С.П.Тимошенко, Д.Х.Янг, У.Уивер

КОЛЕБАНИЯ В ИНЖЕНЕРНОМ ДЕЛЕ

В монографии, написанной известным русским ученым и американскими специалистами, изложены результаты исследований различных аспектов теории колебаний жестких и деформируемых конструкций, позволяющие применять аналитический подход ко многим практическим случаям. Рассмотрены линейные системы с одной, двумя и более степенями свободы, поведение нелинейных деформируемых систем, колебания упругих тел. Включено большое число задач, примеров и программ для ЭВМ.

Книга представляет интерес для научных работников различных отраслей машиностроения.

Содержание

От редактора перевода	8
Предисловие	10
Предисловие к четвертому изданию	12
Предисловие к первому изданию	14
Глава 1. Системы с одной степенью свободы	
1.1. Свободные гармонические колебания	16
1.2. Крутильные колебания	25
1.3. Энергетический метод.	32
1.4. Метод Релея	37
1.5. Балки и валы, несущие несколько сосредоточенных масс	47
1.6. Вынужденные колебания. Установившееся состояние	52
1.7. Вынужденные колебания. Неустановившееся состояние	60
1.8. Свободные колебания с вязким демпфированием	65
1.9. Вынужденные колебания с вязким демпфированием	72
1.10. Эквивалентное вязкое демпфирование	79
1.11. Обобщенная периодическая возмущающая сила	86
1.12. Возмущающая сила произвольного вида	93
1.13. Произвольное перемещение опоры	104
1.14. Частотная характеристика	111
1.15. Численные способы определения динамических перемещений	118
Глава 2. Системы с нелинейными характеристиками	
2.1. Примеры нелинейных систем	130
2.2. Определение скорости и периода колеблющейся системы непосредственным интегрированием	140
2.3. Приближенные методы исследования свободных колебаний	147
2.4. Вынужденные нелинейные колебания	156
2.5. Кусочно-линейные системы	164
2.6. Численные решения нелинейных систем	179
Глава 3. Системы с двумя степенями свободы	
3.1. Примеры систем с двумя степенями свободы	192
3.2. Уравнения движения в усилиях: коэффициенты жесткости	197
3.3. Уравнения движения в перемещениях: коэффициенты	202

податливости
3.4. Совместное действие инерционных сил и сил тяжести 208
3.5. Свободные колебания без демпфирования 214
3.6. Вынужденные колебания без демпфирования 226
3.7. Свободные колебания при вязком демпфировании 233
3.8. Вынужденные колебания при вязком демпфировании 238
Глава 4. Системы со многими степенями свободы
4.1. Введение 244
4.2. Частоты и формы колебании систем без демпфирования 245
4.3. Главные и нормальные координаты 258
4.4. Исследование поведения системы методом нормальных форм колебании с учетом начальных условии 265
4.5. Исследование поведения системы методом нормальных форм колебании при действии внешних сил 270
4.6. Исследование поведения системы методом нормальных форм колебании при заданных перемещениях опор 279
4.7. Итерационный метод определения частот и форм колебании 288
4.8. Демпфирование в системах со многими степенями свободы 302
4.9. Поведение системы с демпфированием при периодических возмущениях 306
4.10. Неустановившееся поведение систем с демпфированием 310
4.11. Численные исследования, неустановившегося поведения систем 315
Глава 5. Колебания тел
5.1. Введение 322
5.2. Свободные продольные колебания призматических стержней 323
5.3. Вынужденные динамические перемещения при продольных колебаниях призматических стержней 331
5.4. Исследование призматических стержней методом нормальных форм колебаний 338
5.5. Исследование призматического стержня с массой или пружиной на конце 345
5.6. Исследование поведения стержней при продольных перемещениях опор 353
5.7. Крутильные колебания валов кругового поперечного сечения 359
5.8. Поперечные колебания предварительно растянутых нитей 366
5.9. Поперечные колебания призматических стержней 372
5.10. Поперечные колебания свободно опертого стержня 377
5.11. Колебания стержней с различными концевыми условиями 380
5.12. Влияние инерции вращения и поперечного сдвига 387
5.13. Вынужденные колебания свободно опертого стержня 390
5.14. Вынужденные колебания стержней с различными концевыми условиями 397
5.15. Стержни с перемещающимися опорами 399
5.16. Стержень при движущихся нагрузках 404

5.17. Влияние осевой силы на поперечные колебания стержня 409
5.18. Стержни на упругих опорах или упругом основании 421
5.19. Определение частот колебаний методом Релея—Ритца 415
5.20. Колебания стержней переменного поперечного сечения 420
5.21. Совместные изгибные и крутильные колебания стержней 427
5.22. Колебания круговых колец 430
5.23. Поперечные колебания мембран 435
5.24. Поперечные колебания пластин 444
Приложение: Программы для ЭВМ
П. 1 Введение 455
П. 2. Численные решения для линейных систем 455
П. 3. Численные решения для нелинейных систем 456
П. 4. Итерационный метод определения собственных значений собственных векторов 456
П. 5. Численные решения для систем со многими степенями 457
Примечания редактора перевода 466
Именной указатель 469
Предметный указатель 470

Предметный указатель

Амплитуда колебании вынужденных 54
- - с демпфированием 75, 81, 162
- - свободных 19, 193, 215, 245
- - с демпфированием 69
- - установившихся 54, 193, 226
Балки с сосредоточенными массами консольные 40
- - свободно опертые 38, 43, 47
Биение 64, 222
- опор периодические 55, 229
- устойчивые 71
Вал коленчатый 31
- кругового поперечного сечения 359
- эквивалентный 27
Вектор нормированный 261
- собственный основной 246, 296
Взаимодействие инерционное 208
- упругое 208
Возмущения гармонические 53, 99, 156, 226, 238, 306, 393
- кусочно-линейные 121, 316, 455, 457
- кусочно-постоянные 119, 315, 455, 457
- линейные 98
- периодические 53, 86, 306
- произвольные 93
- ступенчатые 95
Волновое уравнение 324
Гаситель колебаний динамический 229
Гистерезис 81, 136
Декремент затухания логарифмический 69
Демпфирование абсолютное 304
- вязкое 65, 72
- - эквивалентное 79
- гистерезисное 134
- конструкционное 81
- относительное 304
- отрицательное 70
- пропорциональное 303
- упругопластическое 134
- по формам колебаний 305
- эквивалентное 66, 79
Деформация поперечного сдвига 390
Движения апериодические 69
- независимые 282, 470
Диаметры узловые 443

Жесткость главная (обобщенная) 340
- при изгибе стержней 373
- - пластин 446
- - швеллера 428
- при кручении 25, 428
- - стесненном 428
- пружины 16
- стержней при растяжении или сжатии 338, 347
- эквивалентная 20, 21
Задача на собственные значения 245, 252, 258, 264, 289, 338, 456
- - в нестандартной форме 236, 253
Закрепление стержня жесткое 329, 345
- - упругое 350
Значения собственные 246
- - одинаковые 297
Импульс прямоугольный 96
Инерция вращения 387, 390
Интеграл Дюамеля 94, 281, 312, 343, 354, 392, 439
Интегрирование уравнения движения непосредственное 141
Интерполяция кусочно-линейная 121
- кусочно-постоянная 121
Итерационный метод 288
Колебания вынужденные 52, 60
- изгибно-крутильные тонкостенных стержней 427
- изохронные 134
- - нелинейные 156
- крутильные 359, 430
- - при движении опор 55
- неустановившиеся 60
- - с вязким демпфированием 65, 72
- продольные 327, 331
- свободные гармонические 16, 17
- - с вязким демпфированием 65
Кольца круговые 430
- - Колебания изгибные 433
- - — крутильные 432
Координаты главные 258, 341
- нормальные 258, 261
- относительные 57
- перемещения 198
- полярные 433, 442, 449
Коэффициенты влияния демпфирования 233
- - инерции 210
- - перемещений 285
- - энергии 211
- демпфирования 67, 303
- - вязкого 74
- - критические 70
- - эквивалентные 85
- жесткости 197
- податливости 202
- трения 82
- усиления 54, 74
Линии узловые мембран 438
- - прямоугольных пластин 449
Масса главная (обобщенная) 340
Матрица демпфирования 303
- жесткости 198
- коэффициентов усиления 228
- масс 198
- - главная 259
- ортогональная 265
- податливости 202
- - главная 259, 263
- присоединенная 246
- собственных значений 260
- спектральная 260
- усеченная 299
Маятник двойной 201
- - составной 213
- крутильный 25
- обратный 34
- тройной 256
Мембраны круговые 442
- прямоугольные 435
Метод Бубнова 154, 155, 156, 161, 164, 170, 424, 466
- вращающихся векторов 18
- итерационный 288
- квадратного корня (Холецкого) 252
- линейных ускорений 186

- непосредственного интегрирования 140
- нормальных форм колебаний 244, 265, 338
- Ньюмарка 180
- осреднения 154
- - по ускорениям 183
- последовательных приближений 148, 289
- Релея 37, 467
- Релея—Ритца 415, 467
- степенных рядов 288
- Стодолы—Вианелло 288
- усреднения Ритца 154
- энергетический 32, 148
Момент изгибающий сосредоточенный 392
Нагрузки движущиеся 405
- критические эйлеровы 406
- нормальные 274
- эквивалентные 230, 272
- - нормальные 274
Нелинейность геометрическая 132
Нити растянутые 366
- - неустановившееся поведение 369
Ньютона второй закон 17, 192
Окружности узловые 443
Опоры 104
- - перемещение линейное 107
- - произвольное 104
- - ступенчатое 106
Основание упругое 411
Отношение амплитуд 194, 216, 218, 235
Ошибка округления 121
Перемещения обобщенные 212
- опор 279, 282, 353
- - стержни 353, 399
- основания 282
- остаточные 172
- призматических стержней вынужденные 331
- - обусловленные податливостью 355
Период колебаний демпфированных 67
- - свободных 17
Петля гистерезиса 81, 136
Пластины круговые 449
- - жестко защемленные 451
- - при различных граничных условиях 453
- прямоугольные 444, 446
- - жестко защемленные 447
- - свободно опертые 446
Пластический шарнир 134
Поведение нелинейное 130
- неустановившееся 310, 315
Постоянная вязкого демпфирования 85, 303
Преобразование координат 212
Призматические стержни 272, 323, 338
- - Движение как абсолютно жесткого тела 354
- - Заданные перемещения опор 353
- - Колебания вынужденные 391, 397
- - поперечные 372, 377, 380, 471
- продольные 323
- - переменного поперечного сечения 377, 420
- - с пружиной 345
- - с сосредоточенной массой 345
Принцип Даламбера 209, 323
Прогибы стержней 391
Работа сил инерции 332
- - упругих 332
Равновесие динамическое 209
Резонанс 75, 76, 243
Решение волновое 324
- численное 118, 315
- - для систем линейных 455
- - нелинейных 179, 456
Ряд Тейлора 180, 181, 185
- Фурье 88, 307, 433
Связи дополнительные 293
Сдвиг поперечный 387
Сечения узловые 27

Сила возмущающая периодическая 86, 308
- - произвольная 93
- восстанавливающая жесткопластическая 137
- - билинейная 136
- нормальная 271
- осевая 409
Силы внешние 270
Системы с двумя степенями свободы 192, 197, 202, 208, 214
- - с вязким демпфированием 233
- с кулоновским трением 173
- кусочно-линейные 164
- со многими степенями свободы 244
- - демпфированные 302
- - Координаты главные 263
- - нормальные 261
- - Метод нормальных форм 265, 270, 279
- - итерационный 288
- с одной степенью свободы 16
- - с демпфированием 65, 72, 79
Стержень с движущимися нагрузками 404
- с перемещающимися опорами 399
- с различными концевыми условиями 397
- свободно опертый 390
- на упругих опорах 411
Теорема взаимности для динамических нагрузок 273
- - перемещений 275
Угол поперечного сдвига 388
Уравнение волновое одномерное 324
- движения 17
- - в матричной форме 197
- - в перемещениях 202
- - в усилиях 197
- Дуффинга 156
- частотное 325
Условия концевые 325
- начальные 265
- ортогональности 258, 339, 340
Форма движения как абсолютно жесткого тела 222, 266
- колебаний вторая 195
- - основная 194
- - первая 194
Формулы экстраполяции 182, 185, 189
Функции передаточные 226
- - комплексные 239
Функция влияния перемещений 400
- главная (нормальная) 325
- нагрузки линейная 98
- - ступенчатая 95
Частота колебаний 18
- - демпфированных 67
- - критическая 87
- - круговая 18
- - резонансная 54, 63, 75, 87, 163, 228, 308
- - собственная 64
- - основная 291
Энергии принцип сохранения 32
Энергия деформации 33, 333, 384, 416, 432, 437, 446
- кинетическая 32, 39, 416, 432, 437, 446
- потенциальная 33, 39, 416, 432, 437, 446, 472

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Имя Степана Прокофьевича Тимошенко (1878—1972 гг.) хорошо известно советским специалистам и не требует рекомендаций. Его вклад в теорию колебаний упругих систем очень значителен. Он занимался теорией продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней в связи с проектированием валов и мостов. Исследовал поперечные колебания стержней при движущейся нагрузке, оценил влияние противовесов ведущих колес локомотива в связи с явлением резонанса. Изучил роль продольного растяжения при поперечных колебаниях от движущейся нагрузки. Предложил метод расчета стержня на поперечный удар, причем этот метод существенно расширил наши представления о процессе удара: учет деформации в месте удара позволил установить временную зависимость контактной силы и самое время удара (в прежней постановке задачи, развитой Коксом и Сен-Венаном, это было невозможно) и, естественно, определить закон изменения поперечных перемещений стержня во времени.

Наконец, С. П. Тимошенко получил дифференциальное уравнение прогибов стержня (1916 г.) с учетом поперечных сдвигов и инерции вращения, а также проанализировал на основе уравнений теории упругости собственные колебания стержня прямоугольного поперечного сечения и показал, как связать эти результаты с данными, полученными на основе балочной теории.

Эти идеи получили широкое развитие в теории малых поперечных колебаний стержней. Позднее они были распространены на случай пластин и оболочек, дав механике то, что теперь мы называем двухмодовой аппроксимацией колебаний стержня Тимошенко, стержнем типа Тимошенко, пластиной и оболочкой типа Тимошенко. В последних трех случаях уравнения классической теории стержней, пластин и оболочек дополняются поперечными сдвигами.

Таким образом, интерес С. П. Тимошенко к теории колебаний упругих систем и их приложениям в технике не случаен, как не случаен отбор материала для его книги о колебаниях, характер изложения материала, его анализ и используемые им в процессе решения методы.

Издание книги, перевод которой предлагается советскому читателю, имеет долгую историю. С. П. Тимошенко издал ее в 1928 г. на

английском языке *, включив материалы глав второго тома «Курса теории упругости», вышедшего в 1916 г. в Петрограде на русском языке; в 1937 г. он опубликовал вторым изданием** расширенный вариант книги, а в 1955 г. книга была незначительно переработана соавтором Д. Х. Янгом для третьего издания***. Предлагаемое читателю четвертое издание существенно переработано третьим соавтором книги У. Уивером и вышло в свет уже после смерти С. П. Тимошенко. Как отмечено в предисловии, переработка касалась главным образом вычислительной стороны проблемы и совместного использования матричных методов и метода нормальных форм колебаний.

Любая книга С. П. Тимошенко всегда имела успех у самого различного круга читателей — от аналитиков до инженеров-эксплуатационников. Редактор не сомневается и в успехе перевода четвертого издания: последняя переработка не изменила лицо книги и характер подачи материала. Эта книга с интересом будет изучена специалистами в области теории колебаний, инженерами различного профиля, аспирантами и студентами старших курсов высших учебных заведений. В ряде принципиальных случаев редактор вынужден был сопроводить текст примечаниями.

