номер.

Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — элементарные области канонической окрестности H и $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2, \ldots, \widetilde{h}_k$ — элементарные области канонической окрестности $\widetilde{H}$. Соответствующие друг другу по схеме элементарные области h_i и $\widetilde{h}_i$ имеют одинаковый характер, и в границы их входят соответствующие друг другу по схеме полутраектории.

Будем последовательно в порядке нумерации строить топологическое отображение друг на друга соответствующих друг другу областей h_i и $\widetilde{h}_i$, при котором траектории отображаются в траектории, сохраняется направление по t и, кроме того, выполняются следующие условия.

1. Соответствующие друг другу по схеме полутраектории, входящие в границы этих областей, отображаются друг в друга, в частности, отображаются друг в друга их концы P_i и $\widetilde{P}_i$, лежащие на канонических кривых E и $\widetilde{E}$.

2. Если область h_i, а следовательно, соответственно и область $\widetilde{h}_i$ имеют общие граничные точки с областями меньшего номера, то в этих точках отображение областей h_i и $\widetilde{h}_i$, строящееся после отображений областей меньшего номера, совпадает с уже построенными отображениями областей меньшего номера. Очевидно, выполнение требований 1) и 2) всегда возможно (см. леммы 9, 10 и 11 § 18).

Таким образом, мы получаем топологическое отображение канонических окрестностей H и $\widetilde{H}$, обладающее указанными в лемме свойствами (взаимная однозначность и непрерывность этого отображения на границе смежных областей h_i и h_j и соответственно $\widetilde{h}_i$ и $\widetilde{h}_j$ обеспечивается условием 2). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из доказанной теоремы, в частности, следует, что существует топологическое отображение друг на друга любых двух канонических окрестностей данного состояния равновесия, при котором траектории отображаются в траектории и сохраняется ориентация и направление по t.

З а м е ч а н и е 2. Пусть заранее задано топологическое отображение канонических кривых E и $\widetilde{E}$ друг на друга, при котором соответствующие друг другу по схеме дуги этих кривых, а также соответствующие

друг другу по схеме концы этих дуг отображаются друг в друга. Тогда в силу лемм 9—11 § 18 всегда существует топологическое отображение замкнутых канонических окрестностей $\overline{H}$ и $\widetilde{\overline{H}}$ друг на друга, обладающее требуемыми в теореме свойствами, совпадающее на кривых E и $\widetilde{E}$ с заданным отображением. Аналогичное утверждение справедливо также в случае, когда задано отображение друг в друга отдельных точек, соответствующих друг другу дуг, если при этом циклический порядок соответствующих друг другу точек одинаков.

Из замечания 1, очевидно, следует, что в случае конечного числа особых траекторий всякое состояние равновесия имеет определенную топологическую структуру в смысле определения, данного в § 5, и что *локальная схема описывает топологическую структуру состояния равновесия*. При этом очевидно (см. лемму 7 § 18), что когда схемы двух состояний равновесия различны, то различны и их топологические структуры.

4. Полная (или глобальная) схема состояния равновесия, не являющегося центром. Может оказаться, что существуют стремящиеся к рассматриваемому состоянию равновесия особые полутраектории, не являющиеся его сепаратрисами, например сепаратрисы других состояний равновесия или угловые полутраектории. При рассмотрении локальной схемы состояния равновесия мы не выделяли таких полутраекторий среди стремящихся к состоянию равновесия орбитно-устойчивых полутраекторий.

Сейчас мы будем выделять их, т. е. мы будем выделять все особые полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия O, как являющиеся его ω- и α-сепаратрисами, так и не являющиеся. Для того чтобы описать расположение этих особых полутраекторий по отношению к сепаратрисам состояния равновесия O, а также по отношению друг к другу, мы введем понятие полной (глобальной) схемы состояния равновесия. Это понятие играет основную роль при установлении топологической структуры разбиения на траектории в целом (а не только в окрестности данного состояния равновесия *).

Докажем сначала одну лемму.

Пусть g_{σ_1} и g_{σ_2} — две последовательные в циклическом порядке эллиптические области состояния равновесия O, так что между областями g_{σ_1} и g_{σ_2} не лежит уже больше ни одной эллиптической области.

Лемма 4. *Между двумя последовательными в циклическом порядке эллиптическими областями g_{σ_1} и g_{σ_2} состояния равновесия O непременно лежит по крайней мере одна стремящаяся к состоянию равновесия O особая полутраектория.*

Доказательство. Если между областями g_{σ_1} и g_{σ_2} лежит сепаратриса точки O, то утверждение леммы справедливо. Предположим поэтому, что между областями g_{σ_1} и g_{σ_2} не лежит ни одной сепаратрисы точки O. Рассмотрим какую-нибудь каноническую область H состояния равновесия O. В силу леммы 2 в канонической области H между областями g_{σ_1} и g_{σ_2} расположен правильный ω- или α-параболический «сектор». Предположим для определенности, что он является ω-параболическим,

*) В то время, как локальная схема состояния равновесия может быть фактически установлена непосредственным рассмотрением его окрестности (в главе VI даны методы исследования характера, т. е. схемы простых состояний равновесия, в следующей главе даются методы исследования «характера», т. е. схемы некоторых сложных состояний равновесия), для нахождения полной (глобальной) схемы состояния равновесия необходимы уже не локальные — непосредственно не связанные с окрестностью данного состояния равновесия — сведения о поведении сепаратрис.

и обозначим его через g_ω. Сектор g_ω ограничен двумя положительными полутраекториями P_kO и $P_{k+1}O$, точкой O и дугой без контакта l_k с концами P_k и P_{k+1}. При этом полутраектории P_kO и $P_{k+1}O$ принадлежат соответственно траекториям L_1^* и L_2^* («петлям»), ограничивающим области g_{σ_1} и g_{σ_2}. Но тогда точки P_k и P_{k+1}, как принадлежащие различным эллиптическим областям, принадлежат и различным ячейкам. Следовательно, на дуге без контакта l_k, соединяющей точки P_k и P_{k+1}, имеется по крайней мере одна точка M, принадлежащая границе ячейки. Проходящая через точку M траектория L_M является особой (в силу определения ячеек) и в точке M входит при возрастании t внутрь области g_ω. Следовательно, полутраектория L_M является особой полутраекторией, стремящейся к точке O и лежащей между областями g_{σ_1} и g_{σ_2}. Лемма доказана.

Следствие. Если $L_1^{(\ )}$ и $L_2^{(\ )}$ — две полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия O, между которыми не лежит ни одной особой полутраектории, стремящейся к точке O, то между $L_1^{(\ )}$ и $L_2^{(\ )}$ не могут лежать две различные эллиптические области.

Рассмотрим теперь наряду с ω- и α-сепаратрисами состояния равновесия O все стремящиеся к этому состоянию равновесия полутраектории орбитно-неустойчивых траекторий области G, не являющиеся его сепаратрисами, и перенумеруем все эти полутраектории (вместе с сепаратрисами):

$$L_1^{(\ )},\ L_2^{(\ )},\ \ldots,\ L_k^{(\ )}, \tag{11}$$

рассмотрим также все стремящиеся к O угловые полутраектории

$$\hat{L}_1^{(\ )},\ \hat{L}_2^{(\ )},\ \ldots,\ \hat{L}_r^{(\ )}\ . \tag{12}$$

Пусть, как и выше, $U_{\varepsilon_0}(O)$ — ε_0-окрестность состояния равновесия O, кроме O не содержащая целиком ни одной особой траектории. Криволинейные секторы g_i, на которые сепаратрисы и полутраектории петель разделяют окрестность $U_{\varepsilon_0}(O)$, подразделяются особыми полутраекториями, не являющимися сепаратрисами точки O, на более мелкие криволинейные секторы. Принимая во внимание лемму 5 § 17, нетрудно убедиться в том, что между двумя последовательными в циклическом порядке особыми полутраекториями лежит: а) ω-параболический сектор, если обе эти полутраектории положительны, и α-параболический, если обе полутраектории отрицательны; б) эллиптическая или гиперболическая область, если одна из этих полутраекторий положительна, а другая отрицательна. Как и выше, мы можем вместо того, чтобы рассматривать полутраектории, выделенные из петель, рассматривать все различные эллиптические области состояния равновесия.

Определение XXIII. *Мы скажем, что дана полная схема состояния равновесия O, не являющегося центром, если указан циклический порядок, в котором расположены вокруг состояния равновесия O все стремящиеся к нему особые полутраектории и все его эллиптические области, и при этом указано, какие из полутраекторий являются угловыми полутраекториями. Полная схема состояния равновесия может быть записана таблицей вида*

$$O\,|\,L_{i_1}^{+},\ g_{\sigma_1},\ L_{i_2}^{-},\ \hat{L}_{i_3},\ \ldots \tag{13}$$

Порядок, в котором полутраектории и эллиптические области выписаны в этой таблице, соответствует циклическому порядку, в котором они расположены вокруг состояния равновесия O. Как и в случае локальной схемы состояний равновесия, запись схемы определена с точностью до циклической перестановки. В согласии со сказанным выше (см. п. б)),

если между двумя полутраекториями, из которых одна положительна, а другая отрицательна, в схеме нет знака g_σ, то это означает, что между ними лежит гиперболический сектор.

Очевидно, полная схема определяет его локальную схему, но не наоборот. Так же, как и в случае локальной схемы, можно рассматривать вместо эллиптических областей петли, выделенные из них, или полутраектории этих петель.

Так же, как и локальная схема, полная схема может быть задана схематическим рисунком с указанием обозначений для траекторий. Так, например, пусть полная схема состояния равновесия задана таблицей

$$O \mid L_1^-,\ g_1,\ \hat{L}_1^+,\ L_5^+,\ L_6^+,\ g_2,\ L_2^-,\ L_3^+,\ g_3,\ L_7^-,\ g_4,\ L_4^+.$$

Соответствующим ей схематическим рисунком является рис. 211. При этом, как уже отмечалось (см. п. б)), если между двумя полутраекториями, из которых одна положительна, а другая отрицательна, нет замкнутой узловой области, то между ними лежит гиперболический сектор. Кроме того, в силу леммы 4 между двумя последовательными в циклическом порядке эллиптическими областями всегда лежит по крайней мере одна особая полутраектория.

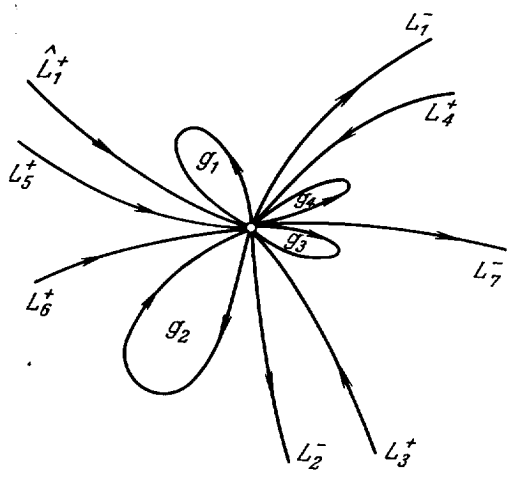


Рис. 211.

Рассмотрим замкнутую каноническую окрестность $\bar{H}$ состояния равновесия O и ограничивающую ее каноническую кривую E.

Очевидно, всякая стремящаяся к состоянию равновесия O полутраектория, не являющаяся сепаратрисой этого состояния равновесия, непременно пересекает одну из параболических дуг без контакта l_k. В частности, особые полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия O (не являющиеся сепаратрисами точки O), тоже пересекают параболические дуги.

Эти полутраектории разделяют параболические области на более мелкие, тоже параболические области, а параболические дуги l_k, входящие в границы этих областей, на более мелкие дуги без контакта (рис. 212).

В случае, когда дуга l_k — ω-параболическая, будем эти части дуги l_k называть ω-дугами и обозначать через a_i, а в случае, когда дуга l_k — α-параболическая, будем эти части называть α-дугами и обозначать через b_j. Дуги a_i и b_j кроме концов не пересекаются, таким образом, ни с одной особой полутраекторией. В частности, дуга a_i или b_j может совпадать со всей параболической дугой l_k. Нетрудно видеть, что хотя бы один из концов дуги a_i или b_j принадлежит особой полутраектории. Дуги a_i, b_j, а также определенные выше эллиптические дуги, седловые дуги траекторий и седловые дуги без контакта будем называть *каноническими дугами* канонической кривой E. Рассмотрим параболическую область, граница которой состоит из дуги a_i (или b_j) двух полутраекторий, проходящих через концы дуги a_i (или b_j) и состояния равновесия O. Всякую такую область, а также определенные выше эллиптическую и гиперболическую

области, являющиеся частями канонической окрестности H, будем называть *каноническими областями* данной канонической окрестности.

Предположим, что наряду с состоянием равновесия O системы D рассматривается состояние равновесия $\widetilde{O}$ системы $\widetilde{D}$ (системы D и $\widetilde{D}$, в частности, могут совпадать). Пусть заданы полные схемы этих состояний равновесия.

Таким образом, у состояния равновесия $\widetilde{O}$, так же как и у состояния равновесия O, перечислены все стремящиеся к нему особые полутраектории, т. е. ω- и α-сепаратрисы состояния равновесия $\widetilde{O}$, все стремящиеся к нему полутраектории орбитно-неустойчивых траекторий, не являющихся его сепаратрисами $\widetilde{L}_1^{(\ )}$, $\widetilde{L}_2^{(\ )}, \ldots, \widetilde{L}_{\widetilde{k}}^{(\ )}$, и все стремящиеся к $\widetilde{O}$ угловые полутраектории ($\widetilde{\widetilde{L}}_1^{(\ )}$, $\widetilde{\widetilde{L}}_2^{(\ )}, \ldots, \widetilde{\widetilde{L}}_{\widetilde{r}}$). Кроме того, перечислены все эллиптические области состояния равновесия $\widetilde{O}$ ($\widetilde{g}_{\sigma_1}$, $\widetilde{g}_{\sigma_2}, \ldots, \widetilde{g}_{\sigma\widetilde{l}}$). Полная схема состояний равновесия $\widetilde{O}$ записана в виде таблицы

$$\widetilde{O}\,|\,\widetilde{L}_1^{(\ )},\ \widetilde{g}_{\sigma_1},\ \ldots \qquad (14)$$

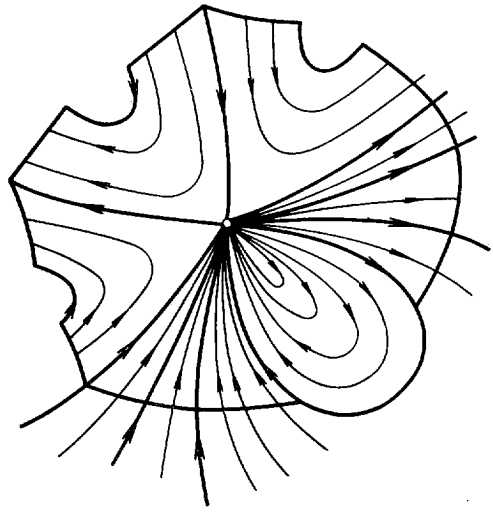


Рис. 212.

Порядок полутраекторий в эллиптических областях соответствует их циклическому порядку, в котором они расположены вокруг состояния равновесия $\widetilde{O}$. Приведем определение тождественности полных схем двух состояний равновесия, полностью аналогичное данному выше определению тождественности локальных схем.

Определение XXIV. *Мы скажем, что полные схемы состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ тождественны с сохранением ориентации и направления по t, если соответственно между* ω- *и* α-*сепаратрисами этих состояний равновесия и стремящимися к ним угловыми и особыми неугловыми полутраекториями, а также между их эллиптическими областями существует взаимно однозначное соответствие* θ, *удовлетворяющее следующему условию: полная схема состояния равновесия $\widetilde{O}$ может быть получена из полной схемы состояния равновесия O путем замены полутраекторий и эллиптических областей состояния равновесия O соответствующими им по соответствию* θ *полутраекториями или эллиптическими областями состояния равновесия $\widetilde{O}$.*

Таким образом, когда полные схемы двух состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ тождественны, очевидно,

$$k = \widetilde{k}, \quad r = \widetilde{r}, \quad l = \widetilde{l},$$

и при надлежащей нумерации траекторий и эллиптических областей состояния равновесия $\widetilde{O}$ таблица (14), описывающая полную схему этого состояния равновесия, может быть получена из таблицы, описывающей полную схему состояния равновесия O путем добавления волнистой черты

в обозначении полутраекторий и эллиптических областей. Соответствующие друг другу по соответствию θ полутраектории и эллиптические области будем называть соответствующими друг другу по схеме. При тождественности схем состояний равновесия, очевидно, существует также соответствие по схеме между полутраекториями L_i^{*+} и $\widetilde{L}_i^{*+}$, L_j^{*-} и $\widetilde{L}_j^{*-}$, выделенными из петель. Рассмотрим канонические окрестности H и $\widetilde{H}$ состояний равновесия O и $\widetilde{O}$, пусть E и $\widetilde{E}$ — ограничивающие их канонические кривые. Как и в случае состояния равновесия O, особые полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия $\widetilde{O}$, не являющиеся его сепаратрисами, разделяют каноническую окрестность $\widetilde{H}$ на канонические области, а каноническую кривую $\widetilde{E}$ на канонические дуги $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{b}_i$, $\widetilde{S}_c$, S^* и λ_i^c.

При тождественности полных схем состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ индуцируется естественное взаимно однозначное соответствие между каноническими областями канонических окрестностей H_i и $\widetilde{H}$, каноническими дугами кривых E и $\widetilde{E}$ и концами этих дуг, именно: 1) Соответствующими друг другу каноническими областями являются области, в границы которых входят соответствующие друг другу по схеме особые полутраектории. Соответствующие друг другу области имеют одинаковый характер. 2) Соответствующими друг другу каноническими дугами являются дуги, концы которых принадлежат соответствующим друг другу по схеме особым полутраекториям, и эти дуги входят в границы соответствующих друг другу в силу 1) областей; соответствующими друг другу концами канонических дуг являются концы, принадлежащие соответствующим друг другу по схеме полутраекториям или дугам. Имеет место также теорема:

Теорема 62. *Если схемы состояний равновесия O и $\widetilde{O}$ тождественны с сохранением ориентации и направления по t, то существует топологическое отображение любых двух замкнутых канонических окрестностей $\bar{H}$ и $\bar{\widetilde{H}}$ этих состояний равновесия, переводящее траектории в траектории, сохраняющие ориентацию и направление по t, при котором соответствующие друг другу по схеме угловые и особые неугловые полутраектории отображаются друг в друга.*

Доказательство настоящей теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы 61 с учетом замечания 2 к этой теореме.

Замечание. Если заранее задано топологическое отображение канонических кривых E и $\widetilde{E}$, при котором соответствующие друг другу по схеме канонические дуги и соответствующие друг другу по схеме концы их отображаются друг в друга, то всегда существует отображение замкнутых канонических окрестностей $\bar{H}$ и $\bar{\widetilde{H}}$, обладающее указанными в теореме свойствами, совпадающее на кривых E и $\widetilde{E}$ с заданным отображением этих кривых.

5. Состояния равновесия типа центр. Предположим теперь, что рассматриваемое состояние равновесия O таково, что к нему не стремится ни одна полутраектория. Тогда в силу теоремы 18 § 4 в любой сколь угодно малой окрестности точки O есть замкнутая траектория, содержащая точку O внутри. В силу предположения о конечности числа орбитно-неустойчивых траекторий существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в окрестности $U_{\varepsilon_0}(O)$ не лежит целиком ни одной особой траектории кроме точки O. Пусть L — замкнутая траектория, целиком лежащая в $U_{\varepsilon_0}(O)$ и содержащая точку O внутри (такая траектория, очевидно, всегда существует), а g_L — область,

расположенная внутри кривой L. Очевидно, в области g_L кроме O не лежит целиком ни одна особая траектория. Область g_L будем называть *канонической окрестностью центра O.*

Имеет место лемма, элементарное доказательство которой опускается.

Лемма 5. *Все траектории, проходящие через отличные от O точки области g_L, замкнуты, содержат одна другую и содержат состояние равновесия O внутри.*

Пусть теперь L_1 и L_2 — две замкнутые траектории, из которых одна лежит внутри другой. Пусть в области w между ними нет ни одной особой точки и все проходящие через точки этой области траектории замкнуты. Очевидно, все эти траектории должны лежать одна внутри другой.

Лемма 6. *Существует дуга без контакта, соединяющая некоторую точку M_1 траектории L_1 с некоторой точкой M_2 траектории L_2 и кроме концов M_1 и M_2 лежащая целиком внутри области w и пересекающая все проходящие через точки w траектории.*

Рассмотрим снова область g_L, ограниченную замкнутой траекторией L.

Лемма 7. *Существует простая гладкая дуга, соединяющая точку O с точкой A траекторией L целиком, кроме концов лежащая внутри L во всех отличных от O точках, не имеющая контактов и пересекающая все траектории, проходящие через отличные от O точки внутри g_L.*

Доказательства лемм 6 и 7 совершенно аналогичны доказательству лемм 2 и 5 § 18, поэтому мы их не приводим.

Мы будем называть замкнутую траекторию L *траекторией данного центра O*, если внутри L кроме O нет ни одного особого элемента (т. е. ни одной орбитно-неустойчивой траектории и ни одной граничной кривой).

Определение XXV. *Мы скажем, что задана схема состояния равновесия типа центр, если указано, совпадает ли на траекториях этого центра направление по t с положительным направлением обхода или противоположно ему.*

Предположим, что заданы два центра O и $\widetilde{O}$ соответственно системы D и системы $\widetilde{D}$.

Определение XXVI. *Мы скажем, что схемы центров O и $\widetilde{O}$ тождественны с сохранением ориентаций и направления по t, если на траекториях обоих этих центров направление по t либо одновременно совпадает с направлением положительного обхода, либо одновременно противоположно ему.*

Рассмотрим какие-нибудь канонические окрестности этих центров g_L и $\widetilde{g}_{\widetilde{L}}$. Пусть L и $\widetilde{L}$ — замкнутые траектории, являющиеся границами этих областей. Имеет место следующая теорема, элементарное доказательство которой, опирающееся на лемму 7, мы опускаем.

Теорема 63. *Если схемы центров O и $\widetilde{O}$ тождественны с сохранением ориентации и направления по t, то существует топологическое отображение замкнутых канонических окрестностей $\overline{g}_L$ и $\overline{\widetilde{g}}_{\widetilde{L}}$ друг на друга, при котором траектории переводятся в траектории и сохраняется ориентация и направление по t.*

Замечание. Пусть заранее задано топологическое отображение траекторий L и $\widetilde{L}$ друг на друга, при котором сохраняется направление по t, тогда топологическое отображение замкнутых канонических окрестностей $\overline{g}_L$ и $\overline{\widetilde{g}}_{\widetilde{L}}$, обладающее указанными в теореме свойствами, всегда может быть построено таким образом, чтобы в точках траекторий L и $\widetilde{L}$ оно совпадало с этим заданным отображением.

ГЛАВА IX

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ СЛОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ *)

Введение

В настоящей главе рассматривается один класс сложных состояний равновесия, естественно представляющийся наиболее элементарным. Именно, рассматриваются сложные изолированные состояния равновесия аналитических динамических систем в случае, когда разложения правых частей уравнений системы в окрестности этих состояний равновесия содержат хотя бы один член первой степени.

Метод исследования сложных состояний равновесия, излагаемый в настоящей главе, опирается на последовательное рассмотрение траекторий, стремящихся к состоянию равновесия в каком-нибудь одном из возможных направлений. Поэтому прежде всего в первом параграфе настоящей главы (§ 20) рассматривается вопрос о направлениях, в которых траектории могут стремиться к сложным состояниям равновесия (для случая простых состояний равновесия этот вопрос рассматривался в главе IV, § 9).

В § 21 изучаются состояния равновесия (указанного типа), имеющие одно отличное от нуля характеристическое число ($\delta \neq 0$). В этом случае состояние равновесия может иметь либо характер седла, либо узла, либо это — так называемое седло — узел (состояние равновесия с одним параболическим и двумя гиперболическими секторами).

В § 22 рассматривается случай, когда оба характеристических числа равны нулю ($\delta = 0$). В этом случае могут представиться семь возможностей — седло, узел, фокус, центр, седло — узел, а также вырожденное состояние равновесия (два гиперболических сектора) и состояние равновесия с эллиптической областью (имеющее один эллиптический и один гиперболический сектор). Применяемый в этой главе метод исследования принадлежит Бендиксону [33].

Заметим, что этим методом можно исследовать топологическую структуру не только указанных выше, но и любых состояний равновесия аналитических систем.

---

*) В настоящей главе мы в известной мере опираемся на проведенное в главе VIII исследование возможного характера окрестности состояния равновесия и пользуемся введенными там понятиями параболического, гиперболического сектора и эллиптической областей состояний равновесия.

§ 20. Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия

1. Переход к полярным координатам. Мы ограничиваемся только случаем динамических систем

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{I}$$

аналитического класса.

Пусть O — изолированное сложное состояние равновесия (для которого $\Delta = 0$, см. § 7), лежащее в начале координат. Опираясь на определение IX § 9, мы рассмотрим в настоящем параграфе вопрос о направлениях, в которых стремятся траектории к такому состоянию равновесия.

Предположим, что разложения правых частей $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности рассматриваемого состояния равновесия $O(0, 0)$ имеют вид

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P_m(x, y) + \varphi(x, y), \\ Q(x, y) &= Q_m(x, y) + \psi(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $m \geqslant 1$, $P_m(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ — однородные многочлены, состоящие из всех членов m-го порядка соответствующих разложений, а функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — ряды, состоящие из членов более высоких порядков. При этом мы считаем, что многочлены P_m и Q_m не равны тождественно нулю. Так же, как в § 8, перейдем к полярным координатам, полагая $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + Q(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{\rho}[Q(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta - P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta], \end{aligned} \tag{2}$$

которая после простых преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho^m[P_m(\theta)\cos\theta + Q_m(\theta)\sin\theta + \rho\bar{\varphi}(\rho, \cos\theta, \sin\theta)], \\ \frac{d\theta}{dt} &= \rho^{m-1}[Q_m(\theta)\cos\theta - P_m(\theta)\sin\theta + \rho\bar{\psi}(\rho, \cos\theta, \sin\theta)], \end{aligned} \tag{3}$$

где через $P_m(\theta)$, $Q_m(\theta)$ обозначены для краткости $P_m(\cos\theta, \sin\theta)$, $Q_m(\cos\theta, \sin\theta)$, а $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ — аналитические функции своих аргументов. Связь между траекториями систем (I) и (3) может быть установлена полностью аналогично тому, как это было сделано в § 8 в случае рассмотренной там системы.

Пусть $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольная траектория системы (3), расположенная в полосе Ω^+: $[-\infty < \theta < +\infty,\ 0 < \rho < \rho^*]$ плоскости (ρ, θ) (ρ^* достаточно мало). Введем на этой траектории новый параметр τ, связанный с параметром t соотношением

$$\frac{d\tau}{dt} = \rho^{m-1}(t). \tag{4}$$

Так как $\rho > 0$, то τ есть монотонно-возрастающая функция t и, следовательно, t — однозначная функция τ: $t = t(\tau)$. Уравнения

$$\rho = \rho(t(\tau)), \qquad \theta = \theta(t(\tau)) \tag{5}$$

также являются параметрическими уравнениями рассматриваемой траектории.

Из соотношений (3) и (4) следует, что пара функций $\varrho = \varrho(t(\tau))$, $\theta = \theta(t(\tau))$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{d\tau} &= \varrho[P_m(\theta)\cos\theta + Q_m(\theta)\sin\theta + \varrho\bar{\varphi}], \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= Q_m(\theta)\cos\theta - P_m(\theta)\sin\theta + \varrho\bar{\psi}. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, траектории системы (3), расположенные в полосе Ω^+, совпадают с траекториями системы (6). Предположим теперь, что рассматривается траектория L системы (I), лежащая в $U_{\rho^*}(O)$ и стремящаяся, скажем, при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия O. Пусть L_1 — одна из траекторий системы (3), соответствующая траектории L. При $t \to +\infty$ $\varrho(t) \to 0$. Покажем, что при $t \to +\infty$ τ также стремится к $+\infty$ (при движении по траектории L_1). В самом деле, так как τ — монотонно-возрастающая функция от t, то при $t \to +\infty$ τ либо стремится к $+\infty$, либо ограничено сверху. Рассмотрим выражение в квадратных скобках из первого уравнения системы (6). Нетрудно видеть, что при достаточно малых ϱ это выражение ограничено по модулю, следовательно, существует такое $C > 0$, что $\frac{d\varrho}{d\tau} > -C\varrho$ для всех достаточно малых ϱ. Интегрируя последнее неравенство от τ_0 до $\tau > \tau_0$, мы получим

$$\ln\varrho(\tau) - \ln\varrho(\tau_0) > -C(\tau - \tau_0),$$

т. е. $\tau > \tau_0 + \frac{\ln\varrho(\tau) - \ln\varrho(\tau_0)}{-C}$. Отсюда следует, что при $\varrho(\tau) \to 0$ $\tau \to +\infty$.

Заметим теперь, что систему (6) можно рассматривать не только в полосе $[0 < \varrho < \varrho^*]$, но и в полосе $[|\varrho| < \varrho^*]$, если ϱ^* достаточно мало. В этой полосе она может иметь состояния равновесия только на оси θ, т. е. при $\varrho = 0$. В самом деле, если $\varrho \neq 0$, то правые части системы (6) одновременно равны нулю лишь в том случае, когда равны нулю правые части системы (2), т. е. когда $P(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta) = 0$, $Q(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta) = 0$. Однако в силу изолированности состояния равновесия O последние два равенства при малых ϱ, отличных от нуля, выполняться одновременно не могут.

Пусть, как и выше, L есть траектория системы (I), стремящаяся при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия O, L_1 — соответствующая ей траектория системы (6). Как мы показали, при $\tau \to +\infty$ $\varrho(\tau) \to 0$ (вдоль траектории L_1). Очевидно, чтобы выяснить, стремится ли траектория L в определенном направлении к состоянию равновесия O, нужно исследовать функцию $\theta(\tau)$, соответствующую траектории L_1. К этому исследованию мы и переходим.

2. Общий случай. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда многочлен $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y)$ не равен тождественно нулю. При этом уравнение

$$Q_m(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - P_m(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta = 0 \tag{7}$$

либо не имеет действительных корней совсем, либо имеет на интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ не более $m + 1$ корня *).

*) Это следует из того, что уравнение (7) сводится к уравнению $(m+1)$-го порядка относительно $\operatorname{tg}\theta$; при рассмотрении его корней следует, конечно, учитывать и корни, равные бесконечности.

Пусть эти корни — θ_1, θ_2, . . ., θ_s ($s \leqslant m+1$). Тогда все корни уравнения (7) имеют вид

$$\theta_{kn} = \theta_k + \pi n \qquad (1 \leqslant k \leqslant s, \ -\infty < n < +\infty).$$

Точки $\rho = 0$, $\theta = \theta_k + \pi n$ представляют из себя все состояния равновесия системы (6), расположенные в полосе $|\rho| < \rho^*$.

Априори возможны три предположения: 1) при $\tau \to +\infty$ $\theta(\tau) \to +\infty$ или $\theta(\tau) \to -\infty$; 2) при $\tau \to +\infty$ функция $\theta(\tau)$ остается ограниченной по модулю; 3) при $\tau \to +\infty$ функция $\theta(\tau)$ не ограничена, но не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Покажем, что случай 3) в действительности не может иметь места. Предположим, что функция $\theta(\tau)$ не ограничена сверху и не стремится к $+\infty$. Тогда для некоторого числа θ^* при любом T существует такое $\tau_1 > T$, что $\theta(\tau_1) \leqslant \theta^*$. С другой стороны, для любого θ^{**} существует при любом T число $\tau_2 > T$ такое, что $\theta(\tau_2) > \theta^{**}$.

Возьмем $\theta^{**} > \theta^*$, и пусть число $\bar{\theta}$ отлично от чисел θ_{kn} и удовлетворяет неравенству $\theta^* < \bar{\theta} < \theta^{**}$. Пусть для определенности

$Q_m(\cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta})\cos\bar{\theta} - P_m(\cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta})\sin\bar{\theta} > 0$.

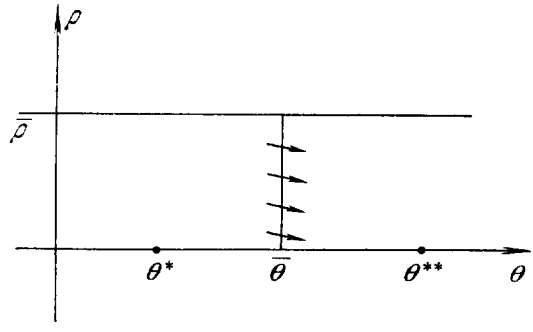


Рис. 213.

Тогда в силу второго из уравнений (6) при $\theta = \bar{\theta}$ и при достаточно малых ρ $(0 < \rho < \bar{\rho})$ $\frac{d\theta}{d\tau} > 0$, т. е. прямолинейный отрезок $\theta = \bar{\theta}$, $0 < \rho < \bar{\rho}$, не имеет контактов с траекториями системы (6) и траектории этой системы могут пересекать его (при возрастании τ) только в направлении слева направо (рис. 213).

Так как при больших τ траектория L_1 проходит в полосе $0 < \rho < \bar{\rho}$, то она тоже может пересекать указанный отрезок только в одном направлении. Но тогда функция $\theta(\tau)$ не может при сколь угодно больших τ переходить от значений, меньших θ^*, к значениям, большим θ^{**}, и, обратно, что противоречит выбору чисел θ^* и θ^{**}. Таким образом, случай 3) не может иметь места.

В случае 1) $\theta(\tau) \to +\infty$ или $\theta(\tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$. Это значит, что при $t \to +\infty$ точка движется по траектории L к состоянию равновесия O так, что $\theta(t) \to +\infty$ или $\theta(t) \to -\infty$, т. е. траектория L представляет из себя спираль.

В случае 2) положительная полутраектория L_1^+ системы (6) остается в ограниченной части плоскости и, следовательно, имеет ω-предельное множество.

Так как при $\tau \to +\infty$ $\rho(\tau) \to 0$, то это предельное множество должно быть расположено на оси θ. Но тогда в силу теоремы 9 § 4 оно является состоянием равновесия, т. е. одной из точек с координатами $\rho = 0$ и $\theta = \theta_{kn}$. Это значит, что точка M траектории L стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия O так, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta^*$ существует и равен одному из чисел θ_{kn}, т. е. полутраектория L^+ стремится к состоянию равно-

весия O в направлении θ_{kn}. Часто говорят, что это направление удовлетворяет уравнению

$$xQ_m(x,\ y) - yP_m(x,\ y) = 0 \tag{8}$$

в том смысле, что $\operatorname{tg}\theta^*$ равен одному из значений отношения y/x, определяемого указанным уравнением.

Замечание 1. Если предположить, что направление θ^*, в котором полутраектория L^+ стремится к точке O, не удовлетворяет одновременно уравнениям $P_m(x,\ y) = 0$, $Q_m(x,\ y) = 0$ (т. е. не удовлетворяются одновременно соотношения $P_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*) = 0$, $Q_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*) = 0$), то нетрудно показать, что при $t \to +\infty$ существует $\lim \frac{dy}{dx}$ (конечный или бесконечный) и этот предел совпадает с $\lim y/x$, т. е. тоже равен $\operatorname{tg}\theta^*$.

Для доказательства рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_m(x,\ y) + \psi(x,\ y)}{P_m(x,\ y) + \varphi(x,\ y)}.$$

Полагая $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ и сокращая на ρ^m, мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_m(\cos\theta,\ \sin\theta) + \rho\psi_1(\rho,\ \cos\theta,\ \sin\theta)}{P_m(\cos\theta,\ \sin\theta) + \rho\varphi_1(\rho,\ \cos\theta,\ \sin\theta)}$$

(φ_1 и ψ_1 — аналитические функции своих аргументов). Так как при движении по полутраектории L^+ $\rho \to 0$, $\theta \to \theta^*$, то, переходя к пределу, мы получим

$$\lim \frac{dy}{dx} = \frac{Q_m(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*)}{P_m(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*)}.$$

Из этого соотношения и равенства

$$\cos\theta^* Q_m(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*) - \sin\theta^* P_m(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*) = 0$$

следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta^* = \lim y/x$. Утверждение доказано.

Случай, когда $P_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*)$ и $Q_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*)$ одновременно равны нулю, мы не рассматриваем.

Замечание 2. Если существует траектория, являющаяся спиралью, стремящейся, например, при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия O, то все траектории, проходящие через точки некоторой окрестности O, являются такими спиралями, т. е. точка O является устойчивым или неустойчивым фокусом. Докажем это.

Выберем число $\bar\theta$ так, чтобы выражение $Q_m(\cos\bar\theta, \sin\bar\theta)\cos\theta - P_m(\cos\bar\theta, \sin\bar\theta)\sin\bar\theta$ было отлично от нуля. Тогда, как нетрудно видеть, прямолинейный отрезок $\theta = \bar\theta$, $0 < \rho < \bar\rho$, при достаточно малом ρ не имеет контактов с траекториями системы (I).

Действительно, условия касания траектории с данным отрезком есть $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\bar\theta$ или

$$Q(x,\ y)\cos\bar\theta - P(x,\ y)\cos\bar\theta = 0.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\rho^m [Q_m(\cos\bar\theta,\ \sin\bar\theta)\cos\bar\theta - P_m(\cos\bar\theta,\ \sin\bar\theta)\sin\bar\theta + \rho\psi(\rho,\ \bar\theta)] = 0.$$

В силу выбора $\bar\theta$ данное выражение не равно нулю при малых ρ.

Пусть L — траектория системы, являющаяся спиралью, пересекается с указанным отрезком без контакта в точках A_1, A_2, A_3, . . ., монотонно стремящихся к точке O (рис. 214). Тогда нетрудно показать, опираясь на лемму 14 § 3, что всякая траектория, проходящая внутри области, ограниченной дугой $A_i\,A_{i+1}$ траектории и отрезком $A_{i+1}A_i$ без контакта, проходит при возрастании t последовательно все области, типа заштрихованной на чертеже (начиная с некоторой), и, следовательно, является спиралью. Утверждение доказано.

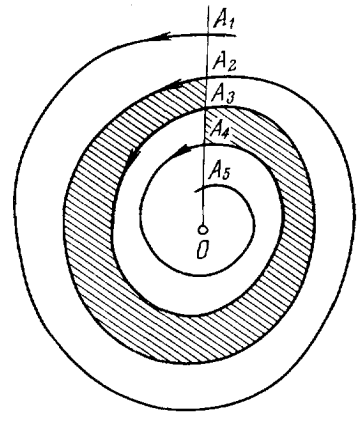


Рис. 214.

3. Особый случай. Рассмотрим теперь случай, когда

$$x\,Q_m(x,\,y) - y\,P_m(x,\,y) \equiv 0.$$

Очевидно, $Q_m(x,\ y) = y\,Q_{m-1}(x,\ y)$, а $P_m(x,\ y) = xQ_{m-1}(x,\ y)$, где Q_{m-1} — однородный многочлен $(m-1)$-го порядка, не равный тождественно нулю (напомним, что $m \geqslant 1$). Переходя, как и в предыдущем случае, к полярным координатам и вводя τ при помощи соотношения

$$\frac{d\tau}{dt} = \varrho^m, \tag{9}$$

мы придем, как нетрудно убедиться, к системе

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{d\tau} &= Q_{m-1}(\cos\theta,\ \sin\theta) + \varrho\bar{\varphi}(\varrho,\ \cos\theta,\ \sin\theta),\\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \varrho^r\,[z(\cos\theta,\ \sin\theta) + \varrho\bar{\psi}(\varrho,\ \cos\theta,\ \sin\theta)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ — аналитические функции своих аргументов, r — некоторое целое число, $r \geqslant 0$, а $z(\cos\theta,\ \sin\theta)$ — однородный многочлен порядка $m + r + 2$ *). Так же, как раньше, траекториям системы (10), расположенным в полосе $0 < \varrho < \varrho^*$, соответствуют траектории системы (1), расположенные в $U_{\varrho^*}(O)$. Однако в данном случае, в отличие от предыдущего, мы не можем утверждать, что при движении по траектории L_1 параметр $\tau \to +\infty$, когда $\varrho \to 0$ (т. е. когда $t \to +\infty$). Можно только утверждать, что при $\varrho \to 0$ τ стремится либо к конечному пределу T, либо к $+\infty$ $\left(\text{так как } \frac{d\tau}{dt} > 0 \text{ в силу (9)}\right)$.

Рассмотрим систему (10) в полосе $|\varrho| < \varrho^*$, считая, что ϱ^* достаточно мало. Состояния равновесия системы (10) в этой полосе расположены на оси θ и имеют координаты $(0,\ \theta)$, где θ — корни уравнения

$$Q_{m-1}(\cos\theta,\ \sin\theta) = 0. \tag{11}$$

При этом, если $r > 0$, то каждому корню θ уравнения (11) соответствует состояние равновесия $(0,\ \theta)$ системы (10), если же $r = 0$, то $(0,\ \theta)$ является

*) Мы предполагаем, что производная $d\theta/d\tau$ не равна тождественно нулю, тогда число r и функция z определены. Если $d\theta/d\tau \equiv 0$, то интегральными кривыми являются лучи $\theta = \text{const}$.

состоянием равновесия при условии, что $z(\cos\theta, \sin\theta)$ тоже обращается в нуль. Очевидно, система (10) либо не имеет совсем состояний равновесия в полосе $|\varrho| < \varrho^*$, либо все состояния равновесия ее суть точки $\varrho = 0$, $\theta = \theta_{kn} = \theta_k + n\pi$, где k пробегает значения 1, 2, . . ., s (n пробегает все целые числа, а s — некоторое положительное число, $s \leqslant m - 1$). Точки $(0, \theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, s$,— состояния равновесия системы, расположенные на отрезке $0 \leqslant \theta < \pi$ оси θ (см. начало предыдущего пункта).

Будем называть направления θ, удовлетворяющие уравнению (11), *особыми* направлениями.

Предположим, что θ не является особым направлением. Тогда в точке (0, 0), а следовательно, и в близких точках $\frac{d\varrho}{d\tau} \neq 0$. Уравнение траектории, проходящей через эту точку, можно написать в виде $\theta = \theta(\varrho)$, причем $\frac{d\theta}{d\varrho} \neq \infty$. Следовательно, траектории системы (10) вблизи точки $(0, \theta)$ ведут себя так, как показано на рис. 215. Но это означает, что для каждого неособого направления θ существует в точности одна положительная или отрицательная полутраектория системы (I), которая стремится к состоянию равновесия O в направлении θ.

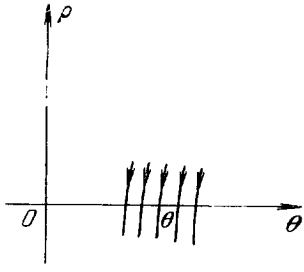


Рис. 215.

Пусть теперь L^+ — полутраектория системы (I), расположенная в $U_{\rho^*}(O)$, стремящаяся к состоянию равновесия O и отличная от полутраекторий, только что рассмотренных (т. е. от траекторий, стремящихся к O в неособых направлениях).

Рассмотрим какую-нибудь из траекторий системы (10), соответствующих на плоскости (ϱ, θ) полутраектории L^+. Пусть это будет траектория $\widetilde{L}$ ($\varrho = \widetilde{\varrho}(\tau)$, $\theta = \widetilde{\theta}(\tau)$), причем пусть точкам полутраектории L^+ взаимно однозначно соответствуют те точки траектории $\widetilde{L}$, для которых $\tau_0 < \tau < T$. Эти точки образуют часть траектории $\widetilde{L}$; мы обозначим эту часть через $\widetilde{L}_1$. Очевидно, эта часть лежит в полосе $0 < \varrho < \varrho^*$ плоскости (ϱ, θ) и при $\tau \to T$ точка $M(\tau)$ на этой части движется так, что $\widetilde{\varrho}(\tau) \to 0$.

Заметим, что либо T есть конечное число, либо $T = +\infty$. Если $T = +\infty$, то $\widetilde{L}_1$ есть положительная полутраектория. Если T — конечное число, то можно предполагать две возможности: 1) траектория $\widetilde{L}$ определена и для значений $\tau \geqslant T$; 2) $\widetilde{L}$ определена только для значений $\tau < T$.

Покажем сначала, что точки части $\widetilde{L}_1$ траектории $\widetilde{L}$ расположены в конечной части плоскости. С этой целью рассмотрим дугу A_0B_0 некоторой траектории системы (10), проходящей через точку $A_0(0, \theta_0)$, где θ_0 не является особым направлением.

Будем предполагать, что для всех точек этой дуги, отличных от A_0, $0 < \varrho \leqslant \varepsilon$, где ε — достаточно малое число ($\varepsilon < \varrho^*$), сдвигая дугу A_0B_0 вдоль оси θ на расстоянии $2\pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), мы получим кривые A_kB_k, также являющиеся частями траекторий системы (10) (рис. 216).

Очевидно, когда $\tau \to T$, возрастая, и, следовательно, $\varrho(\tau) \to 0$, часть $\widetilde{L}_1$ траектории $\widetilde{L}$ попадает в один из указанных на рис. 216 «четырехугольников» $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ и при дальнейшем возрастании τ не может

из него выйти. В самом деле, $\widetilde{L}_1$ лежит в полосе $0 < \rho < \rho^*$, поэтому $\rho(\tau) > 0$. Далее, начиная с некоторого момента для точек этой части $\rho(\tau)$ не превосходит ε. Поэтому $\widetilde{L}_1$ при возрастании τ не может выйти из области $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ ни через сторону A_kA_{k+1}, ни через сторону B_kB_{k+1}. Через стороны A_kB_k и $A_{k+1}B_{k+1}$ $\widetilde{L}_1$ также не может выйти, так как эти стороны являются дугами других траекторий системы (10). Таким образом, мы показали, что при $\rho \to 0$ дуга $\widetilde{L}_1$ (соответствующая полутраектории L^+ системы (I)) остается в ограниченной части полосы $0 < \rho < \rho^*$.

Если $T = +\infty$, то $\widetilde{L}_1$ является положительной полутраекторией и так же, как и в случае, описанном в конце п. 2, $\widetilde{L}_1$ стремится к одному из состояний равновесия $(0, \theta_{kn})$ системы (10), расположенному на оси θ. При этом полутраектория L^+ стремится к точке O в направлении 0_{kn}.

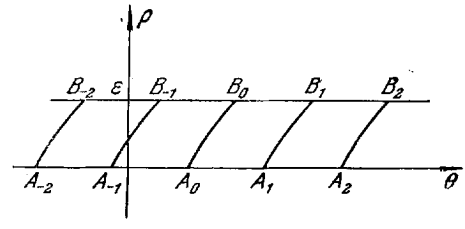


Рис. 216.

Если T — конечное число и на траектории $\widetilde{L}$ существует точка, для которой $\tau = T$, то точка эта $\rho = \widetilde{\rho}(T)$, $\theta = \widetilde{\theta}(T)$ лежит на оси θ (т. е. $\widetilde{\rho}(T) = 0$) и при $\tau \to T$ (т. е. при $\rho \to 0$) $\widetilde{\theta}(\tau) \to \widetilde{\theta}(T)$. Отсюда следует, что полутраектория L^+ стремится к состоянию равновесия O в направлении $\widetilde{\theta}(T)$. Заметим, что $\widetilde{\theta}(T)$ является тогда особым направлением (т. е. удовлетворяет уравнению (11)), однако точка $(0, \widetilde{\theta}(T))$ не является состоянием равновесия системы (10) *).

Случай, когда T — конечное число, а траектория $\widetilde{L}$ определена только для значений $\tau < T$, не может иметь места, так как при этом получилось бы противоречие с теоремой 2, § 1.

Таким образом, мы видим, что в случае, когда

$$x\theta_m(x, y) - yP_m(x, y) \not\equiv 0,$$

каждая траектория, стремящаяся к состоянию равновесия O, стремится к нему в определенном направлении.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что если $\widetilde{\theta}$ является особым направлением, но точка $(0, \widetilde{\theta})$ не является состоянием равновесия системы (10), т. е. если $\rho = 0$, $z(\cos\widetilde{\theta}, \sin\widetilde{\theta}) \neq 0$, то к состоянию равновесия O в направлении $\widetilde{\theta}$ обязательно стремится либо одна полутраектория, либо две; в последнем случае одна из этих полутраекторий является продолжением второй.

В самом деле, в этом случае точка $(0, \widetilde{\theta})$ является обыкновенной точкой аналитической системы (10), причем проходящая через нее траектория касается оси θ (так как $\frac{d\rho}{d\tau} = 0$, $\frac{d\theta}{d\tau} \neq 0$). Поэтому в окрестности данной точки траектории расположены так, как на рис. 217 или 218.

Рассматривая соответствующие траектории на плоскости (x, y), мы непосредственно убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

*) То есть $\rho = 0$, $z(\cos\widetilde{\theta}(T), \sin\widetilde{\theta}(T)) \neq 0$.

Замечание 2. Если $\bar{\theta}$ есть особое направление и точка $(0, \bar{\theta})$ является состоянием равновесия системы (10), то заранее возможны следующие предположения: 1) не существует ни одной полутраектории, стремящейся к O в направлении $\bar{\theta}$; 2) существует одна такая полутраектория; 3) существует конечное число таких траекторий, большее единицы;

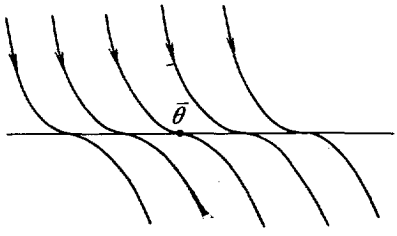


Рис. 217.

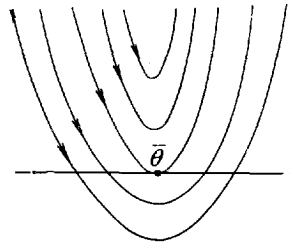


Рис.218.

4) существует бесчисленное множество полутраекторий, стремящихся к O в направлении $\bar{\theta}$. В п. 4 мы покажем на примерах, что каждый из этих случаев действительно может иметь место.

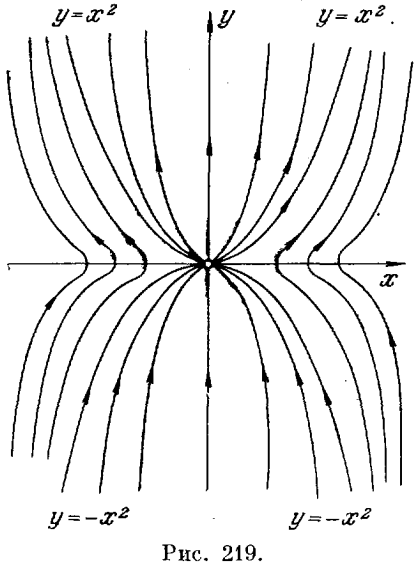


Рис. 219.

Мы сформулируем основные результаты, полученные в п. 2 и п. 3 в виде следующей теоремы:

Теорема 64. *Всякая полутраектория аналитической системы*

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + \varphi(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q_m(x, y) + \psi(x, y),$$

стремящаяся к состоянию равновесия O $(0, 0)$, *либо является спиралью, либо стремится к* O *в определенном направлении* θ^*.

Если хоть одна из траекторий системы является спиралью, стремящейся к O *при* $t \to +\infty$ (*или при* $t \to -\infty$), *то все траектории, проходящие через точки некоторой окрестности состояния равновесия* O, *являются такими же спиралями* (*т. е. точка* O *есть устойчивый или неустойчивый фокус*).

В случае, когда $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) \not\equiv 0$, *все направления* θ^*, *в которых полутраектории системы стремятся к состоянию равновесия* O, *удовлетворяют уравнению*

$$xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) = 0$$

(*т. е. уравнению* $\cos\theta^* Q_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*) - \sin\theta^* P_m(\cos\theta^*, \sin\theta^*) = 0$).

Если $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) \equiv 0$, *то система имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = xQ_{m-1}(x, y) + \varphi(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = yQ_{m-1}(x, y) + \psi(x, y). \qquad (Q_{m-1}(x, y) \not\equiv 0),$$

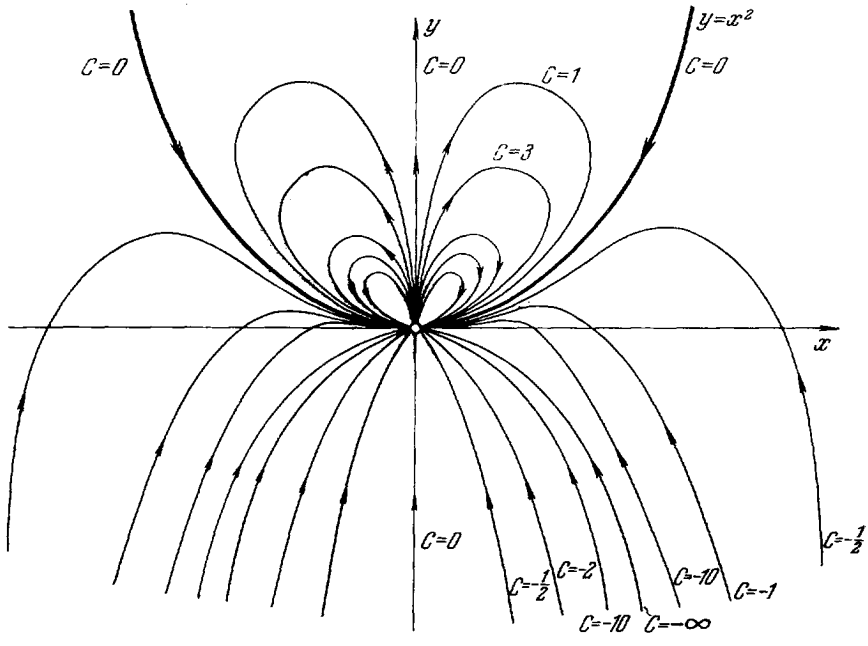


Рис. 220.

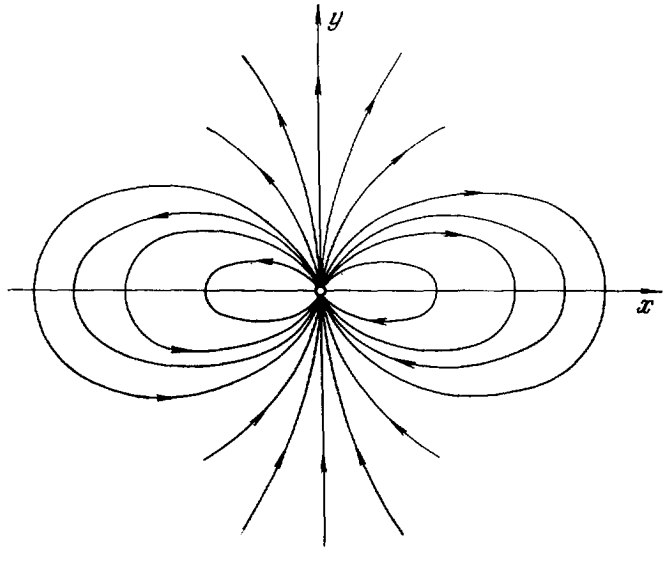


Рис. 221.

В этом случае для каждого неособого направления θ (*т. е. направления, не удовлетворяющего уравнению* $Q_{m-1}(x, y) = 0$) *существует в точности одна полутраектория, стремящаяся к* O *в направлении* θ. *Для особого же направления* θ^* *может оказаться, что не существует ни одной полутраектории, стремящейся к* O *в направлении* θ^*, *либо есть конечное число таких траекторий, либо, наконец, таких полутраекторий существует бесчисленное множество.*

4. Примеры. Мы представляем читателю рассмотреть приведенные ниже примеры (во всех этих примерах системы могут быть проинтегрированы в квадратурах) и убедиться в том, что все случаи, перечисленные в последнем утверждении, действительно могут иметь место.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = xy; \qquad \frac{dy}{dt} = y^2 + x^4.$$

Система интегрируется путем замены $\frac{y}{x} = u$. Можно показать, что особыми направлениями являются $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, причем каждому из особых направлений соответствуют две полутраектории, входящие в O в этих направлениях (рис. 219).

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = xy - 3x^3; \qquad \frac{dy}{dt} = y^2 - 6x^2y + x^4.$$

Система интегрируется с помощью замены $y/x^2 = u$. Рассматривая полученный интеграл, нетрудно убедиться, что особых направлений два: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, и что каждому особому направлению соответствует бесчисленное множество траекторий, входящих в состояние равновесия в этом направлении (рис. 220).

Пример 3.

$$\frac{dx}{dt} = xy, \qquad \frac{dy}{dt} = y^2 - x^4.$$

Траекториями этой системы являются кривые $y^2 + x^4 = Cx^2$ $(C > 0)$ и, кроме того, полуоси $x = 0$, $y > 0$ и $x = 0$, $y < 0$. Особыми направлениями являются $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. При этом не существует ни одной траектории, входящей в состояние равновесия в особом направлении (рис. 221).

§ 21. Топологическая структура сложного состояния равновесия в случае $\sigma = P'_x(0, 0) + Q'_y(0, 0) \neq 0$

1. Вспомогательные преобразования и леммы. Рассмотрим преобразование, определяемое соотношениями

$$x = x, \qquad y = x\eta. \tag{1}$$

Это преобразование и аналогичное ему преобразование

$$x = \xi y, \qquad y = y \tag{2}$$

систематически используется в исследованиях настоящей главы. Поэтому приведем здесь некоторые их свойства.

а) Рассмотрим плоскости (x, y) и (x, η). Будем для краткости называть *разрезанной плоскостью* плоскость, из которой удалены точки оси $x = 0$. Преобразование (1) определяет топологическое отображение разрезанной плоскости (x, y) на разрезанную плоскость (x, η). Из формул (1)

следует, что при этом отображении точки квадрантов 1, 2, 3, 4 плоскости (x, y) переходят соответственно в точки квадрантов 1, 3, 2, 4 плоскости (x, η).

Если рассматривать преобразование (1) по отношению к неразрезанным плоскостям (x, y) и (x, η), то на оси $x = 0$ плоскости (x, y) отображение не определено $\left(\text{так как } \eta = \frac{y}{x}\right)$. На оси $x = 0$ плоскости (x, η) оно определено, но переводит эту ось в одну точку $(0, 0)$ плоскости (x, y).

б) Рассмотрим малую окрестность $U_\delta(O)$ начала координат O плоскости (x, y) радиуса δ. На разрезанной плоскости эта окрестность состоит из двух областей («полукругов»). Преобразованием (1) каждая из этих областей отображается на область плоскости (x, η), представляющую из себя полосу, расположенную соответственно справа или слева от оси $x = 0$ и ограниченную этой осью и асимптотически приближающейся к ней линией (рис. 222).

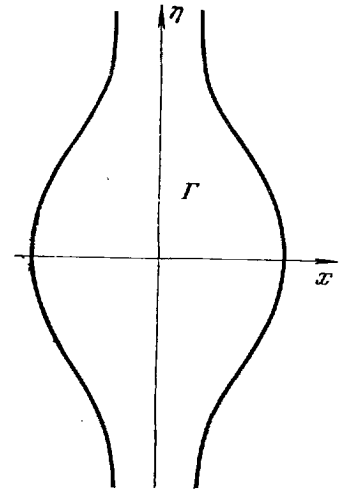


Рис. 222.

Обозначим через Γ область плоскости (x, η), ограниченную двумя указанными линиями. Посредством преобразования (1) «разрезанная» окрестность $U_\delta(O)$ топологически отображается на «разрезанную» область Γ.

в) Пусть дана динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \qquad (3)$$

определенная в окрестности $U_\delta(O)$. В разрезанной окрестности $U_\delta(O)$ преобразование (1) можно рассматривать как замену переменных, при которой система (3) переходит, как показывают несложные вычисления, в систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, \eta x), \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{Q(x, \eta x) - \eta P(x, \eta x)}{x}. \qquad (4)$$

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что система (3) является аналитической, а точка $O(0, 0)$ есть ее состояние равновесия. Тогда числитель выражения во втором уравнении (4) содержит множитель x, который можно сократить со знаменателем. После сокращения получается система, совпадающая с системой (4) в разрезанной области Γ, но определенная уже во всей области Γ. Однако говорить о том, что при замене переменных (1) траектории системы (4) переходят в траектории системы (3), можно лишь в том случае, когда обе системы рассматриваются лишь в разрезанных областях Γ и $U_\delta(O)$.

Очевидно, преобразование (2) обладает свойствами, аналогичными свойствам а), б), в). Мы не будем их формулировать, отметим только, что при рассмотрении преобразования (2) под *разрезанной* надо понимать плоскость, из которой удалены точки оси $y = 0$. Далее, преобразование (2) переводит точки квадрантов 1, 2, 3, 4 плоскости (ξ, y) соответственно в точки квадрантов 1, 2, 4, 3 плоскости (x, y). Область Γ, соответствующая при преобразовании (2) окрестности $U_\delta(O)$, расположена, очевидно, вдоль оси ξ, а система (3) переходит в систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{P(\xi y, y) - \xi Q(\xi y, y)}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = Q(\xi y, y). \qquad (5)$$

Мы переходим теперь к изложению двух лемм, на которые опираются все рассмотрения этой главы. Предположим, что правые части системы (3) не равны тождественно нулю. Тогда систему (3) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + \varphi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_m(x, y) + \psi(x, y), \tag{6}$$

где $m \geqslant 1$, $P_m(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ — однородные многочлены m-го порядка (один из них может быть тождественно равным нулю), а $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — функции, разложения которых в ряд в окрестности $U_\delta(O)$ начинаются с членов не ниже $(m+1)$-го порядка.

Применив к системе (6) преобразование (1), мы получим систему (4), правые части которой содержат, как легко видеть, общий множитель x^{m-1}. Делая замену параметра $x^{m-1}dt = d\tau$, мы получим систему

$$\frac{dx}{d\tau} = xP_m(1, \eta) + x^2P^*(x, \eta), \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = Q_m(1, \eta) - \eta P_m(1, \eta) + xQ^*(x, \eta), \tag{7}$$

где $P^*(x, \eta)$, $Q^*(x, \eta)$ — аналитические функции в области Γ, соответствующей окрестности $U_\delta(O)$ при преобразовании (1). При $m = 1$ системы (4) и (7), очевидно, совпадают. При $m > 1$ траектории системы (7) могут либо совпадать с траекториями системы (4), либо состоять из нескольких траекторий системы (4), так что целой траектории системы (4) может соответствовать дуга траектории системы (7) (см. § 1).

Лемма 1. *Пусть* $O(0, 0)$ — *изолированное состояние равновесия системы* (6) *и*

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{8}$$

— *полутраектория этой системы, стремящаяся к нему в направлении* $\theta = \operatorname{arctg} k$ *или* $\theta = \pi + \operatorname{arctg} k$, *где* $k \neq \infty$. *Тогда*:

1) *Точка* $\widetilde{O}(0, k)$ *плоскости* (x, η) *является состоянием равновесия системы* (7). 2) *Полутраектории* (8) *соответствует полутраектория системы* (7), *расположенная на разрезанной плоскости* (x, η) *и стремящаяся к точке* $\widetilde{O}(0, k)$. 3) *Обратно, всякой полутраектории системы* (7), *расположенной на разрезанной плоскости* (x, η) *и стремящейся к состоянию равновесия* $\widetilde{O}(0, k)$, *соответствует полутраектория системы* (6), *стремящаяся к состоянию равновесия* $O(0, 0)$ *в направлении* $\theta = \operatorname{arctg} k$ *или* $\theta = \pi + \operatorname{arctg} k$.

Доказательство. Предположим для определенности, что (8) является положительной полутраекторией, стремящейся к $O(0, 0)$ в направлении $\theta = \operatorname{arctg} k$ или $\theta = \pi + \operatorname{arctg} k$. В силу теоремы 64 § 20 имеет место равенство $Q_m(1, k) - kP_m(1, k) = 0$ *), из которого сразу вытекает, что $(0, k)$ есть состояние равновесия системы (7). Утверждение 1) доказано. Полутраектория (8) стремится к $O(0, 0)$ в направлении $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$. Поэтому при достаточно больших t полутраектория (8) расположена на разрезанной плоскости (x, y). Соответствующая ей полутраектория $\widetilde{L}$ (или дуга траектории) системы (7) лежит на разрезанной плоскости (x, η).

Пусть $M(x(t), y(t))$ — точка полутраектории (8), а $\widetilde{M}(x(\tau), \eta(\tau))$ — соответствующая ей по преобразованию (1) точка траектории $\widetilde{L}$. При $t \to +\infty$ $x \to 0$, а $\eta = \frac{y}{x} \to k$ и, следовательно, точка $\widetilde{M}$ при $t \to \infty$

*) В условиях теоремы предполагается, что $xQ_m - yP_m \not\equiv 0$. Однако, если $xQ_m - yP_m = 0$, то равенство $Q_m(1, k) - kP_m(1, k) = 0$ также выполняется.

стремится к состоянию равновесия $(0, k)$ (так что и $\tau \to \infty$). Отсюда следует, что полутраектории (8) соответствует полутраектория $\widetilde{L}$ системы (7) (это заранее не очевидно, так как полутраектории системы (6) может соответствовать дуга траектории системы (7)) (см. § 1, п. 7). Заметим, что $\widetilde{L}$ может быть отрицательной полутраекторией. Утверждение 2) доказано.

Третье утверждение леммы очевидно.

Рассмотрим теперь случай, когда система (6) имеет полутраекторию, стремящуюся к состоянию равновесия O в направлении $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3}{2}\pi$. В этом случае мы применим преобразование (2). Роль системы (7) будет играть система

$$\frac{d\xi}{dt} = P_m(\xi, 1) - \xi Q_m(\xi, 1) + y\overline{P}(\xi, y), \qquad \frac{dy}{dt} = yQ_m(\xi, 1) + y^2\overline{Q}(\xi, y). \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть O $(0, 0)$ — изолированное состояние равновесия системы* (6) *и $x = x(t)$, $y = y(t)$ — полутраектория этой системы, стремящаяся к нему в направлении $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Тогда*:

1) *Точка $\widetilde{O}$ $(0, 0)$ плоскости (ξ, y) является состоянием равновесия системы* (9). *Полутраектории $x = x(t)$, $y = y(t)$ соответствует полутраектория системы* (9), *расположенная на разрезанной плоскости (ξ, y) и стремящаяся к точке $\widetilde{O}$ $(0, 0)$.* 2) *Обратно, всякой полутраектории системы* (9), *расположенной на разрезанной плоскости (ξ, y) и стремящейся к точке $\widetilde{O}$ $(0, 0)$, соответствует полутраектория системы* (6), *стремящаяся к состоянию равновесия O $(0, 0)$ в направлении $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = \frac{3}{2}\pi$.*

Напомним, что под *разрезанной* теперь понимается плоскость с удаленными из нее точками оси $y = 0$.

Лемма 2 доказывается так же, как лемма 1.

Приведем здесь еще одну лемму, не связанную с рассмотренными выше преобразованиями, но необходимую для дальнейшего.

Лемма 3. *Если $f_2(x, y)$ — аналитическая в окрестности точки O функция, разложение которой по степеням x и y начинается с членов не ниже второго порядка, m — нечетно, $m \geqslant 2$ и $\Delta_m < 0$, то система*

$$\frac{dx}{dt} = \Delta_m x^m, \qquad \frac{dy}{dt} = y - ax + f_2(x, y) \tag{A}$$

1) *не может иметь больше одной полутраетории, стремящейся к точке O в направлении* arctg a, *а также не может иметь больше одной полутраектории, стремящейся к O в направлении π +* arctg a; 2) *система* (A) *имеет в точности две полутраектории, стремящиеся к точке O, одну — в направлении $\frac{\pi}{2}$, а другую — в направлении $\frac{3}{2}\pi$, причем этими полутраекториями являются положительная и отрицательная полуоси Oy или участки этих полуосей, примыкающие к точке O*; 3) *траекторий, стремящихся к точке O в других направлениях (кроме 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$), не существует.*

Доказательство. Направления, по которым траектории системы (A) стремятся к состоянию равновесия O, определяются из уравнения

$x(y - ax) = 0$ (или $\cos\theta(\sin\theta - a\cos\theta) = 0$) (см. теорему 64 § 20). Отсюда сразу вытекает третье утверждение леммы.

Докажем теперь первое утверждение леммы. Для определенности рассмотрим траекторию, стремящуюся к точке O в направлении $\theta = \operatorname{arctg} a$. Пусть L_1 — такая траектория. Начиная с некоторого значения t, все ее точки будут расположены справа от оси y. Первое из уравнений (A) показывает, что тогда $\frac{dx}{dt}$ не обращается в нуль, $x(t)$ — монотонная функция, и, следовательно, уравнение траектории L_1 вблизи точки O может быть записано в явном виде $y = y_1(x)$, где функция $y_1(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1 - ax + f_2(x, y_1)}{\Delta_m x^m}. \qquad (B)$$

Предположим теперь, что существуют две полутраектории, $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, стремящиеся к точке O в направлении $\theta = \operatorname{arctg} a$. Обозначим $y_1(x) - y_2(x) = z(x)$. Так как различные траектории не могут пересекаться, то для всех достаточно малых значений x знак разности $z(x)$ не может меняться. Будем считать для определенности, что $z(x) > 0$. Так как обе полутраектории удовлетворяют уравнению (B), то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z + f_2(x, y_1(x)) - f_2(x, y_2(x))}{\Delta_m x^m}.$$

Последнее равенство может быть записано в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \cdot \frac{1 + o(1)}{\Delta_m x^{m-1}}$$

$$(x > 0,\ o(1) \to 0 \text{ при } x \to 0).$$

Дальнейшие рассуждения проводятся, принимая во внимание, что $\Delta_m < 0$, дословно так же, как при доказательстве единственности сепаратрисы простого седла, входящей в него в направлении O (§ 7, п. 3). Первое утверждение леммы доказано.

Для того чтобы выяснить, какие полутраектории могут стремиться к точке O в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$, применим к системе (A) преобразование $x = \xi y$, $y = y$. Мы получим систему (5), имеющую в данном случае вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\xi + \widetilde{P}_2(\xi y, y), \qquad \frac{dy}{dt} = y - a\xi y + f_2(\xi y, y), \qquad (\widetilde{A})$$

где $\widetilde{P}_2$ состоит из членов не ниже второго порядка. Непосредственно видно, что начало координат $\widetilde{O}(0, 0)$ плоскости (ξ, y) есть простое седло системы $(\widetilde{A})$, а полуоси $y = 0$, $\xi > 0$ и $y = 0$, $\xi < 0$ (или их участки, примыкающие к точке $\widetilde{O}$) являются сепаратрисами этого седла. Следовательно, существует еще две и только две полутраектории, стремящиеся к точке $\widetilde{O}$, — именно, остальные сепаратрисы седла $\widetilde{O}$. Эти две полутраектории расположены, очевидно, на разрезанной плоскости (ξ, y) по разные стороны от оси $y = 0$. А тогда из свойств преобразования (2) и из леммы 2 вытекает, что существует в точности одна полутраектория системы (A), стремящаяся к точке O в направлении $\frac{\pi}{2}$, и в точности одна полутраектория, стремящаяся к O в направлении $\frac{3}{2}\pi$. Так как полуоси $x = 0$, $y > 0$

и $x = 0$, $y < 0$ (или их участки) являются такими полутраекториями, то второе утверждение леммы, а следовательно, и вся лемма доказаны.

2. Возможные топологические структуры сложного состояния равновесия в случае $\sigma \neq 0$. В этом пункте мы будем считать, что точка O (0, 0) есть сложное изолированное состояние равновесия, одно из характеристических чисел которого отлично от нуля. Тогда рассматриваемую систему можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y), \tag{10}$$

где $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$ — аналитические в окрестности начала координат функции, разложения которых в ряды состоят из членов не ниже второго порядка, причем

$$\Delta = ad - bc = 0, \qquad \sigma = a + d \neq 0.$$

Нетрудно показать, что при этих условиях существует линейное неособенное преобразование, с помощью которого система приводится к виду

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y}), \qquad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{y} + \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{t} = \varkappa t$ ($\varkappa$ — некоторая постоянная), а функции $\bar{P}_2$ и $\bar{Q}_2$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ *). Поэтому мы можем, не теряя общности, исследовать лишь частный случай системы (10), а именно, систему

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y) = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = y + Q_2(x, y) = Q(x, y). \tag{11}$$

Все рассмотрение мы будем вести в некоторой достаточно малой окрестности $U_\delta(O)$, не содержащей отличных от O состояний равновесия. Пусть

$$\sigma(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \tag{12}$$

(P и Q — правые части системы (11)).

Функция $\sigma(x, y)$ непрерывна и $\sigma(0, 0) = \sigma \neq 0$. Поэтому можно считать, что $\sigma(x, y) > 0$ во всех точках окрестности $U_\delta(O)$ и в силу критерия Бендиксона (см. § 12) в окрестности $U_\delta(O)$ не существует замкнутых траекторий, а также не существует петель. Таким образом, точка O (0, 0) не является центром и ее окрестность не может содержать эллиптических секторов. Но тогда обязательно существуют полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия. Мы займемся сейчас исследованием таких полутраекторий.

Применяя преобразование (2) и рассуждая в точности так же, как при доказательстве утверждения 2) леммы 3, мы прежде всего убедимся,

*) См. § 6, п. 1. При $b \neq 0$ в качестве указанного линейного неособого преобразования можно взять преобразование: $\bar{x} = -dx + by$, $\bar{y} = ax + by$; а при $b = 0$ и $a = 0$ преобразование $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \frac{c}{d}x + y$. Наконец, при $b = d = 0$ преобразование $\bar{x} = -\frac{c}{a}x + y$, $\bar{y} = x$. В силу того, что $\sigma \neq 0$, a и d не могут обращаться в нуль одновременно.

что существует в точности одна полутраектория системы (11), стремящаяся к состоянию равновесия O в направлении $\frac{\pi}{2}$, и в точности одна полутраектория, стремящаяся к O в направлении $\frac{3}{2}\pi$. Обозначим эти полутраектории соответственно через L_1 и L_2. Из их существования и из замечания 2 § 20 следует, далее, что точка O (0, 0) не может быть фокусом системы (11). Наконец, из теоремы 64 следует, что если кроме L_1 и L_2 есть еще полутраектории, стремящиеся к точке O, то они стремятся к O в направлении 0 или π (так как для системы (11) $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) = xy$). Наша задача заключается теперь в том, чтобы выяснить число и характер таких траекторий.

Прежде всего представим систему (11) в другом виде. Рассмотрим уравнение

$$y + Q_2(x, y) = 0. \tag{13}$$

По теореме о неявной функции это уравнение имеет в малой окрестности точки O решение $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию $\psi(x)$, определяемую соотношением

$$\psi(x) = P_2(x, \varphi(x)). \tag{15}$$

Функция $\psi(x)$ не может быть тождественно равной нулю. В самом деле, если $\psi(x) \equiv 0$, то из соотношения (15) и из определения функции $\varphi(x)$ вытекает, что все точки кривой $y = \varphi(x)$ — состояния равновесия системы (11), что противоречит условию изолированности точки O. Поэтому разложение функции $\psi(x)$ в ряд имеет вид

$$\psi(x) = \Delta_m x^m + \dots, \tag{16}$$

где $m \geqslant 2$, а $\Delta_m \neq 0$. Из очевидных равенств

$$P_2(x, y) = \psi(x) + P_2(x, y) - P_2(x, \varphi(x)),$$
$$y + Q_2(x, y) = y - \varphi(x) + Q_2(x, y) - Q_2(x, \varphi(x))$$

следует, что система (11) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \psi(x) + [y - \varphi(x)] \cdot \overline{P}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= [y - \varphi(x)]\,[1 + \overline{Q}(x, y)], \end{aligned} \tag{17}$$

где $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ — аналитические функции в достаточно малой окрестности $U_\delta(O)$ и $\overline{P}(0, 0) = \overline{Q}(0, 0) = 0$.

Кривая $y = \varphi(x)$ является изоклиной горизонтальных наклонов для системы (11). Обозначим через C граничную окружность окрестности $U_\delta(O)$ *), а через P_1 и P_2 — точки пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с окружностью C. Отрезок P_1P_2 кривой $y = \varphi(x)$ разбивает окрестность $U_\delta(O)$

*) В проводимых рассуждениях часто приходится для того, чтобы выполнялись требуемые условия, заменять окрестность $U_\delta(O)$ меньшей окрестностью. Всюду в дальнейшем мы будем подразумевать, что там, где надо, такая замена уже сделана и для новой (меньшей) окрестности сохранено то же обозначение $U_\delta(O)$.

на две области. Из уравнений (17) следует, что в точках верхней из этих областей $\frac{dy}{dt} > 0$, т. е. векторы поля направлены в точках этой области вверх, а в точках нижней области векторы поля направлены вниз. Отсюда сразу вытекает, что рассмотренные выше полутраектории L_1 и L_2, расположенные соответственно выше и ниже кривой $y = \varphi(x)$, являются отрицательными полутраекториями. Мы обозначим первые (при возрастании t) точки их пересечения с окружностью C через M_1 и M_2 (рис. 223).

Так как $\varphi(x)$ есть аналитическая функция, то либо кривая $y = \varphi(x)$ совпадает с осью $x(\varphi(x)) = 0$, либо можно считать, что она не имеет с осью Ox других общих точек кроме O и что касательная к ней горизонтальна лишь в точке O (это обеспечивается малостью окрестности $U_\delta(O)$. В первом случае отрезки OP_1 и OP_2 этой кривой (т. е. оси Ox) являются, очевидно, полутраекториями системы (11). Во втором случае любой отрезок кривой $y = \varphi(x)$, расположенный между точками P_1 и P_2 и не содержащий точки O, является отрезком без контакта (так как $y = \varphi(x)$ есть изоклина горизонтальных направлений). Направление стрелки вектора поля в точках кривой $y = \varphi(x)$ определяется первым из уравнений (17), имеющим вид $\frac{dx}{dt} = \psi(x)$. Принимая во внимание соотношение (16), мы видим, что это направление определяется знаком числа Δ_m и четностью числа m. Поэтому возможно всего 4 случая. На рис. 223 показаны направления векторов поля в точках кривой $y = \varphi(x)$ в случае, когда m нечетно и $\Delta_m > 0$ *).

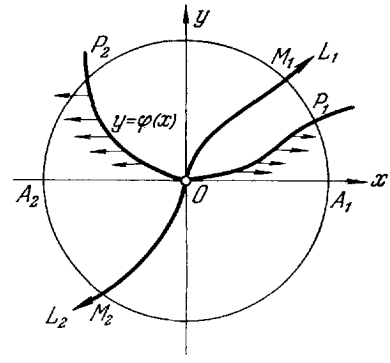


Рис. 223.

Мы переходим теперь к основной теореме данного параграфа, описывающей возможные топологические структуры состояния равновесия $O(0, 0)$ системы (11).

Теорема 65. *Пусть точка $O(0, 0)$ является изолированным состоянием равновесия системы* (11). *Пусть, далее, $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения $y + Q_2(x, y) = 0$ в окрестности точки $O(0, 0)$, а разложение по степеням x функции $\psi(x) = P_2(x, \varphi(x))$ имеет вид $\psi(x) = \Delta_m x^m + \ldots$, где $m \geqslant 2$, $\Delta_m \neq 0$. Тогда*: 1) *При m нечетном, $\Delta_m > 0$ состояние равновесия O есть топологический узел.* 2) *При m нечетном, $\Delta_m < 0$ точка $O(0, 0)$ есть топологическое седло, две сепаратрисы которого стремятся к O в направлениях соответственно 0 и π, а остальные две в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$.* 3) *Если m четно, то точка $O(0, 0)$ есть так называемое седло — узел, т. е. состояние равновесия, «каноническая» окрестность которого состоит из параболического и двух гиперболических секторов. При этом, если $\Delta_m < 0$, то внутри гиперболических секторов заключен отрезок положительной полуоси Ox, примыкающий к точке O* (рис. 224), *а если $\Delta_m > 0$ — отрезок отрицательной полуоси Ox* (рис. 225).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай 1). Направления поля в точках кривой $y = \varphi(x)$ показаны на рис. 223. Обозначим

*) На рис. 223 отрезки OP_1 и OP_2 кривой $y = \varphi(x)$ расположены выше оси Ox. Один из этих отрезков или оба они могут быть расположены ниже оси Ox. Однако проводимые нами доказательства и рассуждения по существу остаются в этих случаях в силе и нет необходимости рассматривать их отдельно.

через A_1A_2 точки пересечения оси Ox с окружностью C. Линии OM_1, OP_2, OA_2 и т. д. разбивают окрестность U_δ (O) на криволинейные секторы. Мы будем обозначать их через OP_1M_1, OM_1P_2 и т. д. (подразумевая всегда, что дуги P_1M_1, M_1P_2 и т. д. окружности C, входящие в границы секторов, являются дугами, на которых направление от точки P_1 к M_1, от M_1 к P_2 индуцировано положительным обходом окружности C).

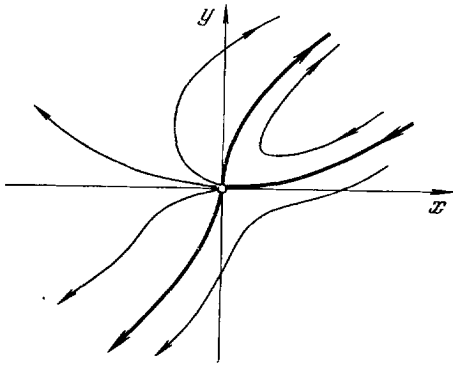


Рис. 224.

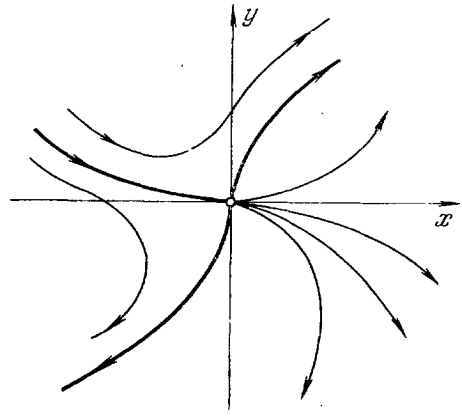


Рис. 225.

Предположим сначала, что $\varphi(x) \equiv 0$. В этом случае отрезки OA_1 и OA_2 оси x являются отрицательными полутраекториями (рис. 226). Покажем, что к точке O не может стремиться ни одна положительная полутраектория. В самом деле, предположим, что такая полутраектория L^+ проходит внутри сектора OA_1M_1 или внутри сектора OM_1A_2. Тогда

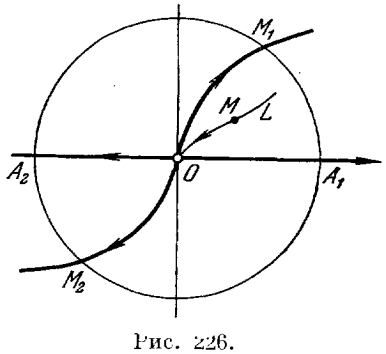


Рис. 226.

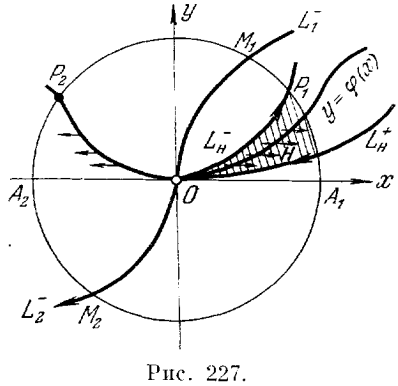


Рис. 227.

ордината точки M такой полутраектории при $t \to +\infty$ должна стремиться к нулю. А это противоречит условию, что вдоль каждой траектории, лежащей выше кривой, $y = \varphi(x)$, $\frac{dy}{dt} > 0$. (Это вытекает из уравнения (17), см. выше). Точно так же устанавливается, что положительные полутраектории, стремящиеся к точке O, не могут проходить внутри секторов OA_2M_2 и OM_2A_1. Пусть теперь $\varphi(x)$ не равна тождественно нулю и, следовательно, кривая $y = \varphi(x)$ имеет с осью x только одну общую точку O (рис. 227). Предположим, что существует положительная полутраекто-

рия L^+, стремящаяся к состоянию равновесия O. В точности так же, как и выше (при $\varphi(x) \not\equiv 0$), устанавливается, что полутраектория L^+ не может лежать целиком внутри секторов OP_1M_1, OM_2P_2, OA_2M_2, OM_2A_1. Допустим, что полутраектория L^+ расположена внутри сектора OA_1P_1. Тогда в силу следствия леммы 5 § 17 и ввиду отсутствия в окрестности точки O эллиптических секторов между полутраекториями L^+ и L_1^- расположен по крайней мере один гиперболический сектор H. Обозначим сепаратрисы, входящие в границу такого сектора через L_H^+ и L_H^-. Принимая во внимание знак производной $\frac{dy}{dt}$ вдоль траектории, мы видим — так же, как и выше,— что сепаратриса L_H^- (отрицательная полутраектория) либо совпадает с L_1^-, либо лежит внутри сектора OP_1M_1, а сепаратриса L_H^+ расположена внутри сектора OA_1P_1 (рис. 227). Но тогда траектории, проходящие через точки гиперболического сектора H, будут, очевидно, пересекать отрезок OP_1 кривой $y = \varphi(x)$ в направлении, противоположном направлению поля в точках этой кривой, что не может быть. Точно так же устанавливается, что полутраектория L^+ не может лежать внутри сектора OA_2P_2. Таким образом, не существует положительных траекторий, стремящихся к точке O. Но тогда каждая траектория, проходящая через точки окрестности $U_\delta(O)$ и отличная от L_1 и L_2, стремится к O при $t \to -\infty$ (причем в направлении $\theta = 0$ или $\theta = \pi$). Но это и значит, что каноническая окрестность состояния равновесия O не содержит ни эллиптических, ни гиперболических секторов, т. е. каждая траектория, проходящая через точки окрестности $U_\delta(O)$, стремится к O при $t \to -\infty$. Первое утверждение теоремы доказано. (Заметим, что все полутраектории, за исключением L_1^- и L_2^-, стремятся к точке O в направлении 0 или π).

Рассмотрим теперь случай 2), при котором векторы поля на кривой $y = \varphi(x)$ имеют направления, противоположные указанным на рис. 223. Мы уже показали, что система (17) имеет одну и только одну полутраекторию L_1^- (отрицательную), стремящуюся к точке O в направлении $\frac{\pi}{2}$, а также одну и только одну полутраекторию L_2^- (также отрицательную), стремящуюся к точке O в направлении $\frac{3}{2}\pi$. Все остальные полутраектории, стремящиеся к точке O — если они существуют,— должны стремиться к ней в направлениях 0 и π.

Из существования полутраекторий L_1^- и L_2^- (принимая во внимание, что они обе отрицательны) непосредственно вытекает, что внутри сектора OM_2M_1 имеется по крайней мере одна полутраектория, стремящаяся к точке O и, следовательно, стремящаяся к точке O в направлении 0, а внутри сектора OM_1M_2 — по крайней мере одна полутраектория, стремящаяся к точке O в направлении π. Мы докажем, что не может существовать двух полутраекторий, стремящихся к точке O в направлении 0, а также не может существовать двух полутраекторий, стремящихся к O в направлении π. Тем самым второе утверждение теоремы будет, очевидно, доказано.

Выпишем рассматриваемую нами систему. Она может быть записана либо в виде (11)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P_2(x, y) = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= y + Q_2(x, y) = Q(x, y), \end{aligned} \tag{C}$$

либо в виде (17)

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = \psi(x) + [y - \varphi(x)]\,\overline{P}(x, y) = P(x, y),\\ \frac{dy}{dt} = [y - \varphi(x)]\,[1 + \overline{Q}(x, y)] = Q(x, y)\\ (\overline{P}(0, 0) = \overline{Q}(0, 0) = 0).\end{gathered} \tag{D}$$

Применим к системе (11) преобразование $x = x$, $y = \eta_1 x$. Мы получим систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P_2(x, \eta_1 x) = P^{(1)}(x, \eta_1),\\ \frac{d\eta_1}{dt} &= \eta_1 + \frac{Q_2(x, \eta_1 x) - \eta_1 P_2(x, \eta_1 x)}{x} = \eta_1 + Q^*(x, \eta_1) = Q^{(1)}(x, \eta_1).\end{aligned} \tag{C_1}$$

Если разложение функции $Q^*(x, \eta_1)$ в ряд не содержит линейных членов, то система (C_1) имеет такой же вид, как система (C), и следовательно, обладает такими же свойствами. Применим к ней преобразование $x = x$, $\eta_1 = \eta_2 x$. Мы получим систему (C_2). Поступая дальше таким же образом, мы будем получать системы (C_3), (C_4), (C_r), . . . Это во всяком случае можно делать до тех пор, пока получающиеся системы (C_r) имеют такой же вид, как система (C). Все системы (C_1), (C_2), . . . имеют так же, как система (C) в точности по одной траектории, стремящейся к началу в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$, причем такими траекториями, очевидно, для системы (C_r) являются полуоси оси $x = 0$ или части этих полуосей, примыкающие к точке O_r (0, 0). Далее, все остальные полутраектории систем (C_r), стремящиеся к началу координат, стремятся к нему в направлениях 0 или π. Из этих свойств систем (C_r), а также из леммы 1 следует, как нетрудно видеть, что существует взаимно однозначное соответствие между полутраекториями системы (C), стремящимися к состоянию равновесия O в направлениях 0 и π, и полутраекториями каждой из систем (C_r), стремящихся к точке O_r в направлениях 0 и π.

Рассмотрим более подробно, какой вид имеют системы (C_r). С этой целью воспользуемся видом (D) исходной системы. Простые вычисления показывают, что после преобразования $x = x$, $y = \eta_1 x$; $x = x$; $\eta_1 = \eta_2 x$; . . . $x = x$, $\eta_{r-1} = \eta_r x$ мы получим из системы (D) систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \psi(x) + x^r\left[\eta_r - \frac{\varphi(x)}{x^r}\right]\cdot\overline{P}(x, \eta_r x^r),\\ \frac{d\eta_r}{dt} &= \left[\eta_r - \frac{\varphi(x)}{x^r}\right][1 + \overline{Q}(x, \eta_r x^r)] - r\cdot\eta_r\,\frac{P_2(x, \eta_r x^r)}{x}.\end{aligned} \tag{D_r}$$

Система (D_r) только формой записи отличается от системы (C_r). По условию $\psi(x) = \Delta_m x^m + \ldots$, где $m \geqslant 2$ и $\Delta_m \leqslant 0$.

Что касается функции $\varphi(x)$, то в силу соотношений $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ либо $\varphi(x) \equiv 0$, либо ее разложение в ряд имеет вид

$$\varphi(x) = a_0 x^l + a_1 x^{l+1} + \ldots, \tag{18}$$

где $l \geqslant 2$, $a_0 \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда либо $\varphi(x) \equiv 0$, либо $l \geqslant m$. В этом случае системы (D_1), (D_2), . . . , (D_{m-2}) имеют, как нетрудно про-

верить, такой же вид, как система (C). Система (D_{m-1}) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Delta_m x^m [1 + f_1(x, \eta_{m-1})], \\ \frac{d\eta_{m-1}}{dt} &= \eta_{m-1} - ax + g_2(x, \eta_{m-1}), \end{aligned} \tag{19}$$

где a может быть равным 0, $f_1(0, 0) = 0$, а разложение функции $g_2(x, \eta_{m-1})$ не содержит линейных членов *).

В окрестности точки (0, 0)

$$\frac{1}{1 + f_1(x, \eta_{m-1})} = 1 + \bar{f}_1(x, \eta_{m-1}),$$

где $\bar{f}_1(0, 0) = 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Delta_m x^m, \\ \frac{d\eta_{m-1}}{dt} &= [\eta_{m-1} - ax + g_2(x, \eta_{m-1})] \frac{1}{1 + f_1(x, \eta_{m-1})} \end{aligned}$$

или, что то же, систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Delta_m x^m, \\ \frac{d\eta_{m-1}}{dt} &= [\eta_{m-1} - ax + g_2(x, \eta_{m-1})][1 + \bar{f}_1(x, \eta_{m-1})]. \end{aligned} \tag{20}$$

Системы (19) и (20) имеют в окрестности точки $O(0, 0)$ одни и те же траектории (как соответствующие одному и тому же дифференциальному уравнению) (см. § 1, п. 7). Но система (19) имеет вид (A) леммы 3. В силу этой леммы система (20), а следовательно, и система (19) не могут иметь на разрезанной плоскости (разрез по оси $x = 0$) больше одной полутраектории, стремящейся к точке $O_{m-1}(0, 0)$ и лежащей в правой полуплоскости $(x > 0)$, и больше одной полутраектории, стремящейся к O_{m-1} и лежащей в левой полуплоскости $(x < 0)$. Но тогда системы (D_{m-2}), (D_{m-3}), (D_1), и наконец, исходная система (D) не могут иметь двух полутраекторий, стремящихся к точке $O(0, 0)$ в направлении 0, или двух полутраекторий, стремящихся к точке $O(0, 0)$ в направлении π. Тем самым утверждение 2) теоремы для рассматриваемого случая доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда $l < m$. При этом мы запишем функцию $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = a_0 x^l + a_1 x^{l+1} + \ldots, \tag{21}$$

где $a_0 \neq 0$. Системы (D_1), (D_2), $\ldots$, (D_{l-2}) и теперь будут иметь, как нетрудно проверить, такой же вид, как система (C). Систему (D_{l-1}) мы напишем подробно. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \psi(x) + x^{l-1}[\eta_{l-1} - a_0 x - a_1 x^2 - \ldots] \bar{P}(x, \eta_{l-1} x^{l-1}), \\ \frac{d\eta_{l-1}}{dt} &= [\eta_{l-1} - a_0 x - a_1 x^2 - \ldots][1 + \bar{Q}(x, \eta_{l-1} x^{l-1})] - \\ &\qquad - (l-1)\eta_{l-1} \frac{P_2(x, \eta_{l-1} x^{l-1})}{x}. \end{aligned} \tag{D_{l-1}}$$

*) Система (D_{m-1}) всегда имеет вид (19). Однако может оказаться, что уже сама система (D) или одна система (D_j), где $1 \leqslant j < m - 1$, также имеет вид (19). Тогда ее можно в дальнейших рассуждениях взять в качестве системы (19).

Может оказаться, что уже исходная система (D) или какая-нибудь из систем (D_1), (D_2), . . ., (D_{l-1}) имеют вид (19). Тогда все рассуждения проводятся так же, как в предыдущем случае.

