

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ И КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматриваются вполне интегрируемые модели квантовой теории поля и статистической физики в двумерном пространстве-времени. Современный метод решения таких моделей—квантовый метод обратной задачи—последовательно изложен в книге. Он позволяет решить важнейшую задачу вычисления корреляционных функций и в явном виде получить асимптотику корреляционных функций на больших расстояниях. Общий подход иллюстрируется на широком классе моделей, среди которых наиболее известными являются бозе-газ частиц с точечным взаимодействием, модель синус-Гордон и магнетик Гейзенберга. Дан широкий обзор литературы, проводится сравнение различных способов решения моделей.

Для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области математической и теоретической физики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------	---

ЧАСТЬ I

КООРДИНАТНЫЙ АНЗАТЦ БЕТЕ

Введение	5
Г л а в а I. Одномерный бозе-газ	6
§ 1. Координатный анзатц Бете	7
§ 2. Периодические граничные условия	И
§ 3. Термодинамический предел при нулевой температуре	16
§ 4. Возбуждения над основным состоянием	20
§ 5. Термодинамика модели	24
§ 6. Уравнение Янга	29
§ 7. Предельные случаи	32
§ 8. Возбуждения около состояния термодинамического равновесия	35
Приложение 1	37
Приложение 2	38
Приложение 3	39
Заключение	40
Г л а в а II. Одномерный магнетик Гейзенберга	41
§ 1. Уравнения Бете для XXZ магнетика	42
§ 2. Основное состояние	46
§ 3. Взаимодействие с магнитным полем	48
§ 4. XXX магнетик	50
§ 5. Дробный заряд	51
Приложение	55
Заключение	57

Глава III. Массивная модель Тирринга	58
§ 1. Анзатц Бете	58
§ 2. Основное состояние	61
§ 3. Дробный заряд и выталкивание за обрезание	63
Заключение	65
Обзор литературы к части I	66

ЧАСТЬ II

КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Введение	67
Глава IV. Классическая g -матрица	68
§ 1. Представление нулевой кривизны	68
§ 2. Классическая g -матрица	72
§ 3. Примеры	76
Приложение. Тензорные обозначения	77
Заключение	78
Глава V. Основные положения квантового метода обратной задачи	79
§ 1. Общая схема	79
§ 2. Соотношения Янга — Бакстера	83
§ 3. Тождества следов	84
§ 4. Модели квантовой теории поля	87
§ 5. Фундаментальные спинные модели	88
§ 6. Фундаментальные модели классической статистической физики	92
Заключение	96
Глава VI. Алгебраический анзатц Бете	97
§ 1. Алгебраический анзатц Бете	97
§ 2. Замечания об алгебраическом анзатце Бете	101
§ 3. Примеры	103
§ 4. Принцип Паули для одномерных взаимодействующих бозонов	106
§ 5. Оператор сдвига	109
§ 6. Классификация матриц монодромии	112
§ 7. Несколько замечаний о классификации матриц монодромии	114
§ 8. Квантовый детерминант	117
§ 9. Рекуррентные свойства статсуммы Z_N	118
§ 10. Выражение для Z_N через определитель	121
Приложение. Матричная реализация квантовых операторов	121
Заключение	122
Глава VII. Интегрируемые модели квантовой теории поля на решетке	123
§ 1. Классические модели теории поля на решетке	124
§ 2. Классическая модель синус-Гордон на решетке	127
§ 3. Квантовая модель на решетке, связанная с нелинейным уравнением Шредингера	128
§ 4. Классификация квантовых L -операторов	133
§ 5. Квантовая модель синус-Гордон на решетке	135

Закключение	136
Обзор литературы к части II	137

Ч А С Т Ь III

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Введение	138
Г л а в а VIII. Теория скалярных произведений	141
§ 1. Скалярное произведение	141
§ 2. Свойства коэффициентов K_N	143
§ 3. Формула для вычета	146
Г л а в а IX. Нормы бетевских волновых функций	149
§ 1. Обобщенная гипотеза Годена	150
§ 2. Свойства якобиана	151
§ 3. Доказательство гипотезы Годена	153
§ 4. Термодинамический предел	155
Г л а в а X. Формфакторы	156
§ 1. Обобщенная двухузельная модель	157
§ 2. Свойства оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$	159
§ 3. Представление формфактора оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$	161
§ 4. Формфакторы операторов Q_1 и Q_1^2	168
Г л а в а XI. Среднее значение оператора Q_1	171
§ 1. Среднее значение оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$	171
§ 2. Неприводимые части	173
§ 3. Основные свойства среднего значения оператора Q_1^2	177
§ 4. Выражение величины $\ Q_1^2\ _N$ через неприводимые части	179
Закключение	183
Г л а в а XII. Корреляционные функции	184
§ 1. Модель НШ и двухузельная модель	184
§ 2. Величина $\langle Q_1^2(x) \rangle^0$ в термодинамическом пределе	185
§ 3. Вклад f_c -частичных процессов	191
§ 4. Анализ нелинейного интегрального уравнения	193
§ 5. Коррелятор токов в модели бозе-газа	197
§ 6. Коррелятор спинов в XXZ магнетике Гейзенберга	200
Закключение	205
Обзор литературы к части III	206

Ч А С Т Ь IV

АСИМПТОТИКА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение	207
Г л а в а XIII. Температурные корреляторы	207
§ 1. Усреднение по состоянию термодинамического равновесия	208
§ 2. Температурный коррелятор токов	210
§ 3. Анализ интегрального уравнения	211
§ 4. Предел сильной связи	212
§ 5. Асимптотика на больших расстояниях	214

Заключение	217
Г л а в а XIV. Асимптотика корреляционных функций при нулевой температуре	217
§ 1. Асимптотика корреляторов в одномерном бозе-газе	218
§ 2. Асимптотика корреляторов в XXZ магнетике Гейзенберга	219
Заключение	221
Обзор литературы к части IV	222
Список литературы	223

В книге излагается квантовый метод обратной задачи (КМОЗ), созданный в конце семидесятых годов Л. Д. Фаддеевым и его учениками в Ленинграде. Этот метод возродил интерес к точно решаемым моделям квантовой теории поля и статистической физики.

Квантовый метод обратной задачи является естественным развитием метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), который был открыт в 1967 г. Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [11]. С помощью этого метода удалось найти обширный класс двумерных нелинейных эволюционных уравнений, допускающих явное решение. В этом классе находятся такие известные уравнения как нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордон, массивная модель Тирринга и ферромагнетик Гейзенберга. Эти уравнения достаточно универсальны и имеют приложения в различных областях теоретической и математической физики, многие из них описывают конкретные физические явления. Дальнейшее развитие метода обратной задачи основывалось на результатах работы Лакса [14], в которой был выявлен алгебраический механизм метода, и на работе Захарова и Фаддеева [2], в которой дана его гамильтонова интерпретация. Гамильтоновы системы, соответствующие этим уравнениям, являются вполне интегрируемыми. В последнее время МОЗР интенсивно развивался. Этот метод подробно изложен в монографиях [1, 8].

Гамильтонова интерпретация МОЗР показала, что переход к данным рассеяния вспомогательной линейной задачи можно рассматривать как преобразование к переменным типа «действие-угол». Это соображение привело к последовательной схеме квантования таких уравнений в рамках квазиклассического приближения. В работах [3, 10, 12] была создана квантовая теория солитонов. В этих работах было доказано, что солитону (частицеподобному решению нелинейного эволюционного уравнения) после квантования соответствует элементарная частица в спектре квантового гамильтониана, были вычислены наблюдаемые величины, характеризующие квантовый солитон. Впоследствии оказалось, что многие квазиклассические результаты точны.

В 1978 г. Л. Д. Фаддеевым и его учениками был создан квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) [4—7; 9; 13]. С помощью квантового метода обратной задачи удалось построить и решить большое

количество двумерных моделей квантовой теории поля и статистической физики. В книге мы ставим целью упростить изложение и сделать его более элементарным, поэтому мы старались проиллюстрировать все общие положения на нескольких простых моделях. Основным примером является квантовое нелинейное уравнение Шредингера (другое название этой модели — одномерный бозе-газ). Много внимания уделяется также магнетику Гейзенберга и модели синус-Гордон (она эквивалентна массивной модели Тирринга).

Многие результаты в этих моделях были получены задолго до создания квантового метода обратной задачи с помощью анзатца (подстановки) Бете. Этот способ построения явного вида собственных функций некоторых квантовомеханических гамильтонианов был открыт Гансом Бете в 1931 г. Он обладает особенной простотой и наглядностью, в то же время он тесно связан с квантовым методом обратной задачи.

Часть I книги посвящена последовательному изложению анзатца Бете. В части II изложены основные положения квантового метода обратной задачи. Много внимания посвящено алгебраической формулировке анзатца Бете. Часть III книги посвящена исследованию корреляционных функций вполне интегрируемых моделей.

Корреляционные функции являются важнейшими характеристиками модели. Для физики особенно интересны их асимптотики на больших расстояниях, которые исследуются в части IV. В настоящей книге мы исследуем корреляционные функции с помощью алгебраического анзатца Бете. Более конкретно цель каждой части и главы формулируется в специальных вступлениях.

В книге принята двойная нумерация формул: первое число означает номер параграфа, а второе — порядковый номер формулы в этом параграфе. Кроме того, ссылки на формулы из других глав снабжены дополнительным (первым) числом, соответствующим номеру главы. Теоремы и леммы нумеруются отдельно в каждой главе.

Наши научные убеждения сложились под влиянием Л. Д. Фаддеева. Благоприятная атмосфера лаборатории математических проблем физики Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР позволила нам успешно завершить этот труд. Мы особенно признательны В. Н. Попову, Л. А. Тахтаджану, П. П. Кулишу, Н. Ю. Решетихину, Е. К. Склянину, Ф. А. Смирнову и А. Н. Кириллову.

ВВЕДЕНИЕ

В части I излагается анзатц Бете — метод решения обширного класса моделей квантовой теории поля и статистической физики в двумерном пространстве-времени. Он был предложен Г. Бете в 1931 г. и носит ныне его имя. Метод получил дальнейшее развитие в тридцатые годы в работах Хюльтена и, в особенности, в шестидесятые — семидесятые годы в работах Янгов, Либа, Сазерленда, Бакстера, Годена и других исследователей.

В этой части детально разобраны три основные модели: одномерный бозе-газ, магнетик Гейзенберга и массивная модель Тирринга. Построены собственные функции гамильтонианов этих моделей. При наложении периодических граничных условий возникает система уравнений на разрешенные значения импульсов, которая называется системой уравнений Бете. Эта система порождается некоторой вариационной задачей; соответствующее действие называется действием Янга и играет важную роль при исследовании моделей. Система уравнений Бете позволяет осуществить аккуратный переход к термодинамическому пределу, в котором удается вычислить такие важные величины как энергия основного состояния, скорость звука и т. п. Исследуются также возбуждения над основным состоянием — физические частицы. Для определения их физических характеристик (энергии, импульса и матрицы рассеяния) вводится и используется техника одевающих уравнений. Последовательно излагается термодинамика модели.

Мы начинаем изложение с координатного анзатца Бете не только по историческим причинам, но и потому, что этот подход обладает простотой и наглядностью. Основная идея построения бетевской волновой функции состоит в использовании свойства двухчастичной приводимости. Оказывается, что для интегрируемых моделей многочастичная матрица рассеяния равна произведению парных. Многочастичная волновая функция тоже строится из элементов двухчастичной волновой функции. Другой важной чертой интегрируемых моделей является отсутствие множественного рождения на поверхности масс. В части II мы объясним связь этого факта с существованием бесконечного числа законов сохранения в таких моделях.

Материал этой части организован следующим образом. В гл. I подробно излагается теория одномерного бозе-газа с точечным

отталкиванием между частицами. В гл. II приводится решение ХХХ магнетика Гейзенберга во внешнем магнитном поле. В гл. III решена модель квантовой теории спинорного поля с четырехточечным самодействием в двумерном пространстве-времени — массивная модель Тирринга. Заметим, что эта модель эквивалентна модели бозонного поля с существенно нелинейным самодействием — известной модели синус-Гордон.

Глава I

ОДНОМЕРНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ

Одномерный бозе-газ с точечным взаимодействием между частицами (нелинейное уравнение Шредингера в квантовом варианте) — одна из основных и наиболее важных моделей, решаемых с помощью анзаца Бете. Эта модель является наиболее изученной интегрируемой моделью; ее можно назвать академической. Мы начинаем с построения собственных функций гамильтониана в конечном объеме. Затем рассматриваются физически интересные величины в термодинамическом пределе при нулевой температуре и подробно исследуется термодинамика при конечных температурах. Вводится ряд важнейших концепций, которые будут в дальнейшем применяться к другим моделям.

Перейдем к более детальному описанию содержания гл. I. В § 1 излагается конструкция собственных функций гамильтониана. Их явный вид и, в особенности, двухчастичная приводимость являются характерными для всех моделей, решаемых с помощью анзаца Бете. В § 2 на волновую функцию накладываются периодические граничные условия; выводится и подробно анализируется система уравнений Бете для импульсов частиц. В логарифмическом виде эта система представляет собой условие минимума некоторого функционала. Соответствующее действие называется действием Янга. Роль уравнений Бете и действия Янга выходят за рамки конкретной модели. В § 3 рассматривается переход к термодинамическому пределу: объем газа устремляется к бесконечности при фиксированной плотности. Система уравнений Бете позволяет аккуратно проследить этот переход. Построено основное состояние газа. Вычислены плотность распределения частиц и энергия основного состояния. Метод перехода к термодинамическому пределу, описанный в этом параграфе, является совершенно общим и применим к любым моделям, решаемым с помощью анзаца Бете. В § 4 построены возбуждения над основным состоянием и вычислены их основные характеристики — энергия, импульс и матрица рассеяния. Вычисления проводятся с помощью техники одевающих уравнений, которая также является универсальной при вычислении наблюдаемых величин в интегрируемых моделях в случае, когда основное состояние представляет собой море Дирака. В § 5 построена термодинамика модели. Предлагается

подход с помощью функционального интеграла, который является наиболее универсальным и позволяет решать любые задачи при конечной температуре. Предложенный подход позволит в конце концов вычислить корреляционные функции при конечной температуре (см. гл. XIII). В этом параграфе выводятся основные уравнения, описывающие состояние термодинамического равновесия, в том числе уравнение Янга. В § 6 анализируется уравнение Янга, которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение. Доказана теорема существования. В § 7 рассмотрено состояние термодинамического равновесия в случае, когда температура стремится к нулю. Показано, что это состояние устремляется к основному состоянию гамильтониана при нулевой температуре. При изучении этого предела удастся получить более детальную информацию об основном состоянии при нулевой температуре, а также доказать теорему существования для уравнения на энергию элементарного возбуждения. Обсуждается также предел сильной связи, в котором модель эквивалентна свободным фермионам и все интегральные уравнения решаются в явном виде. В § 8 изучаются возбуждения около состояния термодинамического равновесия и дается их трактовка в терминах частиц. Важное замечание состоит в том, что формулы при конечной температуре отличаются от формул при нулевой лишь заменой меры интегрирования.

§ 1. Координатный анзац Бете

Одномерный бозе-газ описывается нерелятивистским комплексным квантовым бозе-полем $\psi(x, t)$ с каноническими одновременными перестановочными соотношениями

$$\begin{aligned} [\psi(x, t), \psi^+(y, t)] &= \delta(x-y), \\ [\psi(x, t), \psi(y, t)] &= [\psi^+(x, t), \psi^+(y, t)] = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Все рассмотрения этой главы проводятся в фиксированный момент времени, поэтому временной аргумент t будем в дальнейшем опускать.

Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \int dx [\partial_x \psi^+(x) \partial_x \psi(x) + c \psi^+(x) \psi^+(x) \psi(x) \psi(x)]. \quad (1.2)$$

Здесь c — константа взаимодействия. Соответствующее уравнение движения

$$i \partial_t \psi = -\partial_x^2 \psi + 2c \psi^+ \psi \psi \quad (1.3)$$

называется нелинейным уравнением Шредингера. Нетривиальный термодинамический предел в этой модели возникает лишь при $c > 0$ (отталкивание). Ниже рассмотрен только случай $c > 0$. Фоковский вакуум $|0\rangle$, который определяется соотношением

$$\psi(x)|0\rangle = 0, \quad x \in R_1, \quad (1.4)$$

будет играть важную роль в дальнейшем. Мы будем называть $|0\rangle$ псевдовакуумом, чтобы отличить его от физического вакуума, который реализует основное (с наименьшей энергией) состояние модели и представляет собой море Дирака. Дуальный псевдовакуум $\langle 0|$ определяется как $\langle 0| = |0\rangle^+$ и обладает свойством

$$\langle 0|\psi^+(x) = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \quad (1.5)$$

крест означает эрмитово сопряжение. Операторы числа частиц Q и импульса P имеют вид

$$Q = \int \psi^+(x) \psi(x) dx, \quad (1.6)$$

$$P = -\frac{i}{2} \int \{\psi^+(x) \partial_x \psi(x) - [\partial_x \psi^+(x)] \psi(x)\} dx. \quad (1.7)$$

Они являются интегралами движения, т. е. коммутируют с гамильтонианом:

$$[H, Q] = [H, P] = 0. \quad (1.8)$$

Следует отметить, что в части II удастся построить бесконечный набор интегралов движения.

Приступим теперь к построению полного набора собственных функций гамильтониана. Совместные собственные функции $|\Psi_N\rangle$ трех операторов H, P, Q будем искать в виде

$$\begin{aligned} |\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N z \chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \psi^+(z_1) \dots \psi^+(z_N) |0\rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Функция χ_N является симметричной функцией аргументов z_j . Уравнения на собственные значения

$$H|\Psi_N\rangle = E_N|\Psi_N\rangle, \quad Q|\Psi_N\rangle = N|\Psi_N\rangle, \quad P|\Psi_N\rangle = P_N|\Psi_N\rangle \quad (1.10)$$

эквивалентны требованию, чтобы функция χ_N являлась собственной функцией квантовомеханического гамильтониана $\mathcal{H}_N$ одномерного бозе-газа и оператора импульса $\mathcal{P}_N$:

$$\mathcal{H}_N = \sum_{j=1}^N \left(-\frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) + 2c \sum_{N \geq j > k \geq 1} \delta(z_j - z_k); \quad \mathcal{P}_N = \sum_{j=1}^N \left(-i \frac{\partial}{\partial z_j} \right), \quad (1.11)$$

$$\mathcal{H}_N \chi_N = E_N \chi_N \quad (1.12)$$

(заметим, что удастся найти непрерывную собственную функцию).

Итак, задача квантовой теории поля сведена к задаче квантовой механики. Гамильтониан $\mathcal{H}_N$ описывает N нерелятивистских бозонов с парным дельтаобразным потенциалом. При $c > 0$ они отталкиваются. Благодаря симметрии функции χ_N достаточно рассмотреть ее в области

$$T: z_1 < z_2 < \dots < z_N, \quad (1.13)$$

а также на границе этой области.

В этой области функция χ_N является собственной функцией свободного гамильтониана

$$\mathcal{H}_N^0 = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial z_j^2}; \quad \mathcal{H}_N^0 \chi_N = E_n \chi_N. \quad (1.14)$$

На границе области выполняются следующие граничные условия:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_{j+1}} - \frac{\partial}{\partial z_j} - c \right) \chi_N = 0 \quad \text{при} \quad z_{j+1} = z_j + 0. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.14) и граничное условие (1.15) эквивалентны уравнению (1.12). Чтобы увидеть это, заметим, во-первых, что потенциал в гамильтониане (1.11) равен нулю в области T (1.13). Во-вторых, проинтегрируем уравнение (1.12) по переменной $(z_{j+1} - z_j)$ по малой окрестности нуля $|z_{j+1} - z_j| < \varepsilon$, считая, что все остальные переменные z_k ($k \neq j, j+1$) лежат в области T . Мы придем к граничному условию (1.15).

Теперь построим функцию χ_N , удовлетворяющую уравнению (1.14) и граничному условию (1.15). Для этого рассмотрим в области T собственную функцию оператора $\mathcal{H}_N^0$, заданную как определитель матрицы $N \times N$ с элементами $\exp \{i \lambda_j z_k\}$:

$$\det \{ \exp [i \lambda_j z_k] \}. \quad (1.16)$$

Важно отметить, что эта функция антисимметрична по z и, следовательно, обращается в нуль на границе области T . Легко убедиться, что искомая функция χ_N имеет вид:

$$\chi_N = \text{const} \left(\prod_{N \geq j > k \geq 1} \left[\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial z_k} + c \right] \right) \det \{ \exp [i \lambda_j z_k] \}. \quad (1.17)$$

Очевидно, что χ_N удовлетворяет уравнению (1.14). Покажем теперь, что граничные условия также выполняются. Проверим, например, равенство

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_1} - c \right] \chi_N = 0 \quad \text{при} \quad z_2 = z_1 + 0. \quad (1.18)$$

Для этого запишем χ_N в виде

$$\chi_N = \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_1} + c \right) \tilde{\chi}_N; \quad (1.19)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_N = \text{const} \prod_{j=3}^N \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial z_1} + c \right) & \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial z_2} + c \right) \times \\ & \times \prod_{N \geq j > k \geq 3} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial z_k} + c \right) \det [e^{i \lambda_j z_k}]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Заметим, что $\tilde{\chi}_N$ антисимметрична относительно замены $z_1 \leftrightarrow z_2$:

$$\tilde{\chi}_N(z_1, z_2) = -\tilde{\chi}_N(z_2, z_1) \quad (1.21)$$

и обращается в нуль при $z_1 = z_2$.

Перепишем соотношение (1.18) в виде

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 - c^2 \right] \tilde{\chi}_N = 0 \quad \text{при} \quad z_2 = z_1. \quad (1.22)$$

Левая часть этого соотношения меняет знак при перестановке z_1 и z_2 ; отсюда следует его справедливость. Аналогично можно проверить все остальные граничные условия. Итак, выражение (1.17) удовлетворяет и уравнению, и граничным условиям. Таким образом, χ_N (1.17) — это искомая собственная функция гамильтониана $\mathcal{H}_N$ (1.11). Перепишем по-другому явное выражение для χ_N . Для этого запишем определитель (1.16) как сумму по перестановкам N чисел 1, 2, ..., N :

$$\det \{ \exp [i \lambda_j z_k] \} = \sum_P (-1)^{[P]} \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{p_n} \right\}, \quad (1.23)$$

где $[P]$ — четность перестановки P . Для волновой функции χ_N в области T (1.13) получаем:

$$\begin{aligned} \chi_N = & \{ N! \prod_{j>k} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2] \}^{-1/2} \times \\ & \times \sum_P (-1)^{[P]} e^{i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{p_n}} \prod_{j>k} (\lambda_{p_j} - \lambda_{p_k} - ic). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Это соответствует следующему выбору константы в (1.17):

$$\text{const} = (-i)^{N(N-1)/2} \{ N! \prod_{j>k} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2] \}^{-1/2}. \quad (1.25)$$

Теперь продолжим функцию χ_N по симметрии из области T во все R_N :

$$\begin{aligned} \chi_N = & \{ N! \prod_{j>k} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2] \}^{-1/2} \times \\ & \times \sum_P (-1)^{[P]} e^{i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{p_n}} \prod_{j>k} (\lambda_{p_j} - \lambda_{p_k} - ic \varepsilon(z_j - z_k)); \end{aligned} \quad (1.26)$$

здесь $\varepsilon(z) = \text{sign } z$ — знаковая функция. По-видимому, впервые способ построения бетевской волновой функции, изложенный выше, был предложен Годеном.

Формула (1.26) и определяет бетевскую волновую функцию. Она двухчастично приводима. Заметим, что во всех моделях, решаемых с помощью анзаца Бете, волновая функция имеет вид, аналогичный (1.26).

Обсудим подробнее свойства волновой функции. Функция χ_N является симметричной и непрерывной функцией всех z_j , что становится очевидным, если переписать выражение для χ_N в виде

$$\chi_N = \frac{\prod_{j>k} (\lambda_j - \lambda_k)}{\sqrt{N! \prod_{j>k} [(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2]}} \sum_P e^{i \sum_{n=1}^N z_n \lambda_{p_n}} \prod_{j>k} \left[1 - \frac{ic \varepsilon(z_j - z_k)}{(\lambda_{p_j} - \lambda_{p_k})} \right]. \quad (1.27)$$

Отсюда следует также, что χ_N является антисимметричной функцией импульсов λ_j :

$$\begin{aligned}\chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_N) = \\ = -\chi_N(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N).\end{aligned}\quad (1.28)$$

В частности, $\chi_N = 0$, если $\lambda_j = \lambda_k$ при $j \neq k$. Антисимметричность функции χ_N является основанием принципа Паули для одномерных взаимодействующих бозонов, который крайне важен при построении основного состояния системы как моря Дирака (полное доказательство принципа Паули см. в § VI.4).

Физическое объяснение принципа Паули состоит в следующем. Известно, что в двумерном пространстве-времени не выполняется теорема о связи спина со статистикой. Некоторые бозонные модели эквивалентны фермионным, например, модель синус-Гордон — массивной модели Тирринга, одномерный бозе-газ при $c = \infty$ — свободным фермионам. Эта эквивалентность и объясняет принцип Паули. Таким образом, мы построили совместные собственные функции (1.26) операторов H , P , Q . Собственные значения этих операторов имеют вид

$$E_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2, \quad P_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j, \quad Q_N = N. \quad (1.29)$$

Волновые функции (1.26) ортонормированы в R_N [1.7]:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} d^N z \chi_N^*(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \chi_N(z_1, \dots, z_N | \mu_1, \dots, \mu_N) = \\ = (2\pi)^N \prod_{j=1}^N \delta(\lambda_j - \mu_j).\end{aligned}\quad (1.30)$$

Здесь подразумевается, что импульсы $\{\lambda_j\}$ и $\{\mu_j\}$ лежат в области

$$T: \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N, \quad \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_N. \quad (1.31)$$

В той же работе доказана полнота этих собственных функций:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} d^N \lambda \chi_N^*(z_1, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \chi_N(y_1, \dots, y_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \\ = (2\pi)^N \prod_{j=1}^N \delta(z_j - y_j).\end{aligned}\quad (1.32)$$

Здесь $\{z_j\}$ и $\{y_j\}$ лежат в области

$$T: z_1 < z_2 < \dots < z_N; \quad y_1 < y_2 < \dots < y_N. \quad (1.33)$$

§ 2. Периодические граничные условия

Для исследования многих свойств бозе-газа и особенно для построения термодинамики модели, удобно наложить на волновые функции периодические граничные условия. С этой целью поместим

систему в периодический ящик длины L . Волновая функция χ_N будет периодична по каждому z_j при всех остальных z_k ($k \neq j$) фиксированных:

$$\chi_N(z_1, \dots, z_j + L, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \chi_N(z_1, \dots, z_j, \dots, z_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad j=1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Это приводит к следующей системе уравнений на разрешенные значения импульсов λ_j (см. формулу (1.26) для χ_N):

$$e^{i\lambda_j L} = - \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_j - \lambda_k + ic}{\lambda_j - \lambda_k - ic}, \quad j=1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) будем называть *уравнениями Бете*. Система уравнений Бете играет важную роль. Исследуем свойства этой системы более детально. Напомним, что $c > 0$ и $L > 0$.

Теорема 1. *Решениями системы (2.2) могут быть только вещественные числа λ_j .*

Доказательство. Воспользуемся следующими свойствами функций $\exp\{i\lambda L\}$ и $(\lambda + ic)/(\lambda - ic)$:

$$\begin{aligned} |\exp\{i\lambda L\}| &\leq 1 \quad \text{при} \quad \text{Im } \lambda \geq 0, \\ |\exp\{i\lambda L\}| &\geq 1 \quad \text{при} \quad \text{Im } \lambda \leq 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\left| \frac{\lambda + ic}{\lambda - ic} \right| \geq 1 \quad \text{при} \quad \text{Im } \lambda \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\left| \frac{\lambda + ic}{\lambda - ic} \right| \leq 1 \quad \text{при} \quad \text{Im } \lambda \leq 0.$$

Предположим, что $\{\lambda_j\}$ — решение системы (2.2) — существует, причем λ_j ($j=1, \dots, N$) являются комплексными числами. Импульс с наибольшей мнимой частью обозначим через $\lambda_{\max}$:

$$\text{Im } \lambda_{\max} \geq \text{Im } \lambda_j, \quad j=1, \dots, N, \quad \lambda_{\max} \in \{\lambda_j\}. \quad (2.5)$$

Если таких импульсов существует несколько, возьмем один из них. В системе (2.2) выберем уравнение, для которого $\lambda_j = \lambda_{\max}$, и вычислим модуль обеих частей этого уравнения, воспользовавшись неравенством (2.4):

$$|e^{i\lambda_{\max} L}| = \left| \prod_k \frac{\lambda_{\max} - \lambda_k + ic}{\lambda_{\max} - \lambda_k - ic} \right| \geq 1. \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что $\text{Im } \lambda_{\max} \leq 0$ (см. (2.3)), а следовательно, используя (2.5), получим

$$\text{Im } \lambda_j \leq 0, \quad j=1, \dots, N. \quad (2.7)$$

Аналогично определим $\lambda_{\min}$: $\text{Im } \lambda_{\min} \leq \text{Im } \lambda_j$. Повторяя рассуждения, получим $0 \leq \text{Im } \lambda_{\min} \leq \text{Im } \lambda_j$. Из этого неравенства и из (2.7) следует, что $\text{Im } \lambda_j = 0$, $j=1, \dots, N$. Теорема 1 доказана.

Обсудим теперь существование решения системы (2.2). С этой целью прологарифмируем ее:

$$\varphi_j = 2\pi \tilde{n}_j, \quad j=1, \dots, N; \quad (2.8)$$

здесь $\tilde{n}_j$ — произвольный набор целых чисел. Мы ввели также переменные

$$\varphi_j = L\lambda_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \Phi(\lambda_j - \lambda_k); \quad (2.9)$$

здесь

$$\Phi(\lambda) = i \ln \left(\frac{\lambda + ic}{\lambda - ic} \right), \quad -2\pi < \Phi(\lambda) < 0, \quad \text{Im } \lambda = 0. \quad (2.10)$$

Удобнее вместо функции $\Phi(\lambda)$ использовать антисимметричную функцию $\theta(\lambda)$:

$$\theta(\lambda) = \Phi(\lambda) + \pi, \quad \theta(\lambda) = -\theta(-\lambda). \quad (2.11)$$

Эта функция является монотонно возрастающей на вещественной оси:

$$\theta(\lambda_2) > \theta(\lambda_1) \quad \text{при} \quad \lambda_2 > \lambda_1; \quad \theta(\pm \infty) = \pm \pi, \quad (2.12)$$

$$\theta'(\lambda) = \frac{2c}{c^2 + \lambda^2} > 0.$$

Перепишем систему (2.8) с помощью этой функции:

$$L\lambda_j + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi n_j. \quad (2.13)$$

Здесь целые (или полуцелые) числа n_j определены так:

$$n_j = \tilde{n}_j + (N-1)/2. \quad (2.14)$$

Система (2.13) эквивалентна системе (2.2). Уравнения (2.13) мы также будем называть *системой уравнений Бете*.

Теорема 2. Решения системы (2.13) уравнений Бете существуют и единственным образом определяются набором целых (или полуцелых) чисел n_j .

Доказательство. Воспользуемся тем, что система (2.13) получается из вариационного принципа со следующим действием Янга:

$$S = \frac{1}{2} L \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - 2\pi \sum_{j=1}^N n_j \lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k}^N \theta_1(\lambda_j - \lambda_k); \quad (2.15)$$

здесь $\theta_1(\lambda) = \int_0^\lambda \theta(\mu) d\mu$. Уравнения (2.13) возникают как условия

минимума этого функционала, $\partial S / \partial \lambda_j = 0$. Чтобы доказать теорему, достаточно показать, что функционал S является выпуклым и имеет единственный минимум. Для этого достаточно доказать, что матрица вторых производных действия $\partial^2 S / \partial \lambda_j \partial \lambda_k$ является положительно определенной (все собственные значения являются положительными). Приведем явный вид этой матрицы:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_l} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_l} = \varphi'_{jl} = \delta_{jl} \left[L + \sum_{m=1}^N K(\lambda_j, \lambda_m) \right] - K(\lambda_j, \lambda_l); \quad (2.16)$$

здесь

$$K(\lambda, \mu) = \Phi'(\lambda - \mu) = \theta'(\lambda - \mu) = \frac{2c}{c^2 + (\lambda - \mu)^2}. \quad (2.17)$$

Возьмем некоторый вещественный вектор v_j и вычислим квадратичную форму:

$$\sum_{j,l} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_l} v_j v_l = \sum_{j=1}^N L v_j^2 + \sum_{j>l=1}^N K(\lambda_j, \lambda_l) (v_j - v_l)^2 \geq L \sum_{j=1}^N v_j^2 > 0. \quad (2.18)$$

Итак, матрица вторых производных является положительно определенной, а само действие — выпуклым. Действие S имеет единственный минимум, который и определяет решение уравнений Бете. Теорема 2 доказана.

В гл. IX мы увидим, что квадрат нормы волновой функции χ_N в периодическом ящике равен определителю матрицы вторых производных действия Янга на решении системы уравнений Бете:

$$\int_0^L |\chi_N|^2 d^N z = \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_l} \right). \quad (2.19)$$

Тривиальным следствием антисимметрии $\theta(\lambda)$ является следующее равенство:

$$P_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j = \frac{2\pi}{L} \sum_{j=1}^N n_j. \quad (2.20)$$

Слева здесь стоит полный импульс системы P_N (1.29).

Решение системы уравнений Бете (2.13) обладает следующим важным свойством:

Теорема 3. Если $n_j > n_k$, то $\lambda_j > \lambda_k$; если $n_j = n_k$, то $\lambda_j = \lambda_k$.

Доказательство. Рассмотрим разность двух уравнений системы

$$L(\lambda_j - \lambda_k) + \sum_{l=1}^N [\theta(\lambda_j - \lambda_l) - \theta(\lambda_k - \lambda_l)] = 2\pi(n_j - n_k). \quad (2.21)$$

Поскольку $\theta(\lambda)$ является монотонной функцией, то левая часть имеет тот же знак, что и первое слагаемое. Отсюда следует утверждение теоремы.

Таким образом, при $n_j = n_k$ имеем $\lambda_j = \lambda_k$. Но из принципа Паули (§ VI.4) следует, что при этом волновая функция обращается в нуль. Итак, следует полагать, что $n_j \neq n_k$ при $j \neq k$. Так как волновая функция является антисимметрической функцией λ_j , то всегда можно считать, что $\lambda_j > \lambda_k$ при $j > k$, а следовательно, и

$$n_j > n_k \quad \text{при} \quad j > k. \quad (2.22)$$

Перейдем теперь к изучению свойств, которые будут необходимы при переходе к термодинамическому пределу.

1) Различные λ_j из решения системы (2.13) отделены друг от друга некоторым интервалом:

$$\frac{2\pi(n_j - n_k)}{L} \geq |\lambda_j - \lambda_k| \geq \frac{2\pi(n_j - n_k)}{L(1 + 2D/c)} \geq \frac{2\pi}{L(1 + 2D/c)}, \quad j \neq k. \quad (2.23)$$

Здесь $D = N/L$ — это плотность бозе-газа. Эту оценку легко получить из (2.21), используя следующие неравенства:

$$0 < K(\lambda, \mu) < 2/c, \quad \text{Im } \lambda = \text{Im } \mu = 0, \quad (2.24)$$

$$\theta(\lambda) - \theta(\mu) = \int_{\mu}^{\lambda} K(v, 0) dv \leq \frac{2}{c}(\lambda - \mu); \quad \lambda > \mu. \quad (2.25)$$

2) Функционал энергии $\sum_{j=1}^N \lambda_j^2$ в секторе с фиксированным числом частиц N при условии, что $\{\lambda_j\}$ является решением системы уравнений Бете (2.13), минимизируется следующим набором целых чисел n_j (при нечетных N) или полуцелых (при четных N) [1.7]:

$$n_j = -\left(\frac{N-1}{2}\right) + j - 1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.26)$$

(Это совершенно очевидно при бесконечной константе связи $c = \infty$.)

3) Введем функцию $\lambda(x)$ от вещественного параметра x , тесно связанную с решением $\{\lambda_j\}$ системы уравнений Бете. Эта функция определяется соотношением

$$L\lambda(x) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda(x) - \lambda_k) = 2\pi Lx. \quad (2.27)$$

Вводя действие S аналогично (2.15):

$$S = \frac{1}{2} L\lambda^2(x) + \sum_{k=1}^N \theta_1(\lambda(x) - \lambda_k) - 2\pi Lx\lambda(x), \quad (2.28)$$

легко показать, что каждому x соответствует единственное значение $\lambda(x)$. Легко также доказать, что функция $\lambda(x)$ является монотонно возрастающей (и взаимнооднозначной) функцией x . Значение этой функции в точках n_j/L нам известны:

$$\lambda\left(\frac{n_j}{L}\right) = \lambda_j; \quad \text{здесь } n_j \in \{n_j\}. \quad (2.29)$$

Эти значения λ_j мы будем называть значением импульсов частиц, присутствующих в состоянии χ_N (1.26). Возьмем теперь целое или полуцелое (соответственно для N нечетного или четного) число m не из набора $\{n_j\}$: $m \notin \{n_j\}$. Значение функции $\lambda(x)$ в точке m/L назовем значением импульса дырки λ_m :

$$\lambda_m = \lambda\left(\frac{m}{L}\right).$$

Таким образом, любое целое (или полуцелое) число $n = [(N-1)/2] \pmod{1}$ определяет вакансию. Заполненная вакансия — это частица, свободная вакансия — это дырка. Полное число всех дырок и частиц равно числу всех вакансий. Величина $\rho_i(\lambda)$,

$$\rho_i(\lambda) = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}, \quad (2.30)$$

называется *функцией распределения вакансий*. Дифференцируя соотношения (2.27) по λ , получим

$$1 + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N K(\lambda(x), \lambda_k) = 2\pi\rho_i. \quad (2.31)$$

Отметим, что иногда полезно рассматривать антипериодические граничные условия

$$\chi_N(z_j + L) = -\chi_N(z_j) \quad (2.32)$$

вместо периодических (2.1). Это приводит к исчезновению знака минус в правой части системы уравнений Бете (2.2). Все рассмотрение такой системы приводится аналогично.

Сделаем замечание относительно предела сильной связи $c = \infty$. Легко видеть, что все уравнения значительно упрощаются. Уравнения Бете (2.2) превращаются в

$$e^{iL\lambda_j} = (-1)^{N+1}. \quad (2.33)$$

Уравнения Бете в логарифмической форме имеют вид (см. (2.13))

$$L\lambda_j = 2\pi\tilde{n}_j. \quad (2.34)$$

Очевидно, что эти уравнения описывают свободные невзаимодействующие частицы. Так как выполняется принцип Паули (см. § IV.4), то в этой точке модель эквивалентна свободным фермионам (см. [1.11; 1.13]).

§ 3. Термодинамический предел при нулевой температуре

В термодинамическом пределе число частиц N в системе стремится к бесконечности пропорционально «объему» L (длине ящика), так что плотность $D = N/L$ в конфигурационном пространстве остается конечной:

$$N \rightarrow \infty, \quad L \rightarrow \infty, \quad D = N/L = \text{const}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим систему при нулевой температуре. Состояние с наименьшей энергией в секторе с фиксированным числом частиц N достигается, как упоминалось в предыдущем параграфе, на решениях λ системы уравнений Бете:

$$L\lambda_j + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi \left[j - \left(\frac{N+1}{2} \right) \right]; \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Числа n_j здесь выбраны согласно (2.26). В термодинамическом пределе числа λ_j сгущаются: $\lambda_{j+1} - \lambda_j = 0$ ($1/L$) (см. (2.23)) и заполняют некоторый симметричный интервал $[-q, q]$. Такое состояние на языке квантовой теории поля называется *морем Дирака*, а в физике твердого тела — *зоной Ферми*. Здесь

$$q = \lim \lambda_N. \quad (3.3)$$

Удобно ввести плотность распределения частиц в импульсном пространстве (см. (2.22), (2.23) и теорему 3)

$$\rho(\lambda_k) = \lim \frac{1}{L(\lambda_{k+1} - \lambda_k)} > 0. \quad (3.4)$$

Так как в интервале $[-q, q]$ все вакансии заняты и дырок нет, то оказывается, что (см. (2.31))

$$\rho(\lambda) = \rho_t(\lambda) = \frac{dx}{d\lambda} > 0, \quad -q \leq \lambda \leq q. \quad (3.5)$$

Функция $\rho(\lambda)$ по определению положительна. Легко видеть, что число частиц в интервале $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ есть $L \rho(\lambda) d\lambda$.

Вернемся теперь к уравнению (2.31); в термодинамическом пределе правомерно заменить сумму на интеграл:

$$L^{-1} \sum_i K(\lambda(x), \lambda_i) = \int_{-N/(2L)}^{N/(2L)} K(\lambda(x), \lambda(y)) dy = \int_{-q}^q K(\lambda(x), \mu) \rho(\mu) d\mu. \quad (3.6)$$

Итак, из (2.31) получается следующее линейное интегральное уравнение на плотность $\rho(\lambda)$:

$$\rho(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Впервые это уравнение было получено в работе [1.9]. Мы будем называть его *уравнением Либба*. В квантовом методе обратной задачи λ будет играть роль аддитивного спектрального параметра, а q — это значение спектрального параметра на границе зоны Ферми. Плотность системы дается интегралом

$$\frac{N}{L} = D = \int_{-q}^q \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.8)$$

Это уравнение, вместе с уравнением (3.7), позволяет вычислить q как однозначную функцию D . Введем интегральный оператор $\hat{K}$ с положительным ядром $K(\lambda, \mu)$. Этот оператор действует на функцию $\rho(\lambda)$ так:

$$(\hat{K}\rho)(\lambda) = \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu, \quad K(\lambda, \mu) = \frac{2c}{c^2 + (\lambda - \mu)^2}. \quad (3.9)$$

Для того чтобы доказать, что уравнение (3.7) имеет единственное решение, достаточно показать, что оператор $1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K}$ является невырожденным (обратимым). Это видно из следующей оценки. Рассмотрим квадратичную форму этого оператора с некоторой вещественной функцией $v(\lambda)$. Воспользовавшись неравенством (2.18) в термодинамическом пределе (см. (2.16), (3.7)), получим

$$\int_{-q}^q v^2(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q d\lambda \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) v(\lambda) v(\mu) d\mu \geq \int_{-q}^q \frac{v^2(\lambda)}{2\pi\rho(\lambda)} d\lambda \geq 0. \quad (3.10)$$

Итак, оператор $1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K}$ действительно невырожден, причем все его собственные числа положительны и отделены от нуля щелью $(2\pi\rho_{\max})^{-1}$. Здесь $\rho_{\max}$ — это наибольшее значение функции $\rho(\lambda)$ в интервале $-q \leq \lambda \leq q$. Из неравенства (2.23) следуют следующие оценки на значения плотности $\rho(\lambda)$ и на собственные значения K оператора $\hat{K}$:

$$\frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \frac{D}{c} \right) \geq \rho_{\max} \geq \rho(\lambda) \geq \frac{1}{2\pi}, \quad 0 < \frac{1}{2\pi} K \leq [2D/(2D+c)] < 1. \quad (3.11)$$

Положительность оператора $\hat{K}$ доказана в работе [1.9]. Отметим, что при $c \rightarrow \infty$ ядро $K(\lambda, \mu) \rightarrow 0$, поэтому все уравнения решаются явно. В точке $c = \infty$ модель эквивалентна свободным фермионам, при этом

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \quad \text{при } |\lambda| \leq q, \\ \rho(\lambda) &= 0 \quad \text{при } |\lambda| > q. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Мы завершили построение основного состояния системы $|\Omega\rangle$ при $T=0$ — оно задается уравнениями (3.7), (3.8). Так как это состояние представляет собственную функцию гамильтониана, то можно сказать, что мы рассматриваем микроканонический ансамбль. Энергия основного состояния равна

$$\frac{\langle \Omega | H | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} = E_L = L \int_{-q}^q \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.13)$$

Обсудим теперь другой подход. Мы не будем заранее фиксировать число частиц N , но изменим гамильтониан:

$$H_h = H - hQ. \quad (3.14)$$

Здесь Q — оператор числа частиц (1.6), h — химический потенциал. Мы будем рассматривать случай $h > 0$ (только в этом случае основное состояние представляет собой море Дирака с ненулевой плотностью

$D > 0$; см. § 7). Число частиц N и плотность энергии основного состояния зависят теперь от величины химического потенциала. Напомним, что $[H, Q] = 0$; в § 1 построены общие собственные функции операторов H и Q . Собственные значения оператора H_h имеют вид

$$E_N^h = \sum_{j=1}^N (\lambda_j^2 - h). \quad (3.15)$$

Так как энергия частиц с малыми импульсами λ_j отрицательна, то основное состояние гамильтониана достигается на том же наборе целых чисел (2.26), (3.2). В термодинамическом пределе мы снова получим уравнения Либа (3.7), однако плотность D и величина q определяется теперь значением h . Введем функцию $\varepsilon(\lambda)$ посредством уравнения

$$\varepsilon(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \varepsilon(\mu) d\mu = \lambda^2 - h \equiv \varepsilon_0(\lambda). \quad (3.16)$$

Требование

$$\varepsilon(q) = \varepsilon(-q) = 0 \quad (3.17)$$

однозначно определяет зависимость параметра q от химического потенциала h . Плотность D задается уравнением (3.8) и также определяется величиной h .

В § 4 будет показано, что функция $\varepsilon(\lambda)$ — это энергия элементарного возбуждения над основным состоянием. Смысл формулы (3.17) состоит в том, что в основном состоянии энергия возбуждения на границе зоны Ферми равна нулю.

В последующих параграфах мы рассмотрим термодинамику модели при отличной от нуля температуре. Уравнения (3.16), (3.17) естественным образом возникнут при изучении предела $T \rightarrow 0$ (см. § 7); при этом будет доказана теорема существования и единственности для системы (3.16), (3.17). Там же будут установлены следующие важные свойства функции $\varepsilon(\lambda)$:

$$\varepsilon'(\lambda) > 0 \quad \text{при} \quad \lambda > 0, \quad (3.18)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(-\lambda),$$

$$\varepsilon(\lambda) < 0 \quad \text{при} \quad -q < \lambda < q, \quad (3.19)$$

$$\varepsilon(\lambda) > 0 \quad \text{при} \quad \lambda > q \quad \text{или} \quad \lambda < -q. \quad (3.20)$$

Плотность $D(h)$ является монотонно возрастающей (следовательно, взаимнооднозначной) функцией химпотенциала на полуоси $h > 0$ (см. § 7):

$$\frac{\partial D}{\partial h} > 0, \quad D|_{h=0} = 0, \quad D|_{h=\infty} = \infty. \quad (3.21)$$

Неравенство $\partial D/\partial h > 0$ эквивалентно обычному условию термодинамической устойчивости при абсолютном нуле температуры.

Итак, основное состояние $|\Omega\rangle$ — физический вакуум — описано. Энергия основного состояния гамильтониана (3.14) равна

$$\frac{\langle \Omega | H_h | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} = E_L^h = L \int_{-q}^q (\lambda^2 - h) \rho(\lambda) d\lambda = \frac{L}{2\pi} \int_{-q}^q \varepsilon(\lambda) d\lambda < 0. \quad (3.22)$$

§ 4. Возбуждения над основным состоянием

Возбуждения над основным состоянием можно трактовать в терминах частиц. Любое возбуждение состоит из нескольких элементарных. Энергия и импульс любого состояния равны сумме энергий и импульсов элементарных возбуждений. Многочастичная матрица рассеяния равна произведению парных матриц рассеяния. При $c = \infty$ модель эквивалентна свободным фермионам (см. (2.34)), и все возбуждения легко классифицировать.

Остановимся на этом вопросе. Чтобы не фиксировать число частиц, рассмотрим гамильтониан (3.14). Заметим, что $q = \sqrt{h}$ при $c = \infty$, и в основном состоянии заполнены все вакансии на отрезке $-\sqrt{h} \leq \lambda \leq \sqrt{h}$. При этом $\rho = \frac{1}{2\pi}$ на этом отрезке (см. (3.12)), а вне его $\rho = 0$. Существует два типа возбуждений. Во-первых, это частица, энергия и импульс которой даются формулами:

$$\varepsilon_p(\lambda) = \lambda^2 - h \geq 0, \quad k_p(\lambda) = \lambda, \quad |\lambda| > q. \quad (4.1)$$

Это возбуждение получается при внесении в вакуум дополнительной частицы с импульсом λ вне отрезка $[-q, q]$. Второе возбуждение — это дырка. Она получается при удалении одной из частиц из моря Дирака. Энергия и импульс этого возбуждения равны

$$\varepsilon_h(\lambda) = h - \lambda^2 \geq 0, \quad k_h(\lambda) = -\lambda, \quad |\lambda| < q. \quad (4.2)$$

В этом возбуждении на одну частицу меньше, чем в основном состоянии, поэтому естественно считать, что заряд дырки равен -1 . Заряд частицы равен $+1$. Зарядом мы называем разность числа частиц в возбужденном состоянии и в основном состоянии. Координатная волновая функция χ_N (1.26) имеет предел, когда $c \rightarrow \infty$. Заметим, что при переходе от основного состояния к возбужденному периодические граничные условия (2.1) для волновой функции частиц из моря Дирака естественным образом заменяются на антипериодические:

$$\chi_N(z_1, \dots, z_j + L, \dots, z_N) = -\chi_N(z_1, \dots, z_j, \dots, z_N). \quad (4.3)$$

При конечном значении константы связи c фермионы взаимодействуют, однако возбуждения можно классифицировать так же, как

и в случае свободных фермионов. В модели есть два элементарных возбуждения — частица с зарядом $+1$ и дырка с зарядом -1 . Сначала построим возбужденное состояние, соответствующее частице. Потребуем, чтобы волновые функции, описывающие эти возбужденные состояния, также удовлетворяли антипериодическим граничным условиям (4.3). Фактически мы накладываем следующие граничные условия:

$$\chi_N(z_1, \dots, z_j + L, \dots, z_N) = (-1)^{\Delta N} \chi_N(z_1, \dots, z_j, \dots, z_N). \quad (4.4)$$

Здесь ΔN — это изменение числа частиц по сравнению с основным состоянием. Выпишем уравнения Бете, описывающие основное состояние:

$$L\lambda_j + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi \left(j - \frac{N+1}{2} \right), \quad j=1, \dots, N. \quad (4.5)$$

Мы называем основное состояние *физическим вакуумом*, а частицы, присутствующие в нем, — *вакуумными*. В возбужденном состоянии присутствуют $N+1$ частиц с импульсами $\tilde{\lambda}_j$, $j=1, \dots, N+1$. В этом случае уравнения Бете выглядят так:

$$L\tilde{\lambda}_j + \sum_{k=1}^N \theta(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k) + \theta(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_{N+1}) = 2\pi \left(j - \frac{N+1}{2} \right), \quad (4.6)$$

$$L\tilde{\lambda}_{N+1} + \sum_{k=1}^N \theta(\tilde{\lambda}_{N+1} - \tilde{\lambda}_k) = 2\pi n_{N+1}, \quad n_{N+1} > \frac{N+1}{2}. \quad (4.7)$$

Возбужденное состояние характеризуется набором из $N+1$ целых чисел $\{n_j; j=1, \dots, N+1\}$, причем первые N из этих чисел совпадают с соответствующим набором для основного состояния (2.26). Величину $\tilde{\lambda}_{N+1}$ обозначим через λ_p . Вычтем уравнения (4.6) из уравнений (4.5) и учтем, что в термодинамическом пределе $(\lambda_j - \tilde{\lambda}_j) = O(1/L)$:

$$\begin{aligned} L(\lambda_j - \tilde{\lambda}_j) - \theta(\lambda_j - \lambda_p) + (\lambda_j - \tilde{\lambda}_j) \sum_{k=1}^N K(\lambda_j, \lambda_k) - \\ - \sum_{k=1}^N K(\lambda_j, \lambda_k) (\lambda_k - \tilde{\lambda}_k) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $K(\lambda, \mu) = \theta'(\lambda - \mu)$; см. (3.9). Используя уравнения (3.7), (2.31), (3.5), получим:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho(\lambda_j) L(\lambda_j - \tilde{\lambda}_j) - \theta(\lambda_j - \lambda_p) - \\ - \sum_{k=1}^N K(\lambda_j, \lambda_k) \frac{\lambda_k - \tilde{\lambda}_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для того чтобы перейти к термодинамическому пределу в этом уравнении, удобно ввести функцию сдвига:

$$F(\tilde{\lambda}_j | \lambda_p) = \frac{\lambda_j - \tilde{\lambda}_j}{\lambda_{j+1} - \tilde{\lambda}_j}. \quad (4.10)$$

Заменив сумму на интеграл в уравнении (4.9), получим линейное интегральное уравнение для функции F :

$$F(\mu|\lambda_p) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\mu, \nu) F(\nu|\lambda_p) d\nu = \frac{1}{2\pi} \theta(\mu - \lambda_p), \quad |\lambda_p| > q. \quad (4.11)$$

Функция $F(\mu|\lambda)$ определена при $|\mu| < q$; однако уравнение позволяет аналитически продолжить функцию $F(\mu|\lambda)$ на всю вещественную ось.

Функция сдвига позволяет вычислить все физические характеристики возбуждения в термодинамическом пределе: энергию возбуждения, импульс и матрицу рассеяния. (Функция F описывает облако виртуальных частиц, окружающих затравочную частицу λ_p , или, по-другому, поляризацию вакуума, производимую затравочной частицей λ_p .) Вычислим сначала энергию возбужденного состояния. Наблюдаемая энергия — это отклонение $\Delta E(\lambda_p)$ энергии возбужденного состояния от энергии основного состояния:

$$\Delta E(\lambda_p) = \varepsilon_0(\lambda_p) + \sum_{j=1}^N [\varepsilon_0(\tilde{\lambda}_j) - \varepsilon_0(\lambda_j)] = \varepsilon_0(\lambda_p) - \int_{-q}^q \varepsilon'_0(\mu) F(\mu|\lambda_p) d\mu; \quad (4.12)$$

здесь $\varepsilon_0(\lambda) = \lambda^2 - h$ (см. (3.15), (3.16)). Аналогично вычисляется импульс возбуждения k . Отметим, что импульс основного состояния равен нулю, а

$$k(\lambda_p) = \lambda_p - \int_{-q}^q F(\mu|\lambda_p) d\mu. \quad (4.13)$$

В Приложении 1 (см. также (7.9)) доказано, что

$$\Delta E(\lambda_p) = \varepsilon(\lambda_p) \geq 0; \quad |\lambda_p| > q. \quad (4.14)$$

Здесь $\varepsilon(\lambda)$ определяется линейным интегральным уравнением (3.16):

$$\varepsilon(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \varepsilon(\mu) d\mu = \lambda^2 - h \equiv \varepsilon_0(\lambda), \quad (4.15)$$

$$\varepsilon(q) = \varepsilon(-q) = 0.$$

Это уравнение позволяет аналитически продолжить $\varepsilon(\lambda)$ на всю вещественную ось. Теорема существования для этого уравнения получена в § 7, там же выявлен ряд важных свойств решения $\varepsilon(\lambda)$. В Приложении 1 доказано, что импульс можно представить в виде

$$k(\lambda_p) = \lambda_p + \int_{-q}^q \theta(\lambda_p - \mu) \rho(\mu) d\mu, \quad |\lambda_p| > q. \quad (4.16)$$

Прокомментируем теперь построение второго элементарного возбуждения — дырки. В этом возбуждении $N-1$ частица, наблюдаемый заряд равен -1 . Волновая функция χ_N снова удовлетворяет антипериодическим граничным условиям. Набор целых чисел $\{n_j\}$,

характеризующих дырочное состояние, получается из вакуумного вычеркиванием одного из целых чисел. Функция сдвига удовлетворяет уравнению

$$F_h(\mu|\lambda_h) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\mu, \nu) F_h(\nu|\lambda_h) d\nu = -\frac{1}{2\pi} \theta(\mu - \lambda_h), \quad |\lambda_h| < q. \quad (4.17)$$

Здесь λ_h — затравочный импульс дырки. Эта функция сдвига позволяет вычислить энергию и импульс частицы с помощью формул (4.12), (4.13). Получаются следующие ответы:

$$\Delta E(\lambda_h) = -\varepsilon(\lambda_h) > 0, \quad |\lambda_h| < q, \quad (4.18)$$

$$k(\lambda_h) = -\lambda_h - \int_{-q}^q \theta(\lambda_h - \mu) \rho(\mu) d\mu, \quad |\lambda_h| < q. \quad (4.19)$$

Произвольное возбуждение строится из нескольких частиц и нескольких дырок. Энергия и импульс аддитивны. Функция сдвига F многочастичного возбуждения также получается суммированием элементарных функций сдвига. Например, при внесении в вакуум двух частиц $\lambda_2 > \lambda_1 > q$, значения импульсов вакуумных частиц изменяются: $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}_j (j=1, \dots, N)$. Функция сдвига

$$F(\lambda|\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_j - \tilde{\lambda}_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} \quad (4.20)$$

равна сумме функций сдвига отдельных частиц (4.10):

$$F(\lambda|\lambda_1, \lambda_2) = F(\lambda|\lambda_1) + F(\lambda|\lambda_2). \quad (4.21)$$

Вычислим теперь матрицу рассеяния двух частиц с импульсами λ_1 и $\lambda_2 (\lambda_2 > \lambda_1 > q)$. В данном случае матрица рассеяния сводится к числовому множителю по модулю, равному 1:

$$S = \exp \{ i\delta(\lambda_2, \lambda_1) \}. \quad (4.22)$$

Фаза δ равна разности двух фаз:

$$\delta(\lambda_2, \lambda_1) = \Phi_{21} - \Phi_2. \quad (4.23)$$

Здесь Φ_2 — полная фаза, которую набирает вторая частица при обходе «ящика» в отсутствии первой частицы:

$$\Phi_2 = L\lambda_2 + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_k). \quad (4.24)$$

Фаза Φ_{21} — это полная фаза, которую набирает вторая частица при обходе ящика в присутствии первой частицы:

$$\Phi_{21} = L\lambda_2 + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_k) + \theta(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (4.25)$$

Итак, фаза рассеяния есть:

$$\begin{aligned} \delta(\lambda_2, \lambda_1) &= \theta(\lambda_2 - \lambda_1) + \sum_{k=1}^N \left[\theta(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_k) - \theta(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_k) \right] = \\ &= \theta(\lambda_2 - \lambda_1) + \sum_{k=1}^N K(\lambda_2, \lambda_k) \left[F(\lambda_k|\lambda_1, \lambda_2) - F(\lambda_k|\lambda_2) \right] (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Заменяя сумму на интеграл и используя (4.21), получаем

$$\delta(\lambda_2, \lambda_1) = \theta(\lambda_2 - \lambda_1) + \int_{-q}^q K(\lambda_2, \mu) F(\mu | \lambda_1) d\mu. \quad (4.27)$$

Используя уравнение (4.11), приходим к равенству

$$\delta(\lambda_2, \lambda_1) = 2\pi F(\lambda_2 | \lambda_1), \quad \lambda_2 > \lambda_1. \quad (4.28)$$

Замечательно, что сама фаза рассеяния удовлетворяет одевающему уравнению

$$\delta(\lambda, \mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \nu) \delta(\nu, \mu) d\nu = \theta(\lambda - \mu). \quad (4.29)$$

Итак, мы видим, что физические характеристики возбуждений над морем Дирака получаются из физических характеристик возбуждений над фоковским вакуумом $|0\rangle$ (которые задаются явным видом бетевской волновой функции (1.26)) с помощью одевающих уравнений. Эти одевающие уравнения являются линейными интегральными уравнениями и носят универсальный характер. Достаточно сравнить одевающее уравнение для энергии (4.15), для фазы рассеяния (4.29) и для плотности (3.7). При изучении корреляторов мы увидим, что идеология одевающих уравнений весьма полезна.

Отметим, что матрица рассеяния двух дырок с затравочными импульсами λ_1, λ_2 также равна $\exp\{i\delta(\lambda_2, \lambda_1)\}$ ($\lambda_2 > \lambda_1$), где δ задается уравнением (4.29). Матрица рассеяния частицы λ_p на дырке λ_h равна (см. (4.29))

$$S = \exp\{-i\delta(\lambda_p, \lambda_h)\}, \quad \lambda_p > \lambda_h. \quad (4.30)$$

Матрица рассеяния нескольких частиц равна произведению парных.

Упомянем о возбуждениях в секторе с фиксированным числом частиц, равном числу частиц в основном состоянии. Это означает, что следует рассматривать только возбуждения, в которых число частиц равно числу дырок. Все формулы для вычисления наблюдаемых характеристик возбуждений, выведенные выше, применимы и в этом случае. Отметим, что в секторе с фиксированным числом частиц можно не упоминать об антипериодических граничных условиях.

§ 5. Термодинамика модели

Рассмотрим канонический ансамбль и вычислим статистическую сумму модели:

$$Z = \text{tr}(e^{-H/T}) = e^{-F/T}. \quad (5.1)$$

Здесь гамильтониан H задан формулой (1.2), а T — температура. Свободная энергия F определяется равенством (5.1). Напомним, что мы изучаем термодинамический предел $L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ (см. (3.1)) с

$$D = N/L = \text{const}. \quad (5.2)$$

Полезно вспомнить понятие частиц, дырок и вакансий, введенных в § 2 (см. (2.29), (2.30)). В термодинамическом пределе плотность распределения частиц обозначим через $\rho_p(\lambda)$, плотность распределения дырок через $\rho_h(\lambda)$, а плотность распределения вакансий через $\rho_t(\lambda)$. Итак:

$$L \rho_p(\lambda) d\lambda \text{ — число частиц в отрезке } [\lambda, \lambda + d\lambda], \quad (5.3)$$

$$L \rho_h(\lambda) d\lambda \text{ — число дырок в отрезке } [\lambda, \lambda + d\lambda], \quad (5.4)$$

$$L \rho_t(\lambda) d\lambda \text{ — число вакансий в отрезке } [\lambda, \lambda + d\lambda]. \quad (5.5)$$

Разумеется, выполнено соотношение

$$\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda). \quad (5.6)$$

В уравнении (2.31) перейдем к термодинамическому пределу и получим

$$2\pi\rho_t(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \rho_p(\mu) d\mu. \quad (5.7)$$

Следует подчеркнуть, что мы перешли от микроскопического описания модели (с помощью набора целых чисел n_j) к макроскопическому описанию с помощью функций распределения ρ_p , ρ_h , ρ_t . Важно отметить, что заданному макроскопическому состоянию (фиксированным функциям ρ_p , ρ_h) соответствует много микроскопических состояний (наборов целых чисел n_j). Действительно, существует несколько возможностей разместить $L\rho_p(\lambda)d\lambda$ частиц в $L\rho_t(\lambda)d\lambda$ вакансиях. Обозначим это число возможностей через $\exp\{dS\}$:

$$e^{dS} = \frac{[L\rho_t(\lambda)d\lambda]!}{[L\rho_p(\lambda)d\lambda]![L\rho_h(\lambda)d\lambda]!}. \quad (5.8)$$

В термодинамическом пределе это число велико. Вместо факториала подставим его асимптотику и получим

$$dS = Ld\lambda [\rho_t(\lambda) \ln \rho_t(\lambda) - \rho_p(\lambda) \ln \rho_p(\lambda) - \rho_h(\lambda) \ln \rho_h(\lambda)]. \quad (5.9)$$

Ниже мы увидим, что энергия системы и другие наблюдаемые зависят только от макроскопических переменных ρ_p , ρ_h , а величина

$$S = \int dS \quad (5.10)$$

имеет смысл энтропии.

Займемся теперь вычислением статсуммы (5.1). Запишем ее сначала через микроскопические переменные:

$$Z_N = \frac{1}{N!} \sum_{n_1, \dots, n_N} \exp \left\{ -\frac{E_N}{T} \right\} = \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_N} \exp \left\{ -\frac{E_N}{T} \right\}. \quad (5.11)$$

Здесь $E_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2$, импульсы λ_j удовлетворяют системе уравнений Бете (2.13). Мы рассмотрим термодинамику системы с фиксированным

полным импульсом P_N , равным нулю (см. (2.20)), а это означает, что $\sum_{j=1}^N n_j = 0$. Следовательно, можно ввести новые переменные суммирования в (5.11) $n_{j+1,j} = n_{j+1} - n_j$ и переписать статсумму в виде (см. (2.22))

$$Z_N = \sum_{n_{21}=1}^{\infty} \sum_{n_{32}=1}^{\infty} \dots \sum_{n_{N,N-1}=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{E_N}{T} \right\}. \quad (5.12)$$

В термодинамическом пределе полная энергия

$$E_N = L \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \rho_p(\lambda) d\lambda \quad (5.13)$$

зависит только от макроскопической переменной ρ_p ; это позволяет в (5.12) перейти от суммирования по микроскопическим переменным к интегрированию по макроскопическим переменным. Для этого воспользуемся заменой

$$n_{j+1,j} \rightarrow \frac{\rho_t(\lambda)}{\rho_p(\lambda)}.$$

Действительно, можно вычислить отношение числа вакансий к числу частиц (в малом интервале $d\lambda$) в терминах микро- и макропеременных и сравнить полученные выражения. Величина $n_{j+1,j}$ — это искомое отношение в терминах микроскопических переменных. Ее можно рассматривать как число вакансий для j -й частицы (только одна вакансия из $n_{j+1,j}$ занята). Отношение числа вакансий к числу частиц можно выразить и через макроскопические переменные; из формул (5.3), (5.5) получаем, что это отношение равно $\rho_t(\lambda)/\rho_p(\lambda)$. Следовательно, суммирование в (5.12) заменяется на интегрирование по переменной $\mathcal{D}(\rho_t(\lambda)/\rho_p(\lambda))$. При замене многократной суммы на функциональный интеграл следует помнить, что одному макроскопическому состоянию соответствует много микроскопических (5.8), (5.9). Итак, статсумму Z_N в термодинамическом пределе можно представить как функциональный интеграл

$$Z_N = \text{const} \int \mathcal{D} \left(\frac{\rho_t(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} \right) \delta(L \int \rho_p(\lambda) d\lambda - DL) e^{S - E_N/T}, \quad (5.14)$$

$$S - \frac{E_N}{T} = -\frac{L}{T} \int d\lambda \{ \lambda^2 \rho(\lambda) - T [\rho_t(\lambda) \ln \rho_t(\lambda) - \rho_p(\lambda) \ln \rho_p(\lambda) - \rho_h(\lambda) \ln \rho_h(\lambda)] \}. \quad (5.15)$$

Появление δ -функции в (5.14) объясняется тем, что в каноническом ансамбле число частиц N фиксировано. Используя представление δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{hx} dh,$$

перепишем (5.14) в виде

$$Z_N = \text{const} \int dh \int \mathcal{D} \left(\frac{\rho_i(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} \right) \exp \left\{ S - \frac{E_N}{T} + \frac{L}{T} h \left(\int \rho_p(\lambda) d\lambda - D \right) \right\}. \quad (5.16)$$

В пределе бесконечного объема $L \rightarrow \infty$ интеграл в (5.16) можно вычислить методом наискорейшего спуска. Вариация показателя степени в (5.16) имеет вид

$$-\frac{L}{T} \int d\lambda \delta \rho_p(\lambda) \left\{ \lambda^2 - h - \varepsilon(\lambda) - \frac{T}{2\pi} \int K(\lambda, \mu) \ln [1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}] d\mu \right\} + \\ + \frac{L}{T} \delta h \left(\int \rho_p(\lambda) d\lambda - D \right). \quad (5.17)$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$\rho_h(\lambda) / \rho_p(\lambda) = e^{\varepsilon(\lambda)/T}. \quad (5.18)$$

Таким образом, метод наискорейшего спуска приводит к следующим уравнениям:

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \ln(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu, \quad (5.19)$$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda. \quad (5.20)$$

Можно доказать, что значение h в точке стационарности является вещественным. Можно также вычислить матрицу вторых производных показателя степени в (5.16) и доказать, что она отрицательно определена (см. Приложение 2). Это обосновывает законность применения метода наискорейшего спуска.

Таким образом, мы решили задачу вычисления статсуммы и свободной энергии (5.1):

$$Z = e^{-F/T}, \quad F = Nh - \frac{TL}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}) d\lambda. \quad (5.21)$$

Давление есть производная свободной энергии по объему при фиксированной температуре:

$$\mathcal{P} = - \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}) d\lambda. \quad (5.22)$$

Полный дифференциал давления равен

$$d\mathcal{P} = \left(\frac{S}{L} \right) dT + D dh.$$

Это одно из важнейших термодинамических тождеств. Отсюда видно, что S (5.10) действительно есть энтропия. Выпишем теперь все уравнения, определяющие состояние термодинамического равновесия:

$$2\pi\rho_i(\lambda)=1+\int_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\mu)\rho_p(\mu)d\mu; \quad D=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_p(\lambda)d\lambda, \quad (5.24)$$

$$\varepsilon(\lambda)=\lambda^2-h-\frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\mu)\ln(1+e^{-\varepsilon(\mu)/T})d\mu, \quad (5.25)$$

$$\rho_h(\lambda)/\rho_p(\lambda)=e^{\varepsilon(\lambda)/T}, \quad \rho_i(\lambda)=\rho_p(\lambda)+\rho_h(\lambda); \quad \rho_p(\lambda)\geq 0; \quad \rho_h(\lambda)\geq 0. \quad (5.26)$$

Плотность $D>0$, температура $T>0$ и константа связи $c>0$ здесь являются свободными параметрами. Эти уравнения определяют, например, уравнение состояния газа—зависимость давления (5.22) от плотности и температуры (одна из важнейших характеристик газа). Отметим, что состояние термодинамического равновесия не является чистым (т. е. не является собственной функцией гамильтониана, как это было в случае $T=0$). Состояние термодинамического равновесия—смесь собственных функций. Дело в том, что одному набору макроскопических переменных $\rho_p(\lambda)$, $\rho_h(\lambda)$ соответствует $\exp\{dS\}$ микроскопических состояний, каждое из которых есть собственная функция, задаваемая набором целых чисел $\{n_j\}$. Уравнение (5.25) для $\varepsilon(\lambda)$ играет чрезвычайно важную роль. Впервые оно было введено в работе [1.14]. Мы будем называть его *уравнением Янга*. В § 6 доказана теорема существования решения для этого уравнения. В § 8 мы увидим, что $\varepsilon(\lambda)$ —это энергия возбуждения над состоянием термодинамического равновесия. Это, впрочем, легко понять и без всяких вычислений. Рассмотрим отношение числа занятых вакансий к числу всех вакансий:

$$\vartheta(\lambda)=\frac{1}{1+e^{\varepsilon(\lambda)/T}}. \quad (5.27)$$

Сравнивая это равенство с фермиевским распределением, легко понять, что $\varepsilon(\lambda)$ —действительно энергия элементарного возбуждения. Функцию $\vartheta(\lambda)$ мы будем называть *фермиевским весом*.

Приведем несколько оценок, аналогичных (3.10), (3.11), которые будут полезны в дальнейшем. Из неравенства (2.23) в термодинамическом пределе получаем

$$\frac{1}{2\pi}\leq\rho_i(\lambda)\leq\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{2D}{c}\right). \quad (5.28)$$

Введем линейный интегральный оператор $\hat{K}_T$, который действует на произвольную функцию $v(\lambda)$ следующим образом:

$$(\hat{K}_T v)(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\mu)\vartheta(\mu)v(\mu)d\mu. \quad (5.29)$$

Можно доказать, что собственные числа K_T этого оператора лежат в интервале (аналогично 3.11))

$$0 < K_T \leq \frac{4\pi D}{2D+c} < 2\pi. \quad (5.30)$$

Уравнения (5.24)—(5.26) будут проанализированы в § 6 и в Приложении 2. Укажем здесь, что h есть взаимно однозначная функция D , $\partial D/\partial h > 0$. При изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ величина D изменяется от 0 до ∞ , что отличается от случая $T=0$ (см. (3.21)).

Отметим, что термодинамика большого канонического ансамбля описывается точно теми же уравнениями (5.24)—(5.26), однако произвольным надо считать химпотенциал h , а плотность определяется при решении уравнений.

§ 6. Уравнение Янга

Докажем теорему существования для уравнения Янга

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \ln \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon(\mu)}{T}} \right) d\mu, \quad (6.1)$$

следуя работе [1.14].

Теорема 4. *Решение уравнения Янга существует.*

Доказательство. Построим следующую последовательность функций:

$$\varepsilon_0(\lambda) = \lambda^2 - h, \quad \varepsilon_{n+1}(\lambda) = \lambda^2 - h + A_n, \quad (6.2)$$

$$A_n = -\frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \ln \left(1 + e^{-\frac{\varepsilon_n(\mu)}{T}} \right) d\mu. \quad (6.3)$$

Нижне мы докажем, что эта последовательность убывает в каждой точке λ :

$$\varepsilon_0(\lambda) > \varepsilon_1(\lambda) > \varepsilon_2(\lambda) > \dots > \varepsilon_n(\lambda) > \varepsilon_{n+1}(\lambda) > \dots \quad (6.4)$$

и ограничена снизу:

$$\varepsilon_n(\lambda) \geq \lambda^2 + x_0, \quad (6.5)$$

где x_0 — постоянная. Это и будет означать, что предел этой последовательности

$$\varepsilon(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\lambda) \quad (6.6)$$

существует и является решением уравнения Янга. Свойство (6.4) очевидно из того, что $A_n < 0$ и $\delta A_n / \delta \varepsilon_n > 0$:

$$\delta A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) [1 + \exp \{ \varepsilon(\mu) / T \}]^{-1} \delta \varepsilon_n(\mu) d\mu. \quad (6.7)$$

Доказать (6.5) не столь просто. Сначала установим некоторые важные свойства функций $\varepsilon_n(\lambda)$, а именно четность и монотонность на полуоси:

$$\varepsilon_n(\lambda) = \varepsilon_n(-\lambda), \quad (6.8)$$

$$\varepsilon_n(\lambda_2) > \varepsilon_n(\lambda_1), \text{ если } \lambda_2 > \lambda_1 \geq 0. \quad (6.9)$$

Первое свойство очевидно, второе можно доказать индукцией по n . Пусть оно выполняется для ε_n , докажем его для ε_{n+1} . Из (6.2) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{n+1}(\lambda) &= 2\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \frac{\varepsilon'_n(\mu)}{1 + e^{\varepsilon_n(\mu)/T}} d\mu = \\ &= 2\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [K(\lambda, \mu) - K(-\lambda, \mu)] \frac{\varepsilon'_n(\mu)}{1 + e^{\varepsilon_n(\mu)/T}} d\mu > 0, \end{aligned} \quad (6.10)$$

так как $K(\lambda, \mu) > K(-\lambda, \mu)$, при $\lambda > 0$ и $\mu > 0$; см. (3.9). Итак, мы доказали свойство (6.9). Отметим, что A_n (6.3) — четная возрастающая функция на полуоси. Отсюда видно, что

$$\varepsilon_n(\lambda) \geq \lambda^2 + \varepsilon_n(0). \quad (6.11)$$

Принимая во внимание (6.2) и (6.7), получаем неравенство

$$\varepsilon_{n+1}(0) \geq -h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(0, \mu) \ln \left[1 + e^{-\frac{\varepsilon_n(0) + \mu^2}{T}} \right] d\mu. \quad (6.12)$$

Определим функцию $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv -h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(0, \mu) \ln \left[1 + e^{-\frac{\mu^2 + x}{T}} \right] d\mu = \\ &= -h + x - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(0, \mu) \ln \left[e^{\frac{x}{T}} + e^{-\frac{\mu^2}{T}} \right] d\mu. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Неравенство (6.12) с помощью этой функции можно переписать так:

$$\varepsilon_{n+1}(0) \geq f(\varepsilon_n(0)). \quad (6.14)$$

Функция $f(x)$ монотонно возрастает, но $f(x) < -h$. Функция $(f(x) - x)$ монотонно убывает, изменяясь от $+\infty$ до $-\infty$, и имеет единственный нуль:

$$f(x_0) - x_0 = 0. \quad (6.15)$$

Итак, при фиксированной температуре x_0 однозначно определяется величиной h , и наоборот, задание x_0 задает h :

$$h = -\frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(0, \mu) \ln [e^{x_0/T} + e^{-\mu^2/T}] d\mu. \quad (6.16)$$

Отсюда легко видеть, что h — монотонно убывающая функция x_0 , изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$.

Докажем теперь, что

$$\varepsilon_n(0) \geq x_0, \quad n \geq 0. \quad (6.17)$$

Прежде всего отметим, что

$$\varepsilon_0(0) = -h > f(x_0) = x_0. \quad (6.18)$$

Далее воспользуемся индукцией по n и возрастанием $f(x)$. Пусть $\varepsilon_n(0) \geq x_0$; из (6.14) видно, что

$$\varepsilon_{n+1}(0) \geq f(\varepsilon_n(0)) \geq f(x_0) = x_0. \quad (6.19)$$

Итак, неравенство (6.17) доказано. Комбинируя его с (6.11), получаем (6.5), что завершает доказательство существования решения уравнения Янга.

Одновременно мы доказали следующие свойства решения:

$$\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(-\lambda), \quad (6.20)$$

$$\lambda^2 - h \geq \varepsilon(\lambda) \geq \lambda^2 + x_0, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda} > 0 \quad \text{при} \quad \lambda > 0, \quad (6.22)$$

$$\varepsilon(\lambda) \rightarrow \lambda^2 - h + O(1/\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow \pm \infty. \quad (6.23)$$

Таким образом, функция $\varepsilon(\lambda)$ на вещественной оси либо вообще не имеет нулей (например, $x_0 \geq 0$), либо имеет два нуля $\lambda = \pm q_T$ (это случается, например, при $h > 0$).

Рассматривая теперь два предельных случая, получим:

$$h \rightarrow +\infty, \quad \text{при этом} \quad \varepsilon(\lambda) \rightarrow -\infty; \quad \rho_h \rightarrow 0, \quad D \rightarrow \infty, \quad (6.24)$$

$$h \rightarrow -\infty, \quad \text{при этом} \quad \varepsilon(\lambda) \rightarrow +\infty; \quad x_0 \rightarrow +\infty; \quad \rho_p \rightarrow 0; \quad D \rightarrow 0. \quad (6.25)$$

Мы исследовали поведение функции $\varepsilon(\lambda)$ на вещественной оси, в дальнейшем нам понадобится продолжение $\varepsilon(\lambda)$ в комплексную плоскость. В некоторой окрестности вещественной оси это продолжение может быть осуществлено с помощью уравнения (6.1)

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \ln \left[1 + e^{-\frac{\varepsilon(\mu)}{T}} \right] d\mu. \quad (6.26)$$

На первый взгляд кажется, что таким образом можно продолжить $\varepsilon(\lambda)$ только в полосу в окрестности вещественной оси $-c < \text{Im} \lambda < c$ из-за полюса $K(\lambda, \mu)$. Однако полюс $K(\lambda, \mu)$ не является серьезным препятствием. Так как $\varepsilon(\lambda)$ аналитична в окрестности вещественной оси, то контур интегрирования в (6.26) можно сдвинуть в верхнюю полуплоскость. Это позволяет продолжить $\varepsilon(\lambda)$ в область $\text{Im} \lambda > c$.

Двигать контур в верхнюю полуплоскость можно вплоть до нуля функции $1 + \exp\{-\varepsilon(\mu)/T\}$, ближайшего к вещественной оси. Можно доказать, что он обязательно существует; обозначим его положение через α :

$$1 + \exp\{\varepsilon(\alpha)/T\} = 0, \quad \varepsilon(\alpha) = i\pi T. \quad (6.27)$$

Свойства симметрии функции $\varepsilon(\lambda)$:

$$\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(-\lambda), \quad \varepsilon^*(\lambda^*) = \varepsilon(\lambda) \quad (6.28)$$

показывают, что нули расположены в вершинах прямоугольника

$$\lambda = \alpha, \quad \lambda = -\alpha, \quad \lambda = \alpha^*, \quad \lambda = -\alpha^*. \quad (6.29)$$

Это позволяет выбрать α так, что

$$\operatorname{Im} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (6.30)$$

Важно отметить, что точки (6.29) являются простыми полюсами фермиевского веса $\vartheta(\lambda) = [1 + \exp\{\varepsilon(\lambda)/T\}]^{-1}$, ближайшими к вещественной оси:

$$\vartheta^{-1}(\alpha) = \vartheta^{-1}(-\alpha) = \vartheta^{-1}(\alpha^*) = \vartheta^{-1}(-\alpha^*) = 0. \quad (6.31)$$

Следует также подчеркнуть, что точки (6.29) не являются точками сингулярности функции $\varepsilon(\lambda)$. Эта функция может быть продолжена еще дальше в комплексную плоскость. Ее ближайшие особенности лежат в точках $(\alpha + ic)$, $(-\alpha^* + ic)$, $(-\alpha - ic)$, $(\alpha^* - ic)$. В этих точках контур интегрирования в (6.26) зажат между особенностями логарифма и ядра интегрального уравнения $K(\lambda, \mu)$.

§ 7. Предельные случаи

Обсудим предел нулевой температуры $T \rightarrow 0$. Рассмотрим решение уравнения Янга $\varepsilon(\lambda)$ при $T=0$. Сначала изучим, что происходит с оценкой (6.21) в этом пределе

$$\lambda^2 - h \geq \varepsilon(\lambda) \geq \lambda^2 + x_0. \quad (7.1)$$

Постоянная x_0 является взаимнооднозначной монотонно убывающей функцией h (см. (6.16)). При $T=0$ точка $h=0$ соответствует $x_0=0$; полюсы отображаются следующим образом:

$$\text{при } h > 0 \quad x_0 < 0, \quad (7.2)$$

$$\text{при } h < 0 \quad x_0 > 0. \quad (7.3)$$

В последнем случае $x_0 > 0$, $h < 0$ легко видеть, что $x_0 = -h$. Функция $\varepsilon(\lambda)$ равна

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h > 0, \quad h < 0, \quad (7.4)$$

и не имеет нулей на вещественной оси. Мы увидим, что это соответствует нулевой плотности $D=0$.

В случае $h > 0$ $x_0 < 0$ ($x_0 = -y$, $y > 0$):

$$y = h + \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{2c}{c^2 + \mu^2} (-\mu^2 + y) d\mu > h > 0. \quad (7.5)$$

В этом случае функция $\varepsilon(\lambda)$ имеет два нуля на вещественной оси:

$$\varepsilon(\pm q) = 0, \quad h > 0. \quad (7.6)$$

Функция $\varepsilon(\lambda)$ является четной функцией λ , монотонной на полуоси $\lambda > 0$, причем

$$\varepsilon(\lambda) > 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| > q, \quad (7.7)$$

$$\varepsilon(\lambda) < 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| < q. \quad (7.8)$$

Эти свойства получаются пределом $T \rightarrow 0$ из формул (6.20) — (6.22) предыдущего параграфа. Свойства (7.7), (7.8) позволяют перейти к пределу в уравнении Янга; при $T = 0$ получаем

$$\varepsilon(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \varepsilon(\mu) d\mu = \lambda^2 - h, \quad (7.9)$$

$$\varepsilon(q) = \varepsilon(-q) = 0.$$

Теорема существования для этого уравнения и ряд других свойств следует из теоремы существования для уравнения Янга при $T > 0$, полученной в § 6. Итак, мы обосновали уравнения (3.16), (3.17), (3.19), (3.20). При изучении предела $T \rightarrow 0$ мы воспользовались тем, что при $T = 0$

$$e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} = \frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} = \begin{cases} \infty, & |\lambda| > q, \\ 0, & |\lambda| < q. \end{cases} \quad (7.10)$$

Отсюда следует в свою очередь, что

$$\rho_p(\lambda) = 0, \quad \rho_h(\lambda) = \rho_t(\lambda); \quad |\lambda| > q \quad (T = 0), \quad (7.11)$$

$$\rho_h(\lambda) = 0, \quad \rho_p(\lambda) = \rho_t(\lambda), \quad |\lambda| < q \quad (T = 0). \quad (7.12)$$

Это позволяет перейти к пределу в уравнениях (5.24):

$$2\pi \rho_p(\lambda) - \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \rho_p(\mu) d\mu = 1, \quad (7.13)$$

$$\int_{-q}^q \rho_p(\lambda) d\lambda = D. \quad (7.14)$$

Из (7.4) видно, что при $h < 0$ величина D равна нулю. При $h > 0$ заключаем, что $D > 0$ и $q > 0$. Так как $\partial D / \partial h > 0$ (см. Приложение 2),

то при изменении D от 0 до ∞ величина h тоже изменяется от 0 до ∞ , причем $D(h)$ — взаимно однозначная монотонно возрастающая функция на полуоси. Итак, мы обосновали (3.21).