Э. И. Григолюк

15 января 1984 г.
Москва

---

* **Timoshenko S. P.** Vibration problems in engineering. New York, D. Van Nostrand Co. Inc., Constable and Co., 1928. 351 p. (опубликован перевод **Тимошенко С. П.** Теория колебаний в инженерном деле. М. — Л.: ОНТИ, 1931. 344 с.; изд. 2-е; 1932; изд. 3-е, 1934).

** **Timoshenko S. P.** Vibration proclems in engineering. 2nd ed.—N. Y..; Van Nastrand Co., Ins., Constable and Co., 1937, IX, 470 p.

*** **Timoshenko S. P., Young D. H.** Vibration problems in engineering. 3rd ed. — N. Y.: Van Nostrand Co., Inc., 1955, IX, 468 p. (опубликован перевод **Тимошенко С. П.** Теория колебаний в инженерном деле. — М.: Физматгиз, 1959, 439 с.). (См. также **Timoshenko S. P., Young D. H.** Advanced dynamics. — N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1948, XII, 400 p.).

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1905 г., когда возраст одного из авторов не достигал и года, С. П. Тимошенко уже опубликовал в журнале «Известия Санкт-Петербургского политехнического института» свою первую научную статью «К вопросу о явлениях резонанса в валах». В ней рассматривался вал постоянного диаметра с укрепленными на концах дисками и показывалось, как с помощью метода Релея можно приближенно учесть влияние распределенной массы вала на период свободных крутильных колебаний. В статье также указывалось, что аналогичным образом можно вычислить период основных колебаний вала, несущего несколько (более двух) дисков. Это был первый случай применения метода Релея (Рэлея) в инженерной задаче, и он же положил начало исследованию проблем колебаний в технике. Из этой статьи видно, какое большое влияние оказала книга лорда Релея «Теория звука» на последующие работы С. П. Тимошенко, посвященные теории колебаний.

Когда проф. С. П. Тимошенко в 1922 г. приехал в Америку, он сначала поступил на работу в специализировавшуюся в области колебаний компанию «Вайбрейшн спешиэлити» в г. Филадельфии. Эта небольшая фирма занималась в основном изготовлением и сбытом балансировочных машин. Здесь Тимошенко приобрел первый опыт практического исследования проблем колебаний в технике. Накопление опыта исследования практических задач было продолжено в компании по производству электрического оборудования «Вестингауз» в г. Питсбурге. В этот период им была написана книга «Колебания в инженерном деле», опубликованная в 1928 г. Эта книга была одной из первых попыток вооружить инженеров-механиков систематизированной теорией колебаний. Книга сразу же завоевала популярность среди преподавателей и инженеров-практиков.

За 20 лет, прошедшие после выхода третьего издания книги, различные разделы теории механических колебаний получили существенное развитие, поэтому потребовалось приложить значительные усилия, чтобы привести содержание книги в соответствие с современным состоянием данной области. С развитием вычислительной техники появилась возможность произвести такие сложные расчеты колеблющихся систем, которые значительно превзошли все то, что могло быть сделано прежде. Использование ЭВМ не изменяет фундаментальных принципов теории колебаний, но оно оказывает значи-

тельное влияние на выбор методов расчета с точки зрения их наибольшей приемлемости. В связи с этим целесообразно обсудить системы с двумя и большим числом степеней свободы в матричной форме, так как подобный подход наиболее удобен при применении вычислительной техники. Третий соавтор, специалист по матричным методам и программированию, был приглашен с целью придания книге более современного вида.

Проф. С. П. Тимошенко умер 29 мая 1972 г. в доме своей дочери в ФРГ в возрасте 93 лет. Он не увидел последнее издание этой книги, поэтому остается неизвестным, что в ней было бы одобрено им. Сохранить традиционно высокое качество, исключительную притягательность, а также характерные особенности, присущие монографиям С. П. Тимошенко, и в то же время не отстать от новых достижений в данной области — все это, разумеется, представляет собой нелегкую задачу для соавторов. Однако хочется надеяться, что настоящее, четвертое, издание «Колебаний в инженерном деле» будет иметь такой же успех, как и все предыдущие.

Пало-Альто, шт. Калифорния **Д. Х. Янг**

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Главная цель настоящего издания — сделать книгу такой, чтобы она лучшим образом удовлетворяла основным требованиям сегодняшнего дня в вопросах исследований колебаний. Устаревший материал исключен, и вместе с тем подчеркнуты и расширены наиболее полезные аспекты теории. Использована матричная техника и введен метод нормальных форм колебаний для исследования динамики. Кроме того, приведены программы для вычислительных машин, необходимые при численных решениях. Цель этих изменений сделать книгу более современной и в то же время сохранить фундаментальные положения и особенности предыдущего издания.

Книга предназначена для студентов старших курсов втузов и аспирантов, которые должны хорошо разбираться в математическом анализе, включая дифференциальные уравнения. Кроме того, им потребуются знания курсов по статике, элементарной динамике и механике материалов. Что касается курсов строительной механики и теории упругости, то предварительного ознакомления с ними достаточно при изучении теории колебаний. Предполагается, что студент обладает некоторыми знаниями матричной алгебры или достаточно хорошо подготовлен для того, чтобы разобраться в необходимых матричных операциях по ходу чтения этой книги.

Гл. 1, в которой рассматриваются линейные системы с одной степенью свободы, содержит новый материал, относящийся к поведению системы при действии произвольно распределенной нагрузки в условиях перемещения опор, спектральной чувствительности и численным решениям. Представляющие общий интерес и полезные для практики темы расширены, при этом некоторые параграфы, касающиеся вопросов узко специального приложения, исключены.

Обсуждение нелинейных систем в гл. 2 теперь включает упругопластические и различные кусочно-линейные функции, описывающие зависимость нагрузки от перемещений, а также нелинейно упругие системы. Кроме того, здесь сильнее, чем прежде, акцентированы вопросы неустановившихся колебаний и спектральных характеристик. Более того, значительно расширен параграф, посвященный численным решениям, и теперь он стал основным в данной главе.

В гл. 3 вводится матричная форма представления уравнений движения как в усилиях (с учетом коэффициентов жесткости), так и в перемещениях (с учетом коэффициентов влияния податливости). Приводимые обсуждения служат как бы мостом для перехода к системам со многими степенями свободы, рассматриваемым в следующей главе. Кроме того, исчерпывающе обсужден вопрос взаимодействия инерционных сил и сил тяжести с учетом упругих сил и влияния вязкого демпфирования.

Матричные уравнения движения, обобщающие случай системы с двумя степенями свободы на системы с n степенями свободы, рассмотрены в гл. 4, в которой описано использование метода нормальных форм колебаний к исследованию динамических задач, а также по-

казано применение его к различным задачам. Авторы полностью отказались от прежнего варианта гл. 4, заменив его совершенно новым материалом. Рассмотрена реакция по нормальным формам колебаний на заданные начальные условия, внешние воздействия и перемещения опор, включая движение как абсолютно жесткого тела и колебания. Последовательно рассмотрен итерационный метод для определения частот и форм колебаний, обращено внимание на усечение форм колебаний. Обсуждены различные подходы для учета демпфирования в системах со многими степенями свободы, где демпфирование по формам колебаний является самым простым случаем. В заключительном параграфе описаны численные решения для установившегося поведения систем с большим числом степеней свободы при наличии демпфирования, подвергнутым силовым воздействиям в виде кусочно-постоянных или кусочно-линейных функций.

Гл. 5, где рассматриваются колебания упругих тел, в силу классического характера материала требовала самых небольших переделок. Тем не менее, более трети ее параграфов полностью перекомпонованы и добавлены новые, чтобы включить изложение метода нормальных форм колебаний.

В приложении содержится ряд программ для вычислительных машин, относящийся к гл. 1, 2 и 4, в которых использовались численные и матричные методы. Эти программы составлены третьим соавтором во время работы над переизданием этой книги и использованы при решении многих примеров и задач. По этой причине они составлялись в соответствии с интересами студентов и могут быть использованы как вспомогательные материалы при программировании.

Хотя благодарность тем, кто перепечатывает рукопись, обычно занимает последнее место после прочих благодарностей, имя М. Э. Леннерт будет названо здесь первым за ее преданную и полную оптимизма помощь в работе. Воздаю также должное Д. М. Гере, который прочел отдельные части настоящей книги и сделал много полезных замечаний. Большая помощь и возможность пользоваться вычислительными машинами обеспечивались инженерно-строительным факультетом и технической школой Стенфордского университета. И, наконец, свою любовь и благодарность я адресую Эйприлу и Алисе за то, что они предоставили своему отцу относительную свободу для работы над рукописью этой книги.

Санта-Крус, шт. Калифорния **У. Уивер**

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

С увеличением размеров и скоростей современных машин становится все более важным при проектировании инженерных конструкций проводить исследования колебаний, возникающих в них. Хорошо известно, что решить имеющие большое практическое значение проблемы балансировки машин, крутильных колебаний в валах и зубчатых передачах, колебаний турбинных лопаток и дисков, выбора оптимальной частоты вращения валов, колебаний железнодорожных полотен и мостов, вибрации фундаментов и т. п. можно с помощью теории колебаний. Только используя эту теорию, можно определить наиболее благоприятные размеры конструкции, когда рабочие режимы машины отдалены, насколько это возможно, от критических режимов, при которых могут появиться опасные колебания.

В данной книге изложены основы теории колебаний и на многочисленных примерах показано ее приложение к решению технических задач, взятых зачастую из действительных случаев появления колебаний в машинах и конструкциях. При ее написании автор следовал курсу лекций по колебаниям, прочитанных им инженерам-механикам компании по производству электрических машин «Вестингауз» в 1925 г., а также некоторым главам опубликованной им ранее книги по теории упругости *.

Краткое содержание книги таково. Гл. 1 посвящена обсуждению гармонических колебаний систем с одной степенью свободы. Рассмотрена общая теория свободных и вынужденных колебаний, показано применение этой теории к задаче балансировки машин и конструированию аппаратуры для регистрации колебаний. Разобран также приближенный метод Релея для исследования колебаний более сложных систем, а также дано его приложение к расчету критических частот вращающихся валов переменного поперечного сечения.

Гл. 2 содержит теорию негармонических колебаний систем с одной степенью свободы. Обсуждены приближенные методы исследования свободных и вынужденных колебаний. Подробно разобран частный случай, когда гибкость систем изменяется во времени, и полу-

---

* **Тимошенко С. П.** Курс теории упругости. Ч. I (лекции, прочитанные в Киевском политехникуме в 1908—1909 учебном году). Киев: типолит. «Прогресс», 1909. 238 с.; ч. I. СПб: тип. А. Э. Коллинса, 1914. 239 с.; ч. II. Стержни и пластинки, 1916. 416 с.; 2-е изд. Киев: Наукова думка, 1972. 507 с.

ченные при этом результаты применены к исследованию колебаний в локомотивах с кривошипно-шатунным приводом.

В гл. 3 рассмотрены системы с несколькими степенями свободы. Изложены общая теория колебаний таких систем и ее применение к решению следующих задач: колебания автомобилей, крутильные колебания валов, определение критических частот вращения валов, имеющих больше двух опор, и колебания систем с амортизаторами.

В гл. 4 приведена теория колебаний упругих тел. Рассмотрены следующие задачи: продольные, крутильные и поперечные колебания стержней и балок, колебания стержней переменного поперечного сечения, колебания мостов, турбинных лопаток и корпусов судов, а также обсуждена теория колебаний тел круговой формы — колец, мембран, пластин и турбинных дисков.

В приложении кратко описаны наиболее важные виброрегистрирующие приборы, которые используются при экспериментальных исследованиях колебаний.

Автор выражает благодарность правлению компании «Вестингауз» за предоставление ему возможности уделять много времени подготовке рукописи книги, а также использовать в качестве примеров различные реальные случаи возникновения колебаний в машинах, которые исследовались инженерами этой фирмы. Он также пользуется благоприятным случаем, чтобы поблагодарить многочисленных друзей, помогавших ему при подготовке рукописи, особенно Д. М. Лесселься, Д. Ормондройда и Д. Р. Ден-Гартога, которые прочитали рукопись и сделали много ценных замечаний.

Автор обязан Ф. К. Уилхарму за изготовление рисунков, а также издательской компании «Ван Нострэнд» за внимание, с которым готовилась публикация книги.

Анн-Арбор, шт. Мичиган
22 мая 1928 г.

С. П. Тимошенко

Глава 1
СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.1. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Если статически нагруженную упругую систему типа балки или вала воздушного винта вывести каким-либо способом из состояния равновесия, то внутренние силы и изгибающие моменты в деформированном состоянии уже не будут более находиться в равновесии с внешними нагрузками, и возникнут колебания. В общем случае упругая система может совершать колебания по различным формам или модам. Например, растянутая проволока может колебаться по различным формам в зависимости от числа узлов, укладывающихся на ее длине. В простейшем случае конфигурацию колеблющейся системы можно задать с помощью одной координаты; такие случаи называют *системами с одной степенью свободы*.

Рассмотрим случай (рис. 1.1, *а*), когда груз весом W (точнее массой W/g) соединен с опорой через линейную упругую винтовую пружину. Если считать, что возможно только вертикальное перемещение груза W, а масса пружины мала по сравнению с массой груза, то систему можно рассматривать как имеющую одну степень свободы. Конфигурация системы будет полностью определяться смещением x груза от равновесного состояния.

Как только груз прикреплен к пружине, он приобретает статическое перемещение

$$\delta_{ст} = W/k, \qquad (а)$$

где k — сила, вызывающая удлинение пружины, равное единице; она называется *жесткостью пружины*. Если вес измерен в ньютонах (Н), а удлинение в метрах (м), то жесткость пружины будет выражена в Н/м. Для *винтовой цилиндрической пружины* с плотно намотанными n витками, имеющими средний диаметр витка D и диаметр проволоки d, жесткость пружины можно определить по формуле *

$$k = G\,d^4/(8nD^3), \qquad (б)$$

где G — модуль упругости при сдвиге материала проволоки.

Пусть теперь груз выведен из положения равновесия и затем отпущен, в результате чего возникают колебания. Такие колебания,

---

* **Timoshenko S., Young D. H.** Elements of strength of materials. 5 th ed. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1968, p. 80

которые поддерживаются только упругими силами пружины, называются *свободными*, или *собственными*. Если за положительное принять перемещение x, направленное вниз, то сила, возникающая при этом в пружине, для произвольного положения груза будет равна $W + kx$ (рис. 1.1, *б*). Зная, что масса груза равна W/g, и обозначая ускорение d^2x/dt^2 через $\ddot{x}$, можно в соответствии со *вторым законом Ньютона* получить *уравнение движения*

$$(W/g)\,\ddot{x} = W - (W + kx). \qquad \text{(в)}$$

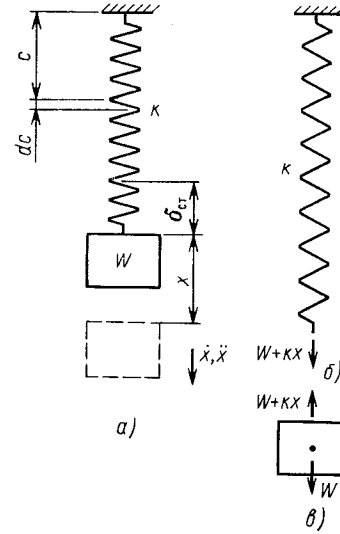


Рис. 1.1

Действующие на груз неуравновешенные силы показаны на рис. 1.1, *в*. Слагаемые в правой части уравнения (в), обозначающие вес W, сокращаются; это означает, что дифференциальное уравнение движения для свободных колебаний системы не зависит от гравитационного поля. Для приводимых ниже рассуждений важно помнить, что перемещение x измеряется от положения статического равновесия и что оно считается положительным, когда направлено вниз.