Пусть теперь ни одна из указанных систем не имеет вида (19). Рассмотрим систему (D_{l-1}). Мы должны выяснить, сколько траекторий системы (D_{l-1}) может стремиться к состоянию равновесия O_{l-1} на разрезанной плоскости. Направления таких траекторий при стремлении к O_{l-1} определяются из уравнения

$$x(\eta_{l-1} - a_0 x) = 0.$$

В направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ к точке O_{l-1} стремятся только две полутраектории, расположенные на оси $x = 0$ (это устанавливается так же, как при доказательстве леммы 3). Поэтому мы должны рассмотреть только траектории, стремящиеся к точке O_{l-1} в направлениях $\operatorname{arctg} a_0$ и $\pi + \operatorname{arctg} a_0$. Применим сначала к системе (D_{l-1}) преобразование

$$\eta_{l-1} = \bar{\eta}_l x. \tag{22}$$

Система (D_{l-1}) перейдет при этом в некоторую систему $(\bar{D}_l)$. Используя лемму 1, нам нужно найти, сколько траекторий системы $(\bar{D}_l)$ может стремиться на разрезанной плоскости $(x, \bar{\eta}_l)$ к состоянию равновесия $\bar{O}_l$ $(0, a_0)$. Мы применим к системе $(\bar{D}_l)$ преобразование

$$x = x, \qquad \bar{\eta}_l = \eta_l + a_0, \tag{23}$$

свойства которого очевидны, система (D_l) перейдет в систему (D_l), и мы будем искать, сколько траекторий системы (D_l) может стремиться на разрезанной плоскости (x, η_l) к состоянию равновесия O_l (0, 0). Преобразования (22) и (23) можно заменить одним преобразованием

$$x = x, \qquad \eta_{l-1} = (\eta_l + a_0)\, x, \tag{24}$$

при котором система (D_{l-1}) переходит в систему

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \psi(x) + x^l [\eta_l - a_1 x - a_2 x^2 \ldots] \overline{P}(x, (\eta_l + a_0) x^l), \\
\frac{d\eta_l}{dt} &= [\eta_l - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots] [1 + \overline{Q}(x, (\eta_l + a_0) x^l)] - \\
&\qquad - l(\eta_l + a_0) \frac{P_2(x, (\eta_l + a_0) x^l)}{x}.
\end{aligned} \tag{D_l}$$

Если система (D_l) имеет вид (19), то дальнейшее доказательство проводится так же, как выше (т. е. так же, как в случае, когда $l \geqslant m$). Если же система (D_l) еще не имеет вида (19), то мы будем применять последовательно преобразования $x = x$, $\eta_l = (\eta_{l+1} + a_1) x$; $x = x$, $\eta_{l+1} = (\eta_{l+2} + a_2) x$ и т. д. и будем получать системы (D_{l+1}), (D_{l+2}) и т. д. Система (D_{l+k}) имеет, как показывают вычисления, вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \psi(x) + x^{l+k} [\eta_{l+k} - a_{k+1} x \ldots] x P^*(x, \eta_{l+k}), \\
\frac{d\eta_{l+k}}{dt} &= [\eta_{l+k} - a_{k+1} x - \ldots] [1 + x Q^*(x, \eta)] - R^*(x, \eta_{l+k}).
\end{aligned} \tag{D_{l+k}}$$

Здесь P^* и Q^* — аналитические функции в окрестности начала

координат и

$$R^*(x, \eta_{l+k}) = h(x, \eta_{l+k}) \frac{P_2(x, (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \eta_{l+k} x^k) x^l)}{x^{k+1}}, \qquad (25)$$

где $h(x, \eta_{l+k})$ есть многочлен, вид которого нас не интересует. Напомним, что $P_2(x, y)$ есть правая часть первого из уравнений исходной системы (C):

$$\varphi(x) = a_0 x^l + a_1 x^{l+1} + \ldots, \quad \psi(x) = \Delta_m x^m + \ldots = P_2(x, \varphi(x)).$$

Представляя числитель дроби, стоящей в выражении (25) в виде

$$P_2(x, \varphi(x)) + [P_2(x, a_0 x^l + \ldots + a_k x^{k+l} + \eta_{l+k} x^{k+l}) - P_2(x, a_0 x^l + a_1 x^{l+1} + \ldots + a_k x^{k+l} + a_{k+1} x^{k+l+1} + \ldots)],$$

и применяя к разности, стоящей в квадратных скобках, формулу Тейлора, мы убедимся, что все члены этого числителя содержат x в степени не меньшей, чем $\min\{m, k+l+1\}$. Поэтому, если $1 \leqslant k \leqslant m-l-1$ *), то все члены выражения $R^*(x, \eta_{l+k})$ содержат множитель x не меньше, чем во второй степени (так как $l \geqslant 2$). Отсюда следует, принимая во внимание вид правой части системы (D_{l+k}), что по крайней мере одна из систем (D_{l+1}), (D_{l+2}), . . ., (D_{m-1}) имеет вид системы (19). Дальнейшее рассуждение проводится в точности так же, как в случае, когда $l \geqslant m$. Второе утверждение теоремы доказано полностью.

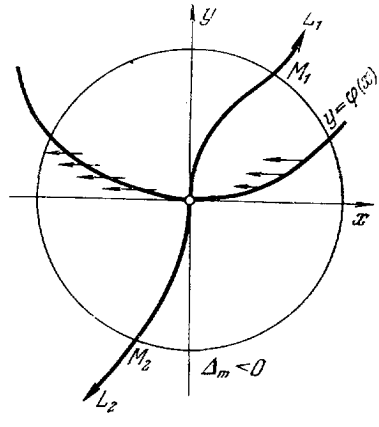


Рис. 228.

3) В случае, когда m четно и $\Delta_m < 0$, векторное поле на кривой $y = \varphi(x)$ имеет направление, указанное на рис. 228, в случае $\Delta_m > 0$ — противоположное направление. Тогда при $\Delta_m < 0$ $(\Delta_m > 0)$ внутри сектора OM_1M_2 (OM_2M_1) не существует положительных полутраекторий, стремящихся к точке O — это устанавливается в точности так же, как при доказательстве утверждения 1), и, следовательно, этот сектор является параболическим; внутри же сектора OM_2M_1 (OM_1M_2) не может существовать двух полутраекторий, стремящихся к точке O — это устанавливается в точности так же, как при доказательстве утверждения 2), и, следовательно, этот сектор состоит из двух гиперболических. Теорема доказана полностью.

§ 22. Топологическая структура сложного состояния равновесия в случае σ = 0

1. Вспомогательные леммы. В настоящем параграфе рассматривается состояние равновесия $O(0, 0)$ аналитической системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y) \qquad (1)$$

*) При $m = l+1$ число k равно нулю, так как уже сама система D_l, как нетрудно видеть, имеет вид (19).

в предположении, что оно является изолированным и выполняются условия

$$|a|+|b|+|c|+|d|\neq 0, \tag{2}$$

$$\sigma = a+d = 0, \tag{3}$$

$$\Delta = ad-bc = 0, \tag{4}$$

т. е. изолированное сложное состояние равновесия с равными нулю характеристическими числами при наличии линейных членов в правых частях. Как и в предыдущем параграфе, мы можем, не уменьшая общности, рассматривать лишь частный случай системы (1), именно, систему *)

$$\frac{dx}{dt} = y + P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y). \tag{5}$$

$P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$, как и раньше, аналитические в окрестности точки O (0, 0) функции, разложения которых состоят из членов не ниже второго порядка. Систему (5) можно привести к более простому виду. Рассмотрим преобразование

$$\xi = x, \qquad \eta = y + P_2(x, y). \tag{6}$$

Так как якобиан этого преобразования в точке O (0, 0) равен единице, то оно взаимно однозначно отображает некоторую окрестность точки O (0, 0) плоскости (x, y) на некоторую окрестность точки $\widetilde{O}$ (0, 0) плоскости (ξ, η) так, что точка O переходит в точку $\widetilde{O}$. Обратное преобразование имеет вид

$$x = \xi, \qquad y = f(\xi, \eta), \tag{7}$$

где f — аналитическая функция, причем $f(0, 0) = 0$ **). Система (5) переходит при отображении (6) в систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = Q_2(\xi, f(\xi, \eta)) + P'_{2x}(\xi, f(\xi, \eta))\,\eta + P'_{2y}(\xi, f(\xi, \eta))\,Q_2(\xi, f(\xi, \eta)).$$

Правая часть последнего уравнения есть аналитическая функция, разложение которой по степеням ξ, η состоит из членов не ниже второго порядка. Мы обозначим ее через $\widetilde{Q}_2(\xi, \eta)$. Таким образом, система (5) при преобразовании (6) переходит в систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \widetilde{Q}_2(\xi, \eta). \tag{8}$$

Траектории системы (6), проходящие в достаточно-малой окрестности точки O, взаимно однозначно соответствуют траекториям системы (8), расположенным в окрестности точки $\widetilde{O}$. При этом $\widetilde{O}$ является, очевидно, также изолированным состоянием равновесия системы (8), соответствующим точке O.

---

*) Если $a \neq 0$, то в силу условия (3) и (4) $b \neq 0$, $c \neq 0$, и система (1) приводится к виду (5) преобразованием $\bar{x} = -y$, $\bar{y} = -cx + ay$. Если $a = 0$, а $b \neq 0$, то для перехода к виду (5) достаточно ввести новое время $\bar{t} = bt$. Наконец, если $a = 0$, $b = 0$, то $c \neq 0$, и нужно сделать преобразование $\bar{x} = y$, $\bar{y} = cx$.

**) Это непосредственно вытекает из теоремы о неявных функциях (см. дополнение § 4, п. 3).

Пусть L^+ есть полутраектория системы (5), для определенности положительная, стремящаяся к состоянию равновесия O в определенном направлении θ. В силу теоремы 64 θ равно либо 0, либо π, т. е. $\operatorname{tg}\theta = 0$. Тогда соответствующая ей полутраектория $\widetilde{L}^+$ системы (8) стремится к точке $\widetilde{O}$, причем также в определенном направлении (0 или π). Действительно, если $x = x(t)$, $y = y(t)$ — уравнения полутраектории L^+, а $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ — уравнения $\widetilde{L}^+$, то по условию при $t \to +\infty$

$$\lim x(t) = \lim y(t) = 0, \qquad \lim \frac{y(t)}{x(t)} = \operatorname{tg}\theta = 0.$$

Из формул (6) следует, что при $t \to +\infty$

$$\lim \xi(t) = \lim \eta(t) = 0,$$

а

$$\lim = \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \lim \frac{y + P_2(x, y)}{x} = 0.$$

Это и доказывает наше утверждение. Отсюда, в частности, следует, что если O есть узел или фокус системы (5), то $\widetilde{O}$ есть, соответственно, узел или фокус системы (8). Таким образом, вместо системы (5) мы можем исследовать систему (8). Возвращаясь к первоначальным обозначениям, мы запишем ее в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y). \tag{9}$$

Применим к системе (9) преобразование

$$x = x, \qquad y = \eta x,$$

рассмотренное в предыдущем параграфе. Мы получим систему

$$\frac{dx}{dt} = \eta x, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{Q_2(x, \eta x)}{x} - \eta^2. \tag{10}$$

Непосредственно видно, что эта система имеет на оси $x = 0$ единственное состояние равновесия $\widetilde{O}(0, 0)$ и что полуоси $x = 0$, $\eta > 0$ и $x = 0$, $\eta < 0$ являются, соответственно, положительной и отрицательной полутраекторией системы (10). Пусть u — окрестность состояния равновесия $O(0, 0)$, а Γ — соответствующая ей область плоскости (x, η) (см. § 21, п. 1б)). Предположим, что на плоскости (x, η) существуют полутраектории $\widetilde{L}_1^{(\cdot)}$ и $\widetilde{L}_2^{(\cdot)}$ системы (10), стремящиеся к состоянию равновесия $\widetilde{O}$ и расположенные, соответственно, справа и слева от оси $x = 0$. Мы будем считать, что полутраектории $\widetilde{L}_1^{(\cdot)}$ и $\widetilde{L}_2^{(\cdot)}$ пересекаются с границей области Γ в точках $\widetilde{N}_1$ и $\widetilde{N}_2$, причем все точки этих полутраекторий, расположенные между точками $\widetilde{O}$ и $\widetilde{N}_1$, соответственно, между $\widetilde{O}$ и $\widetilde{N}_2$, уже лежат внутри области Γ.

Из п. 1 § 21 следует, что полутраекториям $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$ соответствуют на плоскости (x, y) полутраектории $L_1^{(\cdot)}$ и $L_2^{(\cdot)}$ системы (9), расположенные, соответственно, справа и слева от оси $x = 0$ и стремящиеся к состоянию равновесия 0 в направлениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (рис. 229, *а*, *б*).

Пусть N_1 и N_2 — точки, соответствующие точкам $\widetilde{N}_1$ и $\widetilde{N}_2$, расположенные на граничной окружности C окрестности u. Обозначим через Γ_1 часть области Γ, ограниченную полутраекторией $\eta > 0$, $x = 0$, отрезком $\widetilde{N}_1\widetilde{O}$ полутраектории $\widetilde{L}_1$ и куском граничной кривой области Γ

(рис. 229, *а*). Аналогично через Γ_2 мы обозначим область, заключенную между полутраекторией $\eta < 0$, $x = 0$, полутраекторией $\widetilde{L}_2^{(-)}$ и границей области Γ. Областям Γ_1 и Γ_2 соответствуют на плоскости (x, y) криволинейные секторы, которые мы обозначим через u_1 и u_2.

Пусть $\widetilde{v}$ — достаточно малая окрестность состояния равновесия $\widetilde{O}$, расположенная целиком внутри области Γ, а $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ — соответственно пересечения $\widetilde{v}$ с областями Γ_1 и Γ_2: $\widetilde{v}_1 = \widetilde{v} \cap \Gamma_1$; $\widetilde{v}_2 = \widetilde{v} \cap \Gamma_2$. Далее, пусть w — достаточно малая окрестность состояния равновесия O, а w^* — часть ее, состоящая из точек секторов u_1 и u_2 и точек положительной полуоси y.

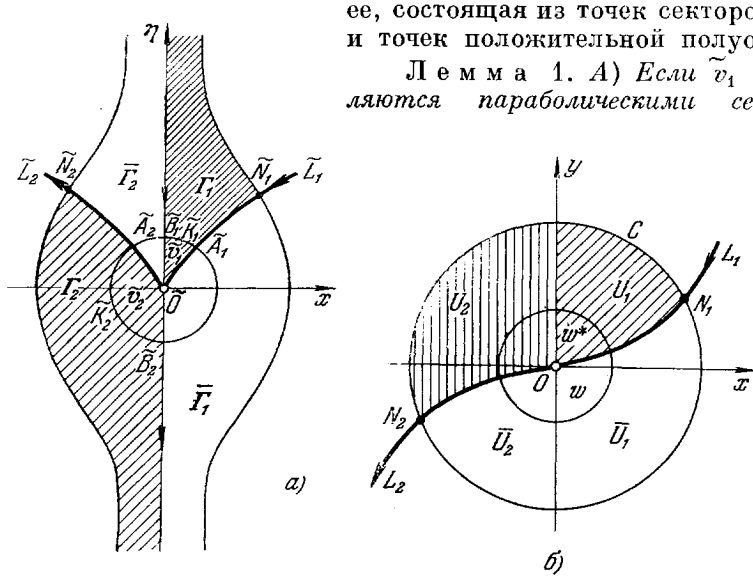


Рис. 229.

Лемма 1. *А) Если $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ являются параболическими секторами состояния равновесия $\widetilde{O}$, то w^* состоит из одной эллиптической области и двух (примыкающих к ней и к полутраекториям $L_1^{(-)}$ и $L_2^{(-)}$) параболических секторов.*

Б) Если $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ — гиперболические области, то w^* есть гиперболическая область.

В) Если одна из областей $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ есть гиперболическая, а другая — параболическая область, то w^* есть параболическая область.

Доказательство. А) Заметим прежде всего, что все траектории системы (9), проходящие через точки положительной полуоси Oy, близкие к точке O, пересекают эту полуось в направлении слева направо (при возрастании t), при этом мало отличном от горизонтального. Это непосредственно следует из рассмотрения системы (9) $\left(\frac{dx}{dt} > 0, \frac{dy}{dx}\right.$ близка к нулю).

Пусть $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ — параболические области. Тогда $\widetilde{L}_1^{(-)}$, а следовательно, и $L_1^{(-)}$ являются положительными полутраекториями, а $\widetilde{L}_2^{(-)}$ и $L_2^{(-)}$ — отрицательными. При отображении (10) область $\widetilde{v}_1$, ограниченная криволинейным треугольником $\widetilde{O}\widetilde{A}_1\widetilde{K}_1\widetilde{B}_1$, перейдет в область v_1, ограниченную «петлей» OA_1K_1O, так как отрезок $\widetilde{O}\widetilde{B}_1$ оси η переходит в точку O (рис. 230). Так как дуга $\widetilde{A}_1\widetilde{K}_1\widetilde{B}_1$ есть дуга без контакта, а отображение (10) имеет

якобиан $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \eta & x \end{vmatrix} = x$, отличный от нуля во всех точках дуги $\widetilde{A}_1\widetilde{K}_1\widetilde{B}_1$ кроме $\widetilde{B}_1$, то соответствующий дуге $\widetilde{A}_1\widetilde{K}_1\widetilde{B}_1$ кусок A_1K_1O указанной «петли»; также является дугой без контакта (если не рассматривать точку O см. дополнение § 6, п. 4).

Отметим, что область v_1 как образ сектора $\widetilde{v}_1$ обладает следующими свойствами: 1) каждая траектория, проходящая через внутреннюю точку области v_1 при возрастании t, остается внутри v_1 и при $t \to +\infty$ стремится к состоянию равновесия O; 2) наоборот, если какая-нибудь полутраектория L системы (9) расположена в правой полуплоскости плоскости (x, y) выше траектории L_1 и стремится к точке O, то ее образ непременно проходит в области $\widetilde{v}_1$. Но тогда $L^{(}$ является положительной полутраекторией, и, начиная с некоторого момента, полутраектория $L^{(}$ остается внутри v_1.

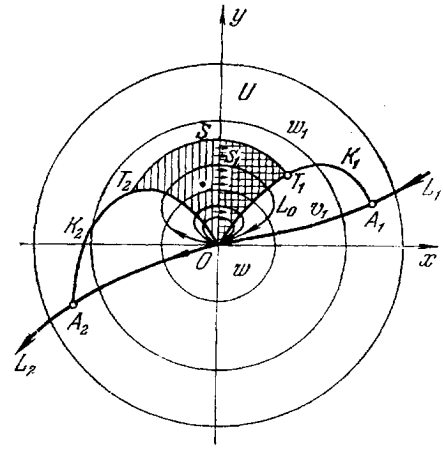


Рис. 230.

Возьмем сначала достаточно малую окрестность w_1 состояния равновесия O. Пусть ST_1 — простая дуга, удовлетворяющая следующим условиям: I) конец ее S находится на положительной полуоси Oy, а конец T_1 — на кривой без контакта A_1K_1O; II) дуга ST_1 не имеет с кривой A_1K_1O и осью y других общих точек кроме своих концов; III) дуга ST_1 лежит целиком внутри окрестности w_1 достаточно близко к точке O и абсциссы всех ее точек кроме S положительны. Существование дуги ST_1, обладающей указанными свойствами, показано в § 18, лемма 2.

Рассмотрим криволинейный треугольник OT_1S, заштрихованный на рис. 230. Все траектории, проходящие через внутренние точки отрезка OS оси y, при возрастании t входят внутрь треугольника. Пусть L — такая траектория. При возрастании t L не может оставаться внутри треугольника OT_1S. Действительно, если она остается внутри треугольника, то она должна стремиться к точке O. Но тогда в силу свойств 1) и 2) области v_1 L входит в нее, что противоречит предположению.

Таким образом, все траектории, пересекающие отрезок OS оси y в его внутренних точках, входят в треугольник OT_1S и при возрастании t выходят из него.

Покажем, что хотя бы одна из них выходит из треугольника OT_1S через точку отрезка T_1O кривой $A_1K_1T_1O$. Предположим противное, т. е. что все указанные траектории L выходят из треугольника OT_1S через дугу T_1S. Рассмотрим первые точки пересечения этих траекторий с дугой T_1S. Обозначим через P их предельную точку (P может совпадать с точкой T_1) и через L_P — траекторию, проходящую через точку P. Пусть L_P проходит через точку P при значении $t = t_0$. При значениях $t < t_0$ траектория L_P не может пересечь отрезок OS оси y, так как в противном случае она совпала бы с одной из траекторий L; траектория L_P не может также при убывании t пересечь дугу $OA_1K_1T_1$, что следует из свойств 1) и 2). Но тогда эта траектория: а) либо при всех $t < t_0$ целиком лежит вне треугольника OT_1S, б) либо при всех $t < t_0$ целиком

лежит внутри треугольника OT_1S. Первое невозможно в силу поведения траекторий L и непрерывной зависимости от начальных условий. Второе невозможно, так как, оставаясь внутри треугольника OT_1S, траектория L_P должна была бы стремиться к точке O, что невозможно в силу 1) и 2).

Следовательно, существует траектория L_0, входящая в треугольник OT_1S через точку S_1 отрезка OS и выходящая из него через точку отрезка T_1O кривой $A_1K_1T_1O$. При дальнейшем возрастании t эта траектория, оставаясь внутри v_1, стремится к O при $t \to +\infty$.

Очевидно, все траектории, пересекающие отрезок OS оси y, ведут себя так же, как траектория L_0.

Совершенно аналогично можно рассмотреть область v_2 и показать, что при наших условиях все траектории, пересекающие отрезок OS оси y достаточно близко к точке O, при убывании t входят в v_2 и затем, оставаясь внутри v_2, стремятся к O при $t \to -\infty$.

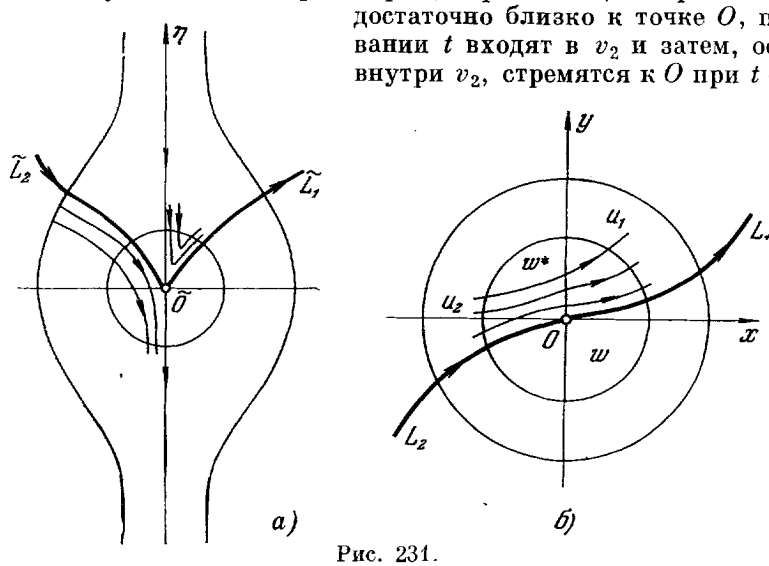


Рис. 231.

Можно считать, что и траектория L_0, проходящая через точку S_1, является такой траекторией и, следовательно, представляет из себя петлю. Все траектории, лежащие внутри этой петли, могут быть только такими же петлями, лежащими одна внутри другой. Действительно в силу 1) и 2) не может быть петли, целиком лежащей справа от оси y. Аналогично не может быть и петли, целиком лежащей слева от оси y. Отсюда же следует, что не может быть двух различных эллиптических областей, расположенных между траекториями L_1 и L_2. Но тогда, очевидно, всякая достаточно малая окрестность w точки O удовлетворяет первому утверждению леммы.

Б) Предположим теперь, что $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ — правильные гиперболические области. В этом случае $\tilde{L}_1$ и L_1 являются отрицательными, а $\tilde{L}_2$ и L_2 — положительными полутраекториями (рис. 231). Покажем, что если w — достаточно малая окрестность точки O, то часть ее w^* (лежащая выше полутраекторий L_1 и L_2) есть гиперболическая область. Действительно, если через точку области w^* проходит полутраектория, стремящаяся к O, то, начиная с некоторого значения t, она лежит целиком в криволинейном секторе u_1, или целиком в u_2. Соответствующая ей полутраектория на плоскости (x, η) стремится к точке $\tilde{O}$ и, начиная с некоторого значения t, целиком лежит в секторе $\tilde{v}_1$ или $\tilde{v}_2$. Но это противоречит условию,

что $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ — гиперболические секторы. Следовательно, все траектории, проходящие через точки области w^*, выходят из этой области, т. е. w^* есть гиперболическая область. Второе утверждение леммы доказано.

В) В третьем случае одна из областей, — например, $\widetilde{v}_1$ — является параболической, а вторая, $\widetilde{v}_2$ — гиперболической. Тогда $\widetilde{L}_1^{(\cdot)}$ и $L_1^{(\cdot)}$, а также $\widetilde{L}_2^{(\cdot)}$ и $L_2^{(\cdot)}$, являются положительными полутраекториями. Рассуждения, проведенные выше, позволяют утверждать, что всякая траектория, проходящая через точки области w^*, при возрастании t стремится к O в направлении $\theta = 0$ (как в случае А)), а при убывании t выходит из области w^* (как в случае Б)). Следовательно, w^* есть параболическая область (рис. 232). Лемма доказана.

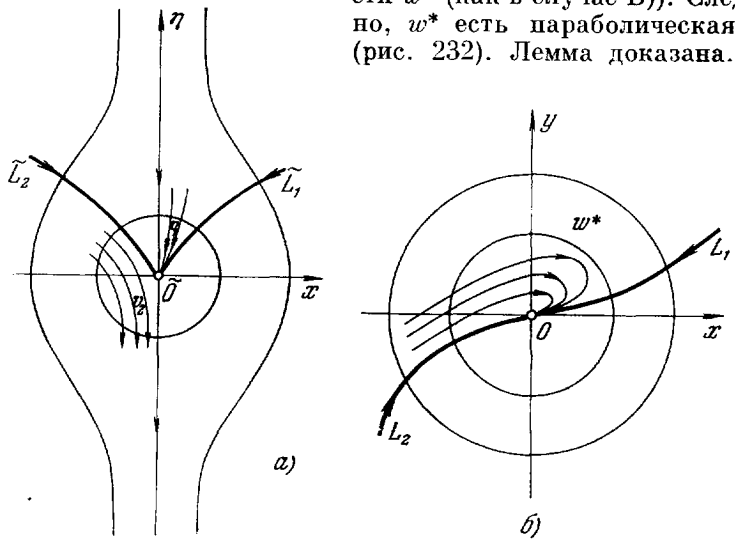


Рис. 232.

Замечание 1. Вместо областей Γ_1 и Γ_2 можно было бы рассматривать области $\bar{\Gamma}_1$ и $\bar{\Gamma}_2$ на плоскости (x, η) и соответствующие им области $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ на плоскости (x, y) (рис. 229). Очевидно, лемма 1 — с надлежащими изменениями — справедлива и для этих областей.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \tag{11}$$

где X и Y — аналитические в окрестности точки O (0, 0) функции, $X(0,0) = Y(0, 0) = 0$. Точка O (0, 0) является изолированным состоянием равновесия, разложение функции Y состоит из членов не ниже второй степени и содержит по крайней мере один член второй степени. Из вида системы (11) и условия изолированности состояния равновесия следует, что полуоси $y > 0$, $x = 0$ и $y < 0$, $x = 0$ оси y или их части, примыкающие к точке O, являются полутраекториями системы (11), стремящимися к O в направлениях, соответственно, $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Мы предположим, что эти полутраектории являются единственными полутраекториями системы (11), стремящимися к точке O в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$. Кроме того, мы предположим, что существует еще ровно четыре направления $\theta = \operatorname{arctg} k_i$,

$\theta = \pi + \operatorname{arctg} k_1$, $\theta = \operatorname{arctg} k_2$, $\theta = \pi + \operatorname{arctg} k_2$, в каждом из которых хотя бы одна полутраектория системы (11) стремится к O.

Применим к системе (11) преобразование $x = x$, $y = \eta x$. Мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \cdot X(x, \eta x), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{Y(x, \eta x)}{x} - \eta X(x, \eta x). \end{aligned} \tag{12}$$

В силу свойств функций X и Y правые части системы (12) имеют общий множитель x. Предположим еще, что правая часть второго из уравнений (12) не имеет множителем x^2. Делая замену параметра $x \cdot dt = d\tau$, мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= X(x, \eta x), \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{Y(x, \eta x)}{x^2} - \eta \frac{X(x, \eta x)}{x}. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как правая часть первого из уравнений (13) имеет множитель x, а вторая по предположению не имеет, то ось $x = 0$ не является особой линией, но состоит из траекторий системы, причем состояния равновесия системы на этой оси изолированные (в силу предположения об аналитичности правых частей, см. главу IV, введение).

Из леммы 1 § 21 и сделанных предположений следует, что точки $\widetilde{O}_1(0, k_1)$ и $\widetilde{O}_2(0, k_2)$ являются состояниями равновесия системы (13).

Замечание 2. Система (12) получается из системы (11) при помощи преобразования $x = x$, $\eta = \eta x$. Пусть L — траектория системы (11), лежащая на разрезанной плоскости, а $\widetilde{L}$ — соответствующая ей траектория системы (12), являющаяся одновременно траекторией системы (13) ($\widetilde{L}$ лежит также на разрезанной плоскости). При движении точки M по траектории L в положительном направлении (в сторону возрастания t) соответствующая ей точка $\widetilde{M}$ на траектории $\widetilde{L}$ движется также в положительном направлении, если $\widetilde{L}$ рассматривать как траекторию системы (12). Однако, если $\widetilde{L}$ рассматривать как траекторию системы (13), то $\widetilde{M}$ движется в положительном направлении в случае, когда L (а следовательно, и $\widetilde{L}$) лежит справа от оси ординат ($x > 0$), и в отрицательном, когда L лежит слева от оси ординат ($x < 0$). Это следует из того, что система (12) отличается от системы (13) множителем x в правых частях.

Лемма 2. *Предположим, что состояние равновесия* $\widetilde{O}_1(0, k_1)$ *является простым седлом системы* (13). *Тогда: 1) если состояние равновесия* $\widetilde{O}_2(0, k_2)$ *есть узел, то каноническая окрестность состояния равновесия* $O(0, 0)$ *состоит из двух гиперболических секторов и двух параболических секторов; 2) если* $\widetilde{O}_2(0, k_2)$ *есть седло, две сепаратрисы которого расположены по разные стороны оси* η, *то эта окрестность состоит из шести гиперболических секторов; 3) если* $\widetilde{O}_2(0, k_2)$ *есть седло — узел, обе седловые области которого расположены по одну сторону от оси* η, *то каноническая окрестность точки* O *состоит из четырех гиперболических секторов и одного параболического сектора.*

Доказательство. Рассмотрим достаточно-малую окрестность u точки O и соответствующую ей область Γ (см. п. 1 § 21 и рис. 222). Будем считать, что u не содержит других состояний равновесия кроме O.

Тогда все состояния равновесия системы (13), лежащие в Г, расположены на оси η. В силу леммы 1 § 21 и в силу условий, наложенных на систему (11), каждой полутраектории $L^{(\ )}$ системы (11), расположенной на разрезанной плоскости (x, y) и стремящейся к точке O, соответствует полутраектория $\widetilde{L}^{(\ )}$, расположенная на разрезанной плоскости (x, η) и стремящаяся к точке $\widetilde{O}_1$ или $\widetilde{O}_2$; и обратно, каждой полутраектории $\widetilde{L}^{(\ )}$, стремящейся к $\widetilde{O}_1$ или $\widetilde{O}_2$, соответствует полутраектория $L^{(\ )}$, стремящаяся к O. Так как точка $\widetilde{O}_1$ $(0, k_1)$ есть седло, то у нее имеется четыре сепаратрисы. Две из них являются частями оси η. Остальные две сепаратрисы

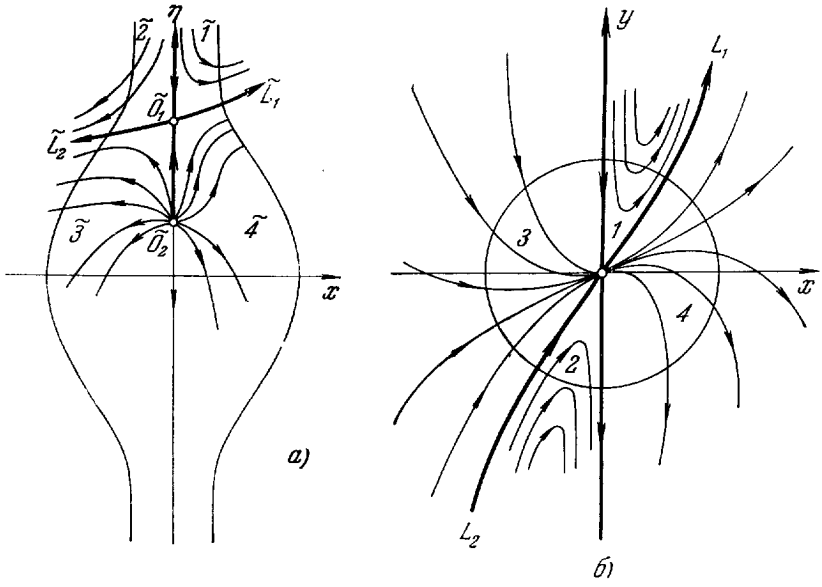


Рис. 233.

расположены по разные стороны оси η — это следует из того, что по условию система (11) имеет полутраектории, стремящиеся к точке O как в направлении $\theta = \operatorname{arctg} k_1$, так и в направлении $\theta = \pi + \operatorname{arctg} k_1$. Обозначим эти сепаратрисы через $\widetilde{L}_1^{(\ )}$ и $\widetilde{L}_2^{(\ )}$, соответствующие им полутраектории на плоскости (x, y) — через $L_1^{(\ )}$ и $L_2^{(\ )}$. Для того чтобы убедиться теперь в справедливости леммы, достаточно в каждом из указанных трех случаев рассмотреть расположение траекторий в области Г и образы этих траекторий при преобразовании $x = x$, $y = \eta x$. Мы предоставляем сделать это читателю. При проведении рассуждений нужно учитывать свойства преобразования, а также замечание 2 настоящего пункта.

Рис. 233, 234, 235 иллюстрируют соответственно случаи 1), 2), 3) в предположении, что $k_1 > k_2$. Переходим к дальнейшим леммам.

Л е м м а 3. *Система*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -ky^2 + x^2 f(x, y) + xyf_1(x, y), \end{aligned} \tag{14}$$

где $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ — аналитические в окрестности начала координат функции, $k > 0$, а $f(x, 0) \not\equiv 0$, имеет две и только две полутраектории,

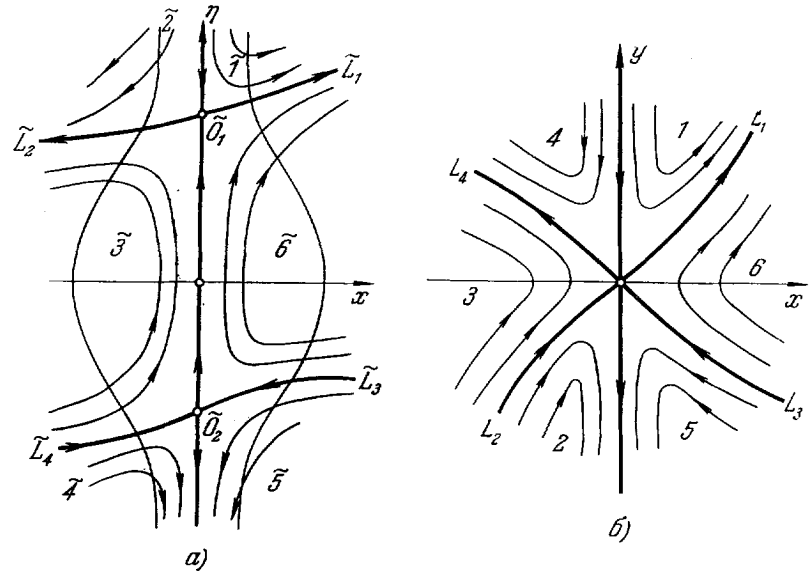


Рис. 234.

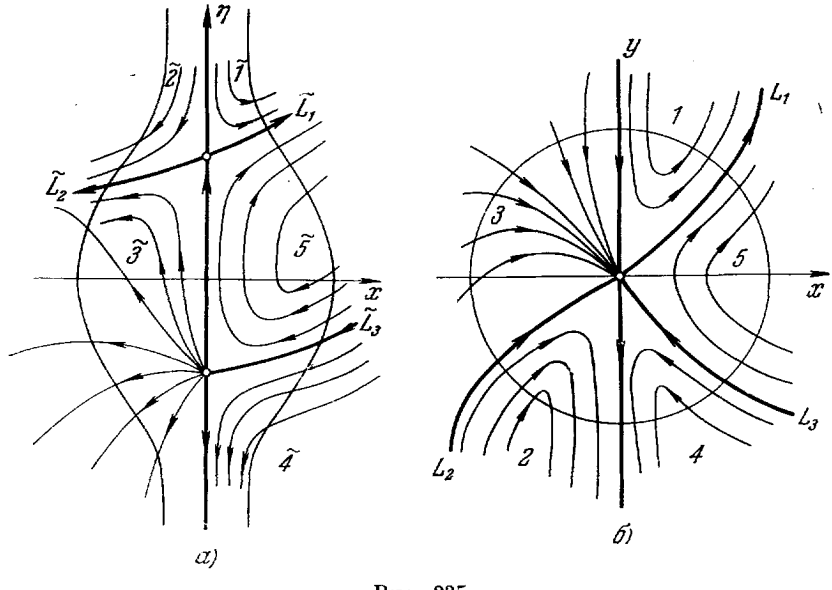


Рис. 235.

стремящиеся к точке $O(0, 0)$ *в направлениях* $\theta=\frac{\pi}{2}$ *и* $\theta=\frac{3}{2}\pi$, *именно, положительную и отрицательную полуоси* y.

Доказательство. Применяя к системе (14) преобразование $x=\xi y$, $y=y$ и делая замену параметра $y\,dt=d\tau$, мы получим систему

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau}&=(1+k)\,\xi-\xi^3 f(\xi y, y)-\xi^2 f_1(\xi y, y),\\ \frac{dy}{d\tau}&=-ky+\xi^2 y f(\xi y, y)+\xi y f_1(\xi y, y).\end{aligned}\tag{15}$$

Для состояния равновесия $\widetilde{O}(0, 0)$ этой системы выражение

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+k & 0\\ 0 & -k\end{vmatrix}=-k(1+k)<0,$$

т. е. точка $\widetilde{O}$ $(0, 0)$ есть простое седло системы (15). Сепаратрисами этого седла являются полуоси $\xi=0$ и $y=0$ или отрезки этих полуосей, примыкающие к точке $\widetilde{O}$. Других полутраекторий, стремящихся к точке $\widetilde{O}$, система (15) не имеет. В силу леммы 2 § 21 существуют в точности две полутраектории системы (14), стремящиеся к точке O в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$. Но такими полутраекториями являются положительная и отрицательная полуоси y. Лемма доказана.

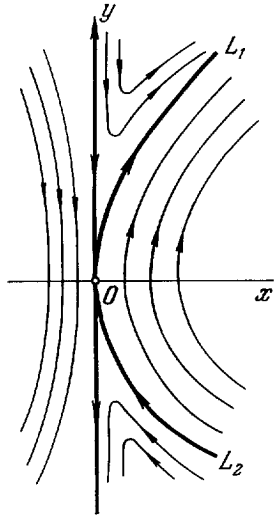


Рис. 236.

Лемма 4. *Пусть* $f(x, y)$ *и* $\varphi(x)$ *— аналитические в окрестности точки* $O(0, 0)$ *функции* $a\neq 0$; $b<0$ *и* $\varphi(0)=0$. *Тогда для системы*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=xy,\\ \frac{dy}{dt}&=ax[1+\varphi(x)]+by^2+xyf(x, y)\end{aligned}\tag{16}$$

точка O $(0, 0)$ *является седлом, сепаратрисами которого служат положительная и отрицательная полуоси* y *и две полутраектории, стремящиеся к точке* O $(0, 0)$ *также в направлении* $\frac{\pi}{2}$ *и* $\frac{3}{2}\pi$; *эти полутраектории расположены соответственно в первом и четвертом квадрантах, если* $a>0$ (рис. 236), *и во втором и третьем квадрантах, если* $a<0$.

Доказательство. В силу теоремы 64 существуют в точности два направления, в которых траектории системы (16) могут стремиться к состоянию равновесия O $(0, 0)$, именно, направления $\theta=\frac{\pi}{2}$ и $\theta=\frac{3}{2}\pi$. Полуоси $x=0$, $y>0$ и $x=0$, $y<0$ являются такими полутраекториями. Чтобы найти все такие полутраектории, применим сначала к системе (16) преобразование $x=\xi y$, $y=y$. Мы получим систему

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=(1-b)\,\xi y-a\xi^2-a\xi^2\varphi(\xi y)-\xi^2 y f(\xi y, y),\\ \frac{dy}{dt}&=a\xi y+by^2+a\xi y\varphi(\xi y)+\xi y^2 f(\xi y, y).\end{aligned}\tag{17}$$

Точка $\widetilde{O}$ (0, 0) является для этой системы изолированным состоянием равновесия. В силу леммы 2 § 21 для того, чтобы найти все полутраектории системы (16), стремящиеся к точке O, нужно найти все траектории системы (17), стремящиеся к точке $\widetilde{O}$ и лежащие на разрезанной плоскости (ξ, y) (разрез по оси $y = 0$). Мы будем искать *все* траектории системы (17), стремящиеся к точке $\widetilde{O}$. Очевидно, полуоси $\xi = 0$, $y > 0$ и $\xi = 0$, $y < 0$ являются полутраекториями системы (17) и стремятся к точке $\widetilde{O}$ в направлениях $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Применяя к системе (17) преобразование $\xi = \xi y$, $y = y$, мы покажем в точности так же, как при

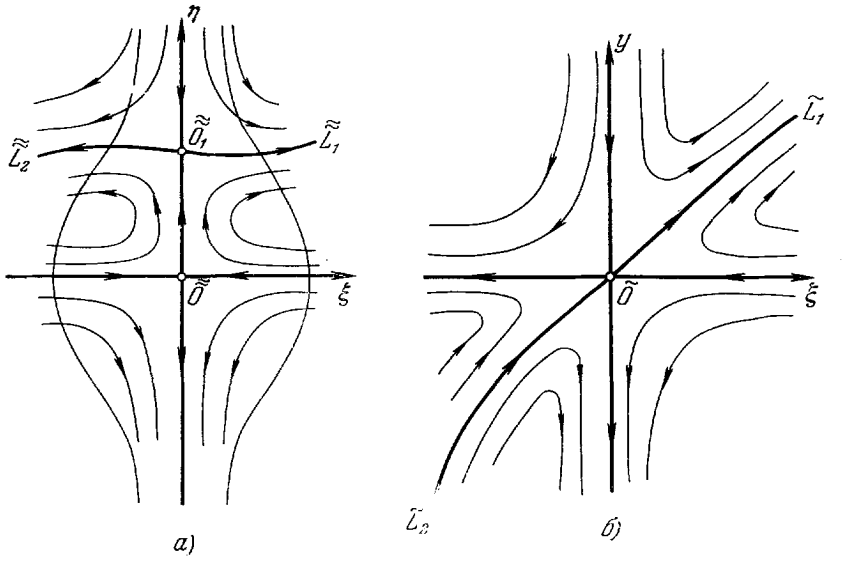


Рис. 237.

доказательстве леммы 3, что указанные полуоси $\xi = 0$, $y > 0$ и $\xi = 0$, $y < 0$ являются единственными полутраекториями системы (17), стремящимися к точке $\widetilde{O}$ в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$. Теперь будем искать полутраектории системы (17), стремящиеся к $\widetilde{O}$ в других направлениях. С этой целью применим к системе (17) преобразование $\xi = \xi$, $y = \eta\xi$ и сделаем замену параметра $\xi\, dt = d\tau$. Мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -a\xi + (1-b)\,\xi\eta - a\xi\varphi(\xi^2\eta) - \xi^2\eta f(\xi^2\eta,\ \xi\eta), \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= 2a\eta - (1-2b)\,\eta^2 + 2a\eta\varphi(\xi^2\eta) + 2\xi\eta^2 f(\xi^2\eta,\ \xi\eta). \end{aligned} \tag{18}$$

Легко видеть, что система (18) имеет на оси $\xi = 0$ в точности два состояния равновесия $\widetilde{\widetilde{O}}$ (0, 0) и $\widetilde{\widetilde{O}}_1\left(0, \frac{2a}{1-2b}\right)$. Для первого из них выражение Δ равно $-2a^2 < 0$, а для второго $\Delta = -\frac{2a^2}{1-2b} < 0$. Следовательно, обе эти точки являются простыми седлами. Все четыре сепаратрисы седла $\widetilde{\widetilde{O}}$ представляют из себя части координатных осей $\xi = 0$ и $\eta = 0$ (так как эти оси состоят из траекторий системы (18)). Две сепаратрисы седла $\widetilde{\widetilde{O}}_1$

расположены также на оси $\xi = 0$, а остальные две (мы обозначим их через $\widetilde{\widetilde{L}}_1$ и $\widetilde{\widetilde{L}}_2$) по разные стороны от этой оси. Поэтому расположение траекторий системы (18) вблизи оси η имеет вид, представленный на рис. 237, *а* для случая $a > 0$.

Теперь мы можем применить лемму 2. Для системы (18) выполняются условия второго утверждения этой леммы, поэтому каноническая окрестность состояния равновесия $\widetilde{O}$ системы (17) состоит из шести гиперболических областей, и следовательно, к точке $\widetilde{O}$ стремятся в точности шесть полутраекторий, четыре из них являются полуосями осей $\xi = 0$ и $y = 0$. Остальные две соответствуют полутраекториям $\widetilde{\widetilde{L}}_1$ и $\widetilde{\widetilde{L}}_2$. Мы обозначим их $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$. В случае $a > 0$ расположение траекторий в окрестности точки $\widetilde{O}$ приведено на рис. 237, *б*.

Система (17) получается из системы (16) преобразованием $x = \xi y$, $y = y$. Из свойств этого преобразования и леммы 2 § 21 следует, что к состоянию равновесия O системы (16) стремятся в точности четыре полутраектории системы. Две из них являются полуосями оси y, а остальные две — $L_1^{(}$ и $L_2^{(}$ — соответствуют полутраекториям $\widetilde{L}_1^{(}$ и $\widetilde{L}_2^{(}$ и расположены при $a > 0$ так, как это показано на рис. 236, и полностью симметрично относительно оси y при $a < 0$. Отсюда вытекает справедливость доказанной леммы.

2. Возможные топологические структуры сложного состояния равновесия в случае $\sigma = 0$. Мы переходим теперь к рассмотрению исходной системы (9)

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y).$$

Так как точка O (0, 0) есть по условию изолированное состояние равновесия, то эту систему можно, очевидно, записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = y, \\ &\frac{dy}{dt} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 f(x, y), \end{aligned} \tag{A}$$

где $h(x)$, $g(x)$, $f(x, y)$ — аналитические в окрестности начала координат функции, $h(0) = g(0) = 0$, $k \geqslant 2$, $a_k \neq 0$. Коэффициент b_n может быть равен 0; если $b_n \neq 0$, то $n \geqslant 1$.

Возможные топологические структуры состояния равновесия O (0, 0) системы (A) устанавливаются в следующих теоремах 66 и 67. Будем называть состояние равновесия, каноническая окрестность которого состоит из двух гиперболических секторов, *вырожденным состоянием равновесия*. Если же каноническая окрестность точки O состоит из одного гиперболического и одного эллиптического сектора, то мы будем называть точку O *состоянием равновесия с эллиптической областью*.

Теорема 66. *Пусть в системе* (A) $k = 2m + 1$, *т. е. нечетно* ($m \geqslant 1$), *а* $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1) a_{2m+1}$.

Тогда, если $a_{2m+1} = a_k > 0$, *то состояние равновесия O системы* (9) *является топологическим седлом* (рис. 238). *Если же* $a_k < 0$, *то точка O является: 1) фокусом или центром при* $b_n = 0$, *а также при* $b_n \neq 0$ *и* $n > m$ *или при* $b_n \neq 0$, $n = m$ *и* $\lambda < 0$; *2) топологическим узлом, если* $b_n \neq 0$, n — *четное число и* $n < m$, *а также если* $b_n \neq 0$, n — *четное число,* $n = m$ *и* $\lambda \geqslant 0$; *3) состоянием равновесия с эллиптической областью,*

если $b_n \neq 0$, n — *нечетное число и* $n < m$, *а также если* $b_n \neq 0$, n — *нечетное число*, $n = m$ *и* $\lambda \geqslant 0$ (рис. 239).

Замечание. Рис. 239 соответствует случаю, когда $b_n > 0$; расположение траекторий в случае $b_n < 0$ получается при помощи отражения оси x.

Доказательство. Для системы (A) существует в точности два направления, в которых ее траектории могут стремиться к состоянию равновесия O (0, 0), именно, направления 0 и π. Произведем последовательно ряд преобразований $x = x$, $y = \eta_1 x$; $x = x$, $\eta_1 = \eta_2 x$; . . .; $x = x$, $\eta_{r-1} = \eta_r x$, опуская при этом в каждой системе, получающейся после второго преобразования (т. е. после преобразования $x = x$, $\eta_1 = \eta_2 x$), общий множитель x, входящий в правые части системы *). Мы

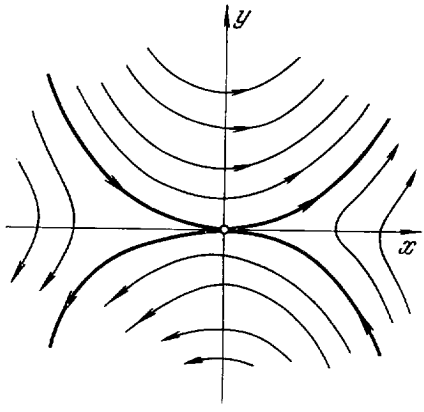


Рис. 238.

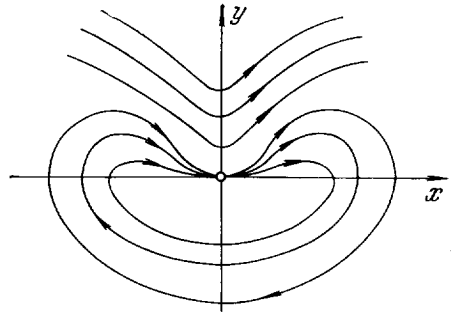


Рис. 239.

получим системы (A_1), (A_2), . . ., (A_r), . . ., где (A_r), как показывают простые вычисления, есть система

$$\frac{dx}{dt} = \eta_r x,$$
$$\frac{d\eta_r}{dt} = -r\eta_r^2 + a_{2m+1}x^{2m-2r+2}[1 + h(x)] + b_n x^{n-r+1}\eta_r[1 + g(x)] + \eta_r^2 x \cdot f(x, \eta_r x^r). \qquad (A_r)$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть либо $b_n = 0$, либо $b_n \neq 0$, но $n > m$. При всех значениях r, $1 \leqslant r \leqslant m - 1$, выполняются неравенства

$$2m - 2r + 2 \geqslant 4, \qquad n - r + 1 \geqslant n - m + 2 \geqslant 3.$$

Поэтому при каждом из этих значений r существует в силу теоремы 64 в точности четыре направления, в которых траектории системы (A_r) могут стремиться к состоянию равновесия O_r (0, 0), именно, направления $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$. В силу леммы 3 при $1 \leqslant r \leqslant m$ к состоянию равновесия O_r стремятся в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ только полутраектории $x = 0$, $\eta_r > 0$ и $x = 0$; $\eta_r < 0$. Далее, в силу свойств применяемых преобразований и в силу леммы 1 § 21 каждой полутраектории L системы (A), лежащей на разрезанной плоскости и стремящейся к состоянию равновесия O (такая траектория стремится к точке O в направлении 0 или π), соответ-

*) Это означает, что каждый раз вводится новый параметр. Однако в дальнейшем для параметра сохраняется прежнее обозначение.

ствует лежащая на разрезанной плоскости и стремящаяся к состоянию равновесия O_r полутраектория L_r каждой из систем (A_r) $(r = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1, m)$, причем это соответствие взаимно однозначно. Отсюда следует, что исследование характера состояния равновесия O исходной системы (A) сводится к исследованию характера состояния равновесия $O_m(0, 0)$ системы (A_m), т. е. системы

$$\frac{dx}{dt} = \eta_m x, \qquad (A_m)$$

$$\frac{d\eta_m}{dt} = -m\eta_m^2 + a_{2m+1}x^2[1+h(x)] + b_n x^{n-m+1}\eta_m[1+g(x)] + \eta_m^2 xf(x, \eta_m x^m).$$

Направления, в которых траектории этой системы могут стремиться к точке $O_m(0, 0)$, определяются из уравнения

$$x[(m+1)\eta_m^2 - a_{2m+1}x^2] = 0. \qquad (19)$$

Если $a_k = a_{2m+1} < 0$, то полутраектории системы (A_m) могут стремиться к точке O_m только в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$. Как мы уже указывали, имеются в точности две такие полутраектории, именно, полуоси оси $x = 0$. Следовательно, на разрезанной плоскости (x, η_m) не существует траекторий, стремящихся к состоянию равновесия $O_m(0, 0)$. Но тогда таких полутраекторий не существует и у систем (A_{m-1}), (A_{m-2}), $\ldots$, (A_1), а исходная система (A) вообще не имеет полутраекторий, стремящихся к точке $O(0,0)$ в определенном направлении. А это значит, что точка O является либо фокусом, либо центром системы (A).

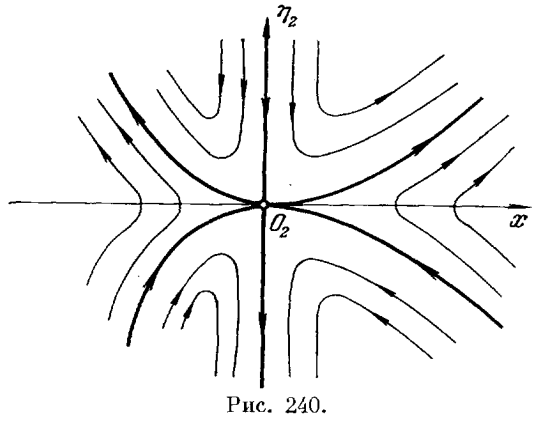


Рис. 240.

Пусть теперь $a_k = a_{2m+1} > 0$. Из уравнения (19) следует, что в этом случае кроме направлений $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ существует еще четыре направления, в которых полутраектории системы (A_m) могут стремиться к состоянию равновесия O_m, именно, направления $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}$, $\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}$, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right)$, $\pi+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right)$. Непосредственно видно, что для системы (A_{m+1}) точки $\left(0, \sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right)$ и $\left(0, -\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right)$ являются простыми седлами. Поэтому в силу леммы 2 каноническая окрестность состояния равновесия O_m системы (A_m) состоит из шести гиперболических секторов, и точка O_m имеет шесть сепаратрис, двумя из которых являются полуоси $x = 0$, $\eta_m > 0$ и $x = 0$, $\eta_m < 0$. Расположение траекторий в окрестности точки O_m и направления на сепаратрисах такие же, как на рис. 234. Расположение траекторий систем (A_r) в окрестности точки O_r $(r = m-1, m-2, \ldots, 2, 1)$ и направления на сепаратрисах показаны на рис. 240 (отличие от случая $r = m$ заклю-

чается в том, что сепаратрисы, не лежащие на оси $x=0$, стремятся к точке O_r в направлениях 0 и π). Наконец, переходя от системы (A_1) к исходной системе (A) и принимая во внимание лемму 1 и замечание 2 п. 1, мы убедимся, что состояние равновесия $O(0, 0)$ системы (A) является седлом, расположение траекторий в окрестности которого приведено на рис. 238.

2) Пусть теперь $b_n \neq 0$, $n<m$. При $r=n$ система (A_r) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \eta_n x,\\ \frac{d\eta_n}{dt} &= -n\eta_n^2 + b_n x\eta_n [1+g(x)] + \\ &\quad + a_{2m+1} x^{2m-2n+2} [1+h(x)] + \eta_n^2 x f(x, \eta_n x^n).\end{aligned} \tag{A_n}$$

Здесь $2m-2n+2 \geqslant 4$, следовательно, направления, в которых полутраектории системы (A_n) могут стремиться к состоянию равновесия $O_n(0, 0)$, определяются уравнением

$$x\eta_n [\eta_n (1+n) - b_n x] = 0. \tag{20}$$

Это уравнение дает шесть направлений $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, 0, π, $\operatorname{arctg} \frac{b_n}{1+n}$, $\pi + \operatorname{arctg} \frac{b_n}{1+n}$. В направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ к состоянию равновесия O_n стремятся, как и выше (в силу леммы 3), две и только две полутраектории $x=0$, $\eta_n > 0$ и $x=0$, $\eta_n < 0$. Для исследования остальных полутраекторий, стремящихся к точке O_n, рассмотрим систему (A_{n+1}):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \eta_{n+1} x,\\ \frac{d\eta_{n+1}}{dt} &= b_n \eta_{n+1} [1+g(x)] - (n+1)\eta_{n+1}^2 + \\ &\quad + a_{2m+1} x^{2m-2n} [1+h(x)] + \eta_{n+1}^2 x f(x, \eta_{n+1} x^{n+1}).\end{aligned} \tag{A_{n+1}}$$

Состояниями равновесия этой системы являются, как легко видеть, точки $O_{n+1}(0, 0)$ и $\bar{O}(0, \frac{b_n}{1+n})$. Вычисления показывают, что для точки $\bar{O}$ $\Delta = -\frac{b_n}{n+1} < 0$, т. е. $\bar{O}$ есть простое седло системы (A_{n+1}). Две сепаратрисы этого седла расположены на оси $x=0$, а остальные две — по разные стороны этой оси. Для состояния равновесия $O_{n+1}(0, 0)$, $\Delta = 0$, а $\sigma = b_n \neq 0$. Поэтому для исследования точки O_{n+1} мы можем применить теорему 65. Предварительно систему (A_{n+1}) надо привести к виду (11) § 21. Для этого достаточно ввести новое время τ при помощи соотношения $\tau = b_n t$. Первый член разложения функции $\varphi(x)$ для получающейся системы (см. теорему 65) легко найти с помощью метода неопределенных коэффициентов — он равен $-\frac{a_{2m+1}}{b_n} x^{2m-2n}$. Поэтому первый член разложения функции $\psi(x)$ равен $-\frac{a_{2m+1}}{b_n^2} x^{2m-2n+1}$. Из теоремы 65 следует тогда, что состояние равновесия O_{n+1} системы (A_{n+1}) является узлом, если $a_{2m+1} < 0$, и седлом, если $a_{2m+1} > 0$. При этом в случае седла две его сепаратрисы представляют участки на оси $x=0$, а остальные две расположены по разные стороны от этой оси. Применяя теперь лемму 2, мы можем установить характер состояния

равновесия системы (A_n). Именно, из второго утверждения леммы следует, что если $a_{2m+1} > 0$, то каноническая окрестность состояния равновесия O_n системы (A_n) состоит из шести гиперболических секторов (рис. 240). Из первого же утверждения леммы следует, что если $a_{2m+1} < 0$, то каноническая окрестность точки O_n состоит из двух гиперболических и двух параболических секторов. Рис. 241 дан для случая $b_n > 0$. При $b_n < 0$ имеем полностью симметричную относительно оси η_n картину. Характер состояния равновесия O (0, 0) исходной системы (A) можно теперь установить, переходя последовательно к системам (A_{n-1}), (A_{n-2}), . . ., (A_r), ..., (A_1), (A). Заметим, что в случае $n < m$, который мы сейчас исследуем для всех r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, выполняются неравенства $2m - 2r + 2 > 4$ и $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Поэтому переход от системы (A_n) к (A_{n-1}), (A_{n-2}), ..., (A_1), (A) осуществляется так же, как в случае $n > m$, и мы сразу заключаем, что если $a_{2m+1} > 0$, то состояние равновесия O (0, 0) системы является седлом (расположение траекторий в этом случае иллюстрируется рис. 238). Однако при $a_{2m+1} < 0$ приходится принимать во внимание четность числа n. Действительно, при преобразовании $x = x$, $\eta_{r-1} = \eta_r \cdot x$ точки 2-го и 3-го квадрантов плоскости (x, η_r) переходят в точки соответственно 3-го и 2-го квадрантов плоскости (x, η_{r-1}). Поэтому расположение траекторий системы (A_{n-1}) в окрестности точки O_{n-1} будет таким, как это изображено на рис. 242 при $b_n < 0$, и полностью симметрично относительно оси x при $b_n > 0$.

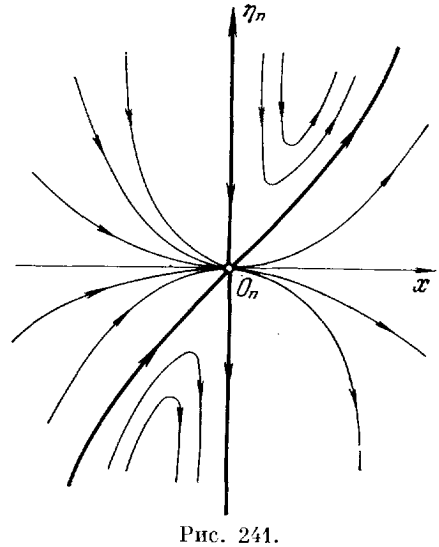


Рис. 241.

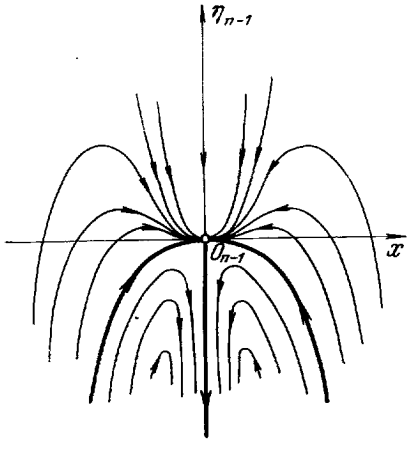


Рис. 242.

Очевидно, для систем (A_{n-2}), (A_{n-3}) и т. д. расположение траекторий в окрестности точки O (0, 0) будет поочередно характеризоваться то рис. 241, то рис. 242. Поэтому для системы (A_1) характер расположения траекторий в окрестности ее состояния равновесия O_1 (0, 0) будет при n нечетном таким, как у системы (A_n), а при n четном таким, как у системы (A_{n-1}).

Нам остается теперь перейти от системы (A_1) к исходной системе (A), применив лемму 1 и замечание 1. Из этой леммы и замечания следует, что в рассматриваемом случае, т. е. при $n < m$, $b_n \neq 0$ и $a_{2m+1} < 0$ состояние равновесия O (0, 0) системы (A) является: топологическим узлом, если n четно, состоянием равновесия с эллиптической областью, если n — нечетно. При этом если $b_n > 0$ ($b_n < 0$), то эллиптическая область расположена ниже (выше) гиперболической ((рис. 239) для случая $b_n > 0$).

3) Остается рассмотреть случай, когда $m = n$. При $r = m = n$ система (A_r) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \eta_m x,$$

$$\frac{d\eta_m}{dt} = -m\eta_m^2 + a_{2m+1}x^2(1+h(x)) + b_n x\eta_m[1+g(x)] + \eta_m^2 xf(x, \eta_m x^m).$$

Направления, в которых полутраектории системы (A_m) могут стремиться к состоянию равновесия $O_m(0, 0)$, определяются уравнением

$$x[\eta_m^2(1+m) - b_n\eta_m x - a_{2m+1}x^2] = 0. \tag{21}$$

В силу леммы 3 в направлениях $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ к точке $O_m(0, 0)$ стремятся только полутраектории $x = 0$, $\eta_m > 0$ и $x = 0$, $\eta_m < 0$. Пусть $\lambda = b_n^2 + 4(m+1)a_{2m+1}$. Рассмотрим три случая.

а) $\lambda < 0$. При этом из уравнения (21) следует, что направления $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ являются единственными, в которых полутраектории системы (A_m) могут стремиться к точке O_m. Но тогда, так же как в случае 1 (т. е. при $n > m$), ни у системы (A_m), ни у одной из систем (A_{m-1}), (A_{m-2}), ..., (A_1), (A) на разрезанной плоскости нет полутраекторий, стремящихся к состоянию равновесия (0, 0), т. е. состояние равновесия $O(0, 0)$ системы (A) является либо фокусом, либо центром.

б) $\lambda > 0$. Рассмотрим систему (A_{m+1}):

$$\frac{dx}{dt} = \eta_{m+1}x,$$

$$\frac{d\eta_{m+1}}{dt} = a_{2m+1}[1+h(x)] - (m+1)\eta_{m+1}^2 + \tag{A_{m+1}}$$

$$+ b_n\eta_{m+1}[1+g(x)] + \eta_{m+1}^2 xf(x, \eta_{m+1}x^{m+1}).$$

Эта система имеет два состояния равновесия $\widetilde{O}_1(0, k_1)$ и $\widetilde{O}_2(0, k_2)$, где

$$k_1 = \frac{b_n + \sqrt{\lambda}}{2(m+1)}, \quad k_2 = \frac{b_n - \sqrt{\lambda}}{2(m+1)}.$$

Вычисления показывают, что

$$\Delta(0, k_1) = -k_1\sqrt{\lambda}, \quad \Delta(0, k_2) = k_2\sqrt{\lambda}. \tag{22}$$

Если $a_{2m+1} > 0$, то $\sqrt{\lambda} > |b_n|$, $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, и обе точки $\widetilde{O}_1$ и $\widetilde{O}_2$ являются простыми седлами системы (A_{m+1}). Отсюда так же, как в предыдущих случаях (при $a_{2m+1} > 0$), заключаем, что состояние равновесия $O(0, 0)$ системы (A) является седлом.

Пусть теперь $a_{2m+1} < 0$. Тогда $\sqrt{\lambda} < |b_n|$, и оба числа k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки. Из соотношений (22) следует, что в этом случае одно из состояний равновесия $\widetilde{O}_1$ и $\widetilde{O}_2$ является простым седлом системы (A_{m+1}), а другое — простым узлом, причем если $b_n > 0$, то седло лежит на оси η_{m+1} выше узла, а если $b_n < 0$, то ниже. Дальнейшее рассуждение проводится в точности так же, как в случае 2) (т. е. в случае, когда $n < m$, $a_{2m+1} < 0$). Мы приходим, таким образом, к следующему заключению: если $b_n \neq 0$, $\lambda > 0$, $a_{2m+1} < 0$ и $m = n$, то точка $O(0, 0)$ системы (A) является топологическим *узлом* при n четном и *состоянием равновесия с эллиптической областью* при n нечетном (рис. 239).

в) $\lambda = 0$. В этом случае, как нетрудно видеть, система (A_{m+1}) имеет в некоторой области Г, содержащей ось η_{m+1}, единственное состояние

равновесия $\widetilde{O}\left(0, \frac{b_m}{2(m+1)}\right)$. Непосредственные вычисления показывают, что для точки $\widetilde{O}$ $\Delta = 0$, $\sigma(0, 0) \neq 0$. Поэтому расположение траекторий в окрестности этой точки можно исследовать с помощью теоремы 65, приведя предварительно систему (A_{m+1}) к виду (11) § 21. Исследование (которое мы предоставляем сделать читателю) показывает, что состояние равновесия $\widetilde{O}$ системы (A_{m+1}) есть седло — узел; расположение траекторий в окрестности точки $\widetilde{O}$ приведено на рис. 243 при $b_n > 0$ и на рис. 244

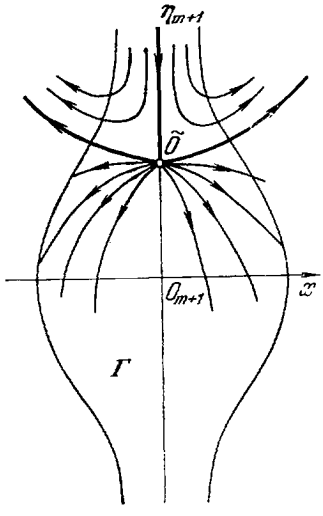


Рис. 243.

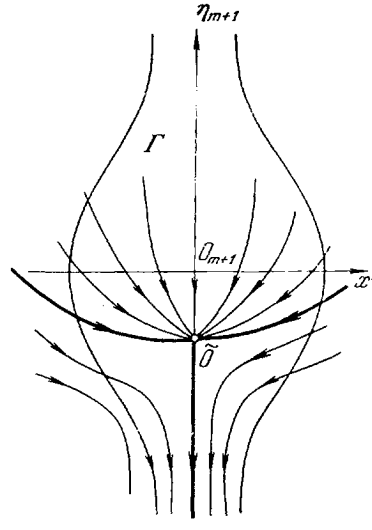


Рис. 244.

при $b_n < 0$. Зная расположение траекторий системы (A_{m+1}), мы можем с помощью таких же соображений, как при доказательстве леммы 2, установить характер состояния равновесия O_m системы (A_m). Нетрудно видеть, что при $b_n > 0$ траектории в окрестности O_m расположены как на

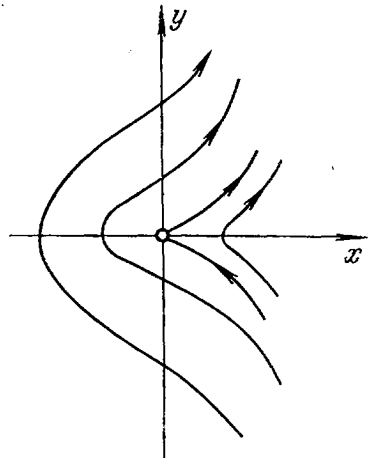


Рис. 245.

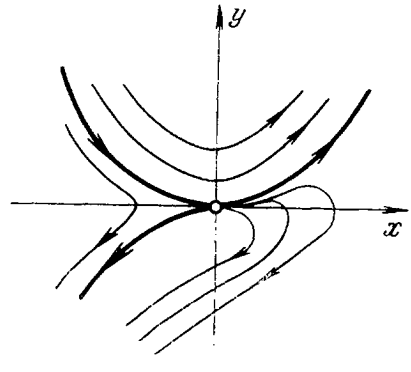


Рис. 246.

рис. 241, а при $b_n < 0$ — симметрично относительно оси x. Дальнейшее рассуждение проводится в точности так же, как в случае 2) (т. е. когда

$n < m$, $a_{2m+1} < 0$), и мы таким образом убеждаемся, что если $b_n \neq 0$, $m = n$, $\lambda = 0$, то состояния равновесия O (0, 0) системы (A) есть:

1) топологический *узел* при n четном;

2) *состояние равновесия с эллиптическим сектором* при n нечетном (рис. 239).

Сопоставляя все полученные результаты, мы убедимся, что теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда k есть четное число.

Т е о р е м а 67. *Пусть в системе* (A) $k = 2m$, *т. е. четно* ($m \geqslant 1$). *Тогда состояние равновесия* O (0, 0) *есть:*

1) вырожденное состояние равновесия, если $b_n = 0$, *а также если* $b_n \neq 0$ *и* $n \geqslant m$ (рис. 245); *2) седло — узел, если* $b_n \neq 0$ *и* $n < m$ (рис. 246). (Рис. 245 соответствует случаю $a_{2m} > 0$, а рис. 246 — случаю $b_n > 0$, $a_{2m} < 0$.)

Доказательство настоящей теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 66, и мы его не приводим *). Отметим только, что при доказательстве этой теоремы используется также лемма 4.

3. Упрощение исследования. Примеры. Покажем прежде всего, как можно упростить исследование топологической структуры состояния равновесия O (0, 0) системы (5)

$$\frac{dx}{dt} = y + P_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y).$$

Из приведенных в настоящем параграфе рассуждений вытекает, что для исследования нужно:

а) Выполнить преобразование (6)

$$\xi = x, \qquad \eta = y + P_2(x, y)$$

и найти обратное преобразование (7)

$$x = \xi, \qquad y = f(\xi, \eta).$$

Функция $f(\xi, \eta)$ удовлетворяет тождеству

$$\eta \equiv f(\xi, \eta) + P_2(\xi, f(\xi, \eta)). \tag{23}$$

В результате преобразования получается система (8)

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \widetilde{Q}_2(\xi, \eta).$$

Вернемся к старым обозначениям, заменив ξ и η соответственно на x и y. Тождество (23) запишется в виде

$$y \equiv f(x, y) + P_2(x, f(x, y)). \tag{24}$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = f(x, 0). \tag{25}$$

Из (24) следует, что

$$\varphi(x) + P_2(x, \varphi(x)) = 0, \tag{26}$$

*) Доказательство теоремы 67 полностью изложено в [84].

причем $\varphi(0) = 0$. Система (8) в измененных обозначениях имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = \widetilde{Q}_2(x, y).$$

С выражением для $\widetilde{Q}_2$:

$$\widetilde{Q}_2(x, y) = Q_2(x, f(x, y)) + P'_{2x}(x, f(x, y))\, y + \\ + P'_{2y}(x, f(x, y)) \cdot Q_2(x, f(x, y)), \quad (27)$$

мы встречались в начале п. 1.

Далее, нужно

б) представить функцию $\widetilde{Q}_2(x, y)$ в виде

$$\widetilde{Q}_2(x, y) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + y(b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots) + y^2 f(x, y). \quad (28)$$

в) В зависимости от того, является k четным или нечетным числом, применить теорему 66 или 67 и по числам k, n, a_k и b_n определить характер состояния равновесия $O(0, 0)$*).

Из соотношения (28) ясно, что $a_k x^k$ есть первый (низший) член разложения по степеням x функции $\widetilde{Q}_2(x, 0)$, а $b_n x^n$ есть первый член разложения функции $\frac{\partial \widetilde{Q}_2(x, 0)}{\partial y}$. Следовательно, в силу (25) и (27) $a_k x^k$ есть первый член разложения функции

$$Q_2(x, \varphi(x))\,[1 + P'_{2y}(x, \varphi(x))], \quad (29)$$

а $b_n x^n$ есть первый член разложения функции

$$P'_{2x}(x, \varphi(x)) + Q'_{2y}(x, \varphi(x))\,[1 + P'_{2y}(x, \varphi(x))]\,\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} + \\ + P''_{2yy}(x, \varphi(x)) \cdot Q_2(x, \varphi(x))\,\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y}. \quad (30)$$

Из тождества (24) следует, что

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \frac{1}{1 + P'_{2y}(x, \varphi(x))}.$$

Поэтому выражение (30) можно записать в виде

$$P'_{2x}(x, \varphi(x)) + Q'_{2y}(x, \varphi(x)) + \frac{P''_{2yy}(x, \varphi(x)) \cdot Q_2(x, \varphi(x))}{1 + P'_{2y}(x, \varphi(x))}. \quad (31)$$

Из выражения (29) сразу видно, что первый член разложения функции (29), т. е. $a_k x^k$, совпадает с первым членом разложения функции $Q_2(x, \varphi(x))$.

Обозначим через $B_N x^N$ первый член разложения функции

$$\sigma(x) = P'_{2x}(x, \varphi(x)) + Q'_{2y}(x, \varphi(x)). \quad (32)$$

Если выражение (32) тождественно равно нулю, то мы будем считать, что $B_N = 0$.

Мы утверждаем, что при *определении топологической структуры состояния равновесия* $O(0, 0)$ системы (5) с помощью теоремы 66 и 67 *в качестве чисел* n *и* b_n *можно взять соответственно числа* N *и* B_N.

---

*) В случае, если $\widetilde{Q}_2(x, y)$ не имеет членов, содержащих y в первой степени, число b_n считается равным нулю.

Для доказательства заметим, что если $B_N \neq 0$, а $N \leqslant m$, то младшие члены разложений функций (31) и (32) просто совпадают, т. е. $b_n = B_N$ и $n = N$. Если $B_N = 0$, то либо $b_n = 0$, либо $n > m$. В обоих случаях безразлично, пользоваться ли в теоремах 66 или 67 числами n и b_n или (соответственно) числами N и B_N. Наконец, если $B_N \neq 0$, а $N > m$, то либо младшие члены разложений функций (31) и (32) совпадают, либо $b_n = 0$, либо $n > m$ (хотя младшие члены обоих разложений и не совпадают). Во всех этих случаях результат, получаемый из теорем 66 и 67, не меняется при замене чисел n и b_n числами N и B_N.

Таким образом, наше утверждение доказано. В результате мы приходим к следующему простому правилу.

Для исследования топологической структуры состояния равновесия O (0, 0) системы

$$\frac{dx}{dt} = y + P_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \tag{33}$$

нужно:

а) Последовательно находить коэффициенты разложения по степеням x функции $y = \varphi(x)$, являющейся решением уравнения

$$y + P_2(x, y) = 0.$$

Для этого нужно, очевидно, подставить в это уравнение выражение для $\varphi(x)$ в виде ряда

$$\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k + \ldots$$

Собирая затем члены с одинаковыми степенями x, нужно приравнять полученные таким образом коэффициенты при одной и той же степени x; из этих выражений последовательно определяются коэффициенты α_1, α_2, $\ldots$, α_n, $\ldots$

б) По мере нахождения коэффициентов α_i подставлять соответственно в функции

$$\psi(x) = Q_2(x, \varphi(x)) \quad \text{и} \quad \sigma(x) = P'_{2x}(x, \varphi(x)) + Q'_{2y}(x, \varphi(x))$$

отрезки ряда для $\varphi(x)$: $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ до получения первого не равного нулю коэффициента в разложении функции $\psi(x)$, $a_k x^k$ ($a_k \neq 0$, $a_i = 0$, $i < n$) и первого не равного нулю коэффициента в разложении функции $\sigma(x)$: $b_n x^n$ ($b_n \neq 0$, $b_j = 0$, $j < n$) (если $\sigma(x) \equiv 0$, то, очевидно, $b_n = 0$).

в) При k четном (нечетном) применить теорему 66 (67) и по величинам k, n, a_k и b_n определить в согласии с этой теоремой характер состояния равновесия O (0, 0).

Отметим, что рис. 238—239, 245, 246 иллюстрируют рассмотрение траекторий в окрестности состояния равновесия O (0, 0) в том случае, когда направлениями, по которым траектории стремятся к состоянию равновесия, являются направления осей координат. В случае, когда это не так, рисунок, очевидно, будет несколько иной, хотя топологически структура состояния равновесия при этом, конечно, остается той же самой.

Замечание. В достаточно малой окрестности начала координат преобразование

$$\xi = x, \qquad \eta = y - \varphi(x) \tag{34}$$

так же, как преобразование (6), приводит систему (5) к виду (8). Поэтому, зная расположение траекторий в окрестности состояния равновесия O (0, 0) преобразованной системы (8)

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \widetilde{Q}_2(\xi, \eta),$$

мы можем перейти к исходной системе (5)

$$\frac{dx}{dt}=y+P_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=Q_2(x, y)$$

с помощью преобразования

$$x=\xi, \qquad y=\eta+\varphi(\xi), \tag{35}$$

т. е. преобразования, обратного к преобразованию (34).

Во всех приводимых ниже примерах даны системы, не обязательно приведенные к каноническому виду, и требуется определить тип состояния равновесия O (0, 0) этих систем с помощью одной из трех теорем настоящей главы.

1. $$\frac{dx}{dt}=x(\beta x-y), \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\alpha}y-y^2+\alpha x^2, \tag{36}$$

где $\beta>0, \alpha>0$. В данном случае $a=b=c=0$, $d=-\frac{1}{\alpha}$. Следовательно, $\Delta=0$, $\delta=-\frac{1}{\alpha}\neq 0$, и тип состояния равновесия O (0, 0) определяется с помощью теоремы 65, после того как данная система будет приведена к виду (11) § 21. Для этого здесь достаточно ввести новый параметр $\bar{t}=-\frac{1}{\alpha}t$, тогда система (35) примет вид

$$\frac{dx}{d\bar{t}}=-\alpha\beta x^2+\alpha xy, \qquad \frac{dy}{d\bar{t}}=y+\alpha y^2-\alpha^2x^2. \tag{37}$$

Находим теперь функцию $y=\varphi(x)$, т. е. решение уравнения $y+\alpha y^2-\alpha^2x^2=0$. Ищем решение в виде ряда

$$\varphi(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots$$

Нетрудно видеть, что $c_1=c_3=0$, $c_2=\alpha^2$, $c_4=-\alpha^5$, ... Тогда

$$\varphi(x)=\alpha^2x^2-\alpha^5x^4+\ldots, \qquad \psi(x)=P_2(x, \varphi(x))=-\alpha\beta x^2+\alpha^3x^3+\ldots$$

Получаем $m=2$ и $\Delta_m=-\alpha\beta<0$. Согласно теореме 65 состояние равновесия системы (37), а следовательно, и системы (36) является *седло — узлом*, внутри гиперболических секторов которого заключен отрезок положительной полуоси x.

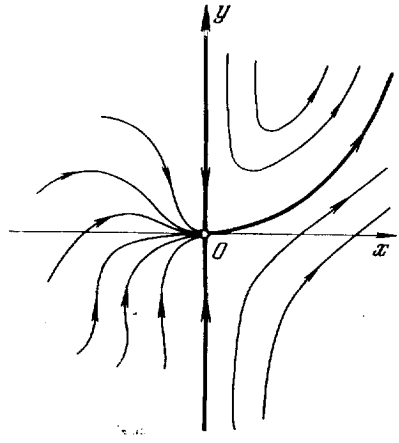


Рис. 247.

Таким образом, топологическая структура состояния равновесия определена. Для того чтобы представить себе расположение траекторий в окрестности состояния равновесия более полно, отметим некоторые дополнительные факты для системы (36). Ось y состоит из траекторий системы (36), а все остальные траектории, стремящиеся к точке O, подходят к ней в направлениях $\theta=0$ и $\theta=\pi$ (см. п. 2 § 21). Полагая $x=0$ во втором из уравнений (36), убеждаемся в том, что полуоси оси y являются положительными полутраекториями. Полагаем $y=0$ в уравнениях (36), убеждаемся в том, что сепаратриса гиперболических секторов расположена выше оси x. Из всего сказанного получаем расположение

траекторий в окрестности состояния равновесия O системы (36), указанное на рис. 247 (при этом следует иметь в виду замену $\bar{t} = -\frac{1}{\alpha}t$).

2. $$\frac{dx}{dt} = x(-y + y^2 + 3xy), \quad \frac{dy}{dt} = 3x + y - x^2 + y^3 + 3xy^2. \tag{38}$$

Здесь $a = b = 0$, $c = 3$, $d = 1$. Следовательно, $\Delta = 0$, $\delta = 1 \neq 0$ и тип состояния равновесия определяется теоремой 65. Для того чтобы привести систему (38) к виду (11) § 21, применяем согласно п. 2 § 21 преобразование

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = 3x + y.$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= -\bar{x}\bar{y} + 3\bar{x}^2 - 3\bar{x}^2\bar{y} + \bar{x}\bar{y}^2, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \bar{y} + 8\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} - 3\bar{x}\bar{y}^2 + \bar{y}^3. \end{aligned} \tag{39}$$

Решая уравнение $\bar{y} + 8\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} - 3\bar{x}\bar{y}^2 + \bar{y}^3 = 0$, находим

$$\varphi(\bar{x}) = -8\bar{x}^2 - 24\bar{x}^3 - \ldots,$$

$$\psi(\bar{x}) = \bar{P}_2(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 3\bar{x}^2 + 8\bar{x}^3 + \ldots$$

Здесь $m = 2$, $\Delta_m = 3 > 0$ и согласно теореме 65 точка $\bar{O}(0, 0)$ системы (38), а следовательно, и точка $O(0, 0)$ системы (38) является *седло—узлом*.

Дополнительно заметим, что ось $\bar{y}$ состоит из траекторий системы (39), гиперболические секторы согласно теореме 65 расположены слева от оси $\bar{y}$ и сепаратриса, разделяющая эти секторы, лежит ниже оси $\bar{x}$ (это нетрудно видеть, рассматривая направление поля на оси $\bar{x}$). Далее, так же, как в примере 1, заключаем, что все траектории, стремящиеся к точке $\bar{O}(0, 0)$, кроме полуосей оси $\bar{y}$, стремятся в направлении $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, т. е. касаются оси $\bar{x}$ в точке $\bar{O}(0, 0)$.

Для того чтобы получить расположение траекторий в окрестности точки $O(0, 0)$ системы (38), примем во внимание сделанное линейное преобразование $\bar{x} = x$, $\bar{y} = 3x + y$. Таким образом, все траектории (кроме траекторий, совпадающих с полуосями оси y), стремящиеся к состоянию равновесия O системы (37), стремятся к нему, касаясь прямой $y = -3x$, т. е. в направлениях $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\pi + \operatorname{arctg}(-3)$ (рис. 248).

3. $$\frac{dx}{dt} = y - \frac{1}{2}xy - 3x^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y\left(x + \frac{3}{2}y\right). \tag{40}$$

В данном случае $a = c = d = 0$, $b = 1$. Следовательно, $\Delta = 0$, $\delta = 0$ и тип состояния равновесия определяется теоремой 66 или теоремой 67.

Система (40) имеет вид (5). Здесь

$$P_2(x, y) = -\frac{1}{2}xy - 3x^2, \qquad Q_2(x, y) = -xy - \frac{3}{2}y^2.$$

Решение уравнения $y + P_2(x, y) = 0$ имеет вид

$$\varphi(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \ldots$$

Тогда

$$\psi(x)=Q_2(x,\ \varphi(x))=-3x^3-15x^4-\ldots,$$

$$\delta(x)=P'_{2x}(x,\ \varphi(x))+Q'_{2y}(x,\ \varphi(x))=-7x-\frac{21}{2}x^2-\ldots$$

Следовательно, $k=2m+1=3$, $m=1$, $a_k=-3<0$, $n=1$, $b_n=-7<0$ и $\lambda=b_n^2+4(m+1)a_{2m+1}=25>0$. Так как здесь k — нечетное число, $a_k<0$, $m=n$, $\lambda>0$ и n — нечетное число, то в силу теоремы 66 состояние равновесия O системы (40) является *состоянием равновесия с эллиптической областью*. Топологическая структура состояния равновесия таким образом установлена. Легко видеть, что ось x является интегральной кривой системы (40). Проводя дополнительное рассмотрение с помощью преобразования $x=x$, $y=\eta x$, можно показать, что

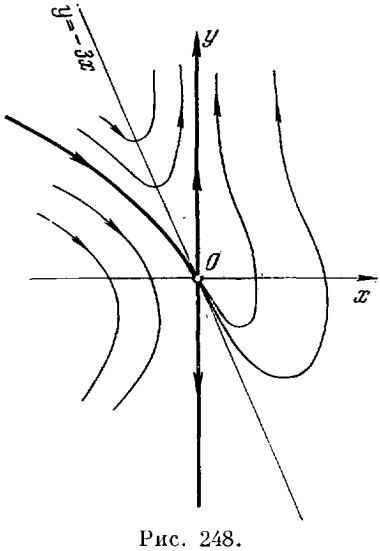


Рис. 248.

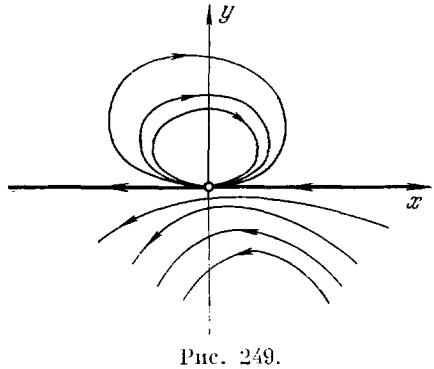


Рис. 249.

полуоси оси x являются сепаратрисами. Состояние равновесия изображено на рис. 249.

4. $$\frac{dx}{dt}=x(2y+x),\qquad \frac{dy}{dt}=x+(2+\beta)xy+y^2. \tag{41}$$

Здесь $a=b=0$, $c=1$, $d=0$. Следовательно, $\Delta=0$, $\delta=0$ и тип состояния равновесия определяется теоремой 66 или теоремой 67. Для того чтобы привести данную систему к виду (5), сделаем согласно п. 1 § 22 преобразование $\bar{x}=y$, $\bar{y}=x$. Тогда система (41) примет вид

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{y}+(2+\beta)\bar{x}\bar{y}+\bar{x}^2,\qquad \frac{d\bar{y}}{dt}=2\bar{x}\bar{y}+\bar{y}^2. \tag{42}$$

Нетрудно видеть, что здесь

$$\varphi(\bar{x})=-\bar{x}^2+\ldots,\qquad \psi(\bar{x})=-2\bar{x}^3+\ldots,\qquad \delta(\bar{x})=4\bar{x}-(4+\beta)\bar{x}^2+\ldots$$

Тогда $k=2m+1=3$, $m=1$, $a_k=-2<0$, $n=1$, $b_n=4>0$, n — нечетное число и $\lambda=0$. При этих условиях согласно теореме 66 заключаем, что точка $\bar{O}$ (0, 0) является состоянием равновесия с эллиптической областью системы (42).

5. $$\frac{dx}{dt}=y+y^2-x^3,\qquad \frac{dy}{dt}=3x^2y+y^3-3x^5. \tag{43}$$

Это — система вида (5). Нетрудно видеть, что

$$\varphi(x) = x^3 - x^6 + 2x^9 + \ldots, \quad \psi(x) = -3x^8 + x^9 + \ldots, \quad \sigma(x) = 3x^6 - 18x^9 + \ldots$$

Здесь $k = 2m$ — четное число, и, следовательно, тип состояния равновесия определяется теоремой 67. Так как $m = 4$, $n = 6$, то $n > m$ и точка $O(0, 0)$ является вырожденным состоянием равновесия. Принимая во внимание, что $a_{2m} = -3$, а также принимая во внимание замечание п. 3, нетрудно убедиться в том, что расположение траекторий в окрестности состояния равновесия будет таким, как это показано на рис. 250.

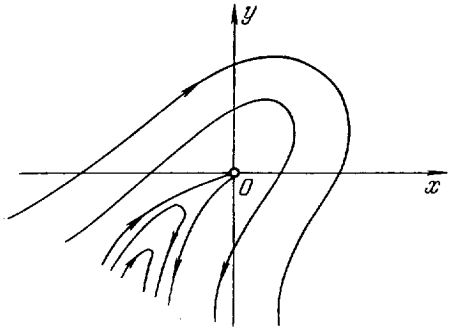


Рис. 250.

Данный пример показывает, что для определения младших членов разложения по степеням x функций $\psi(x)$ и $\sigma(x)$ не достаточно знать только младший член разложения по степеням x функции $\varphi(x)$.

Подробное решение примеров 6 и 7 предоставляем сделать читателю.

6. $\dfrac{dx}{dt} = \left(y + \dfrac{\lambda}{n-1}\right)x, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + \dfrac{1}{1-n}y^2,$

где $n > 1$, $\lambda > 0$.

Состояние равновесия $O(0, 0)$ является седло — узлом.

7. $\dfrac{dx}{dt} = y + \dfrac{n}{1-n}x^2 + \dfrac{\lambda}{1-n}xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = y\left(\dfrac{\lambda}{n-1}y - x\right),$

где $n > 1$, $\lambda > 0$. Состояние равновесия $O(0, 0)$ является состоянием равновесия с эллиптической областью.

ГЛАВА X

СХЕМА ПРЕДЕЛЬНОГО КОНТИНУУМА И ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ G^*

Введение

Настоящая глава непосредственно примыкает по своему содержанию к главе VIII. Она посвящена исследованию свойств ω- и α-предельных континуумов, а также континуумов, являющихся граничными для ячеек, заполненных замкнутыми траекториями, и затем описанию *схем* таких континуумов. Кроме того, в настоящей главе рассматривается также схема границы области G^* в предположении, что эта граница *нормальна*. Полные схемы предельных континуумов и схема границы области являются наряду с полными схемами состояний равновесия основными элементами того описания расположения особых траекторий (с указанием среди них предельных) —«схемы динамической системы», которое, как мы увидим в следующей главе, полностью определяет топологическую структуру разбиения на траектории.

Глава X состоит из четырех параграфов. В § 23 рассматриваются ω- и α-предельные континуумы и континуумы, являющиеся граничными для ячеек, заполненных замкнутыми траекториями. В случае, когда эти континуумы не являются состояниями равновесия (случай, когда они являются состояниями равновесия, очевидно, может быть непосредственно рассмотрен на основании результатов главы VIII), они названы *нуль-предельными континуумами*.

В § 24 вводится понятие локальной схемы таких континуумов. В локальной схеме данного предельного континуума указывается, какие из особых траекторий рассматриваемой динамической системы составляют этот континуум, и описывается их взаимное расположение.

В § 25 рассматривается полная («глобальная») схема предельного континуума. В полной схеме дается описание расположения предельного континуума на плоскости, состоящее в описании взаимного расположения тех простых замкнутых кривых, имеющих общими точками состояния равновесия, которые образованы входящими в континуум траекториями, и, кроме того, указываются все стремящиеся к нему особые траектории рассматриваемой динамической системы.

В § 26 рассматривается схема границы области $G^* \subset G$.

В главе VIII было указано различие, существующее в трудности установления локальной и полной схемы состояния равновесия.

Локальная схема состояния равновесия может быть установлена путем локального рассмотрения его окрестности (рассмотрения в «малом»). В настоящее время для этого существуют довольно общие методы (в частности, некоторые из этих методов изложены и в главе IV и главе IX).

Для установления полной схемы состояния равновесия необходимы уже сведения о поведении особых траекторий в целом («в большом»).

В случае предельных континуумов, очевидно, уже для установления локальных схем нужны сведения о поведении особых траекторий в целом, в частности сведения о предельных циклах. Как мы видели, в настоящее время для этого существуют лишь некоторые частные приемы и отсутствуют общие методы. Таким образом, фактическое установление локальной схемы предельного континуума — это вопрос совсем другого порядка трудности, чем вопрос установления локальной схемы состояния равновесия.

§ 23. Свойства предельных континуумов и континуумов, входящих в границы ячеек, заполненных замкнутыми траекториями

1. Свойства ω- и α-предельных континуумов, не являющихся состоянием равновесия. Мы будем рассматривать ω- или α-предельные континуумы незамкнутой траектории, не являющиеся состоянием равновесия. Так как по предположению граница Γ области $\bar{G}^*$ (в которой рассматривается данная динамическая система) нормальна, то никакой предельный континуум не может иметь общих точек с границей Γ (см. свойство 2) нормальной границы п. 2 § 16).

В силу предложений (п. 6 § 4) предельный континуум незамкнутой полутраектории, не являющейся состоянием равновесия, либо является замкнутой траекторией, либо состоит из состояния равновесия и целых орбитно-неустойчивых траекторий, стремящихся к состояниям равновесия и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ (т. е. сепаратрис, см. § 15). Предельный континуум положительной полутраектории L^+ или ω-предельный континуум будем обозначать через K_ω. Предельный континуум отрицательной полутраектории L^- или α-предельный континуум будем обозначать через K_α.

В дальнейшем для определенности всегда будем рассматривать предельный континуум K_ω положительной полутраектории. Все результаты, касающиеся континуума K_ω, конечно, справедливы с надлежащими совершенно очевидными изменениями и для предельного континуума K_α отрицательной полутраектории. Поэтому для континуумов K_α мы эти результаты выводить и даже формулировать не будем.

Напомним некоторые свойства предельных траекторий, установленные в п. 5 § 4. Пусть L_0 — отличная от состояния равновесия траектория, предельная для полутраектории L^+, входящая, следовательно, в состав некоторого континуума K_ω. Пусть M_0 — точка этой траектории и l_0 — проведенная через точку M_0 и содержащая ее внутри дуга без контакта. В силу следствия 1 из леммы 2 § 3 п. 4 на дуге l_0 кроме точки M_0 не может лежать больше уже ни одной точки траектории L_0. В силу следствия 2 из той же леммы точки пересечения полутраектории L^+ с дугой l_0 расположены либо все на части этой дуги, лежащей по положительную сторону L_0, либо все на части этой дуги, лежащей по отрицательную сторону L_0.

Пусть для определенности все общие с l_0 точки полутраектории L^+ расположены на части l_0, лежащей по положительную сторону L_0. Если M — какая-нибудь отличная от M_0 точка траектории L_0 и l — дуга без контакта, проведенная через точку M, содержащая точку M внутри и кроме точки M не имеющая общих точек с траекторией L_0, то все точки пересечения полутраектории L^+ с дугой без контакта l будут также расположены на части этой дуги, лежащей по положительную сторону траектории L_0.

Согласно определению, данному в п. 5 § 4, в этом случае предельная траектория L_0 называется *предельной для полутраектории* L^+ (или ω-предельной для траектории L) *с положительной стороны.*

Совершенно аналогично можно говорить о траектории, являющейся предельной для полутраектории L^+ (L^-) (или ω (α)-предельной для траектории L) с отрицательной стороны.

Переходя к исследованию свойств предельных континуумов, напомним, что в случае, когда предельный континуум не содержит состояний равновесия, он состоит из одной замкнутой траектории (см. теорему 14 главы II).

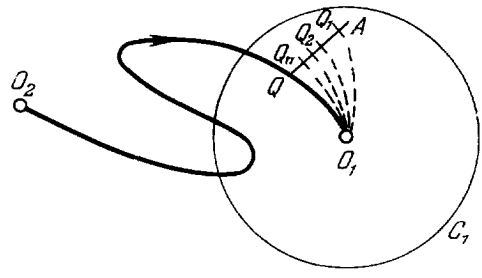


Рис. 251.

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда в состав континуума K_ω входит хотя бы одно состояние равновесия.

Лемма 1. *Пусть* K_ω — ω-*предельный континуум, не являющийся состоянием равновесия или замкнутой траекторией, и пусть* L_0 — *отличная от состояния равновесия траектория, входящая в состав* K_ω, ω-*предельная для полутраектории* L^+ *с положительной (отрицательной) стороны.*

Тогда: а) *траектория* L_0 ω- *и* α-*продолжаема с положительной (отрицательной) стороны*; б) ω- *и* α-*продолжения траектории* L_0 *с положительной (отрицательной) стороны также являются* ω-*предельными для* L^+ *траекториями с положительной (отрицательной) стороны.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что L_0 предельна для L^+ с положительной стороны. Траектория L_0 и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ стремится к состояниям равновесия. Пусть состояние равновесия, к которому она стремится при $t \to +\infty$, есть O_1, а состояние равновесия, к которому она стремится при $t \to -\infty$ — O_2 (в частности, O_1 и O_2 могут совпадать). Рассмотрим сначала состояние равновесия O_1.

Пусть C_1 — окружность с центром в точке O_1 столь малого радиуса, что внутри нее не лежит целиком ни одна орбитно-неустойчивая траектория, кроме точки O_1. Возьмем на L_0 точку Q, лежащую после последней (при возрастании t) общей точки траектории L_0 и окружности C_1. Проведем через точку Q дугу без контакта QA, расположенную целиком внутри C_1 и с положительной стороны траектории L_0 (рис. 251). Так как по условию траектория L_0 является ω-предельной для L^+ с положительной стороны, то на дуге QA лежит бесконечная последовательность точек полутраектории L^+, $\{Q_i\}$, стремящихся к точке Q, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t и расположенных на QA в порядке возрастания t.

Докажем сначала утверждение а).