Отметим, что при $T=0$ основное состояние превратилось в собственную функцию гамильтониана. Энтропия S устремилась к нулю при $T \rightarrow 0$. Таким образом мы обосновали результаты, объявленные в § 3. При абсолютном нуле температуры ($T=0$) формула (5.22) для давления принимает вид

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q \varepsilon(\lambda) d\lambda. \quad (7.15)$$

Мы видим, что давление свелось к плотности энергии основного состояния (3.22).

Упомянем о скорости звука v при нулевой температуре. Можно дать два определения этой величины — макроскопическое и микроскопическое. Макроскопически скорость звука определяется в терминах производной от давления по плотности:

$$v^2 = 2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial D}; \quad (7.16)$$

Здесь $\mathcal{P}$ — давление, D — плотность.

Микроскопически скорость v определяется в терминах производной от одетой энергии (4.12) по одетому импульсу (4.13) на поверхности Ферми:

$$v = \left. \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial k(\lambda)} \right|_{\lambda=q}. \quad (7.17)$$

В Приложении 3 доказано, что эти определения для бозе-газа эквивалентны.

Теперь обсудим другой вопрос. Как уже было упомянуто, теория резко упрощается в пределе бесконечной константы взаимодействия. При фиксированной температуре устремим $c \rightarrow \infty$. Ядро интегрального оператора $\hat{K}$ при этом устремляется к нулю. Все интегральные уравнения допускают явное решение:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda) &= \lambda^2 - h - \frac{2}{c} \mathcal{P} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \\ \rho_t(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{2D}{c}\right), \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\rho_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \frac{2D}{c}}{1 + e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}}}; \quad \rho_h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \frac{2D}{c}}{1 + e^{-\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}}},$$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda.$$

Еще раз напомним, что при $c = \infty$ теория эквивалентна свободным фермионам.

Отметим также, что при $T = 0$ предел слабой связи $c \rightarrow 0$ изучался в работе [1.10], где были воспроизведены результаты теории возмущений [1.1]. В этом пределе модель сводится к слабо взаимодействующим бозонам.

§ 8. Возбуждения около состояния термодинамического равновесия

Состояние термодинамического равновесия было построено в § 5. Это состояние представляет собой смесь различных собственных функций гамильтониана. Для того чтобы получить возбуждения около равновесного состояния, выберем одну из этих собственных функций. Затем построим возбуждения около этой собственной функции с помощью тех же методов, что и при нулевой температуре (см. § 4). Ниже мы увидим, что физические характеристики этого возбуждения (энергия, импульс, матрица рассеяния) не зависят от конкретного выбора собственной функции. Они зависят только от макроскопических характеристик, которые одинаковы для всех собственных функций, входящих в состояние термодинамического равновесия. Здесь просматривается аналогия с теорией калибровочных полей, причем $\exp\{S\}$ аналогична объему калибровочной группы. Макроскопические величины ρ_h , ρ_p ((5.3) — (5.6)) «калибровочно инвариантны», а переход от одного набора микроскопических переменных $\{n_j\}$ (см. (2.13)) к другому, соответствующему тому же значению ρ_p и ρ_h , аналогичен калибровочному преобразованию.

Для построения возбуждений удобно использовать функцию $\lambda(x)$ (2.27):

$$L\lambda(x) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda(x) - \lambda_k) = 2\pi Lx. \quad (8.1)$$

Здесь λ_k — разрешенные значения импульсов частиц в состоянии термодинамического равновесия. Простейшее возбуждение в каноническом ансамбле (при фиксированном числе частиц) строится путем создания одной дырки и добавления одной частицы. Функция $\lambda(x)$ при этом изменится; обозначим новую функцию через $\tilde{\lambda}(x)$. Уравнение для нее имеет вид

$$L\tilde{\lambda}(x) + \sum_{k=1}^N \theta(\tilde{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}_k) + \theta(\tilde{\lambda}(x) - \lambda_p) - \theta(\tilde{\lambda}(x) - \lambda_h) = 2\pi Lx. \quad (8.2)$$

Здесь $\tilde{\lambda}_k$ — новые значения импульсов частиц, а λ_p и λ_h — голые импульсы внесенной частицы и дырки. В полной аналогии с (4.10) и (4.20) определим функцию

$$F\left(\lambda\left(\frac{j}{L}\right) \middle| \lambda_p, \lambda_h\right) = \frac{\lambda\left(\frac{j}{L}\right) - \tilde{\lambda}\left(\frac{j}{L}\right)}{\lambda\left(\frac{j+1}{L}\right) - \lambda\left(\frac{j}{L}\right)}. \quad (8.3)$$

Выкладки, аналогичные проделанным в § 4, приводят нас к линейному интегральному уравнению для F :

$$2\pi F(\lambda|\lambda_p, \lambda_h) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \vartheta(\mu) F(\mu|\lambda_p, \lambda_h) d\mu = \theta(\lambda - \lambda_p) - \theta(\lambda - \lambda_h). \quad (8.4)$$

Видна полная аналогия с уравнениями (4.11), (4.17). Единственное отличие состоит в замене меры интегрирования

$$\int_{-q}^q d\lambda \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(\lambda) d\lambda. \quad (8.5)$$

Здесь $\vartheta(\lambda)$ — это фермиевский вес (5.27):

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\rho_p(\lambda)}{\rho_t(\lambda)} = \frac{1}{1 + \exp\{\varepsilon(\lambda)/T\}}. \quad (8.6)$$

Энергия и импульс возбужденного состояния вычисляются аналогично § 4:

$$\Delta E(\lambda_p, \lambda_h) = \lambda_p^2 - \lambda_h^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} 2\mu F(\mu|\lambda_p, \lambda_h) \vartheta(\mu) d\mu, \quad (8.7)$$

$$k(\lambda_p, \lambda_h) = \lambda_p - \lambda_h - \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu|\lambda_p, \lambda_h) \vartheta(\mu) d\mu. \quad (8.8)$$

В работе [1.14] приведено доказательство того, что энергия и импульс могут быть выражены следующим образом:

$$\Delta E(\lambda_p, \lambda_h) = \varepsilon(\lambda_p) - \varepsilon(\lambda_h), \quad (8.9)$$

$$k(\lambda_p, \lambda_h) = k(\lambda_p) - k(\lambda_h) = \lambda_p - \lambda_h + \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \rho_p(\mu) [\theta(\lambda_p - \mu) - \theta(\lambda_h - \mu)]. \quad (8.10)$$

Здесь $\varepsilon(\lambda)$ — решение уравнения Янга (6.1).

Матрица рассеяния частицы на дырке имеет вид

$$S(\lambda_p, \lambda_h) = \exp\{-i\delta(\lambda_p, \lambda_h)\}, \quad \lambda_p > \lambda_h. \quad (8.11)$$

Фаза δ определяется одевающим уравнением

$$\delta(\lambda_p, \lambda_h) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda_p, \mu) \vartheta(\mu) \delta(\mu, \lambda_h) d\mu = \theta(\lambda_p - \lambda_h). \quad (8.12)$$

Таким образом, все наблюдаемые характеристики возбуждений действительно зависят только от макроскопических величин.

Необходимо отметить, что все формулы для наблюдаемых характеристик частиц при $T \neq 0$ получаются из соответствующих формул при $T=0$ заменой меры интегрирования (8.5). Это правило будет выполняться и при вычислении корреляторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем соотношение (4.14), исходя из соотношения (4.12). Сначала установим равенство производных

$$\frac{\partial \Delta E(\lambda_p)}{\partial \lambda_p} = \frac{\partial \varepsilon(\lambda_p)}{\partial \lambda_p}. \quad (\text{П.1.1})$$

Вычислим правую часть. Для этого продифференцируем (4.15):

$$\left[1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K}\right] \varepsilon' = \varepsilon'_0 \quad (\text{П.1.2})$$

или

$$\varepsilon'(\lambda) = \int_{-q}^q \left[1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K}\right]^{-1}(\lambda, \mu) \varepsilon'_0(\mu) d\mu. \quad (\text{П.1.3})$$

Поскольку оператор $\left[1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K}\right]^{-1}$ симметричен, то его ядро является симметричной функцией своих аргументов. Вычислим теперь левую часть. Для этого продифференцируем уравнение (4.11) по λ_p :

$$\dot{F}(\mu | \lambda_p) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\mu, \nu) \dot{F}(\nu | \lambda_p) d\nu = \frac{1}{2\pi} K(\mu, \lambda_p), \quad (\text{П.1.4})$$

$$\dot{F}(\mu | \lambda_p) \equiv - \frac{\partial F(\mu | \lambda_p)}{\partial \lambda_p}.$$

Левая часть (П. 1.1) имеет вид (см. (4.12))

$$\frac{\partial \Delta E(\lambda_p)}{\partial \lambda_p} = \varepsilon'_0(\lambda_p) + \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q d\mu \int_{-q}^q \varepsilon'_0(\mu) \left[1 - \frac{\hat{K}}{2\pi}\right]^{-1}(\mu, \nu) K(\nu, \lambda_p) d\nu. \quad (\text{П.1.5})$$

Здесь мы выразили $\dot{F}$ из уравнения (П. 1.4). Проинтегрируем уравнение (П. 1.5) сначала по μ . Воспользовавшись (П. 1.2) и (П. 1.3), получим

$$\frac{\partial \Delta E(\lambda_p)}{\partial \lambda_p} = \varepsilon'_0(\lambda_p) + \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q \varepsilon'(\nu) K(\lambda_p, \nu) d\nu = \varepsilon'(\lambda_p). \quad (\text{П.1.6})$$

Итак, равенство (П. 1.1) доказано. Докажем теперь равенство аддитивных постоянных, анализируя асимптотику $\varepsilon(\lambda_p)$ и $\Delta E(\lambda_p)$ при больших λ_p . Уравнение (4.15) позволяет аналитически продолжить $\varepsilon(\lambda)$ с отрезка $[-q, q]$ на всю вещественную ось, причем

$$\varepsilon(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \pm \infty} \lambda^2 - h + o(1/\lambda). \quad (\text{П.1.7})$$

Для анализа ΔE нам нужно знать асимптотику функции $F(\mu|\lambda_p)$ при $\lambda_p \rightarrow \pm \infty$. В правой части (4.11) фаза $\theta \rightarrow \pm \pi$ при $\lambda \rightarrow \pm \infty$. Сравнивая (4.11) и (3.7), получаем:

$$F(\mu|\lambda_p) \xrightarrow{\lambda_p \rightarrow \pm \infty} \mp \pi \rho(\mu). \quad (\text{П.1.8})$$

Функция $\rho(\mu)$ является четной, а $\varepsilon'_0(\mu) = 2\mu$ является нечетной, поэтому

$$\Delta E(\lambda_p) \xrightarrow{\lambda_p \rightarrow \pm \infty} \varepsilon_0(\lambda_p) = \lambda_p^2 - h + o(1/\lambda_p). \quad (\text{П.1.9})$$

Итак, мы видим, что асимптотики (П.1.7) и (П.1.9) совпадают, что окончательно доказывает равенство (4.14):

$$\varepsilon(\lambda_p) = \Delta E(\lambda_p). \quad (\text{П.1.10})$$

Докажем теперь, что выражения для импульса (4.13) и (4.16) равны. Умножим уравнение (4.11) на $\rho(\mu)$ и проинтегрируем по μ . Воспользовавшись антисимметричностью фазы θ и уравнением для $\rho(\mu)$ (3.7), получим

$$\int_{-q}^q F(v|\lambda) dv = \int_{-q}^q \rho(v) \theta(v-\lambda) dv. \quad (\text{П.1.11})$$

Таким образом, формулы (4.13) и (4.16) действительно эквивалентны.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вычисления, проведенные в § 5 методом наискорейшего спуска, верны, если матрица вторых производных показателя экспоненты в (5.16) отрицательно определена. Покажем, что это действительно так. Проинтегрируем выражение (5.16) последовательно — сначала по ρ_p , а затем по h . Легко показать, что

$$\delta^2 \left(S - \frac{E}{T} + \frac{L}{T} h \left[\int \rho_p(\lambda) d\lambda - D \right] \right) = -\frac{L}{T^2} \int [\delta \varepsilon(\lambda)]^2 \rho_p(\lambda) [1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}]^{-1} d\lambda < 0. \quad (\text{П.2.1})$$

Применяя метод наискорейшего спуска, получим:

$$Z = \text{const} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{L}{T} f \right\} dh, \quad (\text{П.2.2})$$

$$f = Dh - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln [1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}] d\lambda.$$

Зависимость f от h определяется системой уравнений (5.24) — (5.26), ее первая производная равна:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = D - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda, \quad (\text{П.2.3})$$

а вторая, соответственно,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = -\frac{\partial}{\partial h} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda. \quad (\text{П.2.4})$$

Если правая часть этого выражения отрицательна, то интегрирование по h вдоль мнимой оси означает правильное прохождение точки стационарности (см. (5.16)).

Следствием уравнений (5.19) и (5.7) является:

$$\frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial h} = -2\pi \rho_t(\lambda). \quad (\text{П.2.5})$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) [1 + \exp \{ \varepsilon(\lambda)/T \}]$. Можно доказать, что $\partial \rho_p(\lambda)/\partial h$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\left(1 + e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}}\right) \frac{\partial \rho_p(\lambda)}{\partial h} - \frac{1}{2\pi} \int K(\lambda, \mu) \frac{\partial \rho_p(\mu)}{\partial h} d\mu = \frac{2\pi}{T} e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} \rho_p(\lambda) \rho_t(\lambda). \quad (\text{П.2.6})$$

Это и позволяет доказать необходимое неравенство:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{\partial}{\partial h} \int \rho_p(\lambda) d\lambda = \frac{(2\pi)^2}{T} \int d\lambda e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} \left(1 + e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}}\right) \rho_p^3(\lambda) > 0. \quad (\text{П.2.7})$$

Последнее неравенство означает, что

$$\frac{\partial D}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \int \rho_p(\lambda) d\lambda > 0, \quad T > 0. \quad (\text{П.2.8})$$

Можно доказать, что это соотношение выполняется и при нулевой температуре:

$$\frac{\partial D}{\partial h} = \frac{8\pi^2 \rho^3(q)}{\varepsilon'(q)}, \quad T=0. \quad (\text{П.2.9})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Докажем эквивалентность двух определений скорости звука (7.16) и (7.17):

$$v = \partial \varepsilon(\lambda) / \partial k(\lambda) |_{\lambda=q} = (\partial \varepsilon(\lambda) / \partial \lambda) / (\partial k(\lambda) / \partial \lambda) |_{\lambda=q} \quad (\text{П.3.1})$$

и

$$v^2 = 2\partial \mathcal{P} / \partial D = 2(\partial \mathcal{P} / \partial h) / (\partial D / \partial h). \quad (\text{П.3.2})$$

Сравнивая (3.7) и (3.16), видим, что

$$\partial \varepsilon(\lambda) / \partial h = -2\pi \rho(\lambda). \quad (\text{П.3.3})$$

Соотношение (7.15) показывает, что

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial h} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial h} d\lambda = D \quad (\text{П.3.4})$$

и (4.16) и (3.7) дают

$$\frac{\partial k(\lambda)}{\partial \lambda} = 2\pi\rho(\lambda) = 1 + \int_{-q}^q \dot{F}(\mu|\lambda) d\mu. \quad (\text{П.3.5})$$

С помощью (П. 2.9) легко свести доказательство эквивалентности двух определений (П. 3.1) и (П. 3.2) к соотношению

$$\varepsilon'(q)\rho(q) = D. \quad (\text{П.3.6})$$

Оно доказывается следующим образом. Из (4.12) и (4.15) следует, что (см. (П. 1.4) и (3.16)):

$$\frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda} = 2\lambda + 2 \int_{-q}^q \mu \dot{F}(\mu|\lambda) d\mu. \quad (\text{П.3.7})$$

Дифференцируя (3.7), получаем

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \lambda} = -\rho(q) [\dot{F}(\lambda|q) - \dot{F}(\lambda|-q)].$$

Подставляя это равенство в тождество

$$\int_{-q}^q \lambda \frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda = 2q\rho(q) - D,$$

приходим к соотношению (П. 3.6), что и завершает доказательство эквивалентности микроскопического (П. 3.1) и макроскопического (П. 3.2) определений скорости звука.

Следует также отметить, что для скорости звука справедливо и выражение

$$v = \partial h / \partial q. \quad (\text{П.3.8})$$

Заключение

Мы изложили решение модели одномерного бозе-газа с помощью анзаца Бете. Хотелось бы обратить внимание читателя на некоторые результаты, выходящие далеко за рамки рассмотренной модели. Во-первых, это структура собственной функции (1.26) гамильтониана, и, особенно, свойство двухчастичной неприводимости, которые являются общими для интегрируемых систем. Во-вторых, это уравнения Бете и действие Янга. Выпуклость действия Янга — это решающий факт при доказательстве принципа Паули для взаимодействующих бозонов в § VI.4. При вычислении корреляционных функций в Части III возникнут одевающие уравнения, разрешимость которых удастся доказать лишь в этой области. Полученные решения допускают аналитическое продолжение в те области изменения констант вза-

имедействия, в которых действие Янга не выпукло (например, в XXZ модели). Техника, развитая в этой главе, будет использована в полном объеме при вычислении температурных корреляционных функций в гл. XIII.

Модель одномерного бозе-газа была введена и решена Либом и Линнигером [1.9; 1.10], важную роль в развитии теории бозе-газа сыграли работы [1.3; 1.6; 1.12]. Подробный обзор существующих работ можно найти в книгах [1.7; 1.11]. Термодинамика модели впервые была построена Янгами [1.14]. Отметим, что наше изложение в значительной мере основано на их работах [1.13; 1.14]. Метод вычисления матрицы рассеяния с помощью анзаца Бете был разработан в [1.4]. В одномерном бозе-газе матрица рассеяния вычислена в работах [1.2; 1.8]. Термодинамика модели в рамках функционального интеграла исследовалась в [1.5].

Глава II

ОДНОМЕРНЫЙ МАГНЕТИК ГЕЙЗЕНБЕРГА

Модель Гейзенберга, введенная в работе [2.12], описывает взаимодействие спинов $1/2$, расположенных в узлах одномерной пространственной решетки. Оператор спина $1/2$ есть $s = \sigma/2$, где компоненты вектора спина — матрицы Паули σ_x , σ_y , σ_z :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

с коммутационными соотношениями $[\sigma_p, \sigma_q] = 2i\epsilon_{pqr}\sigma_r$ ($p, q, r = x, y, z$); ϵ_{pqr} — полностью антисимметричный тензор; $\epsilon_{xyz} = 1$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Локальный оператор спина в m -м узле решетки обозначим $\sigma^{(m)}$; операторы спина в разных узлах решетки коммутируют:

$$[\sigma_p^{(m)}, \sigma_q^{(n)}] = 2i\epsilon_{pqr}\delta_{mn}\sigma_r^{(m)}. \quad (0.2)$$

Рассмотрим гамильтониан, описывающий взаимодействие ближайших соседей на цепочке из M узлов:

$$H = - \sum_{m=1}^M \{ I_x \sigma_x^{(m)} \sigma_x^{(m+1)} + I_y \sigma_y^{(m)} \sigma_y^{(m+1)} + I_z \sigma_z^{(m)} \sigma_z^{(m+1)} \} \quad (0.3)$$

(предполагаем, что выполнены периодические граничные условия: $\sigma^{(M+1)} = \sigma^{(1)}$). В случае, когда все три вещественные константы I_x , I_y , I_z различны, модель получила название XYZ модели Гейзенберга. Важные частные случаи $I_x = I_y \neq I_z$ и $I_x = I_y = \pm I_z$ называются соответственно XXZ и XXX моделями.

Историческая роль модели Гейзенберга чрезвычайно велика. Прежде всего она связана с самим возникновением анзаца Бете —

в 1931 г. Гансу Бете удалось построить собственные функции изотропного варианта магнетика Гейзенберга [2.8]. Явный вид этих собственных функций теперь называется *анзатцем Бете*.

Особенно интересно исследовать взаимодействие магнетика Гейзенберга с магнитным полем. Во внешнем магнитном поле модель удастся решить в случае частичной изотропии (XXZ магнетик), причем магнитное поле должно быть направлено по оси z . Поэтому ниже будут рассмотрены результаты, которые дает применение анзатца Бете для XXZ модели во внешнем магнитном поле. Поскольку математически метод решения этой модели вполне аналогичен методу решения одномерного бозе-газа, то изложение в этой главе более краткое, чем в предыдущей. Отметим, что система уравнений Бете для XXZ магнетика очень близка к системе уравнений Бете для массивной модели Тирринга, которая изложена в следующей главе. Именно там будет рассмотрена роль связанных состояний частиц, имеющих в модели.

Остановимся на содержании главы. В § 1 построены собственные функции гамильтониана XXZ магнетика Гейзенберга во внешнем магнитном поле. Выведены уравнения Бете. В § 2 обсуждаются связанные состояния, имеющиеся в модели. Построено основное состояние гамильтониана (в рамках анзатца Бете для этого надо заполнить море Дирака). В § 3 вычислен ряд важных физических характеристик модели, таких как магнитная восприимчивость и фермиевская скорость, обсуждается реакция модели на магнитное поле. В § 4 рассмотрен изотропный случай магнетика Гейзенберга. В § 5 обсуждаются различные интегральные представления для намагниченности. Вводится функция дробного заряда $z(\lambda)$. Доказан ряд интегральных тождеств, которые будут важны при вычислении корреляционных функций в части IV. При первом чтении этот параграф можно пропустить.

§ 1. Уравнения Бете для XXZ магнетика

Гамильтониан H магнетика в постоянном внешнем магнитном поле h , направленном по третьей оси, запишем в виде:

$$H = H_0 - 2hS_z, \quad (1.1)$$

$$H_0 = - \sum_{m=1}^M \{ \sigma_x^{(m)} \sigma_x^{(m+1)} + \sigma_y^{(m)} \sigma_y^{(m+1)} + \Delta (\sigma_z^{(m)} \sigma_z^{(m+1)} - 1) \}. \quad (1.2)$$

Число M узлов периодической решетки ($\sigma^{(M+1)} = \sigma^{(1)}$) будем считать четным. Оператор S_z третьей компоненты полного спина есть

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sigma_z^{(m)}. \quad (1.3)$$

Изменение знака гамильтониана H_0 сводится к изменению знака константы Δ благодаря существованию преобразования подобия

$H_0(-\Delta) = -\mathcal{U} H_0(\Delta) \mathcal{U}^{-1}$ с оператором подобия $\mathcal{U} = \prod_{m=1}^{M/2} \sigma_z^{(2m)}$. Заметим также, что достаточно рассмотреть положительные магнитные поля h , поскольку изменению знака поля соответствует преобразование подобия $H \rightarrow \mathcal{V} H \mathcal{V}^{-1}$; $\mathcal{V} = \prod_{m=1}^M \sigma_x^{(m)}$. Параметр анизотропии Δ ($-\infty < \Delta < +\infty$) определяет физическую природу модели. При $\Delta \geq 1$ основное состояние гамильтониана (состояние с наименьшей энергией) в нулевом магнитном поле является ферромагнитным, и модель описывает ферромагнетик (точка $\Delta=1$ соответствует изотропному ферромагнетику). При $\Delta < 1$ намагниченность в основном состоянии равна нулю (при нулевом магнитном поле); точка $\Delta=-1$ соответствует изотропному антиферромагнетику. Это будет продемонстрировано ниже.

Заметим, что основное внимание будет дальше уделено области $-1 \leq \Delta < 1$; именно эта область наиболее интересна с точки зрения изучения корреляционных функций, так как здесь щель в спектре гамильтониана равна нулю и при нулевой температуре корреляции убывают степенным образом. В этой области удобно запараметризовать параметр анизотропии в терминах «константы связи» η :

$$\Delta = \cos 2\eta, \quad -1 \leq \Delta < 1, \quad \pi \geq 2\eta > 0. \quad (1.4)$$

Приступим к описанию бетевских собственных волновых функций гамильтониана, т. е. к построению анзаца Бете. Заметим, что оператор H_0 (1.2) коммутирует с оператором S_z (1.3); собственные векторы гамильтониана поэтому выберем так, чтобы они были и собственными векторами S_z (и H_0). Базисные векторы в m -м узле решетки обозначим $|\uparrow\rangle_m$ и $|\downarrow\rangle_m$, определив их следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(m)} |\uparrow\rangle_m &= |\uparrow\rangle_m; \quad \sigma_z^{(m)} |\downarrow\rangle_m = -|\downarrow\rangle_m, \\ n \langle \uparrow | \uparrow \rangle_m &= n \langle \downarrow | \downarrow \rangle_m = \delta_{nn}; \quad n \langle \uparrow | \downarrow \rangle_m = n \langle \downarrow | \uparrow \rangle_m = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Важную роль среди собственных векторов гамильтониана будет играть ферромагнитное состояние $|0\rangle$:

$$|0\rangle \equiv \bigotimes_{m=1}^M |\uparrow\rangle_m, \quad H|0\rangle = -hM|0\rangle, \quad S_z|0\rangle = \frac{M}{2}|0\rangle. \quad (1.6)$$

Заметим, что в теории существует еще одно ферромагнитное состояние $|0'\rangle$ с противоположным значением спина:

$$|0'\rangle \equiv \bigotimes_{m=1}^M |\downarrow\rangle_m, \quad S_z|0'\rangle = -\frac{M}{2}|0'\rangle. \quad (1.7)$$

Введем, как обычно, локальные повышающие и понижающие спиновые операторы $\sigma_{\pm}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}^{(m)} &= \frac{1}{2}(\sigma_x^{(m)} \pm i\sigma_y^{(m)}), \quad [\sigma_z^{(m)}, \sigma_{\pm}^{(n)}] = \pm 2\delta_{mn} \sigma_{\pm}^{(n)}, \\ [\sigma_+^{(m)}, \sigma_+^{(n)}] &= [\sigma_-^{(m)}, \sigma_-^{(n)}] = 0, \quad (\sigma_+^{(m)})^2 = (\sigma_-^{(m)})^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Действуя операторами $\sigma_-^{(m)}$ на ферромагнитное состояние $|0\rangle$, получаем собственные векторы оператора S_z :

$$S_z \left(\prod_{i=1}^N \sigma_-^{(m_i)} \right) |0\rangle = \left\{ \frac{M}{2} - N \right\} |0\rangle, \quad 1 \leq m_j \leq M, \quad m_j \neq m_k (j \neq k). \quad (1.9)$$

Собственные векторы состояния $|\Psi_N\rangle$ гамильтониана запараметризуем «спектральными параметрами» λ_α ($\alpha=1, \dots, N$) (вообще говоря, комплексными):

$$H |\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle = E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) |\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle. \quad (1.10)$$

Анализ Бете для $|\Psi_N\rangle$ строится по аналогии с одномерным бозе-газом (1.19):

$$|\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{m_1, \dots, m_N=1}^M \chi_N(m_1, \dots, m_N) \sigma_-^{(m_1)} \dots \sigma_-^{(m_N)} |0\rangle, \quad (1.11)$$

где волновая функция χ_N дается формулой

$$\chi_N(m_1, \dots, m_N) = \sum_Q (-1)^{|Q|} \exp \left\{ i \sum_{\alpha=1}^N p_0(\lambda_{q_\alpha}) m_\alpha - \frac{i}{2} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \text{sign}(m_\beta - m_\alpha) \Phi(\lambda_{q_\alpha}, \lambda_{q_\beta}) \right\}. \quad (1.12)$$

Здесь суммирование ведется по всем $N!$ перестановкам $Q = \{q_\alpha, \alpha=1, \dots, N\}$ чисел $1, 2, \dots, N$; $\text{sign } x \equiv x/|x|$ — знаковая функция; «импульс» $p_0(\lambda)$ и двухчастичная фаза рассеяния $\Phi(\lambda, \mu)$ следующим образом выражаются через λ :

$$p_0(\lambda) = i \ln [\text{ch}(\lambda - i\eta) / \text{ch}(\lambda + i\eta)], \quad p_0(0) = 0, \quad (1.13)$$

$$\Phi(\lambda, \mu) = i \ln [\text{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta) / \text{sh}(\lambda - \mu - 2i\eta)], \quad \Phi(-\infty, 0) = 4\eta. \quad (1.14)$$

Фазу $\Phi(\lambda, \mu)$ можно представить в виде

$$\Phi(\lambda, \mu) = \theta(\lambda - \mu) + \pi; \quad (1.15)$$

здесь $\theta(\lambda)$ — антисимметричная функция, причем

$$\theta(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \pi - 4\eta. \quad (1.16)$$

Вектор $|\Psi_N\rangle$ (1.11) является собственным вектором (1.10) гамильтониана, если спектральные параметры λ_α ($\alpha=1, \dots, N$) удовлетворяют системе уравнений Бете, выражающей периодичность волновой функции χ_N (см. (1.2.2)):

$$\exp \{-ip_0(\lambda_\alpha)M\} = \exp \left\{ i \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \Phi(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \right\}. \quad (1.17)$$

В логарифмическом виде система уравнений Бете имеет вид, аналогичный (1.2.13):

$$Mp_0(\lambda_\alpha) + \sum_{\beta=1}^N \theta(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = 2\pi n_\alpha, \quad \alpha=1, \dots, N. \quad (1.18)$$

Здесь n_α ($\alpha = 1, \dots, N$) — набор целых (полуцелых) чисел при N нечетном (четном). Эта система уравнений так же, как и в одномерном бозе-газе (I.2.15) порождается действием Янга

$$S = \sum_{\alpha=1}^M \{M\hat{p}(\lambda_\alpha) - 2\pi n_\alpha \lambda_\alpha\} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \hat{\theta}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta), \quad (1.19)$$

где

$$\hat{p}(\lambda) = \int_0^\lambda p_0(\mu) d\mu; \quad \hat{\theta}(\lambda) = \int_0^\lambda \theta(\mu) d\mu. \quad (1.20)$$

Исследуем вопрос о выпуклости действия Янга при вещественных λ . Для этого вычислим квадратичную форму матрицы вторых производных:

$$\sum_{\alpha, \beta} v_\alpha v_\beta \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_\alpha \partial \lambda_\beta} = M \sum_\alpha p'_0(\lambda_\alpha) v_\alpha^2 + \sum_{\alpha > \beta} K(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) (v_\alpha - v_\beta)^2. \quad (1.21)$$

Здесь v_α — произвольный вещественный вектор, а

$$K(\lambda, \mu) = \Phi'_\lambda(\lambda, \mu) = \theta'_\lambda(\lambda - \mu) = \frac{\sin 4\eta}{\operatorname{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta) \operatorname{sh}(\lambda - \mu - 2i\eta)}, \quad (1.22)$$

$$p'_0(\lambda) = \frac{\sin 2\eta}{\operatorname{ch}(\lambda - i\eta) \operatorname{ch}(\lambda + i\eta)}. \quad (1.23)$$

Напомним, что мы рассматриваем область $0 < 2\eta \leq \pi$. Из приведенных формул видно, что действие Янга выпукло для вещественных λ только в области

$$0 < 2\eta \leq \pi/2. \quad (1.24)$$

Итак, в этой области можно доказать теорему существования и единственности вещественных решений уравнений Бете. В этой же области удастся доказать принцип Паули (см. § VI.4.).

Формулы (1.10) — (1.17) дают анзац Бете для ХХЗ модели. Заметим, что они справедливы как при $-1 \leq \Delta \leq 1$, так и при $\Delta > 1$, $\Delta < -1$ (в этом последнем случае параметр η (1.4) чисто мнимый).

Соответствующее собственное значение энергии E_N (1.10) дается формулой:

$$E_N = \sum_{\sigma=1}^N \varepsilon_0(\lambda_\sigma) - hM. \quad (1.25)$$

Одночастичная дисперсия $\varepsilon_0(\lambda)$ выражается через импульс (1.13):

$$\varepsilon_0(\lambda) = -2 \sin 2\eta \frac{dp_0(\lambda)}{d\lambda} + 2h = -2 \sin^2 2\eta [\operatorname{ch}(\lambda + i\eta) \operatorname{ch}(\lambda - i\eta)]^{-1} + 2h. \quad (1.26)$$

Таким образом, соответствующее состояние $|\Psi_N\rangle$ можно интерпретировать как N частиц с импульсами $p_0(\lambda_\alpha)$ ($\alpha=1, \dots, N$) и энергиями $\varepsilon_0(\lambda_\alpha)$ над антиферромагнитным состоянием $|0\rangle$ (1.6). Возбуждения, соответствующие этим частицам, можно называть *спиновыми волнами*.

§ 2. Основное состояние

Как и в случае бозе-газа, система уравнений Бете (1.17) определяет спектр разрешенных состояний над ферромагнитным состоянием $|0\rangle$ (1.6), вполне аналогичным фоковскому вакууму для бозе-газа. Отличие состоит в том, что структура решений уравнений Бете теперь гораздо более сложная; в решениях могут присутствовать и комплексные λ_α . Заметим, что импульс p_0 (1.13) и фаза рассеяния Φ (1.14) являются периодическими функциями спектрального параметра с периодом $i\pi$. Поэтому будем отождествлять на комплексной плоскости λ точки λ и $\lambda + i\pi$ (n — целое; $-\infty < n < +\infty$). Важным свойством решений уравнений Бете является их самосопряженность: если набор $\{\lambda_\alpha$; $\alpha=1, \dots, N\}$ — решение уравнений (1.17), то $\{\lambda_\alpha\} = \{\lambda_\alpha^*\}$ (звездочка означает комплексное сопряжение) [2.1]. В наборе $\{\lambda_\alpha\}$ могут присутствовать как элементарные частицы (самосопряженные) λ_α ($\text{Im}\lambda_\alpha=0$ или $\text{Im}\lambda_\alpha=\pi/2$), так и их связанные состояния (группы из нескольких λ_α с одинаковой вещественной частью). В области $0 < 2\eta < \pi/2$ можно доказать, что выполняется принцип Паули (см. § VI.4). Итак, будем считать, что все $\{\lambda_\alpha\}$ в данном решении должны быть различными.

В дальнейшем для XXZ модели будем иметь дело только с «элементарными частицами», спектральные параметры которых расположены либо на вещественной оси $\text{Im}\lambda=0$, либо на оси $\text{Im}\lambda=\pi/2$. Заметим, однако, что описание струн в XXZ модели [2.15] при числе узлов решетки $M \rightarrow \infty$ по существу то же, что и в массивной модели Тирринга, рассмотренной в следующей главе (см. § III.1).

Именно, быстроты частиц, входящих в струну из n частиц, дают при $M \rightarrow \infty$ формулой

$$\lambda_\alpha^{(n)} = s + i\frac{\pi}{4}(1 - v_n) + i\eta(n - 2\alpha - 1), \quad (2.1)$$

$$\text{Im}s=0; \quad v_n = \pm 1; \quad \alpha=0, 1, \dots, n-1.$$

Здесь v_n — «четность» струны. При этом число частиц n в струне не произвольно; разрешенные значения n определяются из условия, что произведение $\sin[2\eta(n-m)]\sin(2\eta m)$ имеет одинаковый знак при любых $m=1, 2, \dots, n-1$:

$$\frac{\sin[2\eta(n-m)]\sin(2\eta m)}{\sin[2\eta(n-1)]\sin(2\eta)} > 0 \quad (m=1, 2, \dots, n-1). \quad (2.2)$$

Перейдем к описанию основного состояния гамильтониана H (1.1). В области $\Delta \geq 1$, $h=0$, как нетрудно убедиться, состояние с наименьшей

энергией — это ферромагнитное состояние (1.6). (Заметим, что состояние $|0'\rangle$ (1.7) (все спины вниз) обладает той же энергией, но в интересном физическом случае $M \rightarrow \infty$ переходы между состояниями $|0\rangle$ и $|0'\rangle$ отсутствуют.) Поэтому в области $\Delta \geq 1$ теория описывает ферромагнетик и устроена особенно просто.

При $-1 \leq \Delta < 1$ и достаточно слабом магнитном поле h ферромагнитное состояние не является основным состоянием гамильтониана (при $h=0$ основное состояние является антиферромагнитным). В работе [2.17] доказано, что основное состояние XXZ антиферромагнетика Гейзенберга в области $0 < 2\eta \leq \pi$ строится так же, как и для одномерного бозе-газа. Целые (или полуцелые) числа n_α в уравнении Бете (1.18) заполняют все возможные значения ($n_{\alpha+1} - n_\alpha = 1$) в симметричном отрезке $-(N-1)/2 \leq n_\alpha \leq (N-1)/2$.

Опишем основное состояние в области $-1 \leq \Delta < 1$ в термодинамическом пределе. Напомним, что этот предел соответствует переходу $M \rightarrow \infty$; при этом число элементарных частиц над ферромагнитным состоянием N стремится к ∞ ; отношение N/M фиксировано:

$$D = N/M \quad (2.3)$$

и определяет плотность частиц на решетке. Построение основного состояния, с формальной точки зрения, совершенно аналогично построению основного состояния для бозе-газа (см. § 1.3). Рассмотрим систему уравнений Бете для вещественных λ ; при этом (см. (2.1))

$$\lambda^{(1)} = \lambda = s; \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad v_n = 1 \quad (2.4)$$

и введем плотность $\rho(\lambda)$:

$$\rho(\lambda) = 1/M(\lambda_{\alpha+1} - \lambda_\alpha). \quad (2.5)$$

Переходя к термодинамическому пределу, получим для плотности уравнение, аналогичное (1.3.7):

$$2\pi\rho(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda, \mu)\rho(\mu)d\mu = dp_0(\lambda)/d\lambda. \quad (2.6)$$

Здесь импульс $p_0(\lambda)$ дается формулой (1.13). Ядро $K(\lambda, \mu)$ этого уравнения определяется через двухчастичную фазу $\Phi(\lambda, \mu)$ (1.14):

$$K(\lambda, \mu) = \frac{\partial \Phi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \frac{\sin 4\eta}{\text{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta) \text{sh}(\lambda - \mu - 2i\eta)}. \quad (2.7)$$

Фермиевский спектральный параметр $\Lambda > 0$, как и в случае бозе-газа, определяется из условия равенства нулю энергии дырки $\varepsilon(\lambda)$ на границе конденсата (т. е. при $\lambda = \pm \Lambda$);

$$\varepsilon(\pm \Lambda) = 0. \quad (2.8)$$

Для энергии дырки несложно получить соответствующее уравнение, аналогичное (1.3.16):

$$\varepsilon(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda, \mu)\varepsilon(\mu)d\mu = \varepsilon_0(\lambda). \quad (2.9)$$

Здесь

$$\varepsilon_0(\lambda) = 2h - 2\sin^2(2\eta) [\operatorname{ch}(\lambda + i\eta) \operatorname{ch}(\lambda - i\eta)]^{-1} \quad (2.10)$$

—одночастичная голая дисперсия (1.26). Заметим, что $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(-\lambda)$. Можно показать, что при $-1 \leq \Delta < 1$ уравнение (2.9) с условием (2.8) имеет единственное решение; при этом определяется и ферми-евский параметр Λ . Это, однако, справедливо только для не слишком больших магнитных полей h ; именно, должно быть выполнено условие

$$0 < h < h_c, \quad h_c = 4\sin^2 \eta = 2(1 - \Delta). \quad (2.11)$$

При приближении $h \rightarrow h_c$ зона Ферми исчезает: $\Lambda \rightarrow 0$. При $h \geq h_c$ основное состояние становится ферромагнитным.

Таким образом, мы описали основное состояние в термодинамическом пределе.

Сделаем еще несколько замечаний. Магнитное поле в XXZ модели аналогично химическому потенциалу в бозе-газе. В нулевом магнитном поле граница зоны Ферми устремляется на бесконечность:

$$\Lambda \rightarrow \infty \text{ при } h \rightarrow 0 \quad (-1 \leq \Delta < 1). \quad (2.11)$$

При этом интегральные уравнения легко решаются с помощью преобразования Фурье. Например, для плотности $\rho(\lambda)$ получаем:

$$\rho(\lambda) = \{2(\pi - 2\eta) \operatorname{ch}[\pi\lambda/(\pi - 2\eta)]\}^{-1}. \quad (2.12)$$

§ 3. Взаимодействие с магнитным полем

Будем рассматривать только область $-1 \leq \Delta < 1$. Плотность энергии магнетика в основном состоянии определим как $E = E/M$, где E — энергия основного состояния, а M — число узлов решетки. Учитывая (1.25) и (2.5), получим для этой величины

$$E = -h + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon_0(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.1)$$

Одночастичная дисперсия ε_0 определена в (1.26); плотность удовлетворяет уравнению (2.6). Выражение (3.1) можно переписать в терминах одетой энергии $\varepsilon(\lambda)$, воспользовавшись уравнениями (2.6) и (2.9):

$$E = -h + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon(\lambda) \rho'_0(\lambda) d\lambda; \quad (3.2)$$

здесь $\rho_0(\lambda)$ — голый импульс (1.13).

Важной характеристикой магнетика являются намагниченность σ и магнитная восприимчивость χ , которые определим следующим образом:

$$\sigma = \langle \sigma_z^{(m)} \rangle = \langle \sigma_z^{(1)} \rangle, \quad \chi = \partial \sigma / \partial h. \quad (3.3)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по основному состоянию $|\Omega\rangle$ системы: для какого-либо оператора A , $\langle A \rangle = \langle \Omega | A | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle$.

Намагниченность связана с плотностью D (2.3) и плотностью вакуумной энергии (3.1):

$$\sigma = 1 - 2D = -\frac{\partial \epsilon}{\partial h}. \quad (3.4)$$

В свою очередь D выражается через плотность $\rho(s)$ (2.4), (2.5):

$$0 \leq D = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda \leq \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Заметим, что $D=0$ при $h \geq h_c$ (2.10); $D=1/2$ только если $h=0$. Следовательно, в нулевом магнитном поле намагниченность равна нулю; при $h \geq h_c$ $\sigma=1$. Для магнитных полей, приближающихся к критическим, нетрудно получить, что

$$\sigma = 1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{h_c - h} \quad (h \rightarrow h_c; h \leq h_c). \quad (3.6)$$

В слабых магнитных полях

$$\sigma = \chi_0 h \quad (h \rightarrow 0), \quad (3.7)$$

где χ_0 — магнитная восприимчивость в нулевом поле:

$$\chi_0 = \frac{\pi - 2\eta}{2\pi\eta \sin 2\eta}. \quad (3.8)$$

Для дальнейшего нам важно исследовать также зависимость от магнитного поля фермиевского спектрального параметра Λ , которая определяется из уравнений (2.8), (2.9). Как уже отмечалось в § 2, $\Lambda \rightarrow 0$ при $h \rightarrow h_c$. Учитывая это, получаем

$$\Lambda = (2 \operatorname{tg} \eta)^{-1} \sqrt{h_c - h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow h_c, h \leq h_c). \quad (3.9)$$

В слабых магнитных полях зависимость от магнитного поля можно тоже определить явно, если воспользоваться для решения уравнений теорией возмущений, основанной на использовании метода Винера—Хопфа. Это дает:

$$\Lambda = [(\pi - 2\eta)/\pi] \ln(h_0/h) \quad (h \rightarrow 0). \quad (3.10)$$

Здесь

$$h_0 = \frac{8\eta \sqrt{\pi \sin 2\eta}}{(\pi - 2\eta)} \Gamma\left(\frac{3\pi - 4\eta}{2(\pi - 2\eta)}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\pi - \eta}{\pi - 2\eta}\right) \exp\left\{\frac{\pi\beta}{2(\pi - 2\eta)}\right\}, \quad (3.11)$$

где

$$\beta = \frac{\pi - 2\eta}{\pi} \ln\left(\frac{\pi - 2\eta}{\pi}\right) + \frac{2\eta}{\pi} \ln\left(\frac{2\eta}{\pi}\right). \quad (3.12)$$

Важной микроскопической характеристикой модели является также фермиевская скорость v_F :

$$v_F = \left. \frac{\partial \epsilon(\lambda)}{\partial k(\lambda)} \right|_{\lambda=\Lambda}. \quad (3.13)$$

Здесь $\varepsilon(\lambda)$ — одетая энергия дырки (2.9), $k(\lambda)$ — «одетый импульс» возбуждения, который определяется как

$$k(\lambda) = p_0(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} p'_0(\mu) F(\mu|\lambda) d\mu = p_0(\lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \theta(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu, \quad (3.14)$$

импульс (голый) $p_0(\lambda)$ дается формулой (1.13). Функция сдвига $F(\lambda|\mu)$ определяется интегральным уравнением типа (2.6), где в правой части стоит фаза θ (1.15):

$$F(\lambda|\mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda, \nu) F(\nu|\mu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \theta(\lambda - \mu). \quad (3.15)$$

Как и в модели бозе-газа

$$k'(\lambda) = 2\pi\rho(\lambda). \quad (3.16)$$

Скорость (3.13) связана с производной от спектрального параметра Ферми Λ по внешнему полю

$$v_F = -\frac{2 \sin 2\eta}{h} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial h} \right)^{-1}. \quad (3.17)$$

Для того чтобы вывести это соотношение, надо воспользоваться формулой

$$\left. \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} = - \left. \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\lambda=\Lambda}$$

и связью решений уравнений (2.6), (2.9):

$$\varepsilon(\lambda) = h \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial h} - 4\pi \sin(2\eta) \rho(\lambda). \quad (3.18)$$

Теперь легко вычислить фермиевскую скорость для полей, близких к критическим, $h \rightarrow h_c$, $h \leq h_c$:

$$v_F = 16 \sin^2 \eta \frac{\sqrt{h_c - h}}{h} \quad (3.19)$$

и для слабых полей, $h \rightarrow 0$:

$$v_F = \frac{2\pi \sin 2\eta}{(\pi - 2\eta)}. \quad (3.20)$$

§ 4. XXX магнетик

Это важный частный случай гамильтониана H (1.1), описывающий изотропный магнетик в магнитном поле. Изотропный случай получается, если положить параметр $\Delta = -\pm 1$. При $\Delta = 1$ модель описывает изотропный ферромагнетик. В дальнейшем рассматривается только случай $\Delta = -1$, соответствующий изотропному антиферромагнетик; соответствующее значение константы связи η (1.4) равно $\pi/2$. Мы не будем подробно выводить основные уравнения модели, поскольку

их можно получить, рассмотрев соответствующий предельный переход в XXZ модели, именно, устремив $\kappa \rightarrow 0$ в следующих формулах:

$$2\eta = \pi - \kappa; \quad \lambda_{XXZ} = \kappa \lambda_{XXX}; \quad \kappa \rightarrow 0, \quad \lambda_{XXX} \text{ — конечно.} \quad (4.1)$$

В основном состоянии гамильтониана при этом надо заполнять в термодинамическом пределе состояния с $-\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda$ ($\text{Im } \lambda = 0$). Уравнения для плотности $\rho(\lambda)$ и энергии дырки $\varepsilon(\lambda)$ имеют старый вид (2.6), (2.9) при замене голых импульса (1.13) и энергии (1.26) на

$$\rho_0(\lambda) = i \ln \left(\frac{i/2 + \lambda}{i/2 - \lambda} \right), \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_0(\lambda) = -\frac{2}{\lambda^2 + 1/4} + 2h. \quad (4.3)$$

Ядро $K(\lambda, \mu)$ интегральных уравнений рационализуется:

$$K(\lambda, \mu) = -\frac{2}{(\lambda - \mu)^2 + 1}. \quad (4.4)$$

Граница зоны Ферми Λ определяется по-прежнему из условия (2.8) $\varepsilon(\Lambda) = 0$. Критическое значение магнитного поля h_c получается из (4.1), (2.10):

$$h_c = 4. \quad (4.5)$$

Зависимость Λ от магнитного поля в слабых магнитных полях, однако, получается иной (это объясняется тем, что ядро $K(\lambda, \mu)$ в (3.9) теперь рациональное):

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{(2\pi)^3}{eh^2} \right], \quad (4.6)$$

где e — основание натуральных логарифмов. Заметим, что модель к настоящему времени хорошо исследована. В этой модели доказана асимптотическая полнота бетевских волновых функций [2.2; 2.3] и вычислены спины всех физических возбуждений над антиферромагнитным основным состоянием [2.6; 2.10].

§ 5. Дробный заряд

Мы уже ввели плотность распределения вакуумных частиц и одетую энергию одночастичных возбуждений. Эти величины определяются «одевающими» уравнениями (2.6) и (2.9) соответственно. Как и уравнение (3.15), используемое при построении одетого импульса, они одного типа и отличаются лишь правыми частями. Функцию «дробного заряда» $z(\lambda)$ определим с помощью простейшего одевающего уравнения с правой частью, равной единице:

$$z(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda, \mu) z(\mu) d\mu = 1. \quad (5.1)$$

Смысл названия «дробный заряд» станет ясным после обсуждения в § III.3 заряда элементарного возбуждения в массивной модели Тирринга, который задается уравнением (III.3.7). Функция дробного заряда будет играть центральную роль в части IV при вычислении асимптотики корреляционных функций при нулевой температуре.

Чтобы пояснить смысл функции $z(\lambda)$ в случае магнетика Гейзенберга, заметим, что функцию $z(\lambda)$ можно представить в виде

$$z(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial h}. \quad (5.2)$$

Это легко проверить, используя уравнение (2.9) и учитывая, что энергия возбуждения на границе зоны Ферми равна нулю (2.8). Таким образом, для намагниченности σ получаем из (3.4), учитывая (3.2):

$$\sigma = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} z(\lambda) p'_0(\lambda) d\lambda. \quad (5.3)$$

Отсюда заключаем, что $z(\lambda)$ имеет смысл собственного магнитного момента элементарного возбуждения [2.4]. В терминах функции F (3.15) функция $z(\lambda)$ выражается следующим образом:

$$z(\lambda) = 1 + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \dot{F}(\mu|\lambda) d\mu, \quad (5.4)$$

$$\dot{F}(\mu|\lambda) = -\partial F(\mu|\lambda) / \partial \lambda.$$

Как мы уже видели (см., например, выражение для фермиевской скорости (3.13)) важную роль играют значения микроскопических величин на границе зоны Ферми. Интересно, что эти значения можно связать с макроскопическими характеристиками моделей. Так, одетый импульс (3.14) выражается через плотность D (2.3), (3.5), или намагниченность σ (3.3):

$$k(\Lambda) = \pi D = \frac{\pi}{2} (1 - \sigma), \quad k'(\Lambda) = 2\pi r(\Lambda). \quad (5.5)$$

Важную роль играет и значение дробного заряда на границе зоны Ферми. Определим величину θ следующим равенством:

$$\theta = 2z^2(\Lambda). \quad (5.6)$$

В дальнейшем мы будем называть ее «критическим индексом» — именно она определяет показатель степенного убывания корреляционных функций при нулевой температуре. Покажем, что для магнетика Гейзенберга индекс θ выражается через восприимчивость χ (3.3) и фермиевскую скорость v_F (3.13) по формуле

$$\theta = \frac{\pi}{2} v_F \chi. \quad (5.7)$$

Докажем это равенство. Дифференцируя уравнение (2.6) по Λ и сравнивая результат с уравнением на функцию F (5.4), (3.15), получим

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \Lambda} = \rho(\Lambda) [\dot{F}(\Lambda, \lambda) + \dot{F}(-\Lambda, \lambda)]. \quad (5.8)$$

Следовательно, для плотности D (2.2), (3.5), имеем:

$$\frac{\partial D}{\partial \Lambda} = 2\rho(\Lambda) z(\Lambda). \quad (5.9)$$

Здесь мы воспользовались формулой (5.4). Как и в случае бозе-газа, легко вычислить производную от параметра Λ по внешнему полю h . Непосредственно из уравнения (2.9), условия (2.8) и (5.2) следует, что:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial h} = -\frac{2z(\Lambda)}{\varepsilon'(\Lambda)}. \quad (5.10)$$

Так как $k'(\Lambda) = 2\pi\rho(\Lambda)$ (5.5), то фермиевская скорость (3.7) равна:

$$v_F = \frac{\varepsilon'(\Lambda)}{k'(\Lambda)} = \frac{\varepsilon'(\Lambda)}{2\pi\rho(\Lambda)}. \quad (5.11)$$

Объединяя (5.9)—(5.11), получаем

$$\theta = 2z^2(\Lambda) = -\pi v_F \frac{\partial D}{\partial h}. \quad (5.12)$$

Если теперь учесть, что $\partial D/\partial h = -(1/2)\partial\sigma/\partial h = -(1/2)\chi$ (см. (3.4)), то придем к формуле (5.7). Приведем также следующее равенство:

$$\theta = \frac{\partial}{\partial \Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} z(\lambda) d\lambda. \quad (5.13)$$

Исследуем теперь зависимость критического индекса θ от магнитного поля. Явные аналитические ответы можно получить лишь в предельных случаях: для слабых магнитных полей методом Винера—Хопфа (см. Приложение), а для полей, близких к критическому полю h_c (2.10)—по теории возмущений. Для $h \rightarrow h_c$, $h \leq h_c$ имеем

$$\theta = 2 + 4(\pi \operatorname{tg} \eta \operatorname{tg} 2\eta)^{-1} \sqrt{h_c - h}. \quad (5.14)$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.19).

Для слабых магнитных полей, решая уравнения (5.1) методом Винера—Хопфа, получим:

$$\theta = \frac{\pi}{2\eta} [1 + \alpha_1 h^2] \quad (h \rightarrow 0, \quad 0 < 2\eta < 2\pi/3), \quad (5.15)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2\eta} [1 + \alpha_2 h^{(2\pi/\eta)-4}] \quad (h \rightarrow 0, \quad 2\pi/3 < 2\eta < \pi). \quad (5.16)$$

Видно, что зависимость θ от h определяется величиной константы связи η , причем она существенно различна для 2η больших $2\pi/3$ и меньших $2\pi/3$ (см. также формулы (П.8; П.9)). Коэффициенты α_1 и α_2 являются функциями η :

$$\alpha_1 = \left(\frac{\pi - 2\eta}{\pi} \right)^2 \frac{\operatorname{ctg} [\pi\eta/(\pi - 2\eta)]}{8\eta \sin^2 2\eta},$$

$$\alpha_2 = \frac{4\eta}{\pi} e^{\pi\beta/\eta} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi^2}{2\eta} \right) \frac{\Gamma^2(1 + \pi/(2\eta))}{\Gamma^2(-1/2 + \pi/(2\eta))} h_0^{-2\pi/\eta + 4}.$$

Здесь h_0 определено в (3.11), а β — в (3.12).

В случае изотропного XXX магнетика Гейзенберга, воспользовавшись формулами (4.6) и (П. 19), имеем для слабых магнитных полей:

$$\theta = 1 + [2 \ln(h_0/h)]^{-1}, \quad h_0 = (8\pi^3/e)^{1/2}, \quad (5.17)$$

а для полей, близких к критическим:

$$\theta = 2 \left(1 - \frac{4}{\pi} \sqrt{h_c - h} \right) \quad (h \rightarrow h_c, \quad h \leq h_c). \quad (5.18)$$

Дробный заряд (5.1) в нулевом поле (при этом $\Lambda = \infty$) вычисляется легко: $z(\lambda) = z(0) = \pi/(4\eta)$; это совпадает с величиной «дробного заряда» элементарного возбуждения в массивной модели Тирринга, полученной в гл. III. Заметим, что при Λ больших, но конечных, $z(\lambda) \simeq \pi/4\eta$ только при $|\lambda| \ll \Lambda$. Поэтому при вычислении в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ величины $z(\Lambda)$, входящей в определение критического индекса θ , надо воспользоваться методом Винера—Хопфа (см. (П. 20)). В результате получаем:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} z(\Lambda) = \sqrt{\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} z(0)} = \sqrt{\pi/(4\eta)}. \quad (5.19)$$

Отсюда и из (5.15), (5.16) следует, что в XXZ модели в нулевом магнитном поле

$$\theta = \frac{\pi}{2\eta} \quad (h=0). \quad (5.20)$$

Для XXX модели из (5.17) имеем

$$\theta = 1 \quad (h=0). \quad (5.21)$$

Сделаем небольшое отступление и снова рассмотрим бозе-газ. Покажем, что для этой модели

$$\theta = \frac{4\pi D}{v}; \quad (5.22)$$

здесь D — плотность (I.3.8), а v — скорость звука (I.7.17). Сравнивая уравнения (5.1) и (I.3.7), получим для бозе-газа $z(\lambda) = 2\pi\rho(\lambda)$. Тогда, согласно (5.13) ($\Lambda \equiv q$):

$$\theta = 2\pi \frac{\partial D}{\partial \Lambda}. \quad (5.23)$$

Правую часть легко вычислить, воспользовавшись Приложением 3 предыдущей главы. Действительно, из (П.3.2), (П.3.4) и (П.3.8) следует равенство

$$\frac{\partial D}{\partial \Lambda} = \frac{2D}{v} \quad (5.24)$$

и утверждение (5.22).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем способ решения уравнений (2.6), (2.9), (5.1) в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$, восходящий к работе [2.17] и состоящий в сведении интегрального уравнения на конечном интервале к уравнению типа Винера—Хопфа. Все упомянутые уравнения являются уравнениями вида

$$f_{\Lambda}(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(x-y)f_{\Lambda}(y)dy = \Psi(x) \quad (П.1)$$

с симметричной правой частью $\Psi(x) = \Psi(-x)$. В работе [2.17] доказано, что это уравнение имеет единственное решение для любых значений Λ . Ядро $K(x)$ и функция $\Psi(x)$ определены для всех значений аргумента $-\infty < x < +\infty$. Будем считать, что уравнение (П.1) определяет функцию $f(x)$ как для $|x| \leq \Lambda$, так и для $|x| > \Lambda$. Определив функции f_{Λ}^{+} и f_{Λ}^{-} как

$$f_{\Lambda}^{+}(x) = \begin{cases} f_{\Lambda}(x), & |x| \geq \Lambda, \\ 0, & |x| < \Lambda, \end{cases} \quad f_{\Lambda}^{-}(x) = \begin{cases} f_{\Lambda}(x), & |x| < \Lambda, \\ 0, & |x| \geq \Lambda, \end{cases} \quad (П.2)$$

$$f_{\Lambda}(x) = f_{\Lambda}^{+}(x) + f_{\Lambda}^{-}(x),$$

получим выражение, эквивалентное исходному (П.1):

$$f_{\Lambda}(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)f_{\Lambda}^{-}(y)dy = \Psi(x). \quad (П.3)$$

Наряду с уравнением (П.1) рассмотрим уравнение с бесконечной зоной Ферми ($\Lambda = \infty$):

$$f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)f(y)dy = \Psi(x). \quad (П.4)$$

Определим резольвенту R ядра $K(x-y)$ равенством:

$$2\pi R(x-y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-z)R(z-y)dz + K(x-y) \quad (П.5)$$

и преобразуем (П.3) к виду

$$f_{\Lambda}(x) = f(x) - \int_{\Lambda}^{\infty} R(x-y)f_{\Lambda}^{+}(y)dy - \int_{-\infty}^{-\Lambda} R(x-y)f_{\Lambda}^{+}(y)dy; \quad (П.6)$$

здесь $f(x)$ — решение уравнения (П.4). Очевидно, что $f_{\Lambda}^{+}(x) = f_{\Lambda}^{+}(-x)$, и обозначив $f_{\Lambda}(\Lambda + x) \equiv \varphi(x)$, получим окончательно:

$$\varphi(x) - f(x + \Lambda) + \int_0^{\infty} R(x - y) \varphi^{+}(y) dy = - \int_0^{\infty} R(x + y + 2\Lambda) \varphi^{+}(y) dy. \quad (\text{П.7})$$

Для больших значений Λ правую часть (П.7) можно рассматривать как возмущение. Действительно,

$$R(\Lambda) \sim \exp \left\{ -\frac{\pi}{\pi - 2\eta} \Lambda \right\} \quad (0 < 2\eta < 2\pi/3), \quad (\text{П.8})$$

$$R(\Lambda) \sim \exp \left\{ -\frac{\pi}{\eta} \Lambda \right\} \quad (2\pi/3 < 2\eta < \pi), \quad (\text{П.9})$$

$$R(\Lambda) \sim 1/\Lambda^2 \quad (2\eta = \pi). \quad (\text{П.10})$$

Приравняв левую часть (П.7) к нулю, получим уравнение Винера — Хопфа:

$$\varphi_0(x) + \int_0^{\infty} R(x - y) \varphi_0^{+}(y) dy = f(x + \Lambda). \quad (\text{П.11})$$

Общее решение (П.7) находится методом последовательных приближений:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots$$

Функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют уравнению Винера — Хопфа вида:

$$\varphi_k(x) + \int_0^{\infty} R(x - y) \varphi_k^{+}(y) dy = - \int_0^{\infty} R(x + y + 2\Lambda) \varphi_{k-1}^{+}(y) dy. \quad (\text{П.12})$$

Методам решения уравнений Винера — Хопфа посвящена обширная литература, мы же приведем лишь ответы для фурье-образов

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \varphi(x) dx; \quad \tilde{\varphi}^{+}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega x} \varphi(x) dx;$$

$$\tilde{\varphi}_0^{+}(\omega) = i \frac{G_{+}(\omega)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi\Lambda} \tilde{\Psi}(\xi)}{G_{+}(\xi) [\omega - \xi + i0]} d\xi, \quad (\text{П.13})$$

$$\tilde{\varphi}_k^{+}(\omega) = -i \frac{G_{+}(\omega)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\xi\Lambda} \tilde{\varphi}_{k-1}^{+}(-\xi)}{G_{+}(\xi) [\omega - \xi + i0]} d\xi. \quad (\text{П.14})$$

Здесь функции G_{+} и G_{-} определяются из равенства

$$\frac{1}{1 + \tilde{R}(\omega)} = G_{+}(\omega) G_{-}(\omega), \quad G_{+}(\omega) = G_{-}(-\omega) \quad (\text{П.15})$$

и условия аналитичности соответственно в верхней (нижней) полуплоскости, включая вещественную ось, причем $G_{+}(\infty) = 1$. Для $0 < 2\eta < \pi$

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{\operatorname{sh} \omega \left(\frac{\pi}{2} - 2\eta \right)}{2\operatorname{ch} \left[\omega \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right] \operatorname{sh} \omega \eta}, \quad (\text{П.16})$$

$$G_+(\omega) = \sqrt{4\eta} \frac{\Gamma(1-i\omega/2) \exp\{-i\omega\beta/2\}}{\Gamma(1-i\omega\eta/\pi) \Gamma(1/2-i\omega(1-2\eta/\pi)/2)},$$

$$\beta = \frac{\pi-2\eta}{\pi} \ln \left(\frac{\pi-2\eta}{\pi} \right) - \frac{2\eta}{\pi} \ln \frac{2\eta}{\pi}. \quad (\text{П.17})$$

Для $2\eta = \pi$

$$\tilde{R}(\omega) = -\frac{1}{1+e^{i\omega}}, \quad (\text{П.18})$$

$$G_+(\omega) = \sqrt{2\pi} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}\omega+i0} \frac{\omega+i0}{2\pi e} \right)^{-i\frac{\omega}{2\pi}} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2\pi} \right). \quad (\text{П.19})$$

Через фурье-образ функции $\varphi^+(x)$ можно вычислить все интересующие нас наблюдаемые величины. Так, значение функции на границе зоны Ферми определяется из условия

$$f_\Lambda(\Lambda) = \varphi^+(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-i\omega) \tilde{\varphi}^+(\omega). \quad (\text{П.20})$$

Заключение

Эту главу можно рассматривать как введение в магнетик Гейзенберга. Мы надеемся, что нам удалось донести до читателя красоту этой модели. Подчеркнем, что при вычислении корреляционных функций в частях III, IV будут использованы результаты этой главы, особенно при вычислении критических индексов, описывающих степенное убывание корреляторов на больших расстояниях при нулевой температуре. Мы вернемся к магнетику Гейзенберга в части II в рамках квантового метода обратной задачи, который открывает новые широкие возможности в исследовании этой модели.

Из-за ограниченности объема в эту главу не вошел ряд результатов по теории магнетика Гейзенберга. Заинтересованного читателя отсылаем к работам [2.5; 2.6; 2.10; 2.11; 2.7], в которых приведена подробная библиография. Одномерная модель Гейзенберга интенсивно изучается со времени решения Бете ее изотропного варианта [2.8]. Следует особо упомянуть о работе Хьюльтена [2.13], в которой найдено основное состояние модели в термодинамическом пределе. Метод Бете был применен Янгами для решения ХХЗ модели [2.16—2.18], его развитие позволило Бакстеру [2.7] решить ХУЗ модель. Термодинамика модели изучена в работах Такахаши [2.14; 2.15], при этом важную роль играют связанные состояния. Следует отметить работы, в которых исследуется вопрос о полноте собственных функций ХХЗ магнетика [2.2; 2.3]. Цепочка Гейзенберга анализировалась не только с помощью точного решения, но и с помощью численных методов [2.9].

Глава III

МАССИВНАЯ МОДЕЛЬ ТИРРИНГА

Массивная модель Тирринга, введенная в работе [3.19] — исторически первая модель релятивистской квантовой теории поля, которая была решена с помощью анзатца Бете. В настоящей главе излагается последовательная теория этой модели. В § 1 построен анзатц Бете. В § 2 строится основное состояние гамильтониана (физический вакуум) как море Дирака, вводится ультрафиолетовое обрезание и обсуждается перенормировка массы. В § 3 описываются возбуждения над физическим вакуумом, вычислены их энергия, импульс и матрица рассеяния. Вводится дробный заряд (одетый заряд возбуждений). Обсуждается «выталкивание за обрезание» — явление, благодаря которому одетый заряд отличается от голого (целого) заряда.

Необходимо отметить, что массивная модель Тирринга эквивалентна другой модели релятивистской квантовой теории поля — известной модели синус-Гордон. Эта эквивалентность будет обсуждена в части II.

§ 1. Анзатц Бете

Массивная модель Тирринга — это релятивистская модель квантовой теории поля в двумерном пространстве-времени. Она описывается квантовыми ферми-полями $\psi_k(x, t)$ ($k=1, 2$) и $\psi_k^+(x, t)$ (крест означает эрмитово сопряжение, k — спинорный индекс) с каноническими одновременными перестановочными соотношениями:

$$\begin{aligned} \{\psi_k(x), \psi_l^+(y)\} &\equiv \psi_k(x)\psi_l^+(y) + \psi_l^+(y)\psi_k(x) = \delta_{kl}\delta(x-y), \\ \{\psi_k(x), \psi_l(y)\} &= \{\psi_k^+(x), \psi_l^+(y)\} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Фигурные скобки означают антикоммутатор; временной аргумент у полей ψ здесь и ниже опускается. Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \int [i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_0 \bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}g : (\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) :] dx. \quad (1.2)$$

Матрицы γ выбраны следующим образом:

$$\gamma^0 \equiv \sigma_x, \quad \gamma^1 \equiv i\sigma_y. \quad (1.3)$$

Напомним, что мы используем матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Дираковское сопряжение определено как обычно: $\psi = \psi^\dagger \gamma^0$. Поле ψ рассматривается как двухкомпонентный спинор. Положительная величина m_0 имеет смысл затравочной (голой) массы фермиона; g — это затравочная константа связи. Гамильтониан H , оператор импульса P и оператор числа частиц Q имеют вид:

$$H = \int dx [\psi^\dagger \sigma_z \partial_x \psi + m_0 \psi^\dagger \sigma_x \psi + 2g \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1], \quad (1.5)$$

$$P = -i \int dx \psi^\dagger \partial_x \psi, \quad Q = \int dx \psi^\dagger \psi. \quad (1.6)$$

При построении собственных функций важную роль играет фоковский вакуум $|0\rangle$ и дуальный вакуум $\langle 0|$, определенные соотношениями:

$$\psi(x)|0\rangle=0, \quad \langle 0|\psi^+(x)=0, \quad \langle 0|=(|0\rangle)^+, \quad \langle 0|0\rangle=1. \quad (1.7)$$

Совместные собственные функции операторов H , P , Q строятся аналогично тому, как это было сделано в § I.1 для одномерного бозе-газа. Будем искать их в виде

$$|\Psi_N(\beta_1, \dots, \beta_N)\rangle = \int d^N x \chi^{j_1 \dots j_N}(x_1, \dots, x_N | \beta_1, \dots, \beta_N) \psi_{j_1}^+(x_1) \dots \psi_{j_N}^+(x_N) |0\rangle. \quad (1.8)$$

Для того чтобы $|\Psi_N\rangle$ была собственной функцией гамильтониана (1.5), необходимо и достаточно, чтобы χ была собственной функцией (с тем же собственным значением) следующего N -частичного квантовомеханического гамильтониана $\mathcal{H}_N$:

$$\mathcal{H}_N = \sum_{k=1}^N \left[i\sigma_z^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 \sigma_x^{(k)} \right] + 2g \sum_{k < n} \delta(x_k - x_n). \quad (1.9)$$

В одночастичном секторе ($N=1$) собственная функция χ^j представляет собой двухкомпонентный спинор:

$$\chi(x|\beta) = \begin{pmatrix} e^{-\beta/2} \\ e^{\beta/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \operatorname{sh} \beta}, \quad (1.10)$$

причем соответствующее собственное значение энергии есть $m_0 \operatorname{ch} \beta$. Отсюда следует, что β имеет смысл быстроты релятивистской частицы. Энергия и импульс этой частицы равны

$$E = m_0 \operatorname{ch} \beta, \quad P = m_0 \operatorname{sh} \beta. \quad (1.11)$$

Многочастичная волновая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} & \chi^{j_1 \dots j_N}(x_1, \dots, x_N | \beta_1, \dots, \beta_N) = \\ & = \sum_P (-1)^{|P|} \left\{ \prod_{k=1}^N \chi^{j_k}(x_k | \beta_{p_k}) \right\} \prod_{k < l} \exp \left\{ \frac{i}{2} \varepsilon(x_l - x_k) \Phi(\beta_{p_l} - \beta_{p_k}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Суммирование ведется по всем перестановкам P чисел $1, \dots, N$:

$$P: (1, \dots, N) \mapsto (p_1, \dots, p_N);$$

$\varepsilon(x) = \operatorname{sign} x = x/|x|$ — знаковая функция. Парная матрица рассеяния S равна:

$$S = e^{i\Phi(\beta)} = e^{-ig} \frac{e^\beta + e^{ig}}{e^\beta + e^{-ig}}, \quad (1.13)$$

$$\Phi(\beta) + \Phi(-\beta) = 0, \quad \Phi(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} -g; \quad \Phi(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow -\infty} g.$$

Собственные значения энергии, импульса и числа частиц получаются аддитивно из соответствующих величин отдельных частиц:

$$E_N = m_0 \sum_{k=1}^N \operatorname{ch} \beta_k; \quad P_N = m_0 \sum_{k=1}^N \operatorname{sh} \beta_k, \quad Q_N = N. \quad (1.14)$$

Волновая функция (1.12) меняет знак при перестановке любой пары β_i , что означает существование принципа Паули (см. § VI.4).

Следует отметить важное отличие от одномерного бозе-газа. Непрерывных собственных функций гамильтониана (1.9) не существует. Функция (1.12) является разрывной (при совпадении пары x_j). Существуют различные способы доопределения оператора (1.9). Это приводит к тому, что двухчастичная матрица рассеяния при разных доопределениях может по-разному зависеть от затравочной константы связи g (g может замениться на некоторую функцию от g). С точки зрения квантовой теории поля такая ситуация является нормальной. Зависимость физических величин от затравочной константы связи может изменяться при изменении схемы регуляризации. Существенно, однако, что зависимость этих величин от наблюдаемой (одетой) константы связи при этом не изменяется.

В модели существуют элементарные частицы с положительной ($\text{Im } \beta = 0$) и отрицательной ($\text{Im } \beta = \pi$) энергией. Кроме того, существуют связанные состояния. В работе [3.6] выведены условия, при которых n частиц могут образовывать связанное состояние. Они оказываются теми же, что и соответствующие условия в модели (П.2.2) — все величины (при фиксированном n)

$$\sin \gamma p \sin \gamma (n-p) \quad (p = 1, \dots, n-1) \quad (1.15)$$

должны быть одного знака. Здесь

$$\gamma = \frac{\pi - g}{2}. \quad (1.16)$$

Волновая функция, описывающая связанное состояние n частиц, получается из (1.12) следующим образом. Надо положить $N = n$, а быстроты β_k расположить так:

$$\beta_k = B + i\gamma(n-1-2k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.17)$$

При этом $\text{Im } B = 0$, если все величины (1.15) положительны и $\text{Im } B = \pi$, если все величины (1.15) отрицательны. Полученная таким образом волновая функция убывает по всем разностям $|x_j - x_k|$. Сразу можно указать некий набор решений неравенств (1.15), который оказывается наиболее важным в дальнейшем. Очевидно, что значения

$$n = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\pi}{\gamma} \right\rceil + 1 \quad (1.18)$$

являются разрешенными. Здесь квадратные скобки означают целую часть (ближайшее к данному числу целое число, не превосходящее данного).

Вернемся теперь к волновой функции, описывающей элементарные частицы (1.12). Поместим систему в ящик длины L и наложим периодические граничные условия. Это приведет к тому, что быстроты будут удовлетворять следующей системе уравнений Бете:

$$e^{im_0 L \text{sh } \beta_l} = \prod_{k=1}^N e^{-i\Phi(\beta_l - \beta_k)}. \quad (1.19)$$

Отметим, что собственные функции (1.12) периодически зависят от g , поэтому достаточно считать, что

$$-\pi < g < \pi, \quad 0 < \gamma < \pi. \quad (1.20)$$

§ 2. Основное состояние

Рассмотрим элементарные частицы с отрицательной энергией; их быстроты запишем в виде

$$\beta = \alpha + i\pi, \quad \text{Im } \alpha = 0. \quad (2.1)$$

Систему уравнений (1.19) для них преобразуем к логарифмическому виду:

$$m_0 L \text{sh } \alpha_l = 2\pi n_l + \sum_{k=1}^N \Phi(\alpha_l - \alpha_k). \quad (2.2)$$

Это система уравнений Бете для массивной модели Тирринга. Собственные значения энергии и импульса равны

$$E_N = -m_0 \sum_k \text{ch } \alpha_k, \quad P_N = -m_0 \sum_k \text{sh } \alpha_k. \quad (2.3)$$

Так же как и в случае одномерного бозе-газа (§ I.2), уравнения (2.2) порождаются некоторым действием (действие Янга для данной модели). Легко показать, что это действие является выпуклым только при

$$0 < g < \pi, \quad 0 < \gamma < \pi/2. \quad (2.4)$$

Здесь мы рассматриваем именно эту область значений констант связи.

Основное состояние в модели строится следующим образом. Все состояния элементарной частицы с отрицательной энергией должны быть заполнены, т. е. целые числа n_l идут через единицу:

$$n_{l+1} - n_l = 1. \quad (2.5)$$

Поскольку массивная модель Тирринга — это модель релятивистской квантовой теории поля, то в ней присутствуют ультрафиолетовые расходимости. В этой главе мы будем решать проблему ультрафиолетовой регуляризации стандартным (для теории возмущений) способом. Будем учитывать только те частицы, быстроты которых удовлетворяют условию

$$-\Lambda < \alpha < \Lambda. \quad (2.6)$$

Здесь Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Следует отметить, что наиболее строгая и последовательная регуляризация, осуществляемая с помощью решеточной модели синус-Гордон (см. § VII.5), приводит к тем же физическим ответам.

В пределе бесконечного объема $L \rightarrow \infty$, разрешенные значения быстрот α_l сгущаются ($\alpha_{l+1} - \alpha_l = O(1/L)$). Введем функцию распределения частиц по быстротам:

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{L(\alpha_{j+1} - \alpha_j)}. \quad (2.7)$$

По аналогии с (I.3.7) получаем линейное интегральное уравнение для $\rho(\alpha)$:

$$\rho(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\alpha, \beta) \rho(\beta) d\beta = \frac{m_0}{2\pi} \operatorname{ch} \alpha. \quad (2.8)$$

Здесь

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\sin 2\gamma}{2 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} + i\gamma \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} - i\gamma \right)}. \quad (2.9)$$

Таким образом, основное состояние представляет собой море Дирака, заполненное элементарными частицами с отрицательной энергией.

Устремим $\Lambda \rightarrow \infty$; при этом затравочную массу устремим к нулю согласованным образом. Зависимость m_0 от Λ вычисляется из условия конечности наблюдаемой массы физического возбуждения в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$m_0 = a \exp \left\{ -\frac{g\Lambda}{\pi + g} \right\}. \quad (2.10)$$

Здесь a — некоторая постоянная. Соответствующие вычисления мы проведем в следующем параграфе. Формула (2.10) позволяет построить асимптотическое решение ($\Lambda \rightarrow \infty$) уравнения (2.8):

$$\rho(\alpha) = \frac{ag}{2(\pi + g) \sin g} \operatorname{ch} \frac{\pi\alpha}{\pi + g}, \quad |\alpha| \ll \Lambda. \quad (2.11)$$

Из этой формулы видно, что распределение частиц в море Дирака отличается от свободного ($g=0$) лишь перенормировкой быстроты:

$$\alpha \mapsto \frac{\pi}{\pi + g} \alpha. \quad (2.12)$$

Отметим, что формулу (2.10) можно было бы получить непосредственно из уравнения (2.8), подобрав зависимость m_0 от Λ таким образом, чтобы решение уравнения (2.8) $\rho(\alpha)$ имело конечный предел при $\Lambda \rightarrow \infty$ в области $|\alpha| \ll \Lambda$.

Случай $-\pi < g < 0$ рассматривался в работах [3.11; 3.16], где было показано, что в этом случае основное состояние представляет собой море Дирака, в котором, кроме элементарных частиц, присутствуют их связанные состояния.

§ 3. Дробный заряд и выталкивание за обрезание

Рассмотрим возбуждения над основным состоянием (физическим вакуумом). Сначала построим возбуждение, соответствующее дырке в море Дирака, описывающее элементарный фермион. Итак, пусть одна из частиц моря с быстротой α_h отсутствует. Разрешенные значения быстрот остальных частиц моря сдвинутся.

По аналогии с § 1.4 введем функцию сдвига

$$F(\alpha_j | \alpha_h) = \frac{\alpha_j - \tilde{\alpha}_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} \quad (3.1)$$

и получим для нее линейное интегральное уравнение:

$$F(\alpha | \alpha_h) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\alpha, \beta) F(\beta | \alpha_h) d\beta = \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha - \alpha_h). \quad (3.2)$$

Напомним, что согласно схеме ультрафиолетовой регуляризации мы должны учитывать лишь те частицы, быстроты которых удовлетворяют условию $|\alpha| < \Lambda$. Оказывается, что в возбужденном состоянии некоторые частицы «выходят за обрезание». Это, например, те частицы, для которых $\alpha_j < \Lambda$, но $\tilde{\alpha}_j > \Lambda$.

Можно вычислить, сколько частиц осталось в отрезке $[-\Lambda, \Lambda]$:

$$z = -1 + F(\Lambda | \alpha_h) - F(-\Lambda | \alpha_h). \quad (3.3)$$

Величина z и называется *дробным* (или *одетым*) зарядом возбуждения. Отметим, что при $\Lambda \rightarrow \infty$ существует предел функции F и дробного заряда z . Важную роль играет производная функции F

$$f(\alpha | \alpha_h) = \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha | \alpha_h). \quad (3.4)$$

При снятии обрезания ($\Lambda = \infty$) уравнение (3.2) явно решается с помощью преобразования Фурье. Приведем фурье-образ функции f :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha\omega} f(\alpha) d\alpha = -\frac{\text{sh} [\omega(\pi - 2\gamma)]}{2\text{sh}(\omega\gamma) \text{ch} [\omega(\pi - \gamma)]}. \quad (3.5)$$

С помощью этой формулы легко вычислить дробный заряд:

$$z = -1 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha = -1 + \tilde{f}(0) = -\frac{\pi}{2\gamma}. \quad (3.6)$$

Любопытно отметить, что дробный (одетый) заряд получается из затравочного (равного -1) с помощью стандартного одевающего уравнения аналогичного уравнению (II.5.1):

$$z(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha, \beta) z(\beta) d\beta = -1. \quad (3.7)$$

Вычислим теперь одетые (наблюдаемые) энергию и импульс возбуждения, соответствующего дырке. Рассуждения вполне аналогичны § I.4, однако следует отметить, что учитывается энергия (импульс) только тех частиц из моря Дирака, которые не вытолкнуты за обрезания ($-\Lambda < \tilde{\alpha}_j < \Lambda$):

$$\begin{aligned}\varepsilon_h &= m_0 \operatorname{ch} \alpha_h - m_0 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} (\operatorname{ch} \alpha) f(\alpha | \alpha_h) d\alpha, \\ k_h &= m_0 \operatorname{sh} \alpha_h - m_0 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} (\operatorname{sh} \alpha) f(\alpha | \alpha_h) d\alpha.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Легко убедиться в том, что при $\Lambda \rightarrow \infty$ интегралы в правой части устремляются к бесконечности.

Чтобы получить конечный ответ для энергии возбуждения, следует устремить затравочную массу m_0 к нулю по закону (см. (1.16), (2.10))

$$m_0 = a \exp \left\{ -\frac{\pi - 2\gamma}{2(\pi - \gamma)} \Lambda \right\}.$$

В терминах ренормированной массы M_h :

$$M_h = \frac{a}{\pi - 2\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\gamma\pi}{2(\pi - \gamma)} \quad (3.9)$$

получим следующие ответы:

$$\varepsilon_h = M_h \operatorname{ch} \frac{\pi}{2(\pi - \gamma)} \alpha_h, \quad k_h = M_h \operatorname{sh} \frac{\pi}{2(\pi - \gamma)} \alpha_h. \quad (3.10)$$

Напомним, что это возбуждение соответствует элементарному фермиону. В теории существуют возбужденные состояния, соответствующие связанному состоянию фермиона и антифермиона. Внесем в вакуум связанное состояние n частиц, где

$$n = 1, \dots, \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] - 1 \quad (3.11)$$

(см. (1.18)). Наблюдаемые энергия, импульс и заряд этих возбуждений равны:

$$\varepsilon_n = M_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{2(\pi - \gamma)} \alpha_n, \quad k_n = M_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{2(\pi - \gamma)} \alpha_n, \quad (3.12)$$

$$M_n = 2M_h \sin \left[\frac{\pi\gamma}{2(\pi - \gamma)} n \right], \quad z = 0.$$

Обсудим теперь матрицу рассеяния фермиона на антифермионе. Есть два состояния рассеяния фермиона на антифермионе с положительной и отрицательной пространственной четностью. Следует рассмотреть две дырки с быстройтами α_1 и α_2 и связанное состояние m частиц с быстройтой $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$:

$$m = \left[\frac{\pi}{\gamma} \right], \quad \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1. \quad (3.13)$$

Пространственная четность этого состояния равна $(-1)^m$, а полный заряд равен нулю. В основе этой конструкции лежат следующие соображения. В работе [3.6], где вычислен дробный заряд всех связанных состояний (1.18), показано, что только связанные состояния (3.13) могут скомпенсировать заряд двух дырок (3.6). Значение быстроты связанного состояния (3.13) выбрано так, чтобы волновая функция в системе покоя $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ обладала определенной четностью. Энергия и импульс такого состояния равны сумме соответствующих одночастичных величин (3.10). Матрица рассеяния фермиона на антифермионе вычисляется по правилам, сформулированным в § 1.4. Соответствующие вычисления приведены в [3.6]. Получается, что S-матрица равна:

$$S^{\pm}(\theta) = U_{\pm}(\theta) S(\theta), \quad \theta = \frac{\pi}{2(\pi - \gamma)} (\alpha_1 - \alpha_2), \quad \gamma' = \frac{\pi\gamma}{\pi - \gamma},$$

$$S(\theta) = \exp \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{\text{sh} [2i\theta x / \gamma'] \text{sh} [x(\pi - \gamma') / \gamma']}{\text{sh} x \text{ch} [\pi x / \gamma']} \right\},$$

$$U_+(\theta) = \frac{\text{sh} [\pi(i\pi + \theta) / (2\gamma')]}{\text{sh} [\pi(i\pi - \theta) / (2\gamma')]}, \quad U_-(\theta) = - \frac{\text{ch} [\pi(i\pi + \theta) / (2\gamma')]}{\text{ch} [\pi(i\pi - \theta) / (2\gamma')]} \quad (3.14)$$

Матрица рассеяния связанных состояний получается из этой по вычетам [3.15; 3.20]. Ее явный вид приведен, например, в работе [3.6]. Матрица рассеяния нескольких частиц равна произведению парных.