Вводя обозначение

$$p^2 = kg/W = g/\delta_{ст}, \qquad \text{(г)}$$

уравнение (в) можно представить в виде

$$\ddot{x} + p^2x = 0. \qquad (1.1)$$

Этому уравнению могут удовлетворять решения в виде $x = C_1 \cos pt$ или $x = C_2 \sin pt$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Суммируя эти частные решения, получим общее решение уравнения (1.1):

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt. \qquad (1.2)$$

Видно, что вертикальное давление груза W имеет колебательный характер, поскольку функции $\cos pt$ и $\sin pt$ являются периодическими, принимающими одни и те же значения через интервал времени τ, откуда следует

$$p(\tau + t) - pt = 2\pi. \qquad \text{(д)}$$

Этот интервал времени называется периодом колебаний. Его величина определяется из уравнения (д):

$$\tau = 2\pi/p. \qquad \text{(е)}$$

С учетом обозначений (г) получаем следующую формулу:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}}. \qquad (1.3)$$

Можно видеть, что период колебаний зависит от веса W и жесткости пружины k и не зависит от величины перемещения. Можно также отметить, что период колебаний подвешенного груза весом W совпадает с периодом колебаний простейшего маятника, длина которого равна статическому перемещению $\delta_{ст}$. Если это перемещение можно определить теоретически или экспериментально, то период колебаний τ определяют по формуле (1.3).

Число возвратно-поступательных движений в единицу времени (т. е. число циклов в секунду) называется *частотой колебаний*. Обозначая частоту колебаний через f, получим

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}}. \qquad (1.4)$$

Колебательное движение, описываемое выражением (1.2), называется *простым гармоническим движением*. Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 следует рассмотреть начальные условия. Предположим, что в начальный момент времени ($t = 0$) груз W имеет перемещение x_0 от положения равновесия, а начальная скорость равна $\dot{x}_0$. Подставляя $t = 0$ в выражение (1.2), получим

$$C_1 = x_0. \qquad (ж)$$

Найдя производную выражения (1.2) по времени и подставляя $t = 0$, получим

$$C_2 = \dot{x}_0/p. \qquad (з)$$

Выражение, описывающее колебательное движение груза W, получаем подстановкой в выражение (1.2) значений постоянных C_1 и C_2, что дает

$$x = x_0 \cos pt + (\dot{x}_0/p) \sin pt. \qquad (1.5)$$

Можно видеть, что в этом случае колебание состоит из двух частей: первая пропорциональна $\cos pt$ и зависит от начального перемещения x_0, а вторая пропорциональна $\sin pt$ и зависит от начальной скорости $\dot{x}_0$. Каждую из этих частей можно представить графически, как показано на рис. 1.2, *а* и *б*, в виде зависимостей перемещения от времени. Полное перемещение x груза W при колебаниях в произвольный момент времени t получаем суммированием ординат двух кривых в этот момент времени, что дает кривую, показанную на рис. 1.2, *в*.

Другой метод представления колебаний основан на использовании *вращающихся векторов*. Возьмем вектор $\overline{OP}$ (рис. 1.3) длиной x_0, вращающийся с постоянной угловой скоростью p вокруг неподвижной точки O. Эта скорость называется *угловой*, или *круговой частотой* колебаний. В начальный момент времени ($t = 0$) вектор $\overline{OP}$ совпадает с осью x; угол, который составляет этот вектор с осью x в момент времени t, равен pt. Проекция вектора на ось x равна $x_0 \cos pt$ и представляет собой первое слагаемое выражения (1.5). Взяв другой вектор $\overline{OQ}$ длиной $\dot{x}_0/p$, перпендикулярный вектору $\overline{OP}$, видим, что его проекция на ось x соответствует второму слагаемому

выражения (1.5). Полное перемещение x груза при колебаниях получаем суммированием проекций на ось x двух взаимно перпендикулярных векторов $\overline{OC}$ и $\overline{OQ}$, вращающихся с угловой скоростью p.

К такому же результату можно прийти, если вместо векторов $\overline{OP}$ и $\overline{OQ}$ рассмотреть вектор $\overline{OR}$, представляющий сумму этих векторов, и взять проекцию результирующего вектора на ось x. Длина этого вектора, как видно из рис. 1.3,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}, \qquad (и)$$

а угол между вектором и осью равен $pt - \alpha$, где

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}_0}{p x_0}. \qquad (к)$$

В соответствии с вышесказанным выражение (1.5), очевидно, может быть представлено в эквивалентной форме

$$x = A \cos (pt - \alpha), \qquad (1.6)$$

где A и α, определяемые из выражений (и) и (к), являются новыми постоянными, зависящими от начальных условий движения. Видно, что сумма двух простых гармонических движений, одно из которых пропорционально cos pt, а другое sin pt, также является простым гармоническим движением, пропорциональным cos $(pt - \alpha)$ (см. рис. 1.2, *в*). Максимальное значение A ординаты этой кривой, равное длине вектора $\overline{OR}$ (см. рис. 1.3), представляет собой максимальное смещение тела при колебаниях от положения равновесия и оказывается амплитудой колебаний.

Благодаря углу α между двумя вращающимися векторами $\overline{OP}$

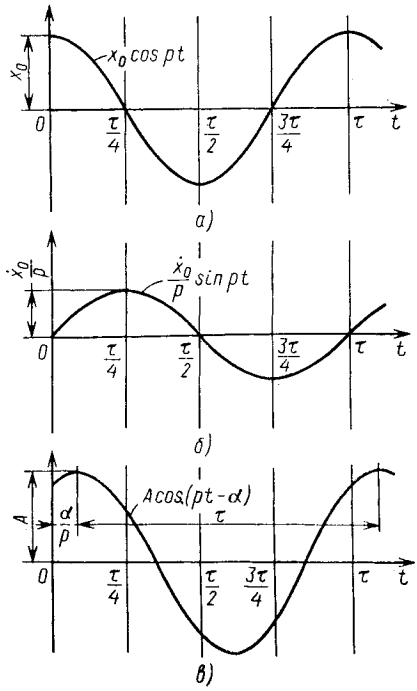


Рис. 1.2

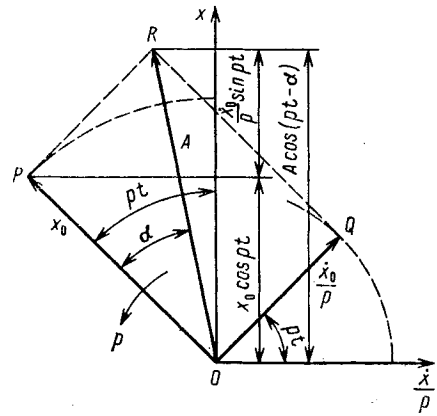


Рис. 1.3

и $\overline{OR}$ максимальная ордината кривой на рис. 1.2, *в* смещена относительно максимальной ординаты кривой, показанной на рис. 1.2, *а*, на величину α/p. В этом случае можно сказать, что результирующее колебание, представляемое кривой на рис. 1.2, *в*, отстает от перемещения, представляемого кривой на рис. 1.2, *а*; угол α называется *разностью фаз*, или *фазовым углом* этих двух колебаний. Координаты x и $\dot{x}/p$ (см. рис. 1.3) определяют, как говорят, фазовую плоскость, в которой движение описывается с помощью вращающихся векторов.

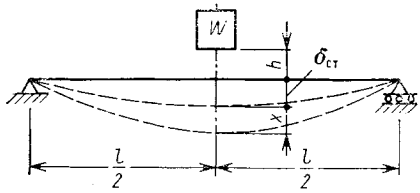


Рис. 1.4

Пример 1. На свободно опертую балку длиной 3,05 м и с изгибной жесткостью $5{,}86 \cdot 10^4$ Н·м^2 установлен на высоте $h = 0{,}013$ м в среднем сечении пролета балки груз весом $W = 910$ Н (рис. 1.4). Пренебрегая распределенной массой балки и считая, что груз и балка после первого соприкосновения не отделяются друг от друга при колебаниях, вычислить частоту и амплитуду результирующих свободных колебаний.

Решение. При действии нагрузки W, приложенной в середине пролета балки, статический прогиб

$$\delta_{ст} = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{910 \cdot 3{,}05^3}{48 \cdot 5{,}86 \cdot 10^4} = 9{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Отсюда, по формуле (1.4) определяем частоту свободных колебаний

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81}{9{,}2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{3{,}13}{0{,}603} = 5{,}19 \text{ с}^{-1}.$$

При определении амплитуды учтем, что в начальный момент времени ($t = 0$), когда падающий груз ударяет по балке, начальное перемещение $x_0 = -\delta_{ст}$, а начальная скорость $\dot{x}_0 = \sqrt{2gh}$.

По формуле (и) находим амплитуду

$$A = \sqrt{(-\delta_{ст})^2 + 2h\delta_{ст}} =$$

$$= \sqrt{84{,}64 \cdot 10^{-6} + 239 \cdot 10^{-6}} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Поскольку амплитуда измеряется от положения статического равновесия, то следует отметить, что полный прогиб, обусловленный падением груза, $A + \delta_{ст} = 2{,}72 \times 10^{-2}$ м.

Пример 2. На рис. 1.5, *а* груз весом W подвешен на двух пружинах с жесткостями k_1 и k_2, соединенных последовательно. На рис. 1.5, *б* тот же груз закреплен на двух пружинах с жесткостями k_1 и k_2, соединенных *параллельно*. Для каждого случая найти *эквивалентную жесткость* k системы.

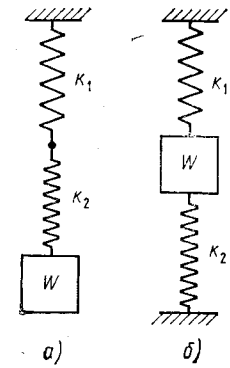


Рис. 1.5

Решение. Для случая, представленного на рис. 1.5, *а*, каждая пружина нагружена одним и тем же весом W и удлинение каждой в отдельности равно $\delta_1 = W/k_1$ и $\delta_2 = W/k_2$. Тогда полное статическое перемещение груза составит $\delta_{ст} = \delta_1 + \delta_2 = W/k_1 + W/k_2$.

В соответствии с выражением (а) жесткость пружины для эквивалентной системы будет $k = W/\delta_{ст}$, или

$$k = k_1k_2/(k_1 + k_2). \qquad (л)$$

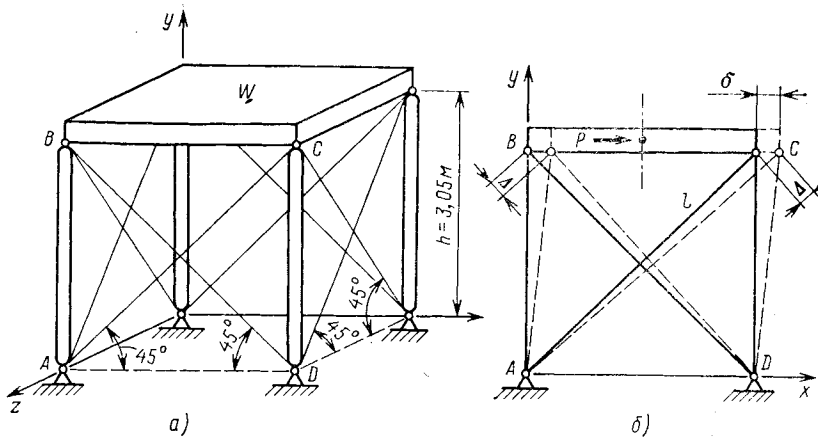


Рис. 1.6

Подставляя найденное значение k в формулу (1.3), можно вычислить период свободных колебаний.

Пусть в случае, изображенном на рис. 1.5, *б*, величина S_1 — растягивающая сила, приложенная к верхней пружине, S_2 — сжимающая сила, приложенная к нижней пружине. Обе эти силы обусловлены действием груза весом W. Из условия того, что каждая пружина должна изменять свою длину на одинаковую величину, имеем

$$\delta_{ст} = S_1/k_1 = S_2/k_2 = W/k. \qquad \text{(м)}$$

Далее, единичное перемещение груза вызывает восстанавливающую силу

$$k = k_1 + k_2, \qquad \text{(н)}$$

которая равна эквивалентной жесткости пружины системы. Таким образом, для того чтобы получить *эквивалентную жесткость пружины* при *параллельном соединении пружин*, требуется только сложить жесткости каждой пружины. Силы, действующие на каждую пружину, можно получить из выражений (м) и (н):

$$S_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} W; \quad S_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} W.$$

Пример 3. Ферменная конструкция состоит из платформы весом $W = 1{,}75 \times \times 10^5$ Н, опертой на четыре абсолютно жесткие вертикальные стойки и подкрепленной по каждой стороне двумя диагональными предварительно напряженными стальными тросами (рис. 1.6, *а*). Стойки шарнирно закреплены по концам; каждый диагональный трос имеет площадь поперечного сечения, равную $(1/\sqrt{2}) \times 6{,}45 \times \times 10^{-4}$ м^2, и предварительно напряжен большим усилием. Пренебрегая массами всех элементов конструкции, за исключением массы платформы, найти период τ свободных боковых колебаний конструкции.

Решение. Приложим к центру тяжести платформы в направлении оси x силу P (см. рис. 1.6, *б*). При действии этой силы изменение растягивающей силы в диагонали AC будет $S = \sqrt{2}P/4$. Соответствующее удлинение этой диагонали составит

$$\Delta = \frac{Sl}{FE} = \frac{\sqrt{2}P\sqrt{2}h}{4FE} = \frac{Ph}{2FE},$$

а диагональ BD укоротится на ту же величину. В результате этих изменений длин диагоналей видно, что платформа сместится на $\delta = \sqrt{2}\Delta$. Таким образом, жесткость эквивалентной пружины данной конструкции системы

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{\sqrt{2}FE}{h} = \frac{6{,}45 \cdot 2{,}11 \cdot 10^7}{3{,}05} = 4{,}46 \cdot 10^7 \text{ Н/м}.$$

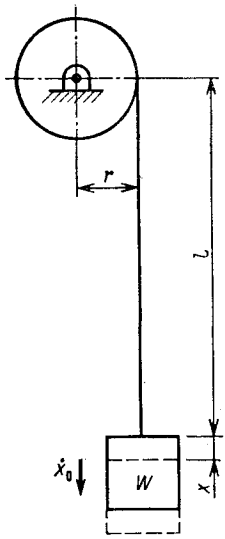


Рис. 1.7

Подставляя найденное значение жесткости k в формулы (1.3), получим

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{175\,000}{4{,}46 \cdot 10^7 \cdot 9{,}81}} = 2\pi \sqrt{0{,}0004} = 0{,}126 \text{ с}.$$

Читателю предоставляется возможность показать, что в данном примере горизонтальную силу P не обязательно направлять параллельно оси или в произвольном направлении в горизонтальной плоскости.

Пример 4. Предположим, что груз весом W (рис. 1.7) поднимается подъемным механизмом и при этом он движется вверх с постоянной скоростью $\dot{x}_0$, а в качестве пружины служит стальной трос. Определить максимальное напряжение, возникающее в тросе, когда во время движения внезапно останавливается барабан, наматывающий верхний конец троса. Пусть вес груза $W = 4{,}54 \cdot 10^5$ Н, $l = 18{,}3$ м, площадь поперечного сечения троса $F = 1{,}61 \cdot 10^{-3}$ м^2, модуль упругости троса $E = 1{,}05 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, скорость $\dot{x}_0 = 0{,}914$ м/с. Весом троса можно пренебречь.

Решение. При равномерном движении подъемника растягивающая сила в тросе $W = 4{,}54 \cdot 10^5$ Н, удлинение троса в любой момент времени $\delta_{ст} = Wl/(EF) = 0{,}0049$ м. Благодаря начальной скорости x_0 поднимаемый груз не остановится сразу, а будет колебаться на тросе. Отсчитывая время от некоторого произвольного момента, видим, что перемещение поднимаемого груза от положения равновесия в рассматриваемый момент времени равно нулю, тогда как скорость равна $\dot{x}_0$. Из выражения (1.5) следует, что амплитуда колебания будет равна $\dot{x}_0/p$, где $p = \sqrt{g/\delta_{ст}} = 44{,}7$ с$^{-1}$, $\dot{x}_0 = 0{,}914$ м/с. Тогда максимальное удлинение троса $\delta_{max} = \delta_{ст} + \dot{x}_0/p = 0{,}0049 + 0{,}914/44{,}7 = 0{,}0049 + 0{,}0204 = 0{,}0253$ м, а максимальное напряжение $\sigma_{max} = [4{,}54 \cdot 10^5/(1{,}61 \cdot 10^{-3})] \times (0{,}0253/44{,}7) = 1{,}595 \cdot 10^8$ Па. Можно видеть, что внезапная остановка барабана увеличивает напряжение примерно в 5 раз.