Пусть траектория L_0 не имеет ω-продолжения с положительной стороны. Тогда все траектории, пересекающие некоторую часть QA дуги QA, не выходя из окружности C_1, стремятся при $t \to +\infty$ к точке O_1, больше уже не пересекая дугу QA. Но тогда на дуге QA не могла бы лежать последовательность $\{Q_i\}$. Это, очевидно, противоречит предположению. Совершенно так же, рассматривая состояние равновесия O_2, мы покажем, что L_0 α-продолжаема.

Докажем утверждение б). Пусть L_1 — траектория, являющаяся ω-продолжением траектории L_0 с положительной стороны. Возьмем на L_1 какую-нибудь точку P, лежащую после последней (при убывании t) общей точки с окружностью C_1. Проведем через точку P дугу без контакта PB, расположенную внутри окружности C с положительной стороны траектории L_1 (рис. 252). Так как на дуге QA лежит стремящаяся к точке Q и соответствующая неограниченно возрастающим значениям t последовательность точек полутраектории L^+, то (см. определение XIX) на дуге PB также лежит стремящаяся к точке P и соответствующая неограниченно возрастающим значениям t последовательность точек полутраектории L^+. А это значит, что точка P является ω-предельной для полутраектории L^+. Отсюда легко вытекает утверждение б). Лемма доказана.

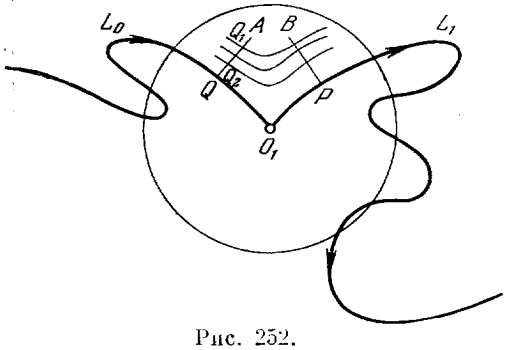


Рис. 252.

Предполагая по-прежнему, что континуум K_ω не является состоянием равновесия или замкнутой траекторией, докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 68 *). *Пусть одна из отличных от состояния равновесия траекторий континуума K_ω ω-предельна для L^+ с положительной (отрицательной) стороны. Тогда все входящие в K_ω отличные от состояния равновесия траектории являются продолжением одна другой с положительной (отрицательной) стороны, ω-предельны для L^+ с положительной стороны и могут быть перенумерованы так, что всякие две последовательные в этой нумерации траектории, а также последняя и первая траектории являются ω-продолжением друг друга с положительной (отрицательной) стороны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N — число отличных от состояний равновесия траекторий, входящих в состав континуума K_ω. Пусть L_1 — одна из этих полутраекторий, и пусть для определенности L_1 ω-предельна для полутраектории L^+ с положительной стороны.

Пусть O_1 — состояние равновесия, ω-предельное для траектории L_1. В силу предыдущей леммы траектория L_1 продолжаема с положительной стороны, и траектория L_2, являющаяся ее ω-продолжением, тоже ω-предельна для полутраектории L^+ с положительной стороны, т. е. L_2 входит в K_ω. Обозначим через O_2 состояние равновесия, ω-предельное для траектории L_2 (состояния равновесия O_1 и O_2, в частности, могут совпадать). Продолжая аналогичное рассуждение, мы получим последовательность из траекторий, входящих в континуум K_ω: $L_1, L_2, \ldots$, в которой каждая последующая является ω-продолжением предыдущей (с положительной стороны). Каждая траектория L_1 при $t \to +\infty$ стремится к состоянию равновесия O_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Так как число траекторий, входящих в континуум K_ω, конечно, в силу предположения о конечности числа особых траекторий, то существует наименьшее натуральное число R такое, что траектории $L_1, L_2, \ldots, L_R$ различны, а траектория L_{R+1} совпадает с одной из траекторий L_1, где $1 \leqslant i \leqslant R$. Но тогда непременно

*) Эта теорема вместе с предыдущей леммой представляет собой уточнение теоремы Бендиксона.

$i = 1$. В самом деле, если $i > 1$, то траектория L_i имеет, как легко видеть, своим α-продолжением с положительной стороны две различные траектории L_{i-1} и L_R, что не может быть. Таким образом, траектории L_1 и L_{R+1} совпадают, и мы получаем цепочку отличных друг от друга траекторий

$$L_1, L_2, \ldots, L_R, \tag{1}$$

ω-предельных для L^+ с положительной стороны и являющихся продолжениями одна другой в циклическом порядке (также с положительной стороны).

Предельные точки этих траекторий $O_1, O_2, \ldots, O_R$ могут быть различными или совпадать. Каждая точка O_i является ω-предельной для траектории L_i и α-предельной для траектории L_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, R$, и под L_{R+1} подразумевается траектория L_1). Обозначим через K'_ω замкнутое множество, составленное из всех точек траекторий (1) и точек O_i ($i = 1, 2, \ldots, R$).

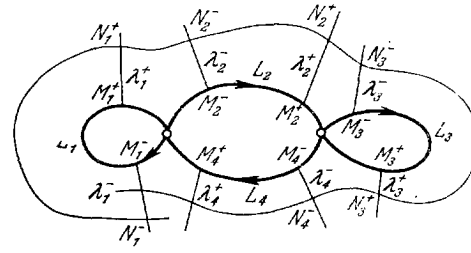


Рис. 253.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что множество K'_ω содержит все ω-предельные точки полутраектории L^+, так что K'_ω совпадает с K_ω и, следовательно, $R = N$.

Покажем сначала, что сколь бы малое $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, начиная с некоторого достаточно большого значения T, все точки полутраектории L^+, соответствующие значениям $t > T$, лежат в ε-окрестности K'_ω (ср. теорему о замкнутой предельной траектории § 4). Рассмотрим точку O_i и стремящиеся к ней траектории L_i и L_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, R$); $L_{R+1} \equiv L_1$. Так как L_{i+1} является ω-продолжением L_i с положительной стороны, то при любом $\varepsilon > 0$ существуют дуги без контакта λ_i^+ и λ_{i+1}^-, обладающие следующими свойствами (см. § 15): а) один из концов дуги λ_i^+ — M_i^+ — лежит на траектории L_i, а один из концов дуги λ_{i+1}^- — M_{i+1} — на траектории L_{i+1}; эти дуги не имеют общих точек и лежат по положительную сторону, соответственно, траекторий L_i и L_{i+1} (каждая из этих дуг кроме точек M_i^+ и M_{i+1}^-, соответственно, не имеет уже больше общих точек с континуумом K'_ω, см. следствие 1 из леммы 11 § 3); б) дуги λ_i^+ и λ_{i+1}^- целиком содержатся в $U_\varepsilon(O_i)$ и всякая траектория при $t = t_0$, пересекающая дугу λ_i^+ при некотором значении $T > t_0$, пересекает дугу λ_{i+1}^-, оставаясь при всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ в $U_\varepsilon(O_i)$ (рис. 253) *).

Рассмотрим дугу λ_1^-. При всяком заданном $\varepsilon > 0$ в силу свойства б) существует часть $M_R^+ N_R^+$ дуги λ_R^+ такая, что всякая траектория, пересекающая эту часть при некотором значении $t = t_0$ в точке, отличной от M_R^+, пересекает дугу λ_1^- при большем значении t, оставаясь при промежуточных значениях в окрестности $U_\varepsilon(O_R)$. Тогда существует часть $M_R^- N_R^-$ дуги λ_R^- такая, что пересекающие эту часть траектории при возрастании t пересекают дугу $M_R^+ N_R^+$, не выходя в промежутке между точками пересечения из ε-окрестности части $M_R^- N_R^-$ траектории L_R

*) При доказательстве этой теоремы, очевидно, можно обойтись проведением дуг без контакта только через одну точку каждой траектории L_i, а не через две, как в приведенном доказательстве. Мы рассматриваем по две дуги с концами на каждой траектории L_i ввиду того, что при таком построении можно непосредственно ссылаться на установленное выше предположение (лемму 6 § 18).

(и не пересекая дуг λ_R^- и λ_R^+). Продолжая аналогичное построение, мы получим последовательно дуги без контакта $M_{R-1}^+N_{R-1}^+$, $M_{R-1}^-N_{R-1}^-$, ..., $M_2^-N_2^-$, $M_2^+N_2^+$, являющиеся частями дуг λ_{R-1}^+, λ_{R-1}^- и т. д., и, наконец, дугу $M_1^-N_1^-$, являющуюся частью дуги λ_1^-. Дуга $M_1^-N_1^-$ по построению обладает, очевидно, следующими свойствами: каждая траектория, пересекающая эту дугу при $t = t_1$ в отличной от M_1^- точке, при некотором большем значении $t_2 > t_1$ пересекает дугу λ_1^- еще раз, не пересекая при всех значениях t между t_1 и t_2 уже больше эту дугу λ_1^- и оставаясь в ε-окрестности множества K'_ω.

Рассмотрим теперь полутраекторию L^+. Так как точка M_1^- является для траектории L^+ ω-предельной точкой (с положительной стороны), то дуга $M_1^-N_1^-$ имеет общие точки с полутраекторией L^+. Пусть P_1 одна из этих точек, соответствующая значению t_1 параметра t. На основании сказанного выше полутраектория L^+ пересекает дугу λ_1^- в некоторой точке P_2 при значении $t = t_2 > t_1$, причем вся дуга P_1P_2 полутраектории L^+ лежит в ε-окрестности множества K'_ω. Очевидно, точка P_2 лежит на дуге λ_1^- между точками P_1 и M_1^-. Но тогда точка P_2 сама принадлежит дуге $M_1^-N_1^-$ и к ней можно применить предыдущее рассуждение. Мы получим, таким образом, бесконечную последовательность точек P_1, P_2, P_3, . . . полутраектории L^+, соответствующих значениям t_1, t_2, . . . параметра t, причем каждая дуга P_nP_{n+1} полутраектории L^+ расположена в $U_\varepsilon(K'_\omega)$. Так как последовательность чисел $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то это значит, что вся часть полутраектории L^+, соответствующая значениям $t > t_1$, расположена в ε-окрестности множества K'_ω.

Отсюда следует, что у полутраектории L^+, кроме точек, принадлежащих K'_ω, нет никаких других предельных точек. Действительно, всякая не принадлежащая K'_ω точка Q находится на ненулевом расстоянии ϱ от K'_ω. Возьмем $\varepsilon < \frac{\varrho}{2}$. В силу предыдущего, начиная с некоторого T ($T = T(\varepsilon)$), вся часть полутраектории L^+, соответствующая значениям $t > T$, будет лежать в ε-окрестности K'_ω и, следовательно, в силу выбора ε на расстоянии, большем $\frac{\varrho}{2}$, от точки Q. Это, очевидно, означает, что никакая точка Q, не принадлежащая K'_ω, не может быть предельной для L^+, т. е. K'_ω и K_ω совпадают и теорема доказана.

Замечание. Предположим для определенности, что все траектории, входящие в континуум K_ω, являются предельными для L^+ с положительной стороны, и пусть l_0 — дуга без контакта, проведенная через точку M_0 какой-нибудь отличной от состояния равновесия траектории L_0, входящей в K_ω. Тогда в силу леммы 8 § 15 и леммы 9 § 16 континуум K_ω является ω-предельным не только для L^+, но и для *всех* траекторий, пересекающих достаточно малую часть M_0A дуги l_0, лежащую по положительную сторону L_0.

В случае, когда все входящие в континуум K_ω траектории являются ω-предельными для полутраектории L^+ с положительной стороны, мы будем говорить, что континуум K_ω *является ω-предельным с положительной стороны для полутраектории* L^+.

Мы будем говорить также, что данный континуум K_ω является *ω-предельным с положительной стороны, без упоминания о том, для какой полутраектории*, подразумевая под этим, что континуум K_ω является (в силу замечания к теореме 68) ω-предельным континуумом для всех траекторий, пересекающих дугу без контакта l, проведенную через точку

M_j любой входящей в K_ω траектории L_j (отличной от состояния равновесия) на достаточно малой части M_jA_j этой дуги l, лежащей по положительную сторону L_j.

В дальнейшем нам всегда придется рассматривать не просто континуум K_ω, а континуум K_ω, предельный с определенной стороны — положительной или отрицательной. В связи с этим введем следующие обозначения:

Под K_ω^+ (K_ω^-) мы будем подразумевать континуум, являющийся ω-предельным с положительной (отрицательной) стороны и рассматриваемый как ω-предельный только с этой стороны. Точно так же введем обозначения K_α^+ и K_α^-.

Если мы не хотим указывать точно, с какой именно стороны, с положительной или отрицательной, мы рассматриваем ω (или α)-предельный континуум K, но хотим подчеркнуть, что рассматриваем его как предельный только с одной определенной из этих двух сторон, то мы будем обозначать его через $K^{(\ )}$.

Эти обозначения вводятся из-за существования «двусторонних» континуумов, т. е. континуумов, являющихся ω- или α-предельными и с положительной, и с отрицательной стороны. Для таких континуумов, очевидно, имеют смысл оба обозначения K^+ и K^-.

2. Нуль-предельные континуумы и их свойства. Рассмотрим теперь континуум K_0, входящий в границу ячейки, заполненной замкнутыми траекториями. Такой континуум мы будем называть 0-предельным (нуль-предельным). В силу теоремы 50 всякая ячейка, заполненная замкнутыми траекториями, двусвязна, так что граница ее состоит из двух 0-предельных континуумов.

Предположим, что континуум K_0 не является одним состоянием равновесия (центром), и пусть L_0 — какая-нибудь траектория, входящая в него, отличная от состояния равновесия.

Лемма 2. а) *Пусть P — какая-нибудь точка траектории L_0 и l — дуга без контакта, содержащая точку P внутри, A_0 и B_0 — концы дуги l, расположенные соответственно с положительной и отрицательной стороны от L_0. Тогда все точки дуги l, принадлежащие данной ячейке w, расположены либо на части PA_0, либо на части PB_0 дуги l, и всегда можно выделить часть PA дуги PA_0 (соответственно часть PB дуги PB_0), все точки которой (кроме точки P) принадлежат ячейке w.*

б) *Если на какой-нибудь дуге без контакта, проведенной через точку траектории L_0, точки ячейки w лежат по положительную (отрицательную) сторону L_0, то на всякой дуге без контакта, проведенной через любую точку траектории L_0, точки ячейки w также лежат по положительную (отрицательную) сторону L_0.*

Доказательство. Докажем утверждение а).

Пусть A — какая-нибудь точка ячейки w, расположенная, например, на отрезке PA_0 дуги l. Покажем, что все точки части PA отрезка PA_0 принадлежат ячейке w. В самом деле, предположим, что это не так и что какая-нибудь внутренняя точка Q дуги PA не принадлежит w. Так как точка P является граничной точкой ячейки w, то внутри отрезка PQ дуги l непременно лежат точки ячейки w. Пусть R — одна из этих точек. Траектории L_A и L_R, проходящие соответственно через точки A и R, принадлежат ячейке w и, следовательно, являются замкнутыми траекториями, лежащими одна внутри другой и содержащими между собой точку Q, не принадлежащую ячейке w. А это противоречит теореме 49.

Утверждение б) непосредственно вытекает из замечания 1 к лемме 9 § 3 (рис. 45). Лемма доказана.

Если на всякой дуге без контакта, проведенной через точку траектории L_0, граничной для ячейки w, точки этой ячейки лежат по положительную (отрицательную) сторону L_0, то мы скажем, что траектория L_0 нуль-гранична для ячейки w с положительной (отрицательной) стороны.

Предположим сначала, что в континуум K_0 входит замкнутая траектория. В частности, эта замкнутая траектория может состоять из граничных и угловых дуг. Имеет место следующая теорема:

Теорема 69. *Если в континуум K_0 входит замкнутая траектория L_0, то эта замкнутая траектория исчерпывает весь континуум K_0.*

Доказательство. Проведем в какой-нибудь точке P замкнутой траектории L_0 дугу без контакта l. Предположим для определенности, что точки ячейки w лежат на этой дуге по положительную сторону траектории L_0. Тогда в силу леммы 2 мы можем считать, что *все* точки дуги l, лежащие по положительную сторону траектории L_0 кроме точки P, являются точками ячейки w.

В силу леммы 5 § 3 при заданном $\varepsilon > 0$ всегда можно выделить часть PA дуги l такую, чтобы все траектории, пересекающие эту часть в отличных от P точках, очевидно, являющиеся замкнутыми траекториями ячейки w, целиком лежали в ε-окрестности замкнутой траектории L_0. Пусть для определенности континуум K_0, а значит, и траектория L_0 лежат внутри замкнутых кривых рассматриваемой ячейки. Предположим, что существует точка Q континуума K_0, отличная от точек замкнутой траектории L_0 и, следовательно, находящаяся на ненулевом расстоянии ϱ от траектории L_0. Возьмем $\varepsilon < \frac{\varrho}{2}$. У всех траекторий, пересекающих дугу PA в точках, достаточно близких к P (но отличных от P), во всяком случае должны быть точки, лежащие в $U_\varepsilon(Q)$. Но в силу предыдущего при заданном $\varepsilon < \frac{\varrho}{2}$ все траектории, проходящие через точки достаточно малой части PA дуги l, целиком лежат в ε-окрестности L_0, и в силу выбора ε не могут иметь точек в $U_\varepsilon(Q)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Предположим теперь, что в состав K_0 входят как отличные от состояния равновесия траектории, так и состояния равновесия, так что K_0 не является замкнутой траекторией.

Лемма 3. *Пусть K_0 — 0-предельный континуум, не являющийся замкнутой траекторией, а L_0 — входящая в K_0 незамкнутая, отличная от состояния равновесия траектория, граничная для ячейки w с положительной (отрицательной) стороны. Тогда*: а) *траектория L_0 ω- и α-продолжаема с положительной (отрицательной) стороны*; б) *траектории, являющиеся ω- и α-продолжением траектории L_0 с положительной (отрицательной) стороны, также являются граничными для ячейки (с соответствующей стороны) и, следовательно, входят в K_0.*

Доказательство этой леммы полностью аналогично с очевидными изменениями доказательству леммы 1, и поэтому мы его не приводим.

Теорема 70. *Пусть одна из отличных от состояния равновесия траекторий континуума K_0 является граничной для ячейки w с положительной (отрицательной) стороны. Тогда все входящие в K_0, отличные от состояния равновесия траектории являются продолжением одна другой с положительной (отрицательной) стороны, граничны для ячейки w с положительной (отрицательной) стороны и могут быть перенумерованы так,*

что всякие две последовательные в этой нумерации траектории, а также последняя и первая траектории являются ω-продолжением друг друга с положительной (отрицательной) стороны.

Доказательство. Предположим, что L_1, L_2, . . ., L_N — все входящие в K_0 траектории, отличные от состояния равновесия. Проводя такое же рассуждение, как и в теореме 68, мы находим, что существует цепочка, состоящая из траекторий, входящих в континуум K_0, L_1, L_2, . . ., L_R ($R \leqslant N$), в которой каждая траектория L_1 имеет своим ω-продолжением с положительной стороны траекторию L_{i+1}, а траектория L_R — траекторию L_1, и все эти траектории являются граничными для ячейки w с положительной стороны.

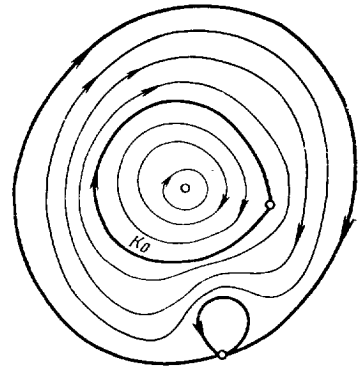


Рис. 254.

Обозначим через O_i ($i = 1, 2, \ldots, R$) состояние равновесия, к которому траектория L_i стремится при $t \to +\infty$, а траектория L_{i+1} при $t \to -\infty$ (состояния равновесия O_i могут частично или целиком совпадать) и через K_0' континуум, состоящий из траекторий L_i ($i = 1, 2, \ldots, R$) и состояний равновесия O_i.

Как и в теореме 68, для доказательства достаточно показать, что K_0' совпадает с K_0 и что, следовательно, $R = N$. Для этого при заданном $\varepsilon > 0$ проведем дуги без контакта λ_i^+ и λ_i^- с концами в точках траекторий L_i ($i = 1, 2, \ldots, R$), обладающие теми же свойствами а) и б), что и в теореме 68.

Рассмотрим дугу λ_1^-. Мы всегда можем предполагать, что все точки этой дуги кроме конца M_1^- принадлежат ячейке w. Внося незначительные изменения в рассуждения, проведенные в теореме 68, нетрудно видеть: что при заданном $\varepsilon > 0$ всегда можно выделить такую часть $M_1^- N_1^-$ дуги λ_1^-, чтобы все пересекающие эту часть траектории, очевидно являющиеся замкнутыми траекториями ячейки w, целиком лежали в ε-окрестности континуума K_0'.

Предположим, кроме того, для определенности, что континуум K_0' лежит внутри замкнутых траекторий рассматриваемой ячейки w. Если континуум K_0' отличен от континуума K_0, то должна существовать граничная для ячейки w точка Q, лежащая внутри всех замкнутых траекторий этой ячейки и находящаяся на ненулевом расстоянии от континуума K_0'. Рассуждая далее совершенно так же, как и при доказательстве теоремы 68, нетрудно убедиться в том, что K_0 совпадает с K_0', и, таким образом, теорема доказана.

Когда точки траекторий ячейки w, заполненной замкнутыми траекториями, лежат на дуге без контакта, проведенной через точку, принадлежащей K_0 траектории L_i (отличной от состояния равновесия), по положительную сторону этой траектории, то мы будем говорить, что континуум K_0 является граничным для ячейки w с положительной стороны или 0-предельным с положительной стороны, и обозначать его через K_0^+.

Мы будем также иногда говорить, что K_0^+ является 0-предельным континуумом для траектории L, подразумевая под этим, что L принадлежит ячейке, для которой K_0^+ является граничным континуумом. Совершенно аналогично мы будем говорить о континууме K_0, являющемся 0-предельным с отрицательной стороны, и обозначать его через K_0^-.

В том случае, когда сторона, с которой рассматриваемый континуум, являющийся 0-предельным, не указывается, мы будем так же, как и в случае ω- и α-предельных континуумов, пользоваться обозначением $K_0^{(\ )}$. В частности, континуум K_0 может являться как 0-предельным, с положительной стороны, так и 0-предельным с отрицательной стороны (но, конечно, для различных областей). В этом случае мы будем рассматривать его дважды, как континуум K_0^+ и как континуум K_0^- (рис. 254).

3. Теорема о континууме, состоящем из особых траекторий, являющихся продолжением одна другой. Теоремы 68 и 70 устанавливают, что каждый из континуумов K_ω, K_α и K_0 в случае, когда он не является состоянием равновесия или замкнутой траекторией, имеет следующую структуру: а) он состоит из конечного числа незамкнутых траекторий, стремящихся к состояниям равновесия и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, а также из этих состояний равновесия; б) эти незамкнутые траектории могут быть перенумерованы таким образом, что каждая последующая в этой нумерации траектория является ω-продолжением предыдущей, а первая — ω-продолжением последней с одной и той же, например, положительной (отрицательной) стороны.

Имеет место следующая теорема, в известном смысле обратная теоремам 68 и 70:

Теорема 71. *Всякий континуум K, обладающий структурой, описанной условиями* а) *и* б), *является* ω-, α- *или* 0-*предельным континуумом с положительной* (*отрицательной*) *стороны.*

Доказательство. Предположим для определенности, что отличные от состояний равновесия траектории, входящие в состав континуума K, L_1, L_2, . . ., L_N являются ω-продолжением одна другой с положительной стороны. При этом мы считаем их перенумерованными так, что каждая траектория L_i, при $t \to +\infty$ стремящаяся к состоянию равновесия O_i, имеет своим продолжением траекторию L_{i+1}, очевидно, стремящуюся к тому же состоянию равновесия при $t \to -\infty$ ($i = 1, 2, \ldots$ . . ., N; $L_{N+1} \equiv L_1$). Некоторые состояния равновесия O_i или даже все могут совпадать.

Очевидно, все траектории L_i являются особыми (орбитно-неустойчивыми), и расстояние ϱ между континуумом K и границей области G^*, в которой рассматривается динамическая система (в силу того, что эта граница нормальна), отлично от нуля. Пусть $\varepsilon < \frac{\varrho}{2}$ — такое положительное число, что $U_\varepsilon(K)$ не имеет общих точек с границей Γ и не содержит целиком ни одной особой траектории кроме траекторий, входящих в континуум K. При выбранном $\varepsilon > 0$ рассмотрим дуги λ_1^- и λ_1^+, обладающие теми же свойствами, что и в теореме 68. В силу выбора ε на дуге λ_1^- кроме ее конца M_1^-, являющегося точкой траектории L_1 континуума K, не лежит уже больше ни одной точки особой траектории, целиком лежащей в $U_\varepsilon(K)$.

Как и в теореме 68, выделим на дуге λ_1^- часть $M_1^-N_1^-$, такую, чтобы всякая траектория, пересекающая эту часть при некотором значении $t_1 > t_0$, не выходя при значениях t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, из ε-окрестности континуума K, пересекала еще раз дугу λ_1^-. Пусть, в частности, N_1^* — точка, в которой еще раз пересекает дугу λ_1^- траектория L^*, проходящая через точку N_1^-.

Наоборот, всякая траектория при $t = t_1'$, пересекающая часть $M_1^-N_1^*$ дуги λ_1^-, непременно пересечет эту дугу при меньшем, чем t_1', значении t_2' ($t_2' < t_1'$), не выходя при значениях t, $t_1' \geqslant t \geqslant t_2'$, из ε-окрестности

континуума K. Рассмотрим все возможности, которые могут здесь представиться.

1) Точка N_1^* отлична от точки N_1^- и лежит на дуге λ_1^- между точками N_1^- и M_1^-. Траектория L^* не замкнута и при некотором значении $t_2 > t_1$ пересечет дугу λ_1^- в точке N_2^*, очевидно лежащей между точками N_1^* и M_1^-. Продолжая аналогичное рассуждение, убедимся в существовании на дуге λ_1^- бесконечной последовательности точек $\{N_i^*\}$ траектории L^*, соответствующих монотонно-возрастающим значениям $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ Нетрудно видеть, что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а точка N_k^* лежит на дуге $M_1^- N_1^-$ между M_1^- и N_{k-1}^*. Так как каждая дуга $N_k^* N_{k+1}^*$ траектории L^* лежит в $U_\varepsilon(K)$, то отсюда сразу следует, что положительная полутраектория L^+, выделенная из L^* и начинающаяся в точке N_1^-, целиком расположена в $U_\varepsilon(K)$. Кроме того, в силу следствия из леммы 2 § 4 последовательность $\{N_i^*\}$ имеет единственную точку сгущения, и эта точка сгущения, являющаяся предельной точкой полутраектории L^*, должна быть точкой особой траектории, целиком лежащей в $U_\varepsilon(K)$. Но по выбору ε на дуге λ_1^- кроме точки M_1^- не лежит больше ни одной точки особой траектории, целиком лежащей в $U_\varepsilon(K)$. Следовательно, точкой сгущения последовательности $\{N_i^*\}$ может быть только точка M_1^-. Это, очевидно, означает, что траектория L^*, а следовательно (см. теорему 68), и весь континуум K являются ω-предельным для траектории L^*, а также для всех траекторий, пересекающих часть дуги λ_1^-, лежащей по положительную сторону траектории L_1. Таким образом, континуум K является ω-предельным континуумом с положительной стороны.

2) Точка N_1^* отлична от точки N_1^-, и при этом точка N_1^- лежит между точкой N_1^* и M_1^-. При этом рассуждением, полностью аналогичным проведенному в случае 1, нетрудно показать, что континуум K является α-предельным континуумом с положительной стороны.

3) Точка N_1^* совпадает с точкой N_1^-. В этом случае траектория L^* замкнута. Нетрудно видеть, что тогда все траектории, пересекающие часть $M_1^- N_1^-$ дуги λ_1^-, тоже замкнуты. Действительно, предположим, что существуют как отличные от M_1^- точки части $M_1^- N_1^-$, через которые проходят замкнутые траектории, так и точки, через которые проходят незамкнутые траектории. Так как замкнутые и незамкнутые траектории заведомо принадлежат различным ячейкам, то на дуге $M_1^- N_1^-$ должна находиться точка особой траектории, отличная от точки M_1^-. А это невозможно по самому выбору дуги λ_1^-.

Таким образом, все траектории, проходящие через точки части $M_1^- N_1^-$ дуги λ_1^-, замкнуты и принадлежат одной и той же ячейке w. Точка M_1^- траектории L_1 является граничной для этой ячейки. Следовательно, траектория L_1, а также весь континуум K (см. теорему 70) являются граничным континуумом для ячейки w и при этом с положительной стороны. Теорема доказана.

§ 24. Локальная схема предельного континуума и каноническая окрестность

1. ω (α)-перечисление ω-, α- и 0-предельных континуумов. Пусть $K^{(\cdot)}$ — континуум, не являющийся состоянием равновесия и являющийся ω-, α- или 0-предельным с положительной стороны. Пусть в случае, когда в K содержится хотя бы одно состояние равновесия входящие в этот континуум траектории выписаны в виде последовательности

$$L_1, O_{i_1}, L_2, O_{i_2}, \ldots, L_N, O_{i_N},$$

в которой: а) каждая траектория L_{k+1} является ω-продолжением траектории L_k ($k = 1, 2, \ldots, N$, $L_{N+1} \equiv L_1$) с положительной (отрицательной) стороны; б) каждое состояние равновесия O_i является ω-предельным для траектории L_k и α-предельным для траектории L_{i+1} (при этом некоторые

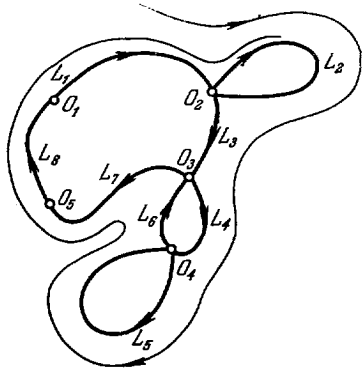


Рис. 255.

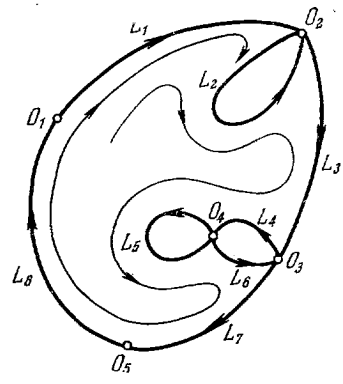


Рис. 256.

состояния равновесия или даже все могут совпадать, т. е. может быть, что $O_k \equiv O_m$ при $k \neq m$).

Мы будем называть такую последовательность ω-*перечислением континуума* K. Это перечисление определяется с точностью до циклической перестановки m символов.

Аналогично может быть определено α-перечисление континуума K. Очевидно, ω-перечисление получается из α-перечисления заменой порядка символов на противоположный. В случае, когда континуум K является замкнутой траекторией L_0, будем считать его ω-перечислением, совпадающим с α-перечислением, выписанную траекторию L_0. В дальнейшем для определенности всегда рассматривается ω-перечисление континуума K.

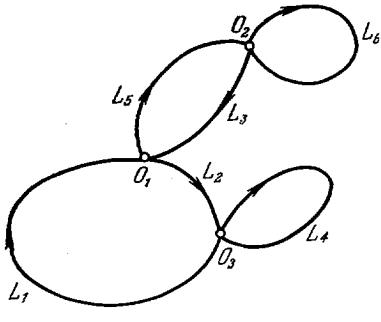


Рис. 257.

Как уже было указано, в силу условия 3), наложенного на нормальную границу, ω- и α-предельный континуум K не может иметь общих точек с границей. Однако 0-предельный континуум может иметь общие точки с границей.

Нетрудно видеть, что в этом случае 0-предельный континуум либо является замкнутой (орбитно-устойчивой) траекторией, составляющей один из граничных для области $\overline{G}^*$ континуумов, либо является одной замкнутой (орбитно-устойчивой) траекторией (целиком лежащей в $\overline{G}^*$), состоящей из граничных и угловых дуг. В первом случае ω-перечисление такого 0-предельного континуума заключается в указании замкнутой траектории L_0; во втором случае ω-перечислением континуума будем называть перечисление в ω-направлении (т. е. в направлении возрастания t) входящих в него угловых и граничных дуг, так что в этом случае ω-перечисление имеет вид

$$l_1, \hat{l}_2, l_3, \hat{l}_4, \ldots \qquad (1)$$

Приведем простые примеры.

Пример 1. ω-предельный континуум K, представленный на рис. 255, имеет следующее ω-перечисление:

$$\omega\,|\,O_1,\ L_1,\ O_2,\ L_2,\ O_2,\ L_3,\ O_3,\ L_4,\ O_4,\ L_5,\ O_4,\ L_6,\ O_3,\ L_7,\ O_5,\ L_8.$$

Отметим, что в точности такое же ω-перечисление имеет ω-предельный континуум, представленный на рис. 256. В этом примере входящие в континуум траектории перенумерованы в порядке их ω-перечисления.

Пример 2. ω-предельный континуум при данной на рис. 257 нумерации траекторий имеет ω-перечисление

$$\omega\,|\,L_1,\ O_1,\ L_5,\ O_2,\ L_6,\ O_2,\ L_3,\ O_1,\ L_2,\ O_3,\ L_4,\ O_3.$$

(Здесь нумерация траекторий дана не в порядке ω-перечисления.)

2. Тождественность перечислений двух предельных континуумов. Пусть $K^{()}$ и $K'^{()}$ — два ω (или два α, или два 0)-предельных континуума.

Пусть

$$O_1,\ O_2,\ \ldots,\ O_n, \qquad \text{(O)}$$

$$L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_N \qquad \text{(L)}$$

— состояния равновесия и траектории, отличные от состояний равновесия, входящие в состав континуума $K^{()}$,

$$O'_1,\ O'_2,\ \ldots,\ O'_n, \qquad \text{(O')}$$

$$L'_1,\ L'_2,\ \ldots,\ L'_N \qquad \text{(L')}$$

— состояния равновесия и траектории, отличные от состояний равновесия, входящие в состав континуума $K'^{()}$.

Предположим, что даны ω-перечисления континуумов $K^{()}$ и $K'^{()}$:

$$L_{j_1},\ O_{i_1},\ L_{j_2},\ O_{i_2},\ \ldots,$$
$$L'_{j'_1},\ O'_{i'_1},\ L'_{j'_2},\ O'_{i'_2},\ \ldots$$

Мы скажем, что ω-перечисления континуумов $K^{()}$ и $K'^{()}$ тождественны, если между состояниями равновесия (O) и (O') и траекториями (L) и (L'), входящими в эти континуумы, может быть установлено взаимно однозначное соответствие, при котором: а) всяким двум последовательным в ω-перечислении континуума $K^{()}$ траекториям соответствуют две последовательные в ω-перечислении континуума $K'^{()}$ траектории; б) всяким двум совпадающим в ω-перечислении континуума $K^{()}$ состояниям равновесия (O) соответствуют два совпадающие в ω-перечислении континуума $K'^{()}$ состояния равновесия (O').

Таким образом, если ω-перечисления континуумов $K^{()}$ и $K'^{()}$ тождественны, то, очевидно, $n = n'$, $N = N'$ и при надлежащей нумерации траекторий, входящих в состав $K'^{()}$ ω-перечисление континуума $K'^{()}$ отличается от ω-перечисления континуума $K^{()}$ только штрихами в обозначениях траекторий. Имеет место лемма, элементарное доказательство которой мы опускаем.

Лемма 1. *Если ω-перечисления двух предельных континуумов $K^{()}$ и $K'^{()}$ тождественны, то существует топологическое отображение этих континуумов друг на друга, при котором входящие в них траектории отображаются друг на друга и направление по t сохраняется.*

3. «Односторонняя» каноническая окрестность предельного континуума. Рассмотрим отличный от состояния равновесия ω-предельный континуум, причем для определенности предположим, что он является ω-предельным с положительной стороны. Пусть K^+ — этот континуум. Проведем через какую-нибудь точку P какой-нибудь отличной от состояния равновесия траектории L_1, входящей в состав континуума K^+, дугу без контакта l, содержащую точку P внутри (кроме точки P дуга без контакта l не может иметь общих точек с континуумом K, см. лемму 2, следствие 1 § 3).

Лемма 2. *Через всякую достаточно близкую к P точку дуги l, лежащую по положительную сторону траектории L_1, может быть проведен цикл без контакта C и при этом: 1) существует одна и только одна область, граница которой состоит из цикла без контакта C и континуума K^+; 2) через все точки этой области проходят траектории, которые при $t \to +\infty$ стремятся к континууму K^+, а при убывании t выходят из этой области и, следовательно, пересекают цикл без контакта C; 3) всякая полутраектория, имеющая K^+ своим ω-предельным континуумом, пересекает цикл без контакта C.*

Доказательство. Для всякой траектории L, пересекающей дугу l в точке, достаточно близкой к точке P и лежащей по положительную сторону траектории L_0 (которой принадлежит точка P), континуум K является ω-предельным с положительной стороны. Поэтому на дуге l, по положительную сторону L_0, лежит бесконечная последовательность точек траектории L—$\{P_i\}$, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t и стремящихся к точке P. Как и в § 3, обозначим через C_i простую замкнутую кривую, составленную из витка P_iP_{i+1} траектории L в части P_iP_{i+1} дуги без контакта l. В силу леммы 8 § 15, начиная с некоторого достаточно большого i ($i > J$), кривые C_i лежат одна внутри (вне) другой (если не считать их попарно общих точек) и содержат внутри (вне) континуум K^+. Предположим для определенности, что континуум K^+ лежит внутри кривых C_i.

В силу леммы 17 § 3 при всяком $i > J$ через точку P_{i+1} может быть проведен цикл без контакта $C^{(i)}$, лежащий между кривыми C_i и C_{i+1} (т. е. все отличные от P_{i+1} точки цикла $C^{(i)}$ лежат внутри кривой C_i, а все отличные от P_{i+1} точки кривой C_{i+1} лежат внутри цикла $C^{(i)}$). Очевидно при этом, что роль точки P_{i+1} может играть любая достаточно близкая к P точка дуги l, лежащая по положительную сторону траектории L_0 *). Пусть γ_i — область, граница которой состоит из кривой C_i и континуума K^+, не содержащая внутри ни одной особой траектории целиком. Цикл без контакта $C^{(i)}$, проведенный через точку P_{i+1}, делит эту область на две области, и граница одной из этих областей состоит из цикла без контакта $C^{(i)}$ и континуума K^+. Обозначим эту область через γ_i'. В силу леммы 10 § 16 при достаточно большом i все траектории, проходящие через точки области γ_i, а значит, и через все точки области γ_i', имеют континуум K^+ своим ω-предельным континуумом с положительной стороны.

Кроме того, так как по самому определению области γ_i все траектории, проходящие через ее точки при убывании t, из нее выходят, то, очевидно, все траектории, проходящие через точки области γ_i', также заведомо выходят из этой области, пересекая цикл без контакта $C^{(i)}$ (так как пересечь K^+ они не могут). Далее, всякая траектория, имеющая K^+ своим ω-предельным континуумом, во всяком случае пересечет часть PP_{i+1}

*) Заметим, что цикл без контакта через точку P_{i+1} может быть проведен не единственным образом.

дуги l в сколь угодно близких к P точках, т. е. у всякой такой траектории заведомо есть принадлежащие области γ_i' точки. Отсюда и следует справедливость утверждения 3). Лемма доказана.

Замечание 1. Так как при любом достаточно большом i цикл без контакта $C^{(i)}$ лежит между кривыми C_i и C_{i+1}, то, очевидно, всякая кривая C_{i+1} лежит между двумя (содержащимися один внутри другого) циклами без контакта $C^{(i)}$ и $C^{(i+1)}$.

Замечание 2. При любом $\varepsilon > 0$ можно указать область γ_i', целиком лежащую в ε-окрестности K^+ (см. лемму 8 § 15).

Всякую область, граница которой состоит из цикла без контакта C и континуума K^+, через все точки которой проходят траектории, имеющие K^+ своим ω-предельным континуумом (с положительной стороны), будем называть *канонической окрестностью континуума* K^+ и обозначать через γ_c или просто γ. Цикл без контакта C, входящий в границу канонической окрестности континуума K^+, будем называть *циклом без контакта континуума* K^+ (рис. 258).

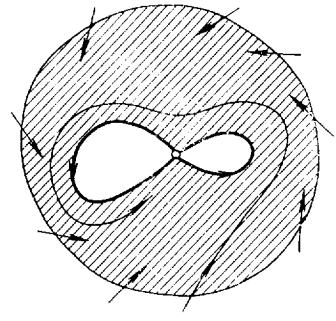


Рис. 258.

Очевидно, каноническая окрестность континуума K^+ не содержит ни одной особой траектории, и все проходящие через ее точки траектории при *убывании* t выходят из нее, пересекая цикл без контакта C. В дальнейшем мы главным образом будем рассматривать замыкание области γ_c, т. е. замкнутую каноническую окрестность γ_c.

Вернемся к рассмотрению кривых C_i (образованных витками P_iP_{i+1} траектории L и частями P_iP_{i+1} дуги без контакта l). Направление обхода кривой C_i, индуцированное направлением по t на дуге P_iP_{i+1} траектории L, будем называть *направлением обхода кривой* C_i *по* t, противоположное направление — *направлением обхода, противоположным направлению по* t.

Направление обхода по t кривой C_i индуцирует на части P_iP_{i+1} дуги l направление от точки P_{i+1} к точке P_i. Направление обхода по t кривой C_i определяет также некоторое направление обхода (совпадающее с положительным направлением обхода или противоположное ему) на всех замкнутых кривых, и, в частности, на всяком цикле без контакта C континуума K^+. На цикле без контакта континуума K это направление обхода мы будем называть *согласованным с направлением по* t.

Все сказанное в настоящем параграфе относительно ω-предельного континуума K^+ с очевидными изменениями может быть повторено относительно ω-предельного континуума K^-, а также относительно α-предельного континуума K^+ или K^-.

Пусть теперь K_0^+ — 0-предельный континуум (для определенности предполагаем его 0-предельным с положительной стороны) и L — одна из замкнутых траекторий той ячейки, для которой K_0^+ является граничным с положительной стороны.

Всякую область, граница которой состоит из замкнутой траектории L ячейки w и континуума K_0^+, *будем называть канонической окрестностью континуума* K_0^+ и обозначать через γ_L. Очевидно, γ_L является частью ячейки, так что через все точки γ_L проходят замкнутые траектории ячейки w (рис. 259).

Из леммы 2, очевидно, следует, что при любом $\varepsilon > 0$ всегда можно указать каноническую окрестность γ_L 0-предельного континуума, целиком лежащую в ε-окрестности K_0^+.

В дальнейшем мы преимущественно будем рассматривать замкнутую каноническую окрестность $\bar{\gamma}_L$. Будем в дальнейшем называть *канонической кривой* ω-, α- или 0-предельного континуума $K^{()}$ простую замкнутую кривую C, входящую в границу канонической окрестности этого континуума и являющуюся циклом без контакта — в случае, когда $K^{()}$ — ω- или α-предельный континуум, и замкнутой траекторией в случае, когда $K^{()}$ — 0-предельный континуум.

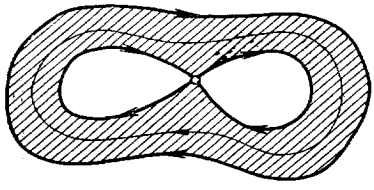


Рис. 259.

4. Локальные схемы ω-, α- и 0-предельных континуумов и теорема о тождественности разбиений на траектории канонических окрестностей континуумов с одинаковыми локальными схемами.

Определение XXVII. *Мы скажем, что задана локальная схема ω-, α- или 0-предельного континуума $K^{()}$, если: а) указано, является ли континуум $K^{()}$ ω-, α- или 0-предельным; б) задано ω-перечисление континуума $K^{()}$.*

Мы скажем, что локальные схемы двух предельных континуумов $K^{()}$ и $K'^{()}$-тождественны с сохранением направления по t, если: а) как $K^{()}$, так и $K'^{()}$ являются оба ω (или оба α или оба 0)-предельными континуумами; б) их ω-перечисления тождественны.

Соответствующие друг другу при тождественности схем траектории континуумов $K^{()}$ и $K'^{()}$ (или угловые и граничные дуги в случае схемы вида (1)) будем называть *соответствующими по локальной схеме.*

Совершенно аналогично можем ввести понятие тождественности двух схем с изменением направления по t.

Нетрудно видеть, что задание локальной схемы не позволяет судить о расположении предельного континуума на плоскости. Так, например, континуумы, изображенные на рис. 255 и рис. 256, имеют одну и ту же локальную схему.

Теорема 72. *Если локальная схема двух ω (α или 0)-предельных континуумов $K^{()}$ и $K'^{()}$ двух динамических систем (различных или совпадающих) тождественна, то топологическая структура разбиения на траектории всяких двух замкнутых канонических окрестностей этих континуумов тождественна.*

Доказательство. Пусть рассматриваются две динамические системы D и D^*. Пусть K^+— ω-предельный континуум для траекторий системы D, а K^{*+}— ω-предельный континуум для траекторий системы D^*, и при этом локальные схемы континуумов K^+ и K^{*+} тождественны с сохранением направления по t.

Пусть $L_1, L_2, \ldots L_R$ — траектории, входящие в континуум K^+, и $L_1^*, L_2^*, \ldots L_{R^*}^*$ — траектории, входящие в континуум K^{*+}. Так как локальные схемы континуумов K^+ и K^{*+} тождественны, то $R = R^*$.

Пусть γ — каноническая окрестность континуума K^+, C — цикл без контакта, входящий в ее границу, γ^* — каноническая окрестность континуума K^{*+} и C^*— цикл без контакта, входящий в ее границу.

Будем считать, что траекториями, соответствующими друг другу по схеме, являются траектории L_i и L_i^*, имеющие одинаковые индексы. Их

ω- и α-предельные состояния равновесия также соответствуют друг другу по схеме. Рассмотрим, как и в теореме 68, дуги λ_i^- и λ_i^+ ($i = 1,2,3, \ldots$ являющиеся дугами без контакта для траекторий системы D, с концами M^- и M_i^+, лежащими на траектории L_i. Возьмем на этих дугах точки N_i^- и N_i^+, обладающие теми же, что и в теореме 68, свойствами, т. е. такие,

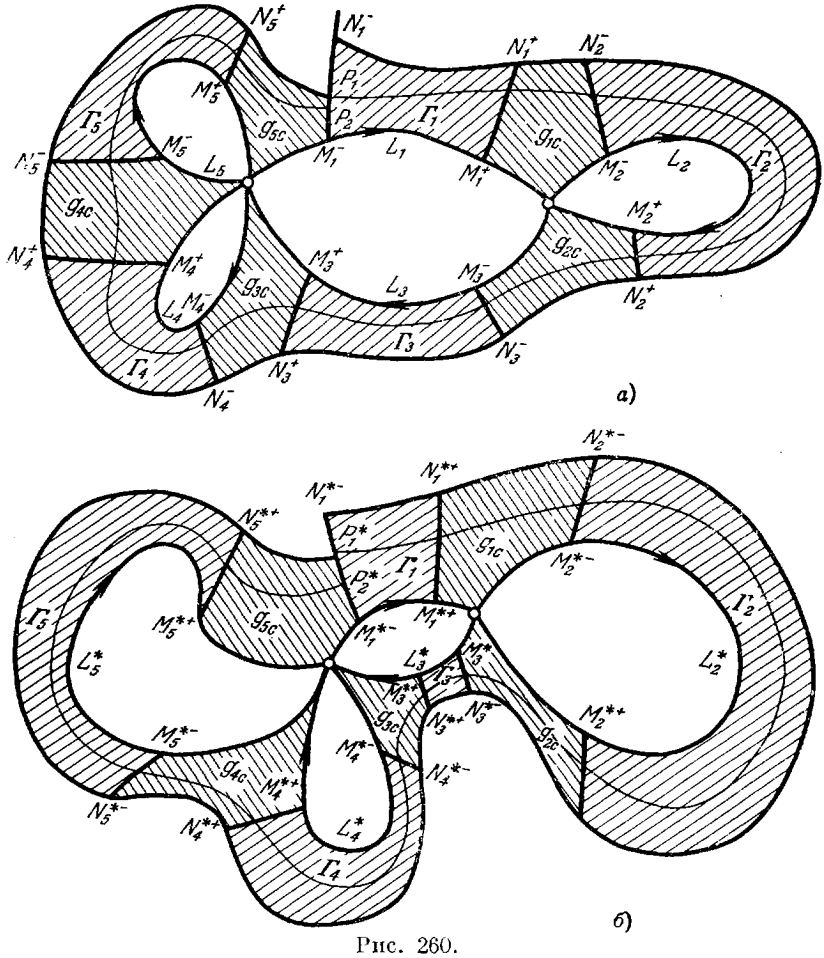


Рис. 260.

что все траектории, пересекающие часть $M_1^-N_1^-$ дуги λ_1^-: а) имеют континуум K своим ω-предельным континуумом; б) при возрастании t последовательно пересекают части $M_1^+N_1^+$, $M_2^-N_2^-$, ... дуг λ_1^+, λ_2^-, λ_2^+, ... и, наконец, вторично пересекают дугу λ_1^- на части $M_1^-P_1$ этой дуги (точка P_1 лежит между точками M_1^- и N_1^-) (рис. 260).

Из а), в частности, следует, что траектория L, проходящая через точку N_1^-, при возрастании t последовательно пересекающая дуги λ_i^- и λ_i^+ в точках N_i^- и N_i^+ и вторично пересекающая дугу λ_1^- в точке P_1, при дальнейшем возрастании t пересекает дугу λ_1^- в бесконечном множестве точек $\{P_i\}$, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t и стремящимся к точке M_1^-. Пусть C_1 — простая замкнутая кривая, состоящая из витка $N_1^-P_1$ траектории L и части N_1^-P дуги λ^-. Точка N_1^-, очевидно,

всегда может быть выбрана так, чтобы простая замкнутая кривая C_1 целиком лежала в области γ и, следовательно, чтобы область γ_1, граница которой состоит из C_1 и K (такие области неоднократно рассматривались), являлась бы частью канонической окрестности γ. Пусть Δ — область, граница которой состоит из кривой C_1 и цикла без контакта C (γ_1- и Δ-области, на которые кривая C_1 делит каноническую окрестность γ).

Так как в силу тождественности схем континуумам K и K^* каждой траектории L_i соответствует (взаимно однозначно) траектория L_i^* системы D^*, то мы можем в случае системы D^* рассмотреть полностью аналогичные дуги без контакта λ_i^{*-}, λ_i^{*+}, точки M_i^{*-}, M_i^{*+}, N_i^{*-}, N_i^{*+}, P_i^*, траекторию L^*, ее общие точки с дугой λ_i^{*-} — $\{P_i^*\}$, а также простую замкнутую кривую C_1^* и области γ_1^* и Δ^* (рис. 260, *б*).

Для того чтобы установить отождествляющее топологическое отображение между замкнутыми областями γ и γ^*, установим сначала отображение областей γ_1 и γ_1^* друг на друга, а затем, сохраняя полученное при этом соответствие между точками кривых C_1 и C_1^*,— отображение замкнутых областей $\bar{\Delta}$ и $\bar{\Delta}^*$ друг на друга.

Части $M_i^+N_i^+$ и $M_i^+N_i^-$ дуг λ_i^+ и λ_i^- ($M_i^{*+}N_i^{*+}$ и $M_i^{*-}N_i^{*-}$ дуг λ_i^{*+} и λ_i^{*-}), очевидно, делят замкнутую область $\bar{\gamma}_1$ (соответственно $\bar{\gamma}_1^*$) на замкнутые элементарные четырехугольники Γ_i (Γ_i^*) и замкнутые седловые области $\bar{g}_{ic}$ ($\bar{g}_{ic}^*$), попарно имеющие общую часть границы, именно, дуги $M_i^+N_i^+$ или $M_i^-N_i^-$ ($i = 1, 2, \ldots, R$) (или $M_i^{*+}N_i^{*+}$, $M_i^{*-}N_i^{*-}$), или $P_1M_1^-$ ($P_1^*M_1^{*-}$) (рис. 260). Будем элементарные четырехугольники и седловые области соответственно в системе D и D^*, в границы которых входят дуги с одинаковыми номерами, т. е. отличающиеся только звездочкой в буквах, называть «соответствующими по схеме». Установим теперь между замкнутыми областями $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_1^*$ отождествляющее отображение. Для этого устанавливаем сначала топологическое соответствие между точками частей $M_1^-N_1^-$ и $M_i^{*-}N_i^{*-}$ дуг λ_1^- и λ_1^{*-}, при котором точки M_i^- и M_i^{*-}, а также точки N_i^- и N_i^{*-} соответствуют друг другу, и точкам, лежащим на одной и той же траектории системы D, соответствуют точки, лежащие на одной и той же траектории системы D^*. Это соответствие устанавливается следующим естественным образом: сначала устанавливаем произвольное топологическое соответствие Φ_0 между точками частей $N_1^-P_1$ и $N_1^{*-}P_1^*$ дуг λ_1^- и λ_1^{*-}, при котором точка N_1^- соответствует точке N_1^{*-}, а точка P_1 — точке P_1^*. Принимая во внимание, что все траектории, пересекающие часть $N_1^-P_1$ дуги λ_1^- соответственно $N_1^{*-}P_1$ дуги λ_1^{*-}, пересекают каждую часть P_kP_{k+1} и соответственно $P_k^*P_{k+1}^*$, и притом каждую из этих частей в одной только точке (см. лемму 8 § 3), устанавливаем такое топологическое отображение между частями P_kP_{k+1} и $P_k^*P_{k+1}^*$ дуг λ_1^- и λ_1^{*-}, при котором отображающиеся друг в друга точки принадлежат траекториям, пересекающим части $N_1^-P_1$ и $N_1^{*-}P_1^*$ в соответствующих друг другу в силу отображения Φ_0 точках.

Таким образом, соответствующие друг другу точки части P_1P_2 и $P_1^*P_2^*$ являются последующими для соответствующих друг другу точек частей $N_1^-P_1$ и $N_1^{*-}P_1^*$, соответствующие друг другу точки частей P_2P_3 и $P_2^*P_3^*$ являются последующими для соответствующих друг другу точек частей P_1P_2 и $P_1^*P_2^*$ и т. д. (на рис. 261, *а* и *б* соответствующими друг другу точками являются точки Q_1 и Q_1^*, Q_2 и Q_2^* и т. д.). Наконец, точке M_1^- ставим в соответствие точку M_1^{*-}.

В результате мы получаем отображение частей $M_1^-N_1^-$ и $M_1^{*-}N_1^{*-}$ дуг λ_1^- и λ_1^{*-} друг на друга, являющееся, очевидно, взаимно однозначным

и непрерывным, т. е. топологическим (непрерывность отображения в точках этих дуг, отличных от точек частей $N_1^- P_1$ и $N_1^{*-} P_1^*$, непосредственно вытекает из теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений).

Установленное соответствие между точками частей $M_1^- N_1^-$ и $M_1^{*-} N_1^{*-}$ дуг λ_1^- и λ_1^{*-} индуцирует топологическое соответствие между точками дуг $M_i^- N_i^-$ и $M_i^{*-} N_i^{*-}$, $M_i^+ N_i^+$ и $M_i^{*+} N_i^{*+}$. Соответствующими друг другу точками этих дуг, очевидно, будут точки, в которых траектории, проходящие

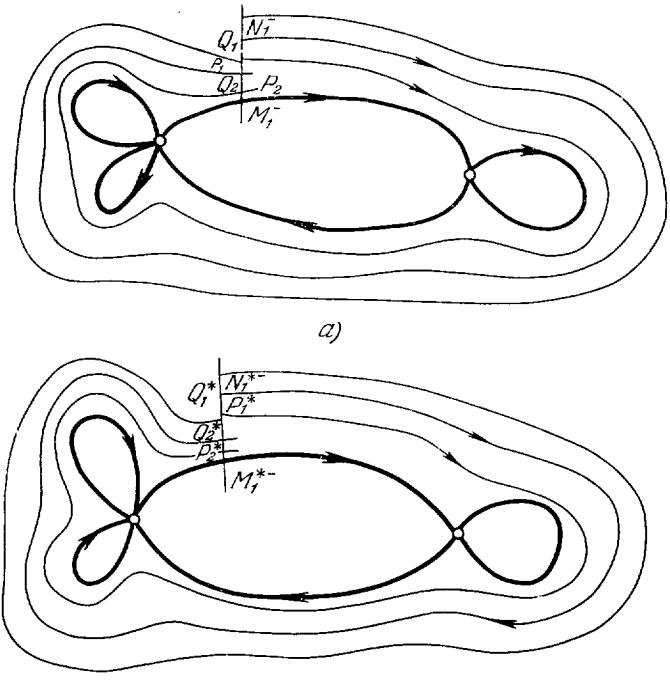


Рис. 261.

через соответствующие друг другу точки дуг $M_1^- N_1^-$ и $M_1^{*-} N_1^{*-}$, пересекают дуги λ_i^-, λ_i^{*-} и λ_i^+, λ_i^{*+} (не пересекая до этого вторично дугу λ_1^- и соответственно λ_1^{*-}). Установим теперь топологическое отображение, переводящее траектории в траектории, между соответствующими друг другу по схеме элементарными четырехугольниками $\bar{\Gamma}_i$ и $\bar{\Gamma}_i^*$ и седловыми областями $\bar{g}_{ic}$ и $\bar{g}_{ic}^*$, при котором установленное соответствие между точками дуг $M_i^+ N_i^+$ и $M_i^{*+} N_i^{*+}$, а также $M_i^- N_i^-$ и $M_i^{*-} N_i^{*-}$ сохраняется. Тем самым устанавливается топологическое отображение замкнутых областей $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_1^*$, при котором траектории системы D отображаются в траектории системы D^*. Взаимная однозначность и непрерывность этого отображения в точках континуумов K^+ и K^{*+} вытекает, очевидно, из леммы 1.

Перейдем теперь к рассмотрению замкнутых областей Δ и Δ^*. Рассмотрим сначала область Δ (для области Δ^* все полностью аналогично). Очевидно, все траектории, пересекающие часть $N_1^- P_1$ дуги λ_1^-, пересекают цикл без контакта C и, наоборот, все траектории, пересекающие цикл C, пересекают часть $N_1^- P_1$ дуги λ_1^-. Кроме того, все траектории, проходящие через

точки области Δ, при убывании t пересекают часть $N_1^- P$ дуги λ_1^-. Пусть Q — точка пересечения траектории L с циклом без контакта C.

Рассмотрим еще какую-нибудь точку R дуги $N_1^- P_1$ (отличную от N_1^- и P_1), пусть L_1 — траектория, проходящая через эту точку, и S — ее точка пересечения с циклом без контакта C. Точки Q и S делят C на две дуги без контакта, а дуги QN_1^- и RS траекторий L и L_1 делят область Δ на два элементарных четырехугольника Π_1 и Π_2 (рис. 262, *а*).

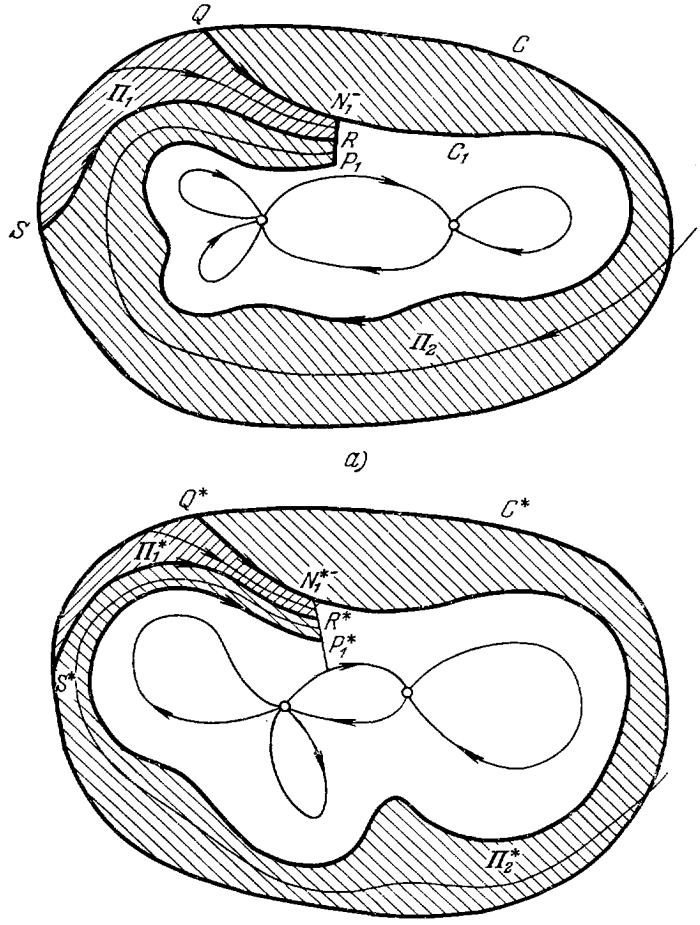


Рис. 262.

Возьмем на дуге $N_1^{*-} P_1^*$ дуги λ_1^* точку R^*, соответствующую точке R по установленному между γ_1 и γ_1^* отображению, и пусть L_1^* — траектория системы D^*, проходящая через эту точку. Обозначим через Q^* и S^* точки пересечения траекторий L^* и L_1^* с циклом C^* и через Π_1^*, Π_2^* — элементарные четырехугольники, аналогичные Π_1 и Π_2 (на которые дуги $R^*N_1^{*-}$ и R^*S^* траекторий L и L_1 делят область Δ) (рис. 262, *б*).

Установим сначала топологическое отображение замкнутых элементарных четырехугольников $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_1^*$, при котором траектории систем D и D^* отображаются друг в друга, сохраняя при этом соответствие между

точками дуг $N_1^- P$ и $N_1^{*-} P^*$, существующее в силу установленного топологического отображения замкнутых областей $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_1^*$.

Затем устанавливаем отождествляющее топологическое отображение элементарных четырехугольников $\bar{\Pi}_2$ и $\bar{\Pi}_2^*$, сохраняя уже существующее соответствие между точками дуг, входящих в его границу (т. е. между точками дуг без контакта RP_1 и $R^*P_1^*$ и точками дуг $P_1N_1^-$ и $P_1^*N_1^{*-}$ траекторий L и L^*), и точками дуг RS и R^*S^* траекторий L и L^*. Таким образом, устанавливается топологическое отображение замкнутых областей $\bar{\Delta}$ и $\bar{\Delta}^*$, при котором соответствие между точками кривых C_1 и C_1^*, существующее в силу установленного топологического отображения γ_1 и γ^*, сохраняется.

Очевидно, мы получаем топологическое отображение замкнутых канонических областей $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}^*$, при котором траектории систем D и D^* отображаются друг в друга.

Таким образом, для рассматриваемого нами случая ω-предельных континуумов K_ω^+ и K_ω^{*+} теорема доказана. В случае α-предельных континуумов $K_\alpha^{(-)}$ и $K_\alpha^{*(-)}$ доказательство полностью аналогично.

Пусть теперь K_0^+ и K_0^{*+} 0-предельные континуумы, в состав которых не входят угловые и граничные дуги, а γ и γ^* — их канонические окрестности, в границы которых входят соответственно замкнутые траектории L и L^*.

Рассмотрим дуги без контактов λ_i^+, λ_i^- и λ_i^{*+}, λ_i^{*-}, обладающие теми же свойствами, что и выше. Пусть L_1 (L_1^*) — замкнутая траектория, пересекающая все дуги λ_i^+, λ_i^- (λ_i^{*+}, λ_i^{*-}). Каноническая окрестность γ_1 (γ_1^*), граница которой состоит из траектории L_1 и континуума K_0^- (траектории L_1^* и континуума K_0^{*-}), являющаяся частью γ (γ^*), разделяется дугами $\lambda_i^{(-)}$ ($\lambda_i^{*(-)}$) на элементарные четырехугольники и седловые области. Полностью аналогично тому, как это делалось при рассмотрении ω-предельных континуумов (с некоторыми упрощениями), устанавливаем топологическое отображение соответствующих друг другу по схеме замкнутых элементарных четырехугольников и седловых областей (согласуя это соответствие на дугах λ_i^+, λ_i^{*+}). Затем устанавливаем топологическое отображение кольцевых областей, ограниченных траекториями L и L_1^* и соответственно L^* и L_1^*, при котором сохраняется уже существующее между точками траекторий L_1 и L_1^*.

Таким образом, мы получаем топологическое отображение замкнутых окрестностей $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}^*$ друг на друга, при котором траектории отображаются в траектории.

В случае, когда K_0^+ и K_0^{*+} состоят из граничных и угловых дуг, проводим через концы этих дуг не пересекающиеся друг с другом дуги без контакта и рассуждаем полностью аналогично предыдущему.

Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Предположим, что задано топологическое отображение двух континуумов K_ω^+ и K_ω^{*+} с одинаковыми локальными схемами (при котором точки траекторий, соответствующих друг другу по схеме, отображаются друг в друга), и при этом направление на траекториях сохраняется. Кроме того, предположим, что между точками циклов без контакта C и C^* тоже задано топологическое отображение, при котором согласованные с направлением по t обходы этих циклов сохраняются (т. е. когда цикл C обходится в направлении, согласованном с направлением по t, то соответствующие по заданному отображению точки обходят

цикл C^* также в направлении, согласованном с направлением по t). Тогда топологическое отображение замкнутых канонических областей $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}^*$ всегда может быть построено таким образом, чтобы заданное соответствие между точками континуумов K_ω^+ и K_ω^{*+} и циклов без контакта C и C^* сохранялось. Для этого, очевидно, концы M_i^{*+} и M_i^{*-} дуг λ_i^{*+} и λ_i^{*-} нужно взять в точках, соответствующих по заданному отображению точкам M_i^+ и M_i^-, а между точками отрезков без контакта $\lambda_i^{(\cdot)}$ и $\lambda_i^{*(\cdot)}$ нужно брать соответствие, индуцированное соответствием, заданным между точками циклов без контакта C и C^*. Наконец, устанавливая отображение между элементарными четырехугольниками и седловыми областями, соответствующими друг другу по схеме, нужно сохранить заданное соответствие в точках этих замкнутых областей, принадлежащих континуумам K_ω^+ и K_ω^{*+} (см. замечание к леммам главы VIII, устанавливающим тождественность элементарных областей). Аналогичное замечание справедливо и в случае, когда рассматриваются α-предельные континуумы K_α^+ и K_α^{*+} или 0-предельные континуумы K_0^+ и K_0^{*+}.

Замечание II. Из доказанной теоремы непосредственно следует, что разбиение на траектории любых двух различных канонических окрестностей континуума $K_\omega^{(\cdot)}$ или $K_\alpha^{(\cdot)}$, или $K^{(\cdot)}$ тождественно.

§ 25. Полная схема предельного континуума

1. Простые замкнутые кривые, образованные траекториями, составляющими предельный континуум. Мы приведем ряд лемм, уточняющих сведения о структуре предельных континуумов.

Лемма 1. *Всякий предельный континуум K состоит из конечного числа простых замкнутых кривых*

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_p, \tag{S}$$

образованных траекториями континуума K и обладающих следующими свойствами: а) каждая отличная от состояния равновесия траектория континуума K входит в одну и только одну кривую (S); б) каждая кривая (S) имеет общую точку, являющуюся состоянием равновесия по крайней мере с одной из остальный кривых (S) (если $p>1$) и никакие две из кривых (S) не могут иметь больше одной общей точки; в) все кривые (S) либо лежат одна вне другой *), *либо одна из них содержит внутри себя остальные, лежащие одна вне другой; г) всякая простая замкнутая кривая, состоящая из точек континуума K, является одной из кривых (S).*

Доказательство. Пусть сначала K — ω-предельный континуум. Будем рассматривать простые замкнутые кривые, составленные из точек континуума K_ω. Континуум K_ω образован конечным числом незамкнутых траекторий L_i и состояний равновесия O_j, к которым стремятся эти незамкнутые траектории. Так как траектории не пересекаются, то очевидно, что если S есть простая замкнутая кривая, состоящая из точек континуума K_ω, то незамкнутая траектория L либо целиком принадлежит кривой S, либо не имеет с ней общих точек. Это означает, что всякая простая замкнутая кривая, состоящая из точек континуума K_ω, составлена из целых траекторий. Так как континуум K_ω содержит лишь конечное число траекторий, то отсюда непосредственно вытекает, что число простых замкнутых кривых, состоящих из точек континуума K_ω, тоже конечно (если они вообще имеются).

*) Если не считать их общих точек.

Докажем, что любая незамкнутая траектория L_i принадлежит некоторой простой замкнутой кривой S, состоящей из точек K_ω. Пусть L_1, O_1, L_2, O_2, ... , L_R, O_R — ω-перечисление траекторий континуума K_ω. (Точки O_i могут совпадать частично или полностью.) Если точка O_1 совпадает с O_R, то траектория L_1 и точка O_1 образуют требуемую кривую S. Если точки O_1 и O_R не совпадают, то пусть p, $1 \leqslant p < R$,— наибольшее число такое, что точка O_p совпадает с O_1. Если точка O_{p+1} совпадает с O_R, то траектории L_1, O_1, L_{p+1}, O_R образуют требуемую кривую S. Если же точки O_R и O_{p+1} не совпадают, то пусть q, $p+1 \leqslant q < R$,— наибольшее число такое, что точка O_q совпадает с O_{p+1}. Если точки O_{q+1} и O_R совпадают, то траектории L_1, O_1, L_{p+1}, O_{p+1}, L_q, O_R образуют кривую S, в противном случае мы продолжаем аналогичное рассуждение и через конечное число шагов получим простую замкнутую кривую, содержащую траекторию L_1. Таким образом, все незамкнутые траектории L_i , а следовательно, и все состояния равновесия O_j (как предельные точки траекторий L_i) принадлежат некоторым простым замкнутым кривым, состоящим из траекторий континуума K_ω. Пусть S_1, S_2, .. ., S_l — все простые замкнутые кривые, состоящие из траекторий континуума K_ω (конечность их числа была установлена выше). В эти кривые, как мы видели, входят все траектории континуума K_ω. Докажем, что всякая незамкнутая траектория L_i входит только в одну из кривых (S). Предположим, что траектория L_i входит в две кривые (S), например в S_1 и S_2. Пусть L^* есть одна из тех траекторий, для которых континуум K является ω (α или 0)-предельным. Очевидно, траектория L^* не может пересечь ни одной замкнутой кривой S_i, т. е. она лежит либо целиком внутри кривой S_i, либо целиком вне ее. С другой стороны, все точки кривых S_i являются предельными для траекторий L^*. Отсюда сразу следует, что либо все точки каждой из кривых S_1 и S_2 кроме их общих точек лежат вне другой кривой, либо все точки одной из них (кроме общих точек) лежат внутри другой, например, все точки кривой S_2 лежат внутри S_1. В первом случае траектория проходит вне обеих кривых S_1 и S_2. А так как к траектории L_i по разные ее стороны примыкают области, заключенные внутри кривых S_1 и S_2, то траектория L_i не может быть предельной для L^*, и мы приходим к противоречию. Во втором случае траектория L^* проходит внутри кривой S_1 и вне S_2. Но тогда *) L_i снова не может быть предельной траекторией для L^*. Таким образом, утверждение а) леммы доказано. Из утверждения а) следует, что общими точками кривых (S) могут быть только состояния равновесия. Если $p > 1$, то каждая из кривых (S) имеет общую точку по крайней мере с одной из остальных кривых в виду связности континуума K_ω.

Предположим теперь, что какие-нибудь две кривые, например S_1 и S_2, имеют более одной общей точки. Тогда существует, очевидно, дуга λ, состоящая из траекторий кривой S_1 такая, что: 1) концы дуги λ (обозначим их через O_1 и O_2) являются состояниями равновесия, принадлежащими одновременно кривой S_2; 2) отличные от концов точки дуги λ не принадлежат кривой S_2.

Точки O_1 и O_2 делят кривую S_2 на две дуги S_2' и S_2''. Предположим, что дуга λ лежит целиком (если не считать ее концов) внутри кривой S_2. Тогда она делит внутренность этой кривой на две области g_2' и g_2'', ограниченные, соответственно, дугами λ и S_2' и дугами λ и S_2''. Так как дуга λ

*) Траектория L_i вместе с предельными для нее состояниями равновесия, очевидно, является простой дугой, и, следовательно, можно воспользоваться предложениями п. 2 § 2 дополнения.

является предельной для траектории L^*, то траектория L^* должна проходить внутри кривой S_2 и, следовательно, либо внутри области g_2', либо внутри области g_2''. В первом случае дуга S_2'', а во втором случае дуга S_2' не может быть предельной для траектории L^*. Это противоречит предположению, что K_ω есть предельный континуум траектории L^*.

Аналогично рассматривается случай, когда дуга λ лежит вне кривой S_2. Таким образом, доказано утверждение б).

Для доказательства утверждения в) обозначим область, ограниченную кривой S_1, через g_1 и предположим, что $g_2 \subset g_1$. Если какая-нибудь кривая, например S_3, лежит внутри области g_2 или вне g_1, то все три кривые S_1, S_2, S_3 не могут, как нетрудно убедиться, одновременно состоять из траекторий, предельных для L^*. А это противоречит тому, что эти кривые входят в состав предельного континуума K_ω траектории L^*. Отсюда следует справедливость утверждения в). Утверждение г) является непосредственным следствием того, что (S) есть по определению совокупность всех простых замкнутых кривых континуума K_ω.

В случае, когда континуум K является 0-предельным, рассуждение полностью аналогично. Таким образом, лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства утверждения а) леммы следует, что каждая простая замкнутая кривая S_i состоит из некоторых траекторий

$$L_{q_1},\ O_{j_1},\ L_{q_2},\ O_{j_2},\ \ldots,\ L_{q_k},\ O_{j_k}, \tag{1}$$

образующих подпоследовательность в ω-перечислении континуума K. При этом, двигаясь по траекториям в том порядке, в каком они написаны (т. е. в том порядке, в каком они расположены в ω-перечислении), мы описываем кривую S_i либо в положительном, либо в отрицательном направлении. Но тогда имеет место, очевидно, следующее утверждение. При обходе простой замкнутой кривой S_i ($i = 1, 2, \ldots, l$) в положительном направлении входящие в нее незамкнутые траектории обходятся либо все в направлении возрастания параметра t, либо все в направлении убывания t.

П р и м е р. Пусть задано ω-перечисление траекторий континуума K

$$\omega\,|\,O_1,\ L_1,\ O_2,\ L_2,\ O_2,\ L_3,\ O_3,\ L_4,\ O_4,\ L_5,\ O_4,\ L_6,\ O_3,\ L_7,\ O_5,\ L_8.$$

Выделяем кривую S_1, содержащую траекторию L_1:

$$S_1\colon\ O_1,\ L_1,\ O_2,\ L_3,\ O_3,\ L_7,\ O_5,\ L_8.$$

Сюда не входит траектория L_2. Выделяем кривую S_2, содержащую $L_2 : S_2 : O_2, L_2$. Аналогично $S_3 : O_3, L_4, O_4, L_6$ и $S_4 : O_4, L_5$. Все траектории континуума K вошли в кривые S_1, S_2, S_3, S_4. Как мы уже говорили, задание одной лишь последовательности траекторий не дает возможности выяснить полностью относительное расположение кривых S_i, а также выяснить, совпадает ли направление положительного обхода кривой S_i с направлением возрастания t или с направлением убывания t (см. предыдущее замечание). Так, каждый из изображенных на рис. 255, 256 предельных континуумов имеет в качестве своего ω-перечисления перечисление, рассмотренное в предыдущем примере. Однако у континуума (на рис. 255) все кривые S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) лежат вне друг друга, в то время как у континуума на рис. 256 одна кривая S_i содержит внутри себя все остальные. У континуума на рис. 255 направление положительного обхода всех кривых S_i совпадает с направлением убывания t, а у континуума на рис. 256 — с направлением возрастания t.

2. Односторонние и двусторонние предельные континуумы. Пусть K — ω-, α- или 0-предельный континуум. В согласии с предыдущим мы будем называть континуум K «*односторонним*», если он является предельным только с одной, с положительной или отрицательной стороны и «*двусторонним*», если он является предельным как с положительной, так и с отрицательной стороны (очевидно, для различных траекторий). В первом случае имеет смысл только одно из обозначений K^+ или K^-, во втором случае — оба обозначения K^+ и K^-.

В случае, когда континуум K^+ является односторонним, например является ω-предельным, с положительной стороны, некоторые или даже все входящие в него траектории могут быть предельными и с отрицательной стороны. Следовательно, каждая такая траектория может входить в состав некоторого континуума ω-, α- или 0-предельного с отрицательной стороны. Однако этот континуум заведомо отличен от континуума K^+ (хотя и имеет с ним общие траектории). Имеет место лемма, доказательство которой мы опускаем в силу его элементарности.

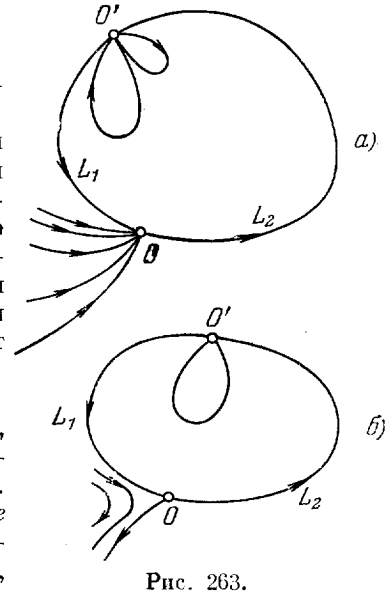


Рис. 263.

Л е м м а 2. *Предельный континуум K, состоящий более чем из одной простой замкнутой кривой S, является односторонним. При этом если кривые S лежат одна вне другой, то траектории, для которых континуум K является* ω-, α- *или* 0-*предельным, лежат вне всех кривых S_i. Если же одна из кривых, например S_1, содержит внутри все остальные, то траектории, для которых континуум K является* ω-, α *или* 0-*предельным, лежат внутри S_1 и вне всех остальных кривых S_i* (рис. 255 и 256).

Л е м м а 3. *Пусть* ω (α *или* 0)-*предельный континуум K^+, в состав которого входит хотя бы одно состояние равновесия, является одной простой замкнутой кривой S, и пусть к одному из входящих в континуум K состоянию равновесия O стремится траектория L, не принадлежащая континууму K. Тогда континуум K^+ является односторонним, и при этом если траектория L лежит вне (внутри) кривой S, то траектории, для которых K^+ является* ω (α *или* 0)-*предельным континуумом, лежат внутри (вне) S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как S — простая замкнутая кривая, то существуют только две полутраектории L_1^+ и L_2^-, принадлежащие $K^{(1)}$ (т. е. K^+), стремящиеся к O и являющиеся продолжением одна другой с положительной стороны. Полутраектории L_1^+ и L_2^- не могут быть продолжением одна другой также и с отрицательной стороны, так как тогда стремящейся к O траектории L, отличной от входящих в континуум K^+ траекторий, очевидно, существовать не могло бы. Поэтому полутраектория L_1^+ либо не имеет продолжения с отрицательной стороны, либо имеет продолжение с отрицательной стороны, отличное от L_2^- (рис. 263, *а*, *б*). В первом случае а) полутраектория L_1^+ вообще не является предельной с отрицательной стороны, во втором б) — она может входить в некоторый ω-, α- или 0-предельный континуум K'^-, отличный от K. Это означает, что K — односторонний континуум.

Кроме того, очевидно, что если точки, лежащие по положительную сторону полутраекторий L_1^+ и L_2^-, лежат внутри (вне) кривой S, то траектория L лежит вне (внутри) S (в противном случае L_1^+ и L_2^- не могли бы быть продолжением одна другой с положительной стороны). Лемма доказана.

Следствие. *Континуум K является двусторонним* ω-, α- *или* 0-*предельным континуумом в том и только в том случае, когда он либо является замкнутой траекторией, либо простой замкнутой кривой, состоящей из незамкнутых траекторий, стремящихся к состояниям равновесия и имеющих одинаковые продолжения как с положительной, так и с отрицательной стороны. В последнем случае к состояниям равновесия, входящим в континуум K, кроме входящих в K траекторий не стремится никаких других траекторий.*

Пусть континуум $K^{()}$ состоит более чем из одной простой замкнутой кривой S_i, и пусть O — одно из входящих в $K^{()}$ состояний равновесия.

Предположим, что точка O является общей точкой из менее чем двух кривых S_i, и пусть при надлежащей нумерации — S_1, S_2, ..., S_m — те из кривых S_j, которые имеют точку O общей. Очевидно, в состав каждой из кривых S_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) входят две стремящиеся к O полутраектории, положительная L_i^+ и отрицательная L_i^- (таких полутраекторий только две в том смысле, что всякая стремящаяся к O и входящая в состав кривой S_j полутраектория либо является частью одной из полутраекторий L_i^+, L_i^-, либо содержит ее как часть).

Проводя рассуждение, полностью аналогичное проведенному в лемме 11 § 17 и принимая во внимание, что всякая входящая в континуум K полутраектория имеет продолжение, нетрудно видеть, что: 1) между любыми двумя полутраекториями L_j^+ и L_j^-, входящими в состав одной и той же кривой S_p, либо не лежит ни одной полутраектории $L_i^{()}$, либо лежат все полутраектории $L_i^{()}$ ($i \neq j$); 2) из любых двух последовательных в циклическом порядке полутраекторий $L_i^{()}$ всегда одна положительная, а другая отрицательная.

Рассмотрим теперь какие-нибудь две из кривых S_j ($j = 1, 2, \ldots, l$): S_μ и S_λ. В силу 1) и 2) нетрудно видеть, что полутраектории

$$L_\mu^+,\ L_\mu^- \quad \text{и} \quad L_\lambda^+,\ L_\lambda^- \tag{2}$$

могут быть расположены вокруг точки O либо в циклическом порядке

$$L_\mu^+,\ L_\mu^-,\ L_\lambda^+,\ L_\lambda^-, \tag{3}$$

либо в циклическом порядке

$$L_\mu^+,\ L_\lambda^-,\ L_\lambda^+,\ L_\mu^-. \tag{4}$$

В следующих леммах устанавливается связь между наличием того или другого из порядков полутраекторий и теми фактами, совпадает ли на кривых S_μ и S_λ направление положительного обхода с направлением по t или противоположно направлению по t и лежат ли кривые S_μ и S_λ одна внутри другой или одна вне другой.

Лемма 4. *Пусть кривые S_μ и S_λ лежат одна вне другой. Тогда*: *а) если полутраектории* (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке* (3)

$$L_\mu^+,\ L_\mu^-,\ L_\lambda^+,\ L_\lambda^-,$$

то на обеих кривых положительное направление обхода противоположно направлению по t; б) если полутраектории (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке* (4):

$$L_\mu^+,\ L_\lambda^-,\ L_\lambda^+,\ L_\mu^-,$$

то положительное направление обхода обеих кривых совпадает с направлением по t.

Доказательство. а) Пусть σ — простая замкнутая кривая, содержащая состояние равновесия O внутри, имеющая с каждой из полутраекторий (3) только по одной общей точке M_μ^+, $M_\mu'^-$, M_λ^+, $M_\lambda'^-$ соответственно и кроме этих точек, не имеющая больше ни одной общей точки с кривыми S_μ и S_λ.

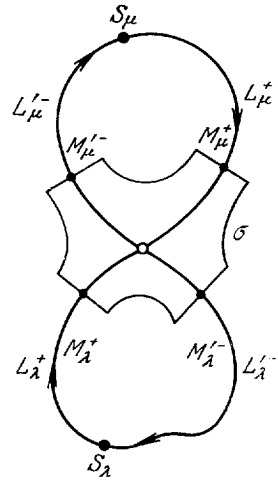


Рис. 264.

В качестве такой кривой σ может быть взята надлежащим образом выбранная каноническая кривая состояния равновесия O. Действительно, полутраектории (2) являются сепаратрисами состояния равновесия O, и нетрудно видеть, что всякая каноническая кривая точки O (имеющая, конечно, общие точки с полутраекториями (2)), у которой седловые дуги достаточно малы, имеет только по одной общей точке с каждой из полутраекторий (2). Кроме того, все входящие в кривые S_μ и S_λ полутраектории имеют в качестве предельных точек одни только состояния равновесия, и при этом полутраектории, отличные от (3), состояния равновесия, отличные от O (в силу того, что S_μ и S_λ — простые замкнутые кривые). Отсюда, следует, что точки кривых S_μ и S_λ, отличные от точек полутраекторий (2), лежат на ненулевом расстоянии от точки O. Поэтому всякая каноническая кривая, лежащая в достаточно малой окрестности точки O, и, как указано выше, с надлежащим образом выбранными седловыми дугами кроме общих точек с полутраекториями (2) больше не будет иметь общих точек с кривыми S_μ и S_λ. Докажем теперь утверждение а). По условию кривые S_1 и S_2 лежат одна вне другой (если не считать их единственной общей точкой O) и их точки пересечения с кривой σ расположены в циклическом порядке (рис. 264) M_μ^+, $M_\mu'^-$, M_λ^+, $M_\lambda'^-$.

Точки M_λ^+ и $M_\lambda'^-$, как принадлежащие кривой S_λ, лежат вне кривой S_μ, и, следовательно, все точки дуги $M_\mu^+ M_\mu'^-$ (т. е. дуги кривой σ, содержащей точки M_μ^+ и $M_\mu'^-$) кроме ее концов лежат внутри кривой S_μ. Поэтому если σ_1 — простая замкнутая кривая, составленная из дуги $M_\mu^+ M_\mu'^-$ кривой σ и дуги кривой S_μ, состоящей из части $M_\mu^+ O$ полутраектории L_μ^+, части $M_\mu'^- O$ полутраектории $L_\mu'^-$ и точки O, то области внутри кривых σ_1 и S_μ лежат по одну сторону от их общей дуги $M_\mu'^- O M_\mu^+$ (см. § 2, п. 2 дополнения).

Так как положительное направление обхода кривой σ_1 индуцирует на этой общей дуге направление $M_\mu'^- O M_\mu^+$, то положительное направление обхода кривой S_μ есть направление $M_\mu'^- O M_\mu^+$, т. е. направление, противоположное возрастанию параметра t на траекториях L_μ и L_μ', а следовательно, и на всех отличных от состояния равновесия траекториях кривой S_μ (см. замечание к лемме 3).

Рассматривая точно так же простую замкнутую кривую σ_2, состоящую из дуги $M_\lambda^+ M_\lambda'^-$ кривой σ и дуги $M_\lambda^+ O M_\lambda'^-$ кривой S_λ, и кривую S_μ, мы точно так же убедимся, что положительное направление обхода кривой S_λ является направлением противоположным направлению по t на всех отличных от состояний равновесия траекториях, входящих в S_λ.

Доказательство утверждения б) полностью аналогично.

Имеет также место лемма, доказательство которой, полностью аналогичное доказательству предыдущей леммы, мы опускаем.

Лемма 5. *Пусть одна из кривых S_μ и S_λ лежит внутри другой. Тогда: а) если полутраектории* (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке* (4) $L_\mu^+, L_\lambda'^-, L_\lambda^+, L_\mu'^-$, *то положительное направление обхода на внутренней кривой совпадает с направлением по t, а на внешней — противоположно по t* (рис. 265); *б) если полутраектории* (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке* (3) $L_\mu^+, L_\mu'^-, L_\lambda^+, L_\lambda'^-$, *то положительное направление на внешней кривой совпадает с направлением по t, а на внутренней — противоположно направлению по t.*

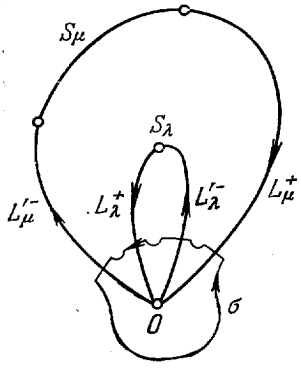


Рис. 265.

Имеет место также следующая обратная лемма:

Лемма 6. *а) Если направление положительного обхода на обеих кривых S_μ и S_λ совпадает с направлением по t, то эти кривые лежат одна вне другой и полутраектории* (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке $L_\mu'^-, L_\mu^+, L_\lambda^-, L_\lambda'^+$. б) Если направление положительного обхода на обеих кривых S_μ, S_λ противоположно направлению по t, то эти кривые лежат одна вне другой и полутраектории* (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке L_λ^-, $L_\mu^+, L_\mu'^-, L_\lambda'^+$.*

Доказательство. Справедливость этой леммы непосредственно вытекает из лемм 4 и 5. В самом деле, докажем, например, утверждение а). Так как на обеих кривых S_μ и S_λ направление положительного обхода совпадает с направлением по t, то из лемм 4 и 5 следует, очевидно, что эти кривые лежат одна вне другой и что полутраектории (2) расположены вокруг точки O в циклическом порядке $L_\mu'^-, L_\mu^+, L_\lambda'^-, L_\lambda^+$.

Доказательство утверждения б) совершенно такое же. Аналогично доказывается следующая лемма:

Лемма 7. *Пусть на одной из кривых S_μ, S_λ направление положительного обхода совпадает с направлением по t, а на другой — противоположно направлению по t. Тогда одна из этих кривых лежит внутри другой и: а) если полутраектории* (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке $L_\mu^+, L_\lambda'^-, L_\lambda^+, L_\mu'^-$, то на внешней кривой положительное направление обхода совпадает с направлением по t (а на внутренней — противоположно); б) если полутраектории* (2) *расположены вокруг точки O в циклическом порядке $L_\mu^+, L_\mu'^-, L_\lambda^+, L_\lambda'^-$, то на внешней кривой положительное направление обхода совпадает с направлением по t (а на внутренней — противоположно).*

Теорема 73. *Пусть $K^{(}$ — ω-, α- или 0-предельный континуум, состоящий более чем из одной простой замкнутой кривой S_i. Тогда: а) если все кривые S_i лежат вне друг друга, то либо на всех этих кривых одновременно положительное направление обхода совпадает с направлением по t, либо на всех этих кривых одновременно оно противоположно направлению по t; б) если среди кривых S_i существует кривая S_j, содержащая остальные кривые внутри себя, то либо на кривой S_j положительное направление обхода совпадает с направлением по t, а на всех остальных кривых S_i оно противоположно направлению по t, либо, наоборот, на кривой S_j оно*

противоположно направлению по t, а на всех остальных кривых S_i $(i \neq j)$ совпадает с направлением по t.

Доказательство. Если континуум $K^{()}$ состоит из двух простых замкнутых кривых S_i, то утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 4—7. Если в состав континуума $K^{()}$ входит n простых замкнутых кривых

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n,$$

где $n > 2$, то, рассматривая последовательно пары кривых S_1 и S_2, S_2 и S_3, ... , S_{n-1} и S_n, нетрудно убедиться в силу лемм 4—7 в справедливости настоящей теоремы.

Замечание. Пусть $K^{()}$ является ω-, α- или 0-предельным континуумом с положительной (отрицательной) стороны и L^* — траектория, для которой $K^{()}$ является ω-, α-предельным, или в случае 0-предельного континуума — замкнутая траектория ячейки, для которой $K^{()}$ является граничным континуумом. Тогда: а) если на кривой S_i, входящей в состав континуума $K^{()}$, направление положительного обхода совпадает с направлением по t, то траектория L^* лежит внутри (вне) кривой S_i; б) если на кривой S_i направление положительного обхода противоположно направлению по t, то траектория L^* лежит вне (внутри) кривой S_i.

3. Взаимное расположение континуумов и их канонических кривых. Пусть C — каноническая кривая предельного континуума $K^{()}$ (см. п. 3 § 24), т. е. цикл без контакта или замкнутая траектория, в зависимости от того, является ли $K^{()}$ — ω-, α- или 0-предельным.

Лемма 8. а) *Если континуум $K^{()}$ лежит внутри канонической кривой C, то $K^{()}$ либо является простой замкнутой кривой, либо состоит из нескольких простых замкнутых кривых, лежащих одна вне другой.* б) *Если континуум $K^{()}$ лежит вне C, то существует входящая в состав континуума $K^{()}$ простая замкнутая кривая, содержащая кривую C внутри, а все другие простые замкнутые кривые S_i, входящие в состав $K^{()}$ (если таковые существуют), лежат внутри нее и не содержат внутри себя кривую C.*

Доказательство. Пусть в случае а) существуют две входящие в состав континуума $K^{()}$ простые замкнутые кривые S_μ и S_λ, из которых одна — S_μ — лежит внутри другой — S_λ. Так как по условию континуум $K^{()}$ лежит внутри канонической кривой C, то кривая S_λ лежит внутри кривой C, а точки всякой канонической окрестности континуума $K^{()}$, очевидно, лежат вне кривой S_λ. Но точки кривой S_μ, лежащей внутри S_λ, не могут быть ни ω (ни соответственно α)-предельными для траекторий, лежащих вне кривой S_λ, ни граничными для ячейки, заполненной замкнутыми траекториями, точки которой лежат вне кривой S_λ.

Мы получаем противоречие, доказывающее утверждение а). В случае б) континуум $K^{()}$ по условию лежит вне кривой C. Предположим, что кривая C лежит вне всех кривых S_i, входящих в состав континуума $K^{()}$. По самому определению канонической окрестности континуума $K^{()}$ является область, граница которой состоит из канонической кривой C и континуума $K^{()}$. При сделанных предположениях областью, в границу которой входят одновременно кривая C и континуум $K^{()}$, может быть только область вне кривой C и вне всех кривых S_i. В границу этой области заведомо должна входить также и граница области G^* (в которой рассматривается динамическая система). Но по самому определению канонической окрестности континуума $K^{()}$ в ее границу не входит ни одна точка, отличная от точек кривой C и континуума $K^{()}$. Таким

образом, сделанное нами предположение приводит к противоречию, и, следовательно, кривая C лежит внутри одной из кривых S_i, например S_1. Но тогда все остальные кривые S_i ($i \neq 1$) не могут лежать вне кривой S_i. В этом случае, очевидно, не могло бы существовать области, граница которой состоит из кривой C и континуума $K^{(\,)}$. А это противоречит тому, что C — каноническая кривая континуума $K^{(\,)}$. Следовательно, все кривые S_i ($i \neq 1$) лежат внутри кривой S_i и, очевидно, одна вне другой (если не считать общих у них точек) и вне кривой C. Лемма доказана.

Замечание. Предположим, что рассматриваемый континуум $K^{(\,)}$ является, например, континуумом K^+_ω. Пусть l — дуга без контакта с концом в принадлежащей континууму K^+_ω точке P, лежащая по положительную сторону K^+_ω, L — траектория, стремящаяся к K^+_ω, $P_1, P_2, \ldots$ — ее точки пересечения с дугой l и C_i — неоднократно рассмотренные замкнутые кривые, состоящие из витка $P_i P_{i+1}$ траектории L и части P_iP_{i+1} дуги l. Тогда в силу замечания 2 к лемме 2 § 24 очевидно, что если континуум K^+_ω лежит внутри (вне) своего цикла без контакта, то K^+_ω лежит также и внутри (вне) всех кривых C_i при достаточно большом i. Наоборот, если континуум K^+_ω лежит внутри (вне) кривых C_i (при достаточно большом i), то он лежит также внутри (вне) всякого своего цикла без контакта.

В случае, когда континуум K^+_ω состоит более чем из одной простой замкнутой кривой S_i ($i = 1, 2, \ldots$), имеет место также следующее обратное утверждение, непосредственно вытекающее из утверждения предыдущей леммы:

Лемма 9. *Пусть предельный континуум $K^{(\,)}$ состоит более чем из одной простой замкнутой кривой S_i. Тогда*: а) *если все простые замкнутые кривые S_i лежат одна вне другой, то каноническая кривая C содержит континуум $K^{(\,)}$ внутри себя*; б) *если среди простых замкнутых кривых S_i одна, например S_1, содержит внутри себя остальные, то каноническая кривая C лежит внутри кривой S_i и вне всех остальных кривых S_i ($i \neq 1$).*

Пусть по-прежнему C — цикл без контакта ω-или α-предельного континуума $K^{(\,)}$. Приведем лемму, в которой направление обхода по t кривых S_i, составляющих континуум $K^{(\,)}$, связывается с направлением обхода циклов без контакта, согласованных с направлением по t (см. п. 3).

Лемма 10. а) *Пусть $K^{(\,)}$ состоит из одной замкнутой кривой или из нескольких замкнутых кривых S_i, лежащих одна вне другой (если не считать их общих точек). Тогда: если положительное направление обхода кривых S_i совпадает с направлением по t (противоположно направлению по t), то положительное направление обхода всякого цикла без контакта континуума $K^{(\,)}$ совпадает с направлением обхода, согласованным с направлением по t (противоположно ему).* б) *Пусть среди простых замкнутых кривых S_i континуума $K^{(\,)}$ существует одна, например S_1, содержащая все остальные внутри себя. Тогда, если положительное направление обхода кривой S_i совпадает с направлением по t (противоположно направлению по t), то положительное направление обхода всякого цикла без контакта континуума $K^{(\,)}$ совпадает с направлением, согласованным с направлением по t (противоположно ему).*

Доказательство. Рассмотрим для определенности континуум K^+_ω. Докажем утверждение а).