Заключение

Мы изложили последовательное решение массивной модели Тирринга с помощью анзаца Бете. Вычисление наблюдаемых характеристик, проведенное в настоящей главе, служит примером для вычисления наблюдаемых величин во всех интегрируемых моделях квантовой теории поля. Массивная модель Тирринга была решена в работах Березина и Сушко [3.2], Лютера [3.17], Такера [3.10], Корепина [3.6]. Следует упомянуть о том, что в работе [3.17] массивная модель Тирринга была получена пределом из XYZ магнетика Гейзенберга.

S-матрица рассеяния фермионов в массивной модели Тирринга совпадает с матрицей рассеяния солитонов в модели синус-Гордон, предложенной Замолотчиковым [3.3]. В массивной модели Тирринга эта S-матрица была вычислена динамически в работе [3.6], которой мы следовали выше; этот метод был в дальнейшем использован для других моделей [3.8]. Эквивалентность массивной модели Тирринга и модели синус-Гордон была установлена Колеманом [3.12] и Мандельштамом [3.18] (см. также [3.9]). В части II мы увидим, что уравнения Бете для квантовой модели синус-Гордон совпадают

с уравнениями Бете для массивной модели Тирринга (то же касается выражений для энергии и импульса), следовательно, совпадают все наблюдаемые величины. Отметим, что модель синус-Гордон много исследовалась по теории возмущений. В работе [3.1] с помощью фейнмановской диаграммной техники была вычислена матрица рассеяния основных частиц в этой модели (соответствующих связанных состояний в массивной модели Тирринга) и было продемонстрировано отсутствие множественного рождения на поверхности масс. Вычисление диаграмм существенно упрощается, если использовать теорему о вычислении однопетлевых диаграмм по вычетам [3.4]. Фермионы в модели Тирринга соответствуют солитонам в модели синус-Гордон (солитоны — это частицеподобные решения классического уравнения). В работах [3.7; 3.13; 3.14] было построено квазиклассическое квантование солитонов. Был предсказан спектр масс (3.12), и было вычислено квазиклассическое приближение для S -матрицы вплоть до экспоненциально малых по постоянной Планка вкладов [3.5].

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ I

Мы проиллюстрировали основные идеи применения техники координатного анзаца Бете на примере трех важнейших моделей. Надеемся, что нам удалось убедить читателя в том, что этот подход дает мощный метод анализа интегрируемых моделей и позволяет вычислить многие их характеристики, представляющие физический интерес. Естественно, что мы не смогли прокомментировать многие из решенных моделей, не коснулись мы и обобщения анзаца. Заинтересованного читателя отсылаем к книгам и обзорам [1.1—1.8]. В то же время многие задачи не удастся решить в этих рамках, например, важнейшую задачу о вычислении корреляционных функций.

ВВЕДЕНИЕ

В этой части последовательно излагается квантовый метод обратной задачи. В гл. IV приведены основные положения классического метода обратной задачи, необходимые для квантования. Вводится представление нулевой кривизны, обсуждается гамильтонова структура интегрируемых моделей и бесконечный набор законов сохранения. Наиболее удобный инструмент анализа гамильтоновой структуры — это классическая r -матрица. Обсуждаются некоторые конкретные модели. Гл. V посвящена собственно квантовому методу обратной задачи. Вводится R -матрица — центральный объект в этом методе. Обсуждается уравнение Янга — Бакстера, которому удовлетворяет R -матрица. Излагаются основные положения метода, обсуждается ряд примеров. В гл. VI излагается алгебраическая формулировка анзатца Бете. Это одно из основных достижений квантового метода обратной задачи. В этой главе вводится понятие детерминанта матрицы перехода в квантовом случае. Именно алгебраический анзатц Бете позволит вычислить корреляционные функции в части III.

В гл. VII излагаются интегрируемые модели квантовой теории поля на решетке. Квантовый метод обратной задачи позволяет перенести непрерывные модели теории поля на решетку с сохранением R -матрицы. Для классических моделей это означает сохранение структуры переменных действие-угол при переходе на решетку. В квантовом случае это приводит к сохранению матрицы рассеяния. Для релятивистских моделей теории поля (таких как синус-Гордон) решеточный вариант модели позволяет решить проблему ультрафиолетовых расходимостей наиболее строгим способом. Явный вид решеточных L -операторов позволяет проклассифицировать все интегрируемые модели, связанные с данной R -матрицей.

Следует отметить тесную связь квантового метода обратной задачи со следующими методами современной математической физики. Во-первых, этот метод связан с анзатцем Бете. Во-вторых, с методом решения двумерных решеточных моделей классической статистической физики. В дальнейшем мы будем сокращать название «квантовый метод обратной задачи» до КМОЗ. Отметим, что физические характеристики частиц — одетые энергия, импульс, S -матрица — вычисляются в рамках КМОЗ так же, как и в рамках координатного анзатца Бете, поэтому мы не останавливаемся на этом.

Глава IV

КЛАССИЧЕСКАЯ r -МАТРИЦА

В настоящее время метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) является развитой областью математической физики. В этой главе мы приведем лишь те сведения, которые необходимы для квантования. В § 1 сформулированы понятия представления нулевой кривизны, матрицы перехода, тождеств следов. Классическая r -матрица вводится и обсуждается в § 2, она позволяет вычислять скобки Пуассона матричных элементов матрицы перехода (и строить переменные действие-угол). В § 2 объясняется, что наличие r -матрицы гарантирует существование представления Лакса. Сама r -матрица удовлетворяет некоторому билинейному соотношению (классическому уравнению Янга — Бакстера). Наличие r -матрицы гарантирует наличие бесконечного количества законов сохранения, которые существенно ограничивают динамику. В следующей главе понятие r -матрицы будет перенесено на квантовый случай. В первых двух параграфах общие положения демонстрируются на примере простейшей динамической модели — нелинейного уравнения Шредингера (следует упомянуть, что в классическом случае это название более естественно, чем название «одномерный бозе-газ»). В § 3 рассмотрены другие конкретные модели — уравнение синус-Гордон и модель Михайлова — Шабата — Жибера.

В приложении к главе обсуждаются тензорные обозначения, использование которых существенно упрощает вычисления как в классическом, так и в квантовом случаях.

§ 1. Представление нулевой кривизны

Пусть мы имеем некоторое гамильтоново нелинейное эволюционное уравнение в двумерном пространстве-времени (x — пространственная, t — временная координаты). Гамильтониан обозначим через H . Рассмотрим периодическую задачу на интервале длины L ($0 \leq x \leq L$). Традиционным основанием для применения метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) к такому уравнению является представление нулевой кривизны для него:

$$[\partial_t - U(x|\lambda), \partial_x + V(x|\lambda)] = 0. \quad (1.1)$$

Здесь U и V — квадратные матрицы размерности $K \times K$ (K определяется конкретным уравнением), зависящие от спектрального параметра λ и динамических переменных задачи. Зависимость от t в формулах мы не выписываем. Матрицу $V(x|\lambda)$ будем называть *потенциалом*, а матрицу $U(x|\lambda)$ — *оператором эволюции во времени*. Соотношение (1.1) должно выполняться тождественно при любом значении спектрального параметра λ . Оно возникает как условие совместности двух дифференциальных уравнений:

$$\partial_t \Phi(x, t) = U(x|\lambda) \Phi(x, t), \quad \partial_x \Phi(x, t) = -V(x|\lambda) \Phi(x, t). \quad (1.2)$$

Здесь $\Phi(x, t)$ — неизвестная вектор-функция (она тоже зависит от λ).

При квантовании понадобится перенести представление нулевой кривизны на периодическую решетку с M узлами и шагом Δ :

$$\partial_t L(n|\lambda) = U(n+1|\lambda) L(n|\lambda) - L(n|\lambda) U(n|\lambda). \quad (1.3)$$

Здесь L и U — матрицы размерности $K \times K$, зависящие от спектрального параметра и динамических переменных. Равенство (1.3) также возникает как условие совместности двух уравнений на решетке:

$$\partial_t \Phi(n, t) = U(n|\lambda) \Phi(n, t), \quad \Phi(n+1, t) = L(n|\lambda) \Phi(n, t). \quad (1.4)$$

Здесь n — номер узла на решетке. Нам удобно рассматривать непрерывные модели, вводя инфинитезимальную решетку ($\Delta \rightarrow 0$). При этом координата n -го узла решетки есть $x_n = n\Delta$, $n = 1, \dots, M$, $M = L/\Delta$. Переход на такую решетку осуществляется при следующем отождествлении:

$$L(n|\lambda) = I - V(x_n|\lambda)\Delta + O(\Delta^2), \quad (1.5)$$

где I — единичная $K \times K$ -матрица.

Введем один из основных объектов МОЗР — матрицу перехода $T(x, y|\lambda)$. Это матрица размерности $K \times K$. В непрерывном случае для отрезка $[y, x]$ ($x \geq y$) она определяется следующими требованиями:

$$[\partial_x + V(x|\lambda)] T(x, y|\lambda) = 0, \quad (1.6)$$

$$T(y, y|\lambda) = I. \quad (1.7)$$

Матрица перехода обладает следующим групповым свойством: если z — внутренняя точка отрезка $[y, x]$, то

$$T(x, z|\lambda) T(z, y|\lambda) = T(x, y|\lambda) \quad (x \geq z \geq y).$$

В левой части стоит произведение двух матриц размерности $K \times K$. Матрица перехода $T(L, 0|\lambda)$ на всем интервале $[0, L]$ называется *матрицей монодромии*.

Решеточная матрица перехода от m -го узла до $(n+1)$ -го узла есть произведение $(n-m+1)$ матриц размерности $K \times K$:

$$T(n, m|\lambda) = L(n|\lambda) L(n-1|\lambda) \dots L(m|\lambda), \quad n \geq m. \quad (1.8)$$

Отметим, что $L(k|\lambda) \equiv T(k, k|\lambda)$ и является элементарной матрицей перехода на один узел решетки. Матрица перехода $T(M, 1|\lambda)$ на всю длину решетки называется *матрицей монодромии*. Матрица $L(k|\lambda)$ традиционно называется *L -оператором*.

След матрицы монодромии на полном интервале в непрерывном и решеточном случаях

$$\tau(\lambda) = \text{tr } T(L, 0|\lambda), \quad \tau(\lambda) = \text{tr } T(M, 1|\lambda) \quad (1.9)$$

играет особенно важную роль. Гамильтониан исходного нелинейного уравнения H выражается через логарифмические производные $\tau(\lambda)$ с помощью тождеств следов.

Приведем пример. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$i\partial_t\psi = -\partial_x^2\psi + 2c\psi^*\psi\psi. \quad (1.10)$$

Оно гамильтоново. Гамильтониан и скобки Пуассона полей ψ , ψ^* суть

$$H = \int_0^L (\partial_x\psi^*\partial_x\psi + c\psi^*\psi^*\psi\psi) dx, \quad (1.11)$$

$$\{\psi(x), \psi^*(y)\} = i\delta(x-y). \quad (1.12)$$

Заряд («число частиц») Q и импульс P

$$Q = \int_0^L \psi^*\psi dx, \quad P = -i \int_0^L \psi^*\partial_x\psi dx \quad (1.13)$$

коммутируют с H : $\{H, Q\} = \{H, P\} = 0$. Эта модель представляет собой классический предел квантового нелинейного уравнения Шредингера, подробно рассмотренного в гл. 1. Нелинейное уравнение Шредингера представимо в форме (1.1), матрицы V и U имеют размерность 2×2 :

$$V(x|\lambda) = (i\lambda/2)\sigma_z + \Omega(x), \quad (1.14)$$

$$U(x|\lambda) = (i\lambda^2/2)\sigma_z + \lambda\Omega(x) + i\sigma_z(\partial_x\Omega + c\psi^*\psi). \quad (1.15)$$

Здесь σ_z — матрица Паули ($\sigma_z = \text{diag}(1, -1)$), а матрица Ω равна

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{c}\psi^*(x) \\ -i\sqrt{c}\psi(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Матрица перехода обладает следующими свойствами:

$$\det T(x, y|\lambda) = 1, \quad (1.17)$$

$$\sigma_x T^*(x, y|\lambda^*) \sigma_x = T(x, y|\lambda), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Соответствующий L -оператор на инфинитезимальной решетке имеет вид

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - i\lambda\Delta/2 & -i\sqrt{c}\psi_n^*\Delta \\ i\sqrt{c}\psi_n\Delta & 1 + i\lambda\Delta/2 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

$$\psi_n = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \psi(x) dx, \quad \{\psi_n, \psi_m^*\} = i\delta_{nm}\Delta^{-1}. \quad (1.20)$$

Тождества следов в этой модели выглядят следующим образом (см. (1.9), (1.11), (1.13)):

$$\ln [e^{i\lambda L/2} \tau(\lambda)] \xrightarrow{\lambda \rightarrow i\infty} ic [\lambda^{-1}Q + \lambda^{-2}P + \lambda^{-3}H + O(\lambda^{-4})]. \quad (1.21)$$

Приведем доказательство этой формулы. В пределе $\lambda \rightarrow i\infty$ представим матрицу перехода в виде

$$T(x, y|\lambda) = \mathcal{U}(x|\lambda) D(x, y|\lambda) \mathcal{U}^{-1}(y|\lambda). \quad (1.22)$$

Здесь D — диагональная матрица, а матрица $\mathcal{U}$ зависит только от одного пространственного аргумента. Будем искать матрицу $\mathcal{U}$ в виде ряда по обратным степеням λ :

$$\mathcal{U}(x|\lambda) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \mathcal{U}_k(x), \quad (1.23)$$

где I — единичная матрица, а матрицы $\mathcal{U}_k$ антидиагональные. Смысл представления (1.22) состоит в диагонализации матрицы перехода с помощью калибровочного преобразования. Дифференциальное уравнение (1.6) приводит к следующему уравнению для D :

$$[\partial_x + W(x|\lambda)] D(x, y|\lambda) = 0, \quad D(y, y|\lambda) = I. \quad (1.24)$$

Потенциал W равен

$$W(x|\lambda) = \mathcal{U}^{-1}(x) \partial_x \mathcal{U}(x) + \frac{i\lambda}{2} \mathcal{U}^{-1}(x) \sigma_z \mathcal{U}(x) + \mathcal{U}^{-1}(x) \Omega(x) \mathcal{U}(x). \quad (1.25)$$

Матрицы $\mathcal{U}_k$ определяются из условия, чтобы потенциал W был диагонален. Таким образом, легко получить, что

$$\mathcal{U}_1 = i\sigma_z \Omega, \quad \mathcal{U}_2 = -\partial_x \Omega, \quad \mathcal{U}_3 = i\sigma_z (-\partial_x^2 \Omega + \Omega^3). \quad (1.26)$$

Для потенциала W получаем

$$W = \frac{i\lambda}{2} \sigma_z + \lambda^{-1} W_1 + \lambda^{-2} W_2 + \lambda^{-3} W_3 + O(\lambda^{-4}). \quad (1.27)$$

Здесь

$$W_1 = -i\sigma_z \Omega^2, \quad W_2 = -\Omega \partial_x \Omega, \quad W_3 = i\sigma_z [\Omega \partial_x^2 \Omega - \Omega^4]. \quad (1.28)$$

Благодаря диагональности потенциала W уравнение (1.24) для D легко интегрируется:

$$D(x, y|\lambda) = \exp \left\{ - \int_y^x W(z|\lambda) dz \right\}. \quad (1.29)$$

Положим теперь $y=0$, $x=L$; в силу периодических граничных условий $\mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(0)$. Тогда из (1.17), (1.22) следует, что $\det D(L, 0) = 1$, а D представимо в виде

$$D(L, 0|\lambda) = \exp \{ \sigma_z Z(\lambda) \}. \quad (1.30)$$

Здесь $Z(\lambda)$ — скалярный множитель. Из выражений (1.27) — (1.29) получаем для Z :

$$Z(\lambda) = -\frac{i\lambda L}{2} + i\sigma_z (\lambda^{-1} Q + \lambda^{-2} P + \lambda^{-3} H + O(\lambda^{-4})). \quad (1.31)$$

Вследствие периодических граничных условий

$$\tau(\lambda) = \text{tr } T(\lambda) = \text{tr } D(L, 0|\lambda), \quad (1.32)$$

причем при $\lambda \rightarrow i\infty$ имеем $D_{11}(L, 0|\lambda) \gg D_{22}(L, 0|\lambda)$. Это позволяет вычислить $\ln \tau(\lambda)$, исходя из формул (1.30)—(1.32), и получить формулу (1.21). Итак, тождества следов доказаны.

§ 2. Классическая r -матрица

Для того чтобы построить переменные действие-угол, необходимо научиться вычислять скобки Пуассона между матричными элементами матрицы перехода. Существует особенно эффективный способ вычисления таких скобок Пуассона, основанный на классической r -матрице. При этом удобно воспользоваться тензорными обозначениями. Тензорное произведение двух матриц A и B (размерности $K \times K$ каждая), зависящих от динамических переменных, определим обычным образом — $A \otimes B$ (матрица размерности $K^2 \times K^2$). Важную роль играет матрица перестановки Π размерности $K^2 \times K^2$, обладающая следующим свойством:

$$\Pi(A \otimes B)\Pi = B \otimes A. \quad (2.1)$$

Это соотношение выполняется для всех числовых матриц A и B . Минимальная размерность матрицы Π — 4×4 ; в этом случае матрица Π имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Определение. Скобки Пуассона тензорного произведения $\{A \otimes B\}$ — это матрица размерности $K^2 \times K^2$. Элемент этой матрицы равен скобкам Пуассона одного из элементов матрицы A с одним из элементов матрицы B . Элементы матрицы $\{A \otimes B\}$ расположены в том же порядке, что и элементы матрицы $A \otimes B$. (Тензорные обозначения детально обсуждаются в Приложении.)

Сформулируем теперь основную теорему о скобках Пуассона матрицы перехода в непрерывном случае.

Теорема 1. Если скобки Пуассона между элементами матрицы $V(x|\lambda)$ представимы в виде

$$\{V(x|\lambda) \otimes V(y|\mu)\} = \delta(x-y) [r(\lambda, \mu) \cdot V(x|\lambda) \otimes I + I \otimes V(x|\mu)], \quad (2.3)$$

то скобки Пуассона элементов матрицы перехода равны

$$\{T(x, y|\lambda) \otimes T(x, y|\mu)\} = [T(x, y|\lambda) \otimes T(x, y|\mu), r(\lambda, \mu)]. \quad (2.4)$$

Квадратные скобки в правой части означают матричный коммутатор двух $K^2 \times K^2$ -матриц; r — это числовая $K^2 \times K^2$ -матрица с элементами,

зависящими от λ и μ , действующая в тензорном произведении двух пространств.

Доказательство. Матрица перехода $T(x, y|\lambda)$ зависит от динамических переменных только через потенциал $V(x|\lambda)$. Поэтому скобки Пуассона ее матричных элементов можно записать так:

$$\{T_{ij}(\lambda), T_{kl}(\mu)\} = \int_y^x dz_\lambda \int_y^x (\delta T_{ij}(x, y|\lambda) / \delta V_{ab}(z_\lambda|\lambda)) \times \\ \times (\delta T_{kl}(x, y|\mu) / \delta V_{cd}(z_\mu|\mu)) \{V_{ab}(z_\lambda|\lambda), V_{cd}(z_\mu|\mu)\} dz_\mu. \quad (2.5)$$

Вариационная производная $T(\lambda)$ по $V(\lambda)$ вычисляется так:

$$\delta T(x, y|\lambda) = - \int_y^x T(x, z|\lambda) \delta V(z|\lambda) T(z, y|\lambda) dz. \quad (2.6)$$

Подставим эту формулу в (2.5) и перепишем ее в тензорных обозначениях:

$$\{T(x, y|\lambda) \otimes T(x, y|\mu)\} = \int_y^x dz_\lambda \int_y^x (T(x, z_\lambda|\lambda) \otimes T(x, z_\mu|\mu)) \times \\ \times \{V(z_\lambda|\lambda) \otimes V(z_\mu|\mu)\} (T(z_\lambda, y|\lambda) \otimes T(z_\mu, y|\mu)) dz_\mu. \quad (2.7)$$

С помощью (2.3) находим

$$\{T(x, y|\lambda) \otimes T(x, y|\mu)\} = \int_y^x (T(x, z|\lambda) \otimes T(x, z|\mu)) \times \\ \times [r(\lambda, \mu), V(z|\lambda) \otimes I + I \otimes V(z|\mu)] (T(z, y|\lambda) \otimes T(z, y|\mu)) dz. \quad (2.8)$$

Из (1.6), (1.7) следует, что

$$\partial_y T(x, y|\lambda) = T(x, y|\lambda) V(y|\lambda). \quad (2.9)$$

С помощью этих соотношений исключим $V(z)$ из (2.8):

$$\{T(x, y|\lambda) \otimes T(x, y|\mu)\} = \\ = - \int_y^x \frac{d}{dz} ((T(x, z|\lambda) \otimes T(x, z|\mu)) r(\lambda, \mu) (T(z, y|\lambda) \otimes T(z, y|\mu))) dz. \quad (2.10)$$

Вычисляя интеграл от полной производной и используя (1.7), получим формулу (2.4). Теорема доказана.

С помощью r -матрицы можно вычислить скобки Пуассона матрицы и в дискретном случае.

Теорема 2. Если скобки Пуассона между элементами $L(\lambda)$ представимы в виде

$$\{L(k|\lambda) \otimes L(l|\mu)\} = \delta_{kl} [L(k|\lambda) \otimes L(l|\mu), r(\lambda, \mu)], \quad (2.11)$$

то скобки Пуассона матрицы $T(\lambda)$ имеют вид

$$\{T(n, m|\lambda) \otimes T(n, m|\mu)\} = [T(n, m|\lambda) \otimes T(n, m|\mu), r(\lambda, \mu)]. \quad (2.12)$$

Теорема доказывается по индукции. Соотношение (2.11) составляет базу индукции, а ее шаг проводится следующим образом. Рассмотрим

$$T(n+1, m|\lambda) = L(n+1|\lambda) T(n, m|\lambda). \quad (2.13)$$

Из (2.11) следует, что $\{L(n+1|\lambda) \otimes T(n, m|\mu)\} = 0$. Предполагая верным (2.12), легко показать с помощью элементарных вычислений справедливость равенства

$$\begin{aligned} \{T(n+1, m|\lambda) \otimes T(n+1, m|\mu)\} = \\ = [T(n+1, m|\lambda) \otimes T(n+1, m|\mu), r(\lambda, \mu)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Это завершает индукционное доказательство.

Отметим, что r -матрица, входящая в соотношения (2.4), (2.12), сама должна удовлетворять некоторому соотношению. Матрица r действует в тензорном произведении двух векторных пространств (размерности K). Рассмотрим тензорное произведение трех векторных пространств (размерности K каждое). Соотношение на r -матрицу имеет вид

$$[r_{13}(\lambda, \nu), r_{23}(\mu, \nu)] + [r_{12}(\lambda, \mu), r_{13}(\lambda, \nu) + r_{23}(\mu, \nu)] = 0. \quad (2.15)$$

Здесь индексы у r -матрицы указывают номера пространств, в которых она действует нетривиально (см. Приложение 1). Квадратные скобки в (2.15) означают коммутатор.

Как следует из (2.4), r -матрица определена с точностью до скалярного слагаемого $a(\lambda, \mu)E$ (E — единичная $K^2 \times K^2$ -матрица, a — произвольная числовая функция). Матрицу $r(\lambda, \mu)$ можно выбрать «антисимметричной»: $r(\lambda, \mu) = -Pr(\mu, \lambda)P$ (P — матрица перестановки). Соотношение (2.15) называется классическим уравнением Янга — Бакстера; оно является следствием тождества Якоби, которому удовлетворяют скобки Пуассона (2.12). При совпадающих аргументах r -матрица имеет полюс, поэтому при $\lambda = \mu = \nu$ соотношение (2.15) нуждается в доопределении [4.11].

Приведем пример простейшей r -матрицы:

$$r(\lambda, \mu) = \frac{c}{\lambda - \mu} P. \quad (2.16)$$

Это и есть классическая r -матрица для нелинейного уравнения Шредингера.

Отметим, что существование r -матрицы для данного потенциала V (2.3) или L -оператора (2.11) заранее не очевидно, тем не менее для большинства моделей, решенных с помощью МОЗР, они существуют. Важным следствием существования r -матрицы является наличие бесконечного числа законов сохранения. Действительно, из (2.4), (2.12) и определения (1.9) следует, что

$$\{\tau(\lambda), \tau(\mu)\} = 0. \quad (2.17)$$

Для доказательства достаточно вычислить след равенства (2.4) как матрицы $K^2 \times K^2$ и вспомнить о том, что след тензорного произведения матриц равен произведению их следов. Тождества следов позволяют переписать соотношение (2.17) в виде $\{H, \tau(\mu)\} = 0$, т. е. $\tau(\mu)$ является производящим функционалом интегралов движения.

Фундаментальность r -матрицы состоит в том, что она заменяет оператор эволюции во времени $U(x|\lambda)$ (1.2). Можно доказать [4.12], что если задан гамильтониан, скобки Пуассона и существуют потенциал V (L -оператор), r -матрица и тождества следов, то исходное нелинейное уравнение представимо в форме (1.1) ((1.3)). Поясним конструкцию оператора эволюции во времени $U(x|\lambda)$ в непрерывном случае. Для этого заменим производную по времени $\partial_t V$ в представлении (1.1) на скобки Пуассона с гамильтонианом: $\partial_t V = \{H, V\}$. Так как гамильтониан порождается следом матрицы монодромии $\tau(\mu)$ с помощью тождеств следов, то достаточно рассмотреть СП следа матрицы монодромии с потенциалом.

Теорема 3. *Имеет место представление нулевой кривизны*

$$\{\tau(\mu), V(x|\lambda)\} = \partial_x U(x|\lambda, \mu) + [V(x|\lambda), U(x|\lambda, \mu)]. \quad (2.18)$$

Здесь слева стоят скобки Пуассона, а квадратные скобки справа означают матричный коммутатор двух матриц $K \times K$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. В левой части (2.18) τ — скаляр, а V — матрица. Удобно занумеровать пространство, в котором она действует, номером 2, и ввести дополнительное пространство с номером 1. Перепишем (2.18) в виде:

$$\{\tau(\mu), V_2(x|\lambda)\} = \partial_x U_2(x|\lambda, \mu) + [V_2(x|\lambda), U_2(x|\lambda, \mu)]. \quad (2.19)$$

Здесь U_2 можно представить как след в пространстве номер 1:

$$U_2(x|\lambda, \mu) = \text{tr}_1 (T_1(L, x|\mu) r_{12}(\mu, \lambda) T_1(x, 0|\mu)). \quad (2.20)$$

Индексы означают номера пространств, в которых действуют матрицы, а T — это матрица перехода (1.6). Величину U_2 (2.20) естественно назвать порождающим функционалом операторов эволюции во времени. Аналогичная теорема имеет место и для моделей на решетке. Основываясь на теореме 3, мы не будем приводить операторов эволюции во времени в примерах § 3.

Введение r -матрицы позволяет вычислить скобки Пуассона между данными рассеяния (в равенстве (2.4) следует перейти к пределу $L \rightarrow \infty$ [4.21]). Таким образом, задание r -матрицы фиксирует структуру переменных действие-угол, что в свою очередь подсказывает идею построения решеточных вариантов непрерывных моделей теории поля. При замене непрерывного оператора Лакса $(\partial_x + V)$ на дискретный $L(n|\lambda)$ следует сохранить явный вид r -матрицы. Это гарантирует сохранение структуры переменных действие-угол при переходе из непрерывного случая на решетку.

§ 3. Примеры

В настоящем параграфе приведены примеры вполне интегрируемых лоренц-инвариантных нелинейных эволюционных уравнений.

1. Модель синус-Гордон (СГ). Уравнение движения модели

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u + (m^2/\beta) \sin(\beta u) = 0 \quad (3.1)$$

гамильтоново. Гамильтониан, импульс и заряд модели имеют вид:

$$H = \int \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta u) \right) dx, \quad (3.2)$$

$$P = - \int \pi \partial_x u \, dx, \quad Q = \frac{\beta}{2\pi} \int \partial_x u \, dx. \quad (3.3)$$

Здесь $\pi(x) = \partial_t u(x)$, $\{\pi(x), u(y)\} = \delta(x-y)$. Эта модель имеет много физических приложений. Для нас она интересна как нетривиальная модель релятивистского скалярного поля. Уравнение движения имеет представление нулевой кривизны. Потенциал равен:

$$V(x|\lambda) = \begin{pmatrix} i\beta\pi(x)/4 & (m/2) \operatorname{sh}(-\lambda + (i\beta u(x)/2)) \\ (m/2) \operatorname{sh}(\lambda + (i\beta u(x)/2)) & -i\beta\pi(x)/4 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

а L -оператор на инфинитезимальной решетке:

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - i\beta p_n/4 & (m\Delta/2) \operatorname{sh}(\lambda - (i\beta u_n/2)) \\ -(m\Delta/2) \operatorname{sh}(\lambda + (i\beta u_n/2)) & 1 + i\beta p_n/4 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Здесь

$$u_n = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{n-1}}^{x_n} u(x) dx, \quad p_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \pi(x) dx, \quad \{p_n, u_m\} = \delta_{mn}. \quad (3.6)$$

Классическая r -матрица (2.3) имеет вид

$$r(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}^{11} & r_{21}^{12} & 0 \\ 0 & r_{12}^{21} & r_{11}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

с ненулевыми матричными элементами ($\gamma \equiv \beta^2/8$):

$$r_{22}^{11} = r_{11}^{22} = \gamma \operatorname{cth}(\lambda - \mu), \quad r_{21}^{12} = r_{12}^{21} = -\gamma / \operatorname{sh}(\lambda - \mu). \quad (3.8)$$

Тождества следов можно найти, например, в книгах [4.5; 4.17]. Для последовательного квантования необходимо перенести модель на решетку. Тождества следов для решеточной модели синус-Гордон построены в § VII.2, они отличаются от непрерывного случая.

Важную роль играют свойства симметрии

$$\sigma_y T^*(x, y|\lambda^*) \sigma_y = T(x, y|\lambda), \quad (3.9)$$

$$\det T(x, y|\lambda) = 1. \quad (3.10)$$

2. Модель Жибера — Шабата — Михайлова. Гамильтониан и скобки Пуассона модели имеют вид:

$$H = \int \left(\frac{\gamma}{2} \pi^2 + \frac{1}{2\gamma} (\partial_x u)^2 + \frac{m^2}{\gamma} \left(\exp(u) + \frac{1}{2} \exp(-2u) - \frac{3}{2} \right) \right) dx, \quad (3.11)$$

$$\pi(x) = (1/\gamma) \partial_t u(x), \quad \{\pi(x), u(y)\} = \delta(x-y).$$

Уравнение движения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) u + m^2 (\exp(u) - \exp(-2u)) = 0 \quad (3.12)$$

представимо в виде (1.1), причем потенциал V равен

$$V(x|\lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & im \exp(u/2 - \lambda) & -im \exp(u/2 + \lambda) \\ -im \exp(u/2 + \lambda) & -\partial_t u & im \exp(-u - \lambda) \\ im \exp(u/2 - \lambda) & -im \exp(-u + \lambda) & \partial_t u \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Классическая r -матрица имеет вид ($\kappa \equiv \exp(\lambda - \mu)$):

$$\begin{aligned} r_{11}^{11} &= \gamma \frac{2 - \kappa^3 - \kappa^{-3}}{4(\kappa^3 - \kappa^{-3})}, \\ r_{22}^{11} &= r_{33}^{11} = r_{11}^{22} = r_{11}^{33} = -\gamma \frac{2 + \kappa^3 + \kappa^{-3}}{4(\kappa^3 - \kappa^{-3})}, \\ r_{33}^{22} &= r_{22}^{33} = -\gamma \frac{\kappa^3 + \kappa^{-3}}{2(\kappa^3 - \kappa^{-3})}, \\ r_{21}^{12} &= r_{13}^{31} = \gamma \frac{\kappa^2 + \kappa^{-1}}{2(\kappa^3 - \kappa^{-3})}, & r_{13}^{12} &= r_{21}^{31} = \gamma \frac{\kappa^2 - \kappa^{-1}}{2(\kappa^3 - \kappa^{-3})}, \\ r_{31}^{13} &= r_{12}^{21} = \gamma \frac{\kappa + \kappa^{-2}}{2(\kappa^3 - \kappa^{-3})}, & r_{12}^{13} &= r_{31}^{21} = -\gamma \frac{\kappa - \kappa^{-2}}{2(\kappa^3 - \kappa^{-3})}, \\ r_{32}^{23} &= \gamma \frac{\kappa^2}{\kappa^3 - \kappa^{-3}}, & r_{23}^{32} &= \gamma \frac{\kappa^{-2}}{\kappa^3 - \kappa^{-3}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ. Тензорные обозначения

Мы используем следующие обозначения. Тензорное произведение двух $K \times K$ -матриц A и B (матрицу $A \otimes B$ размерности $K^2 \times K^2$) определим обычным образом:

$$(A \otimes B)_{kl}^{ij} = A_{ij} B_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, \dots, K). \quad (\text{П.1})$$

Матричные элементы $K^2 \times K^2$ -матриц нумеруем блочными индексами i, j (i — номер блок-строки, j — номер блок-столбца) и внутренними индексами k, l (k — номер строки, l — номер столбца **внутри** блока). Для примера выпишем, как выглядит некая матрица R размерности 4×4 , действующая

в тензорном произведении двух пространств 2×2 :

$$R = \left[\begin{array}{cc|cc} R_{11}^{11} & R_{12}^{11} & R_{11}^{12} & R_{12}^{12} \\ R_{21}^{11} & R_{22}^{11} & R_{21}^{12} & R_{22}^{12} \\ - & - & - & - \\ R_{11}^{21} & R_{12}^{21} & R_{11}^{22} & R_{12}^{22} \\ R_{21}^{21} & R_{22}^{21} & R_{21}^{22} & R_{22}^{22} \end{array} \right]. \quad (\text{П.2})$$

В этих обозначениях матричное произведение двух $K^2 \times K^2$ -матриц R и S записывается так:

$$(RS)_{kl}^{ij} = R_{kn}^{im} S_{nl}^{mj} \quad (\text{П.3})$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Единичная матрица E и матрица перестановки Π размерностей $K^2 \times K^2$ имеют вид

$$E = I \otimes I, \quad E_{kl}^{ij} = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (\text{П.4})$$

$$\Pi_{kl}^{ij} = \delta_{il} \delta_{kj}, \quad \Pi^2 = E. \quad (\text{П.5})$$

Определим скобки Пуассона тензорного произведения двух матриц A и B , зависящих от динамических переменных, следующим образом:

$$\{A \otimes B\}_{kl}^{ij} = \{A_{ij}, B_{kl}\}. \quad (\text{П.6})$$

Здесь в правой части стоят скобки Пуассона между двумя матричными элементами матриц A и B .

Иногда в литературе используется несколько другая система обозначений тензорных произведений. Она особенно удобна, когда имеется тензорное произведение большого числа векторных пространств. Если имеется тензорное произведение нескольких матриц, то у каждой матрицы ставят нижний индекс, обозначающий номер векторного пространства, в котором она действует. Например, соотношение (2.4)

$$\{T(\lambda) \otimes T(\mu)\} = [T(\lambda) \otimes T(\mu), r(\lambda, \mu)] \quad (\text{П.7})$$

можно переписать так

$$\{T_1(\lambda), T_2(\mu)\} = [T_1(\lambda) T_2(\mu), r_{12}(\lambda, \mu)]. \quad (\text{П.8})$$

Матрица $T(\lambda)$ действует в первом векторном пространстве, матрица $T(\mu)$ — во втором, а матрица $r(\lambda, \mu)$ действует в тензорном произведении этих пространств. Нижние индексы об этом напоминают. Эти обозначения использованы в формуле (2.15) (классическое соотношение Янга — Бакстера).

Заключение

Мы изложили гамильтоновы аспекты классического метода обратной задачи, которые в следующей главе будут использованы для квантования. Наиболее полно этот метод изложен в монографиях [4.5; 4.17; 4.9; 4.18]. Способ вычисления скобок Пуассона, основанный на классической r -матрице, предложен в работах [4.12; 4.21]. Доказательство теоремы 1 дано в работе [4.20], а ее дискретного аналога (теорема 2) — в [4.7]. Решения уравнения (2.15) подробно исследуются в работах [4.1; 4.8]. Упомянем о том, что нелинейное

уравнение Шредингера было решено с помощью МОЗР в работах [4.4; 4.5], его r -матрица (2.16) найдена в [4.12], а тождества следов получены в [4.4]. Модель синус-Гордон была решена в работах [4.6; 4.14—4.16; 4.18], r -матрица найдена в [4.13], тождество следов можно найти, например, в [4.17]. Модель Жибера—Шабата—Михайлова была введена в работе [4.19] и решена в [4.3; 4.10], r -матрица вычислена в [4.20]. Следует отметить, что в работе [4.3] были перечислены все интегрируемые уравнения одного взаимодействия релятивистского скалярного поля в двумерном случае. Это модель синус-Гордон, гиперболическая модель синус-Гордон (которая получается аналитическим продолжением предыдущей) и модель Жибера—Шабата—Михайлова (модель Лиувилля представляет собой предельный случай этой модели [4.2]).

Глава V

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КВАНТОВОГО МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В настоящее время квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) является развитой областью математической физики. В этой главе изложены и проиллюстрированы на примерах основные положения КМОЗ. В § 1 излагается схема КМОЗ и вводится квантовая R -матрица. Она позволяет вычислять коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы перехода, что необходимо для построения собственных функций гамильтониана в гл. VI. Доказано, что существование R -матрицы и тождеств следов и в квантовом случае гарантирует существование представления Лакса и наличие бесконечного числа законов сохранения. В § 2 обсуждается уравнение Янга—Бакстера, которому удовлетворяет R -матрица, а также ряд других важных ее свойств. В § 3 доказаны тождества следов для квантового нелинейного уравнения Шредингера (здесь более естественно использовать для модели нерелятивистского бозе-газа такое название).

В § 4 общая схема КМОЗ применяется к квантовым уравнениям синус-Гордон и Жибера—Шабата—Михайлова. В § 5 обсуждаются спиновые модели квантовой статистической физики. Показано, что с помощью любой данной R -матрицы можно построить фундаментальную спиновую модель. В § 6 устанавливается связь моделей классической статистической физики на двумерной решетке с КМОЗ.

§ 1. Общая схема

В основе КМОЗ также лежит представление нулевой кривизны (IV.1.1), (IV.1.3) исходного нелинейного уравнения. Гамильтониан H и матричные элементы матриц $L(n|\lambda)$ и $U(n|\lambda)$ являются теперь квантовыми операторами, зависящими от динамических переменных

системы. Для релятивистских систем из-за ультрафиолетовых расходимостей необходима регуляризация. Поэтому мы будем рассматривать в основном решеточную формулировку, где обратный шаг решетки Δ^{-1} имеет смысл ультрафиолетового обрезания. Непрерывные модели также можно непосредственно рассматривать в рамках КМОЗ (см. § 3, где рассмотрено квантовое непрерывное уравнение Шредингера).

Как и в классическом случае, важную роль играет матрица перехода T :

$$T(n, m|\lambda) = L(n|\lambda) L(n-1|\lambda) \dots L(m|\lambda) \quad (n \geq m). \quad (1.1)$$

Это определение совпадает с (IV.1.8), но матричные элементы матриц T и L теперь являются квантовыми операторами и, вообще говоря, не коммутируют друг с другом. Матрица монодромии $T(\lambda)$ — это матрица перехода через все узлы решетки:

$$T(M, 1|\lambda) \equiv T(\lambda). \quad (1.2)$$

Важную роль играет трансформатрица $\tau(\lambda)$:

$$\tau(\lambda) = \text{tr } T(\lambda). \quad (1.3)$$

С помощью монодромии в гл. VI будут построены собственные функции квантового гамильтониана. Поэтому важно выяснить коммутационные соотношения между всеми ее матричными элементами. Этот вопрос решается в КМОЗ с помощью метода R -матрицы, который работает в том случае, если коммутационные соотношения между элементами $L(k|\lambda)$ удастся представить в виде

$$R(\lambda, \mu)(L(k|\lambda) \otimes L(k|\mu)) = (L(k|\mu) \otimes L(k|\lambda)) R(\lambda, \mu), \quad (1.4)$$

и матричные элементы L -операторов в различных узлах решетки коммутируют:

$$[L_{ij}(p|\lambda), L_{kl}(q|\mu)] = 0 \quad \text{при } p \neq q. \quad (1.5)$$

При таких условиях можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы перехода записываются в виде

$$R(\lambda, \mu)(T(n, m|\lambda) \otimes T(n, m|\mu)) = (T(n, m|\mu) \otimes T(n, m|\lambda)) R(\lambda, \mu). \quad (1.6)$$

Здесь $R(\lambda, \mu)$ — числовая матрица размерности $K^2 \times K^2$, зависящая лишь от спектральных параметров λ и μ .

Доказательство легко провести по индукции. Соотношение (1.4) составляет базу индукции. В соотношении (1.6) зафиксируем m и предположим, что это соотношение выполнено для $n=k$. В этих предположениях докажем, что (1.6) выполнено при $n=k+1$. Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu)(T(k+1, m|\lambda) \otimes T(k+1, m|\mu)) = \\ = R(\lambda, \mu)(L(k+1|\lambda) \otimes L(k+1|\mu)) R^{-1}(\lambda, \mu) R(\lambda, \mu) \times \\ \times (T(k, m|\lambda) \otimes T(k, m|\mu)) R^{-1}(\lambda, \mu) R(\lambda, \mu) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (L(k+1|\mu) \otimes L(k+1|\lambda)) (T(k, m|\mu) \otimes T(k, m|\lambda)) R(\lambda, \mu) = \\
&= (T(k+1, m|\mu) \otimes T(k+1, m|\lambda)) R(\lambda, \mu) \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Сравнивая первое и последнее выражения в этой цепочке равенств, видим, что теорема 1 доказана.

Будем называть соотношения (1.4), (1.6) билинейными. Соотношение (1.4) означает, что L -оператор «сплетается» R -матрицей. Матрица монодромии сплетается той же R -матрицей (1.6).

Отметим, что иногда бывает удобно переписать билинейное соотношение в других обозначениях. Для этого умножим соотношение (1.6) слева на матрицу перестановки Π (IV.2.1), получим:

$$\tilde{R}(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes I) (I \otimes T(\mu)) = (I \otimes T(\mu)) (T(\lambda) \otimes I) \tilde{R}(\lambda, \mu), \quad (1.8)$$

где

$$\tilde{R}(\lambda, \mu) = \Pi R(\lambda, \mu). \quad (1.9)$$

Здесь $K \times K$ -матрица $T(\lambda)$ (1.2) действует только в первом векторном пространстве, а матрица $T(\mu)$ — только во втором. Поэтому соотношение (1.8) можно переписать так:

$$\tilde{R}_{12}(\lambda, \mu) T_1(\lambda) T_2(\mu) = T_2(\mu) T_1(\lambda) \tilde{R}(\lambda, \mu). \quad (1.10)$$

Здесь нижний индекс матрицы означает номер векторного пространства, в котором она действует. Матрица $\tilde{R}$ действует в тензорном произведении векторных пространств 1 и 2.

При построении решеточных моделей приходится рассматривать тензорное произведение большого количества пространств. В этом случае соотношение (1.10) перепишем так:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta}(\lambda, \mu) T_\alpha(\lambda) T_\beta(\mu) = T_\beta(\mu) T_\alpha(\lambda) \tilde{R}(\lambda, \mu). \quad (1.11)$$

Здесь α, β ($\alpha \neq \beta$) — номера векторных пространств.

Следствием соотношения (1.8) является то, что трансформатрицы коммутируют при различных значениях спектрального параметра:

$$[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0. \quad (1.12)$$

Легче всего это увидеть следующим образом. Соотношение (1.6) перепишем для матриц монодромии в виде

$$R(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) R^{-1}(\lambda, \mu) = T(\mu) \otimes T(\lambda). \quad (1.13)$$

Возьмем след этого равенства в тензорном произведении двух векторных пространств (т. е. как матриц $K^2 \times K^2$); получим $\tau(\lambda)\tau(\mu) = \tau(\mu)\tau(\lambda)$. Здесь воспользовались тем, что след тензорного произведения двух матриц равен произведению их следов.

И в квантовом случае гамильтониан является линейной комбинацией логарифмических производных трансформатрицы $\tau(\lambda)$ (1.3) в некоторых точках v_a :

$$H = \sum_k \sum_a C_{ka} \frac{d^k}{d\lambda^k} \ln \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=v_a}. \quad (1.14)$$

Такие формулы называются *тождествами следов*, примеры приведены в § 3, 5. Так же, как и в классическом случае из (1.12) следует, что в пределе $M \rightarrow \infty$ имеется бесконечно много законов сохранения. Действительно, с помощью (1.14) можно переписать (1.12) в виде $[H, \tau(\mu)] = 0$. Разлагая это соотношение в ряд по μ , получаем законы сохранения.

Отметим, что и в квантовом случае из существования R -матрицы следует, что для исходного уравнения существует представление нулевой кривизны. Построим сначала производящий функционал $U(n|\lambda, \mu)$ операторов эволюции во времени. Конструкция аналогична классическому случаю (см. (IV.2.19)—(IV.2.20)).

Теорема 2. *Имеет место представление Лакса*.

$$i[(d/d\mu) \ln \tau(\mu), L(n|\lambda)] = U(n+1|\lambda, \mu) L(n|\lambda) - L(n|\lambda) U(n|\lambda, \mu). \quad (1.15)$$

Производящий функционал операторов эволюции во времени $U(n|\lambda, \mu)$ равен

$$U(n|\lambda, \mu) = i(d/d\mu) \ln \tau(\mu) I - iq^{-1}(n|\lambda, \mu)(d/d\mu) q(n|\lambda, \mu). \quad (1.16)$$

Здесь $q(n|\lambda, \mu)$ — матрица $K \times K$:

$$q_2(n|\lambda, \mu) = \text{tr}_1(T_1(M, n/\mu) \tilde{R}_{12}(\mu, \lambda) T_1(n-1, 1/\mu)). \quad (1.17)$$

Индексы означают номера векторных пространств.

Доказательство. Коммутационные соотношения между $L(n|\lambda)$ и $q(n|\lambda, \mu)$ легко получить из (1.4), (1.6):

$$q(n+1|\lambda, \mu) L(n|\lambda) = L(n|\lambda) q(n|\lambda, \mu). \quad (1.18)$$

В этой формуле величины q и L перемножаются как матрицы. Продифференцировав это соотношение по μ и умножив слева на $q^{-1}(n+1|\lambda, \mu)$, найдем:

$$\begin{aligned} q^{-1}(n+1|\lambda, \mu)(d/d\mu) q(n+1|\lambda, \mu) L(n|\lambda) = \\ = q^{-1}(n+1|\lambda, \mu) L(n|\lambda)(d/d\mu) q(n|\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для того чтобы преобразовать правую часть, перепишем коммутационные соотношения между q и L в виде

$$q^{-1}(n+1|\lambda, \mu) L(n|\lambda) = L(n|\lambda) q^{-1}(n|\lambda, \mu) \quad (1.20)$$

и получим

$$\begin{aligned} q^{-1}(n+1|\lambda, \mu)(d/d\mu) q(n+1|\lambda, \mu) L(n|\lambda) = \\ = L(n|\lambda) q^{-1}(n|\lambda, \mu)(d/d\mu) q(n|\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отсюда следует соотношение (1.15). Теорема доказана.

Отметим, что с помощью тождеств следов левую часть (1.15) можно заменить на $\partial_t L(n|\lambda) = i[H, L(n|\lambda)]$. При этом оператор эволюции во времени $U(n|\lambda)$ для гамильтониана H будет равен линейной комбинации производных $U(n|\lambda, \mu)$ в точках $\mu = v_a$. Пусть тождества следов имеют вид (1.14). Для модели с этим гамильтонианом имеет место представление нулевой кривизны:

$$\partial_t L(n|\lambda) = i[H, L(n|\lambda)] = U(n+1|\lambda) L(n|\lambda) - L(n|\lambda) U(n|\lambda), \quad (1.22)$$

причем оператор эволюции строится из производящего функционала по следующей формуле:

$$U(n|\lambda) = \sum_k \sum_a C_{ka} \frac{d^{(k-1)}}{d\mu^{(k-1)}} U(n|\lambda, \mu) \Big|_{\mu=v_k}. \quad (1.23)$$

Построенный оператор эволюции во времени имеет правильный квазиклассический предел, а для гамильтонианов с локальным взаимодействием он также локален. Для моделей НШ и XYZ магнетика Гейзенберга оператор эволюции $U(n|\lambda)$, построенный по формулам (1.15), (1.23), (1.22), совпадает с оператором эволюции, известным ранее в литературе [5.21; 5.22; 5.40].

§ 2. Соотношения Янга — Бакстера

Совместность соотношений (1.6), как и в классическом случае (см. (IV.2.15)), накладывает ограничение на саму R -матрицу.

Чтобы выявить эти ограничения заметим, что прямое произведение трех матриц монодромии $T(\lambda) \otimes T(\mu) \otimes T(v)$ можно привести к виду $T(v) \otimes T(\mu) \otimes T(\lambda)$ двумя различными способами, используя соотношение (1.6):

$$\begin{aligned} T(\lambda) \otimes T(\mu) \otimes T(v) &= (R^{-1}(\lambda, \mu) \otimes I)(I \otimes R^{-1}(\lambda, v))(R^{-1}(\mu, v) \otimes I) \times \\ &\times (T(v) \otimes T(\mu) \otimes T(\lambda))(R(\mu, v) \otimes I)(I \otimes R(\lambda, v))(R(\lambda, \mu) \otimes I) = \\ &= (I \otimes R^{-1}(\mu, v))(R^{-1}(\lambda, v) \otimes I)(I \otimes R^{-1}(\lambda, \mu))(T(v) \otimes T(\mu) \otimes T(\lambda)) \times \\ &\times (I \otimes R(\lambda, \mu))(R(\lambda, v) \otimes I)(I \otimes R(\mu, v)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Достаточным условием для выполнения этого равенства являются знаменитые соотношения Янга — Бакстера [5.42; 5.28]

$$\begin{aligned} (I \otimes R(\lambda, \mu))(R(\lambda, v) \otimes I)(I \otimes R(\mu, v)) &= \\ &= (R(\mu, v) \otimes I)(I \otimes R(\lambda, v))(R(\lambda, \mu) \otimes I). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Соотношение Янга — Бакстера широко используется не только в КМОЗ, но и в теории факторизованных S -матриц. Ниже мы увидим, что просматривается интересная аналогия между КМОЗ и теорией представления групп [5.8; 5.10]. При этом задание R -матрицы аналогично заданию группы, соотношение Янга — Бакстера аналогично тождеству Якоби на структурные константы группы. Задача перечисления всех R -матриц аналогична задаче перечисления всех групп Ли. Задание матрицы монодромии $T(\lambda)$, сплетающейся данной R -матрицей (1.8), аналогично заданию представления (вообще говоря, приводимого) данной группы. Задача перечисления всех матриц монодромии при фиксированной R -матрице аналогична задаче перечисления всех представлений данной группы. Эта задача будет решена в § VI.6. L -оператор аналогичен неприводимому представлению. Задача перечисления всех L -операторов, удовлетворяющих соотношению (1.4) для фиксированной R -матрицы, аналогична задаче перечисления всех неприводимых представлений данной группы. Эта

задача будет решена в § VII.4. Матрица $T(\lambda)$ (произвольное представление) порождается L -операторами (неприводимым представлением) по формуле (1.1).

Простейшим примером R -матрицы является рациональная R -матрица:

$$R(\lambda, \mu) = i\hbar E + (\mu - \lambda) \Pi. \quad (2.3)$$

Это матрица размерности $K^2 \times K^2$. Нетривиальный пример R -матрицы приведен в § 4.

Сделаем несколько замечаний по поводу свойств R -матрицы. Обычно спектральный параметр является комплексным числом, причем его удается выбрать так, что R -матрица зависит от разности:

$$R(\lambda, \mu) = R(\lambda - \mu). \quad (2.4)$$

Это позволяет сдвигать спектральный параметр L -оператора. Если какой-нибудь L -оператор $L(\lambda)$ удовлетворяет билинейному соотношению (1.4), то и $L(\lambda - v)$ удовлетворяет тому же соотношению:

$$R(\lambda - \mu)(L(\lambda - v) \otimes L(\mu - v)) = (L(\mu - v) \otimes L(\lambda - v)) R(\lambda, \mu). \quad (2.5)$$

Здесь v — произвольная константа.

Из (1.6) следует, что R -матрица определена с точностью до умножения на произвольную комплексную функцию. Ее можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$R(\lambda, \mu) = R^{-1}(\mu, \lambda), \quad R(\lambda, \lambda) = E. \quad (2.6)$$

Для таких R -матриц квазиклассический предел особенно прост:

$$R \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \Pi(E - i\hbar r); \quad (2.7)$$

здесь r -классическая r -матрица. Заметим, что мы не всегда будем придерживаться нормировки (2.6). Проиллюстрируем теперь общую схему на примерах.

§ 3. Тождества следов

Обсудим тождества следов на примере квантового нелинейного уравнения Шредингера, описывающего одномерный бозе-газ. Эту модель будем кратко называть моделью НШ. Гамильтониан модели задается выражением (см. § I.1)

$$H = \int (\partial_x \psi^+ \partial_x \psi + c \psi^+ \psi^+ \psi \psi) dx. \quad (3.1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ — эрмитово сопряженные квантовые операторы с перестановочными соотношениями

$$[\psi(x), \psi(y)] = [\psi^+(x), \psi^+(y)] = 0, \quad [\psi(x), \psi^+(y)] = \delta(x - y). \quad (3.2)$$

Импульс P и число частиц Q по-прежнему задаются формулами (IV.1.13). Следует отметить, что матрица перехода в квантовом

случае получается из классической с помощью нормального упорядочения (операторы $\psi(x, t)$ стоят справа от операторов $\psi^+(x, t)$):

$$T_q(x, y|\lambda) = : T_{cl}(x, y|\lambda) :.$$

Особенно ясно это из § VII.3, посвященного решеточным моделям (некоммутирующие квантовые множители не умножаются один на другой). Квантовые поправки в тождествах следов возникают лишь при нормальном упорядочении логарифма $\tau(\lambda)$.

В квантовом случае мы будем действовать по аналогии с классическим. Наложим на поля $\psi(x)$ периодические граничные условия с периодом L . Рассмотрим оператор $(\partial_x + V(x|\lambda))$ (IV.1.14) в квантовом случае. Матрицу перехода определим по аналогии с (IV.1.6), (IV.1.7):

$$(\partial_x + (i\lambda/2)\sigma_z + \Omega(x))T(x, y|\lambda) = 0. \quad (3.3)$$

Следует напомнить, что T — это матрица 2×2 , а ее матричные элементы являются квантовыми операторами, т. е. зависят от полей $\psi(z)$, $\psi^+(z)$ ($x \geq z \geq y$). Матрица перехода обладает следующим свойством:

$$\sigma_x T^*(x, y|\lambda^*) \sigma_x = T(x, y|\lambda). \quad (3.4)$$

Здесь звездочка означает эрмитово сопряжение квантовых операторов (и не переставляет матричных элементов). Матрица монодромии определяется, как и в классике:

$$T(\lambda) \equiv T(L, 0|\lambda). \quad (3.5)$$

След матрицы монодромии $\tau(\lambda) = \text{tr} T(\lambda)$ называется *трансферматрицей*. Можно выразить интегралы движения H , P и Q с помощью тождеств следов:

$$\begin{aligned} \ln(\exp\{i\lambda L/2\} \tau(\lambda)) &\xrightarrow{\lambda \rightarrow i\infty} ic(\lambda^{-1}Q + \\ &+ \lambda^{-2}(P - (ic/2)Q) + \lambda^{-3}(H - icP - (c^2/3)Q) + O(\lambda^{-4})). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Доказательство формул следов аналогично классическому случаю (см. § IV.1). Диагонализуем матрицу перехода с помощью калибровочного преобразования. Формулы (IV.1.22) — (IV.1.28) выполняются и в квантовом случае. Однако диагональную матрицу $D(L, 0|\lambda)$ представим несколько по-другому:

$$D(L, 0|\lambda) = \exp\{-(i\lambda L/2)\sigma_z\} (1 + a_1 \lambda^{-1} + a_2 \lambda^{-2} + a_3 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})). \quad (3.7)$$

Используя (IV.1.27), получим

$$a_1 = -\int W_1(z) dz, \quad (3.8)$$

$$a_2 = -\int W_2(z) dz + :\int W_1(z) dz \int_0^z W_1(y) dy:, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} a_3 = & -\int W_3(z) dz + :\int W_2(z) dz \int_0^z W_1(y) dy: + \\ & + :\int W_1(z) dz \int_0^z W_2(y) dy: - :\int W_1(z) dz \int_0^z W_1(y) dy \int_0^y W_1(t) dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Благодаря периодическим граничным условиям, $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}(L)$ и $\tau(\lambda) = \text{tr} D(L, 0|\lambda)$. В пределе $\lambda \rightarrow i\infty$ можно пренебречь D_{22} по сравнению с D_{11} ; отсюда следует, что $\tau(\lambda) = D_{11}(L, 0|\lambda)(\lambda \rightarrow i\infty)$. Прологарифмируем и получим

$$\ln(\exp\{i\lambda L/2\}\tau(\lambda)) \xrightarrow{\lambda \rightarrow i\infty} \ln(1 + a_1\lambda^{-1} + a_2\lambda^{-2} + a_3\lambda^{-3}) = \\ = \lambda^{-1}b_1 + \lambda^{-2}b_2 + \lambda^{-3}b_3. \quad (3.11)$$

Здесь

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2 - (a_1^2/2), \\ b_3 = a_3 - ((a_1a_2 + a_2a_1)/2) + a_1^3/3. \quad (3.12)$$

Величины a_1, a_2, a_3, b_1 нормально упорядочены, однако величины b_2 и b_3 нет. Приводя их к нормальному виду, получим квантовые поправки к классическим тождествам следов:

$$b_1 = icQ, \quad b_2 = icP + (c^2/2)Q; \\ b_3 = icH + c^2P - (ic^3/3)Q. \quad (3.13)$$

Итак, квантовые тождества следов (3.6) доказаны. Заметим, что аналогичным образом можно найти и явный вид высших законов сохранения. Ниже, в § VII.3 мы еще вернемся к квантовым тождествам следов при построении квантового гамильтониана модели НШ на решетке.

Вычислим теперь R -матрицу, описывающую коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии. Наиболее наглядный характер вычисления носят, если перейти от непрерывной формулировки к формулировке на инфинитезимальной решетке (IV.1.5). В квантовом случае L -оператор задается той же формулой, что и в классике ((IV.1.19), (IV.1.20)):

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - (i\lambda\Delta/2) & -i\sqrt{c}\psi_n^+\Delta \\ i\sqrt{c}\psi_n\Delta & 1 + (i\lambda\Delta/2) \end{pmatrix} + O(\Delta^2), \quad (3.14)$$

но теперь ψ_n, ψ_n^+ — квантовые операторы, причем

$$[\psi_n, \psi_m^+] = \delta_{mn}\Delta^{-1}. \quad (3.15)$$

Элементарные вычисления показывают, что R -матрица существует и имеет вид

$$R(\lambda, \mu) = \Pi - icE(\lambda - \mu)^{-1}. \quad (3.16)$$

Эта R -матрица уже встречалась (см. (2.3)). Выпишем ее в явном виде как матрицу 4×4 :

$$R(\lambda, \mu) = \left(\begin{array}{cc|cc} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{array} \right). \quad (3.17)$$

Здесь

$$f(\mu, \lambda) = 1 + \frac{ic}{\mu - \lambda}, \quad g(\mu, \lambda) = \frac{ic}{\mu - \lambda}. \quad (3.18)$$

В дальнейшем будем называть эту R -матрицу R -матрицей ХХХ модели.

§ 4. Модели квантовой теории поля

Приведем здесь примеры моделей квантовой теории поля, которые решаются с помощью квантового метода обратной задачи.

1. Квантовая модель синус-Гордон задается тем же гамильтонианом (IV.3.2), что и в классике, величины $\pi(x)$ и $u(x)$ являются квантовыми операторами с каноническими перестановочными соотношениями $[u(x), \pi(y)] = i\delta(x-y)$. Величины u_n и p_n также являются квантовыми операторами, причем

$$[u_n, p_m] = i\delta_{mn}. \quad (4.1)$$

Квантовый инфинитезимальный L -оператор для этой модели

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} \exp\{-i\beta p_n/4\} & (m\Delta/2)\text{sh}(\lambda - i\beta u_n/2) \\ (-m\Delta/2)\text{sh}(\lambda + i\beta u_n/2) & \exp\{i\beta p_n/4\} \end{pmatrix} + O(\Delta^2) \quad (4.2)$$

не совпадает с классическим, что является следствием ультрафиолетовых расходимостей. Квантовая R -матрица может быть представлена в виде (3.17):

$$R(\lambda, \mu) = \left(\begin{array}{cc|cc} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{array} \right); \quad (3.17)$$

функции f и g в данном случае выражаются так:

$$f(\mu, \lambda) = \frac{\text{sh}(\mu - \lambda - i\gamma)}{\text{sh}(\mu - \lambda)}, \quad g(\mu, \lambda) = \frac{-i \sin \gamma}{\text{sh}(\mu - \lambda)}. \quad (4.4)$$

Такую R -матрицу назовем R -матрицей ХХЗ модели. Здесь

$$0 < \gamma \equiv \beta^2/8 < \pi. \quad (4.5)$$

Матрица монодромии модели СГ удовлетворяет инволюции

$$\sigma_y T^*(\lambda^*) \sigma_y = T(\lambda). \quad (4.6)$$

Ниже (см. гл. VII) нам удастся поместить систему на решетку с сохранением свойства полной интегрируемости, т. е. построить точный L -оператор, сплетаемый R -матрицей (4.4). Это будет наиболее прямым решением проблемы ультрафиолетовых расходимостей.

2. Модель Жибера—Шабата—Михайлова в квантовом варианте задается гамильтонианом (IV.3.11). Перестановочные соотношения операторов поля имеют вид

$$[u(y), \pi(x)] = i\delta(x-y). \quad (4.7)$$

Приведем здесь R -матрицу. Будем использовать следующие обозначения: $\varphi = \gamma/8$, $\beta = \lambda - \mu$,

$$s = \exp\{-3\beta + 5i\varphi\} - \exp\{3\beta - 5i\varphi\} + \exp\{-i\varphi\} - \exp\{i\varphi\}.$$

R -матрица является матрицей размерности 9×9 ; отличные от нуля матричные элементы ее имеют вид:

$$sR_{11}^{11} = -\exp\{3\beta - 3i\varphi\} + \exp\{-3\beta + 3i\varphi\} + \exp\{5i\varphi\} - \exp\{-5i\varphi\} - \exp\{3i\varphi\} + \exp\{-3i\varphi\} - \exp\{i\varphi\} + \exp\{-i\varphi\}, \quad (4.8)$$

$$sR_{22}^{11} = sR_{11}^{33} = \exp\{-2\beta + 5i\varphi\} - \exp\{-2\beta + i\varphi\} + \exp\{\beta - i\varphi\} - \exp\{\beta - 5i\varphi\}, \quad R_{22}^{22} = R_{33}^{33} = 1,$$

$$sR_{33}^{11} = sR_{11}^{22} = \exp\{2\beta - i\varphi\} - \exp\{2\beta - 5i\varphi\} + \exp\{-\beta + 5i\varphi\} - \exp\{-\beta + i\varphi\};$$

$$sR_{33}^{22} = \exp\{-2\beta + 5i\varphi\} - \exp\{-2\beta - 3i\varphi\} - \exp\{\beta + i\varphi\} + \exp\{\beta - i\varphi\} + \exp\{\beta - 3i\varphi\} - \exp\{\beta - 5i\varphi\},$$

$$sR_{22}^{33} = \exp\{2\beta + 3i\varphi\} - \exp\{2\beta - 5i\varphi\} + \exp\{-\beta + 5i\varphi\} - \exp\{-\beta + 3i\varphi\} + \exp\{-\beta - i\varphi\} - \exp\{-\beta + i\varphi\},$$

$$sR_{21}^{12} = sR_{12}^{21} = sR_{31}^{13} = sR_{13}^{31} = -\exp\{3\beta - 3i\varphi\} + \exp\{-3\beta + 3i\varphi\} - \exp\{3i\varphi\} + \exp\{-3i\varphi\},$$

$$sR_{13}^{12} = sR_{31}^{21} = \exp\{2\beta\} - \exp\{2\beta - 4i\varphi\} - \exp\{-\beta\} + \exp\{-\beta - 4i\varphi\},$$

$$sR_{12}^{13} = sR_{21}^{31} = \exp\{-2\beta + 4i\varphi\} - \exp\{-2\beta\} - \exp\{\beta + 4i\varphi\} + \exp\{\beta\},$$

$$sR_{32}^{23} = sR_{23}^{32} = -\exp\{3\beta - i\varphi\} + \exp\{-3\beta + i\varphi\} - \exp\{i\varphi\} + \exp\{-i\varphi\}.$$

Эта R -матрица представляет собой нетривиальный пример решения уравнения Янга—Бакстера.

§ 5. Фундаментальные спинные модели

Другим классом примеров, которые можно решать с помощью КМОЗ, являются спинные модели [5.28]. С помощью R -матриц, удовлетворяющих соотношению Янга—Бакстера, можно строить точно решаемые спинные модели, L -операторы которых строятся непосредственно из R -матрицы.

Рассмотрим одномерную пространственную решетку с M узлами; пусть n —номер узла решетки ($1 \leq n \leq M$). Построение спинной модели, связанной с R -матрицей размерности $K^2 \times K^2$, начнем с по-

строения L -оператора. Размерность матрицы $L(n|\lambda)$ есть $K \times K$. Каждый матричный элемент $L_{\alpha\beta}(n|\lambda)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, K$) тоже представляет собой матрицу размерности $K \times K$ (квантовый оператор):

$$L_{\alpha\beta}^{ij}(n|\lambda) = R_{\alpha\beta}^{ij}(\lambda, v) = \tilde{R}_{ij}^{\alpha\beta}(\lambda, v) \quad (\alpha, \beta, i, j = 1, \dots, K). \quad (5.1)$$

Этот L -оператор совпадает с матрицей $\tilde{R}$ (1.9). В (5.1) v — фиксированная точка. Назовем α, β матричными индексами, а i, j — квантовыми. Индекс n соответствует тому, что квантовые пространства берутся разными в разных узлах. Используя определение (5.1), можно записать соотношение Янга — Бакстера (2.2) как билинейное соотношение (1.4):

$$R(\lambda, \mu)(L(n|\lambda) \otimes L(n|\mu)) = (L(n|\mu) \otimes L(n|\lambda)) R(\lambda, \mu). \quad (5.2)$$

Таким образом, по R -матрице построен L -оператор, который сплетается данной R -матрицей. Его отличительной чертой является то, что размерность квантового пространства равна размерности матричного пространства. Модели, построенные по таким L -операторам, назовем *фундаментальными*. Отметим, что соотношение (5.1) можно немного обобщить, умножив R -матрицу на произвольную комплекснозначную функцию.

Дальнейшее построение спиновой модели проводится по схеме § 1. Строится матрица монодромии $T(\lambda)$ и трансформатрица $\tau(\lambda)$. В данном случае $\tau(\lambda)$ — это квантовый оператор, действующий в тензорном произведении M различных «квантовых» пространств C_k . Гамильтониан спиновой модели определим с помощью тождеств следов:

$$H = \text{const} (d/d\lambda) \ln \tau(\lambda)|_{\lambda=v}. \quad (5.3)$$

Здесь выбор точки $\lambda = v$ объясняется тем, что при естественной нормировке $R(v, v) = E$ гамильтониан описывает взаимодействие ближайших соседей на решетке и легко вычисляется:

$$H = \text{const} \sum_{n=1}^M H_{n-1, n}. \quad (5.4)$$

Оператор $H_{n-1, n}$ действует нетривиально только в двух соседних узлах:

$$(H_{n-1, n})_{\{k\}}^{\{i\}} = \left(\frac{d}{d\lambda} R_{i_n, k_n}^{i_{n-1}, k_{n-1}}(\lambda, v) \right) \Big|_{\lambda=v} \times \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-1, n}}^M \delta_{i_j, k_j} \right). \quad (5.5)$$

Последний множитель соответствует тривиальному действию оператора в узлах решетки с номерами $j \neq n-1, n$. Множители такого типа в дальнейшем будем опускать. Доказательство этих формул основывается на том, что $\tau(v)$ — это оператор сдвига на один узел (при нормировке $R(v, v) = E$):

$$(\tau(v))_{\{k\}}^{\{i\}} = \prod_{j=1}^M \delta_{i_j, k_{j-1}} \quad (M+1 \equiv 1). \quad (5.6)$$

Обсудим лаксово представление уравнений движения, порожденных этим гамильтонианом. Такое представление существует. Из общей

формулы (1.15)—(1.16) легко получить явный вид оператора эволюции во времени:

$$[U_{\alpha\beta}(n|\lambda, \nu)]_{\{k\}}^{\{i\}} = i \frac{d}{d\mu} \{ \delta_{\alpha\beta} [R(\mu, \nu)]_{i_n k_n}^{i_{n-1} k_{n-1}} - [R^{-1}(\nu, \lambda)]_{\alpha\beta}^{i_{n-1} a} [R(\mu, \nu)]_{i_n k_n}^{bc} [R(\mu, \lambda)]_{c\beta}^{a k_{n-1}} \} |_{\mu=\nu}. \quad (5.7)$$

Как квантовый оператор он нетривиально действует в двух соседних узлах.

В качестве примера рассмотрим R -матрицу XXX модели (3.17), (2.3). Ниже нам будет удобнее перейти к $\tilde{R}$ (1.9):

$$\tilde{R}_{12}(\lambda, \mu) = E_{12} - \frac{ic}{\lambda - \mu} \Pi_{12}. \quad (5.8)$$

Здесь индексы 1, 2 означают номера векторных пространств. Эту R -матрицу можно записать в виде

$$\tilde{R}_{12}(\lambda, \mu) = \left[1 - \frac{ic}{2(\lambda - \mu)} \right] - \frac{ic}{2(\lambda - \mu)} \sum_{i=x, y, z} (\sigma_i^1 \otimes \sigma_i^2). \quad (5.9)$$

Мы пользовались тождеством

$$2\Pi_{12} = I^1 I^2 + \sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2 + \sigma_z^1 \sigma_z^2, \quad (5.10)$$

где σ — это матрицы Паули, у которых верхний индекс обозначает номер пространства, в котором они действуют, нижний индекс — это номер матрицы Паули. Соответствующий L -оператор (5.1) можно записать так:

$$L(n|\lambda) = \lambda - \frac{ic}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z^n & 2\sigma_-^n \\ 2\sigma_+^n & -\sigma_z^n \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Здесь $2\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm i\sigma_y$. По-другому его можно записать в виде

$$L(n|\lambda) = \lambda - \frac{ic}{2} \sigma_z \sigma_z^n - ic(\sigma_- \sigma_+^n + \sigma_+ \sigma_-^n). \quad (5.12)$$

Этот L -оператор получается следующим образом. Следует умножить R -матрицу (5.8) на $(\lambda - \mu)$, воспользоваться формулой (5.1) и выбрать $\nu = -ic/2$. Матрица монодромии, порожденная этим L -оператором, имеет следующее свойство:

$$T^*(\lambda^*) = \sigma_y T(\lambda) \sigma_y, \quad (5.13)$$

где $*$ означает эрмитово сопряжение квантовых операторов (без матричного транспонирования) и комплексное сопряжение c -чисел. Матрицы σ^k играют роль локальных квантовых операторов и описывают спин в k -м узле решетки. В данном случае тождества следов имеют вид

$$H = \pm 2ic \frac{d}{d\mu} \ln \tau(\mu) \Big|_{\mu = -ic/2} \pm 2M - 2hS_z. \quad (5.14)$$

Таким образом, получается гамильтониан изотропного XXX магнетика Гейзенберга, рассмотренного в гл. II:

$$H = \mp \sum_{k=1}^M (\sigma_x^k \sigma_x^{k+1} + \sigma_y^k \sigma_y^{k+1} + \sigma_z^k \sigma_z^{k+1} - 1) - 2h S_z. \quad (5.15)$$

В этих формулах верхние знаки соответствуют ферромагнитному, а нижние — антиферромагнитному случаю; S_z — оператор третьей компоненты полного спина,

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \sigma_z^n, \quad (5.16)$$

который коммутирует с гамильтонианом и с трансформатрицей:

$$[H, S_z] = [\tau(\lambda), S_z] = 0. \quad (5.17)$$

Гамильтониан (5.14), (5.15) не зависит от константы c , входящей в R -матрицу (3.18) и L -оператор (5.11). Можно было бы с самого начала положить $c=1$ (это соответствует растяжению спектрального параметра $\lambda \mapsto \lambda/c$).

Рассмотрим теперь анизотропный XXZ магнетик. Его гамильтониан (см. гл. II)

$$H = - \sum_{k=1}^M [\sigma_x^k \sigma_x^{k+1} + \sigma_y^k \sigma_y^{k+1} + \Delta (\sigma_z^k \sigma_z^{k+1} - 1) + h \sigma_z^k] \quad (5.18)$$

порождается матрицей монодромии фундаментальной спиновой модели, которая строится по R -матрице (4.3) XXZ модели. Тождества следов имеют вид

$$H = 2i \sin 2\eta \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \tau(\mu) \right|_{\mu = \frac{i\pi}{2} - i\eta} + 2M \cos 2\eta - 2h S_z. \quad (5.19)$$

Здесь введена «константа связи» η , связанная с величиной γ в R -матрице (4.3), (4.4) следующим образом:

$$\gamma = -2\eta, \quad (5.20)$$

при этом параметр анизотропии $\Delta = \cos 2\eta$. Оператор S_z (5.16) по-прежнему коммутирует (5.17) с гамильтонианом и трансформатрицей. L -оператор стандартным образом строится из R -матрицы и имеет вид

$$L(n|\lambda) = -i \begin{pmatrix} \text{ch}(\lambda - i\eta \sigma_z^n) & \sigma_-^n \sin 2\eta \\ \sigma_+^n \sin 2\eta & \text{ch}(\lambda + i\eta \sigma_z^n) \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Построенная из него матрица монодромии удовлетворяет инволюции

$$\sigma_y T(\lambda) \sigma_y = T^*(\lambda^* + i\pi). \quad (5.22)$$

Изотропный XXX магнетик можно рассматривать как предельный случай XXZ магнетика. Остановимся на этом подробнее. В ферромагнитном случае гамильтониан (5.15), L -оператор (5.11) и

R -матрица (3.17), (3.18) (с $c=1$) получаются из соответствующих величин в XXZ случае (5.18), (5.21), (4.3), (4.4) после предельного перехода

$$2\eta = \kappa \rightarrow 0, \quad \lambda_{XXZ} = (i\pi/2) + \kappa \lambda_{XXX} \quad (\lambda_{XXX} \text{ — конечно}). \quad (5.23)$$

При этом тождества следов (5.19) воспроизводят формулу (5.14), а инволюция (5.22) приводит к (5.13).

Изотропный антиферромагнетик можно рассматривать аналогично, взяв в качестве исходного гамильтониан H (5.18), (5.19) с измененным знаком. Удобнее, однако, поступить по-другому, отправляясь непосредственно от гамильтониана (5.18) и используя предельную процедуру (II.4.1), положив

$$2\eta = \pi - \kappa, \quad \lambda_{XXZ} = \kappa \lambda_{XXX}, \quad \kappa \rightarrow 0 \quad (\lambda_{XXX} \text{ — конечно}). \quad (5.24)$$

При этом получаем гамильтониан

$$H = - \sum_{k=1}^M [\sigma_x^k \sigma_x^{k+1} + \sigma_y^k \sigma_y^{k+1} - \Delta (\sigma_z^k \sigma_z^{k+1} - 1) + h \sigma_z^k], \quad (5.25)$$

который, как это обсуждалось в § II.1, для четного числа узлов унитарно эквивалентен гамильтониану (5.15) с нижним знаком;

соответствующий оператор преобразования есть $U = \prod_{m=1}^{M/2} \sigma_z^{2m}$. Соответствующая R -матрица получается из (4.3), причем функции f и g превращаются в $f(\mu, \lambda) = -1 + i(\mu - \lambda)^{-1}$, $g(\mu, \lambda) = i(\mu - \lambda)^{-1}$ и R -матрица не совпадает с R -матрицей XXX модели (3.17), (3.18) при $c=1$. Тождества следов (5.19) в пределе (5.24) дают гамильтониан H (5.25).

В заключение сделаем следующее замечание: у L -оператора (5.11) можно сдвинуть спектральный параметр на величину v_n , которая может зависеть от номера узла, т. е. перейти к оператору $L(n|\lambda - v_n)$, и он по-прежнему будет удовлетворять билинейному соотношению (5.2). Видимо, впервые это замечание было сделано в работе [5.12]. Соответствующая матрица монодромии имеет вид

$$T(\lambda) = L(M|\lambda - v_M) \dots L(1|\lambda - v_1). \quad (5.26)$$

§ 6. Фундаментальные модели классической статистической физики

R -матрица, удовлетворяющая соотношению Янга — Бакстера, порождает точно решаемую модель классической статистической физики на двумерной решетке. Сумма этой модели также может быть вычислена с помощью КМОЗ. Рассмотрим прямоугольную решетку размерности $N \times M$ (см. рис. 1). Прономеруем вертикальные линии латинским индексом $k=1, \dots, M$, а горизонтальные — греческим индексом $\alpha=1, \dots, N$. Локальная спиновая переменная, принимающая K значений, связана с каждым ребром решетки. Спиновые переменные будем обозначать буквами a или b ($a, b=1, \dots, K$) с индексом, означающим номер линии, на которой они находятся: a_k, b_k или a_α, b_α .

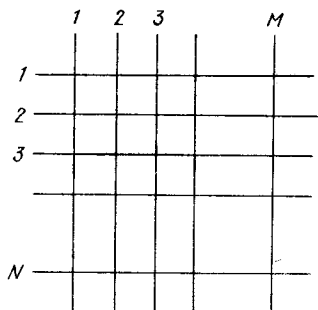


Рис. 1

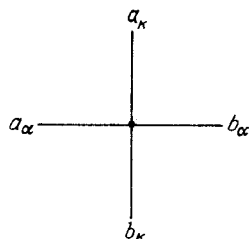


Рис. 2

Статистический вес $L_{\alpha k}$ связан с каждой вершиной, нумеруем его двумя индексами, означающими номера линий, пересекающихся в данной вершине. Величина статвеса зависит от значений спинов на ребрах, прилегающих к вершине,

$$(L_{\alpha k}(\lambda_{\alpha}, v_k)_{a_{\alpha} b_{\alpha}}^{a_k b_k}, \quad (6.1)$$

где λ_{α} , v_k — произвольные комплексные числа (см. рис. 2). отождествим статвес со спиновым L -оператором (5.1):

$$(L_{\alpha k}(\lambda_{\alpha}, v_k)_{a_{\alpha} b_{\alpha}}^{a_k b_k} = R_{a_{\alpha} b_{\alpha}}^{a_k b_k}(\lambda_{\alpha}, v_k) = \tilde{R}_{a_k b_k}^{a_{\alpha} b_{\alpha}}(\lambda_{\alpha}, v_k). \quad (6.2)$$

Здесь α и k означают номера пространств, в которых $\tilde{R}$ действует нетривиально. Статистическая сумма модели определяется так:

$$Z = \sum_{\text{спинам}} \prod_{\text{вершинам}} (L_{\alpha k})_{a_{\alpha} b_{\alpha}}^{a_k b_k}. \quad (6.3)$$

произведение ведется по всем вершинам решетки, а суммирование ведется по всем спинам независимо. Разумеется, при конечном размере решетки статсумма зависит от значений спинов на границе решетки. Обычно рассматривают периодические граничные условия. Нас будет интересовать и другой тип граничных условий. Перейдем к примерам.

R -матрица (4.3), (4.4) порождает известную модель льда. Модель, порождаемая R -матрицей (3.17), (3.18), является ее частным случаем. Сейчас уже решено много аналогичных моделей, на которых мы не останавливаемся подробно. Отметим только, что модель, порождаемая R -матрицей (4.8), обсуждалась в последнее время в литературе. Оказалось, что предложенная Р. Бакстером [5.29] модель на сотовой решетке является одним из частных случаев этой модели.

В конце параграфа построим специальную статсумму, которая будет играть важную роль при вычислении корреляционных функций. Статистический вес этой модели зададим с помощью L -оператора XXX модели (5.9), (5.11), (5.12):

$$L_{\alpha k}(\lambda_{\alpha} - v_k) = \lambda_{\alpha} - v_k - (ic/2) \sigma_z^{\alpha} \sigma_z^k - ic(\sigma_-^{\alpha} \sigma_+^k + \sigma_+^{\alpha} \sigma_-^k). \quad (6.4)$$

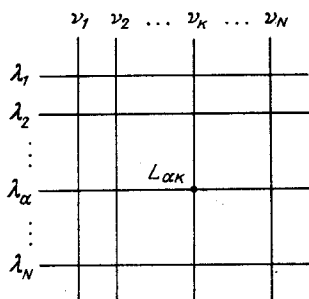


Рис. 3

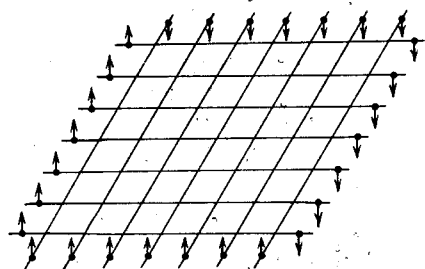


Рис. 4

Здесь α, k — номера пространств. В данном случае каждая спиновая переменная приобретает всего два значения ± 1 . По традиции будем обозначать эти значения стрелками $\uparrow$ ($+1$) или $\downarrow$ (-1). Рассмотрим квадратную $N \times N$ решетку. Каждой горизонтальной линии сопоставим свой спектральный параметр λ_α , каждой вертикальной линии сопоставим свой спектральный параметр v_k (см. рис. 3). Вершине, расположенной на пересечении этих линий, сопоставим статвес $L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k)$ (6.4). Статсумму зададим стандартным образом (6.3), наложив специальные (непериодические) граничные условия. На верхней и на правой гранях все спины направлены вниз; будем их обозначать соответственно $\downarrow_k$ и $\downarrow_\alpha$, а на нижней и на левой гранях все спины направлены вверх; их обозначим $\uparrow_k$ и $\uparrow_\alpha$ (см. рис. 4). Определенная таким образом статсумма $Z_N(\{\lambda_\alpha\}, \{v_k\})$ зависит от $2N$ аргументов. Вскоре мы подробно исследуем эту зависимость. Статсумму Z_N можно записать в виде

$$Z_N(\{\lambda_\alpha\}, \{v_k\}) = \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \uparrow_\alpha \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N \downarrow_j \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^N L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \downarrow_\alpha \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N \uparrow_j \right\}. \quad (6.5)$$

Напомним, что L -оператор (6.2) является матрицей как в «вертикальном» пространстве (индексы a_k, b_k), так и в «горизонтальном» пространстве (индексы a_α, b_α), а суммирование в формуле (6.3) можно понимать как матричное умножение, стрелка сверху в (6.5) означает пространственно-упорядоченное произведение. Назовем такую статсумму *статсуммой* Z_N на *неоднородной решетке*.