ЗАДАЧИ

1.1.1. Винтовая цилиндрическая пружина (см. рис. 1.1) имеет диаметр $D = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м витка по срединной линии, диаметр проволоки $d = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м, число витков равно 20. Модуль упругости материала проволоки при сдвиге $G = 0{,}84 \times 10^{11}$ Па, вес подвешенного груза $W = 150$ Н. Определить период свободных колебаний.

Ответ: $\tau = 0{,}64$ с.

1.1.2. Свободно опертая балка (рис. А.1.1.2) имеет жесткость при изгибе $EI = 9 \cdot 10^3$ Н·м^2, длина пролета между опорами $l_1 = 1{,}8$ м, длина консоли $l_2 = 0{,}9$ м.

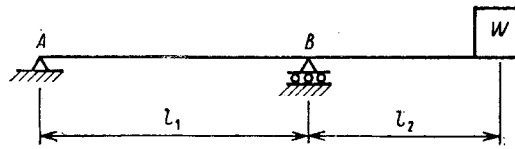


Рис. А.1.1.2

Пренебрегая массой балки, найти частоту свободных колебаний груза весом $W = 3000$ Н, установленного на незакрепленный конец консоли.

Ответ: $f = 6{,}48$ с$^{-1}$.

1.1.3. Балка AB (рис. А.1.1.3) жесткостью при изгибе $EI = 9 \cdot 10^4$ Н·м^2 оперта концами A и B на пружины. Жесткость каждой пружины $k = 5{,}36 \cdot 10^4$ Н/м. Пре-

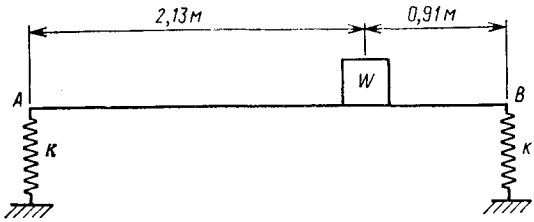


Рис. А.1.1.3

небрегая весом балки, вычислить период свободных колебаний груза весом $W =$ $= 5000$ Н, установленного на расстоянии 0,91 м от конца B.

Ответ: $\tau = 0{,}533$ с.

1.1.4. Цистерна с водой (рис. А.1.1.4), весящая $W = 6 \cdot 10^5$ Н, опирается на четыре вертикальные стойки, изготовленные из труб и жестко заделанные по кон-

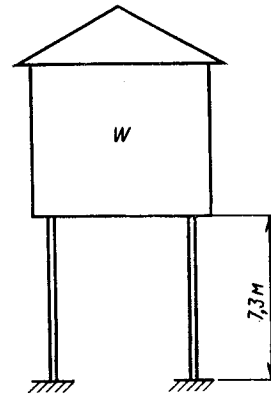


Рис. А.1.1.4

цам. Каждая стойка имеет жесткость при изгибе $EI = 6 \cdot 10^6$ Н·м^2. Вычислить период свободных колебаний цистерны в горизонтальном направлении. Весом стоек можно пренебречь.

Ответ: $\tau = 1{,}95$ с.

1.1.5. Предположим, что для снижения максимального значения динамического напряжения, возникающего в конструкции из примера 1.1.4, между нижним концом троса и поднимаемым грузом установлена короткая пружина, имеющая жесткость $k = 3{,}6 \cdot 10^5$ Н/м. Определить максимальное напряжение, которое возникнет в этом случае при внезапной остановке верхнего конца троса. Использовать те же числовые данные, что и в примере 1.1.4.

Ответ: $\sigma_{max} = 50{,}8 \cdot 10^6$ Па.

1.1.6. В портальной раме установлена тяжелая двутавровая балка длиной 6 м и высотой поперечного сечения 0,61 м, которая жестко приварена к двум относительно гибким стойкам (рис. А.1.1.6). Каждая из этих стоек изготовлена из швеллера с площадью поперечного сечения $F = 2{,}59 \cdot 10^{-3}$ м^2. Минимальный радиус инерции $r = 1{,}57 \cdot 10^{-2}$, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2. Вычислить период собственных боковых колебаний в плоскости рамы: а) считая, что точки A и B полностью закреплены;

б) предполагая в точках A и B наличие шарниров. Пренебречь изгибом двутавровой балки и весом стоек.

Ответ: $\tau_1 = 0{,}813$ с, $\tau_2 = 1{,}62$ с.

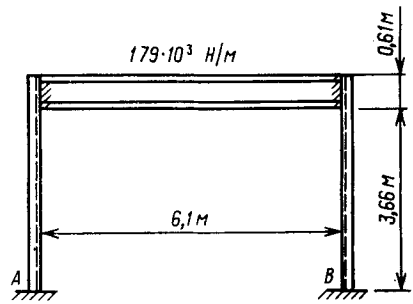


Рис. А.1.1.6

1.1.7. Двухпролетная неразрезная балка состоит из двух швеллеров высотой 0,152 м ($I = 2 \cdot 7{,}24 \cdot 10^{-6} = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ м^4). На балку установлен электродвигатель

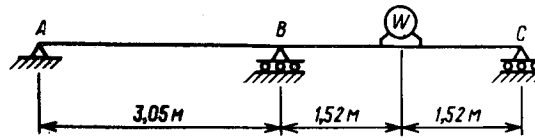


Рис. А.1.1.7

весом $W = 5{,}45 \cdot 10^4$ Н в середине пролета BC (рис. А.1.1.7). Определить собственную частоту свободных вертикальных колебаний электродвигателя, пренебрегая влиянием веса балки.

Ответ: $f = 5{,}72$ с$^{-1}$.

1.1.8. Небольшой шар массой m прикреплен в середине к туго натянутому тросу длиной $2l$ (рис. А.1.1.8). Трос не сопротивляется изгибу и имеет большое

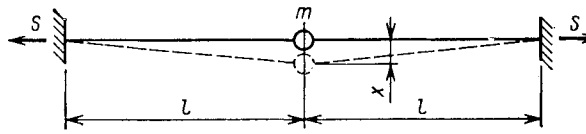


Рис. А.1.1.8

предварительное натяжение S. Составить дифференциальное уравнение движения при малых поперечных колебаниях шара и показать, что при постоянном натяжении троса рассматриваемое движение является простым гармоническим. Чему в этом случае равен период колебаний?

Ответ: $\tau = 2\pi \sqrt{ml/(2S)}$.

1.1.9. Груз весом W поддерживается тремя пружинами, соединенными последовательно подобно тому, как соединены две пружины на рис. 1.5, *а*. Показать, что жесткость эквивалентной пружины

$$k = \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}.$$

1.2. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

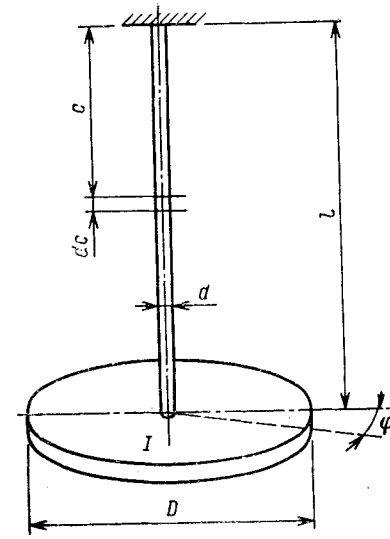


Рис. 1.8

Рассмотрим показанный на рис. 1.8 упругий вал, верхний конец которого жестко закреплен, а к нижнему прикреплен перпендикулярно оси вала абсолютно жесткий диск круговой формы. Подобная система называется *крутильным маятником*. Если диск повернуть на малый угол относительно оси вала и затем отпустить, то крутящий момент, появившийся при закручивании вала, приведет его в движение, и возникнут свободные *крутильные колебания*. При этих колебаниях момент, передаваемый на диск со стороны закрученного вала, пропорционален углу закручивания φ и всегда действует в направлении, противоположном вращению диска. Так, если через I обозначить *момент инерции диска* относительно оси вала, через $\ddot{\varphi}$ — угловые ускорения и через $k_к$ — крутящий момент, отнесенный к единице угла поворота (*жесткость пружины при кручении*), то дифференциальное уравнение движения примет вид

$$I\ddot{\varphi} = -k_к\varphi. \qquad (а)$$

Вводя обозначение

$$p^2 = k_к/I, \qquad (б)$$

уравнение (а) можно записать в виде

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi = 0. \qquad (1.7)$$

Это уравнение имеет вид, аналогичный уравнению (1.1) из предыдущего параграфа, поэтому его решение будем искать в виде, аналогичном (1.5), что дает

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt + (\dot{\varphi}_0/p) \sin pt, \qquad (1.8)$$

где φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ — соответственно угловое перемещение и угловая скорость диска в начальный момент времени $t = 0$. Рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, из выражения (1.8) получим период крутильных колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_к}}, \qquad (1.9)$$

а его частота

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_к}{I}}. \qquad (1.10)$$

В случае вала кругового поперечного сечения длиной l и диаметром d *жесткость пружины при кручении* можно определить по формуле *

$$k_к = \frac{GJ}{l} = \frac{\pi d^4 G}{32l}, \qquad (в)$$

где G — модуль упругости материала при сдвиге. Через J обозначен *момент сопротивления кручению поперечного сечения вала*, который в случае поперечного сечения круговой формы равен полярному моменту инерции. Жесткость пружины при кручении $k_к$ обычно измеряется в Н·м/рад.

Далее, если диск круговой формы является однородным и имеет диаметр D и вес W, то момент инерции

$$I = WD^2/(8g). \qquad (г)$$

Определив таким образом величины $k_к$ и I, период и частоту *крутильных колебаний* можно вычислить по формулам (1.9) и (1.10).

В более сложном случае вала некругового поперечного сечения и тела неправильной формы величины $k_к$ и I определяют более сложным образом. Однако, если отсутствуют формулы для вычисления этих величин, то их всегда можно найти экспериментальным путем. Для того чтобы колебание было чисто крутильным, необходимо совпадение оси вала с главной осью тела, проходящей через его центр тяжести. Однако, чтобы воспрепятствовать другим движениям тела, необходимо ввести ограничения в виде подшипников. Следует также отметить, что крутильные колебания могут возникать и в таких системах, где отсутствуют крутильные деформации (см. пример 2 в конце этого параграфа).

В последующем обсуждении полагаем, что вал на рис. 1.8 имеет постоянное поперечное сечение диаметром d. Если вал имеет два участка с длинами l_1 и l_2 и диаметрами d_1 и d_2, соответственно, то по формуле (в) можно подсчитать соответствующие этим участкам жесткости $k_{к1}$ и $k_{к2}$ при кручении. Затем, поскольку два участка вала представляют собой последовательно соединенные пружины, работающие на кручение, жесткость пружины эквивалентной системы можно найти из выражения (л) предыдущего параграфа.

Случай ступенчатого вала можно рассмотреть иным путем. Если вал, состоящий из двух участков, нагружен крутящим моментом M, то полный угол закручивания вала находим из выражения

$$\varphi = \frac{M}{k_{к1}} + \frac{M}{k_{к2}} = \frac{32Ml_1}{\pi d_1^4 G} + \frac{32Ml_2}{\pi d_2^4 G} = \frac{32M}{\pi d_1^4 G}\left(l_1 + l_2 \frac{d_1^4}{d_2^4}\right).$$

Таким образом, видно, что угол закручивания вала с двумя диаметрами d_1 и d_2 равен углу закручивания вала с постоянным диаметром d_1 и приведенной длиной L_1, определяемой по формуле

$$L_1 = l_1 + l_2 d_1^4/d_2^4. \qquad (д)$$

* См. с. 72 в кн. **Timoshenko S., Young D. H.** Elements of strength of materials, цитированной в п. 1.1.

Вал длиной L_1 и диаметром d_1 имеет ту же самую жесткость пружины, что и данный вал с двумя различными диаметрами, и является *эквивалентным валом* для указанного случая.

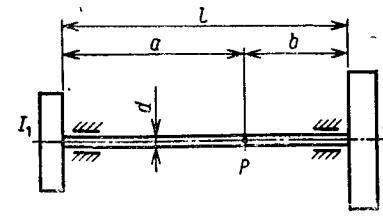


Рис. 1.9

Рассмотрим теперь случай вала, опирающегося на работающие в условиях отсутствия трения подшипники и несущего на концах вращающиеся вместе с ним абсолютно жесткие тела (рис. 1.9). Случай представляет практический интерес: в таком виде можно представить вал с пропеллером на одном конце и ротором турбины — на другом *.

Если два диска закрутить в противоположных направлениях, а затем внезапно отпустить, то возникнут крутильные колебания. Из принципа сохранения момента количества движения следует, что при таких колебаниях диски всегда должны вращаться в противоположных направлениях. Таким образом, имеется некоторое промежуточное поперечное сечение, расположенное в точке P на оси вала (см. рис. 1.9), которое остается неподвижным. Это поперечное сечение называется *узловым сечением*. Его положение определяют из следующего соображения: оба диска должны иметь один и тот же период колебаний, поскольку в противном случае не будет выполняться условие, что они вращаются в противоположных направлениях.

Применяя формулу (1.9) к обеим подсистемам, примыкающим с двух сторон к узловому сечению, получим

$$\sqrt{\frac{I_1}{k_{к1}}} = \sqrt{\frac{I_2}{k_{к2}}} \text{ или } \frac{k_{к1}}{k_{к2}} = \frac{I_1}{I_2}, \qquad \text{(е)}$$

где $k_{к1}$ и $k_{к2}$ являются жесткостями при кручении соответственно для левой и правой частей вала. Их величины, как видно из формулы (в), обратно пропорциональны длинам соответствующих частей вала, что в соответствии с соотношениями (е) дает $a/b = I_2/I_1$. Поскольку справедливо $a + b = l$, то имеем

$$a = lI_2/(I_1 + I_2); \quad b = lI_1/(I_1 + I_2). \qquad \text{(ж)}$$

Применяя формулы (1.9) и (1.10) к левой части системы, получим

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{k_{к1}}} = 2\pi \sqrt{\frac{32lI_1I_2}{\pi d^4 G\,(I_1 + I_2)}}; \qquad (1.11)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 G\,(I_1 + I_2)}{32lI_1I_2}}. \qquad (1.12)$$

С помощью этих формул можно подсчитать период и частоту крутильных колебаний, если известны размеры вала, модуль упругости

* Это была одна из самых ранних проблем, столкнувшись с которой инженеры обнаружили необходимость исследования крутильных колебаний.

при сдвиге G и моменты инерции масс дисков, закрепленных на концах вала. В приведенных рассуждениях масса вала не учитывается, ее влияние на период колебаний будет рассмотрено ниже в п. 1.4.

Как видно из соотношений (ж), если один из двух вращающихся дисков имеет очень большой момент инерции массы по сравнению с моментом другого диска, то можно положить, что узловое сечение совпадает с положением большего диска, и таким образом система с двумя дисками (см. рис. 1.9) сводится к системе только с одним диском.

Пример 1. Предположим, что два диска, установленные на концах вала (см. рис. 1.9), имеют веса $W_1 = 4{,}54 \cdot 10^3$ Н, $W_2 = 9{,}08 \cdot 10^3$ Н и диаметры $D_1 = 1{,}27$ м, $D_2 = 1{,}9$ м. Длина вала $l = 3{,}05$ м, диаметр $d = 0{,}1$ м, модуль упругости его материала $G = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ Па. Определить частоту свободных крутильных колебаний системы. Как изменится эта частота, если на длине 1,6 м диаметр вала изменить от 0,1 м до 0,2 м?