Пусть C — какой-нибудь цикл без контакта континуума K_ω и γ — ограниченная им каноническая окрестность. Пусть L_1 — одна из входящих в континуум K^+_ω траекторий и S_1 — та из простых замкнутых кривых, составляющих континуум K^+_ω, в которую входит траектория L_1. Возьмем на траектории L_1 четыре точки A, A_1, A_2 и A_3, соответствующие при

выбранном на L_1 движении значениям t_0, t_1, t_2, t_3, причем предположим, что $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$. Пусть l_0, l_1 и l_2 и l_3 — дуги без контакта с одним концом соответственно в точке A, A_1, A_2 и A_3, лежащие по положительную сторону L_1 и не имеющие друг с другом общих точек (рис. 266). Всякая траектория L, проходящая при $t = t_0$ через точку P_0 дуги l_0, достаточно близкую к точке A, при некотором значении $t_1' > t_0$ пересечет дугу l_1 в точке P_1, не пересекая до этого ни дугу l_0, ни дугу l_1, затем при некотором значении $t_2' > t_1'$ пересечет дугу l_2 в точке P_2 и затем дугу l_3 при некотором $t_3' > t_2$ и, наконец, вторично пересечет дугу l_0 в некоторой точке P_0'. Пусть C' — простая замкнутая кривая, состоящая из витка P_0P_0' траектории L и части P_0P_0' дуги без контакта l_0. Очевидно, части P_1A_1, P_2A_2 и P_3A_3 дуг l_1, l_2 и l_3 не имеют общих точек кроме конца A_1, A_2, A_3 и P_1, P_2, P_3 соответственно с кривыми S_1 и C' и соединяют три точки P_1, P_2, P_3 кривой C' с тремя точками A_1, A_2, A_3 кривой S_1 (рис. 266). (На рисунке положительное направление обхода противоположно направлению по t.) Так как в силу предыдущей леммы и замечания к ней в рассматриваемом нами случае континуум K_ω^+, а значит, и кривая S_1 лежит внутри кривой C', то отсюда, очевидно, следует утверждение а) (см. дополнение, § 2, п. 7). Утверждение б) доказывается полностью аналогично. В случае, когда K^0 — 0-предельный континуум, канонической кривой C является любая замкнутая траектория той ячейки, для которой K^0 является граничным континуумом. При этом в доказательство следует внести очевидные изменения.

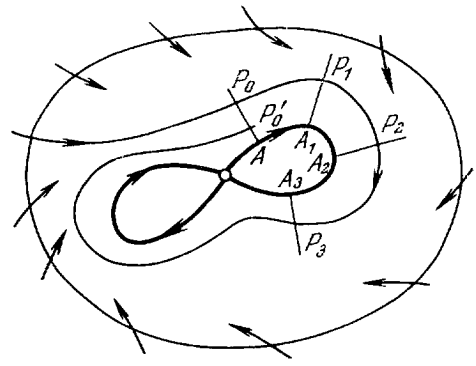


Рис. 266.

Лемма 11. а) *Пусть K^0 — 0-предельный континуум, состоящий из одной простой замкнутой кривой или из нескольких таких кривых S_i, расположенных вне друг друга. Тогда, если положительное направление обхода кривых S_i совпадает с направлением по t (противоположно ему), то и на всякой замкнутой траектории ячейки w, для которой K^0 является граничным, направление положительного обхода совпадает с направлением по t (противоположно ему).* б) *Пусть среди простых замкнутых кривых S_i континуума K^0 имеется одна, например S_1, содержащая все остальные внутри себя. Тогда, если направление положительного обхода кривой S_1 совпадает и с направлением по t (противоположно направлению по t), то направление положительного обхода всякой замкнутой траектории ячейки w также совпадает с направлением по t (противоположно направлению по t).*

4. Свободные и несвободные континуумы. Пусть K^0 — ω (или α)-предельный континуум. Среди траекторий, для которых он является предельным континуумом, могут встретиться особые полутраектории (т. е. орбитно-неустойчивые полутраектории, сепаратрисы или угловые полутраектории).

Континуум K^0 называется *свободным*, если он не является ω-, α-предельным ни для одной особой полутраектории и *несвободным*, если существует хотя бы одна стремящаяся к нему особая полутраектория.

Рассмотрим несвободный ω-предельный континуум $K^{(\cdot)}$. Пусть $L_1^{*(\cdot)}, L_2^{*(\cdot)}, \ldots, L_R^{*(\cdot)}$ — все особые полутраектории, стремящиеся к $K^{(\cdot)}$. Очевидно, каждая из этих полутраекторий является либо полутраекторией сепаратрисы некоторого состояния равновесия, отличного от входящих в $K^{(\cdot)}$, либо угловой полутраекторией. Какой бы цикл без контакта континуума $K^{(\cdot)}$ мы ни взяли, все траектории $L_i^{*(\cdot)}$ пересекают этот цикл без контакта. При этом имеет место

Лемма 12. *Циклический порядок, в котором располагаются на цикле без контакта континуума $K^{(\cdot)}$ точки пересечения с полутраекториями $L_i^{*(\cdot)}$ один и тот же на всех циклах без контакта этого континуума.*

Доказательство. Пусть C_1 и C_2 — какие-нибудь два цикла без контакта континуума $K^{(\cdot)}$. Предположим сначала, что они не имеют друг с другом общих точек. Так как каждая из траекторий $L_i^{*(\cdot)}$ пересекает оба цикла без контакта C_1 и C_2 и каждый из этих циклов только в одной точке, то отсюда, очевидно, следует утверждение леммы в рассматриваемом случае.

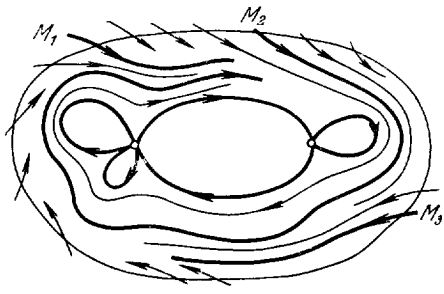


Рис. 267.

Предположим теперь, что циклы C_1 и C_2 имеют общие точки. Всегда существует цикл без контакта континуума $K^{(\cdot)}$, не имеющий общих точек ни с C_1, ни с C_2 (таким циклом будет, например, любой цикл без контакта C', лежащий в достаточно малой окрестности континуума $K^{(\cdot)}$). Тогда, рассматривая сначала циклы C_1 и C', а затем циклы C_2 и C' попарно, не имеющие друг с другом общих точек, нетрудно так же, как и выше, убедиться в справедливости настоящей леммы.

Замечание. Пусть S — простая замкнутая кривая, состоящая из витка траектории, отличной от траекторий $L_i^{*(\cdot)}$ (т. е. не особой) и дуги без контакта, целиком лежащая в какой-нибудь канонической окрестности континуума $K^{(\cdot)}$. Очевидно, все полутраектории L_i^* пересекают дугу без контакта, входящую в состав этой кривой. При этом циклический порядок этих точек пересечения на кривой S тот же, что и циклический порядок этих точек на любом цикле без контакта континуума $K^{(\cdot)}$.

Доказанная лемма позволяет говорить о циклическом порядке особых полутраекторий $L_i^{*(\cdot)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, стремящихся к данному предельному континууму $K^{(\cdot)}$. Именно, это тот циклический порядок, в котором на любом цикле без контакта этого континуума располагаются точки M_i пересечения с траекториями $L_i^{*(\cdot)}$ (рис. 267).

5. Полная (глобальная) схема предельного континуума. Напомним прежде всего понятие локальной схемы предельного континуума. Мы говорим (см. § 24, п. 3), что задана локальная схема предельного континуума K^+ или K^-, если задано перечисление его траекторий и указано, каким именно континуумом он является: ω-, α- или 0-предельным. Из теоремы 72 следует, что локальная схема однозначно определяет топологическую структуру разбиения на траектории замкнутой канонической окрестности континуума $K^{(\cdot)}$. Далее (см. лемму 1), локальная

схема дает возможность определить, из каких траекторий состоят все простые замкнутые кривые S_i, образующие континуум.

Однако, как мы уже говорили, локальная схема не определяет относительного расположения кривых S_i на плоскости, не дает возможности судить, в каком направлении обходятся эти кривые при движении по ним в сторону возрастания t, и не указывает, какие особые полутраектории стремятся к континууму $K^{()}$. Полная схема, к определению которой мы переходим, описывает все перечисленные факты.

Определение XXVIII. *Мы будем говорить, что задана полная схема предельного континуума $K^{()}$, если:* 1) *указано, с какой стороны этот континуум является предельным, с положительной или отрицательной (т. е. указывается, какой знак, +, или —, «находится в скобке» в обозначении $K^{()}$;* 2) *задана локальная схема этого континуума, т. е. указано, является ли он* ω-, α- *или* 0-*предельным, и задается* ω-*перечисление входящих в него траекторий;* 3) *указано, на каких из простых замкнутых кривых S_i, входящих в состав континуума $K^{()}$, положительное направление обхода совпадает с направлением по t, а на каких противоположно этому направлению (кривые S_i определены в силу задания локальной схемы, см. замечание к лемме* 1 § 25); 4) *в случае, когда $K^{()}$ есть* ω- *или* α-*предельный континуум, указаны все стремящиеся к нему особые полутраектории и их циклический порядок, причем отмечено, какие из этих полутраекторий являются угловыми и какие принадлежат орбитно неустойчивым траекториям.*

Пусть $O_1, O_2, \ldots, O_m$ (O) — все состояния равновесия; $L_1, L_2, \ldots, L_R$ (L) — все незамкнутые траектории; $S_1, S_2, \ldots, S_l$ (S) — все простые замкнутые кривые континуума $K^{()}$.

Далее, пусть $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2^{()}, \ldots, \tilde{L}_p^{()}$ $(\tilde{L})$ — все полутраектории, принадлежащие орбитно неустойчивым траекториям и стремящиеся к континууму $K^{()}$, а $\hat{L}_1^{()}, \hat{L}_2^{()}, \ldots, \hat{L}_q^{()}$ $(\hat{L})$ — все угловые полутраектории, стремящиеся к $K^{()}$.

Будем обозначать кривую S_i через S_i^+, если направление положительного обхода совпадает с направлением по t, и через S_i^- в противном случае, и через $S_i^{()}$ в случае, когда подразумевается, что знак +, или — указан, но при этом не фиксируется, какой именно. Тогда полная схема континуума $K^{()}$ задается следующим образом.

I. Указывается, какой из знаков + или — находится в скобке в обозначении K.

II. Указывается, каким является континуум $K^{()}$ — ω-, α- или 0-предельным.

III. Задается ω-перечисление траекторий континуума $K^{()}$.

IV. Задается таблица, описывающая направление обхода кривых S_i (которые определены в силу задания ω-перечисления) при движении по ним в сторону возрастания t, т. е. записывается, из каких траекторий состоят кривые $S_i^{()}$ и какой знак у этой кривой стоит в скобке

$$S_i^{()} \mid L_{\alpha_i'}, O_{\beta_i'}, \ldots, L_{\alpha_i^{(n)}}, O_{\beta_i^{(k)}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

В том частном случае, когда континуум $K^{()}$ является одной замкнутой траекторией L_0, существует одна только замкнутая кривая $S^{()}$, совпадающая с этой траекторией, при этом указанная выше запись будет иметь вид $S^{()} \mid L_0$.

V. Если рассматриваемый предельный континуум $K^{()}$ является не свободным, то задается перечисление в циклическом порядке всех

стремящихся к нему особых полутраекторий (с указанием, какие из них угловые).

Замечание 1. Задание полной схемы определяет взаимное расположение кривых S_i, входящих в состав континуума $K^{()}$, а также расположение относительно кривых S_i тех траекторий, для которых этот континуум является ω-, α- или 0-предельным. В случае, когда континуум $K^{()}$ является одной простой замкнутой кривой L_0 — это непосредственно вытекает из определения «положительной стороны» траектории и указания того, совпадает ли на кривой L_0 направление обхода по t с направлением положительного обхода или противоположно ему; в случае, когда континуум $K^{()}$ состоит из нескольких кривых S_i — это непосредственно следует из замечания к лемме 8.

Замечание 2. В случае, когда континуум $K^{()}$ состоит более чем из одной кривой S_i, его полная схема дает возможность определить вокруг каждого входящего в него состояния равновесия O_j циклический порядок среди принадлежащих $K^{()}$ полутраекторий, стремящихся к этому состоянию равновесия O_j.

Действительно, ω-перечисление континуума $K^{()}$ позволяет указать, какие именно полутраектории стремятся к рассматриваемому состоянию равновесия O_j, а их циклический порядок устанавливается при помощи лемм 4—7. С другой стороны, если относительно $K^{()}$ не указано, с какой стороны, с положительной или отрицательной, он является предельным, но известен циклический порядок, принадлежащих ему полутраекторий вокруг каждого входящего в него состояния равновесия O_j (например, в силу задания полных схем этих состояний равновесия), то на основании лемм 4—7 устанавливается, с какой стороны этот континуум $K^{()}$ является предельным.

Полная схема предельного континуума может быть задана схематическим рисунком *) с указанием обозначений для траекторий. Такое задание является значительно более наглядным и обозримым, чем задание таблицей.

Рассмотрим, например, схему континуума $K_\omega^{(-)}$, заданную таблицей

$$\begin{array}{l} S_1^{(+)} \mid L_1,\ O_1; \\ S_2^{(-)} \mid O_1,\ L_2,\ O_2,\ L_3; \\ S_3^{(-)} \mid O_2,\ L_4. \end{array}$$

Этой таблице соответствует рис. 268. Рассмотрим еще следующую схему континуума $K_0^{(-)}$:

$$\begin{array}{l} S_1^{(+)} \mid L_1,\ O_1,\ L_2,\ O_2; \\ S_2^{(+)} \mid L_3,\ O_1; \\ S_3^{+} \mid L_4,\ O_2. \end{array}$$

Последней схеме соответствует рис. 269.

Предположим теперь, что рассматриваются два ω-, α- или 0-предельных континуума $K^{()}$ и $K^{*()}$ (состоящих из траекторий одной и той же динамической системы или двух различных динамических систем). Сохраняем для траекторий, составляющих континуум $K^{()}$, и для полутраекторий, стремящихся к нему, обозначения, введенные выше.

---

*) Можно задавать схематическим рисунком также и локальную схему. Однако мы не останавливались на этом ввиду того, что локальная схема дает весьма неполные сведения о расположении предельного континуума.

Будем траектории, входящие в состав континуума $K^{*()}$, полутраектории, стремящиеся к нему, простые замкнутые кривые, из которых он составлен, обозначать теми же буквами, но только со звездочками. Пусть, кроме того, m^*, R^*, l^*, p^* и q^*— числа, имеющие соответственно то же значение для континуума $K^{*()}$, что и числа m, R, l, p и q для континуума $K^{()}$.

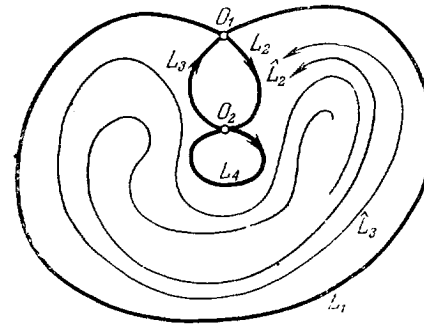


Рис. 268.

Предположим, что локальные схемы этих двух континуумов тождественны (с сохранением направления по t). Тогда между состояниями равновесия (O_j) и (O_j^*) и траекториями (L) и (L^*), отличными от состояний равновесия, может быть установлено одно или несколько *соответствий по схеме*. Каждое такое соответствие по схеме индуцирует естественное соответствие между простыми замкнутыми кривыми S_i, входящими в состав континуума $K^{()}$, и простыми замкнутыми кривыми S_i^*, входящими в состав континуума $K^{*()}$ (соответствующими друг другу являются простые замкнутые кривые, траектории которых соответствуют друг другу). Такое соответствие между кривыми S_i и S_i^* будем также называть *соответствием по схеме*.

Отметим, что при тождественности локальных схем двух континуумов может случиться, что кривым S_i, лежащим одна вне другой, соответствуют кривые S_i^*, из которых одна содержит внутри все остальные. Другими словами, при тождественности локальных схем двух континуумов $K^{()}$ и $K^{*()}$ взаимное расположение кривых S_i и кривых S_i^* может быть различным (см. примеры на рис. 255 и 256).

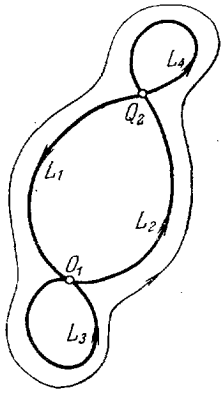


Рис. 269.

Определение XXIX. *Мы будем говорить, что полные схемы двух* ω-, α- *или* 0-*предельных континуумов* $K^{()}$ *и* $K^{*()}$ *тождественны с сохранением ориентации и направления по* t, *если*: 1) *тождественны локальные схемы этих континуумов*; 2) *оба континуума одновременно являются* ω-, α- *или* 0-*предельными с положительной или с отрицательной стороны*; 3) *существует соответствие по локальной схеме между траекториями континуумов* $K^{()}$ *и* $K^{*()}$, *при котором на соответствующих друг другу кривых* S_i *и* S_i^* *этих континуумов направление положительного обхода либо на обеих совпадает с направлением по* t, *либо на обеих противоположно ему* (*т. е. кривой* S_i^+ *соответствует кривая* S_i^{*+}, *а кривой* S_j^- — *кривая* S_j^{*-}), *так что кривые* S_i *и* S_i^* *имеют одинаковое относительное расположение*; 4) *либо оба континуума* $K^{()}$ *и* $K^{*()}$ *являются свободными, либо оба они несвободны, и тогда между особыми полутраекториями, стремящимися соответственно к* $K^{()}$ *и* $K^{*()}$, *существует соответствие, при котором угловым полутраекториям соответствуют угловые и двум последовательным в циклическом порядке полутраекториям соответствуют две последовательные в циклическом порядке.*

Соответствующие друг другу при тождественности схем континуумов $K^{()}$ и $K^{*()}$ (в согласии с пп. 2) и 4)) траектории (L) и (L^*), (O) и (O^*),

полутраектории $(\widetilde{L}^{(\cdot)})$ и $(\widetilde{L}^{*(\cdot)})$, $(\hat{L}^{(\cdot)})$ и $(\hat{L}^{*(\cdot)})$ и простые замкнутые кривые S_i и S_i^* будем называть *соответствующими по схеме.*

При тождественности схем континуумов $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$, очевидно, $m = m^*$, $R = R^*$, $l = l^*$ и в случае, когда $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ — несвободные предельные континуумы, кроме того, $p = p^*$, $q = q^*$ и полная схема континуума $K^{*(\cdot)}$ может быть получена из полной схемы континуума $K^{(\cdot)}$, если в последней обозначение каждой из траекторий (L) (O), полутраекторий $(\widetilde{L}^{(\cdot)})$, $(\hat{L}^{(\cdot)})$ и кривых $S_i^{(\cdot)}$ снабдить звездочкой.

Справедливо и обратное: если полная схема континуума $K^{*(\cdot)}$ может быть получена из полной схемы континуума $K^{(\cdot)}$ путем добавления звездочки в обозначении траекторий (L) и (O) полутраекторий $(\widetilde{L}^{(\cdot)})$ и $(\hat{L}^{(\cdot)})$ и простых замкнутых кривых $S_i^{(\cdot)}$, то полная схема континуума $K^{*(\cdot)}$ тождественна полной схеме континуума $K^{(\cdot)}$. Вопрос о том, одинаковы две полные схемы или нет, сводится к чисто комбинаторной задаче и может быть решен конечным числом испытаний. Если схемы рассматриваемых континуумов $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ тождественны, то они могут быть представлены одним и тем же рисунком.

Рассмотрим канонические кривые C и C^* континуумов $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$, т. е. либо циклы без контакта, либо замкнутые траектории в зависимости от того, являются ли $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ ω-, α- или 0-предельными. Пусть γ и γ^* — канонические окрестности этих континуумов, ограниченные соответственно кривыми C и C^*.

Мы скажем, что континуумы $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ *одинаково расположены относительно канонических кривых C и C^**, когда континуум $K^{(\cdot)}$ лежит внутри (вне) C, то и континуум $K^{*(\cdot)}$ лежит внутри (вне) C^*.

Имеет место

Теорема 74. *Пусть $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ — два предельных континуума, C и C^* — их канонические кривые и γ и γ^* — канонические окрестности, ограниченные каноническими кривыми C и C^*. Если полные схемы континуумов $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ тождественны, то*: 1) *континуумы $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ одинаково расположены относительно своих канонических кривых C и C^**; 2) *существует топологическое отображение замкнутых канонических областей $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}^*$ друг в друга, переводящее траектории в траектории, при котором особые траектории и особые полутраектории (в случае несвободных континуумов), соответствующие друг другу по схеме, отображаются друг в друга.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из условия 3) тождественности полных схем, леммы 8 и теоремы 73.

Справедливость второго утверждения теоремы в случае, когда континуумы $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ являются свободными, непосредственно следует из теоремы 72. В случае, когда континуумы $K^{(\cdot)}$ и $K^{*(\cdot)}$ являются несвободными ω- или α-предельными континуумами, всегда можно в силу условия 4) тождественности схем установить такое топологическое соответствие между точками циклов без контакта C и C^*, при котором точки пересечения с этими циклами полутраекторий $(\widetilde{L}^{(\cdot)})$, $(\hat{L}^{(\cdot)})$ и $(\widetilde{L}^{*(\cdot)})$, $(\hat{L}^{*(\cdot)})$, соответствующих друг другу по схеме, соответствуют друг другу. В силу замечания к теореме 72 существует топологическое отображение замкнутых канонических областей $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}^*$ друг на друга, при котором установленное соответствие между точками циклов C и C^* сохраняется. Таким образом, теорема доказана.

Замечание. В случае свободных континуумов $K^{(}$ и $K^{*(}$ топологическое отображение замкнутых канонических областей $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}^*$ всегда может быть взято таким, чтобы при этом осуществилось любое заданное соответствие между точками циклов без контакта C и C^* (сохраняющее согласованное с направлением по t направление обхода кривых C и C^*).

В случае, когда континуумы $K^{(}$ и $K^{*(}$ несвободные, рассматриваемое в настоящей теореме топологическое отображение замкнутых канонических областей $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}^*$ всегда может быть взято таким, чтобы между точками циклов C и C^* осуществлялось любое топологическое соответствие, при котором принадлежащие этим циклам точки соответствующих друг другу по схеме особых полутраекторий соответствовали друг другу (см. замечание к теореме 72).

§ 26. Схема границы области

1. Угловые точки граничных кривых. Мы предполагаем (см. главу I), что рассматриваемая нами динамическая система D определена в некоторой плоской области G, но рассматривается лишь в замкнутой области $\bar{G}^*$, расположенной целиком в области G и имеющей нормальную границу (см. п. 2 § 16).

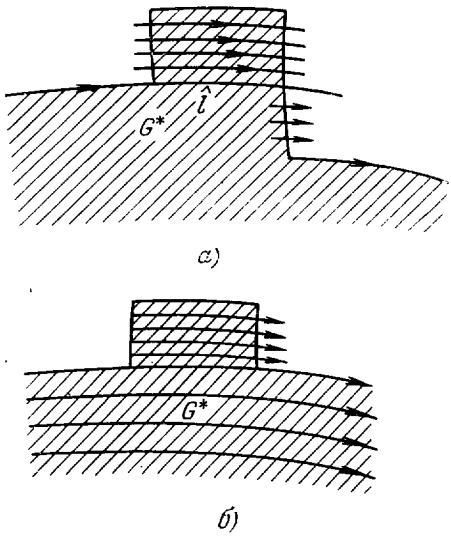


Рис. 270.

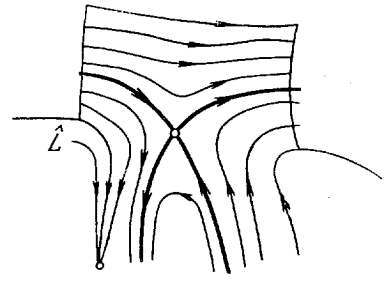


Рис. 271.

Общую точку граничной дуги без контакта и граничной дуги траектории мы называли *угловой точкой границы*, а дугу траектории или полутраектории, имеющую своим концом угловую точку и лежащую внутри $\bar{G}^*$ — *угловой дугой траектории* или *угловой полутраекторией*. Очевидно, каждая угловая дуга $\hat{l}$ траектории является продолжением граничной дуги траектории (или двух таких дуг) (рис. 270, *а*, *б*). Каждая угловая полутраектория $\hat{L}$ также является продолжением граничной дуги траектории (рис. 271).

Сохраняя прежние обозначения для угловых полутраекторий и неугловых особых полутраекторий соответственно $\hat{L}_r$ и $\tilde{L}_s$, будем обозначать граничные дуги траекторий через l_q, граничные дуги без контакта — через λ_q и угловые дуги — через $\hat{l}_p$, а граничную целую траекторию через L_0. Будем замкнутую кривую Γ, граничную для $\bar{G}^*$, обозначать через Γ^+

или Γ^- в зависимости от того, лежит ли область $\bar{G}^*$ внутри или вне ее. Граничную дугу траектории l_i, входящую в какую-то граничную кривую Γ, будем обозначать через l^+, если направление по t на этой дуге совпадает с направлением, индуцированным положительным обходом кривой Γ, и через l^- в противном случае. Конец граничной дуги l_i, соответствующий наибольшему значению параметра t, будем называть ω-концом этой дуги и обозначать через M_i^{ω}, а конец l_i, соответствующий наименьшему значению t, будем называть α-концом и обозначать через M_i^{α}. Будем также угловую точку, являющуюся концом положительной угловой полутраектории, называть ее α-концом, а конец отрицательной угловой полутраектории — ее ω-концом.

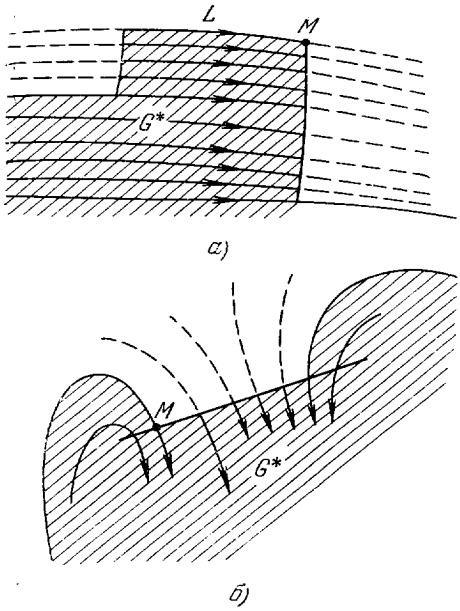


Рис. 272.

Пусть M — угловая точка, являющаяся концом граничной дуги l траектории L. Предположим, что дуга l есть дуга траектории L области G и что точка M соответствует значению t_0 параметра t (при выбранном на L движении). Предположим также для определенности, что M является ω-концом дуги l. Легко видеть, что могут представиться только две возможности.

1) Либо все точки траектории L, соответствующие значениям параметра t, достаточно близким к t_0 и большим чем t_0, лежат вне области $\bar{G}^*$.

2) Либо все такие точки лежат внутри области $\bar{G}^*$.

В первом случае мы будем называть точку M «*ω-внешней угловой точкой*» (рис. 272, *а*), во втором — «*ω-внутренней угловой точкой*» (рис. 272, *б*). Совершенно так же определяется понятие «α-внешней (α-внутренней) угловой точки» для случая, когда M является α-концом дуги l.

Очевидно, *внутренняя* угловая точка M, являющаяся ω (α)-концом граничной дуги l, является в то же время α (ω)-концом угловой дуги или угловой траектории (также принадлежащей траектории L). Мы будем называть такую угловую дугу или полутраекторию ω (α)-*продолжением граничной дуги* траектории L. В свою очередь граничную дугу l мы будем называть α (ω)-продолжением указанной угловой дуги или полутраектории. Таким образом, каждая угловая точка M является либо ω- или α-внешней, либо ω- или α-внутренней.

Рассмотрим дугу без контакта λ. Все траектории, проходящие через внутренние точки дуги λ при возрастании t либо выходят из области G^*, либо все они входят в область $\bar{G}^*$. В первом случае мы будем называть λ *положительной граничной дугой без контакта*, во втором — *отрицательной граничной дугой без контакта*. Аналогично определяется *положительный граничный* и *отрицательный граничный цикл без контакта*.

Лемма 1. *Пусть λ — граничная дуга без контакта, M — принадлежащая ей угловая точка. Тогда если λ — положительная граничная*

дуга без контакта, то M является либо ω-внешней, либо α-внутренней угловой точкой, если же λ есть отрицательная граничная дуга без контакта, то M является либо α-внешней, либо ω-внутренней угловой точкой.

Доказательство. Предположим, что λ является положительной дугой без контакта. Пусть L — траектория, проходящая через точку M, t_0 — значение параметра, соответствующего точке M, AM — дуга траектории L, точки которой соответствуют значениям t, близким к t_0 и меньшим t_0, а BM — такая же дуга, соответствующая значениям t, большим чем t_0. Каждая из дуг AM и BM либо лежит на границе области $\overline{G}^*$, либо внутри, либо вне ее. При этом только одна из этих двух дуг принадлежит границе области $\overline{G}^*$. Так как λ является положительной дугой без контакта, то нетрудно видеть, что дуга AM не может лежать вне области $\overline{G}^*$, а дуга BM — внутри нее. Таким образом, либо дуга AM принадлежит границе области $\overline{G}^*$, а BM лежит вне ее, либо дуга AM лежит внутри $\overline{G}^*$, а BM принадлежит ее границе. В первом случае M является (рис. 273, *а*) ω-внешней угловой точкой, во втором (рис. 273, *б*) α-внутренней.

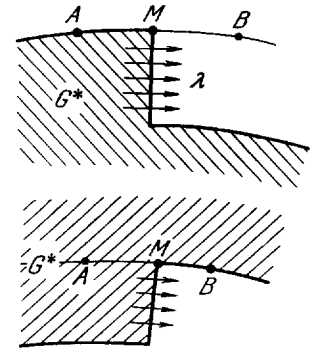


Рис. 273.

Аналогично рассматривается случай, когда λ является отрицательной граничной дугой без контакта. Лемма доказана.

2. Схема граничной кривой, схема границы и тождественность двух схем границы. Пусть Γ_j — какая-нибудь граничная замкнутая кривая. Мы будем рассматривать все особые полутраектории и все угловые дуги, имеющие общие точки с кривой Γ_j. В случае когда Γ_j не является циклом без контакта, то такие полутраектории и дуги либо пересекают кривую Γ_j во внутренних точках граничных дуг без контакта, либо имеют с Γ_j общую внутреннюю угловую точку. Очевидно при этом, что у угловых дуг, пересекающих кривую Γ_j, второй конец, являющийся угловой точкой, может принадлежать как одной из кривых Γ_j, так и какой-нибудь другой из кривых Γ_j (см., например, рис. 274). Особыми полутраекториями, имеющими общие точки, очевидно, являются угловые траектории с концом в угловой точке этой кривой.

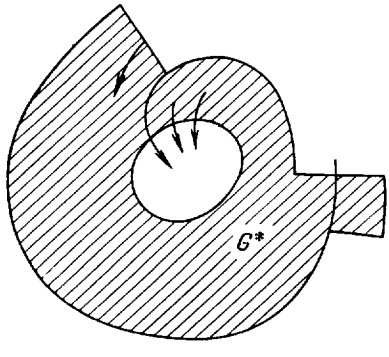


Рис. 274.

Определение XXX. *Мы скажем, что задана схема (или полная схема) граничной кривой Γ_j, если*: 1) *указано, является ли она внешней или внутренней граничной кривой области $\overline{G}^*$ (т. е. наверху у нее помечен знак $+$ или $-$)*; 2) *указано, является ли кривая Γ_j циклом без контакта, замкнутой траекторией или состоит из дуг траекторий и дуг без контакта*; 3) *если кривая Γ_j — цикл без контакта, то указано,*

является ли она положительным или отрицательным циклом без контакта, если кривая Γ_j состоит из дуг траекторий и дуг без контакта — эти дуги перечислены в циклическом порядке, указано, на каких из граничных дуг направление по t совпадает с направлением, индуцированным положительным обходом кривой Γ_j, а на каких — противоположно ему, и, кроме того, указаны все внутренние угловые точки Γ_j; 4) если Γ_j — цикл без контакта, перечислены в циклическом порядке все пересекающие Γ_j особые траектории и угловые дуги, если Γ_j состоит из дуг траекторий и дуг без контакта, то для каждой входящей в Γ_j дуги без контакта λ_i перечислены все имеющие с ней общие точки, особые полутраектории и угловые дуги, причем в том порядке, в котором они встречаются при движении по λ_i, индуцированном положительным обходом кривой Γ_j; 5) если Γ_j — замкнутая траектория, то указано, совпадает ли на ней направление положительного обхода с направлением по t, или противоположно ему.

Схема граничной кривой Γ_j в случае, когда Γ_j — цикл без контакта, может быть задана таблицей следующего типа:

$$\Gamma_j^- \mid \tilde{L}_i^+,\ \hat{L}_j^+,\ \hat{l}_k,\ \ldots$$

(Очевидно, когда Γ_j — отрицательный цикл, все пересекающие его полутраектории являются положительными, когда Γ_j — положительный цикл — отрицательными.)

В случае, когда Γ_j состоит из дуг без контакта и дуг траекторий, схема граничной кривой Γ_j может быть задана следующими таблицами.

Во-первых, таблицей вида

$$\Gamma_p^+ \mid l_i^{(\cdot)},\ \lambda_j,\ M_{k_1}^{\omega},\ l_{i_2}^{(\cdot)},\ \lambda_{i_2},\ \ldots \tag{1}$$

где дуги, составляющие кривую Γ_j, перенумерованы и выписаны в их циклическом порядке, и, кроме того, всякая внутренняя угловая точка границы (и только внутренняя) выписана между теми дугами λ_i и $l_{i+1}^{(\cdot)}$ или $l_k^{(\cdot)}$, λ_{k+1}, общим концом которых она является. Все пефигурирующие в этой записи угловые точки являются внешними.

Во-вторых, таблицей, в которой особые полутраектории и угловые дуги, имеющие общие точки с каждой из входящих в Γ_p дуг λ_j, перечислены в том порядке, в котором они встречаются при движении по λ_j, индуцированном положительным обходом кривой Γ_j:

$$\lambda_j \mid \hat{l}_{\beta_j'},\ \tilde{L}_{\alpha_j'}^{(\cdot)},\ \ldots,\ \hat{L}_{\delta_j'},\ \ldots \tag{2}$$

Замечание 1. Первая из таблиц, описывающая схему граничной кривой, т. е. таблица (1), позволяет определить, какие из дуг без контакта λ_i являются положительными и какие отрицательными дугами без контакта. Действительно, пусть λ_k — одна из этих дуг, $M_k^{(\cdot)}$ — угловая точка, являющаяся общим концом дуг λ_k и l_k. Если точка $M_k^{(\cdot)}$ входит в запись вида (1), то она является внутренней угловой точкой, если нет — то внешней. Кроме того, относительно точки $M_k^{(\cdot)}$ указывается, является ли она ω- или α-концом дуги траектории l_k. Таким образом, если задана локальная схема, то относительно всякой угловой точки известно, является ли она ω- или α-внутренней или ω- или α-внешней. А тогда лемма 1 позволяет заключить, является дуга без контакта l_k положительной или отрицательной дугой без контакта.

Каждая угловая дуга или угловая полутраектория проходит через данную внутреннюю угловую точку.

Пусть, например, схема граничной кривой задана таблицами (3) и (4):

$$\Gamma^+ | \, l_1^+, \ \lambda_1, \ M_2^\omega, \ l_2^-, \ M_2^a, \ \lambda_2, \ M_3^a, \ l_3^+, \lambda_3, l_4^-, \lambda_4, \ \ldots, \ \lambda_j, M_j^\omega, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 | \, \hat{L}_{i_{11}}, \ \widetilde{L}_{i_{12}}, \ \hat{l}_{i_{13}}, \ \ldots, \ \hat{l}_{i_{1s}}, \\ &\lambda_2 | \, \hat{L}_{i_{21}}, \ L_{i_{22}}, \ \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим точку M_2^ω. Из таблицы (3) видно, что M_2^ω есть внутренняя угловая точка, принадлежащая дуге λ_1, причем M_2^ω является последней точкой дуги λ_1 (при обходе этой дуги в направлении положительного обхода кривой Γ^+). Следовательно, в силу таблицы (4) через точку M_2^ω проходит угловая дуга $\hat{l}_{1s}$. Все остальные особые полутраектории и угловые дуги, пересекающие дугу без контакта λ_1, проходят через внутренние ее точки. Аналогично можно рассматривать остальные внутренние угловые точки кривой Γ^+.

Замечание 2. Данные, приводимые в таблицах (3) и (4), не являются вполне не зависимыми друг от друга. Так, например, из записи $\ldots \ l_3^+, \ \lambda_3, \ l_4^{(-)}$ уже следует в силу леммы 1, что у l_4 в скобке должен стоять знак минус. Поэтому при задании схемы можно было бы в таблице (3) опустить знак у $l_4^{(-)}$. Во второй таблице можно было бы не указывать, какие именно особые полутраектории — положительные или отрицательные — в нее входят. В самом деле, рассмотрим, например, первую строку таблицы (4). Мы знаем, что λ_1 есть положительная дуга без контакта. Но тогда, очевидно, полутраектории $\hat{L}_{i_{11}}, \widetilde{L}_{i_{12}}$, пересекающие эту дугу, являются отрицательными полутраекторнями.

Определение XXXI. *Мы будем говорить, что задана схема границы области G^*, если перечислены простые замкнутые кривые, входящие в эту границу, и заданы их схемы.*

Очевидно, схема границы области G^* может быть задана конечным числом таблиц типа (1) и (2). Очевидно, схема границы может быть также задана не таблицей, а схематическим рисунком. Сопоставление схемы границы, записанной в виде таблицы и в виде схематического рисунка, предоставляется читателю.

Предположим теперь, что заданы две различные или совпадающие динамические системы D и D', определенные соответственно в областях G и G'. Пусть эти системы рассматриваются в замкнутых областях соответственно $\bar{G}^*$ и $\bar{G}^{*\prime}$ ($\bar{G}^* \subset G, \ G'^* \subset G'$), причем границы этих областей нормальны и можно дать определение тождественности схем границ, аналогичное соответствующему определению для схем предельных континуумов (см. определение XXIX). Однако для краткости мы ограничимся более формальным определением.

Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ (Γ) — все граничные замкнутые кривые области $\bar{G}^+$, $\hat{L}_1^{(\ )}, \hat{L}_2^{(\ )}, \ldots, \hat{L}_q^{(\ )}$ ($\hat{L}^{(\ )}$) — угловые полутраектории системы D, $\widetilde{L}_1^{(\ )}, \widetilde{L}_2^{(\ )}, \ldots, \widetilde{L}_p^{(\ )}$ ($\widetilde{L}^{(\ )}$) — орбитно-неустойчивые полутраектории системы D, концы которых лежат на границе области G^*,

$$l_1, \ l_2, \ \ldots, \ l_n \ \ (l)$$

— граничные дуги траекторий системы D,

$$\hat{l}_1, \ \hat{l}_2, \ \ldots, \hat{l}_m \ \ (\hat{l})$$

— угловые дуги, λ_1, λ_2, ..., $\lambda_s(\lambda)$ — граничные дуги без контакта области G^* и $M^{\omega}_{i_1}$, $M^{\omega}_{i_2}$, ..., $M^{\omega}_{i_\mu}$, $M^{a}_{j_1}$, $M^{a}_{j_2}$, ..., $M^{a}_{j_\nu}(M)$ — внутренние угловые точки кривых Γ *).

Пусть (Γ'), $(\hat{L}'^{(\ )})$, $(\tilde{L}'^{(\ )})$, (l'), $(\hat{l}')$ и (λ') — соответствующие множества для системы D', рассматриваемой в области $\bar{G}'^*$, а r', q', p', n', m', s', μ', ν' — числа, соответствующие числам r, q, p, n, m, s, μ, ν.

Определение XXXII. *Мы будем говорить, что схемы границ области G^* и G'^* одинаковы, если существует взаимно однозначное соответствие θ между всеми особыми элементами, входящими в множества*

$$(\Gamma),\ (\hat{L}^{(\ )}),\ (\tilde{L}^{(\ )}),\ (l),\ (\hat{l}),\ (\lambda),\ (M)$$

с одной стороны, и всеми элементами, входящими в множества

$$(\Gamma'),\ (\hat{L}'^{(\ )}),\ (\tilde{L}'^{(\ )}),\ (l'),\ (\hat{l}'),\ (\lambda'),\ (M')$$

с другой, при котором циклам без контакта среди кривых (Γ) соответствуют циклы без контакта (Γ'), полутраекториям $(\hat{L}^{(\ )})$ — полутраектории $(\hat{L}'^{(\ )})$, дугам без контакта (λ) — дуги без контакта (λ') и т. д. и которые удовлетворяют следующему условию: если каждый элемент системы D' обозначен тем же символом, что соответствующий ему в силу соответствия θ элемент системы D, но со штрихом, то схема границы области G'^* (т. е. таблица, описывающая эту схему) получается из схемы границы области G^* путем добавления штриха в обозначение каждого элемента.

Когда схемы границ у системы D и D' заданы схематическим рисунком, то, очевидно, в случае тождественности этих схем этот схематический рисунок один и тот же для системы D и D'.

*) Обозначения этих точек связаны с обозначениями граничных дуг l_i.

ГЛАВА XI

СХЕМА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Введение

В предыдущих главах мы рассматривали локальную и полную схемы состояний равновесия и предельных континуумов, а также схему границы.

В настоящей главе вводится понятие *полной схемы динамической системы*, имеющей конечное число особых траекторий. В полную схему динамической системы как составные части входят полные схемы состояний равновесия и предельных континуумов. Полная схема дает исчерпывающее описание взаимного расположения особых элементов и полностью определяет топологическую структуру разбиения на траектории. Основной теоремой настоящей главы является следующая теорема: если схема двух динамических систем D и D', рассматриваемая соответственно в замкнутых областях $\overline{G}^*$ и $\overline{G}^{*\prime}$, тождественна с сохранением ориентации и направления по t, то топологические структуры разбиения областей $\overline{G}^*$ и $\overline{G}^{*\prime}$ соответственно на траектории систем D и D' тождественны. Доказательство этой теоремы заключается в фактическом построении отождествляющего отображения, т. е. топологического отображения области $\overline{G}^*$ в $\overline{G}^{*\prime}$, при котором траектории систем D и D' отображаются друг в друга.

Таким образом, полная схема является топологическим инвариантом динамической системы. Выше, при рассмотрении конкретных примеров, мы неоднократно говорили о том, что для знания топологической структуры разбиения на траектории нужно знать «характер состояний равновесия, число и расположение замкнутых траекторий и ход сепаратрис». Введение понятия схемы динамической системы фактически является внесением точного смысла в указанные наглядные, но весьма расплывчатые определения.

Полную схему естественно считать теми сведениями относительно динамической системы, которые должны быть установлены при полном качественном исследовании динамических систем.

В настоящей главе рассматривается лишь динамическая система с конечным числом особых траекторий, и при этом в плоской ограниченной области имеющей нормальную границу. Однако к рассмотрению такой системы можно свести и рассмотрение всякой динамической системы на сфере, имеющей конечное число особых траекторий. Это может быть сделано, например, следующим образом: всякая динамическая система на сфере имеет по крайней мере одно состояние равновесия. В силу предположения о конечном числе особых траекторий все состояния равновесия у рассматриваемых динамических систем изолированные. Пусть O — одно

из них. Рассмотрим каноническую окрестность O. Каноническая кривая σ, входящая в границу такой окрестности, очевидно, является нормальной границей и делит сферу на две области, каждая из которых может быть (например, с помощью стереографической проекции) отображена на плоскую область с нормальной границей. Таким образом, рассмотрение динамической системы на сфере сводится к рассмотрению систем в двух плоских областях с нормальной границей.

Настоящая глава состоит из трех параграфов. В § 27 проводится вспомогательное рассмотрение: выделяется система канонических окрестностей состояний равновесия и предельных континуумов, удовлетворяющая некоторым естественным требованиям. Эта система канонических окрестностей названа *правильной*.

Затем рассматриваются части дуг и циклов без контакта, на которые они разделяются общими с особыми траекториями точками. Такие части названы элементарными ω- и α-дугами. Циклы без контакта, которые не имеют общих точек с особыми траекториями, называются свободными ω- и α-циклами. Элементарные ω-, α-дуги и ω- и α-циклы играют весьма важную роль при построении топологического отображения, доказывающего основную теорему.

§ 28 посвящен вопросу о взаимном расположении так называемых свободных континуумов. Кроме того, в нем исследуются свойства некоторых частичных областей, на которые естественно разделяется область между выделенными каноническими окрестностями.

В § 29 вводится понятие полной схемы динамической системы, в которой кроме схем всех состояний равновесия и предельных континуумов дается еще описание взаимного расположения свободных предельных континуумов. Затем доказывается основная теорема.

§ 27. Правильная система канонических окрестностей. ω (α)-дуги и ω (α)-циклы

1. Обозначения для особых элементов динамической системы. Напомним прежде всего обозначения, которыми мы пользовались выше. Пусть D — динамическая система, определенная в области G и рассматриваемая в замкнутой подобласти $\bar{G}^*$, имеющей нормальную границу. Пусть $O_1, O_2, \ldots, O_m$ (O) — все лежащие в $\bar{G}^*$ состояния равновесия системы D, $g_1, g_2, \ldots, g_m$ (g) — их канонические окрестности (см. § 19, п. 2) и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ (σ) — соответствующие окрестностям g_i канонические кривые состояний равновесия, т. е. границы канонических окрестностей g_i.

Пусть, далее, $K_1^{(\cdot)}, K_2^{(\cdot)}, \ldots, K_N^{(\cdot)}$ (K) — все (односторонние) предельные континуумы динамической системы D, отличные от состояний равновесия, расположенные в $\bar{G}^*$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ (γ) — их канонические окрестности, $C_1, C_2, \ldots, C_N$ (C) — соответствующие канонические кривые континуумов (K); каждая кривая C_i является либо циклом без контакта, либо замкнутой траекторией и вместе с предельным континуумом K_i составляет границу канонической окрестности γ_i.

2. Правильные системы канонических окрестностей. В дальнейшем мы будем по преимуществу рассматривать *замкнутые* канонические окрестности $\bar{g}_i$ и $\bar{\gamma}_i$. При произвольном выборе канонических окрестностей канонические окрестности различных состояний равновесия, а также канонические окрестности состояний равновесия и предельных континуумов,

очевидно, могут иметь общие точки. Однако при надлежащем выборе канонических окрестностей этого можно избежать (если не считать седловых областей, опирающихся на сепаратрисы, входящие в предельные континуумы, которые всегда имеют общие точки с каноническими окрестностями предельных континуумов). Именно, справедлива следующая

Лемма 1. *Канонические окрестности состояний равновесия и предельных континуумов, отличных от состояний равновесия, всегда могут быть выбраны так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия*: а) *ни одна из канонических кривых* (σ) *и* (*C*) *не имеет общих точек с границей области* $\bar{G}^*$ *и с угловыми дугами* (*но может иметь общие точки с угловыми полутраекториями*); б) *канонические кривые* (σ) *состояний равновесия не имеют друг с другом общих точек, лежат одна вне другой и не имеют общих точек с каноническими кривыми* (*C*) *предельных континуумов, отличных от состояний равновесия*; в) *канонические кривые* (*C*) *различных предельных континуумов, не являющихся состоянием равновесия, и их канонические окрестности* (γ) *не имеют друг с другом общих точек*; г) *ни одна из элементарных областей* (*эллиптических, параболических и седловых*), *являющихся частями канонических окрестностей состояний равновесия, за исключением седловых областей, примыкающих к предельным траекториям, не имеет общих точек с каноническими окрестностями предельных континуумов, отличных от состояний равновесия.*

Доказательство. Докажем сначала, что условие а) всегда может быть выполнено. По определению нормальной границы входящие в нее дуги траекторий, а следовательно, и их продолжения — угловые дуги не могут принадлежать орбитно-неустойчивым траекториям или полутраекториям, целиком лежащим в $\bar{G}^*$. На границе не лежит, в частности, ни одно состояние равновесия. Множество E, состоящее из точек, принадлежащих граничным и угловым дугам, очевидно, является замкнутым множеством. Любое состояние равновесия O_i находится, следовательно, на ненулевом расстоянии от него, и всякая каноническая окрестность, содержащаяся в достаточно малой $U_\varepsilon(O_i)$, очевидно, не имеет общих точек с множеством E.

Рассмотрим теперь предельный континуум $K_i^{(\cdot)}$, не являющийся состоянием равновесия. Ни одна точка границы области или угловой дуги не может быть точкой предельного континуума, за исключением лишь одного случая, когда граничная замкнутая кривая является орбитно-устойчивой замкнутой траекторией и когда состоящая из граничных и угловых дуг замкнутая траектория является граничным континуумом некоторой ячейки w, заполненной замкнутыми траекториями (см. § 24, п. 1). Но в этом случае канонической кривой континуума $K_i^{(\cdot)}$ является любая замкнутая траектория ячейки w, а такая траектория, а также соответствующая каноническая окрестность, состоящая из точек ячейки w, очевидно, не имеет общих точек с множеством E. Во всех же других случаях предельный континуум $K_i^{(\cdot)}$ состоит из орбитно-неустойчивых траекторий и находится на неравном нулю расстоянии от множества E. А тогда, очевидно, всякая каноническая окрестность этого континуума $K_i^{(\cdot)}$, лежащая вместе с ограничивающей ее канонической кривой в $U_\varepsilon(K_i^{(\cdot)})$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ не имеет общих точек с множеством E.

Выполнимость условия б), очевидно, следует из того, что число состояний равновесия и число континуумов, отличных от состояний равновесия, в области $\bar{G}^*$ конечно и что на канонических кривых (*C*) по самому их определению нет состояний равновесия.

Рассмотрим условие в). Пусть даны два различных предельных континуума $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ (не являющихся состояниями равновесия). Мы рассматриваем *односторонние* предельные континуумы (см. главу IX), поэтому *различные* предельные континуумы могут: 1) либо не иметь общих точек; 2) либо иметь не все точки общими; 3) либо, наконец, они могут совпадать как точечные множества, но тогда один из этих континуумов является континуумом K^+, а другой K^-, так что все отличные от состояний равновесия траектории, входящие одновременно в оба континуума, будут в одном из них предельны с положительной стороны, а в другом — с отрицательной стороны. В случае, когда континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ не имеют общих точек — выполнимость условия в) очевидна.

Предположим, что континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ имеют общие точки. Так как по самому определению канонической окрестности через точки канонической окрестности ω (α)-предельного континуума проходят незамкнутые траектории, а через точки канонической окрестности 0-предельного континуума — замкнутые траектории, то, очевидно, канонические окрестности ω-, α- и 0-предельного континуума не могут иметь общих точек. Поэтому остается рассмотреть следующие возможности: 1) оба континуума $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ являются ω (α)-предельными; 2) оба континуума $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ являются 0-предельными; 3) один из континуумов $K_i^{(\cdot)}$ — ω-предельный, а другой $K_j^{(\cdot)}$ — α-предельный.

Рассмотрим случай 1). Пусть для определенности оба континуума $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ являются ω-предельными. Предположим сначала, что не все точки этих континуумов общие, так что континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ различны как точечные множества. Так как все траектории, проходящие через точки любой канонической окрестности $K_i^{(\cdot)}$ и ограничивающего ее цикла без контакта C_i, имеют $K_i^{(\cdot)}$ своим ω-предельным континуумом, а все траектории, проходящие через точки канонической окрестности $K_j^{(\cdot)}$ и ограничивающего ее цикла без контакта, имеют $K_j^{(\cdot)}$ своим предельным континуумом, то очевидно, что в рассматриваемом случае эти канонические окрестности и ограничивающие их циклы без контакта не могут иметь общих точек. Предположим теперь, что континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ совпадают как точечные множества, так что один из этих континуумов является континуумом K_i^+, а другой K_i^-. Пусть L_0 — какая-нибудь отличная от состояния равновесия траектория, входящая в состав этих континуумов. Если канонические окрестности континуумов K^+ и K^- имеют общие точки, то траектория L_0 для всякой траектории L, проходящей через такую общую точку, является предельной как с положительной, так и с отрицательной стороны. Но это невозможно (см. следствие 2 леммы 2 § 4). Таким образом, канонические окрестности двух различных ω (а также двух различных α)-предельных континуумов не имеют общих точек.

Рассмотрим теперь случай 2). Все точки канонической окрестности 0-предельного континуума вместе с ограничивающей ее замкнутой траекторией принадлежат одной и той же ячейке. Отсюда следует, что если канонические окрестности континуумов $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ имеют общие точки, то континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ являются граничными континуумами одной и той же ячейки w, заполненной замкнутыми траекториями. Если континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ имеют общие точки, но не совпадают как точечные множества, то это невозможно, так как граница ячейки, заполненной замкнутыми траекториями, состоит из двух различных континуумов *без общих точек*. Предположим теперь, что континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ совпадают как точечные множества, так что один из этих континуумов $K_i^{(\cdot)}$ является континуумом K_i^+, а другой $K_j^{(\cdot)}$ — континуумом K_j^-. При этом

оба эти континуума являются граничными для одной и той же ячейки w, заполненной замкнутыми траекториями. Тогда всякая отличная от состояния равновесия траектория, входящая в эти континуумы, будет граничной для ячейки w и с положительной и с отрицательной стороны. Но это невозможно в силу леммы 2 § 23. Таким образом, если два различных предельных континуума имеют общие точки, то они граничны для различных ячеек, и их канонические окрестности не имеют общих точек.

Рассмотрим, наконец, случай 3). Предположим снова, что, например, канонические окрестности континуумов K_j^α и K_i^ω имеют общую точку M. Пусть L_M — траектория, проходящая через эту точку. Тогда континуум K_i^ω является предельным для полутраектории L_M^+, а континуум K_j^α — предельным для полутраектории L_M^-. Континуум K_i^ω лежит либо внутри, либо вне канонической кривой C_i. Предположим для определенности, что K_i^ω лежит *вне* кривой C_i (случай, когда он лежит внутри C_i, исследуется аналогично). В силу свойств канонической окрестности все точки полутраектории L_M^-, начиная с некоторого момента, лежат *внутри* C_i, следовательно, предельный континуум ее K_j^α должен лежать внутри C_i. Но тогда континуумы K_i^ω и K_j^α не могут иметь общих точек, что противоречит предположению.

Перейдем к условию г). В случае эллиптических и параболических областей в выполнимости этого условия нетрудно убедиться, повторяя рассуждение, полностью аналогичное проведенному при доказательстве выполнимости условия в).

Рассмотрим седловую область g_c. Предположим, что сепаратрисы, входящие в границу g_c, не являются предельными с той стороны, с которой к ним примыкает эта седловая область. Пусть, кроме того, выполнено условие б). Если бы среди точек области g_c существовали как точки, принадлежащие некоторой канонической окрестности γ, так и не принадлежащие ей, то непременно должны были бы существовать также точки цикла без контакта C, граничного для окрестности γ. А это невозможно в силу того, что условие б) выполнено. Следовательно, либо ни одна точка области g_c не является точкой области γ, либо все точки области g_c являются точками области γ. Во втором случае все точки каждой из дуг без контакта, входящей в границу области g_c, кроме конца, лежащего на граничных для этой области сепаратрисах, тоже принадлежат области γ. Но это, очевидно, означает, что сепаратрисы, входящие в границу области g_c, являются предельными и при этом с той стороны, с которой к ним примыкает рассматриваемая седловая область g_c. А это противоречит сделанному предположению, и, следовательно, условие г) всегда выполнимо. Лемма доказана.

В частности, даже бесчисленное множество точек седловой дуги без контакта (см. § 18, п. 3 и § 19, п. 2) может принадлежать особым полутраекториям: именно, в случае, когда седловая область примыкает к сепаратрисам, являющимся предельными для какой-нибудь особой полутраектории (или нескольких особых полутраекторий).

Если дана произвольная седловая область g_c, то всегда можно указать такую седловую область g_c', являющуюся частью области g_c, что граничная для нее дуга траектории не является дугой особой траектории или полутраектории.

Систему канонических окрестностей, удовлетворяющую условиям а), б), в) и г) леммы 1, *в которой все седловые области имеют своей граничной*

дугой траектории — дугу неособой траектории, будем называть правильной системой канонических окрестностей (или областей).

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только правильные системы канонических окрестностей. Во всякой правильной системе канонических окрестностей канонические окрестности ω-предельных континуумов и устойчивых узлов, а также ω-параболические сектора будем также иногда называть *областями притяжения*. Канонические окрестности α-предельных континуумов и неустойчивых узлов, а также α-параболические секторы будем называть *областями отталкивания*.

Всюду в дальнейшем, как сказано выше, все седловые области выбраны так, что дуги траекторий, входящие в границы, являются дугами неособых траекторий. У каждой седловой дуги без контакта, входящей в границу выбранных таким образом седловых областей, только один конец принадлежит особой траектории или полутраектории. Очевидно, этот конец является концом одной из полутраекторий (сепаратрис), входящих в границу седловой области. Однако отличные от концов точки седловых дуг без контакта могут быть точками особых полутраекторий.

3. Элементарные дуги и свободные циклы без контакта. Предположим, что выбрана некоторая правильная система канонических окрестностей. Всюду в дальнейшем будем обозначать канонические окрестности через (γ) и (g), канонические кривые этой правильной системы канонических окрестностей — через (C), (σ) и через (l) — параболические дуги канонических кривых (σ). Кроме того, в согласии с введенным выше обозначением будем через (Γ) обозначать граничные простые замкнутые кривые и через (λ) — граничные дуги без контакта, и через (λ_c) — седловые дуги, т. е. дуги без контакта, входящие в границы гиперболических секторов (см. § 18, п. 3). При этом, как и выше, (см. § 19, п. 2) седловую дугу будем называть ω-седловой, если в точках этой дуги, отличных от концов, траектории входят внутрь седловой области, и α-седловой дугой, если в точках этой дуги, отличных от концов, траектории выходят из этой области. Очевидно, каждая седловая область g_c имеет одну граничную ω-седловую дугу и одну α-седловую дугу без контакта. Так как выбранная система канонических окрестностей правильная, то только один конец всякой седловой дуги принадлежит особой полутраектории. Конец α-седловой дуги, граничной для седловой области g_c, одновременно является и «концом» α-сепаратрисы, входящей в границу области g_c, а конец ω-седловой дуги —«концом» ω-сепаратрисы, входящей в границу этой области.

Рассмотрим циклы без контакта (C) и (σ), т. е. циклы без контакта, входящие в границы канонических окрестностей предельных континуумов как не являющихся состоянием равновесия, так и являющихся состоянием равновесия (узлом). Те из этих циклов без контакта, которые не имеют ни одной общей точки с особыми полутраекториями, будем называть *свободными циклами без контакта* (C) и (σ). Очевидно, каждый свободный цикл без контакта (C) и (σ) входит в границу канонической окрестности (γ_i) или (g_i) свободного континуума, не являющегося состоянием равновесия или свободного узла. Свободный цикл без контакта (C) или (σ) будем называть ω- или α-циклом в зависимости от того, входит ли он в границу канонической окрестности ω- или α-предельного континуума (и, в частности, устойчивого или неустойчивого узла). Если граничная кривая (Γ) является циклом без контакта и при этом ни одна ее точка

не является концом особой полутраектории или концом особой (узловой) дуги, то мы будем такую кривую называть *свободным граничным циклом без контакта*, а также просто свободным циклом без контакта наряду с определенными выше циклами без контакта.

Свободный граничный цикл без контакта будем называть ω- или α-циклом в зависимости от того, является ли он ω- или α-граничным.

Циклы без контакта (C) и (σ), а также граничные циклы без контакта, не являющиеся свободными, будем называть *несвободными циклами без контакта*. Несвободный цикл имеет общие точки с особыми полутраекториями, а в случае, когда он является граничным,— с особыми полутраекториями или угловыми дугами.

Рассмотрим: а) все простые замкнутые кривые (C), (σ), (Γ), являющиеся несвободными циклами без контакта; в) все параболические дуги без контакта (l), входящие в канонические кривые (σ) состояний равновесия, не являющихся узлами; в) все граничные дуги без контакта (λ).

Пусть рассматриваемый несвободный цикл без контакта имеет более одной общей точки с особыми полутраекториями или же в случае, когда он граничный, с особыми полутраекториями и угловыми дугами. Всеми такими общими с особыми элементами точками этот цикл без контакта разделяется на конечное число простых дуг без контакта, каждая из которых кроме концов не имеет больше ни одной общей точки с особыми полутраекториями или угловыми дугами. Мы будем называть всякую такую дугу без контакта *элементарной дугой*.

Пусть рассматриваемый несвободный цикл без контакта имеет только одну общую точку с особыми полутраекториями, а в случае, когда он граничный,— с особой полутраекторией или угловой дугой. Тогда весь цикл без контакта мы будем называть *элементарной циклической дугой*, а точку этого цикла, принадлежащую особой полутраектории или угловой дуге,— *концом циклической элементарной дуги*.

Рассмотрим теперь параболические дуги без контакта (l) и граничные дуги без контакта (λ). Они могут иметь общие точки с особыми полутраекториями, а дуги (λ) — также еще и с угловыми дугами. Всеми такими общими точками они разделяются на дуги без контакта, которые кроме концов уже не имеют ни одной точки с особыми полутраекториями или угловыми дугами. Такие дуги мы будем также называть *элементарными дугами* (в частности, элементарная дуга может совпадать с самой дугой l или λ). По крайней мере один из концов всякой элементарной дуги принадлежит особой полутраектории или особой дуге траектории (т. е. граничной или угловой дуге траектории). Это очевидно, когда точки элементарной дуги являются точками циклов без контакта (C) или дуг (λ). В случае, когда точки ее являются точками параболической дуги (l), это следует из леммы 4 § 19 и самого определения параболических дуг. Элементарную дугу будем называть элементарной ω (α)-дугой в случае, когда точки ее принадлежат либо циклу без контакта (C) или (σ) ω (α)-предельного континуума, или, в частности, узла, либо параболической дуге (l) ω (α)-параболического сектора, либо положительной (отрицательной) граничной дуге без контакта или положительному (отрицательному) граничному циклу без контакта. В дальнейшем там, где это не может повести к недоразумению, мы будем элементарные ω (α)-дуги называть просто ω (α)-дугами.

Так как элементарные ω- и α-дуги являются частями параболических дуг и циклов без контакта, то, очевидно, что ни одна траектория или

полутраектория не может иметь с ω- и α-дугой или ω- или α-циклом более одной общей точки. При этом имеет место следующая

Лемма 2. *Всякая неособая незамкнутая траектория (целиком лежащая в* $\bar{G}^*$*), которая не является петлей траектории, содержащейся в замкнутой канонической окрестности какого-нибудь состояния равновесия, пересекает в точности одну ω-дугу или один свободный ω-цикл и в точности одну α-дугу или свободный α-цикл.*

Доказательство. Пусть L — траектория, удовлетворяющая условиям леммы. Заметим прежде всего, что у всякой такой траектории непременно существуют точки, лежащие вне всех канонических окрестностей γ, ω- и α-предельных континуумов и вне всех параболических секторов и областей g состояний равновесия. Действительно, всякая траектория L при $t = t_0$, проходящая через точку одной из областей γ и g или через точку цикла или дуги без контакта граничных для такой области, по самому определению областей γ и g непременно выйдет из этой области либо при некотором $t > t_0$, либо при некотором $t < t_0$. Так как рассматриваемая система канонических областей правильная, то нетрудно видеть, что во всяком случае все точки траектории L, соответствующие достаточно близким к t_0 значениям $t < t_0$ (или $t > t_0$), лежат вне всех областей γ_i и g_i. Следовательно, у траектории L, удовлетворяющей условиям леммы, непременно существуют точки, не принадлежащие областям γ_i и g_i. Пусть M — такая точка и τ — соответствующее ей при выбранном движении значение t. При возрастании t (т. е. при некотором $t > \tau$) траектория L либо пересекает границу области $\bar{G}^*$, либо стремится к какому-нибудь состоянию равновесия, либо стремится к континууму $K_\omega^{(\cdot)}$, не являющемуся состоянием равновесия. При этом всякая неособая траектория, стремящаяся при $t \to -\infty$ к состоянию равновесия, непременно должна войти в параболический сектор этого состояния равновесия или в параболическую область, если состояние равновесия — узел.

Таким образом, траектория L непременно должна пересечь либо свободный ω-цикл, либо элементарную ω-дугу в точке, отличной от ее концов. (Точки этой элементарной дуги могут быть точками либо кривых σ_i и C_i, либо граничной кривой Γ_i.) Нетрудно также видеть, что траектория L может пересечь только один свободный ω-цикл или ω-дугу. Действительно, пусть τ_1 — наименьшее из значений $t > \tau$, при котором траектория L пересекает ω-цикл или ω-дугу (такое наименьшее число существует ввиду конечности числа элементарных дуг и свободных циклов), и M_1 — точка траектории L, соответствующая $t = \tau_1$. Если M_1 лежит на границе области $\bar{G}^*$, то она является последней точкой траектории L, принадлежащей этой области. Если же M_1 лежит на кривой σ_i или C_i, то все точки траектории L, для которых $t > \tau_1$, лежат внутри канонической окрестности γ_i или внутри параболического сектора g_i и поэтому не могут принадлежать каким-либо элементарным ω-дугам или свободным ω-циклам. Таким образом, τ_1 является единственным значением параметра t, при котором траектория L пересекает элементарную ω-дугу или свободный ω-цикл.

Точно таким же образом можно убедиться, что траектория пересекает в точности одну элементарную α-дугу или свободный α-цикл. Лемма доказана.

Замечание 1. Так как всякая траектория, пересекающая свободный ω (α)-цикл без контакта или элементарную ω (α)-дугу в отличной

от конца точке, удовлетворяет условию настоящей леммы, то всякая такая траектория пересекает в точности один свободный ω (α)-цикл или ω (α)-дугу.

Замечание 2. Траектория, проходящая через конец элементарной ω (α)-дуги, не может пересечь свободный α (ω)-цикл или α (ω)-дугу в точке, отличной от ее концов. Это, очевидно, следует из того, что конец элементарной дуги либо принадлежит особому элементу, либо принадлежит эллиптической дуге канонической кривой состояния равновесия.

4. Сопряженные элементарные ω- и α-дуги и сопряженные свободные ω и α-циклы. Докажем прежде всего следующую лемму:

Лемма 3. *Все траектории, проходящие через точки одного и того же свободного* ω (α)*-цикла или отличные от концов точки одной и той же элементарной* ω (α)*-дуги, пересекают либо один и тот же свободный* α (ω)*-цикл, либо одну и ту же* α (ω)*-дугу в точках, отличных от концов этой дуги.*

Доказательство. Рассмотрим сначала свободный ω-цикл C_ω. Для доказательства утверждения леммы предположим противное, т. е. что траектории, пересекающие этот цикл, пересекают либо не менее двух различных α-циклов, либо свободный α-цикл и не менее чем еще одну α-дугу, либо, наконец, не менее двух различных α-дуг. Для определенности предположим сначала, что траектории, пересекающие ω-цикл, C_ω, пересекают два α-цикла $C_{1\alpha}$ и $C_{2\alpha}$. Пусть траектория, проходящая через некоторую точку A цикла C_ω, пересекает цикл $C_{1\alpha}$ в некоторой точке A'. Тогда все траектории, проходящие через точки цикла C_ω, достаточно близкие к точке A, также пересекут цикл $C_{1\alpha}$ и при этом в точках, сколь угодно близких к точке A'. Пусть B — точка цикла C_ω, через которую проходит траектория, пересекающая цикл $C_{2\alpha}$. Рассмотрим одну из дуг цикла C_ω, на которую его разделяют точки A и B. Очевидно, на этой дуге непременно должна существовать точка P, являющаяся либо последней при движении по дуге AB от точки A к точке B точкой, через которую проходят траектории, пересекающие цикл $C_{1\alpha}$, либо первой точкой, через которую проходит траектория, не пересекающая цикл $C_{1\alpha}$ и, следовательно, пересекающая цикл $C_{2\alpha}$. В обоих случаях обозначим через Q точку, в которой траектория L, проходящая через точку P, пересекает соответственно цикл $C_{1\alpha}$ или цикл $C_{2\alpha}$. Но все траектории, пересекающие C_ω в точках, достаточно близких к точке P, в силу того, что все эти траектории орбитно-устойчивы, пересекут соответственно цикл $C_{1\alpha}$ (или $C_{2\alpha}$) в точках, сколь угодно близких к точке Q. Но это означает, что точка Q, вопреки предположению, не может быть ни последней точкой, через которую проходит траектория, пересекающая цикл $C_{1\alpha}$, ни первой точкой, через которую проходит траектория, пересекающая цикл $C_{2\alpha}$. Мы приходим к противоречию. Полностью аналогично проводится доказательство также и во всех других возможных случаях. Лемма доказана.

Лемма 4. *Траектории, пересекающие какую-нибудь* ω (α)*-дугу, не могут пересекать свободный цикл без контакта.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что траектории, проходящие через точки ω-дуги без контакта λ_ω, пересекают свободный α-цикл без контакта C_α. Тогда траектории, проходящие через все точки λ_ω, отличные от концов, будут пересекать цикл C_α и траектории, проходящие через все точки C_α, будут пересекать дугу λ_ω в точках, отличных от концов этой дуги (см. замечание 2 к лемме 2).

Пусть Q — конец дуги λ_ω, $\{Q_i\}$ — какая-нибудь последовательность, стремящаяся к точке Q точек дуги λ_ω, и $\{P_i\}$ — точки цикла C_α, в которых траектории, проходящие через точки Q_i, пересекают этот цикл. Очевидно, все точки P_i различны. Кроме того, мы всегда можем предполагать, что $\{P_i\}$ имеет одну только точку сгущения (в противном случае мы бы взяли подпоследовательность из точек Q_i такую, чтобы соответствующая подпоследовательность из точек P_i имела бы единственную точку сгущения). Пусть P — эта точка сгущения и L_P — траек-

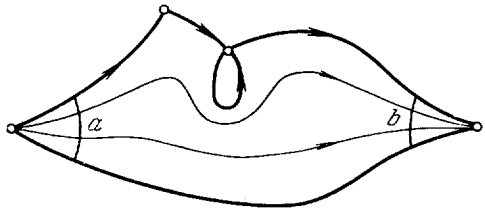


Рис. 275.

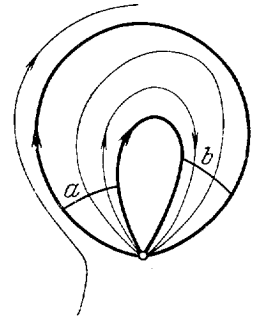


Рис. 276.

тория, проходящая через точку P. Траектория L_P, очевидно, неособая (так как цикл C_α — свободный) и непременно должна (в силу предыдущей леммы) пересечь дугу λ_ω в некоторой точке Q', отличной от концов этой дуги (т. е. от Q). Но все траектории, проходящие через точки, достаточно близкие к точке P, в силу непрерывной зависимости от начальных значений пересекут дугу λ_ω в точках, сколь угодно близких к точке Q'.

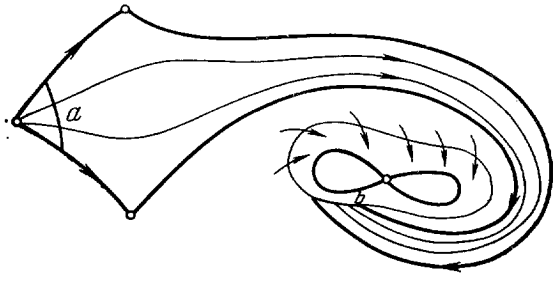


Рис. 277.

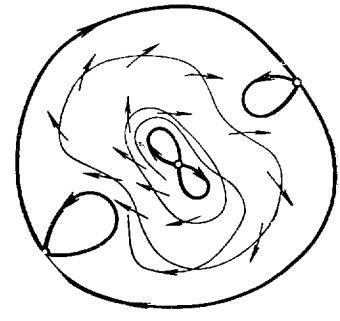


Рис. 278.

В частности, все траектории, проходящие через достаточно близкие к точке P точки P_i, пересекут дугу λ_ω в точках Q_i' при достаточно большом i, сколь угодно близких к точке Q'. Так как точка Q' отлична от точки Q, то при достаточно большом i точки Q_i' заведомо должны быть отличными от точек Q_i. Но, с другой стороны, точки Q_i и Q_i' должны принадлежать одной и той же траектории, именно, траектории, проходящей через точку P_i, а всякая траектория может иметь (в силу леммы 2) с ω-дугой одну только общую точку. Таким образом, мы приходим к противоречию, и лемма доказана.

Следствие 1. Все траектории, пересекающие свободный ω (α)-цикл без контакта, пересекают один и только один свободный α (ω)-цикл без контакта.

Следствие 2. Все траектории, пересекающие ω (α)-дугу без контакта, пересекают одну и только одну α (ω)-дугу без контакта (простую или циклическую).

Будем называть ω-дугу a и α-дугу b, а также ω-цикл и α-цикл *сопряженными*, если все траектории, пересекающие одну из этих дуг, пересекают и другую или все траектории, пересекающие один из этих циклов, пересекают и другой (рис. 275, 276, 277, 278).

Очевидно, траектории, пересекающие сопряженные ω- и α-дуги в точках, отличных от их концов, или сопряженные ω- и α-циклы, принадлежат одной и той же ячейке. Таким образом, все элементарные дуги и все свободные циклы распадаются на пары *сопряженных* дуг и *сопряженных* свободных циклов. Заметим, что циклическая элементарная и нециклическая элементарная дуги могут быть сопряженными. Простой пример представлен на рис. 279. Из двух сопряженных свободных циклов без контакта один или даже оба могут быть граничными циклами без контакта.

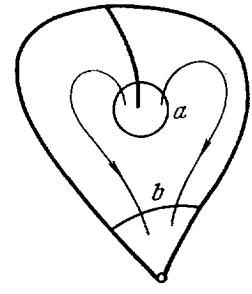


Рис. 279.

Лемма 5. *Две траектории, полутраектории или две дуги траектории одной и той же ячейки пересекают одну и ту же α-дугу и одну и ту же ω-дугу.*

Доказательство. Предположим противное, пусть в одной и той же ячейке существуст две траектории L_1 и L_2, пересекающие две различные α (или ω)-дуги. Соединим какую-нибудь точку A траектории L_1 и какую-нибудь точку B траектории L_2 простой дугой, целиком лежащей в ячейке. Рассуждая совершенно аналогично тому, как мы рассуждали в леммах 3 и 4, нетрудно убедиться в справедливости настоящей леммы.

§ 28. Сопряженные свободные ω-, α-предельные и нуль-предельные континуумы и области между их каноническими окрестностями

1. Взаимное расположение двух свободных сопряженных ω- и α-циклов. Приведем прежде всего лемму, устанавливающую взаимное расположение двух свободных сопряженных ω- и α-циклов.

Лемма 1. *Из двух свободных сопряженных ω- и α-циклов один всегда лежит внутри другого.*

Доказательство. Для доказательства предположим противное, т. е. предположим, что сопряженные циклы C и C' лежат один вне другого. Каждый из цикла C и C' либо является граничной кривой Г, либо не является ею. Если какой-либо из циклов C и C' не является граничной кривой Г, то все его точки в силу того, что он свободный, принадлежат одной и той же ячейке w. В этом случае внутри такого цикла непременно должен лежать граничный для ячейки w континуум. Пусть какой-нибудь из циклов C и C', например C, является граничной кривой Г. Тогда точки области $\overline{G}^*$ лежат либо только внутри цикла C, либо только вне C. Но цикл C сопряжен с циклом C', лежащим вне него, т. е. дуги траекторий, принадлежащие области G^*, соединяют точку цикла C с точками, лежащими вне него, цикла C'. Отсюда очевидно, что точки области G^* лежат вне цикла C, а так как цикл C является свободным, то все точки, лежащие вне него и в достаточно малой его окрестности, принадлежат одной и той же ячейке w. В этом случае сам цикл C является граничным континуумом ячейки w. В обоих рассмотренных случаях все

достаточно близкие к циклам C и C' точки, лежащие вне этих циклов, принадлежат одной и той же ячейке w. Но вне циклов C и C', очевидно, заведомо есть как точки, принадлежащие ячейке w, так и точки, не принадлежащие этой ячейке. А значит, вне циклов C и C' непременно лежат граничные для ячейки w точки и, следовательно, граничный для ячейки w континуум. Этот континуум отличен от циклов C и C'. Но тогда граница ячейки состоит из трех континуумов без общих точек, именно, из двух континуумов, каждый из которых либо лежит внутри цикла C или C', либо совпадает с одним из этих циклов, и третьего континуума, граничного для области $\overline{G}^*$. Но это противоречит теоремам § 16. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Через все точки кольцевой области между двумя сопряженными циклами C_α и C_ω проходят траектории, которые при убывании t пересекают цикл C_α, а при возрастании t цикл C_ω (см. лемму 16 § 3). Очевидно и обратное: если в кольцевой области между C_ω и C_α рассматриваемой системы канонических окрестностей нет особых траекторий, так что всякая проходящая через эту область траектория при убывании t пересекает цикл C_α, а при возрастании — цикл C_ω, то циклы C_α и C_ω являются сопряженными.

Тот из двух сопряженных ω (α)-циклов без контакта, который лежит вне другого, будем называть *внешним сопряженным циклом без контакта*, а тот, который лежит внутри — *внутренним сопряженным циклом без контакта*.

Как уже указывалось выше, один из двух сопряженных циклов или даже оба сопряженных цикла могут быть граничными кривыми. Рассмотрим случай, когда хотя бы один из двух сопряженных свободных циклов не является граничной кривой Γ. Тогда существует ω- или α-предельный континуум, в частности, могущий быть узлом, которому этот цикл принадлежит (т. е. K_ω или K_α, в границу канонической окрестности которого входит этот свободный цикл). Имеет место следующая

Лемма 2. *Если внешний из двух сопряженных циклов без контакта не является граничной кривой* Γ, *то* ω (α)*-предельный континуум, которому он принадлежит, лежит вне его, если внутренний, то* ω (α)*-предельный континуум, которому он принадлежит, лежит внутри его.*

Доказательство. Пусть C и C' — два сопряженных цикла без контакта, и пусть внешний цикл C не является граничной кривой Γ. Для доказательства предположим противное, т. е. что континуум $K^{(\gamma)}$, которому принадлежит цикл C, лежит внутри этого цикла. Но цикл C' тоже лежит внутри цикла C. В кольцевой области между циклами C и C' не может лежать ни одной особой траектории (см. замечание к лемме 1). Отсюда очевидно, что $K^{(\gamma)}$, которому принадлежит цикл C, лежит и внутри цикла C. Но это означает, что цикл C лежит в канонической окрестности γ континуума $K^{(\gamma)}$, ограниченной кривой C'. В случае, когда цикл C' является граничной кривой Γ, это невозможно, так как по самому определению канонической окрестности предельного континуума в ней не может лежать граничная кривая Γ. Но это невозможно также и в случае, когда цикл C' не является граничной кривой Γ в силу того, что выбранная система канонических окрестностей правильная. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы, касающееся внешнего из двух сопряженных циклов. Совершенно аналогично проводится доказательство и при рассмотрении внутреннего сопряженного цикла. Лемма доказана.

2. Сопряженные ω- и α-предельные континуумы. Предельный континуум $K^{(}$, лежащий вне принадлежащего ему цикла без контакта, будем называть *внешним предельным континуумом*, а лежащий внутри принадлежащего ему цикла без контакта — *внутренним предельным континуумом*.

Если C и C' — два сопряженных ω- и α-цикла, не являющиеся граничными кривыми Γ, то ω-предельный и α-предельный континуумы $K^{(}$ и $K'^{(}$, которым эти циклы соответственно принадлежат, будем называть *сопряженными*. Будем также говорить, что континуум $K^{(}$ ($K'^{(}$) является сопряженным континууму $K'^{(}$ ($K^{(}$) (или сопряжен с $K'^{(}$ ($K^{(}$)). Если один из сопряженных циклов C' является граничной кривой Γ, а другой C не является граничной кривой, то мы будем говорить, что континуум $K^{(}$, которому принадлежит цикл C, *сопряжен* с граничным циклом C'. При этом граничный цикл C' мы будем называть *внешним* или *внутренним* в зависимости от того, содержатся ли точки области G^* вне или внутри него. Очевидно, всякий внешний ω (α)-предельный континуум сопряжен либо с внутренним α (ω)-предельным континуумом, либо с внутренним граничным циклом без контакта. Всякий внутренний ω (α)-предельный континуум либо сопряжен с внешним α (ω)-предельным континуумом, либо с внешним граничным циклом. Наконец возможен случай, когда оба сопряженных цикла C и C' являются граничными. Тогда один из них — внешний граничный, а другой — внутренний.

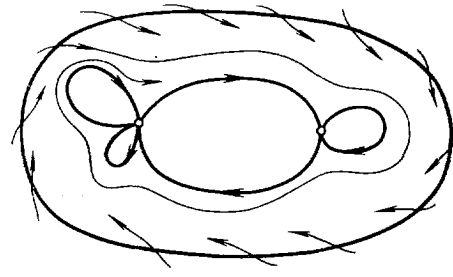


Рис. 280.

Принимая во внимание, что каноническая кривая состояния равновесия может быть циклом без контакта лишь в случае, когда состояние равновесия есть узел, а также в силу леммы 1 § 25 нетрудно видеть, что: 1) внутренний континуум $K_\omega^{(}$ является либо узлом, либо простой замкнутой кривой (в частности — замкнутой траекторией), либо составлен из нескольких простых замкнутых кривых S_i, лежащих одна вне другой (если не считать их общих точек); 2) внешний континуум $K'^{(}_\omega$ ($K'^{(}_\alpha$) либо является простой замкнутой кривой (в частности — замкнутой траекторией), либо состоит из нескольких простых замкнутых кривых и тогда одна из этих замкнутых кривых, S_0, содержит внутри нее остальные, лежащие одна вне другой. Если $K'^{(}$ и $K^{(}$ — два сопряженных предельных континуума, то, очевидно, внутренний континуум $K^{(}$ лежит внутри кривой S_0 внешнего континуума $K'^{(}$.

Имеет место следующая лемма, элементарное доказательство которой мы опускаем:

Лемма 3. а) *Всякие два сопряженных* ω- *и* α-*предельных континуума являются граничными континуумами одной и той же двусвязной ячейки, заполненной целыми траекториями.* б) ω (α)-*предельный континуум и сопряженный с ним граничный цикл без контакта являются граничными континуумами одной и той же двусвязной ячейки, заполненной полутраекториями.* в) *Два сопряженных граничных цикла без контакта являются граничными континуумами одной и той же двусвязной ячейки, заполненной дугами траекторий.*

На рис. 278 представлены случаи, когда сопряженными являются два ω- и α-предельных континуума, на рис. 280 — случай, когда кон-

тинуумы и граничный цикл без контакта являются сопряженными. Наконец, возможен случай двух сопряженных граничных циклов без контакта. Очевидно, в этом случае область между сопряженными циклами без контакта исчерпывает всю область G^*.

3. Сопряженные нуль-предельные континуумы. Перейдем теперь к рассмотрению замкнутых неособых траекторий. Всякая ячейка, заполненная такими траекториями, двусвязна, и граница ее состоит из двух континуумов, которые, как и раньше, мы будем называть 0 (нуль)-предельными континуумами $K_0^{(\,)}$. В частности, один из граничных континуумов может быть состоянием равновесия, именно, центром. Канонической кривой, входящей в границу канонической окрестности $K_0^{(\,)}$, является замкнутая траектория той ячейки, для которой этот континуум является граничным. В силу того, что выбранная система канонических окрестностей правильная, канонические окрестности различных континуумов не имеют общих точек и входящие в их границы канонические кривые (замкнутые траектории) различны. Канонические кривые C и C' двух континуумов $K_0^{(\,)}$ будем называть *сопряженными*, если они являются траекториями одной и той же ячейки.

В силу теоремы 49 § 16 сопряженные канонические кривые всегда лежат одна внутри другой, а в кольцевой области, ограниченной этими кривыми, не лежат точки ни одной особой траектории. Для континуумов $K_0^{(\,)}$ имеет место лемма, полностью аналогичная лемме 2, доказательство которой мы опускаем.

Лемма 4. *Нуль-предельный континуум, которому принадлежит внешняя из двух сопряженных канонических кривых, лежит вне этой кривой, а 0-предельный континуум, которому принадлежит внутренняя из двух сопряженных канонических кривых, лежит внутри нее.*

Так же, как и в случае ω- и α-предельных континуумов, континуум $K_0^{(\,)}$ называется внешним или внутренним в зависимости от того, лежит он вне или внутри принадлежащей ему канонической кривой. Нуль-предельные континуумы, которым принадлежат сопряженные канонические кривые, называются сопряженными. Из двух сопряженных 0-предельных континуумов, очевидно, всегда один внешний, другой внутренний. Очевидно, для каждого внешнего континуума $K_0^{(\,)}$ существует сопряженный с ним внутренний, а для каждого внутреннего — сопряженный с ним внешний. При этом в силу леммы 9 § 25: 1) внутренний континуум $K_0^{(\,)}$ является либо центром, либо простой замкнутой кривой, либо он состоит из нескольких простых замкнутых кривых, лежащих одна вне другой (если не считать общих точек); 2) внешний континуум $K_0'^{(\,)}$ либо является простой замкнутой кривой, либо состоит из нескольких простых замкнутых кривых, и тогда одна из этих кривых S_0 содержит внутри все остальные, лежащие одна вне другой.

Если $K_0^{(\,)}$ и $K_0'^{(\,)}$ — сопряженные континуумы и $K_0^{(\,)}$ — внутренний, то он лежит внутри кривой S_0 внешнего континуума $K_0'^{(\,)}$. При этом имеет место очевидная лемма, доказательство которой опускается.

Лемма 5. *Сопряженные континуумы $K_0^{(\,)}$ и $K_0'^{(\,)}$ являются границами одной и той же ячейки.*

Докажем еще одну лемму, касающуюся сопряженных свободных ω-, α-предельных континуумов и граничных циклов без контакта, а также 0-предельных континуумов. Пусть $K'^{(\,)}$ — внешний ω-, α- или 0-предельный континуум или же внешний граничный цикл без контакта. Очевидно, $K'^{(\,)}$ может быть простой замкнутой кривой, например, в случае, когда

$K'^{(\,)}$ — граничный цикл без контакта или предельный цикл. Мы будем тогда обозначать эту простую замкнутую кривую (совпадающую с $K'^{(\,)}$) через S'_0. Если же $K'^{(\,)}$ не является простой замкнутой кривой, то в силу предыдущего он представляет из себя предельный континуум, одна из кривых S'_0 которого содержит внутри себя все остальные. В этом случае через S'_0 мы будем обозначать эту внешнюю кривую предельного континуума $K'^{(\,)}$.

Лемма 6. *Если $K^{(\,)}$ — сопряженный с $K'^{(\,)}$ α-, ω- или 0-предельный континуум или граничный цикл без контакта, то ни одна простая замкнутая кривая S, входящая в состав какого-нибудь предельного континуума, и ни одна граничная кривая* Γ *не может лежать внутри S'_0 и одновременно содержать $K^{(\,)}$ внутри себя.*

Доказательство. Утверждение для граничной кривой Γ очевидно. В самом деле, если Γ есть граничная кривая, лежащая внутри S'_0 и содержащая $K^{(\,)}$ внутри себя, то точки области G^* существуют как внутри, так и вне кривой Γ, что противоречит определению граничной кривой. Предположим теперь, что существует простая кривая S^*, входящая в состав какого-нибудь предельного континуума $K^{*(\,)}$, лежащая внутри кривой S'_0 и содержащая $K^{(\,)}$ внутри себя. Предположим для определенности, что $K'^{(\,)}$ есть ω- или α-предельный континуум, состоящий из кривой S'_0 и расположенных внутри нее и вне друг друга простых замкнутых кривых $S'_1, S'_2, \ldots, S'_p$, а $K^{(\,)}$ соответственно α- или ω-предельный континуум, состоящий из расположенных вне друг друга простых замкнутых кривых $S_1, S_2, \ldots, S_q$. Пусть C и γ и соответственно C' и γ′ — каноническая кривая и окрестность континуума $K^{(\,)}$ и $K'^{(\,)}$. Кривая S^* не может лежать внутри какой-нибудь из кривых $S'_1, \ldots, S'_p$ или $S_1, \ldots, S_q$, так как тогда и континуум $K^{(\,)}$ лежал бы внутри такой кривой, что, очевидно, невозможно. Кривая S^* не может также иметь общих точек с окрестностями γ′ и γ, так как внутри этих окрестностей нет точек особых траекторий. Следовательно, кривая S^* должна быть целиком расположена в области $\bar{R}$, ограниченной кривыми C' и C. Но это невозможно (см. лемму 16 § 3). Аналогично доказывается утверждение леммы в случае, когда $K^{(\,)}$ и $K'^{(\,)}$ являются сопряженными 0-предельными континуумами и когда один из них или оба являются граничными циклами без контакта. Лемма доказана.

4. Траектории, проходящие через концы сопряженных ω- и α-дуг. Прежде чем переходить к рассмотрению сопряженных ω- и α-дуг, рассмотрим наряду с ω- и α-дугами ω-седловые и α-седловые дуги, являющиеся дугами канонических кривых σ-состояний равновесия выбранной правильной системы канонических окрестностей. Напомним, что седловая дуга, через которую трактории входят в соответствующую седловую область, называется ω-седловой дугой, а седловая дуга, через которую траектории выходят из этой области, называется α-седловой дугой. Очевидно, в то время, как элементарные ω- и α-дуги ограничивают «области притяжения» или «области отталкивания» (ω- и α-параболические области и канонические окрестности ω- и α-предельных континуумов), в которые всякая траектория входит и уже больше не выходит, седловые дуги такие области не ограничивают. Однако по отношению к особым траекториям, отличным от состояния равновесия, они в известном смысле играют роль, аналогичную элементарным дугам. Имеет место следующая лемма, сформулированная для ω-дуг и ω-седловых дуг; полностью аналогичная лемма имеет место для α-дуг и α-седловых дуг.

Л е м м а 7. *Всякая незамкнутая особая орбитно-неустойчивая траектория L, лежащая целиком внутри замкнутой области $\bar{G}^*$, проходит через концы не более чем двух ω-дуг или ω-седловых дуг, причем*: а) *в случае, когда траектория L проходит через конец одной только такой дуги, эта дуга является циклической дугой*; б) *в случае, когда траектория L проходит через концы двух таких дуг, она проходит через общий конец двух дуг, лежащих по разные от нее стороны, причем каждая из этих дуг может быть либо ω-дугой, либо ω-седловой дугой.*

(Справедливо также полностью аналогичное утверждение относительно концов α-дуг или α-седловых дуг, через которые проходит орбитно-неустойчивая траектория.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $t \to +\infty$ траектория L либо стремится к состоянию равновесия, либо стремится к предельному континууму, в состав которого входит хотя бы одна отличная от состояния равновесия траектория. Если траектория L при $t \to +\infty$ стремится к некоторому состоянию равновесия O, то она в конце концов входит внутрь канонической окрестности этого состояния равновесия и больше уже из нее не выходит. Так как траектория L — особая, то, очевидно, в этом случае она непременно проходит через конец, по крайней мере одной ω-дуги или ω-седловой дуги, являющейся дугой канонической кривой σ-состояния равновесия O. При этом в силу того, что рассматриваемая система канонических окрестностей правильная, только один конец всякой ω-седловой дуги лежит на особой траектории, и этот конец является концом полутраектории (ω-сепаратрисы), входящей в границу седловой области. А тогда из самого построения канонических кривых состояний равновесия очевидно, что траектория L, пройдя через конец ω-дуги или ω-седловой дуги, не может уже больше пройти через конец никакой другой ω-дуги или ω-седловой дуги. Если же траектория L не проходит через конец циклической дуги, то она проходит через общий конец двух дуг, лежащих по разные ее стороны, каждая из которых является либо ω-дугой, либо ω-седловой дугой. Таким образом, в рассматриваемом случае утверждение леммы доказано.

Если особая траектория L при $t \to +\infty$ стремится к предельному континууму $K^{(\gamma)}$, не являющемуся состоянием равновесия, то она непременно попадет в каноническую окрестность γ континуума $K^{(\gamma)}$ и непременно пересечет ограничивающий эту окрестность цикл без контакта C в точке, являющейся концом некоторой ω-дуги. При этом траектория L не может пройти через конец ни одной ω-седловой дуги, так как иначе она, в силу сделанных относительно седловых дуг предположений, должна была бы быть ω-сепаратрисой некоторого состояния равновесия, что, очевидно, невозможно. Отсюда и из свойств канонической окрестности предельного континуума, не являющегося состоянием равновесия, следует справедливость утверждения леммы и для этого случая.

З а м е ч а н и е 1. По крайней мере одна среди элементарных ω- и α-дуг или ω- и α-седловых дуг, через концы которых проходит особая орбитно-неустойчивая траектория, должна быть седловой дугой. В противном случае траектория L не могла бы быть орбитно-неустойчивой. В частности, если орбитно-неустойчивая траектория L проходит через конец $\tilde{\omega}$ (α)-циклической дуги, то она не может проходить через конец α (ω)-циклической дуги.

З а м е ч а н и е 2. Лежащий на траектории L конец α-дуги или α-седловой дуги соответствует значению t, меньшему, чем лежащий на ней конец ω-дуги или ω-седловой дуги.

Имеет место также следующая лемма, элементарное доказательство которой, основанное на том, что граница области нормальна, а выбранная система канонических областей правильная, мы опускаем.

Л е м м а 8. *Орбитно-неустойчивая положительная полутраектория L^+ области $\overline{G}^*$, конец которой лежит на границе области $\overline{G}^*$, проходит:* 1) *либо через конец одной циклической граничной α-дуги, либо через общий*

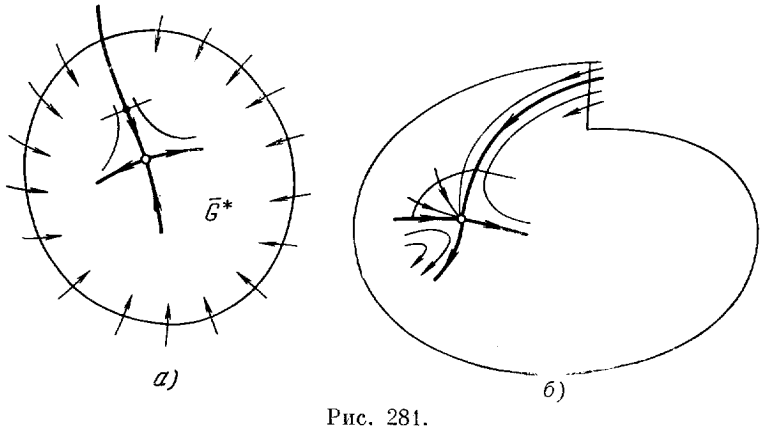


Рис. 281.

конец двух граничных нециклических дуг, лежащих от L^+ по разные стороны, и не проходит через конец α-седловой дуги; 2) *либо через общий конец двух ω-дуг или ω-седловых дуг, лежащих по разные стороны от L^+, причем хотя бы одна из этих дуг является седловой дугой.* (Аналогичное утверждение имеет место для отрицательной орбитно-неустойчивой полутраектории, конец которой лежит на границе области $\overline{G}^*$; см. рис. 281, *а*, *б*.)

5. Леммы о граничных особых элементах и ω- и α-дугах, являющихся частями граничных дуг без контакта.

Л е м м а 9. *Каждый из концов граничной дуги l траектории является концом в точности одной элементарной дуги, именно, концом нециклической граничной ω- или α-дуги. Внутренние точки дуги l не являются концами ω- или α-дуг.*

На рис. 282, 283 буквами λ_i и λ_i' обозначены элементарные дуги. Из них видно, что две элементарные дуги без



Рис. 282.

контакта, концы которых являются концами граничной дуги l, могут лежать как по разные, так и по одну сторону от дуги l.

Замечание 1. Пусть угловая точка B является ω-концом граничной дуги траектории l и концом элементарной дуги без контакта λ. Легко видеть, что если λ является ω-дугой, то λ и область G^* лежат по одну сторону от дуги траектории l, а если λ является α-дугой, то — по разные (рис. 284, *а*, *б*). Аналогично, если точка A является α-концом дуги l и концом элементарной дуги λ, то λ и G^* лежат по одну сторону от l, если λ есть α-дуга, и по разные, если λ есть ω-дуга.

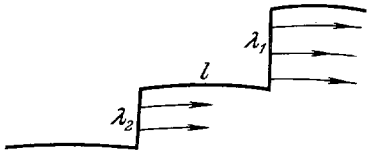


Рис. 283.