Произведение L -операторов в формуле (6.5) можно переупорядочить:

$$Z_N = \left\{ \prod_{j=1}^N \downarrow_j \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \uparrow_\alpha \right\} \left\{ \prod_{k=1}^N \prod_{\alpha=1}^N L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N \uparrow_j \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \downarrow_\alpha \right\}. \quad (6.6)$$

Выразим статсумму с помощью матрицы монодромии (1.1):

$$T_\alpha(\lambda) = \prod_{k=1}^N L_{\alpha k}(\lambda - v_k) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Здесь $T_\alpha(\lambda)$ 2×2 -матрица в пространстве номер α ; в пространствах k ($k=1, \dots, N$) T_α является квантовым оператором. Оператор $L_{\alpha k}$ сплетается (5.2) R -матрицей (5.8), (5.9) по каждому из пространств:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) L_{\beta k}(\lambda_\beta - v_k) = \\ = L_{\beta k}(\lambda_\beta - v_k) L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) \tilde{R}_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta), \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{kl}(v_l, v_k) L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) L_{\alpha l}(\lambda_\alpha - v_l) = \\ = L_{\alpha l}(\lambda_\alpha - v_l) L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) \tilde{R}_{kl}(v_l, v_k). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Следовательно, $T_\alpha(\lambda)$ (6.7) так же сплетается R -матрицей (5.8):

$$\tilde{R}_{\alpha\beta}(\lambda, \mu) T_\alpha(\lambda) T_\beta(\mu) = T_\beta(\mu) T_\alpha(\lambda) \tilde{R}_{\alpha\beta}(\lambda, \mu). \quad (6.10)$$

Здесь α, β — номера векторных пространств. С помощью матрицы монодромии (6.7) статсумму можно записать в виде

$$Z_N = \left\{ \prod_{j=1}^N \downarrow_j \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\uparrow_\alpha) T_\alpha(\lambda_\alpha) (\downarrow_\alpha) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N \uparrow_j \right\}. \quad (6.11)$$

Согласно (6.7), $(\uparrow_\alpha) T_\alpha(\lambda) (\downarrow_\alpha) = B(\lambda)$, поэтому (6.11) можно переписать так:

$$Z_N = \left\{ \prod_{j=1}^N \downarrow_j \right\} \prod_{\alpha=1}^N B(\lambda_\alpha) \left\{ \prod_{j=1}^N \uparrow_j \right\}. \quad (6.12)$$

Запишем теперь Z_N с помощью матрицы монодромии в «ортогональном» направлении. Для этого воспользуемся представлениями (6.6). Введем «вертикальную» матрицу монодромии t_j :

$$t_j(v_j) = \prod_{\alpha=1}^N L_{\alpha j}(\lambda_\alpha - v_j) = \begin{pmatrix} A(v_j) & B(v_j) \\ C(v_j) & D(v_j) \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Это матрица 2×2 в пространстве номер j (в этом пространстве она записана как явная матрица 2×2) — «квантовый» оператор в пространствах $\alpha=1, \dots, N$. С помощью $t(v)$ статсумму можно записать так:

$$Z_N = \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \uparrow_\alpha \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N (\downarrow_j) t_j(v_j) (\uparrow_j) \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \downarrow_\alpha \right\}. \quad (6.14)$$

Используя соотношение $(\downarrow_j) t_j(v) (\uparrow_j) = C(v)$, упростим формулу записи для Z_N :

$$Z_N = \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \uparrow_\alpha \right\} \prod_{j=1}^N C(v_j) \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \downarrow_\alpha \right\}. \quad (6.15)$$

Отметим, что матрица монодромии $t(v)$ (6.13) тоже сплетается

R -матрицей (5.8):

$$\tilde{R}_{kl}(v_l, v_k) t_k(v_k) t_l(v_l) = t_l(v_l) t_k(v_k) \tilde{R}_{kl}(v_l, v_k). \quad (6.16)$$

Это является следствием соотношения (6.9). Итак, для статсуммы Z_N получено несколько различных представлений. Ниже это позволит нам исследовать Z_N как функцию λ_n и v_k . В части III эта статсумма будет играть важную роль при вычислении скалярных произведений, норм бетевских волновых функций и корреляторов.

Заключение

Мы изложили основные положения квантового метода обратной задачи [5.33]. Интересующемуся читателю мы рекомендуем следующие обзоры: [5.25; 5.7; 5.18; 5.39].

Теорема 1 была доказана в работе [5.33], а теорема 2 — в [5.6].

По-видимому, впервые соотношение Янга — Бакстера [5.42; 5.28] было приведено в работе [5.32], а в форме (2.2) записано в [5.36]. Поиску решений этого уравнения посвящена обширная литература [5.18; 5.38; 5.26; 5.30; 5.43; 5.44; 5.1; 5.11; 5.27; 5.31].

Модель НШ была первой моделью, к которой был применен квантовый метод обратной задачи [5.21; 5.22]. Сравнение классических и квантовых результатов было проведено в работе [5.14], а в работе [5.23] было показано, что представление Лакса выполняется и в квантовом случае. Тожества следов получены в [5.9]. Рассмотрены и решены варианты модели с фермиевским полем [5.13], а также с полем, имеющим несколько компонент.

Модель синус-Гордон была погружена в рамки КМОЗ в работе [5.24]. Квантовый L -оператор и R -матрица модели Жибера — Шабата — Михайлова были построены в работе [5.36].

Заметим, что число квантовополевых моделей, решаемых с помощью КМОЗ, отнюдь не исчерпывается рассмотренными примерами. Мы не приводим большего их числа из-за недостатка места, отсылая читателя к литературе [5.16; 5.35; 5.17; 5.34; 5.19].

Фундаментальные спиновые модели рассмотрены в работах [5.25, 5.28]; в этих же работах вскрыта связь между R -матрицами и точно решаемыми моделями классической статистической физики на двумерной решетке (см. также [5.12]). Интересный спиновый гамильтониан порождается R -матрицей (4.8) модели Жибера — Шабата — Михайлова. Этот гамильтониан описывает взаимодействие спинов во внешнем магнитном поле, его явный вид дан в работе [5.36]. Впоследствии эта модель была решена в работах [5.2; 5.19], она связана с моделью классической статфизики на сотовой решетке [5.29].

КМОЗ связан с методом факторизованных S -матриц [5.4; 5.5; 5.26; 5.30; 5.43; 5.44].

Построению и решению фундаментальных спиновых моделей с высшим спином посвящены работы [5.15; 5.37; 5.41].

Глава VI

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАТЦ БЕТЕ

Создание схемы алгебраического анзатца Бете [6.17; 6.19], являющегося далеко идущим обобщением метода Бете решения одномерных систем (см. часть I), является одним из самых важных достижений в КМОЗ. В настоящей главе последовательно развивается эта схема. В § 1 изложены основы алгебраического анзатца Бете. Коммутационные соотношения матричных элементов матрицы монодромии задаются R -матрицей. Использование их явного вида позволяет построить собственные функции следа матрицы монодромии — трансферматрицы и тем самым гамильтониана системы (который выражается через трансферматрицу при помощи тождеств следов). В § 2 проводится дальнейшее исследование структуры алгебраического анзатца Бете, необходимое для вычисления корреляционных функций. В § 3 общая схема иллюстрируется на примерах. Подробно рассматривается модель НШ, а также модель синус-Гордон и спиновые модели. В § 4 доказан принцип Паули для взаимодействующих одномерных бозонов, который играет важную роль при построении основного состояния системы (заполнение моря Дирака). В § 5 вычислены собственные значения оператора сдвига, действующего на матрицу монодромии; эти результаты будут использованы в части III при вычислении корреляторов. В §§ 6, 7 производится классификация матриц монодромии, обладающих данной R -матрицей; показано, что они параметризуются двумя произвольными функциями. В § 8 вводится важное понятие детерминанта матрицы монодромии в квантовом случае. В § 9 подробно исследуются свойства статсуммы Z_N , введенной в § V.6. В § 10 эта статсумма вычислена в явном виде.

Заметим, что в этой главе рассмотрены модели, обладающие R -матрицами XXX и XXZ моделей (V.3.17), (V.3.18) и (V.4.3), (V.4.4).

§ 1. Алгебраический анзатц Бете

Здесь будут рассмотрены модели, связанные с простейшими R -матрицами XXX и XXZ моделей (V.3.17) и (V.4.3). Матрица монодромии имеет в этом случае размерность 2×2 :

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Коммутационные соотношения матричных элементов задаются соотношением

$$R(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda)) R(\lambda, \mu). \quad (1.2)$$

R -матрица имеет вид

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

причем функции f, g в XXX случае даются как

$$f(\mu, \lambda) = 1 + ic(\mu - \lambda)^{-1}, \quad g(\mu, \lambda) = ic(\mu - \lambda)^{-1}, \quad (1.4)$$

а в XXZ случае (нам удобно перейти от константы связи к константе связи $\eta = -\gamma/2$ в (V.4.3), (V.4.4)):

$$f(\mu, \lambda) = \frac{\text{sh}(\mu - \lambda + 2i\eta)}{\text{sh}(\mu - \lambda)}; \quad g(\mu, \lambda) = \frac{i \sin 2\eta}{\text{sh}(\mu - \lambda)}. \quad (1.5)$$

Тождества следов (см. §§ V.3, 5) и коммутативность трансформатрицы (V.1.12) показывают, что собственные функции гамильтониана те же, что у трансформатрицы $\tau(\lambda)$. Для построения собственных функций оператора $\tau(\lambda)$ необходимо, чтобы существовал порождающий вектор—*псевдовакуум* $|0\rangle$, который определяется следующими требованиями. Во-первых, он должен обращаться в нуль при действии оператора $C(\lambda)$; во-вторых, должен быть собственным вектором операторов $A(\lambda)$ и $D(\lambda)$:

$$C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle. \quad (1.6)$$

Здесь $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ —комплекснозначные функции; будем называть их *вакуумными собственными значениями*. Для целого ряда содержательных моделей такой вектор существует (см. примеры § 3).

Отметим, что при построении псевдовакуума полезным является следующее замечание. Пусть матрица монодромии является матричным произведением двух сомножителей:

$$T(\lambda) = T(2|\lambda) T(1|\lambda) \quad (1.7)$$

и при этом каждая из матриц $T(1|\lambda)$, $T(2|\lambda)$ сплетается (1.2) R -матрицей (1.3), а между собой их матричные элементы коммутируют (как операторы в квантовом пространстве): $[T_{ab}(1|\lambda), T_{cd}(2|\mu)] = 0$. Будем говорить в таком случае, что $T(\lambda)$ состоит из двух «коммутирующих» сомножителей. Пусть вектор $|0\rangle_1$ является псевдовакуумом для $T(1|\lambda)$, а вектор $|0\rangle_2$ —для $T(2|\lambda)$. Соответствующие вакуумные собственные значения обозначим $a_1(\lambda)$, $d_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$, $d_2(\lambda)$. Тогда существует и псевдовакуум $|0\rangle$, для матрицы $T(\lambda)$, причем

$$|0\rangle = |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_1, \quad a(\lambda) = a_1(\lambda) a_2(\lambda), \quad d(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda). \quad (1.8)$$

Для доказательства достаточно заметить, что произведение треугольных матриц является тоже треугольной матрицей. Это замечание приводит к тому, что вакуумные собственные значения $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ матрицы монодромии строятся по вакуумным собственным значениям составляющих L -операторов (V.1.1) по следующей формуле:

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^M a_j(\lambda), \quad d(\lambda) = \prod_{j=1}^M d_j(\lambda). \quad (1.9)$$

Здесь $a_j(\lambda)$ и $d_j(\lambda)$ —вакуумные собственные значения L -оператора $L(j|\lambda)$.

Ниже мы увидим, что собственные векторы оператора $\tau(\mu) = A(\mu) + D(\mu)$ строятся в виде

$$|\Psi_N(\{\lambda_j\})\rangle = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle, \quad (1.10)$$

причем импульсы λ_j удовлетворяют системе уравнений Бете. Построение этих собственных векторов начнем с того, что выпишем все коммутационные соотношения (1.3) между матричными элементами матрицы монодромии в явном виде:

$$[B(\lambda), B(\mu)] = 0, \quad [C(\lambda), C(\mu)] = 0, \quad (1.11)$$

$$A(\mu) B(\lambda) = f(\mu, \lambda) B(\lambda) A(\mu) + g(\lambda, \mu) B(\mu) A(\lambda), \quad (1.12)$$

$$D(\mu) B(\lambda) = f(\lambda, \mu) B(\lambda) D(\mu) + g(\mu, \lambda) B(\mu) D(\lambda), \quad (1.13)$$

$$C(\lambda) A(\mu) = f(\mu, \lambda) A(\mu) C(\lambda) + g(\lambda, \mu) A(\lambda) C(\mu), \quad (1.14)$$

$$C(\lambda) D(\mu) = f(\lambda, \mu) D(\mu) C(\lambda) + g(\mu, \lambda) D(\lambda) C(\mu), \quad (1.15)$$

$$[C(\lambda), B(\mu)] = g(\lambda, \mu) \{A(\lambda) D(\mu) - A(\mu) D(\lambda)\}, \quad (1.16)$$

$$A(\lambda) A(\mu) = A(\mu) A(\lambda), \quad D(\lambda) D(\mu) = D(\mu) D(\lambda), \quad (1.17)$$

$$B(\mu) A(\lambda) = f(\mu, \lambda) A(\lambda) B(\mu) + g(\lambda, \mu) A(\mu) B(\lambda), \quad (1.18)$$

$$D(\mu) C(\lambda) = f(\mu, \lambda) C(\lambda) D(\mu) + g(\lambda, \mu) C(\mu) D(\lambda), \quad (1.19)$$

$$A(\lambda) C(\mu) = f(\mu, \lambda) C(\mu) A(\lambda) + g(\lambda, \mu) C(\lambda) A(\mu), \quad (1.20)$$

$$B(\lambda) D(\mu) = f(\mu, \lambda) D(\mu) B(\lambda) + g(\lambda, \mu) D(\lambda) B(\mu), \quad (1.21)$$

$$[D(\lambda), A(\mu)] = g(\lambda, \mu) \{B(\lambda) C(\mu) - B(\mu) C(\lambda)\}, \quad (1.22)$$

$$[A(\lambda), D(\mu)] = g(\lambda, \mu) \{C(\lambda) B(\mu) - C(\mu) B(\lambda)\}, \quad (1.23)$$

$$[B(\lambda), C(\mu)] = g(\lambda, \mu) \{D(\lambda) A(\mu) - D(\mu) A(\lambda)\}. \quad (1.24)$$

Сначала мы будем использовать только формулы (1.11) — (1.13). С помощью этих формул можно вычислить, как операторы $A(\mu)$ и $D(\mu)$ действуют на состояние $\prod B(\lambda_j) |0\rangle$:

$$A(\mu) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle = \Lambda \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \sum_{n=1}^N \Lambda_n B(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N B(\lambda_j) |0\rangle, \quad (1.25)$$

$$D(\mu) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle = \tilde{\Lambda} \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \sum_{n=1}^N \tilde{\Lambda}_n B(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \quad (1.26)$$

Здесь коэффициенты Λ , $\tilde{\Lambda}$ равны:

$$\Lambda = a(\mu) \prod_{j=1}^N f(\mu, \lambda_j), \quad \Lambda_n = a(\lambda_n) g(\lambda_n, \mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N f(\lambda_n, \lambda_j), \quad (1.27)$$

$$\tilde{A} = d(\mu) \prod_{j=1}^N f(\lambda_j, \mu), \quad \tilde{A}_n = d(\lambda_n) g(\mu, \lambda_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N f(\lambda_j, \lambda_n). \quad (1.28)$$

Воспроизведем рассуждения работ [6.17; 6.19], приводящие к этим формулам.

При пронесении оператора A через оператор B можно воспользоваться либо «первой схемой» (первое слагаемое в (1.12)), либо второй (второе слагаемое в (1.12)). Чтобы вычислить коэффициент Λ перед первым слагаемым в правой части (1.25), надо все время пользоваться первой схемой. Действительно, если мы хотя бы раз воспользуемся второй схемой, то среди операторов B возникнет $B(\mu)$, который потом уже не исчезнет (это будет вклад в другое слагаемое в (1.25)). Это замечание приводит нас непосредственно к выражению (1.27) для Λ . Для вычисления коэффициентов Λ_n воспользуемся соотношением (1.11) и представим $|\Psi_N\rangle$ в виде

$$|\Psi_N(\{\lambda_j\})\rangle = B(\lambda_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \quad (1.29)$$

Теперь для вычисления Λ_n на первом шаге (при пронесении $A(\mu)$ через $B(\lambda_n)$) обязательно нужно воспользоваться второй схемой, иначе $B(\lambda_n)$ останется, а интересующее нас слагаемое $B(\lambda_n)$ не содержит. Итак, после первого шага получим

$$-g(\mu, \lambda_n) B(\mu) A(\lambda_n) \prod_{j \neq n} B(\lambda_j) |0\rangle. \quad (1.30)$$

Далее при пронесении $A(\lambda_n)$ через $B(\lambda_j)$ следует пользоваться только первой схемой; иначе возникает сомножитель $B(\lambda_n)$, который должен отсутствовать. Эти замечания приводят к выражению (1.27). Аналогично получаются формулы (1.26), (1.28).

Отметим, что $|\Psi_N\rangle$ является симметричной функцией всех λ_j (см. (1.11)), различным наборам λ_j соответствуют линейно независимые векторы $|\Psi_N\rangle$. Таким образом, $|\Psi_N\rangle$ является собственной функцией $\tau(\mu)$, лишь если $\Lambda_n + \tilde{\Lambda}_n = 0$. Это и есть система уравнений Бете:

$$r(\lambda_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N (f(\lambda_n, \lambda_j) / f(\lambda_j, \lambda_n)) = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.31)$$

Здесь использовано обозначение

$$r(\lambda) \equiv a(\lambda) / d(\lambda). \quad (1.32)$$

Часто бывает удобно переписать систему уравнений Бете в логарифмическом виде:

$$\varphi_k = 2\pi n_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.33)$$

Здесь n_k — набор целых чисел, а φ_k дается формулой

$$\varphi_k = i \ln r(\lambda_k) + i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \ln [f(\lambda_k, \lambda_j) / f(\lambda_j, \lambda_k)]. \quad (1.34)$$

При этом собственное значение $\theta(\mu)$ трансформатрицы $\tau(\mu)$ на векторе $|\Psi_N\rangle$ (1.10) равно:

$$\theta(\mu, \{\lambda_j\}) = a(\mu) \prod_{j=1}^N f(\mu, \lambda_j) + d(\mu) \prod_{j=1}^N f(\lambda_j, \mu). \quad (1.35)$$

Собственные значения гамильтониана получаются с помощью тождеств следов.

Выше предполагалось, что все значения λ_j ($j=1, \dots, N$) различны. В § 4 будет рассмотрен случай, когда некоторые из λ_j совпадают. Оказывается, что при этом уравнения Бете существенно изменяются. В физически интересных случаях удастся доказать, что λ_j действительно различны, т. е. выполняется «принцип Паули».

§ 2. Замечания об алгебраическом анзатце Бете

В предыдущем параграфе было найдено действие операторов $A(\mu)$, $D(\mu)$ и $B(\mu)$ на состояние

$$\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \quad (2.1)$$

Для вычисления корреляторов важно знать также действие оператора $C(\mu)$:

$$\begin{aligned} C(\mu) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle &= \\ &= \sum_{n=1}^N M_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \sum_{k>n} M_{kn} B(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, n}}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь коэффициенты M равны:

$$\begin{aligned} M_n &= g(\mu, \lambda_n) a(\mu) d(\lambda_n) \prod_{j \neq n} f(\lambda_j, \lambda_n) f(\mu, \lambda_j) + \\ &+ g(\lambda_n, \mu) a(\lambda_n) d(\mu) \prod_{j \neq n} f(\lambda_j, \mu) f(\lambda_n, \lambda_j), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} M_{kn} &= d(\lambda_k) a(\lambda_n) g(\mu, \lambda_k) g(\lambda_n, \mu) f(\lambda_n, \lambda_k) \left\{ \prod_{j \neq k, n} f(\lambda_j, \lambda_k) f(\lambda_n, \lambda_j) \right\} + \\ &+ d(\lambda_n) a(\lambda_k) g(\mu, \lambda_n) g(\lambda_k, \mu) f(\lambda_k, \lambda_n) \left\{ \prod_{j \neq k, n} f(\lambda_j, \lambda_n) f(\lambda_k, \lambda_j) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эти формулы получаются аналогично формулам (1.25) — (1.28). При этом кроме коммутационных соотношений (1.11) — (1.13) (которые уже были использованы) достаточно воспользоваться соотношением (1.16) и равенством $C(\lambda) |0\rangle = 0$.

Рассмотрим вектор состояния $\langle 0|$, сопряженный к псевдовакууму: $\langle 0| = |0\rangle^+$, $\langle 0|0\rangle = 1$. Будем называть его *дуальным псевдовакуумом*. Нетрудно установить, что он обладает следующими свойствами:

$$\langle 0|B(\mu) = 0, \quad \langle 0|A(\mu) = a(\mu)\langle 0|, \quad \langle 0|D(\mu) = d(\mu)\langle 0|. \quad (2.5)$$

Рассмотрим «сопряженный» к (1.1) вектор

$$\langle \tilde{\Psi}_N(\{\lambda_j\})| = \langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j). \quad (2.6)$$

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в § 1, вычислим действие операторов $A(\mu)$, $D(\mu)$ и $B(\mu)$ на этот вектор:

$$\langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) A(\mu) = \Lambda \langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) + \sum_{n=1}^N \Lambda_n \langle 0| C(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N C(\lambda_j), \quad (2.7)$$

$$\langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) D(\mu) = \tilde{\Lambda} \langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) + \sum_{n=1}^N \tilde{\Lambda}_n \langle 0| C(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N C(\lambda_j), \quad (2.8)$$

$$\langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) B(\mu) = \sum_{n=1}^N M_n \langle 0| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N C(\lambda_j) + \sum_{k>n}^N M_{kn} \langle 0| C(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, n}}^N C(\lambda_j). \quad (2.9)$$

Коэффициенты в этих формулах совпадают с коэффициентами в формулах (1.25)—(1.28), (2.2)—(2.4). Отметим, что если выполняются уравнения Бете, то вектор $\langle \tilde{\Psi}_N|$ является собственным для оператора $\tau(\mu)$:

$$\langle \tilde{\Psi}_N| \tau(\mu) = \theta(\mu) \langle \tilde{\Psi}_N| \quad (2.10)$$

с прежним собственным значением (1.35).

Покажем теперь, что собственные функции (2.1), (2.6), соответствующие двум разным наборам $\{\lambda_j\}$, ортогональны:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\{\lambda_j^C\}) | \Psi_N(\{\lambda_j^B\}) \rangle &= \\ &= \langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) |0\rangle = 0 \quad (\{\lambda_j^C\} \neq \{\lambda_j^B\}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $\{\lambda_j^C\}$ — это одно решение уравнений Бете, а $\{\lambda_j^B\} \neq \{\lambda_j^C\}$ — другое. Для доказательства достаточно рассмотреть матричный элемент

$$\langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \tau(\mu) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) |0\rangle. \quad (2.12)$$

Оператор $\tau(\mu)$ мы можем применять к любой из двух разных собственных функций. Пользуясь тем, что собственные значения различаются:

$$\theta(\mu, \{\lambda_j^B\}) \neq \theta(\mu, \{\lambda_j^C\}) \quad (\{\lambda_j^B\} \neq \{\lambda_j^C\}), \quad (2.13)$$

легко доказать соотношение (2.11).

Сделаем последнее замечание. R -матрица (1.3) коммутирует с матрицей $\hat{\varepsilon} \otimes \hat{\varepsilon}$, где

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что если матрица монодромии $T(\lambda)$ сплетается этой R -матрицей (1.3), то и матрица

$$T_{\varepsilon}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varepsilon A(\lambda) & \varepsilon B(\lambda) \\ \varepsilon^{-1} C(\lambda) & \varepsilon^{-1} D(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

сплетается той же R -матрицей и имеет тот же псевдовакуум $|0\rangle$, причем вакуумные собственные значения для T_{ε} равны

$$a_{\varepsilon}(\lambda) = \varepsilon a(\lambda), \quad d_{\varepsilon}(\lambda) = \varepsilon^{-1} d(\lambda).$$

§ 3. Примеры

В этом параграфе мы построим собственные функции ряда важнейших моделей двумерной квантовой теории поля и статистической физики.

1) Модель НШ. Для этой модели псевдовакуумом является фоковский вакуум $|0\rangle$ ($\psi(x)|0\rangle = 0 \quad \forall x$). Вакуумные собственные значения (1.6) L -оператора (V.3.14) равны

$$a_j(\lambda) = 1 - (i\lambda\Delta/2), \quad d_j(\lambda) = 1 + (i\lambda\Delta/2). \quad (3.1)$$

Воспользуемся формулой (1.9) и формулой

$$\lim (1 + (i\lambda\Delta/2))^M = \exp \{i\lambda L/2\}, \quad L = M\Delta. \quad (3.2)$$

Перемножая вакуумные собственные значения L -операторов (3.1), получим для вакуумных собственных значений матрицы монодромии:

$$a(\lambda) = \exp \{-i\lambda L/2\}, \quad d(\lambda) = \exp \{i\lambda L/2\}. \quad (3.3)$$

Уравнение Бете (1.31) для этой модели имеет вид

$$\exp \{i\lambda_n L\} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N (\lambda_n - \lambda_j + ic) / (\lambda_n - \lambda_j - ic), \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

что совпадает с формулой (I.2.2). Собственные значения трансфер-матрицы (1.35) равны:

$$\theta(\mu, \lambda_j) = \exp \{-i\mu L/2\} \prod_{j=1}^N f(\mu, \lambda_j) + \exp \{i\mu L/2\} \prod_{j=1}^N f(\lambda_j, \mu). \quad (3.5)$$

Тождества следов (V.3.6) позволяют вычислить собственные значения H , P и Q . Для этого в тождествах следов (V.3.6) вместо операторов надо подставить их собственные значения:

$$\begin{aligned} \ln [\exp \{i\mu L/2\} \theta_N(\mu, \{\lambda_j\})] = & (ic/\mu) \{Q_N + \mu^{-1} (P_N - (ic/2) Q_N) + \\ & + \mu^{-2} (E_N - icP_N - (c^2/3) Q_N) + O(\mu^{-3})\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При $\mu \rightarrow i\infty$ первое слагаемое в (3.5) превалирует. Это приводит к следующим формулам для собственных значений:

$$Q_N = N, \quad P_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j, \quad E_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2. \quad (3.7)$$

Эти формулы совпадают с (I.1.29). Таким образом, воспроизводятся результаты гл. I с помощью квантового метода обратной задачи. Разлагая левую часть (3.6) дальше в ряд по μ^{-1} , можно получить собственные значения высших локальных законов сохранения. Их можно скомбинировать так, что собственным значением n -го закона сохранения будет

$$I_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j^n. \quad (3.8)$$

Здесь n пробегает все целые положительные значения. Ясно, что наличие таких законов сохранения делает невозможным множественное рождение частиц.

2) Рассмотрим теперь XXX магнетик (V.5.15). Матрица монодромии $T(\lambda)$ строится с помощью L -оператора (V.5.11) стандартным образом и имеет вид (1.1); R -матрица та же (1.3), (1.4), что и для модели НШ. Отметим, что в данном случае имеется два псевдовакуума $|0\rangle$ и $|0'\rangle$:

$$|0\rangle = \prod_{j=1}^N (\uparrow)_j, \quad (3.9)$$

$$|0'\rangle = \prod_{j=1}^N (\downarrow)_j \quad (3.10)$$

(второй псевдовакуум аннулируется оператором $B(\lambda)$: $C(\lambda)|0\rangle = 0$, $B(\lambda)|0'\rangle = 0$). Мы выберем первый из них. Вакуумные собственные значения равны

$$a(\lambda) = (\lambda - (ic/2))^M, \quad d(\lambda) = (\lambda + (ic/2))^M. \quad (3.11)$$

Собственные функции и собственные значения строятся так же, как и для модели НШ, что и позволяет решить модель. Следствием инволюции (5.13) является

$$a^*(\lambda^*) = d(\lambda), \quad B^+(\lambda^*) = -C(\lambda). \quad (3.12)$$

Система уравнений Бете имеет вид

$$\left(\frac{\lambda_j + (ic/2)}{\lambda_j - (ic/2)} \right)^M = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k + ic}{\lambda_j - \lambda_k - ic} \right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.13)$$

Без ограничения общности можно положить в этих формулах $c=1$ (для этого достаточно сделать растяжение спектрального параметра $\lambda \rightarrow c\lambda$).

3) Рассмотрим теперь неоднородное обобщение матрицы монодромии $XX\bar{X}$ модели (V.5.26). Это тоже 2×2 матрица вида (1.1). Вакуум в модели по-прежнему задается формулой (3.9) (вектор (3.10) также подходит под определение вакуума). Вакуумные собственные значения имеют вид:

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^M (\lambda - v_j - (ic/2)), \quad d(\lambda) = \prod_{j=1}^M (\lambda - v_j + (ic/2)). \quad (3.14)$$

В этой модели роль оператора числа частиц играет третья компонента полного спина S_z :

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sigma_z^k. \quad (3.15)$$

Псевдовакуумы (3.9), (3.10) являются собственными функциями S_z :

$$S_z |0\rangle = (M/2) |0\rangle, \quad S_z |0'\rangle = -(M/2) |0'\rangle. \quad (3.16)$$

Любая волновая функция при любых λ_j является собственной функцией S_z :

$$S_z \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle = ((M/2) - N) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \quad (3.17)$$

Наибольшее и наименьшее собственные значения S_z равны $+M/2$ и $-M/2$. Рассмотрим специальный случай $M=N$; при этом

$$\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle = Z_N |0'\rangle \quad (N=M). \quad (3.18)$$

Здесь Z_N — числовой коэффициент:

$$Z_N = \langle 0' | \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle. \quad (3.19)$$

Легко видеть, что величина Z_N совпадает со статистической суммой, введенной в § V.6, для этого достаточно сравнить представления (V.6.12), (3.19).

4) XXZ модель Гейзенберга (V.5.18), (V.5.21). Для этой модели все построения аналогичны $XX\bar{X}$ случаю. Структура анзатца Бете для R -матриц (1.3), (1.4), (1.5) одинакова. Все формулы §§ 1, 2 выполняются и в случае R -матрицы XXZ модели. Для XXZ модели вакуумные собственные значения равны:

$$a(\lambda) = (-i)^M \operatorname{ch}^M (\lambda - i\eta), \quad d(\lambda) = (-i)^M \operatorname{ch} (\lambda + i\eta). \quad (3.20)$$

Вектор (3.9) выбран в качестве псевдовакуума.

Уравнения Бете имеют вид

$$\left(\frac{\operatorname{ch}(\lambda_n - i\eta)}{\operatorname{ch}(\lambda_n + i\eta)} \right)^M \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n - \lambda_j + 2i\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda_n - \lambda_j - 2i\eta)} = 1. \quad (3.21)$$

Тождества следов (V.5.19) позволяют вычислить энергию и импульс одной частицы:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(\lambda) &= -2 \sin^2 2\eta [\operatorname{ch}(\lambda + i\eta) \operatorname{ch}(\lambda - i\eta)]^{-1} + 2h, \\ p_0(\lambda) &= i \ln [\operatorname{ch}(\lambda - i\eta) / \operatorname{ch}(\lambda + i\eta)].\end{aligned}\quad (3.22)$$

Система уравнений Бете, энергия ε_0 и импульс p_0 сводятся к соответствующим выражениям (II.1.17), (II.1.26) и (II.1.13), полученным в рамках координатного анзатца Бете. Таким образом, с помощью КМОЗ воспроизводятся все результаты гл. II.

5) Модель синус-Гордон. Чтобы построить псевдовакуум, в данном случае удобно рассмотреть произведение двух операторов $L(n|\lambda)$ (V.4.2) в соседних узлах:

$$L_{(2)}(n|\lambda) = L(2n|\lambda) L(2n-1|\lambda). \quad (3.23)$$

Для этого L -оператора вакуум был построен в работе [6.12]:

$$|0\rangle_n = \delta(u_{2n-1} - u_{2n} + (\beta/4) - (2\pi/\beta)). \quad (3.24)$$

Вакуум для всей $T(\lambda)$ строится как произведение векторов $|0\rangle_n$:

$$|0\rangle = \otimes_1^{N/2} |0\rangle_n.$$

Отметим, что в случае, когда константа связи γ/π есть рациональное число, удастся построить нормируемый псевдовакуум, а квантовые операторы $\exp\{i\varphi_n\}$ и $\exp\{i\pi_n\}$ реализовать как матрицы конечного размера (см. Приложение 1). Вакуумные собственные значения матрицы монодромии равны:

$$\begin{aligned}a(\lambda) &= \exp\{Ms \operatorname{ch}(2\lambda - i\gamma)\}, \\ d(\lambda) &= \exp\{Ms \operatorname{ch}(2\lambda + i\gamma)\}, \quad s = (m\Delta/4)^2.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Уравнения Бете имеют вид

$$\exp\{-2iMs \sin \gamma \operatorname{sh} 2\lambda_n\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n - \lambda_j - i\gamma)}{\operatorname{sh}(\lambda_n - \lambda_j + i\gamma)} \right) = 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

Собственные функции строятся по формуле (1.6). Собственные значения энергии равны

$$\varepsilon_0(\lambda) = (m^2 \Delta/2) \sin \gamma \operatorname{ch} 2\lambda. \quad (3.27)$$

§ 4. Принцип Паули для одномерных взаимодействующих бозонов

Отличительной чертой одномерных квантовых систем является то, что принцип Паули выполняется не только для фермионов, но и для взаимодействующих бозонов (они не могут обладать одинаковыми импульсами). В качестве примера рассмотрим модель НШ. Собственные функции следа матрицы монодромии (1.1) строятся

в виде (1.10), причем импульсы λ_j удовлетворяют системе уравнений Бете (1.31). При их выводе существенно использовать предположение, что все λ_j различны.

Предположим теперь, что это не так. Рассмотрим простейший пример: пусть импульс λ_1 встречается два раза ($\lambda_1 \equiv \lambda_2$), а остальные $(N-2)$ импульсов λ_j ($j=3, \dots, N$) различны. Соответствующую волновую функцию можно представить в виде

$$|\Psi_N\rangle = B^2(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \quad (4.1)$$

Теорема 1. *Не существует собственных функций оператора $\tau(\mu)$ вида (4.1).*

Доказательство. Потребуем, чтобы $|\Psi_N\rangle$ (4.1) была собственной функцией трансформатрицы $\tau(\mu) = A(\mu) + D(\mu)$. Это накладывает ограничения на импульсы λ_j . Докажем сначала, что уравнения Бете для этой волновой функции имеют вид:

$$\frac{a(\lambda_n)}{d(\lambda_n)} \left[\frac{f(\lambda_n, \lambda_1)}{f(\lambda_1, \lambda_n)} \right]^2 \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq n}}^N \frac{f(\lambda_n, \lambda_j)}{f(\lambda_j, \lambda_n)} = 1 \quad (n=3, \dots, N), \quad (4.2)$$

$$\frac{a(\lambda_1)}{d(\lambda_1)} \prod_{j=3}^N \frac{f(\lambda_1, \lambda_j)}{f(\lambda_j, \lambda_1)} = 1, \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{d\lambda_1} \varphi_1 = i \frac{d}{d\lambda_1} \ln \frac{a(\lambda_1)}{d(\lambda_1)} + i \sum_{j=3}^N \frac{d}{d\lambda_1} \ln \frac{f(\lambda_1, \lambda_j)}{f(\lambda_j, \lambda_1)} + \frac{4}{c} = 0. \quad (4.4)$$

С этой целью вычислим, как операторы $A(\mu)$ и $D(\mu)$ действуют на волновую функцию. Переходя к пределу $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ в формулах (1.25) — (1.28), получим

$$\begin{aligned} A(\mu) B^2(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle &= \Lambda B^2(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \\ &+ B(\mu) B^2(\lambda_1) \sum_{l=3}^N \Lambda_l^{(1)} \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq n}}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \\ &+ \Lambda^{(2)} B(\mu) B(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \Lambda^{(3)} B(\mu) B'(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} D(\mu) B^2(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle &= \tilde{\Lambda} B^2(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \\ &+ B(\mu) B^2(\lambda_1) \sum_{l=3}^N \tilde{\Lambda}_l^{(1)} \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq l}}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \\ &+ \tilde{\Lambda}^{(2)} B(\mu) B(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle + \tilde{\Lambda}^{(3)} B(\mu) B'(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь коэффициенты Λ , $\tilde{\Lambda}$ равны:

$$\Lambda = a(\mu) f^2(\mu, \lambda_1) \prod_{j=3}^N f(\mu, \lambda_j), \quad \tilde{\Lambda} = d(\mu) f^2(\lambda_1, \mu) \prod_{j=3}^N f(\lambda_j, \mu), \quad (4.7)$$

$$\Lambda_l^{(1)} = -a(\lambda_l) g(\mu, \lambda_l) f^2(\lambda_l, \lambda_1) \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq l}}^N f(\lambda_l, \lambda_j), \quad (4.8)$$

$$\tilde{\Lambda}_l^{(1)} = d(\lambda_l) g(\mu, \lambda_l) f^2(\lambda_1, \lambda_l) \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq l}}^N f(\lambda_j, \lambda_l), \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(2)} = & -a(\lambda_1) g(\mu, \lambda_1) [1 + f(\mu, \lambda_1)] \prod_{j=3}^N f(\lambda_1, \lambda_j) - \\ & - icg(\mu, \lambda_1) (\partial/\partial \lambda_1) \left[a(\lambda_1) \prod_{j=3}^N f(\lambda_1, \lambda_j) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^{(2)} = & d(\lambda_1) g(\mu, \lambda_1) [1 + f(\lambda_1, \mu)] \prod_{j=3}^N f(\lambda_j, \lambda_1) - \\ & - icg(\mu, \lambda_1) (\partial/\partial \lambda_1) \left[d(\lambda_1) \prod_{j=3}^N f(\lambda_j, \lambda_1) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\Lambda^{(3)} = ica(\lambda_1) g(\mu, \lambda_1) \prod_{j=3}^N f(\lambda_1, \lambda_j), \quad \tilde{\Lambda}^{(3)} = icd(\lambda_1) g(\mu, \lambda_1) \prod_{j=3}^N f(\lambda_j, \lambda_1). \quad (4.12)$$

Учитывая, что в правой части формул (4.5), (4.6) все векторы являются линейно независимыми, получаем, что $|\Psi_N\rangle$ является собственным вектором,

$$\tau(\mu) |\Psi_N\rangle = (\Lambda + \tilde{\Lambda}) |\Psi_N\rangle, \quad (4.13)$$

при условии, что выполняется система уравнений

$$\Lambda_l^{(1)} + \tilde{\Lambda}_l^{(1)} = 0, \quad \Lambda^{(2)} + \tilde{\Lambda}^{(2)} = 0, \quad \Lambda^{(3)} + \tilde{\Lambda}^{(3)} = 0. \quad (4.14)$$

Эта система совпадает с уравнениями (4.2) — (4.4). Итак, мы доказали, что уравнения Бете для $|\Psi_N\rangle$ имеют вид (4.2) — (4.4).

Докажем теперь, что эти уравнения не имеют решения в модели НШ. В этой модели уравнения (4.2), (4.3) имеют следующий вид:

$$e^{-i\lambda_n L} \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1 + ic}{\lambda_n - \lambda_1 - ic} \right)^2 \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq n}}^N \left(\frac{\lambda_n - \lambda_j + ic}{\lambda_n - \lambda_j - ic} \right) = 1 \quad (n=3, \dots, N), \quad (4.15)$$

$$e^{-i\lambda_1 L} \prod_{j=3}^N \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_j + ic}{\lambda_1 - \lambda_j - ic} \right) = -1 \quad (4.16)$$

и обладают только вещественными решениями λ_j . Это показывается

с помощью рассуждений, аналогичных использованным в § 1.2. Выпишем теперь уравнение (4.4):

$$(d/c) + L + \sum_{l=3}^N \{2c/[c^2 + (\lambda_l - \lambda_1)^2]\} = 0. \quad (4.17)$$

Для вещественных λ_j оно не имеет решений. Это завершает доказательство теоремы.

Мы доказали, что не могут совпадать два импульса. Случай, когда совпадают несколько импульсов, рассматривается аналогично [6.5; 6.21]. Таким образом, мы видим, что в наборе $\{\lambda_j\}$ в (1.10) нет совпадающих, если $|\Psi_N\rangle$ является собственной функцией. Эта теорема играет важную роль. Как показано в гл. I, состояние с наименьшей энергией гамильтониана модели НШ строится как море Дирака. Принцип Паули обеспечивает стабильность моря Дирака. Можно показать, что неразрешимость уравнений (4.17) связана с выпуклостью действия Янга, которое обсуждалось в гл. I. Это приводит нас к гипотезе о том, что во всех интегрируемых моделях, где выпукло действие Янга, выполняется принцип Паули. Если действие Янга не выпукло, то принцип Паули может не выполняться.

§ 5. Оператор сдвига

Рассмотрим матрицу монодромии, состоящую из двух «коммутирующих» сомножителей (1.7):

$$T(\lambda) = T(2|\lambda) T(1|\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Каждый сомножитель $T(j|\lambda)$ ($j=1, 2$) имеет вид

$$T(j|\lambda) = \begin{pmatrix} A_j(\lambda) & B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) & D_j(\lambda) \end{pmatrix} \quad (j=1, 2), \quad (5.2)$$

сплетается R -матрицей (1.3) и обладает вакуумом $|0\rangle_j$:

$$A_j(\lambda)|0\rangle_j = a_j(\lambda)|0\rangle_j, \quad D_j(\lambda)|0\rangle_j = d_j(\lambda)|0\rangle_j, \quad C_j(\lambda)|0\rangle_j = 0. \quad (5.3)$$

Определим оператор сдвига $\mathcal{O}$ следующим образом:

$$\mathcal{O} T(\lambda) \mathcal{O}^{-1} \equiv \tilde{T}(\lambda) = T(1|\lambda) T(2|\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\lambda) & \tilde{B}(\lambda) \\ \tilde{C}(\lambda) & \tilde{D}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\text{tr } T(\lambda) = \text{tr } \tilde{T}(\lambda). \quad (5.4)$$

Отметим, что $\tilde{T}(\lambda)$ (так же, как и $T(\lambda)$) сплетается R -матрицей (1.3) и обладает вакуумом $|0\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$. При этом вакуумные собственные значения матриц $\tilde{T}$ и T совпадают (1.8): $a(\lambda) = \tilde{a}(\lambda) = a_1(\lambda) a_2(\lambda)$, $\tilde{d}(\lambda) = d(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda)$. Рассмотрим волновые функции

$$|\Psi_N\rangle = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle, \quad (5.5)$$

$$|\tilde{\Psi}_N\rangle = \prod_{j=1}^N \tilde{B}(\lambda_j) |0\rangle. \quad (5.6)$$

Теорема 1. Волновые функции (5.5) и (5.6) пропорциональны тогда и только тогда, когда выполнены уравнения Бете:

$$\frac{a(\lambda_n)}{d(\lambda_n)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \frac{f(\lambda_n, \lambda_j)}{f(\lambda_j, \lambda_n)} = 1 \quad (n=1, \dots, N). \quad (5.7)$$

Доказательство. Выразим волновую функцию (5.5) через волновые функции $\prod B_1(\lambda_j) |0\rangle_1$ и $\prod B_2(\lambda_j) |0\rangle_2$ в отдельных узлах (5.2). Из (5.1), (5.2) имеем для оператора $B(\lambda)$

$$B(\lambda) = A_2(\lambda) B_1(\lambda) + D_1(\lambda) B_2(\lambda). \quad (5.8)$$

С помощью стандартных рассуждений алгебраического анзатца Бете (см. § 1) получаем

$$\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^I\} \cup \{\lambda^{II}\}} \prod_{j \in I}^{n_1} \prod_{k \in II}^{n_2} a_2(\lambda_j^I) d_1(\lambda_k^{II}) \times \\ \times f(\lambda_j^I, \lambda_k^{II}) (B_2(\lambda_k^{II}) |0\rangle_2) (B_1(\lambda_j^I) |0\rangle_1). \quad (5.9)$$

Здесь суммирование ведется по разбиению множества $\{\lambda_j\}$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda^I\}$ и $\{\lambda^{II}\}$:

$$\{\lambda^I\} \cap \{\lambda^{II}\} = \emptyset, \quad \{\lambda^I\} \cup \{\lambda^{II}\} = \{\lambda\}, \\ \text{card } \{\lambda^I\} = n_1, \quad \text{card } \{\lambda^{II}\} = n_2. \quad (5.10)$$

Каждое слагаемое в (5.9) представляет собой двойное произведение, индекс j пробегает 1-й набор, а индекс k — независимо пробегает 2-й. Волновая функция (5.6) выражается аналогичным образом:

$$\prod_{j=1}^N \tilde{B}(\lambda_j) |0\rangle = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^I\} \cup \{\lambda^{II}\}} \prod_{j \in I}^{n_1} \prod_{k \in II}^{n_2} a_1(\lambda_k^{II}) d_2(\lambda_j^I) \times \\ \times f(\lambda_k^{II}, \lambda_j^I) (B_1(\lambda_j^I) |0\rangle_1) (B_2(\lambda_k^{II}) |0\rangle_2). \quad (5.11)$$

Отметим, что все слагаемые в правой части (5.9) линейно независимы. Непосредственные вычисления показывают, что правые части (5.9) и (5.11) пропорциональны тогда и только тогда, когда выполнена система (5.7). При этом

$$0 | \Psi_N \rangle = | \tilde{\Psi}_N \rangle = v | \Psi_N \rangle, \\ v = \prod_{j=1}^N (a_1(\lambda_j) / d_1(\lambda_j)) = \prod_{j=1}^N (a_2(\lambda_j) / d_2(\lambda_j)). \quad (5.12)$$

Здесь v — собственное значение оператора сдвига. Теорема доказана.

Отметим, что сопряженные волновые функции $\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j)$ также пропорциональны тогда и только тогда, когда выполнена система

(5.7). Доказательство основывается на представлении

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^I\} \cup \{\lambda^II\}} \prod_{j \in I} \prod_{k \in II} (\langle 0 | C_1(\lambda_j^I) \rangle \times \\ \times \langle 0 | C_2(\lambda_k^{II}) \rangle) f(\lambda_k^{II}, \lambda_j^I) a_1(\lambda_k^{II}) d_2(\lambda_j^I). \end{aligned} \quad (5.13)$$

При этом

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(\lambda_j) = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \mathcal{O}^{-1} = v^{-1} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j). \quad (5.14)$$

Таким образом, если волновая функция (5.5) является собственной функцией оператора трансляции, то она обязательно является собственной функцией трансформатрицы.

Теорему 1 можно применить для вычисления собственных значений оператора импульса. Рассмотрим, например, модель НШ. Матрицу монодромии $T(\lambda)$ разобьем на два «коммутирующих» множителя следующим образом. Матрица $T(1|\lambda)$ — это матрица монодромии на отрезке $[0, x]$, ее вакуумные собственные значения равны

$$a_1(\lambda) = \exp\{-i\lambda x/2\}, \quad d_1(\lambda) = \exp\{i\lambda x/2\}. \quad (5.15)$$

Матрица $T(2|\lambda)$ — это матрица монодромии на отрезке $[x, L]$, ее вакуумные собственные значения равны

$$a_2(\lambda) = \exp\{-i\lambda(L-x)/2\}, \quad d_2(\lambda) = \exp\{i\lambda(L-x)/2\}. \quad (5.16)$$

Оператор $\mathcal{O} = \exp\{i(L-x)\hat{P}\}$ — это оператор сдвига на величину $(L-x)$, а $\hat{P}$ — это оператор импульса. Собственное значение оператора сдвига

(5.12) в данном случае равно $v = \exp\{i(L-x) \sum_{j=1}^N \lambda_j\}$; это означает,

что собственное значение оператора импульса равно $P_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j$, что, конечно, совпадает с (3.7).

Рассмотрим теперь такую однородную решеточную модель, что вакуумные собственные значения каждого из L -операторов одинаковы и равны $a_L(\lambda)$ и $d_L(\lambda)$. В такой модели собственное значение оператора импульса равно

$$P_N = i \sum_{j=1}^N \ln(a_L(\lambda)/d_L(\lambda)). \quad (5.17)$$

Для ХХЗ магнетика воспроизводим отсюда при $N=1$ формулу (3.22).

Теорема, доказанная в этом параграфе, играет важную роль при вычислении корреляционных функций. Она оказалась полезной при построении квантовых локальных гамильтонианов на решетке [6.15].

§ 6. Классификация матриц монодромии

Рассмотрим матрицу монодромии

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

которая сплетается R -матрицей модели (1.3), (1.4):

$$R(\lambda, \mu)(T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda)) R(\lambda, \mu). \quad (6.2)$$

Потребуем, чтобы существовал псевдовакуум $|0\rangle$ (1.6):

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad C(\lambda)|0\rangle = 0. \quad (6.3)$$

Теорема. *Существует матрица монодромии (6.1), удовлетворяющая соотношениям (6.2), (6.3) при произвольных комплекснозначных функциях $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$.*

Для доказательства следует построить четыре линейных оператора $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ и пространство, в котором они действуют. Базисными векторами нашего пространства являются состояния N частиц с «импульсами» $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (импульсы — произвольные комплексные числа):

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle_N, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad N=0, 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

Эти состояния являются симметричными функциями всех λ_j . Состояние с $N=0$ отождествляется с псевдовакуумом. Определим теперь действие наших операторов A , B , C , D в этом пространстве, используя формулы алгебраического анзатца Бете. Оператор $B(\mu)$ является повышающим:

$$B(\mu)|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle_N = |\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle_{N+1}. \quad (6.5)$$

Действие операторов $A(\mu)$ и $D(\mu)$ сохраняет число частиц:

$$A(\mu)|\{\lambda_j\}\rangle_N = \Lambda|\{\lambda_j\}\rangle_N + \sum_{n=1}^N \Lambda_n |\mu, \{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_N, \quad (6.6)$$

$$D(\mu)|\{\lambda_j\}\rangle_N = \tilde{\Lambda}|\{\lambda_j\}\rangle_N + \sum_{n=1}^N \tilde{\Lambda}_n |\mu, \{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_N. \quad (6.7)$$

Здесь коэффициенты Λ , $\tilde{\Lambda}$ задаются формулами (1.27), (1.28). Оператор $C(\mu)$ является понижающим:

$$C(\mu)|\{\lambda_j\}\rangle_N = \sum_{n=1}^N M_n |\{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_{(N-1)} + \sum_{k > n} M_{kn} |\mu, \{\lambda_{j \neq k, n}\}\rangle_{(N-1)}. \quad (6.8)$$

Коэффициенты M задаются формулами (2.3), (2.4). На этом заканчивается построение матрицы монодромии.

Докажем сначала, что построенная таким образом матрица удовлетворяет соотношению (6.2). Распишем матричное равенство (6.2) как 16 скалярных соотношений (1.11)—(1.24). Применим левую и правую части каждого из равенств к некоторому базисному вектору (6.4). Путем непосредственных вычислений можно убедиться, что

операторы, стоящие в левой и правой частях, действуют на любой базисный вектор одинаково. Отметим, что вычисления сводятся к тождествам, которым удовлетворяют функции $f(\lambda, \mu)$ и $g(\lambda, \mu)$ (1.4). Чтобы проиллюстрировать необходимые вычисления, приведем доказательство того, что

$$A(\mu_1)A(\mu_2) = A(\mu_2)A(\mu_1). \quad (6.9)$$

Применим $A(\mu_2)A(\mu_1)$ к базисному вектору $|\{\lambda_j\}\rangle_N$; при этом получится:

$$\begin{aligned} A(\mu_2)A(\mu_1)|\{\lambda_j\}\rangle_N &= a(\mu_1)a(\mu_2) \prod_{j=1}^N f(\mu_1, \lambda_j)f(\mu_2, \lambda_j)|\{\lambda_j\}\rangle_N + \\ &+ \sum_{n=1}^N a(\mu_1) \prod_{j=1}^N f(\mu_1, \lambda_j)a(\lambda_n)g(\lambda_n, \mu_2) \prod_{j \neq n} f(\lambda_n, \lambda_j)|\mu_2, \{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_N + \\ &+ \sum_{n=1}^N a(\mu_2) \prod_{j \neq n} f(\mu_2, \lambda_j)f(\mu_2, \mu_1)a(\lambda_n)g(\lambda_n, \mu_1) \prod_{j \neq n} f(\lambda_n, \lambda_j)|\mu_1, \{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_N + \\ &+ \sum_{n=1}^N a(\lambda_n)g(\lambda_n, \mu_1) \prod_{j \neq 1} f(\lambda_n, \lambda_j)a(\mu_1)g(\mu_1, \mu_2) \prod_{j \neq n} f(\mu_1, \lambda_j)|\mu_2, \{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_N + \\ &+ \sum_{n=1}^N \sum_{k \neq n} (a(\lambda_n)g(\lambda_n, \mu_1) \prod_{j \neq n} f(\lambda_n, \lambda_j)a(\lambda_k)g(\lambda_k, \mu_2) \times \\ &\times \prod_{j \neq n, k} f(\lambda_k, \lambda_j)f(\lambda_k, \mu_1)|\mu_1, \mu_2, \{\lambda_{j \neq n, k}\}\rangle_N. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Мы предполагаем, что все импульсы μ_1 , μ_2 и $\{\lambda_j\}$ различны. Доказательство равенства (6.9) сводится к тому, что правая часть не должна меняться при замене $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$. Проверим коэффициенты отдельно при различных структурах. Коэффициент при $a(\mu_1)a(\mu_2)|\{\lambda_j\}\rangle_N$ очевидно симметричен при замене $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$. (Это первое слагаемое в правой части.) Проверим теперь, что при этой замене коэффициент при $a(\mu_1)a(\lambda_n)|\mu_2, \{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_N$ переходит в коэффициент при $a(\mu_2)a(\lambda_n)|\mu_1, \{\lambda_{j \neq n}\}\rangle_N$. Сокращая на общий множитель, равный $(\prod_{j \neq n} f(\mu_2, \lambda_j)f(\lambda_n, \lambda_j))$, приходим к равенству

$$g(\lambda_n, \mu_1)f(\mu_2, \lambda_n) + g(\lambda_n, \mu_2)g(\mu_2, \mu_1) = f(\mu_2, \mu_1)g(\lambda_n, \mu_1). \quad (6.11)$$

Элементарные вычисления показывают, что это соотношение является тождеством в обоих случаях (1.4), (1.5). Проверим теперь, что коэффициент при $a(\lambda_n)a(\lambda_k)|\mu_1, \mu_2, \{\lambda_{j \neq n, k}\}\rangle_N$ не меняется при замене $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$. Это сводится к тождеству

$$\begin{aligned} g(\lambda_n, \mu_1)g(\lambda_k, \mu_2)f(\lambda_k, \mu_1)f(\lambda_n, \lambda_k) &+ g(\lambda_k, \mu_1)g(\lambda_n, \mu_2)f(\lambda_n, \mu_1) \times \\ &\times f(\lambda_k, \lambda_n) = g(\lambda_n, \mu_2)g(\lambda_k, \mu_1)f(\lambda_k, \mu_2)f(\lambda_n, \lambda_k) + \\ &+ g(\lambda_k, \mu_2)g(\lambda_n, \mu_1)f(\lambda_n, \mu_2)f(\lambda_k, \lambda_n). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Таким образом, мы доказали, что обе части (6.9) действуют на базисный вектор (6.4) одинаково. Сначала мы предполагали, что в наборе $\{\mu_1, \mu_2, \lambda_j\}$ нет совпадающих импульсов, теперь мы можем продолжить равенство

$$[R(\lambda, \mu) T(\lambda) \otimes T(\mu) - T(\mu) \otimes T(\lambda) R(\lambda, \mu)] |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle_N = 0 \quad (6.13)$$

по непрерывности на случай совпадающих импульсов и убедиться, что оно верно всегда.

Таким образом, доказываются коммутационные соотношения (6.2). Очевидно, что соотношения (6.3) также выполнены. Это завершает доказательство теоремы.

§ 7. Несколько замечаний о классификации матриц монодромии

1) Применяя технику предыдущего параграфа, можно доказать следующее равенство:

$$A\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right) D\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right) - B\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right) C\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right) = a\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right) d\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right). \quad (7.1)$$

Слева стоит квадратичная комбинация операторов, а справа — комплекснозначная функция. Применяя обе части этого равенства к произвольному базисному вектору, можно убедиться, что они действуют на него одинаково. В следующем параграфе с помощью соотношения (7.1) будет введено важное понятие определителя матрицы монодромии в квантовом случае.

2) Можно провести отождествление

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle_N = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle. \quad (7.2)$$

В силу линейности всех соотношений имеется тривиальный произвол, связанный с умножением $T(\mu)$ на произвольную комплекснозначную функцию. Таким образом, существенно различные $T(\mu)$ параметризуются одной произвольной функцией $r(\lambda) = a(\lambda)/d(\lambda)$. Отметим, что действие операторов A, B, C, D в базисе (7.2) определяется формулами алгебраического анзатца Бете (1.25)—(1.28), (2.2)—(2.4) и зависит только от вакуумных собственных значений $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. Это приводит к теореме единственности.

3) Представляют интерес линейные функционалы в рассматриваемом пространстве. Определим линейный функционал $\langle 0|$ (дуальный псевдовакуум) соотношениями

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad \langle 0|\{\lambda_j\}\rangle_N = 0 \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (7.3)$$

Легко доказать, что следующие функционалы даются формулами

$$\langle 0|A(\mu) = a(\mu)\langle 0|, \quad \langle 0|D(\mu) = d(\mu)\langle 0|, \quad \langle 0|B(\mu) = 0. \quad (7.4)$$

Рассмотрим теперь следующие линейные функционалы:

$$\langle 0 | C(\lambda_1) \dots C(\lambda_N). \quad (7.5)$$

Будем называть их базисными. Линейные функционалы (7.5) симметрично зависят от всех λ_j (см. (1.11)). Действие операторов $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$ и $D(\mu)$ на базисные функционалы (7.5) легко вычислить с помощью (1.11)—(1.24); результат вычислений совпадает с (2.7)—(2.9).

4) В построенном пространстве введем оператор числа частиц Q . На базисные векторы он действует следующим образом:

$$Q|0\rangle=0, \quad Q|\{\lambda_j\}\rangle_N=N|\{\lambda_j\}\rangle_N, \quad (7.6)$$

$$\langle 0 | \left(\prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \right) Q = N \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j); \quad \langle 0 | Q = 0.$$

Здесь импульсы λ_j произвольны. Легко вычислить коммутационные соотношения:

$$[Q, B(\lambda)] = B(\lambda); \quad [Q, C(\lambda)] = -C(\lambda), \quad [Q, A(\lambda)] = [Q, D(\lambda)] = 0. \quad (7.7)$$

Кратко их можно записать так:

$$2[Q, T(\lambda)] = [\sigma_z, T(\lambda)].$$

В дальнейшем нам понадобится оператор $\exp\{\alpha Q\}$ (α — произвольная постоянная). Действие этого оператора на базисный вектор дается формулой

$$\exp\{\alpha Q\}|\{\lambda_j\}\rangle_N = \exp\{\alpha N\}|\{\lambda_j\}\rangle_N. \quad (7.8)$$

5) Свойства базиса (7.2) аналогичны свойствам базиса (7.5). Это позволяет ввести в пространство эрмитово сопряжение, например, следующим образом. Потребуем выполнения соотношений

$$B^+(\lambda^*) = \pm C(\lambda); \quad \langle 0 | = |0\rangle^*, \quad (7.9)$$

что возможно, если

$$a^*(\lambda^*) = d(\lambda). \quad (7.10)$$

При этом базисы (7.2) и (7.5) связаны эрмитовым сопряжением и, как нетрудно видеть,

$$A^+(\lambda^*) = D(\lambda). \quad (7.11)$$

В этом случае значение линейного функционала на базисном векторе с тем же набором λ_j

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle \quad (7.12)$$

является вещественным при вещественных λ_j .

6) В работе [6.6] показано, что все построения предыдущего параграфа справедливы и для R -матрицы XXZ модели (1.3), (1.5). В случае XXZ R -матрицы естественно ограничиться произвольной периодической функцией (см. [6.14]) $a(\lambda)/d(\lambda)$:

$$a(\lambda)/d(\lambda) = a(\lambda + i\pi)/d(\lambda + i\pi). \quad (7.13)$$

Это связано с вопросом о представимости $T(\lambda)$ в виде произведения L -операторов (см. § VII.4).

Итак, мы проклассифицировали все матрицы монодромии для данной R -матрицы; ниже (§ VII.4) мы проклассифицируем все L -операторы для тех же R -матриц. Связь $T(\lambda)$ и $L(\lambda)$ задается формулой (V.1.1). Нам удастся построить L -оператор, зависящий всего от четырех комплексных параметров (вместо функционального $r(\lambda)$). Его матричные элементы будут действовать в весьма узком подпространстве построенного выше фоковского пространства; этот L -оператор порождает по формуле (V.1.1) матрицу монодромии общего вида. В этой связи следует подчеркнуть еще раз параллель между теорией представлений групп и КМОЗ, упомянутую в § V.2.

7) Обсудим следствия теоремы, доказанной в предыдущем параграфе. Рассмотрим уравнения Бете (1.31)

$$r(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N [f(\lambda_j, \lambda_k)/f(\lambda_k, \lambda_j)] = 1 \quad (j=1, \dots, N). \quad (7.14)$$

Зафиксируем произвольный набор N чисел $\{\lambda_j\}$, среди которых нет совпадающих. Зададимся следующим вопросом. Существуют ли модели, для которых этот набор является решением уравнений Бете? Ответ на этот вопрос положительный, таких моделей существует много. Они параметризуются функцией $r(\lambda)$, на которую наложено довольно слабое ограничение — в точках λ_j она должна принимать фиксированные значения:

$$r(\lambda_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N [f(\lambda_k, \lambda_j)/f(\lambda_j, \lambda_k)] \quad (j=1, \dots, N). \quad (7.15)$$

Это позволяет нам рассматривать решения уравнений Бете (λ_j) как свободные независимые переменные, что существенно используется в части III.

8) В заключение обсудим матрицу рассеяния в случае произвольных функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. Рассмотрим уравнения Бете (1.31), (7.14). Множители в правой части $f(\lambda_j, \lambda_k)/f(\lambda_k, \lambda_j)$ имеют смысл затравочной матрицы рассеяния частицы с затравочным импульсом λ_j на частице затравочным импульсом λ_k . Таким образом, затравочная матрица рассеяния не зависит от произвольных функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, а определяется только R -матрицей. Одетая фаза рассеяния получается из затравочной с помощью одевающих уравнений, рассмотренных в § 1.4. Ядро этих интегральных уравнений определяется R -матрицей

$(K(\lambda, \mu) = i\partial \ln(f(\lambda, \mu)/f(\mu, \lambda))/\partial \lambda)$; то же относится и к правой части одевающего уравнения (I.4.29) для фазы. Таким образом, одетая матрица рассеяния тоже определяется только R -матрицей. Более точно, рассмотрим две модели с одинаковой R -матрицей и различными функциями $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. Если значения спектрального параметра на границе Ферми в этих моделях совпадают, то одетые матрицы рассеяния тоже совпадают. Речь идет о матрицах рассеяния, вычисленных как функция спектрального параметра λ . Если вычислить S -матрицы как функции одетых импульсов частиц, то они, конечно, будут различаться.

§ 8. Квантовый детерминант

В настоящем параграфе мы введем понятие детерминанта матрицы монодромии в квантовом случае. Рассмотрим матрицу монодромии $T(\lambda)$ (1.1), сплетающуюся R -матрицей XXX модели (1.3), (1.4) и обладающую вакуумом (1.6). Отметим, что при $\lambda = \mu + ic$ коммутационные соотношения (1.11)–(1.24) матричных элементов матриц $T(\lambda)$ и $T(\mu)$ существенно упрощаются. Действительно, $f(\mu, \lambda) = 0$, $g(\mu, \lambda) = -1$. При этом R -матрица $R(\lambda, \mu)$ пропорциональна одномерному проектору:

$$R(\lambda, \mu) = \Pi - I. \quad (8.1)$$

Примеры этих коммутационных соотношений, важные для дальнейшего, имеют вид:

$$C(\mu)D(\mu + ic) = D(\mu)C(\mu + ic), \quad A(\mu)B(\mu + ic) = B(\mu)A(\mu + ic). \quad (8.2)$$

Определим детерминант матрицы монодромии в квантовом случае так:

$$\det_q T(\lambda) = A\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right)D\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right) - B\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right)C\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right). \quad (8.3)$$

Используя коммутационные соотношения $T(\lambda)$ и $T(\lambda + ic)$, его можно переписать также в виде

$$\det_q T(\lambda) = D\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right)A\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right) - C\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right)B\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right). \quad (8.4)$$

Квантовый детерминант $\det_q T(\lambda)$ коммутирует с любым из операторов $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$ или $D(\mu)$:

$$[\det_q T(\lambda), T(\mu)] = 0. \quad (8.5)$$

Формула (7.1) показывает, что квантовый детерминант является комплекснозначной функцией, а не квантовым оператором:

$$\det_q T(\lambda) = a\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right)d\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right). \quad (8.6)$$

Коммутационные соотношения (8.2)—(8.5) можно записать в матричном виде

$$T\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right) \sigma_y T^\tau\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right) \sigma_y = \det_q T(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\left(\lambda - \frac{ic}{2}\right) d\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right) \quad (8.7)$$

или, по-другому,

$$T^{-1}(\lambda) = \sigma_y T^\tau(\lambda + ic) \sigma_y \left[\det_q T\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (8.8)$$

Эта формула обобщает известное классическое соотношение. С ее помощью легко доказать, что если $T(\lambda)$ является произведением «коммутирующих» сомножителей $T(\lambda) = T_2(\lambda) T_1(\lambda)$ (1.7), то квантовые детерминанты так же перемножаются:

$$\det_q T(\lambda) = \det_q T_1(\lambda) \det_q T_2(\lambda). \quad (8.9)$$

В свою очередь это означает, что детерминант матрицы монодромии равен произведению детерминантов L -операторов:

$$\det_q T(\lambda) = \prod_{j=1}^M \det_q L(j|\lambda). \quad (8.10)$$

Квантовый детерминант можно определить также и для R -матрицы XXZ модели:

$$\begin{aligned} \det_q T(\lambda) &= A(\lambda - i\eta) D(\lambda + i\eta) - B(\lambda - i\eta) C(\lambda + i\eta) = \\ &= a(\lambda - i\eta) d(\lambda + i\eta). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Он обладает всеми упомянутыми выше свойствами. Приведем значение $\det_q T(\lambda)$ для рассмотренных моделей.

Для модели НШ

$$\det_q T(\lambda) = \exp\{-cL/2\}. \quad (8.12)$$

Для XXX магнетика (см. (3.11))

$$\det_q L(\lambda) = (c^2 + \lambda^2), \quad \det_q T(\lambda) = (c^2 + \lambda^2)^M. \quad (8.13)$$

Для XXZ магнетика

$$\det_q L(\lambda) = -\operatorname{ch}(\lambda + 2i\eta) \operatorname{ch}(\lambda - 2i\eta), \quad \det_q T(\lambda) = [\det_q L(\lambda)]^M. \quad (8.14)$$

Для модели синус-Гордон

$$\det_q T(\lambda) = \exp\{(2Ms) \operatorname{ch} 2\lambda\} \quad (s = (m\Delta/4)^2). \quad (8.15)$$

§ 9. Рекуррентные свойства статсуммы Z_N

В § V.6 была введена статсумма Z_N (V.6.6), которая будет играть важную роль при описании скалярных произведений. Она является функцией $2N$ переменных $\{\lambda_\alpha\}$, $\{\nu_j\}$.

Лемма 1. *Статсумма $Z_N(\{\lambda_\alpha\}, \{v_j\})$ является симметричной функцией всех $\{\lambda_\alpha\}$ и $\{v_j\}$ по отдельности. Величина Z_N является полиномом $(N-1)$ -й степени каждой из переменных λ_α или v_j при всех остальных переменных фиксированных:*

$$\partial^N Z_N / \partial \lambda_\alpha^N = 0; \quad \partial^N Z_N / \partial v_j^N = 0. \quad (9.1)$$

Для доказательства используем представление (V.6.12). В нем $B(\lambda_\alpha)$ — элемент матрицы монодромии (V.6.7). Так как $[B(\lambda), B(\mu)] = 0$ (см. (1.11)), то Z_N является симметричной функцией всех λ_α . Из формул (V.6.4) и (V.6.7) видно, что

$$\partial^N T_\alpha(\lambda) / \partial \lambda^N = N! I = N! \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

а значит, $\partial^N B(\lambda) / \partial \lambda^N = 0$. Следовательно, $B(\lambda)$ есть полином степени $(N-1)$ по каждому из λ_α . Из представления (V.6.12) ясно, что Z_N является полиномом степени $(N-1)$ по каждому из λ_α . Для того чтобы доказать аналогичные свойства по v_j , надо воспользоваться представлением (V.6.15). Это завершает доказательство леммы 1.

Для дальнейшего исследования статсуммы Z_N приведем список свойств L -оператора (V.6.4):

$$(1) \quad L_{\alpha k} \left(v_k - \lambda_\alpha = \frac{ic}{2} \right) = -ic \Pi_{\alpha k}. \quad (9.3)$$

Здесь $\Pi_{\alpha k}$ — матрица перестановки пространств α и k . Как следует из ее определения,

$$\Pi_{\alpha k} v_k w_\alpha = w_k v_\alpha. \quad (9.4)$$

Здесь v, w — векторы в пространствах α или k (согласно индексу).

(2) L -оператор имеет два простых собственных вектора

$$L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k)(\uparrow_\alpha \uparrow_k) = \left(\lambda_\alpha - v_k - i \frac{c}{2} \right) (\uparrow_\alpha \uparrow_k), \quad (9.5)$$

$$L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k)(\downarrow_\alpha \downarrow_k) = \left(\lambda_\alpha - v_k - i \frac{c}{2} \right) (\downarrow_\alpha \downarrow_k). \quad (9.6)$$

$$(3) \quad [L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k), \sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(\alpha)}] = 0. \quad (9.7)$$

Введем оператор

$$W = \prod_{\alpha=1}^N \sigma_x^{(\alpha)} \prod_{\alpha=1}^N \sigma_x^{(k)}.$$

Он обладает следующими свойствами:

$$W^2 = 1, \quad \left[W, \prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^N L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) \right] = 0. \quad (9.8)$$

Это следствие свойства (3) L -оператора.

Лемма 2. Величину Z_N можно представить в виде

$$Z_N(\{\lambda_\alpha\}, \{v_j\}) = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) | 0' \rangle. \quad (9.9)$$

Доказательство. Исходя из представления (V.6.5), имеем

$$\begin{aligned} Z_N = & \left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\uparrow)_\alpha \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N (\downarrow)_j \right\} W \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^N L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) \right\} \times \\ & \times W \left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\downarrow)_\alpha \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N (\uparrow)_j \right\} = \left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\downarrow)_\alpha \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N (\uparrow)_j \right\} \times \\ & \times \left\{ \prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^N L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - v_k) \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\uparrow)_\alpha \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N (\downarrow)_j \right\}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Повторяя рассуждения § V.6, (V.6.11)—(V.6.12), получаем формулу (9.9). Лемма доказана.

Лемма 3. Величина Z_N удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} Z_N |_{\lambda_\beta = v_l - \frac{ic}{2}} = \\ = -ic \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \left(\lambda_\beta - v_k - \frac{ic}{2} \right) \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \left(\lambda_\alpha - v_l - \frac{ic}{2} \right) Z_{N-1}(\{\lambda_{\alpha \neq \beta}\}, \{v_{j \neq l}\}). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Доказательство. Так как Z_N — симметричная функция всех λ_α и v_j , то достаточно доказать формулу в случае $\beta = l = 1$. Рассмотрим представление (V.6.5). Оператор L_{11} стоит в произведении крайним справа. При $\lambda_1 = v_1 - ic/2$ он превращается в перестановку:

$$L_{11}(v_1 - \lambda_1 = ic/2) = -ic \Pi_{11} \quad (9.12)$$

и следующим образом действует на произведение векторов, стоящих справа:

$$L_{11} \left\{ \prod_{j=1}^N (\uparrow)_j \right\} \left\{ \prod_{\alpha=1}^N (\downarrow)_\alpha \right\} = -ic \left((\downarrow)_1 \left\{ \prod_{j=2}^N (\uparrow)_j \right\} \right) \left((\uparrow)_1 \prod_{\alpha=2}^N (\downarrow)_\alpha \right). \quad (9.13)$$

Вектор в правой части является собственным для операторов $L_{1j}(\lambda_j - v_1)$ ($j=2, \dots, N$) (см. (9.5)). Он также является собственным для операторов $L_{\alpha 1}(\lambda_\alpha - v_1)$ ($\alpha=2, \dots, N$) (см. (9.6)). После применения этих L -операторов к вектору (9.13) получаем

$$\begin{aligned} Z_N |_{\lambda_1 = v_1 - \frac{ic}{2}} = \\ = -ic \prod_{k=2}^N \left(\lambda_1 - v_k - \frac{ic}{2} \right) \prod_{\alpha=2}^N \left(\lambda_\alpha - v_1 - \frac{ic}{2} \right) Z_{N-1}(\{\lambda_{\alpha \neq 1}\}, \{v_{j \neq 1}\}). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Это доказывает лемму.

Лемма 4. Свойства статсуммы Z_N , установленные в леммах 1—3, однозначно ее фиксируют.

Доказательство проводим по индукции по N . База индукции:

$$Z_1 = -ic. \quad (9.15)$$

Если функция Z_{N-1} известна, то функция Z_N однозначно фиксирована. Действительно, Z_N — полином степени $(N-1)$ по переменной λ_N . Значение этого полинома известно в точках $\lambda_N = v_j$ ($j=1, \dots, N$) (9.11), что однозначно его фиксирует. Лемма доказана.

Ниже будет удобно использовать величины $G_N(\{\lambda_\alpha^B\}, \{\lambda_j^C\})$:

$$G_N(\{\lambda_\alpha^B\}, \{\lambda_j^C\}) \equiv Z_N\left(\{\lambda_\alpha^B\}, \left\{\lambda_j^C + \frac{ic}{2}\right\}\right). \quad (9.16)$$

Из рекуррентных свойств Z_N эти функции легко вычислить явно при небольших N . Например,

$$G_1 = -ic,$$

$$G_2(\lambda_1^B, \lambda_2^B | \lambda_1^C, \lambda_2^C) = c^4 + ic^3(\lambda_1^B + \lambda_2^B - \lambda_1^C - \lambda_2^C) - \\ - c^2(\lambda_1^B - \lambda_2^C)(\lambda_2^B - \lambda_1^C) - c^2(\lambda_1^B - \lambda_1^C)(\lambda_2^B - \lambda_2^C). \quad (9.17)$$

§ 10. Выражение для Z_N через определитель

Рекуррентные соотношения предыдущего параграфа удается решить с помощью определителя матрицы $N \times N$ [6.2]:

$$Z_N(\{\lambda_\alpha\}, \{v_j\}) = (-1)^N \frac{\prod_{j,\alpha} \left(v_j - \lambda_\alpha - \frac{ic}{2}\right) \left(v_j - \lambda_\alpha + \frac{ic}{2}\right)}{\prod_{j>k} (v_k - v_j) \prod_{\alpha>\beta} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)} \det \mathcal{M}. \quad (10.1)$$

Здесь матрица $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\mathcal{M}_{j\alpha} = \frac{ic}{\left(v_\alpha - \lambda_j + \frac{ic}{2}\right) \left(v_\alpha - \lambda_j - \frac{ic}{2}\right)}. \quad (10.2)$$

Аналогичное выражение существует и в тригонометрическом случае. Мы используем это выражение в § VIII.2 для построения главного коэффициента скалярного произведения K_N .

ПРИЛОЖЕНИЕ. Матричная реализация квантовых операторов

Рассмотрим рациональную константу связи в модели СГ:

$$\gamma/\pi = Q/P. \quad (\text{П.1})$$

Здесь Q и P — целые, $Q < P$, они предполагаются взаимно простыми. Из соотношения

$$\pi\chi = \chi\pi \exp\{i\gamma\}, \quad (\text{П.2})$$

$$\chi = \exp\{i\beta u/2\}, \quad \pi = \exp\{i\beta p/4\} \quad (\text{П.3})$$

следует, что

$$\chi^{2P} = \pi^{2P} = 1. \quad (\text{П.4})$$

Отметим, что в матрицу монодромии модели СГ входят лишь χ и π в целых степенях. В данной ситуации χ и π можно реализовать как матрицы $2P \times 2P$:

$$\chi_{ab} = \delta_{ab} \exp \{i\pi(a-1)/P\}, \quad (\text{П.5})$$

$$\pi_{ab} = \delta_{a+Q, b} (a, b = 1, \dots, 2P; a+2P \equiv a).$$

В выражении для псевдовакуума (3.24) δ -функцию можно заменить на кронекеровский δ -символ

$$\delta_{a_{2n}+P, a_{2n-1}+Q}. \quad (\text{П.6})$$

Заключение

При изложении общей схемы алгебраического анзатца Бете (§ 1) мы следовали работам [6.17; 6.19]. Для моделей нерелятивистского бозе-газа и магнетика Гейзенберга воспроизведена система уравнений Бете и спектр собственных значений операторов энергии и импульса над фоковским вакуумом [6.17; 6.18], а тем самым — и результаты глав I, II. Буквальное совпадение (с точностью до общего множителя) формул для собственных функций гамильтониана, полученных в рамках КМОЗ, с полученными в части I координатными волновыми функциями можно доказать, обобщив формулу (5.9) на случай, когда матрица монодромии состоит из произвольного числа «коммутирующих» сомножителей [6.22]. Аналогичным образом показано, что все наблюдаемые величины в квантовых моделях синус-Гордон [6.12] и массивной модели Тирринга совпадают. Отметим, что нормируемый вакуум модели синус-Гордон построен в работах [6.3; 6.20].

Действие оператора $S(\mu)$ на бетевский вектор (2.1) исследовался в работах [6.6; 6.23]. Принцип Паули для одномерных взаимодействующих бозонов сформулирован в работах [6.5; 6.21], его физический смысл обсуждался в [6.26].

Алгебраический анзатц Бете позволяет гораздо дальше продвинуться в исследовании интегрируемых моделей. Особенно хочется отметить, что он позволил выяснить структуру матрицы монодромии общего вида, связанной с данной R -матрицей. Теорема § 6 была доказана в работе [6.6]; в этой же работе показано, что она справедлива и для R -матрицы XXZ модели.

Понятие квантового детерминанта было введено в работах [6.4; 6.6], оно играет важную роль в КМОЗ и применялось многими авторами. В работах [6.9; 6.13] при выводе квантового уравнения Гельфанда — Левитана существенно использовалась формула (8.8). В работе [6.25] понятие квантового детерминанта обобщено на матрицы большей размерности. В работе [6.24] оно использовалось для процедуры разложения R -матриц, в работах [6.10; 6.11] — для построения оператора Казимира в квадратичных алгебрах, в работе [6.1] — при построении «квантовых» групп.

Рекуррентные свойства статсуммы Z_N исследовались в работе [6.23], ее представление в виде детерминанта дано в работе [6.2].

К сожалению, из-за ограниченности объема мы не смогли осветить такие важные вопросы как аналитический анзац Бете [6.8] и иерархия анзаццев Бете [6.7; 6.16].

Глава VII

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА РЕШЕТКЕ

В настоящей главе сформулированы решеточные варианты вполне интегрируемых полевых моделей, классических и квантовых. Рассматривается нелинейное уравнение Шредингера (НШ) и модель синус-Гордон (СГ). КМОЗ позволяет переносить непрерывные модели квантовой теории поля на решетку с сохранением свойства полной интегрируемости. Более того, удастся сохранить явный вид R -матрицы. Для классических моделей это означает сохранение структуры переменных действие-угол. Для квантовых моделей сохранение R -матрицы означает сохранение S -матрицы (см. § VI.7); оказывается, что критические индексы, контролирующие степенное убывание корреляторов на бесконечности, также сохраняются. В релятивистских моделях квантовой теории поля такие решеточные модели могут быть использованы для наиболее строгого решения проблемы ультрафиолетовой регуляризации. Много внимания в этой главе уделяется построению локальных гамильтонианов для решеточных моделей квантовой теории поля. Любопытно отметить, что L -операторы решеточных моделей зависят от некоторого дополнительного параметра Δ (которого нет в R -матрице). Этот параметр имеет физический смысл шага решетки. Однако L -оператор можно продолжить по Δ во всю комплексную плоскость. Опираясь на этот факт, можно построить наиболее общий L -оператор, сплетающийся данной R -матрицей. Это позволяет решить задачу о перечислении всех интегрируемых моделей, связанных с данной R -матрицей.

Требование сохранения R -матрицы при перенесении на решетку является важнейшим отличием решеточных моделей, построенных в настоящей главе, от других интегрируемых решеточных моделей теории поля. Отметим также, что решеточные модели, построенные ниже, формулируются в терминах исходных бозе-полей.

В §§ 1, 2 строятся классические решеточные модели. Предъявляется явный вид L -операторов на решетке. Конструируются локальные гамильтонианы на решетке с помощью тождеств следов. Конструкция опирается на следующий факт. При некотором значении спектрального параметра L -оператор превращается в одномерный проектор. Это общий способ построения локальных гамильтонианов на решетке.

В § 1 строится нелинейное уравнение Шредингера на решетке, а в § 2 — уравнение синус-Гордон.

В § 3 строится дискретная квантовая модель НШ. Обсуждается связь L -оператора с бесконечномерными представлениями алгебры $su(2)$. Удастся построить локальный гамильтониан на решетке, используя (как и в классике) вырождение L -оператора при специальном значении спектрального параметра. Этот гамильтониан является элементарной функцией локальных бозе-полей.

В § 4 рассмотрен L -оператор квантовой дискретной модели НШ, он зависит от непрерывного параметра Δ . При специальных значениях этого параметра он превращается в L -оператор ХХХ модели Гейзенберга с любым спином и является наиболее общим для R -матрицы ХХХ модели.

В § 5 строится дискретная квантовая модель синус-Гордон. Построенные модели удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к доопределению квантовой теории поля.

§ 1. Классические модели теории поля на решетке

Сначала рассмотрим модель НШ, ее непрерывный вариант обсуждался в § IV.1. Решеточная модель описывает взаимодействие бозонных полей ψ_n , ψ_n^+ в узлах решетки (n —номер узла), со скобками Пуассона $\{\psi_n, \psi_m^+\} = i\delta_{nm}/\Delta$. Построение начнем с L -оператора:

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\lambda\Delta}{2} + \frac{c\Delta^2}{2} \psi_n^+ \psi_n & -i\sqrt{c}\Delta \psi_n^+ \rho_n^+ \\ i\sqrt{c}\Delta \rho_n^- \psi_n & 1 + \frac{i\lambda\Delta}{2} + \frac{c\Delta^2}{2} \psi_n^+ \psi_n \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Величины $\rho^\pm$ являются функциями только от произведения полей $\psi_n^+ \psi_n$ и удовлетворяют следующему соотношению:

$$\rho_n^+ \rho_n^- = 1 + \frac{c\Delta^2}{4} \psi_n^+ \psi_n. \quad (1.2)$$

Этот L -оператор сплетается той же самой классической r -матрицей (IV.2.11), (IV.2.16), что и непрерывный L -оператор, причем билинейное соотношение (IV.2.11) выполняется точно. В этом легко убедиться непосредственным вычислением.

Распорядимся произволом, связанным с функциями $\rho^\pm$. В настоящем и следующем параграфах нам будет удобно зафиксировать функции $\rho^\pm$ так:

$$\rho_n^+ = \rho_n^- = \rho_n = \sqrt{1 + \frac{c\Delta^2}{4} \psi_n^+ \psi_n}. \quad (1.3)$$

При этом L -оператор (1.1) отличается от инфинитезимального (IV.1.19) лишь во втором порядке по Δ при $\Delta \rightarrow 0$. Свойства симметрий этого L -оператора те же, что в непрерывном случае:

$$\sigma_x L^*(\lambda^*) \sigma_x = L(\lambda), \quad (1.4)$$

$$\det L(n/\lambda) = \frac{\Delta^2}{4} (\lambda - v)(\lambda - v^*), \quad v = -\frac{2i}{\Delta}. \quad (1.5)$$

Таким образом, мы построили решеточный L -оператор модели НШ. Матрица монодромии строится стандартным образом (IV.1.8) и обладает прежними симметриями, $\sigma_x T^*(\lambda^*) \sigma_x = T(\lambda)$ и $\det T = \det^M L$ (см. (IV.1.18), (IV.1.17)). Заметим, что в § 4 будет удобно определить функции $\rho^\pm$ по-другому:

$$\rho_n^+ = 1, \quad \rho_n^- = 1 + \frac{c\Delta^2}{4} \psi_n^+ \psi_n. \quad (1.6)$$

Вернемся теперь к прежнему выбору $\rho^\pm$ (1.3) и построим локальные гамильтонианы с помощью тождеств следов. Сначала дадим определение локальности. Рассмотрим гамильтониан H решеточной модели, представимый в виде:

$$H = \sum_{n=1}^M H_n. \quad (1.7)$$

Пусть плотность гамильтониана H_n зависит от динамических переменных ψ_j , ψ_j^+ в некоторой окрестности n -го узла $n-m \leq j \leq n+l$. Если в пределе $M \rightarrow \infty$ (интересном для физических приложений) сумма $m+l$ остается ограниченной ($m+l \leq i$), то гамильтониан называется локальным, описывающим взаимодействие $(i+1)$ соседей (для i следует взять наименьшее возможное значение).