Решение. Подставляя заданные числовые значения в формулу (г), определим моменты инерции масс дисков:

$$I_1 = \frac{4{,}54 \cdot 10^3 \cdot 1{,}27}{8 \cdot 9{,}81} = 73{,}5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2; \quad I_2 = \frac{9{,}08 \cdot 10^3 \cdot 1{,}9}{8 \cdot 9{,}81} = 219{,}8 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2.$$

Используя эти значения, а также исходные данные для вала, по формуле (1.12) получаем

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot 0{,}0001 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{10} (73{,}5 + 219{,}8)}{32 \cdot 3{,}05 \cdot 73{,}5 \cdot 219{,}8}} = 11{,}15 \text{ с}^{-1}.$$

Если диаметр вала увеличить от 0,1 до 0,2 м на длине 1,6 м, то длина эквивалентного вала диаметром 0,1 м в соответствии с формулой (д) будет $L_1 = 1{,}45 + 1{,}6 \cdot 0{,}1^4/0{,}2^4 = 1{,}45 + 0{,}1 = 1{,}55$ м. Поскольку эта длина составляет половину от первоначальной длины 3 м, а частота обратно пропорциональна квадратному корню из длины [см. формулу (1.2)], то получаем, что в результате усиления вала частота увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.

Пример 2. Маховик имеет массивный обод весом W и средним радиусом R, прикрепленный к ступице четырьмя призматическими спицами (рис. 1.10, *а*). Найти период свободных крутильных колебаний обода относительно центральной оси, проходящей через точку O, при внезапной остановке ступицы. Массу спиц не учитывать и принять, что каждая спица имеет длину R и жесткость при изгибе B.

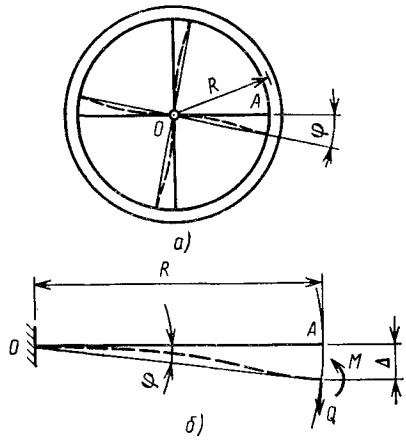


Рис. 1.10

Решение. Пусть, как показано на рисунке, обод поворачивается на малый угол φ. Каждая спица ведет себя как балка, один конец которой жестко заделан в ступице, а другой вынужден перемещаться вместе с ободом. К внешнему концу спицы приложены поперечная сила Q и изгибающий момент M (рис. 1.10, *б*). Применяя известные соотношения для жесткостей балки, получим

$$Q = 12B\Delta/R^3 - 6B\varphi/R^2; \qquad (з)$$

$$M = 6B\Delta/R^2 - 4B\varphi/R. \qquad (и)$$

Если обод считать абсолютно жестким, то касательная, проведенная к упругой линии в точке на внешнем конце спицы, должна быть направлена вдоль радиуса.

Таким образом, поперечная сила Q и изгибающий момент M связаны с углом поворота φ простым геометрическим соотношением $\Delta \approx R\varphi$. Подставляя это соотношение в зависимости (з) и (и), найдем

$$Q = 6B\varphi/R^2;\ M = 2B\varphi/R. \qquad (к)$$

Суммарный момент, действующий на обод:

$$M_c = 4QR - 4M = 16B\varphi/R. \qquad (л)$$

Тогда, очевидно, жесткость при кручении в этом случае

$$k_к = M_c/\varphi = 16B/R. \qquad (м)$$

Подставляя это значение $k_к$ в формулу (1.9) и учитывая, что момент инерции массы маховика определяется выражением $I \approx WR^2/g$, получим

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{wR^3}{16gB}}. \qquad (н)$$

ЗАДАЧИ

1.2.1. Определить частоту крутильных колебаний горизонтального стержня AB весом $W = 18{,}2$ Н и длиной $a = 0{,}51$ м, который прикреплен в середине пролета к вертикальному стальному тросу длиной $l = 0{,}51$ м и диаметром $d = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м. Считать, что стержень является тонким, но абсолютно жестким; массу троса не учитывать и модуль упругости при сдвиге взять $G = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ Па.

Ответ: $f = 0{,}781$ с$^{-1}$.

1.2.2. На рис. А.1.2.2 представлено устройство, с помощью которого весьма удобно экспериментально определять момент инерции масс тел неправильной формы. Оно состоит из двух параллельных пластин, соединенных таким образом, что вся система действует как абсолютно жесткое тело, которое присоединено к вертикальному стержню и внутрь которого может быть помещено произвольной формы тело небольших размеров. Будучи пустотелым (рис. А.1.1.2, *а*), этот крутильный маятник

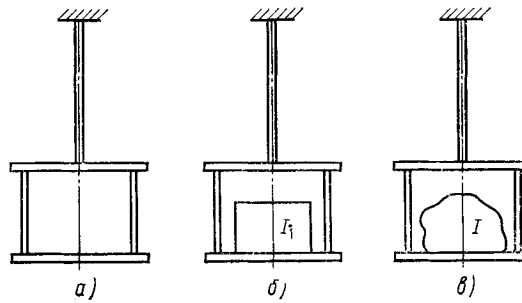


Рис. А.1.2.2

имеет измеренный период τ_0. При помещении в это устройство тела с известным моментом инерции I_1 (рис. А.1.2.2, *б*), которое начинает колебаться вместе с маятником, период колебаний устройства равен τ_1. Когда же в устройство помещают тело с неизвестным моментом инерции I (рис. А.1.2.2, *в*), период колебаний маятника равен τ_2. Найти момент инерции I последнего тела относительно оси вращения, т. е. относительно оси стержня.

Ответ: $I = I_1 \dfrac{(\tau_2^2 - \tau_0^2)}{(\tau_1^2 - \tau_0^2)}$.

1.2.3. Тонкий призматический стержень AB (рис. А.1.2.3) весом W и длиной l удерживается в горизонтальном положении шарниром за конец A и пружи-

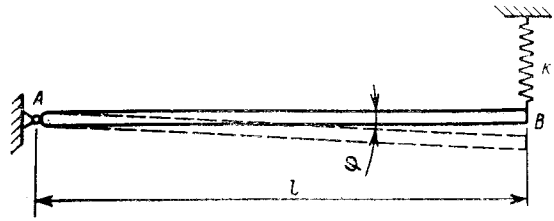


Рис. А.1.2.3

ной с жесткостью k за конец B. Найти период крутильных колебаний для малых значений угловых перемещений φ стержня в вертикальной плоскости. Массу пружины не учитывать и считать стержень абсолютно жестким.

Ответ: $\tau = 2\pi \sqrt{\dfrac{W}{3kg}}$.

1.2.4. Тонкий, но абсолютно жесткий стержень AB (рис. А.1.2.4) весом W и длиной l закреплен в горизонтальном положении шарниром за конец A и вер-

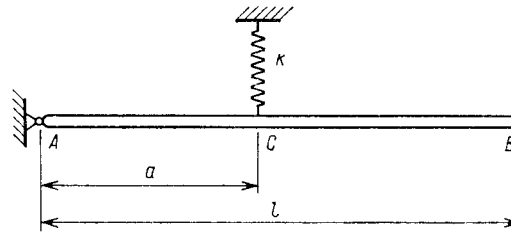


Рис. А.1.2.4

тикальной пружиной в точке C. Для случая малых амплитуд колебаний при поворотах стержня в вертикальной плоскости вычислить период τ колебаний, если жесткость пружины равняется k и масса ее пренебрежимо мала.

Ответ: $\tau = 2\pi \dfrac{l}{a} \sqrt{\dfrac{W}{3kg}}$.

1.2.5. Определить частоты крутильных колебаний диска (рис. А.1.2.5), если концы A и B вала жестко заделаны. Обе части вала имеют один и тот же диаметр

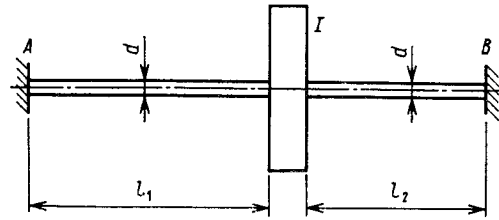


Рис. А.1.2.5

d, но длины их различны — l_1 и l_2. Момент инерции массы диска равен I.

Ответ: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4 G (l_1 + l_2)}{32 I l_1 l_2}}$.

1.2.6. Определить эквивалентную длину L_1 прямого вала, имеющего ту же крутильную жесткость C_1, что и шейки коленчатого вала, показанного на рис. А.1.2.6. Плечи кривошипа CE и DF имеют жесткость при изгибе B. Предполагается, что подшипники A и B имеют достаточный зазор, допускающий свободное поперечное перемещение щек C и D при кручении коленчатого вала. Палец кривошипа EF имеет жесткость C_2, радиус кривошипа равен r.

Ответ: $L_1 = 2a + \frac{C_1}{C_2} b + 2\frac{C_1}{B} r$.

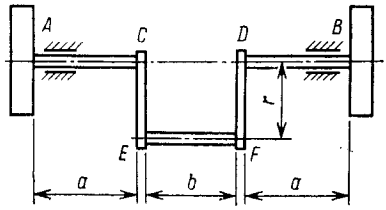


Рис. А.1.2.6

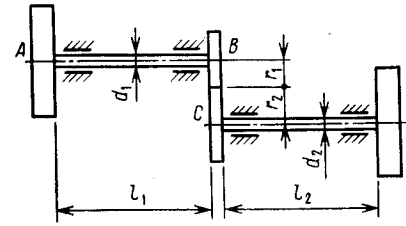


Рис. А.1.2.7

1.2.7. Два параллельных вала AB и CD (рис. А.1.2.7) закреплены в подшипниках и связаны друг с другом зубчатой передачей. На внешнем конце каждого вала прикреплен массивный диск, и вся система совершает крутильные колебания. Вычислить период колебания, если известны следующие данные: $I_A = I_D = 116$ Н·м·с$^{-2}$, $l_1 = l_2 = 1{,}52$ м, $d_1 = d_2 = 7{,}62 \cdot 10^{-3}$ м, $r_1/r_2 = 1/2$. Массу зубчатых колес и валов не учитывать. Модуль упругости при сдвиге материалов обоих валов $G = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ Па.

Ответ: $\tau = 0{,}158$ с.

1.2.8. Для той же системы, что рассматривалась в задаче 1.2.7, найти общее выражение для длины L_1 одиночного эквивалентного вала диаметром d_1, на концах которого укреплены диски A и D.

Ответ: $L_1 = l_1 + (d_1/d_2)^4 (r_2/r_1)^2 l_2$.

1.2.9. Стальной обод круговой формы весом W и радиусом средней линии r (рис. А.1.2.9) прикреплен к неподвижной ступице радиуса r_0 с помощью n радиальных спиц, каждая из которых имеет значительное предварительное натяжение с силой S_0. Определить период крутильного колебания обода, предположив, что растягивающее усилие в каждой спице остается неизменным при колебаниях. Спицы шарнирно закреплены по концам и не сопротивляются изгибу.

Ответ: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{Wr(r - r_0)}{ngS_0 r_0}}$.

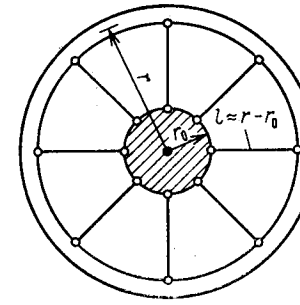


Рис. А.1.2.9

1.2.10. Платформа с растяжками из примера 3, п. 1.1 (см. рис. 1.6), имеет вес $W = 1{,}75 \cdot 10^5$ Н, равномерно распределенный по платформе. Определить период крутильных колебаний системы относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести.

Ответ: $\tau = 0{,}0724$ с.

1.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Иногда удобнее использовать принцип сохранения энергии в колеблющихся системах, где не происходит рассеивания энергии. С помощью подобного подхода будет вновь получено уравнение движения при свободных колебаниях системы с одной степенью свободы и установлено равенство максимальных значений кинетической и потенциальной энергий при свободных колебаниях.

Используя энергетический подход, вновь проанализируем систему, состоящую из пружины с массой (см. рис. 1.1, *а*). Если снова пренебречь массой пружины, то *кинетическую энергию* системы можно представить в следующем виде:

$$E_к = \frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}. \qquad (а)$$

Потенциальная энергия системы в этом случае состоит из двух частей: а) потенциальной энергии груза весом W, поскольку он располагается ниже положения равновесия как исходного состояния, и б) энергии деформации, накопленной в пружине при перемещении на величину x. Первая из указанных двух энергий выражается в следующем виде:

$$E_п = -Wx. \qquad (б)$$

Для того чтобы подсчитать вторую часть энергии, рассмотрим представленную на рис. 1.11 диаграмму, описывающую изменение силы S реакции пружины в зависимости от перемещения x. В состоянии равновесия сила реакции пружины равна W, при перемещении x эта сила равна $W + kx$. Таким образом, энергия, накопленная в пружине при перемещении x,

$$E_с = Wx + kx^2/2. \qquad (в)$$

Суммируя энергии (а), (б) и (в) и учитывая, что их сумма должна быть постоянной в соответствии с законом сохранения энергии, получим

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \qquad (г)$$

Поскольку в правой части соотношения (г) стоит постоянная величина, скорость изменения во времени этой величины равна нулю; таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = 0. \qquad (д)$$

Выполнив в равенстве (д) дифференцирование и разделив результат

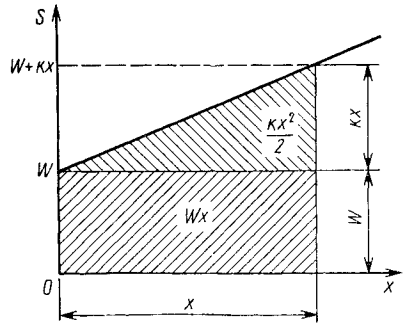


Рис 1.11.

на x, получим уравнение движений, аналогичное приведенному в п. 1.1;

$$(W/g)\,\ddot{x} + kx = 0. \qquad (е)$$

Если требуется найти только собственную частоту колеблющейся системы, то нет необходимости рассматривать полностью уравнение движения. Вместо этого можно рассмотреть колеблющийся груз, показанный на рис. 1.1, *а*, в состоянии покоя в одном из двух крайних положений; при этом суммарная потенциальная энергия

$$E_{\text{п max}} = kx^2_{\max}/2, \qquad (ж)$$

а кинетическая энергия равна нулю. С другой стороны, когда груз проходит состояние равновесия (при $x = 0$), имея при этом максимальную скорость, его кинетическая энергия

$$E_{\text{к max}} = \frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2_{\max}}{2}. \qquad (з)$$

В этом случае потенциальная энергия равна нулю. Поскольку полная энергия остается постоянной, максимальная кинетическая энергия, должна быть равна максимальной потенциальной энергии. В результате имеем

$$E_{\text{к max}} = E_{\text{п max}}. \qquad (1.13)$$

Это простое соотношение является полезным при определении собственной частоты или периода колебаний системы. Приравнивая для системы, изображенной на рис. 1.1, *а*, величины (ж) и (з), получим

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2_{\max}}{2} = \frac{kx^2_{\max}}{2}. \qquad (и)$$

Задавая гармоническое движение в форме, определяемой выражением (1.6): $x = A\cos(pt - \alpha)$; $\dot{x} = -Ap\sin(pt - \alpha)$, видим, что

$$\dot{x}_{\max} = px_{\max}. \qquad (1.14)$$

Подставляя выражение для $\dot{x}_{\max}$ в соотношение (и), найдем частоту $p = \sqrt{kg/W}$ и период колебания $\tau = 2\pi\sqrt{W/(kg)}$, аналогичные полученным ранее в п. 1.1. Использование соотношения (1.13) при расчете периода или частоты колебаний является особенно удобным в том случае, когда имеется не простая, подобная показанной на рис. 1.1, *а* система, а более сложная, состоящая из нескольких колеблющихся частей. Такие случаи рассмотрены в приводимых ниже примерах.