Замечание 2. Если ω-конец B граничной дуги l является концом элементарной α-дуги, то в силу леммы 1 § 26 существует угловая дуга или полутраектория с концом B, являющаяся ω-продолжением дуги l. Аналогичное утверждение справедливо для α-конца A дуги l (рис. 285).

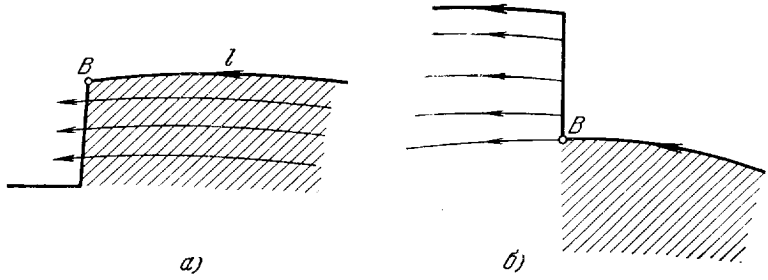


Рис. 284.

Рассмотрим теперь угловую дугу $\hat{l}$. Пусть точки A и B соответственно ее α- и ω-концы. По определению обе точки A и B лежат на границе области G^*, причем либо одна из них (рис. 286, *а*), либо они обе (рис. 286, *б*) являются угловыми точками границы.

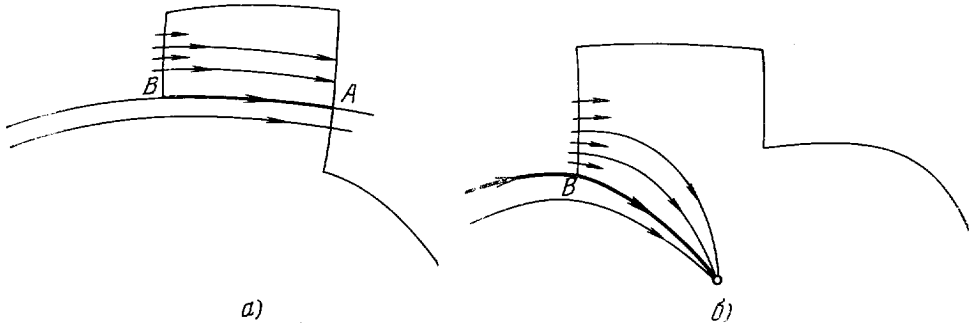


Рис. 285.

Лемма 10. *Если α-конец A угловой дуги $\hat{l}$ есть угловая точка границы, то точка A является концом в точности одной α-дуги, именно, концом элементарной нециклической граничной α-дуги* (рис. 286, *а*). *Если же α-конец A не есть угловая точка, то либо A является концом в точности двух α-дуг, либо концом одной α-дуги. В первом случае обе α-дуги являются*

элементарными нециклическими граничными дугами, лежащими по разные стороны от $\hat{l}$ (рис. 287, *а*), *во втором — α-дуга является элементарной циклической граничной дугой* (рис. 287, *б* и *в*).

Аналогичное утверждение имеет место для ω-конца угловой дуги $\hat{l}$. Ни одна внутренняя точка дуги $\hat{l}$ не может быть концом ω- или α-дуги без контакта.

Рассмотрим теперь угловую полутраекторию. Отметим прежде всего, что угловая полутраектория не может проходить через конец какой-либо седловой дуги, так как тогда, очевидно, она должна была бы быть орбитно-неустойчивой, а это противоречит тому, что граница рассматриваемой области G^* нормальна.

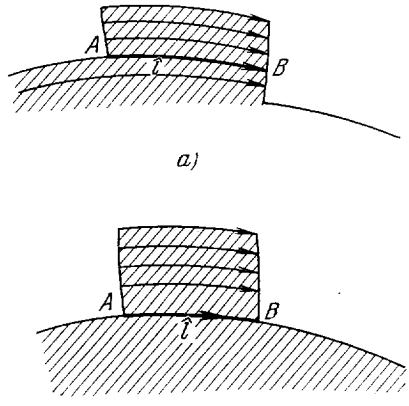


Рис. 286.

Л е м м а 11. *Пусть* $\hat{L}^+$ *— положительная угловая полутраектория. A — ее конец (A — угловая точка границы и существует только одна α-дуга, конец которой лежит на* $\hat{L}^+$, *именно, элементарная граничная дуга, лежащая только по одну сторону* $\hat{L}^+$). *Полутраектория* $\hat{L}^+$ *проходит*: 1) *либо через конец в точности одной (не граничной) ω-дуги, и тогда эта дуга является циклической (не граничной)*; 2) *либо через общий конец двух нециклических ω-дуг, лежащих по разные стороны* $\hat{L}^+$. (Аналогичное утверждение справедливо для отрицательной угловой полутраектории $\hat{L}^-$.)

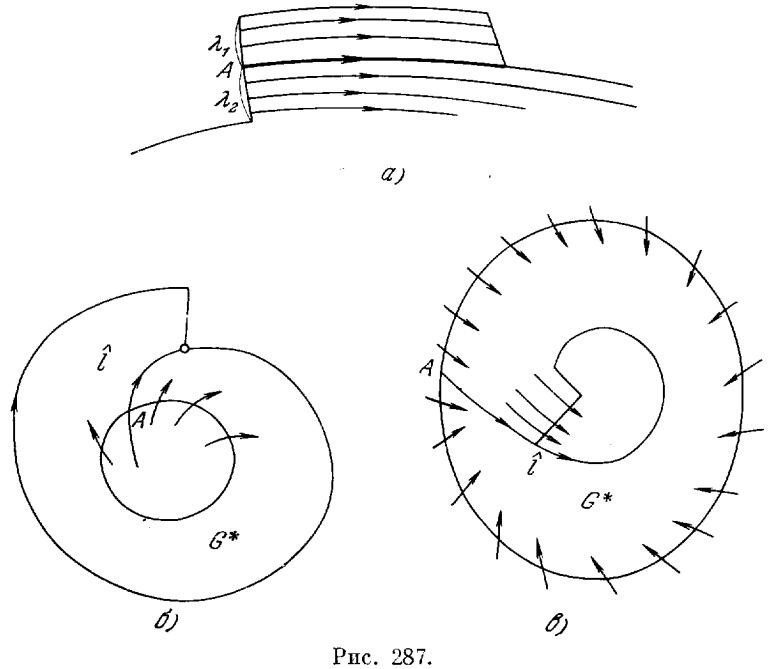


Рис. 287.

6. Цепочки из особых элементов, траекторий и граничных дуг, соединяющих концы сопряженных ω- и α-дуг. Перейдем теперь к рассмотрению пар сопряженных α- и ω-дуг и особых элементов, проходящих через их концы. Очевидно, из самого определения α- и ω-дуг конец α (или ω)-дуги может принадлежать: 1) либо орбитно-неустойчивой траектории, целиком лежащей в области G^*, либо орбитно-неустойчивой полутраектории, конец которой лежит на границе области $\overline{G}^*$; в последнем случае дуга a может быть граничной элементарной дугой; 2) либо граничной или угловой дуге траектории; в этом случае дуга a является граничной дугой без контакта; 3) либо угловой полутраектории; в этом случае дуга a может быть как граничной, так и не граничной дугой без контакта; 4) либо неособой полутраектории, принадлежащей эллиптической области какого-нибудь состояния равновесия O (в этом случае конец дуги a совпадает с концом эллиптической дуги).

Рассмотрим сначала простую α-дугу a, и пусть b — сопряженная с ней ω-дуга. Все следующие леммы, сформулированные для случая, когда рассматриваемая простая α-дуга a лежит по положительную сторону от того особого элемента *) (особой траектории, полутраектории, угловой полутраектории, граничной или угловой дуги траектории), которому принадлежат один из ее концов. Полностью аналогичные утверждения справедливы также и в случае, когда простая α-дуга лежит по отрицательную сторону от особого элемента, которому принадлежит ее конец, а также для простой ω-дуги.

Лемма 12. *Пусть a — простая α-дуга, b — сопряженная с ней ω-дуга, простая или циклическая, и пусть один конец дуги a принадлежит лежащей в G^* орбитно-неустойчивой траектории $\widetilde{L}_0$ или совпадает с лежащим на границе G^* концом орбитно-неустойчивой полутраектории $\widetilde{L}_0^+$* **), причем дуга a лежит по положительную сторону $\widetilde{L}_0$ (или соответственно $\widetilde{L}_0^+$). Тогда*: 1) *либо $\widetilde{L}_0$ ($\widetilde{L}_0^+$) проходит через конец сопряженной с a ω-дуги b, лежащей по положительную сторону $\widetilde{L}_0$ ($\widetilde{L}_0^+$) или являющейся циклической*; 2) *либо существует начинающаяся с $\widetilde{L}_0$ ($\widetilde{L}_0^+$) конечная цепочка отличных друг от друга орбитно-неустойчивых траекторий (последней в этой цепочке может быть полутраектория)*

$$\widetilde{L}_0 (\text{или } \widetilde{L}_0^+),\ \widetilde{L}_1,\ \ldots,\ \widetilde{L}_{R-1},\ \widetilde{L}_R (\text{или } \widetilde{L}_R^-),$$

в которой траектория $\widetilde{L}_{i+1}$ является ω-продолжением траектории $\widetilde{L}_i$ с положительной стороны ($i = 1, 2, \ldots, R-1$), а последняя траектория $\widetilde{L}_R$ (или полутраектория $\widetilde{L}_R^-$) проходит через конец, сопряженный с дугой a ω-дуги b, расположенной по положительную сторону $\widetilde{L}_R$($\widetilde{L}_R^-$) или являющейся циклической ω-дугой (рис. 288).

Доказательство. Пусть A — конец α-дуги a, являющийся точкой орбитно-неустойчивой траектории $\widetilde{L}_0$, и пусть при некотором выборе движения на $\widetilde{L}_0$ эта точка соответствует значению $t = t_0$. Предположим сначала, что траектория $\widetilde{L}_0$ не является ω-продолжаемой с положительной стороны. В силу леммы 7 траектория $\widetilde{L}_0$ непременно должна

*) Отличного от самой этой α-дуги в случае, когда α-дуга — граничная.

**) В этом случае точки рассматриваемой α-дуги, очевидно, являются точками граничной дуги без контакта, а полутраектория $\widetilde{L}_0^+$ в силу того, что она орбитно-неустойчива, заведомо не является угловой полутраекторией.

при некотором значении $t > t_0$ пройти либо через конец B циклической ω-дуги, либо через общий конец B двух дуг, лежащих по разные стороны $\widetilde{L}_0$, каждая из которых может быть либо элементарной ω-дугой, либо ω-седловой дугой.

В первом случае из леммы 5 § 3 очевидно, что все траектории, при $t = t_0$ пересекающие дугу a достаточно близко к концу A, при $t > t_0$ пересекут циклическую ω-дугу с концом в точке B. Это означает, что рассматриваемая циклическая ω-дуга сопряжена с дугой a. Так как существует единственная ω-дуга, сопряженная с данной α-дугой, то эта циклическая дуга и является дугой b. Во втором случае рассмотрим ту из двух дуг с концом в точке B, которая лежит по положительную сторону $\widetilde{L}_0$. Так как по предположению трактория $\widetilde{L}_0$ не является ω-продолжаемой с положительной стороны, то эта дуга не может быть ω-седловой дугой, а является элементарной ω-дугой. Но тогда в силу леммы 5 § 3 эта дуга является ω-дугой, сопряженной с дугой a и, следовательно, дугой b.

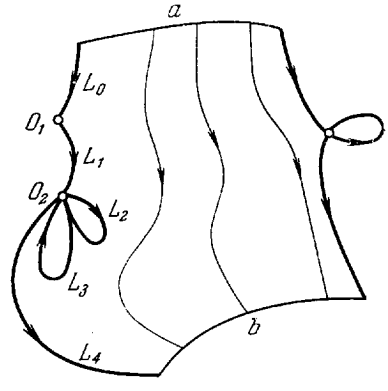


Рис. 288.

Предположим теперь, что траектория $\widetilde{L}_0$ продолжаема с положительной стороны. Пусть O_1 — состояние равновесия, к которому она стремится при $t \to +\infty$, а $\widetilde{L}_1$ — траектория, являющаяся ее ω-продолжением с положительной стороны. Траектория $\widetilde{L}_1$ либо не является ω-продолжаемой с положительной стороны, либо ω-продолжаема с положительной стороны, тогда мы рассмотрим ω-предельную точку O_2 траектории $\widetilde{L}_1$ и траекторию, являющуюся ω-продолжением $\widetilde{L}_1$ с положительной стороны. Продолжая аналогичное рассуждение, мы получаем последовательность орбитно-неустойчивых траекторий и состояний равновесия:

$$\widetilde{L}_0,\ O_1,\ \widetilde{L}_1,\ O_2,\ \ldots, \tag{1}$$

в которой: а) каждая точка O_{i+1} является ω-предельной для траектории $\widetilde{L}_i$ и α-предельной для траектории $\widetilde{L}_{i+1}$; б) каждая траектория $\widetilde{L}_{i+1}$ является ω-продолжением с положительной стороны траектории $\widetilde{L}_i$. Покажем, что во всякой полученной таким образом последовательности мы всегда дойдем либо до некоторой траектории $\widetilde{L}_R$, не имеющей ω-продолжения с положительной стороны, либо до полутраектории $\widetilde{L}_R^-$ с концом на границе области $\overline{G}^*$, на которой эта последовательность оборвется.

Для доказательства предположим противное, т. е. что полученная последовательность не обрывается, так что мы никогда не доходим до траектории, не имеющей ω-продолжения с положительной стороны. Так как орбитно-неустойчивых траекторий — конечное число, то все траектории $\widetilde{L}_0$, $\widetilde{L}_1$, ... не могут быть различными. Пусть R — наименьшее целое положительное число такое, что траектории $\widetilde{L}_0$, $\widetilde{L}_1$, ..., $\widetilde{L}_R$ различны, а траектория $\widetilde{L}_{R+1}$ совпадает с одной из них, например с траекторией $\widetilde{L}_p$, $0 \leqslant p \leqslant R$. Если $p \neq 0$, то траектории $\widetilde{L}_R$ и $\widetilde{L}_{p-1}$ имеют одно и то же

ω-продолжение $\widetilde{L}_{R+1}$ с положительной стороны, т. е. траектория $\widetilde{L}_{R+1}$ имеет два различных α-продолжения с положительной стороны, что не может быть. Предположим, что $p = 0$. Тогда траектория $\widetilde{L}_R$ имеет своим ω-продолжением с положительной стороны траекторию $\widetilde{L}_0$, т. е. $\widetilde{L}_0$ продолжаема с положительной стороны. Но это противоречит тому, что траектория $\widetilde{L}_0$ проходит через конец элементарной α-дуги a, расположенной по положительную сторону от $\widetilde{L}_0$. Таким образом, всякая последовательность типа (1) непременно обрывается на некоторой траектории $\widetilde{L}_R$, которая уже не имеет ω-продолжения, или на некоторой полутраектории $\widetilde{L}_R^-$ с концом, лежащим на границе области $\overline{G}^*$. Нетрудно также показать, повторяя в точности такое же рассуждение, как и выше, что все траектории $\widetilde{L}_0$, $\widetilde{L}_1$, . . ., $\widetilde{L}_R$ различны.

Состояния равновесия O_1, O_2, . . ., O_R могут совпадать — частично или полностью. Так как траектория $\widetilde{L}_R$ — не продолжаемая с положительной стороны, то, повторяя рассуждение, проведенное относительно траектории $\widetilde{L}_0$ при рассмотрении первой возможности, нетрудно убедиться в том, что траектория $\widetilde{L}_R$ проходит через конец ω-дуги b, сопряженной с дугой a, либо расположенной по положительную сторону $\widetilde{L}_R$, либо циклической. Если последней в последовательности (1) является полутраектория $\widetilde{L}_R^-$ с концом на границе области G^*, то тогда (см. лемму 8) она проходит либо через конец простой ω-дуги, лежащей по положительную сторону от нее, либо через конец граничной циклической ω-дуги.

В обоих случаях нетрудно, как и выше, убедиться в справедливости утверждения леммы. Таким образом, лемма доказана.

Замечание 1. Из самого доказательства настоящей леммы следует, что справедливо также утверждение, в известном смысле обратное утверждению настоящей леммы. Пусть орбитно-неустойчивая траектория $\widetilde{L}_0$ проходит через конец α-дуги a, лежащей от нее по положительную сторону. а) Если $\widetilde{L}_0$ не является ω-продолжаемой с положительной стороны, то существует ω-дуга b, имеющая своим концом точку $\widetilde{L}_0$, либо лежащая по положительную сторону $\widetilde{L}_0$, либо циклическая, и дуги a и b являются сопряженными. б) Если $\widetilde{L}_0$ является ω-продолжаемой с положительной стороны, то существует цепочка траекторий (1) и существует ω-дуга b, имеющая своим концом точку траектории $\widetilde{L}_R$ (или полутраектории $\widetilde{L}_R^-$), либо лежащая по положительную сторону $\widetilde{L}_R$ ($\widetilde{L}_R^-$), либо циклическая, причем *дуги a и b являются сопряженными дугами.*

Замечание 2. Все траектории цепочки являются граничными для одной и той же ячейки, именно, для ячейки, траектории которой пересекают рассматриваемые ω- и α-дуги в точках, отличных от их концов. Совершенно аналогичное утверждение справедливо в случае, когда через конец дуги a проходит полутраектория $\widetilde{L}_0^+$.

Концы A и B сопряженных простых α- и ω-дуг, либо лежащие на одной и той же особой траектории $\widetilde{L}_0$ или полутраектории $\widetilde{L}_0^+$, либо на первой и последней траектории или полутраектории в цепочке траекторий (1),— будем называть *сопряженными концами сопряженных дуг.*

Рассмотрим теперь случай, когда конец одной из сопряженных дуг a и b, именно, простой α-дуги a, является концом граничной угловой дуги траектории или концом угловой полутраектории.

Лемма 13. *Пусть конец простой α-дуги a является концом граничной или угловой дуги l_0 или угловой полутраектории $\hat{L}^+$, причем дуга a лежит по положительную сторону l_0 или соответственно $\hat{L}^+$. Тогда либо ω-конец дуги l_0 или соответственно точка полутраектории $\hat{L}^+$ является концом сопряженной с a дуги b, лежащей по положительную сторону l_0 ($\hat{L}_0^+$), или циклической, либо в случае дуги l_0 существует начинающаяся с l_0 конечная цепочка из чередующихся угловых и граничных дуг траекторий l_0, l_1, l_2, . . ., l_{R-1} таких, что: 1) дуга l_1 является ω-продолжением l_0* (см. п. 1 § 26), *и каждая дуга l_i является ω-продолжением дуги l_{i-1} ($i = 1, 2, \ldots, R-1$) и, кроме того, существует либо еще одна граничная или угловая дуга траектории l_R, являющаяся ω-продолжением дуги l_{R-1}, которая уже не имеет продолжения, либо угловая полутраектория $\hat{L}_R'^+$, являющаяся продолжением дуги l_{R-1}; 2) все элементарные дуги, отличные от дуг a и b, имеющие своими концами концы дуг l_0, l_1, . . ., l_{R-1}, а также ω-конец дуги l_R, не являются циклическими и расположены с отрицательной стороны этих дуг; 3) если ω-продолжение дуги l_{R-1} — граничная или угловая дуга l_R, то ее ω-конец является концом сопряженной*



Рис. 289.

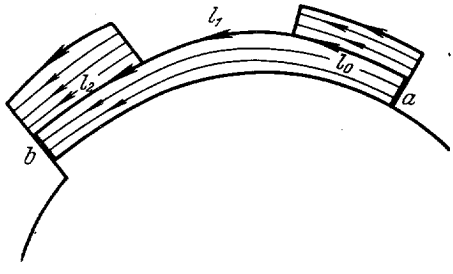


Рис. 290.

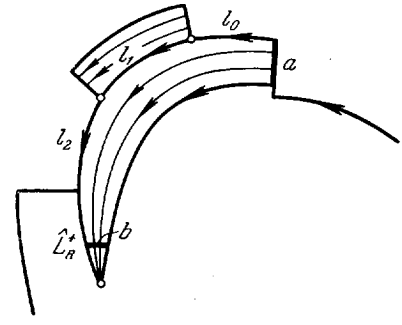


Рис. 291.

с a ω-дуги b, являющейся граничной ω-дугой, либо лежащей по положительную сторону l_R, либо циклической.

Если ω-продолжение дуги l_{R-1} — угловая полутраектория $\hat{L}_R^+$, то она проходит через конец сопряженной с a ω-дуги b (не являющейся граничной), либо лежащей по положительную сторону $\hat{L}_R$, либо циклической. (Полностью аналогичное утверждение справедливо и для простой ω-дуги b.)

Доказательство сформулированной леммы непосредственно вытекает из основных определений (угловых граничных дуг и т. д.), а также из определения нормальной границы, и мы его опускаем.

Иллюстрации к настоящей лемме даны на рис. 289, 290, 291.

Замечание 1. Все дуги l_1, l_2, . . ., l_{R-1}, а также дуга l_0 и соответственно дуга l_R или полутраектория $\hat{L}_R^+$ по самому определению граничных и угловых дуг, а также угловых полутраекторий, служащих продолжением друг друга, являются дугами, соответственно полутраекториями одной и той же траектории L исходной области G (в которой определена система (I)).

Замечание 2. Справедливо также утверждение, обратное утверждению настоящей леммы. Пусть конец граничной простой α-дуги a является концом граничной или угловой дуги l_0 или угловой полутраектории $\hat{L}_0^+$, причем дуга a лежит по положительную сторону дуги l_0 или полутраектории $\hat{L}_0^+$. Тогда: 1) либо ω-конец дуги l_0 является концом ω-дуги b, лежащей по положительную сторону l_0, или циклической (или соответственно траектория $\hat{L}_0^+$ проходит через конец ω-дуги b, лежащей по ее положительную сторону), и дуги a и b являются сопряженными; 2) либо существует описанная в настоящей лемме цепочка чередующихся граничных и угловых дуг, в которой последняя граничная угловая дуга или угловая полутраектория проходит через конец ω-дуги b, лежащей от нее по положительную сторону, или циклической, и при этом *дуги a и b являются сопряженными.*

Сформулируем теперь лемму, касающуюся того случая, когда через конец простой α-дуги a, не являющейся граничной, проходит угловая полутраектория $\hat{L}_0^-$. Эта лемма в некоторой своей части является почти дословным повторением предыдущей. Доказательство ее опускается.

Лемма 14. *Пусть через конец простой α-дуги a, не являющейся граничной, проходит угловая полутраектория $\hat{L}_0^-$, причем дуга a лежит по положительную сторону $\hat{L}_0^-$. Тогда либо конец угловой полутраектории $\hat{L}_0^-$ является концом сопряженной с a дуги b, являющейся граничной дугой и лежащей по положительную сторону $\hat{L}_0^-$, либо существует последовательность из чередующихся граничных и угловых дуг траекторий l_0, l_1, l_2, . . . , l_{R-1} таких, что: 1) дуга l_0 является ω-продолжением полутраектории $\hat{L}_0^-$, а каждая дуга l_i является ω-продолжением дуги l_{i-1} ($i = 1, 2, 3, \ldots, R$), и, кроме того, существует либо еще одна граничная или угловая дуга траектории l_R, являющаяся ω-продолжением дуги l_{R-1}, которая сама уже не имеет продолжения, либо угловая полутраектория $\hat{L}_R^+$, являющаяся продолжением дуги l_{R-1}; 2) все элементарные дуги, отличные от дуг a и b, имеющие своими концами концы дуг l_0, l_1, . . . , l_{R-1}, не являются циклическими и расположены с отрицательной стороны этих дуг; 3) если ω-продолжение дуги l_{R-1} — граничная или угловая дуга l_R, то ее ω-конец является концом сопряженной с a ω-дуги b, являющейся граничной ω-дугой, либо лежащей по положительную сторону l_R, либо циклической.*

Если ω-продолжение дуги l_{R-1} — угловая полутраектория $\hat{L}_1^+$, то она проходит через конец сопряженной с a дуги b, являющейся простой не граничной дугой и лежащей от нее по положительную (отрицательную) сторону. (Полностью аналогичное утверждение справедливо и при рассмотрении ω-дуги b.)

Доказательство этой леммы, так же как и предыдущей, мы опускаем. Иллюстрации к этой лемме даны на рис. 292, 293.

Замечание 1. Так же, как и в предыдущей лемме, полутраектория $\hat{L}_0^-$, дуги l_i и полутраектория $\hat{L}_R^+$ являются полутраекториями и дугами одной и той же траектории L, лежащей в исходной области G.

Замечание 2. Справедливо также и утверждение, обратное утверждению настоящей леммы, формулировку которого, полностью аналогичную приведенной в замечании к предыдущей лемме, мы опускаем.

В предыдущих леммах мы предполагали, что та из двух сопряженных дуг, через конец которой проходит рассматриваемый нами особый

элемент, является простой дугой. Сформулируем теперь две леммы для случая, когда та из двух дуг, через конец которой проходит рассматриваемый особый элемент, является циклической.

Л е м м а 15. *Пусть a — циклическая α-дуга и либо через конец ее проходит орбитно-неустойчивая траектория $\widetilde{L}_0$, либо конец ее является*

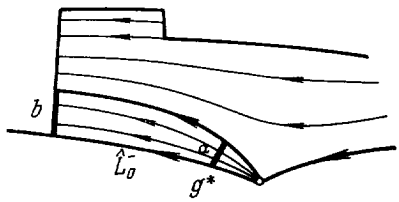


Рис. 292.

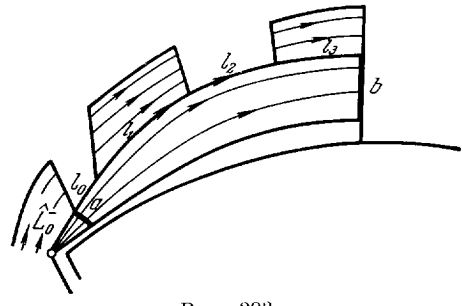


Рис. 293.

*лежащим на границе области G^* концом орбитно-неустойчивой полутраектории $\widetilde{L}_0^+$ *). Тогда существуют две начинающиеся с $\widetilde{L}_0$ ($\widetilde{L}_0^+$) конечные цепочки траекторий (последними в каждой из этих цепочек могут быть полутраектории)*

$$\widetilde{L}_0,\ (\widetilde{L}_0^+),\ \widetilde{L}_1,\ \ldots,\ \widetilde{L}_R\ (\widetilde{L}_R^-), \tag{2}$$

$$\widetilde{L}_0,\ (\widetilde{L}_0^+),\ \widetilde{L}_1',\ \ldots,\ \widetilde{L}_S'\ (\widetilde{L}_S'^-), \tag{3}$$

в первой из которых каждая последующая траектория является ω-продолжением предыдущей с положительной стороны, а во второй — с отрицательной стороны и при этом: 1) *если дуга b, сопряженная с a, является простой дугой, то последние в цепочках* (2) *и* (3) *траектории $\widetilde{L}_R$, $\widetilde{L}_S'$ (или полутраектории $\widetilde{L}_R^-$, $\widetilde{L}_S'^-$) различны и проходят через различные концы этой дуги* (рис. 279); 2) *если дуга b является циклической дугой, то последняя в обеих цепочках* (2) *и* (3) *траектория (или полутраектория) одна и та же и она проходит через конец этой дуги* (рис. 294).

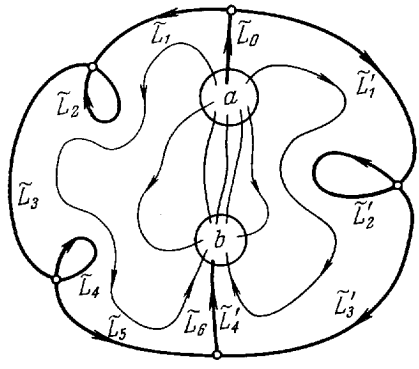


Рис. 294.

Из двух последовательностей (2) *и* (3) *только одна может состоять из одной траектории $\widetilde{L}_0$.*

Доказательство этой леммы проводится рассуждением, полностью аналогичным проведенному при доказательстве леммы 12.

З а м е ч а н и е. Справедливо также утверждение, обратное утверждению настоящей леммы: пусть орбитно-неустойчивая траектория проходит через конец циклической α-дуги a. Тогда существуют две начинающиеся с $\widetilde{L}_0$ последовательности траекторий (2) и (3), описанные в настоящей лемме, и в случае, когда последние

*) В этом случае дуга a, очевидно, является граничной циклической α-дугой.

в этих цепочках траектории $\tilde{L}_R$ и $\tilde{L}_S$ (или полутраектории) — различны — они проходят через различные концы одной и той же простой ω-дуги b, а в случае, когда последняя в цепочках (2) и (3) траектория или полутраектория одна и та же, она проходит через конец циклической дуги b, и в обоих случаях *дуги a и b являются сопряженными.*

Совершенно такое же утверждение справедливо в случае орбитно-неустойчивой полутраектории, конец которой, лежащий на границе области G^*, является концом граничной циклической дуги.

Если дуга a — циклическая, то, очевидно, существует еще возможность, когда через конец ее проходит угловая дуга (в этом случае дуга a — граничная), а также возможность, когда через конец ее проходит угловая полутраектория. В последнем случае концом дуги a заведомо не может быть конец угловой полутраектории, так что в этом случае дуга a не является граничной. Имеет место

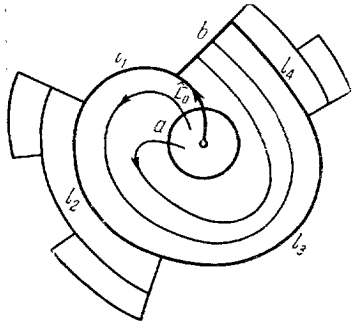


Рис. 295.

Л е м м а 16. *Если конец циклической дуги a является α-концом угловой дуги или через конец циклической дуги a проходит угловая полутраектория $\hat{L}_0^-$, то ω-дуга, сопряженная с дугой b, является простой граничной ω-дугой, и при этом:* 1) *один конец дуги b является ω-концом угловой дуги l_0 или соответственно концом полутраектории $\hat{L}_0$ и при этом является угловой точкой границы области G^*;* 2) *другой конец дуги b является ω-концом граничной или угловой дуги l_R, являющейся последней в последовательности чередующихся граничных и угловых дуг $l_1, l_2, \ldots, l_R$, в которой первая l_1 является ω-продолжением дуги l_0 или соответственно полутраектории $\hat{L}_0^-$, а каждая дуга l_i — продолжением дуги l_{i-1}* (рис. 295 и 287).

В заключение рассмотрим случай, когда конец элементарной дуги принадлежит неособой траектории.

Л е м м а 17. *Если конец A элементарной α-дуги a принадлежит неособой траектории L, то L является петлей, входящей в границу эллиптического сектора некоторого состояния равновесия. В этом случае конец сопряженной элементарной дуги b принадлежит той же петле L, и обе дуги являются нециклическими и расположены по одну и ту же сторону от траектории L.*

Утверждения леммы вполне очевидны, и доказательство ее мы не приводим (рис. 276).

Концы A и B дуг a и b, являющиеся концами одной и той же эллиптической дуги, также будем называть сопряженными концами дуг a и b.

7. Области между сопряженными каноническими кривыми и между сопряженными элементарными дугами. Рассмотрим при сделанном выборе правильной системы канонических окрестностей точки области G^*, не лежащие в канонических окрестностях и на их границах.

Рассмотрим сначала те из этих точек, которые не принадлежат особым элементам. Всякая такая точка: 1) либо лежит на дуге орбитно-устойчивой траектории или полутраектории или на неособой целой дуге траектории между двумя ее точками пересечения с двумя сопряженными дугами; 2) либо лежит на дуге орбитно-устойчивой траектории или полу-

траектории или на неособой целой дуге траектории между ее точками пересечения с двумя сопряженными циклами без контакта; 3) либо является замкнутой (орбитно-устойчивой) траекторией, лежащей между двумя сопряженными каноническими кривыми (замкнутыми траекториями) двух сопряженных 0-предельных континуумов.

Пусть a и b — сопряженные дуги и l — дуга орбитно-устойчивой траектории или неособая целая дуга области G^* с концами P и Q, лежащими соответственно на дугах a и b. Точки P и Q, очевидно, отличны от концов дуг a и b. Пусть M — точка дуги l, отличная от ее концов. Рассмотрим множество всех таких точек M, принадлежащих всевозможным дугам l, концы которых являются отличными от концов точками данных сопряженных дуг a и b. Будем обозначать это множество через Π_{ab} (рис. 288 и 296). Очевидно, множество Π_{ab} есть часть той ячейки, точками которой являются отличные от концов точки сопряженных дуг a и b.

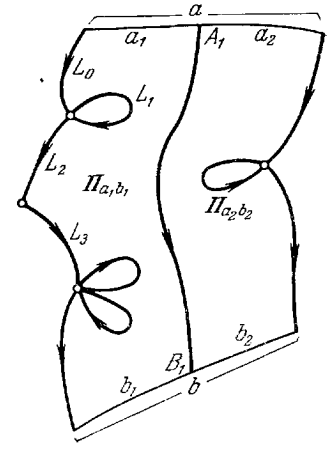


Рис. 296.

Имеет место следующая геометрически очевидная

Лемма 18. *Множество* Π_{ab} *есть область, граница которой состоит из точек сопряженных дуг* a *и* b *и точек цепочки, соединяющих концы этих дуг. При этом каждая цепочка, соединяющая концы рассматриваемых дуг* a *и* b, *может состоять либо из точек орбитно-неустойчивых траекторий или полутраекторий (в частности, одной орбитно-неустойчивой траектории)* (см. лемму 12), *либо из граничных и угловых дуг траекторий и угловых полутраекторий* (см. леммы 13, 14 и 15), *либо из дуги траектории, образующей петлю.*

Доказательство. По самому определению множества Π_{ab} концы дуг l являются отличными от концов точками дуг a и b. Принимая это во внимание, нетрудно видеть, на основании леммы 10 § 3, что множество Π_{ab} есть область. Рассмотрим теперь граничные точки этой области. Пусть A — конец дуги a и L_A — цепочка, соединяющая этот конец с сопряженным ему концом B дуги b. Используя лемму 10 § 3, а также замечание к лемме 15, в случае, когда (L) — цепочка, описанная в леммах 12—15, нетрудно видеть, что всякая дуга l с достаточно близким к точке A концом лежит в сколь угодно малой окрестности цепочки (L). Отсюда, очевидно, что точки цепочки (L) являются граничными для области Π_{ab}. Таким образом, все точки цепочек, соединяющих сопряженные концы дуг a и b, а также точки самих дуг a и b (обозначим множество всех этих точек через Γ_{ab}) являются граничными для области Π_{ab}.

Покажем, что кроме точек Γ_{ab} у области Π_{ab} больше нет других граничных точек. Предположим, что существует граничная для области Π_{ab} точка R, не принадлежащая множеству Γ_{ab} и находящаяся, следовательно, на отличном от нуля расстоянии d $(d > 0)$ от точек множества Γ_{ab} (Γ_{ab} — очевидно, замкнутое множество). Так как R — граничная для области Π_{ab} точка, то существует последовательность точек этой области $\{Q_n\}$, стремящаяся к точке R. Каждая точка Q_i по самому определению области Π_{ab} принадлежит некоторой дуге траектории l_i, заключенной между дугами a и b. Обозначим через M_i конец дуги l_i, являющийся точкой дуги a. Без ограничения общности можно предположить,

что точки M_i имеют единственную точку сгущения M^*. Точка M^* не может быть концом дуги a. Действительно, если бы M^* была концом дуги a, то точки дуг l_i с достаточно большими номерами лежали бы в сколь угодно малой окрестности цепочки, соединяющей этот конец с сопряженным ему концом дуги b, и точки Q_i этих дуг l_i не могли бы стремиться к точке R, находящейся на расстоянии d от точки множества Γ_{ab}. Следовательно, точка M^* — отличная от концов точка дуги a. Пусть l^* — дуга, отличные от концов точки которой принадлежат области Π_{ab}, с концом в точке M^*. Нетрудно видеть, что последовательность точек Q_i может стремиться только к точкам дуги l^*, так что точка R должна быть точкой дуги l^*. Но это, очевидно, противоречит предположению, сделанному относительно точки R, и, следовательно, лемма доказана.

Мы будем также называть область Π_{ab} *«областью между сопряженными дугами»*. В случае, когда все такие области перенумерованы, мы будем обозначать их через Π^i_{ab}. В дальнейшем мы будем преимущественно рассматривать замыкание области Π_{ab}, т. е. замкнутую область $\bar{\Pi}_{ab}$.

Будем область между двумя сопряженными циклами без контакта обозначать через $\Xi_{a\omega}$, а область между двумя сопряженными каноническими кривыми, являющимися замкнутыми траекториями,— через Z_{00}.

Принимая во внимание лемму 7, а также предыдущую лемму, нетрудно видеть, *что всякая точка области G^*, не являющаяся точкой особого элемента и не лежащая в какой-либо канонической окрестности или на ее границе, принадлежит либо области Π^i_{ab}, либо области $\Xi^j_{a\omega}$ либо области Z^k_{00}.*

Рассмотрим теперь точку области G^*, принадлежащую особому элементу (отличному от граничных особых элементов), т. е. точку орбитно-неустойчивой полутраектории, угловой полутраектории или угловой дуги.

Л е м м а 19. *Всякая точка особого элемента области G^*, не лежащая ни в одной из канонических окрестностей состояний равновесия или на границе этих окрестностей и не являющаяся точкой какого-нибудь ω-, α- или 0-предельного континуума, является граничной точкой какой-либо из областей Π^i_{ab}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P — точка рассматриваемого особого элемента, не лежащая ни в какой из канонических окрестностей или на ее границе (т. е. не лежащая и на канонической кривой). Если у этого особого элемента (т. е. у орбитно-неустойчивой траектории, полутраектории, угловой полутраектории или угловой дуги) существует точка, являющаяся концом α- или ω-дуги (в частности, граничной), то в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий нетрудно убедиться в справедливости утверждения леммы. В частности, утверждение леммы всегда справедливо в случае, когда точка P лежит на угловой дуге, угловой полутраектории или орбитно-неустойчивой полутраектории, конец которой принадлежит границе области G^*. (Во всех этих случаях на особом элементе есть точка, принадлежащая границе области G^*, являющаяся концом граничной элементарной дуги.)

Таким образом, для доказательства леммы остается рассмотреть случай, когда точка P лежит на орбитно-неустойчивой траектории $\tilde{L}_0$, которая не проходит через конец ни одной α- или ω-дуги. В этом случае, очевидно, траектория $\tilde{L}_0$ должна быть и ω-, и α-продолжаемой и при этом и с положительной, и с отрицательной стороны. Рассмотрим сначала ω-продолжение траектории $\tilde{L}_0$ с положительной стороны. Пусть $\tilde{L}_1$ —

траектория, являющаяся ее ω-продолжением с положительной стороны, $\widetilde{L}_2$ — траектория, являющаяся ω-продолжением $\widetilde{L}_1$ и т. д. Мы получаем, таким образом, неоднократно рассматривающуюся цепочку траекторий

$$\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_R, \tag{4}$$

в которой каждая следующая траектория является ω-продолжением предыдущей с положительной стороны. В этой цепочке (4) мы либо доходили до траектории $\widetilde{L}_R$, не имеющей ω-продолжения с положительной стороны, либо никогда не доходили до такой траектории (теорема 71, § 23). В первом случае в силу леммы 7 траектория $\widetilde{L}_R$ непременно проходит через конец ω-дуги, и тогда, очевидно, траектория $\widetilde{L}_0$ входит в цепочку, соединяющую концы сопряженных дуг. Во втором случае, повторяя неоднократно проводившееся рассуждение, нетрудно видеть, что мы дойдем до траектории $\widetilde{L}_R$ такой, что все траектории $\widetilde{L}_0, \ldots, \widetilde{L}_R$ различны, а L_0 является ω-продолжением $\widetilde{L}_R$ с положительной стороны. Но тогда в силу теоремы 71 траектория $\widetilde{L}_0$ входит в некоторый ω-, α- или 0-предельный континуум и все ее точки принадлежат границе некоторой канонической окрестности предельного континуума, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Одна и та же орбитно-неустойчивая траектория $\widetilde{L}_0$, очевидно, может быть предельной, с одной стороны, и граничной для области типа Π_{ab} — с другой.

§ 29. Схема динамической системы и теорема о тождественности топологических разбиений на траектории

1. Схема динамической системы. В настоящем пункте вводится понятие *схемы динамической системы* и определяется, в каком случае две схемы считаются одинаковыми. При этом используются введенные раньше понятия полной схемы состояния равновесия, предельного континуума и границы области.

Пусть D — динамическая система, определенная, как и всюду выше, в ограниченной области G и рассматриваемая в ее замкнутой подобласти $\overline{G}^*$, имеющей нормальную границу.

О п р е д е л е н и е XXXIII. *Мы будем говорить, что задана схема динамической системы D рассматриваемой замкнутой области $\overline{G}^*$, если:*

I. *Перечислены особые элементы динамической системы D, расположенные в области $\overline{G}^*$, именно:*

1) *все состояния равновесия* $O_1, O_2, \ldots, O_m$ (O);

2) *все орбитно-неустойчивые траектории**) $L_1, L_2, \ldots, L_k$ (L);

3) *все орбитно-устойчивые полутраектории* $\widetilde{L}_1^{(\cdot)}, \widetilde{L}_2^{(\cdot)}, \ldots, \widetilde{L}_p^{(\cdot)}$ $(\widetilde{L}^{(\cdot)})$, *концы которых лежат на границе области;*

4) *все угловые полутраектории* $\hat{L}_1^{(\cdot)}, \hat{L}_2^{(\cdot)}, \ldots, \hat{L}_q^{(\cdot)}$ $(\hat{L}^{(\cdot)})$;

5) *все угловые дуги траекторий* $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_s$ $(\hat{l})$;

6) *все граничные дуги траекторий***) $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (l);

---

*) Полутраектории этих траекторий мы будем обозначать через L_i^+ и L_i^-.

**) Для угловых точек границы мы сохраним введенные в § 26, п. 1 обозначения. Именно, угловую точку, являющуюся ω (α)-концом граничной дуги траектории l, мы будем обозначать через M_i^{ω} (M_i^{α}), совокупность угловых точек мы будем обозначать через (M).

7) *все граничные дуги без контакта* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ (λ);

8) *все граничные циклы без контакта, если таковые существуют,* $C_1, C_2, \ldots, C_r$ (C).

При введенных в п. 1 *обозначениях для особых элементов*:

II. *Заданы полные схемы всех состояний равновесия* (O_i) (см. § 19, п. 4).

III. *Перечислены все* (*односторонние*) ω-, α- и 0-*предельные континуумы* $K_1^{(\,)}, K_2^{(\,)}, \ldots, K_N^{(\,)}$ $(K^{(\,)})$ *и заданы их полные схемы. В частности, при задании этих схем* (см. § 25, п. 5) *для каждого континуума* $K_i^{(\,)}$ *дается перечисление простых замкнутых кривых* $S^i_{a_1}, S^i_{a_2}, \ldots, S^i_{a_j}$ $(i = 1,2, \ldots, N)$, *из которых эти континуумы состоят.*

IV. *Задана схема границы области* G^*, *т. е. перечислены все простые замкнутые кривые* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\beta$ (Γ), *входящие в эту границу, и заданы их схемы* (см. § 26).

V. *Указаны все пары сопряженных свободных* ω-, α- и 0-*предельных континуумов и граничных циклов без контакта и для каждой такой пары указано, какой из ее элементов является внешним и какой внутренним.*

В силу задания всех перечисленных схем, очевидно, указывается, какие из траекторий (L) и полутраекторий $(\tilde{L}^{(\,)})$ и $(\hat{L}^{(\,)})$ стремятся к состояниям равновесия и к каким именно, какие из траекторий L входят в предельные континуумы и в какие именно и т. д. Из определения вытекает, что схему динамической системы можно задать в виде некоторой системы таблиц, именно, следующих:

I. Таблицы, содержащей перечисления всех особых элементов (O), (L), $(\tilde{L}^{(\,)})$, $(\hat{L}^{(\,)})$, (l), (λ), $(\hat{l})$, $(\tilde{\Gamma})$.

II. Таблиц, задающих схемы границы области.

III. Таблиц, задающих при введенном в п. 1 перечислении всех особых элементов, полные схемы всех состояний равновесия.

IV. Таблиц, задающих полные схемы всех односторонних предельных континуумов $(K^{(\,)})$ (см. § 25, п. 4). При этом все эти континуумы перенумеровываются.

V. Таблицы, указывающей все пары сопряженных свободных ω-, α- и 0-предельных континуумов, граничных циклов без контакта и свободных узлов, описывающей взаимное расположение каждой пары.

Таблица вида V ранее не была определена. Для ее записи введем следующие обозначения: если $K^{(\,)}$ — внешний континуум или граничный цикл без контакта $\tilde{\Gamma}$, а $K'^{(\,)}$ или $\tilde{\Gamma}'$ — сопряженный внутренний, то мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$K'^{(\,)} \supset K^{(\,)}, \quad \tilde{\Gamma}' \supset K^{(\,)}.$$

При введенных обозначениях таблица типа V может, например, иметь следующий вид: $K_3^{(+)} \supset K_2^{(-)}$, $K_4^{(-)} \supset K_3^{(+)}$ и т. д. Будем называть *элементом схемы*, наряду с особыми элементами (L), $(\tilde{L}^{(\,)})$, $(\hat{L}^{(\,)})$, (l), (λ), $(\hat{l})$, (Γ), также предельные континуумы, граничные кривые, угловые точки, кривые S_i и т. д. Полная схема динамической системы, так же как и схемы состояний равновесия и предельных континуумов, может быть задана схематическим рисунком. Такое задание полной схемы чрезвычайно удобно и наглядно. При таком задании можно иногда полностью опускать индивидуальные обозначения для траекторий, фигурирующих в схеме; действительно, такие индивидуальные обозначения в схеме, заданной таблицей, нужны для того, чтобы определить расположение особых

траекторий. Например, если отрицательная полутраектория некоторой особой траектории фигурирует в схеме какого-нибудь состояния равновесия, а положительная полутраектория — в схеме какого-нибудь предельного континуума, то это означает, что указанная особая траектория выходит из этого состояния равновесия, а при $t \to +\infty$ стремится к соответствующему предельному континууму.

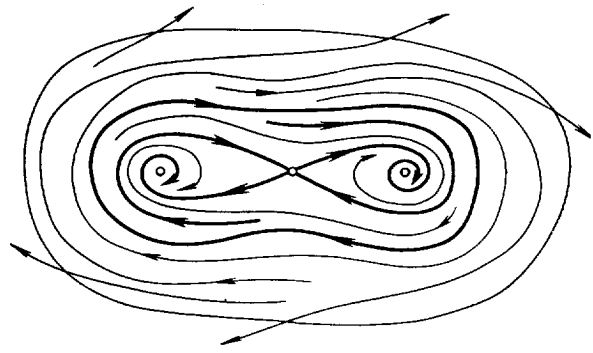


Рис. 297.

На схематическом рисунке поведение той же траектории указывается самим рисунком, так что обозначения этой траектории можно опустить. Приведем несколько простых примеров схем, заданных в виде таблиц и в виде соответствующего рисунка.

Пример 1. Граница области: α-цикл без контакта. Состояния равновесия: O_1, O_2, O_3. Орбитно-неустойчивые траектории: L_0, L_1, L_2, L_3, L_4;

$$O_1 \mid L_1^+ \quad \text{(топологический узел)};$$
$$O_2 \mid L_1^-,\ L_2^+,\ L_3^-,\ L_4^+ \quad \text{(седло)};$$
$$O_3 \mid L_3^+ \quad \text{(топологический узел)};$$

(K^-) α-предельный континуум, состоящий из одной траектории L_0; направление положительного обхода противоположно направлению по t; (K^+) α-предельный континуум, состоящий из одной траектории L_0; направление обхода противоположно направлению по t. Особые траектории, стремящиеся к $K^{(+)}$: L_2^-, L_4^-. Соответствующий схематический рис. 297 (см. пример 15 главы XII).

Пример 2. Граница — α-цикл без контакта. Состояния равновесия: O_1, O_2, O_3. Особые траектории: L_1, L_2.

$$O_2 \mid L_1^{(+)},\ L_1^-,\ L_2^+,\ L_2^- \quad \text{(седло)};$$
$$K_1^{(+)} \mid L_1,\ L_2 \quad \text{(α-предельный континуум)};$$
$$K_2^{(+)} \mid L_2,\ O_2 \quad \text{(α-предельный континуум)};$$
$$K_3^- \mid L_1,\ O_2,\ L_2,\ O_2 \quad \text{(α-предельный континуум)};$$

O_1 и O_3 — устойчивые свободные топологические узлы; $K_1^+ \supset O_1$, $K_2^+ \supset O_3$. Соответствующий схематический рис. 298.

Рассмотрим теперь две различные (или совпадающие) динамические системы D и D', определенные соответственно в областях G и G'. Пусть эти системы рассматриваются в замкнутых областях соответственно $\overline{G}^*$ и $\overline{G'}^*$, причем границы этих областей нормальны и $\overline{G}^* \subset G$, $\overline{G'}^* \subset G'$. Определим, в каком случае схемы динамических систем D и D', рассматриваемых в замкнутых областях $\overline{G}^*$ и $\overline{G'}^*$, считаются тождественными.

Для особых элементов системы D сохраним обозначения, введенные выше. Для особых элементов системы D' введем соответственно

обозначения, в которых все буквы и индексы имеют штрихи:

$$(O'),\ (L'),\ (\widetilde{L}'^{(\ )}),\ (\hat{L}'^{(\ )}),\ (\hat{l}'),\ (l'),\ (\lambda'),\ (C').$$

Таким образом мы получаем, так же как и для системы D, все особые элементы системы D' и соответствующую систему чисел m', k', p', q', s', n', h', r', аналогичных числам m, k, p, q, s, n, r системы D.

Перейдем теперь к определению тождественности схем двух динамических систем. При этом, так же как и для схем состояний равновесия и предельных континуумов, мы приведем определения *тождественности схем с сохранением ориентации и направления по t*. С совершенно очевидными изменениями может быть также дано определение тождественности схем двух динамических систем *с изменением ориентации и сохранением направления по t, а также с сохранением ориентации и изменением направления по t и, наконец, с изменением ориентации и изменением направления по t.*

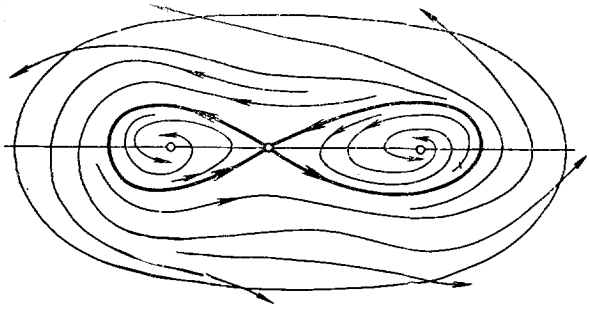


Рис. 298.

Определение XXXIV. *Мы будем говорить, что схемы динамических систем D и D' тождественны с сохранением ориентации и направления по t, если существует взаимно однозначное соответствие* θ *между всеми особыми элементами динамической системы D и всеми особыми элементами динамической системы D', при котором состояниям равновесия O соответствуют состояния равновесия O', траекториям L — траектории L', положительным (отрицательным) полутраекториям* $(\widetilde{L}^{(\ )})$ *— положительные (отрицательные) полутраектории* $(\widetilde{L}'^{(\ )})$ *и т. д., и которое удовлетворяет следующему условию: схема динамической системы D' получается из схемы динамической системы D заменой каждого особого элемента системы D соответствующим ему в силу соответствия* θ *особым элементом системы D'.*

Если схемы динамических систем D и D' одинаковы, то $m' = m$, $k' = k$, $p' = p$, $q' = q$, $s' = s$, $n' = n$, $h' = h$, $r' = r$ и т. д. Очевидно также, что если заданы схемы двух динамических систем, то конечным числом испытаний можно узнать, одинаковые эти схемы или нет. Соответствие θ, удовлетворяющее условиям определения, мы будем называть *соответствием по схеме*, а соответствующие друг другу в силу θ элементы — *элементами, соответствующими по схеме*. Заметим, что между элементами двух систем с одинаковыми схемами может существовать несколько соответствий по схеме (причем по крайней мере одно обязательно существует). Поэтому когда мы будем говорить об особых элементах динамических систем (с одинаковыми схемами), соответствующих друг другу по схеме, то мы будем при этом всегда предполагать, что задано некоторое определенное соответствие по схеме и рассматриваются особые элементы, соответствующие друг другу в силу θ. Всякий особый элемент системы D' будем обозначать тем же символом, что и соответствующий ему по схеме особый элемент системы D, но со штрихом. Мы будем также пользоваться не требующими пояснений обозначениями

$\theta(O_i) = O_i'$, $\theta(L_i) = L_i'$ и т. д. Из самого определения тождественности схем динамических систем D и D' следует, что соответствие между особыми элементами этих систем порождает взаимно однозначное соответствие: 1) между ω-, α- и 0-предельными континуумами этих систем, составленными из соответствующих друг другу по схеме особых элементов, а также между простыми замкнутыми кривыми S_i, из которых эти континуумы составлены; 2) между граничными кривыми, составленными из соответствующих друг другу по схеме граничных дуг траекторий и дуг без контакта, а также являющихся соответствующими друг другу по схеме граничными циклами без контакта.

Это индуцированное соответствие между предельными континуумами и граничными кривыми мы также будем называть *соответствием по схеме* и обозначать это соответствие той же буквой θ. Континуумы и граничные кривые системы D' будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие им континуумы и граничные кривые системы D, со штрихом. Мы будем также пользоваться обозначениями $\theta(K_j^{(\cdot)}) = K_j'^{(\cdot)}$, $\theta(\Gamma_i) = \Gamma_i'$ и т. д.

Пусть схемы систем D и D' заданы описанными выше таблицами. Если эти схемы тождественны, то *при введенных обозначениях схема динамической системы D' получается из схемы динамической системы D добавлением штриха в обозначении каждого элемента схемы.*

Укажем еще ряд элементарных фактов, непосредственно вытекающих из определения тождественности схем двух динамических систем D и D':

I. Схемы границ областей $\overline{G}^*$ и $\overline{G}'^*$, в которых рассматриваются системы D и D', тождественны и у соответствующих друг другу по схеме граничных кривых Γ_i и Γ_i' схемы также тождественны. При этом соответствие θ между особыми элементами систем D и D' индуцирует соответствие по схеме между особыми элементами, входящими в кривые Γ_i и Γ_i'.

II. Любые два соответствующих друг другу по схеме состояния равновесия O_i и O_i', а также ω-, α- или 0-предельных континуума $K_i^{(\cdot)}$ и $K_i'^{(\cdot)}$ имеют одинаковые полные схемы, причем соответствие между особыми элементами, входящими в их полные схемы, является одновременно соответствием между этими особыми элементами по полным схемам этих состояний равновесия или предельных континуумов. В частности, свободным ω- и α-предельным континуумам системы D соответствуют свободные ω- и α-предельные континуумы системы D'.

III. Если свободные ω- и α-предельные континуумы или 0-предельные континуумы $K_i^{(\cdot)}$ и $K_j^{(\cdot)}$ системы D являются сопряженными, то и соответствующие им по схеме континуумы $K_i'^{(\cdot)}$ и $K_j'^{(\cdot)}$ системы D' также являются сопряженными.

IV. Если L_i и L_i' — соответствующие друг другу по схеме особые траектории систем D и D', т. е. $L_i' = \theta(L_i)$, то: а) ω- и α-предельные континуумы этих траекторий являются соответствующими друг другу по схеме, в частности, соответствующими друг другу по схеме состояниями равновесия; б) обе траектории одновременно являются ω (α)-продолжаемыми или не продолжаемыми с одной и той же (положительной или отрицательной) стороны; в случае, когда они ω (α)-продолжаемы с какой-нибудь стороны, траектории, служащие их ω (α)-продолжениями с этой стороны, являются соответствующими друг другу по схеме траекториями.

V. Если угловая дуга $\hat{l}$ или угловая полутраектория $\hat{L}^{(\cdot)}$ системы D является ω-продолжением граничной дуги l, то угловая дуга $\hat{l}'$, соответ-

ствующая по схеме дуге $\hat{l}$, или соответственно угловая полутраектория $\hat{L}'^{(\cdot)}$ является ω-продолжением граничной дуги l', соответствующей по схеме дуге l (в частности, при этом внешним угловым точкам соответствуют внешние, а внутренним — внутренние).

VI. Соответствие по схеме между особыми элементами динамических систем индуцирует естественное соответствие между ячейками этих систем и, очевидно, при этом — между границами этих ячеек.

Мы говорили о схеме всей динамической системы в целом. Мы можем также говорить о схеме некоторого соединения ячеек или о схеме в некоторой области $\overline{H}^* \subset \overline{G}^*$ (с нормальной границей, такими схемами, очевидно, являются локальные схемы состояний равновесия и предельных континуумов).

Если схемы двух динамических систем задаются схематическими рисунками, то в случае, когда эти схемы одинаковы с сохранением ориентации и направления по t, они изображаются одним и тем же схематическим рисунком с одинаковым указанием направления на траекториях.

2. Соответствие по схеме между каноническими кривыми и дугами канонических кривых. Пусть, как и выше, D и D' — динамические системы, имеющие тождественные схемы с сохранением ориентации и направления по t, и θ — соответствие по схеме между особыми элементами этих динамических систем. Для особых элементов, а также элементов схем систем D и D' сохраняем прежние обозначения. Пусть для каждой из систем D и D' задана некоторая фиксированная правильная система канонических окрестностей. Для канонических окрестностей и входящих в их границы канонических кривых сохраним прежние обозначения (γ_i, C_i, g_i, σ_i), а канонические окрестности и канонические кривые системы D' будем обозначать теми же буквами, но со штрихами. Соответствие по схеме между состояниями равновесия O_i и O_i' и предельными континуумами $K_j^{(\cdot)}$ и $K'^{(\cdot)}_j$ систем D и D' индуцирует естественное взаимно однозначное соответствие между каноническими окрестностями, каноническими кривыми, а также каноническими дугами (параболическими, эллиптическими и седловыми дугами без контакта и седловыми дугами траекторий) и элементарными ω- и α-дугами. Именно, имеет место

Лемма 1. *Если схемы динамических систем D и D' тождественны и Σ и Σ' соответственно их правильные системы канонических окрестностей, то между каноническими областями, их секторами, каноническими кривыми и их дугами существует следующее индуцированное, взаимно однозначное соответствие*:

1) *Канонические области g_i и g_i' и канонические кривые σ_i и σ_i' соответствующих друг другу по схеме состояний равновесия O_i и O_i' соответствуют друг другу.*

2) *У соответствующих друг другу в силу* 1) *канонических окрестностей g_i и g_i' канонические области одинакового типа (эллиптические, параболические и гиперболические) соответствуют друг другу и соответствуют друг другу также дуги канонических кривых σ_i и σ_i', входящие в границы этих секторов (т. е. эллиптические и параболические дуги, седловые дуги траекторий и седловые дуги без контакта), а также концы этих дуг. При этом*: а) *соответствующие друг другу концы соответствующих друг другу параболических дуг принадлежат либо соответствующим друг другу особым элементам (траекториям или полутраекториям), либо соответствующим друг другу эллиптическим дугам*; б) *концы соответствующих*

друг другу седловых дуг принадлежат соответствующим друг другу особым элементам и ω (α)*-седловые дуги соответствуют* ω (α)*-седловым.*

3) *Канонические окрестности* γ_i и γ_i' *и канонические кривые* C_i *и* C_i' *соответствующих друг другу по схеме предельных континуумов* $K_i^{(\cdot)}$ и $K_i'^{(\cdot)}$ *соответствуют друг другу. При этом*: а) *если континуум* $K_i^{(\cdot)}$ *лежит вне (внутри) канонической кривой* C_i, *то и континуум* $K_i'^{(\cdot)}$ *лежит вне (внутри) канонической кривой* C_i'; б) *если канонические кривые* C_j *и* C_i *свободных* α- *и* ω-*предельных или* 0-*предельных континуумов являются сопряженными, то соответствующие им канонические кривые* C_j' *и* C_i' *тоже являются сопряженными.*

4) ω (α)*-циклы и элементарные* ω (α)*-дуги, точки которых являются точками кривых* C *и* C' *или* σ *и* σ′, *соответствующих друг другу по схеме, соответствуют друг другу и при этом*: а) ω (α)*-циклы соответствуют* ω (α)*-циклам и являются циклами без контакта соответствующих друг другу свободных* ω (α)*-предельных континуумов (т. е. соответствующими друг другу кривыми* C *и* C' *или* σ и σ′); б) *циклические* ω (α)*-дуги соответствуют циклическим* ω (α)*-дугам и точки соответствующих друг другу циклических дуг принадлежат соответствующим друг другу в силу* 1) (*и* 3)) *каноническим кривым* C *и* C' *или* σ *и* σ′; в) *простые* ω (α)*-дуги соответствуют простым* ω (α)*-дугам, причем соответствующими друг другу являются те дуги соответствующих друг другу в силу* 1) (*и* 2)) *канонических кривых* C *и* C', σ *и* σ′, *у которых концы принадлежат соответствующим друг другу особым элементам или соответствующим друг другу в силу* 2) *эллиптическим дугам.*

Доказательство. Утверждение 1) настоящей леммы очевидно. Утверждение 2) следует из тождественности локальных схем соответствующих друг другу по θ состояний равновесия (см. 1)). Утверждение 3) следует из тождественности локальных схем соответствующих друг другу по θ предельных континуумов. Утверждение 4) следует из тождественности полных схем соответствующих друг другу по θ состояний равновесия и предельных континуумов.

Замечание 1. Из настоящей леммы, в частности, следует, что если рассматриваются две различные системы правильных канонических окрестностей системы D, то между окрестностями, областями, кривыми и дугами этих двух систем существует взаимно однозначное соответствие, описанное настоящей леммой.

Замечание 2. Между граничными ω- и α-дугами систем D и D' и концами этих дуг существует взаимно однозначное соответствие в силу тождественности схем граничных кривых.

Замечание 3. Пусть l и l' соответствующие друг другу в силу настоящей леммы дуги канонических кривых, являющиеся либо ω- и α-дугами, либо параболическими дугами, либо эллиптическими дугами и т. д. Пусть M и M', N и N' — соответствующие друг другу концы этих дуг (см. п. 2) настоящей леммы). Тогда направление на дуге l от точки M к точке N и направление на дуге l' от точки M' к точке N' либо одновременно совпадают с положительным направлением обхода канонических кривых, дугами которых являются дуги l и l', либо одновременно противоположны ему. Кроме того, в случае, когда дуги l и l' являются дугами траекторий, направление на дуге l от точки M к N и направление на дуге l' от точки M' к N' одновременно либо совпадают, либо противоположны направлению по t. Это непосредственно следует из того, что схемы рассматриваемых систем D и D' тождественны с сохранением ориентации и направления по t.

Соответствие между принадлежащими системам D и D' каноническими областями, каноническими кривыми и их дугами — существующее в силу леммы 1, а также между концами этих дуг, будем тоже называть соответствием по схеме и обозначать той же буквой θ. Мы будем также пользоваться не требующими пояснений обозначениями: $\theta(g_i) = g_i'$, $\theta(\gamma_i) = \gamma_i'$, $\theta(\sigma_i) = \sigma_i'$, $\theta(C_i) = C_i'$, а также $\theta(a) = a'$, $\theta(b) = b'$, $\theta(l) = l'$, $\theta(A) = A'$, где a и a', b и b', l и l' — соответствующие друг другу по схеме дуги, а A и A' — соответствующие друг другу по схеме концы соответствующих друг другу дуг. Сформулирем еще одну лемму, непосредственно вытекающую из предыдущей леммы и замечаний к ней.

Лемма 2. *На соответствующих друг другу по схеме особых траекториях L и L' ($L' = \theta(L)$) лежат концы соответствующих друг другу ω- и α-дуг или седловых дуг. При этом, если элементарная или седловая дуга a, конец которой лежит на траектории L, является простой дугой, расположенной по положительную (отрицательную) сторону траектории L, то простая дуга a', соответствующая по схеме дуге a ($a' = \theta(a)$), конец которой лежит на траектории $L' = \theta(L)$, лежит по положительную (отрицательную) сторону L'.*

Полностью аналогичное утверждение справедливо также и относительно других соответствующих друг другу по схеме особых элементов, точки которых являются концами элементарных и седловых дуг, т. е. относительно орбитно-неустойчивых полутраекторий $\tilde{L}^{(+)}$ и $\tilde{L}'^{(+)} = \theta(\tilde{L}^{(+)})$, с концом на границе областей G^* и G'^*, угловых полутраекторий $\hat{L}^{(+)}$ и $\hat{L}'^{(+)} = \theta(\hat{L}^{(+)})$, граничных и угловых дуг траекторий l и $l' = \theta(l)$, $\hat{l}$ и $\hat{l}' = \theta(\hat{l})$, а также относительно соответствующих друг другу по схеме эллиптических дуг. В силу леммы 17 § 28 один конец всякой эллиптической дуги всегда является концом α-дуги, а другой — концом ω-дуги.

3. Сопряженные ω- и α-дуги двух систем D и D' с тождественными схемами. В силу п. 3) леммы 1 всяким двум сопряженным каноническим кривым системы D соответствуют по θ две сопряженные канонические кривые системы D'. В частности, сопряженным ω- и α-циклам без контакта системы D соответствуют сопряженные ω- и α-циклы системы D'. Рассмотрим теперь сопряженные ω- и α-дуги системы D и соответствующие им ω- и α-дуги системы D'.

Лемма 3. *Если a и b — две сопряженные элементарные дуги системы D, то соответствующие им по схеме элементарные дуги a' и b' также являются сопряженными. При этом сопряженным концам дуг a и b соответствуют по схеме сопряженные концы дуг a' и b'.*

Доказательство. Конец A элементарной α-дуги a системы D может принадлежать: 1) орбитно-неустойчивой траектории L_0 или орбитно-неустойчивой полутраектории $\tilde{L}^{(+)}$ (конец которой лежит на границе области G^*); 2) граничной или угловой дуге или угловой полутраектории; 3) эллиптической дуге одной из канонических кривых состояний равновесия.

Рассмотрим случай 1), предположим, кроме того, для определенности, что α-дуга a является простой дугой и что она расположена с положительной стороны траектории L_0. Дуга b может быть как простой, так и циклической. В силу леммы 12 § 28 существует начинающаяся с L_0 конечная последовательность отличных друг от друга орбитно-неустойчивых траекторий

$$L_0, L_1, \ldots, L_R (L_R^+), \tag{1}$$

в которой траектория L_{i+1} является ω-продолжением траектории L_i с положительной стороны ($i = 0, 1, 2, \ldots, R-1$), а последняя траектория L_R (или полутраектория) проходит через конец B сопряженной с дугой a элементарной ω-дуги b. В частности, последовательность (1) может состоять только из одного элемента L_0. Для определенности предположим, что последней в цепочке является траектория L_R (а не полутраектория). Дуга b либо расположена по положительную сторону от L_R, либо является циклической. Точки A и B являются сопряженными концами сопряженных дуг a и b. Рассмотрим дуги a' и b', соответствующие по схеме дугам a и b, $a' = \theta(a)$, $b' = \theta(b)$, траекторию L'_0 системы D', соответствующую по схеме траектории L_0, $L'_0 = 0(L_0)$, и проходящую через конец A' дуги a', соответствующий по схеме концу A дуги a, а также траектории L'_i системы D', соответствующие по схеме траекториям L_i ($L'_i = \theta(L_i)$). В силу утверждения IV б) п. 1 траектории

$$L'_0, L'_1, \ldots, L'_R, \tag{2}$$

очевидно, образуют цепочку траекторий, являющихся продолжением одна другой с положительной стороны, в силу п. 4б) и 4в) леммы 1 траектория L'_R проходит через конец B' элементарной дуги b', соответствующей по схеме дуге b. В случае, когда b — простая дуга и лежит по положительную сторону L_R, дуга b' тоже является простой, и она лежит по положительную сторону траектории L'_R. Но последовательность (2), очевидно, обладает теми же свойствами, что и последовательность (1). А тогда в силу замечания к лемме 12 § 28 дуги a' и b' являются сопряженными, а концы A' и B' — их сопряженными концами, что и доказывает утверждение леммы в случае 1) для простой дуги. Если дуга a циклическая, то рассуждение такое же, но с использованием леммы 15 § 28.

В случае 2) и 3) доказательство проводится аналогично, и мы его опускаем. Отметим только, что в случае 2) при доказательстве используется замечание 2 к лемме 13 и лемма 14 § 28, а в случае 3) — лемма 17 § 28.

Рассмотрим теперь у систем D и D' области между сопряженными каноническими кривыми и между сопряженными каноническими дугами. Как и выше (см. § 28, п. 8), эти области будем у системы D обозначать через Π^i_{ab}, $\Xi^j_{a\omega}$, Z^k_{00}, а у системы D' — теми же буквами, но со штрихами $\Pi'^i_{a'b'}$, $\Xi'^j_{a\omega}$, Z'^k_{00}. Соответствие между сопряженными каноническими кривыми и элементарными дугами, очевидно, индуцирует естественное соответствие между этими областями (и их замыканием, т. е. замкнутыми областями $\overline{\Pi}^i_{ab}$ и $\overline{\Pi}'^i_{a'b'}$, $\overline{\Xi}^j_{a\omega}$ и $\overline{\Xi}'^j_{a\omega}$, $\overline{Z}^k_{00}$ и $\overline{Z}'^k_{00}$). Таким образом имеет место

Лемма 4. *Если схемы динамических систем D и D' тождественны, то можно поставить друг другу во взаимно однозначное соответствие области Π^i_{ab} и $\Pi'^i_{a'b'}$, $\Xi^j_{a\omega}$ и $\Xi'^j_{a\omega}$, Z^k_{00} и Z'^k_{00}, заключенные между соответствующими друг другу по θ сопряженными каноническими кривыми и сопряженными элементарными дугами. При этом в границы соответствующих друг другу областей Π^i_{ab} и $\Pi'^i_{a'b'}$ входят соответствующие друг другу по схеме особые элементы.*

Это соответствие между областями мы также будем называть соответствием по схеме и обозначать той же буквой θ. Всюду в дальнейшем, нумеруя указанные области в системе D и в системе D', будем областям этих систем, соответствующим друг другу по схеме, приписывать одинаковые номера.

4. Основная теорема. В этом параграфе мы покажем, что *топологическая структура динамической системы полностью определяется ее схемой.* Другими словами, мы покажем, что если две динамические системы имеют одинаковые схемы, то их разбиения на траектории имеют одинаковые топологические структуры. Этот результат содержится в теореме 76 настоящей главы. Предполагая, что схемы систем D и D', рассматриваемых в замкнутых областях $\overline{G}^* \subset G$ и $\overline{G}'^* \subset G'$ с нормальной границей, тождественны, мы будем строить топологическое отображение областей $\overline{G}^*$ и $\overline{G}'^*$ друг на друга, сохраняющее ориентацию, переводящее траектории систем D и D' друг в друга и сохраняющее на них направление по t. Сделаем некоторые предварительные замечания по поводу того, как строится это топологическое отображение. Используя правильные системы канонических окрестностей систем D и D', мы разделяем замкнутые области $\overline{G}^*$ и $\overline{G}'^*$ на частичные замкнутые области с общими границами, именно, канонические окрестности и области между сопряженными каноническими кривыми и сопряженными элементарными дугами (т. е. области типа Π_{ab}, $\Xi_{a\omega}$ и Z_{00}). Между всеми такими частичными областями систем D и D' существует естественное соответствие по схеме. В силу доказанных выше теорем, а также доказанной ниже леммы 5 соответствующие друг другу по схеме области могут быть топологически отображены друг на друге с сохранением ориентации так, чтобы траектории переходили в траектории и направление по t на них сохранялось. Кроме того, всегда можно отображения этих частичных областей выбрать таким образом, чтобы на общих их границах они были надлежащим образом согласованы, и мы получили бы топологическое отображение замкнутых областей $\overline{G}^*$ и $\overline{G}'^*$ друг на друга, сохраняющее ориентацию, переводящее траектории в траектории и сохраняющее на них направление по t. Таким образом, устанавливается, что при тождественности схем систем D и D' с сохранением ориентации и направления по t разбиения областей G^* и G'^* траекториями систем D и D' топологически тождественны.

После этих предварительных общих замечаний перейдем к подробному доказательству основной теоремы. Отметим прежде всего, что топологическая тождественность разбиения на траектории соответствующих друг другу по схеме канонических окрестностей доказана в теореме 72, а топологическая тождественность областей типа $\Xi_{a\omega}$ и $\Xi'_{a\omega}$, Z_{00} и Z'_{00} после элементарного проведения вспомогательных дуг (в случае областей $\Xi_{a\omega}$ этими дугами являются дуги траекторий, соединяющие циклы без контакта, а в случае Z_{00} эти дуги являются дугами без контакта, соединяющими граничные замкнутые кривые, существующие в силу леммы 7 § 19) сводится к лемме 8 § 18 (о топологической тождественности разбиений элементарных четырехугольников).

Лемма 5. *Если схемы систем D и D' тождественны с сохранением ориентации и направления по t и области Π_{ab} и $\Pi'_{a'b'}$ соответствуют друг другу по схеме, то разбиения на траектории этих областей топологически тождественны с сохранением ориентации и направления по t.*

Доказательство. Разделим каждую из областей Π_{ab} и $\Pi'_{a'b'}$ на две области. Рассмотрим сначала область Π_{ab}. Возьмем произвольную точку A_1 дуги a, отличную от ее концов. Дуга a как в случае, когда она является простой, так и в случае, когда она является циклической, разделяется точкой A_1 на две простые дуги; обозначим их через a_1 и a_2. Пусть L_{A_1} — траектория, проходящая через точку A_1 и B_1 — ее точка пере-

сечения с дугой b. Точка B_1 делит дугу b на две простые дуги b_1 и b_2. Нетрудно видеть, что все траектории, проходящие через отличные от концов точки дуги a_1, пересекают одну из этих дуг, например дугу b_1, и при этом в точках, отличных от ее концов, а все траектории, проходящие через отличные от концов точки дуги a_2, пересекают другую дугу — b_2 в точках, отличных от ее концов. Таким образом, дуга A_1B_1 траектории L_{A_1} делит область Π_{ab} на две области без общих точек, которые мы обозначим через $\Pi_{a_1b_1}$ и $\Pi_{a_2b_2}$ (рис. 296). Область $\Pi_{a_1b_1}$ состоит из точек, принадлежащих траекториям системы D, проходящих через отличные от концов точки дуги a_1 и лежащих между точками пересечения этих траекторий с дугами a_1 и b_1. Область $\Pi_{a_2b_2}$ полностью аналогична. Каждая точка области Π_{ab}, очевидно, принадлежит либо области $\Pi_{a_1b_1}$, либо области $\Pi_{a_2b_2}$, либо является отличной от концов точкой дуги A_1B_1 траектории L_{A_1}. Обозначим через A конец дуги a_1, являющийся концом дуги a. Для определенности предположим, что дуга a_1 лежит по положительную сторону от особого элемента, которому принадлежит точка A, или от эллиптической дуги в случае, когда эта точка принадлежит такой дуге. Тогда дуга a_2 лежит, очевидно, по отрицательную сторону особого элемента, проходящего через ее конец, отличный от точки A_1 (соответственно по отрицательную сторону от эллиптической дуги). Повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве леммы 12 § 28, нетрудно видеть, что граница области $\Pi_{a_1b_1}$ состоит из дуг a_1 и b_1, дуги A_1B_1, траектории L_{A_1} и из цепочки, соединяющей конец A дуги a (являющейся концом дуги a_1) с сопряженным концом B дуги b, являющейся концом дуги b_1 (отличным от B_1) (рис. 299). Совершенно аналогично рассматривается граница области $\Pi_{a_2b_2}$. При этом точки одной из цепочек, соединяющих сопряженные концы дуг a и b, являются граничными для области $\Pi_{a_1b_1}$, другой — для области $\Pi_{a_2b_2}$ и каждая точка замкнутой области $\overline{\Pi}_{ab}$ является точкой одной из замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$ и $\overline{\Pi}_{a_2b_2}$. Точка замкнутой области $\overline{\Pi}_{ab}$, не принадлежащая дуге A_1B_1 траектории L_{A_1}, может принадлежать одновременно и $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$, и $\overline{\Pi}_{a_2b_2}$ лишь в случае, когда две входящие в границу Π_{ab} цепочки имеют общие точки. Совершенно аналогично выбирая произвольную, отличную от концов точку A' дуги a' и рассматривая траекторию L'_{A_1} системы D', проходящую через эту точку, мы разделим область $\Pi'_{a'b'}$ на две области.

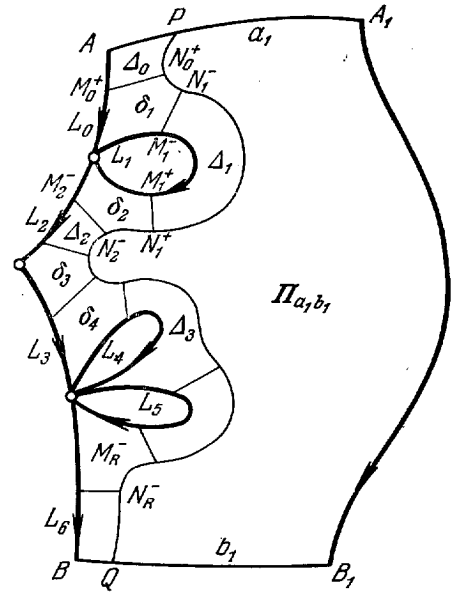


Рис. 299.

Простые дуги, на которые точка A'_1 делит дугу a', обозначим через a'_1 и a'_2. В случае, когда дуга a' (а значит, и дуга a) простая, обозначим через a'_1 дугу, у которой конец A', отличный от A'_1 (являющийся концом дуги a'), соответствует по схеме концу A дуги a. В этом случае в силу леммы 2 дуга a'_1 (так же, как и дуга a_1) лежит по положительную сторону

от особого элемента, проходящего через точку A', или соответственно от эллиптической дуги. В случае, когда дуга a' (а значит, и дуга a) циклическая, у обеих дуг, на которые точка A'_1 делит дугу a', одним из концов является конец A' циклической дуги a'. В этом случае через a'_1 будем обозначать ту из двух дуг, которая лежит по положительную сторону от особого элемента, проходящего через точку A'. Обозначим через B'_1 точку, в которой траектория $L'_{A'_1}$ пересекает дугу b', через b'_1 и b'_2 — дуги, на которые она делит эту дугу (аналогичные дугам b_1 и b_2), и, наконец, через $\Pi'_{a'_1b'_1}$ и $\Pi'_{a'_2b'_2}$ — области, аналогичные $\Pi_{a_1b_1}$ и $\Pi_{a_2b_2}$, на которые дуга $A'_1B'_1$ траектории $L'_{A'_1}$ делит область $\Pi'_{a'b'}$. В силу следствий из определения XXXIV п. 1 § 29 цепочки траекторий, соединяющие концы дуг a' и b' и входящие в границу областей $\Pi'_{a'b'}$ и $\Pi'_{a'_2b'_2}$, соответствуют по схеме цепочкам, входящим в границы областей $\Pi_{a_1b_1}$ и $\Pi_{a_2b_2}$ соответственно.

Покажем сначала, что существует топологическое отображение замкнутых областей $\Pi_{a'b'}$ и $\Pi'_{a'_1b'_1}$, а также $\Pi_{a_2b_2}$ и $\Pi'_{a'_2b'_2}$, при котором траектории отображаются в траектории и направление по t сохраняется. Так как один из концов дуги a_1 является концом дуги a, то возможны следующие случаи (см. лемму 1): 1) конец A дуги a_1 принадлежит орбитонеустойчивой траектории L или полутраектории $\widetilde{L}^{(+)}$; 2) конец A принадлежит граничной или угловой дуге или угловой полутраектории; 3) конец A дуги a_1 совпадает с концом эллиптической дуги, входящей в одну из канонических окрестностей состояний равновесия. Соответствующий по схеме концу A дуги a конец A' дуги a' по самому определению дуги a'_1 является концом этой дуги. Следовательно, конец A' дуги a'_1 принадлежит особому элементу системы D', соответствующему по схеме тому особому элементу системы D, которому принадлежит конец A дуги a_1, или соответствующей по схеме эллиптической дуги.

Рассмотрим случай 1), причем для определенности предположим, что через точку A проходит траектория L (а не полутраектория $\widetilde{L}^{(+)}$). Если цепочка, соединяющая концы A и B дуг a_1 и b_1, а следовательно, и цепочка, соединяющая концы A' и B' дуг a'_1 и b'_1, состоит из точек одной особой траектории L_0, соответственно L'_0, (L'_0 соответствует по схеме L_0), то области $\Pi_{a_1b_1}$ и $\Pi'_{a'_1b'_1}$, очевидно, являются замкнутыми элементарными четырехугольниками. Тогда топологическое отображение этих замкнутых областей, обладающее требуемыми свойствами, существует в силу леммы 8 § 18.

Предположим, что цепочка, соединяющая концы A и B дуг a_1 и b_1, а следовательно, и цепочка, соединяющая концы A' и B' дуг a'_1 и b'_1, состоят более, чем из одной траектории. Пусть L_0, L_1, . . ., L_R и соответственно L'_0, L'_1, . . ., L'_R — траектории, входящие в цепочки, соединяющие концы A и B дуг a_1 и b_1 и соответственно концы A' и B' дуг a'_1 и b'_1, выписанные в порядке ω-продолжения. Траектории L_i и L'_i в этих последовательностях соответствуют друг другу по схеме и имеют своими ω- и α-предельными состояниями равновесия, соответствующие друг другу по схеме. Траектория L_0 (L'_0) проходит через конец дуги a_1 (a'_1), а траектория L_R(L'_R) — через конец дуги b_1 (b'_1). При этом в силу сделанных предложений дуга a_1 (a'_1) лежит по положительную сторону траектории L_0 (L'_0), а дуга b_1 (b'_1) — по положительную сторону траектории L_R(L'_R). В силу леммы 12 § 28, траектория L_0 (L'_0) проходит через конец ω-седловой дуги λ_0^+ ($\lambda_0'^+$), лежащей от нее по положительную сторону, а траек-

тория L_R (L'_R) — через конец α-седловой дуги λ_R^- (λ'^-_R), лежащей от нее по положительную сторону. Кроме того, в силу той же леммы, каждая из траекторий L_i (L'_i), $i = 1,2, \ldots, R-1$, проходит через концы двух седловых дуг, лежащих от нее по положительную сторону, α-седловой дуги λ_i^- (λ'^-_i) и ω-седловой дуги λ_i^+ (λ'^+_i).

Обозначим через M_i^- (M'^-_i) и M_i^+ (M'^+_i) конец седловой дуги λ_i^- (λ'^-_i) и соответственно конец седловой дуги λ_i^+ (λ'^+_i), принадлежащий траектории L_i (L'_i). В силу замечания 2 к лемме 7 § 28 точка M_0^+ (M'^+_0) соответствует на L_0 (L'_0) значению t большему, чем точка A (A'), точка B (B') — значению t большему, чем M_R^- (M'^-_R), и каждая точка M_i^+ (M'^+_i) — значению t большему, чем точка M_i^- (M'^-_i). Всегда можно взять точку P (P') дуги a_1 (a'_1), столь близкую к концу A (A') этой дуги, чтобы: а) проходящая через точку P (P') траектория L_P ($L'_{P'}$) последовательно пересекла все дуги λ_i^+ (λ'^+_i) и λ_i^- (λ'^-_i) и, наконец, дугу b_1 (b'_1). Обозначим через N_i^+ (N'^+_i) и N_i^- (N'^-_i) точки пересечения траектории L_P ($L'_{P'}$) с дугами λ_i^+ (λ'^+_i) и λ_i^- (λ'^-_i) и соответственно через Q (Q') — ее точку пересечения с дугой b_1 (b'_1); б) все траектории, пересекающие часть AP ($A'P'$) дуги a_1 (a'_1), при возрастании t пересекали часть $M_0^+N_0^+$ ($M'^+_0N'^+_0$) дуги λ_0^+ (λ'^+_0), а затем часть $M_1^-N_1^-$ ($M'^-_1N'^-_1$) дуги λ_1^- (λ'^-_1) и т. д. и, наконец, часть BQ ($B'Q'$) дуги b_1 (b'_1) (ср. доказательство теоремы 72).

Дуга PQ траектории L_P, очевидно, делит область $\Pi_{a_1b_1}$ на две области. Одна из этих областей — обозначим ее через Π_1 — полностью аналогична самой области $\Pi_{a_1b_1}$, другая область Π_2 является элементарным четырехугольником. Дуга $P'Q'$ траектории $L'_{P'}$ делит область $\Pi'_{a'_1b'_1}$ на аналогичные области Π'_1 и Π'_2. Рассмотрим замыкание областей Π_1 (Π'_1) и Π_2 (Π'_2), т. е. $\bar{\Pi}_1$ ($\bar{\Pi}'_1$) и $\bar{\Pi}_2$ ($\bar{\Pi}_2$). Очевидно, замкнутая область $\bar{\Pi}_1$ ($\bar{\Pi}'_1$) частями $M_i^+N_i^+$ ($M'^+_iN'^+_i$) дуг λ_i^+ (λ'^+_i) и частями $M_i^-N_i^-$ ($M'^-_iN'^-_i$) дуг λ_i^- (λ'^-_i) разделяется на замкнутые элементарные четырехугольники и седловые области, имеющие попарно общие граничные дуги, именно, либо дугу $M_i^-N_i^-$ ($M'^-_iN'^-_i$), либо дугу $M_i^+N_i^+$ ($M'^+_iN'^+_i$). (Подробное описание границ этих областей мы опускаем в силу его очевидности; см. рис. 299.) Элементарный четырехугольник, в границу которого входит дуга $M_i^+N_i^+$ ($M'^+_iN'^+_i$), будем обозначать через Δ_i (Δ'_i), а седловую область, смежную с этим четырехугольником, в границу которой входит та же дуга, через δ_{i+1} (δ'_{i+1}), $i = 0,1,2, \ldots, R-1$, и, кроме того, через Δ_R (Δ'_R) обозначим элементарный четырехугольник, в границу которого входит дуга $M_R^-N_R^-$ ($M'^-_RN'^-_R$). Очевидно, в границу элементарных четырехугольников Δ_i и Δ'_i и седловых областей δ_j и δ'_j с одинаковыми номерами входят состояния равновесия, части полутраектории и части седловых дуг, соответствующих друг другу по схеме.

Установим сначала отождествленное топологическое отображение элементарных четырехугольников Δ_0 и Δ'_0, при котором части траекторий L_0 и L'_0 отображаются друг в друга (и сохраняется направление по t). При этом очевидно устанавливается топологическое соответствие между точками дуг $M_0^-N_0^-$ и $M'^-_0N'^-_0$. Сохраняя это соответствие между точками этих дуг, установим отождествляющее отображение седловых областей δ_1 и δ'_1, сохраняющее направление по t. Затем устанавливаем отождествляющее отображение элементарных четырехугольников Δ_1 и Δ'_1 и т. д. и, наконец, элементарных четырехугольников Δ_R и Δ'_R. Каждый раз соответствие между точками дуг $M_i^-N_i^-$ и $M'^-_iN'^-_i$ или $M_i^+N_i^+$ и $M'^+_iN'^+_i$, установленное при предыдущем шаге, сохраняется. Таким образом, мы получаем топологическое отображение замкнутых областей $\bar{\Pi}_1$ и $\bar{\Pi}'_1$ друг

на друга, обладающее требуемыми свойствами. При этом устанавливается соответствие между точками дуги PQ траектории L_P и точками дуги $P'Q'$ траектории $L_{P'}$. Сохраняя это соответствие, устанавливаем отображение замкнутых элементарных четырехугольников $\overline{\Pi}_2$ и $\overline{\Pi}'_2$. Таким образом, мы получаем требуемое топологическое отображение замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_1b'_1}$.

Перейдем теперь к случаям 2) и 3), т. е. к случаям, когда конец A дуги a_1 (и соответственно конец A' дуги a'_1) принадлежит граничной или угловой дуге траектории или угловой полутраектории, или эллиптической дуге. Но граничные и угловые дуги траекторий и угловых полутраекторий, служащие продолжением одна другой, являются дугами и полутраекториями одной и той же траектории области G. Следовательно, в случаях 2) и 3) конец A дуги a_1 и конец B дуги b_1 принадлежит одной и той же траектории L_0 системы D и соответственно конец A' дуги a'_1 и конец B' дуги b'_1 — одной и той же траектории L'_0 системы D'. При этом в случае 2) эти дуги состоят из соответствующих друг другу по схеме угловых и граничных дуг, а в случае 3) эти дуги являются соответствующими друг другу по схеме эллиптическими дугами. В обоих случаях области $\Pi_{a_1b_1}$ и $\Pi'_{a'_1b'_1}$ являются элементарными четырехугольниками. В силу леммы 10 § 3 в случае 2) всегда существует такое топологическое отображение замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_1b'_1}$, переводящее траектории в траектории и сохраняющее направление по t, при котором точки дуг AB и $A'B'$, являющиеся соответствующими друг другу по схеме концами граничных и угловых дуг траекторий, отображаются друг в друга. Существование требуемого топологического отображения в случае 3) непосредственно вытекает из леммы 17 § 28.

Таким образом, во всех случаях существует топологическое отображение замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_1b'_1}$ друг на друга, обладающее требуемыми свойствами.

Все сказанное относительно замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_1b'_1}$ справедливо и для замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_2b_2}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_2b'_2}$. Построим отождествляющее отображение замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_2b_2}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_2b'_2}$, сохраняющее направление по t, при котором: а) соответствие между точками дуг A_1B_1 и $A'_1B'_1$, полученное в силу построенного отображения областей $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_1b'_1}$, сохраняется; б) если в границу замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_2b_2}$, $\overline{\Pi}'_{a'_2b'_2}$ входят те же траектории L_i (L'_i) или полутраектории, что и в границу $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$, $\overline{\Pi}'_{a'_1b'_1}$*), то сохраняется также соответствие между точками этих траекторий, полученное в силу построенного отображения замкнутых областей $\overline{\Pi}_{a_1b_1}$ и $\overline{\Pi}'_{a'_1b'_1}$. Тем самым, очевидно, устанавливается отображение исходных замкнутых областей $\overline{\Pi}_{ab}$ и $\overline{\Pi}'_{a'b'}$ друг на друга, удовлетворяющее всем требуемым свойствам, и, следовательно, лемма доказана.

Замечание 1. Предположим, что заранее задано топологическое соответствие T между точками дуг a и a' (или b и b'), при котором точки A и A' соответствуют друг другу, а также между точками некоторых (или всех) граничных для $\overline{\Pi}_{ab}$ и $\overline{\Pi}'_{a'b'}$ и соответствующих друг другу по схеме траекторий L_i и L'_i, при котором сохраняется направление

*) Это, очевидно, возможно; см. рис. 294.

по t (или же между полутраекториями $L_i^{(}$ и $L_i'^{(}$ или дугами). Нетрудно видеть, что топологическое отображение замкнутых областей $\bar{\Pi}_{ab}$ и $\bar{\Pi}'_{a'b'}$ друг на друга, переводящее траектории в траектории и сохраняющее направление по t, всегда может быть построено таким образом, чтобы заданное заранее соответствие между указанными граничными точками этих областей сохранялось. Для этого в проведенном доказательстве нужно сделать очевидные изменения, именно, в качестве точек A_1' и P' дуги a' нужно взять не произвольные точки этой дуги, а соответствующие точкам A_1 и P в силу заданного соответствия и при построении отображения замкнутых областей $\bar{\Delta}_i$ и $\bar{\Delta}_i'$, δ_j и δ_j' нужно сохранять соответствие T между точками дуг a_1 и a_1', а также между точками особых траекторий — L_i и L_i'.

Замечание 2. Предположим, что между точками дуг a и a' задано топологическое соответствие T, при котором соответствующие друг другу по схеме концы этих дуг соответствуют друг другу. Пусть при отображении замкнутых областей $\bar{\Pi}_{ab}$ и $\bar{\Pi}'_{a'b'}$ друг на друга это соответствие T сохраняется. Тогда в силу отображения областей $\bar{\Pi}_{ab}$ и $\bar{\Pi}'_{a'b'}$, в частности, устанавливается топологическое соответствие между точками дуг b и b' (при котором соответствующие друг другу точки принадлежат траекториям, пересекающим дуги a и a' в точках, соответствующих друг другу по T, и соответствующие друг другу концы дуг b и b' сопряжены с соответствующими друг другу концами дуг a и a').

Такое топологическое отображение дуг b и b', сопряженных с дугами a и a' друг на друга, мы будем называть топологическим отображением, индуцированным заданным топологическим отображением дуг a и a'.

Предположим, что заранее задано топологическое отображение дуг a и a', b и b' друг на друга. Построение такого отождествляющего отображения замкнутых областей $\bar{\Pi}_{ab}$ и $\bar{\Pi}'_{a'b'}$, соответствующих друг другу по схеме, переводящего траектории в траектории, при котором заданное отображение дуг a и a', а также дуг b и b' сохраняется, очевидно, возможно в том и только в том случае, когда отображение дуг b и b' является *индуцированным*.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы. Пусть выполняются прежние предположения относительно систем D и D'.

Теорема 75. *Если схемы двух динамических систем D и D', рассматриваемых соответственно в замкнутых областях $\bar{G}^*$ и $\bar{G}'^*$, тождественны с сохранением ориентации и направления по t, то топологические структуры разбиений областей $\bar{G}^*$ и $\bar{G}'^*$ соответственно на траектории систем D и D' тождественны с сохранением ориентации и направления по t.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует топологическое отображение замкнутых областей $\bar{G}^*$ и $\bar{G}'^*$, переводящее траектории системы D и траектории системы D' друг в друга (т. е. отождествляющее отображение), сохраняющее ориентацию и направление по t. Зададим для каждой из систем D и D' фиксированную правильную систему канонических окрестностей. Как у системы D, так и у системы D' рассмотрим следующие замкнутые области (являющиеся каноническими окрестностями или их *частями*):

1) все замкнутые эллиптические области канонических окрестностей состояний равновесия;

2) все правильные параболические секторы этих окрестностей;

3) все замкнутые канонические окрестности свободных узлов;

4) все канонические окрестности центров;

5) все канонические окрестности ω-, α- и 0-предельных континуумов;

6) все замкнутые кольцевые области, заключенные между парами сопряженных ω- и α-циклов;

7) все замкнутые кольцевые области, заключенные между сопряженными каноническими кривыми 0-предельных континуумов;

8) все замкнутые области между сопряженными ω- и α-дугами (т. е. области типа Π_{ab}).

Таким образом, все седловые секторы канонических окрестностей состояний равновесий попадают в одну из областей 4), 5) или 8).

У всех перечисленных замкнутых областей, кроме границ нет общих друг с другом точек, и всякая точка области $\bar{G}^*$ соответственно $\bar{G}'^*$ принадлежит одной из перечисленных замкнутых областей. Так как схемы динамических систем D и D' тождественны, то между всеми замкнутыми областями перечисленных типов системы D и всеми такими областями системы D' существует взаимно однозначное соответствие по схеме, при котором области одинакового типа соответствуют друг другу, причем если в границы соответствующих друг другу областей входят особые элементы, то они являются соответствующими друг другу по схеме особыми элементами систем D и D'. Кроме того, доказано существование топологического отображения соответствующих друг другу по схеме областей типа 1) — 8), при котором траектории переводятся в траектории и сохраняются ориентация и направление по t (см. п. 4, § 18). Однако для построения нужного топологического отображения замкнутых областей $\bar{G}^*$ и $\bar{G}'^*$ друг на друга в целом, очевидно, необходимо показать, что отображение этих частичных областей может быть должным образом согласовано на их общих границах. Для построения таких согласованных друг с другом отображений частичных областей рассмотрим прежде всего все α-циклы и α-дуги систем D и D' и установим топологическое отображение между точками соответствующих друг другу по схеме α-циклов и α-дуг.

Именно установим: 1) произвольное топологическое отображение, сохраняющее ориентацию соответствующих друг другу по схеме α-циклов C_α и C'_α; 2) произвольное топологическое отображение, сохраняющее ориентацию соответствующих друг другу по схеме циклических дуг a и a', при котором концы этих дуг отображаются друг в друга; 3) произвольное топологическое отображение простых α-дуг a и a', соответствующих друг другу по схеме, при котором соответствующие друг другу по схеме концы этих дуг соответствуют друг другу.