Гамильтониан модели НШ на решетке будем строить как линейную комбинацию логарифмических производных от $\tau(\lambda) = \text{tr } T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$. Локальность достигается с помощью следующего приема. Заметим, что в точках $\lambda = v$, v^* величины $\det L(n|\lambda) = \det T(\lambda) = 0$, а сами матрицы $L(n|\lambda)$ и $T(\lambda)$ пропорциональны одномерным проекторам:

$$L_{ik}(n|v) = \alpha_i(n) \alpha_k^*(n). \quad (1.8)$$

Здесь компоненты вектора α равны (α — двухкомпонентный вектор)

$$\alpha_1(n) = -i\Delta \sqrt{\frac{c}{2}} \psi_n^+; \quad \alpha_2(n) = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{c\Delta^2}{4} \psi_n^+ \psi_n} = \sqrt{2} \rho_n. \quad (1.9)$$

При $\lambda = v^*$ L -оператор также обращается в одномерный проектор:

$$L_{ik}(n|v^*) = (\sigma_x \alpha^*(n))_i (\sigma_x \alpha(n))_k. \quad (1.10)$$

Следствием этого является факторизация следа матрицы монодромии (см. (IV.1.9)) при $\lambda = v$, v^* :

$$\tau(\lambda) = \prod_{n=1}^M \tau_n; \quad \tau_n = (\alpha^*(n+1) \alpha(n)), \quad \alpha(M+1) = \alpha(1). \quad (1.11)$$

Круглые скобки означают скалярное произведение двух одномерных векторов:

$$(\alpha^* \alpha) = \alpha_1^* \alpha_1 + \alpha_2^* \alpha_2. \quad (1.12)$$

Таким образом, закон сохранения

$$\ln \tau(v) = \sum_{n=1}^M \ln \tau_n \quad (1.13)$$

является локальным и описывает взаимодействие двух ближайших соседей. Логарифмические производные $d^m \ln \tau(\lambda)/d\lambda^m$ в точке v также дают локальные законы сохранения [7.7]. Первая производная имеет вид

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tau(\lambda) \right|_{\lambda=v} = -\frac{i\Delta}{2} \sum_{n=1}^M \frac{(\alpha^*(n+1) \sigma_z \alpha(n-1))}{(\alpha^*(n+1) \alpha(n)) (\alpha^*(n) \alpha(n-1))}. \quad (1.14)$$

В качестве решеточного гамильтониана возьмем, например, следующее локальное выражение:

$$H = -\frac{8i}{3c\Delta^4} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [\tau(\lambda) \tau_0^{-1}(\lambda)] \Big|_{\lambda=v} + \frac{8i}{3c\Delta^4} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [\tau(\lambda) \tau_0^{-1}(\lambda)]_{\lambda=v^*} + \frac{4}{3\Delta^2} Q. \quad (1.15)$$

Здесь Q — оператор числа частиц:

$$Q = \Delta \sum_{n=1}^M \psi_n^+ \psi_n. \quad (1.16)$$

Он коммутирует с $\tau(\lambda)$. Величина $\tau_0(\lambda)$ имеет смысл значения $\tau(\lambda)$ при нулевых полях:

$$\tau_0(\lambda) = \left(1 - \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^M + \left(1 + \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^M. \quad (1.17)$$

Отметим, что в качестве гамильтониана можно было взять $\ln \tau(\lambda)$ или какую-то другую комбинацию логарифмических производных $\tau(\lambda)$ в точках v, v^* . Требование правильного непрерывного предела является слабым ограничением.

Прямое вычисление приводит к следующему выражению для решеточного гамильтониана (1.15):

$$H = -\frac{4}{3c\Delta^3} \sum_{n=1}^M \left[\frac{(\alpha^*(n+1) \sigma_z \alpha(n-1))}{(\alpha^*(n+1) \alpha(n)) (\alpha^*(n) \alpha(n-1))} + \frac{(\alpha(n+1) \sigma_z \alpha^*(n-1))}{(\alpha(n+1) \alpha^*(n)) (\alpha(n) \alpha^*(n-1))} + 1 - c\Delta^2 \psi_n^+ \psi_n \right]. \quad (1.18)$$

Этот гамильтониан является вещественным и пространственно четным. Структура переменных действие-угол для дискретных уравнений та же, что и в непрерывном случае § IV.1. Переход к непрерывной модели НШ при $\Delta \rightarrow 0$ происходит гладко. Элементарные выкладки показывают, что непрерывный предел этого гамильтониана правиль-

ный. В этом пределе гамильтониан переходит в (IV.1.11), а заряд — в (IV.1.13).

Явный вид уравнений движения легко получить, имея гамильтониан и скобки Пуассона. Они будут локальными и нелинейными (нелинейность носит рациональный характер). Это вполне интегрируемые уравнения, которые можно решить с помощью метода обратной задачи. Они представимы в лаксовом виде. Действительно, r -матрица и тождества следов предъявлены выше, а оператор эволюции во времени $U(n|\lambda)$ строится с помощью производящего функционала (IV.2.20) и является локальным.

§ 2. Классическая модель синус-Гордон на решетке

Рассмотрим теперь модель СГ. С каждым узлом решетки связаны переменные p_n и u_n со скобками Пуассона $\{p_n, u_m\} = \delta_{nm}$. Предъявим следующий L -оператор:

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta p_n/8} \rho_n e^{-i\beta p_n/8} & \frac{m\Delta}{2} \operatorname{sh}(\lambda - i\beta u_n/2) \\ -\frac{m\Delta}{2} \operatorname{sh}(\lambda + i\beta u_n/2) & e^{i\beta p_n/8} \rho_n e^{i\beta p_n/8} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь $\rho_n = \sqrt{1 + 2s \cos \beta u_n}$, $s = \left(\frac{m\Delta}{4}\right)^2$. Шаг решетки ограничен: $0 < s < 1/2$. В непрерывном пределе ($p_n \rightarrow \Delta \pi(x_n)$, $u_n \rightarrow u(x_n)$) этот L -оператор превращается в инфинитезимальный оператор (IV.3.5). L -оператор (2.1) сплетается r -матрицей (IV.3.7) точно. Свойства матрицы монодромии $T(\lambda)$ такие же, как и в непрерывном случае (IV.3.9), (IV.3.10). Мы рассматриваем четное число узлов; при этом

$$\sigma_y T^*(\lambda^*) \sigma_y = T(\lambda), \quad (2.2)$$

$$\det T(\lambda) = \det^M L(\lambda), \quad \det L(\lambda) = 1 + 2s \operatorname{ch} 2\lambda. \quad (2.3)$$

Гамильтониан и импульс модели определим с помощью тождеств следов:

$$H - P = \frac{m^2 \Delta}{4\gamma} \frac{\partial}{\partial e^{2\lambda}} \ln [\tau(\lambda) \tau_0^{-1}(\lambda)] \Big|_{e^{2\lambda} = -b},$$

$$H + P = \frac{m^2 \Delta}{4\gamma} \frac{\partial}{\partial e^{-2\lambda}} \ln [\tau(\lambda) \tau_0^{-1}(\lambda)] \Big|_{e^{-2\lambda} = -b^{-1}} \quad (2.4)$$

Здесь $\tau_0(\lambda)$ — след $T(\lambda)$ при $p_n = u_n = 0$. Инволюция (2.2) обеспечивает вещественность H и P ,

$$b = 2s(1 + \sqrt{1 - 4s^2})^{-1}. \quad (2.5)$$

Функция $\tau(\lambda)$ — мероморфная функция $e^{2\lambda}$. При $\exp(2\lambda) = -b^{\pm 1}$ определитель $T(\lambda)$ (2.3) обращается в нуль, что гарантирует локальность

H и P . В непрерывном пределе ($\Delta \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$) формулы (2.4) превращаются в тождества следов (IV.3.9). Построенный гамильтониан описывает взаимодействие трех ближайших соседей. Явный вид H и P удобно записать в переменных

$$\chi_n^\pm = \sqrt{\frac{s}{b}} \left(\frac{e^{\pm i \beta u_n / 2} + b e^{\mp i \beta u_n / 2}}{\rho_n} \right) e^{-i \beta p_n / 4},$$

$$|\chi_n^\pm| = 1. \quad (2.6)$$

Гамильтониан и импульс имеют вид

$$H \mp P = \frac{m^2 \Delta}{4\gamma b(1-b^2)} \sum_{k=1}^M \left[\frac{(\chi_{k\mp 1}^+ - b\chi_{k\pm 1}^-)(\chi_k^- - b\chi_k^+)}{(1+\chi_{k\pm 1}^- \chi_k^+)(1+\chi_{k\mp 1}^+ \chi_k^-)} - \frac{(1-b)^2}{4} \right]. \quad (2.7)$$

Отметим, что фазовое пространство построенной модели является прямым произведением торов. Гамильтониан и импульс — периодические функции каждого из p_n и u_n с периодами $2\pi/\beta$ и $4\pi/\beta$ соответственно; они имеют правильный непрерывный предел. Определим заряд Q следующим образом:

$$Q = \frac{\beta}{\pi} \sum_{k=1}^{M/2} (u_{2k} - u_{2k-1}). \quad (2.8)$$

Легко вычислить скобки Пуассона Q и $T(\lambda)$:

$$\{Q, T(\lambda)\} = \frac{i\gamma}{\pi} [\sigma_z, T(\lambda)]. \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что Q является законом сохранения $\{Q, T(\lambda)\} = \{Q, H\} = 0$. При $\Delta \rightarrow 0$ заряд имеет правильный непрерывный предел (IV.3.3). Структура переменных действие-угол в решеточном и непрерывном случаях одинакова [7.15].

§ 3. Квантовая модель на решетке, связанная с нелинейным уравнением Шредингера

Квантовая модель НШ на решетке задается тем же L -оператором (1.1), однако теперь ψ_n , ψ_n^+ являются квантовыми операторами с перестановочными соотношениями $[\psi_n, \psi_m^+] = \delta_{nm}/\Delta$. Билинейное соотношение (V.1.6) с R -матрицей XXX модели (V.3.17), (V.3.18) выполнено для этого L -оператора точно. Вид функций $\rho^\pm$ по-прежнему содержит произвол. В настоящем параграфе мы зафиксируем $\rho = \rho^+ = \rho^-$ с помощью соотношения (1.3). Решеточный L -оператор модели НШ обладает теми же симметриями, что и в непрерывной модели:

$$\sigma_x L^*(\lambda^*) \sigma_x = L(\lambda). \quad (3.1)$$

Напомним, что звездочка означает эрмитово сопряжение матричных элементов как квантовых операторов (без матричного транспонирования и комплексное сопряжение c -чисел),

$$\det_q L(\lambda) = \frac{\Delta^2}{4} \left(\lambda - v - \frac{ic}{2} \right) \left(\lambda + v + \frac{ic}{2} \right), \quad v = -\frac{2i}{\Delta}. \quad (3.2)$$

Определим оператор числа частиц:

$$Q = \sum_{n=1}^M \Delta \psi_n^+ \psi_n. \quad (3.3)$$

Этот оператор имеет правильный непрерывный предел.

Приступим теперь к построению гамильтониана. Параметры L -оператора (1.1) могут изменяться от узла к узлу. Рассмотрим цепочку, в которой L -операторы в четных и нечетных узлах различаются:

$$L(n|\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda\Delta}{2} + \frac{c\Delta^2}{2} \psi_n^+ \psi_n & -i\sqrt{c} \Delta \psi_n^+ \rho_n \\ i\sqrt{c} \Delta \rho_n \psi_n & 1 + (-1)^n \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda\Delta}{2} + \frac{c\Delta^2}{2} \psi_n^+ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\rho_n = \sqrt{1 + (-1)^n \frac{c\Delta}{4} + \frac{c\Delta^2}{4} \psi_n^+ \psi_n}. \quad (3.5)$$

Этот L -оператор также сплетается R -матрицей XXX модели (V.3.17). Для того чтобы увидеть, что непрерывный предел матрицы перехода, порожденной этим L -оператором, правильный, достаточно перемножить два L -оператора в соседних узлах и устремить $\Delta \rightarrow 0$. Получится L -оператор, отличающийся от инфинитезимального (V.3.14) в порядке Δ^2 , что обеспечивает правильный предел. Перечислим свойства этого L -оператора. Свойство симметрии (1.4) сохраняется:

$$\sigma_x L^*(n|\lambda^*) \sigma_x = L(n|\lambda). \quad (3.6)$$

При отражении спектрального параметра L -оператор преобразуется так:

$$L^\tau(n|-\lambda) = \sigma_x L(n|\lambda) \sigma_x. \quad (3.7)$$

Легко вычислить квантовый детерминант:

$$L(n|\lambda) \sigma_y L^\tau(n|\lambda + ic) \sigma_y = (\Delta/2)^2 (\lambda - v_1^{(n)}) (\lambda - v_2^{(n)}), \quad (3.8)$$

$$v_1^{(n)} = -\frac{2i}{\Delta} \left[1 + (-1)^n \frac{c\Delta}{4} \right], \quad v_2^{(n)} = -ic + \frac{2i}{\Delta} \left[1 + (-1)^n \frac{c\Delta}{4} \right]. \quad (3.9)$$

В точках $v_{1,2}^{(n)}$ L -оператор, как и в классике, превращается в проектор, т. е. представим в виде (1.8). Однако теперь компоненты вектора

α — это квантовые операторы. Они не коммутируют, и надо различать «прямой» проектор

$$L_{ik} = \alpha_i \beta_k \quad (3.10)$$

и «обратный»

$$L_{ik} = \delta_k \gamma_i. \quad (3.11)$$

Уточним эти формулы. Введем двухкомпонентный вектор α (его компоненты — квантовые операторы). В квантовом случае выражение для α напоминает классическое (1.9); появляется лишь дополнительная зависимость от четности узла. В четных узлах

$$\alpha_1(n) = -i \sqrt{\frac{c}{2}} \Delta \psi_n^+, \quad n=0 \pmod{2}, \quad (3.12)$$

$$\alpha_2(n) = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{c\Delta^2}{4}} \psi_n^+ \psi_n,$$

и нечетных

$$\alpha_1(n) = -i \sqrt{\frac{c}{2}} \Delta \psi_n^+, \quad n=1 \pmod{2}. \quad (3.13)$$

$$\alpha_2(n) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{c\Delta}{4} + \frac{c\Delta^2}{4}} \psi_n^+ \psi_n,$$

Итак, рассмотрим значение спектрального параметра $\lambda = v$, при котором квантовый детерминант (3.8) обращается в нуль:

$$v = -\frac{2i}{\Delta} + \frac{ic}{2}. \quad (3.14)$$

При $\lambda = v$ оператор в нечетных узлах превращается в «прямой» проектор:

$$L_{ik}(n|v) = \alpha_i(n) \alpha_k^+(n), \quad n=1 \pmod{2}. \quad (3.15)$$

В четных узлах L -оператор превращается в «обратный» проектор:

$$L_{ik}(n|v) = \alpha_k^+(n) \alpha_i(n), \quad n=0 \pmod{2}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь точку $\lambda = v^*$, в которой квантовый детерминант (3.8) также обращается в нуль:

$$v^* = -v = \frac{2i}{\Delta} - \frac{ic}{2}. \quad (3.17)$$

При этом L -оператор в нечетных узлах обратится в «обратный» проектор:

$$L_{ik}(n|v^*) = (\sigma_x \alpha(n))_k (\sigma_x \alpha^+(n))_i, \quad n=1 \pmod{2}, \quad (3.18)$$

и в четных узлах превратится в «прямой» проектор:

$$L_{ik}(n|v^*) = (\sigma_x \alpha^+(n))_i (\sigma_x \alpha(n))_k, \quad n=0 \pmod{2}. \quad (3.19)$$

Будем считать, что полное число узлов в решетке M четно. Оператор Q (3.3) коммутирует с трансформатрицей:

$$[\tau(\lambda), Q] = 0. \quad (3.20)$$

Первая логарифмическая производная в точке $\lambda=v$ является локальной. Рассмотрим сначала

$$\begin{aligned} \tau(v) = (\alpha^+(M) \alpha(M-1)) \left\{ \prod_{n=1}^{M/2-1} (\alpha^+(2n) \alpha(2n-1)) \times \right. \\ \left. \times (\alpha^+(2n+1) \alpha(2n)) \right\} (\alpha^+(1) \alpha(M)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Это выражение позволяет вычислить явный вид логарифмической производной:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} [\ln \tau(\lambda)] \right|_{\lambda=v} = -\frac{i\Delta}{2} \sum_{n=1}^M t_n. \quad (3.22)$$

Локальная плотность t_n зависит от четности узла; для n нечетных

$$\begin{aligned} t_n = (\alpha^+(n+2) \alpha(n+1))^{-1} \{ (\alpha^+(n) \alpha(n-1))^{-1} (\alpha^+(n+1) \alpha(n))^{-1} \times \\ \times (\alpha^+(n+1) \sigma_z \alpha(n-1)) \} (\alpha^+(n+2) \alpha(n+1)), \quad n=1 \pmod{2}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

для n четных

$$\begin{aligned} t_n = (\alpha^+(n-1) \alpha(n-2))^{-1} \{ (\alpha^+(n+1) \alpha(n))^{-1} (\alpha^+(n) \alpha(n-1))^{-1} \times \\ \times (\alpha^+(n+1) \sigma_z \alpha(n-1)) \} (\alpha^+(n-1) \alpha(n-2)), \quad n=0 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Любопытно сравнить это выражение с классическим случаем (1.14). Аналогичное выражение для $\partial \ln \tau(\lambda) / \partial \lambda$ имеет место в точке $\lambda=v^*$. Можно доказать, что

$$\left[\left. \frac{\partial \ln \tau(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=v} \right]^+ = \left. \frac{\partial \ln \tau(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=v^*}, \quad (3.25)$$

$$P \left. \frac{\partial \ln \tau(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=v} P = - \left. \frac{\partial \ln \tau(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=v^*}. \quad (3.26)$$

Здесь P — оператор пространственного отражения.

Гамильтониан квантового решеточного нелинейного уравнения Шредингера определяется аналогично классическому случаю:

$$\begin{aligned} H = -\frac{8i}{3c\Delta^4} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [\tau(\lambda) \tau_0^{-1}(\lambda)] \Big|_{\lambda=v} + \\ + \frac{8i}{3c\Delta^4} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [\tau(\lambda) \tau_0^{-1}(\lambda)] \Big|_{\lambda=v^*} + \left(\frac{4}{3\Delta^2} + \frac{c^2}{12} \right) Q. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь Q — оператор числа частиц (3.3). Величина $\tau_0(\lambda)$ — это след матрицы монодромии в случае нулевых полей:

$$\tau_0(\lambda) = \left(1 + \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2} \left(1 - \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2} + \left(1 + \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2} \left(1 - \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2}. \quad (3.28)$$

Итак, построен локальный гамильтониан, заданный в терминах бозе-полей:

$$H = -\frac{4}{3c\Delta^3} \sum_{n=1}^M \left(t_n + t_n^+ + \frac{8-c\Delta}{8-2c\Delta}\right) + \left(\frac{4}{3\Delta^2} + \frac{c^2}{12}\right) \sum_{n=1}^M \Delta \psi_n^+ \psi_n; \quad (3.29)$$

t_n см. в (3.23) — (3.24). Этот гамильтониан является эрмитовым, пространственно четным и обладает правильным непрерывным пределом.

Соответствующая модель является вполне интегрируемой. Фоковский вакуум является псевдовакуумом:

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad (3.30)$$

$$a(\lambda) = \left(1 + \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2} \left(1 - \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2}, \quad (3.31)$$

$$d(\lambda) = \left(1 + \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2} \left(1 - \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)^{M/2}.$$

Уравнения Бете имеют вид

$$\left[\frac{\left(1 - \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda_j\Delta}{2}\right) \left(1 + \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda_j\Delta}{2}\right)}{\left(1 - \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda_j\Delta}{2}\right) \left(1 + \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda_j\Delta}{2}\right)} \right]^{M/2} = \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^N \frac{\lambda_j - \lambda_k - ic}{\lambda_j - \lambda_k + ic}. \quad (3.32)$$

Собственные значения гамильтониана можно трактовать в терминах частиц:

$$E_N = \sum_{k=1}^N \varepsilon_0(\lambda_k),$$

$$\varepsilon_0(\lambda) = \frac{c^2}{12} + \frac{4}{3\Delta^2} - \frac{4}{3\Delta^2} \left[h(\lambda) + \frac{\lambda^2 \Delta^2}{h(\lambda)} \right]^{-1}, \quad (3.33)$$

$$h(\lambda) = 1 - \frac{\Delta^2}{16} (4\lambda^2 + c^2).$$

Собственное значение оператора импульса равно

$$P_0(\lambda) = \frac{i}{2\Delta} \ln \left[\frac{\left(1 - \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda\Delta}{2}\right) \left(1 + \frac{c\Delta}{4} - \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)}{\left(1 - \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda\Delta}{2}\right) \left(1 + \frac{c\Delta}{4} + \frac{i\lambda\Delta}{2}\right)} \right]. \quad (3.34)$$

Итак, мы построили решеточную модель НШ с локальным гамильтонианом. Его отличительной чертой является то, что он представляет собой явную элементарную функцию локальных бозе-полей. Подчеркнем, что идея построения локальных гамильтонианов этого типа — та же, что и в классическом случае (см. § 1). Отметим, что с помощью L -оператора (1.1) можно построить и другие локальные решеточные гамильтонианы с помощью тождеств следов, обобщающих тождества следов для фундаментальных спиновых моделей. Это было сделано в работе [7.17] для решеточной модели НШ и решеточной модели синус-Гордон.

§ 4. Классификация квантовых L -операторов

В настоящем параграфе мы увидим, что квантовый L -оператор решеточной модели НШ исчерпывает все L -операторы, сплетающиеся R -матрицей XXX модели и обладающие вакуумом. Для L -оператора (1.1) зафиксируем произвол в выборе функций $\rho^\pm$ следующим образом: $\rho^+ = 1$, $\rho^- = 1 + (c\Delta^2/4)\psi_n^+\psi_n$ (см. (1.6)). Этот L -оператор зависит от произвольного комплексного параметра Δ . Легко ввести в него еще три произвольных комплексных параметра. Сдвинем спектральный параметр, переходя к оператору $L(\lambda - v)$ (V.2.5), умножим L -оператор на произвольное число и введем параметр ϵ , умножая слева на $\exp\{\epsilon\sigma_z\}$ (VI.2.14). Тем самым от L -оператора (1.1) перейдем к L -оператору следующего вида:

$$L(h|\lambda) = \begin{pmatrix} a_n^{(1)}(\lambda + ic\psi_n^+\psi_n) + a_n^{(0)}\psi_n^+ & \\ c\rho_n\psi_n & d_n^{(1)}(\lambda - ic\psi_n^+\psi_n) + d_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где

$$\rho_n = i[a_n^{(1)}d_n^{(0)} - a_n^{(0)}d_n^{(1)}] + cd_n^{(1)}a_n^{(1)}\psi_n^+\psi_n, \\ [\psi_n^+, \psi_m] = \delta_{n,m}, \quad [\psi_n, \psi_m] = [\psi_n^+, \psi_m^+] = 0.$$

Этот L -оператор сплетается R -матрицей XXX модели, имеет вакуум $(\psi_n|0\rangle = 0)$, вакуумные собственные значения равны

$$a_n(\lambda) = a_n^{(1)}\lambda + a_n^{(0)}, \quad d_n(\lambda) = d_n^{(1)}\lambda + d_n^{(0)}. \quad (4.2)$$

Здесь $a_n^{(0)}$, $a_n^{(1)}$, $d_n^{(0)}$, $d_n^{(1)}$ — четыре произвольных комплексных параметра в каждом узле решетки.

Теорема 1. L -оператор (4.1) порождает матрицу монодромии с произвольной рациональной функцией $a(\lambda)/d(\lambda)$.

Доказательство. Построим неоднородную матрицу монодромии $T(\lambda)$:

$$T(\lambda) = L(M|\lambda) \dots L(1|\lambda). \quad (4.3)$$

Здесь числа a_n и d_n в каждом узле решетки, вообще говоря, различны. Таким образом, $T(\lambda)$ зависит от $4M$ произвольных комплексных параметров. Для $T(\lambda)$ (VI.1.9) отношение $a(\lambda)/d(\lambda)$ равно

$$\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} = \prod_{n=1}^M \frac{a_n^{(1)}\lambda + a_n^{(0)}}{d_n^{(1)}\lambda + d_n^{(0)}}; \quad (4.4)$$

так как число узлов решетки M произвольно, то в правой части стоит произвольная рациональная функция, что и требовалось доказать.

Напомним, что в § VI.6 было доказано, что матрицы монодромии параметризуются функцией $a(\lambda)/d(\lambda)$. С помощью L -оператора (4.1) можно построить матрицу монодромии $T(\lambda)$ с произвольной аналитической функцией $a(\lambda)/d(\lambda)$. Для этого следует приблизить аналитические функции рациональными. Можно получить и функции с разрезами, приближая разрезы сгущающейся последовательностью нулей и полюсов. Таким образом, L -оператор (4.1) порождает матрицу монодромии $T(\lambda)$ общего вида. Это окончательно проясняет аналогию между теорией представления групп и КМОЗ; L -оператор (4.1) действительно играет роль произвольного неприводимого представления.

Итак, L -оператор решеточной модели НШ является наиболее общим. В качестве частного случая он должен содержать L -оператор ХХХ магнетика Гейзенберга (V.5.11), а также его обобщения с высшим спином. Это естественно, ведь в случае классических непрерывных моделей магнетик Гейзенберга и уравнение НШ калибровочно эквивалентны (см. [7.18]). Проведем явные преобразования с целью показать, как это происходит. Возьмем L -оператор (1.1); выберем

$$\rho^+ = \rho^- = \sqrt{1 + \frac{c\Delta^2}{4} \psi_n^+ \psi_n}. \quad (4.5)$$

Преобразуем этот L -оператор к виду

$$\mathcal{L}(n|\lambda) = -\frac{2}{\Delta} \sigma_z L(n|\lambda) = i\lambda + c \sum_{l=x,y,z} \sigma_l t_l^{(n)}. \quad (4.6)$$

Этот L -оператор также сплетается R -матрицей ХХХ модели (дело в том, что R -матрица ХХХ модели коммутирует с матрицей $\sigma_z \otimes \sigma_z$). Назовем этот L -оператор L -оператором обобщенной ХХХ модели. В формуле (4.6) σ_z — это матрица Паули, а t — квантовые операторы

$$\begin{aligned} t_1^{(n)} &= \frac{i}{\sqrt{c}} [\psi_n^+ \rho_n + \rho_n \psi_n], \\ t_2^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{c}} [\rho_n \psi_n - \psi_n^+ \rho_n], \\ t_3^{(n)} &= -\frac{2}{\sqrt{c}} \left[\frac{1}{\Delta} + \frac{\Delta c}{2} \psi_n^+ \psi_n \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти операторы порождают представление алгебры $\mathfrak{su}(2)$:

$$[t_i, t_k] = i\epsilon_{ikl} t_l \quad (4.8)$$

со спином $t^2 = s(s+1)$, $s = -2/(c\Delta)$ — известное представление Гольдштейна — Примакова [7.24]. Вообще говоря, это представление яв-

ляется бесконечномерным, но при специальных значениях s оно становится конечномерным. Именно, при s целом или полуцелом воспроизводятся ХХХ модели с высшим спином, построенные в работе [7.11]. При $s=1/2$ оператор (4.6) превращается в L -оператор ХХХ модели (V.5.11).

§ 5. Квантовая модель синус-Гордон на решетке

Квантовая модель синус-Гордон на решетке позволяет наиболее строгим образом решить проблему ультрафиолетовой регуляризации. L -оператор этой модели по-прежнему задается формулой (2.1):

$$L(n|\lambda) = \begin{bmatrix} e^{-i\beta p_n/8} \rho_n e^{-i\beta p_n/8} \frac{m\Delta}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda - \frac{i\beta u_n}{2}\right) \\ -\frac{m\Delta}{2} \operatorname{sh}\left(\lambda + \frac{i\beta u_n}{2}\right) e^{i\beta p_n/8} \rho_n e^{i\beta p_n/8} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\rho_n = \sqrt{1 + 2s \cos \beta u_n}; \quad \beta = \sqrt{8\gamma}; \quad s = (m\Delta/4)^2.$$

При этом мы считаем, что $0 < s < 1/2$. Однако теперь p_n и u_n — квантовые операторы $[u_n, p_m] = i\delta_{nm}$. Этот L -оператор сплетается R -матрицей ХХЗ модели точно (R -матрица та же, что в непрерывном случае). Свойства симметрии этого L -оператора также аналогичны непрерывному случаю (V.4.6):

$$\sigma_y L^*(\lambda^*) \sigma_y = L(\lambda). \quad (5.2)$$

Здесь звездочка означает эрмитово сопряжение квантовых операторов. Квантовый детерминант равен

$$\det_q L(\lambda) = 1 + 2s \operatorname{ch} 2\lambda. \quad (5.3)$$

Отметим, что квантовый детерминант равен классическому (2.3) (ср. также с квантовым непрерывным случаем (VI.8.23)). Непрерывный предел квантового L -оператора правильный, он сводится к (V.4.2). Основываясь на этом L -операторе, можно построить различные гамильтонианы решеточной модели синус-Гордон [7.17; 7.26] с правильным непрерывным ($\Delta \rightarrow 0$) квазиклассическим пределом.

Построенная модель решается с помощью алгебраического анзаца Бете. Для того чтобы построить псевдовакуум, рассмотрим матрицу монодромии на два узла $L_2(n|\lambda) = L(2n|\lambda) L(2n-1|\lambda)$. Псевдовакуум для L_2 имеет вид

$$|0\rangle_n = \left\{ 1 - 2s \cos \left[\frac{\beta}{2} (u_{2n} + u_{2n-1}) \right] \right\}^{-1/2} \delta \left(u_{2n} - u_{2n-1} - \frac{\beta}{4} + \frac{2\pi}{\beta} \right). \quad (5.4)$$

(Отметим, что наряду с псевдовакуумом $|0\rangle_n$ оператор L_2 обладает и другим псевдовакуумом [7.9].) При рациональном значении отношения γ/π вакуум можно сделать нормируемым (см. Приложение

к предыдущей главе), а квантовые операторы реализовать как конечные матрицы. Вакуумные собственные значения L_2 равны

$$a_n(\lambda) = 1 + 2s \operatorname{ch}(2\lambda - i\gamma), \quad d_n(\lambda) = 1 + 2s \operatorname{ch}(2\lambda + i\gamma). \quad (5.5)$$

Это приводит к следующим уравнениям Бете:

$$\left(\frac{1 + 2s \operatorname{ch}(2\lambda_l - i\gamma)}{1 + 2s \operatorname{ch}(2\lambda_l + i\gamma)} \right)^{M/2} = - \prod_{k=1}^N \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k - \lambda_l + i\gamma)}{\operatorname{sh}(\lambda_k - \lambda_l - i\gamma)}. \quad (5.6)$$

В решеточной модели можно ввести оператор заряда

$$Q = \frac{4}{\beta} \sum_{n=1}^{M/2} (u_{2n} - u_{2n-1}) + M(\pi - \gamma)/(2\gamma). \quad (5.7)$$

Несложно проверить, что оператор заряда коммутирует с трансфер-матрицей, а следовательно, и с гамильтонианом. Бетевская волновая функция Ψ_N (VI.1.10) является также собственной функцией оператора Q с собственным значением, равным N . Непрерывный предел всех введенных выше физических величин правильный.

В работах [7.1; 7.3; 7.4; 7.21] проблема ультрафиолетовых расходимостей в модели СГ была решена с помощью решеточной модели синус-Гордон. Связанные состояния в решеточной модели описываются теми же неравенствами, что и в непрерывном случае (см. формулу (III.1.15)). Основное состояние модели синус-Гордон на решетке представляет собой сложную комбинацию связанных состояний, зависящую от арифметической природы константы связи. В непрерывном пределе картина упрощается и согласуется с физической картиной, полученной в массивной модели Тирринга с помощью техники ультрафиолетового обрезания, общепринятой в теории возмущений (см. гл. III).

L -оператор решеточной модели синус-Гордон, который зависит от непрерывного параметра, позволяет построить наиболее общий L -оператор, сплетающийся R -матрицей XXZ модели (так же как L -оператор решеточной модели НШ в случае R -матрицы XXX модели).

Заключение

Решеточные модели, рассмотренные в этой главе и играющие важную роль в КМОЗ, были введены в работах [7.7; 7.8; 7.9; 7.25; 7.26]. Требование сохранения R -матрицы является их важнейшим отличием от других интегрируемых решеточных моделей [7.20; 7.19; 7.27; 7.29].

Изложенный здесь общий способ построения локальных гамильтонианов был разработан в работах [7.7; 7.9; 7.26] и впоследствии использовался в других задачах. Гамильтониан (1.15) предложен в работе [7.5].

Явный вид оператора эволюции во времени, локальных уравнений движения, уравнения Гельфанда—Левитана и солитонных решений для решеточной модели СГ приведены в работе [7.15].

Решение квантовой решеточной модели НШ (3.4) приведено в работе [7.5]. Отметим, что с помощью квантового L -оператора (1.1) можно построить и другие локальные решеточные гамильтонианы с помощью тождеств следов, обобщающих тождества следов для фундаментальных спиновых моделей; это было сделано в работе [7.17]. На основе этого же L -оператора в работе [7.14] было построено квантовое уравнение Гельфанда—Левитана для модели НШ, а в работе [7.28] дано его обобщение на случай многокомпонентной модели НШ. Термодинамика решеточной модели исследовалась в [7.2].

Теорема 1 доказана в работе [7.10]. В работе [7.16] она обобщена на случай R -матрицы XXZ модели. Здесь следует упомянуть о тесно связанных с рассматриваемыми L -операторами квадратичных алгебрах [7.12; 7.13], с помощью которых был построен точный L -оператор для R -матрицы XYZ модели.

Проблема ультрафиолетовых расходимостей модели СГ с помощью решеточной модели синус-Гордон была решена в работах [7.1; 7.3; 7.4; 7.21]. В этих же работах построено основное состояние решеточной модели СГ и выведены уравнения, описывающие ее термодинамику (см. также [7.22]).

В предельном случае L -оператор решеточной модели СГ порождает решеточный L -оператор для уравнения Лиувилля, которое играет важную роль при изучении конформной квантовой теории поля [7.6].

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ II

Квантовый метод обратной задачи в настоящее время интенсивно развивается в различных направлениях. Различным аспектам его применения в решеточных моделях посвящены работы [II.1, II.2]. Альтернативный подход к непосредственному квантованию непрерывных моделей без предварительного перенесения их на решетку развит в работах [II.4, II.5, II.7—II.9].

Наконец, необходимо упомянуть, что одним из самых значительных итогов развития квантового метода обратной задачи стало создание теории квантовых групп; см. [II.3, II.6].

ВВЕДЕНИЕ

Эта часть книги посвящена последовательному вычислению корреляционных функций. Именно квантовый метод обратной задачи позволяет добиться существенного прогресса в их исследовании. Метод вычисления корреляционных функций является весьма общим и применим к любой интегрируемой модели с R -матрицей XXX или XXZ модели.

Основное внимание ниже уделено одномерному бозе-газу (модели НШ). Явные вычисления проводятся на примере одновременного коррелятора токов:

$$\frac{\langle \Omega | j(x_1) j(x_2) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} = \langle j(x_1) j(x_2) \rangle. \quad (0.1)$$

Ток здесь определен в терминах квантовых операторов поля (см. часть I):

$$j(x) = \psi^+(x) \psi(x). \quad (0.2)$$

Поля $\psi^+(x)$, $\psi(x)$ взяты в один момент времени. Вектор $|\Omega\rangle$ — основное состояние гамильтониана (море Дирака), построенное в § 1.3. Итак, вычисление коррелятора свелось к вычислению среднего некоторых операторов по основному состоянию. Это среднее мы будем изучать так. Сначала вычислим среднее по N -частичной собственной функции гамильтониана $|\Psi_N\rangle$, а затем перейдем к термодинамическому пределу (см. § 1.3). Простейшее из этих средних — это среднее от единичного оператора $\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle$, т. е. квадрат нормы собственной функции. Его легко записать в терминах волновой функции χ (см. § 1.1):

$$\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle = \int_0^L d^N z |\chi_N(z_1, \dots, z_N)|^2. \quad (0.3)$$

Гипотетическое выражение для этого интеграла было дано Годеном в 1972 г. [8.1], однако доказательство формулы Годена было дано лишь в 1982 г. [8.3] в рамках квантового метода обратной задачи:

$$\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle = \det_N \phi'. \quad (0.4)$$

Здесь ϕ' — это матрица вторых производных действия Янга (см. § 1.2) на решении уравнений Бете (ϕ' — матрица размерности $N \times N$):

$$\phi'_{jk} = \partial^2 S / \partial \lambda_j \partial \lambda_k. \quad (0.5)$$

Матрицу ϕ' можно записать в виде $\partial\phi_j/\partial\lambda_k$, где ϕ_j — переменные, введенные в § VI.1. Напомним, что в терминах этих переменных уравнения Бете записываются в виде $\phi_j = 0 \pmod{2\pi}$. Поэтому можно сказать, что матрица ϕ' получается при линеаризации уравнений Бете в окрестности их решения.

Вернемся теперь к среднему значению произведения токов, введенному в (0.1). В рамках квантового метода обратной задачи удобно свести его вычисление к вычислению среднего значения оператора $Q(x_2, x_1)$:

$$Q(x_2, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} j(z) dz. \quad (0.6)$$

Это оператор числа частиц на отрезке $[x_1, x_2]$. Легко видеть, что

$$\langle \Omega | j(x_1) j(x_2) | \Omega \rangle = -(1/2) (\partial^2 / \partial x_1 \partial x_2) \langle \Omega | Q^2(x_1, x_2) | \Omega \rangle. \quad (0.7)$$

Благодаря трансляционной инвариантности среднее значение зависит только от разности $(x_1 - x_2)$. Положив $x_2 = x > 0$, $x_1 = 0$, получим

$$\langle \Omega | j(x) j(0) | \Omega \rangle = (1/2) (\partial^2 / \partial x^2) \langle \Omega | Q_1^2(x) | \Omega \rangle \quad (x > 0). \quad (0.8)$$

Здесь $Q_1(x)$ — оператор числа частиц на отрезке $[0, x]$:

$$Q_1(x) = \int_0^x j(x) dx. \quad (0.9)$$

Более аккуратное рассмотрение показывает, что в левой части (0.7) стоит нормально упорядоченное произведение токов

$$:j(x)j(0): = \psi^+(x)\psi^+(0)\psi(x)\psi(0). \quad (0.10)$$

Это среднее связано с коррелятором так:

$$\langle j(x)j(0) \rangle = \langle :j(x)j(0): \rangle + \delta(x) \langle j(0) \rangle. \quad (0.11)$$

При $x > 0$ нормальное упорядочение не существенно: $\langle j(x)j(0) \rangle = \langle :j(x)j(0): \rangle$. Как и норму (0.3), среднее значение оператора $Q_1^2(x)$ можно выразить через волновую функцию χ_N :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N | Q_1^2(x) | \Psi_N \rangle &= \langle \Psi_N | Q_1(x) | \Psi_N \rangle + \\ &+ N(N-1) \int_0^x d^2 y \int_0^L d^{N-2} z |\chi(y_1, y_2, z_1, \dots, z_{N-2})|^2. \end{aligned} \quad (0.12)$$

Среднее значение оператора Q_1 легко вычислить, используя трансляционную инвариантность:

$$\langle \Psi_N | Q_1(x) | \Psi_N \rangle = (xN/L) \langle \Psi_N | \Psi_N \rangle. \quad (0.13)$$

Вычислить вклад второго слагаемого в (0.12) гораздо сложнее, это удастся лишь в рамках КМОЗ. Это связано с тем, что в КМОЗ можно рассматривать корреляционные функции для модели с произвольной матрицей монодромии, которая параметризуется

произвольными функциями $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — ее вакуумными значениями (см. § VI.6, где проведена классификация матриц монодромии).

Поясним это подробнее. Рассмотрим «скалярное произведение» S_N (см. § VI.6):

$$S_N = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle, \quad (0.14)$$

которое является функционалом от вакуумных собственных значений $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. Ввиду произвольности этих функций, ничто не мешает считать их разрывными, полагая, например, что $a(\lambda_N^C) \neq a(\lambda_N^B)$ при $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B$. При этом оказывается, что S_N имеет полюс первого порядка при $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B$, причем вычет в этом полюсе сводится к S_{N-1} (более подробно см. § VIII.3). Этим важным свойством обладают не только скалярные произведения, но и любые корреляционные функции. Именно это и является основной идеей при исследовании корреляционных функций. Если $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ являются гладкими функциями, то предел $\lambda^C \rightarrow \lambda^B$ существует и однозначно определен. При этом вычет в полюсе величины S_N превращается в коэффициент перед выражением

$$z_N \equiv i \partial \ln \left(\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} \right) \bigg|_{\lambda=\lambda_N}. \quad (0.15)$$

В пределе, когда $\lambda_j^C \rightarrow \lambda_j^B \rightarrow \lambda_j$ ($j=1, \dots, N$), скалярное произведение S_N (0.14) сводится к квадрату нормы бетевской волновой функции (если величины λ_j удовлетворяют системе уравнений Бете). Развивая приведенные выше соображения и удастся доказать, что он пропорционален определителю (0.5), который играет роль производящего функционала при вычислении корреляционных функций.

Поэтому мы начинаем с изложения теории скалярных произведений в гл. VIII; в гл. IX вычислена норма бетевской волновой функции и тем самым доказана гипотеза Годена. Гл. X посвящена исследованию формфакторов, которые интересны не только сами по себе. С их помощью удастся вычислить неприводимые части корреляторов — те вклады в корреляторы, которые не удастся проанализировать с помощью правила вычетов, сформулированного выше. Здесь же введено важное понятие обобщенной двухузельной модели, которое позволяет вычислять корреляторы сразу для всех моделей, связанных с данной R -матрицей. В гл. XI построена алгебраическая схема вычисления корреляционных функций в двухузельной обобщенной модели. Основной результат здесь — выражение для корреляторов в терминах неприводимых частей. В гл. XII осуществляется переход к термодинамическому пределу. В результате получено представление для одновременного коррелятора токов в модели НШ. Рассмотрен также коррелятор двух спинов в XXZ магнетике Гейзенберга.

Г л а в а VIII

ТЕОРИЯ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В настоящей главе будут исследованы свойства скалярных произведений, лежащие в основе вычисления нормы бетевских волновых функций и корреляционных функций. Скалярные произведения рассматриваются как функционалы вакуумных собственных значений $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ (см. § VI.6). Скалярные произведения оказываются весьма специальными функционалами этих произвольных функций, они зависят только от значений функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ в конечном числе точек. В главе в основном рассматривается случай R -матрицы XXX модели; обобщение на случай R -матрицы XXZ типа очевидно.

Читателю следует внимательно изучить настоящую главу, так как математический аппарат, разработанный в ней, будет широко применяться в дальнейшем. Например, при вычислении формфакторов в гл. X идея останется прежней, однако громоздких технических деталей станет гораздо больше. В § 1 дается определение скалярного произведения. В § 2 исследуются свойства коэффициентов в выражении для скалярного произведения. В § 3 доказана ключевая формула для вычета скалярного произведения.

§ 1. Скалярное произведение

В рамках алгебраического анзаца Бете (гл. VI) рассмотрим скалярное произведение S_N :

$$S_N = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle. \quad (1.1)$$

Здесь предполагается, что $2N$ комплексных чисел $\{\lambda_j^C\}$ и $\{\lambda_k^B\}$ являются независимыми переменными и не подчинены каким-либо уравнениям. В частности, не предполагается, что для них выполнена система уравнений Бете. Скалярное произведение является симметричной функцией N переменных λ_j^C и симметричной функцией N переменных λ_k^B . Это следует из соотношений $[C(\lambda), C(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0$.

Нетрудно проверить, что если бы число операторов «уничтожения» C в (1.1) отличалось бы от числа операторов «рождения» B , то скалярное произведение стало бы равным нулю. В принципе с помощью коммутационных соотношений (VI.1.12), (VI.1.20), (VI.1.24) скалярные произведения можно вычислять, например,

$$S_1 = \langle 0 | C(\lambda^C) B(\lambda^B) | 0 \rangle = g(\lambda^C, \lambda^B) \{a(\lambda^C) d(\lambda^B) - a(\lambda^B) d(\lambda^C)\}. \quad (1.2)$$

Исследуем свойства скалярных произведений при любом N (см. § VI.1). Многократно применяя формулу (VI.2.2), можно убедиться, что скалярное произведение представимо в виде

$$S_N = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle =$$

$$= \sum \left\{ \prod_{j=1}^N a(\lambda_j^A) \prod_{k=1}^N d(\lambda_k^D) \right\} K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{matrix} \right). \quad (1.3)$$

Здесь суммирование ведется по подразделениям множества $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$ из $2N$ элементов на два непересекающихся подмножества $\{\lambda^A\}$ и $\{\lambda^D\}$ с равным числом элементов:

$$\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\} = \{\lambda^A\} \cup \{\lambda^D\}, \quad \{\lambda^A\} \cap \{\lambda^D\} = \emptyset, \quad (1.4)$$

$$\text{card } \{\lambda^C\} = \text{card } \{\lambda^B\} = \text{card } \{\lambda^A\} = \text{card } \{\lambda^D\} = N. \quad (1.5)$$

Здесь card обозначает число элементов множества. Порядок элементов внутри подмножества несуществен. Число слагаемых в правой части (1.3) равно C_{2N}^N . Величины K_N являются рациональными функциями только от λ_j . Они не зависят от вакуумных собственных значений $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. При исследовании явного вида функций K_N удобно будет использовать следующие наборы спектральных параметров λ_j :

$$\{\lambda^{AC}\} = \{\lambda^A\} \cap \{\lambda^C\}, \quad \{\lambda^{DC}\} = \{\lambda^D\} \cap \{\lambda^C\}, \quad (1.6)$$

$$\{\lambda^{AB}\} = \{\lambda^A\} \cap \{\lambda^B\}, \quad \{\lambda^{DB}\} = \{\lambda^D\} \cap \{\lambda^B\}.$$

Отметим, что выполняются следующие тождества:

$$\{\lambda^{AC}\} \cup \{\lambda^{AB}\} = \{\lambda^A\}, \quad \{\lambda^{AC}\} \cup \{\lambda^{DC}\} = \{\lambda^C\}, \quad (1.7)$$

$$\{\lambda^{DC}\} \cup \{\lambda^{DB}\} = \{\lambda^D\}, \quad \{\lambda^{AB}\} \cup \{\lambda^{DB}\} = \{\lambda^B\}.$$

Число элементов в наборах обозначим так:

$$n_0 = \text{card } \{\lambda^{DC}\} = \text{card } \{\lambda^{AB}\}, \quad N - n_0 = \text{card } \{\lambda^{AC}\} = \text{card } \{\lambda^{DB}\}. \quad (1.8)$$

Иногда мы будем писать число элементов как нижний индекс множества, например, $\{\lambda^{DC}\}_{n_0}$ означает, что $\text{card } \{\lambda^{DC}\} = n_0$.

Дадим следующее определение. Рассмотрим разбиение, для которого $n_0 = 0$:

$$\{\lambda^A\} = \{\lambda^C\}, \quad \{\lambda^D\} = \{\lambda^B\}. \quad (1.9)$$

При этом

$$\{\lambda^{AC}\} = \{\lambda^C\}, \quad \{\lambda^{AB}\} = \emptyset, \quad \{\lambda^{DC}\} = \emptyset, \quad \{\lambda^{DB}\} = \{\lambda^B\}. \quad (1.10)$$

Коэффициент K_N в (1.3), соответствующий этому разбиению, назовем старшим коэффициентом:

$$K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \end{matrix} \right). \quad (1.11)$$

Скалярное произведение задается формулой (1.3) при любом N . Ниже нам нужен будет явный вид (1.3) в $(N-1)$ -частичном секторе:

$$\begin{aligned} S_{N-1} = \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \\ = \sum \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} a(\lambda_j^A) \prod_{k=1}^{N-1} d(\lambda_k^D) \right\} K_{N-1} \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

В заключение отметим, что в случае R -матрицы XXZ модели скалярные произведения определяются точно так же и обладают вполне аналогичными свойствами [8.2].

§ 2. Свойства коэффициентов K_N

Как показано в § VI.6, функции $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ в (1.3) являются произвольными. Идея исследования свойств коэффициентов K_N состоит в таком выборе функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, чтобы все слагаемые в (1.3) обратились в нуль, кроме одного. Это позволит выразить K_N через статсумму на неоднородной решетке Z_N , исследованную в § V.6 и § VI.9, § VI.10.

Т е о р е м а 1. *Старший коэффициент K_N в (1.3) связан со статсуммой Z_N следующим образом:*

$$K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \end{matrix} \right) = \left(\prod_{j,k=1}^N (\lambda_k^B - \lambda_j^C)^{-1} \right) G_N(\{\lambda^B\}, \{\lambda^C\}). \quad (2.1)$$

Здесь

$$G_N(\{\lambda_j^B\}, \{\lambda_j^C\}) = Z_N(\{\lambda_j^B\}, \{\lambda_j^C + ic/2\}). \quad (2.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим «неоднородную» матрицу монодромии XXX модели (V.5.26). Вакуумные собственные значения $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ даются формулой (VI.3.14). Рассмотрим случай $M=N$ (т. е. число узлов равно числу операторов B (или C) в (1.3)). Вычислим в такой модели скалярное произведение S_N (1.3) для некоторых наборов $\{\lambda_j^B\}_N$, $\{\lambda_j^C\}_N$. Параметры неоднородности v_j выберем следующим образом:

$$v_j = \lambda_j^C + ic/2. \quad (2.3)$$

При этом вакуумные собственные значения станут равными

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j^C - ic); \quad d(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j^C). \quad (2.4)$$

Так как теперь $d(\lambda_j^C) = 0$, то в формуле (1.3) остается одно слагаемое, содержащее старший коэффициент (1.11):

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \left(\prod_{j,k=1}^N (\lambda_k^B - \lambda_j^C) (\lambda_k^C - \lambda_j^C - ic) \right) K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \end{matrix} \right). \quad (2.5)$$

Используя формулы (VI.3.18) и (V.6.12), (V.6.15), получим

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle &= \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) | 0' \rangle \langle 0' | \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \\ &= Z_N(\{\lambda_j^C\}, \{v_j\}) Z_N(\{\lambda_j^B\}, \{v_j\}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Учтем теперь (2.3):

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \\ = Z_N(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^C + ic/2\}) Z_N(\{\lambda_j^B\}, \{\lambda_j^B + ic/2\}). \quad (2.7)$$

Первый сомножитель в правой части можно явно вычислить, используя рекуррентное соотношение (VI.9.11):

$$Z_N(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^C + ic/2\}) = \prod_{k,j=1}^N (\lambda_k^C - \lambda_j^C - ic). \quad (2.8)$$

Подставляя формулы (2.7), (2.8) в левую часть (2.5), получим формулы (2.1), (2.2), что и завершает доказательство теоремы.

При совпадении одного из λ_j^C с одним из λ_k^B старший коэффициент имеет простой полюс. Старший коэффициент K_N является симметричной функцией всех λ_j^C и λ_k^B по отдельности, поэтому достаточно рассмотреть случай $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B \rightarrow \lambda_N$. С помощью рекуррентного свойства (VI.9.11) получаем для сингулярной части:

$$K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\}_N & \{\lambda^B\}_N \\ \{\lambda^C\}_N & \{\lambda^B\}_N \end{matrix} \right) \xrightarrow{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} \\ - \frac{ic}{\lambda_N^B - \lambda_N^C} \left(\prod_{j=1}^N f(\lambda_j^C, \lambda_N) f(\lambda_N, \lambda_j^B) \right) K_{N-1} \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\}_{N-1} & \{\lambda^B\}_{N-1} \\ \{\lambda^C\}_{N-1} & \{\lambda^B\}_{N-1} \end{matrix} \right) + O(1). \quad (2.9)$$

В § VI.10 было получено представление для статсуммы Z_N в виде определителя. С помощью этой формулы и формул (2.1), (2.2) можно получить для старшего коэффициента следующее представление:

$$K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \end{matrix} \right) = \left\{ \prod_{j>k} g(\lambda_j^B, \lambda_k^B) g(\lambda_k^C, \lambda_j^C) \right\} \left\{ \prod_{j,k} h(\lambda_j^C, \lambda_k^B) \right\} \det M.$$

Здесь матрица M имеет вид

$$M_{jk} = g(\lambda_j^C, \lambda_k^B) / h(\lambda_j^C, \lambda_k^B) \quad (j, k = 1, \dots, N),$$

где $h(\lambda, \mu) = f(\lambda, \mu) / g(\lambda, \mu)$. Эта формула для K_N верна и в тригонометрическом случае.

Т е о р е м а 2. Произвольный коэффициент K_N в формуле (1.3) выражается через старшие по следующей формуле:

$$K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{matrix} \right) = \left\{ \prod_{j \in (AC)} \prod_{k \in (DC)} f(\lambda_j^{AC}, \lambda_k^{DC}) \right\} \left\{ \prod_{l \in (AB)} \prod_{m \in (DB)} f(\lambda_l^{AB}, \lambda_m^{DB}) \right\} \times \\ \times K_{n_0} \left(\begin{matrix} \{\lambda^{AB}\} & \{\lambda^{DC}\} \\ \{\lambda^{AB}\} & \{\lambda^{DC}\} \end{matrix} \right) K_{N-n_0} \left(\begin{matrix} \{\lambda^{AC}\} & \{\lambda^{DB}\} \\ \{\lambda^{AC}\} & \{\lambda^{DB}\} \end{matrix} \right). \quad (2.10)$$

Здесь в фигурных скобках стоит двойное произведение, причем каждый индекс независимо пробегает свое подмножество.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что ниже будет удобно употреблять краткое обозначение:

$$f_{jk} \equiv f(\lambda_j, \lambda_k), \quad K_{ab} \equiv K(\lambda_a, \lambda_b). \quad (2.11)$$

З а м е ч а н и е 1. Если зафиксировать все λ_j из набора $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$, кроме одного (обозначим его $\tilde{\lambda}$) и устремить $\tilde{\lambda}$ к бесконечности, то произвольный коэффициент K_N убывает как $1/\tilde{\lambda}$. Это следует из формулы (VI.9.1).

З а м е ч а н и е 2. Если

$$d(\lambda_1^C) = a(\lambda_2^C) = 0, \quad f(\lambda_1^C, \lambda_2^C) = 0, \quad (2.12)$$

то скалярное произведение равно нулю:

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = 0. \quad (2.13)$$

Это является непосредственным следствием формул (1.3), (2.10). По-другому можно сказать, что при этом

$$C(\lambda_1^C) C(\lambda_2^C) = 0. \quad (2.14)$$

Аналогично, если

$$a(\lambda_2^B) = d(\lambda_1^B) = 0, \quad f(\lambda_1^B, \lambda_2^B) = 0, \quad (2.15)$$

то

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = 0. \quad (2.16)$$

Это эквивалентно соотношению

$$B(\lambda_1^B) B(\lambda_2^B) = 0. \quad (2.17)$$

З а м е ч а н и е 3. Произвольный коэффициент K_N является рациональной функцией всех $\lambda_j \in \{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$, причем его можно представить в виде

$$K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{matrix} \right) = \left(\prod_{j,k=1}^N (\lambda_j^D - \lambda_k^A)^{-1} \right) P_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{matrix} \right), \quad (2.18)$$

где P_N — полином. Рассмотрим случай, когда $\lambda_N^C \in \{\lambda^A\}$, $\lambda_N^B \in \{\lambda^D\}$ и $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B \rightarrow \lambda_N$. При этом произвольный коэффициент имеет полюс первого порядка, причем вычет сводится к коэффициенту в скалярном произведении (1.12):

$$K_N \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{matrix} \right) \rightarrow - \frac{ic}{\lambda_N^B - \lambda_N^C} \left(\prod_{j=1}^{N-1} f(\lambda_j^A, \lambda_N) f(\lambda_N, \lambda_j^D) \right) \times \\ \times K_{N-1} \left(\begin{matrix} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{matrix} \right) + O(1). \quad (2.19)$$

Эта формула получается непосредственно из (2.9) и (2.10).

§ 3. Формула для вычета

Отметим, что в формулу для скалярных произведений (1.3) значение произвольных функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ входит лишь в $2N$ точках $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$. Эти значения можно принять за $4N$ независимых комплексных переменных

$$a_j^C = a(\lambda_j^C); \quad a_j^B = a(\lambda_j^B), \quad d_j^C = d(\lambda_j^C), \quad d_j^B = d(\lambda_j^B). \quad (3.1)$$

Таким образом, скалярное произведение зависит от $6N$ независимых комплексных переменных:

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = S_N(\{a_j^C\}, \{a_j^B\}, \{d_j^C\}, \{d_j^B\}, \{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}). \quad (3.2)$$

Рассмотрим специальный предельный случай скалярного произведения, когда одно из λ^B стремится к одному из λ^C . В силу симметрии достаточно рассмотреть случай

$$\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B \rightarrow \lambda_N. \quad (3.3)$$

Все остальные λ_j^C и λ_j^B различны, а a_j, d_j — фиксированы (вообще говоря, $a_N^C \neq a_N^B, d_N^C \neq d_N^B$). Из формул (1.3), (2.19) следует, что скалярное произведение имеет полюс первого порядка. Например, для S_1

$$\langle 0 | C(\lambda^C) B(\lambda^B) | 0 \rangle \xrightarrow{\lambda^C \rightarrow \lambda^B} \frac{ic}{\lambda^C - \lambda^B} (a^C d^B - a^B d^C). \quad (3.4)$$

Напомним, что мы сейчас рассматриваем разрывные функции $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, поэтому выражение в скобках не равно нулю при $\lambda^C \rightarrow \lambda^B$.

Т е о р е м а 1. При произвольном N скалярное произведение имеет в пределе (3.3) простой полюс, причем вычет задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle &\xrightarrow{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} \\ &\xrightarrow{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} \frac{ic}{(\lambda_N^C - \lambda_N^B)} (a_N^C d_N^B - a_N^B d_N^C) \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} B(\lambda_k^B) | 0 \rangle^{\text{mod}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь скалярное произведение в правой части задается формулой (1.12) с модифицированными значениями вакуумных собственных функций $\tilde{a}(\lambda)$ и $\tilde{d}(\lambda)$:

$$\tilde{a}(\lambda) = a(\lambda) f(\lambda, \lambda_N); \quad \tilde{d}(\lambda) = d(\lambda) f(\lambda_N, \lambda), \quad (3.6)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} B(\lambda_k^B) | 0 \rangle^{\text{mod}} = \\ = S_{N-1}(\tilde{a}_j^C, \tilde{a}_j^B, \tilde{d}_j^C, \tilde{d}_j^B, \lambda_j^B, \lambda_j^C) \quad (j=1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_j^C &= a_j^C f(\lambda_j^C, \lambda_N), & \tilde{a}_j^B &= a_j^B f(\lambda_j^B, \lambda_N), \\ \tilde{d}_j^C &= d_j^C f(\lambda_N, \lambda_j^C), & \tilde{d}_j^B &= d_j^B f(\lambda_N, \lambda_j^B). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Доказательство. Из формулы (2.16) ясно, что только те слагаемые в правой части (1.3) сингулярны, которые соответствуют двум возможностям:

$$(a) \quad \lambda_N^C \in \{\lambda^A\}, \quad \lambda_N^B \in \{\lambda^D\}, \quad (3.9)$$

$$(б) \quad \lambda_N^C \in \{\lambda^D\}, \quad \lambda_N^B \in \{\lambda^A\}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим сумму слагаемых типа (а) из (1.3); она имеет вид

$$a_N^C d_N^B \sum K_N \left(\begin{array}{cc} \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\} \\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\} \end{array} \right) \prod_{j=1}^{N-1} a(\lambda_j^A) d(\lambda_j^D). \quad (3.11)$$

Здесь суммирование ведется по разбиению набора $\{\lambda_j^C\} \cup \{\lambda_j^B\}$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$) на два набора $\{\lambda_j^A\} \cup \{\lambda_j^D\}$. Все коэффициенты K_N в формуле (3.11) имеют простые полюса. Явный вид вычета (2.19) позволяет записать сингулярную часть суммы (3.11) в виде

$$-ic \frac{a_N^C d_N^B}{\lambda_N^B - \lambda_N^C} \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} B(\lambda_k^B) | 0 \rangle^{\text{mod}}. \quad (3.12)$$

Здесь появилось скалярное произведение, присутствующее в правой части (3.5). Аналогично рассматривается сумма слагаемых типа (б) (3.10). Сингулярная часть этой суммы равна

$$\frac{ica_N^B d_N^C}{\lambda_N^B - \lambda_N^C} \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} B(\lambda_k^B) | 0 \rangle^{\text{mod}}. \quad (3.13)$$

Складывая (3.13) и (3.12), получаем правую часть (3.5), что и завершает доказательство теоремы. Следует отметить, что формула (3.5) будет играть центральную роль при вычислении корреляционных функций и норм бетевских волновых функций.

Зависимость скалярного произведения от некоторых из переменных (3.1) тривиальна. Действительно, из (1.3) видно, что величина

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N (C(\lambda_j^C)/d(\lambda_j^C)) \prod_{k=1}^N (B(\lambda_k^B)/d(\lambda_k^B)) | 0 \rangle \quad (3.14)$$

зависит лишь от $4N$ независимых переменных

$$r_j^C = r(\lambda_j^C), \quad r_j^B = r(\lambda_j^B), \quad \lambda_j^C, \lambda_j^B \quad (j=1, \dots, N). \quad (3.15)$$

Напомним, что $r(\lambda) = a(\lambda)/d(\lambda)$. В связи с этим в дальнейшем будет удобно ввести обозначения

$$\mathbf{B}(\lambda) = B(\lambda)/d(\lambda), \quad \mathbf{C}(\lambda) = C(\lambda)/d(\lambda). \quad (3.16)$$

Формула (3.5) для величины (3.14) переписывается так:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \prod_{j=1}^N \mathbf{C}(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^N \mathbf{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle \xrightarrow{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} \\ & \xrightarrow{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} \frac{ic(r_N^C - r_N^B)}{\lambda_N^C - \lambda_N^B} \left(\prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^B f_{Nj}^C \right) \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} \mathbf{C}(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} \mathbf{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle^{\text{mod}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь приняты обозначения

$$f_{Nj}^B \equiv f(\lambda_N, \lambda_j^B), \quad f_{Nj}^C \equiv (\lambda_N, \lambda_j^C). \quad (3.18)$$

Модификация в правой части означает замену

$$r(\lambda) \rightarrow \tilde{r}(\lambda) = r(\lambda) (f(\lambda, \lambda_N) / f(\lambda_N, \lambda)). \quad (3.19)$$

Отметим, что для конкретных физических моделей (НШ, ХХХ) комплексные переменные r_j (3.15) являются значением гладкой функции $r(\lambda)$ в разных точках. В этом случае вычет в формуле (3.17) обращается в нуль (соответствующий предел конечен). В пределе $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B \rightarrow \lambda_N$ (все остальные λ_j^C и λ_k^B различны) скалярное произведение зависит от следующих переменных:

$$\lambda_j^C, \lambda_j^B, r_j^C, r_j^B \quad (j=1, \dots, N-1); \lambda_N, r_N, z_N; \quad (3.20)$$

$$z_N \equiv i \partial \ln r(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_N}.$$

Зависимость от переменной z_N линейна, а коэффициент при z_N определяется вычетом (3.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_N} \langle 0 | \left(\prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j^C) \right) C(\lambda_N) B(\lambda_N) \left(\prod_{j=1}^{N-1} B(\lambda_j^B) \right) | 0 \rangle = \\ = c r_N \left(\prod_{k=1}^{N-1} f_{Nk}^B f_{Nk}^C \right) \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} B(\lambda_k^B) | 0 \rangle^{\text{mod}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение в пределе $\lambda_j^C \rightarrow \lambda_j^B \rightarrow \lambda_j$ ($j=1, \dots, N$), причем все λ_j различны. В этом случае скалярное произведение зависит от $3N$ независимых переменных λ_j, r_j, z_j . Здесь

$$r_j = r(\lambda_j); \quad z_j = i \partial \ln r(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_j}. \quad (3.22)$$

Отметим, что все $3N$ переменных являются независимыми. Скалярное произведение является линейной функцией каждого из z_j . Коэффициент при z_N равен (см. (3.21))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_N} \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j) \prod_{j=1}^{N-1} B(\lambda_j) | 0 \rangle = \\ = c r_N \left(\prod_{k=1}^{N-1} f_{Nk} f_{kN} \right) \langle 0 | \prod_{j=1}^{N-1} C(\lambda_j) \prod_{j=1}^{N-1} B(\lambda_j) | 0 \rangle^{\text{mod}}, \quad f_{ij} \equiv f(\lambda_i, \lambda_j). \end{aligned} \quad (3.23)$$

В этом случае модификация в правой части означает

$$\tilde{r}_j = \tilde{r}(\lambda_j) = r(\lambda_j) (f_{jN} / f_{Nj}), \quad \tilde{z}_j = z_j + K_{jN} \quad (j=1, \dots, N-1), \quad (3.24)$$

$$K_{jN} \equiv K(\lambda_j, \lambda_N) = i \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln \left(\frac{f_{jN}}{f_{Nj}} \right) = \frac{2c}{c^2 + (\lambda_j - \lambda_N)^2}. \quad (3.25)$$

Формула для модификации z получается из (3.19), (3.22). Коэффициенты перед оставшимися z_j легко восстанавливаются из симметрии (в данном случае скалярное произведение инвариантно относительно перестановки троек $(z_j, \lambda_j, r_j) \leftrightarrow (z_k, \lambda_k, r_k)$).

Обсудим теперь случай, когда некоторые из λ_j^C совпадают с некоторыми из λ_j^B , однако в наборе $\{\lambda_j^C\}$ нет совпадающих (так же как и в наборе $\{\lambda_j^B\}$). В этом случае скалярное произведение зависит от r_j и z_j , соответствующих совпадающим λ_j , и от r_j^B и r_j^C , соответствующих остальным λ_j . Формула (3.21) по-прежнему выполняется в этом случае.

Наконец, рассмотрим скалярное произведение в случае, когда $\lambda_j^C = \lambda_j^B = \lambda_j$ ($j=1, \dots, N$), причем все λ_j различны и удовлетворяют системе уравнений Бете (VI.1.31). В этом случае если имеют место инволюции (VI.7.9), то скалярное произведение (3.14) сводится к квадрату нормы собственной функции следа матрицы монодромии (и гамильтониана). Теперь скалярное произведение зависит лишь от $2N$ переменных λ_j и z_j . Дело в том, что r_j можно выразить через λ_j с помощью уравнений Бете:

$$r_j = \prod_{k \neq j}^N (f(\lambda_k, \lambda_j) / f(\lambda_j, \lambda_k)). \quad (3.26)$$

Скалярное произведение по-прежнему является линейной функцией каждого из z_j . Справедлива и формула (3.23); в этом случае модифицируется только z_j (3.24). В правой части (3.23) тоже стоит квадрат нормы, т.е. спектральные параметры λ_j ($j=1, \dots, N-1$) удовлетворяют модифицированной системе уравнений Бете:

$$\tilde{r}_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N-1} \frac{f(\lambda_j, \lambda_k)}{f(\lambda_k, \lambda_j)} = 1, \quad \tilde{r}_j = r_j \frac{f(\lambda_j, \lambda_N)}{f(\lambda_N, \lambda_j)} \quad (j=1, 2, \dots, N-1). \quad (3.27)$$

Следует отметить, что квадрат нормы собственной функции инвариантен относительно перестановки пар $(z_j, \lambda_j) \leftrightarrow (z_k, \lambda_k)$. В следующей главе с помощью этих формул удастся вычислить норму собственной функции. Следует отметить, что матрица монодромии, сплетающаяся R -матрицей XXZ модели, обладает совершенно аналогичными свойствами. Все соответствующие теоремы доказаны в работе [8.3].

Г л а в а IX

НОРМЫ БЕТЕВСКИХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе вычисляются нормы бетевских волновых функций — собственных функций трансформатрицы и гамильтониана. Это важнейший шаг на пути вычисления корреляционных функций. Нормы рассматриваются как функционалы от функции $\ln r(\lambda)$ (см. (VIII.3.15)). Они являются функционалами весьма специального вида, зависящими только от значений функций $\partial \ln r(\lambda) / \partial \lambda$ в конечном числе точек. Подчеркнем, что идея вычисления норм по существу та же, что и идея вычисления корреляторов в гл. XI. В последнем случае, однако, гораздо больше громоздких технических подробностей.

Вопрос о нормах бетевских волновых функций был впервые рассмотрен для модели НШ. В 1972 г. М. Годен, рассматривая эту модель в рамках координатного анзатца Бете, высказал гипотезу о том, что квадрат нормы волновой функции равен некоторому якобиану. В наших обозначениях эта гипотеза записывается так:

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N B^+(\lambda_j) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle = c^N \left(\prod_{j \neq k} f(\lambda_j, \lambda_k) \right) \det_N(\varphi').$$

Матрица φ' размерности $N \times N$ — это матрица, матричные элементы которой являются вторыми производными от действия Янга (0.5) на решении системы уравнений Бете; ее явный вид приведен в формуле (I.2.16). Напомним, что при $c > 0$ она является положительной и $\det_N(\varphi') > 0$. Система уравнений Бете невырождена, все ее решения вещественны для модели НШ и $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$. Скалярное произведение собственных волновых функций, соответствующих разным наборам решений системы Бете, равно нулю в силу их ортогональности (см. § VI.2).

Содержание главы следующее. В § 1 формулируется обобщенная гипотеза Годена о том, что квадрат нормы собственной функции равен некоторому якобиану. В § 2 исследуются свойства этого якобиана, выявлены свойства норм, которыми они должны обладать, чтобы выполнялась гипотеза. В § 3 доказана гипотеза Годена. В § 4 рассматриваются приложения общей формулы к конкретным моделям, вычислен термодинамический предел якобиана.

§ 1. Обобщенная гипотеза Годена

Чтобы доказать гипотезу Годена, сформулируем ее для интегрируемой модели с произвольными функциями $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ (см. § VI.6). Бетевские собственные векторы трансформатрицы в такой модели имеют вид (см. § VI.1):

$$|\psi_N(\{\lambda\})\rangle = |\psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle = \prod_{j=1}^N \mathbf{B}(\lambda_j) |0\rangle, \quad (1.1)$$

$$\langle \psi_N(\{\lambda\}) | = \langle 0 | \prod_{j=1}^N \mathbf{C}(\lambda_j). \quad (1.2)$$

Мы используем нормировку (VIII.3.16) операторов рождения и уничтожения: $\mathbf{B}(\lambda) = B(\lambda)/d(\lambda)$, $\mathbf{C}(\lambda) = C(\lambda)/d(\lambda)$. Набор $\{\lambda\}$ в (1.1), (1.2) должен удовлетворять системе уравнений Бете

$$r(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f(\lambda_j, \lambda_k)/f(\lambda_k, \lambda_j)) = 1 \quad (j=1, \dots, N), \quad (1.3)$$

произвольная функция $r(\lambda)$ задается отношением вакуумных собственных значений: $r(\lambda) = a(\lambda)/d(\lambda)$.

Обобщенную гипотезу Годена запишем в следующей форме:

$$\langle \Psi_N(\{\lambda\}) | \Psi_N(\{\lambda\}) \rangle = c^N \left(\prod_{j \neq k}^N f(\lambda_j, \lambda_k) \right) \det_N(\Phi'), \quad (1.4)$$

где Φ' — матрица $N \times N$:

$$\Phi'_{jk} = \partial \Phi_j / \partial \lambda_k = \delta_{jk} (z_k + \sum_{l=1}^N K(\lambda_k, \lambda_l)) - K(\lambda_j, \lambda_k). \quad (1.5)$$

Здесь $z_k = i \partial \ln r(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_k}$ (VIII.3.22); функция $K(\lambda, \mu)$ определена в (VIII.3.25). Используя представление (I.2.16) легко доказать, что матрица Φ' является положительной, если все z_j положительны и $c > 0$:

$$\Phi' > 0, \quad \det_N(\Phi') > 0 \quad \text{при} \quad z_j > 0. \quad (1.6)$$

В частном случае модели НШ имеет место инволюция $B(\lambda) = C^+(\lambda^*)$, вакуумные значения даются формулой $a(\lambda) = d^*(\lambda^*) = \exp\{-i\lambda L/2\}$, а все λ_j вещественны. При этом левая часть формулы (1.4) действительно есть норма волновой функции.

Отметим, что в модели НШ из системы Бете (1.3) следует $\prod_{j=1}^N d^2(\lambda_j) = 1$ (для $\lambda_j = \lambda_j^*$). Поэтому обобщенная формула (1.4) действительно сводится к гипотезе Годена, сформулированной в начале главы. В общем случае также будем часто называть левую часть выражения (1.4) «квадратом нормы волновой функции».

Вернемся теперь к обобщенной модели. Напомним, что благодаря произвольности функции $r(\lambda)$ мы можем рассматривать λ_j как свободные переменные, несмотря на то, что выполнена система Бете (1.5) (см. обсуждение в § VI.7). Величины z_j являются независимыми переменными (это также следствие произвольности функции $r(\lambda)$). Таким образом, якобиан в правой части является функцией $2N$ независимых переменных λ_j и z_j . Отметим, что индекс N у якобиана означает размерность матрицы. Для $N=0$ мы полагаем

$$\det_0(\Phi') \equiv 1. \quad (1.7)$$

§ 2. Свойства якобиана

Введем следующее обозначение:

$$\|\lambda_1 \dots \lambda_N\|_N = \|\{\lambda\}_N\|_N = c^{-N} \left(\prod_{j \neq k}^N f(\lambda_j, \lambda_k) \right)^{-1} \langle \Psi_N(\{\lambda\}) | \Psi_N(\{\lambda\}) \rangle. \quad (2.1)$$

Здесь бетевские векторы $|\Psi_N\rangle$ и $\langle\Psi_N|$ даются формулами (1.1), (1.2). Гипотеза (1.4) в новых обозначениях запишется так:

$$\|\lambda_1 \dots \lambda_N\|_N = \det_N(\Phi'). \quad (2.2)$$

Рассмотрим теперь следующие пять характерных свойств определителя $\det_N(\Phi')$:

(1) Якобиан не изменяется при перестановке пар

$$(z_j, \lambda_j) \leftrightarrow (z_k, \lambda_k) \quad (j, k = 1, \dots, N). \quad (2.3)$$

(2) Якобиан является линейной функцией каждого из z_j .

(3) Соответствующий коэффициент при z_N равен:

$$\frac{\partial}{\partial z_N} \det_N(\varphi') = \det_{N-1}(\varphi'_{\text{mod}}); \quad (2.4)$$

здесь $(\varphi'_{\text{mod}})_{jk} = \partial \tilde{\varphi}_j / \partial \lambda_k$:

$$(\varphi'_{\text{mod}})_{jk} = \delta_{jk} \left(\tilde{z}_k + \sum_{l=1}^{N-1} K_{kl} \right) - K_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, N-1), \quad (2.5)$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j &= i \ln \tilde{r}(\lambda_j) + i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N-1} \ln(f(\lambda_j, \lambda_k) / f(\lambda_k, \lambda_j)), \\ \tilde{r}(\lambda) &= r(\lambda) (f(\lambda, \lambda_N) / f(\lambda_N, \lambda)), \quad \tilde{z}_k = z_k + K_{kN}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(4) Если все $z_j = 0$ ($j = 1, \dots, N$), то якобиан равен нулю при $N > 0$:

$$\det_N(\varphi')|_{z_j=0, j=1, \dots, N} = \delta_{0,N}. \quad (2.7)$$

Действительно, матрица

$$\delta_{jk} \left(\sum_{l=1}^N K_{kl} \right) - K_{jk} \quad (2.8)$$

имеет собственный вектор с нулевым собственным значением. Это вектор, у которого все компоненты равны 1.

(5) Для $N=1$ якобиан легко вычислить:

$$\det_1(\varphi') = z_1. \quad (2.9)$$

На этом заканчивается список свойств. Доказательство того, что $\|\lambda_1 \dots \lambda_N\|_N$ обладает такими же свойствами, эквивалентно доказательству гипотезы.

Т е о р е м а 1. Чтобы доказать равенство (2.2), достаточно доказать, что $\|\lambda_1 \dots \lambda_N\|_N$ обладает следующими пятью свойствами:

(1) инвариантность относительно перестановки пар

$$(\lambda_j, z_j) \leftrightarrow (\lambda_k, z_k); \quad (2.10)$$

(2) линейность по каждому из z_k ;

(3) соответствующий коэффициент при z_N равен

$$(\partial / \partial z_N) \|\lambda_1 \dots \lambda_N\|_N = \|\lambda_1 \dots \lambda_{N-1}\|_{N-1}^{\text{mod}}, \quad (2.11)$$

здесь модификация означает замену $z \rightarrow \tilde{z}$ (2.6);

(4) при фиксированном λ_j

$$\|\lambda_1 \dots \lambda_N\|_N = \delta_{0,N} \quad \text{при} \quad z_j = 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad (2.12)$$

$$(5) \|\lambda_0\|_0 \equiv 1, \quad \|\lambda_1\|_1 = z_1. \quad (2.13)$$

Доказательство будем проводить индукцией по N . База индукции выполнена (см. свойства (2.13), (1.7), (2.9)). Шаг индукции строится следующим образом. Предположим, что формула (2.2) верна для $N=1, 2, \dots, q-1$. Докажем, что тогда она верна при $N=q$. Рассмотрим разность

$$\Delta_q = \|\lambda_1 \dots \lambda_q\|_q - \det_q(\varphi'). \quad (2.14)$$

Это линейная функция z_q . Соответствующая производная равна

$$\partial \Delta_q / \partial z_q = \|\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}\|_{q-1}^{\text{mod}} - \det_{q-1}(\varphi'_{\text{mod}}); \quad (2.15)$$

правая часть равна нулю согласно индукционному предположению. Таким образом, Δ_q не зависит от z_q ; благодаря симметрии (свойство (2)), Δ_q не зависит ни от одного из z_j ($j=1, \dots, q$). Однако согласно свойству (4)

$$\Delta_q = 0 \quad \text{при} \quad z_j = 0. \quad (2.16)$$

Это означает, что Δ_q равно нулю тождественно при любых z_j , что и завершает построение шага индукции. Доказательство теоремы закончено.

Таким образом, для того чтобы доказать гипотезу (2.2), (1.4), достаточно доказать, что величина $\|\lambda_1, \dots, \lambda_N\|_N$ обладает пятью перечисленными выше свойствами.

§ 3. Доказательство гипотезы Годена

В этом параграфе мы докажем, что величина $\|\lambda_1, \dots, \lambda_N\|_N$ действительно обладает необходимыми свойствами и завершим доказательство расширенной гипотезы Годена. Равенство $\|\lambda\|_0 = 1$ эквивалентно формуле $\langle 0|0 \rangle = 1$ (2.13). Устремляя в формуле (VIII.1.2) $\lambda^C \rightarrow \lambda^B$, получим $\|\lambda_1\|_1 = z_1$. Это завершает доказательство свойства (5). Так как $[C(\lambda), C(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0$ (см. (VI.1.11)), то симметрия (свойство (1)) очевидна. В конце § VIII.3 исследовались свойства квадрата нормы $\langle \psi_N | \psi_N \rangle = \langle 0 | \prod_j C(\lambda_j) \prod_k B(\lambda_k) | 0 \rangle$, который отличается от $\|\lambda_1, \dots, \lambda_N\|_N$ тривиальным множителем. Там было доказано свойство (2); свойство (3) получается из (VIII.3.23) элементарным вычислением.

Докажем свойство (4). Оно эквивалентно следующему утверждению:

$$\langle \psi_N(\{\lambda_j\}) | \psi_N(\{\lambda_j\}) \rangle = 0 \quad \text{при} \quad z_j = 0, \quad j=1, \dots, N, \quad (3.1)$$

где $N > 0$, λ_j — фиксированы и удовлетворяют системе уравнений Бете. Рассмотрим набор $\{\lambda_j\}$, состоящий из различных чисел λ_j . Введем величину s :

$$s = \min_{j \neq k} (|\lambda_j - \lambda_k|/4). \quad (3.2)$$

Производные функции $r(\lambda)$ равны нулю в точках λ_j , значение этой функции в точках λ_j равно r_j . Определим новую функцию $r^{(n)}(\lambda)$,

которая равна r_j не только в точке λ_j , но и в ее окрестности радиуса s . В остальной части комплексной плоскости она доопределена некоторым гладким образом. Отметим, что квадраты норм $\langle \psi_N(\{\lambda\}) | \psi_N(\{\lambda\}) \rangle$ одинаковы для обеих функций $r(\lambda)$ и $r^{(n)}(\lambda)$. Действительно, они зависят лишь от $2N$ переменных λ_j и z_j (см. § VIII.3), которые совпадают в обоих случаях. Следует отметить, что импульсы λ_j являются решением уравнений Бете и для новой функции $r^{(n)}(\lambda)$:

$$r^{(n)}(\lambda_j) \prod_{k \neq j} (f(\lambda_j, \lambda_k) / f(\lambda_k, \lambda_j)) = 1. \quad (3.3)$$

По определению, $r^{(n)}(\lambda_j) = r(\lambda_j) = r_j$. Отметим также, что для функции $r^{(n)}(\lambda)$ не только λ_j ($j=1, \dots, N$) являются решением уравнений Бете, но и $\lambda_j + y$ (здесь y произвольное комплексное число, $|y| < s$). Действительно, функция $f(\lambda_j, \lambda_k)$ зависит лишь от разности $\lambda_j - \lambda_k$, а функция $r^{(n)}(\lambda)$ не меняется при сдвиге на y . Докажем теперь, что скалярное произведение

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k + y) | 0 \rangle = S(y) \quad (3.4)$$

равно нулю. С этой целью вычислим матричный элемент

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \tau(\mu) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k + y) | 0 \rangle. \quad (3.5)$$

Здесь $\tau(\mu) = A(\mu) + D(\mu)$ — след матрицы монодромии (см. § V.1, § VI.1). Этот элемент можно вычислить двумя способами, действуя оператором $\tau(\mu)$ налево или направо. Обе обкладки являются собственными функциями $\tau(\mu)$, однако собственные значения различаются:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \tau(\mu) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k + y) | 0 \rangle = \\ = \theta(\mu, \{\lambda_j\}) S(y) = \theta(\mu, \{\lambda_j + y\}) S(y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь $\theta(\mu)$ — собственное значение $\tau(\mu)$ (см. § VI, формулу (1.35)); так как $\theta(\mu, \{\lambda_j\}) \neq \theta(\mu, \{\lambda_j + y\})$, то $S(y) = 0$. Таким образом, завершено доказательство свойства (4).

Итак, мы доказали, что величина $\|\lambda_1 \dots \lambda_N\|_N$ обладает всеми необходимыми свойствами, упомянутыми в теореме § 2. Отсюда следует, что справедливы формулы (2.2) и (1.4). Обобщенная гипотеза Годена доказана.

Следует отметить, что формула для норм в XXZ случае доказывается точно так же; доказательство приведено в работе [8.3]. На случай R -матрицы XXZ модели формула (1.4) обобщается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \psi_N(\{\lambda\}) | \psi_N(\{\lambda\}) \rangle = (\sin 2\eta)^N \left(\prod_{j \neq k}^N f(\lambda_j, \lambda_k) \right) \det_N(\varphi'), \\ |\psi_N(\{\lambda\}) \rangle = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle, \quad \langle \psi_N(\{\lambda\}) | = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$r(\lambda_j) \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^N (f(\lambda_j, \lambda_k)/f(\lambda_k, \lambda_j)) = 1,$$

$$f(\lambda, \mu) = \text{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta)/\text{sh}(\lambda - \mu).$$

Здесь $\phi'_{jk} = \partial \phi_j / \partial \lambda_k$, определение ϕ'_j дано в (VI.1.34).

Подчеркнем, что формулы (1.2) и (3.7) справедливы для любых моделей с R -матрицами XXX или XXZ типа соответственно. Например, для самой XXX модели магнетика Гейзенберга, используя инволюцию $B^+(\lambda^*) = -C(\lambda)$ (см. формулу (V.5.11)) и явный вид функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ (см. VI.3.11), (VI.3.12)), можно получить из (1.4) формулу для нормы бетевской волновой функции. Аналогичным образом из формулы (3.7) можно получить и явное выражение для нормы волновой функции в XXZ магнетике. В модели синус-Гордон при рациональном значении константы связи γ/π псевдовакуум является нормируемым, т. е. можно положить $\langle 0|0 \rangle = 1$ (см. § VI.3, приложение к гл. VI и § VII.5). В этом случае тоже можно получить явную формулу для нормы.