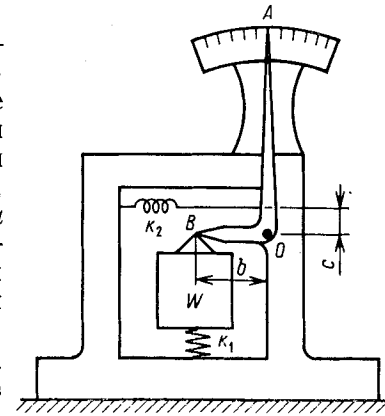


Рис. 1.12

Пример 1. Измеритель перемещений состоит из корпуса, в котором находится груз весом W, установленный на пружине k_1 (рис. 1.12). Движения груза относительно

корпуса передаются стрелке BOA, вращающейся вокруг точки O и соединенной с другой пружиной k_2, как показано на рисунке. Пренебрегая массой обеих пружин, вычислить период свободных колебаний системы при условии, что в ней имеет место простое гармоническое движение.

Решение. Пусть $\dot{x}_м$— максимальная скорость груза W при колебании. Тогда соответствующая угловая скорость стрелки BOA будет $\dot{x}_м/b$; если I— момент инерции массы этой стрелки относительно точки O, то полная кинетическая энергия системы в равновесном положении

$$E_{к\,max} = \frac{W}{g}\frac{\dot{x}_м^2}{2} + \frac{I}{b^2}\frac{\dot{x}_м^2}{2}. \qquad (к)$$

Когда система находится в крайнем положении, что определяется вертикальным перемещением $x_м$ груза W, на пружину k_2 будет действовать растягивающая сила $cx_м/b$; при этом полная потенциальная энергия системы

$$E_{п\,max} = \frac{1}{2}k_1x_м^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{c}{b}\right)^2x_м^2. \qquad (л)$$

Приравнивая согласно соотношению (1.13) выражения (к) и (л) и используя для случая простого гармонического движения равенство (1.14) $\dot{x}_м = px_м$, найдем круговую частоту колебаний

$$p = \sqrt{\frac{k_1 + (c/b)^2 k_2}{W/g + I/b^2}}. \qquad (м)$$

Период колебаний равен, соответственно, величине 2π, поделенной на правую часть выражения (м).

Пример 2. Обратный маятник состоит из шара весом W, укрепленного на конце абсолютно жесткого стержня OA длиной l, который шарнирно закреплен в точке O и поддерживается в вертикальном положении пружиной (рис. 1.13, *а*). Пренебрегая массами пружины и стержня OA, определить условие устойчивости и круговую частоту малых колебаний маятника в плоскости рисунка.

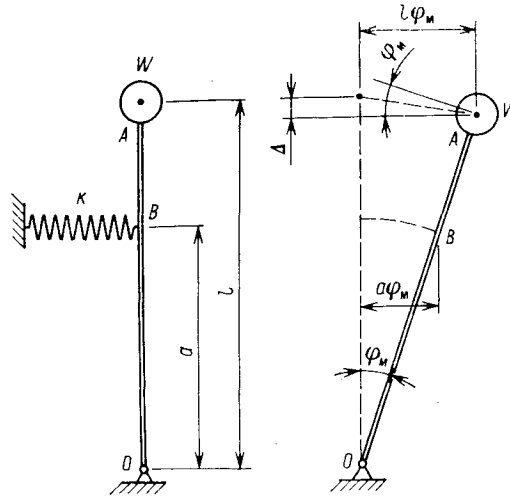


Рис. 1.13

Решение. Обозначим через $\varphi_м$ (рис. 1.13, *б*) амплитуду простого гармонического движения. В этом крайнем положении пружина имеет удлинение, приблизительно равное $a\varphi_м$, а груз W опускается вниз от своего положения равновесия на расстояние

$$\Delta = l\,(1 - \cos\varphi_м) \approx \frac{1}{2}\, l\varphi_м^2. \qquad (н)$$

Отсюда потенциальная энергия системы в ее крайнем положении

$$E_{п\,max} \approx \frac{1}{2}\, ka^2\varphi_м^2 - \frac{1}{2}\, Wl\varphi_м^2. \qquad (о)$$

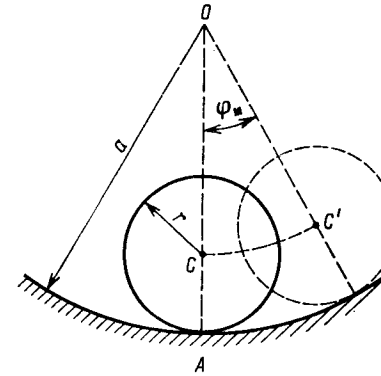


Рис. 1.14

В вертикальном положении (см. рис. 1.13, *а*), где маятник имеет угловую скорость $\dot{\varphi}_м$, кинетическая энергия приближенно равна $0{,}5I\dot{\varphi}_м^2$, где $I = Wl^2/g$ — момент инерции груза W относительно точки O. Таким образом, имеем

$$E_{к\,max} = (Wl^2/2g)\,\dot{\varphi}_м^2. \qquad (п)$$

Приравнивая выражения (о) и (п) и учитывая согласно (1.14), что $\dot{\varphi}_м = p\varphi_м$, найдем круговую частоту колебаний

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{ka^2}{Wl} - 1\right)}. \qquad (р)$$

Как видно из формулы (р), частота p имеет действительное значение, если выполняется условие

$$ka^2 > Wl. \qquad (с)$$

Если это условие не выполняется, вертикальное положение равновесия маятника будет неустойчивым.

Пример 3. Абсолютно твердый цилиндр круговой формы весом W и радиусом r перекатывается без трения по цилиндрической поверхности радиуса a (рис. 1.14). Предполагая, что перекатывающийся цилиндр совершает простое гармоническое движение, найти круговую частоту колебания p при малых амплитудах смещения относительно положения равновесия.

Решение. Рассмотрим цилиндр в крайнем положении, определяемом углом $\varphi_м$ (см. рис. 1.14). В этом положении центр тяжести цилиндра поднимается от положения равновесия в направлении, противоположном действию силы тяжести, на величину

$$(a - r)\,(1 - \cos\varphi_м) \approx (a - r)\,\varphi_м^2/2. \qquad (т)$$

Тогда потенциальная энергия имеет вид

$$E_{п\,max} = \frac{1}{2}\, W\,(a - r)\,\varphi_м^2. \qquad (у)$$

В среднем положении точка контакта A является мгновенным центром вращения цилиндра, поэтому при условии отсутствия трения мгновенная угловая скорость относительно этой точки

$$\dot{\theta}_м = \frac{a - r}{r}\,\varphi_м. \qquad (ф)$$

Тогда кинетическую энергию, которая равна $0{,}5I_A\dot{\theta}_м^2$, можно представить в виде

$$E_{к\,max} = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\frac{3r^2}{2}\frac{(a-r)^2}{r^2}\dot{\varphi}_м^2. \qquad (х)$$

Приравнивая выражения (у) и (х), получим следующее выражение для круговой частоты:

$$p = \sqrt{\frac{2g}{3(a-r)}}. \qquad (ц)$$

ЗАДАЧИ

1.3.1. На рис. А.1.3.1 показан тяжелый маятник, ось вращения которого составляет малый угол β с вертикалью. Определить частоту малых колебаний, учитывая только вес W шара и предполагая, что масса шара сосредоточена в центре тяжести C. Считать, что трение в подшипниках отсутствует.

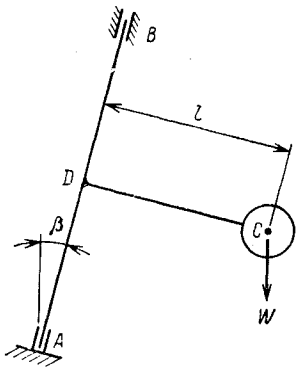


Рис. А.1.3.1

Ответ: $p = \sqrt{\frac{\beta g}{l}}$.

1.3.2. Определить собственную частоту колебаний системы, показанной на рис. 1.12, если $W = 22{,}7$ Н, $k_1 = 0{,}356 \cdot 10^3$ Н/м, $k_2 = 1{,}79 \cdot 10^3$ Н/м, $b = 0{,}102$ м, $c = 0{,}051$ м. Стрелку BOA рассматривать как тонкий, постоянного поперечного сечения стержень весом $W = 1{,}82$ Н и считать, что длина участка OA стрелки равна 0,306 м.

Ответ: $f = 2{,}72$ с$^{-1}$.

1.3.3. Когда в показанной на рис. 1.13, *а* системе к верхнему концу вертикального стержня прикреплен груз весом $W_1 = 9{,}1$ Н, частота колебаний системы равна 1,5 с$^{-1}$. При установке груза весом $W_2 = 18{,}2$ Н частота равна 0,75 с$^{-1}$. Какой минимальный вес должен иметь груз W_3, установка которого создает в системе условия неустойчивого равновесия? Весом стержня можно пренебречь.

Ответ: $W_3 = 27{,}3$ Н.

1.3.4. Определить круговую частоту p колебаний системы, показанной на рис. 1.13, *а*, если вертикальный стержень имеет общий вес wl, равномерно распределенный по его длине.

Ответ: $p = \sqrt{\frac{g}{l}\left[\frac{3ka^2/l}{3W + wl} - \frac{3}{4}\left(\frac{4W + 2wl}{3W + wl}\right)\right]}$.

1.3.5. Для записи вертикальных колебаний используется прибор, схема которого показана на рис. 1.3.5: абсолютно жесткая рамка AOB весом W может по-

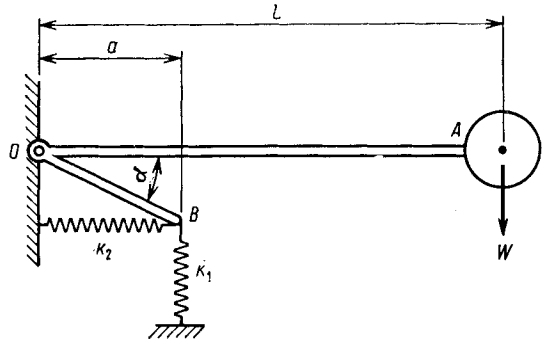


Рис. А.1.3.5

ворачиваться относительно оси O, перпендикулярной плоскости чертежа. Определить круговую частоту малых вертикальных колебаний груза, считая, что массами рамки и пружин можно пренебречь.

Ответ: $p = \sqrt{\dfrac{g\,[k_1 a^2 + k_2\,(a\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2]}{W l^2}}$.

1.3.6. Призматический стержень AB весом W подвешен на двух вертикальных тросах (рис. А.1.3.6) и может совершать малые крутильные колебания в горизонтальной плоскости относительно оси, проходящей через середину пролета стержня

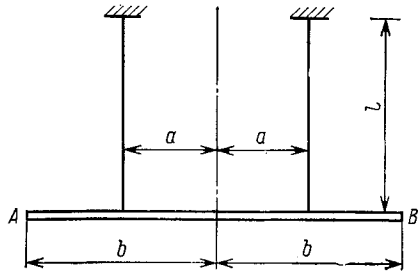


Рис. А.1.3.6

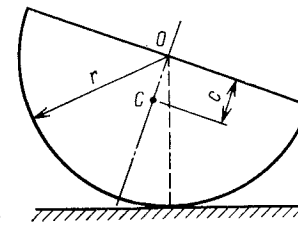


Рис. А.1.3.7

перпендикулярно плоскости чертежа. Определить круговую частоту этих колебаний.

Ответ: $p = \sqrt{\dfrac{3ga^2}{lb^2}}$.

1.3.7. Полукруговой сегмент цилиндра совершает колебательные движения, перекатываясь без трения по горизонтальной плоскости (рис. А.1.3.7). Определить круговую частоту малых колебаний, если r — радиус цилиндра, c — координата центра тяжести, $i^2 = Ig/W$ — квадрат радиуса инерции относительно центральной оси.

Ответ: $p = \sqrt{\dfrac{cg}{i^2 + (r-c)^2}}$.

1.4. МЕТОД РЕЛЕЯ

Во всех рассмотренных выше случаях задача сводилась к простейшему случаю колебания системы с одной степенью свободы путем введения определенных упрощающих предположений. Например, в системе, изображенной на рис. 1.1, пренебрегалось массой пружины по сравнению с массой груза W, а в показанной на рис. 1.4 системе не учитывалась масса балки. Аналогично в системе, представленной на рис. 1.8, пренебрегалось моментом инерции массы вала по сравнению с моментом инерции массы диска. Хотя введение подобных упрощающих предположений для большинства практических случаев позволяет получать достаточно точные решения, в технике встречаются задачи, в которых становится необходимым внимательно рассматривать точность таких приближенных подходов. Для того чтобы определить влияние подобных упрощений на частоту

колебаний, рассмотрим приближенный метод, предложенный Релеем *. При использовании этого метода необходимо сделать некоторые предположения относительно конфигурации системы при колебаниях. Тогда частота колебаний будет определяться из условий сохранения энергии системы.

В качестве простого примера применения метода Релея возьмем случай, представленный на рис. 1.1 и обсужденный в пп. 1.1 и 1.3. Если масса пружины мала по сравнению с массой груза W, на форму колебаний не будет существенно влиять масса пружины. С достаточной точностью можно предположить, что перемещение x_c произвольной точки пружины, расположенной на расстоянии c от закрепленного конца (см. рис. 1.1, *а*), будет таким же, как и в случае безмассовой пружины, что дает

$$x_c = cx/l, \tag{а}$$

где l — длина пружины в свободном состоянии.

Если, как и раньше, предположить, что перемещения изменяются линейно, то потенциальная энергия будет такой же, как и в случае безмассовой пружины, и поэтому здесь следует рассмотреть только кинетическую энергию системы. Обозначим через w вес единицы длины пружины. Тогда масса элемента пружины длиной dc будет равна $w\,dc/g$, а его кинетическая энергия составит $(w\,dc/2g)\,(c\dot{x}_{\max}/l)^2$. Полная кинетическая энергия пружины

$$\frac{w}{2g}\int_0^l \left(\frac{c\dot{x}_{\max}}{l}\right)^2 dc = \frac{\dot{x}^2_{\max}}{2g}\left(\frac{wl}{3}\right). \tag{б}$$

Эту величину следует сложить с кинетической энергией груза W, тогда условие (1.13) равенства энергий принимает вид

$$\frac{\dot{x}^2_{\max}}{2g}\left(W + \frac{wl}{3}\right) = \frac{kx^2_{\max}}{2}. \tag{в}$$

Сравнивая это соотношение с равенством (и) п. 1.3, можно сделать вывод: для того чтобы установить влияние массы пружины на период собственных колебаний, необходимо прибавить только треть веса пружины к весу груза W.

Этот вывод, полученный в предположении, что перемещение пружины изменяется по линейному закону, может с достаточной точностью использоваться даже в тех случаях, когда вес пружины имеет тот же порядок, что и вес W. Например, когда $wl = 0{,}5W$, ошибка приближенного решения (см. п. 5.5) составляет примерно 0,5 %. Для $wl = W$ и $wl = 2W$ ошибка примерно равна 0,8 и 3 %, соответственно.

В качестве второго примера рассмотрим случай колебания балки постоянного поперечного сечения, в середине пролета которой рас-

---

* **Rayleigh J. W. S.** The theory of sound. London: Macmillan Co., v. 1: 1877, 326 p.; v. 2: 1878. 302 p. (опубликован перевод 2-го англ. изд. 1894, 1896: **Стретт Дж. В. (Рэлей).** Теория звука. М. — Л.: Гостехиздат, т. 1, 1940, 499 с.; т. 2, 1944. 476 с.; 2-е изд., 1955 — перевод 3-го англ. изд. 1937).