Установив такое отображение α-циклов и α-дуг, определяем отображение соответствующих друг другу по схеме ω-циклов C_ω и C'_ω и ω-дуг b и b' как индуцированное отображением сопряженных с ним α-циклов или соответственно α-дуг. Таким образом, соответствующие друг другу точки ω-циклов C_ω и C'_ω и отличные от концов точки ω-дуг b и b' принадлежат траекториям, пересекающим сопряженные α-циклы или α-дуги в соответствующих друг другу точках. Соответствующие друг другу концы ω-дуг b и b' являются сопряженными с соответствующими друг другу концами α-дуг a и a'. Установив отображение ω- и α-циклов и ω- и α-дуг, мы тем самым устанавливаем отображение друг на друга всех соответствующих друг другу по схеме циклов без контакта среди кривых C и (γ), как свободных, так и несвободных (принадлежащих соответ-

ствующим друг другу по схеме предельным континуумам и свободным узлам). Кроме того, мы устанавливаем при этом также отображение друг на друга всех соответствующих друг другу по схеме параболических дуг и граничных дуг без контакта. Будем это отображение соответствующих друг другу по схеме ω- и α-циклов, ω- и α-дуг, а также несвободных циклов без контакта и параболических дуг называть «отображением T». Очевидно, в силу отображения T устанавливается отображение друг в друга отдельных точек особых элементов систем D и D', именно, точек, являющихся концами соответствующих друг другу по схеме элементарных дуг. Кроме того, устанавливается также отображение концов соответствующих друг другу по схеме эллиптических дуг друг в друга.

Предположим, что все замкнутые области указанных выше типов 1) — 8) перенумерованы как в системе D, так и в системе D', и при этом у соответствующих друг другу областей номера одинаковы.

Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_N$ и $h'_1 = \theta(h_1), h'_2 = \theta(h_2), \ldots, h'_N = \theta(h_N)$— эти замкнутые области, выписанные в порядке нумерации (каждая из областей h_i и h'_i является одной из замкнутых областей типа 1) — 8)). Будем последовательно в порядке нумерации устанавливать топологическое отображение соответствующих друг другу по схеме замкнутых областей h_i и h'_i, при котором траектории переводятся в траектории, сохраняются ориентация и направление по t и, кроме того, выполняются следующие дополнительные условия: а) в точках α- и ω-дуг или α- и ω-циклов, входящих в границы рассматриваемых областей h_i и h'_i, это отображение совпадает с отображением T, установленным выше (в частности, оно совпадает с T в точках особых элементов, являющихся концами элементарных дуг, и в концах эллиптических дуг); б) если у областей номера i_0 (h_{i_0} и h'_{i_0}) есть общие граничные точки с областями меньшего номера, то в этих точках отображение областей h_{i_0} и h'_{i_0} совпадает с уже построенным отображением замкнутых областей меньшего номера (т. е. областей h_i и h'_i, где $i = 1, 2, \ldots, i_0 - 1$).

Указанные условия а) и б), очевидно, всегда могут быть выполнены. Таким образом, мы получаем отождествляющее отображение замкнутых областей $\bar{G}^*$ и $\bar{G}'^*$ друг на друга, переводящее траектории в траектории, сохраняющее ориентацию и направление по t, и теорема доказана.

Из доказанной теоремы и элементарных рассуждений, которые мы опускаем, вытекает следующая

Основная теорема 76. *Для того чтобы топологические структуры разбиения на траектории динамических систем D и D' в замкнутых областях $\bar{G}^*$ и $\bar{G}^{*\prime}$ были тождественны, необходимо и достаточно, чтобы схемы этих систем были тождественны.*

5. Схема динамической системы на сфере. Схема динамической системы, определенной на плоскости и отображенной на сферу Пуанкаре. В главах VIII, X и XI мы рассматривали динамическую систему в некоторой ограниченной плоской области. Все понятия, которые введены в этих главах, полностью относятся также и к случаю, когда рассматривается динамическая система на сфере в смысле § 2. Необходимо только внести некоторые очевидные изменения.

Таким образом, полностью аналогично может быть рассмотрена схема динамической системы на сфере. Эта схема может задаваться как таблицей, так и схематическим рисунком. Очевидно, в схеме динамической системы на сфере отсутствует схема «границы области».

В случае, когда динамическая система, определенная на плоскости, рассматривается на сфере Пуанкаре, мы также можем совершенно аналогично рассматривать «схему динамической системы на сфере Пуанкаре». При этом мы должны рассматривать «схему экватора». Не останавливаясь подробно на этом вопросе, представляющемся довольно простым, отметим все же, что для написания схемы экватора нужно: 1) указать, является ли экватор предельным циклом или нет, и в случае, когда он является предельным циклом, указать, является ли он ω- или α-предельным, и указать все стремящиеся к нему особые траектории; 2) указать все лежащие на экваторе состояния равновесия в случае, когда экватор не является предельным циклом, и указать полные схемы всех этих состояний равновесия.

В следующей главе, рассматривая конкретные примеры, мы по преимуществу будем рассматривать динамические системы на сфере Пуанкаре и при этом будем пользоваться не табличной записью схемы, а *схематическим рисунком*, как более понятным и обозримым.

ГЛАВА XII

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ «В ЦЕЛОМ» КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Настоящая глава состоит всего из одного параграфа. В нем на основании приемов исследования динамических систем, рассмотренных в главах IV и VI, устанавливается схема ряда конкретных динамических систем. Почти все эти системы возникли из приложений в различных областях физики.

§ 30. Примеры

Пример 1 [67].

$$\dot{x} = 2xy \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = 1 + y - x^2 + y^2 \equiv Q(x, y).$$

Состояния равновесия следующие: A (1, 0) и $B(-1, 0)$ — неустойчивые фокусы. Легко видеть, что $x = 0$ — интегральная прямая. Система симметрична относительно оси y. Предельных циклов нет согласно критерию Дюлака. Действительно, возьмем в качестве функции Дюлака $F(x, y) = x^{-2}$. Тогда выражение $\frac{\partial (PF)}{\partial x} + \frac{\partial (QF)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$ сохраняет знак.

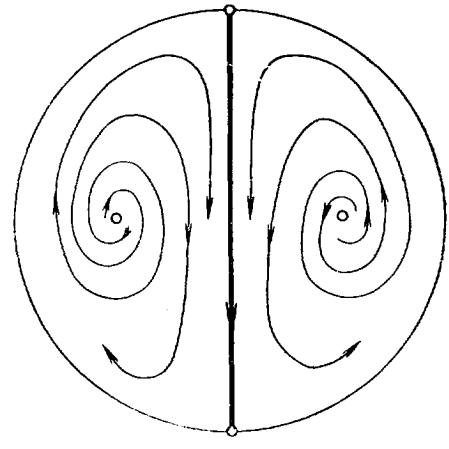


Рис. 300.

Рассматривая систему на сфере Пуанкаре, можно показать, что на экваторе сферы имеются два седла — концы оси y (рис. 300) *).

Пример 2 [67].

$$\dot{x} = 2x(1 + x^2 - 2y^2) \equiv P(x, y),$$
$$\dot{y} = -y(1 - 4x^2 + 3y^2) \equiv Q(x, y).$$

Состояния равновесия следующие: O (0, 0) — седло, A_1 (1, 1), A_2 (1, —1), A_3 (—1, 1), A_4 (—1, —1) — устойчивые фокусы. Нетрудно видеть, что оси $x = 0$ и $y = 0$ — интегральные прямые, и векторное поле системы симметрично относительно осей x и y. Предельных циклов нет согласно критерию Дюлака. Действительно,

*) Здесь, как и дальше, рассматривается проекция полусферы на круг (см. § 13).

возьмем в качестве функции Дюлака $F(x, y) = x^{-3/2}y^{-2}$. Тогда выражение

$$\frac{\partial (PF)}{\partial x} + \frac{\partial (QF)}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2}{x^{3/2}y^2}$$

в каждой четверти плоскости (x, y) сохраняет знак.

Можно показать, что на экваторе сферы Пуанкаре имеются две пары седел — концы осей x и y (рис. 301).

Пример 3 [68].

$$\dot{x} = x[(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1) - 4y^2] \equiv P(x, y),$$
$$\dot{y} = y[(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1) + 4x^2] \equiv Q(x,y).$$

Состояния равновесия: O (0, 0) — устойчивый узел, A (0, 1) и B (0, —1) — седла, C (1, 0) и D (—1, 0) — неустойчивые узлы. Оси

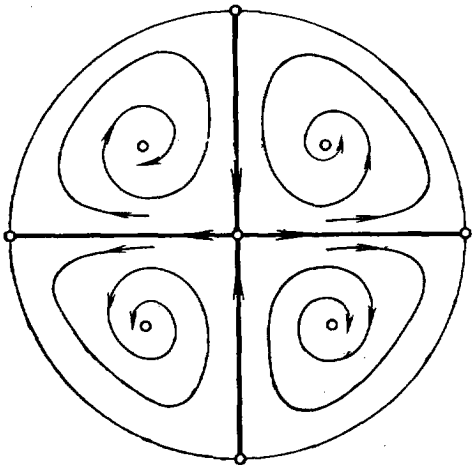


Рис. 301.

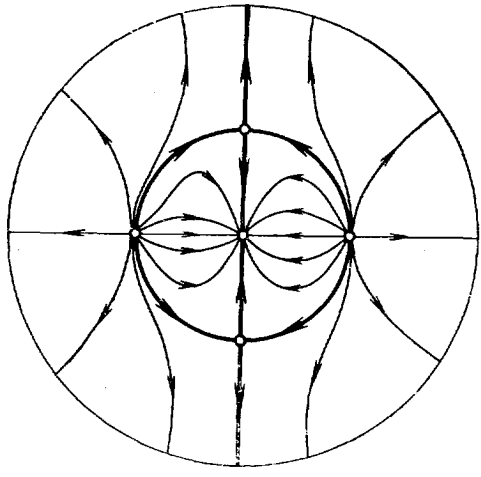


Рис. 302.

$x = 0$ и $y = 0$ — интегральные прямые. Картина симметрична относительно осей координат. Предельных циклов нет, так как через все состояния равновесия проходят интегральные прямые.

Осталось установить поведение сепаратрис. Рассмотрим семейство окружностей $x^2 + y^2 = C$. Дифференцируя в силу системы (см. § 3, п. 13), получим

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = 2(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1).$$

Отсюда непосредственно видно, что $x^2+y^2=1$ — интегральная кривая. Вне этой окружности $\frac{d(x^2+y^2)}{dt} > 0$, а внутри $\frac{d(x^2+y^2)}{dt} < 0$, т. е. все окружности $x^2+y^2=C$ при $C \neq 1$ являются окружностями без контакта с траекториями системы. Следовательно, бесконечность абсолютно устойчива (рис. 302).

Пример 4 [69].

$$\dot{x} = (x-y)^2 - 1, \qquad \dot{y} = (x+y)^2 - 1. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что система (1) обладает центральной симметрией. Состояния равновесия: A (0, 1) и B (0, —1) — седла, C (1, 0) — неустой-

чивый фокус, а D $(-1, 0)$ — устойчивый фокус. Векторное поле системы (1) повернем на угол 45°. Получим

$$\dot{x} = -2xy, \quad \dot{y} = x^2 + y^2 - 1. \tag{2}$$

Система (2) может быть проинтегрирована. Ее общее решение: $x\left(\frac{x^2}{3} + y^2 - 1\right) = C$ (рис. 303, *а*). Замкнутые кривые системы (2) возьмем в качестве топографической системы. Покажем, что система (1) не имеет предельных циклов. В самом деле, поскольку система (1) обладает центральной симметрией, она могла бы иметь лишь четное число циклов вокруг фокусов C и D. Однако каждый такой цикл пересекал бы замкнутые кривые топографической системы, как входя внутрь их, так и выходя наружу с ростом t, что невозможно, так как эти замкнутые кривые являются кривыми без контакта с траекториями. Для вычисления

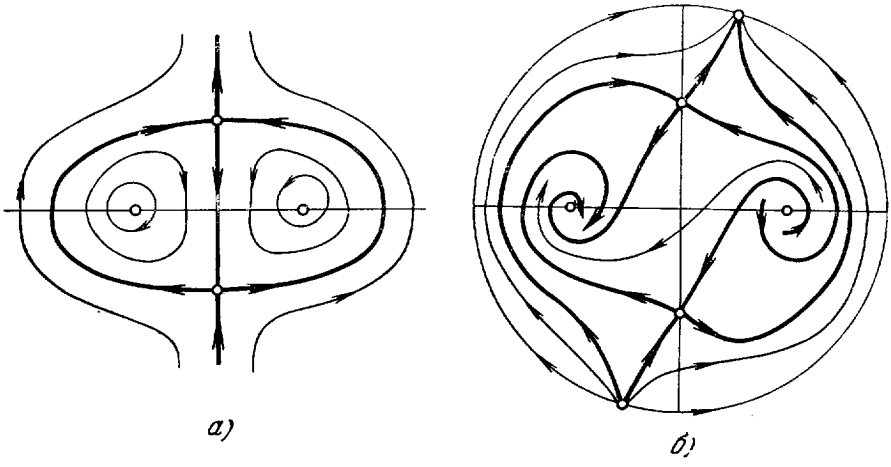


Рис. 303.

наклонов сепаратрис в седле A $(0, 1)$ получается следующее квадратное уравнение: $k^2 - 2k - 1 = 0$, откуда $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Из симметрии следует, что те же наклоны сепаратрис будут и в седле B $(0, -1)$.

Отметим, что траектории системы (1) при $x \geqslant 0$ пересекают замкнутые кривые топографической системы, с ростом t выходя наружу, а при $x \leqslant 0$ — с ростом t входя внутрь замкнутых кривых топографической системы. Отсюда следует, что одна ω-сепаратриса седла A и одна ω-сепаратриса седла B при $t \to -\infty$ стремятся к фокусу C $(1, 0)$, а также то, что одна α-сепаратриса седла A и одна α-сепаратриса седла B при $t \to +\infty$ стремятся к фокусу D $(-1, 0)$. Остальные четыре сепаратрисы не могут стремиться к фокусам. Покажем, что эти сепаратрисы стремятся к бесконечности.

Рассмотрим поведение траекторий системы в бесконечности. С помощью преобразования Пуанкаре $y = \frac{1}{z}$, $x = \frac{\tau}{z}$ и умножения полученных уравнений на z получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= 1 - 3\tau - \tau^2 - z^2 - \tau^3 + \tau z^2 \equiv P(\tau, z), \\ \frac{dz}{dt} &= -z - 2\tau z - \tau^2 z + z^3 \equiv Q(\tau, z). \end{aligned} \tag{3}$$

При $z = 0$ получим уравнение для определения состояний равновесия $f(\tau) \equiv \tau^3 + \tau^2 - 3\tau - 1 = 0$. Имеем $f'(\tau) = 3\tau^2 + 2\tau + 3$. Этот квадратный трехчлен сохраняет знак, значит, уравнение $f(\tau) = 0$ имеет только один действительный корень, причем значение τ_0, соответствующее этому корню, должно быть положительным, так как $f(0) = -1$, $f'(\tau) > 0$. Вычисляя частные производные от правых частей системы (3) в точке $z = 0$, $\tau = \tau_0$, получим

$$\Delta \equiv (P'_\tau Q'_z - P'_z Q'_\tau)_0 = (1 + 2\tau_0 + \tau_0^2)(3 + 2\tau_0 + 3\tau_0^2) > 0,$$
$$\sigma \equiv (P'_\tau + Q'_z)_0 = -4(\tau_0^2 + \tau_0 + 1) < 0.$$

Значит, $z = 0$, $\tau = \tau_0$ — устойчивый узел. Можно показать, что система, получаемая с помощью преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{\tau}{z}$, не имеет состояний равновесия на концах оси x. Таким образом, на экваторе сферы Пуанкаре у системы (1) имеется пара узлов, устойчивый и неустойчивый (рис. 303, *б*).

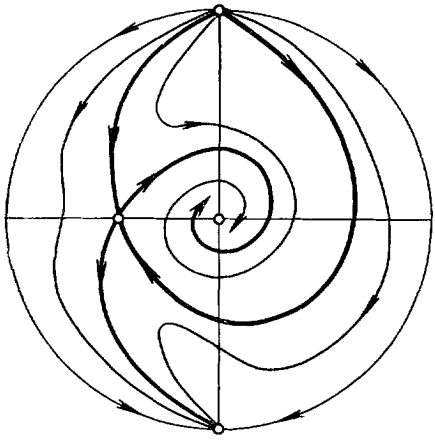


Рис. 304.

Теперь поведение сепаратрис седел A и B, которые не стремятся к фокусам, устанавливается однозначно. Принимая во внимание знак выражения для $\dot{x}$ на оси y, получим, что две сепаратрисы, выходящие из седел в область $x > 0$, при $t \to +\infty$ стремятся к устойчивому узлу в бесконечности, а сепаратрисы, выходящие из седел в область $x < 0$, при $t \to -\infty$ стремятся к неустойчивому узлу в бесконечности.

Пример 5 [62].

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \alpha y - \mu x^2 - y^2,$$

где параметры μ и α положительны.

Система имеет два состояния равновесия: $O(0, 0)$ — устойчивый фокус или узел и $A\left(-\frac{1}{\mu}, 0\right)$ — седло. Предельных циклов и замкнутых контуров, составленных из траекторий, система не имеет (см. § 12, п. 6, пример 6).

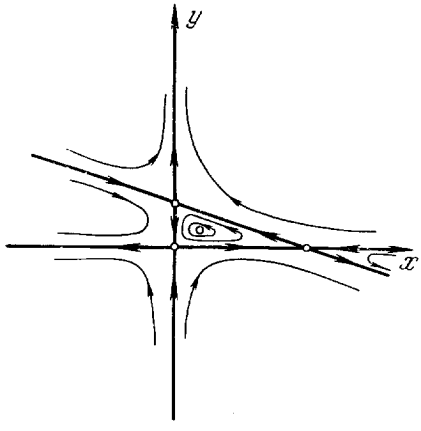
Из рассмотрения поведения траекторий в бесконечности следует, что для этой системы на экваторе сферы Пуанкаре имеется пара узлов — положительный конец оси y — неустойчивый узел, и отрицательный конец оси y — устойчивый узел. Теперь можно однозначно установить поведение сепаратрис седла $A\left(-\frac{1}{\mu}, 0\right)$. Обе ω-сепаратрисы выходят из узла в бесконечности, так как других α-предельных множеств нет. Одна α-сепаратриса уходит в узел в бесконечности, так как она не может попасть в точку O, не пересекая ω-сепаратрис, а другая α-сепаратриса не может попасть в узел в бесконечности и стремится к фокусу или узлу $O(0, 0)$ (рис. 304).

Пример 6 [70].

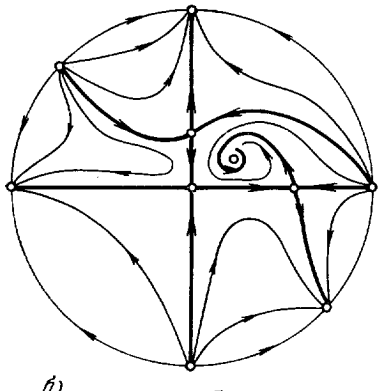
$$\dot{x} = x(3 - x - ny) \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = y(-1 + x + y) \equiv Q(x, y).$$

Рассмотрим качественную картину для этой системы при $n > 3$. Состояния равновесия следующие: O (0, 0), A (0, 1), B (3, 0) — седла и $C\left(\frac{n-3}{n-1}, \frac{2}{n-1}\right)$, которое может иметь следующий характер: 1) $n > 5$, C — устойчивый фокус; 2) $\frac{11+\sqrt{128}}{7} < n < 5$, C — неустойчивый фокус; 3) $3 < n < \frac{11+\sqrt{128}}{7}$, C — неустойчивый узел. Узел и фокус топологически эквивалентны, поэтому мы будем различать два случая: $n > 5$ и $3 < n < 5$. Очевидно, $x = 0$ и $y = 0$ — интегральные прямые. Рассматриваемая система не имеет замкнутых контуров, составленных из траекторий (см. § 12, п. 6, пример 7).

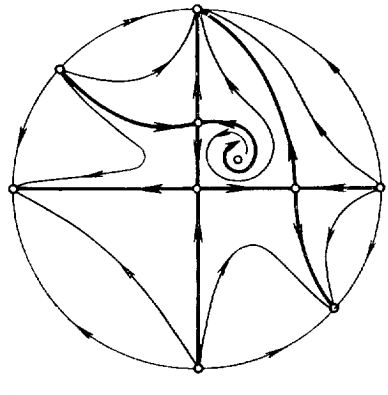
В случае $n = 5$, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, система имеет решение $xy^3\left(\frac{x}{3} + y - 1\right)^2 = C$. Исследование кривых этого семейства



а) $n = 5$



б) $n > 5$



в) $3 < n < 5$

Рис. 305.

показывает наличие континуума замкнутых траекторий, следовательно, состояние равновесия C при $n = 5$ является центром. В этом случае сепаратриса идет из седла A в седло B (рис. 305, *а*).

Выше было показано (см. пример § 13, п. 3), что на экваторе сферы Пуанкаре будем иметь: 1) концы оси y — устойчивый и неустойчивый узел; 2) концы оси x — неустойчивый и устойчивый узлы и 3) пара точек во II и IV четвертях — устойчивый узел (IV четверть) и неустойчивый узел (II четверть).

Теперь легко установить поведение сепаратрис. Рассмотрим два случая: 1) $n > 5$. Поскольку система не имеет замкнутых контуров, составленных из траекторий, ω-сепаратриса седла A не может выходить из седла B. Значит, она выходит из неустойчивого узла на конце оси x, так

как фокус C и конец оси y устойчивы; α-сепаратриса седла B при $t \to \infty$ стремится к фокусу C, так как не может уходить в бесконечность, не пересекая сепаратрису седла A (рис. 305, *б*). 2) $3 < n < 5$. Состояние равновесия C неустойчиво. ω-сепаратриса седла B стремится к концу оси y — других возможностей для нее нет. Сепаратриса седла A при $t \to -\infty$ стремится к состоянию равновесия C, так как она не может уходить в бесконечность, не пересекая сепаратрису седла B. Поведение остальных сепаратрис устанавливается однозначно (рис. 305, *в*).

Пример 7 [70].

$$\dot{x} = x(3 - x - y), \qquad \dot{y} = y(x - 1).$$

Система имеет три состояния равновесия: O (0, 0) и A (3, 0) — седла, C (1, 2) — устойчивый фокус. Очевидно, $x = 0$ и $y = 0$ — интегральные прямые. Система не имеет замкнутых контуров, составленных из траекторий (см. § 12, п. 6, пример 7).

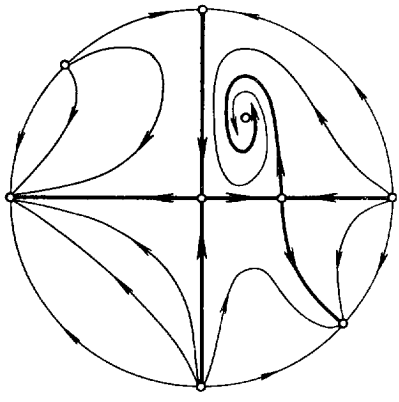


Рис. 306.

Рассмотрим поведение траекторий в бесконечности. В результате преобразования Пуанкаре $x = \frac{\tau}{z}$, $y = \frac{1}{z}$ и последующего умножения правых и левых частей полученных уравнений на z будем иметь:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\tau - 2\tau^2 + 4\tau z, \qquad \frac{dz}{dt} = z(z - \tau).$$

Эта система имеет два состояния равновесия при $z = 0$: 1) $\tau_1 = 0$, $z = 0$, 2) $\tau_2 = -\frac{1}{2}$, $z = 0$. Корни характеристического уравнения для состояния равновесия $\tau = z = 0$ следующие: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. Очевидно, оси координат τ и z являются интегральными прямыми. Принимая во внимание направление движения на них и возможные типы соответствующих состояний равновесия (см. теорему 65, § 21), заключаем, что данное состояние равновесия является седло-узлом. При $z < 0$ у него будет узловая область. Поскольку по направлению $\tau = 0$ в состояние равновесия входит бесчисленное множество траекторий, а по направлению $z = 0$ входят две траектории, то полуоси оси $z = 0$ являются сепаратрисами. Таким образом, при $z > 0$ будут седловые области. На экваторе сферы Пуанкаре этому состоянию равновесия соответствует пара точек — концы оси y. Следовательно, конец положительной полуоси является седлом, а конец отрицательной полуоси является неустойчивым узлом. Нетрудно показать, что состояние равновесия $z = 0$, $\tau = -\frac{1}{2}$ является неустойчивым узлом, которому соответствует на экваторе сферы Пуанкаре пара точек: во II четверти — неустойчивый узел и в IV четверти — устойчивый узел. С помощью другого преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{\tau}{z}$ можно показать, что конец положительной полуоси x — неустойчивый узел, а конец отрицательной полуоси x — устойчивый узел. Теперь поведение всех сепаратрис устанавливается однозначно (рис. 306).

Пример 8 [71].

$$\dot{x} = x(y-\beta), \qquad \dot{y} = \beta(\alpha - y) - kxy.$$

Все параметры положительны. С помощью преобразования $x_1 = \alpha\beta k x$ система может быть приведена к виду (в прежних обозначениях для переменных):

$$\dot{x} = x(y-\beta), \qquad \dot{y} = a - \beta y - \frac{1}{a}xy,$$

где $a = \alpha\beta$. Эта система имеет два состояния равновесия: $A\ (0, \frac{a}{\beta})$ и $B\ [\frac{a}{\beta}(a-\beta^2), \beta]$. Если $a < \beta^2$, то A — устойчивый узел, B — седло; если $a > \beta^2$, то A — седло, B — устойчивый узел *). Очевидно, $x = 0$ — интегральная прямая. Легко проверить, что прямая $\beta x + a\beta y - a^2 = 0$, проходящая через точки A и B, также является интегральной прямой. Наличие этих двух интегральных прямых доказывает отсутствие предельных циклов.

Рассмотрим поведение траекторий в бесконечности. С помощью преобразования Пуанкаре $x = \frac{\tau}{z}$, $y = \frac{1}{z}$ и последующего умножения правых и левых частей полученных уравнений на z получим:

$$\frac{d\tau}{dt} = \tau + \frac{1}{a}\tau^2 - a\tau z^2, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{a}\tau z + \beta z^2 - az^3.$$

При $z = 0$ эта система имеет два состояния равновесия: 1) $\tau_1 = 0$, $z = 0$, 2) $\tau_2 = -a$, $z = 0$. Полностью аналогично рассмотрению, проведенному в примере 7, можно показать, что состояние равновесия $\tau = z = 0$ — седло-узел, причем узловая область лежит в области $z > 0$, седловые — в области $z < 0$, а полуоси оси $z = 0$ — сепаратрисы. Состояние равновесия $z = 0$, $\tau = -a$ — устойчивый узел. С помощью преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{\tau}{z}$ и последующего умножения на z обеих частей уравнений получим

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{a}\tau - \tau^2 + az^2, \qquad \frac{dz}{dt} = z(\beta z - \tau).$$

Состояние равновесия $z = \tau = 0$ данной системы, как показано в примере 1 § 22, является седло-узлом, причем узловая область принадлежит области $z < 0$, а седловые — области $z > 0$. На экваторе сферы Пуанкаре будем иметь: 1) концы оси x — седло и неустойчивый узел, 2) концы оси y — неустойчивый узел и седло, 3) концы прямой $x + ay = 0$ — устойчивый и неустойчивый узлы (рис. 307, *а*, *б*).

Пример 9 [72].

$$\dot{x} = x\left(y + \frac{3}{2}\right), \qquad \dot{y} = x + y - 2y^2.$$

Состояния равновесия следующие: $O\ (0, 0)$ — неустойчивый узел, $A(0, \frac{1}{2})$ и $B\ (6, -\frac{3}{2})$ — седла. Система не имеет предельных циклов, так как если бы существовал предельный цикл, то он охватывал бы узел O, что невозможно, так как $x = 0$ — интегральная прямая.

*) При $a = \beta^2$ состояния равновесия A и B сливаются, образуя сложное состояние равновесия.

Рассмотрим поведение траекторий в бесконечности. С помощью преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{\tau}{z}$ система приводится к виду

$$\frac{d\tau}{dt} = z - 3\tau^2 - \frac{1}{2}\tau z, \qquad \frac{dz}{dt} = -z\left(\tau + \frac{3}{2}z\right).$$

При $z = 0$ эта система имеет одно состояние равновесия: $z = \tau = 0$. Как показано в примере 3 § 22, это — сложное состояние равновесия с замкнутой узловой областью. Полуоси оси $z = 0$ являются сепаратрисами и при $z < 0$ ни одна траектория не стремится к состоянию равновесия ни при $t \to \infty$, ни при $t \to -\infty$. С помощью другого преобразования

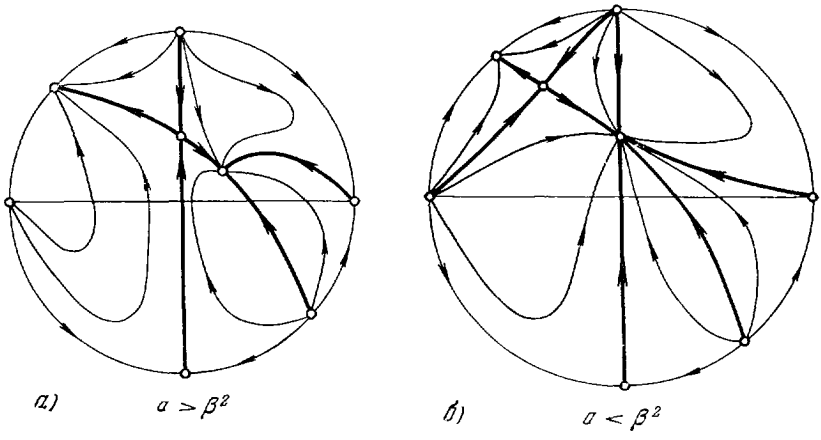


Рис. 307.

Пуанкаре $x = \frac{\tau}{z}$, $y = \frac{1}{z}$ можно показать, что конец положительной полуоси y — неустойчивый узел, а конец отрицательной полуоси y — устойчивый узел.

Теперь можно однозначно установить поведение сепаратрис седел. Легко видеть, что ω-сепаратрисы седла A совпадают с осью y. Рассмотрим α-сепаратрисы седла A. Сепаратриса, проходящая в полуплоскости $x < 0$, стремится к отрицательному концу оси y, так как все другие состояния равновесия при $x \leqslant 0$ неустойчивы. Принимая во внимание, что $\dot{y} > 0$ на положительной полуоси x, заключаем, что сепаратриса, проходящая в полуплоскости $x > 0$, стремится к положительному концу оси x. Поведение всех четырех сепаратрис седла B также устанавливается однозначно (рис. 308).

Пример 10[73].

$$\dot{x} = -x(2 + y), \quad \dot{y} = \alpha x + \beta y,$$

где $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Сделаем замену: $\bar{x} = \alpha x$. Система примет вид (в прежних обозначениях для переменных):

$$\dot{x} = -x(y + 2), \dot{y} = x + \beta y.$$

Состояния равновесия следующие: $O(0, 0)$ и $A(2\beta, -2)$. При $\beta > 0$ O — седло, а при $\beta < 0$ O — устойчивый узел. Угловые коэффициенты траекторий в состоянии равновесия O следующие: $k_1 = -\frac{1}{2+\beta}$ и $k_2 = \infty$

(см. § 9, п. 7, пример 3). Состояние равновесия A будет: 1) при $\beta < 0$ — седло, 2) при $0 < \beta < 8$ — неустойчивый фокус, 3) при $\beta > 8$ — неустойчивый узел.

Заметим, что $x = 0$ — интегральная прямая. Система не имеет предельных циклов (см. § 12, п. 6, пример 8).

Рассмотрим поведение траекторий в бесконечности. В результате преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{\tau}{z}$ получим

$$\frac{d\tau}{dt} = z + (2+\beta)\tau z + \tau^2, \qquad \frac{dz}{dt} = z(2\tau + z).$$

Отсюда получается при $z = 0$ одно состояние равновесия: $z = \tau = 0$. Как было показано выше (см. пример 4 § 22), это — сложное состояние равновесия с замкнутой узловой областью. Можно показать, что в полуплоскости $z > 0$ к состоянию равновесия $z = \tau = 0$ не стремится ни одна траектория. С помощью другого преобразования Пуанкаре $x = \frac{\tau}{z}$, $y = \frac{1}{z}$ получим

$$\frac{dz}{dt} = -z^2(\beta + \tau),$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\tau[1 + (2+\beta)z + \tau z].$$

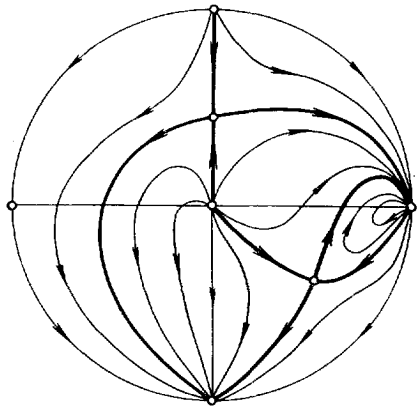


Рис. 308.

При $z = 0$ имеется одно состояние равновесия: $z = \tau = 0$. Корни характеристического уравнения для него следующие: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. Принимая во внимание возможные типы таких состояний равновесия (см. теорему 65, § 21), а также направления движения по осям координат z и τ, являющимся интегральными прямыми, заключаем, что состояние равновесия $z = \tau = 0$ есть седло-узел, для которого полуоси оси $z = 0$ являются сепаратрисами. Нетрудно видеть, что в случае $\beta > 0$ при $z > 0$ будет узловая область, а при $z < 0$ седловые, а в случае $\beta < 0$ — наоборот.

Теперь поведение сепаратрис устанавливается однозначно (рис. 309, *а*, *б*).

Пример 11 [72].

$$\dot{x} = x\left(y + \frac{\lambda}{n-1}\right), \qquad \dot{y} = x + \frac{1}{1-n}y^2.$$

Рассмотрим случай $n > 1$, $\lambda > 0$. Система имеет два состояния равновесия: $O(0,0)$ и $A\left(\frac{\lambda^2}{(n-1)^3}, \frac{\lambda}{1-n}\right)$. Можно показать, что O — седло-узел (см. пример 6 § 22). Наклоны сепаратрис в точке O: $k_1 = \frac{n-1}{\lambda}$, $k_2 = \infty$. Легко видеть, что A — седло. Предельных циклов нет в силу характера состояний равновесия.

Рассмотрим поведение траекторий в бесконечности. С помощью преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$ и $y = \frac{\tau}{z}$ и умножения полученных

уравнений на z получим:

$$\frac{d\tau}{dt} = z + \frac{n}{1-n}\tau^2 + \frac{\lambda}{1-n}\tau z, \qquad \frac{dz}{dt} = z\left(\frac{\lambda}{n-1}z - \tau\right).$$

При $z = 0$ эта система имеет одно состояние равновесия: $\tau = z = 0$. Можно показать, что это — сложное состояние равновесия с замкнутой узловой областью (см. пример 7 § 22). Как и в примере 9, можно показать, что при $z < 0$ все траектории проходят на конечном расстоянии

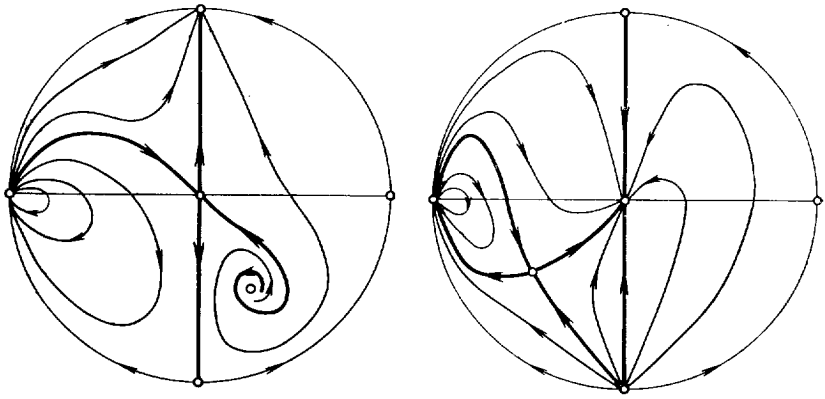


Рис. 309.

от состояния равновесия. С помощью другого преобразования Пуанкаре $y = \frac{1}{z}$, $x = \frac{\tau}{z}$ можно показать, что «концы» оси y являются узлами — неустойчивым и устойчивым. Принимая во внимание направление движения траекторий на изоклинах вертикальных и горизонтальных наклонов, а также при $y = 0$, поведение сепаратрис седло-узла O и седла A теперь однозначно определяется (рис. 310).

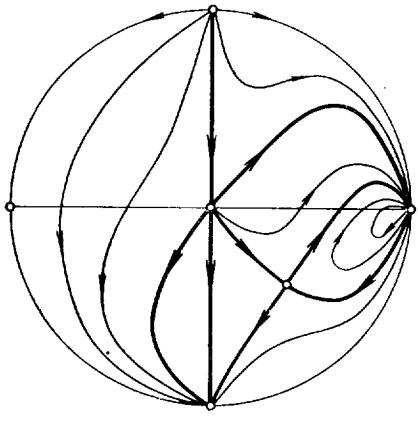


Рис. 310.

Пример 12 [74].

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 7y + x(x^{1/2} - 12),$$

где $x \geqslant 0$. В п. 8 § 9 мы доопределили эту систему для $x < 0$ и нашли состояния равновесия при $x \geqslant 0$: $O(0, 0)$ — неустойчивый узел и $A(144, 0)$ — седло. Система не имеет замкнутых контуров, составленных из траекторий, в силу критерия Бендиксона.

Наклоны сепаратрис в седле определяются из уравнения $k^2 - 7k - 6 = 0$, откуда $k_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 6}$. Оси координат являются изоклинами: ось x является изоклиной вертикальных наклонов, а ось y является изоклиной наклонов, равных 7.

Рассмотрим логические возможности для поведения сепаратрис L_1, L_2, L_3 и L_4 (рис. 311, *а*). Сепаратриса L_1, очевидно, уходит в бесконеч-

ность в полуплоскости $y > 0$, так как если бы L_1 пересекала ось x при $x < 144$, то у сепаратрисы L_4 не было бы α-предельных точек. Сепаратриса L_2 выходит из бесконечности в полуплоскости $x < 0$, так как если бы L_2 пересекала ось x при $x < 144$, то у сепаратрисы L_3 не было бы ω-предельных точек.

Сепаратриса L_3 либо уходит в бесконечность, либо уходит через ось y из рассматриваемой области. Покажем, что осуществляется вторая возможность: $\dot{x} < 0$ при $y < 0$, значит, вдоль L_3 x убывает. Пусть вдоль L_3 $y \to -\infty$, $x \to x_0$, т. е. L_3 асимптотически стремится к прямой $x = x_0$.

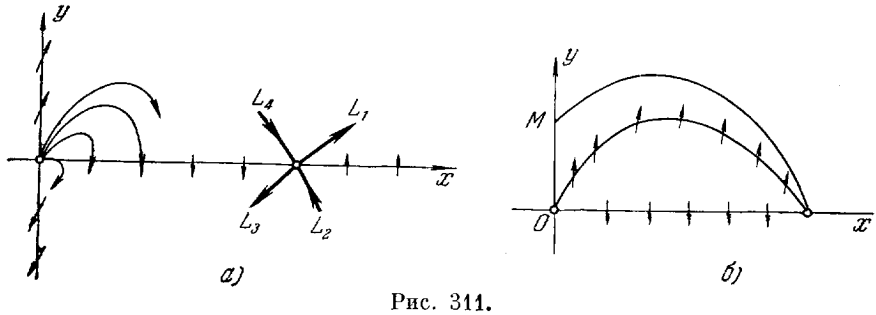


Рис. 311.

Тогда $\sup \left|\frac{dy}{dx}\right| = \infty$. Но $\frac{dy}{dx} = 7 + \frac{x}{y}(x^{1/2} - 12) \to 7$ при $x \to x_0$, $y \to -\infty$, значит, L_3 пересекает ось y.

Для поведения сепаратрисы L_4 имеются следующие три логические возможности: 1) L_4 выходит из узла O, 2) L_4 пересекает с убыванием t ось y, 3) L_4 выходит из бесконечности. Третья возможность не может осуществиться. В самом деле, $\dot{x} > 0$ при $y > 0$, значит, с убыванием t на L_4 x убывает и $x \to x_0 < 144$. Но если x ограничено, то $\dot{y} > 0$ при y достаточно большом, т. е. при убывании t y убывает. Рассмотрим вторую возможность. Найдем критические направления в узле O. Для них получим уравнение $k^2 - 7k + 12 = 0$, откуда $k_1 = 3$, $k_2 = 4$. Рассмотрим изоклину углового коэффициента, равного 4. Ее уравнение $3y = x(12 - \sqrt{x})$. На этой изоклине $y' = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Таким образом, наклон траекторий больше наклона изоклины во всех точках изоклины кроме $x = 0$. Тогда в область σ извне не может войти ни одна траектория (рис. 311, *б*). Предположим, что сепаратриса L_4 выходит не из узла O, а из какой-то точки M на оси y. Но тогда траектория, выходящая из какой-нибудь точки отрезка OM с ростом t попадает в замкнутую область, ограниченную изоклиной, сепаратрисой и отрезком OM, из которой она не может выйти. Полученное противоречие доказывает, что вторая возможность не может осуществляться. Таким образом поведение сепаратрис установлено однозначно (рис. 312).

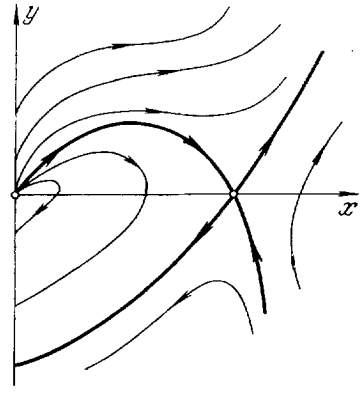


Рис. 312.

Пример 13 [75].

$$\dot{x} = y - \frac{1-\beta}{1+\beta x} \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = -\varepsilon(x+y^2) \equiv Q(x, y).$$

Физический смысл имеет часть плоскости, ограниченная неравенством $1 + \beta x > 0$, при этом $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \frac{1}{3}$.

В рассматриваемой части плоскости система имеет два состояния равновесия: $O_1(-1, 1)$ и $O_2(x_2, y_2)$, где $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta} + \sqrt{\frac{1}{\beta} - \frac{3}{4}}$, $y_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{\beta} - \frac{3}{4}}$. Состояние равновесия $O_1(-1, 1)$ — узел или фокус, устойчивый при $\varepsilon > \frac{\beta}{2(1-\beta)}$ и неустойчивый при $\varepsilon < \frac{\beta}{2(1-\beta)}$, состояние равновесия $O_2(x_2, y_2)$ — седло. Рассмотрим поведение сепаратрис седла O_2 (рис. 313). Изоклины вертикальных и горизонтальных наклонов $y = \frac{1-\beta}{1+\beta x}$ (A) и $x + y^2 = 0$ (B) разбивают рассматриваемую часть плоскости на области, в которых $\dot{x}$ и $\dot{y}$ сохраняют знак. Наклоны сепаратрис в седле определяются из уравнения

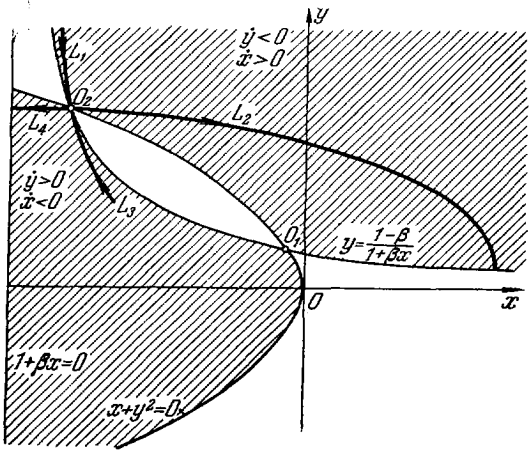


Рис. 313.

$$k^2 + \frac{\beta y_2 + 2\varepsilon(1-\beta)}{1+\beta x_2} k + \varepsilon = 0.$$

Отсюда k_1 и k_2 оба отрицательны, так как $\varepsilon > 0$, $1 + \beta x > 0$, $y_2 > 0$, $0 < \beta < \frac{1}{3}$. Сепаратриса L_1 при $t \to -\infty$ уходит в бесконечность, сепаратриса L_4 пересечет прямую $x = -\frac{1}{\beta}$ с ростом t. Рассмотрим ход сепаратрисы L_2. Она выходит из седла в область, где $\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$. Для ее поведения существуют следующие пять логических возможностей: 1) L_2 уходит в бесконечность, асимптотически приближаясь к оси x, 2) L_2 выходит из рассматриваемой области, пересекая прямую $1 + \beta x = 0$ или уходя в бесконечность, (в полуплоскости $y < 0$), 3) $L_2 \to O_1$, 4) L_2 стремится к предельному циклу вокруг O_1, 5) $L_2 \to O_2$.

Первая возможность не может осуществляться, так как в области, где $\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$, при достаточно больших x и $0 < y < y_2$ можно указать такое число $N > 0$, что $\frac{dy}{dx} = \frac{-\varepsilon(x+y^2)(1+\beta x)}{-(1-\beta)+y(1+\beta x)} < -N$. Таким образом, сепаратриса L_2 пересекает изоклину (B) и выходит в область, где $\dot{x} < 0$, $\dot{y} < 0$. При дальнейшем возрастании t может осуществиться одна из возможностей 2) — 5).

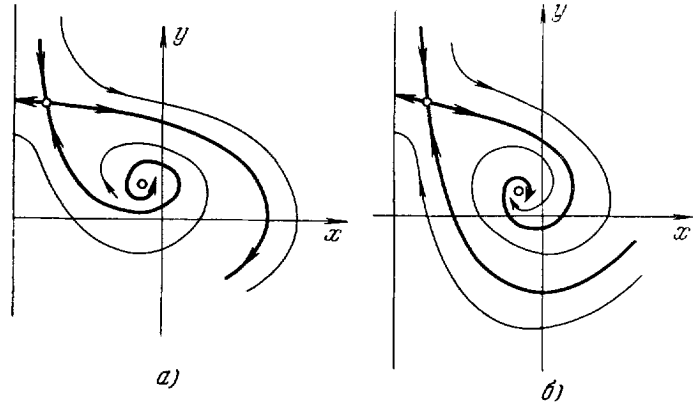
Покажем, что в некоторых областях значений параметров система не имеет предельных циклов. Заметим, что предельные циклы, если они существуют, должны лежать либо справа от прямой $x = x_2$, либо слева

от прямой $x = x^0$, где x^0 — абсцисса точки пересечения сепаратрисы L_2 с изоклиной $y = \frac{1-\beta}{1+\beta x}$. Воспользуемся критерием Дюлака. Полагая $F(x, y) = e^{2\varepsilon x}$, получим

$$\frac{\partial (PF)}{\partial x} + \frac{\partial (QF)}{\partial y} = \frac{1-\beta}{1+\beta x} e^{2\varepsilon x}\left(\frac{\beta}{1+\beta x} - 2\varepsilon\right).$$

Это выражение равно нулю на прямой $x = \frac{\beta - 2\varepsilon}{2\varepsilon\beta}$. Эта прямая расположена слева от прямой $x = x_2$, если $\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta} + \sqrt{\frac{1}{\beta} - \frac{3}{4}}$, откуда $4\varepsilon(1-\beta) \geqslant -\beta + \sqrt{\beta(4-3\beta)}$. Значит, при этом циклов нет.

Далее, рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx} = -\varepsilon\frac{x+y^2}{y}$, получающееся из первоначального при $\beta = 1$. Его общий интеграл $e^{2\varepsilon x}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - x - y^2\right) = h$. Рассмотрим дугу λ траектории этого уравнения, проходящую через



а) *б)*

Рис. 314.

седло O_2 до пересечения с изоклиной (B). В области, где $\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$, дуга этой траектории будет дугой без контакта для траекторий системы (1). В самом деле,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\beta<\frac{1}{3}} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\beta=1} = \frac{\varepsilon(1-\beta)(x+y^2)}{y(1+\beta x)[(1-\beta)/(1+\beta x) - y]} < 0.$$

Наклон в седле O_2 дуги λ равен нулю, а сепаратрисы L_2 — отрицателен. Значит, она пересекает изоклину (B) левее, чем дуга λ. Найдем x^* — абсциссу точки пересечения дуги λ и изоклины (A):

$$e^{2\varepsilon x^*}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - x^* - \frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta x^*)^2}\right) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{2\varepsilon x_2}.$$

Отсюда

$$1 - 2\varepsilon\left(x^* - \frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta x^*)^2}\right) = \exp\left\{-2\varepsilon\left(x^* - \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} - \sqrt{\frac{1}{\beta} - \frac{3}{4}}\right)\right\}. \quad \text{(C)}$$

Таким образом, рассматриваемая система не имеет предельных циклов при значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \beta < \frac{1}{3}$,

$2\varepsilon(1+\beta x^*) \leqslant \beta$, где x^* — положительный корень уравнения (С). Итак, для значений параметров ε и β, при которых система не имеет предельных циклов, поведение сепаратрисы L_2 определяется характером устойчивости состояния равновесия $O_1(-1, 1)$.

Поведение сепаратрисы L_3 определяется поведением сепаратрисы L_2 (рис. 314, *а*, *б*).

Пример 14 [76].

$$\dot{x} = y(x+2) + x^2 + y^2 - 1, \quad \dot{y} = -x(x+2).$$

Система имеет два состояния равновесия: $A(0, -1+\sqrt{2})$, $B(0, -1-\sqrt{2})$. A — неустойчивый фокус, B — седло. Нетрудно убедиться, что окружность $x^2 + y^2 = 1$ является траекторией системы. Очевидно, точка A лежит внутри этой окружности, а B — вне ее. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ является предельным циклом, так как система аналитическая.

Докажем его единственность. Введем в систему параметр:

$$\dot{x} = y(ax+2) + x^2 + y^2 - 1, \quad \dot{y} = -x(ax+2).$$

При $a = 1$ получается исходная система. При $a = 0$ система может быть проинтегрирована. Ее общее решение $(x^2 + y^2 - 1)\, e^y = C$ (рис. 315, *а*).

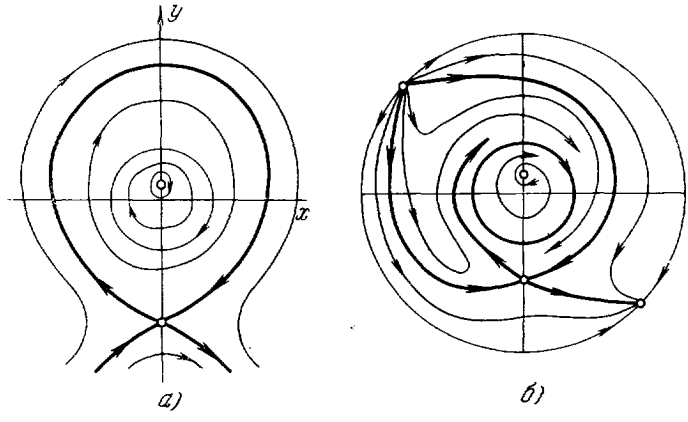


Рис. 315.

Замкнутые траектории этой системы могут служить топографической системой для данной. Кривая контактов данной и топографической системы

$$x^2(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

$x = 0$ — контакт «ложный», $x = 0$ — общая изоклина горизонтальных наклонов для обеих систем. Левая часть этого выражения меняет знак на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Если у данной системы существовал бы предельный цикл, отличный от $x^2 + y^2 = 1$, то он должен был бы охватывать одно состояние равновесия A. Но тогда он пересекал бы замкнутые кривые топографической системы, входя внутрь них и выходя наружу. Однако все замкнутые кривые топографической системы кроме $x^2 + y^2 = 1$ являются замкнутыми кривыми однократного пересечения для траекторий данной системы, значит, это невозможно. Следовательно, предельный цикл единственный. Поскольку фокус неустойчивый, траектории данной системы накручиваются на этот предельный цикл, как

изнутри, так и снаружи. Следовательно, предельный цикл $x^2 + y^2 - 1 = 0$ — устойчивый. Можно показать, что на экваторе сферы Пуанкаре имеется пара узлов, один устойчивый, другой неустойчивый.

Теперь можно однозначно установить поведение сепаратрис седла. Так, ω-сепаратрисы седла выходят из неустойчивого узла в бесконечности, так как других α-предельных множеств нет. Нетрудно убедиться, что предельный цикл расположен между ω-сепаратрисами. Но тогда одна из α-сепаратрис седла должна стремиться к устойчивому предельному циклу, а другая — должна стремиться к устойчивому узлу в бесконечности (рис. 315, *б*).

Пример 15.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \mu\left[y^2 - x^2\left(a^2 - \frac{1}{2}x^2\right) - \alpha\right] x(a^2 - x^2), \\ \dot{y} &= x(a^2 - x^2) + \mu y\left[y^2 - x^2\left(a^2 - \frac{1}{2}x^2\right) - \alpha\right], \end{aligned} \tag{A}$$

где μ и α — достаточно малы, причем $\mu < 0$. Система (A) получена с помощью поворота векторного поля системы

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = x(a^2 - x^2) \tag{B}$$

на угол $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg} \mu\left[y^2 - x^2\left(a^2 - \frac{1}{2}x^2\right) - \alpha\right]$. Система (B) может

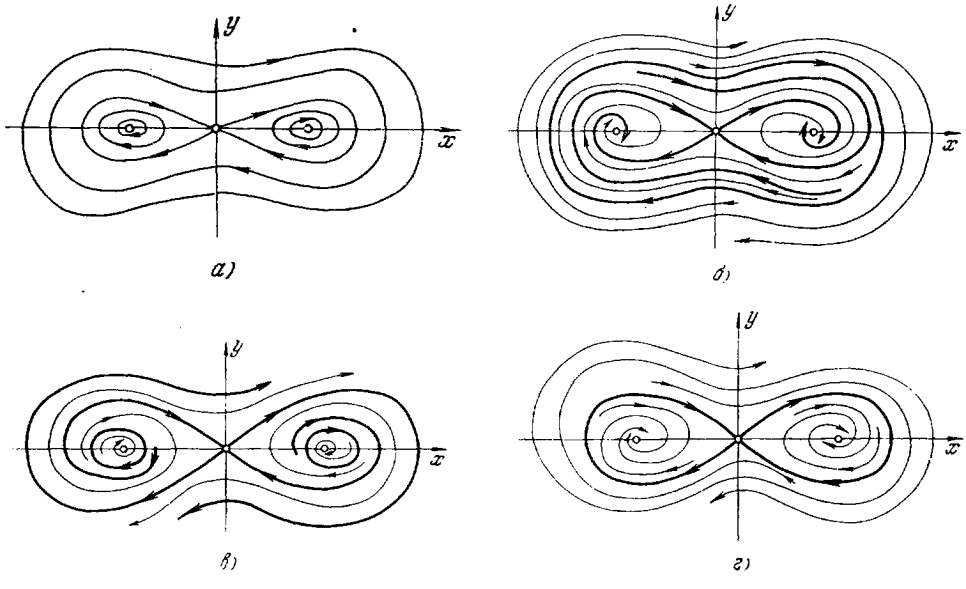


Рис. 316.

быть проинтегрирована, и ее общее решение имеет вид $y^2 - x^2 \times \left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right) = C$ (рис. 316, *а*). Нетрудно видеть, что система (B) является топографической системой для системы (A), причем контакт будет на кривой

$$y^2 - x^2\left(a^2 - \frac{1}{2}x^2\right) = \alpha, \tag{C}$$

являющейся решением как системы (А), так и системы (В). Все остальные замкнутые кривые системы (В) являются кривыми без контакта с траекториями системы (А). Рассмотрим следующие случаи: 1) $\alpha > 0$. Уравнению (С) соответствует одна замкнутая кривая. Внутри замкнутой кривой (С) угол между векторным полем системы (А) и системы (В) отрицательный, а вне — положительный. Таким образом, кривая (С) является неустойчивым предельным циклом системы (А). Очевидно, этот предельный цикл — единственный. Этот цикл охватывает три состояния равновесия — два фокуса и одно седло (рис. 316, *б*). 2) $\alpha < 0$. Уравнению (3) соответствуют две замкнутые кривые, лежащие внутри замкнутого контура, составленного из сепаратрис системы (В), симметричные относительно начала координат. Эти две замкнутые кривые являются неустойчивыми предельными циклами системы (А), причем система (А) в этом случае имеет два и только два предельных цикла (рис. 316, *в*). 3) $\alpha = 0$. Уравнению (С) соответствует замкнутый контур, составленный из сепаратрис системы (В). В этом случае этот замкнутый контур является замкнутым предельным контуром для траекторий системы (А), к которому траектории стремятся при $t \to -\infty$. Других предельных циклов система не имеет (рис. 316, *г*).

Пример 16 [77].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy - \mu\left[-\frac{1}{3}(x-1)(x+2) + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}y\right], \\ \dot{y} &= -\frac{1}{3}(x-1)(x+2) + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}y + \mu xy, \end{aligned} \tag{A}$$

где $\mu < 0$ — достаточно мало. Эта система получена с помощью поворота векторного поля на угол, тангенс которого равен μ, из системы

$$\dot{x} = xy, \qquad \dot{y} = -\frac{1}{3}(x-1)(x+2) + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}y. \tag{B}$$

Состояния равновесия систем (А) и (В) находятся в одних и тех же точках: A (1, 0) и B (−2, 0). Нетрудно показать, что A (1, 0) — неустойчивый фокус, а B (−2, 0) — устойчивый фокус. Отметим, что на оси $x = 0$ для системы (А) имеем

$$\dot{x} = -(3y^2 + 2y + 4)\frac{\mu}{6} > 0.$$

Исследуем бесконечность для системы (А). Сделаем преобразование Пуанкаре $x = \frac{\tau}{z}$, $y = \frac{1}{z}$. После умножения полученных уравнений на z система примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{\mu}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\tau + \frac{\mu}{3}z - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mu\right)\tau^2 - \frac{2}{3}\mu z^2 - \\ &\quad - \left(\frac{1}{3} - \frac{\mu}{3}\right)\tau z + \frac{1}{3}\tau^3 + \frac{1}{3}\tau^2 z - \frac{2}{3}\tau z^2 \equiv P(\tau, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2}z - \left(\mu + \frac{1}{3}\right)\tau z - \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{3}\tau^2 z + \frac{1}{3}\tau z^2 - \frac{2}{3}\tau^3 \equiv Q(\tau, z). \end{aligned}$$

Очевидно, $z = 0$ — интегральная прямая. При $z = 0$ координаты τ для состояния равновесия удовлетворяют кубическому уравнению

$$f(\tau) = -\frac{\mu}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\tau - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mu\right)\tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3 = 0.$$

Имеем: $f'(\tau) \equiv \tau^2 - \frac{2}{3}(1+2\mu)\tau + \frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}$. При достаточно малом μ этот квадратный трехчлен сохраняет знак. Значит, уравнение $f(\tau) = 0$ имеет один действительный корень $\tau = \tau_0$. Знак τ_0 совпадает со знаком μ, так как $f(\tau)$ монотонно возрастает и $f(0) = -\frac{\mu}{2}$. Выражение $\Delta \equiv P'_\tau Q'_z - P'_z Q'_\tau < 0$ при $\tau = \tau_0$, $z = 0$. Значит, точка $\tau = \tau_0$, $z = 0$ — седло при μ достаточно малом. Направление движения на траекториях на экваторе сферы Пуанкаре легко установить, полагая, например, $\tau = z = 0$ в уравнении $\dot{\tau} = P(\tau, z)$. Получим $\dot{\tau} = -\frac{\mu}{2} > 0$.

Можно показать, что система, получаемая в результате преобразования Пуанкаре, $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{\tau}{z}$ не имеет других состояний равновесия.

Как было отмечено, $\dot{x} > 0$ на оси y. Фокус A (1, 0) является неустойчивым. Следовательно, в полуплоскости $x > 0$ должно существовать ω-предельное множество. Поскольку в полуплоскости $x > 0$ имеется одно состояние равновесия — фокус, то ω-предельное множество может являться только устойчивым предельным циклом. Таким образом, вокруг фокуса A должен быть хотя бы один предельный цикл (вообще говоря, нечетное число предельных циклов). Аналогичным рассуждением устанавливается наличие неустойчивого предельного цикла в полуплоскости $x < 0$ (вообще говоря, нечетного числа предельных циклов).

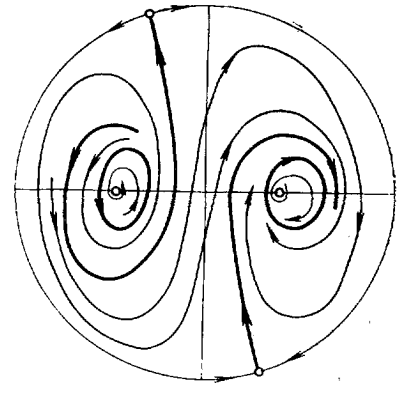


Рис. 317.

Сепаратрисы седел на экваторе сферы Пуанкаре не могут идти из седла в седло, так как это противоречило бы направлению движения на траекториях, пересекающих ось y. ω-сепаратриса седла в бесконечности должна при $t \to -\infty$ стремиться к неустойчивому предельному циклу, а α-сепаратриса седла в бесконечности при $t \to +\infty$ должна стремиться к устойчивому предельному циклу (рис. 317).

Пример 17 [78].

$$\dot{x} = x\left(ke^{-\frac{\mu}{y}} - e^{-\frac{1}{y}}\right) \equiv P(x, y), \qquad \dot{y} = xe^{-\frac{1}{y}} - \beta(y - y_0) \equiv Q(x, y), \quad \text{(A)}$$

где параметры β, k, μ, y_0 — положительные, $\mu < 1$. Физический смысл имеет только часть фазовой плоскости G, для которой $x \geqslant 0$, $y > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало.

Система имеет два состояния равновесия:

$$A(0, y_0) \text{ и } B\left[\frac{\mu - 1 - y_0 \ln k}{\ln k}\beta k^{\frac{1}{\mu-1}},\ \frac{\mu-1}{\ln k}\right].$$

Легко видеть, что при $k > 1$ и при $k < e^{\frac{\mu-1}{y_0}}$ в области G лежит одно состояние равновесия $A(0, y_0)$. Если $e^{\frac{\mu-1}{y_0}} < k < 1$, то в области G имеется два состояния равновесия A и B. При разных значениях параметров характер этих состояний равновесия различен (см. ниже а)—ж)).

Исследуем поведение траекторий в бесконечности. Сделаем преобразование Пуанкаре $x=\frac{\tau}{z}$, $y=\frac{1}{z}$. Получим

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt}&=\beta\tau+k\tau e^{-\mu z}-\tau e^{-z}-\tau^2e^{-z}-\beta y_0\tau z,\\ \frac{dz}{dt}&=\beta z-\tau z e^{-z}-\beta y_0 z^2.\end{aligned}\tag{B}$$

У системы (B) в рассматриваемой области при $z=0$ будет два состояния равновесия: 1) $\tau=z=0$, 2) $z=0$, $\tau=k+\beta-1$, если $k+\beta>1$, и одно состояние равновесия $\tau=z=0$, если $k+\beta<1$. Исследование характера состояний равновесия в зависимости от параметров системы приводит к следующим случаям:

а) $k>1$. В конечной части плоскости имеется одно состояние равновесия: $A(0, y_0)$ — седло. В бесконечности два узла: устойчивый и неустойчивый.

б) $k<e^{\frac{\mu-1}{y_0}}$, $k+\beta<1$. В конечной части плоскости одно состояние равновесия: $A(0, y_0)$ — устойчивый узел. В бесконечности одно седло.

в) $k<e^{\frac{\mu-1}{y_0}}$, $k+\beta>1$. В конечной части плоскости одно состояние равновесия: $A(0, y_0)$ — устойчивый узел. В бесконечности неустойчивый узел и седло.

г) $e^{\frac{\mu-1}{y_0}}<k<1$, $\sigma<0$, $k+\beta>1$, где $\sigma\equiv P'_x+Q'_y=-\beta\left[y_0\left(\frac{\ln k}{\mu-1}\right)^2-\right.$ $\left.-\frac{\ln k}{\mu-1}+1\right]$. Состояние равновесия A — седло, состояние равновесия B — устойчивый узел или фокус. В бесконечности неустойчивый узел и седло.

д) $e^{\frac{\mu-1}{y_0}}<k<1$, $\sigma>0$, $k+\beta>1$. Состояние равновесия A — седло, состояние равновесия B — неустойчивый узел или фокус. В бесконечности неустойчивый узел и седло.

е) $e^{\frac{\mu-1}{y_0}}<k<1$, $\sigma<0$, $k+\beta<0$. Состояние равновесия A — седло, состояние равновесия B — устойчивый узел или фокус. В бесконечности одно седло.

ж) $e^{\frac{\mu-1}{y_0}}<k<1$, $\sigma>0$, $k+\beta<0$. Состояние равновесия A — седло, состояние равновесия B — неустойчивый узел или фокус. В бесконечности одно седло. Нетрудно видеть, что прямая $y=\varepsilon$ является прямой без контакта для траекторий системы, причем с ростом t траектории, пересекающие прямую $y=\varepsilon$, входят внутрь рассматриваемой области.

В результате проведенного исследования получим, что в случаях, когда в конечной части области G имеется одно состояние равновесия, в зависимости от параметров системы качественные картины устанавливаются однозначно. В случае же, когда в конечной части области G имеется два состояния равновесия, качественная картина устанавливается с точностью до четного числа предельных циклов. Принимая во внимание характер состояния равновесия в бесконечности, а также направление векторного поля системы на прямой $y=\varepsilon$, получим, что в случае, когда состояние равновесия B устойчиво, система либо не имеет предельных циклов, либо имеет их четное число; когда же состояние равновесия B

неустойчиво, существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл (вообще говоря, нечетное число предельных циклов) (рис. 318). В бесконечности одно седло.

Пример 18 [79].

$$\dot{x} = ax + by - x(x^2 + y^2), \qquad \dot{y} = cx + dy - y(x^2 + y^2).$$

Нетрудно видеть, что бесконечность абсолютно неустойчива. В самом деле, дифференцируя в силу системы выражение $x^2 + y^2 = R^2$, получим

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = ax^2 + bxy - x^2(x^2 + y^2) + cxy + dy^2 - y^2(x^2 + y^2) < 0$$

при R достаточно большом. Поэтому можно вести рассмотрение внутри некоторого цикла без контакта.

Система симметрична относительно начала координат.

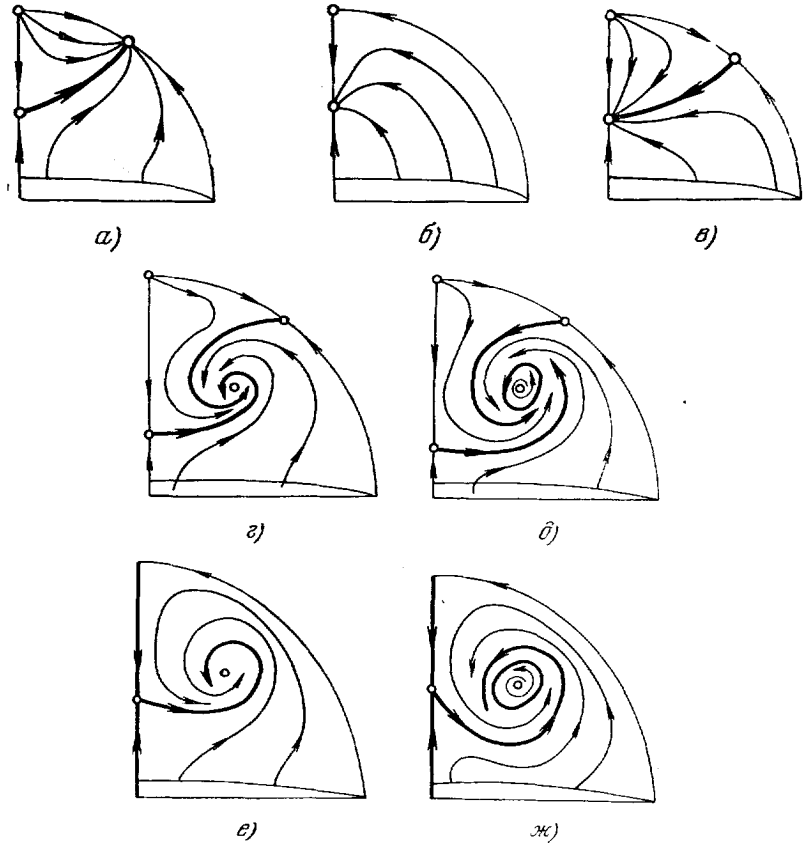


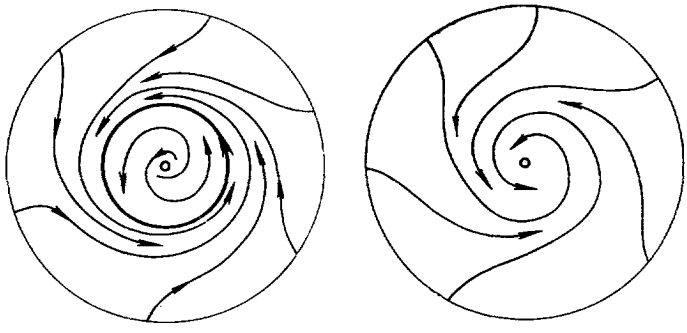
Рис. 318.

Рассмотрим случай, когда $\Delta \equiv (a - d)^2 + 4bc < 0$. В этом случае система имеет единственное состояние равновесия: $O(0, 0)$. В случае $a + d > 0$, $O(0, 0)$ — неустойчивый фокус. Поскольку бесконечность абсолютно неустойчива, должен существовать хотя бы один устойчивый предельный цикл. Можно показать с помощью критерия Дюлака, что

предельный цикл единственный. Возьмем $F(x, y) = \frac{1}{by^2 - cx^2 + (a-d)xy}$. Так как $\Delta \equiv (a-d)^2 + 4bc < 0$, то $bc < 0$ и $4bc > (a-d)^2$, значит, знаменатель $F(x, y)$ сохраняет знак в любой кольцевой области, окружающей начало координат. $F(x, y)$ в этой области однозначна, непрерывна и дифференцируема. Имеем

$$\frac{d(PF)}{dx} + \frac{d(QF)}{dy} = \frac{-2(x^2+y^2)}{by^2 - cx^2 + (a-d)xy}.$$

Легко видеть, что это выражение не меняет знака в любой кольцевой области вокруг начала координат. Таким образом, цикл единственный



а) *б)*

Рис. 319.

(рис. 319, *а*). Отсюда следует также, что в случае $a + d < 0$, когда O — устойчивый фокус, предельных циклов нет, так как в этом случае возможно лишь четное число циклов (рис. 319, *б*).

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Элементарные сведения о множествах в евклидовом пространстве

1. Некоторые обозначения. Будем множества точек в евклидовом пространстве n измерений E_n (в частности, на плоскости E_2) обозначать большими буквами M, N, . . ., а точки этого множества — маленькими буквами a, b, . . .

Запись $a \in M$ означает, что точка a принадлежит множеству M.

Запись $M \subset N$ означает, что все точки множества M принадлежат множеству N, т. е. что множество M является частью N. M называется также подмножеством множества N.

Через $M \cap N$ обозначается *пересечение* множеств M и N, т. е. множество точек, одновременно принадлежащих множеству M и множеству N.

Через $M \cup N$ обозначается *сумма* множеств, т. е. множество, состоящее из всех точек множества M и всех точек множества N.

Через $N \setminus M$ обозначается множество точек N, не принадлежащих множеству M, — *разность* множеств N и M. Множество $N \setminus M$ называется также *дополнением* множества M по отношению к множеству N.

2. Сегмент и интервал. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки в евклидовом пространстве E_n. В E_1 (т. е. на прямой) множество точек с координатами $a \leqslant x \leqslant b$ называется *сегментом* (или отрезком, или замкнутым промежутком) и обозначается $[a, b]$.

Множество точек с координатами $a < x < b$ называется *интервалом* (или открытым промежутком) и обозначается через (a, b).

Множество точек $a < x \leqslant b$ или $a \leqslant x < b$ называется полуоткрытым сегментом (или полуинтервалом) и обозначается через $(a, b]$ или соответственно $[a, b)$.

В пространстве E_n *замкнутым параллелепипедом* называется множество точек M $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ (a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — некоторые фиксированные числа, $a_i < b_i$ для всех i).

3. Точка сгущения, граничная и внутренняя точка множества. Множество M в евклидовом пространстве E_n называется *ограниченным*, если множество расстояний $\varrho(x, y)$ между любыми его точками x и y ограничено сверху. Точная верхняя грань чисел $\varrho(x, y)$ называется *диаметром* множества M. ε-окрестностью точки a пространства E_n называется множество всех точек пространства, находящихся на расстоянии, меньшем ε от точки a. ε-окрестность точки a обозначается через $U_\varepsilon(a)$.

Точка a пространства E_n называется:

точкой сгущения *) множества K, если всякая окрестность точки a содержит бесчисленное множество точек множества K,

граничной точкой множества K, если всякая окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие, так и не принадлежащие множеству K,

внутренней точкой K, если существует состоящая только из точек K окрестность a.

Внутренняя точка K непременно принадлежит K, точка сгущения и граничные точки K могут как принадлежать, так и не принадлежать K. Не принадлежащая K граничная точка непременно является точкой сгущения множества K.

*) Более принятым является термин «предельная точка». Однако в настоящей книге используется термин «*предельная точка траекторий*», имеющий иное содержание, чем предельная точка в смысле теории множеств. Поэтому вместо термина «предельная точка» в смысле теории множеств мы всюду пользуемся термином «точка сгущения».

Всякое ограниченное множество в пространстве E имеет хотя бы одну точку сгущения, принадлежащую или не принадлежащую K (теорема Больцано — Вейерштрасса).

4. Множества открытые и замкнутые. Граница. Множество K называется *открытым*, если никакая граничная точка не принадлежит множеству K (и, следовательно, все его точки внутренние), и *замкнутым*, если все граничные точки принадлежат K (множество может быть, очевидно, и не замкнутым и не открытым). Все пространство E_n является одновременно открытым и замкнутым.

Замыканием множества K называется множество $\overline{K}$, состоящее из всех точек K и всех граничных точек K (как принадлежащих, так и не принадлежащих K). Так как все внутренние точки K и все не принадлежащие K граничные точки являются точками сгущения K, то замыканием K является множество всех точек K и всех точек сгущения K.

Множество всех граничных точек K называется *границей* K. Граница всякого множества есть замкнутое множество.

Если K_1 — есть открытое множество (в частности, все пространство E_n) и K_2 — замкнутое множество, вложенное в K_1, то дополнение множества K_2 по отношению к множеству K_1 есть открытое множество. Если K_1 есть замкнутое множество и K_2 — вложенное в K_1 — открытое множество, то дополнение множества K_2 по отношению к K_1 есть открытое множество.

Сумма любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Пересечение любого числа и сумма конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

5. Расстояние между множествами. Компактные множества. Если K_1 и K_2 — два замкнутых множества без общих точек, хотя бы одно из которых ограничено, то нижняя грань расстояний между точкой a_1 множества K_1 и точкой a_2 множества K_2 отлична от нуля. Эта нижняя грань, которая обозначается через $d(K_1, K_2)$, называется *расстоянием между множествами* K_1 *и* K_2.

Замкнутое множество $F \subseteq E_n$ называется *компактным*, если всякая бесконечная последовательность точек F имеет точку сгущения.

Всякое ограниченное множество в E_n компактно.

6. Связные множества. Континуум и область. Множество K называется *связным*, если его нельзя представить как сумму двух непустых непересекающихся множеств K_1 и K_2, каждое из которых содержит все те свои предельные точки, которые принадлежат K. В частности, замкнутое множество связно, если оно не может быть представлено как сумма двух непустых замкнутых множеств без общих точек, а открытое множество связно, если оно не может быть представлено как сумма непустых открытых множеств без общих точек.

Замкнутое связное множество пространства E_n называется *континуумом*. Открытое связное множество называется *областью*. Всякое открытое множество может быть представлено как сумма конечного или бесконечного числа непересекающихся областей.

Сумма конечного или бесконечного числа связных множеств, обладающих тем свойством, что от любого множества к любому другому можно перейти по конечной цепочке множеств, последовательно имеющих общие точки, есть связное множество. В частности, сумма конечного числа континуумов, имеющих попарно общие точки, есть континуум, сумма конечного или бесконечного числа областей, имеющих попарно общие точки, есть область.

Пересечение последовательности вложенных друг в друга континуумов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \ldots$ есть континуум. Если диаметры множеств K_i стремятся к нулю, то пересечением последовательности K_i является одна и только одна точка.

Если точки a и b принадлежат континууму K, то мы будем также говорить, что континуум K *соединяет* точки a и b.

Если дана область g, то *замкнутой областью* $\overline{g}$ мы будем называть замыкание g, т. е. множество всех точек g и всех граничных точек g ($\overline{g}$ — замкнутое связное множество, т. е. континуум).

7. Области с общей границей. Пусть g и g' — области, имеющие одни и те же граничные точки. Если они имеют хоть одну общую точку, то они совпадают.

Если на континууме K лежит как точка, принадлежащая данной области g, так и точка, не принадлежащая g, то на континууме K непременно лежит точка границы g. Иными словами, континуум, соединяющий внутреннюю точку открытого

множества с его внешней точкой, непременно пересекает границу этого открытого множества.

8. Множества всюду плотные и нигде не плотные. Множество K_1 называется *плотным* по отношению к множеству K_2, если замыкание K_1 содержит K_2, $\overline{K}_1 \supset K_2$. Если, кроме того, $K_1 \subset K_2$, то говорят, что K_1 *плотно в* K_2 или *всюду плотно на* K_2. Если множество K_1 плотно в некоторой области g пространства E_n (область g может, в частности, совпадать со всем пространством E_n), то каждая точка $R \in g$ является точкой сгущения K (принадлежащей или не принадлежащей K).

Множество K называется *нигде не плотным* в области g (или на g), если дополнение к его замыканию плотно в g. Для того чтобы множество K было нигде не плотным в g, необходимо и достаточно, чтобы оно не имело ни одной внутренней точки.

9. Окрестности, покрытия. ε-окрестностью множества K называется сумма ε-окрестностей всех точек множества K. ε-окрестность множества K обозначается через $U_\varepsilon(K)$. ε-окрестность любого множества является открытым множеством.

Если Γ — множество граничных точек множества K (безразлично, принадлежащих или не принадлежащих K), то ε-окрестность множества K непременно содержит ε-окрестность Γ.

Наряду с ε-окрестностью точки a будем иногда *окрестностью* точки a называть всякую область, содержащую точку a.

Система открытых множеств g (в частности, областей) называется *покрытием* данного множества K пространства E_n, если каждая точка $a \in K$ принадлежит хотя бы одному из этих открытых множеств. Если покрытие состоит из счетного числа множеств, то оно называется счетным, если из конечного, то конечным.

Теорема Гейне — Бореля. Из всякого покрытия компактного множества $F \subseteq E_n$ можно выделить конечное покрытие.

10. Топологический предел. Пусть дана последовательность множеств

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots \tag{1}$$

пространства E_n *). *Верхним топологическим пределом* последовательности (1) $\overline{lt}M_k$ называется множество таких точек, в каждой окрестности которых лежат точки бесконечного числа множеств M_i. *Нижним топологическим пределом* $\underline{lt}\, M_k$ называется множество точек, каждая окрестность которых содержит точки всех множеств M_i кроме конечного числа этих множеств. Если

$$A = \overline{lt}M_i = \underline{lt}M_i,$$

то последовательность (1) называется *топологически сходящейся*, а множество A называется ее *топологическим пределом* и обозначается $A = ltM$. Топологический предел связных множеств — связен.

11. Отображение множеств друг на друга. Пусть в пространстве E_n задано два множества K_1 и K_2 (в частности, K_1 и K_2 могут совпадать с самим пространством E_n), и пусть каждой точке M одного из этих множеств K_1 ставится в соответствие одна определенная точка M' множества K_2. Тогда говорят, что задано однозначное отображение T множества K_1 в множество K_2. Точка $M' \in K_2$, соответствующая точке M, называется *образом* точки, и это записывается так: $M' = T(M)$. Если каждая точка множества K_2 является образом какой-либо точки K_1, то говорят, что T есть отображение K_1 на K_2 и K_2 называется образом K_1, а K_2 — прообразом K_1.

Если дано отображение T множества K_1 в множество K_2 и отображение U множества K_2 в множество K_3, то тем самым задается некоторое отображение S множества K_1 в множество K_3. Отображение S называется композицией (или произведением) отображений T и U и обозначается через UT. Если при отображении T множества K_1 на K_2 всяким двум точкам K_1 соответствуют две различные точки K_2, то отображение T называется *взаимно однозначным*. В этом случае существует *обратное отображение* множества K_2 на K_1, оно обозначается через T^{-1}, при котором каждой точке m' множества K_2 ставится в соответствие точка m множества K_1 : $m = T^{-1}(m')$. (Мы будем в этом случае также говорить, что между точками множеств K_1 и K_2 существует взаимно однозначное соответствие.)

Пусть $m_1 \in K_1$, $m_1' = T(m_1)$. Отображение T называется *непрерывным* в точке m_1, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$T(U_\delta(m_1) \cap K_1) \subset U_\varepsilon(m_1'). \tag{2}$$

*) Последовательность будем обозначать через $\{M_i\}$.

Отображение множества K_1 в K_2 называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке K_1. Непрерывное отображение K_1 на K_2 называется *равномерно-непрерывным*, если при заданном $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого удовлетворяется включение (2) и которое *не зависит* от точки $m_1 \subset K_1$. Произведение двух непрерывных отображений является непрерывным отображением.

Приведем без доказательств некоторые основные предложения:

А. Однозначный и непрерывный образ ограниченного замкнутого множества пространства E_n есть ограниченное замкнутое множество.

Б. Однозначный и непрерывный образ связного множества есть связное множество.

12. Топологическое отображение. Пусть T — взаимно однозначное и непрерывное отображение множества K_1 на K_2. Если обратное отображение T^{-1} также непрерывно, то T называется взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением K_1 на K_2 или *топологическим отображением* (а также *гомеоморфизмом*) множества K_1 на K_2. Очевидно, если T — топологическое отображение K_1 на K_2, то T^{-1} также является топологическим отображением K_2 на K_1. Множество K_2 (K_1) называется топологическим образом K_1 (K_2). Мы будем также говорить, что T задает топологическое соответствие между точками множеств K_1 и K_2. Произведение двух топологических отображений есть топологическое отображение.

Если существует топологическое отображение множества K_1 на множество K_2, то множества K_1 и K_2 называются *гомеоморфными* (говорят также, что множества K_1 и K_2 топологически эквивалентны или имеют одинаковую топологическую структуру).

Приведем без доказательства следующие два основных предложения:

Т е о р е м а I. *Взаимно однозначное и непрерывное (в одну сторону) отображение ограниченного замкнутого множества K_1 пространства E_n на множество K_2 непременно является взаимно непрерывным и, следовательно, топологическим.*

13. Теорема Брауэра об инвариантности области. Пусть T — топологическое отображение множества K_1 пространства E_n на множество K_1' пространства E_n'. Тогда если m — внутренняя точка множества K', то $m' = T(m)$ — внутренняя точка множества K_1', а если m — граничная точка K_1, то $m' = T(m)$ — граничная точка множества K_1'. В частности, если K_1 есть область, то K_1' — также область.

14. Системы функций, описывающие отображение множеств. Отображение T подмножества K n-мерного евклидова пространства E_n с декартовыми координатами $x_1, \ldots, x_n$ на подмножество K' пространства E_n' с декартовыми координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (в частности, E_n' может совпадать с E_n) при помощи координат описывается соотношениями

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где f_i — функции, определенные на множестве K. Отображение T непрерывно, тогда и только тогда, когда непрерывны функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Когда K — замкнутое ограниченное множество, функция f_i равномерно-непрерывны и отображение T — равномерно-непрерывно (в силу теоремы А п. 11 образ K есть замкнутое ограниченное множество).

15. Простая дуга. Пусть даны функции $x_i = f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, определенные при всех значениях t, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и при этом: а) функции $f_i(t)$ непрерывны при всех значениях t, $t_0 \leqslant t \leqslant T$; б) ни для какой пары значений t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, не может иметь место равенство

$$\sum [f_i(t_1) - f_i(t_2)]^2 = 0.$$

Тогда множество точек в E_n, состоящее из точек $M(t)$ с координатами $x_i = f_i(t)$, называется *параметризованной простой дугой*. Точки $M_0[f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0)]$ и $M_1[f_1(T), \ldots, f_n(T)]$ называются концами этой простой дуги.

В силу б) очевидно, что двум различным значениям t соответствуют две различные точки параметризованной простой дуги. Из б) следует также, что для любого положительного $\delta_0 < T - t_0$ всегда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что если $|t_1 - t_2| \geqslant \delta_0$, то $\rho(M(t_1), M(t_2)) > \varepsilon_0$.

Простой дугой называется множество точек, которое выбором функций $x_i = f_i(t)$, обладающих свойствами а) и б), может быть представлено как параметризованная простая дуга. Очевидно, простая дуга гомеоморфна сегменту. Параметризация простой дуги может быть различной, но при всякой параметризации концами

простой дуги являются одни и те же точки, т. е. концы простой дуги не зависят от параметризации.

Пусть l — параметризованная простая дуга и t $[t_0 \leqslant t \leqslant T]$ — параметр на ней. На l можно рассматривать два направления, одно — соответствующее возрастанию, другое — убыванию t.

Пусть τ_1 и τ_2, $\tau_1 < \tau_2$, — какие-нибудь два числа из сегмента $[t_0, T)$, причем хотя бы один из концов сегмента $[\tau_1, \tau_2]$ не совпадает с концами сегмента $[t_0, T]$. Тогда множество точек M $[f_1(t), f_2(t) \ldots]$, где $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, также является простой дугой, составляющей часть простой дуги l. Если дуга λ есть часть дуги l, то направление, в котором проходится дуга λ, когда дуга l проходится в выбранном направлении, будем называть направлением на λ *индуцированным* направлением на l. Мы будем пользоваться также не требующим пояснения выражением: «направление на l индуцировано направлением на λ».

16. Простая замкнутая кривая. Если функции $x_i = \varphi_i(t)$, определенные при значениях t, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и при этих значениях однозначные и непрерывные, таковы, что $\varphi_i(t_0) = \varphi_i(T)$, причем равенство $\varphi_i(t_1) = \varphi_i(t_2)$ $(t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T)$ может иметь место только в случае, когда $t_1 = t_0$, $t_2 = T$, то множество точек $M(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1 = \varphi_1(t)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t)$ при всевозможных t, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, называется *параметризованной простой замкнутой кривой*. *Простой замкнутой кривой* называется множество точек, которое путем выбора функций $\varphi_i(t)$, обладающих указанными выше свойствами, может быть представлено как параметризованная простая замкнутая кривая. Простая замкнутая кривая, очевидно, гомеоморфна окружности. Параметризация простой замкнутой кривой может быть различной. На параметризованной простой замкнутой кривой может быть установлено положительное *направление обхода* (т. е. точки кривой C упорядочиваются либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания t). Любые две точки M_1 и M_2 на простой замкнутой кривой разделяют ее на две простые дуги с общими концами.

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — простые дуги. Будем обозначать через M_1^i и M_2^i концы дуги l_i. Предположим, что каждая дуга l_i имеет один общий конец с дугой l_{i+1}, т. е. M_2^{i-1} совпадает с M_1^i, M_2^i совпадает с M_i^{i+1} и M_1^1 совпадает с M_2^n и кроме указанных общих концов дуги l_i не имеют друг с другом ни одной общей точки. Тогда множество точек рассматриваемых дуг есть *простая замкнутая кривая* *). В частности, когда дуги l_i являются отрезками прямых, то мы получаем многоугольник.

Простая дуга и простая замкнутая кривая являются *континуумами*.

Имеет место следующее очевидное предложение:

Теорема II. *Простая дуга и простая замкнутая кривая, расположенная в пространстве E_n, нигде не плотна в E_n $(n \geqslant 2)$.*

§ 2. Простые замкнутые кривые и простые дуги на плоскости. Ориентация плоскости (направление обхода простых замкнутых кривых). Типы топологических отображений

Ниже излагаются некоторые основные сведения и формулируется без доказательств ряд теорем, относящихся к взаимному расположению простых дуг и простых замкнутых кривых на плоскости.

Множества на плоскости, в частности кривые и области, мы будем называть *плоскими множествами, в частности плоскими кривыми и областями*. В настоящем параграфе рассматриваются только плоские множества.

1. Две основные теоремы.

Теорема III. *Простая дуга не разбивает плоскость (т. е. множество точек, состоящее из точек плоскости за вычетом точек простой дуги, есть область).*

Теорема IV (Жордана). *Простая замкнутая кривая C определяет на плоскости две области и является границей каждой из этих областей. Одна из этих областей — область внутри C — ограничена, другая — область вне C — не ограничена* **).

2. Леммы о простой замкнутой кривой. Приведем без доказательств ряд элементарных предложений (см. [57]).

*) Доказательство может быть совершенно элементарно проведено, если простые дуги l_i отобразить, например, на дуги окружности.

**) Доказательство этих интуитивно представляющихся совершенно очевидными предложений см., например, [58].

Граничная точка M какой-либо области G называется *достижимой* в G, если существует простая дуга, одним из концов которой является точка M, а все другие точки этой дуги являются точками области G.

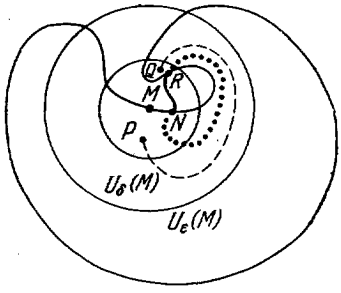


Рис. 320.

А. Все точки простой замкнутой кривой C достижимы как в области внутри C, так и в области вне C.

Б. Пусть C — простая замкнутая кривая, M — произвольная ее точка. Тогда: 1) при всяком $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякие две точки P и Q, лежащие в $U_\delta(M)$, причем обе внутри (вне) кривой C, могут быть соединены внутри $U_\varepsilon(M)$ простой дугой, целиком лежащей внутри (вне) C (рис. 320); 2) при всяком $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякие две точки R и N кривой C, лежащие в $U_\delta(M)$, могут быть соединены внутри $U_\varepsilon(M)$, как простой дугой, у которой все точки кроме концов R и N лежат внутри C, так и простой дугой, у которой все точки кроме концов R, N лежат вне C.

В. Пусть l — простая дуга, концы которой M_1 и M_2 лежат на кривой C и у которой кроме концов нет больше ни одной общей точки с дугой l. Пусть s_1 и s_2 — простые дуги, на которые точки M_1 и M_2 разделяют кривую C. Тогда: 1) если точки

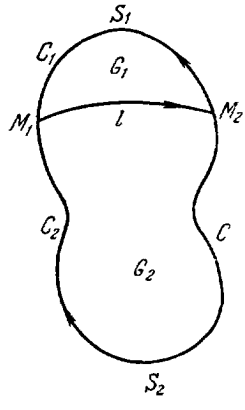


Рис. 321.

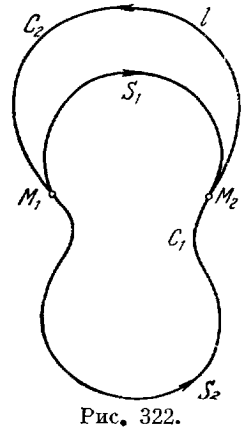


Рис. 322.

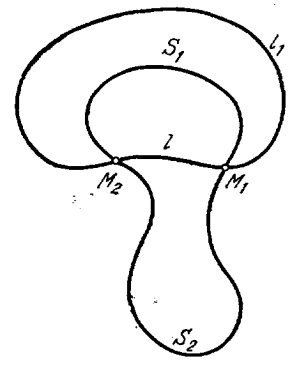


Рис. 323.

дуги l, отличные от ее концов, лежат внутри C, то дуга l разделяет область G внутри C на две области G_1 и G_2; границей одной из этих областей G_1 является простая замкнутая кривая C_1, состоящая из дуг s_1 и l, а границей другой — G_2 — простая замкнутая кривая C_2, состоящая из дуг s_2 и l (рис. 321); 2) если точки дуги l, отличные от ее концов, лежат вне C, то дуга l образует с дугой s_1 одну простую замкнутую кривую C_1, а с дугой s_2 — другую простую замкнутую кривую C_2; одна из этих простых замкнутых кривых, например C_2, содержит все точки одной из дуг s_1, s_2, например s_1, так что область внутри C_1 является частью области внутри C_2 (рис. 322).

Г. Пусть две точки M_1 и M_2 простой замкнутой кривой C соединены двумя дугами l и l_1, причем все точки дуги l кроме ее концов (M_1 и M_2) лежат внутри C; все точки дуги l_1 кроме ее концов (M_1 и M_2) лежат вне C. Тогда простые дуги l и l_1 вместе образуют простую замкнутую кривую C; все отличные от концов точки одной из дуг s_1 или s_2, на которые кривую C делят точки M_1 и M_2, содержатся внутри C, а все точки другой — вне C (рис. 323).

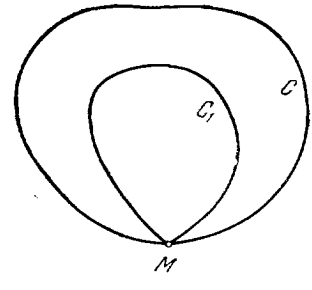


Рис. 324.

Д. Пусть простая замкнутая кривая C_1 имеет одну общую точку M с замкнутой кривой C, причем все отличные от M точки кривой C_1 лежат внутри C. Тогда кривая C_1 делит область G, заключенную внутри C, на две области: одну область внутри C_1 и другую область с границей, состоящей из точек кривых C и C_1 (рис. 324).

Теорема V. *Пусть T — топологическое отображение простой замкнутой кривой C_1 на простую замкнутую кривую C_2. Тогда существует топологическое отображение T плоскости самой на себя, совпадающее с T на кривой C и переводящее область, расположенную внутри (вне) C_1, на область, расположенную внутри (вне) C_2.*

3. Направление обхода простых замкнутых кривых. Циклический порядок точек на простой замкнутой кривой. На всякой простой замкнутой кривой может быть установлено два различных направления обхода. Пусть на простой замкнутой кривой C выбрано определенное направление обхода, и пусть M_1, M_2, M_3 — три (различные) точки кривой C. При обходе кривой C в выбранном направлении эти точки, начиная с какой-нибудь из них, например с точки M_1, проходятся в определенном порядке, т. е. направление обхода кривой C *индуцирует определенный циклический порядок этих точек*, именно, либо порядок

$$(M_1, M_2, M_3) \equiv (M_2, M_3, M_1) \equiv (M_3, M_1, M_2), \tag{1}$$

либо порядок

$$(M_1, M_3, M_2) \equiv (M_3, M_2, M_1) \equiv (M_2, M_1, M_3). \tag{2}$$

Обратно, если на простой замкнутой кривой даны три точки M_1, M_2, M_3, то задание циклического порядка этих точек (т. е. порядка (1) или (2)) индуцирует определенное направление обхода этой кривой (именно, такое, при котором точки M_1, M_2, M_3 имеют заданный циклический порядок). Если на простой замкнутой кривой C задано некоторое число $n > 3$ точек M_1, M_2, . . ., M_n, причем эти точки перенумерованы в том порядке, в котором они, начиная с точки M_1, встречаются при обходе кривой C в выбранном направлении, то говорят, что дан циклический порядок точек M_i, индуцированный выбранным направлением обхода кривой C_1 (или что точки M_i перенумерованы в циклическом порядке, индуцированном выбранным направлением обхода кривой C).

4. Индуцированное направление на простой дуге, являющейся частью простой замкнутой кривой. Пусть s — простая дуга, являющаяся частью кривой C и M_1 и M_2 — концы этой дуги (очевидно, кроме дуги s существует еще одна дуга, являющаяся частью кривой C с теми же концами). Предположим, что на кривой C выбрано определенное направление обхода, и пусть при этом направлении обхода дуга s проходит в направлении от точки M_1 к точке M_2. Мы будем говорить, что *это направление на дуге s индуцировано выбранным направлением обхода кривой C.*

Обратно, пусть на простой дуге s с концами M_1 и M_2, являющейся частью простой замкнутой кривой C, выбрано положительное направление, например направление от точки M_1 к точке M_2. Тогда направление обхода простой замкнутой кривой C, при котором на дуге s индуцируется направление от точки M_1 к M_2, называется *направлением обхода, индуцированным заданным положительным направлением на дуге s.*

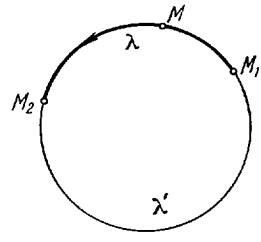


Рис. 325.

Пусть λ и λ_1 — те простые дуги с общими концами, на которые точки M_1 и M_2 делят простую замкнутую кривую C. Если направление на дуге λ (λ_1), индуцированное заданным обходом кривой C, есть направление от точки M_1 к M_2 (соответственно от M_2 к M_1), то мы будем обозначать дугу λ также через M_1M_2 (и соответственно дугу λ' — через M_2M_1 — порядок букв существен). При этом мы будем говорить, что точка M лежит *между точками M_1 и M_2*, если она лежит на дуге λ, и между точками M_2 и M_1, если она лежит на дуге λ' (рис. 325).