§ 4. Термодинамический предел

Здесь мы обсудим норму волновой функции в термодинамическом пределе (см. § I.3), представляющую наибольший интерес с физической точки зрения. Все выкладки будут проделаны в модели НШ. Норма волновой функции дается в этой модели формулой, получающейся из общей формулы (1.4):

$$\langle \psi_N(\{\lambda\}) | \psi_N(\{\lambda\}) \rangle = c^N \left(\prod_{j \neq k} f(\lambda_j, \lambda_k) \right) \det_N(\phi'). \quad (4.1)$$

Матрица ϕ' в модели НШ есть

$$\phi'_{jl} = \delta_{jl} \left[L + \sum_{m=1}^N K(\lambda_j, \lambda_m) \right] - K(\lambda_j, \lambda_l). \quad (4.2)$$

Обсудим поведение якобиана $\det_N(\phi')$ в термодинамическом пределе. Для этого запишем $N \times N$ -матрицу ϕ' в виде произведения двух матриц:

$$\phi' = \hat{G} \Theta, \quad \det_N(\phi') = \det \Theta \det \hat{G}. \quad (4.3)$$

Здесь Θ — диагональная матрица:

$$\Theta_{jl} = \delta_{jl} \vartheta_l, \quad \vartheta_l = L + \sum_{m=1}^N K_{lm}, \quad (4.4)$$

а матрица $\hat{G}$ равна

$$\hat{G}_{jl} = \delta_{jl} - K_{jl}/\vartheta_l, \quad K_{jl} = K(\lambda_j, \lambda_l). \quad (4.5)$$

Термодинамический предел (см. § I.3) величины ϑ_l легко вычислить

$$\vartheta_l = 2\pi L \rho(\lambda_l). \quad (4.6)$$

Здесь мы заменим сумму на интеграл, как в (I.3.6) и воспользовавшись уравнением (I.3.7). Таким образом, асимптотическое выражение для $\det \Theta$ имеет вид

$$\det \Theta = \prod_{j=1}^N (2\pi L \rho(\lambda_j)). \quad (4.7)$$

Матрица $\hat{G}$ в термодинамическом пределе превращается в интегральный оператор

$$\hat{G} \rightarrow 1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K}; \quad (\hat{K}\varphi)(\lambda) = \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \varphi(\mu) d\mu. \quad (4.8)$$

Таким образом, термодинамический предел якобиана равен:

$$\lim [\det_N(\varphi') / \prod_{j=1}^N (2\pi L \rho(\lambda_j))] = \det \left(1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K} \right). \quad (4.9)$$

В правой части стоит определитель интегрального оператора. При вычислении корреляционных функций мы будем пользоваться асимптотическим выражением

$$\det_N(\varphi') = \det \left(1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K} \right) \prod_{j=1}^N (2\pi L \rho(\lambda_j)). \quad (4.10)$$

Для возбужденных состояний плотность $\rho(\lambda)$ немного меняется, однако формула (4.10) сохраняется, если под $\rho(\lambda)$ понимать новое значение плотности вакансий.

Г л а в а X

ФОРМФАКТОРЫ

В настоящей главе начинается вычисление корреляционных функций, которое будет завершено в следующей главе. Рассматриваются корреляторы в модели НШ. Основное внимание сосредоточено на простейшем корреляторе — корреляторе токов. В § 1 задача формулируется в рамках алгебраического анзаца Бете. Вводится обобщенная двухузельная модель, которая содержит две произвольных функции $l(\lambda)$ и $m(\lambda)$. Коррелятор токов связан с оператором числа частиц в первом узле Q_1 . В § 2 описаны свойства матричных элементов оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ (здесь α — произвольная постоянная). В § 3 дано определение формфактора оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ и получено для него представление, аналогичное представлению (VIII.1.3), (VIII.2.10) для скалярных произведений. В § 4 исследуются формфакторы операторов Q_1 и Q_1^2 . Формфакторы рассматриваются как функционалы произвольных функций $l(\lambda)$ и $m(\lambda)$. Это функционалы весьма специального вида, зависящие от значений функций $l(\lambda)$ и $m(\lambda)$ в конечном числе точек λ_j .

§ 1. Обобщенная двухузельная модель

Рассмотрим в модели НШ оператор тока $j(x) = \psi^+(x)\psi(x)$. Поставим задачей вычислить одновременной коррелятор токов

$$\langle j(x_1)j(x_2) \rangle = \langle \Omega | j(x_1)j(x_2) | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle. \quad (1.1)$$

Здесь $|\Omega\rangle$ — основное состояние гамильтониана модели НШ, описанное в § 1.3. Коррелятор (1.1) является функцией от модуля разности $|x_1 - x_2|$ (см. введение к части III). Поэтому положим в дальнейшем $x_1 = 0$, $x_2 = x > 0$. Напомним (см. введение), что через оператор $Q_1(x)$ числа частиц на отрезке $[0, x]$

$$Q_1(x) = \int_0^x j(x') dx' \quad (1.2)$$

коррелятор токов выражается следующим образом:

$$\langle : j(x)j(0) : \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle Q_1^2(x) \rangle. \quad (1.3)$$

Переход к нормальному упорядочению выражается формулой:

$$\langle : j(x)j(0) : \rangle = \langle j(x)j(0) \rangle - \delta(x) \langle j(0) \rangle. \quad (1.4)$$

При $x > 0$

$$\langle j(x)j(0) \rangle = \langle : j(x)j(0) : \rangle.$$

Схема вычисления среднего значения оператора Q_1^2 , которая проводится в этой и следующей главах, такова. Мы исследуем общий матричный элемент

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N \mathbf{C}(\lambda_j^C) Q_1^2 \prod_{k=1}^N \mathbf{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle \quad (1.5)$$

при конечном N . Сначала рассмотрим случай, когда наборы $\{\lambda^C\}$ и $\{\lambda^B\}$ не совпадают, а спектральные параметры λ_j^C , λ_k^B ($j, k = 1, \dots, N$) представляют $2N$ независимых комплексных переменных. Затем положим $\{\lambda^C\} = \{\lambda^B\} = \{\lambda\}$ и набор $\{\lambda\}$ устремим к решению системы уравнений Бете. Наконец, перейдем к термодинамическому пределу ($N \rightarrow \infty$). Таким образом, получим окончательный ответ. Отметим также, что удобно рассматривать вначале матричные элементы производящего оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ (α — произвольное комплексное число).

Так же как и при вычислении норм, удобно рассмотреть не конкретную модель НШ, а сразу целый класс моделей, характеризующихся произвольной функцией. Введем для этого обобщенную двухузельную модель и определим в ней матричный элемент (1.5). Модель НШ будет частным случаем обобщенной модели, при специальном значении функционального параметра. Матрица монодромии такой обобщенной модели задается как матричное

произведение двух матриц монодромии (произведение «коммутирующих» матриц монодромии; см. § VI.5):

$$T(\lambda) = T(2|\lambda) T(1|\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$T(i|\lambda) = \begin{pmatrix} A_i(\lambda) & B_i(\lambda) \\ C_i(\lambda) & D_i(\lambda) \end{pmatrix} \quad (i=1, 2). \quad (1.7)$$

Матрица $T(1|\lambda)$ ассоциирована с первым узлом, $T(2|\lambda)$ — со вторым узлом двухузельной решетки. Матричные элементы матриц $T(i|\lambda)$ являются квантовыми операторами, которые коммутируют в различных узлах решетки. Матрицы $T(i|\lambda)$ и $T(i|\mu)$ в одном узле сплетаются R -матрицей XXX модели (см. (VI.1.2) — (VI.1.4)). Матрица монодромии $T(i|\lambda)$ имеет псевдовакуум $|0\rangle_i$ и дуальный псевдовакуум ${}_i\langle 0|$ со стандартными свойствами:

$$C_i(\lambda)|0\rangle_i = 0, \quad A_i(\lambda)|0\rangle_i = a_i(\lambda)|0\rangle_i, \quad D_i(\lambda)|0\rangle_i = d_i(\lambda)|0\rangle_i, \quad (1.8)$$

$${}_i\langle 0|B_i(\lambda) = 0, \quad {}_i\langle 0|A_i(\lambda) = a_i(\lambda){}_i\langle 0|, \quad {}_i\langle 0|D_i(\lambda) = d_i(\lambda){}_i\langle 0|. \quad (1.9)$$

Состояние $|0\rangle = |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_1$ является вакуумом для $T(\lambda)$, причем (см. § VI.1)

$$a(\lambda) = a_1(\lambda)a_2(\lambda), \quad d(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda). \quad (1.10)$$

Удобно использовать следующие обозначения:

$$l(\lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \quad m(\lambda) = \frac{a_2(\lambda)}{d_2(\lambda)}, \quad r(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} = l(\lambda)m(\lambda). \quad (1.11)$$

Функция $l(\lambda)$ будет основным функциональным параметром двухузельной модели. Оператор числа частиц в i -м узле определим стандартным соотношением (VI.7.6):

$$Q_i \prod_{k=1}^n \mathbf{B}_j(\lambda_k) |0\rangle_j = n \delta_{ij} \prod_{k=1}^n \mathbf{B}_j(\lambda_k) |0\rangle_j \quad (i, j=1, 2), \quad (1.12)$$

$${}_j\langle 0| \prod_{k=1}^n \mathbf{C}_j(\lambda_k) Q_i = n \delta_{ij} {}_j\langle 0| \prod_{k=1}^n \mathbf{C}_j(\lambda_k) \quad (i, j=1, 2).$$

Здесь $\{\lambda_k\}$ — независимые параметры. Полный заряд равен $Q = Q_1 + Q_2$. Аналогично определяется любая функция от Q_i . В формулах (1.11), (1.12) было использовано обозначение

$$\mathbf{C}_i(\lambda) = C_i(\lambda)/d_i(\lambda), \quad \mathbf{B}_i(\lambda) = B_i(\lambda)/d_i(\lambda). \quad (1.13)$$

С помощью формул (VI.5.9) и (VI.5.13) для матричного элемента оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle 0| \prod_{j=1}^N \mathbf{C}(\lambda_j^C) \exp\{\alpha Q_1\} \prod_{k=1}^N \mathbf{B}(\lambda_k^B) |0\rangle = \\ = \sum_{\{\lambda^B\} = \{\lambda_I^B\} \cup \{\lambda_{II}^B\}} \sum_{\{\lambda^C\} = \{\lambda_I^C\} \cup \{\lambda_{II}^C\}} \exp\{\alpha n_1\} \left\{ \prod_I m(\lambda_I^B) \right\} \left\{ \prod_{II} l(\lambda_{II}^C) \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \prod_I \prod_{II} f(\lambda_I^B, \lambda_{II}^B) \right\} \left\{ \prod_I \prod_{II} f(\lambda_{II}^C, \lambda_I^C) \right\}_1 \langle 0 | \prod_I C(\lambda_I^C) \prod_I B(\lambda_I^B) | 0 \rangle_1 \times \\ \times {}_2 \langle 0 | \prod_{II} C(\lambda_{II}^C) \prod_{II} B(\lambda_{II}^B) | 0 \rangle_2. \quad (1.14)$$

Здесь спектральные параметры λ_j^C , λ_j^B все являются свободными переменными. Суммирование ведется по разбиениям набора $\{\lambda_j^B\}$, $j=1, \dots, N$, на два непересекающихся набора $\{\lambda_I^B\}$ и $\{\lambda_{II}^B\}$ и по аналогичным разбиениям набора $\{\lambda_j^C\}$. Эти разбиения являются независимыми, за исключением следующего ограничения на число элементов:

$$\text{card}\{\lambda_I^B\} = \text{card}\{\lambda_I^C\} \equiv n_1, \quad \text{card}\{\lambda_{II}^B\} = \text{card}\{\lambda_{II}^C\} \equiv n_2 = N - n_1. \quad (1.15)$$

Произведение $\prod_I$ означает произведение по всем $\lambda \in \{\lambda_I\}$, оно содержит n_1 сомножителей. Аналогично, произведение $\prod_{II}$ означает произведение по всем $\lambda \in \{\lambda_{II}\}$. Таким образом, мы определили матричный элемент (1.5) и обобщенной модели. Среднее от оператора Q_1^2 получается дифференцированием по α величины (1.14). Напомним еще раз, что функции $l(\lambda)$ и $m(\lambda)$ являются произвольными. Среднее значение (1.14) зависит только от значений этих функций в точках λ_j^C и λ_j^B . Эти значения (так же как и в случае скалярных произведений § VIII.1 можно рассматривать как $4N$ независимых переменных

$$l_j^C = l(\lambda_j^C), \quad l_j^B = l(\lambda_j^B), \quad m_j^C = m(\lambda_j^C), \quad m_j^B = m(\lambda_j^B). \quad (1.16)$$

Обсудим подробнее связь двухузельной модели с моделью НШ. В модели НШ $T(1|\lambda)$ — это матрица монодромии на отрезке $[0, x]$, $T(2|\lambda)$ — матрица монодромии на отрезке $[x, L]$. Таким образом,

$$l_{\text{НШ}}(\lambda) = \exp\{-i\lambda x\}, \quad m_{\text{НШ}}(\lambda) = \exp\{i\lambda(x-L)\}, \\ r_{\text{НШ}}(\lambda) = \exp\{-i\lambda L\}. \quad (1.17)$$

При этом отождествлении оператор Q_1 в обобщенной модели превращается в оператор Q_1 модели НШ (1.2).

Таким образом, проблему вычисления коррелятора тока мы свели к вычислению среднего значения оператора Q_1^2 — задаче, которая естественно решается в рамках обобщенной двухузельной модели. В свою очередь, матричный элемент оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ посредством формулы (1.14) выражается через скалярные произведения, изученные в гл. VIII.

§ 2. Свойства оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$

Итак, матричный элемент оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ является функцией $6N$ независимых комплексных переменных:

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \exp\{\alpha Q_1\} \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \\ = \mathbf{M}_N^{\alpha}(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{l_j^C\}, \{l_j^B\}, \{m_j^C\}, \{m_j^B\}). \quad (2.1)$$

Благодаря свойству $[\mathbf{B}(\lambda), \mathbf{B}(\mu)] = [\mathbf{C}(\lambda), \mathbf{C}(\mu)] = 0$ этот матричный элемент инвариантен относительно перестановки троек $(\lambda_j^C, l_j^C, m_j^C) \leftrightarrow (\lambda_k^C, l_k^C, m_k^C)$ и по отношению к перестановке троек $(\lambda_j^B, l_j^B, m_j^B) \leftrightarrow (\lambda_k^B, l_k^B, m_k^B)$. Основное его свойство состоит в том, что при $\lambda_j^C = \lambda_k^B$ ($j, k = 1, \dots, N$) он имеет полюс первого порядка, причем вычет сводится к $\mathbf{M}_{N-1}^\alpha$. Благодаря симметрии достаточно рассмотреть случай $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B \rightarrow \lambda_N$.

Л е м м а 1. Матричный элемент $\mathbf{M}_N^\alpha$ при совпадении $\lambda_N^C = \lambda_N^B = \lambda_N$ имеет полюс первого порядка, причем вычет сводится к

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_N^\alpha \Big|_{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} = & ic(\lambda_N^C - \lambda_N^B)^{-1} m_N^B (l_N^C - l_N^B) \exp\{\alpha\} \times \\ & \times \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^C f_{Nj}^B \right\} \mathbf{M}_{N-1}^\alpha(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{\tilde{l}_j^C\}, \{\tilde{l}_j^B\}, \{m_j^C\}, \{m_j^B\}) + \\ & + ic(\lambda_N^C - \lambda_N^B)^{-1} l_N^C (m_N^C - m_N^B) \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^C f_{Nj}^B \right\} \times \\ & \times \mathbf{M}_{N-1}^\alpha(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{l_j^C\}, \{l_j^B\}, \{\tilde{m}_j^C\}, \{\tilde{m}_j^B\}). \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь $j = 1, \dots, N-1$,

$$f_{Nj}^B \equiv f(\lambda_N, \lambda_j^B), \quad f_{Nj}^C \equiv f(\lambda_N, \lambda_j^C). \quad (2.3)$$

В правой части модифицированные l и m равны

$$\tilde{l}_j^C = l_j^C (f_{jN}^C / f_{Nj}^C), \quad \tilde{l}_j^B = l_j^B (f_{jN}^B / f_{Nj}^B), \quad (2.4)$$

$$\tilde{m}_j^C = m_j^C (f_{jN}^C / f_{Nj}^C), \quad \tilde{m}_j^B = m_j^B (f_{jN}^B / f_{Nj}^B). \quad (2.5)$$

Среди аргументов $\mathbf{M}_{N-1}^\alpha$ отсутствуют параметры N -й частицы λ_N, l_N, m_N .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (2.2) получается при подстановке формул (VIII.3.5) в (1.14). Эта формула является главной при исследовании матричного элемента (2.1).

Дадим теперь важное

О п р е д е л е н и е. Формфактором F_N^α оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ называется матричный элемент $\mathbf{M}_N^\alpha$ в случае, если наборы $\{\lambda^C\}$ и $\{\lambda^B\}$ являются решениями (вообще говоря, различными) уравнений Бете, т. е. матричный элемент берется по отношению к бетевским векторам состояния (IX.1.1), (IX.1.2), (IX.1.3):

$$\begin{aligned} F_N^\alpha = & \langle \psi_N(\{\lambda^C\}) | \exp\{\alpha Q_1\} | \psi_N(\{\lambda^B\}) \rangle = \\ & = \langle 0 | \prod_{j=1}^N \mathbf{C}(\lambda_j^C) \exp\{\alpha Q_1\} \prod_{k=1}^N \mathbf{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} r(\lambda_j^C) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f_{jk}^C / f_{kj}^C) = 1, \quad j = 1, \dots, N, \\ r(\lambda_j^B) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f_{jk}^B / f_{kj}^B) = 1, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.7)$$

С помощью уравнений Бете (IX.1.3) величины m_j можно выразить через остальные переменные:

$$m_j = l_j^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f_{kj}/f_{jk}), \quad j=1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Таким образом, формфактор зависит от $4N$ переменных:

$$F_N^\alpha = F_N^\alpha(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{l^C\}, \{l^B\}). \quad (2.9)$$

Он является симметричной функцией относительно перестановки пар $(\lambda_j^{B,C}, l_j^{B,C}) \leftrightarrow (\lambda_k^{B,C}, l_k^{B,C})$. При совпадении $\lambda_k^C = \lambda_j^B$ формфактор имеет полюс первого порядка. Благодаря симметрии достаточно рассмотреть случай $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B = \lambda_N$. Следствием леммы 1 является следующая формула для вычета формфактора:

$$\begin{aligned} F_N^\alpha|_{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} &= ic(\lambda_N^C - \lambda_N^B)^{-1} [l_N^C (l_N^B)^{-1} - 1] \exp\{\alpha\} \times \\ &\times \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{jN}^B f_{Nj}^C \right\} F_{N-1}^\alpha(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{\tilde{l}_j^C\}, \{\tilde{l}_j^B\}) + \\ &+ ic(\lambda_N^C - \lambda_N^B)^{-1} \left[\prod_{j=1}^{N-1} f_{jN}^C f_{Nj}^B - l_N^C (l_N^B)^{-1} \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^C f_{jN}^B \right] \times \\ &\times F_{N-1}^\alpha(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{l_j^C\}, \{l_j^B\}). \quad (2.10) \end{aligned}$$

Здесь $j=1, \dots, N-1$. Величина $\tilde{l}$ определяется формулой (2.4). В следующем параграфе это свойство будет использовано для представления формфактора в виде, аналогичном формуле (VIII.1.3) для скалярных произведений. Так как при переходе от матричного элемента $\mathbf{M}_N^\alpha$ (2.1) к формфактору (2.6) были использованы уравнения Бете, то на первый взгляд кажется, что F_N^α может иметь полюса первого порядка, когда $f(\lambda_j^C, \lambda_k^C) = 0$ или $f(\lambda_j^B, \lambda_k^B) = 0$. Докажем, что соответствующие вычеты равны нулю. Действительно, если $f(\lambda_1^B, \lambda_2^B) = 0$, то из уравнений Бете следует, что $a(\lambda_2^B) = d(\lambda_1^B) = 0$. (Матричный элемент $\mathbf{M}_N^\alpha$ сингулярен просто из-за того, что $d(\lambda_1^B)$ стоит в знаменателе. Действительно, $\mathbf{B}(\lambda) = B(\lambda)/d(\lambda)$.) Однако из (VIII.2.17) следует, что при этом $B(\lambda_1)B(\lambda_2) = 0$ и соответствующий вычет зануляется. Аналогично доказывается отсутствие полюсов при $f(\lambda_1^C, \lambda_2^C) = 0$. Из теории скалярных произведений (VIII.2.14) следует, что формфактор как функция λ может иметь особенность (простой полюс) лишь при совпадении пары λ_j из набора $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$.

§ 3. Представление формфактора оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$

В настоящем параграфе будет построено представление формфактора F_N^α , аналогичное представлению (VIII.1.3) для скалярных произведений. В § VI.5 рассмотрен оператор сдвига. С помощью результатов этого параграфа докажем лемму.

Л е м м а 1. *Формфакторы F_N^α и $F_N^{-\alpha}$ связаны следующей формулой:*

$$F_N^\alpha(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{l_j^C\}, \{l_j^B\}) = \exp\{\alpha N\} \left(\prod_{j=1}^N l(\lambda_j^C) l^{-1}(\lambda_j^B) \right) \times \\ \times F_N^{-\alpha}(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{l^{-1}(\lambda_j^C) \prod_{k \neq j} (f_{kj}^C / f_{jk}^C)\}, \{l^{-1}(\lambda_j^B) \prod_{k \neq j} (f_{kj}^B / f_{jk}^B)\}). \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя оператор сдвига (см. формулы (VI.5.12)), получим:

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \exp\{\alpha Q_1\} \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \\ = \left(\prod_{j=1}^N l(\lambda_j^C) l^{-1}(\lambda_j^B) \right) \langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(\lambda_j^C) \exp\{\alpha Q_1\} \prod_{k=1}^N \tilde{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle. \quad (3.2)$$

Учтем теперь, что $Q_1 = Q - Q_2$, где Q_2 — оператор числа частиц во втором узле решетки, Q — оператор полного числа частиц. Тогда правая часть запишется в виде

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(\lambda_j^C) \exp\{\alpha Q_1\} \prod_{k=1}^N \tilde{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \\ = \exp\{\alpha N\} \langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(\lambda_j^C) \exp\{-\alpha Q_2\} \prod_{k=1}^N \tilde{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle. \quad (3.3)$$

Напомним, что $\tilde{C}$ и $\tilde{B}$ — матричные элементы матрицы монодромии, у которой первый и второй узлы переставлены местами. Вспоминая определение формфактора, получаем:

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(\lambda_j^C) \exp\{-\alpha Q_2\} \prod_{k=1}^N \tilde{B}(\lambda_k^B) | 0 \rangle = F_N^{-\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{m^C\}, \{m^B\}). \quad (3.4)$$

Подставляя выражение m_j через l_j (2.8), завершаем доказательство леммы 1.

Выясним теперь, каким образом формфактор зависит от переменных $l_j^{C,B}$ ($l_j^C \equiv l(\lambda_j^C)$, $l_j^B \equiv l(\lambda_j^B)$).

Л е м м а 2. *Формфактор F_N^α можно представить в виде*

$$F_N^\alpha(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{l^C\}, \{l^B\}) = \\ = \sum_{pr} \left(\prod_{pr} l(\lambda_{pr}^C) \right) \left(\prod_{pr} l^{-1}(\lambda_{pr}^B) \right) R_N^\alpha(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}). \quad (3.5)$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям набора $\{\lambda^C\}_N$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda_{pr}^C\}_n$ и $\{\lambda_{ab}^C\}_{N-n}$ и по разбиениям набора $\{\lambda^B\}_N$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda_{pr}^B\}_n$ и $\{\lambda_{ab}^B\}_{N-n}$. Индекс у множества означает число элементов. Эти разбиения независимы, за исключением ограничения на число элементов:

$$\text{card}\{\lambda_{pr}^C\} = \text{card}\{\lambda_{pr}^B\} = n, \quad \text{card}\{\lambda_{ab}^C\} = \text{card}\{\lambda_{ab}^B\} = N - n.$$

Произведение $\prod_{pr} l(\lambda_{pr}^C)$ означает произведение n множителей $l(\lambda_j^C)$,

$\lambda_j^C \in \{\lambda_{pr}^C\}$. Произведение $\prod_{pr} l^{-1}(\lambda_{pr}^B)$ означает произведение n множителей $l^{-1}(\lambda_j^B)$, $\lambda_j^B \in \{\lambda_{pr}^B\}$. Таким образом, F_N^a — линейная функция каждого из $l(\lambda_j^C)$ и каждого из $l^{-1}(\lambda_j^B)$. Коэффициенты R_N являются рациональными функциями λ и не зависят от $l(\lambda_j)$.

Доказательство состоит из трех пунктов.

(а) Из формул (VIII.1.3), (1.14) ясно, что от каждого индивидуального l_j формфактор зависит следующим образом: $F_N^a = a_j l_j + b_j + c_j l_j^{-1}$ (коэффициенты a_j , b_j , c_j не зависят от l_j). Таким образом, получаем для формфактора представление:

$$F_N^a = \sum \prod_{(+)}^{n_+} l(\lambda_+) \prod_{(-)}^{n_-} l^{-1}(\lambda_-) R_N(\{\lambda_+, \{\lambda_-, \{\lambda_0\}\}). \quad (3.6)$$

Суммирование ведется по разбиениям набора $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$ на три непересекающихся набора $\{\lambda_+\}_{n_+}$, $\{\lambda_-\}_{n_-}$, $\{\lambda_0\}_{n_0}$ (индекс у подмножества означает число элементов), причем $n_+ + n_- + n_0 = 2N$.

(б) Используя тот факт, что XXX R -матрица коммутирует с матрицей $\hat{\varepsilon} \otimes \hat{\varepsilon}$, где $\hat{\varepsilon} = \exp(\varepsilon \sigma_z)$ (см. VI.2.14), легко доказать, что

$$F_N^a(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{\varepsilon^{-2} l_j^C\}, \{\varepsilon^{-2} l_j^B\}) = F_N^a(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{l_j^C\}, \{l_j^B\}) \quad (3.7)$$

при любом ε ; отсюда следует, что $n_+ = n_-$.

(в) Применяя лемму 1, заключаем, что набор $\{\lambda_+\}$ включает только λ^C , а набор $\{\lambda_-\}$ включает только λ^B . Это завершает доказательство леммы 2.

Отметим, что из свойств коэффициентов скалярных произведений (см. замечание после формулы (VIII.2.11) и формул (1.14), (2.8)) следует, что R_N убывает по каждому λ_j ($\lambda_j \in \{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$) как λ_j^{-1} , если $\lambda_j \rightarrow \infty$, а остальные λ фиксированы.

Рассмотрим коэффициент R в (3.5), соответствующий следующему разбиению:

$$\{\lambda_{pr}^C\} = \{\lambda^C\}, \quad \{\lambda_{ab}^C\} = \emptyset, \quad \{\lambda_{pr}^B\} = \{\lambda^B\}, \quad \{\lambda_{ab}^B\} = \emptyset. \quad (3.8)$$

Будем называть этот коэффициент старшим и обозначим его σ_N^a :

$$\sigma_N^a(\{\lambda^C, \lambda^B\}) = R_N(\{\lambda^C\}, \{\emptyset\}, \{\lambda^B\}, \{\emptyset\}). \quad (3.9)$$

Л е м м а 3. Коэффициент σ_N^a обладает следующим набором свойств, которые его фиксируют однозначно:

(1) σ_N^a — рациональная функция $2N$ «импульсов» $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$.

(2) σ_N^a — симметричная функция всех λ_j^C ($j=1, \dots, N$) и всех λ_k^B ($k=1, \dots, N$) (по отдельности).

(3) Устремим к бесконечности какое-то одно λ из набора $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$, а все остальные λ_j зафиксируем; в таком случае σ_N^a (при $N \geq 1$) убывает как $1/\lambda$.

(4) Единственными сингулярностями функции σ_N^a являются полюса первого порядка при совпадении одного из λ^C с одним из λ^B , причем

вычет сводится к σ_{N-1}^{α} . Благодаря симметрии достаточно рассмотреть случай $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B$:

$$\sigma_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\})|_{\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B} \rightarrow ic(\lambda_N^C - \lambda_N^B)^{-1} \times \\ \times \{\exp\{\alpha\} \prod_{j=1}^{N-1} f_{jN}^C f_{Nj}^B - \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^C f_{jN}^B\} \sigma_{N-1}^{\alpha}(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}). \quad (3.10)$$

В правой части среди аргументов σ_{N-1}^{α} отсутствуют λ_N^C и λ_N^B . Обозначения стандартны (см. (2.3)).

(5) При $N=0$ имеем

$$\sigma_0^{\alpha} \equiv 1. \quad (3.11)$$

Доказательство. Свойства (1) и (2) тривиальны. Свойство (3) следует из формулы (1.14), сводящей формфактор к скалярным произведениям, и свойств коэффициентов скалярных произведений, которые сами убывают как $1/\lambda$ (см. замечание 1 в § VIII.2). Как следует из замечания в конце § 2, сингулярности функции $\sigma_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\})$ могут быть расположены лишь при совпадении какой-нибудь пары λ_j из набора $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$. Это полюса первого порядка. Однако σ_N^{α} является симметричной функцией всех λ_j^C , значит, вычеты в полюсах $\lambda_j^C = \lambda_k^C$ равны нулю. По аналогичной причине полюса отсутствуют и при $\lambda_j^B = \lambda_k^B$. Итак, мы доказали, что единственные полюса $\sigma_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\})$ — это полюса первого порядка, расположенные при совпадении λ_j^C и λ_k^B . Формула для вычета (3.10) получается следующим образом. В формулу для вычета формфактора (2.10) следует подставить представление формфактора (3.5) и выделить коэффициент при $\prod_j l(\lambda_j^C) l^{-1}(\lambda_j^B)$. Это завершает доказательство пункта (4) леммы 3.

Свойство (5) тривиально следует из формулы (1.14) при $N=0$ и нормировки псевдовакуума $\langle 0|0 \rangle = 1$. Итак, доказано, что функция σ_N^{α} обладает всеми пятью свойствами, приведенными в лемме 3.

Докажем теперь, что эти свойства однозначно фиксируют функцию σ_N^{α} и позволяют восстановить ее по функции σ_{N-1}^{α} . Таким образом, рекуррентно строится функция σ_N^{α} при любом N . Из свойств (1), (3), (4) следует, что σ_N^{α} можно представить в виде

$$\sigma_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}) = \frac{\pi_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\})}{\prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N (\lambda_j^B - \lambda_k^C)}. \quad (3.12)$$

Здесь π_N^{α} — полином степени $(N-1)$ по каждому из λ_j ($\lambda_j \in \{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$). Если записать формулу (3.10) через полином π , то получится, что π_N^{α} при $\lambda_k^C = \lambda_j^B$ выражается через π_{N-1}^{α} .

Учитывая симметрию, достаточно рассмотреть случай $\lambda_N^C = \lambda_N^B$:

$$\pi_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\})|_{\lambda_N^C = \lambda_N^B} = ic \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda_N - \lambda_j^C + ic)(\lambda_j^B - \lambda_N + ic) - \right. \\ \left. - \exp\{\alpha\} \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda_N - \lambda_j^C - ic)(\lambda_j^B - \lambda_N - ic) \right\} \pi_{N-1}^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}). \quad (3.13)$$

Это свойство однозначно фиксирует полином π_N^α (в терминах π_{N-1}^α). Действительно, рассмотрим π_N^α как полином степени $(N-1)$ по переменной λ_N^C . Формула (3.13) задает этот полином в N точках $\lambda_N^C = \lambda_j^B$ ($j=1, \dots, N$), что однозначно фиксирует его. Начиная с $\pi_0^\alpha \equiv 1$, можно последовательно вычислить $\pi_1^\alpha, \pi_2^\alpha, \dots$

Отметим, что

$$\sigma_1^\alpha(\lambda^C, \lambda^B) = ic(\lambda^C - \lambda^B)^{-1}(\exp\{\alpha\} - 1). \quad (3.14)$$

Лемма 3 доказана.

Любопытно отметить, что для σ_N^α можно получить представление в виде определителя, аналогичное (VI.10.1) к представлению K_N как определителя из § VIII.2.

Рекуррентные соотношения для σ_N^α были впервые решены в [10.1] в рамках исследования формфакторов для $O(3)$ нелинейной σ -модели. В [10.1] получено несколько представлений для функций π_N^α и их обобщений в виде определителя матриц $2N \times 2N$ или $(N-1) \times (N-1)$. Мы приведем выражение для σ_N^α в виде определителя $N \times N$ из [10.2]:

$$\sigma_N^\alpha(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}) = \left\{ \prod_{j>k} g(\lambda_j^B, \lambda_k^B) g(\lambda_k^C, \lambda_j^C) \right\} \left\{ \prod_{j,k=1}^N h(\lambda_j^B, \lambda_k^C) \right\} \det M.$$

Здесь $h(\lambda, \mu) = f(\lambda, \mu)/g(\lambda, \mu)$, а

$$M_{jk} = e^\alpha \frac{g(\lambda_k^C, \lambda_j^B)}{h(\lambda_k^C, \lambda_j^B)} \left\{ \prod_{m=1}^N \frac{h(\lambda_m^C, \lambda_j^B) h(\lambda_j^B, \lambda_m^B)}{h(\lambda_j^B, \lambda_m^C) h(\lambda_m^B, \lambda_j^B)} \right\} + \frac{g(\lambda_j^B, \lambda_k^C)}{h(\lambda_j^B, \lambda_k^C)}.$$

Это выражение для σ_N^α справедливо и в тригонометрическом случае.

Произвольный коэффициент в (3.5) обозначим так:

$$R_N \equiv R_N^\alpha(\{\lambda_{pr}^C\}_n, \{\lambda_{ab}^C\}_{N-n}, \{\lambda_{pr}^B\}_n, \{\lambda_{ab}^B\}_{N-n}). \quad (3.15)$$

Этот коэффициент выражается через старший σ_N^α по формуле, напоминающей аналогичное выражение для скалярных произведений (VIII.2.10).

Л е м м а 4. Произвольный коэффициент R_N выражается через старшие σ_N^α по формуле

$$\begin{aligned} R_N^\alpha(\{\lambda_{pr}^C\}_n, \{\lambda_{ab}^C\}_{N-n}, \{\lambda_{pr}^B\}_n, \{\lambda_{ab}^B\}_{N-n}) = \\ = \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{pr}^C, \lambda_{ab}^C) \right\} \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{ab}^B, \lambda_{pr}^B) \right\} \times \\ \times \sigma_n^\alpha(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}) \sigma_{N-n}^\alpha(\{\lambda_{ab}^B\}, \{\lambda_{ab}^C\}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь произведение $\prod_{pr} \prod_{ab}$ обозначает независимое произведение по всем $\lambda \in \{\lambda_{pr}\}$ и по всем $\lambda \in \{\lambda_{ab}\}$ и содержит $n(N-n)$ множителей.

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит из нескольких пунктов.

Исследуем сначала свойства коэффициента R_N (3.15), вытекающие из его определения.

(а) Свойства симметрии R_N устанавливаются, как всегда, элементарно: R_N является симметричной функцией всех $\{\lambda_{pr}^C\}$, $\{\lambda_{pr}^B\}$, $\{\lambda_{ab}^C\}$, $\{\lambda_{ab}^B\}$ по отдельности. Таким образом, симметрия левой и правой частей (3.16) совпадают.

(б) Исследуем положение особенностей функции R_N . Она может иметь лишь полюса первого порядка при совпадении пары λ из набора $\{\lambda^C\} \cup \{\lambda^B\}$. Из симметрии (см. пункт (а)) следует, что некоторые вычеты зануляются, и функция R_N может иметь полюса лишь при:

$$\lambda_{pr,j}^C = \lambda_{ab,k}^C, \quad \lambda_{pr,j}^B = \lambda_{ab,k}^B, \quad (3.17)$$

$$\lambda_j^C = \lambda_k^B. \quad (3.18)$$

Итак, R_N можно представить в виде

$$R_N = \frac{\tilde{P}_N(\{\lambda_{pr}^C\}_n, \{\lambda_{ab}^C\}_{N-n}, \{\lambda_{pr}^B\}_n, \{\lambda_{ab}^B\}_{N-n})}{\prod_{j,k} (\lambda_{pr,j}^C - \lambda_{ab,k}^C) \prod_{j,k} (\lambda_{ab,j}^B - \lambda_{pr,k}^B) \prod_{j,k=1}^N (\lambda_j^B - \lambda_k^C)}. \quad (3.19)$$

Здесь $\tilde{P}_N$ — полином по всем λ_j .

(в) Докажем, что

$$\tilde{P}_N = \tilde{P}_N \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} (\lambda_{pr}^C - \lambda_{ab}^C + ic) \right\} \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} (\lambda_{ab}^B - \lambda_{pr}^B + ic) \right\}. \quad (3.20)$$

Воспользуемся леммой 1. В формулу (3.1) подставим для формфакторов в обеих частях представления (3.5) и приравняем коэффициенты при одинаковых структурах $\prod_{pr} l(\lambda_{pr}^C) \prod_{pr} l^{-1}(\lambda_{pr}^B)$. Получим соотношение

$$\begin{aligned} R_N^{\alpha}(\{\lambda_{pr}^C\}_n, \{\lambda_{ab}^C\}_{N-n}, \{\lambda_{pr}^B\}_n, \{\lambda_{ab}^B\}_{N-n}) = \\ = \exp\{N\alpha\} R_N^{-\alpha}(\{\lambda_{ab}^C\}_{N-n}, \{\lambda_{pr}^C\}_n, \{\lambda_{ab}^B\}_{N-n}, \{\lambda_{pr}^B\}_n) \times \\ \times \prod_{ab} \prod_{pr} \left(\frac{f(\lambda_{pr}^C, \lambda_{ab}^C) f(\lambda_{ab}^B, \lambda_{pr}^B)}{f(\lambda_{ab}^C, \lambda_{pr}^C) f(\lambda_{pr}^B, \lambda_{ab}^B)} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отсюда видно, что полином $\tilde{P}$ должен иметь вид (3.20). С помощью (3.20) формулу (3.19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} R_N^{\alpha}(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}) = \\ = \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{pr}^C, \lambda_{ab}^C) \right\} \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{ab}^B, \lambda_{pr}^B) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N (\lambda_j^B - \lambda_k^C)^{-1} \right\} \times \\ \times \tilde{P}_N(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь $\tilde{P}_N$ — полином по всем переменным.

(г) Воспользуемся для вычета формфактора (2.10) и соберем коэффициенты при фиксированной структуре $\prod_{pr} l(\lambda_{pr}^C) \prod_{pr} l^{-1}(\lambda_{pr}^B)$. Непо-

средственный подсчет показывает, что полюса $\lambda_{pr,j}^C = \lambda_{ab,k}^B$ и $\lambda_{ab,j}^C = \lambda_{ab,k}^B$ отсутствуют. Это означает, что R_N можно переписать в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} R_N(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}) = \\ = \left\{ \prod_{pr}^n \prod_{ab}^{N-n} f(\lambda_{pr}^C, \lambda_{ab}^C) \right\} \left\{ \prod_{pr}^n \prod_{ab}^{N-n} f(\lambda_{ab}^B, \lambda_{pr}^B) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n (\lambda_{pr,j}^B - \lambda_{pr,k}^C)^{-1} \right\} \times \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^{N-n} \prod_{k=1}^{N-n} (\lambda_{ab,j}^C - \lambda_{ab,k}^B)^{-1} \right\} P_N(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}). \quad (3.23) \end{aligned}$$

(д) Напомним, что R_N убывает как $1/\lambda$ по любому λ , если остальные зафиксированы. Отсюда следует, что полином P_N по каждой из переменных λ_{pr}^C и λ_{pr}^B имеет степень $(n-1)$, а по каждой из переменных λ_{ab}^C и λ_{ab}^B он имеет степень $(N-n-1)$. Отметим, что из формулы для вычета формфактора (2.10) следует формула для вычета коэффициентов R_N . Эта формула означает, что в случае $(\lambda_{pr}^C)_k = (\lambda_{pr}^C)_j$ или $(\lambda_{ab}^C)_k = (\lambda_{ab}^C)_j$ полином P_N сводится к P_{N-1} . Благодаря симметрии достаточно рассмотреть два случая $(\lambda_{pr}^C)_n = (\lambda_{pr}^B)_n$ и $(\lambda_{ab}^C)_{N-n} = (\lambda_{ab}^B)_{N-n}$. В первом случае

$$\begin{aligned} P_N|_{(\lambda_{pr}^C)_n = (\lambda_{pr}^B)_n = \lambda_n^{pr}} = ic \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_n^{pr} - \lambda_{pr,j}^C + ic)(\lambda_{pr,j}^B - \lambda_n^{pr} + ic) - \right. \\ \left. - \exp\{\alpha\} \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_n^{pr} - \lambda_{pr,j}^C - ic)(\lambda_{pr,j}^B - \lambda_n^{pr} - ic) \right\} P_{N-1}. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Справа среди аргументов полинома P_{N-1} отсутствуют $\lambda_{pr,n}^C$ и $\lambda_{pr,n}^B$. Аналогично, если $(\lambda_{ab}^C)_{N-n} = (\lambda_{ab}^B)_{N-n}$, то

$$\begin{aligned} P_N|_{(\lambda_{ab}^C)_{N-n} = (\lambda_{ab}^B)_{N-n} = \lambda_{N-n}} = ic \left\{ \prod_{j=1}^{N-n-1} (\lambda_{N-n} - \lambda_{ab,j}^B + ic) \times \right. \\ \times (\lambda_{ab,j}^C - \lambda_{N-n} + ic) - \exp\{\alpha\} \prod_{j=1}^{N-n-1} (\lambda_{N-n} - \lambda_{ab,j}^B - ic) \times \\ \left. \times (\lambda_{ab,j}^C - \lambda_{N-n} - ic) \right\} P_{N-1}. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Справа среди аргументов полинома P_{N-1} отсутствуют $(\lambda_{ab}^C)_{N-n}$ и $(\lambda_{ab}^B)_{N-n}$. Отметим, что эти свойства и условие $P_0 \equiv 1$ фиксируют P_N однозначно для любого N .

(е) Теперь все готово для того, чтобы доказать по индукции, что

$$P_N(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}) = \pi_n^\alpha(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}) \pi_{N-n}^\alpha(\{\lambda_{ab}^B\}, \{\lambda_{ab}^C\}). \quad (3.26)$$

Эта формула эквивалентна (3.16). Определение π_n^α см. в (3.12). Рассмотрим разность

$$\Delta_N(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}) = P_N(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{ab}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}, \{\lambda_{ab}^B\}) - \pi_n^\alpha(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}) \pi_{N-n}^\alpha(\{\lambda_{ab}^B\}, \{\lambda_{ab}^C\}). \quad (3.27)$$

Докажем по индукции, что $\Delta_N = 0$. При $N=1$ это легко устанавливается непосредственным вычислением. Пусть $\Delta_j = 0$ при $j=1, \dots, M-1$. Докажем, что и $\Delta_M = 0$. Рассмотрим Δ_M . Один из наборов — либо $\{\lambda_{pr}\}$, либо $\{\lambda_{ab}\}$ — является непустым. Рассмотрим первый случай, когда набор $\{\lambda_{pr}\}$ непуст и включает n элементов. По переменной $(\lambda_{pr}^C)_n$ величина Δ_M является полиномом степени $(n-1)$. Значения этого полинома в n точках сводятся к Δ_{M-1} . При помощи формул (3.24) и (3.13) получаем:

$$\Delta_M|_{(\lambda_{pr}^C)_n = (\lambda_{pr}^B)_k} = ic \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_{pr,k}^B - \lambda_{pr,j}^C + ic) \prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_{pr,j}^B - \lambda_{pr,n}^C + ic) - \exp\{\alpha\} \prod_{j=1}^n (\lambda_{pr,k}^B - \lambda_{pr,j}^C - ic) \prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_{pr,j}^B - \lambda_{pr,n}^C - ic) \right\} \Delta_{M-1} = 0. \quad (3.28)$$

Последнее равенство получается по индуктивному предположению. Если полином степени $(n-1)$ равен нулю в n точках, то он равен нулю тождественно. Случай, когда $\{\lambda_{pr}\} = \emptyset$ рассматривается аналогично, так как в этом случае набор $\{\lambda_{ab}\}$ содержит M элементов, а по λ_{ab} имеются такие же рекуррентные соотношения, как и по λ_{pr} . Итак, шаг индукции сделан. Доказано, что $\Delta_M = 0$. Это завершает доказательство формулы (3.26) и леммы 4 в целом.

В заключение отметим, что, подставляя (3.16), (3.5) в (3.1), получим следующую важную инволюцию для σ_n^α :

$$\sigma_n^\alpha(\{\lambda^B\}, \{\lambda^C\}) = \exp\{n\alpha\} \sigma_n^{-\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}). \quad (3.29)$$

§ 4. Формфакторы операторов Q_1 и Q_1^2

В следующей главе мы увидим, что для изучения свойств среднего значения Q_1^2 необходимы некоторые сведения о формфакторе оператора Q_1 . Он определяется стандартно:

$$F'_N(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{I^C\}, \{I^B\}) \equiv \langle \psi_N(\{\lambda^C\}) | Q_1 | \psi_N(\{\lambda^B\}) \rangle = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) Q_1 \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle. \quad (4.1)$$

Здесь $\{\lambda^C\}$ и $\{\lambda^B\}$ являются, вообще говоря, различными решениями уравнений Бете. Легко выразить F'_N через F_N^α :

$$F'_N = \partial F_N^\alpha / \partial \alpha |_{\alpha=0}. \quad (4.2)$$

Напомним, что из ортогональности волновых функций с различными наборами спектральных параметров следует, что $F_N^\alpha |_{\alpha=0} = \delta_{0,N}$. Соответственно имеем:

$$\sigma_n^\alpha |_{\alpha=0} = \delta_{0,n}. \quad (4.3)$$

Дифференцируя соотношение (3.5) и имея в виду (3.16), получаем

$$F'_N = \left\{ \prod_{j=1}^N l(\lambda_j^C) l^{-1}(\lambda_j^B) - 1 \right\} \sigma'_N \{ \lambda^C, \{ \lambda^B \} \}. \quad (4.4)$$

(Следует отметить, что σ' сводится к формфактору тока в модели НШ:

$$\langle \psi_N(\{ \lambda^C \}) | j(0) | \psi_N(\{ \lambda^B \}) \rangle = i \left\{ \sum_{k=1}^N (\lambda_k^B - \lambda_k^C) \right\} \sigma'_N(\{ \lambda^C \}, \{ \lambda^B \}).$$

Величина σ' определена так:

$$\sigma'_N(\{ \lambda^C \}, \{ \lambda^B \}) = \partial \sigma_N(\{ \lambda^C \}, \{ \lambda^B \}) / \partial \alpha |_{\alpha=0}. \quad (4.5)$$

Из формулы (3.29) следует, что

$$\sigma'_N(\{ \lambda^C \}, \{ \lambda^B \}) = -\sigma'_N(\{ \lambda^B \}, \{ \lambda^C \}). \quad (4.6)$$

Следствием леммы 3 являются следующие свойства функции σ'_n .

(1) σ'_n — рациональная функция $2n$ переменных $\{ \lambda^C \}_n, \{ \lambda^B \}_n$.

(2) Она является симметричной функцией всех λ_j^C и симметричной функцией λ_j^B (по отдельности).

(3) Если какое-то λ_j из набора $\{ \lambda^C \} \cup \{ \lambda^B \}$ стремится к ∞ , а остальные фиксированы, то σ'_n убывает как $1/\lambda_j$.

(4) Единственными сингулярностями σ'_n являются простые полюса, расположенные при $\lambda_j^C \rightarrow \lambda_k^B$; при этом вычет сводится к σ'_{n-1} . Достаточно рассмотреть случай $\lambda_n^C \rightarrow \lambda_n^B = \lambda_n$:

$$\begin{aligned} & \sigma'_n(\{ \lambda^C \}_n, \{ \lambda^B \}_n) |_{\lambda_n^C \rightarrow \lambda_n^B} = \\ & = ic(\lambda_n^C - \lambda_n^B)^{-1} \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} f_{jn}^C f_{nj}^B - \prod_{j=1}^{n-1} f_{nj}^C f_{jn}^B \right\} \sigma'_{n-1}(\{ \lambda^C \}_{n-1}, \{ \lambda^B \}_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

(5) Для малых n имеем:

$$\sigma'_0 = 0, \quad \sigma'_1(\lambda^C, \lambda^B) = g(\lambda^C, \lambda^B). \quad (4.8)$$

Эти свойства однозначно фиксируют σ'_n и позволяют вычислять эту функцию рекуррентно по n , например,

$$\sigma'_2(\{ \lambda_1^C, \lambda_2^C \}, \{ \lambda_1^B, \lambda_2^B \}) = 2ic^3 (\lambda_1^B + \lambda_2^B - \lambda_1^C - \lambda_2^C) \prod_{j,k=1}^2 (\lambda_j^C - \lambda_k^B)^{-1}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_3(\{ \lambda_1^C, \lambda_2^C, \lambda_3^C \}, \{ \lambda_1^B, \lambda_2^B, \lambda_3^B \}) = & \prod_{j,k=1}^3 (\lambda_j^B - \lambda_k^C)^{-1} \left\{ 4ic^7 \left[\sum_{j=1}^3 (\lambda_j^B - \lambda_j^C) \right]^2 - \right. \\ & \left. - 4ic^5 \left[\sum_{j=1}^3 (\lambda_j^B - \lambda_j^C) \right] \sum_p (\lambda_{p_1}^B - \lambda_1^C)(\lambda_{p_2}^B - \lambda_2^C)(\lambda_{p_3}^B - \lambda_3^C) \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Последняя сумма здесь берется только по циклическим перестановкам $\lambda_1^B, \lambda_2^B, \lambda_3^B$. Для произвольного N σ'_N при $c \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma'_N(\{ \lambda^C \}, \{ \lambda^B \}) = & -2^{N-1} (ic)^{N(N-1)+1} \left(\sum_{j=1}^N (\lambda_j^B - \lambda_j^C) \right)^{N-1} \times \\ & \times \left[\prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N (\lambda_j^B - \lambda_k^C)^{-1} \right] + O(c^{N(N-1)-1}) \sim c^{N(N-1)+1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

а асимптотика при $c \rightarrow 0$ имеет вид

$$\sigma'_N(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}) = \frac{i}{Nc} \left(\sum_{j=1}^N (\lambda_j^B - \lambda_j^C) \right) \sum_{P, Q} \prod_{n=1}^N g(\lambda_{P_n}^B, \lambda_{Q_n}^C) g(\lambda_{P_{n+1}}^B, \lambda_{Q_n}^C) \sim c^{2N-1} \quad (4.12)$$

(суммирование ведется по двум независимым перестановкам P и Q). При произвольной константе связи c для σ'_N можно получить представление в виде определителя [10.1].

Рассмотрим теперь формфактор оператора Q_1^2 :

$$F_N''(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{I^C\}, \{I^B\}) = \langle \psi_N(\{\lambda^C\}) | Q_1^2 | \psi_N(\{\lambda^B\}) \rangle = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) Q_1^2 \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle = \partial^2 F_N^a / \partial \alpha^2 |_{\alpha=0}. \quad (4.13)$$

Дифференцируя представление (3.5), получим для F_N'' :

$$F_N'' = \sigma_N''(\{\lambda^B\}, \{\lambda^C\}) + \left(\prod_{j=1}^N I(\lambda_j^C) I^{-1}(\lambda_j^B) \right) \sigma_N''(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}) + \\ + 2 \sum'_{(1 \leq n \leq N-1)} \left\{ \prod_{pr}^n I(\lambda_{pr}^C) I^{-1}(\lambda_{pr}^B) \right\} \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{pr}^C, \lambda_{ab}^C) \right\} \times \\ \times \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{ab}^B, \lambda_{pr}^B) \right\} \sigma_n'(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}) \sigma_{N-n}'(\{\lambda_{ab}^B\}, \{\lambda_{ab}^C\}). \quad (4.14)$$

Здесь суммирование ведется так же, как и в (3.5), но мы явно выделили два слагаемых, соответствующих разбиениям $\{\lambda_{pr}^C\} = \{\lambda^C\}_N$, $\{\lambda_{pr}^B\} = \{\lambda_N^B\}$ и $\{\lambda_{pr}^C\} = \emptyset$, $\{\lambda_{pr}^B\} = \emptyset$. Мы обозначили $\text{card} \{\lambda_{pr}^C\} = \text{card} \{\lambda_{pr}^B\} = n$, $\sigma_n'' = \partial^2 \sigma_n^a / \partial \alpha^2 |_{\alpha=0}$.

Л е м м а. Если все $I_j^C = I_k^B = 1$, а λ^C и λ^B фиксированы, то F_N'' обращается в нуль при $N > 0$:

$$F_N''(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{I_j^C = 1\}, \{I_j^B = 1\}) = 0, \quad N > 0. \quad (4.15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим двухузельную модель с

$$T(1|\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4.16)$$

для нее $I(\lambda) = 1$. Такая $T(1)$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на $T(1)$; для нее $B_1(\lambda) = 0$ и $Q_1^2 \prod B(\lambda) | 0 \rangle = 0$. Это завершает доказательство.

Доказанная лемма позволяет переписать представление (4.14) в виде

$$F_N''(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{I^C\}, \{I^B\}) = \left\{ \prod_{j=1}^N I(\lambda_j^C) I^{-1}(\lambda_j^B) - 1 \right\} \sigma_N''(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}) + \\ + 2 \sum'_{(1 \leq n \leq N-1)} \left\{ \prod_{pr}^n I(\lambda_{pr}^C) I^{-1}(\lambda_{pr}^B) - 1 \right\} \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{pr}^C, \lambda_{ab}^C) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{pr} \prod_{ab} f(\lambda_{ab}^B, \lambda_{pr}^B) \right\} \sigma'_n(\{\lambda_{pr}^C\}, \{\lambda_{pr}^B\}) \sigma'_{N-n}(\{\lambda_{ab}^B\}, \{\lambda_{ab}^C\}). \quad (4.17)$$

В следующей главе это представление для формфактора оператора Q_1^2 будет играть важную роль при вычислении корреляционных функций токов.

Термодинамический предел формфакторов, рассмотренных в настоящей главе, описывает формфакторы над физическим вакуумом.

Г л а в а X I

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА Q_1^2

В этой главе исследуются свойства среднего значения оператора Q_1^2 в обобщенной двухузельной модели — величины, непосредственно связанной с коррелятором токов в модели НШ. Это среднее значение рассматривается как функционал от произвольных функций $l(\lambda)$ и $m(\lambda)$ весьма специального вида, зависящий только от значений этих функций и их первых производных в конечном числе точек. В § 1 исследуется среднее значение производящего оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$, выявляются независимые переменные. В § 2 вводится важнейшее понятие неприводимых частей. В § 3 приводятся основные свойства среднего значения оператора Q_1^2 . В § 4 среднее значение выражено через неприводимые части. Это основной результат анализа в рамках двухузельной обобщенной модели.

§ 1. Среднее значение оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$

Рассмотрим матричный элемент (X.2.1):

$$\begin{aligned} M_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{l^C\}, \{l^B\}, \{m^C\}, \{m^B\}) = \\ = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^C) \exp\{\alpha Q_1\} \prod_{k=1}^N B(\lambda_k^B) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В физических моделях l_j и m_j — это значения гладкой функции в точках λ_j :

$$l_j = l(\lambda_j), \quad m_j = m(\lambda_j) \quad (1.2)$$

(в модели НШ)

$$l(\lambda) = \exp\{-i\lambda x\}, \quad m(\lambda) = \exp\{i(x-L)\lambda\}.$$

В этом случае предел $\lambda_N^C \rightarrow \lambda_N^B \equiv \lambda_N$ не является сингулярным, вычет в полюсе в формуле (X.2.2) зануляется и M_N^{α} остается конечным. Зависимость от вакуумных собственных переменных в точке λ_N выражается в терминах переменных $l_N = l(\lambda_N)$, $m_N = m(\lambda_N)$, $x_N = i\partial \ln l(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_N}$ и $y_N = i\partial \ln m(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_N}$. Зависимость

от переменных x_N и y_N линейна, соответствующие коэффициенты сводятся к вычетам в формуле (X.2.2):

$$\partial M_N^{\alpha} / \partial x_N = cr(\lambda_N) \exp \{ \alpha \} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^C f_{Nj}^B \right\} \times \\ \times M_{N-1}^{\alpha} (\{ \lambda^C \}, \{ \lambda^B \}, \{ \tilde{l}^C \}, \{ \tilde{l}^B \}, \{ m^C \}, \{ m^B \}), \quad (1.3)$$

$$\partial M_N^{\alpha} / \partial y_N = cr(\lambda_N) \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^C f_{Nj}^B \right\} \times \\ \times M_{N-1}^{\alpha} (\{ \lambda^C \}, \{ \lambda^B \}, \{ l^C \}, \{ l^B \}, \{ \tilde{m}^C \}, \{ \tilde{m}^B \}). \quad (1.4)$$

Модификация $l \rightarrow \tilde{l}$, $m \rightarrow \tilde{m}$

$$\tilde{l}(\lambda_j) = l(\lambda_j)(f_{jN}/f_{Nj}), \quad \tilde{m}(\lambda_j) = m(\lambda_j)(f_{jN}/f_{Nj}) \quad (1.5)$$

проводится по правилу (X.2.4), (X.2.5). Рассмотрим теперь матричный элемент M_N^{α} в пределе $\lambda_j^C \rightarrow \lambda_j^B \equiv \lambda_j$ ($j=1, \dots, N$), причем все λ_j различны. В этом случае матричный элемент зависит от $5N$ комплексных переменных:

$$M_N^{\alpha} (\{ \lambda_j^C \rightarrow \lambda_j \}, \{ \lambda_j^B \rightarrow \lambda_j \}, \{ l_j^C \rightarrow l_j \}, \{ l_j^B \rightarrow l_j \}, \{ m_j^C \rightarrow m_j \}, \{ m_j^B \rightarrow m_j \}) \equiv \\ \equiv M_N^{\alpha} (\{ \lambda_j \}, \{ x_j \}, \{ y_j \}, \{ l_j \}, \{ m_j \}). \quad (1.6)$$

Здесь

$$x_j = i \partial \ln l(\lambda) / \partial \lambda |_{\lambda=\lambda_j}, \quad y_j = i \partial \ln m(\lambda) / \partial \lambda |_{\lambda=\lambda_j}. \quad (1.7)$$

Отметим, что

$$r(\lambda) = m(\lambda) l(\lambda), \quad z_j = i \partial \ln r(\lambda) / \partial \lambda |_{\lambda=\lambda_j} = x_j + y_j. \quad (1.8)$$

Отметим, что для модели НШ

$$x_j = x, \quad y_j \equiv y = L - x. \quad (1.9)$$

Зависимость M_N^{α} от каждой из переменных x_j и y_j линейна, коэффициенты получаются из формул (X.2.2):

$$\partial M_N^{\alpha} / \partial x_N = \\ = cr(\lambda_N) \exp \{ \alpha \} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj} f_{Nj} \right\} M_{N-1}^{\alpha} (\{ \lambda_j \}, \{ \tilde{x}_j \}, \{ y_j \}, \{ \tilde{l}_j \}, \{ m_j \}), \quad (1.10)$$

$$\partial M_N^{\alpha} / \partial y_N = \\ = cr(\lambda_N) \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj} f_{Nj} \right\} M_{N-1}^{\alpha} (\{ \lambda_j \}, \{ x_j \}, \{ \tilde{y}_j \}, \{ l_j \}, \{ \tilde{m}_j \}). \quad (1.11)$$

Модификация l и m проводится по старому правилу (X.2.4), а x и y модифицируются так же, как в случае норм (VIII.3.24):

$$\tilde{x}_j = x_j + K_{jN}, \quad \tilde{y}_j = y_j + K_{jN} \quad (j=1, \dots, N-1), \quad (1.12)$$

$$K_{jN} \equiv K(\lambda_j, \lambda_N) = 2c [c^2 + (\lambda_j - \lambda_N)^2]^{-1}. \quad (1.13)$$

Рассмотрим, наконец, матричный элемент (1.1) в пределе $\lambda_j^c = \lambda_j^B = \lambda_j$ ($j=1, \dots, N$), причем уравнения Бете (IX.1.3) выполнены, т. е. соответствующий матричный элемент является средним значением оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ по отношению к бетевским векторам состояния (IX.1.1), (IX.1.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N^{\alpha}(\{\lambda_j\}, \{x_j\}, \{y_j\}, \{l_j\}) &= \langle \Psi_N(\{\lambda_j\}) | \exp\{\alpha Q_1\} | \Psi_N(\{\lambda_j\}) \rangle = \\ &= M_N^{\alpha} \left(\{\lambda_j\}, \{x_j\}, \{y_j\}, \{l_j\}, \left\{ m_j = \right. \right. \\ &= l_j^{-1} \left(\prod_{k \neq j} (f_{kj}/f_{jk}) \right) \left. \left. \right\} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Среднее значение является функцией только $4N$ независимых переменных, так как переменные m_j в (1.6) выражаются из системы уравнений Бете:

$$m_j = l_j^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f_{kj}/f_{jk}). \quad (1.15)$$

Среднее значение (1.14) — это линейная функция каждой из переменных x_j и y_j ($j=1, \dots, N$), причем соответствующие коэффициенты даются формулами

$$\partial \mathcal{M}_N^{\alpha} / \partial x_N = c \exp\{\alpha\} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj} f_{jN} \right\} \mathcal{M}_{N-1}^{\alpha}(\{\lambda_j\}, \{\tilde{x}_j\}, \{y_j\}, \{\tilde{l}_j\}), \quad (1.16)$$

$$\partial \mathcal{M}_N^{\alpha} / \partial y_N = c \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj} f_{jN} \right\} \mathcal{M}_{N-1}^{\alpha}(\{\lambda_j\}, \{x_j\}, \{\tilde{y}_j\}, \{l_j\}). \quad (1.17)$$

Среднее значение (1.14) — симметричная функция относительно перестановки четверок аргументов:

$$(\lambda_j, x_j, y_j, l_j) \leftrightarrow (\lambda_k, x_k, y_k, l_k), \quad (1.18)$$

так что коэффициенты перед остальными x_j и y_j получаются из (1.17), (1.16) тривиально.

§ 2. Неприводимые части

Введем среднее значение $\|\exp\{\alpha Q_1\}\|_N$ оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\exp\{\alpha Q_1\}\|_N &= c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \langle \Psi_N(\{\lambda\}) | \exp\{\alpha Q_1\} | \Psi_N(\{\lambda\}) \rangle = \\ &= c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \mathcal{M}_N^{\alpha}(\{\lambda\}, \{x\}, \{y\}, \{l\}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для средних значений от степеней операторов Q_1 получаем:

$$\|Q_1^m\|_N = \partial^m \|\exp\{\alpha Q_1\}\|_N / \partial \alpha^m|_{\alpha=0}. \quad (2.2)$$

Величина среднего значения при $x_j = y_j = 0$ ($j = 1, \dots, N$) называется *неприводимой частью*:

$$I_N^{\alpha}(\{\lambda_j\}, \{l_j\}) = \|\exp\{\alpha Q_1\}\|_N|_{x_j=y_j=0, j=1, \dots, N}. \quad (2.3)$$

Аналогично для степеней оператора Q_1

$$I_N^{(m)}(\{\lambda_j\}, \{l_j\}) = \|Q_1^m\|_N|_{x_j=y_j=0, j=1, \dots, N}, \quad (2.4)$$

причем

$$I_N^{(m)} = \partial^m I_N^{\alpha} / \partial \alpha^m|_{\alpha=0}. \quad (2.5)$$

Вычислим неприводимые части при небольших m . Рассмотрим $m=0$; из (IX.1.4) получаем, что среднее значение единичного оператора равно

$$\|1\|_N = \det_N(\varphi'). \quad (2.6)$$

Используя формулу (IX.2.12), можно вычислить соответствующую неприводимую часть:

$$I_N^{(0)} = \delta_{0,N}. \quad (2.7)$$

Для $m \geq 1$ неприводимую часть трудно вычислить, исходя из определения. Поэтому свяжем неприводимую часть с формфактором, который изучен в предыдущей главе.

Л е м м а 1. *Неприводимая часть выражается через формфактор с помощью следующего предельного перехода:*

$$I_N^{\alpha}(\{\lambda_j\}, \{l_j\}) = c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_N^{\alpha}(\{\lambda_j^C = \lambda_j\}, \{\lambda_j^B = \lambda_j + \varepsilon\}, \{l_j^C = l_j\}, \{l_j^B = l_j\}). \quad (2.8)$$

В выражении для формфактора $F_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{l^C\}, \{l^B\})$ сначала следует приравнять $l_j^C = l_j^B = 0$, а затем положить $\lambda_j^B - \varepsilon = \lambda_j^C = \lambda_j$ и перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Подчеркнем, что при этом ε не зависит от j .

Для доказательства выразим обе части (2.8) через матричный элемент общего вида (X.1.14). Исходя из определения, имеем для неприводимой части:

$$I_N = c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{M}_N^{\alpha}(\{\lambda_j\}, \{\lambda_j + \varepsilon\}, \{l_j\}, \{l_j\}, \{m_j\}, \{m_j\}). \quad (2.9)$$

Здесь λ_j и l_j — независимые переменные, а

$$m_j = l_j^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f_{kj}/f_{jk}). \quad (2.10)$$

Формфактор тоже выражается через M_N^a :

$$F_N^a = M_N^a(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{I^C\}, \{I^B\}, \{m^C\}, \{m^B\}), \quad (2.11)$$

$$m_j^C = (I_j^C)^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f_{kj}^C / f_{jk}^C), \quad m_j^B = (I_j^B)^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f_{kj}^B / f_{jk}^B). \quad (2.12)$$

Так как $f(\lambda, \mu)$ зависит лишь от разности $(\lambda - \mu)$, то уже при конечном ε величины (2.10) и (2.12) равны друг другу: $m_j = m_j^C = m_j^B$. Правые части (2.8) и (2.9) совпадают. Лемма доказана.

Используя эту лемму и формулу (X.4.4), легко видеть, что неприводимая часть оператора Q_1 равна нулю:

$$I_N^{(1)} = 0. \quad (2.13)$$

Наиболее интересной является величина $I_N^{(2)}$ — неприводимая часть оператора Q_1^2 . Ниже мы будем отбрасывать верхний индекс и обозначать ее просто I_N . Дифференцируя соотношение (2.8) два раза по α , получим, что I_N связана с формфактором F'' (X.4.13) следующей формулой:

$$I_N(\{\lambda_j\}, \{I_j\}) = c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k} f_{jk}^{-1} \right\} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_N''(\{\lambda_j\}, \{\lambda_j + \varepsilon\}, \{I_j\}, \{I_j\}). \quad (2.14)$$

В выражении для формфактора (X.4.17) следует положить $I_j^C = I_j^B = I_j$ до перехода к пределу. Отсюда ясно, что первое слагаемое в формуле (X.4.17) исчезнет. Другими словами, величина σ_N'' не нужна для вычисления неприводимой части I_N . Свойства же σ_N' хорошо изучены. С помощью леммы и представления (X.4.17) получаем для неприводимой части следующее представление:

$$I_N(\{\lambda\}, \{I\}) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq [N/2] \\ \{\lambda\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}}} \left\{ \prod_{(+)}^n I(\lambda^+) \prod_{(-)}^n I^{-1}(\lambda^-) - 1 \right\} \times \\ \times \mathcal{A}_N^n(\{\lambda^+\}_n, \{\lambda^-\}_n, \{\lambda^0\}_{N-2n}). \quad (2.15)$$

Здесь суммирование ведется по разбиениям набора $\{\lambda\}_N$ на три непересекающихся поднабора, причем $\text{card } \{\lambda^+\} = \text{card } \{\lambda^-\} = n$, $\text{card } \{\lambda^0\} = N - 2n$. Коэффициенты $\mathcal{A}$ зависят только от λ_j и являются их рациональными функциями; назовем их коэффициентами Фурье неприводимой части. Используя свойства σ' (§ X.4) и формулу (2.14), легко вычислять коэффициенты $\mathcal{A}_N^n$ (и сами неприводимые части I_N) в явном виде. Например, $I_0 = I_1 = 0$. Неприводимые части I_2 и I_3 равны:

$$I_2 = \mathcal{A}_2^1(\lambda_1, \lambda_2)(I_1 I_2^{-1} - 1) + \mathcal{A}_2^1(\lambda_2, \lambda_1)(I_2 I_1^{-1} - 1), \quad (2.16)$$

$$\mathcal{A}_2^1(\lambda_1, \lambda_2) = -2\lambda_{12}^2(\lambda_{12} + ic)/(\lambda_{12} - ic), \quad \lambda_{12} \equiv \lambda_1 - \lambda_2, \quad (2.17)$$

$$I_3 = \sum_P \mathcal{A}_3^1(\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{p_3}) [I_{p_1}(I_{p_2})^{-1} - 1]. \quad (2.18)$$

Здесь суммирование ведется по всем перестановкам P спектральных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, l_p = l(\lambda_p)$,

$$\mathcal{A}_3^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 8c\lambda_{12}^{-2} [(\lambda_{12} + ic)/(\lambda_{12} - ic)] \times \\ \times [(\lambda_{32}/\lambda_{31}) + (\lambda_{31}/\lambda_{32})] [(\lambda_{31} + ic)^{-1}(\lambda_{23} + ic)^{-1}]. \quad (2.19)$$

Четырехчастичная неприводимая часть имеет вид

$$I_4(\{\lambda_j\}) = \sum_P \{ (1/2)(l_{p_1} l_{p_2}^{-1} - 1) \mathcal{A}_4^1(\{\lambda_{p_1}\}, \{\lambda_{p_2}\}, \{\lambda_{p_3}\}, \{\lambda_{p_4}\}) + \\ + (1/4)(l_{p_1} l_{p_2} l_{p_3}^{-1} l_{p_4}^{-1} - 1) \mathcal{A}_4^2(\{\lambda_{p_1}\}, \{\lambda_{p_2}\}, \{\lambda_{p_3}\}, \{\lambda_{p_4}\}) \}. \quad (2.20)$$

Суммирование ведется по перестановкам спектральных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Отметим, что для вычисления коэффициента $\mathcal{A}_4^1$ пришлось исследовать трехчастичный формфактор F_3'' (см. (X.4.14)). Понадобился явный вид σ_3' (см. (X.4.10)). Коэффициенты Фурье равны:

$$\mathcal{A}_4^2(\{\lambda_1, \lambda_2\}, \{\lambda_3, \lambda_4\}) = -8c^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2 \lambda_{12}^2 \lambda_{34}^2 \times \\ \times \lambda_{13}^{-2} \lambda_{14}^{-2} \lambda_{23}^{-2} \lambda_{24}^{-2} (\lambda_{12}^2 + c^2)^{-1} (\lambda_{34}^2 + c^2)^{-1} [(\lambda_{13} + ic)/(\lambda_{13} - ic)] \times \\ \times [(\lambda_{14} + ic)/(\lambda_{14} - ic)] [(\lambda_{23} + ic)/(\lambda_{23} - ic)] [(\lambda_{24} + ic)/(\lambda_{24} - ic)] \\ (\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\lambda^+\}, \{\lambda_3, \lambda_4\} = \{\lambda^-\}, \{\lambda^0\} = \emptyset); \quad (2.21)$$

$$\mathcal{A}_4^1 \equiv \mathcal{A}_{4,5}^1 + \mathcal{A}_{4,1}^1 + \mathcal{A}_{4,2}^1 + \mathcal{A}_{4,3}^1; \quad (2.22)$$

$$\mathcal{A}_{4,5}^1(\{\lambda_1\}, \{\lambda_2\}, \{\lambda_3, \lambda_4\}) = -G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \lambda_{34}^{-2};$$

$$\mathcal{A}_{4,1}^1(\{\lambda_1\}, \{\lambda_2\}, \{\lambda_3, \lambda_4\}) = -G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \lambda_{12}^{-2} \times \\ \times (\lambda_{34}^2 + c^2)^{-1} [13c^2 + 10\lambda_{34}^2 - 3\lambda_{12}^2 + 3\lambda_{31}\lambda_{42} + 3\lambda_{41}\lambda_{32}];$$

$$\mathcal{A}_{4,2}^1(\{\lambda_1\}, \{\lambda_2\}, \{\lambda_3, \lambda_4\}) = G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) (\lambda_{34}^2 + c^2)^{-1} \times \\ \times [\lambda_{31}^{-1} \lambda_{23}^{-1} + \lambda_{41}^{-1} \lambda_{24}^{-1}] (6c^2 + 5\lambda_{34}^2 - \lambda_{31}\lambda_{42} - \lambda_{41}\lambda_{32});$$

$$\mathcal{A}_{4,3}^1(\{\lambda_1\}, \{\lambda_2\}, \{\lambda_3, \lambda_4\}) = \\ = -G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) (2\lambda_{12}^2) \lambda_{13}^{-1} \lambda_{32}^{-1} \lambda_{14}^{-1} \lambda_{42}^{-1}$$

$$(\{\lambda_1\} = \{\lambda^+\}, \{\lambda_2\} = \{\lambda^-\}, \{\lambda_3, \lambda_4\} = \{\lambda^0\}, \lambda_{jk} \equiv \lambda_j - \lambda_k); \quad (2.23)$$

$$G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 16c^2 [(\lambda_{12} + ic)/(\lambda_{12} - ic)] \times \\ \times (\lambda_{31} + ic)^{-1} (\lambda_{41} + ic)^{-1} (\lambda_{23} + ic)^{-1} (\lambda_{24} + ic)^{-1}. \quad (2.24)$$

Пятичастичная неприводимая часть I_5 вычислена в работе [11.1].

Вычисление I_N при $N \geq 6$ также можно проводить рекуррентно. К сожалению, не удастся получить простой явной формулы для I_N при любом N . Однако можно вычислить поведение I_N по константе связи c в пределах $c \rightarrow 0$ или $c \rightarrow \infty$. Используя представление σ' и F'' (X.4.11), (X.4.12), получим:

$$I_N \sim \mathcal{A}_N^1 \sim c^{2-N}, \quad c \rightarrow \infty, \quad N \geq 2, \quad (2.25)$$

$$I_N \sim \mathcal{A}_N^1 \sim c^{N-2}, \quad c \rightarrow 0, \quad N \geq 2. \quad (2.26)$$

Итак, неприводимая часть является малой как в пределе слабого, так и в пределе сильного взаимодействия. Приведем здесь некоторые важные свойства $\mathcal{A}_N^n$. Коэффициенты Фурье в существенном зависят от отношения (λ_j/c) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^n(\{\lambda_j^+\}_n, \{\lambda_j^-\}_n, \{\lambda_j^0\}_{N-2n}; c) = \\ = c^{-N} \mathcal{A}_N^n(\{\lambda_j^+/c\}_n, \{\lambda_j^-/c\}_n, \{\lambda_j^0/c\}_{N-2n}; c=1). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Если одновременно увеличивать все λ_j , то $\mathcal{A}_N^n$ убывает:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^n(\{k\lambda_j^+\}, \{k\lambda_j^-\}, \{k\lambda_j^0\}) = \\ = k^{-2N+2} \mathcal{A}_N^n(\{\lambda_j^+\}, \{\lambda_j^-\}, \{\lambda_j^0\}) \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Величина $\mathcal{A}_N^n$ просто преобразуется при комплексном сопряжении:

$$\mathcal{A}_N^n(\{\lambda^{+*}\}, \{\lambda^{-*}\}, \{\lambda^{0*}\}) = \mathcal{A}_N^n(\{\lambda^-\}, \{\lambda^+\}, \{\lambda^0\}). \quad (2.29)$$

Это означает, что неприводимая часть I_N является вещественной в случае, если $I^*(\lambda^*) = I^{-1}(\lambda)$ и все λ_j являются вещественными. Неприводимая часть инвариантна относительно перестановки пар $(\lambda_j, l_j) \leftrightarrow (\lambda_k, l_k)$. Доказательство этих свойств мы оставляем читателю. В § 4 мы увидим, что неприводимые части чрезвычайно важны, так как среднее значение $\langle Q_1^2 \rangle_N$ можно выразить через неприводимые части I_k с $k \leq N$. Замечательное поведение неприводимой части по константе связи позволит получить эффективное представление для коррелятора токов в виде ряда.

§ 3. Основные свойства среднего значения оператора Q_1^2

В § 1 установлены важнейшие свойства оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$; дифференцируя соответствующие фильтры по α , легко установить свойства степеней оператора Q_1^m ($m \geq 0$).

Начнем со среднего значения единичного оператора по отношению к бетевскому вектору (IX.1.1)—(IX.1.2):

$$\begin{aligned} \|1\|_N = c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \langle \psi_N(\{\lambda\}) | \psi_N(\{\lambda\}) \rangle = \\ = c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle = \det_N(\varphi'). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь λ_j удовлетворяют уравнениям Бете (IX.1.3). Неприводимая часть единичного оператора такова

$$I_N^{(0)} = \delta_{0,N}. \quad (3.2)$$

Среднее значение оператора Q_1 равно:

$$\begin{aligned} \|Q_1\|_N = c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \langle \psi_N(\{\lambda\}) | Q_1 | \psi_N(\{\lambda\}) \rangle = \\ = c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) Q_1 \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь λ_j — решения уравнений Бете; $\|Q_1\|_N$ зависит от $4N$ переменных:

$$\|Q_1\|_N = \|Q_1\|_N(\{\lambda_j\}, \{x_j\}, \{y_j\}, \{l_j\}), \quad (3.4)$$

и обладает следующими свойствами:

1) $\|Q_1\|_N$ инвариантно относительно перестановки четверок

$$(\lambda_j, x_j, y_j, l_j) \leftrightarrow (\lambda_k, x_k, y_k, l_k). \quad (3.5)$$

2) $\|Q_1\|_N$ является линейной функцией x_N и y_N .

3) Соответствующие коэффициенты равны следующим выражениям:

$$\partial \|Q_1\|_N / \partial y_N = \|Q_1\|_{N-1}(\{\lambda_j\}, \{x_j\}, \{y_j + K_{jN}\}, \{l_j\}), \quad (3.6)$$

$$\partial \|Q_1\|_N / \partial x_N = \|Q_1 + 1\|_{N-1}(\{\lambda_j\}, \{x_j + K_{jN}\}, \{y_j\}, \{\tilde{l}_j\}). \quad (3.7)$$

Здесь в правых частях $j=1, \dots, N-1$;

$$K_{jN} = K(\lambda_j, \lambda_N) = 2c [c^2 + (\lambda_j - \lambda_N)^2]^{-1}, \quad \tilde{l}_j = l_j(f_{jN}/f_N). \quad (3.8)$$

Мы использовали обозначение $\|Q_1 + 1\| = \|Q_1\| + \|1\|$. Эти формулы легко получаются из (1.10), (1.11).

4) Среднее значение $\|Q_1\|_N$ при $x_j = y_j = 0$ ($j=1, \dots, N$) и фиксированных значениях λ_j и l_j равно нулю:

$$\|Q_1\|_N(\{\lambda_j\}, \{x_j=0\}, \{y_j=0\}, \{l_j\}) = I_N^{(1)} = 0. \quad (3.9)$$

5) Легко вычислить $\|Q_1\|_1$:

$$\|Q_1\|_1 = x_1. \quad (3.10)$$

Среднее значение оператора Q_1^2 ,

$$\begin{aligned} \|Q_1^2\|_N &= c^{-N} \left\{ \prod_{j \neq k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \langle \psi_N(\{\lambda\}) | Q_1^2 | \psi_N(\{\lambda\}) \rangle = \\ &= c^{-N} \left\{ \prod_{j,k}^N f_{jk}^{-1} \right\} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) Q_1^2 \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

зависит от $4N$ независимых переменных:

$$\|Q_1^2\|_N = \|Q_1^2\|_N(\{\lambda_j\}, \{x_j\}, \{y_j\}, \{l_j\}) \quad (3.12)$$

и обладает следующими свойствами:

1) $\|Q_1^2\|_N$ инвариантно относительно перестановки четверок

$$(\lambda_j, x_j, y_j, l_j) \leftrightarrow (\lambda_k, x_k, y_k, l_k). \quad (3.13)$$

2) $\|Q_1^2\|_N$ — линейная функция x_N и y_N .

3) Соответствующие коэффициенты равны:

$$\partial \|Q_1^2\|_N / \partial y_N = \|Q_1^2\|_{N-1}(\{\lambda_j\}, \{x_j\}, \{y_j + K_{jN}\}, \{l_j\}), \quad (3.14)$$

$$\partial \|Q_1^2\|_N / \partial x_N = \| (Q_1 + 1)^2 \|_{N-1}(\{\lambda_j\}, \{x_j + K_{jN}\}, \{y_j\}, \{\tilde{l}_j\}); \quad (3.15)$$

см. обозначения (VIII.3.25). Мы использовали также обозначение

$$\|(Q_1 + 1)^2\| = \|Q_1^2\| + 2\|Q_1\| + 1.$$

4) $\|Q_1^2\|_N$ при $x_j = y_j = 0$ ($j = 1, \dots, N$) равно неприводимой части:

$$\|Q_1^2\|_N(\{\lambda_j\}, \{x_j=0\}, \{y_j=0\}, \{l_j\}) = I_N(\{\lambda_j\}, \{l_j\}), \quad (3.16)$$

которая была изучена в § 2.

5) В одночастичном секторе имеем:

$$\|Q_1^2\|_1 = x_1. \quad (3.17)$$

В следующем параграфе нам удастся с помощью этих свойств выразить $\|Q_1^2\|_N$ через неприводимые части I_k при $k \leq N$.

§ 4. Выражение величины $\|Q_1^2\|_N$ через неприводимые части

Рассмотрим обобщенную двухузельную модель. Напомним, что

$$x_j + y_j = z_j = i \partial \ln r(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_j}. \quad (4.1)$$

Выразим

$$\det_N(\varphi') \quad (4.2)$$

через x_j и y_j . Заметим, что $\varphi'_{jk} = \partial \varphi_j / \partial \lambda_k$, а

$$\varphi_j = i \ln r(\lambda_j) + i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \ln(f_{jk}/f_{kj}). \quad (4.3)$$

Рассмотрим разбиение набора $\{\lambda_j\}$ на два непересекающихся подмножества:

$$\{\lambda_j\}_N = \{\lambda^x\}_{n_x} \cup \{\lambda^y\}_{n_y}, \quad \{\lambda^x\} \cap \{\lambda^y\} = \emptyset. \quad (4.4)$$

Здесь $n_x = \text{card}\{\lambda^x\}$, $n_y = \text{card}\{\lambda^y\}$, $N = \text{card}\{\lambda\} = n_x + n_y$.

Иногда мы будем писать число элементов как индекс множества, например, $\{\lambda^x\}_{n_x}$. Введем величины

$$\varphi_j^x = i \ln l(\lambda_j^x) + \sum_{\substack{\lambda_k^x \in \{\lambda^x\} \\ k \neq j}} i \ln(f(\lambda_j^x, \lambda_k^x)/f(\lambda_k^x, \lambda_j^x)), \quad (4.5)$$

$$\varphi_j^y = i \ln m(\lambda_j^y) + \sum_{\substack{\lambda_k^y \in \{\lambda^y\} \\ k \neq j}} i \ln(f(\lambda_j^y, \lambda_k^y)/f(\lambda_k^y, \lambda_j^y)). \quad (4.6)$$

Число величин φ_j^x равно n_x , а число величин φ_j^y равно n_y . Это позволяет ввести якобианы:

$$\det_{n_x}(\varphi'_x), \quad (\varphi'_x)_{jk} = \partial \varphi_j^x / \partial \lambda_k^x, \quad (4.7)$$

$$\det_{n_y}(\varphi'_y), \quad (\varphi'_y)_{jk} = \partial \varphi_j^y / \partial \lambda_k^y. \quad (4.8)$$

Якобиан (4.7) зависит от величин x_j , а (4.8)—от y_j . Следует отметить, что это якобианы точно того же типа, что и $\det_N(\varphi')$, они обладают теми же свойствами (IX.2.5—2.11). Приведем эти свойства.

1) Якобиан (4.7) инвариантен при замене $(\lambda_k, x_k) \leftrightarrow (\lambda_j, x_j)$, а якобиан (4.8) инвариантен при замене $(\lambda_k, y_k) \leftrightarrow (\lambda_j, y_j)$.

2) Якобиан (4.7) — линейная функция x_{n_x} , а якобиан (4.8) — линейная функция y_{n_y} .