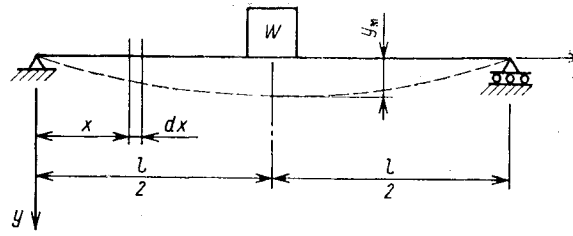


Рис. 1.15

положен груз весом W (рис. 1.15). Если вес wl балки мал по сравнению с весом груза W, то можно с достаточной точностью предположить, что прогиб балки при колебаниях имеет такую же форму, как и профиль кривой статических прогибов при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета балки. Тогда, обозначая через $y_м$ максимальный прогиб в середине пролета балки при колебании, можно выразить перемещение произвольного малого элемента балки, расположенного на расстоянии x от левой опоры, в виде

$$y = y_м \frac{3xl^2 - 4x^3}{l^3}. \qquad (г)$$

Максимальная кинетическая энергия самой балки

$$2\int_0^l \frac{w}{2g}\left(\dot{y}_м \frac{3xl^2 - 4x^3}{l^3}\right)^2 dx = \frac{17}{35} wl \frac{\dot{y}_м^2}{2g}. \qquad (д)$$

Эту кинетическую энергию балки при колебаниях необходимо сложить с энергией $W\dot{y}_м^2/2g$ груза, установленного в середине пролета балки, и таким образом учесть влияние веса балки на период колебаний. В этом случае период колебаний будет таким же, как и для невесомой балки, к которой приложена нагрузка

$$W' = W + \frac{17}{35} wl.$$

Даже для крайнего случая, когда $W = 0$ и в середине пролета балки прикладывается эквивалентная сила, равная (17/35) wl, точность приближенного метода оказывается достаточной для практических целей. Прогиб балки при действии эквивалентной силы, приложенной в середине пролета.

$$\delta_{ст} = \frac{17}{35} wl \frac{l^3}{48EI}.$$

Подставляя эту величину в формулу (1.3), найдем период собственных колебаний

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}} = 0{,}632 \sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}. \qquad (е)$$

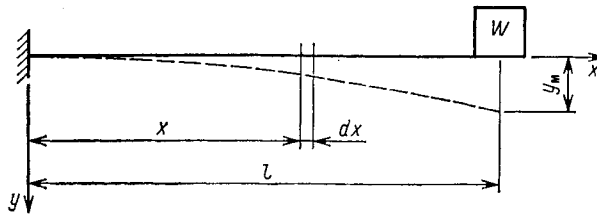


Рис. 1.16

Точное решение (см. п. 5.10) в этом случае имеет вид

$$\tau = (2/\pi)\sqrt{wl^4/(EIg)} = 0{,}637\sqrt{wl^4/(EIg)}. \qquad (ж)$$

Как видно, ошибка приближенного решения даже при таком ограниченном подходе составляет менее 1 %.

В качестве третьего примера рассмотрим призматическую консольную балку, на незакрепленном конце которой установлен груз весом W (рис. 1.16). Предположим, что при колебаниях форма линии прогиба балки будет такой же, как и в случае статического нагружения силой, приложенной на свободном конце. Обозначив через $y_м$ максимальное перемещение груза W, можем определить кинетическую энергию балки

$$\int_0^l \frac{w}{2g}\left(\dot{y}_м \frac{3x^2 l - x^3}{2l^3}\right) dx = \frac{33}{140} wl \frac{\dot{y}_м^2}{2g}. \qquad (з)$$

Период колебаний в этом случае будет таким же, как и период колебаний невесомой консольной балки, к свободному концу которой приложена сила

$$W' = W + \frac{33}{140} wl.$$

Эквивалентный груз весом $33/140\ wl$ можно использовать даже и в тех случаях, когда wl не является малой величиной. Применяя сказанное к крайнему случаю, когда $W = 0$, получаем

$$\delta_{ст} = \frac{33}{140} wl\left(\frac{l^3}{3EI}\right). \qquad (и)$$

В результате находим, что период колебаний (см. п. 5.11)

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}} = \frac{2\pi}{3{,}567}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}. \qquad (к)$$

Видно, что ошибка приближенного решения составляет примерно 1,5 %.

В рассмотренных случаях поперечных колебаний балок с грузом предлагалось, что формы балок при колебании были такими же, как формы кривых прогибов при статическом приложении нагрузок. В предельном случае невесомой балки предположение является справедливым. Однако, когда балка имеет некоторым образом рас-

пределенную массу, это предположение будет только приближенным. Если упругую линию балки описывать некоторой разумной формулой, можно ожидать, что в результате получится хорошее приближение к точному значению периода колебаний. Разумеется, если задать точную форму, получим точное значение периода колебаний. Для того чтобы продемонстрировать высказанную точку зрения, рассмотрим снова свободно опертую балку (см. рис. 1.15) без учета веса W. В этом случае известно (см. п. 5.10), что точная форма упругой линии при колебаниях относительно положения равновесия описывается следующим выражением:

$$y = y_{\text{м}} \sin \frac{\pi x}{l}. \qquad \text{(л)}$$

Как и раньше, через $y_{\text{м}}$ в выражении (л) обозначен максимальный прогиб в середине пролета балки, y — прогиб в произвольной расположенной на расстоянии x от левой опоры точке по оси балки.

Кинетическая энергия всей балки в положении равновесия

$$E_{\text{к max}} = \int_0^l \frac{w}{2g} \left(\dot{y}_{\text{м}} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{wl}{2} \frac{\dot{y}_{\text{м}}^2}{2g}. \qquad \text{(м)}$$

Чтобы подсчитать максимальное значение потенциальной энергии балки относительно положения равновесия, воспользуемся следующим выражением * для энергии изгибных деформаций:

$$E_{\text{п max}} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \qquad \text{(н)}$$

Подставляя вторую производную выражения (л) в соотношение (н) и выполняя интегрирование, найдем

$$E_{\text{п max}} = \frac{EI\pi^4}{4l^3} y_{\text{м}}^2. \qquad \text{(о)}$$

В заключение, приравнивая выражения (л) и (о) согласно условию (1.13) и учитывая, что имеет место равенство $\dot{y}_{\text{м}} = p y_{\text{м}}$, получим формулу для частоты колебаний

$$p = \pi^2 \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}}. \qquad (1.15)$$

Соответствующий период колебаний $\tau = 2\pi/p$, что приводит к точному выражению (ж), полученному выше.

Как уже говорилось, ранее, выбор функций формы любого, но отличного от точного вида будет приводить к приближенным значениям частоты или периода колебаний. Очень хорошим вариантом выбора функции формы прогиба для балки при колебаниях является форма кривой прогибов, когда балка нагружена статически собст-

---

* См. с. 220 кн. **Timoshenko S., Young D. H.** Elements of strength of materials, цитированной в п. 1.1.

венным весом. Для того чтобы пояснить эту мысль, рассмотрим также случай ненагруженной свободно опертой балки и допустим, что к ней статически приложена равномерно распределенная нагрузка w, обусловленная собственным весом балки. Тогда получим следующую форму прогиба:

$$y = y_м \frac{16}{5l^4}(x^4 - 2lx^3 + l^3x), \qquad (п)$$

где $y_м = 5wl^4/(384EI)$ — прогиб в середине пролета балки.

Кинетическая энергия балки при переходе через положение равновесия

$$E_{к\,max} = \int_0^l \frac{w}{2g}\dot{y}^2\,dx = \frac{p^2}{2g}\int_0^l wy^2\,dx. \qquad (1.16)$$

Подставляя выражение (п) в соотношение (1.16), найдем

$$E_{к\,max} = 0{,}252\,\frac{wl}{g}\,p^2y_м^2. \qquad (р)$$

Максимальное значение потенциальной энергии балки относительно положения равновесия можно получить, учитывая то обстоятельство, что внешняя работа статически приложенной распределенной нагрузки от веса равна энергии деформации при изгибе балки. В результате имеем

$$E_{п\,max} = \int_0^l \frac{1}{2}wy\,dx. \qquad (1.17)$$

Подставляя выражение (п) в соотношение (1.17) и выполняя интегрирование, получим

$$E_{п\,max} = 0{,}320wly_м = 24{,}6\,\frac{EI}{l^3}\,y_м^2. \qquad (с)$$

Приравнивая выражения (р) и (с), приходим к следующей формуле:

$$p = 9{,}87\sqrt{\frac{EIg}{wl^4}}. \qquad (т)$$

Сравнивая этот результат с точным значением (1.15), видим, что имеет место совпадение трех первых цифр.

Выражения (1.16) и (1.17) можно подставить в равенство (1.13) для энергий с тем, чтобы получить для указанного типа задач общее выражение для p:

$$p^2 = g\int_0^l wy\,dx \Big/ \int_0^l wy^2\,dx. \qquad (1.18)$$

Если погонная масса w изменяется по длине балки, то в выражении (1.18) функцию w следует оставить под знаком интеграла, но в случае балок постоянного поперечного сечения эта величина будет постоянной и в формуле (1.18) ее можно сократить.

Необходимо отметить, что упругая балка представляет собой систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Она, подобно струне, может совершать колебания различного типа. При использовании метода Релея выбор определенной формы для кривой прогибов эквивалентен введению некоторых дополнительных ограничений, которые сводят исходную систему к системе с одной степенью свободы. Подобные дополнительные ограничения могут только увеличить жесткость системы, т. е. увеличить частоту колебаний. Таким образом, во всех рассмотренных выше случаях приближенные значения частот в силу того, что они определялись методом Релея, несколько превышают точные значения *.

В случае крутильных колебаний (см. рис. 1.8) подобный приближенный метод может быть использован для оценки влияния момента инерции вала на частоту колебания всей системы. Пусть через i обозначен момент инерции массы вала, отнесенный к единице его длины. Тогда, предполагая, что форма колебаний такая же, как и у невесомого вала, получим, что угол поворота поперечного сечения, расположенного на расстоянии x от закрепленного конца вала, равен $c\varphi/l$, при этом максимальное значение кинетической энергии малого элемента вала равно $(idc/2)\,(c\dot{\varphi}_{\max}/l)^2$.

Кинетическая энергия для всего вала имеет вид

$$\frac{i}{2}\int_0^l \left(\frac{c\dot{\varphi}_{\max}}{l}\right)^2 dc = \frac{\dot{\varphi}^2_{\max}}{2}\left(\frac{il}{3}\right). \qquad (\text{у})$$

Для того чтобы оценить влияние массы вала на частоту колебания, необходимо это значение кинетической энергии сложить с кинетической энергией диска. В результате получим, что период колебания будет таким же, как и в случае невесомого вала, к концу которого присоединено тело моментом инерции $I' = I + il/3$.

Крутильные колебания валов без установленных на них дисков можно исследовать точно так же, как это было сделано для поперечных колебаний балок. Следуя тем же выкладкам, которые привели к выражению (1.18) для балок, получим аналогичное выражение для частоты колебания валов:

$$p^2 = \alpha \int_0^l i\varphi\, dx \Big/ \int_0^l i\varphi^2\, dx, \qquad (1.19)$$

где φ — угол закручивания произвольной точки по оси, обусловленной приложением распределенного крутящего момента, величина которого равна величине αi, отнесенной к единице длины вала. Через α обозначено угловое ускорение, измеряемое в рад/с^2.

Пример 1. Определить частоту собственных колебаний груза весом W, установленного на балку AB (рис. 1.17) постоянного поперечного сечения, для следу-

---

* Обстоятельное обсуждение метода Релея можно найти в кн. **Temple G. F. J., Bickley W. G.** Reyleigh's principle and its applications to engineering. 2nd ed. New York: Dover Publication, 1956. 152 p.

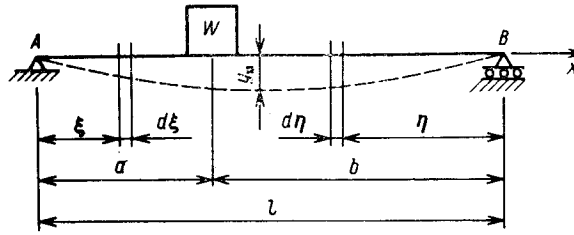


Рис. 1.17

ющих двух случаев: а) в предположении, что весом балки можно пренебречь; б) с учетом веса балки и с помощью метода Релея.

Решение. Пусть a и b — расстояния от груза до концов балки. Тогда прогиб при статическом приложении нагрузки $\delta_{ст} = Wa^2b^2/(3lEI)$. Задавая жесткость пружины выражением $k = 3lEI/(a^2b^2)$ и пренебрегая массой балки, найдем круговую частоту колебаний из следующего выражения:

$$p = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{3lEIg}{Wa^2b^2}}.$$

Для того чтобы учесть влияние массы балки, рассмотрим кривую прогибов балки при действии статической нагрузки W. Прогиб в произвольной отстоящей на расстоянии ξ от опоры A точке левого участка балки

$$y_1 = (Wb\xi/6lEI)\,[a\,(l + b) - \xi^2].$$

Для прогиба в точке, произвольно расположенной справа от груза на расстоянии η от опоры B, имеем

$$y_2 = (Wa\eta/6lEI)\,[b\,(l + a) - \eta^2].$$

Используя метод Релея и предполагая, что при колебаниях максимальная скорость произвольной точки, лежащей на левом участке балки, определяется выражением

$$\dot{y}_1 = y_м \frac{y_1}{\delta_{ст}} = \dot{y}\,\frac{\xi}{2a^2b}\,[a\,(l + b) - \xi^2],$$

где $\dot{y}_м$ — максимальная скорость груза W, получаем, что максимальная кинетическая энергия этого участка

$$\frac{w\dot{y}_м^2}{2g}\int_0^a \left(\frac{y_1}{\delta_{ст}}\right)^2 d\xi = \frac{w\dot{y}_м^2}{2g}\int_0^a \frac{\xi^2}{4a^4b^2}\,[a\,(l + b) - \xi^2]^2\,d\xi =$$

$$= \dot{y}_м^2\,\frac{wa}{2g}\left[\frac{l^2}{3b^2} + \frac{23a^2}{105b^2} - \frac{8al}{15b^2}\right]. \qquad (ф)$$

Точно также рассматривая правый участок балки, находим максимальную кинетическую энергию

$$\dot{y}_м^2\,\frac{wb}{2g}\left[\frac{(l + a)^2}{12a^2} + \frac{b^2}{28a^2} - \frac{b\,(l + a)}{10a^2}\right]. \qquad (х)$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи условие (1.13) равенства энергий принимает вид

$$\frac{W + \alpha wa + \beta wb}{2g}\,\dot{y}_м^2 = \frac{ky_м^2}{2},$$

где α и β обозначают величины, стоящие в квадратных скобках соответственно выражений (ф) и (х). Используя соотношение для круговой частоты колебаний, получим следующую формулу:

$$p = \sqrt{\frac{3lEIg}{(W + \alpha aw + \beta bw)\, a^2 b^2}}. \qquad (\text{ц})$$

Пример 2. Для призматической консольной балки (см. рис. 1.16) при $W = 0$ с помощью метода Релея найти приближенное значение периода собственных поперечных колебаний. Считать, что форма балки при колебании совпадает с кривой статических прогибов, обусловленных весом балки.

Решение. Для равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивностью w, действующей на балку, статический прогиб в точке, отстоящей на расстоянии x от заделанного конца:

$$y = \frac{y_м}{3l^4}(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2), \qquad (\text{ч})$$

где $y_м = wl^4/(8EI)$ — прогиб на незакрепленном конце. Подставляя выражение (ч) в представления (1.16) и (1.17) и интегрируя, найдем

$$E_{к\,max} = \frac{52wl}{405g} p^2 y_м^2; \qquad (\text{ш})$$

$$E_{п\,max} = \frac{wl}{5} y_м = \frac{8EI}{5l^3} y_м^2. \qquad (\text{щ})$$

Приравнивая соотношения (ш) и (щ), получим частоту колебаний

$$p = 3{,}530 \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}}$$

и соответствующий ей период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{3{,}530} \sqrt{\frac{w - l^4}{EIg}}. \qquad (\text{э})$$

Точное значение для периода основного тона колебаний определяется выражением (к), откуда видно, что приближенное решение методом Релея дает ошибку порядка 0,5 %.