5. Ориентация плоскости. Во многих вопросах, рассматриваемых в настоящей книге, существенную роль играет понятие *ориентации плоскости.*

Говорят, что на плоскости установлена определенная ориентация (или «плоскость ориентирована»), если из двух возможных направлений обхода простых замкнутых кривых или, что то же, из двух возможных «направлений вращения» одно выбирается за положительное. Противоположное ему направление обхода или направление вращения считается отрицательным.

При установлении ориентации положительное направление обхода фиксируется сначала на одной какой-нибудь простой замкнутой кривой (например, как указано ниже, на некоторой окружности), а затем это направление обхода «переносится»

на все другие простые замкнутые кривые *). При этом выбор положительного обхода связывается с введенной на плоскости системой декартовых координат. Это может быть сделано, например, следующим образом.

Пусть на плоскости введена система декартовых координат x, y, и положительным направлением на осях считается направление в сторону возрастания соответствующей координаты. Рассмотрим окружность C с центром в начале координат (0,0). Пусть M_1 — ее точка пересечения с положительной полуосью x, M_2 — точка пересечения с положительной полуосью Oy и M_3 — ее точка пересечения с отрицательной полуосью x (рис. 326).

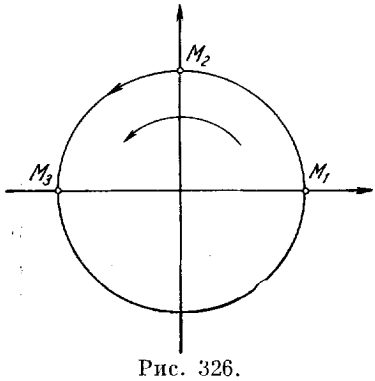


Рис. 326.

Условимся (для определенности) всегда считать положительным то направление обхода окружности C, при котором циклическим порядком точек M_1 является порядок M_1, M_2, M_3. Установленное таким образом положительное направление обхода переносится затем на все простые замкнутые кривые **).

В соответствии с выбранным положительным направлением обхода, а следовательно, и вращения, мы будем считать *положительным* угол между положительной полуосью x и какой-либо другой прямой, отсчитываемый *от положительной полуоси x в направлении положительного вращения*, и будем считать угол *отрицательным*, если он отсчитывается в противоположном направлении вращения.

Рассматривая две разные плоскости E и E', мы всегда будем предполагать, что *на каждой из этих плоскостей положительное направление обхода (и вращения) выбрано так, как указано выше* (т. е. положительным направлением на окружности с центром в начале является направление, индуцирующее циклический порядок M_1 M_2, M_3 указанных выше точек). Такой выбор положительных направлений на двух различных плоскостях мы будем называть *согласованным*.

---

*) Опуская рассуждение, с помощью которого осуществляется такое перенесение, отметим все же, что это рассуждение может быть, например, проведено, если надлежащим образом построить вспомогательные дуги, соединяющие точки различных непересекающихся замкнутых кривых (дуги обозначены пунктиром на рис. 327), а затем использовать леммы, приведенные в п. 6 (о связи между направлениями обхода двух простых замкнутых кривых, имеющих общую дугу).

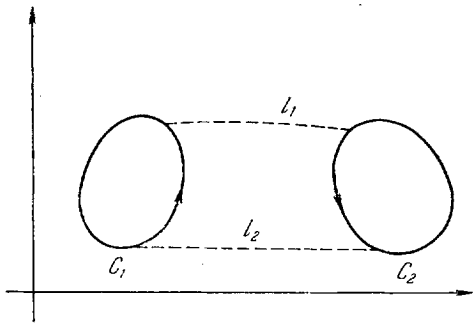


Рис. 327.

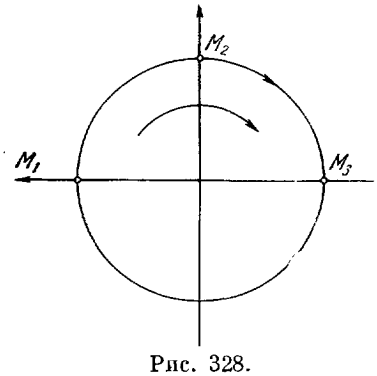


Рис. 328.

**) При указанном на рис. 328 направлении осей, выбранное положительное направление обхода является направлением обхода по часовой стрелке.

Однако мы не будем здесь пользоваться наглядными понятиями «вращения» по и против часовой стрелки ввиду того, что в данном контексте они не имеют математического смысла. Отметим, что на рис. 326 положительным направлением обхода является направление обхода против часовой стрелки. Однако не существует средств математического описания, которые давали возможность установить, какая из двух указанных на рис. 326 и на рис. 328 систем координат введена на данной плоскости

6. Некоторые предложения о направлениях обхода простых замкнутых кривых, имеющих общую дугу или общую точку. Предположим, что плоскость ориентирована. Пусть C_1 и C_2 — две простые замкнутые кривые, имеющие общую дугу l с концами M_1 и M_2, которые кроме этой общей дуги не имеют больше никаких других общих точек. Пусть при *положительном обходе кривой* C_1 на дуге l индуцируется направление от точки M_1 к точке M_2, которое мы на этой дуге будем считать положительным.

Тогда: 1) если область, ограниченная кривой C_2, является частью области внутри кривой C_1 (рис. 322), то направление обхода кривой C_2, индуцированное положительным направлением на дуге l, является положительным; 2) если области, ограниченные кривыми C_1 и C_2, лежат одна вне другой, то направление обхода кривой C_2, индуцированное положительным направлением на дуге l, является отрицательным.

Полностью аналогичные предложения имеют место в случае, когда рассматривается отрицательный обход кривой C.

Имеют также место следующие предложения, в известном смысле обратные предыдущим: 1) если положительное направление на дуге l индуцирует и на кривой C_1 и на кривой C_2 положительное (отрицательное) направление обхода, то области, ограниченные кривыми C_1 и C_2, лежат одна внутри другой; 2) если положительное направление на дуге l и индуцирует на одной из кривых, например C_1, положительное направление обхода, а на другой — C_2 — отрицательное (или наоборот), то области, ограниченные кривыми C_1 и C_2, лежат одна вне другой.

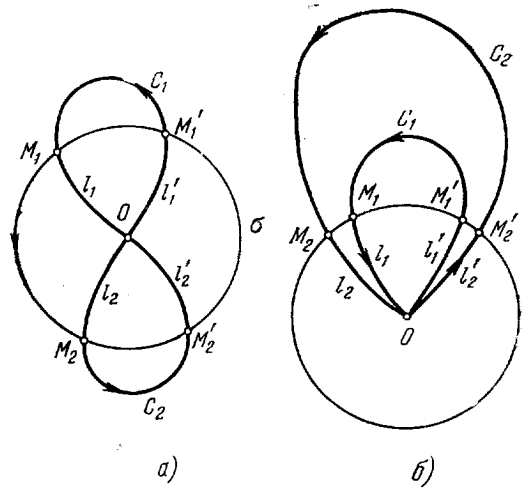


Рис. 329.

Предположим теперь, что простые замкнутые кривые C_1 и C_2 имеют одну только общую точку O. Области, ограниченные кривыми C_1 и C_2, могут лежать либо одна вне другой, либо одна внутри другой.

Пусть σ — простая замкнутая кривая («вспомогательная»), содержащая точку O внутри, не содержащая целиком внутри ни одной из кривых C_1 и C_2 и имеющая с каждой из кривых C_1 и C_2 в точности по две общие точки. Обозначим общие точки кривых σ и C_1 через M_1 и M_1', а общие точки кривых σ и C_2 — через M_2 и M_2'. Точки M_1 и M_1' делят кривую σ на две дуги λ_1 и λ_1' и являются общими концами этих дуг (рис. 329, *а* и *б*).

Очевидно, все отличные от концов точки одной из этих дуг, например λ_1', лежат внутри кривой C_1, а все отличные от концов точки другой, λ_1, вне C_1. Совершенно аналогично точки M_2 и M_2' разделяют кривую σ на две дуги (λ_2 и λ_2'), причем все отличные от концов точки одной из этих дуг лежат внутри кривой C_2, а другой — вне кривой C_2. На одной из дуг λ_1 и λ_1' не лежит ни одной из точек M_2, M_2', на другой — обе эти точки. Совершенно аналогичное высказывание может быть сделано относительно дуги λ_2 и λ_2' и точек M_1 и M_1'. Предположим, что при положительном обходе кривой σ точки M_i и M_i' ($i = 1, 2, \ldots$) расположены в циклическом порядке: M_1, M_2, M_2', M_1'. Обозначим через l_1 и l_1' дуги с концами OM_1 и OM_1', являющиеся частями кривой C_1, все точки которых кроме концов M_1 и M_1' лежат внутри σ. Аналогично обозначим через l_2 и l_2' дуги с концами OM_2 и OM_2', являющиеся частями кривой C_2, все точки которых кроме концов M_2 и M_2' лежат внутри кривой σ.

Приведем без доказательств следующие элементарные предложения, основанные на предыдущих.

I. Если области, заключенные внутри простых замкнутых кривых C_1 и C_2, лежат одна вне другой, то положительный обход кривой C_1 индуцирует на дуге l_1

(систему координат на рис. 326 мы можем считать той же системой координат, что и на рис. 328, но только рассматриваемой с другой «стороны» плоскости).

Но, очевидно, что если *на одной и той же плоскости одновременно* введены системы координат с двумя различными направлениями вращений, то мы всегда можем установить, что направления вращения, вводимые этими координатными системами, различны.

направление от точки M_1 к O, а положительный обход кривой C_2 индуцирует на дуге l_2 направление от точки O к M_2, так что на дуге, составленной из двух дуг l_1 и l_2, имеющей своими концами точки M_1 и M_2, эти направления на дугах l_1 и l_2 индуцируют одно и то же направление от точки M_1 к M_2 (рис. 329, *а*).

II. Если области, заключенные внутри простых замкнутых кривых C_1 и C_2, содержатся одна внутри другой и если положительный обход кривой C_1 индуцирует на дуге l_1 направление от точки M_1 к O (от точки O к M_1), то положительный обход кривой C_2 индуцирует на дуге l_2 направление от точки M_2 к O (от точки O к M_2) (так что на дуге, составленной из двух дуг l_1 и l_2, имеющей своими концами точки M_1 и M_2, эти направления на дугах l_1 и l_2 индуцируют два противоположных направления) (рис. 329, *б*).

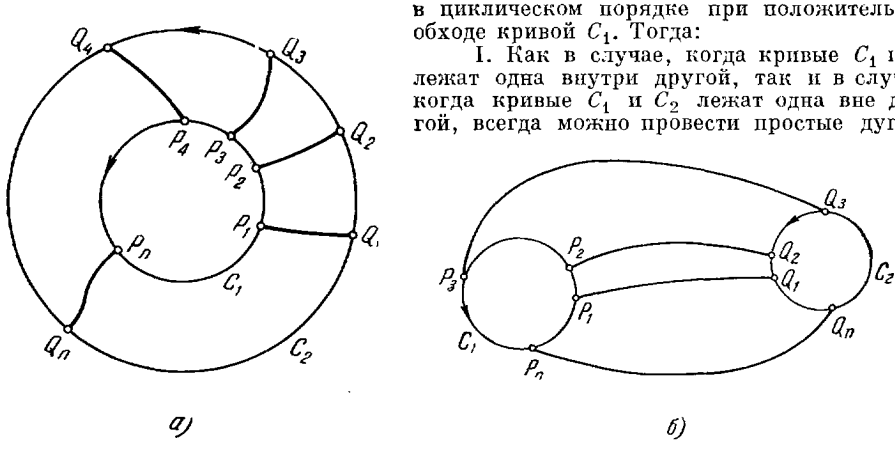
Имеют также место леммы, в известном смысле обратные предыдущим.

III. Если положительный обход кривой C_1 индуцирует на дуге l_1 направление от точки M_1 к точке O, а положительный обход кривой C_2 индуцирует на дуге l_2 направление от точки O к M_2, то области, заключенные внутри замкнутых кривых C_1 и C_2, лежат одна вне другой (рис. 329, *а*).

IV. Если положительный обход кривой C_1 индуцирует на дуге l_1 направление от точки M_1 к O, а положительный обход кривой C индуцирует на дуге l_2 направление от точки M_2 к точке O, то области, заключенные внутри замкнутых кривых C_1 и C_2, содержатся одна внутри другой (рис. 329, *б*).

7. Два предложения о связи между порядком точек на непересекающихся простых замкнутых кривых. Пусть C_1 и C_2 — две простые замкнутые кривые, не имеющие общих точек. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_N$, $N \geqslant 3$, — точки на C_1, перенумерованные в циклическом порядке при положительном обходе кривой C_1. Тогда:

I. Как в случае, когда кривые C_1 и C_2 лежат одна внутри другой, так и в случае, когда кривые C_1 и C_2 лежат одна вне другой, всегда можно провести простые дуги l_i



а) *б)*

Рис. 330.

такие, что одним концом каждой из дуг l_i являлась бы точка P_i на кривой C_1, а другим — некоторая точка Q_i на кривой C_2, и при этом кроме концов P_i, Q_i дуги l_i не имеют общих точек с C_1 и C_2 и друг с другом (рис. 330, *а* и *б*).

Следующие два предложения опираются на предложения предыдущего пункта.

II. Если простые замкнутые кривые C_1 и C_2 лежат одна внутри другой, то при положительном обходе кривой C_2 точки Q_i располагаются в порядке $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$. Если простые замкнутые кривые лежат одна вне другой, то при положительном обходе кривой C_2 точки Q_i располагаются в циклическом порядке $Q_N, Q_{N-1}, \ldots, Q_1$.

Справедливо также обратное предложение.

III. Если при положительном обходе кривых C_1 и C_2 точки P_i и Q_i располагаются на кривых C_1 и C_2 в циклическом порядке $P_1, P_2, \ldots, P_N$ и $Q_1, Q_2, \ldots$ $\ldots, Q_N$, то кривые C_1 и C_2 лежат одна внутри другой. Если при положительном обходе кривых C_1 и C_2 точки P_i и Q_i располагаются на кривых C_1 и C_2 в циклическом порядке $P_1, P_2, \ldots, P_N$ и соответственно $Q_N, Q_{N-1}, \ldots, Q_1$, то кривые C_1 и C_2 лежат одна вне другой.

8. Два типа топологических отображений плоскости в себя (сохраняющие ориентацию и изменяющие ориентацию). Предположим, что рассматриваются различные топологические отображения плоскости E_2 на себя или на другую плоскость E_2'. Ориентацию различных плоскостей E_2 и E_2' будем считать согласованной (см. п. 5

Очевидно, при всяком топологическом отображении образом всякой простой замкнутой кривой C является простая замкнутая кривая C'. При этом топологические отображения плоскости на себя разделяются на два типа.

Первый тип: *топологические отображения, сохраняющие ориентацию.*

При отображении этого типа точка, обходящая в положительном направлении любую простую замкнутую кривую C, отображается в точку, обходящую простую замкнутую кривую C', являющуюся образом C, также в положительном направлении.

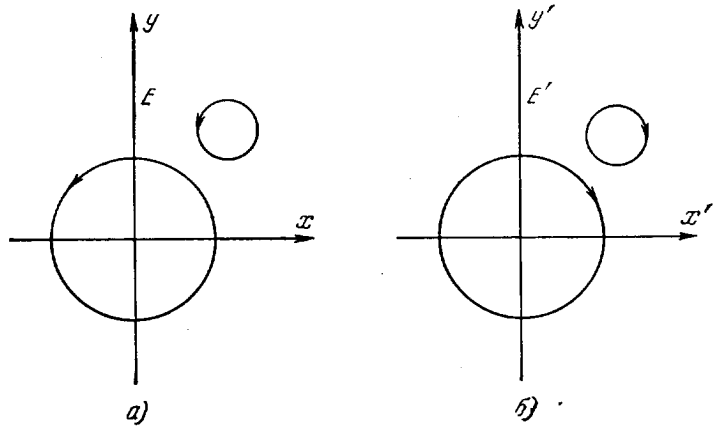


Рис. 331.

Второй тип: *топологические отображения, изменяющие ориентацию.*

При отображении этого типа точка, обходящая в положительном направлении любую простую замкнутую кривую C, отображается в точку, обходящую простую замкнутую кривую C', являющуюся образом C, в отрицательном направлении. Топологическим отображением плоскости на себя, изменяющим ориентацию, является, например, зеркальное отображение (рис. 331, *а*, *б*).

§ 3. Положительная и отрицательная «сторона» простой дуги

1. Области, характеризующие различные «стороны» простой дуги. Пусть l — простая дуга и l' — другая простая дуга, имеющая с l *только одну общую точку* M. Будем, кроме того, предполагать, что *точка M отлична от концов дуги l*, но может быть концом дуги l'.

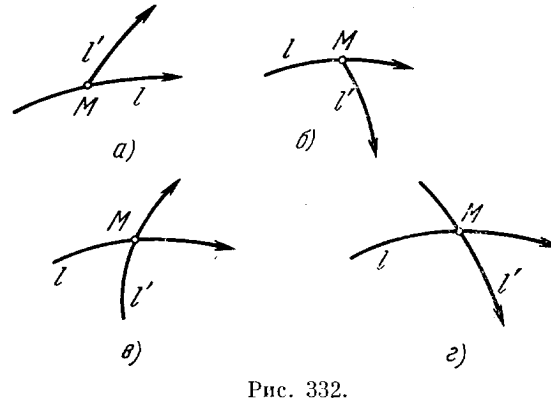


Рис. 332.

В случаях, представленных на рис. 332, *а* и *б*, естественно говорить, что дуга l' «лежит по одну сторону дуги l», а в случаях 332, *в* и *г* — что дуга l' переходит с одной стороны дуги l на другую.

В настоящем параграфе даются определения для этих геометрически наглядных, но расплывчатых понятий. В тексте книги они существенно используются.

В дальнейшем мы предполагаем, что плоскость ориентирована (т. е. на простых замкнутых кривых установлено положительное направление обхода). Пусть M_1 и M_2 — концы простой дуги l, и пусть на дуге l зафиксировано положительное направление от точки M_1 к точке M_2.

Предположим, что концы M_1 и M_2 дуги l соединены простыми дугами l_1 и l_2, причем: а) дуги l_1 и l_2 кроме концов M_1 и M_2 не имеют с дугой l никаких других общих точек; б) дуги l_1 и l_2 кроме концов M_1 и M_2 не имеют друг с другом никаких общих точек, так что они вместе образуют простую замкнутую кривую C; в) все точки

дуги l кроме концов M_1 и M_2, лежащих на кривой C, лежат внутри C (рис. 333). Пусть G — область внутри кривой C. Дуга l (см. п. 6 § 2 дополнения) делит область G на две области G_1 и G_2: границей одной из этих областей, например, G_1 является простая замкнутая кривая C_1, состоящая из дуг l и l_1, границей другой из этих областей G_2 — простая замкнутая кривая C_2, состоящая из дуг l и l_2. Предположим, что направление обхода кривой C_1, индуцированное положительным направлением на дуге l, является положительным. Тогда направление обхода кривой C_2, индуцированное положительным направлением на дуге l, отрицательно. Области G_1 и G_2, как мы увидим, в некотором смысле характеризуют различные «стороны» дуги *).

При этом мы условимся говорить, что область G_1 внутри кривой C_1, у которой направление обхода, индуцированное положительным направлением на дуге l, является положительным, *характеризует «положительную» сторону дуги l, а область G_2 внутри кривой C_2 — отрицательную сторону дуги l.*

Выбирая различные дуги, удовлетворяющие условиям а), б) и в), мы будем, очевидно, получать различные замкнутые кривые C_1 и C_2 и различные области G_1 и G_2, «характеризующие стороны дуги l».

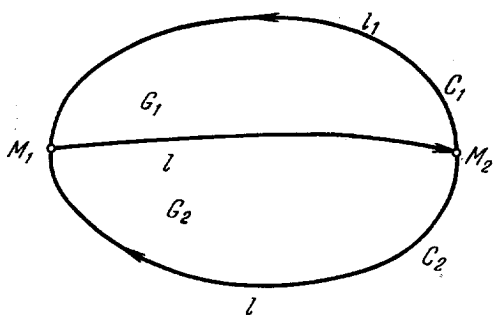


Рис. 333.

Рассмотрим теперь дугу λ, конец которой является внутренней точкой M дуги l, не имеющую кроме точки M больше уже никаких общих точек с дугой l (рис. 332, *а*, *б*).

Пусть

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad a \leqslant u \leqslant b, \quad (1)$$

— параметрические уравнения дуги λ, и пусть для определенности конец M этой дуги соответствует значению $u = a$. Справедливо следующее очевидное предложение:

Т е о р е м а V′. *Если при некотором выборе дуг l_1 и l_2, удовлетворяющих условиям* а), б) *и* в), *все точки дуги λ, достаточно близкие к точке M (т. е. соответствующие значениям u, $|u - a| < \varepsilon$, где ε — некоторая положительная величина), лежат в области G_1 (G_2), характеризующей положительную (отрицательную) сторону дуги l, то при любом другом выборе дуг, удовлетворяющих упомянутым условиям, всегда найдется $\varepsilon^* > 0$ ($\varepsilon^* \leqslant \varepsilon$) такое, что все точки дуги s, соответствующие значениям u, $|u - a| < \varepsilon^*$, также будут лежать соответственно в области, характеризующей положительную (отрицательную) сторону дуги l* **).

В силу этой теоремы тот факт, что у рассматриваемой дуги λ все достаточно близкие к концу M точки лежат в области «характеризующей положительную (отрицательную) сторону дуги l», *зависит только от взаимного расположения дуг λ и l* и не зависит от выбора дуг l_1 и l_2, т. е. от выбора областей G_1 и G_2 указанного выше типа.

В случае рассматриваемой нами дуги λ (с концом, являющимся внутренней точкой дуги l и кроме этого конца не имеющей никаких других общих точек с дугой l) это позволяет ввести следующее определение.

О п р е д е л е н и е I. *Все отличные от принадлежащего дуге l конца M точки дуги λ лежат по положительную (отрицательную) сторону дуги l или просто дуга λ лежит по положительную (отрицательную) сторону дуги l, если при некотором выборе дуг l_1 и l_2, удовлетворяющим условиям* а), б) *и* в), *все достаточно близкие к концу M точки дуги λ лежат в области G_1 (G_2), характеризующей положительную (отрицательную) сторону дуги l.*

Мы рассмотрели случай, когда единственная общая точка M дуг λ и l, отличная от концов дуги l, является концом дуги λ. Предположим теперь, что единственная общая точка дуг λ и l отлична и от концов дуги λ, и от концов дуги l.

Основываясь на данном выше определении, мы опишем все возможные случаи взаимного расположения дуг l и λ.

---

*) Для характеристики различных «сторон» простой дуги можно пользоваться, как легко видеть из дальнейшего, только одной из рассмотренных простых замкнутых кривых C_1 или C_2 и, следовательно, только одной из дуг l_1 или l_2. Однако введение двух замкнутых кривых позволяет сделать рассмотрение «двух сторон» дуги полностью симметричным.

**) Доказательство этого предложения может быть просто получено путем использования предложений п. 6.

Точка M делит дугу λ на две части — AM и A_2M (A и A_2 — концы дуги λ). Пусть положительное направление на дуге λ, т. е. направление в сторону возрастания параметра в уравнениях (1) есть направление от точки A к A_2.

Если часть AM дуги λ лежит по отрицательную сторону дуги l, а часть A_2M этой дуги по положительную сторону дуги l (или наоборот), то мы будем говорить, что в точке M дуга λ *переходит с отрицательной стороны дуги l на положительную* (или наоборот) (рис. 334,*а*).

Если обе части AM и A_2M дуги λ лежат по одну и ту же (положительную или отрицательную) сторону дуги l, то мы будем говорить, что дуга λ лежит по одну сторону дуги l (рис. 334,*б*).

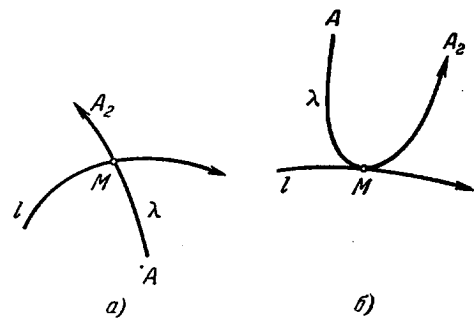


Рис. 334.

2. Определение областей, характеризующих различные стороны простой дуги, с помощью введения криволинейной системы координат. «Области», характеризующие различные стороны простой дуги, во многих случаях (в частности, во многих вопросах, рассматривающихся в настоящей книге) естественным образом вводятся не с помощью проведения вспомогательных дуг l_1 и l_2, как это сделано в п. 1, а следующим по форме отличным образом.

Рассматриваются функции $x=\varphi(s, t)$, $y=\psi(s, t)$, определенные в прямоугольнике σ плоскости (s, t) (рис. 335,*а*, *б*)

$$a \leqslant s \leqslant b, \qquad |t| \leqslant \alpha \qquad (\alpha > 0), \tag{2}$$

осуществляющие такое топологическое отображение T этого прямоугольника в плоскость (x, y), при котором отрезок оси $t=0$, соответствующий значениям $a \leqslant s \leqslant b$

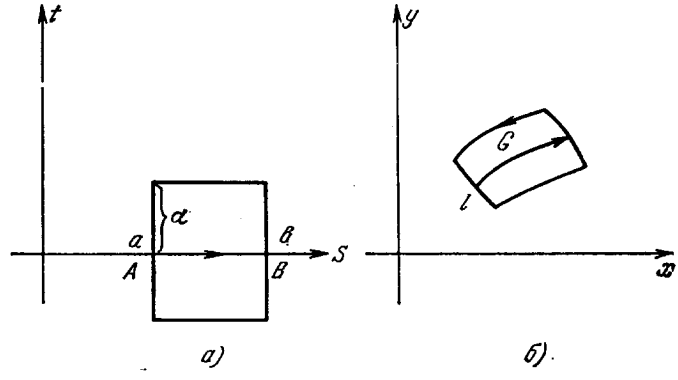


Рис. 335.

(отрезок AB), отображается в рассматриваемую простую дугу l *). Весь прямоугольник σ отображается в некоторую замкнутую область G плоскости (x, y), содержащую внутри все точки дуги l кроме ее концов.

Величины s и t, удовлетворяющие неравенствам (2), *можно рассматривать как криволинейные координаты точек области G.*

При этом мы будем считать, что часть области G, точкам которой соответствуют значения $t > 0$ (обозначим эту часть через G), характеризует одну (например, положительную) сторону дуги l, а часть области G, которой соответствуют значения $t < 0$ — G_2, — другую, отрицательную сторону дуги l. Очевидно, области G_1 и G_2 являются теми областями, на которые дуга l делит область G.

*) Функции $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$ являются, следовательно, однозначными и непрерывными во всех точках прямоугольника (2), и, кроме того, всяким двум различным парам значений (s, t) соответствуют различные пары значений $(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ (последнее условие обеспечивает взаимную однозначность отображения T).

Кроме того, мы всегда можем предполагать, что выполняются следующие условия: а) отрезок AB оси $t=0$, $a \leqslant s \leqslant b$, отображается на простую дугу l так, что при изменении s от a до b дуга l проходится в заданном направлении; б) на простой замкнутой кривой, образующей границу области G_1 (точкам которой соответствуют значения $t > 0$), направление обхода, индуцированное положительным направлением дуги l, является положительным.

При невыполнении условий а) или б) мы могли бы, заменяя s на s или соответственно t на $-t$, прийти к случаю, когда они выполняются.

Мы приходим, следовательно, к таким же областям G_1 и G_2, характеризующим разные стороны простой дуги, что и в предыдущем пункте, только здесь эти области введены не с помощью вспомогательных дуг l_1 и l_2, а с помощью отображения или, что то же, с помощью введения вблизи дуги l некоторой криволинейной системы координат. Рассматривая, как и в предыдущем пункте, случай, когда единственная общая точка M дуг l и λ отличная от концов дуги l, является концом дуги λ, можно ввести следующее определение, отличающееся от данного в предыдущем пункте только по форме.

Мы будем говорить, что дуга λ лежит по положительную (отрицательную) сторону дуги l, если при рассмотрении каких-либо функций $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$, обладающих указанными выше свойствами, всем, достаточно близким к M точкам дуги λ соответствуют значения $t > 0$ ($t < 0$).

Очевидно, можно описать взаимное расположение дуг l и λ, представленных на рис. 334, пользуясь определением I в приведенной здесь форме.

3. Некоторые предложения о взаимном расположении дуг и простых замкнутых кривых. Приведем без доказательства несколько элементарных предложений.

I. Пусть простая дуга l' является частью простой дуги l и P — отличная от концов l' и l точка, принадлежащая и дуге l, и дуге l'. Пусть λ — простая дуга, концом которой является точка P, кроме P не имеющая других общих точек с дугой l. Если дуга λ лежит по положительную (отрицательную) сторону дуги l' (или l), то она лежит также и по положительную (отрицательную) сторону l (l').

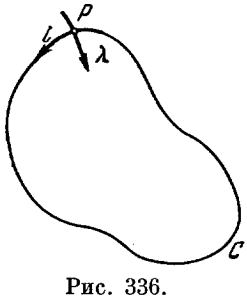


Рис. 336.

II. Если простые дуги l и λ имеют одну и только одну общую точку P, отличную от концов этих дуг, и если в точке P дуга λ переходит с отрицательной стороны дуги l на положительную, то дуга l в точке P переходит с положительной стороны дуги λ на отрицательную.

Пусть простая дуга λ с концами A_1 и A_2, на которой положительное направление есть направление от точки A_1 к A_2, имеет одну только общую точку P, отличную от концов A_1 и A_2 с простой замкнутой кривой C. Мы скажем, что в точке P дуга λ переходит из области внутри (вне) C в область вне C (внутри C), и часть A_1P этой дуги кроме точки P лежит внутри C (вне C), а часть PA_2 кроме точки P — вне C (внутри C).

Предположим, что на простой замкнутой кривой C выбрано определенное направление обхода, которое может быть как положительным, так и отрицательным. Пусть l — простая дуга, являющаяся частью кривой C, причем то направление на дуге l, которое индуцируется положительным обходом кривой C, будем считать положительным.

Пусть λ — простая дуга, имеющая единственную общую точку P с дугой l, причем точка P отлична от концов дуг l и λ (рис. 336).

III. Если в точке P дуга λ переходит с положительной стороны дуги l на отрицательную, то в случае, когда выбранное направление обхода C является положительным (отрицательным), дуга λ в точке P переходит на области внутри C в область вне C (из области вне C в область внутри C). Справедливость этого предложения непосредственно вытекает из определения I дополнения.

IV. Если в точке P дуга λ переходит с положительной стороны дуги l на отрицательную, то в случае, когда она при этом переходит из области внутри C в область вне C (из области вне C в область внутри C), выбранное на C направление обхода является положительным (отрицательным).

4. Ограниченные области на плоскости. Отметим прежде всего следующие элементарные факты, касающиеся областей:

А) Любые две точки области G могут быть соединены простой дугой, состоящей из точек области G, и все точки, которые могут быть соединены с какой-нибудь точкой области G простой дугой, не содержащей точек границы G, также принадлежат области G.

Б) На всяком континууме (в частности, на простой дуге, соединяющей точку области G с точкой, не принадлежащей области G), лежит хотя бы одна точка границы G.

В) Всякая простая дуга l, один из концов которой лежит на границе области G и на которой больше нет уже ни одной отличной от точек G точки, не разделяет область G (т. е. множество, которое получится, если из точек области G изъять точки, принадлежащие дуге l, есть область).

Г) Всякая простая замкнутая кривая, точки которой принадлежат области G, разделяет G на две области и является общей границей этих областей.

Область G называется *односвязной*, если какую бы простую замкнутую кривую C, целиком лежащую в G, мы ни взяли, все точки внутри этой замкнутой кривой принадлежат области G.

Область G называется *n-связной* ($n > 1$), если: а) какие бы n, лежащие в G, и одна вне другой простые замкнутые кривые мы ни взяли, среди этих замкнутых кривых найдется хотя бы одна такая, что все точки внутри нее принадлежат G; б) существуют $n - 1$, лежащие в G и одна вне другой простые замкнутые кривые такие, что среди точек внутри каждой из этих кривых есть точки, не принадлежащие G (рис. 337).

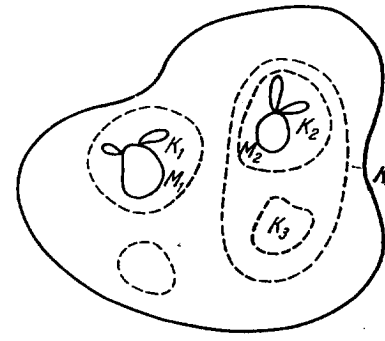


Рис. 337.

Граница n-связной области состоит из n континуумов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ без общих точек. Континуумы K_i называются граничными. Один из этих граничных континуумов является *внешним* граничным континуумом, остальные внутренними. Какую бы замкнутую кривую, целиком лежащую в G, мы ни взяли, внешний граничный континуум будет лежать вне нее, но всегда можно указать в G простую замкнутую кривую, содержащую один из внутренних граничных континуумов (любой), а также один, два или $n - 1$ внутренних континуумов.

Очевидно, существуют также области, не имеющие конечной связности. Пусть G — n-связная область и $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — граничные континуумы области.

I. Простая дуга l, все точки которой кроме концов M_1 и M_2, лежащих на одном и том же граничном континууме K_i, являются точками G, делит область G на две области, и все точки l являются граничными для обеих этих областей.

II. Простая замкнутая кривая, на которой лежит одна и только одна граничная точка M_0 области G, а все остальные точки которой являются точками G, разделяет G на две области и все точки ее являются граничными для обеих областей.

III. Пусть в случае $n \geqslant 2$ l — простая дуга, у которой один конец лежит на одном граничном континууме K_i, другой конец — на другом граничном континууме K_j ($i \neq j$), а все отличные от концов точки l являются точками области G. Тогда область G', являющаяся частью области G, у которой граница состоит из точек континуумов K_i и дуги l, является n — 1-связной областью. При этом одним из граничных континуумов области G' является континуум $K_i \cup l \cup K_j$. Мы будем говорить в этом случае, что дуга l превращает n-связную область в $(n - 1)$-связную.

§ 4. Лемма Адамара и теорема о неявных функциях

1. Классы функций. Пусть рассматривается функция $z = F(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой области G пространства E_n. Область G, в частности, может совпадать со всем пространством E, n — может быть любым заданным натуральным числом, в частности, при $n = 1$ мы получаем функцию одного переменного.

Мы будем говорить, что функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу C_k или аналитическому классу, если во всех точках области G функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные до порядка k или соответственно является аналитической.

2. Лемма Адамара *). В главе IV настоящей книги неоднократно используется следующая лемма:

Лемма Адамара. *Пусть функция* $F(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$ *имеет в некоторой выпуклой по* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *области* G *пространства* E_{n+m} $(x_1, \ldots, x_n,$

*) Доказательство этой леммы см. [61]. Лемма Адамара является уточненной формой формулы Лагранжа.

$z_1, \ldots, z_m$) *непрерывные производные по* $x_1, \ldots, x_n$ *до некоторого порядка* $k > 0$ *включительно. Тогда можно найти* n *таких функций* $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *имеющих непрерывные производные по* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ *до порядка* $k-1$ *включительно, что*

$$F(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) - F(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)(y_i - x_i).$$

3. Теорема о неявных функциях. Мы сформулируем теорему о неявных функциях, которая неоднократно используется в основном тексте сначала для случая одной функции трех переменных. Полностью аналогично эта теорема формулируется в случае любого числа переменных.

Пусть функция $F(x, y, z)$ является в некоторой области G функцией класса C_k (аналитического класса), и пусть в некоторой точке $M(x_0, y_0, z_0)$ области G

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \text{ *)}.$$

Тогда уравнение $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ вблизи системы значений x_0, y_0, z_0 может быть *разрешено* относительно z. Именно, имеет место

Теорема VI. *Существует одна и только одна функция* $z = \varphi(x, y)$, *определенная при всех значениях* x *и* y: $|x - x_0| \leqslant \alpha_0$, $|y - y_0| \leqslant \beta_0$, *где* $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ — *надлежащим образом выбранные постоянные, удовлетворяющая уравнению*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

и обращающаяся в z_0 *при* $x = x_0$, $y = y_0$. *При этом функция* $\varphi(x, y)$ *принадлежит классу* C_k (*соответственно аналитическому классу*).

Замечание I. Всегда можно указать такие положительные величины $\alpha \leqslant \alpha_0$, $\beta \leqslant \beta_0$ и γ, чтобы при всех x, y ($|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|y - y_0| \leqslant \beta$) было справедливо неравенство

$$|\varphi(x, y) - z_0| < \gamma, \tag{2}$$

причем при этих значениях x, y ($|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|y - y_0| \leqslant \beta$) кроме $z = \varphi(x, y)$ не существовало бы никаких других значений z, удовлетворяющих уравнению (1), для которых выполнялось бы неравенство (2). На основании этого в том частном случае, когда функция $F(x, y, z)$ не зависит от x и y (т. е. является функцией одного z, $F(x, y, z) \equiv \Phi(z)$), мы сразу же можем сделать заключение, что корень z_0 — непременно изолированный (этот факт, очевидно, может быть также получен непосредственно).

Замечание II. Последовательные частные производные функции $z = \varphi(x, y)$ находятся из соотношений:

$$F'_x + \varphi'_x F'_z = 0, \quad F'_y + \varphi'_y F'_z = 0,$$
$$F''_{xx} + \varphi'_x F''_{xz} + \varphi'_x, \quad F''_{zx} + \varphi''_{xx} F'_z = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Мы даем здесь также формулировку теоремы о неявных функциях для случая двух неявных функций (совершенно аналогично может быть сформулирована и теорема о неявных функциях в случае большого числа переменных).

Пусть функции **) $F_1(x, y, u, v)$, $F_2(x, y, u, v)$ являются в некоторой области G пространства $E_n(x, y, u, v)$ функциями класса C_k (аналитического класса), и пусть в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ области G

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

*) В частных случаях функция $F(x, y, z)$ может не зависеть от x или от y, или от обеих переменных. Однако в силу того, что $F'_z \neq 0$, она непременно зависит от z.

**) В частных случаях функции F_1 и F_2 могут не зависеть от x или y, или от обеих этих переменных, но в силу (3) эти функции непременно зависят от u и v.

Тогда имеет место

Теорема VII. *Существует одна и только одна пара непрерывных функций*

$$u=\varphi_1(x,\ y),\qquad v=\varphi_2(x,\ y),$$

определенная при всех значениях x, y,

$$|x-x_0|\leqslant\alpha_0,\qquad |y-y_0|\leqslant\beta_0,$$

где $\alpha_0>0$, $\beta_0>0$ — *надлежащим образом выбранные постоянные, удовлетворяющие системе уравнений*:

$$F_1(x,\ y,\ u,\ v)=0,\qquad F_2=(x,\ y,\ u,\ v)=0 \tag{4}$$

и такая, что

$$u_0=\varphi_1(x_0,\ y_0),\qquad v_0=\varphi_2(x_0,\ y_0).$$

При этом функции $\varphi_1(x,y)$ *и* $\varphi_2(x,y)$ *принадлежат классу* C_k (*аналитическому классу*).

Замечание I. Аналогично случаю одной неявной функции (см. замечание I к теореме VI) всегда можно указать такие положительные величины $\alpha\leqslant\alpha_0$, $\beta\leqslant\beta_0$, γ и δ, чтобы при всех x, y:

$$|x-x_0|\leqslant\alpha,\qquad |y-y_0|\leqslant\beta,$$

имели бы место неравенства

$$|\varphi_1(x,\ y)-u_0|<\gamma,\qquad |\varphi_2(x,\ y)-v_0|<\delta, \tag{5}$$

причем при всех x, y, $|x-x_0|\leqslant\alpha$, $|y-y_0|\leqslant\beta$, кроме $u=\varphi_1(x,\ y)$ и $v=\psi(x,\ y)$ не существовало бы никаких других значений u и v, удовлетворяющих системе (4), для которых выполнялись бы неравенства (5).

Замечание II. Пусть мы имеем частный случай системы (4), когда функции $F_1(x,\ y,\ u,\ v)$ и $F_2(x,\ y,\ u,\ v)$ не зависят от x, y, так что $F_1(x,\ y,\ u,\ v)\equiv\Phi_1(u,\ v)$, $F_2(x,\ y,\ u,\ v)=\Phi_2(u,\ v)$, а система (4) имеет вид

$$\Phi_1(u,\ v)=0,\qquad \Phi_2(u,\ v)=0, \tag{6}$$

причем

$$\Phi_1(u_0,\ v_0)=\Phi_2(u_0,\ v_0)=0$$

и

$$D=\begin{vmatrix}\Phi'_{1u}(u_0,\ v_0) & \Phi'_{1v}(u_0,\ v_0)\\ \Phi'_{2u}(u_0,\ v_0) & \Phi'_{2v}(u_0,\ v_0)\end{vmatrix}\neq 0. \tag{7}$$

Тогда из предыдущего замечания вытекает, что решение системы (6) u_0, v_0 является единственным, удовлетворяющим неравенствам

$$|u-u_0|<\gamma,\qquad |v-v_0|<\delta,$$

где $\gamma>0$ и $\delta>0$—надлежащим образом выбранные величины. Рассматривая $\Phi_1(u,\ v)=0$ и $\Phi_2(u,\ v)=0$ как кривые на плоскости u, v, мы можем сделанному утверждению придать следующую геометрическую форму: при условии (7) общая точка $(u_0,\ v_0)$ кривых (6) является *изолированной*.

Замечание III. Между функциональными детерминантами

$$\frac{D(F_1,\ F_2)}{D(x,\ y)}=\begin{vmatrix}F'_{1x} & F'_{1y}\\ F'_{2x} & F'_{2y}\end{vmatrix},\qquad \frac{D(F_1,\ F_2)}{D(u,\ v)}=\begin{vmatrix}F'_{1u} & F'_{1v}\\ F'_{2u} & F'_{2v}\end{vmatrix}$$

и

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,\ y)}=\begin{vmatrix}\varphi'_{1x} & \varphi'_{2x}\\ \varphi'_{1y} & \varphi'_{2y}\end{vmatrix}$$

существует следующая связь:

$$\frac{D(F_1,\ F_2)}{D(x,\ y)}=\frac{D(F_1,\ F_2)}{D(u,\ v)}\,\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2)}{D(x,\ y)}. \tag{8}$$

§ 5. Угол между векторами. Гладкая простая дуга и гладкая простая замкнутая кривая. Угол между двумя гладкими дугами

1. Угол между векторами. Пусть E_2 — евклидова плоскость, x, y — прямоугольные декартовы координаты на ней. Пусть в некоторой точке M_0 задан вектор $\boldsymbol{M}$ с компонентами M_x и M_y.

Вектор называется *нулевым*, если $M_x=M_y=0$, т. е. если длина вектора $\sqrt{M_x^2+M_y^2}$ равна нулю. Пусть даны два ненулевых вектора: вектор $\boldsymbol{M}$ с компонентами M_x и M_y и вектор $\boldsymbol{N}$ с компонентами N_x и N_y. Углом между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ будем называть число α такое, что $-\pi<\alpha\leqslant\pi$ и

$$\cos\alpha=\frac{M_xN_x+M_yN_y}{\sqrt{M_x^2+M_y^2}\sqrt{N_x^2+N_y^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{M_xN_y-M_yN_x}{\sqrt{M_x^2+M_y^2}\sqrt{N_x^2+N_y^2}}.$$

Таким образом, угол между вектором $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ есть наименьший по абсолютной величине угол, на который нужно повернуть вектор $\boldsymbol{M}$ до совпадения его по направлению с вектором $\boldsymbol{N}$. При этом в случае, когда этот угол положителен, вращение происходит в положительном направлении, а когда угол отрицателен — в отрицательном (см. § 2, п. 5 дополнения). Будем обозначать угол между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ через $\boldsymbol{MN}$ (порядок не безразличен!).

Мы имеем, очевидно, $\boldsymbol{MN}=-\boldsymbol{NM}$.

Если в точке O заданы три вектора $\boldsymbol{MN}$ и $\boldsymbol{K}$ и угол между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ положителен, то вектор $\boldsymbol{K}$ лежит *между* $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$, если угол между $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{M}$ отрицателен, а угол между $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{N}$ положителен. Очевидно, угол между векторами определен только в том случае, когда оба вектора ненулевые.

Если L_1 — прямая, на которой лежит вектор $\boldsymbol{M}$, а L_2 — прямая, на которой лежит вектор $\boldsymbol{N}$ и положительные направления на этих прямых совпадают с направлением векторов $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ («индуцированы» векторами $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$), то углом между прямыми L_1 и L_2 называется угол между векторами $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$.

2. Гладкая простая дуга. Простая дуга l называется *гладкой*, если существует такое параметрическое представление этой дуги $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, при котором функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в ее параметрических уравнениях удовлетворяют следующим условиям: 1) они однозначны и непрерывны при всех t, $a\leqslant t\leqslant b$ (a и b, $b>a$, — некоторые данные значения, причем точки $M_0(\varphi(a),\ \psi(a))$ и $M_1(\varphi(b),\ \psi(b))$ являются концами дуги l), и для всяких двух значений t_1, t_2, $t_1\neq t_2$, $[\varphi(t_1)-\psi(t_2)]^2+[\psi(t_1)-\psi(t_2)]^2\neq 0$, т. е. разным значениям t соответствуют разные точки дуги l; 2) они имеют производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, непрерывные и не равные одновременно нулю ни при одном значении t, $a\leqslant t\leqslant b$.

Условие 1) есть условие того, что множество точек $M(\varphi(t),\ \psi(t))$ есть простая дуга, а 2) — есть условие гладкости. Из условия 2) следует (это нетрудно доказать простым рассуждением от противного) существование $A_0>0$ такого, что при всех значениях t, $a\leqslant t\leqslant b$, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>A_0$.

Простая дуга называется гладкой дугой класса C_k (аналитического класса), если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ являются функциями класса C_k (соответственно аналитическими).

Предположим, что положительное направление на гладкой дуге при заданных функциях $\varphi(t)$, $\psi(t)$ выбрано в направлении возрастания t. В каждой точке гладкой дуги l определяется «касательный вектор» $\boldsymbol{k}$, именно, вектор с компонентами: $k_x'=\varphi'(t)$; $k_y'=\psi'(t)$. Прямая, на которой лежит вектор $\boldsymbol{k}$, есть касательная прямая. Тангенс угла между осью x и касательной прямой, на которой за положительное направление принято направление, индуцированное вектором $\boldsymbol{k}$, называется *наклоном* касательной.

3. Гладкая простая замкнутая кривая и кусочно-гладкая простая замкнутая кривая. Простая замкнутая кривая называется *гладкой*, если существует параметрическое представление этой кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, в котором функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют следующим условиям: а) они однозначны, непрерывны при всех t, $t_0\leqslant t\leqslant T$ (t_0 и T — некоторые заданные значения), таковы, что $\varphi(t_0)=\varphi(T)$, $\psi(t_0)=\psi(T)$ и, кроме того, для t_1 и t_2, удовлетворяющих условию $t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T_2$ равенства $\varphi_1(t_1)=\varphi(t_2)$, $\psi(t_1)=\psi(t_2)$ могут иметь место лишь в случае, когда $t_1=t_0$, $t_2=T$; б) они имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$,

не обращающиеся в нуль одновременно ни при одном значении t ($t_0 \leqslant t \leqslant T$), кроме того, $\varphi'(t_0) = \varphi'(T)$, $\psi'(t_0) = \psi'(T)$.

Условие а) означает, что множество точек $M(\varphi(t), \psi(t))$ есть простая замкнутая кривая, условие б) есть условие гладкости. Условия а) и б) выполняются, в частности, в том случае, когда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — периодические функции с периодом τ ($\tau = T - t_0$), имеющие непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль. Из условия б), как и в случае простой гладкой дуги, следует, что при всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > A_0$, где A_0 — некоторая положительная величина. Всякие две точки на гладкой простой замкнутой кривой C, очевидно, разделяют C на две простые гладкие дуги. В каждой точке кривой C, так же как и в случае гладкой простой дуги, определен касательный вектор.

Простая гладкая замкнутая кривая называется простой замкнутой кривой класса C_k, $k \geqslant 1$ (аналитического класса), в случае, когда функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ принадлежат C_k (являются аналитическими) и, кроме того, для производных от этих функций выполняются равенства:

$$\varphi^{(i)}(t_0) = \psi^{(i)}(T),$$
$$\psi^{(i)}(t_0) = \psi^{(i)}(T),$$

где i принимает все значения от 1 до k ($k = \infty$ для аналитического класса). Простая замкнутая кривая называется *кусочно-гладкой*, если она, не являясь гладкой, состоит из конечного числа простых гладких дуг.

4. Гладкая линия. Пусть даны функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, определенные на некотором *интервале* значений $t \in (a, b)$ (в частности, может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$), имеющие при всех этих значениях t непрерывные производные $\varphi'(t), \psi'(t)$, причем $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 \geqslant 0$. Тогда множество точек $M(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in (a, b)$ мы будем называть *гладкой линией* или просто *линией*.

5. Гладкие простые дуги, имеющие общую точку. Пусть l_1 и l_2 — две простые гладкие дуги. Пусть при $t \in [a_1, b_1]$ $(a_1 < b_1)$ $x = \varphi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$, и соответственно при $u \in [a_2, b_2]$ $(a_2 < b_2)$ $x = \varphi_2(u)$, $y = \psi_2(u)$ — параметрические уравнения дуг l_1 и l_2 (φ_1, ψ_1 и φ_2, ψ_2 — функции класса C_1, удовлетворяющие условиям 1) и 2) п. 2). Предположим, что на обеих этих дугах установлено положительное направление соответственно в сторону возрастания параметров t и u.

Предположим, что дуги l_1 и l_2 имеют общую точку $M_0(x_0, y_0)$, соответствующую на дуге l_1 значению параметра $t_0 \in [a_1, b_1]$ и на дуге l_2 — значению параметра $u_0 \in [a_2, b_2]$, так что $x_0 = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(u_0)$, $y_0 = \psi_1(t_0) = \psi_2(u_0)$. (Точка M_0 может быть как отличной от концов дуг l_1 и l_2, так и совпадать с концом одной или обеих этих дуг.)

Углом α *между дугой* l_1 *и дугой* l_2 (порядок дуг не безразличен!) в их общей точке M_0 называется *угол между касательным вектором к дуге* l_1 *и касательным вектором к дуге* l_2 *в этой точке*. Угол α определяется, следовательно, из соотношений

$$\sin\alpha = \frac{\varphi_1'(t_0)\,\psi_2'(u_0) - \varphi_2'(u_0)\,\psi_1'(t_0)}{\sqrt{\varphi_1'^2(t_0) + \psi_1'^2(t_0)}\sqrt{\varphi_2'^2(u_0) + \psi_2'^2(u_0)}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\varphi_1'(t_0)\,\varphi_2'(u_0) + \psi_1'(t_0)\,\psi_2'(u_0)}{\sqrt{\varphi_1'^2(t_0) + \psi_1'^2(t_0)}\sqrt{\varphi_2'^2(u_0) + \psi_2'^2(u_0)}}.$$

Таким образом, знак угла между дугой l_1 и дугой l_2 определяется знаком детерминанта

$$D_0 = \begin{vmatrix} \varphi_1'(t_0) & \psi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(u_0) & \psi_2'(u_0) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, угол *между дугой* l_1 *и дугой* l_2 равен по абсолютной величине и противоположен по знаку углу *между дугой* l_1 *и дугой* l_2.

Две простые гладкие дуги *пересекаются* (или одна дуга пересекает другую), если в их общей точке угол между ними отличен от нуля, т. е. если $\sin\alpha \neq 0$. Две простые гладкие дуги касаются в общей точке, если угол между ними равен 0 или π, т. е. если $\sin\alpha = 0$.

Лемма 1. *Если простые гладкие дуги* l_1 *и* l_2 *пересекаются в точке* $M_0(x_0, y_0)$ $(x_0 = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(u_0)$, $y_0 = \psi_1(t_0) = \psi_2(t_0))$, *то существует* $\Delta > 0$ *такое, что часть*

дуги l_2, соответствующая значениям u, $|u-u_0|\leqslant\Delta$, кроме точки M_0 не имеет никаких других общих точек с дугой l_1 и аналогично часть дуги l_1, соответствующая значениям t, $|t-t_0|\leqslant\Delta$, кроме точки M_0 не имеет никаких других общих точек с дугой l_2.

Доказательство. Рассмотрим сначала какое-нибудь положительное $\delta<\frac{b_1-a_1}{2}$ и рассмотрим множество точек дуги l, соответствующих значениям $|t-t_0|\geqslant\delta$. Это множество состоит из двух простых дуг, которые мы обозначим через λ_1 и λ_2 (точкам дуги λ_1 соответствуют значения t, $a_1\leqslant t\leqslant t_0-\delta$, а точкам дуги λ_2 значения $t_0+\delta\leqslant t\leqslant b_1$).

Обозначим через η нижнюю грань расстояний точки M_0 до дуг λ_1 и λ_2. Очевидно, $\eta>0$ (так как множество, состоящее из дуг λ_1 и λ_2, замкнуто, а точка M_0 ему не принадлежит). Возьмем теперь $\delta'>0$ столь малым, чтобы часть дуги l_2, точкам которой соответствуют значения u, $|u-u_0|\leqslant\delta'$, целиком лежала в $u_{\eta/2}(M_0)$. Эта часть дуги l_2, очевидно, не будет иметь общих точек с дугами λ_1 и λ_2. Остается, следовательно, показать, что при достаточно малых $\delta>0$ и $\delta'>0$ часть дуги l_2, соответствующая значениям u, $|u-u_0|<\delta'$, кроме точки M_0 не имеет больше других общих точек с частью дуги l_1, соответствующей значениям t, $|t-t_0|<\delta$.

Переходя к доказательству этого последнего утверждения, заметим прежде всего, что по условию леммы:

$$\varphi_1(t_0)=\varphi_2(u_0),\qquad \psi_1(t_0)=\psi_2(u_0), \tag{1}$$

$$D=\varphi_1'(t_0)\,\psi_2'(u_0)-\psi_1'(t_0)\,\psi_2'(u_0)\neq 0. \tag{2}$$

Предположим, что при любом $\delta>0$ можно указать значения t_1 и u_1, $t_1\neq t_0$, $u_1\neq u_0$, такие, что $|t_1-t_0|<\delta$, $|u_1-u_0|<\delta$, и при этом

$$\varphi_1(t_1)=\varphi_2(u_1),\qquad \psi_1(t_1)=\psi_2(u_1). \tag{3}$$

Вычитая из этих равенств равенства (1), мы получим

$$\varphi_1(t_1)-\varphi_1(t_0)=\varphi_2(u_1)-\varphi_2(u_0),\qquad \psi_1(t_1)-\psi_1(t_0)=\psi_2(u_1)-\psi_2(u_0)$$

и, применяя теорему о среднем, имеем

$$\varphi_1'(\xi_1)(t_1-t_0)=\varphi_2'(\xi_2)(u_1-u_0),\qquad \psi_1'(\eta_1)(t-t_0)=\psi_2'(\eta_2)(u_1-u_0). \tag{4}$$

Так как по условию $D_0\neq 0$, то в силу непрерывности функций φ_1', φ_2', ψ_1', ψ_2' при всех ξ_1, η_1, достаточно близких к t_0, и ξ_2, η_2, достаточно близких к u_0, т. е. при достаточно малом $\delta>0$:

$$D=\varphi_1'(\xi_1)\,\psi_2'(\eta_2)-\varphi_2'(\xi_2)\,\psi_1'(\eta_1)\neq 0.$$

Но соотношения (4) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно u_1-u_0 и t_1-t_0. В силу того, что $D\neq 0$, эта система уравнений не может иметь отличных от нуля решений u_1-u_0 и t_1-t_0. А это, очевидно, противоречит сделанному предположению, что доказывает лемму.

Замечание. Если функции φ_1 и ψ_1 определены только для значений $t>t_0$ или функции φ_2, ψ_2 — только для значений $u>u_0$ (это имеет место в случае, когда общая точка дуг l_1 и l_2 является концом одной или обеих этих дуг) — в рассуждение, проведенное при доказательстве леммы, следует внести некоторые очевидные изменения.

§ 6. Регулярное отображение. Криволинейные координаты. Некоторые предложения о гладких дугах и гладких замкнутых кривых

1. Регулярное отображение. В настоящем параграфе приводятся основные сведения о так называемом *регулярном отображении*, являющемся частным случаем топологического отображения. При этом мы ограничимся случаем $n=2$, т. е. случаем отображения множеств евклидовой плоскости в множества той же или другой евклидовой плоскости. Все сказанное в этом случае с очевидным изменением переносится на случай $n>2$.

Пусть функции

$$x=f(u,\ v),\qquad y=g(u,\ v) \tag{1}$$

определены в некоторой области G плоскости (u, v) и в точках этой области однозначны, непрерывны и имеют непрерывные частные производные до некоторого порядка $p \geqslant 1$. Будем считать u, v декартовыми координатами плоскости (u, v), а x, y — декартовыми координатами плоскости (x, y).

Пусть M — какое-нибудь множество, лежащее в области G (например, открытая или замкнутая область Γ, целиком вместе с границей лежащая в G). Функции (1), очевидно, определяют отображение T множества M плоскости (u, v) на некоторое множество M^* плоскости (x, y).

Это отображение T называется *регулярным* в точках множества M, если выполняются следующие условия: 1) отображение T является топологическим отображением множества M, т. е. в точках множества M существуют однозначные обратные функции $u = \widetilde{f}(x, y)$, $v = \widetilde{g}(x, y)$, определяющие обратное отображение T^{-1}; 2) функциональный детерминант

$$\frac{D(f, g)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}$$

отличен от нуля во всех точках множества M *).

Регулярное отображение называется регулярным отображением класса C_k (или аналитического), если функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются функциями класса C_k (или аналитическими функциями).

Теорема VIII. *Если отображение T регулярно на множестве M, то*: 1) *обратное отображение T^{-1} регулярно на множестве M^*, являющемся образом множества K, и в случае, когда данное отображение T принадлежит классу C_k (аналитическому классу), отображение T^{-1} также принадлежит классу C_k (аналитическому классу)*; 2) *точки множества M, являющиеся отображением внутренних точек множества M, являются внутренними точками M^**; 3) *точки множества M^*, являющиеся отображением граничных точек множества M, являются граничными.*

Доказательство этой теоремы, которое мы опускаем **) (см. [59] [60]), опирается на теорему о неявных функциях. В частности, тот факт, что у обратного отображения $u = \widetilde{f}(x, y)$, $v = \widetilde{g}(x, y)$ функциональный детерминант также отличен от нуля, следует из того, что в силу формулы (7) § 4 дополнения мы имеем

$$\frac{D(\widetilde{f}, \widetilde{g})}{D(x, y)} = \frac{1}{\dfrac{D(f, g)}{D(u, v)}}.$$

Замечание I. Пусть отображение T, заданное функциями вида (1), определено во всех точках замкнутой области $\bar{H}$, но регулярно только во внутренних точках H (и следовательно, на границе H либо может нарушаться взаимная однозначность отображения, либо функциональный детерминант может обращаться в нуль). Тогда, очевидно, утверждение 2) остается справедливым во внутренних точках H.

Замечание II. При регулярном отображении класса C_k (аналитического класса) гладкие дуги класса $C_{k'}$, $k' \leqslant k$ (аналитического класса), отображаются в гладкие дуги того же класса.

2. Криволинейные координаты. С интерпретацией системы функций (1) как отображения T некоторого множества M плоскости (u, v) на множество M^* плоскости (x, y) тесно связана другая интерпретация этих функций — как *преобразования к криволинейной системе координат.*

Пусть

$$u = \widetilde{f}(x, y), \qquad v = \widetilde{g}(x, y) \tag{2}$$

— функции, обратные функциям (1).

Очевидно, каждой точке m^* (x, y) множества M^* плоскости (x, y) соответствует пара чисел u, v, где u, v — декартовы координаты той точки m плоскости (u, v), которая отображается в точку m^* (т. е. прообраза точки m^*).

---

*) Если на некотором множестве M заданы функции вида (1) и во всех точках этого множества $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$, то отсюда еще не следует, что отображение множества M на его образ M^* взаимно однозначно.

**) Это свойство в силу того, что регулярное отображение является топологическим, очевидно, непосредственно следует из теоремы Брауэра.

Числа u и v являются *криволинейными координатами* точки m^* (x, y). Рассматривая u и v как криволинейные координаты точек m^* (x, y) множества M^*, мы будем говорить, что уравнения (1) определяют на множестве M^* регулярное *преобразование координат* (класса k или аналитического класса в зависимости от того, какому классу принадлежат функции (1)). Выражения (1) будем называть «формулами преобразования», детерминант D — детерминантом (якобианом) преобразования (отображения). Прямые плоскости (u, v) : $u = C$, $v = C$, отображаются на плоскость (x, y) в кривые, параметрическими уравнениями которых являются соответственно:

$$x = f(C, v), \qquad y = g(C, v), \tag{3}$$

$$x = f(u, C), \qquad y = g(u, C) \tag{4}$$

(u, v — параметры). Эти кривые — координатные линии криволинейной системы координат.

В силу взаимной однозначности регулярного отображения T через каждую точку рассматриваемого множества M^* проходит одна и только одна кривая (3) и одна и только одна кривая (4).

Систему координат u, v, получающуюся путем регулярного преобразования (1), мы будем также называть *регулярной* криволинейной системой координат *).

3. Преобразование компонент вектора при регулярном отображении. Контравариантный вектор. Преобразование касательного вектора. Пусть, как и раньше, функции $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ дают регулярное отображение T некоторой области U плоскости (u, v) на некоторую область G плоскости (x, y) (x, y и u, v — декартовы координаты).

Пусть в некоторой точке $\widetilde{P}_0$ (u_0, v_0) задан вектор $\widetilde{v}$ с компонентами U, V. Предположим, что в точке P_0 плоскости (x, y), являющейся отображением точки $\widetilde{P}_0$ ($P_0 = T(\widetilde{P}_0)$), задан вектор v с компонентами X, Y, где

$$X = f'_u(u_0, v_0)\, U + f'_v(u_0, v_0)\, U, \qquad Y = g'_u(u_0, v_0)\, U + g'_v(u_0, v_0)\, U. \tag{5}$$

Вектор v мы будем считать соответствующим вектору $\widetilde{v}$ по отображению T. Мы будем также говорить, что при отображении T *компоненты вектора* $\widetilde{v}$ *преобразуются согласно формулам* (5).

Если рассматривать u и v как криволинейные координаты точек плоскости (x, y) и если $u = \widetilde{f}(x, y)$, $v = \widetilde{g}(x, y)$ — функции, обратные функциям (1), то U и V будут компонентами вектора v в криволинейной системе координат и при этом

$$U = \widetilde{f}'_x(x_0, y_0)\, X + \widetilde{f}'_y(x_0, y_0)\, Y, \qquad V = \widetilde{g}'_x(x_0, y_0)\, X + \widetilde{g}'_y(x_0, y_0)\, Y. \tag{6}$$

(Формулы (6) полностью симметричны с формулами (5).)

Рассмотрим в плоскости (u, v) гладкую простую дугу $\widetilde{l}$ ($u = \widetilde{\varphi}(t)$, $v = \widetilde{\psi}(t)$). Покажем, что при регулярном отображении T касательный вектор к этой дуге преобразуется согласно формулам (5) (т. е. касательный вектор является контравариантным вектором). Действительно, при отображении T дуга $\widetilde{l}$, очевидно, отображается на плоскость (x, y) в гладкую простую дугу:

$$x = f(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)) = \varphi(t), \qquad y = g(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)) = \psi(t).$$

Пусть $\widetilde{P}_0(u_0, v_0)$ — точка дуги $\widetilde{l}$, соответствующая на этой дуге некоторому значению $t = t_0$, так что $u_0 = \varphi(t_0)$, $v_0 = \psi(t_0)$. Касательный вектор в этой точке имеет компоненты $\widetilde{\varphi}'(t_0)$, $\widetilde{\psi}'(t_0)$. На плоскости (x, y) в точке P_0 дуги l, являющейся отображением точки $\widetilde{P}_0$ ($P_0 = T(\widetilde{P}_0)$), касательный вектор к дуге l имеет, очевидно, компоненты

$$\varphi'(t_0) = f'_u(u_0, v_0)\, \widetilde{\varphi}'(t_0) + f'_v(u_0, v_0)\, \widetilde{\psi}'(t_0),$$

$$\psi'(t_0) = g'_u(u_0, v_0)\, \widetilde{\varphi}'(t_0) + g'_v(u_0, v_0)\, \widetilde{\psi}'(t_0),$$

т. е. компоненты касательного вектора преобразуются согласно формулам (6).

*) Термин «криволинейные координаты» употребляется не только в случае *регулярной* системы координат, но также и в более общем случае: так, например, мы говорим о «полярных координатах», хотя полярные координаты не являются регулярной системой. Отметим, однако, что в случае полярных координат отображение части плоскости (φ, ρ), $0 < \varphi < 2\pi$, $\rho > \rho_0$, $\rho_0 > 0$, на соответствующее множество плоскости (x, y) является регулярным.

4. Изменение угла между векторами при регулярном отображении. Роль якобиана преобразования. Пусть в точке P_0 плоскости (x, y) даны два вектора: вектор $\widetilde{v}_1$ с компонентами U_1, V_1 и вектор $\widetilde{v}_2$ с компонентами U_2, V_2.

Синус угла $\widetilde{\alpha}$ между $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ (порядок не безразличен) согласно п. 5 § 4 выражается формулой

$$\sin\widetilde{\alpha}=\frac{U_1V_2-V_1U_2}{\sqrt{U_1^2+V_1^2}\sqrt{U_2^2+V_2^2}}.$$

Пусть векторами на плоскости (x, y), соответствующими по отображению T векторам $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$, являются: 1) вектор v_1 с компонентами X_1, Y_1; 2) вектор v_2 с компонентами X_2, Y_2.

Синус угла α между v_1 и v_2 выражается формулой

$$\sin\alpha=\frac{X_1Y_2-X_2Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}.$$

Заменяя X_1Y_1 и X_2Y_2 их выражениями через U_1, V_1, U_2 и V_2 по формуле (5), мы получим после элементарных преобразований

$$\sin\alpha=\frac{D_0\sin\widetilde{\alpha}}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}},$$

где D_0 — якобиан преобразования T в точке P_0.

Так как $D_0\neq 0$, то отсюда, очевидно, вытекает следующее предложение: всегда считаем плоскости (u, v) и (x, y) ориентированными и при этом согласованно, см. п. 5 § 2 дополнения.

Лемма 1. *Если угол между вектором $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ отличен от нуля, то и угол между соответствующими им векторами $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ также отличен от нуля и при этом*: а) *в случае, когда $D_0<0$, знак угла α совпадает со знаком угла $\widetilde{\alpha}$ (так как знак $\sin\alpha$ совпадает со знаком $\sin\widetilde{\alpha}$)*; б) *в случае, когда $D_0<0$, знак угла α противоположен знаку угла $\widetilde{\alpha}$ (так как $\sin\alpha$ в этом случае противоположен знаку $\sin\widetilde{\alpha}$).*

Мы приведем еще без доказательства следующее предложение, по своему содержанию связанное с предыдущей леммой, опирающееся на введенные понятия топологического отображения, сохраняющего и меняющего ориентацию.

Лемма 2. *Если дано регулярное отображение T односвязной области H плоскости (u, v) на односвязную область G плоскости (x, y), то в случае, когда $D>0$, отображение сохраняет ориентацию, а в случае, когда $D_0<0$, отображение T является отображением, меняющим ориентацию* *).

5. Использование регулярного отображения при рассмотрении областей, характеризующих различные стороны простой гладкой дуги. Как было указано в п. 2 § 3, области, характеризующие различные стороны простой дуги, могут быть введены с помощью функций $x=\varphi(s, t)$, $y=\psi(s, t)$, определяющих топологическое отображение прямоугольника плоскости (s, t) со сторонами, параллельными осям t и s на некоторую содержащую дугу l замкнутую область $\overline{G}$ плоскости (x, y).

Предположим, что простая дуга l, параметрические уравнения которой $x=f(s)$, $y=g(s)$, $s\in[a, b]$, является *гладкой*, так что функции $f(s)$ и $g(s)$ являются функциями класса C_1. В этом случае часто бывает весьма естественно в качестве функций, определяющих отображение прямоугольной плоскости (s, t), рассматривать функции, определяющие *регулярное отображение прямоугольника* σ.

Таким образом, мы будем рассматривать функции $x=\varphi(s, t)$ и $y=\psi(s, t)$, обладающие следующими свойствами:

1) Они определены в прямоугольнике σ, заданном неравенствами $a\leqslant s\leqslant b$, $|t|\leqslant\alpha$ и являются в этом прямоугольнике функциями класса C_1;

---

*) Отметим, что требование односвязности здесь является существенным. Так, например, в случае инверсии $\rho=1/\rho_1$ якобиан отрицателен ($D=-1$), но всякая окружность C' с центром в начале, обходящаяся в положительном направлении, отображается в окружность с центром в начале, также обходящуюся в положительном направлении. Однако в этом случае регулярное отображение не определено в начале координат. Если же рассматривать простую замкнутую кривую, не содержащую начала координат внутри, то в согласии с приведенной в тексте леммой при отображении $\rho=1/\rho_1$ направление ее обхода меняется на обратное.

2) они дают топологическое отображение T прямоугольника σ на некоторую замкнутую область $\bar{G}$ плоскости (x, y), причем $\varphi(s, 0) = f(s)$, $\psi(s, 0) = g(s)$, т. е. отрезок прямой $t = 0$, соответствующий значениям $s \in [a, b]$, отображается в дугу l;

3) ни в одной точке прямоугольника σ якобиан $D = \dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)}$ не обращается в нуль. Мы будем для определенности предполагать, что $D > 0$ (случай, когда $D < 0$, рассматривается полностью аналогично).

Как уже указывалось, значения s и t можно рассматривать как криволинейные координаты в области $\bar{G}$ плоскости (x, y). Криволинейными координатными линиями $t = \text{const}$ являются гладкие дуги

$$x = \varphi(s, C), \quad y = \psi(s, C), \tag{7}$$

причем при $C = 0$ мы получаем дугу l; криволинейными координатными линиями $s = \text{const}$ являются дуги

$$x = \varphi(C, t), \quad y = \psi(C, t). \tag{8}$$

В силу того, что по предположению $D > 0$, угол между координатными линиями (7) и координатными линиями (8) в их общих точках положителен, а рассматриваемое отображение T сохраняет ориентацию. Тогда в согласии с п. 2 § 3 мы будем считать, что точки области $\bar{G}$, для которых $t > 0$, характеризуют положительную сторону дуги l, точки области $\bar{G}$, для которых $t < 0$,— отрицательную сторону дуги l.

6. Один способ введения функций $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$. В ряде вопросов функции $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$, обладающие свойствами 1) — 3) п. 5, естественным образом вводятся следующим путем. Предполагая по-прежнему, что $x = f(s)$, $y = g(s)$, $s \in [a, b]$, — параметрические уравнения дуги l, рассмотрим функции $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$, определенные при всех значениях s и t:

$$s \in [a, b], \quad |t| \leqslant \tau \quad (\tau > 0), \tag{9}$$

и удовлетворяющие следующим условиям:

а) Они однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные при всех указанных значениях s и t;

б) $$\varphi(s, 0) \equiv f(s), \qquad \psi(s, 0) \equiv g(s);$$

в) $$D_0 = \begin{vmatrix} \varphi'_s(s, 0) & \varphi'_t(s, 0) \\ \psi'_s(s, 0) & \psi'_t(s, 0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Будем предполагать для определенности, что $D_0 > 0$ (случай $D_0 < 0$ исследуется полностью аналогично). Очевидно, непосредственно нельзя утверждать, что функции, удовлетворяющие условиям а), б), в), одновременно удовлетворяют условиям 1), 2), 3) п. 5 при всех тех значениях s и t, при которых они определены. Действительно, при условиях а), б), в) функции $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$ задают семейство гладких дуг

$$x = \varphi(C, t) \qquad y = \psi(C, t), \tag{10}$$

которые в общих с дугой l точках (соответствующих $t = 0$) не касаются этой дуги. Но при $t \neq 0$, $|t| < \tau$, кривые (10), соответствующие различным значениям C, вообще говоря, могут пересекаться. Тогда, очевидно, условие 2) заведомо не будет выполнено. Однако можно показать, что при выполнении условий а) — в) мы всегда можем указать такое $\alpha \in [0, \tau]$, что при всех $|t| \leqslant \alpha$ кривые (10) не пересекаются. Именно, имеет место

Лемма 3. *Если функции*

$$x = \varphi(s, t), \qquad y = \psi(s, t) \tag{11}$$

удовлетворяют условиям а)—в), то существует положительное α, $\alpha < \tau$, *такое, что при всех* s *и* t:

$$s \in [a, b], \quad |t| \leqslant \alpha, \tag{12}$$

эти функции удовлетворяют условиям 1) — 3), *т. е. дают регулярное отображение прямоугольника, определенного неравенствами* (12) *на замкнутую область* $\bar{g}$, *ограниченную простой замкнутой кривой, содержащей внутри все точки дуги* l *кроме концов* (*лежащих на границе* g). *При этом отрезок прямой* $t = 0$, *соответствующий значениям* $s \in [a, b]$, *отображается в данную дугу* l.

Доказательство. В силу условия в) всегда можно указать такие $\alpha > 0$, чтобы при всех $s \in [a, b]$, $|t| \leqslant \alpha$ функциональный детерминант функций (11) был

отличен от нуля при всех $|t| \leqslant \alpha$. Для доказательства утверждения леммы остается показать, что при всех достаточно малых t отображение, заданное функциями (11), является топологическим, т. е. взаимно однозначным. В силу однозначности функций $\varphi(s, t)$ и $\psi(s, t)$ для этого достаточно показать, что при надлежащем выборе α любые две различные точки $M'(s', t')$ и $M''(s'', t'')$, у которых $s' \in [a, b]$, $s'' \in [a, b]$, $|t'| < \alpha$, $|t''| < \alpha$, отображаются в две различные точки $M'(x', y')$ и $M''(x'', y'')$, где

$$x' = \varphi(s', t'), \qquad y' = \psi(t', s'),$$
$$x'' = \varphi(s'', t''), \qquad y'' = \psi(t'', s'').$$

Переходя к доказательству этого последнего утверждения, заметим предварительно, что в силу условия в) ($D_0 > 0$) всегда можно указать столь малое $\Delta > 0$ и $\alpha_0 > 0$, чтобы мы имели

$$D = \begin{vmatrix} \varphi'_s(s_1, t_1) & \psi'_s(s_2, t_2) \\ \varphi'_t(s_3, t_3) & \psi'_t(s_4, t_4) \end{vmatrix} > 0 \tag{13}$$

при условии

$$|s_i - s_k| < \Delta \qquad (i = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, 3, 4),$$
$$|t_j| < \alpha_0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{14}$$

какие бы s_i и t_j, удовлетворяющие этим неравенствам, мы ни взяли.

Доказательство будем вести от противного: предположим, что при любом $\alpha \in (0, \alpha_0)$ существуют точки $M'(s', t')$ и $M''(s'', t'')$ такие, что $|t'| < \alpha$, $|t''| < \alpha$, при этом либо $s' \neq s''$, либо $t' \neq t''$, отображающиеся в одну и ту же точку плоскости (x, y). Это означает, что выполняются равенства

$$\varphi(s', t') = \varphi(s'', t''), \qquad \psi(s', t') = \psi(s'', t''), \tag{15}$$

где либо $s' \neq s''$, либо $t' \neq t''$ и $|t'| < \alpha$, $|t''| < \alpha$. Рассмотрим отдельно случай, когда $|s' - s''| < \Delta$, и случай, когда $|s' - s''| > \Delta$, где Δ — величина, фигурирующая в неравенствах (14). Пусть сначала $|s' - s''| < \Delta$. Делая в равенствах (15) элементарные преобразования и применяя теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \varphi'_s(\xi_1, \eta_1)(s' - s'') + \varphi'_t(\xi_2, \eta_2)(t' - t'') &= 0, \\ \psi'_s(\xi_3, \eta_3)(s' - s'') + \psi'_t(\xi_3, \eta_3)(t' - t'') &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $s' < \xi_i < s''$, $t' < \eta_i < t''$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $|t'| < \alpha$, $|t''| < \alpha$. Из неравенства (14) и условия (13) мы имеем $|\xi_i - \xi_k| < \Delta$, $|u_j| < \alpha$, и, следовательно, детерминант

$$D = \begin{vmatrix} \varphi'_s(\xi_1, \eta_1) & \psi'_s(\xi_2, \eta_2) \\ \varphi'_t(\xi_3, \eta_3) & \psi'_t(\xi_4, \eta_4) \end{vmatrix} \neq 0$$

по самому выбору Δ и α.

Но тогда равенства (16) возможны, очевидно, лишь в случае, когда $s' = s''$ и $t' = t''$, что по предположению не имеет места. Следовательно, в случае, когда $(s' - s'') < \Delta$, равенства (15) невозможны. Предположим теперь, что при любом сколь угодно малом α найдутся значения s', t' и s'', t'' такие, что $|s' - s''| > \Delta$ и $|t'| < \alpha$, $|t''| < \alpha$, при которых равенства (15) выполняются. Тогда, как нетрудно видеть, должна существовать последовательность пар s'_k, t'_k (s''_k, t''_k) такая, что $|s'_k - s''_k| \geqslant \Delta$ и что

$$\lim_{k \to \infty} t'_k = 0, \qquad \lim_{k \to \infty} t''_k = 0,$$

и при всех k

$$\varphi(s'_k, t'_k) = \varphi(s''_k, t''_k); \qquad \psi(s'_k, t'_k) = \psi(s''_k, t''_k).$$

Мы всегда можем предположить, кроме того, что s'_k, s''_k при $k \to \infty$ стремятся к определенным пределам s'_0 и s''_0 (в противном случае из последовательностей s'_k и s''_k мы всегда могли бы взять подпоследовательности, обладающие этим свойством). При этом так как $|s'_k - s''_k| \geqslant \Delta$ при любом k, то и $|s'_0 - s''_0| \geqslant \Delta$. Кроме того, мы должны иметь в силу непрерывности функций $\varphi(t, s)$, $\psi(t, s)$ и в силу соотношений б):

$$\varphi(s'_0, 0) = f(s'_0) = \varphi(s''_0, 0) = f(s''_0), \qquad \psi(s'_0, 0) = g(s'_0) = \psi(s''_0, 0) = g(s''_0).$$

Но так как l — простая дуга, то ни при каких s'_0, s''_0 таких, что $s'_0 \neq s''_0$, мы не можем иметь одновременно

$$f(s'_0) = f(s''_0), \qquad g(s_0) = g(s''_0).$$

Таким образом, мы приходим к противоречию и, следовательно, при некотором выборе $\alpha > 0$ функции (11) дают регулярное отображение области прямоугольника $s \in [a, b]$, $|t| \leqslant \alpha$ на некоторую замкнутую область $\bar{g}$ плоскости (x, y). При этом образом границы прямоугольника является граница области $\bar{g}$. Эта граница является простой замкнутой кривой. Отрезок прямой $t = 0$, $s \in [a, b]$ отображается в данную простую дугу l. Таким образом, лемма доказана.

В частности, из этой леммы непосредственно следует, что для простой дуги класса C_2 *) функции

$$x = f(s) + tg'(s), \qquad y = g(s) - tf'(s)$$

(в этом случае дугами $s = \text{const}$ являются отрезки нормалей к дуге l) при достаточно малых t ($|t| < \alpha$, $\alpha > 0$) удовлетворяют условиям 1) — 3).

7. Пересечение двух гладких дуг и пересечения гладкой дуги с гладкой и кусочно-гладкой простой замкнутой кривой. Пусть гладкая простая дуга l:

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad s \in [a, b],$$

имеет с простой гладкой дугой λ общую точку M_0, отличную от концов обеих дуг l и λ. Пусть

$$x = F(u), \qquad y = G(u), \qquad u \in [a_1, b_1]$$

— параметрические уравнения дуги λ. Предположим, что точка M_0 соответствует значению параметра $s_0 \in (a, b)$ и значению $u_0 \in (a_1, b_1)$. В силу леммы 1 § 5 дополнения при всех достаточно близких к u_0 значениях u дуга λ кроме точки M_0 не будет уже больше иметь других общих точек с дугой l. Предположим, кроме того, что заданы какие-нибудь функции $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$, характеризующие разные стороны дуг l, для которых выполняются условия 1) — 3) и 5.

Лемма 4. *Если в общей точке M_0 дуг l и λ, отличной от концов этих дуг, угол между дугой l и дугой λ положителен (отрицателен), то дуга λ переходит с отрицательной (положительной) стороны дуги l на положительную (отрицательную).*

Доказательство. Пусть α — угол между дугой l и дугой λ в точке M_0. Предположим, что $\alpha > 0$ (случай $\alpha < 0$ рассматривается аналогично). Тогда

$$\sin\alpha = \frac{f'(s_0)\,G'(u_0) - g'(s_0)\,F'(u_0)}{\sqrt{f'(s_0)^2 + g'(s_0)^2}\,\sqrt{F'(u_0)^2 + G'(u_0)^2}} > 0.$$

При всех достаточно близких к u_0 значениях u каждой точке дуги λ соответствует пара значений s и t, удовлетворяющих системе уравнений

$$\varphi(s, t) = F(u), \qquad \psi(s, t) = G(u). \tag{17}$$

В силу того, что M_0 — общая точка дуг l и λ, эти уравнения удовлетворяются при значениях $t = 0$, $s = s_0$, $u = u_0$. Из уравнений (17) t и s могут быть найдены как функции u. Для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что в точке M_0, т. е. при $u = u_0$, $\dfrac{dt}{du} > 0$. Но мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi'_s(s, t)\frac{ds}{du} + \varphi'_t(s, t)\frac{dt}{du} &= F'(u), \\ \psi'_s(s, t)\frac{ds}{du} + \psi'_t(s, t)\frac{dt}{du} &= G'(u). \end{aligned} \tag{18}$$

Полагая в этих уравнениях $t = 0$, $s = s_0$, $u = u_0$ и принимая во внимание, что в силу условий, которым удовлетворяют функции $\varphi(s, t)$, $\psi(s, t)$, имеем

$$\varphi'_s(s, 0) = f'(s), \qquad \psi'_s(s, 0) = g'(s).$$

---

*) Такие дуги в основном рассматриваются в тексте. В случае, когда функции $f(s)$ и $g(s)$ имеют производные первого порядка и не имеют производных второго порядка, функции (17) не удовлетворяют условиям а) — в). Тогда можно вместо $f'(s)$ и $g'(s)$ взять тригонометрические многочлены $P_1(s)$ и $P_2(s)$, приближающие эти функции с любой данной степенью точности, и тогда функции

$$x = f(s) + tP_2(s), \quad y = g(s) - tP_1(s)$$

будут удовлетворять условиям 1) — 3).

Мы получим из уравнений (18)

$$\left(\frac{dt}{du}\right)_{u=u_0} = \frac{f'(s_0)\,G'(u_0) - g'(s_0)\,F'(u_0)}{D(s_0, t_0)} > 0,$$

что и доказывает лемму.

Пусть C — простая замкнутая кривая, из которой можно выделить простую гладкую дугу l. Это, очевидно, всегда возможно, когда кривая является гладкой или кусочно-гладкой. Однако возможен также и более общий случай, когда кривая C не является ни гладкой, ни кусочно-гладкой и тем не менее из нее можно выделить гладкую дугу (например, когда кривая C состоит из одной гладкой и из одной негладкой дуги, не являющейся кусочно-гладкой дугой).

Пусть λ — простая гладкая дуга и

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad u \in [a, b]$$

— ее параметрическое представление. Предположим, что дуга λ при значении $u = u_0$ пересекает кривую C в точке M_0, являющейся точкой дуги l, отличной от ее концов. Будем считать положительным направлением обхода кривой направление обхода, установленное так, как указано в п. 5 § 2, и на дуге l положительным направлением будем считать направление, индуцированное положительным обходом кривой C.

Из леммы 3 и предложения III и IV п. 3 § 3 дополнения вытекает следующая

Лемма 5. *Если в точке M_0 угол между дугой l и дугой s положителен, то при возрастании u (от значений $u < u_0$ к значениям $u > u_0$) дуга λ входит внутрь кривой C, а если угол между дугой l и λ отрицателен, то при возрастании u дуга λ выходит из кривой C.*

Обратно: *Если дуга λ, пересекая дугу l в точке M_0, при возрастании u входит внутрь кривой C, то угол между дугой λ и дугой l положителен, а если дуга λ при возрастании u выходит из кривой C, то угол между дугой λ и дугой l отрицателен.*

Предположим теперь, что рассматриваемая простая замкнутая кривая является кусочно-гладкой. Пусть l_1 и l_2 — две простые гладкие дуги, входящие в состав кривой C_1 и имеющие общий конец O. Считая положительным направлением на дугах l_1 и l_2 направление, индуцированное положительным обходом кривой C, предположим, что угол между дугами l_1 и l_2 в точке O отличен от нуля и от π. Пусть простая гладкая дуга λ_1, параметрическое уравнение которой

$$x = f(u), \qquad y = g(u),$$

имеет общую с кривой C точку O. Предположим, что в точке O оба угла — угол между дугой l_1 и λ и угол между дугой l_2 и λ — положительны. Имеет место следующая лемма, доказательство которой опускается.

Лемма 6. *Если угол между дугой l_1 и λ и между дугой λ и l_2 положителен, то в точке O дуга λ при возрастании u входит внутрь простой замкнутой кривой C.*

Доказательство этой леммы может быть проведено путем построения для каждой из этих дуг надлежащим образом выбранных функций, удовлетворяющих условиям 1)—3) п. 5.

8. Два предложения о построении функций по заданным условиям. В настоящем пункте приводятся без доказательства два предложения о построении функций. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две точки плоскости x, y, причем $x_1 < x_2$. Пусть k_1 и k_2 — два произвольных числа.

Лемма 7. *При любом $h > 0$ существует функция $y = f(x)$, определенная при значениях $x \in [x_1, x_2]$, являющаяся функцией класса C_1 и удовлетворяющая следующим условиям:* а) $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f'(x_1) = k_1$, $f'(x_2) = k_2$; б) *в случае, когда $y_1 \leqslant y_2$, $y_1 - h \leqslant f(x) \leqslant y_2 + h$, а в случае, когда $y_1 > y_2$, $y_1 + h \geqslant f(x) \geqslant y_2 - h$* (рис. 338).

Пусть $\tau(x)$ — функция, определенная на сегменте $[x_1, x_2]$, являющаяся на этом сегменте функцией класса C_1. Пусть y_2 — величина, удовлетворяющая неравенству $y_2 < \tau(x)$ при всех $x \in [x_1, x_2]$, и k_2 — произвольная отрицательная величина.

Лемма 8. *Существует однозначная функция $y = f(x)$, определенная при значениях $x \in [x_1, x_2]$, являющаяся функцией класса C_1 и удовлетворяющая следующим условиям:*

а) $f(x_1) = \tau(x_1)$, $\quad f(x_2) = y_2$;

б) $f'(x_1) = k_2 + \tau'(x_1)$, $f'(x_2) = k_2$;

в) *при всех $x \in (x_1, x_2)$ $y_2 < f(x) < \tau(x)$* (рис. 339).

Лемма 9. *Пусть g — замкнутая область плоскости (t, x), определенная неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant \varphi(x)$* (рис. 340, *а*), *и $\overline{g}'$ — замкнутая область плоскости (t', x'), определенная неравенствами $a' \leqslant x' \leqslant b'$, $0 \leqslant t' \leqslant \psi(x')$* (рис. 340, *б*).

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — однозначные и непрерывные функции своих аргументов. Предположим, что:

1) *Между точками отрезков $x \in [a, b]$ и $x' \in [a', b']$ (т. е. между точками отрезков AB и $A'B'$ на рис. 340, а и б) установлено топологическое соответствие,*

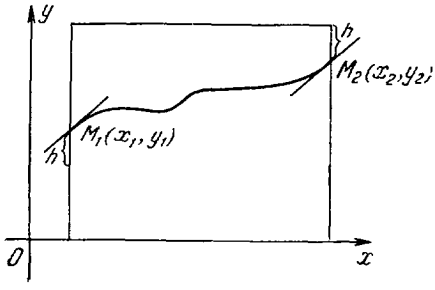


Рис. 338.

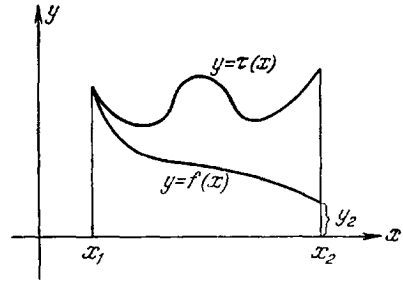


Рис. 339.

заданное функцией $x' = \gamma(x)$, так что x может быть однозначно разрешено относительно x', $x = \gamma^{-1}(x')$ ($\gamma(x)$ и $\gamma^{-1}(x')$ — однозначные и непрерывные функции своих аргументов и при этом $\gamma(a) = a'$, $\gamma(b) = b'$).

2) *Между точками отрезков прямых $x = a$ и $x' = a'$, определенными соответственно неравенствами: $0 \leqslant t \leqslant \varphi(a)$ и $0 \leqslant t' \leqslant \psi(a')$ (т. е. между точками отрезков AA_1 и $A'A_1'$ на рис. 340, а, б), установлено топологическое соответствие, заданное функцией $t' = f_1(t)$, так что t может быть однозначно разрешено относительно*

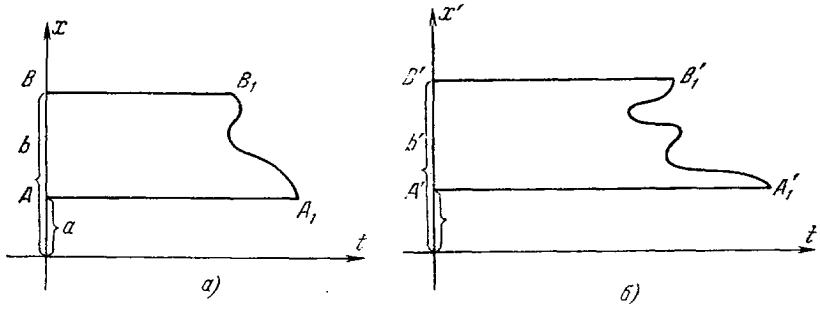


Рис. 340.

t', $t = f_1^{-1}(t)$ (обе функции $f_1(t)$, $f_1^{-1}(t')$ непрерывны и однозначны и при этом $f_1(0) = 0$, $f_1(\varphi(a)) = \psi(a')$).

3) *Между точками отрезков прямых $x = b$ и $x' = b'$, определенными соответственно неравенствами $0 \leqslant t \leqslant \varphi(b)$, $0 \leqslant t' \leqslant \psi(b')$ (т. е. между точками отрезков BB_1 и $B'B_1'$) установлено топологическое соответствие, заданное функцией $t' = f_2(t)$ так, что t может быть однозначно разрешено относительно t', $t = f_2^{-1}(t')$ (обе функции $f_2(t)$, $f_2^{-1}(t')$ непрерывны и однозначны и при этом*

$$f_2(0) = 0, \qquad f_2(\varphi(b)) = \psi(b')).$$

Тогда существует топологическое отображение замкнутых областей $\bar{g}$ и $\bar{g}'$ друг на друга, при котором заданное в 1), 2) и 3) соответствие между указанными там отрезками сохраняется.

Доказательство. Укажем пример функций, осуществляющих указанное в лемме отображение. Для этого рассмотрим, например, функции

$$x' = \gamma(x),$$

$$t' = \psi(\gamma(x)) \left\{ \frac{f_1\left(\frac{t}{\varphi(x)}\varphi(a)\right)}{\psi(a')} + \frac{x-a}{b-a}\left[\frac{f_2\left(\frac{t}{\varphi(x)}\varphi(b)\right)}{\psi(b')} - \frac{f_1\left(\frac{t}{\varphi(x)}\varphi(a)\right)}{\psi(a')} \right] \right\} =$$

$$= F(t, x) \quad (19)$$

$$(t \in [0, \varphi(x)], \qquad x \in [a, b]\ .$$

Эти функции однозначны и непрерывны и задают отображение области $\bar{g}$ на $\bar{g}'$ Покажем, что отображение, заданное этими функциями, взаимно однозначно. Для доказательства предположим противное, т. е. что двум различным точкам (x_1, t_1) и (x_2, t_2) соответствует одна и та же точка x_0', t_0'. Но в силу свойств функции $\gamma(x)$ (см. 1)) два разных значения x_1 и x_2 не могут соответствовать одному и тому же значению x_0 так, что непременно должно быть $x_1 = x_2$. Тогда так как по предположению (x_1, t_1) и (x_2, t_2) — две различные точки, то непременно $t_1 \neq t_2$. Предположим для определенности, что $t_2 > t_1$. Таким образом, при некотором $x \in [a, b]$ должно выполняться равенство

$$F(t_1, x) = F(t_2, x). \tag{20}$$

После элементарных преобразований мы получаем из (19) равенство

$$\frac{b-x}{x-a} = -\frac{\psi(a')\left[f_2\left(\frac{t_2}{\varphi(x)}\varphi(b)\right) - f_2\left(\frac{t_1}{\varphi(x)}\varphi(b)\right)\right]}{\psi(b')\left[f_1\left(\frac{t_2}{\varphi(x)}\varphi(a)\right) - f_1\left(\frac{t_1}{\varphi(x)}\varphi(b)\right)\right]}. \tag{21}$$

Левая часть этого равенства, очевидно, положительна (так как $x \in [a, b]$). Кроме того, функции $f_1\left(\frac{t}{\varphi(x)}\varphi(a)\right)$ и $f_2\left(\frac{t}{\varphi(x)}\varphi(b)\right)$ являются возрастающими функциями (в противном случае отображения, заданные в 2) и 3), не были бы взаимно однозначными). Отсюда следует, что правая часть равенства (21) непременно отрицательна, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие доказывает, что функции (19) определяют топологическое отображение замкнутых областей $\bar{g}$ и $\bar{g}'$ друг на друга. Лемма доказана.

§ 7. Сфера в евклидовом пространстве

1. Окрестность точки сферы. Пусть в евклидовом пространстве E_3 с декартовыми координатами x, y, z дана сфера S радиуса r.

Окрестностью какой-либо точки P сферы будем называть пересечение окрестности точки P в пространстве E_3 со сферой S. После такого введения окрестностей на сфере мы, очевидно, можем, рассматривая множества на сфере, говорить о точках сгущения, о внутренних, граничных точках этого множества, о замкнутых, открытых множествах на сфере, в частности, об областях на сфере и т. д. Сфера компактна, т. е. на сфере всякая бесконечная последовательность точек имеет хотя бы одну точку сгущения. Вся сфера в целом является одновременно и областью, и замкнутым множеством.

В тексте используется так называемая «стереографическая проекция сферы». Опишем ее. Мы можем без ограничения общности считать, что центр рассматриваемой сферы S лежит в начале координат, так что уравнения сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Соединим прямой линией точку сферы $N(0, 0, r)$ («северный полюс» сферы) с любой отличной от N точкой P сферы. Точка пересечения P' такой прямой с плоскостью $z = 0$ («плоскостью экватора») называется стереографической проекцией точки P сферы S *на плоскость* экватора. Очевидно, каждая точка сферы, за исключением точки N, которая называется *центром проекции*, имеет стереографическую проекцию.

Обратно, если P' — какая-нибудь точка плоскости (x, y), то прямая, проведенная через точку P' этой плоскости и точку N сферы, пересечет сферу в одной только отличной от N точке P. Эта точка называется стереографической проекцией точки P' плоскости *на сферу*. Если через ξ и η обозначить декартовы координаты точки P' плоскости экватора, являющейся стереографической проекцией точки $P(x, y, z)$ сферы, то мы будем иметь

$$\xi = \frac{xr}{r-z}, \qquad \eta = \frac{yr}{r-z} \tag{1}$$

и, обратно,

$$x = \frac{2r^2\xi}{\xi^2+\eta^2+r^2}, \qquad y = \frac{2r^2\eta}{\xi^2+\eta^2+r^2}, \qquad z = \frac{(\xi^2+\eta^2-r^2)r}{\xi^2+\eta^2+r^2}. \tag{2}$$

Функции (1) при $z \neq r$ и функции (2) однозначны и непрерывны, и, следовательно, дают топологическое отображение сферы с выколотой точкой N на плоскость. Можно

рассматривать стереографические проекции точек сферы не на «экваториальную» плоскость, а на какую-либо другую плоскость, параллельную экваториальной. Очень часто рассматривается стереографическая проекция точек сферы на плоскость, параллельную плоскости экватора — касательную в точке сферы, диаметрально противоположной северному полюсу (центру проекций).