3) коэффициенты при x_{n_x} и y_{n_y} равны соответственно:

$$\partial \det_{n_x}(\varphi'_x) / \partial x_{n_x} = \det_{n_x-1}(\tilde{\varphi}'_x), \quad (4.9)$$

$$\partial \det_{n_y}(\varphi'_y) / \partial y_{n_y} = \det_{n_y-1}(\tilde{\varphi}'_y), \quad (4.10)$$

где в правых частях модификация осуществляется по правилу:

$$\tilde{x}_j = x_j + K(\lambda_j^x, \lambda_{n_x}^x), \quad \tilde{y}_j = y_j + K(\lambda_j^y, \lambda_{n_y}^y). \quad (4.11)$$

4) При $x_j = 0$ якобиан (4.7) равен нулю при $n_x \geq 1$:

$$\det_{n_x}(\varphi'_x)|_{x_j=0} = \delta_{0, n_x}, \quad \det_{n_y}(\varphi'_y)|_{y_j=0} = \delta_{0, n_y}, \quad (4.12)$$

5) при $n = 0, 1$:

$$\det_1(\varphi'_x) = x_1, \quad \det_1(\varphi'_y) = y_1, \quad (4.13)$$

$$\det_0(\varphi'_x) = \det_0(\varphi'_y) \equiv 1. \quad (4.14)$$

Теперь все готово, чтобы доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. Якобиан (4.2) выражается в терминах якобианов (4.8), (4.7) следующей формулой:

$$\|1\|_N = \det_N(\varphi') = \sum_{\{\lambda_j\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} \det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y). \quad (4.15)$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям (4.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 1 в § IX.2. Докажем теорему индукцией по N . При $N=1$ достаточно сравнить формулы (4.13) и (IX.2.9), чтобы убедиться, что формула верна. Предположим, что (4.15) доказана для всех $N \leq M-1$; докажем ее для $N=M$. Рассмотрим величину

$$\Delta_M = \det_M(\varphi') - \sum_{\{\lambda_j\}_M = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} \det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y). \quad (4.16)$$

Это линейная функция x_M . Производная по x_M есть

$$\partial \Delta_M / \partial x_M = \det_{M-1}(\tilde{\varphi}') - \sum_{\{\lambda\}_{M-1} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} \det_{n_x}(\tilde{\varphi}'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y). \quad (4.17)$$

Так как правая часть равна нулю по индукционному предположению, то $\partial \Delta_M / \partial x_M = 0$. Из симметрии следует, что и $\partial \Delta_M / \partial x_j = 0$. Аналогично доказывается, что $\partial \Delta_M / \partial y_j = 0$. Следовательно, Δ_M не зависит от x_j и y_j , но при $x_j = y_j = 0$ ($j = 1, \dots, M$), $\Delta_M = 0$, поэтому $\Delta_M = 0$ тождественно при любых x_j и y_j , и (4.15) выполнено и при $N=M$. Это завершает доказательство теоремы. Следует отметить, что уравнения Бете нигде не использовались при доказательстве.

Рассмотрим теперь среднее значение оператора Q_1 (3.3). Список свойств величины $\|Q_1\|_N$ приведен в § 3.

Т е о р е м а 2. *Среднее значение оператора Q_1 выражается в терминах якобианов (4.7), (4.8) следующей формулой:*

$$\|Q_1\|_N = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} n_x \det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y). \quad (4.18)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в теореме 1.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Нормированное среднее значение оператора Q_1 равно

$$\begin{aligned} \langle Q_1 \rangle_N &\equiv \frac{\langle \Psi_N(\{\lambda\}) | Q_1 | \Psi_N(\{\lambda\}) \rangle}{\langle \Psi_N(\{\lambda\}) | \Psi_N(\{\lambda\}) \rangle} = \frac{\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) Q_1 \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle}{\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle} = \\ &= \frac{\|Q_1\|_N}{\|1\|_N} = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} n_x \det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y) (\det_N(\varphi'))^{-1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Можно сказать, что эта величина порождается неприводимой частью единичного оператора.

Рассмотрим теперь среднее значение оператора Q_1^2 (3.11). Список его свойств приведен в § 3. В данном случае как неприводимая часть единичного оператора, так и неприводимые части оператора Q_1^2 дают вклад в $\|Q_1^2\|_N$. Введем величину, которая будет давать вклад неприводимой части единичного оператора:

$$\|Q_1^2\|_N^0 = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} n_x^2 \det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y). \quad (4.20)$$

Каждая неприводимая часть I_k ($k \leq N$) дает вклад в $\|Q_1^2\|_N$. Обозначим этот вклад через D_N^k :

$$D_N^k(\{\lambda\}) = \sum_{\{\lambda\}_N = \{\lambda^I\}_k \cup \{\lambda^v\}_{N-k}} I_{k,N}^d(\{\lambda^I\}_k, \{\lambda^v\}_{N-k}). \quad (4.21)$$

Суммирование ведется по разбиениям набора всех $\{\lambda_j\}$ на два непересекающихся поднабора $\{\lambda^I\}$ и $\{\lambda^v\}$; $\text{card } \{\lambda^I\} = k$, $\text{card } \{\lambda^v\} = N - k$. Величина I равна:

$$\begin{aligned} I_{k,N}^d &= \sum_{\substack{n \leq [k/2] \\ \{\lambda^I\}_k = \{\lambda^+\}_n \cup \{\lambda^-\}_n \cup \{\lambda^0\}_{k-2n}}} \mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^0\}) \times \\ &\times E_{n,N-k}(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^v\}) \prod_{j=1}^n (I(\lambda_j^+) I^{-1}(\lambda_j^-)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь $\mathcal{A}_k^n$ — коэффициенты Фурье неприводимой части. Суммирование ведется по разбиениям набора $\{\lambda^I\}$ на три непересекающихся набора:

$\{\lambda^+\}$, $\{\lambda^-\}$ и $\{\lambda^0\}$, причем $\text{card}\{\lambda^+\} = \text{card}\{\lambda^-\} = n$, $\text{card}\{\lambda^0\} = k - 2n$, как и в выражении неприводимой части (2.15). Величина E равна:

$$E_{n, N-k}(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^v\}) = \sum_{\{\lambda^v\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} \det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y) \times \\ \times \prod_{m=1}^{n_x} \prod_{j=1}^n (f(\lambda_j^+, \lambda_m^x)/f(\lambda_m^x, \lambda_j^+)) (f(\lambda_m^x, \lambda_j^-)/f(\lambda_j^-, \lambda_m^x)). \quad (4.23)$$

Суммирование ведется по разбиению набора $\{\lambda^v\}$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda^x\}$ и $\{\lambda^y\}$, причем $\text{card}\{\lambda^x\} = n_x$, $\text{card}\{\lambda^y\} = n_y$, $n_x + n_y = N - k$, так же как и в (4.4), (4.15), (4.18). Якобианы $\det_{n_x}(\varphi'_x)$ и $\det_{n_y}(\varphi'_y)$ определены в (4.7), (4.8). Итак, мы определили выражение $D_{k, N}$; оно равно сумме по разбиениям набора всех $\{\lambda\}$ на пять непересекающихся подмножеств: $\{\lambda\} = \{\lambda^I\} \cup \{\lambda^v\}$, $\{\lambda^I\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}$, $\{\lambda^v\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}$. Теперь все готово для того, чтобы доказать теорему.

Т е о р е м а 3. Среднее значение оператора Q^2_1 выражается через неприводимые части по следующей формуле:

$$\|Q^2_1\|_N = \|Q^2_1\|_N^0 + \sum_{k=2}^N D_{k, N}. \quad (4.24)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теперь нормируем величину $\|Q^2_1\|_N$ и запишем ее в окончательных обозначениях:

$$\langle Q^2_1 \rangle_N = \frac{\langle \Psi_N(\{\lambda\}) | Q^2_1 | \Psi_N(\{\lambda\}) \rangle}{\langle \Psi_N(\{\lambda\}) | \Psi_N(\{\lambda\}) \rangle} = \frac{\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) Q^2_1 \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle}{\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle} = \\ = \frac{\|Q^2_1\|_N}{\|1\|_N} = (\|Q^2_1\|_N^0 / \|1\|_N) + \sum_{k=2}^N \Gamma_{k, N}. \quad (4.25)$$

Напомним, что уравнения Бете выполняются. Величина $\Gamma_{k, N}$ — это вклад k -частичной неприводимой части:

$$\Gamma_{k, N} = D_{k, N} / \|1\|_N = \\ = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^I\} \cup \{\lambda^v\}} (\det_{N-k}(\varphi'_v) / \det_N(\varphi')) I_{k, N}^d(\{\lambda^I\}, \{\lambda^v\}). \quad (4.26)$$

Здесь мы ввели новый множитель $\det(\varphi'_v)$, который сократится со знаменателем в формуле (4.29). Матрица φ'_v определяется как $(\varphi'_v)_{jk} = \partial \varphi_j^v / \partial \lambda_k^v$, и

$$\varphi_j^v = i \ln r(\lambda_j^v) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N-k} i \ln (f(\lambda_j^v, \lambda_k^v) / f(\lambda_k^v, \lambda_j^v)). \quad (4.27)$$

Переменная суммирования λ_k^v пробегает все значения из набора $\{\lambda^v\}$ за исключением $\{\lambda_j^v\}$. Число величин φ_j^v равно числу λ_j^v и равно $(N-k)$. Величина I^d — это нормированная величина $\mathbf{I}^d$:

$$I_{k,N}^d(\{\lambda^+\}, \{\lambda^v\}) = \sum_{\{\lambda^l\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}} \mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^0\}) \times \\ \times E_{n,N-k}(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^v\}) \prod_{j=1}^n l(\lambda_j^+) l^{-1}(\lambda_j^-). \quad (4.28)$$

Величина $E_{n,N-k}$ — это нормированная величина $\mathbf{E}_{n,N-k}$:

$$E_{n,N-k}(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^v\}) = \sum_{\{\lambda^v\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} (\det_{N-k}(\varphi_v'))^{-1} \times \\ \times \det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y) \prod_{i=1}^{n_x} \prod_{j=1}^n (f(\lambda_j^+, \lambda_i^x)/f(\lambda_i^x, \lambda_j^+)) (f(\lambda_i^x, \lambda_j^-)/f(\lambda_j^-, \lambda_i^x)). \quad (4.29)$$

Итак, используя алгебраическую структуру анзаца Бете, мы выразили среднее значение оператора Q_1^2 в терминах неприводимых частей. Отметим, что поведение величин $\Gamma_{k,N}$ в пределе сильной связи ($c \rightarrow \infty$) то же, что и неприводимых частей $I_k: \Gamma_{k,N} \sim c^{2-k}$. Поэтому разложение (4.25) аналогично разложению по обратным степеням константы связи. Представление (4.25) есть основной результат этой главы. В дальнейшем оно будет использовано для вычисления корреляционной функции токов в модели НШ в термодинамическом пределе.

Заключение

Мы завершили построение математического аппарата, лежащего в основе вычисления корреляционных функций для интегрируемых моделей. Алгебраический подход был сформулирован в работе [11.6]. В этой статье разработана теория скалярных произведений и вычислены нормы бетевских волновых функций. Изложение глав X, XI следует работам [11.4; 11.7], в которых задача вычисления коррелятора токов была сведена к задаче вычисления среднего от квадрата оператора числа частиц на отрезке, что, в свою очередь, привело к формулировке двухузельной обобщенной модели. Случай ХХЗ цепочки Гейзенберга рассмотрен в работе [11.5].

Четырехчастичная неприводимая часть (2.20) была вычислена в работе [11.2].

В некоторых релятивистских моделях формфактора над физическим вакуумом удастся вычислить в явном виде с помощью квантовых уравнений Гельфанда — Левитана [11.8; 11.9].

Г л а в а XII

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Основная цель этой главы состоит в вычислении коррелятора токов $\langle j(x)j(0) \rangle$ в модели НШ, просто связанного со средним значением $\langle Q_1^2 \rangle$ оператора Q_1^2 по основному состоянию $|\Omega\rangle$ гамильтониана (см. введение к части III): $\langle j(x)j(0) \rangle = (1/2) (\partial^2/\partial x^2) \langle Q_1^2(x) \rangle$. Отправной точкой служит представление (XI.4.25) для среднего значения в обобщенной двухузельной модели. Для получения среднего значения собственно в модели НШ надо, во-первых, отождествить матрицу монодромии (X.1.6) обобщенной двухузельной модели с матрицей монодромии модели НШ по правилу, описанному в § X.1. Во-вторых, следует перейти к термодинамическому пределу, устремив длину ящика L и число частиц N к бесконечности так, что плотность $D = N/L$ остается фиксированной и конечной (подробнее § 1.3). При этом бетевский собственный вектор $|\psi_N\rangle \rightarrow |\Omega\rangle$. Ниже мы следуем этой программе.

В § 1 мы напоминаем читателю связь модели НШ и двухузельной обобщенной модели. В § 2 и в § 3 осуществляется переход к термодинамическому пределу в представлении (XI.4.25) и получено выражение для величины $\langle Q_1^2 \rangle$ в обобщенной модели НШ. Получены одевающие уравнения, которые в § 4 подробно исследуются; для них доказана теорема существования и единственности. В § 5 приведен окончательный ответ для коррелятора токов в модели НШ. Наконец, в § 6 обсуждается обобщение для моделей, обладающих R -матрицей XXZ модели. Выписан явный ответ для коррелятора третьих компонент спинов в XXZ магнетике Гейзенберга, обсуждавшегося в гл. II.

§ 1. Модель НШ и двухузельная модель

Рассмотрим модель НШ. Вакуумные собственные значения ее матрицы перехода на отрезке $[0, x]$ ($0 \leq x \leq L$) суть $a(\lambda) = \exp\{-i\lambda x/2\}$, $d(\lambda) = \exp\{i\lambda x/2\}$, так что функции $r(\lambda)$, $l(\lambda)$ и $m(\lambda)$ даются формулами

$$l(\lambda) = \exp\{-i\lambda x\}, \quad m(\lambda) = \exp\{i\lambda(x-L)\}, \quad (1.1)$$

$$r(\lambda) = l(\lambda)m(\lambda) = \exp\{-i\lambda L\}.$$

Уравнения Бете имеют вид:

$$r(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (f(\lambda_j, \lambda_k)/f(\lambda_k, \lambda_j)) = 1 \quad (j=1, \dots, N). \quad (1.2)$$

Переменные $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ и $z(\lambda)$ (VIII.3.22) в этой модели равны:

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= i \partial \ln l(\lambda) / \partial \lambda = x > 0, \\ y(\lambda) &= i \partial \ln m(\lambda) / \partial \lambda = L - x > 0, \\ z(\lambda) &= i \partial \ln r(\lambda) / \partial \lambda = x(\lambda) + y(\lambda) = L > 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Переход к термодинамическому пределу подробно описан в § 1.3. В этом пределе длина ящика L стремится к бесконечности вместе с числом частиц N в основном состоянии; полная плотность частиц D ,

$$0 < D \equiv N/L = \text{const}, \quad (1.4)$$

остается фиксированной и конечной. Плотность распределения частиц по быстройтам $\rho(\lambda)$ в основном состоянии ($\rho(\lambda_n) = \lim L^{-1} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1}$) удовлетворяет уравнению

$$\rho(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi}, \quad (1.5)$$

где ядро $K(\lambda, \mu) = 2c [c^2 + (\lambda - \mu)^2]^{-1}$ определяется только R -матрицей.

Обратимся к представлению для величины $\langle Q_1^2 \rangle_N$ (XI.4.25). Наша цель — вычислить его термодинамический предел. В этом пределе бетеvский вектор $|\psi_N\rangle \rightarrow |\Omega\rangle$. Оператор $Q_1 \equiv Q_1(x)$ в модели НШ — это оператор числа частиц на отрезке $[0, x]$. Введем следующие обозначения. Нормированное среднее значение оператора Q_1^2 по основному состоянию обозначим $\langle Q_1^2 \rangle$:

$$\langle Q_1^2 \rangle = \frac{\langle \Omega | Q_1^2(x) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} = \lim \frac{\langle \psi_N | Q_1^2 | \psi_N \rangle}{\langle \psi_N | \psi_N \rangle} = \lim \langle Q_1^2 \rangle_N. \quad (1.6)$$

Соотношение (XI.4.25) в термодинамическом пределе перепишем соответственно так:

$$\langle Q_1^2 \rangle = \langle Q_1^2(x) \rangle^0 + \langle\langle Q_1^2(x) \rangle\rangle, \quad (1.7)$$

где

$$\langle Q_1^2(x) \rangle^0 = \lim [\|Q_1^2\|_N^0 / \|1\|_N], \quad (1.8)$$

$$\langle\langle Q_1^2(x) \rangle\rangle = \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(x), \quad \Gamma_k = \lim \Gamma_{k,N}. \quad (1.9)$$

Существование пределов будет доказано в §§ 3—4, где вычисляются соответствующие величины. Коррелятор токов в модели НШ задается при этом формулой

$$\langle\langle :j(x) j(0): \rangle\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle\langle Q_1^2(x) \rangle\rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_k(x). \quad (1.10)$$

§ 2. Величина $\langle Q_1^2(x) \rangle^0$ в термодинамическом пределе

Термодинамический предел величины $\langle Q_1^2(x) \rangle^0$ существует для модели НШ. Введем производящую функцию

$$E_N(\alpha) = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}} e^{\alpha n_x} \frac{\det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y)}{\det_N(\varphi')}. \quad (2.1)$$

Интересующие нас величины так выражаются через E_N :

$$\begin{aligned} E_N(0) &= 1, \quad \partial E_N / \partial \alpha|_{\alpha=0} = \|Q_1\|_N / \|1\|_N, \\ \partial^2 E_N / \partial \alpha^2|_{\alpha=0} &= \|Q_1^2\|_N / \|1\|_N. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем рассматривать случай чисто мнимого α ($\operatorname{Re} \alpha = 0$).

Для того чтобы вычислить термодинамический предел производящей функции $E_N(\alpha)$ в явном виде, необходимо выйти за рамки модели НШ. Двухузельная обобщенная модель описывалась двумя произвольными функциями $l(\lambda)$ и $m(\lambda)$. Оставим произвольной лишь функцию $l(\lambda)$. Наложим на две функции лишь одно ограничение, потребовав, чтобы функция $r(\lambda)$ была той же, что в модели НШ:

$$r(\lambda) = l(\lambda) m(\lambda) = \exp \{-i\lambda L\}. \quad (2.3)$$

Это, в свою очередь, означает, что функция $x(\lambda) = i\partial \ln l(\lambda) / \partial \lambda$ является произвольной. Потребуем лишь, чтобы $x(\lambda)$ была положительной функцией ограниченной вариации ($0 < x(\lambda) < x_{\max}$). Функция $y(\lambda) = i\partial \ln m(\lambda) / \partial \lambda$ так выражается через $x(\lambda)$:

$$y(\lambda) = L - x(\lambda) \rightarrow +\infty \quad (L \rightarrow \infty). \quad (2.4)$$

Это не изменяет термодинамического предела, описанного в предыдущем параграфе (уравнение (1.5) выполняется). В термодинамическом пределе $x(\lambda)$ остается фиксированной конечной функцией, а $y(\lambda) \rightarrow \infty$. Теперь производящая функция E_N (2.1) превратилась в функционал от $x(\lambda)$: $E_N(\alpha, [x(\lambda)])$. Ниже мы увидим, что термодинамический предел этой функции удовлетворяет уравнению в вариационных производных (по $x(\lambda)$), что и позволяет его вычислить. Следует отметить, что $\det(\varphi'_x) > 0$ и $\det(\varphi'_y) > 0$, благодаря $x(\lambda) > 0$ и $y(\lambda) > 0$. Это важно для термодинамического предела.

Простейшее свойство E_N следующее:

$$E_N(\alpha, [x(\lambda) \equiv 0]) = 1. \quad (2.5)$$

Из (XI.4.15) следует также, что

$$E_N(0, [x(\lambda)]) = 1. \quad (2.6)$$

Для того чтобы исследовать термодинамический предел $N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, $D = N/L = \text{const}$, удобно произвести следующее разбиение суммы в (2.1):

$$E_N(\alpha, [x]) = E_N^{(1)}(\alpha, [x]) + E_N^{(2)}(\alpha, [x]). \quad (2.7)$$

Здесь

$$E_N^{(1)}(\alpha, [x]) = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}}^{n_x \leq \ln N} e^{\alpha n_x} \frac{\det_{n_x}(\varphi'_x) \det_{n_y}(\varphi'_y)}{\det_N(\varphi')}. \quad (2.8)$$

Величина $E_N^{(2)}$ — это дополнение суммы (2.8) до полной суммы (2.1). Важную роль сыграет следующая лемма.

Л е м м а 1. *Модуль функции E_N меньше 1:*

$$|E_N(\alpha, [x(\lambda)])| \leq 1. \quad (2.9)$$

Доказательство. Как уже отмечалось выше, $\det(\varphi') > 0$, $\det(\varphi'_x) > 0$, $\det(\varphi'_y) > 0$ (см. (IX.1.4)), следовательно,

$$|E_N(\alpha, [x])| \leq E_N(0, [x]) = 1 \quad (2.10)$$

(мы использовали равенство (2.6) и то, что $\operatorname{Re} \alpha = 0$). Это завершает доказательство.

Аналогично доказывается, что

$$|E_N^{(1)}(\alpha, [x(\lambda)])| < 1. \quad (2.11)$$

Ниже будут важны следующие формулы:

$$|E_N^{(2)}(\alpha, [x])| \leq E_N^{(2)}(0, [x]) = 1 - E_N^{(1)}(0, [x]). \quad (2.12)$$

Напомним, что термодинамический предел $\det_N(\varphi')$ вычислен в (IX.4.10):

$$\det_N(\varphi') = \prod_{j=1}^N (2\pi L \rho(\lambda_j)) \det \left(1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K} \right). \quad (2.13)$$

Здесь $\rho(\lambda)$ задается уравнением (1.5). Отметим, что в (2.8) $n_y \rightarrow \infty$ так, что термодинамический предел $\det_{n_y}(\varphi'_y)$ вычисляется аналогично:

Л е м м а 2. Термодинамический предел $\det_{n_y}(\varphi'_y)$, $n_y \geq N - \ln N$, $y(\lambda) = L - x(\lambda)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \lim \left[\det_{n_y}(\varphi'_y) / \left(\prod_{j=1}^{n_y} 2\pi L \rho(\lambda_j^y) \right) \right] = \\ = \left(\prod_{l=1}^{n_x} \omega(\lambda_l^x) \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q x(\lambda) d\lambda \right\} \det \left(1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K} \right); \end{aligned} \quad (2.14)$$

здесь

$$\omega(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) d\mu \right\}. \quad (2.15)$$

Доказательство. Матрица φ'_y имеет вид, аналогичный (IX.1.5):

$$(\varphi'_y)_{jl} = \delta_{jl} \left[y(\lambda_l^y) + \sum_{m=1}^{n_y} K(\lambda_l^y, \lambda_m^y) \right] - K(\lambda_j^y, \lambda_l^y). \quad (2.16)$$

Представим φ'_y в виде произведения двух сомножителей:

$$\varphi'_y = G^y \theta^y; \quad \det(\varphi'_y) = \det G^y \det \theta^y. \quad (2.17)$$

Здесь матрица θ^y — диагональная матрица:

$$(\theta^y)_{jl} = \delta_{jl} \vartheta_l^y, \quad \vartheta_l^y = y(\lambda_l^y) + \sum_{m=1}^{n_y} K(\lambda_l^y, \lambda_m^y), \quad (2.18)$$

$$(G^y)_{jl} = \delta_{jl} - K(\lambda_j^y, \lambda_l^y) / \vartheta_l^y. \quad (2.19)$$

Термодинамический предел величины ϑ_l^y вычисляется по аналогии с (IX.4.6):

$$\vartheta_l^y = 2\pi L \rho(\lambda_l^y) - x(\lambda_l^y) - \sum_{j=1}^{n_x} K(\lambda_l^y, \lambda_j^x). \quad (2.20)$$

Детерминант θ^y равен:

$$\begin{aligned} \det(\theta^y) / \left(\prod_{m=1}^{n_y} [2\pi L \rho(\lambda_m^y)] \right) &= \\ &= \prod_{j=1}^{n_y} \left[1 - (x(\lambda_j^y) + \sum_{l=1}^{n_x} K(\lambda_j^y, \lambda_l^x)) / (2\pi L \rho(\lambda_j^y)) \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q [x(\mu) + \sum_{l=1}^{n_x} K(\lambda_l^x, \mu)] d\mu \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь мы заменили сумму на интеграл как в (I.3.6). Предел G^y такой же, как и предел G :

$$G^y \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K} \right). \quad (2.22)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \det_{n_y}(\varphi_y') &= \\ &= \prod_{j=1}^{n_y} [2\pi L \rho(\lambda_j^y)] \prod_{l=1}^{n_x} \omega(\lambda_l^x) \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q x(\lambda) d\lambda \right\} \det \left[1 - \frac{1}{2\pi} \hat{K} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Это завершает доказательство леммы 2.

Полезно переписать формулу (2.21) в виде

$$\begin{aligned} \det_{n_y}(\varphi_y') / \det_N(\varphi') &= \\ &= \prod_{m=1}^{n_x} [\omega(\lambda_m^x) / (2\pi L \rho(\lambda_m^x))] \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q x(\lambda) d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Отметим, что аналогично вычисляется термодинамический предел $\det(\varphi_v')$ (XI.4.27):

$$\det_{n_v}(\varphi_v') / \det_N(\varphi') = \prod_{m=1}^{n_v} [\omega(\lambda_m^v) / (2\pi L \rho(\lambda_m^v))]. \quad (2.25)$$

Докажем теперь центральную теорему.

Т е о р е м а 1. Термодинамический предел функции $E_N^{(1)}(\alpha, [x(\lambda)])$ равен:

$$E(\alpha, [x(\lambda)]) = \lim E_N^{(1)}(\alpha, [x(\lambda)]) = \exp \left\{ \int_{-q}^q x(t) P(t, \alpha) dt \right\}. \quad (2.26)$$

Здесь функция $P(t, \alpha)$ определена при $-q \leq t \leq q$, $\operatorname{Re} \alpha = 0$. Она удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$1 + 2\pi P(t, \alpha) = \exp\{\alpha\} \exp\left\{\int_{-q}^q K(t, s) P(s, \alpha) ds\right\} \quad (2.27)$$

и неравенству $\operatorname{Re} P(t, \alpha) \leq 0$.

Доказательство. Преобразуем выражение для $E_N^{(1)}$, учитывая формулу (2.24):

$$E_N^{(1)} = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^x\} \cup \{\lambda^y\}}^{n_x \leq \ln N} \exp\left\{\alpha n_x - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q x(\lambda) d\lambda\right\} \times \\ \times \det_{n_x}(\varphi'_x) \prod_{j=1}^{n_x} [\omega(\lambda_j^x) / (2\pi L \rho(\lambda_j^x))]. \quad (2.28)$$

Обозначим вклад слагаемых с фиксированным n_x через $W(n_x, \alpha)$. В термодинамическом пределе это n_x -кратный интеграл:

$$W(n_x, \alpha) = \left[\exp\left\{\alpha n_x - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q x(\lambda) d\lambda\right\} / n_x! \right] \times \\ \times \int_{-q}^q \prod_{j=1}^{n_x} (\omega(\lambda_j^x) d\lambda_j^x / (2\pi)) \det_{n_x}(\varphi'_x), \quad (2.29)$$

$$W(0, \alpha) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q x(\lambda) d\lambda\right\}.$$

Здесь мы стандартным образом заменили сумму на интеграл. Итак,

$$E_N^{(1)}(\alpha, [x(\lambda)]) = \sum_{n_x=0}^{[\ln N]} W(n_x, \alpha). \quad (2.30)$$

Докажем, что ряд

$$E(\alpha, [x(\lambda)]) = \sum_{n=0}^{\infty} W(n, \alpha) \quad (2.31)$$

является абсолютно сходящимся. Составим ряд из абсолютных значений, имея в виду, что $|W(n, \alpha)| = W(n, 0)$, и используем свойство (2.9), (2.11):

$$\sum_{n=0}^{[\ln N]} |W(n, \alpha)| = \sum_{n=0}^{[\ln N]} W(n, 0) = E^{(1)}(0, [x]) \leq 1. \quad (2.32)$$

Таким образом, частичные суммы составляют возрастающую последовательность, ограниченную сверху, что и доказывает абсолютную

сходимость ряда (2.31). Используя свойство $\det(\varphi'_x)$ (XI.4.9) легко вычислить вариационную производную суммы ряда (2.31):

$$\delta E(\alpha, [x(\lambda)]) / \delta x(\mu) = -\frac{1}{2\pi} E(\alpha, [x(\lambda)]) + (\exp\{\alpha\} / (2\pi)) E(\alpha, [x(\lambda) + K(\lambda, \mu)]). \quad (2.33)$$

Это линейное уравнение в вариационных производных, все его решения можно получить с помощью преобразования Фурье:

$$E(\alpha, [x(\mu)]) = \exp \left\{ \int_{-q}^q x(t) P(t, \alpha) dt \right\}. \quad (2.34)$$

Из (2.31) следует, что функция $P(t, \alpha)$ удовлетворяет требуемому интегральному уравнению (2.27), а из свойства (2.9) следует, что $\operatorname{Re} P(t, \alpha) \leq 0$. Итак, теорема доказана.

В § 4 доказана теорема существования и единственности для уравнения

$$1 + 2\pi P(t, \alpha) = \exp\{\alpha\} \exp \left\{ \int_{-q}^q K(t, s) P(s, \alpha) ds \right\}, \quad (2.35)$$

$$\operatorname{Re} P(t, \alpha) \leq 0 \quad (-q \leq t \leq q).$$

Из этой теоремы следует, что при $\alpha = 0$ существует единственное решение

$$P(t, 0) = 0. \quad (2.36)$$

При этом $E(0, [x]) = 1$.

Покажем также, что термодинамический предел $E_N^{(2)}(\alpha, [x])$ в (2.7) равен нулю. Заметим, что в термодинамическом пределе $E_N^{(1)}(0, [x]) = E(0, [x]) = 1$; этого достаточно, чтобы с помощью (2.12) доказать, что

$$\lim |E_N^{(2)}(\alpha, [x])| = 0. \quad (2.37)$$

Следствием доказанной теоремы является следующее важнейшее утверждение. Термодинамический предел функции $E_N(\alpha, [x])$ существует и равен

$$E(\alpha, [x]) = \lim E_N(\alpha, [x]) = \exp \left\{ \int_{-q}^q x(t) P(t, \alpha) dt \right\}. \quad (2.38)$$

Здесь P удовлетворяет уравнению

$$1 + 2\pi P(t, \alpha) = \exp\{\alpha\} \exp \left\{ \int_{-q}^q K(t, s) P(s, \alpha) ds \right\} \quad (2.39)$$

и неравенству $\operatorname{Re} P \leq 0$.

Итак, термодинамический предел величины $E_N(\alpha, [x])$ вычислен. Обратимся теперь к следствиям. Напомним, что в модели НШ

функция $x(\lambda)$ — это просто расстояние x : $x(\lambda) = x$ (см. (1.3)). С учетом этого получаем для среднего значения $\langle Q_1 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Q_1 \rangle &= \langle \Omega | Q_1 | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim (\| Q_1 \|_N / \| 1 \|_N) = \\ &= \partial E / \partial \alpha |_{\alpha=0} = x \int_{-q}^q P'(t) dt, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где функция P' определяется линейным интегральным уравнением

$$2\pi P'(\lambda) - \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) P'(\mu) d\mu \equiv (2\pi - \hat{K}) P' = 1. \quad (2.41)$$

Учитывая уравнение для плотности $\rho(\lambda)$ (1.5), получим: $P'(\lambda) = \rho(\lambda)$,

$$\langle Q_1 \rangle = x \int_{-q}^q \rho(t) dt = xD, \quad (2.42)$$

где $D = N/L$ (1.4) — полная плотность частиц в основном состоянии. Для величины $\langle Q_1^2 \rangle^0$ получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \langle Q_1^2 \rangle^0 &= \lim (\| Q_1^2 \|_N / \| 1 \|_N) = \partial^2 E / \partial \alpha^2 |_{\alpha=0} = x^2 D^2 + \\ &+ x \int_{-q}^q P''(t) dt = x^2 D^2 + x \int_{-q}^q \rho(t) (2\pi P'(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь функция $P''(t)$ определяется уравнением $(2\pi - \hat{K}) P'' = (2\pi P')^2$.

Таким образом, мы вычислили первое слагаемое в правой части представления (1.7).

§ 3. Вклад k -частичных процессов

Рассмотрим теперь вклады остальных слагаемых в представлении (1.7) для $\langle Q_1^2 \rangle$. Вычислим термодинамический предел Γ_k величины $\Gamma_{k,N}$ (XI.4.26). Сначала займемся пределом функции $E_{n,N-k}$ (XI.4.29).

Теорема 1. Термодинамический предел функции $E_{n,N-k}(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^v\})$ равен $E_n([x], \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\})$:

$$E_n([x], \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) = \exp \left\{ \int_{-q}^q x(t) P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) dt \right\}. \quad (3.1)$$

Функция P_n однозначно определяется интегральным уравнением

$$\begin{aligned} 1 + 2\pi P_n(t) &= \exp \left\{ \int_{-q}^q K(t, s) P_n(s) ds \right\} \prod_{j=1}^n (f(\lambda_j^+, t) / f(\lambda_j^+, t)) \times \\ &\times (f(t, \lambda_j^-) / f(\lambda_j^-, t)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и неравенством $\operatorname{Re} P_n \leq 0$. Здесь $-q \leq t \leq q$, $-q \leq \lambda_j^\pm \leq q$.

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в § 2. Теорема существования и единственности для уравнения (3.2) доказана

в следующем параграфе. Термодинамический предел величины $I_{k,N}^d$ (XI.4.28) равен I_k^d :

$$I_k^d([x], \{\lambda^1\}) = \sum_{\{\lambda^1\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}} \mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+\}_n, \{\lambda^-\}_n, \{\lambda^0\}_{k-2n}) \times \\ \times E_n([x], \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \prod_{j=1}^n I(\lambda_j^+) I^{-1}(\lambda_j^-). \quad (3.3)$$

Напомним, что в модели НШ функции $x(\lambda)$ и $I(\lambda)$ зависят от расстояния x (см. (1.1), (1.3)): $x(\lambda) = x$, $I(\lambda) = \exp\{-ix\lambda\}$. Выписывая эту независимость явно, получим:

$$I_k^d(x, \{\lambda\}) = \sum_{\{\lambda^1\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}} \mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+\}_n, \{\lambda^-\}_n, \{\lambda^0\}_{k-2n}) \times \\ \times \exp\{xp_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\})\}, \quad (3.4)$$

где функция p_n есть

$$p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) = -i \sum_{j=1}^n (\lambda_j^+ - \lambda_j^-) + \int_{-q}^q P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) dt. \quad (3.5)$$

Таким образом, одевание неприводимой части соответствует замене плоской волны $\exp\{-ix \sum (\lambda_j^+ - \lambda_j^-)\}$ в голой неприводимой части (XI.2.15) на функцию $\exp\{-ix p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\})\}$. В пределе для величины $\Gamma_{k,N}$ с помощью формулы (2.23) получаем асимптотическое выражение

$$\Gamma_{k,N} = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^1\}_k \cup \{\lambda^0\}_{N-k}} I_k^d(x, \{\lambda^1\}) \prod_{j=1}^{n_1} [\omega(\lambda_j^1) / (2\pi L\rho(\lambda_j^1))].$$

Заменяя стандартным образом сумму на интеграл, получим окончательное выражение в виде k -кратного интеграла:

$$\Gamma_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{-q}^q \prod_{j=1}^k \left(\frac{\omega(\lambda_j) d\lambda_j}{2\pi} \right) I_k^d(x, \{\lambda_k\}). \quad (3.6)$$

Вес $\omega(\lambda)$ дается формулой (2.15). Вся зависимость от расстояния x функции $\Gamma_k(x)$ входит через неприводимую часть (см. (3.4)).

Таким образом, мы получили термодинамический предел всех слагаемых в представлении (XI.4.25). В следующем параграфе будут подробно исследованы одевающие уравнения (3.2) и доказана для них теорема существования и единственности. В § 5 приведена сводка основных результатов для коррелятора токов в модели НШ.

В заключение приведем список свойств функций $P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\})$, которые являются решением уравнения (3.2); эти свойства легко получить из определения и результатов следующего параграфа:

1) При комплексном сопряжении

$$P_n^*(t^*, \{\lambda^{+*}\}, \{\lambda^{-*}\}) = P_n(t, \{\lambda^-\}, \{\lambda^+\}).$$

2) P_n — симметричная функция всех λ_j^+ и λ_j^- по отдельности.

3) Функция P_{n-1} — это специальный случай функции P_n ; при $\lambda_n^+ = \lambda_n^-$ и $P_n = P_{n-1}$. Если наборы совпадают целиком, $\{\lambda_j^+\} = \{\lambda_j^-\}$, то $P_n = 0$.

4) Если $\{\lambda^+\} \neq \{\lambda^-\}$, то $\operatorname{Re} P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \neq 0$ ни в одной точке в области определения.

5) При $c \rightarrow 0$ функция P_n обращается в нуль почти всюду за исключением областей $|t - \lambda_j^+| \sim c$ ($j=1, \dots, N$).

6) При $c \rightarrow \infty$ функция P_n убывает:

$$P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) = \frac{i}{\pi c} \left(1 + \frac{2q}{\pi c}\right) \sum_{j=1}^n (\lambda_j^- - \lambda_j^+) - \frac{1}{\pi c^2} \left[\sum_{j=1}^n (\lambda_j^+ - \lambda_j^-) \right]^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (3.7)$$

§ 4. Анализ нелинейного интегрального уравнения

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$1 + 2\pi P(t) = S(t) \exp \left\{ \int_{-q}^q K(t, s) P(s) ds \right\} \quad (-q \leq t \leq q). \quad (4.1)$$

Будем интересоваться лишь тем его решением, которое удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} P(t) \leq 0 \quad (-q \leq t \leq q). \quad (4.2)$$

В (4.1) функция $S(t)$ определена на отрезке $-q \leq t \leq q$ и удовлетворяет неравенству

$$|S(t)| \leq 1. \quad (4.3)$$

В остальном она произвольна. Функция $S(t)$ является функциональным параметром для уравнения (4.1). Отметим, что уравнения (2.27) и (3.2) именно такого типа.

Т е о р е м а 1. *Решение уравнения (4.1), удовлетворяющее неравенству (4.2), существует, если функция $S(t)$ удовлетворяет неравенству (4.3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим функциональную последовательность

$$P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t), \dots$$

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = \frac{1}{2\pi} (S(t) - 1), \quad (4.4)$$

$$P_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi} [S(t) \exp \{ \hat{K} P_n \} - 1].$$

Докажем методом сжатых отображений, что эта последовательность сходится, а предел является решением уравнения (4.1). Сначала докажем, что если $\operatorname{Re} P_n \leq 0$, то и $\operatorname{Re} P_{n+1} \leq 0$. Так как ядро оператора $\hat{K}$ положительно, то

$$|\exp \{ \hat{K} P_n \}| \leq 1. \quad (4.5)$$

Ясно также, что

$$|S(t) \exp \{\hat{K}P_n\}| \leq 1. \quad (4.6)$$

Отсюда получим:

$$\operatorname{Re} P_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi} (\operatorname{Re} S(t) e^{\hat{K}P_n} - 1) \leq \frac{1}{2\pi} (|S(t) e^{\hat{K}P_n}| - 1) \leq 0. \quad (4.7)$$

Докажем теперь неравенство

$$|P_{n+1}(t) - P_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \{\hat{K}|P_n - P_{n-1}|\}(t). \quad (4.8)$$

Напомним, что собственные значения оператора $\hat{K}/(2\pi)$ положительны и строго меньше 1 (см. § I.3). Из неравенств (4.8) следует, что последовательность (4.4) сходится в $\mathcal{L}_2$ на отрезке (для доказательства используется метод сжатых отображений). Приступим к доказательству неравенства (4.8). Для этого из уравнения (4.4) вычтем уравнение

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi} (S(t) \exp \{\hat{K}P_{n-1}\} - 1). \quad (4.9)$$

Получим

$$P_{n+1}(t) - P_n(t) = (S(t)/(2\pi)) (\exp \{\hat{K}P_n(t)\} - \exp \{\hat{K}P_{n-1}(t)\}). \quad (4.10)$$

Воспользуемся теперь известным неравенством

$$|\exp \{z_1\} - \exp \{z_2\}| \leq |z_1 - z_2| \quad (\operatorname{Re} z_{1,2} \leq 0). \quad (4.11)$$

Здесь z_1 и z_2 — два комплексных числа, лежащих в левой полуплоскости. Применив это неравенство к (4.10), получим

$$|P_{n+1}(t) - P_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi} |\hat{K}(P_n(t) - P_{n+1}(t))| \leq \frac{1}{2\pi} \hat{K}|P_n(t) - P_{n-1}(t)|. \quad (4.12)$$

Здесь мы воспользовались положительностью ядра K . Итак, неравенство (4.8) доказано. Это означает, что предел последовательности $P_n(t)$ существует. Итак, теорема 1 доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Существует единственное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее неравенству (4.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует два решения (4.1), (4.2) $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Легко доказать, что

$$|P_1(t) - P_2(t)| \leq \frac{1}{2\pi} (\hat{K}|P_1 - P_2|)(t). \quad (4.13)$$

Умножим это неравенство на $|P_1(t) - P_2(t)|$ и проинтегрируем по t , получим

$$\int_{-q}^q v^2(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q dt \int_{-q}^q d\lambda v(\lambda) v(t) K(\lambda, t) \leq 0, \quad (4.14)$$

$$v(t) = |P_1(t) - P_2(t)|.$$

Это неравенство противоречит положительности квадратичной формы, доказанной в § 1.3 (см. формулу (1.3.10)). Таким образом, $P_1(t) = P_2(t)$, что завершает доказательство теоремы 2.

Приведем некоторые следствия доказанных теорем.

$$(1) \text{ Если } S(t) = 1, \text{ то } P(t) \equiv 0 \quad (-q \leq t \leq q). \quad (4.15)$$

(2) Решение $P(t)$ — ограниченная функция на отрезке $[-q, q]$:

$$|P(t)| \leq 1/\pi, \quad -q \leq t \leq q. \quad (4.16)$$

Рассмотрим теперь функцию $S(t)$, которая отлична от единицы на отрезке $-q \leq t \leq q$, и докажем, что $\operatorname{Re} P(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке.

Т е о р е м а 3. Если $S(t)$ не равна тождественно единице на отрезке $[-q, q]$ и удовлетворяет неравенству (4.3), то $\operatorname{Re} P(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого отрезка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим квадрат модуля обеих частей уравнения (4.1):

$$\begin{aligned} [1 + 2\pi \operatorname{Re} P(t)]^2 + 4\pi^2 [\operatorname{Im} P(t)]^2 &= \\ &= |S(t)|^2 \exp \left\{ 2 \operatorname{Re} \int_{-q}^q K(t, s) P(s) ds \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ 2 \int_{-q}^q K(t, s) \operatorname{Re} P(s) ds \right\} \leq 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Отсюда видно, что если $\operatorname{Re} P(t_0) = 0$ в какой-то точке t_0 ($-q \leq t_0 \leq q$), то и $\operatorname{Im} P(t_0) = 0$, т. е.

$$P(t_0) = 0, \text{ если } \operatorname{Re} P(t_0) = 0. \quad (4.18)$$

Напишем уравнение (4.1) в этой точке:

$$1 = S(t_0) \exp \left\{ \int_{-q}^q K(t_0, s) P(s) ds \right\}, \quad (4.19)$$

откуда следует, что

$$1 = |S(t_0)|^2 \exp \left\{ 2 \int_{-q}^q K(t_0, s) \operatorname{Re} P(s) ds \right\}. \quad (4.20)$$

Имея в виду неравенства (4.2), (4.3) и положительность ядра K , приходим к выводу, что $|S(t_0)| = 1$ и

$$\int_{-q}^q K(t_0, s) \operatorname{Re} P(s) ds = 0. \quad (4.21)$$

Учитывая, что $K(t_0, s) > 0$, а $\operatorname{Re} P(s) \leq 0$, заключаем, что

$$\operatorname{Re} P(s) = 0 \quad (-q \leq s \leq q). \quad (4.22)$$

Вернемся к неравенству (4.17); из него следует, что и

$$\operatorname{Im} P(s) = 0 \quad (-q \leq s \leq q). \quad (4.23)$$

Подставим функцию $P(t) \equiv 0$ в уравнение (4.1). Оно может при этом удовлетворяться, только в случае

$$S(t) \equiv 1 \quad (-q \leq t \leq q). \quad (4.24)$$

На этом завершается доказательство теоремы 3.

Изучим теперь следствия доказанных теорем.

1) Функция

$$S(t) = \exp\{\alpha\} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \alpha = 0 \quad (4.25)$$

удовлетворяет условиям всех теорем этого параграфа и, следовательно, эти теоремы справедливы для уравнения (2.25), полученного в § 2.

2) Функция

$$S(t) = [(\lambda_1 - t + ic)/(\lambda_1 - t - ic)][(\lambda_2 - t - ic)/(\lambda_2 - t + ic)] \quad (4.26)$$

при вещественных λ_1 и λ_2 также удовлетворяет неравенству (4.3). Значит, все теоремы этого параграфа справедливы для уравнений (4.1) с такой функцией $S(t)$. В этом случае решение $P(t)$ будет параметрически зависеть от λ_1 и λ_2 . Очевидно, что $P(t; \lambda_1, \lambda_2)$ можно аналитически продолжить по параметрам в область (см. (1.2.4))

$$\operatorname{Im} t = 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_1 \leq 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 \geq 0, \quad (4.27)$$

так как в этой области функция (4.26) удовлетворяет неравенству (4.3). Приведем еще ряд очевидных свойств функции $P(t; \lambda_1, \lambda_2)$:

$$\operatorname{Re} P(t; \lambda_1, \lambda_2) < 0, \quad \text{если} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2; \quad (4.28)$$

$$P(t; \lambda, \lambda) = 0; \quad (4.29)$$

$$P^*(t; \lambda_1, \lambda_2) = P(t^*; \lambda_1^*, \lambda_2^*); \quad (4.30)$$

$$P(-t; -\lambda_1, -\lambda_2) = P(t, \lambda_2, \lambda_1). \quad (4.31)$$

При $c \rightarrow \infty$ функция $S(t)$ (4.26) устремляется к 1. Решения $P(t; \lambda_1, \lambda_2)$ при этом устремляются к нулю. Приведем два первых члена разложения по $(1/c)$:

$$P(t; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{i\pi c}(\lambda_1 - \lambda_2)(1 + 2D/c) - \frac{1}{\pi c^2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + O(1/c^3). \quad (4.32)$$

Здесь $D \equiv N/L$.

В заключение отметим, что функция

$$S(t) = \prod_{j=1}^n \frac{f(\lambda_j^+, t)f(t, \lambda_j^-)}{f(t, \lambda_j^+)f(\lambda_j^-, t)} \quad (4.33)$$

также удовлетворяет неравенству (4.3) в случае вещественных t . Все теоремы настоящего параграфа справедливы, следовательно, и для уравнения (3.2). Свойства решений этого уравнения приведены в конце предыдущего параграфа.

§ 5. Коррелятор токов в модели бозе-газа

Суммируем изложенное в предыдущих параграфах и сформулируем основной результат этой главы — представление для коррелятора токов в модели бозе-газа с точечным отталкиванием частиц, подробно описанного в гл. I (см. также введение к части III). Оператор $j(x)$ плотности числа частиц есть

$$j(x) = \psi^+(x)\psi(x), \quad (5.1)$$

его мы назовем *оператором тока* (5.1). Оператор $Q_1(x)$ числа частиц на отрезке $[0, x]$ ($0 \leq x \leq L$) дается формулой

$$Q_1(x) = \int_0^x \psi^+(x)\psi(x)dx = \int_0^x j(x)dx; \quad (5.2)$$

его среднее значение по основному состоянию $|\Omega\rangle$ (см. (2.40)) есть

$$\langle Q_1(x) \rangle = \langle \Omega | Q_1(x) | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle = Dx, \quad (5.3)$$

где $D = N/L = \int_{-q}^q \rho(\lambda)d\lambda$ — полная плотность частиц. Особое значение имеет среднее значение $\langle Q_1^2(x) \rangle$, через которое выражается коррелятор токов. Для этой величины доказано представление (1.7):

$$\langle Q_1^2(x) \rangle = \langle \Omega | Q_1^2(x) | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle = \langle Q_1^2(x) \rangle^0 + \langle\langle Q_1^2(x) \rangle\rangle. \quad (5.4)$$

Здесь $\langle Q_1^2(x) \rangle^0$ дается формулой (2.43):

$$\langle Q_1^2(x) \rangle^0 = x^2 D^2 + 4\pi^2 x \int_{-q}^q \rho(t)(P'(t))^2 dt. \quad (5.5)$$

Функция $P'(t)$ определяется уравнением (2.41)

$$2\pi P'(t) - \int_{-q}^q P'(s)K(t, s)ds = 1 \quad (5.6)$$

с ядром

$$K(\lambda, \mu) = 2c[c^2 + (\lambda - \mu)^2]^{-1}. \quad (5.7)$$

Величина q — фермиевское значение спектрального параметра.

Второе слагаемое $\langle\langle Q_1^2(x) \rangle\rangle$ в правой части (5.4) задается в виде ряда.

$$\langle\langle Q_1^2(x) \rangle\rangle = \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(x). \quad (5.8)$$

Величина $\Gamma_k(x)$ описывает вклад k -частичных процессов (см. § 3) и дается k -кратным интегралом (с весом $\omega(\lambda)$) от одетой неприводимой части I_k^d (3.6):

$$\Gamma_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{-q}^q \left(\prod_{j=1}^k \frac{\omega(\lambda_j) d\lambda_j}{2\pi} \right) I_k^d(x, \{\lambda\}). \quad (5.9)$$

Вся зависимость от расстояния x здесь входит в одетые неприводимые части I_k^d ((3.3)—(3.5)):

$$\begin{aligned} I_k^d(x, \{\lambda\}) &= \\ &= \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}} \exp\{x p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) A_k^n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^0\})\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Сумма в правой части берется по всем возможным разбиениям набора $\{\lambda\}_k = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ ($\text{card}\{\lambda\} = k$) на три непересекающихся набора $\{\lambda^+\}_n$, $\{\lambda^-\}_n$ и $\{\lambda^0\}_{k-2n}$ ($\text{card}\{\lambda^+\} = \text{card}\{\lambda^-\} = n$, $\text{card}\{\lambda^0\} = k - 2n$). Коэффициенты Фурье $\mathcal{A}_k^n$ — те же, что и в голой неприводимой части (XI.2.15); их свойства подробно рассмотрены в § XI.2. Они зависят только от R -матрицы. Явный вид коэффициентов Фурье, встречающихся в первых трех членах ряда (5.8), приведен в (XI.2.16)—(XI.2.24). Функция $p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\})$ ($n \geq 1$) в (5.8) определяется как

$$p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) = -i \sum_{j=1}^n (\lambda_j^+ - \lambda_j^-) + \int_{-q}^q P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) dt. \quad (5.11)$$

Здесь P_n — функция, определяющаяся нелинейным одевающим уравнением (3.2), подробно исследованным в § 4:

$$\begin{aligned} 1 + 2\pi P_n(t) &= \left(\prod_{j=1}^n (f(\lambda_j^+, t)/f(t, \lambda_j^+)) (f(t, \lambda_j^-)/f(\lambda_j^-, t)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \int_{-q}^q K(t, s) P_n(s) ds \right\} \right); \quad \text{Re } P_n(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь $f(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu + ic)/(\lambda - \mu)$ — матричный элемент R -матрицы XXX модели ((V.3.17), (V.3.18)). Ядро $K(\lambda, \mu)$ дается формулой (5.7).

Наконец, вес $\omega(\lambda)$ в (5.9) есть (см. (2.15)):

$$\omega(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) d\mu \right\}. \quad (5.13)$$

Эта функция удовлетворяет, как легко проверить, условиям

$$0 < e^{-1} < \omega(\lambda) \leq \omega_0 < 1, \\ \omega_0 = \exp \{ -2cq / (\pi(c^2 + 4q^2)) \}. \quad (5.14)$$

Таким образом, k -й член Γ_k ряда (5.9) содержит фактор $\omega^k \leq \omega_0^k$ ($\omega_0 < 1$); именно это и приводит нас к гипотезе о сходимости ряда. Отметим, что в пределе сильной связи ($c \rightarrow \infty$) величины Γ_k малы (см. § XI.2): $\Gamma_k \sim c^{2-k}$, поэтому разложение (5.9) аналогично $(1/c)$ -разложению. В то же время Γ_k не является мономом по $r(1/c)$.

Итак, формула (5.3) дает среднее значение оператора $Q_1(x)$ (5.2), а формулы (5.4)–(5.14) — среднее значение оператора $\langle Q_1^2(x) \rangle$, введенного в § 1.

Приведем теперь окончательный ответ для коррелятора токов в бозе-газе. Оператор тока $j(x)$ есть $j(x) = \psi^+(x)\psi(x)$ (все операторы рассматриваются в один момент времени, и временной аргумент опускаем). Введем обычным образом нормальное произведение двух токов:

$$:j(x)j(0): = \psi^+(x)\psi^+(0)\psi(x)\psi(0). \quad (5.15)$$

Нетрудно проверить, что

$$\langle j(x)j(0) \rangle = \langle \Omega | j(x)j(0) | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle = \langle :j(x)j(0): \rangle + \delta(x) \langle j(0) \rangle. \quad (5.16)$$

Используя (5.3), находим:

$$\langle j(x) \rangle = \langle j(0) \rangle = D = N/L = \int_{-q}^q \rho(\lambda) d\lambda = \partial \langle Q_1(x) \rangle / \partial x. \quad (5.17)$$

Для среднего от нормального упорядоченного произведения операторов тока получаем:

$$\langle :j(x)j(0): \rangle = (1/2) (\partial^2 / \partial x^2) \langle Q_1^2(x) \rangle = \langle j(0) \rangle^2 + \langle j(x)j(0) \rangle. \quad (5.18)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует вкладу величины $\langle Q_1^2(x) \rangle^0$ (5.5): $\langle j(0) \rangle^2 = D^2$. Нетривиальная часть коррелятора $\langle j(x)j(0) \rangle \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; она есть

$$\langle j(x)j(0) \rangle = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_k(x), \quad (5.19)$$

где $\Gamma_k(x)$ дается формулами (5.9)–(5.13). Подчеркнем, что дифференцирование по x функции $\Gamma_k(x)$ сводится к дифференцированию экспоненты в (5.10).

В пределе $c \rightarrow \infty$, как отмечалось выше, $\Gamma_k \sim c^{2-k}$. Поэтому, чтобы получить из ряда (5.19) обычное разложение по степеням $(1/c)$ в данном порядке, достаточно использовать лишь конечное число членов ряда. В нулевом порядке (т. е. при $c = \infty$) достаточно знать Γ_2 . При этом $K(\lambda, \mu) = 0$ ($c = \infty$) и, воспользовавшись явным видом (XI.2.16), получим

$$\langle j(x)j(0) \rangle = (q/\pi)^2 - (\sin(qx)/(\pi x))^2 \quad (c = \infty). \quad (5.20)$$

Чтобы вычислить первую поправку к этому выражению при $c \rightarrow \infty$, нужно учесть вклад I_3 (XI.2.18) и формулу (3.7). В результате получим:

$$\begin{aligned} \langle j(x)j(0) \rangle = & (q/\pi)^2 + (4/c)(q/\pi)^3 - (1 + (2/c)(\partial/\partial x_r)) \times \\ & \times (\sin(qx_r)/(\pi x_r))^2 + \frac{2}{\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sin(qx)}{\pi x} \int_{-q}^q d\lambda \sin(\lambda x) \ln \left(\frac{q+\lambda}{q-\lambda} \right) \right] - \\ & - \frac{8q}{\pi c} \left(\frac{\sin qx}{\pi x} \right)^2 + O(1/c^2). \quad (5.21) \end{aligned}$$

Здесь $x_r = \left(1 + \frac{2q}{\pi c}\right)x$. Поправка к этому выражению имеет порядок $(1/c^2)$ при любом x . Таким же способом легко вычислить любое слагаемое в формуле (5.19).

Итак, мы сформулировали окончательный ответ для коррелятора бозе-газа (модели НШ). Подчеркнем еще раз, что доказательство формулы (5.19) возможен лишь в рамках алгебраического анзаца Бете с использованием обобщенной модели.

§ 6. Коррелятор спинов в XXZ магнетике Гейзенберга

Техника, описанная в §§ 1—5, является весьма общей. Она применима не только для коррелятора токов в модели НШ, но и для вычисления корреляционных функций в любых моделях, обладающих R -матрицей XXX модели ((VI.1.3), (VI.1.4)) или XXZ модели ((VI.1.3), (VI.1.5)), которые решаются с помощью алгебраического анзаца Бете. Мы приведем ответ для одновременного коррелятора третьих компонент спинов в одномерном XXZ магнетике Гейзенберга. Схема вычислений по существу та же, что в XXX случае, подробно рассмотренном ранее. Необходимые изменения подробно изложены в работе [12.9], результаты которой излагаются ниже.

Напомним, что XXZ магнетик Гейзенберга описывает взаимодействие спинов $1/2$, расположенных в узлах одномерной решетки. Эта модель подробно описана в гл. II (см. также § V.5, где обсуждается ее связь с общей схемой КМОЗ). Оператору спина в m -м узле решетки ($m=1, \dots, M$) соответствуют матрицы Паули $\sigma_x^{(m)}$, $\sigma_y^{(m)}$, $\sigma_z^{(m)}$. Гамильтониан модели во внешнем поле h , направленном по оси z , дается формулами (II.1.1), (II.1.2). Параметр анизотропии Δ связан с «константой связи» η в R -матрице соотношением $\Delta = \cos 2\eta$. (Значение $2\eta=0$ соответствует изотропному XXX ферромагнетик; $2\eta=\pi/2$ — свободным фермионам. При $2\eta=\pi$ имеем изотропный антиферромагнетик.) Мы будем рассматривать только антиферромагнитную область

$$0 < 2\eta < \pi/2. \quad (6.1)$$

В этой области ферромагнитное состояние $|0\rangle = \bigotimes_m |\uparrow\rangle_m$ не является основным состоянием гамильтониана (при $|h| \leq h_c \equiv \frac{1}{4} \sin^2 \eta$). Возбуждения над ферромагнитным состоянием спиновой волны описывается в терминах голых частиц с импульсами и энергиями p_0, ε_0 , которые в терминах аддитивного спектрального параметра λ записываются так (см. § II.1):

$$p_0(\lambda) = i \ln [\operatorname{ch}(\lambda - i\eta) / \operatorname{ch}(\lambda + i\eta)], \quad (6.2)$$

$$\varepsilon_0(\lambda) = -2 \sin 2\eta (dp_0(\lambda)/d\lambda) + 2h. \quad (6.3)$$

Основное состояние гамильтониана $|\Omega\rangle$ получается заполнением этими частицами зоны Ферми $-\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda$. В термодинамическом пределе число узлов решетки $M \rightarrow \infty$ и число частиц в основном состоянии $N \rightarrow \infty$, причем плотность $D = N/M$ остается конечной. Плотность $\rho(\lambda)$ распределения частиц по спектральным параметрам дается линейным интегральным уравнением (см. II.2.6)

$$\rho(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{p'_0(\pi)}{2\pi},$$

где K — ядро, которое вычисляется по R -матрице XXZ модели (см. II.2.7):

$$K(\lambda, \mu) = \sin 4\eta [\operatorname{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta) \operatorname{sh}(\lambda - \mu - 2i\eta)]^{-1}. \quad (6.4)$$

Фермиевский спектральный параметр Λ определяется из условия равенства нулю энергии одетого возбуждения на границе зоны Ферми и зависит от магнитного поля ($\Lambda = \infty$ при $h=0$; $\Lambda=0$ при $h=h_c$). Полная плотность частиц D выражается через $\rho(\lambda)$:

$$0 \leq D = \lim(N/M) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda \leq 1/2. \quad (6.5)$$

Рассмотрим теперь одновременной коррелятор третьих компонент спинов:

$$\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle \equiv \langle \Omega | \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle = \langle \sigma_z^{(1)} \rangle^2 + \langle\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle\rangle. \quad (6.6)$$

Первое слагаемое здесь есть просто квадрат намагниченности σ (см. § II.3.3):

$$\sigma \equiv \langle \sigma_z^{(1)} \rangle = \langle \sigma_z^{(m)} \rangle = 1 - 2D. \quad (6.7)$$

Второе слагаемое в (6.6) описывает корреляции и стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Оно представляется в виде

$$\langle\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle\rangle = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{D}^{(2)} \Gamma_k(m), \quad (6.8)$$

где $\mathcal{D}^{(2)}$ — оператор второй производной на решетке, действующий на функцию $f(m)$ узла решетки по правилу

$$\mathcal{D}^{(2)}f(m) = f(m+1) + f(m-1) - 2f(m). \quad (6.9)$$

Величина Γ_k , дающая вклад k -частичных процессов в коррелятор, есть k -кратный интеграл:

$$\Gamma_k(m) = \frac{1}{k!} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\omega(\lambda_j) d\lambda_j}{2\pi} \right) I_k^d(m, \{\lambda\}). \quad (6.10)$$

Эта формула аналогична (5.9). Вся зависимость от расстояния m входит в одетые неприводимые части I_k^d , определяемые в полной аналогии с (5.10) — (5.12):

$$I_k^d(m, \{\lambda\}) = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}} \exp \{m p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \times \\ \times \mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+\}_n, \{\lambda^-\}_n, \{\lambda^0\}_{k-2n}). \quad (6.11)$$

Сумма здесь берется так же, как в (5.10). Функция p_n дается формулой, аналогичной (5.11):

$$p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \equiv \\ \equiv -i \sum_{j=1}^n (p_0(\lambda_j^+) - p_0(\lambda_j^-)) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) p'_0(t) dt, \quad (6.12)$$

где, как и в (5.12), функция P определяется следующим нелинейным интегральным уравнением:

$$1 + 2\pi P_n(t) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{f(\lambda_j^+, t) f(t, \lambda_j^-)}{f(t, \lambda_j^+) f(\lambda_j^-, t)} \right) \exp \left\{ \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(t, s) P_n(s) ds \right\}; \\ \operatorname{Re} P_n \leq 0. \quad (6.13)$$

Однако теперь $f(\lambda, \mu) = \operatorname{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta) / \operatorname{sh}(\lambda - \mu)$ — матричный элемент R -матрицы XXZ модели ((VI.1.3), (VI.1.5)), а ядро K дается формулой (6.4). Коэффициенты Фурье $\mathcal{A}_k^n$ в (6.11) тоже определяются R -матрицей XXZ модели. Их основные свойства, а также явный вид $\mathcal{A}_k^n$ при $k=2, 3$ приведены ниже (см. (6.18), (6.19)). Наконец, вес $\omega(\lambda)$ в (6.13) дается так

$$\omega(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda, \mu) d\mu \right\}. \quad (6.14)$$

Заметим, что при $0 < 2\eta < \pi/2$ (6.1) (т. е. в области, где выпукло действие Янга; см. (V.1.19) — (V.1.24))

$$0 < \omega(\lambda) \leq \omega(\Lambda) < 1 \quad (0 < 2\eta < \pi/2), \quad (6.15)$$

что приводит нас к гипотезе о сходимости ряда (6.8) в этой области. При изучении асимптотики корреляторов в гл. XIII мы

будем рассматривать также случай $\pi/2 < 2\eta < \pi$; соответствующие ответы получаются аналитическим продолжением из области (6.1).

Заметим, что члены ряда (6.8) малы в окрестности свободных фермионов ($2\eta \rightarrow \pi/2$): $\Gamma_k \sim (\eta - \pi/4)^{k-2}$ (см. ниже (6.16)). Это позволяет извлекать из (6.8) обычный ряд по константе связи в окрестности свободных фермионов; при этом вклад в данном порядке по $(\eta - \pi/4)$ дает лишь конечное число членов ряда (6.8).

Итак, формулы (6.8) — (6.14) дают представление для одновременного коррелятора третьих компонент спинов в ХХЗ магнетике.

В заключение остановимся на свойствах величин, входящих в выражение для $\Gamma_k(m)$ (6.10). Коэффициенты Фурье $\mathcal{A}_k^n$ обладают следующими свойствами.

(1) В окрестности свободных фермионов

$$\mathcal{A}_k^n \sim I_k^d \sim \Gamma_k \sim [(\pi/2) - 2\eta]^{k-2} \quad (2\eta \rightarrow \pi/2). \quad (6.16)$$

(2) $\mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+, \{\lambda^-, \{\lambda^0\}\})$ является симметричной функцией аргументов $\{\lambda^+\}$, аргументов $\{\lambda^-\}$ и аргументов $\{\lambda^0\}$ (по отдельности).

(3) Коэффициенты Фурье — рациональные функции от $\exp\{\lambda_{jj}\}$ ($\lambda_j \in \{\lambda\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}$).

(4) При перестановке $\{\lambda^+\} \leftrightarrow \{\lambda^-\}$

$$\mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+, \{\lambda^-, \{\lambda^0\}\}) = [\mathcal{A}_k^n(\{\lambda^{-*}, \{\lambda^{+*}, \{\lambda^{0*}\})]]^*,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+, \{\lambda^-, \{\lambda^0\}\}) &= \left(\prod_{(+), (-)} [f(\lambda^+, \lambda^-)/f(\lambda^-, \lambda^+)] \right) \times \\ &\times \left(\prod_{(0), (+)} f^{-1}(\lambda^0, \lambda^+) \right) \left(\prod_{(0), (-)} f^{-1}(\lambda^-, \lambda^0) \right) a_k^n(\{\lambda^+, \{\lambda^-, \{\lambda^0\}\}), \\ a_k^n(\{\lambda^+, \{\lambda^-, \{\lambda^0\}\}) &= a_k^n(\{\lambda^-, \{\lambda^+, \{\lambda^0\}\}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Здесь $f(\lambda, \mu) = \text{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta)/\text{sh}(\lambda - \mu)$.

(5) Приведем несколько первых коэффициентов Фурье. В член Γ_2 ряда (6.8) входит только функция $\mathcal{A}_2^1(\lambda_1, \lambda_2)$ ($\lambda_1 \equiv \lambda^+$, $\lambda_2 \equiv \lambda^-$):

$$\mathcal{A}_2^1(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{2}{\text{sh}^2 \lambda_{12}} \frac{\text{sh}(\lambda_{12} + 2i\eta)}{\text{sh}(\lambda_{12} - 2i\eta)}, \quad (6.18)$$

где обозначено $\lambda_{jk} \equiv \lambda_j - \lambda_k$.

Слагаемое Γ_3 содержит только $\mathcal{A}_3^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ($\lambda_1 \equiv \lambda^+$, $\lambda_2 \equiv \lambda^-$, $\lambda_3 \equiv \lambda^0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3^1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \\ &= \frac{4 \sin 4\eta}{\text{sh}^2 \lambda_{12}} \frac{\text{sh}(\lambda_{12} + 2i\eta)}{\text{sh}(\lambda_{12} - 2i\eta)} \frac{1}{\text{sh}(\lambda_{31} + 2i\eta) \text{sh}(\lambda_{23} + 2i\eta)} \left(\frac{\text{sh} \lambda_{32}}{\text{sh} \lambda_{31}} + \frac{\text{sh} \lambda_{31}}{\text{sh} \lambda_{32}} \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Слагаемое Γ_4 содержит функции $\mathcal{A}_4^1$ и $\mathcal{A}_4^2$, приведенные в работе [14.4].

Функции $P_n(t, \{\lambda^+, \{\lambda^-\})$ обладают следующими свойствами:

(1) Эти функции симметричны при перестановке аргументов $\lambda_j \in \{\lambda^+\}$ и симметричны при перестановке $\lambda_k \in \{\lambda^-\}$ (по отдельности). Они также обладают следующим свойством (t — вещественно):

$$P_n^*(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) = P_n(t, \{\lambda^{-*}\}, \{\lambda^{+*}\}). \quad (6.20)$$

$$(2) P_n(t, \{\lambda^+\}_n, \{\lambda^-\}_n) |_{\lambda_n^+ = \lambda_n^-} = P_{n-1}(t, \{\lambda^+\}_{n-1}, \{\lambda^-\}_{n-1}). \quad (6.21)$$

$$(3) |P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\})| \leq 1/\pi.$$

(4) $P_n \rightarrow 0$ при $2\eta \rightarrow \pi/2$, первые два члена разложения по $\varepsilon \equiv (\pi/2) - 2\eta$ есть:

$$P_n(t) = -\frac{i\varepsilon}{\pi} \sum_{j=1}^n [\text{th}(\lambda_j^+ - t) - \text{th}(\lambda_j^- - t)] - \\ - \frac{\varepsilon^2}{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^n [\text{th}(\lambda_j^+ - t) - \text{th}(\lambda_j^- - t)] \right\}^2 + \\ + i\varepsilon^2 \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\text{cth}(\lambda_j^- + t) - \text{cth}(\lambda_j^+ + t) + \frac{(\lambda_j^+ + t)}{\text{sh}^2(\lambda_j^+ + t)} - \frac{(\lambda_j^- - t)}{\text{sh}^2(\lambda_j^- - t)} \right] \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (6.22)$$

В заключение сделаем следующее замечание. При исследовании коррелятора и, особенно, вычисления его асимптотики на больших расстояниях удобно иметь дело не непосредственно с магнетиком Гейзенберга, а с «обобщенной XXZ моделью». В обобщенной XXZ модели функции $p_0(\lambda)$ и $\varepsilon_0(\lambda)$ уже не даются формулами (6.2), (6.3), а являются произвольными (требуется только, чтобы структура основного состояния в модели в термодинамическом пределе соответствовала заполнению зоны Ферми — $\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda$). Это следствие произвольности функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. В обобщенной модели можно ввести оператор числа частиц в первых m узлах решетки $Q_1(m)$; для XXZ магнетика

$$Q_1(m) = \sum_{j=1}^m q_j, \quad q_j = (1 - \sigma_z^{(j)})/2 \quad (6.23)$$

(оператор $Q \equiv Q_1(M)$ — это оператор полного числа частиц: $Q|\Omega\rangle = N|\Omega\rangle$). Вычисления среднего значения оператора $Q_1(m)$ проводятся буквально по той же схеме, что и оператора $Q_1(x)$ (5.2) модели НШ. В результате для него получается представление, аналогичное представлению (5.2) — (5.12):

$$\langle Q_1^2(m) \rangle = \langle \Omega | Q_1^2(m) | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle = \langle Q_1^2(m) \rangle^0 + \langle\langle Q_1^2(m) \rangle\rangle. \quad (6.24)$$

Первое слагаемое в правой части дается формулой, аналогичной (5.5), оно не дает вклада в нетривиальную часть коррелятора, и мы его не выписываем явно. Второе, нетривиальное, слагаемое в правой части (6.9) представляется в виде бесконечного ряда

$$\langle\langle Q_1^2(m) \rangle\rangle = \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(m), \quad (6.25)$$

где $\Gamma_k(m)$ даются формулами (6.10)—(6.14). Нетрудно проверить, что $\langle\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle\rangle = 2\mathcal{Q}^{(2)} \langle\langle Q_1^2(m) \rangle\rangle$ для XXZ магнетика, что восстанавливает формулу (6.8).

Совершенно так же можно получить представление типа (5.4), (5.8) для величины $\langle Q_1^2(x) \rangle$ в «обобщенной модели НШ». Эта модель отличается от модели нерелятивистского бозе-газа тем, что голый импульс $p_0(\lambda)$ и голая энергия $\varepsilon_0(\lambda)$ являются произвольными функциями. Это следствие произвольности функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. Более точно, надо потребовать, чтобы $p_0(\lambda) = -p_0(-\lambda)$, $p'_0(\lambda) > 0$ и чтобы основное состояние модели имело ту же структуру, что и для бозе-газа (т. е. представляло собой зону Ферми, заполненную частицами с $-q \leq \lambda \leq q$).

Ниже мы увидим, что наиболее важные физические характеристики моделей (такие как критические индексы) не зависят от произвольных функций $p_0(\lambda)$ и $\varepsilon_0(\lambda)$, а определяются только R -матрицей и значением спектрального параметра на границе зоны Ферми.

Заключение

В основу этой главы легли результаты работ [12.8; 12.9; 12.11]. Вопрос о вычислении корреляционных функций — один из важнейших при исследовании моделей квантовой теории поля и статистической физики. Дело в том, что знание этих функций позволяет найти все физически интересные характеристики моделей. Поэтому уже давно предпринимался целый ряд попыток вычислить корреляционные функции в двумерных моделях, в которых основное состояние представляет собой море Дирака над псевдовакуумом (именно в таких моделях нахождение корреляционных функций является нетривиальной задачей) [12.7]. Например, для двумерной модели Изинга (эквивалентной модели свободных фермионов) корреляторы вычислены в работах [12.5; 12.6].

Вопрос о вычислении корреляционных функций в одномерном бозе-газе с помощью анзаца Бете впервые поставлен в работах [12.13; 12.14], где исследовался коррелятор полей $\langle \psi^+(x) \psi(y) \rangle$ при $c = \infty$ и было получено для него представление в виде ряда. В работе [12.10] этот ряд был исследован; было доказано, что он удовлетворяет дифференциальному уравнению типа Пенвеле.

Метод вычисления корреляционных функций в рамках квантового метода обратной задачи, описанный выше на примере коррелятора токов в модели НШ, является весьма общим. Он позволяет вычислять как другие корреляторы в модели НШ, так и корреляционные функции в любых интегрируемых моделях с R -матрицей XXX или XXZ моделей. Например, представление для коррелятора полей и многоточечных корреляторов в модели НШ были получены в работе [12.3]. Коррелятор третьих компонент спинов в XXZ антиферромагнетике Гейзенберга вычислен в [12.1; 12.9]. Метод может быть обобщен и на модели с другими R -матрицами.

Любопытно заметить, что спектр физического гамильтониана H никак не входит в выражение для одновременных корреляционных функций. В том числе никак не входит функция $\varepsilon_0(\lambda)$ — голая энергия возбужденного состояния, которая также может быть сделана произвольной за счет изменения тождеств следов (она определяет лишь фермиевское значение спектрального параметра). При вычислении корреляционных функций методом, приведенным в настоящей главе, вообще ничего не нужно знать о структуре связанных состояний около физического вакуума (если море Дирака состоит не только из элементарных частиц).

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ III

Мы проиллюстрировали метод вычисления корреляционных функций в рамках КМОЗ. К сожалению, из-за ограниченности объема мы не упомянули о подходе к изучению корреляторов, основанном на квантовом уравнении Гельфанда—Левитана—Марченко [III. 1—III.3]. В рамках этого метода, слившегося с чисто аксиоматическим подходом, удастся вычислить формфакторы в релятивистских моделях квантовой теории поля [III.4—III.9]. Отметим, что задача вычисления величины, аналогичной σ' , возникла при исследовании формфакторов в нелинейной $O(3)$ σ -модели и была решена в [III.4].

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе нам удалось построить представление корреляционной функции в виде бесконечного ряда, члены которого малы в окрестности свободных фермионов. Именно этот факт позволит нам исследовать асимптотику корреляционных функций на больших расстояниях и получить явные ответы. В гл. I была построена термодинамика одномерного бозе-газа. В гл. XIII мы вычислили корреляционные функции в состоянии термодинамического равновесия.

Для того чтобы исследовать поведение коррелятора при ненулевой температуре, мы обобщим развитую в гл. XII технику на этот случай. Нулевая температура является точкой фазового перехода в одномерных моделях, выше ее коррелятор убывает экспоненциально. В гл. XIII получим как точную формулу для корреляционного радиуса бозе-газа, так и ее асимптотику в области малых температур.

Степенной характер убывания корреляторов при нулевой температуре определяется критическими индексами. Следует отметить широкий интерес к проблеме их вычисления в магнетике Гейзенберга и бозе-газе. Однако лишь квантовый метод обратной задачи дает возможность с единой точки зрения взглянуть на эту проблему.

В гл. XIV мы покажем, что критический индекс интегрируемой модели определяется ее R -матрицей—в этом его универсальность.

Глава XIII

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОРРЕЛЯТОРЫ

Разработанную в главах XI, XII технику вычисления корреляционных функций легко обобщить на случай произвольных температур. Для этого удобно использовать подход, сформулированный в § 1.5. Мы сосредоточимся на модели бозе-газа, хотя полученные результаты переносятся и на другие точно решаемые модели. Температурный коррелятор токов по-прежнему представим в виде ряда. Мы увидим, что в отличие от случая нулевой температуры на больших расстояниях он убывает экспоненциально:

$$\langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle_{\tau} \sim e^{-x/r_c}.$$

Нами будет предложена формула зависимости корреляционного радиуса от температуры и константы связи. В § 1 настоящей главы мы демонстрируем «калибровочную инвариантность» коррелятора токов. Это используется для того, чтобы в § 2 получить представление для температурного коррелятора токов. Замечательно, что это представление отличается от случая нулевых температур лишь заменой меры интегрирования (см. (I.8.5)). В § 3 доказана теорема существования и единственности для одевающего уравнения корреляторов при конечной температуре, доказательство аналогично случаю нулевых температур. В § 4 обсуждается предел сильной связи в одномерном бозе-газе ($c \rightarrow \infty$). При этом выражение для корреляторов упрощается. В § 5 получена формула для зависимости корреляционного радиуса от температуры.

§ 1. Усреднение по состоянию термодинамического равновесия

Напомним, что состояние термодинамического равновесия (см. § I.5) является смесью различных собственных функций гамильтониана. Выберем одну из них $|\Omega_T\rangle$ и вычислим среднее от произведения токов $j(x)j(0)$:

$$\frac{\langle \Omega_T | j(x)j(0) : | \Omega_T \rangle}{\langle \Omega_T | \Omega_T \rangle}. \quad (1.1)$$

Здесь : — означает нормальное упорядочение:

$$:j(x)j(0): = :\psi^+(x)\psi(x)\psi^+(0)\psi(0): = \psi^+(x)\psi^+(0)\psi(x)\psi(0). \quad (1.2)$$

Мы покажем, что среднее (1.1) зависит лишь от макроскопических характеристик системы, а не от выбора конкретной собственной функции гамильтониана $|\Omega_T\rangle$. Это свойство будет использовано в следующем параграфе при вычислении температурного коррелятора токов, который и равен (1.1). Следуя программе, изложенной в гл. XII, мы получим разложение среднего (1.1), подобное (XII. 5.19), отличающееся лишь заменой меры интегрирования

$$\int_{-q}^q d\lambda \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \vartheta(\lambda) \quad (1.3)$$

— в полном соответствии с мнемотическим правилом, сформулированным в части I (1.8.5). Здесь $\vartheta(\lambda)$ — фермиевский вес:

$$\vartheta(\lambda) = \frac{1}{1 + \exp \left\{ \frac{\varepsilon(\lambda)}{T} \right\}}. \quad (1.4)$$

Интересующее нас среднее равно

$$\frac{\langle \Omega_T | j(x)j(0) : | \Omega_T \rangle}{\langle \Omega_T | \Omega_T \rangle} = D^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(x). \quad (1.5)$$

В этом разложении

$$D = \frac{\langle \Omega_T | j(0) | \Omega_T \rangle}{\langle \Omega_T | \Omega_T \rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda, \quad (1.6)$$

а общий член ряда Γ_k , который можно интерпретировать как вклад k -частичного процесса в среднее (1.1), равен

$$\Gamma_k = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^k \frac{\vartheta(\lambda_j) \omega(\lambda_j)}{2\pi} d\lambda_j I_k^d(\{\lambda\}). \quad (1.7)$$

Статистический вес $\omega(\lambda)$ — это функция ограниченной вариации:

$$\omega(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \mu) \vartheta(\mu) d\mu \right\}, \quad 0 < \omega(\lambda) < 1. \quad (1.8)$$

Очевидно, что $\omega(\lambda) = \omega(-\lambda)$.

Одетая неприводимая часть I_k^d строится по тем же коэффициентам Фурье $\mathcal{A}_k^n$, что и при $T=0$ (XII.5.10):

$$I_k^d = \sum_{\{\lambda\} = \{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \cup \{\lambda^0\}} \exp_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) \mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}, \{\lambda^0\}). \quad (1.9)$$

Одетая функция p_n равна:

$$p_n(\{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) = i \sum_{j=1}^n (\lambda_j^- - \lambda_j^+) + \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(t) P_n(t, \{\lambda^+\}, \{\lambda^-\}) dt. \quad (1.10)$$

Функция P_n удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$1 + 2\pi P_n(t) = \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{f(\lambda_j^+, t) f(t, \lambda_j^-)}{f(t, \lambda_j^+) f(\lambda_j^-, t)} \right\} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, s) P_n(s) \vartheta(s) ds \right\}. \quad (1.11)$$

Предэкспоненциальный множитель в (1.11) тот же, что и при $T=0$ (XII.5.12). В § 3 мы подробно исследуем уравнение (1.10) и функцию P_n . В пределе сильной связи $c \rightarrow \infty$ по-прежнему

$$\Gamma_k \sim (1/c)^{k-2}.$$

Явно выпишем два первых члена ряда (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_2(x) = & -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \omega(\lambda_1) \vartheta(\lambda_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \omega(\lambda_2) \vartheta(\lambda_2) \times \\ & \times \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + ic}{\lambda_1 - \lambda_2 - ic} \right) \left[\frac{p_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 \exp\{x p_1(\lambda_1, \lambda_2)\}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_3(x) = \frac{c}{2\pi^3} \int \left\{ \prod_{j=1}^3 \omega(\lambda_j) \vartheta(\lambda_j) d\lambda_j \right\} \left[\frac{p_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 \times \\ \times \left(\frac{-\infty}{\lambda_1 - \lambda_2 + ic} \right) \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) \frac{\exp\{x p_1(\lambda_1, \lambda_2)\}}{(\lambda_3 - \lambda_1 + ic)(\lambda_2 - \lambda_3 + ic)}.$$

Здесь интеграл доопределен в смысле главного значения.

Приведенные формулы подтверждают наше утверждение, что среднее (1.1) «калибровочно инвариантно», т. е. не зависит от конкретного выбора $|\Omega_T\rangle$ (набора целых чисел), а зависит лишь от макроскопических функций $\rho_p(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$. Здесь следует заметить, что мы можем рассматривать среднее (1.1) не только по состоянию термодинамического равновесия, но и по произвольной собственной функции гамильтониана $|\Psi_N\rangle$, которая описывается некоторыми функциями распределения $\rho_p(\lambda)$ и $\rho_h(\lambda)$. В этом случае для среднего $\langle \Psi_N | :j(x)j(0): | \Psi_N \rangle / \langle \Psi_N | \Psi_N \rangle$ снова получилось бы разложение (1.5). Однако в этом случае фермиевский вес $\vartheta(\lambda)$ был бы определен так:

$$\vartheta(\lambda) = \left\{ 1 + \frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} \right\}^{-1}.$$

§ 2. Температурный коррелятор токов

При конечной температуре коррелятор токов определяется следующим равенством:

$$\langle j(x)j(0) \rangle_T = \frac{\text{tr}[j(x)j(0)\exp\{-H/T\}]}{\text{tr}[\exp\{-H/T\}]} \quad (2.1)$$

(коррелятор (2.1) называют также *корреляционной функцией плотностей*). След, стоящий в знаменателе формулы, (2.1) был уже вычислен в § 1.5. Этим же способом вычислим след в числителе. Согласно определению, в N -частичном секторе

$$\text{tr}\{j(x)j(0)e^{-H/T}\} = \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_N} e^{-E_N/T} \frac{\langle \Psi_N | j(x)j(0) | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle}. \quad (2.2)$$

Здесь $|\Psi_N\rangle$ — собственная функция гамильтониана (1.1.9). Перейдем теперь от микроскопического описания модели (с помощью набора целых чисел n_j) к макроскопическому описанию через функции распределения ρ_p , ρ_h , и перепишем след (2.2) как функциональный интеграл (1.5.16)

$$\text{tr}\{j(x)j(0)e^{-H/T}\} = \\ = \text{const} \int dh \int \mathcal{D} \left[\frac{\rho_t(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} \right] \frac{\langle \Psi_N | j(x)j(0) | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle} \times \\ \times \exp \left\{ S - \frac{E}{T} + \frac{L}{T} h \left[\int \rho_p(\lambda) d\lambda - D \right] \right\}. \quad (2.3)$$

Все обозначения см. в § 1.5. Мы видели в предыдущем параграфе, что среднее

$$\frac{\langle \Psi_N | j(x) j(0) | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle}$$

не зависит от конкретного представителя $|\Psi_N\rangle$ набора собственных функций гамильтониана, определяемого макроскопическими функциями распределения ρ_p, ρ_h . Это оправдывает выделение множителя $\exp\{S\}$ в (2.3) и позволяет вычислить функциональный интеграл методом наискорейшего спуска в пределе бесконечного объема, как и саму статистическую сумму в § 1.5. В результате получим

$$\langle j(x) j(0) \rangle_T = \frac{\langle \Omega_T | j(x) j(0) | \Omega_T \rangle}{\langle \Omega_T | \Omega_T \rangle}, \quad (2.4)$$

а следовательно, среднее (1.1), вычисленное в предыдущем параграфе, и есть коррелятор токов. Определив неприводимый коррелятор $\langle\langle j(x) j(0) \rangle\rangle_T$ равенством

$$\langle\langle j(x) j(0) \rangle\rangle_T = \langle :j(x) j(0): \rangle_T - \langle j(0) \rangle_T^2, \quad (2.5)$$

где

$$\langle :j(x) j(0): \rangle_T = \langle j(x) j(0) \rangle_T - \delta(x) \langle j(0) \rangle_T, \quad (2.6)$$

а $\langle j(0) \rangle_T = D$ (1.6), получим, согласно § 1.5, следующее разложение для неприводимого коррелятора токов:

$$\langle\langle j(x) j(0) \rangle\rangle_T = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(x), \quad (2.7)$$

причем теперь $\varepsilon(\lambda)$, входящее в (1.4), является решением уравнения Янга (1.6.1).