Уравнения (2) могут рассматриваться как параметрические уравнения сферы.

Если M — какое-нибудь множество на сфере и M' — множество на плоскости $z = 0$, состоящее из точек, являющихся стереографическими проекциями всевозможных точек M, то множество M' называется стереографической проекцией множества M на плоскость (x, y). Обратно, множество M является стереографической проекцией множества M' плоскости (x, y) на сфере S. Очевидно, стереографической проекцией внутренних точек M являются внутренние точки M', граничных точек M — граничные точки M' и обратно. Имеет место

Теорема IX. *Всякое множество M на сфере, отличное от множества всех точек сферы, гомеоморфно плоскому множеству.*

Доказательство. Пусть точка M_0 не принадлежит множеству M. Всегда можно координаты x, y, z в пространстве выбрать так, чтобы точка M_0 сферы была бы точкой с координатами $(z, 0, 0)$ (северным полюсом сферы), а тогда рассмотрение стереографической проекции сферы на плоскость, очевидно, доказывает теорему.

2. Простая дуга и простая замкнутая кривая на сфере. Простой дугой и простой замкнутой кривой на сфере S называется простая дуга и простая замкнутая кривая в пространстве, все точки которой принадлежат сфере s. Стереографическая проекция простой дуги и простой замкнутой кривой на сфере является соответственно простой дугой и простой замкнутой кривой на плоскости (и обратно). При этом имеют место следующие предложения.

Теорема X. *Простая дуга и простая замкнутая кривая на сфере нигде не плотны на сфере.*

Теорема XI. *Простая дуга не разбивает сферу (т. е. множество точек сферы без точек рассматриваемой дуги есть область).*

Теорема XII. *Простая замкнутая кривая определяет на сфере две области и является общей границей этих двух областей.*

Свойства сферы, сформулированные в последней теореме, топологически инвариантны, т. е. сохраняются при всех топологических отображениях сферы.

Поверхности, являющиеся топологическими образами сферы, называются поверхностями рода нуль (или односвязные поверхности). Только на таких поверхностях *всякая* простая замкнутая кривая определяет две области, являясь их общей границей.

3. Покрытие сферы и координаты на сфере. Перейдем к вопросу о введении координат на сфере. Введем сначала понятие *покрытия сферы*.

Под открытым конечным покрытием Σ сферы мы будем понимать конечную систему областей на сфере $G_1, G_2, \ldots, G_N$, обладающую следующими свойствами: 1) каждая из областей G_i отлична от всей сферы в целом; 2) каждая точка сферы принадлежит хотя бы одной из этих областей. Говоря о покрытии сферы, мы всегда будем подразумевать конечное покрытие и поэтому будем опускать слово конечное *).

Так как по определению покрытия каждая из входящих в него областей G_i отлична от всей сферы в целом, то, очевидно, каждая область G_i гомеоморфна плоской области. Во всякое покрытие входит не менее двух областей (если бы в покрытие входила одна область, то она должна была бы совпадать со всей сферой, что противоречит определению покрытия).

В настоящей книге часто используется следующее покрытие, состоящее из двух областей: одной областью является сфера с выколотой точкой M, а другой — некоторая область, содержащая точку M (в частности, могущая также быть сферой с одной выколотой, отличной от M точкой).

Пусть G — некоторая область заданного покрытия сферы; эта область может быть произвольной областью сферы, отличной от всей сферы. Мы будем говорить, что в области G задана регулярная локальная система координат u, v класса C_k (аналитического класса), если задано отображение T:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v) \tag{3}$$

*) Можно, очевидно, рассматривать не только конечные покрытия сферы, но также покрытия, состоящие из бесконечного числа областей. В силу теоремы Гейне — Бореля из всякого такого покрытия можно выделить конечное покрытие.

некоторой области H плоскости (u, v) на область G сферы, обладающее следующими свойствами: а) отображение T является топологическим отображением H на G; б) функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ являются функциями класса C_k или аналитического класса; в) ни в одной точке области H функциональные определители

$$D_1=\frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}, \qquad D_2=\frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}, \qquad D_3=\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

не равны одновременно нулю.

Уравнения (3) можно рассматривать как параметрические уравнения области G сферы.

Если во всех областях заданного покрытия сферы введены регулярные координаты класса C_k (или аналитические), то мы будем говорить, что задано координатное покрытие сферы *). Мы можем вводить различные системы локальных координат, выбирая различные покрытия и различные отображения типа (3).

Рассмотрим теперь две области G и $\widetilde{G}$, в которых введены координаты соответственно u, v и $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, и предположим, что пересечение $W=G\cap\widetilde{G}$ областей G и $\widetilde{G}$ не пусто (области G и $\widetilde{G}$ могут быть областями одного и того же или различных покрытий).

Координаты u, v введены в области G с помощью формул (3), а в области $\widetilde{G}$ — с помощью формул

$$x=\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \qquad y=\widetilde{\psi}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \qquad y=\widetilde{\chi}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \tag{4}$$

дающих отображение $\widetilde{T}$ области $\widetilde{H}$ плоскости $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ на область $\widetilde{G}$ сферы. Функции $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\chi}$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции φ, ψ, χ. В частности, хотя бы один из функциональных детерминантов функций (4): $\widetilde{D}_1$, $\widetilde{D}_2$, $\widetilde{D}_3$, не обращается в нуль.

Пусть M — произвольная точка области W сферы. Справедлива

Лемма 1. *Если в точке M детерминант $D_1\neq 0$ (или соответственно $D_2\neq 0$, или $D_3\neq 0$), то в этой точке $\widetilde{D}_1\neq 0$ (или соответственно $\widetilde{D}_2\neq 0$, или $\widetilde{D}_3\neq 0$).*

Доказательство. Заметим прежде всего, что если

$$F(x, y, z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

— уравнение сферы в декартовых координатах, то, очевидно,

$$F(\varphi, \psi, \chi)\equiv 0, \qquad F(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\chi})\equiv 0. \tag{5}$$

Отсюда

$$F'_x\varphi'_u+F'_y\psi'_u+F'_z\chi'_u=0, \qquad F'_x\varphi'_v+F'_y\psi'_v+F'_z\chi_v=0 \tag{6}$$

и

$$F'_x\widetilde{\varphi}'_{\widetilde{u}}+F'_y\widetilde{\psi}'_{\widetilde{u}}+F'_z\widetilde{\chi}'_{\widetilde{u}}=0, \quad F'_x\widetilde{\varphi}'_{\widetilde{v}}+F'_y\widetilde{\psi}'_{\widetilde{v}}+F'_z\widetilde{\chi}_{\widetilde{v}}=0. \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) вытекает соответственно, что

$$F'_x:F'_y:F'_z=D_1:-D_2:D_3 \tag{8}$$

и

$$F'_x:F'_y:F'_z=\widetilde{D}_1:-\widetilde{D}_2:\widetilde{D}_3, \tag{9}$$

откуда и следует, принимая во внимание, что

$$(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)\neq 0$$

— утверждение леммы.

Рассмотрим область W, являющуюся общей частью областей G и $\widetilde{G}$. Каждой точке M области W соответствуют как координаты u, v, так и координаты $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$. Поставив

*) При введении на сфере координатного покрытия можно определить «окрестности» точки сферы как отображение некоторой окрестности точки Q плоскости (u, v) локальных координат. Такое определение окрестности точки на сфере по существу не отличается от данного ранее.

в соответствие координатам u, v точки $M \in W$ координаты $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ той же точки, получим, очевидно, взаимно однозначное соответствие между координатами u, v и $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ точек области W. Это соответствие может быть записано как в виде

$$\widetilde{u} = f(u, v), \qquad \widetilde{v} = g(u, v),$$

так и в виде

$$u = f^{-1}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \qquad v = g^{-1}(\widetilde{u}, \widetilde{v}).$$

Функции f, g, f^{-1}, g^{-1} могут быть найдены из соотношений

$$\varphi(u, v) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \qquad \psi(u, v) = \widetilde{\psi}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \qquad \chi(u, v) = \widetilde{\chi}(\widetilde{u}, \widetilde{v}),$$

так что мы имеем тождества

$$\varphi(u, v) \equiv \widetilde{\varphi}(f, g), \qquad \psi(u, v) \equiv \widetilde{\psi}(f, g), \qquad \chi(u, v) \equiv \widetilde{\chi}(f, g)$$

и аналогичные тождества с функциями f^{-1}, g^{-1}.

При этом имеет место

Лемма 2. *Если для функций* φ, ψ, χ *и* $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\chi}$ *выполняются условия а), б) и в), то функции*

$$\widetilde{u} = f(u, v), \qquad \widetilde{v} = g(u, v) \tag{10}$$

$$(\text{или } u = f^{-1}(\widetilde{u}, \widetilde{v}), \quad v = g^{-1}(\widetilde{u}, \widetilde{v})) \tag{11}$$

определяют в области W *регулярные преобразования координат класса* C_k *или соответственно аналитического класса, так что*:

$$\frac{D(f, g)}{D(u, v)} \neq 0. \tag{12}$$

Доказательство. В силу теоремы о неявных функциях, очевидно, достаточно показать справедливость (12). В силу условия в) хотя бы один из функциональных детерминантов D_1, D_2, D_3 отличен от нуля. Предположим для определенности, что $D_1 \neq 0$. Тогда в силу предыдущей леммы и $\widetilde{D}_1 \neq 0$. Но тогда из двух первых уравнений (3) мы имеем (см. замечание III к теореме VII дополнения)

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \frac{D(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})}{D(f, g)} \frac{D(f, g)}{D(u, v)}.$$

Из этого равенства, используя введенные выше обозначения, получим $\frac{D(f, g)}{D(u, v)} = \frac{D_1}{\widetilde{D}_1} \neq 0$, что и доказывает лемму.

Замечание. Если h и $\widetilde{h}$ — части областей H и $\widetilde{H}$ плоскостей (u, v) и $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, в которые отображается область W с помощью функции (3) и (4) соответственно, то, очевидно, функции (10) дают регулярное отображение области h на $\widetilde{h}$.

4. Одно частное простейшее координатное покрытие сферы. При рассмотрении примеров мы будем пользоваться некоторой частной системой локальных координат на сфере, которую мы сейчас опишем. Пусть N и $\widetilde{N}$ — две диаметрально противоположные точки сферы, σ и $\widetilde{\sigma}$ — плоскости, касательные к сфере в этих точках. Под G ($\widetilde{G}$) будем понимать область, состоящую из всех точек сферы кроме точки $\widetilde{N}$ (соответственно кроме точки N). G и $\widetilde{G}$ образуют покрытие сферы, причем все точки кроме «полюсов» N и $\widetilde{N}$ принадлежат одновременно обеим областям G и $\widetilde{G}$. На плоскостях σ и $\widetilde{\sigma}$ введем декартовы прямоугольные системы координат (u, v) и $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, «согласованные» друг с другом (ось u параллельна оси $\widetilde{u}$, а ось v — оси $\widetilde{v}$) (рис. 135, глава VI, где оси u, v обозначены через x и y, а $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ — через u и v). Координатами u, v точки M_0 в области G будем считать координаты u, v той точки M плоскости σ, в которую проекти-

руется точка M_0 при стереографической проекции с центром в $\widetilde{N}$. Аналогично за координаты $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ точки M_0 в области $\widetilde{G}$ возьмем координаты $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ точки $\widetilde{M}$, в которую точка M_0 проектируется из центра N. Мы получаем таким образом локальную систему координат на сфере, определенную покрытием, состоящим только из двух областей на сфере, G и $\widetilde{G}$, с введенными в них координатами u, v и $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$. Такую систему координат мы будем *называть простейшей системой координат на сфере*. Легко видеть, что простейшая система координат является аналитической. Из элементарных геометрических соображений (подобия треугольников $NM\widetilde{N}$ и $N\widetilde{N}\widetilde{M}$) мы имеем

$$\frac{\varrho}{2r} = \frac{2r}{\widetilde{\varrho}}, \quad \widetilde{\varrho}^2 = \widetilde{u}^2 + \widetilde{v}^2, \quad \varrho^2 = u^2 + v^2,$$

далее,

$$\cos\varphi = \frac{u}{\varrho} = \frac{\widetilde{u}}{\widetilde{\varrho}}, \quad \sin\varphi = \frac{v}{\varrho} = \frac{\widetilde{v}}{\widetilde{\varrho}}.$$

Координаты u, v и $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ в любой точке M, принадлежащей одновременно обеим областям G и $\widetilde{G}$, связаны соотношениями

$$\widetilde{u} = \frac{4ur^2}{u^2+v^2}, \qquad \widetilde{v} = \frac{4vr^2}{u^2+v^2}$$

и эквивалентными им соотношениями

$$u = \frac{4\widetilde{u}r^2}{\widetilde{u}^2+\widetilde{v}^2}, \quad v = \frac{4\widetilde{v}r^2}{\widetilde{u}^2+\widetilde{v}^2}.$$

Если на сфере рассматривается множество, отличное от точек всей сферы (в частности, например, простая дуга или простая замкнутая кривая), то всегда можно выбрать такое покрытие, именно, в частности, указанное простейшее покрытие, чтобы это множество целиком лежало в одной и той же области покрытия. Нетрудно показать, что локальные координаты u и v ($\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$) вводятся на сфере с помощью параметрических уравнений сферы, приведенных в п. 1.

5. Ориентация сферы и типы топологических отображений сферы в себя. На сфере, так же как и на плоскости, может быть введена ориентация (сфера может быть ориентирована), т. е. одно из двух возможных направлений обхода простых замкнутых кривых на сфере может быть выбрано за положительное. Топологические отображения сферы в себя, так же как и в случае плоскости, делятся на два типа:

I. *Топологические отображения, сохраняющие ориентацию.*

II. *Топологические отображения, изменяющие ориентацию.*

6. Функции, заданные на сфере. Мы скажем, что на сфере задана функция

$$\omega = F(Q),$$

если каждой точке Q сферы соответствует некоторое число ω. Если на сфере дана какая-нибудь система локальных координат, то в каждой из областей G_i с локальными координатами u_i, v_i функция $F(Q)$, очевидно, будет функцией u_i, v_i:

$$\omega = F(Q) = f_i(u_i, v_i).$$

Если области покрытия G_i и G_k имеют общую часть и в общей их части соответствующие G_i и G_k локальные координаты u_i, v_i и u_k, v_k связаны соотношениями

$$u_i = \varphi(u_k, v_k), \qquad v_i = \psi(u_k, v_k),$$

то в области G_k мы будем иметь

$$\omega = F(Q) = f_k(u_k, v_k) = f_i(\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)).$$

Мы скажем, что функция $F(Q)$ на сфере принадлежит классу C_k (аналитическому классу), если при выборе некоторой системы локальных координат класса C_k (аналитического класса) на сфере, а следовательно, и при любой другой системе локальных координат класса C_k (аналитического класса), функции $f_i(u_i, v_i) \equiv F(Q)$ являются функциями от u_i, v_i класса C_k (аналитического класса).

§ 8. Основные теоремы теории дифференциальных уравнений

В настоящем параграфе формулируются без доказательств основные предложения, касающиеся дифференциальных уравнений (теорема существования и единственности решения, теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий и др.), которые использованы в тексте книги. Доказательства этих предложений читатель может найти, например, в [11], [12], [61].

В приводимых теоремах переменные рассматриваются как декартовы или криволинейные координаты точек евклидова пространства E_{N+1}. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ определены в некоторой открытой области R пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$ и в этой области непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Вместо того, чтобы говорить «правые части системы (1) определены в открытой области R», для краткости говорят: «система (1) определена в открытой области R».

1. Теорема о существовании и единственности решения.

Теорема А. *Какую бы точку $M_0(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области R (открытой) мы ни взяли, существует такой, содержащий t_0 сегмент $[t_1, t_2]$ и такая система определенных на $[t_1, t_2]$ дифференцируемых функций*

$$x_k = \varphi_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

что: а) $\varphi_k(t_0) = x_k^0$; б) *при всех* $t \in [t_1, t_2]$ *точки* $M(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ *принадлежат области* R; в) $\varphi_k'(t) \equiv X_k(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ *при всех* t *из сегмента* $[t_1, t_2]$. *Эта система функций единственна; именно, если* $[t_1', t_2']$ — *произвольный сегмент, содержащий* t_0 *и содержащийся в* $[t_1, t_2]$ $(t_1 \leqslant t_1' < t_0,\ t_0 < t_2' \leqslant t_2)$, *то всякая система дифференцируемых функций, определенных на сегменте* $[t_1', t_2']$ *и удовлетворяющих условиям* а), б), в), *совпадает на сегменте* $[t_1', t_2']$ *с системой функций* $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Значения $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ называются *начальными значениями*, точка $M(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — *начальной точкой*, а решение $x_k = \varphi_k(t)$ называется *решением системы дифференциальных уравнений* (1), *соответствующим начальным значениям* $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (*или решением, удовлетворяющим начальным условиям*: *при* $t = t_0$ $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$), *определенным на сегменте* $[t_1, t_2]$.

Так как по предположению R — открытая область, а в силу теоремы А система функций $\varphi_k(t)$ определена на замкнутом промежутке (сегменте) $[t_1, t_2]$, то решение (2) *может быть продолжено как для значений* $t < t_1$, *так и для значений* $t < t_2$. Именно, выбирая точку $M_1(t_1, \varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_n(t_1))$ или точку $M_2(t_2, \varphi_1(t_2), \ldots, \varphi_n(t_2))$ за начальную, в силу теоремы А можно получить решение системы (1), совпадающее с решением системы (1) на сегменте $[t_1, t_2]$ и определенное на некотором большем сегменте $[t_1^*, t_2^*]$ $(t_1^* < t_1,\ t_2^* > t_2)$. Выбирая точку $M_1^*(t_1^*, \varphi_1(t_1^*), \ldots, \varphi_n(t_1^*))$ или $M_2^*(t_2^*, \varphi_1(t_2^*), \ldots, \varphi_n(t_2^*))$ снова за начальную, мы можем снова продолжать решение и т. д.

Мы скажем, что *решение* $x_k = \varphi_k(t)$ *системы* (1) *продолжено на максимально возможный промежуток значений* $t \in (\tau, T)$, *если не существует решения, совпадающего с решением* $x_k = \varphi_k(t)$ *на промежутке значений* (τ, T) *и определенного на большем промежутке* (τ', T') (т. е. таком, для которого выполняется хотя бы одно из неравенств $\tau' < \tau$, $T' > T$). Имеет место следующая

Теорема А'. *В случае, когда система* (1) *определена в открытой области* R, *максимально возможный интервал* (τ, T), *на который может быть продолжено решение, является открытым промежутком (интервалом); при этом какую бы замкнутую ограниченную область* $\overline{R_1}$, *целиком (вместе с границей) содержащуюся в* R, *мы ни взяли, найдутся значения* t, t' *и* t'', $t' > \tau$ *и* $t'' < T$, *такие, что точки* $M_1(t', \varphi_1(t'), \ldots, \varphi_n(t'))$ *и* $M_2(t'', \varphi_1(t''), \ldots, \varphi_n(t''))$ *лежат вне* $\overline{R}$.

Последнее свойство часто характеризуется следующими словами: *решение может быть продолжено до границы области определения.*

Если решение определено при всевозможных значениях t, $-\infty < t < +\infty$, то мы будем условно писать $\tau = -\infty$, $T = +\infty$.

В настоящей книге *под решением системы вида* (1) *всегда подразумевается решение, определенное на максимально возможном промежутке значений* t.

Множество точек $M(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ при всевозможных значениях $t \in (\tau, T)$ называется интегральной кривой системы (1). В силу теоремы А через каждую точку $M(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области R проходит одна и только одна интегральная кривая.

Решение системы (1) зависит от начальных значений $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$. Поэтому решение естественным образом записывается в виде

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0), \tag{3}$$

где функции φ_k определены во всех точках $M_0(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области R и при всех t в некотором промежутке (τ, T), зависящем, вообще говоря, от точки M_0. Таким образом, функции (3) определены в каждой точке некоторой области $n+2$-мерного пространства $(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. При любых фиксированных значениях $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ они являются решением системы (1), удовлетворяющим начальным условиям: при $t = t_0$ $x_k = x_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. По самому смыслу этих функций мы имеем

$$\varphi_k(t_0, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = x_k^0.$$

Если $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ рассматриваются как произвольные параметры (но, очевидно, такие, что точка $M_0(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ лежит в области R), то систему функции иногда называют *общим решением* системы дифференциальных уравнений (1). В случае, когда $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ фиксированы, мы будем иногда называть систему функций (2) частным решением (так что «решение» и *частное решение имеют один и тот же смысл*). Если

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \tag{4}$$

— решение, и при некотором значении $t = t_1$, при котором это решение определено,

$$\varphi_k(t_1, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = x_k', \tag{5}$$

то решение (4) может быть также записано (принимая во внимание единственность решения, соответствующего данным начальным значениям) в следующей форме:

$$x_k = \varphi_k(t, t_1, x_1', \ldots, x_n'). \tag{6}$$

Имеет место следующая теорема.

2. Теорема о непрерывной зависимости от начальных значений.

Теорема В. *Пусть* $x_k = \varphi_k(t, t^*, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ — *какое-нибудь решение системы* (1), *определенное при всех значениях* $t \in (t_1, t_2)$, *и пусть* τ_1 *и* τ_2 — *любые числа, принадлежащие этому интервалу, причем* $\tau_1 < \tau_2$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon, \tau_1, \tau_2))$, *что для всех* $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$, *для которых* $|t_0 - t^*| < \delta$, $|x_i^* - x_i^0| < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *решение* $x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *определено при всех значениях* $t \in [\tau_1, \tau_2]$, *и при всех этих значениях* t *выполняются неравенства*:

$$|\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) - \varphi_k(t, t^*, x_1^*, \ldots, x_n^*)| < \varepsilon.$$

Следствие. Функции $x = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ являются функциями, непрерывными по совокупности всех своих аргументов $t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$, при которых они определены.

3. Производные по независимому переменному и по начальным значениям. Мы предполагали до сих пор, что функции $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$, стоящие в правых частях системы (1), имеют непрерывные частные производные первого порядка. Предположим теперь, что функции $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные производные по t и по x_k до некоторого порядка p, причем $p \geqslant 1$.

Теорема В'. *Если функции* $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ *имеют непрерывные частные производные до порядка* $p \geqslant 1$, *то функции* $x_k = \varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *имеют непрерывные производные по* t *до порядка* $p + 1$.

Рассмотрим решение как функции начальных значений. Имеет место

Теорема В''. *Если функции* $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ *имеют частные производные по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ *до порядка* p, *то функции* $x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$

при всех значениях входящих в них переменных, при которых они определены, имеют непрерывные (по совокупности всех переменных) производные: а) *по* t *и* t_0 *до порядка* $p+1$; б) *по всем переменным* x_i^0 *до порядка* p; в) *по* t, t_0 *и по переменным* x_i^0, *содержащие по крайней мере одно дифференцирование по* t *или* t_0 *до порядка* $p+1$.

Эти частные производные удовлетворяют системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dx_k}{dt}=X_k(t, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial t_0}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_0},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i^0}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i^0},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^q x_k}{(dx_1^0)^{j_1}(\partial x_2^0)^{j_2}\ldots(\partial x_n^0)^{j_n}}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\frac{\partial^q x_j}{(\partial x_1^0)^{j_1}(\partial x_2^0)^{j_2}\ldots(\partial x_n^0)^{j_n}}+$$

$$+G^q_{j_1,\ldots,j_n}\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}, \ldots\right)$$

$$(j_1+j_2+\ldots+j_n=q\leqslant p;\ k=1, 2, \ldots, n;\ i=1, \ldots, n);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^{q+1} x_k}{\partial t^l\,(\partial x_1^0)^{j_1}\ldots(\partial x_n^0)^{j_n}}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\frac{\partial^{q+1} x_j}{\partial t^l\,(\partial x_1^0)^{j_1}\ldots(\partial x_n^0)^{j_n}}+$$

$$+G^{q+1}_{l, j_1,\ldots,j_n}\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial t_0}, \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}, \ldots\right)$$

$$(q=1, 2, \ldots, p;\qquad l+j_1+j_2+\ldots+j_n=q+1),$$

где функции $G^q_{j_1,\ldots,j_n}$ зависят от x_i и производных от x_j по x_i^0 порядка, меньшего q, а $G_{l, j_1,\ldots,j_n}$ зависят от x_i и от производных по t_0 и x_j^0 порядка, меньшего $q+1$.

Справедлива следующая

Т е о р е м а С. *Если* $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ — *аналитические функции своих аргументов в окрестности любой точки области* R, *то функции* $x_k=\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *являются аналитическими функциями всех своих аргументов в окрестности всякой системы значений* $(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *для которой они определены.*

§ 9. К вопросу о понятии «качественной структуры» разбиения на траектории и о понятии особых и неособых траекторий

1. Сопоставление инвариантов топологических и регулярных отображений. Основной задачей качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости является установление свойств траекторий системы

$$\dot{x}=P(x, y),\qquad \dot{y}=Q(x, y), \tag{1}$$

остающихся инвариантными при *всевозможных топологических отображениях плоскости на себя* (или некоторой области плоскости на себя или сферы на сферу — в случае динамической системы на сфере и т. д.).

Однако, как известно, существует классическая область математики — дифференциальная геометрия, в которой рассматриваются инварианты *регулярных отображений*. Поэтому естественно возникает вопрос о рассмотрении инвариантов регулярного отображения и в случае динамических систем. Не обсуждая целесообразность такого рассмотрения (тем более, что и само понятие «целесообразности» в данном контексте вряд ли имеет смысл), укажем все-таки вкратце, какая классификация возникает при рассмотрении инвариантов регулярного отображения.

Нетрудно убедиться в том, что эта классификация не имеет интереса для тех задач, которые возникают из приложений, например, для классической задачи об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия.

Действительно, рассмотрим, например, состояние равновесия. Как было указано (§ 6 главы IV), характеристические корни являются инвариантами регулярного отображения. Подчеркнем, что инвариантами являются не их знаки, а их величины. Таким образом, при классификации состояний равновесия с точки зрения инвариантности относительно произвольных регулярных отображений мы получили бы континуальное число классов, в каждый из этих классов входили бы состояния равновесия с одинаковыми характеристическими корнями. Однако с точки зрения задач, возникающих из приложений, такая классификация, очевидно, не имеет интереса: правда, иногда определение величин характеристических корней или что то же — направлений, в которых траектории стремятся к состояниям равновесия, могут оказаться полезными (например, при приближенном вычислении сепаратрис, см. § 15). Часто для приложений представляет интерес знать, стремятся ли траектории к состоянию равновесия с определенными направлениями или они имеют форму спиралей. В последнем случае, однако, представляет интерес *сам факт* — являются ли характеристические корни действительными или комплексными, а не *величины* характеристических корней. Таким образом, для приложений классификация состояний равновесия по инвариантности относительно регулярных преобразований не представляет интереса.

То же самое имеет место и в случае предельных циклов. При классификации предельных циклов по инвариантности относительно регулярных преобразований мы также получаем континуальное число классов. Именно, пусть на некоторой дуге без контакта l, проведенной через точку замкнутой траектории, построена функция последования $\bar{s} = f(s)$ (s — параметр на дуге l). Пусть s_0 — значение параметра, соответствующего точке пересечения замкнутой траектории с дугой l. Можно показать, что величина $f'(s_0)$ является инвариантом регулярного преобразования. Однако для задач, возникающих из приложений, представляет интерес не сама величина $f'(s_0)$, а тот факт, является ли эта величина больше или меньше нуля, т. е. является ли рассматриваемый предельный цикл устойчивым или неустойчивым. Таким образом, при рассмотрении предельных циклов для приложений представляют интерес инварианты топологических, а не регулярных отображений.

2. Различные подходы к выделению областей, заполненных траекториями «одинакового поведения». Мы укажем здесь на существующие в математической литературе понятия, родственные введенному в настоящей книге понятию *орбитной устойчивости траектории* *), а также на связанное с такими понятиями выделение областей, заполненных траекториями в некотором смысле «сходного поведения».

Здесь прежде всего следует отметить работу Брауэра, в которой вопрос о разбиении сферы на области, заполненные траекториями со «сходным» поведением, рассматривается для весьма общего случая, именно, для случая непрерывного векторного поля на сфере, с конечным числом особых точек. (В силу того, что Брауэр предполагает поле просто непрерывным, а не непрерывно-дифференцируемым, как в настоящей книге,— через неособые точки сферы может проходить более одной траектории.) Если классификацию областей, данную Брауэром, использовать в рассматриваемом нами случае непрерывно-дифференцируемого поля, то отдельные области Брауэра, вообще говоря, будут состоять из нескольких «ячеек» в смысле § 17. В качестве примера можно привести область, представленную на рис. 341, образующую одну область Брауэра. Она состоит из двух ячеек. Вопрос о выделении траекторий, определяющих топологическую структуру разбиения на траектории, Брауэром не ставился.

Понятие ω (α)-орбитной устойчивости естественно также сопоставить с понятием «ω (α)-регулярных» точек, введенным Биркгофом при рассмотрении преобразований поверхности самое в себя. Это понятие может быть естественным образом перенесено на случай рассмотренных в настоящей книге динамических систем на сфере или в ограниченной плоской области в следующем виде. Пусть N — множество всех предельных точек всех траекторий сферы (в рассматриваемом нами случае конечного числа особых траекторий это множество замкнуто), и пусть G — открытое множество, состоящее

*) Впервые понятия «особых» и «неособых» траекторий были введены А. Андроновым и Л. Понтрягиным для одного класса динамических систем, именно, для так называемых «грубых систем». Понятие орбитно-устойчивых и неустойчивых траекторий, данное в [46] и изложенное в главе VII настоящей книги, является естественным обобщением этих понятий.

из точек сферы, не входящих в N. Пусть σ — некоторая область, целиком вместе с границей лежащая в G.

Рассмотрим возможные движения $M = f(t - t_0, M_0)$, где M_0 — какая угодно точка области σ. Область σ называется ω (α)-регулярной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое, не зависящее от выбора точки M_0 внутри σ число $T > 0$ ($T < 0$), что точка $M = f(\tau, M_0)$ будет находиться внутри $U_\varepsilon(N)$ при всех значениях $\tau > T$ ($\tau < T$). Точки такой области σ называются ω (α)-регулярными точками.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом нами случае конечного числа особых траекторий все точки незамкнутых орбитно-устойчивых траекторий ω- и α-регулярны.

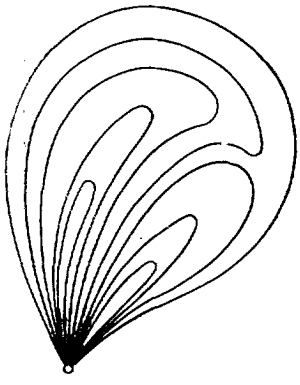


Рис. 341.

В случае бесконечного числа особых траекторий это может не быть справедливым. С другой стороны, точки ω (α)-орбитно-неустойчивых траекторий могут быть ω (α)-регулярны. Простым примером этого может служить сепаратриса на рис. 342. В множество N всех предельных точек входят траектории L_1 и L_2 (состояние равновесия O_1 — седло, состояние равновесия O_2 — седло-узел). Сепаратриса L_3 ω-орбитно-неустойчива, однако ее точки являются ω-регулярными.

Для областей, заполненных ω (α)-регулярными точками, Биркгофом доказана теорема, аналогичная теореме 54 § 16, именно, теорема о том, что области, заполненные ω (α)-регулярными точками, не более чем двусвязны.

Перейдем теперь к характеристике более поздних работ Маркуса и Врублевской, непосредственно касающихся динамических систем вида (1), удовлетворяющих условиям § 1.

Маркус [47] также рассматривает вопрос о разделении плоской области на «ячейки» с «одинаковым» поведением траекторий. Однако подход его к этому вопросу несколько отличается от изложенного в настоящей книге: он не выделяет отдельных «особых» и «неособых» траекторий, а сначала непосредственно рассматривает области, заполненные траекториями со «сходным» поведением (точные определения см. [47]). В тех случаях, когда число особых траекторий конечно, области, определенные Маркусом, совпадают с ячейками в смысле главы VII. Затем он рассматривает замкнутое, состоящее из траекторий множество, дополнительное к полученному им открытому множеству, являющемуся суммой всех определенных им «областей с траекториями одинакового поведения», не выделяя индивидуальных «особых» траекторий. При подходе Маркуса естественным образом возникает необходимость в рассмотрении не только конечного, но и бесконечного числа особых траекторий (если употребить терминологию настоящей книги). Так, например, возникает необходимость в рассмотрении случая, когда счетное множество предельных циклов накапливается к некоторой замкнутой траектории *).

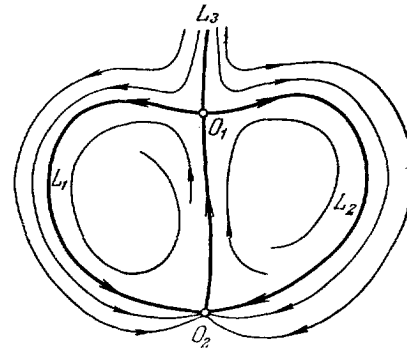


Рис. 342.

В работе Врублевской [49] вводится понятие *правильной деформации* и с помощью этого понятия дается определение «геометрической эквивалентности» двух множеств, в частности двух траекторий, кроме того, дается определение «кинематической эквивалентности» двух траекторий, являющейся частным случаем геометрической эквивалентности. Семейство всех траекторий динамической системы распадается на классы геометрически эквивалентных траекторий. Теоретико-множественная сумма всех траекторий одного класса названа «геометрической ячейкой». В том же случае, когда число особых

*) Отметим, что в случае, когда предельные циклы накапливаются к некоторой замкнутой траектории L_0 с двух сторон (извне и изнутри L_0), эта замкнутая траектория, очевидно, является топологическим пределом этих предельных циклов и орбитно-устойчива. Таким образом, в случае бесконечного числа орбитно-неустойчивых траекторий топологическим пределом таких траекторий может быть орбитно-устойчивая траектория.

траекторий конечно, «геометрические ячейки» в смысле Врублевской совпадают с «ячейкой» в смысле главы VII настоящей книги.

Отметим, что каждый из трех аспектов классификации траекторий — изложенный в настоящей книге, данный Маркусом и данный Врублевской — может быть перенесен на динамические системы порядка $n > 2$. Каждый из указанных трех аспектов имеет свои преимущества.

3. Случай бесконечного числа орбитно-неустойчивых траекторий. В настоящей книге рассматривается случай, когда число особых (орбитно-неустойчивых) траекторий конечно. Как мы говорили (см. § 15, п. 9), этот случай естественно представляется интересным с разных точек зрения. Можно также рассматривать случай, когда число орбитно-неустойчивых траекторий бесконечно. Этот случай рассматривается в упомянутой выше работе Маркуса.

Выше мы уже приводили пример бесконечного числа особых траекторий, именно, счетного множества предельных циклов, имеющих своим топологическим пределом некоторую замкнутую траекторию. Приведем еще простой пример, когда бесчисленное множество «чередующихся» седел и узлов накапливается к точке O, и сепаратрисы седел имеют своим топологическим пределом траектории L_0 и L_0', проходящие через точку O (рис. 343).

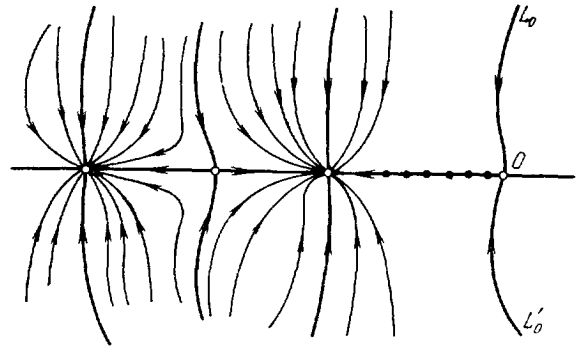


Рис. 343.

В обоих рассматриваемых примерах число орбитно-неустойчивых траекторий бесконечно, но нигде не плотно на сфере.

Ограничимся случаем, когда число состояний равновесия конечно. Естественно возникает вопрос, возможно ли при этом всюду плотное множество орбитно-неустойчивых траекторий или же орбитно-неустойчивые траектории всегда образуют нигде не плотное множество? В работе Маркуса на этот вопрос нет ответа.

В следующем пункте мы изложим геометрический пример А. Г. Майера, который в известной мере дает ответ на этот вопрос. Именно, в этом примере указывается семейство линий, обладающих основными свойствами траекторий (мы будем поэтому называть их траекториями), среди которых орбитно-неустойчивые траектории образуют всюду плотное множество. Хотя пример А. Г. Майера — геометрический и в нем не указано динамической системы, удовлетворяющей условиям п. 1 § 1, для которой построенное семейство линий является семейством траекторий, тем не менее эвристически существование такой системы не вызывает сомнений. При описании примера А. Г. Майера мы будем пользоваться термином «траектория», а не линия и употреблять также введенные для динамических систем термины «сепаратриса» и «эллиптическая область», которые в приводимом построении не могут привести к недоразумению.

4. Геометрический пример А. Г. Майера всюду плотного множества орбитно-неустойчивых траекторий — сепаратрис состояния равновесия. Прежде чем переходить к геометрическому построению, которое должно дать всюду плотное множество сепаратрис, стремящихся к одной и той же особой точке, заметим, что, во-первых, в силу самого определения сепаратрисы, по крайней мере с одной ее стороны, должна быть гиперболическая область, а, во-вторых — в окрестности состояния равновесия возможно бесчисленное множество различных эллиптических областей, диаметры которых стремятся к нулю. Построение всюду плотного множества проводится по этапам следующим образом:

1. Сепаратрисы строятся последовательно, при этом одновременно с сепаратрисой строится эллиптическая область, слева примыкающая к сепаратрисе.

2. Сепаратрисы и эллиптические области на каждом следующем этапе строятся в незаштрихованных областях (см. рис. 344, *а*, *б*, *в*).

3. На каждом этапе новые сепаратрисы строятся по одной между двумя прежними.

Покажем несколько этапов построения. Пусть C — окружность с центром в начале.

На рис. 344, *а* представлен первый этап построения. Между сепаратрисой L_1 и эллиптической областью σ_1, т. е. в заштрихованном секторе, больше уже не строятся эллиптические области; заштрихованный сектор в окончательном расположении траекторий является гиперболическим. Что же касается незаштрихованного сектора, то в нем на следующем этапе будут построены сепаратриса и эллиптическая область. Предположим, что точки A_1 и A_1' на рис. 344, *а* являются диаметрально противоположными, и пусть диаметрально противоположные точки A_2 и A_2' делят соответственно полуокружности A_1A_1' и $A_1'A_1$ пополам.

На рис. 344, *б* изображен второй этап построения. Как и на рис. 344, *а*, в заштрихованных секторах не лежит никаких эллиптических областей. В незаштрихованных секторах на следующем этапе строятся сепаратрисы и эллиптическая область.

Следующий этап изображен на рис. 344, *в*, точки A_3, A_3', A_4 и A_4' делят соответственно дуги A_1A_2, $A_1'A_2'$, A_2A_1' и $A_2'A_1$ пополам.

На следующем этапе проводятся сепаратрисы через точки, делящие уже полученные дуги пополам, и по отрицательную сторону от каждой такой сепаратрисы опять строится эллиптическая область (см. § 3 дополнения). В следующем этапе полученные на окружности дуги делятся еще пополам и т. д. После каждого этапа построения между двумя уже построенными сепаратрисами есть незаштрихованный сектор, в котором может быть построена новая сепаратриса и эллиптическая

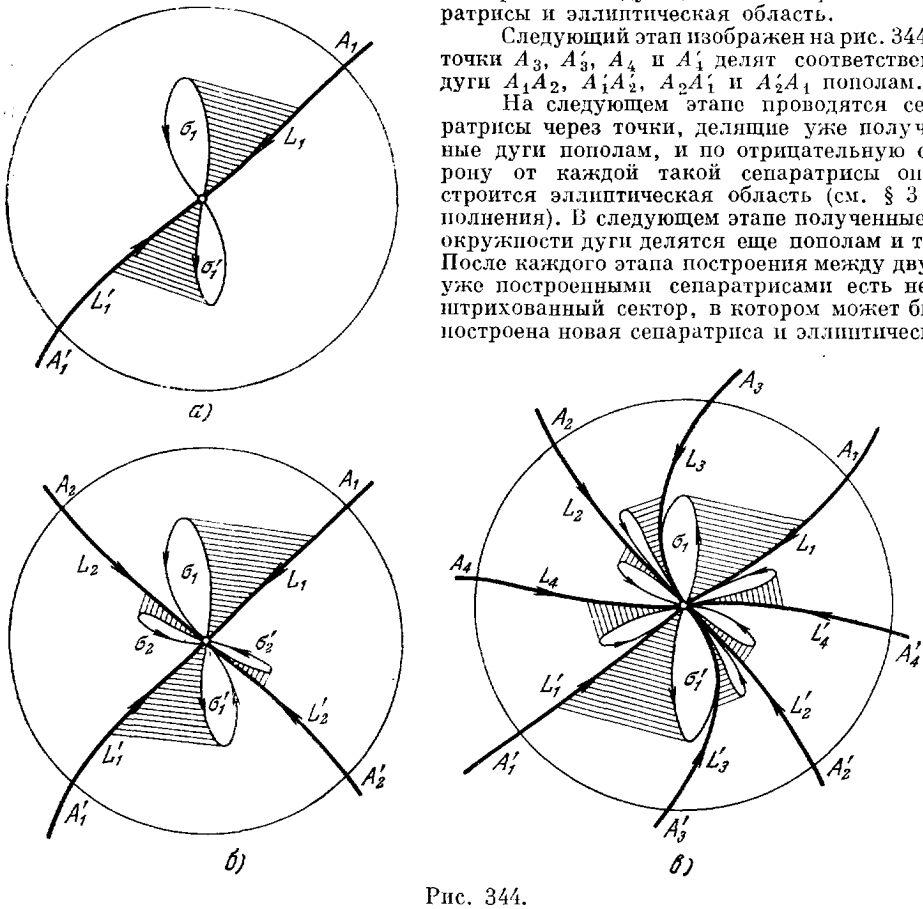


Рис. 344.

область. При этом диаметры последовательно строящихся эллиптических областей стремятся к нулю.

Мы получаем в результате на окружности всюду плотное множество точек, через которые проходят сепаратрисы. Обозначим область внутри рассматриваемой окружности через S, а множество точек, принадлежащих всем построенным замкнутым эллиптическим областям, через $\overline{E}$. Тогда множество $S \setminus \overline{E}$ есть область. Нетрудно видеть, что множество точек построенных сепаратрис всюду плотно в $S \setminus \overline{E}$. Все остальные траектории определяются из соображений непрерывности.

Нетрудно убедиться в том, что полученное таким образом семейство линий удовлетворяет требованиям, необходимым для того, чтобы это семейство было семейством траекторий динамической системы. Рассматривая траектории, пересекающие окружность в точках, отличных от построенных сепаратрис, можно показать, что все они орбитно-устойчивы.

§ 10. Теорема Бендиксона об индексе сложного состояния равновесия

В заключение мы докажем теорему Бендиксона, устанавливающую связь между числом гиперболических и эллиптических секторов состояния равновесия и его индексом Пуанкаре. Пусть (I) — динамическая система, O — ее изолированное состояние равновесия, h — число его гиперболических секторов (т. е. число гиперболических секторов достаточно малой окрестности точки O), e — число эллиптических секторов, $I = I(O)$ — индекс Пуанкаре.

Теорема Бендиксона:

$$I = 1 + \frac{e-h}{2}. \tag{1}$$

Бендиксон доказал эту теорему для аналитических динамических систем *). Для упрощения доказательства мы вместо требования аналитичности будем предполагать, что рассматриваемая система (I) обладает следующим свойством, которое мы обозначим через (*):

(*) Если L есть траектория системы (I), стремящаяся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) и не являющаяся спиралью, $M = M(t)$ — точка на ней, а MT — касательная к траектории L в точке M, то при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) касательная MT стремится к некоторому предельному положению.

Из условия (*) вытекает, как нетрудно видеть, что если присоединить точку O к траектории L и рассматривать их как одну кривую, то эта кривая имеет касательную в точке O, являющуюся предельным положением касательной MT. Мы будем называть ее *касательной к траектории L в точке O*.

Естественно возникает вопрос, всегда ли выполняется условие (*) в случае аналитических систем. В § 20, п. 2, замечание 1 было доказано, что, *как правило*, условие (*) для аналитических систем выполняется. Однако в одном исключительном случае вопрос оставлен открытым.

Приводимое ниже доказательство является уточнением доказательства, данного в книге Лефшеца ([13], глава X, § 2).

Доказательство теоремы Бендиксона. В случае, когда состояние равновесия O является *центром*, его индекс Пуанкаре равен единице в силу теоремы 28 § 11, а $e = h = 0$, т. е. соотношение (1) выполняется.

Пусть теперь точка O является *топологическим узлом*, т. е. все траектории, проходящие достаточно близко к O, стремятся к O (при $t \to +\infty$ либо при $t \to -\infty$; см. § 17, лемма 8). В этом случае в силу леммы 3 § 18 в сколь угодно малой окрестности точки O существует цикл без контакта, содержащий точку O внутри себя. Но тогда (см. § 11, теорема 29) $I(O) = 1$. Так как и в этом случае $e = h = 0$, то равенство (1) выполняется.

Таким образом, мы должны рассмотреть случай, когда состояние равновесия O не является ни центром, ни топологическим узлом, т. е. его окрестность содержит по крайней мере один эллиптический или гиперболический сектор. Обозначим через p число параболических секторов канонической окрестности состояния равновесия O, через n — число всех секторов ($n = h + e + p$).

Пусть $L_1^{(}, L_2^{(}, \ldots, L_n^{(}$ — полутраектории, входящие в границы секторов канонической окрестности и перечисленные в циклическом порядке (при обходе вокруг O в положительном направлении), а θ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — направления, по которым эти полутраектории входят (при t стремящиеся к $+\infty$ или $-\infty$) в состояние равновесия O. Наименьший неотрицательный угол между лучами, идущими в направлениях θ_i и θ_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\theta_{n+1} = \theta_1$), мы будем обозначать буквами α_k, β_e или γ_m в соответствии с тем, является ли сектор, ограниченный полутраекториями $L_i^{(}$ и $L_{i+1}^{(}$, гиперболическим, эллиптическим или параболическим. Очевидно,

$$\sum_1^h \alpha_k + \sum_1^e \beta_e + \sum_1^p \gamma_m = 2\pi. \tag{2}$$

Заметим, что некоторые из углов α, β или γ могут быть равны нулю.

Пусть C_0 — окружность радиуса r_0 с центром в точке O, имеющая общие точки с каждой из полутраекторий $L_i^{(}$ (1, 2, ..., n), а P_i — «последняя» точка пересечения полутраектории $L_i^{(}$ с окружностью C_0. Из условия (*) вытекает, как нетрудно показать, что если радиус r_0 достаточно мал, то:

1) каждая полутраектория $L_i^{(}$ пересекается с окружностью C_0 в точке P_i под углом, сколь угодно близким к прямому;

*) См. доказательство в основной работе Бендиксона [33].

2) вращение векторного поля вдоль каждого отрезка полутраектории $L_i^{(\cdot)}$, лежащего между точками P_i и O, сколь угодно мало.

Из 1) следует, очевидно,

3) каждая достаточно малая дуга окружности C_0, содержащая точку P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), является дугой без контакта для траекторий системы.

Выберем $r_0 > 0$ настолько малым, чтобы условия 1) и 2) выполнялись, и построим каноническую замкнутую кривую E состояния равновесия O, проходящую через точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (рис. 345). При этом в качестве седловых дуг без контакта возьмем достаточно малые дуги окружности C_0. Существование кривой E, удовлетворяющей указанным условиям, показано в § 19, п. 2.

Вычислим вращение векторного поля системы (I) вдоль замкнутой кривой E. Это вращение равно сумме вращений векторного поля вдоль эллиптических и гиперболических дуг, а также параболических дуг без контакта и седловых дуг без контакта, входящих в замкнутую кривую E (см. § 19). Из условий 1) и 3) следует, что сумму вращений векторного поля нашей системы вдоль седловых дуг без контакта можно считать сколь угодно малой (этого можно добиться, взяв достаточно малыми седловые дуги). Вычислим вращение поля вдоль гиперболических дуг без контакта.

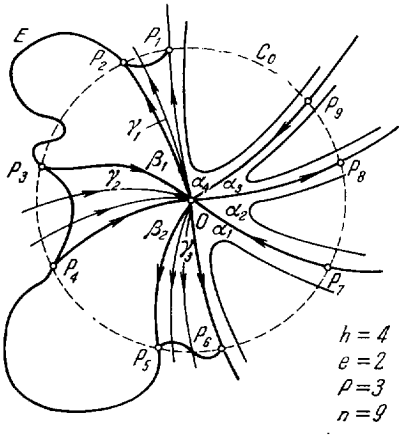


Рис. 345.

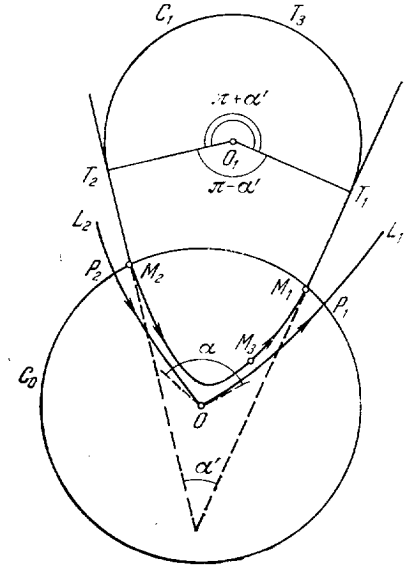


Рис. 346.

Вращение поля вдоль гиперболической дуги. Предположим для определенности, что рассматриваемая дуга $M_1M_3M_2$ принадлежит гиперболическому сектору, ограниченному сепаратрисами L_1 и L_2, и пусть α — тот из углов α_k, который соответствует этому сектору. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < \alpha < \pi$. Проведем в концах дуги, т. е. в точках M_1 и M_2, лучи, касательные к ней и лежащие вне окружности C_0. В силу условия 2), а также в виду малости дуг P_1M_1 и P_2M_2 угол α' между этими лучами сколь угодно близок к углу α (в частности, можно считать, что $0 < \alpha' < \pi$). Пусть $T_1T_3T_2$ — дуга окружности C_1 с центром в точке O_1, касающаяся указанных лучей в точках T_1 и T_2, обращенная вогнутостью в сторону этой окружности и не пересекающаяся с ней (рис. 346; очевидно, последнее условие автоматически выполняется, если центр O_1 окружности C_1 расположен достаточно далеко).

Обозначим через Γ простую гладкую замкнутую кривую, составленную из гиперболической дуги $M_2M_3M_1$, отрезков M_1T_1 и T_2M_2 и дуги $T_1T_3T_2$ окружности C_1. В силу теоремы 28 § 11 вращение поля касательных вдоль нее равно 2π. Вращение этого поля вдоль прямолинейных отрезков M_1T_1 и T_2M_2 равно нулю, а вдоль дуги $T_1T_3T_2$ окружности C_1 равно, очевидно, $\pi + \alpha'$ (рис. 346). Поэтому вращение поля касательных вдоль дуги $M_2M_3M_1$ равно $2\pi - (\pi + \alpha') = \pi - \alpha'$. Так как это поле совпадает с полем нашей динамической системы, то при обходе гиперболической дуги в направлении $M_1M_3M_2$ (индуцируемом положительным направлением обхода канонической кривой E) вращение поля системы вдоль нее равно $\alpha' - \pi$. Тот же результат получается, очевидно, если направления на сепаратрисах L_1 и L_2 и на траектории $M_1M_3M_2$ не такие, как на рисунке, а противоположные.

Мы рассмотрели случай, когда $0 < \alpha' < \pi$. Пусть теперь $\alpha' = \pi$. В этом случае лучи M_1T_1 и M_2T_2 имеют противоположные направления, и для вычисления вращения поля вдоль дуги $M_1M_3M_2$ можно провести две вспомогательные полуокружности и прямую, параллельную указанным лучам (рис. 347). Рассмотрение соответствующей

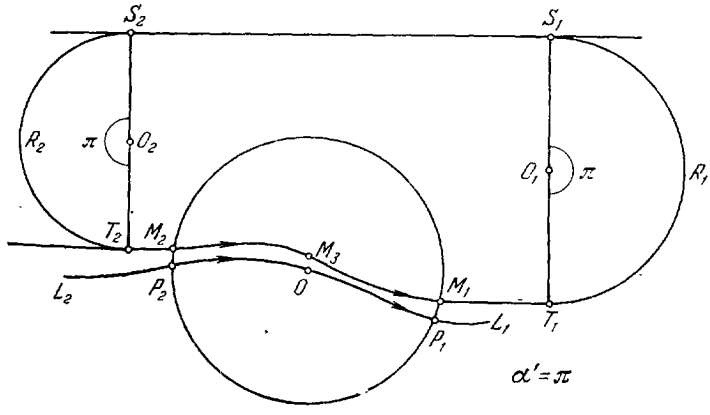


Рис. 347.

кривой Г и поля ее касательных показывает, что в этом случае вращение поля вдоль гиперболической дуги равно 0, т. е. равно $\alpha' - \pi$.

Мы предоставляем читателю разобрать случаи, когда α' заключено между π и 2π и когда $\alpha = 0$, и убедиться, что и в этих случаях вращение поля вдоль гиперболической дуги равно $\alpha' - \pi$. Таким образом, во всех случаях это вращение сколь угодно близко к $\alpha - \pi$.

Вращение поля вдоль эллиптической дуги. Пусть P_1SP_2 — рассматриваемая эллиптическая дуга, L — траектория («петля»), частью которой является эта дуга, L_1 и L_2 — соответствующие полутраектории, P_1 и P_2 — последние точки пересечения их с окружностью C_0 (рис. 348). Пусть, далее, β — тот из углов β_k, который соответствует рассматриваемому эллиптическому сектору, а β' — угол между лучами, касательными к траектории L в точках P_1 и P_2, лежащих на окружности C_0. В силу наших предположений угол β' можно считать сколь угодно близким к углу β.

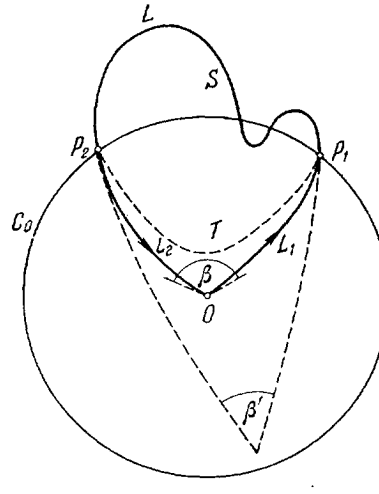


Рис. 348.

Для вычисления вращения поля вдоль дуги P_1SP_2 проведем гладкую простую дугу P_1TP_2, целиком лежащую (за исключением ее концов P_1 и P_2) внутри окружности C_0 и внутри петли L, касающуюся траектории L в точках P_1 и P_2 и не имеющую общих точек (кроме концов P_1 и P_2) с дугой P_1SP_2. Для того чтобы все эти требования выполнялись, достаточно провести дугу P_1TP_2 внутри окружности C_0 между полутраекториями L_1 и L_2 близко к ним.

Обозначим через Г кривую, состоящую из эллиптической дуги P_1SP_2 и построенной вспомогательной дуги P_1SP_2. Г является простой гладкой замкнутой кривой и поле ее касательных на дуге совпадает с полем системы (I). Вращение поля касательных вдоль кривой Г равно 2π. Вращение поля касательных вдоль кривой P_1TP_2 может быть вычислено в точности так же, как вдоль гиперболической дуги, и равно, следовательно, $\beta' - \pi$. Поэтому вращение вдоль эллиптической дуги P_1SP_2 равно $2\pi - (\pi - \beta') = \pi + \beta'$, т. е. сколь угодно близко к числу $\pi + \beta$.

Вращение поля вдоль параболической дуги без контакта. Пусть λ — рассматриваемая дуга без контакта, P_1 и P_2 — ее концы, L_1 и L_2 — проходящие через них полутраектории, входящие в границу соответствующего

параболического сектора, γ — угол между ними в точке O, γ' — угол между касательными к полутраекториям L_1 и L_2 соответственно в точках P_1 и P_2 (рис. 349). Угол γ', как и выше, можно считать сколь угодно близким к углу γ. Пусть для определенности рассматриваемый сектор является ω-параболическим, т. е. траектории, проходящие в нем, стремятся к O при $t \to +\infty$.

В силу условия 3) (см. выше) каждая достаточно малая дуга окружности C_0, содержащая точку P_i, является дугой без контакта. Отсюда и из § 3, замечание 3 к лемме 8, вытекает, что в качестве λ можно взять дугу без контакта, касающуюся в точках P_1 и P_2 окружности C_0. Мы будем считать, что это условие выполняется. Тогда кривая Γ, состоящая из дуги без контакта λ и дуги P_2DP_1 окружности C_0 (рис. 349), является гладкой простой замкнутой кривой. Построим на ней непрерывное векторное поле без особенностей $v = v(M)$, $M \in \Gamma$, следующим образом. Будем считать, что на дуге λ векторы поля v имеют направления векторов нашей динамической системы. На дуге P_2DP_1 окружности C_0 возьмем две точки P_1' и P_2', близкие соответственно к точкам P_1 и P_2. На дуге $P_2'DP_1'$ окружности C_0 направим векторы поля внутрь окружности по радиусам ее. Наконец, на дуге P_iP_i' ($i = 1, 2$) направим векторы поля так, чтобы при переходе по дуге от точки P_i к точке P_i' вектор вращался равномерно в одном и том же направлении и был направлен все время внутрь окружности C_0 (это возможно сделать единственным способом, если точка P_i' достаточно близка к точке P_i и радиус окружности C_0 достаточно мал).

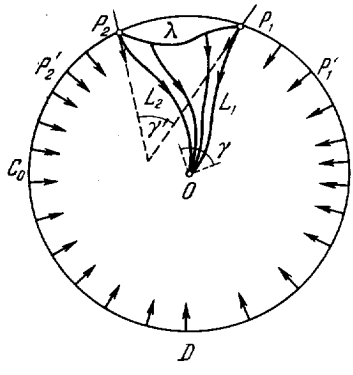


Рис. 349.

Очевидно, все векторы построенного таким образом поля v направлены внутрь кривой Γ. Но тогда в силу следствия из теоремы 29 § 11 вращение поля v вдоль кривой Γ равно 2π. Непосредственный подсчет показывает, что вращение поля v вдоль дуги P_2DP_1 окружности C_0 равно $2\pi - \gamma'$. Поэтому вращение поля v, а следовательно, и поля нашей системы вдоль кривой λ равно γ', т. е. сколь угодно близко к γ.

Вращение поля системы вдоль кривой E. Из всего вышесказанного вытекает, что вращение поля динамической системы (I) вдоль канонической кривой без контакта E сколь угодно близко к числу

$$\sum_1^h (\alpha_h - \pi) + \sum_1^e (\pi + \beta_l) + \sum_1^p \gamma_m.$$

Из соотношения (2) следует, что это число равно $e\pi - h\pi + 2\pi$. Поэтому индекс I состояния равновесия O сколь угодно близок к числу

$$\frac{e\pi - h\pi + 2\pi}{2\pi} = 1 + \frac{e-h}{2}.$$

А так как индекс является целым числом, то он в точности равен указанному числу, т. е.

$$I = 1 + \frac{e-h}{2}.$$

Теорема Бендиксона доказана.

Следствие. Если изолированные состояния равновесия O_1 и O_2 динамических систем, соответственно, (A_1) и (A_2) имеют одинаковые топологические структуры, то их индексы Пуанкаре равны.

Другими словами, индекс Пуанкаре является инвариантом топологических отображений, сохраняющих траектории. Справедливость этого утверждения обусловливается тем, что при таких отображениях состояние равновесия переходит в состояние равновесия, а каждый его сектор — в одноименный сектор.

В заключение заметим, что в силу формулы Бендиксона числа эллиптических и гиперболических секторов состояния равновесия O имеют одинаковые четности, т. е. $e \equiv h \pmod 2$. Это утверждение, впрочем, легко доказать непосредственно, рассматривая направления на полутраекториях $L_1, L_2, \ldots, L_n$ входящих в границы секторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Пуанкаре, Ценность науки, глава VI, М., 1906.
2. П. Лаплас, Опыт философии теории вероятностей, под ред. Власова, типолитография т-ва И. Н. Кушнерева, 1908.
3. Н. Бор, Атомная физика и человеческое познание, Квантовая физика и философия, ИЛ, М., 1961.
4. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М.—Л., 1950; Собрание сочинений А. М. Ляпунова, Изд. АН СССР, М.— Л., 1956.
5. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М.— Л., 1947.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, изд. 2-е (под ред. Н. А. Железцова), Физматгиз, 1959.
7. Л. И. Мандельштам, Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники, Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. I, стр. 5, ГТТИ, 1933.
8. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов, А.А. Витт, Г. С. Горелик, С. Э. Хайкин, Новые исследования в области нелинейных колебаний, Радиоиздат, 1936.
9. А. А. Андронов, 1) Математические проблемы теории колебаний; 2) Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний, Собрание сочинений, Изд. АН СССР, М.— Л., 1956.
10. Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, Гостехиздат, М.— Л., 1941.
11. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, М., 1961.
12. Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
13. С. Лефшец, Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1960.
14. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Functionen, Leipzig Akademische Verlagsgesellschaft, 1952.
15. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, Гостехиздат, М.— Л., 1951.
16. Л. Н. Белюстина, К динамике симметричного полета самолета, Изв. АН СССР, ОТН, № 11 (1956).
17. З. С. Баталова и Л. Н. Белюстина, Исследование одной нелинейной системы на торе, Изв. высш. уч. зав., «Радиофизика», т. VI (1963).
18. А. Г. Майер, О траекториях на ориентируемых поверхностях, Матем. сб. 12 (54), 1 (1943).
19. И. Бендиксон, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, УМН 9 (1941).
20. Н. Н. Константинов, О несамопересекающихся кривых на плоскости, Матем. сб. 54 (96), 3 (1961).
21. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.
22. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, изд. 4-е, Гостехиздат, 1945.
23. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.— Л., 1949.
24. E. Picard, Traitèd'Analyse, t. III, 1896.
25. A. Poincare, Sur les proprietes des fonctions définies par les équations aux différences partielles (Thése, 1879).
26. H. Dulac, Solutions d'un systéme d'équations differentielles dans le voisinage des valeurs singulieres, Bull. Soc. Math. de France, t. 40 (1912).
27. O. Perron, Über Stabilität und asymptotische Verhalten der integrale von Differentialgleichungssystem. Math. Zeitschr., t. 29 (1928).

28. O. Perron, Über Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, Math. Zeitschr., t. 32 (1930).
29. И. Г. Петровский, Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in des Nähe eines singulären Punktes, Матем. сб. 41, 3 (1934).
30. И. Г. Петровский, О поведении интегральных кривых системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, Матем. сб. 41, 1 (1934).
31. R. Bellman, On the boundness of solutions of nonlinear differential and difference equations, Trans. of the Amer. Math. Society, t. 62, № 3 (1947).
32. L. Bieberbach, Differentialgleichungen, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1930.
33. I. Bendixson, Sur les courbes definies par des equations differentielles, Acta Mathem. 24 (1901).
34. М. А. Красносельский, Векторные поля на плоскости, Физматгиз, 1963.
35. С. А. Стебаков, Анализ статически устойчивых динамических систем, ДАН СССР, т. XCV, № 3 (1954).
36. H. Dulac, Recherche des cycles limites, C. R. Acad. Sience Paris 204 (1937), 1703—1706.
37. H. Dulac, Sur les cycles limites, Bull. Soc. Math. de France 51, 1923.
38. G. Sansone, R. Conti, Soluzioni periodiche dell equazione avente due soluzione singolare, Abheandle. Math. Sem. Univ. Hamburg 20, № 3—4 (1956).
39. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, ИЛ, М., 1954.
40. С. Маркосян, Качественное исследование системы двух дифференциальных уравнений методом «двух изоклин», Изв. высш. уч. зав., «Математика», № 1/8, стр. 114—128 (1959).
41. В. В. Немыцкий, Качественное интегрирование системы дифференциальных уравнений, Матем. сб. 16, № 3 (1946).
42. В. В. Немыцкий, Качественное интегрирование системы с помощью универсальных ломаных, Учен. зап. МГУ, вып. 100, т. I (1946).
43. Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1953.
44. В. Милн, Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1955.
45. И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1959.
46. Е. А. Леонтович и А. Г. Майер, О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения на траектории, ДАН СССР, XIV, № 5 (1937).
47. L. Markus, Global structure of ordinary differential equations in the plane, Trans. Am. Math. Soc. 76, № 1 (1954).
48. И. Н. Врублевская, Некоторые критерии эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем, ДАН СССР 97, № 2 (1954).
49. И. Н. Врублевская, О геометрической эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем, Матем. сб. 42 (84) (1947).
50. Е. А. Леонтович и А. Г. Майер, О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории, ДАН СССР 103, № 4 (1955).
51. L. Brower, Proceedings Acad. Wetensch. Amsterdam, XI, 850 (1908); XII, 716 (1909); XIII, 171 (1910).
52. М. Фроммер, Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер, УМН, вып. 9 (1941) (первоначально опубликована в Math. Annal., v. 99, 1928).
53. А. Ф. Андреев, Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, Вестн. Ленинградского университета, № 8, стр. 43—65 (1955).
54. Н. Б. Хаимов, Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены, Уч. записки физ.-мат. ф-та Сталинабадского педагогического и учительского института, т. 2, № 3 (1952).
55. Н. А. Губарь, Характеристика сложных особых точек системы двух дифференциальных уравнений при помощи грубых особых точек близких систем. Матем. сб. 40 (82) : 1 (1956).
56. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, Гл. ред. технико-теоретич. литературы, М. — Л., 1937.
57. Kerekjarto, Vorlesungen über Topologie, 1, Berlin, 1923.
58. А. Ф. Филиппов, Элементарное доказательство теоремы Жордана, УМН 5, вып. 5 (1950).
59. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, изд. 3-е, Гостехиздат, М. — Л., 1951.

60. Р. Курант, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. II, Гос. научно-техн. изд., М. — Л., 1931.
61. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. 4-е, Гостехиздат, М. — Л., 1952.
62. G. Birghoff et P. Smith, Structure Analysis of Surface Transformations, Journal de Mathem. vol. VII (1928).
63. Н. Д. Моисеев, Об одном «методе» отыскания предельных циклов, ЖЭТФ 9, вып. 5 (1939).
64. С. В. Белюстин, К теории тока в вакууме, ЖЭТФ 9, вып. 7 (1939).
65. Н. Н. Баутин, Об одном случае негармонических колебаний, Уч. зап. ГГУ, вып. XII, 231 (1939).
66. Н. Н. Баутин, О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений, ПММ 18, 128 (1954).
67. Р. М. Минц, О некоторых дифференциальных уравнениях, допускающих понижение порядка, Труды ГИФТИ и радиофака ГГУ, Учен. зап., т. 35 (1957).
68. G. Sansone, R. Conti, Sull'equazione di T. Uno ed R. Yokomi. ANN. Mat. Pura Appl (4) 37, 37 (1954).
69. Н. Н. Баутин, Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл, ЖТФ 9, вып. 7, 601 (1939).
70. Р. М. Минц, Исследование траекторий системы трех дифференциальных уравнений в бесконечности, Сб. памяти А. А. Андронова, Изд. АН СССР (1955).
71. W. Buchel, Die physikalischen Bedeutungen der durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$ definierten Kurvenschar. Mitteilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg 4, № 8, 349 (1908).
72. F. R. Sharpe, The topography of certain curves defined by a differential equation. Ann. of Math, 11, 97 (1909).
73. С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М. (1950).
74. В. К. Костицын, О развитии популяций бактерий, C. R. Acad. Sci. 242, № 5, 611 (1956).
75. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М. (1954).
76. H. Lemke, Über die Differentialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren. Zeitschrift für die Reine und Angew. Math. 142, № 1 (1912).
77. А. Зоммерфельд, Волновая механика, ГТТИ (1933).
78. Г. В. Аронович, Л. Н. Белюстина, Об устойчивости колебаний горизонта в уравнительной башне, Инженерный сб., Ин-т механики АН СССР, т. 13, 131 (1952).
79. Цинь Юань-сюнь, Об алгебраических предельных циклах второго порядка для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{\sum\limits_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} a_{ij} x^i y^j}{\sum\limits_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} b_{ij} x^i y^j}$, Шусюэ сюэбао, Acta Math. sinica 8, № 1, 23 (1958).
80. Тун Цзинь-чжу, Расположение предельных циклов системы $\frac{dx}{dt} = \sum\limits_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} a_{ij} x^i y^j$, $\frac{dy}{dt} = \sum\limits_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} b_{ij} x^i y^j$, Acta Math. sinica 8, № 2, 258 (1958). Математика, ИЛ, М. 6, № 2 (1962).
81. И. Е. Сальников, К теории периодического протекания гомогенных химических реакций, Журн. физ. химии, т. 23, вып. 3, 258 (1949).
82. Н. Н. Баутин, К теории синхронизации, ЖТФ, т. 9, вып. 6, 510 (1939).
83. В. М. Большаков, Е. С. Зельдин, Р. М. Минц, П. А. Фуфаев, К динамике систем осциллятор — ротатор, Изв. вузов, «Радиофизика», № 2 (1965).
84. Н. А. Губарь, Исследование методом Бендиксона топологической структуры расположения траекторий в окрестности особой точки одной динамической системы, Изв. вузов, «Радиофизика», т. II, № 6 (1959).

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания 16
Автономная динамическая система 19

Бендиксона критерий отсутствия предельных циклов 226
— преобразования 239
— сфера 222
— теорема об индексе сложного состояния равновесия 559

Векторное поле непрерывно-дифференцируемое 25
— — непрерывное без особенностей 206
Виток траектории 86
Внешний предельный континуум 465
— цикл без контакта 464
Внешняя угловая точка 448
Внутренний предельный континуум 465
— цикл без контакта 464
Внутренняя угловая точка 448
Вращение векторного поля 205, 207
Вырожденное состояние равновесия 397
Вырожденный узел 195

Гиперболическая область 316
— (ω, α)-дуга 350
Гиперболический (седловой) сектор 322
Гладкая простая дуга 536, 537
— — замкнутая кривая 537
Граница нормальная 286
Граничные дуги без контакта 286
— — траекторий 286
— траектории 286
— циклы без контакта 286

Движение на траектории 35
Двусторонний континуум 417
Дикритический узел 151, 191
Динамическая система аналитическая 19
— — на поверхностях 58
— — — сфере 58
Дифференцирование в силу системы (I) 98
Дуга без контакта 72
— — — обобщенная 73
— целая неособая 286
— элементарная [(ω, α)-дуга] 458
Дюлака критерий 226

Замкнутая кривая простая 523
— — — гладкая 537
— траектория 30
Замкнутое множество 520

Изменение параметризации на траектории 31
Изоклина вертикальных наклонов 41
— горизонтальных наклонов 41
Изолированное состояние равновесия 112
Индекс замкнутой кривой 208
— — траектории 215
— как криволинейный интеграл 216
— простых состояний равновесия 217
— Пуанкаре 205
— седла 219
— сложного состояния равновесия 559
— узла 219
— фокуса 219
— цикла без контакта 215
Индуцированное направление на простой дуге 525
— — — — замкнутой кривой 525
— топологическое отображение 495
Интеграл, общий интеграл, интегральная кривая уравнения $Pdx-Qdy=0$ 41

Каноническая замкнутая кривая вокруг состояния равновесия 349, 351
— кривая ω- и α-предельного континуума 426
— окрестность ω (α)-предельного континуума 424
— — состояния равновесия 351
— — (ν)-предельного континуума 425
— — центра 361
Канонические дуги канонической кривой 353
— области данной канонической окрестности состояния равновесия 359
Канонический вид динамической системы (в окрестности состояния равновесия) 137
Качественное исследование 123, 129
— свойство 124
Конец полутраектории 35
— элементарной циклической дуги 159
Контакт 72
Контактная кривая 221, 231
Континуум несвободный 459
— ν-предельный 417
— — с положительной стороны (K_0^+, K_0^-) 420
— ω (α)-предельный (K_ω, K_α) 412
— — — с положительной (отрицательной) стороны (K_ω^+, K_ω^-, K_α^+, K_α^-) 416, 417
— предельный для полутраектории 56, 106, 412
— свободный 441, 454

Континуум сопряженный 465
Координатное покрытие 59, 548
Криволинейный сектор 268, 322

Линейный элемент 40
Локальная схема предельного континуума 411
— — состояния равновесия, не являющегося центром 351
— топологическая структура 131, 132

Метод изоклин 250
Множество предельное для полутраектории 106

Направление на траектории 33
— обхода, согласованное с направлением по t 425
Незамкнутая траектория 33
Неособая траектория, полутраектория 259
— целая дуга 282
Несвободный континуум 459
Неустойчивые состояния равновесия 169
Неустойчивый узел 45
— — дикритический 203
— — невырожденный, вырожденный 202
— фокус 47, 203
Нормальная граница 286
Нуль-предельный континуум (K_0) 419
— — — с положительной (отрицательной) стороны (K_0^+, K_0^-) 419

Область 520
— между сопряженными дугами 480
— отталкивания 458
— притяжения 458
Ограниченная полутраектория 102
— траектория 102
Орбитно-неустойчивая траектория (ω(α)-орбитно-неустойчивая траектория) 256, 259, 260, 262
Орбитно-неустойчивые траектории, стремящиеся к состоянию равновесия 266
Орбитно-устойчивая полутраектория (ω(α)-орбитно-устойчивая траектория) 257
Особая дуга 259, 287
— линия 33
— точка векторного поля 25
— — дифференциального уравнения 40
Особые направления 368
— элементы 285

Параболическая дуга без контакта 350
— область (правильный параболический сектор) 316, 322
Перечисление ω-, α-, 0-предельного континуума 421
Периодическое решение 30
Петля 304
Поле линейных элементов 40
Полная (глобальная) схема предельного континуума 443
— — — состояния равновесия 316, 357
Полная параболическая (узловая) область 336
— схема граничной кривой 443
— — динамической системы 453
Положение равновесия 26
Положительная (отрицательная) дуга без контакта 448
Полутраектория орбитно-неустойчивая 259
— орбитно-устойчивая 259
— отрицательная (L^-) 34, 35
— положительная (L^+) 34, 35
Последующая точка 90
Правильная параболическая область 322
— система канонических окрестностей 454, 458
Предельная точка полутраектории, траектории, предельная ω(α)-точка 102
— траектория 105
Предельное множество 56, 106
Предельный континуум для полутраектории с положительной (отрицательной) стороны 416, 417
— цикл 59, 119, 121
Предыдущая точка 90
Преобразование Пуанкаре 243
Продолжаемая траектория с положительной (отрицательной) стороны 276
Продолжение граничной угловой дуги, угловой полутраектории 448
— полутраектории относительно окружности с положительной (отрицательной стороны) 266, 270
Простая дуга 522
— замкнутая кривая 523

Разбиение области на траектории 28
Разрезанная плоскость 371
Регулярное отображение 75, 538
Решение, соответствующее траектории 23

Свободный граничный цикл без контакта 459
— континуум 441, 454
— цикл без контакта 458
Связные множества 520
Седло 49, 153, 199, 203
Седло-узел 165, 404
Седловая дуга без контакта 339, 350
Седловой сектор (область) 316
Сектор гиперболический 329
— криволинейный 268, 322
— параболический 322
— седловой 322
— циклический 320
— эллиптический 322
Сепаратрисы седла 49, 160
— состояния равновесия 276
Соответствие по схеме 445, 446, 484
Сопряженные концы сопряженных дуг 474
— нуль-предельные континуумы 465
— ω(α)-предельные континуумы 465
— ω- и α-дуги 463
— ω- и α-циклы 463
Состояние равновесия 26
— — простое 135
— — сложное 164

Состояние равновесия с эллиптической областью 397
Стороны простой дуги 530, 531, 541
Сфера Бендиксона 239
— Пуанкаре 241
Схема границы 449, 451
— граничной кривой 449
— динамической системы 481
— — — на сфере 497
— предельного континуума локальная 411
— — — полная 443
— состояния равновесия локальная 351
— — — полная 316, 357
— — — типа центр 361
Схематический рисунок 392, 497

Тождественность двух схем границы 449
— ω(α)-перечислений, ω-, α- и 0-предельных континуумов 423
— полных схем континуумов 448
— схем состояний равновесия локальных 353
— — — — полных 359
— — центров 361
— топологических структур разбиений 125
Топографическая система кривых 221, 231
Топологическая структура динамической системы 124, 490
— — локальная 131
— — разбиения на траектории 125
— — состояния равновесия 132
Топологический инвариант динамической системы 453
— предел 278, 521
— узел 327
Топологическое отображение 76, 124, 522
— седло 379
Точка покоя 26
— сгущения 519
Траектория ограниченная 102
— орбитно-неустойчивая 259
— орбитно-устойчивая 259
— фазовая 34
— целая 34

Угловая дуга 287
— полутраектория 287
— точка 286
— функция 206
Угол между векторами 536
Угол полярный 206
Узел вырожденный 151, 195
— дикритический 151, 191
— неустойчивый 202
— с различными характеристическими корнями 146, 187
— топологический 327
— устойчивый 202
Устойчивые состояния равновесия 169
Устойчивый фокус 203

Фазовая плоскость 25
— траектория 25
Фокус неустойчивый 151, 199, 203
— устойчивый 151, 199, 203
Функция последования 90
— соответствия 81

Целая неособая дуга 286
— траектория 34
Цепочка из особых траекторий и граничных дуг, соединяющих концы сопряженных дуг 472
Цикл без контакта 52, 95
— — — континуума 425
— — — несвободный 459
— — — свободный 458
— предельный 119, 120, 121
Циклическая элементарная дуга 459
Циклический порядок полутраекторий (вокруг состояний равновесия) 348
— — точек 317, 442
— сектор 320

Элемент особый 285
— схемы динамической системы 482
Элементарная циклическая дуга 459
— — ω(α)-дуга 459
Элементарные области 339, 316
Элементарный топологический четырехугольник 86, 339
Элементы, соответствующие по схеме 484
Эллиптическая область 328
Эллиптический сектор 328

Ячейка 288, 257
— двусвязная 304, 307
—, заполненная замкнутыми траекториями 300
—, — незамкнутыми траекториями, односвязная 307
Ячейки, в границу которых входят граничные дуги 313

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9
Введение 11

Глава I. Динамические системы в плоской области и на сфере 19

§ 1. Динамические системы в плоской области 19

1. Введение (19). 2. Геометрическая интерпретация динамической системы (I) в пространстве R^3 (20). 3. Простейшие свойства решений системы (I) (21). 4. Геометрическая интерпретация динамической системы на фазовой плоскости (x, y) (24). 5. Разбиение области G фазовой плоскости на траектории. Некоторые элементарные сведения о траекториях (26). 6. Сопоставление геометрической интерпретации в пространстве R^3 и геометрической интерпретации на фазовой плоскости (30). 7. Направление на траектории. Изменение параметризации (31). 8. Терминология и обозначения (34). 9. Теорема о непрерывной зависимости от начальных значений (36). 10. Замена переменных (37). 11. Дифференциальное уравнение, соответствующее динамической системе (38). 12. Изоклины (41). 13. Понятия «интеграл», «интегральная кривая», «общий интеграл», использующиеся в классической литературе при рассмотрении аналитических систем (41). 14. Примеры (43). 15. Замечания по поводу примеров (56).

§ 2. Динамические системы на сфере 58

1. Введение (58). 2. Определение динамической системы на сфере (58). 3. Динамическая система на сфере как векторное поле на сфере (61). 4. Решения и траектории динамической системы на сфере (61). 5. Примеры динамических систем на сфере (66).

Глава II. Предельные точки множества. Основные свойства траекторий 69

Введение 69

§ 3. Вспомогательные предложения о характере пересечения траекторий с циклами и дугами без контакта 71

1. Дуга без контакта (71). 2. Обобщенная дуга без контакта (73). 3. Пересечение траектории с дугой без контакта (73). 4. Расположение траекторий в окрестности дуги без контакта (74). 5. Некоторые свойства функций $\Phi(t, s)$, $\Psi(t, s)$ (77). 6. Траектории, пересекающие две дуги без контакта. Функция соответствия (81). 7. Случай, когда траектория имеет с дугой без контакта более одной общей точки (86). 8. Функция последования (90). 9. Замкнутые кривые, составленные из дуги траектории и дуги без контакта, и ограниченные ими области (92). 10. Цикл без контакта (95). 11. Семейство циклов без контакта. Траектории, входящие в область, заполненную циклами без контакта (96). 12. Цикл однократного пересечения (97). 13. Дифференцирование функции в силу системы (I) (98). 14. Цикл без контакта между двумя последовательными витками траектории, пересекающей дугу без контакта (99).

§ 4. Предельные точки и множества. Основные свойства траекторий . . . 102

1. Предельные точки полутраектории и траектории (102). 2. Примеры предельных точек (104). 3. Основные свойства множества предельных точек (104). 4. Свойства траекторий, характерные для динамических систем на плоскости или на сфере (106). 5. Некоторые свойства предельных траекторий (109). 6. Предельные траектории динамических систем, имеющих конечное число состояний равновесия. Возможные типы траекторий (112). 7. Теорема о наличии состояния равновесия внутри замкнутой траектории (114). 8. Основная теорема о состоянии равновесия (118). 9. Изолированная замкнутая траектория — предельный цикл. Возможное расположение траекторий в окрестности предельного цикла (119).

Глава III. Основные понятия качественной теории динамических систем 122

§ 5. Количественное и качественное исследование динамических систем 122

1. Введение (122). 2. Топологическая структура динамической системы (124). 3. Локальная топологическая структура (131). 4. Свойства разбиения на траектории в целом и эффективные методы качественного исследования (133).

Глава IV. **Простое состояние равновесия** 135

Введение 135

§ 6. Приведение динамической системы в окрестности простого состояния равновесия к каноническому виду 137

1. Аналитические условия, характеризующие простое состояние равновесия (137). 2. Приведение динамической системы в окрестности простого состояния равновесия к каноническому виду (139). 3. Инвариантность характеристического уравнения при регулярном преобразовании (144). 4. Некоторые предварительные замечания относительно возможной топологической структуры простых состояний равновесия (145).

§ 7. Расположение траекторий в окрестности простых состояний равновесия с характеристическими корнями, имеющими не равные нулю действительные части 146

1. Случай 1): характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и одинаковых знаков (состояние равновесия типа узел) (146). 2. Случай 2): характеристические корни — комплексные сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ (состояние равновесия типа фокус) (151). 3. Случай 3): характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и различных знаков, т. е. $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (состояние равновесия типа седло) (153). 4. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия (160). 5. Замечания по поводу других методов исследования характера состояний равновесия с не равными нулю действительными частями характеристических корней (161). 6. Примеры (162). 7. Простейшие примеры сложных состояний равновесия (164).

§ 8. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями 166

1. Вводные замечания (166). 2. Переход к полярной системе координат (166). 3. Сопоставление траекторий системы (I) и интегральных кривых уравнения (7) (170). 4. Построение функции последования на полупрямой θ=const (172). 5. Возможный характер отдельной траектории, проходящей через точку достаточно малой окрестности состояния равновесия (174). 6. Возможный характер разбиения на траектории достаточно малой окрестности состояния равновесия O (176). 7. Примеры (179).

§ 9. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия 182

1. Основное определение (182). 2. Угловой коэффициент направления, в котором траектория может стремиться к простому состоянию равновесия (185). 3. Узел с различными характеристическими корнями (187). 4. Дикритический узел (191). 5. Вырожденный узел (195). 6. Седло и фокус (199). 7. Сводка сведений о простых состояниях равновесия с не равными нулю действительными частями характеристических корней (200). 8. Примеры (203).

Глава V. **Теория индекса и ее приложения к динамическим системам** 205

Введение 205

§ 10. Индекс Пуанкаре 205

1. Вращение векторного поля (205). 2. Индекс простой замкнутой кривой по отношению к заданному на ней векторному полю (208). 3. Поле касательных к замкнутой кривой (212). 4. Определение индекса, данное Пуанкаре (213).

§ 11. Приложение теории индекса к динамическим системам 214

1. Две основные теоремы (214). 2. Индекс изолированной особой точки (214). 3. Индекс как криволинейный интеграл (216). 4. Вычисление индексов простых состояний равновесия динамической системы (217).

Глава VI. **Некоторые приемы качественного исследования конкретных динамических систем** 220

Введение 220

§ 12. Признаки отсутствия и существования замкнутых траекторий 223

1. Некоторые общие замечания о кольцеобразных областях, заполненных замкнутыми траекториями (223). 2. Случай, когда об отсутствии предельных циклов можно заключить непосредственно на основании расположения изоклин горизонтальных и вертикальных наклонов и характера поля между ними (224). 3. Критерий Дюлака и Бендиксона (226). 4. Применение индексов Пуанкаре и циклов однократного пересечения к решению вопросов существования предельных циклов (229). 5. Топографическая система кривых и контактная кривая (231). 6. Примеры (232).

§ 13. Поведение траекторий на бесконечности 237

1. Общие замечания. Преобразование Бендиксона (237). 2. Рассмотрение динамической системы, правые части которой многочлены на «сфере Пуанкаре» (241). 3. Пример исследования экватора (249).

§ 14. Использование методов приближенного вычисления для определения качественной структуры разбиения на траектории 249

1. Общие замечания (249). 2. Метод изоклин (250). 3. Специфика использования численных методов при определении качественной структуры разбиения на траектории (252). 4. Случай, когда доказательство существования предельного цикла возможно при помощи приближенного построения дуг траекторий (253). 5. Случай, когда топологическая структура разбиения на траектории принципиально не может быть установлена путем приближенного вычисления (построения) траекторий (254).

Глава VII. «Особые» траектории и ячейки динамической системы . . . 256

Введение 256

§ 15. Орбитно-устойчивые и орбитно-неустойчивые траектории и полутраектории 257

1. Основные определения (257). 2. Простейшие примеры орбитно-устойчивых и орбитно-неустойчивых траекторий (260). 3. Возможные типы орбитно-неустойчивых полутраекторий и траекторий (262). 4. Вспомогательные леммы о поведении полутраекторий в окрестности состояния равновесия (263). 5. Орбитно-неустойчивые траектории, стремящиеся к состоянию равновесия (266). 6. Сепаратрисы состояния равновесия (275). 7. Некоторые вспомогательные предложения (277). 8. Полутраектории, среди предельных точек которых есть отличные от состояний равновесия (280). 9. Возможные типы особых и неособых траекторий в случае конечного числа состояний равновесия. Случай конечного числа особых траекторий (284).

§ 16. Ячейки динамической системы в случае конечного числа особых траекторий 285

1. Вводные замечания (285). 2. Нормальная граница ограниченной области $\overline{G}^*$, содержащейся в области определения динамической системы (286). 3. Леммы о множестве точек, принадлежащих особым элементам (287). 4. Доказательство конечности числа ячеек (в случае конечного числа особых элементов) (288). 5. Случай динамической системы на сфере (290). 6. Поведение траекторий, близких к орбитно-устойчивым траекториям (291). 7. Некоторые предложения о незамкнутых орбитно-устойчивых траекториях (296). 8. Возможный характер неособых элементов внутри одной и той же ячейки (299). 9. Ячейки, заполненные замкнутыми траекториями (300). 10. Ячейки, заполненные незамкнутыми траекториями (304). 11. Свойства границы двусвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями (307). 12. Ячейки, в границу которых входят граничные дуги (313). 13. Полное качественное исследование динамической системы. Схема динамической системы (315).

Глава VIII. Схема состояния равновесия 316

Введение 316

§ 17. Состояние равновесия, к которому стремится хотя бы одна полутраектория 317

1. Вспомогательные предложения (317). 2. Возможный характер криволинейного сектора. Гиперболический (седловой), параболический и эллиптический сектор (322). 3. Леммы об эллиптических областях (328).

§ 18. «Элементарные области». Типы элементарных областей 330

1. Проведение дуги без контакта в параболическом секторе (330). 2. Проведение дуг без контакта в эллиптической области (336). 3. Правильная седловая область (337). 4. Топологическая тождественность разбиений на траектории элементарных областей одинакового типа (339).

§ 19. Локальная и полная (глобальная) схема состояния равновесия 346

1. Циклический порядок сепаратрис и эллиптических областей состояния равновесия, не являющегося центром (346). 2. Каноническая замкнутая кривая вокруг состояния равновесия (349). 3. Локальная схема состояния равновесия, не являющегося центром (351). 4. Полная (или глобальная) схема состояния равновесия, не являющегося центром (356). 5. Состояние равновесия типа центр (360).

Глава IX. Методы исследования некоторых типов сложных состояний равновесия 362

Введение 362

§ 20. Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия 363

1. Переход к полярным координатам (363). 2. Общий случай (364). 3. Особый случай (367). 4. Примеры (372).

§ 21. Топологическая структура сложного состояния равновесия в случае $\sigma = P'_x(0,0) + Q'_y(0,0) \neq 0$ 372

1. Вспомогательные преобразования и леммы (372). 2. Возможные топологические структуры сложного состояния равновесия в случае $\sigma \neq 0$ (377).

§ 22. Топологическая структура сложного состояния равновесия в случае $\sigma=0$ 385

1. Вспомогательные леммы (385). 2. Возможные топологические структуры сложного состояния равновесия в случае $\sigma = 0$ (397). 3. Упрощение исследования. Примеры (404).

Глава X. Схема предельного континуума и границы области G^* 411

Введение 411

§ 23. Свойства предельных континуумов и континуумов, входящих в границы ячеек, заполненных замкнутыми траекториями 412

1. Свойства ω- и α-предельных континуумов, не являющихся состоянием равновесия (412). 2. Нуль-предельные континуумы и их свойства (417). 3. Теорема о континууме, состоящем из особых траекторий, являющихся продолжением одна другой (420).

§ 24. Локальная схема предельного континуума и каноническая окрестность 421

1. ω (α)-перечисление ω-, α- и 0-предельных континуумов (421). 2. Тождественность перечислений двух предельных континуумов (423). 3. «Односторонняя» каноническая окрестность предельного континуума (424). 4. Локальные схемы ω-, α- и 0-предельных континуумов и теорема о тождественности разбиения на траектории канонических окрестностей континуумов с одинаковыми локальными схемами (426).

§ 25. Полная схема предельного континуума 432

1. Простые замкнутые кривые, образованные траекториями, составляющими предельный континуум (432). 2. Односторонние и двусторонние предельные континуумы (435). 3. Взаимное расположение континуумов и их канонических кривых (439). 4. Свободные и несвободные континуумы (441). 5. Полная (глобальная) схема предельного континуума (442).

§ 26. Схема границы области 447

1. Угловые точки граничных кривых (447). 2. Схема граничной кривой, схема границы и тождественность двух схем границы (449).

Глава XI. Схема динамической системы и основная теорема 453

Введение 453

§ 27. Правильная система канонических окрестностей. $\omega(\alpha)$-дуги и $\omega(\alpha)$-циклы 454

1. Обозначения для особых элементов динамической системы (454). 2. Правильные системы канонических окрестностей (454). 3. Элементарные дуги и свободные циклы без контакта (458). 4. Сопряженные элементарные ω- и α-дуги и сопряженные свободные ω- и α-циклы (461).

§ 28. Сопряженные свободные $\omega(\alpha)$-предельные и нуль-предельные континуумы и области между их каноническими окрестностями . . . 463

1. Взаимное расположение двух свободных сопряженных ω- и α-циклов (463). 2. Сопряженные ω- и α-предельные континуумы (465). 3. Сопряженные нуль-предельные континуумы (466). 4. Траектории, проходящие через концы сопряженных ω- и α-дуг (467). 5. Леммы о граничных особых элементах и ω- и α-дугах, являющихся частями граничных дуг без контакта (469). 6. Цепочки из особых элементов, траекторий и граничных дуг, соединяющих концы сопряженных ω- и α-дуг (472). 7. Области между сопряженными каноническими кривыми и между сопряженными элементарными дугами (478).

§ 29. Схема динамической системы и теорема о тождественности топологических разбиений на траектории 481

1. Схема динамической системы (481). 2. Соответствие по схеме между каноническими кривыми и дугами канонических кривых (486). 3. Сопряженные ω- и α-дуги двух систем D и D' с тождественными схемами (488). 4. Основная теорема (490). 5. Схема динамической системы на сфере. Схема динамической системы, определенной на плоскости и отображенной на сферу Пуанкаре (497).

Глава XII. Качественное исследование «в целом» конкретных динамических систем 499

§ 30. Примеры 499

Дополнение 519

§ 1. Элементарные сведения о множествах в евклидовом пространстве 519

1. Некоторые обозначения (519). 2. Сегмент и интервал (519). 3. Точка сгущения, граничная и внутренняя точка множества (519). 4. Множества открытые и замкнутые. Граница (520). 5. Расстояние между множествами. Компактные множества (520). 6. Связные множества. Континуум и область (520). 7. Области с общей границей (520). 8. Множества всюду плотные и нигде не плотные (521). 9. Окрестности, покрытия (521). 10. Топологический предел (521). 11. Отображение множеств друг на друга (521). 12. То-

нологическое отображение (522). 13. Теорема Брауэра об инвариантности области (522). 14. Системы функций, описывающие отображение множеств (522). 15. Простая дуга (522). 16. Простая замкнутая кривая (523).

§ 2. Простые замкнутые кривые и простые дуги на плоскости. Ориентация плоскости (направление обхода простых замкнутых кривых). Типы топологических отображений 523

1. Две основные теоремы (523). 2. Леммы о простой замкнутой кривой (523). 3. Направление обхода простых замкнутых кривых. Циклический порядок точек на простой замкнутой кривой (525). 4. Индуцированное направление на простой дуге, являющейся частью простой замкнутой кривой (525). 5. Ориентация плоскости (525). 6. Некоторые предложения о направлениях обхода простых замкнутых кривых, имеющих общую дугу или общую точку (527). 7. Два предложения о связи между порядком точек на непересекающихся простых замкнутых кривых (528). 8. Два типа топологических отображений плоскости в себя (сохраняющие ориентацию и изменяющие ориентацию) (528).

§ 3. Положительная и отрицательная «сторона» простой дуги 529

1. Области, характеризующие различные «стороны» простой дуги (529). 2. Определение областей, характеризующих различные стороны простой дуги, с помощью введения криволинейной системы координат (531). 3. Некоторые предложения о взаимном расположении дуг и простых замкнутых кривых (532). 4. Ограниченные области на плоскости (532).

§ 4. Лемма Адамара и теорема о неявных функциях 533

1. Классы функций (533). 2. Лемма Адамара (533). 3. Теорема о неявных функциях (534).

§ 5. Угол между векторами. Гладкая простая дуга и гладкая простая замкнутая кривая. Угол между двумя гладкими дугами 536

1. Угол между векторами (536). 2. Гладкая простая дуга (536). 3. Гладкая простая замкнутая кривая и кусочно-гладкая простая замкнутая кривая (536). 4. Гладкая линия (537). 5. Гладкие простые дуги, имеющие общую точку (537).

§ 6. Регулярное отображение. Криволинейные координаты. Некоторые предложения о гладких дугах и гладких замкнутых кривых . . . 538

1. Регулярное отображение (538). 2. Криволинейные координаты (539). 3. Преобразование компонент вектора при регулярном отображении. Контравариантный вектор. Преобразование касательного вектора (540). 4. Изменение угла между векторами при регулярном отображении. Роль якобиана преобразования (541). 5. Использование регулярного отображения при рассмотрении областей, характеризующих различные стороны простой гладкой дуги (541). 6. Один способ введения функций $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$ (542). 7. Пересечение двух гладких дуг и пересечения гладкой дуги с гладкой и кусочно-гладкой простой замкнутой кривой (544). 8. Два предложения о построении функций по заданным условиям (545).

§ 7. Сфера в евклидовом пространстве 547

1. Окрестность точки сферы (547). 2. Простая дуга и простая замкнутая кривая на сфере (548). 3. Покрытие сферы и координаты на сфере (548). 4. Одно частное простейшее координатное покрытие сферы (550). 5. Ориентация сферы и типы топологических отображений сферы в себя (551). 6. Функции, заданные на сфере (551).

§ 8. Основные теоремы теории дифференциальных уравнений 552

1. Теорема о существовании и единственности решения (552). 2. Теорема о непрерывной зависимости от начальных значений (553). 3. Производные по независимому переменному и по начальным значениям (553).

§ 9. К вопросу о понятии «качественной структуры» разбиения на траектории и о понятии особых и неособых траекторий 554

1. Сопоставление инвариантов топологических и регулярных отображений (554). 2. Различные подходы к выделению областей, заполненных траекториями «одинакового поведения» (555). 3. Случай бесконечного числа орбитно-неустойчивых траекторий (557). 4. Геометрический пример А. Г. Майера всюду плотного множества орбитно-неустойчивых траекторий — сепаратрис состояния равновесия (557).

§ 10. Теорема Бендиксона об индексе сложного состояния равновесия 559

Литература 563

Алфавитный указатель 566