§ 3. Анализ интегрального уравнения

В этом параграфе мы рассмотрим интегральное уравнение

$$1 + 2\pi P(t) = S(t) \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, s) \vartheta(s) P(s) ds \right\}. \quad (3.1)$$

Здесь $\vartheta(s)$ — фермиевский вес (1.4), $S(t)$ — функциональный параметр. Ограничимся случаем

$$|S(t)| \leq 1 \quad \text{при} \quad \text{Im } t = 0 \quad (3.2)$$

и будем интересоваться лишь теми решениями уравнения (3.1), которые удовлетворяют неравенству

$$\text{Re } P(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } t = 0. \quad (3.3)$$

Сразу же заметим, что теоремы § XII.4 легко обобщаются на рассматриваемое интегральное уравнение, поэтому мы приведем их

без доказательств. Необходимые оценки для линейного интегрального оператора с ядром $K(t, s)\vartheta(s)$ получены в § 1.5.

Теорема 1. *Решение уравнения (3.1), удовлетворяющее неравенству (3.3), существует и единственно.*

Следствие 1. *Если $S(t)=1$ при $\text{Im } t=0$, то $P(t)=0$.*

Теорема 2. *Если $S(t)$ отличается от 1 на вещественной оси, то $\text{Re } P(t) < 0$.*

Следствие 2. $|P(t)| \leq 1/\pi$ при $\text{Im } t=0$.

При исследовании асимптотики корреляторов на большом расстоянии потребуются дополнительная информация о функции $P(t) = P_1(t, \lambda_1, \lambda_2)$ — решении уравнения (1.11), (3.1). Функция $S(t)$ в этом случае равна

$$S(t) = \left(\frac{\lambda_1 - t + ic}{\lambda_1 - t - ic} \right) \left(\frac{\lambda_2 - t - ic}{\lambda_2 - t + ic} \right). \quad (3.4)$$

и удовлетворяет условию (3.2) при вещественных t, λ_1, λ_2 и c . Следовательно, все вышесказанное относится и к решению $P_1(t, \lambda_1, \lambda_2)$, а значит, функция P_1 может быть аналитически продолжена в область

$$\text{Im } t=0, \quad \text{Im } \lambda_1 \leq 0, \quad \text{Im } \lambda_2 \geq 0, \quad (3.5)$$

так как в этой области $|S(t)| \leq 1$; см. (1.2.4).

Перечислим основные свойства функций $P_1(t, \lambda_1, \lambda_2)$ и функций $p_1(\lambda_1, \lambda_2)$ (1.10):

$$1) P_1(t, \lambda_1, \lambda_2) = P_1(t^*, \lambda_2^*, \lambda_1^*), \quad p_1(\lambda_1, \lambda_2) = p_1(\lambda_2^*, \lambda_1^*);$$

$$2) P_1(t, \lambda, \lambda) = 0;$$

$$3) P_1(-t, -\lambda_1, -\lambda_2) = P_1(t, \lambda_2, \lambda_1);$$

4) если $\lambda_1 = \alpha^*, \lambda_2 = \alpha$ ($\text{Im } \alpha > 0, \text{Im } t=0$), то $\text{Im } P_1(t, \alpha^*, \alpha) = 0$, так как $S(t)$ — вещественный множитель;

5) в пределе сильной связи

$$P_1(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{i\pi c}(\lambda_1 - \lambda_2) \left(1 + \frac{2}{c} D \right) - \frac{1}{\pi c^2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (3.6)$$

$$p_1(\lambda_1, \lambda_2) = -i(\lambda_1 - \lambda_2) \left(1 + \frac{2}{c} D \right) - \frac{2}{c^2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 D + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (3.7)$$

§ 4. Предел сильной связи

Перед тем как перейти к исследованию поведения коррелятора токов на больших расстояниях, рассмотрим предел сильной связи $c \rightarrow \infty$. В этом пределе ряд (2.7) особенно эффективен, а ответы просты и наглядны.

В точке свободных фермионов $c = \infty$ имеем:

$$\langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle_T = -\frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1 + \exp\left\{\frac{\lambda^2 - h}{T}\right\}} d\lambda \right]^2, \quad (4.1)$$

$$\langle j(0) \rangle_T = D_\infty = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1 + \exp\left\{\frac{\lambda^2 - h}{T}\right\}}. \quad (4.2)$$

Для того чтобы получить $1/c$ поправку к этому выражению, вспомним некоторые результаты § 1.7. С достаточной для рассматриваемого случая точностью имеем (см. (1.7.18)):

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda) &= \lambda^2 - h(T), \\ h(T) &= h + \frac{T}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{\frac{h-\lambda^2}{T}}\right) d\lambda = h + \frac{2}{c} \mathcal{P}_\infty. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $\mathcal{P}_\infty$ — давление. Вес $\omega(\lambda)$ (1.8) стремится к

$$\omega(\lambda) = \exp\left\{-\frac{2}{c} D_\infty\right\}, \quad (4.4)$$

а функция $p_1(\lambda_1, \lambda_2)$ была вычислена в предыдущем параграфе, см. (3.7). Используя явный вид коэффициентов Γ_2 и Γ_3 (1.11), (1.12), после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle_T &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial x_R}\right) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x_R} d\lambda}{1 + \exp\left\{\frac{\lambda^2 - h(T)}{T}\right\}} \right\}^2 - \\ &- \frac{1}{2\pi^3 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \prod_{j=1}^3 \frac{d\lambda_j}{1 + \exp\left\{\frac{\lambda_j^2 - h}{T}\right\}} \right\} e^{ix(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} \right] + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Последний интеграл доопределен в смысле главного значения. Здесь $x_R = x[1 + 2D_\infty/c]$. В этом пределе (см. (1.7.18))

$$\rho(\lambda) = \frac{1 + 2D_\infty/c}{2\pi \left\{ 1 + \exp\left[\frac{\lambda^2 - h(T)}{T}\right] \right\}}. \quad (4.6)$$

Следовательно,

$$\langle j(0) \rangle_T = D = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{2D_\infty}{c} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1 + \exp\left[\frac{\lambda^2 - h(T)}{T}\right]}. \quad (4.7)$$

Вернемся к формуле (4.1) и обсудим поведение коррелятора токов свободных фермионов для больших x . Это просто сделать, так как правая часть (4.1) представляет собой интеграл Фурье. Чтобы вычислить асимптотику, нужно сдвинуть контур интегрирования. Основной вклад в асимптотику дадут ближайшие к вещественной оси полюса фермиевского веса $\vartheta^{-1}(\lambda) = 1 + \exp\{(\lambda^2 - h)/T\}$, расположенные в верхней полуплоскости, см. (I.6.27), (I.6.29):

$$\langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle_T \sim -\frac{T^2}{2|\alpha|^2} e^{-2x\text{Im}\alpha} + T^2 \text{Re} \frac{e^{2ix\alpha}}{2\alpha^2}. \quad (4.8)$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{h + i\pi T}, \quad \text{Re}\alpha > 0, \quad \text{Im}\alpha > 0. \quad (4.9)$$

Выражение для асимптотики (4.8) упрощается в пределе низких температур:

$$\langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle_T \sim -T^2 \left(\frac{\sin qx}{q} \right)^2 e^{-x/r_c}. \quad (4.10)$$

Здесь корреляционный радиус $r_c = v/(2\pi T)$, и скорость звука $v = 2q$.

Рассмотрим теперь коррелятор в точке свободных фермионов $c = \infty$ при конечных расстояниях x . Устремим температуру к нулю и посмотрим, какие будут поправки к выражению для коррелятора при $T = 0$ и $c = \infty$.

На небольших расстояниях $x < r_c$ коррелятор (4.1) ведет себя следующим образом:

$$\langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle_T = -\left(\frac{\sin qx}{\pi x} \right)^2 + \frac{T^2}{12q^2} \left[\frac{\sin 2qx}{2qx} + \sin^2 qx \right] + O(T^4).$$

§ 5. Асимптотика на больших расстояниях

Обобщим результаты предыдущего параграфа на случай произвольных констант связи c . Асимптотику коррелятора на больших расстояниях будем вычислять, пользуясь аналитическими свойствами коэффициентов разложения коррелятора токов (§ I.6), (2.7). В § I.6 мы подробно исследовали свойства функции $\varepsilon(\lambda)$ и фермиевского веса $\vartheta(\lambda)$. Было показано, что нули функции $\vartheta^{-1}(\lambda)$ существуют и обязательно лежат в комплексной плоскости, образуя четырехугольник:

$$\alpha, \quad \alpha^*, \quad -\alpha, \quad -\alpha^*; \quad \text{Im}\alpha > 0. \quad (5.1)$$

Ближайшие к вещественной оси особенности функции $\varepsilon(\lambda)$ лежат на расстоянии $\text{Im}(\alpha + ic)$ от вещественной оси. Вес $\omega(\lambda)$ также можно продолжить в комплексную плоскость, его ближайшие особенности

лежат на таком же расстоянии от вещественной оси. Аналитическое продолжение функций ε и ω обладает свойством:

$$\begin{aligned}\varepsilon^*(\lambda) &= \varepsilon(\lambda^*), & \omega^*(\lambda) &= \omega(\lambda^*), \\ \varepsilon(-\lambda) &= \varepsilon(\lambda), & \omega(-\lambda) &= \omega(\lambda).\end{aligned}\quad (5.2)$$

Рассмотрим коррелятор токов, ограничившись лишь первым членом разложения (1.12):

$$\begin{aligned}\langle\langle j(x) j(0) \rangle\rangle_T &\simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_2(x) = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \omega(\lambda_1) \vartheta(\lambda_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \omega(\lambda_2) \vartheta(\lambda_2) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + ic}{\lambda_1 - \lambda_2 - ic} \right) \left[\frac{p_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 e^{xp_2(\lambda_1, \lambda_2)}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Исследуем это выражение в пределе $x \rightarrow \infty$. Сдвинем контур интегрирования по переменной λ_1 в нижнюю полуплоскость, а контур интегрирования по λ_2 — в верхнюю. Ближайшим препятствием при сдвиге контура являются полюса веса Ферми $\vartheta(\lambda)$ (5.1). В этих точках $\vartheta(\lambda)$ имеет полюс первого порядка:

$$\vartheta(\lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow \alpha} \rightarrow -\frac{T}{\varepsilon'(\alpha)(\lambda - \alpha)}, \quad e^{\frac{\varepsilon(\alpha)}{T}} = -1, \quad \varepsilon(\alpha) = i\pi T. \quad (5.4)$$

Выпишем вклад этих полюсов в выражение для $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_2(x)$:

$$2T^2 \left| \frac{\omega(\alpha)}{\varepsilon'(\alpha)} \right|^2 \left(\frac{2\operatorname{Im} \alpha - c}{2\operatorname{Im} \alpha + c} \right) \left[\frac{p_1(\alpha^*, \alpha)}{2\operatorname{Im} \alpha} \right]^2 \exp \{xp_1(\alpha^*, \alpha)\} + \quad (5.5)$$

$$+ 2T^2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\omega(\alpha)}{\varepsilon'(\alpha)} \right)^2 \left(\frac{2\alpha - ic}{2\alpha + ic} \right) \left[\frac{p_1(-\alpha, \alpha)}{2\alpha} \right]^2 \exp \{xp_1(-\alpha, \alpha)\} \right\}. \quad (5.6)$$

Для вычисления остальных вкладов в (5.3) следует контур интегрирования еще дальше отодвинуть от вещественной оси, что приводит к выражениям, убывающим по x быстрее, чем (5.5), (5.6). Соображения, основанные на теории возмущений, показывают, что слагаемое (5.6) убывает при $x \rightarrow \infty$ быстрее, чем (5.5). Итак, асимптотика (5.3) на больших расстояниях имеет вид:

$$\langle\langle j(x) j(0) \rangle\rangle_T \sim e^{-x/r_c}; \quad (5.7)$$

здесь r_c — корреляционный радиус:

$$\frac{1}{r_c} = -p_1(\alpha^*, \alpha) = 2\operatorname{Im} \alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vartheta(t) P_1(t, \alpha^*, \alpha) \geq 2\operatorname{Im} \alpha \geq 0. \quad (5.8)$$

Напомним, что $p_1(\alpha^*, \alpha)$ — вещественна, а

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vartheta(t) P_1(t, \alpha^*, \alpha) \geq 0.$$

Рассмотрим вклад Γ_3 (1.12) в разложении коррелятора. При $x \rightarrow \infty$ его можно вычислить так же, двигая контур по λ_1 в нижнюю, а по λ_2 в верхнюю полуплоскость, λ_3 — остается вещественным. При этом ведущими снова являются полюса (5.1). Аналогично можно проанализировать слагаемые ряда для коррелятора и в высших порядках теории возмущений [13.5]. Это приводит нас к гипотезе о том, что корреляционный радиус равен:

$$r_c = - \frac{1}{p_1(\alpha^*, \alpha)}. \quad (5.9)$$

Разберем теперь некоторые специальные случаи. В области низких температур $T \rightarrow 0$ решением уравнения

$$\vartheta^{-1}(\alpha) = 0, \quad \varepsilon(\alpha) = i\pi T \quad (5.10)$$

является точка

$$\alpha = q_T + \frac{i\pi T}{\varepsilon'(q_T)}, \quad (5.11)$$

где q_T определяется из уравнения $\varepsilon(q_T) = 0$, $q_T > 0$ (при $T \rightarrow 0$, $q_T \rightarrow q$, а ε есть решение уравнения (1.3.16)). Таким образом, в пределе низких температур разница между α и α^* становится малой. Множитель $S(t)$ в (3.1) стремится к 1, а следовательно, решение (3.1) $P_1(t, \alpha^*, \alpha) \rightarrow 0$ (см. следствие 1 теоремы 1 § 3). Более точно,

$$P_1(t) = - \frac{2\pi T}{\varepsilon'(q)} \dot{F}(t, q). \quad (5.12)$$

Здесь $\dot{F}$ есть решение линейного интегрального уравнения (II.1.4) (приложение к части I).

Подставляя выражение (5.12) в (5.8), получим

$$\frac{1}{r_c} = \frac{2\pi T}{\varepsilon'(q)} + \frac{2\pi T}{\varepsilon'(q)} \int_{-q}^q \dot{F}(t, q) dt = \frac{2\pi T}{\varepsilon'(q)} \left[1 + \int_{-q}^q \dot{F}(t, q) dt \right]. \quad (5.13)$$

Заметим, что величина, стоящая в квадратных скобках, есть производная от одетого импульса (II.3.5) (приложение к части I). Следовательно, корреляционный радиус можно выразить через фермиевскую скорость v_F (1.7.17), которая для бозе-газа совпадает со скоростью звука (1.7.16). Окончательно:

$$r_c = \frac{v}{2\pi T} \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0. \quad (5.14)$$

Рассмотрим теперь предел сильной связи и вычислим корреляционный радиус с точностью до $1/c^2$.

Из (5.4) и (4.3) имеем:

$$\alpha = \sqrt{h + \frac{2}{c} \mathcal{P}_\infty + i\pi T}, \quad \text{Im } \alpha > 0.$$

Подставляя это выражение в (5.8) и в (3.7), получим

$$\frac{1}{r_c} = 2\text{Im } \alpha \left(1 + \frac{2}{c} D\right) + \frac{8D}{c^2} (\text{Im } \alpha)^2. \quad (5.15)$$

Здесь следует отметить, что при $c \rightarrow \infty$ происходит следующее явление. Функция P_1 стремится к нулю (см. (3.6)). Это приводит к тому, что оба слагаемых (5.5) и (5.6) начинают одинаково убывать по x на бесконечности. Однако при конечных c слагаемое (5.6), содержащее осцилляции, убывает быстрее. Коррелятор полей также убывает экспоненциально при конечной температуре:

$$\langle \psi(x) \psi^+(0) \rangle \sim e^{-x/R_c}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

При малых температурах R_c сводится к [13.6]:

$$R_c = 4D/T.$$

Заключение

Изложенный метод вычисления температурных корреляционных функций был сформулирован в работах [13.1; 13.2; 13.7]. Случай ХХЗ модели рассматривался в работе [13.4]. Формула (5.14) для корреляционного радиуса в области малых температур получена ранее по теории возмущений [13.6]. Свойства ряда (1.5) исследованы в работе [13.3], а в работе [13.7] был проанализирован предел высоких температур $T \rightarrow \infty$ и показано, что корреляторы распадаются гауссовским образом.

Глава XIV

АСИМПТОТИКА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ НУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Вопрос об асимптотике на больших расстояниях корреляционных функций интегрируемых систем при нулевой температуре имеет принципиальное значение с точки зрения физики. Для систем с одним пространственным измерением точка $T=0$ является точкой фазового перехода. Для таких моделей, как нерелятивистский бозе-газ и одномерная цепочка спинов Гейзенберга, спектр которых является бесщелевым, экспоненциальное убывание корреляционных функций с расстоянием при $T>0$ сменяется в точке фазового перехода на степенное убывание. Соответствующий показатель степени θ называется *критическим индексом*. Его вычисление — одна из главных задач в теории фазовых переходов.

Основной результат состоит в том, что критический индекс выражается через значение функции дробного заряда $z(\lambda)$ (см. § II.5) на границе зоны Ферми:

$$\theta = 2z^2(q). \quad (0.1)$$

Напомним, что функция $z(\lambda)$ определяется одевающим линейным интегральным уравнением:

$$z(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda, \mu) z(\mu) d\mu = 1. \quad (0.2)$$

Здесь $K(\lambda, \mu)$ — обычное ядро для модели бозе-газа, связанное с R -матрицей XXX типа (см., например, (XII.5.7)). В случае цепочки Гейзенберга критический индекс определяется теми же уравнениями (0.1), (0.2), в которых ядро $K(\lambda, \mu)$ следует заменить на тригонометрическое (XII.6.4), а q на Λ .

Таким образом, критический индекс θ зависит от параметров модели (константы связи и плотности для бозе-газа и параметра анизотропии и внешнего магнитного поля для цепочки Гейзенберга). В то же время формулы (0.1), (0.2) универсальны. Они определяют критический индекс θ в любых интегрируемых моделях с R -матрицей XXX или XXZ типа, которые могут быть решены с помощью однократного анзаца Бете. Например, значение критического индекса одинаково для бозе-газа и решеточной модели НШ (при условии равенства константы связи s и границы зоны Ферми q).

Критический индекс можно выразить и через термодинамические функции модели. Так, для XXZ цепочки Гейзенберга

$$\theta = \pi v_F \chi / 2, \quad (0.3)$$

где v_F — фермиевская скорость, а $\chi = \partial \sigma / \partial h$ — магнитная восприимчивость. Для бозе-газа

$$\theta = 4\pi D / v, \quad (0.4)$$

где D — плотность, а v — скорость звука.

Ниже кратко рассмотрена асимптотика корреляционных функций интегрируемых систем на больших расстояниях.

Заинтересованного читателя мы отсылаем к оригинальным работам [14.3; 14.4; 14.1; 14.7], где формулы (0.1) — (0.4) получены в рамках квантового метода обратной задачи, и к работам [14.2; 14.8] где они доказаны в подходе, основанном на конформной теории поля.

§ 1. Асимптотика корреляторов в одномерном бозе-газе

Рассмотрим сначала одновременной коррелятор токов в модели нерелятивистского бозе-газа:

$$\langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle = \langle\langle \psi^+(x)\psi(x)\psi^+(0)\psi(0) \rangle\rangle. \quad (1.1)$$

Асимптотика этого коррелятора в рамках теории возмущений может быть извлечена из ряда для него, построенного в § XII. 6. Главные члены асимптотического разложения при $x \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\langle\langle j(x)j(0) \rangle\rangle = -\frac{\theta}{4\pi x^2} + b \frac{\cos(2\pi D x)}{x^\theta} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (1.2)$$

Здесь $D = \int_{-q}^q \rho(\lambda) d\lambda$ — полная плотность газа, а θ дается формулами

(0.1), (0.2). Легко установить, что $\theta \rightarrow 2$ при $c \rightarrow \infty$. В общем случае $\theta > 2$ (напомним, что $c > 0$), поэтому первое слагаемое в правой части (1.2) в асимптотике всегда лидирует. Используя тождества, установленные в § I.7 и § II.5, получаем для θ формулу (0.4). Отметим, что для бозе-газа голый импульс $p_0(\lambda) = \lambda$, и поэтому функция одетого заряда просто связана с плотностью частиц в основном состоянии:

$$z(\lambda) = 2\pi\rho(\lambda).$$

В работах [14.5; 14.6] показано, что один критический индекс θ описывает асимптотику всех корреляторов. В частности, для разновременного коррелятора полей получаем (в евклидовой области):

$$\langle\psi(x, t)\psi^+(0, 0)\rangle \equiv G(x, t) \rightarrow a(x^2 + v^2 t)^{-\frac{1}{2\theta}}. \quad (1.3)$$

Здесь v — фермиевская скорость, t — евклидово время. Чтобы выписать асимптотику многоточечных корреляторов, введем следующие обозначения:

$$\psi = \psi_1, \quad \psi^+ = \psi_{-1}. \quad (1.4)$$

Асимптотика многоточечного коррелятора равна произведению парных:

$$\left\langle \prod_{j=1}^k \psi_{l_j}(x_j, t_j) \right\rangle = \prod_{j>i} G^{-l_i l_j}(x_j - x_i; t_j - t_i), \quad l_j = \pm 1, \quad \sum l_j = 0. \quad (1.5)$$

Эта формула справедлива, когда каждый из интервалов устремляется на бесконечность: $(x_j - x_i)^2 + v^2(t_j - t_i)^2 \rightarrow \infty$ ($j \neq i$).

§ 2. Асимптотика корреляторов в ХХЗ магнетике Гейзенберга

Представление для коррелятора третьих компонент спина в магнетике Гейзенберга было получено в § XII.6 (см. (X.II.6.8) — (X.II.6.14)).

Анализ коэффициентов разложения коррелятора третьих компонент спина в ХХЗ модель при $n \rightarrow \infty$ аналогичен подобному для коррелятора токов в НШ модели. Асимптотика коррелятора равна

$$\langle\langle \sigma_z^{n+1} \sigma_z^1 \rangle\rangle = \frac{a}{n^2} + (-1)^n b \frac{\cos(\pi \sigma n)}{n^\theta} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.1)$$

Здесь σ — намагниченность (см. § II.3), $\sigma = 1 - 2D$. Критический индекс θ выражается через значение «дробного заряда» на границе зоны Ферми:

$$\theta = 2z^2(\Lambda). \quad (2.2)$$

Из результатов § II.5 следует, что

$$\theta = \pi v_F \chi / 2. \quad (2.3)$$

Если в модели НШ $\theta > 2$ всегда, то в XXZ модели это не так. Область изменения константы связи η естественно разбить на две зоны: зону $0 < 2\eta < \pi/2$ (это область выпуклости действия Янга; см. гл. II) и зону $\pi/2 < 2\eta < \pi$ (ядро K (XII.6.4) больше или меньше нуля соответственно). В первой из этих зон $\theta > 2$, и лидирует первое слагаемое в (2.1), во второй зоне $\theta < 2$, и лидирует второе слагаемое асимптотики. В точке свободных фермионов ($2\eta = \pi/2$) оба слагаемых одного порядка и равноправны, так как $\theta = 2$. Явный вид коэффициентов a и b в формуле (2.1) обсуждается в работах [14.4; 14.7]. В работе [14.3] была высказана гипотеза о том, что асимптотика корреляторов матриц σ^+ и σ^- в евклидовой области (t — евклидово время) задается тем же критическим индексом θ (2.2):

$$\langle \sigma_z^{n+1}(t) \sigma_z^1(0) \rangle \rightarrow c (n^2 + v_F^2 t^2)^{-\frac{1}{2\theta}}, \quad 0 < 2\eta \leq \pi/2. \quad (2.4)$$

Здесь v_F — фермиевская скорость (см. (I.7.17)). Эта гипотеза была доказана в работах [14.2; 14.8]. Многочастичный коррелятор в асимптотической области равен произведению парных аналогично (1.5). Обсудим теперь зависимость коррелятора (2.1) от магнитного поля. Фактически этот вопрос рассматривался при изучении функции «дробного заряда» $z(\lambda)$ в § II.5. Когда магнитное поле h больше критического значения $h > h_c = 4 \sin^2 \eta$, основное состояние является ферромагнитным и $\langle \sigma_z^{n+1} \sigma_z^1 \rangle = \sigma^2 = 1$. Поэтому правая часть (2.1) должна обращаться в нуль при $h = h_c$. Изучим предел снизу $h \rightarrow h_c$. В этом пределе (см. (II.5.14))

$$\theta = 2 + 4 (\pi \operatorname{tg} \eta \operatorname{tg} 2\eta)^{-1} \sqrt{h_c - h}, \quad h \rightarrow h_c, \quad h \leq h_c. \quad (2.5)$$

При $h = h_c$, $\theta = 2$, $z = 1$, $D = 0$, $\sigma = 1$, $a = -b$. Таким образом, правая часть (2.1) действительно обращается в нуль.

В области малых магнитных полей критический индекс θ как функция магнитного поля h существенно зависит от константы связи η :

$$\theta = \pi / (2\eta) + d_1 h^2, \quad 0 < 2\eta < 2\pi/3, \quad (2.6)$$

$$\theta = \pi / (2\eta) + d_2 h^{(2\pi/\eta - 4)}, \quad 2\pi/3 < 2\eta < \pi. \quad (2.7)$$

Явный вид коэффициентов d приведен в (II.5.15), (II.5.16). Таким образом, при $2\eta = 2\pi/3$ происходит изменение зависимости θ от h . Заметим, что при $2\eta \rightarrow \pi$ критический индекс становится все более чувствительным к магнитному полю.

В нулевом магнитном поле из (2.6), (2.7) имеем

$$\theta = \pi / (2\eta) \quad (2.8)$$

и асимптотика несколько упрощается:

$$\langle \sigma_z^{n+1} \sigma_z^1 \rangle = \frac{a}{n^2} + b \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2\eta}} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.9)$$

Кратко рассмотрим изотропный XXX магнетик Гейзенберга в антиферромагнитном случае. Он получается из XXZ магнетика предельным переходом (см. § II.4). Из предыдущих результатов следует, что в этой области $\theta < 2$, и ведущий член асимптотики коррелятора третьих компонент спина — осциллирующий:

$$\langle\langle \sigma_z^{n+1} \sigma_z^1 \rangle\rangle \sim b (-1)^n \frac{\cos(\pi\sigma n)}{n^\theta} \quad (2\eta = \pi). \quad (2.10)$$

В слабых магнитных полях (см. (II.5.17)):

$$\theta = 1 + 1/\ln\left(\frac{8\pi^3}{eh^2}\right) \quad (2\eta = \pi, \quad h \rightarrow 0). \quad (2.11)$$

Таким образом, $\theta \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$. При магнитных полях, близких к критическому, $\theta \rightarrow 2$:

$$\theta = 2 \left(1 - \frac{4}{\pi} \sqrt{h_c - h} \right) \quad (2\eta = \pi; \quad h \rightarrow h_c = 4). \quad (2.12)$$

В заключение подчеркнем еще раз, что формулы (0.1), (0.2) для критического индекса справедливы не только в моделях нерелятивистского бозе-газа и магнетика Гейзенберга, рассмотренных выше. Они справедливы в любых бесщелевых интегрируемых моделях, обладающих R -матрицами типа XXX или XXZ и решаемых с помощью анзатца Бете. В частности, эти формулы описывают критический индекс в обобщенном XXZ магнетике и обобщенной модели НШ, описанных в конце § XII.6. При этом критический индекс θ не зависит от голого импульса $p_0(\lambda)$, произвольного в обобщенной модели, что и позволяет его вычислить. Зависимость же от голой энергии $\varepsilon_0(\lambda)$ входит в формулу $\theta = 2z^2(q)$ только через фермиевское значение q спектрального параметра.

Заключение

Мы показали, что индекс θ определяется лишь R -матрицей и значением спектрального параметра на границе зоны Ферми. Именно эти соображения легли в основу работ [14.3; 14.4; 14.7], в которых была получена формула (0.1). Как следствие (см. § II.5) обнаруживается связь между критическим индексом и термодинамическими функциями модели [14.1; 14.7]. Для бозе-газа соотношение (0.4) было получено ранее в рамках функционального подхода [14.5]. Методом бозонизации асимптотика корреляционных функций одномерных магнетиков исследовалась в [14.9; 14.10].

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ IV

Вопрос об асимптотике корреляционных функций интегрируемых моделей в двумерном пространстве-времени уже давно вызывает значительный интерес. Интересные результаты были получены в рамках теории возмущений и ренорм-группового подхода. Помимо уже упоминавшихся ранее, отметим здесь еще работы [IV.3, IV.6].

Прямым развитием идей теории возмущений (близким также к подходу, основанному на конформной теории поля) является приближение «жидкости Латтинджера» [IV.17—IV.20], в рамках которого был вычислен критический индекс θ для однокомпонентных моделей, решаемых с помощью однокомпонентного координатного анзаца Бете.

Значительный прогресс в понимании критических явлений в интегрируемых моделях связан с конформной теорией поля [IV.7—IV.9, IV.12], которая позволяет вычислять критические индексы для этих моделей [IV.1, IV.2, IV.5, IV.10, IV.11, IV.13—IV.16, IV.25, IV.31, IV.32].

Результаты, полученные в рамках квантового метода обратной задачи (КМОЗ) и изложенные выше в части IV, находятся в соответствии с предсказаниями конформной теории поля. Более важно, однако, что вычисления с помощью КМОЗ показывают, что критические индексы в интегрируемых моделях определяются только R -матрицей и являются в этом смысле универсальными. В последнее время удалось развить схему вычислений корреляционных функций в рамках алгебраического анзаца Бете в КМОЗ и получить замкнутое выражение для одновременно корреляторов в интегрируемых моделях в терминах определителя Фредгольма линейного интегрального оператора, ядро которого зависит от вспомогательных («дуальных») квантовых полей [IV.4, IV.27].

Представление такого рода в простейшем случае «непроницаемого» бозе-газа (нерелятивистский бозе-газ с бесконечно сильным точечным отталкиванием между частицами, соответствующий бесконечной константе связи $c = +\infty$ в квантовой модели НШ) известно уже давно [IV.29, IV.30] (в этом простейшем случае дуальные поля не входят в ядро интегрального оператора). В работе [IV.28] получено представление и зависящего от времени коррелятора полей непроницаемых бозонов.

Следует также отметить строгие с математической точки зрения результаты по длинноволновой асимптотике корреляционных функций в непроницаемом бозе-газе, которые удалось получить на основе этих представлений. Полное асимптотическое разложение для двухточечного одновременного коррелятора полей непроницаемых бозонов при нулевой температуре было построено в работе [IV.26]. Аналогичные результаты для зависящего от температуры одновременного коррелятора получены недавно в работах [IV.21—IV.23], где в частности, получена явная формула для корреляционного радиуса непроницаемых бозонов при любых значениях температуры и плотности газа. Наконец, асимптотика разновременного зависящего от температуры коррелятора на больших расстояниях и временах построена в работе [IV.24].

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова.—М.: Наука, 1980.
2. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега—де Фриса—вполне интегрируемая гамильтонова система//Функц. анализ и его прилож.—1971.—Т. 5, № 4.—С. 18—27.
3. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. Квантование солитонов//Теор. и мат. физика.—1975.—Т. 25, № 2.—С. 164—178.
4. Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля//ДАН СССР.—1978.—Т. 243, № 6.—С. 1430—1433.
5. Склянин Е. К. Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера//ДАН СССР.—1978.—Т. 244, № 6.—С. 1337—1341.
6. Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи. I//Теор. и мат. физика.—1979.—Т. 40, № 2.—С. 194—220.
7. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга//УМН.—1979.—Т. 34, № 5.—С. 13—63.
8. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.—М.: Мир, 1986.
9. Faddeev L. D. Quantum completely integrable models in field theory//In: Mathematical Physics Reviev. Sect. C.: Math. Phys. Rev. 1 Harwood Academic.—1980.—V. 1.—P. 107—155.
10. Faddeev L. D., Korepin V. E. Quantum theory of solitons//Phys. Rep.—1978.—V. 42C, № 1.—P. 1—87.
11. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. H. Method for solving the Korteweg—de Vries equation//Phys. Rev. Lett.—1967.—V. 19, № 19.—P. 1095—1097.
12. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A. Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques//Phys. Rev.—1975.—V. 11D, № 11.—P. 3424—3450.
13. Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet//Phys. Lett.—1979.—V. 70A, № 5—9.—P. 461—463.
14. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves//Comm. Pure and Appl. Math.—1968.—V. 21, № 5.—P. 467—490.

ГЛАВА I

- 1.1. Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести//Изв. АН СССР. Сер. физ.—1947.—Т. 11, № 1.—С. 77—90.
- 1.2. Боголюбов Н. М., Корепин В. Е. Корреляционные функции одномерного бозе-газа в термодинамическом равновесии//Теор. и мат. физика.—1984.—Т. 60, № 2.—С. 262—269.

- 1.3. Березин Ф. А., Похил Г. П., Фянкельберг В. Н. Уравнение Шредингера для системы одномерных частиц с точечным взаимодействием // Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех.—1964, № 1.—С. 21—28.
- 1.4. Корепин В. Е. Непосредственное вычисление S -матрицы в массивной модели Тирринга // Теор. и мат. физика.—1979.—Т. 41, № 2.—С. 169—189.
- 1.5. Bogoliubov N. M., Korepin V. E. Correlation length of one-dimensional Bose-gas // Nucl. Phys.—1985.—V. 257B. [FS14], № 6.—P. 766—778.
- 1.6. Bresin E., Zinn-Justin J. Un probleme d' N corps soluble // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris.—1966.—Т. 263B, № 11.—P. 670—673.
- 1.7. Gaudin M. La fonction d'onde de Bethe.—Paris: Masson, 1983. (Русский перевод: Годен М. Волновая функция Бете.—М.: Мир, 1987.)
- 1.8. Korepin V. E. Correlation functions of the one-dimensional Bose-gas in the repulsive case // Comm. Math. Phys.—1984.—V. 94.—P. 93—113.
- 1.9. Lieb E. H., Liniger W. Exact analysis of an interacting Bose-gas. I. The general solution and the ground state // Phys. Rev.—1963.—V. 130, № 4.—P. 1605—1616.
- 1.10. Lieb E. H. Exact analysis of an interacting Bose-gas. II. The excitation spectrum // Phys. Rev.—1963.—V. 130, № 4.—P. 1616—1624.
- 1.11. Lieb E. H., Mattis D. S. (editors). Mathematical physics in one dimension.—N. Y.—London: Academic Press, 1966.
- 1.12. McGuire J. B. Study of exactly soluble one-dimensional N -body problems // J. Math. Phys.—1964.—V. 5, № 5.—P. 622—629.
- 1.13. Yang C. N. Some exact results for the many-body problem in one-dimension with repulsive delta-function interaction // Phys. Rev. Lett.—1967.—V. 19, № 23.—P. 1312—1314.
- 1.14. Yang C. N., Yang C. P. Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction // J. Math. Phys.—1969.—V. 10, № 7.—P. 1115—1122.

ГЛАВА II

- 2.1. Владимиров А. А. Доказательство самосопряженности решений уравнений анзаца Бете // Теор. и мат. физика.—1986.—Т. 66, № 1.—С. 154—159.
- 2.2. Кириллов А. Н. Комбинаторные тождества и полнота состояний магнетика Гейзенберга // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1983.—Т. 131.—С. 88—105.
- 2.3. Кириллов А. Н. Полнота состояний обобщенного магнетика Гейзенберга // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1984.—Т. 134.—С. 169—189.
- 2.4. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. IX. Ч. 2.—М.: Наука. 1978.
- 2.5. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга // УМН.—1979.—Т. 34, № 5.—С. 13—63.
- 2.6. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1981.—Т. 109.—С. 134—178.
- 2.7. Baxter R. J. Exactly solved models in statistical mechanics.—London—New York: Academic Press. 1982. (Русский перевод: Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике.—М.: Мир, 1985.)
- 2.8. Bethe H. Zur Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette // Zeitschrift für Physik.—1931.—V. 71, № 3—4.—P. 205—226.
- 2.9. Bonner J., Fisher M. Linear magnetic chains with anisotropic coupling // Phys. Rev.—1964.—V. 235A, № 3.—P. 640—658.
- 2.10. Faddeev L. D., Takhtajan L. A. What is the spin of a spin wave? // Phys. Lett.—1981.—V. 85A, № 6—7.—P. 375—377.

- 2.11. Gaudin H. La fonction d'onde de Bethe.—Paris: Masson, 1983. (Русский перевод: Годен М. Волновая функция Бете.—М.: Мир, 1987.)
- 2.12. Heisenberg W. Zur Theorie der Ferromagnetismus//Zeitschrift für Physik.—1928.—V. 49, № 9—10.—P. 619—636.
- 2.13. Hulthén L. Über das Austauschproblem eines Kristalls//Arkiv. Mat. Astron. Fys.—1939.—Bd 26A, № 11.—S. 1—106.
- 2.14. Takahashi M. Low-temperature specific heat of spin 1/2 anisotropic Heisenberg ring//Progr. Theor. Phys.—1973.—V. 50, № 5.—P. 1519—1536.
- 2.15. Takahashi M., Suzuki M. One-dimensional anisotropic Heisenberg model at finite temperatures//Progr. Theor. Phys.—1972.—V. 48, № 6B.—P. 2187—2209.
- 2.16. Yang C. N., Yang C. P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system//Phys. Rev.—1966.—V. 150, № 1.—P. 321—327.
- 2.17. Yang C. N., Yang C. P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II. Properties of the ground state energy for lattice site for an infinite system//Phys. Rev.—1966.—V. 150, № 1.—P. 327—339.
- 2.18. Yang C. N., Yang C. P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. III. Applications//Phys. Rev.—1966.—V. 151, № 1.—P. 258—264.

ГЛАВА III

- 3.1. Арефьева И. Я., Корепин В. Е. Рассеяние в двумерной модели с лагранжианом $L=(1/\gamma)[(\partial_\mu u)^2/2+m^2(\cos u-1)]$ //Письма в ЖЭТФ.—1974.—Т. 20, № 1.—С. 680—684.
- 3.2. Березин Ф. А., Сушко В. Н. Релятивистская двумерная модель самодействующего поля ненулевой массы покоя//ЖЭТФ.—1965.—Т. 48, № 5.—С. 1293—1306.
- 3.3. Замолодчиков А. Б. Точная двухчастичная S -матрица квантовых солитонов модели sine-Gordon//Письма в ЖЭТФ.—1977.—Т. 25, № 10.—С. 499—502.
- 3.4. Изергин А. Г., Корепин В. Е. О редукции однопетлевых диаграмм Фейнмана в скалярной теории поля//Вестн. ЛГУ. Сер. физ.-хим.—1979.—№ 16.—С. 17—24.
- 3.5. Корепин В. Е. Надбарьерное отражение солитонов//Письма в ЖЭТФ.—1976.—Т. 23, № 4.—С. 224—228.
- 3.6. Корепин В. Е. Непосредственное вычисление S -матрицы в массивной модели Тирринга//Теор. и мат. физика.—1979.—Т. 41, № 2.—С. 169—189.
- 3.7. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. Квантование солитонов//Теор. и мат. физика.—1975.—Т. 25, № 2.—С. 164—178.
- 3.8. Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса—Невё//ЖЭТФ.—1981.—Т. 80, № 1.—С. 214—228.
- 3.9. Погребков А. К., Сушко В. Н. Квантовые солитоны и их связь с фермионными полями при $(\sin \phi)^2$ взаимодействии//Теор. и мат. физика.—1976.—Т. 26, № 3.—С. 419—424.
- 3.10. Bergknoff H., Thacker H. B. Structure and solution of the massive Thirring model//Phys. Rev.—1979.—V. 19D, № 12.—P. 3666—3681.
- 3.11. Bogoliubov N. M., Izergin A. G., Korepin V. E. Structure of the vacuum in the quantum sine-Gordon model//Phys. Lett.—1985.—V. 159B, № 4—6.—P. 345—347.
- 3.12. Coleman S. Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model//Phys. Rev.—1975.—V. 110, № 8.—P. 2088—2097.
- 3.13. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A. Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques//Phys. Rev.—1975.—V. 11D, № 11.—P. 3424—3450.

- 3.14. Faddeev L. D., Korepin V. E. Quantum theory of solitons//Phys. Rep.—1978.—V. 42C, № 1.—P. 1—87.
- 3.15. Haag R. Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions//Phys. Rev.—1958.—V. 112, № 2.—P. 669—673.
- 3.16. Korepin V. E. The mass spectrum and the S matrix of the massive Thirring model in the repulsive case//Comm. Math. Phys.—1980.—V. 76.—P. 165—176.
- 3.17. Luther A. Eigenvalue spectrum of interacting massive fermions in one dimension//Phys. Rev.—1976.—V. 14B, № 5.—P. 2153—2159.
- 3.18. Mandelstam S. Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation//Phys. Rev.—1975.—V. 11D, № 10.—P. 3026—3030.
- 3.19. Thirring W. E. A soluble relativistic field theory//Ann. Phys.—1958.—V. 3.—P. 91—112.
- 3.20. Zimmerman W. On the bound state problem in quantum field theory//Nouvo Cimento.—1958.—V. 10, № 10.—P. 567—614.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ I

- I.1. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Квантовый метод обратной задачи//Физика ЭЧАЯ.—1982.—Т. 13, № 13.—С. 501—541.
- I.2. Изюмов Ю. А., Скрябин Ю. Н. Статистическая механика магнитно-упорядоченных систем.—М.: Наука, 1987.
- I.3. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга//УМН.—1979.—Т. 34, № 5.—С. 13—63.
- I.4. Belavin A. A. Exact solution of the two dimensional model with asymptotic freedom//Phys. Lett.—1979.—Vol. 87B, № 1—2.—P. 117—121.
- I.5. Gaudin M. La fonction d'onde de Bethe.—Paris: Masson, 1983. (Русский перевод: Годен М. Волновая функция Бете.—М.: Мир, 1987.)
- I.6. Lieb E. H., Mattis D. C. (editors). Mathematical Physics in one dimension.—N. Y.—London: Academic Press, 1966.
- I.7. Shastry B. S., Jha S. S., Singh V. (Editors). Exactly solvable problems in condensed matter and relativistic field theory.—Berlin—New York: Springer, 1986. V. 242.
- I.8. Tsvetlick A. M., Wiegmann P. B. Exact results in the theory of magnetic alloys//Adv. Phys.—1983.—V. 32, № 4.—P. 453—713.

ГЛАВА IV

- 4.1. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О решениях классического уравнения Янга—Бакстера для простых алгебр Ли//Функц. анализ и его прил.—1982.—Т. 16, № 3.—С. 1—29.
- 4.2. Волков А. Ю. Гамильтонова интерпретация модели Вольтерра//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1986.—Т. 150.—С. 17—25.
- 4.3. Жибер А. В., Шабат А. Б. Уравнения Клейна—Гордона с нетривиальной группой//ДАН СССР.—1979.—Т. 247, № 5.—С. 1103—1107.
- 4.4. Захаров В. Е., Манаков С. В. О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера//Теор. и мат. физика.—1974.—Т. 19, № 3, С. 332—343.
- 4.5. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи//Под ред. С. П. Новикова.—М.: Наука, 1980.
- 4.6. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Полное описание решений sine—Gordon уравнения//ДАН СССР.—1974.—Т. 219, № 6.—С. 1334—1337.
- 4.7. Корепин В. Е. О квантовании неабелевой цепочки Тода//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1981.—Т. 101.—С. 90—100.
- 4.8. Кулиш П. П., Склянин Е. К. О решениях уравнения Янга—Бакстера//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 95.—С. 129—160.

- 4.9. Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.—М.: Наука, 1985.
- 4.10. Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda // Письма в ЖЭТФ.—1979.—Т. 30, № 7.—С. 443—448.
- 4.11. Семенов-Тянь-Шанский М. А. Что такое классическая r -матрица // Функци. анализ и его прил.—1983.—Т. 17, № 4.—С. 17—83.
- 4.12. Склянин Е. К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 95.—С. 55—128.
- 4.13. Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи. I. // Теор. и мат. физика.—1979.—Т. 40, № 2.—С. 194—220.
- 4.14. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Существенно нелинейная одномерная модель классической теории поля // Теор. и мат. физика.—1974.—Т. 21, № 2.—С. 160—174.
- 4.15. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Частицы для уравнения Сайн-Гордона // УМН.—1974.—Т. 29, № 3.—С. 249—250.
- 4.16. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонова система, связанная с уравнением $u_{\xi\eta} + \sin u = 0$ // Труды МИАН.—1974.—Т. 142.—С. 254—265.
- 4.17. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.—М.: Наука, 1986.
- 4.18. Ablowitz M., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM. 1981. (Русский перевод: Абловитц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.—М.: Мир, 1987.)
- 4.19. Bullough R. K., Dodd R. K. Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.—1977.—V. 352, № 1671.—P. 481—503.
- 4.20. Izergin A. G., Korepin V. E. The inverse scattering method approach to the quantum Shabat—Mikhailov model // Comm. Math. Phys.—1981.—V. 79.—P. 303—316.
- 4.21. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau—Lifshitz equation // Preprint LOMI E—3—79, Leningrad. 1979.

ГЛАВА V

- 5.1. Белавин А. А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем // Функци. анализ и его прил.—1980.—Т. 14, № 4.—С. 18—26.
- 5.2. Вичирко В. И., Решетихин Н. Ю. Спектр возбуждений обобщенного $SU(3)$ магнетика // Теор. и мат. физика.—1983.—Т. 56, № 2.—С. 260—271.
- 5.3. Волков А. Ю. Гамильтонова интерпретация модели Вольтерра // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1986.—Т. 150.—С. 17—25.
- 5.4. Замолодчиков А. Б. Точная двухчастичная S -матрица квантовых солитонов модели sine-Gordon // Письма в ЖЭТФ.—1977.—Т. 25, № 10.—С. 499—502.
- 5.5. Замолодчиков А. Б., Замолодчиков Ал. Б. Релятивистская факторизованная S -матрица в двумерном пространстве-времени с изотопической симметрией $O(N)$ // Письма в ЖЭТФ.—1977.—Т. 26, № 8.—С. 608—611.
- 5.6. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточная модель, связанная с нелинейным уравнением Шредингера // ДАН СССР.—1981.—Т. 259, № 1.—С. 76—79.
- 5.7. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Квантовый метод обратной задачи // Физика ЭЧАЯ.—1982.—Т. 13, № 3.—С. 501—541.
- 5.8. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Задача об описании всех L -операторов для R -матриц моделей XXX и XXZ // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1983.—Т. 131.—С. 80—87.
- 5.9. Изергин А. Г., Корепин В. Е., Смирнов Ф. А. Формулы следов для квантового нелинейного уравнения Шредингера // Теор. и мат. физика.—1981.—Т. 48, № 3.—С. 319—323.

- 5.10. Корепин В. Е. Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели // ДАН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1361—1364.
- 5.11. Кричевер И. М. Уравнения Янга—Бакстера и алгебраическая геометрия // Функц. анализ и его прил.—1981.—Т. 15, № 2.—С. 22—35.
- 5.12. Кулиш П. П. Квантовый метод обратной задачи и точно решаемые модели статистической физики // Тр. II Междунар. симп. по избран. проблемам статистической физики (Дубна, 1981), Дубна, 1981.—С. 147—157.
- 5.13. Кулиш П. П. Многокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера с градуировкой // ДАН СССР.—1980.—Т. 255, № 2.—С. 323—326.
- 5.14. Кулиш П. П., Манаков С. В., Фаддеев Л. Д. Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера // Теор. и мат. физика.—1976.—Т. 28, № 1.—С. 38—45.
- 5.15. Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Квантовая нелинейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 101.—С. 101—110.
- 5.16. Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса—Невё // ЖЭТФ.—1981.—Т. 80, № 1.—С. 214—228.
- 5.17. Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Интегрируемые фермионные киральные модели, связанные с классическими алгебрами Ли // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1984.—Т. 133.—С. 146—159.
- 5.18. Кулиш П. П., Склянин Е. К. О решениях уравнения Янга—Бакстера // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 95.—С. 129—160.
- 5.19. Решетихин Н. Ю. Метод функциональных уравнений в теории точнорешаемых квантовых систем // ЖЭТФ.—1983.—Т. 84, № 3.—С. 1190—1201.
- 5.20. Решетихин Н. Ю. Точное решение $O(2N)$ модели Гросса—Невё // Препринт ЛОМИ. Р—1—83. Ленинград. 1983.
- 5.21. Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля // ДАН СССР.—1978.—Т. 243, № 6.—С. 1430—1433.
- 5.22. Склянин Е. К. Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера // ДАН СССР.—1978.—Т. 244, № 6.—С. 1337—1341.
- 5.23. Склянин Е. К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 95.—С. 55—128.
- 5.24. Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи. I // Теор. и мат. физика.—1979.—Т. 40, № 2.—С. 194—220.
- 5.25. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга // УМН.—1979.—Т. 34, № 5.—С. 13—63.
- 5.26. Фатеев В. А. Факторизованная S-матрица для частиц с различной четностью и интегрируемая 21-вершинная статистическая модель // Ядерная физика.—1981.—Т. 33, № 5.—С. 1419—1430.
- 5.27. Чередник И. В. О некоторых S-матрицах, связанных с неабелевыми многообразиями // ДАН СССР.—1979.—Т. 249, № 5.—С. 1095—1098.
- 5.28. Baxter R. J. Exactly solved models in statistical mechanics.—London—New York: Academic Press, 1982. (Русский перевод: Бакстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике.—М.: Мир, 1985.)
- 5.29. Baxter R. J. q -colouring of the triangular lattice // Journ. Phys.—1986.—V. 19A, № 14.—P. 2821—2840.
- 5.30. Bazhanov V. V., Stroganov Yu. G. A new class of factorized S-matrices and triangle equations // Phys. Lett.—1981.—V. 105B, № 4.—P. 278—281.

- 5.31. Bazhanov V. V., Stroganov Yu. G. Trigonometric and S_N -symmetric solutions of triangle equations with variables on the faces // Nucl. Phys.—1982.—V. 205B, № 4.—P. 505—526.
- 5.32. Brezin E., Zinn-Justin J. Un problème d’N corps soluble // Comptes Rendis. Acad. Sci. Ser. B.—1966.—T. 263, № 11.—P. 670—673.
- 5.33. Faddeev L. D. Quantum completely integrable models in field theory // In: Mathematical Physics Review. Sect. S.: Math. Phys. Rev. 1. Harwood Academic.—1980.—V. 1.—P. 107—155.
- 5.34. Faddeev L. D., Reshetikhin N. Yu. Integrability of the principal chiral field model in 1+1-dimensions // Ann. Phys. (N.Y.)—1986.—V. 167, № 2.—P. 227—256.
- 5.35. Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Liouville model on the lattice // Lect. Notes. Phys.—1986.—V. 246.—P. 166—179.
- 5.36. Izergin A. G., Korepin V. E. The inverse scattering method approach to the quantum Shabat—Mikhailov model // Comm. Math. Phys.—1981.—V. 79.—P. 303—316.
- 5.37. Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu. Exact solution of XXZ model with arbitrary spin. I. Ground state and excitations. II. Thermodynamic of the system // J. Phys. A.—1987.—V. 20.—P. 1565—1597.
- 5.38. Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K. Yang—Baxter equation and representation theory // Lett. Math. Phys.—1981.—V. 5, № 5.—P. 393—403.
- 5.39. Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. Recent developments // Lecture Notes in Physics.—Berlin—New York: Springer, 1982.—V. 151.—P. 61—119.
- 5.40. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau—Lifshitz equation // LOMI preprint E—3—79. Leningrad. 1979.
- 5.41. Takhtajan L. A. The picture of low-lying excitations in isotropic Heisenberg chain of arbitrary spin // Phys. Lett.—1982.—V. 87A, № 9.—P. 479—482.
- 5.42. Yang C. N. Some exact results for the many-body problem in one-dimension with repulsive delta-function interactions // Phys. Rev. Lett.—1967.—V. 19, № 23.—P. 1312—1314.
- 5.43. Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B. Exact S matrix of Gross—Neveu «elementary» fermions // Phys. Lett.—1978.—V. 72B, № 4.—P. 481—483.
- 5.44. Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B. Factorized S -matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models // Ann. Phys. (N.Y.)—1979.—V. 120, № 2.—P. 253—291.

ГЛАВА VI

- 6.1. Дринфельд В. Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга—Бакстера // ДАН СССР.—1983.—Т. 273, № 3.—С. 531—535.
- 6.2. Изергин А. Г. Статсумма шестивершинной модели в конечном объеме // ДАН СССР.—1987.—Т. 297, № 2.—С. 331—333.
- 6.3. Изергин А. Г. Корепин В. Е. Решеточные регуляризации квантово-полевых моделей // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 120.—С. 75—91.
- 6.4. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточная модель, связанная с нелинейным уравнением Шредингера // ДАН СССР.—1981.—Т. 259, № 1.—С. 76—79.
- 6.5. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Принцип Паули для одномерных бозонов и алгебраический анзац Бете // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1982.—Т. 120.—С. 69—74.
- 6.6. Корепин В. Е. Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели // ДАН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1361—1364.

- 6.7. Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса—Невё // ЖЭТФ.—1981.—Т. 80, № 1.—С. 214—228.
- 6.8. Решетихин Н. Ю. Метод функциональных уравнений в теории точнорешаемых квантовых систем // ЖЭТФ.—1983.—Т. 84, № 3.—С. 1190—1201.
- 6.9. Решетихин Н. Ю., Смирнов Ф. А. Квантовые функции Флоке // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1983.—Т. 131.—С. 128—141.
- 6.10. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга—Бакстера // Функци. анализ и его прил.—1982.—Т. 16, № 4.—С. 27—34.
- 6.11. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга—Бакстера. Представления квадратичной алгебры // Функци. анализ и его прил.—Т. 17, № 4.—С. 34—48.
- 6.12. Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи. I // Теор. и мат. физика.—1979.—Т. 40, № 2.—С. 194—220.
- 6.13. Смирнов Ф. А. Уравнение Гельфанда—Левитана для квантового нелинейного уравнения Шредингера с притяжением // ДАН СССР.—1982.—Т. 262, № 1.—С. 78—83.
- 6.14. Тарасов В. О. О строении квантовых L -операторов для R -матрицы XXZ модели // Теор. и мат. физика.—1984.—Т. 61, № 2.—С. 163—173.
- 6.15. Тарасов В. О., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке // Теор. и мат. физика.—1983.—Т. 57, № 2.—С. 163—181.
- 6.16. Тахтаджян Л. А. Квантовый метод обратной задачи и алгебраизованный матричный Бете анзац // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 101.—С. 158—183.
- 6.17. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга // УМН.—1979.—Т. 34, № 5.—С. 13—63.
- 6.18. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном магнетике Гейзенберга // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1981.—Т. 109.—С. 134—178.
- 6.19. Faddeev L. D. Quantum completely integrable models in field theory // In: Mathematical Physics Review. Sect. C.: Math. Phys. Rev. 1. Harwood Academic.—1980.—V. 1.—P. 107—155.
- 6.20. Izergin A. G., Korepin V. E. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions // Nucl. Phys.—1982.—V. 205B [FS5].—P. 401—413.
- 6.21. Izergin A. G., Korepin V. E. Pauli principle for one-dimensional bosons and the algebraic Bethe ansatz // Lett. Math. Phys.—1982.—V. 6.—P. 283—288.
- 6.22. Izergin A. G., Korepin V. E., Reshetikhin N. Yu. Correlation functions in a one-dimensional Bose gas // J. Phys.—1987.—V. 20A, № 14.—P. 4799—4822.
- 6.23. Korepin V. E. Calculation of norms of Bethe wave functions // Comm. Math. Phys.—1982.—V. 86.—P. 391—418.
- 6.24. Kulish P. P. Classical and quantum inverse problem method and generalized Bethe-ansatz // Physica.—1981.—V. 3D, № 1—2.—P. 246—257.
- 6.25. Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K. Yang—Baxter equation and representation theory. I // Lett. Math. Phys.—1981.—V. 5, № 5.—P. 393—403.
- 6.26. Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. Recent developments // Lect. Notes in Physics.—Berlin—New York: Springer, 1982.—V. 151.—P. 61—119.
- 6.27. Lieb E. H., Mattis D. C. (Editors). Mathematical physics in one dimension.—New York—London: Academic Press, 1966.

ГЛАВА VII

- 7.1. Боголюбов Н. М. О физическом спектре решеточной модели синус-Гордон//Теор. и мат. физика.—1982.—Т. 51, № 3.—С. 344—354.
- 7.2. Боголюбов Н. М. Термодинамика одномерного решеточного бозе — газа//Теор. и мат. физика.—1986.—Т. 67, № 3.—С. 451—462.
- 7.3. Боголюбов Н. М., Изергин А. Г. Решеточная вполне интегрируемая регуляризация модели синус-Гордон для небольших констант связи//Теор. и мат. физика.—1984.—Т. 59, № 2.—С. 183—199.
- 7.4. Боголюбов Н. М., Изергин А. Г. Решеточная модель синус-Гордон с локальным гамильтонианом//Теор. и мат. физика.—1984.—Т. 61, № 3.—С. 364—377.
- 7.5. Боголюбов Н. М., Корепин В. Е. Квантовое нелинейное уравнение Шредингера на решетке//Теор. и мат. физика.—1986.—Т. 66, № 3.—С. 481—488.
- 7.6. Волков А. Ю. Дискретный вариант уравнения Ландау — Лифшица//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1985.—Т. 145.—С. 62—71.
- 7.7. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточная модель, связанная с нелинейным уравнением Шредингера//ДАН СССР.—1981.—Т. 259, № 1.—С. 76—79.
- 7.8. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточная модель синус-Гордон//Вестник ЛГУ. Сер. физ.-хим.—1981. № 22.—С. 84—87.
- 7.9. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Решеточные регуляризации квантовополевых двумерных моделей//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 120.—С. 75—91.
- 7.10. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Задача об описании всех L -операторов для R -матриц моделей XXX и XXZ //Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1983.—Т. 131.—С. 80—87.
- 7.11. Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Квантовая нелинейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 101.—С. 101—110.
- 7.12. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера//Функц. анализ и его прил.—1982.—Т. 16, № 4.—С. 27—34.
- 7.13. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. Представления квадратичной алгебры//Функц. анализ и его прил.—1983.—Т. 17, № 4.—С. 34—48.
- 7.14. Смирнов Ф. А. Уравнения Гельфанда — Левитана для квантового нелинейного уравнения Шредингера с притяжением//ДАН СССР.—1982.—Т. 262, № 1.—С. 78—83.
- 7.15. Тарасов В. О. Классический вариант решеточной модели синус-Гордон//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1982.—Т. 120.—С. 173—187.
- 7.16. Тарасов В. О. О строении квантовых L -операторов для R -матрицы XXZ модели//Теор. и мат. физика.—1984.—Т. 61, № 2.—С. 163—173.
- 7.17. Тарасов В. О., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке//Теор. и мат. физика.—1983.—Т. 57, № 2.—С. 163—181.
- 7.18. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.—М.: Наука, 1986.
- 7.19. Ablowitz M. J., Ladik J. F. A nonlinear difference scheme and inverse scattering//Stud. Appl. Math.—1976.—V. 55. № 3.—P. 213—229.
- 7.20. Ablowitz M., Segur H. Solitons and the inverse scattering method.—Philadelphia: SIAM, 1981. (Русский перевод: Аблоуитц М., Сегур Х. Солитоны и метод обратной задачи.—М.: Мир, 1987.)
- 7.21. Bogoliubov N. M., Izergin A. G., Korepin V. E. Structure of the vacuum in the quantum sine-Gordon model//Phys. Lett.—1985.—V. 159B, № 4—6.—P. 345—347.

- 7.22. Hida K., Ishikawa M. Thermodynamics of the lattice quantum sine-Gordon model and the lattice Thirring model//PAC preprint. 0530. Karlsruhe. 1984.
- 7.23. Hiroto R. Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation//Journ. Phys. Soc. Jap.—1977.—V. 43, № 6.—P. 2079—2089.
- 7.24. Holstein T., Primakoff H. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet//Phys. Rev.—1940.—V. 58, № 3.—P. 1098—1114.
- 7.25. Izergin A. G., Korepin V. E. The lattice quantum sine-Gordon model//Lett. Math. Phys.—1981.—V. 5.—P. 199—205.
- 7.26. Izergin A. G., Korepin V. E. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions//Nucl. Phys.—1982.—V. 205B [FS5].—P. 401—413.
- 7.27. Kulish P. P. Quantum difference nonlinear Schrödinger-equation//Lett. Math. Phys.—1981.—V. 5.—P. 191—197.
- 7.28. Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu. Diagonalization of $GL(N)$ invariant transfer matrices and quantum N -waves systems (Lee model)//J. Phys.—1983.—V. 16A.—P. L591—L596.
- 7.29. Orfanidis S. J. Group theoretical aspects of the discrete sine-Gordon equation//Phys. Rev.—1980.—V. 21D, № 6.—P. 1507—1512.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ II

- II.1. Волков А. Ю. Уравнение Лувилля и решеточная модель sinh-Gordon//Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1987.—Т. 161.—С. 24—44.
- II.2. Волков А. Ю. Преобразование Миуры на решетке//Теор. и мат. физика.—1988.—Т. 74, № 1.—С. 141—146.
- II.3. Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантование групп Ли и алгебр Ли//Алгебра и анализ.—1989.—Т. 1, № 1.—С. 178—206.
- II.4. Склянин Е. К. Квантование интегрируемых моделей в бесконечном объеме. Нелинейное уравнение Шредингера//Алгебра и анализ.—1989.—Т. 1, № 2.—С. 189—206.
- II.5. Склянин Е. К. Разделение переменных в модели Годена//Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1987.—Т. 164.—С. 151—169.
- II.6. Drinfeld V. G. Quantum groups//Proceedings of the International Congress of Mathematics. Berkley; California: Acad. Press, 1986.—Vol. 1.—P. 798—820.
- II.7. Sklyanin E. K. Quantization of the continuous Heisenberg ferromagnet//Lett. Math. Phys.—1988.—V. 15, № 4.—P. 357—368.
- II.8. Sklyanin E. K. Exact quantization of the sinh-Gordon model//Nucl. Phys.—1989.—V. 326B.—P. 719—736.
- II.9. Sklyanin E. K. Boundary conditions for integrable quantum systems//J. Phys.—1988.—V. 21A.—P. 2375—2389.

ГЛАВА VIII

- 8.1. Gaudin M. La fonction d'onde de Bethe.—Paris: Masson. 1983. (Русский перевод: Годен М. Волновая функция Бете.—М.: Мир, 1987.)
- 8.2. Izergin A. G., Korepin V. E. Correlation functions for the Heisenberg XXZ-antiferromagnet//Comm. Math. Phys.—1985.—V. 99.—P. 271—302.
- 8.3. Korepin V. E. Calculation of norms of Bethe wave functions//Comm. Math. Phys.—1982.—V. 86.—P. 391—418.

ГЛАВА IX

- 9.1. Korepin V. E. Calculation of norms of Bethe wave functions//Comm. Math. Phys.—1982.—V. 86.—P. 391—418.

ГЛАВА X

- 10.1. Кириллов А. Н., Смирнов Ф. А. Решение некоторых комбинаторных проблем, возникающих при вычислении корреляторов в точно решаемых моделях // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1987.—Т. 164.—С. 67—79.
- 10.2. Славнов Н. А. Вычисление скалярных произведений и форм-факторов в рамках алгебраического анзаца Бете // Теор. и мат. физика.—1989.—Т. 79, № 2.—С. 232—240.

ГЛАВА XI

- 11.1. Забродин А. В. О неприводимой части коррелятора токов в квантовых вполне интегрируемых моделях // Теор. и мат. физика.—1987.—Т. 71, № 2.—С. 208—217.
- 11.2. Корепин В. Е., Славнов Н. А. Корреляционная функция в одномерном бозе-газе // Теор. и мат. физика.—1986.—Т. 68, № 3.—С. 471—478.
- 11.3. Gaudin M. La fonction d'onde de Bethe.—Paris: Masson, 1983. (Русский перевод: Годен М. Волновая функция Бете.—М.: Мир, 1987.)
- 11.4. Izergin A. G., Korepin V. E. The quantum inverse scattering method approach to correlation functions // Comm. Math. Phys.—1984.—V. 94.—P. 67—92.
- 11.5. Izergin A. G., Korepin V. E. Correlation functions for the Heisenberg XXZ -antiferromagnet // Comm. Math. Phys.—1985.—V. 99.—P. 271—302.
- 11.6. Korepin V. E. Calculation of norms of Bethe wave functions // Comm. Math. Phys.—1982.—V. 86.—P. 391—418.
- 11.7. Korepin V. E. Correlation functions of the one-dimensional Bose-gas in the repulsive case // Comm. Math. Phys.—1984.—V. 94.—P. 93—113.
- 11.8. Smirnov F. A. Quantum Gelfand—Levitan—Marchenko equations and form-factors in the sine-Gordon model // Journ. Phys.—1984.—V. 17A.—P. 1873—1891.
- 11.9. Thacker H. B. The quantum inverse method and Green's functions for completely integrable field theories // Preprint Fermilab. 81/47. 1981.

ГЛАВА XII

- 12.1. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Критические индексы в XXZ магнетике Гейзенберга // Письма в ЖЭТФ.—1985.—Т. 42, № 10.—С. 414—416.
- 12.2. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Фазовый переход в одномерном магнетике Гейзенберга // Вестн. ЛГУ. Сер. 4.—1986. Вып. 2.—С. 3—8.
- 12.3. Изергин А. Г., Корепин В. Е., Решетихин Н. Ю. Корреляционные функции полей в одномерном бозе-газе // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1986.—Т. 150.—С. 26—36.
- 12.4. Корепин В. Е., Славнов Н. А. Корреляционные функции в одномерном бозе-газе // Теор. и мат. физика.—1986.—Т. 68, № 3.—С. 471—478.
- 12.5. Попов В. Н. Об одном методе расчета асимптотики корреляторов плоской модели Изинга // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 77.—С. 188—213.
- 12.6. Bariev R. Z. Many-spin correlation functions of the one-dimensional XY model // Phys. Lett.—1978.—V. 68A, № 2.—P. 175—178.
- 12.7. Honerkamp J. An exploration of the correlation functions for finite temperature in the nonlinear Schrödinger-equation model // Nucl. Phys.—1981.—V. 190B [FS3], № 2.—P. 301—305.
- 12.8. Izergin A. G., Korepin V. E. The quantum inverse scattering method approach to correlation functions // Comm. Math. Phys.—1984.—V. 94.—P. 67—92.
- 12.9. Izergin A. G., Korepin V. E. Correlation functions for the Heisenberg XXZ -antiferromagnet // Comm. Math. Phys.—1985.—V. 99.—P. 271—302.

- 12.10. Jimbo M., Miwa T., Mori Y., Sato M. Density matrix of an impenetrable gas and the fifth Painlevé transcendent // *Physica*.—1980.—V. 1D, № 1.—P. 80—158.
- 12.11. Korepin V. E. Calculations of norms of Bethe wave functions // *Comm. Math. Phys.*—1982.—V. 86.—P. 391—418.
- 12.12. Korepin V. E. Correlation functions of the one-dimensional Bose-gas in the repulsive case // *Comm. Math. Phys.*—1984.—V. 94.—P. 93—113.
- 12.13. Lenard A. Momentum distributions in ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons // *J. Math. Phys.*—1964.—V. 5, № 7.—P. 930—933.
- 12.14. Lenard A. One-dimensional impenetrable bosons in thermal equilibrium // *J. Math. Phys.*—1966.—V. 7, № 7.—P. 1268—1272.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ III

- III.1. Решетихин Н. Ю., Смирнов Ф. А. Квантовые функции Флоке // *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*.—1983.—Т. 131.—С. 128—141.
- III.2. Смирнов Ф. А. Квантовые уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко для модели синус-Гордон // *Теор. и мат. физика*.—1984.—Т. 60, № 3.—С. 336—371.
- III.3. Creamer D. B., Thacker M. B., Wilkinson D. Some exact results for the two-point function of an integrable quantum field theory // *Phys. Rev.*—1981.—V. 23D.—P. 3081—3092.
- III.4. Kirillov A. N., Smirnov F. A. Form factors in $O(3)$ nonlinear σ -model // *Journ. Mod. Phys. A*.—1988.—V. 3, № 3.—P. 731—741.
- III.5. Kirillov A. N., Smirnov F. A. A representation of current algebra connected with $SU(2)$ invariant Thirring model // *Phys. Lett. B*.—1987.—V. 198B, № 4.—P. 506—510.
- III.6. Smirnov F. A. Quantum Gelfand—Levitan—Marchenko equations and form-factors in the sine-Gordon model // *J. Phys.*—1984.—V. 17A.—P. 1873—1891.
- III.7. Smirnov F. A. Solitons form factors in the sine-Gordon model // *J. Phys.*—1986.—V. 19.—P. L575—L578.
- III.8. Кириллов А. Н., Смирнов Ф. А. Формфакторы в $SU(2)$ -инвариантной модели Тирринга // *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*.—1987.—Т. 164.—С. 80—120.
- III.9. Кириллов А. Н. Формулы для формфакторов в квантовой модели sh-Gordon // *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*.—1987.—Т. 164.—С. 54—66.

ГЛАВА XIII

- 13.1. Боголюбов Н. М., Корепин В. Е. Корреляционные функции одномерного бозе-газа в термодинамическом равновесии // *Теор. и мат. физика*.—1984.—Т. 60, № 2.—С. 262—269.
- 13.2. Боголюбов Н. М., Корепин В. Е. Зависимость корреляционного радиуса от температуры в одномерном бозе-газе // *Теор. и мат. физика*.—1985.—Т. 64, № 1.—С. 92—102.
- 13.3. Боголюбов Н. М., Корепин В. Е. Полное экранирование в одномерном бозе-газе // *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*.—1986.—Т. 150.—С. 3—6.
- 13.4. Изергин А. Г., Корепин В. Е., Славнов Н. А. Температурные корреляционные функции антиферромагнетика Гейзенберга // *Теор. и мат. физика*.—1987.—Т. 72, № 2.—С. 277—285.
- 13.5. Корепин В. Е., Славнов Н. А. Корреляционные функции в одномерном бозе-газе // *Теор. и мат. физика*.—1986.—Т. 68, № 3.—С. 471—478.
- 13.6. Попов В. Н. К теории сверхтекучести двумерных и одномерных бозе-систем // *Теор. и мат. физика*.—1972.—Т. 11, № 3.—С. 354—365.
- 13.7. Bogoliubov N. M., Korepin V. E. Correlation length of the one-dimensional Bose-gas // *Nucl. Phys.*—1985.—V. 257B [FS14], № 6.—P. 766—778.

ГЛАВА XIV

- 14.1. Боголюбов Н. М., Изергин А. Г., Корепин В. Е. Критические индексы во вполне интегрируемых моделях квантовой статистической физики // Теор. и мат. физика.—1987.—Т. 70, № 1.—С. 135—145.
- 14.2. Боголюбов Н. М., Изергин А. Г., Решетихин Н. Ю. Эффекты конечного размера и критические индексы одномерных квантовых моделей // Письма в ЖЭТФ.—1986.—Т. 44, № 9.—С. 405—407.
- 14.3. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Критические индексы в магнетике Гейзенберга // Письма в ЖЭТФ.—1985.—Т. 42, № 10.—С. 414—416.
- 14.4. Изергин А. Г., Корепин В. Е. Фазовый переход в одномерном магнетике Гейзенберга // Вестн. ЛГУ. Сер. 4.—1986. Вып. 2.—С. 3—8.
- 14.5. Попов В. Н. К теории сверхтекучести двумерных и одномерных бозе-систем // Теор. и мат. физика.—1972.—Т. 11, № 3.—С. 354—365.
- 14.6. Попов В. Н. Длинноволновая асимптотика многочастичных функций Грина в одномерном бозе-газе // Письма в ЖЭТФ.—1980.—Т. 31, № 9.—С. 560—563.
- 14.7. Bogoliubov N. M., Izergin A. G., Korepin V. E. Critical exponents for integrable models // Nucl. Phys.—1986.—V. 275B [FS17], № 4.—P. 687—705.
- 14.8. Bogoliubov N. M., Izergin A. G., Reshetikhin N. Yu. Finite-size effects and infrared asymptotics of the correlation functions in two dimensions // J. Phys.—1987.—V. 20A.—P. 5361—5369.
- 14.9. Fogedby H. C. Correlation functions for the Heisenberg. Izing chain at $T=0$ // J. Phys.—1978.—V. 22C, № 23.—P. 4767—4791.
- 14.10. Luther A., Peschel I. Calculations of critical exponents in two dimensional from quantum field theory in one dimension // Phys. Rev.—1975.—V. 12B, № 9.—P. 3908—3917.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ IV

- IV.1. Боголюбов Н. М., Изергин А. Г., Решетихин Н. Ю. Эффекты конечного размера и критические индексы одномерных квантовых моделей // Письма в ЖЭТФ.—1986.—Т. 44, № 9.—С. 405—407.
- IV.2. Боголюбов Н. М., Корепин В. Е. Корреляционные функции одномерной модели Хаббарда // Теор. и мат. физика.—1990.—Т. 82, № 3.—С. 331—348.
- IV.3. Забродин А. В., Овчинников А. А. Парная корреляционная функция одномерного ферми-газа с сильным взаимодействием // ЖЭТФ.—1985.—Т. 88, № 4.—С. 1233—1241.
- IV.4. Корепин В. Е. Производящий функционал корреляционных функций для нелинейного уравнения Шредингера // Функци. анализ и его прил.—1989.—Т. 23, № 1.—С. 15—23.
- IV.5. Покровский С. В., Цвеллик А. М. Спектр конформных размерностей в решеточных интегрируемых моделях магнетиков // ЖЭТФ.—1987.—Т. 93.—С. 2232—2240.
- IV.6. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статической физике.—М.: Атомиздат, 1976.—256 с.
- IV.7. Affleck I. Universal term in the free energy at a critical point and the conformal anomaly // Phys. Rev. Lett.—1986.—V. 56.—P. 746—748.
- IV.8. Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory.—Nucl. Phys.—1984.—V. 241B.—P. 333—380.

- IV.9. Blöte H. W., Cardy J. L., Nightingale M. P. Conformal invariance, the central charge and universal finite-size amplitudes at criticality // *Phys. Rev. Lett.*—1986.—V. 56.—P. 742—745.
- IV.10. Bogoliubov N. M., Izergin A. G., Reshetikhin N. Yu. Finite-size effects and infrared asymptotics of the correlation functions in two dimensions // *J. Phys.*—1987.—V. 20A.—P. 5361—5369.
- IV.11. Bogoliubov N. M., Korepin V. E. The role of quasi-one-dimensional structures in high T_c superconductivity // *J. Mod. Phys.*—1989.—V. 3B, № 3.—P. 427—439.
- IV.12. Cardy J. L. Operator content of two-dimensional conformally invariant theories // *Nucl. Phys.*—1986.—V. 270B.—P. 186—204.
- IV.13. De Vega H. J., Wojnarovich F. Method for calculating finite size corrections in Bethe Ansatz systems: Heisenberg chain and six-vertex model // *Nucl. Phys.*—1985.—V. 251B.—P. 439—447.
- IV.14. De Vega H. J. Integrable vertex models and extended conformal invariance // *J. Phys.*—1988.—V. 21A.—P. L1089.
- IV.15. Frahm H., Korepin V. E. Critical exponents for the one-dimensional Hubbard model // *Phys. Rev.*—1990.—V. 42B.—P. 10553—10565.
- IV.16. Frahm H., Korepin V. E. Correlation functions of the one-dimensional Hubbard model in a magnetic field // *Phys. Rev.*—1991.—V. 43B.—P. 5653—5662.
- IV.17. Haldane F. D. M. Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids // *J. Phys.*—1981.—V. 14C.—P. 2589—2910.
- IV.18. Haldane F. D. M. Effective harmonic-fluid approach to low energy properties of one-dimensional quantum fluids // *Phys. Rev. Lett.*—1981.—V. 47.—P. 1840—1843.
- IV.19. Haldane F. D. M. Demonstration of the «Luttinger Liquid» character of Bethe—Ansatz—Soluble models of 1-D quantum fluids // *Phys. Lett.*—1981.—V. 81A.—P. 153—155.
- IV.20. Haldane F. D. M. In: *Electron Correlation and Magnetism in Narrow-band Systems* / Edited by T. Moriya.—Berlin: Springer—Verlag, 1981.—P. 150.
- IV.21. Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E. Correlation radius for one-dimensional impenetrable bosons // *Phys. Lett.*—1989.—V. 141A, № 3—4.—P. 121—124.
- IV.22. Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E. Temperature correlators of the impenetrable Bose gas as an integrable system // *Comm. Math. Phys.*—1990.—V. 129.—P. 205—222.
- IV.23. Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E. Long distance asymptotics of temperature correlators of the impenetrable Bose gas // *Comm. Math. Phys.*—1990.—V. 130.—P. 471—486.
- IV.24. Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E. Large time and distance asymptotics of the temperature field correlator in the impenetrable Bose gas // *Nucl. Phys.*—1991.—V. 348B.—P. 757—765.
- IV.25. Izergin A. G., Korepin V. E., Reshetikhin N. Yu. Conformal dimensions in Bethe Ansatz solvable models // *J. Phys.*—1989.—V. 22A.—P. 2615—2620.
- IV.26. Jimbo A., Miwa T., Moriy Y., Sato M. Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painleve transcendent // *Physica.*—1980.—V. 1D.—P. 80—158.
- IV.27. Korepin V. E. Dual field formulation of quantum integrable models // *Comm. Math. Phys.*—1987.—V. 113.—P. 177—190.
- IV.28. Korepin V. E., Slavnov N. A. The time dependent correlation function of an impenetrable Bose gas as a Fredholm minor.—*Comm. Math. Phys.*—1990.—V. 129.—P. 103—113.
- IV.29. Lenard A. Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons // *J. Math. Phys.*—1964.—V. 5, № 4.—P. 930—943.

- IV.30. L e n a r d A. One-dimensional impenetrable bosons in thermal equilibrium // J. Math. Phys.—1966.—V. 7, № 7.—P. 1268—1272.
- IV.31. M i r o n o v A. D., Z a b r o d i n A. V. Critical exponents in multiparticle 1D quantum systems from finite-size effects in conformal field theories // Phys. Rev. Lett.—1991.—V. 56.—P. 534.
- IV.32. W o y n a r o v i c h F., E c k l e H. P., T r u o n g T. T. Non-analytic finite-size corrections in the one-dimensional Bose gas and Heisenberg chain // J. Phys.—1987.—V. 22A.—P. 4027—4043.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

ЧАСТЬ I

КООРДИНАТНЫЙ АНЗАТЦ БЕТЕ

Введение	5
Глава I. Одномерный бозе-газ	6
§ 1. Координатный анзатц Бете	7
§ 2. Периодические граничные условия	11
§ 3. Термодинамический предел при нулевой температуре	16
§ 4. Возбуждения над основным состоянием	20
§ 5. Термодинамика модели	24
§ 6. Уравнение Янга	29
§ 7. Предельные случаи	32
§ 8. Возбуждения около состояния термодинамического равновесия	35
Приложение 1	37
Приложение 2	38
Приложение 3	39
Заключение	40
Глава II. Одномерный магнетик Гейзенберга	41
§ 1. Уравнения Бете для XXZ магнетика	42
§ 2. Основное состояние	46
§ 3. Взаимодействие с магнитным полем	48
§ 4. XXX магнетик	50
§ 5. Дробный заряд	51
Приложение	55
Заключение	57
Глава III. Массивная модель Тирринга	58
§ 1. Анзатц Бете	58
§ 2. Основное состояние	61
§ 3. Дробный заряд и выталкивание за обрезание	63
Заключение	65
Обзор литературы к части I	66

ЧАСТЬ II

КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Введение	67
Глава IV. Классическая r -матрица	68
§ 1. Представление нулевой кривизны	68
§ 2. Классическая r -матрица	72
§ 3. Примеры	76
Приложение. Тензорные обозначения	77
Заключение	78

Глава V. Основные положения квантового метода обратной задачи	79
§ 1. Общая схема	79
§ 2. Соотношения Янга — Бакстера	83
§ 3. Тождества следов	84
§ 4. Модели квантовой теории поля	87
§ 5. Фундаментальные спиновые модели	88
§ 6. Фундаментальные модели классической статистической физики	92
Заключение	96
Глава VI. Алгебраический анзац Бете	97
§ 1. Алгебраический анзац Бете	97
§ 2. Замечания об алгебраическом анзаце Бете	101
§ 3. Примеры	103
§ 4. Принцип Паули для одномерных взаимодействующих бозонов	106
§ 5. Оператор сдвига	109
§ 6. Классификация матриц монодромии	112
§ 7. Несколько замечаний о классификации матриц монодромии	114
§ 8. Квантовый детерминант	117
§ 9. Рекуррентные свойства статсуммы Z_N	118
§ 10. Выражение для Z_N через определитель	121
Приложение. Матричная реализация квантовых операторов	121
Заклучение	122
Глава VII. Интегрируемые модели квантовой теории поля на решетке	123
§ 1. Классические модели теории поля на решетке	124
§ 2. Классическая модель синус-Гордон на решетке	127
§ 3. Квантовая модель на решетке, связанная с нелинейным уравнением Шредингера	128
§ 4. Классификация квантовых L -операторов	133
§ 5. Квантовая модель синус-Гордон на решетке	135
Заклучение	136
Обзор литературы к части II	137

ЧАСТЬ III

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Введение	138
Глава VIII. Теория скалярных произведений	141
§ 1. Скалярное произведение	141
§ 2. Свойства коэффициентов K_N	143
§ 3. Формула для вычета	146
Глава IX. Нормы бетевских волновых функций	149
§ 1. Обобщенная гипотеза Годена	150
§ 2. Свойства якобиана	151
§ 3. Доказательство гипотезы Годена	153
§ 4. Термодинамический предел	155
Глава X. Формфакторы	156
§ 1. Обобщенная двухузельная модель	157
§ 2. Свойства оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$	159
§ 3. Представление формфактора оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$	161
§ 4. Формфакторы операторов Q_1 и Q_1^2	168
Глава XI. Среднее значение оператора Q_1^2	171
§ 1. Среднее значение оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$	171
§ 2. Неприводимые части	173
§ 3. Основные свойства среднего значения оператора Q_1^2	177
§ 4. Выражение величины $\ Q_1^2\ _N$ через неприводимые части	179
Заклучение	183

Глава XII. Корреляционные функции	184
§ 1. Модель НШ и двухузельная модель	184
§ 2. Величина $\langle Q_1^2(x) \rangle^0$ в термодинамическом пределе	185
§ 3. Вклад k -частичных процессов	191
§ 4. Анализ нелинейного интегрального уравнения	193
§ 5. Коррелятор токов в модели бозе-газа	197
§ 6. Коррелятор синнов в ХХЗ магнетике Гейзенберга	200
Заключение	205
Обзор литературы к части III	206

ЧАСТЬ IV

АСИМПТОТИКА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение	207
Глава XIII. Температурные корреляторы	207
§ 1. Усреднение по состоянию термодинамического равновесия	208
§ 2. Температурный коррелятор токов	210
§ 3. Анализ интегрального уравнения	211
§ 4. Предел сильной связи	212
§ 5. Асимптотика на больших расстояниях	214
Заключение	217
Глава XIV. Асимптотика корреляционных функций при нулевой температуре	217
§ 1. Асимптотика корреляторов в одномерном бозе-газе	218
§ 2. Асимптотика корреляторов в ХХЗ магнетике Гейзенберга	219
Заключение	221
Обзор литературы к части IV	222
Список литературы	223