ЗАДАЧИ

1.4.1. Для консольной балки, показанной на рис. 1.16, методом Релея вычислить период поперечных колебаний для предельного случая, когда $W = 0$, т. е. для однородной балки без нагрузки на свободном конце. Форму балки при колебаниях задать в следующем виде:

$$y = y_м \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right),$$

где $y_м$ — прогиб на свободном конце. Отметим, что выбор формы указанного приближенного вида дает ошибку при определении колебаний порядка 4 %.

Ответ: $\tau = \dfrac{2\pi}{3{,}66} \sqrt{\dfrac{wl^4}{EIg}}$.

1.4.2. Для случая, когда показанная на рис. 1.15 балка имеет оба конца не свободно опертые, а защемленные, определить, какую часть ее полного веса следует

прибавить к весу груза W, установленного в середине пролета, при нахождении периода собственных поперечных колебаний. Считать, что форма балки при колебаниях совпадает с кривой статических прогибов при действии нагрузки W.

Ответ: 13/35.

1.4.3. С помощью метода Релея определить период свободных поперечных колебаний балки постоянного поперечного сечения, весом wl и с изгибной жесткостью EI, если, как и в предыдущей задаче, оба конца балки защемлены. Предполагается, что при колебаниях балки форма ее прогибов совпадает с формой полной волны косинуса. Тогда, помещая начало координат на левом конце балки, кривую динамических прогибов представим следующей функцией:

$$y = \frac{y_м}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right),$$

где $y_м$ — прогиб в середине пролета балки.

Ответ: $\tau = \frac{2\pi}{22{,}8}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$.

1.4.4. Для рамы, рассмотренной в задаче 1.1.6, принять, что каждая вертикальная стойка имеет погонный вес $2{,}98 \cdot 10^2$ Н/м и шарнирно закреплена за верхний конец. Определить период собственных поперечных колебаний рамы с учетом массы стоек. Использовать те же числовые данные, что и в задаче 1.1.6.

Ответ: $\tau = 1{,}69\ с^{-1}$.

1.4.5. Какую часть равномерно распределенного веса балки ABC (рис. А.1.4.5) следует добавить к весу груза W, установленного на незакрепленном конце, определяя частоту собственных поперечных колебаний? Использовать кривую статических прогибов, вызванных приложенной в точке C нагрузкой.

Ответ: $239/1680 \approx 1/7$.

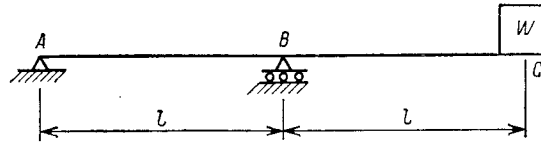


Рис. А.1.4.5

1.4.6. Предположим, что пружина, показанная на рис. 1.1, *а* и описанная в п. 1.1, растягивается под действием собственного веса w, отнесенного к единице длины, а груз W снят. С помощью метода Релея определить угловую частоту основного тона колебаний пружины, используя при этом выражение для статического перемещения пружины, обусловленного действием собственного веса.

Ответ: $p = 1{,}58\sqrt{kg/(wl)}$.

1.4.7. Рассмотрим подвешенный на двух последовательно соединенных пружинах груз весом W, показанный на рис. 1.5, *а* и описанный в п. 1.1. Обозначим через l_1 и w_1 соответственно длину и отнесенный к единице длины вес пружины с жесткостью k_1, а через l_2 и w_2 — то же, для пружины с жесткостью k_2. Считая, что перемещения колеблющейся системы такие же, как и при действии статически приложенного груза W, определить вес, который следует добавить к W для учета влияния веса пружин.

Ответ: $\dfrac{w_1 l_1 k_2^2 + 3w_2 l_2 k_2 (k_1 + k_2) + w_2 l_2 k_1^2}{3(k_1 + k_2)^2}$.

1.4.8. Определить величину, которую следует добавить к моменту инерции I, чтобы учесть влияние момента инерции ступенчатого вала, как показано на рис. А.1.4.8, где i_1 и i_2 — отнесенные к единице длины моменты инерции уча-

стков 1 и 2 вала, $k_{к1}$ и $k_{к2}$ — их жесткость при кручении. Считать, что распределение углов закручивания такое же, как и в случае статического крутящего момента, приложенного к диску.

Ответ: $\dfrac{i_1 l_1 k_{к2}^2 + 3 i_1 l_1 k_{к1} (k_{к1} + k_{к2}) + i_2 l_2 k_{к1}^2}{3 (k_{к1} + k_{к2})^2}$.

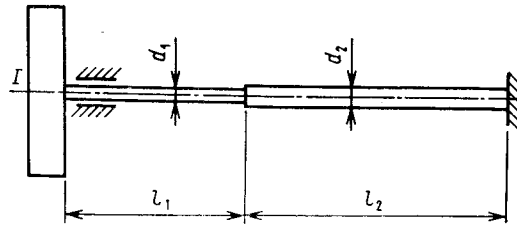


Рис. А.1.4.8

1.4.9. Для случая, описанного в условии задачи 1.2.9 (см. п. 1.2), определить частоту крутильных колебаний обода колеса. Учесть влияние массы n радиальных спиц, считая, что вес каждой спицы равен $W_с$.

Ответ: $f = \dfrac{1}{2\pi} \sqrt{\dfrac{ngS_0 r_0}{(W + W_с n/3)\, r\, (r - r_0)}}$.

1.4.10. Для случая, рассмотренного в примере 2 (п. 1.2), определить частоту крутильных колебаний колеса (см. рис. 1.10, *а*), учтя влияние массы радиальных спиц и считая, что каждая спица имеет массу wr/g, равномерно распределенную по ее длине.

Ответ: $f = \dfrac{1}{2\pi} \sqrt{\dfrac{16g\beta}{[W + (116/105)\, wr]\, r^3}}$.

1.5. БАЛКИ И ВАЛЫ, НЕСУЩИЕ НЕСКОЛЬКО СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС

В качестве приложения метода Релея рассмотрим задачу о невесомой балке, на которую установлено несколько сосредоточенных масс (рис. 1.18). Введение подобного типа модели для исследования можно связать с идеей дискретизации непрерывно распределенной массы балки, когда части ее веса считаются сосредоточенными в соответствующих точках по ее длине, с тем, чтобы иметь возможность приближенного описания динамических характеристик балки. Разумеется, системы сосредоточенных грузов могут иметь место и в действительности как группы нагрузок, приложенных к конструкции.

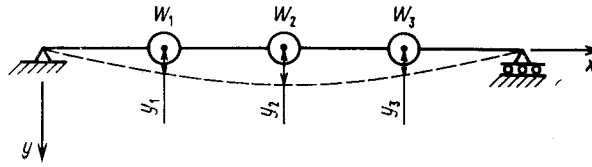


Рис. 1.18

В данном случае обозначим через W_1, W_2 и W_3 сосредоточенные нагрузки, установленные на балку, через y_1, y_2 и y_3 — соответствующие им статические перемещения. Потенциальная энергия деформации при изгибе балки

$$E_{\text{п max}} = \frac{1}{2} W_1 y_1 + \frac{1}{2} W_2 y_2 + \frac{1}{2} W_3 y_3. \qquad \text{(а)}$$

Для того чтобы определить круговую частоту основного тона колебания, можно записать кинетическую энергию системы при переходе через положение равновесия:

$$E_{\text{к max}} = \frac{1}{2g} W_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2g} W_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2g} W_3 \dot{y}_3^2. \qquad \text{(б)}$$

Из соотношения (1.14) в п. 1.3 имеем

$$\dot{y}_1 = p y_1; \quad \dot{y}_2 = p y_2; \quad \dot{y}_3 = p y_3. \qquad \text{(в)}$$

Тогда выражение (б) может быть переписано в следующем виде:

$$E_{\text{к max}} = (p^2/2g)(W_1 y_1^2 + W_2 y_2^2 + W_3 y_3^2). \qquad \text{(г)}$$

Приравнивая выражения (а) и (г), найдем

$$p^2 = \frac{g(W_1 y_1 + W_2 y_2 + W_3 y_3)}{W_1 y_1^2 + W_2 y_2^2 + W_3 y_3^2}. \qquad \text{(д)}$$

В общем случае для n сосредоточенных масс, установленных на балке, выражение (д) имеет вид

$$p^2 = g \sum_{j=1}^{n} W_j y_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} W_j y_j^2. \qquad (1.20)$$

Выражение (1.20) является дискретным аналогом полученного выше выражения (1.18).

Из выражения (1.20) видно, что для определения частоты или периода колебаний балки, на которую установлено несколько сосредоточенных грузов, требуется знать только веса W_1, W_2, ..., W_n и статические прогибы y_1, y_2, ..., y_n. Величину последних можно легко определить методом теории изгиба балок. В тех случаях, когда балка имеет переменное поперечное сечение или необходимо учесть влияние веса самой балки, необходимо разбить балку по длине на несколько участков и вес каждого участка рассматривать как сосредоточенную нагрузку.

Крутильные колебания валов, на которых закреплено по нескольку абсолютно жестких тел, рассматриваются точно так же, как и в случае балок. Тогда дискретный аналог полученного выше выражения (1.19) имеет вид

$$p^2 = \alpha \sum_{j=1}^{n} I_j \varphi_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} I_j \varphi_j^2. \qquad (1.21)$$

В этом выражении через φ_j обозначен поворот j-го абсолютно жесткого тела при действии системы статических крутящих моментов.

Указанный крутящий момент, действующий на j-е тело, полагается численно равным αI_j, где $\alpha = 1$ рад/ с$^{-2}$.

Главной особенностью выражений (1.18)—(1.21) является то, что потенциальная и кинетическая энергии, используемые при их выводе, записываются для положений равновесия систем. Статические нагрузки обычно являются несамоуравновешенными и требуют для себя введения соответствующих дополнительных закреплений. С другой стороны, колебания систем без подобных закреплений так же могут быть исследованы методом Релея путем использования фиктивных закреплений в точках, для которых известно или каким-либо путем установлено, что перемещения в них равны нулю. Следует также отметить, что все слагаемые, стоящие в числителях выражений (1.18)—(1.21), будут положительными, когда действие и соответствующее ему перемещение направлены в одну сторону. В этом случае будет гарантировано, что вычисленное приближенное значение частоты будет всегда больше, чем ее точное значение.

Пример 1. С помощью метода Релея определить круговую частоту основной формы колебаний балки с двумя сосредоточенными массами (рис. 1.19). Жесткость балки при изгибе равна EI, а влиянием закрепленной массы можно пренебречь. Для простоты считать, что $W_1 = W_2 = W$.

Решение. В этом случае будем предполагать, что форма балки при колебаниях аналогична кривой статических прогибов при действии противоположно направленных сил (см. рис. 1.19). Соответствующие статические прогибы определяются следующими выражениями:

$$y_1 = \frac{W_1 l^3}{48EI} + \frac{W_2 l}{32EI} = \frac{5Wl^3}{96EI}; \quad y_2 = \frac{W_1 l^3}{32EI} + \frac{W_2 l}{8EI} = \frac{5Wl^3}{32EI}.$$

Подставляя эти выражения в (1.20), получим

$$p = \sqrt{\frac{192EIg}{25Wl^3}}.$$

Пример 2. На рис. 1.20, *а* представлена упрощенная модель трехэтажного здания, междуэтажные перекрытия которого полагаются абсолютно жесткими, а стойки считаются невесомыми. Используя метод Релея, найти приближенное значение периода основного тона свободных поперечных колебаний здания. Для простоты считать, что $W_1 = W_2 = W_3 = W$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$ и жесткость стоек при изгибе равна EI.

Решение. Предположим, что форма поперечных колебаний здания аналогична форме, по которой изгибается здание при действии горизонтальных сил, по величине равных весам W_1, W_2 и W_3 междуэтажных перекрытий, приложенных в центре тяжести этих перекрытий. Для того чтобы определить боковое смещение между-

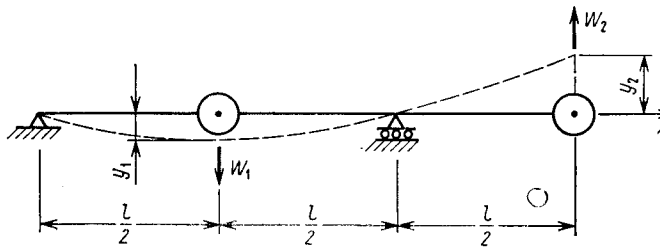


Рис. 1.19

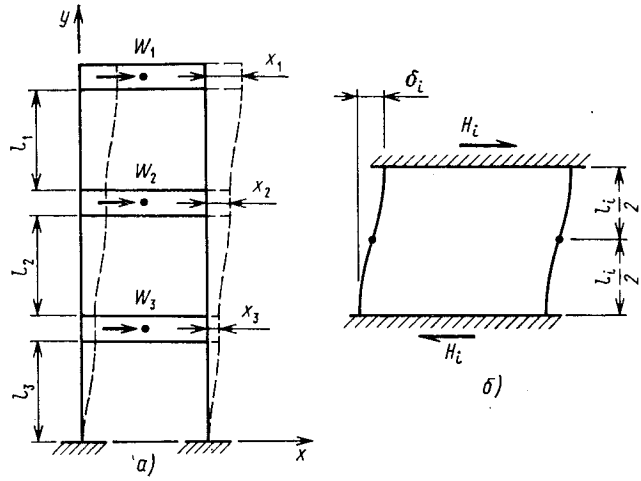


Рис. 1.20

этажных перекрытий, рассмотрим сначала перемещение δ_i i-го при отсчете от верхнего перекрытия относительно перекрытия, лежащего этажом ниже, при действии поперечной силы H_i, как показано на рис. 1.20, *б*. Так как на каждую стойку действует поперечная сила $H_i/2$ и в середине пролета стойки имеется точка перегиба, то в результате получаем

$$\delta_i = 2\left[\frac{(H_i/2)\,(l/2)^2}{3EI}\right] = \frac{H_i l^3}{24EI}. \qquad \text{(е)}$$

Тогда, учитывая равенства $H_1 = W_1 = W$, $H_2 = W_1 + W_2 = 2W$, $H_3 = W_1 + W_2 + W_3 = 3W$, из выражения (е) находим

$$\delta_1 = \frac{Wl^3}{24EI}; \quad \delta_2 = \frac{2Wl^3}{24EI}; \quad \delta_3 = \frac{3Wl^3}{24EI}.$$

Следовательно, статические перемещения, показанные на рис. 1.20, *а*:

$$x_1 = \delta_3 + \delta_2 + \delta_1 = \frac{6Wl^3}{24EI};$$

$$x_3 = \delta_3 + \delta_2 = \frac{5Wl^3}{24EI};$$

$$x_3 = \delta_3 = \frac{3Wl^3}{24EI}.$$

Подставляя найденные значения перемещений в выражение (1.20) и учитывая равенства $W_1 = W_2 = W_3 = W$, найдем

$$p^2 = \frac{24EIg}{5Wl^3}; \quad \tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{5Wl^3}{24EIg}}.$$

Пример 3. Предположим, что в месте соединения пружин k_1 и k_2 (см. рис. 1.5, *а*) прикреплен груз W. Определить методом Релея приближенное значение круговой частоты основного тона колебаний этой системы.

Решение. При одновременном статическом приложении обоих грузов точка соединения пружин перемещается на расстояние $2W/k_1$. Тогда нижний конец смещается на величину $2W/k_1 + W/k_2$. Если в качестве общего знаменателя для этих

перемещений взять k_1k_2, то первое перемещение станет $W2k_2/k_1k_2$, второе — $W(2k_2 + k_1)/k_1k_2$. Подставляя эти значения в выражение (1.20), найдем

$$p^2 = \frac{k_1k_2g\,[2k_2 + (2k_2 + k_1)]}{W\,[(2k_2)^2 + (2k_2 + k_1)^2]}$$

или

$$p = \sqrt{\frac{k_1k_2g\,(k_1 + 4k_2)}{W\,(k_1^2 + 4k_1k_2 + 8k_2^2)}}.$$

Пример. 4. Предположим, что в представленном на рис. 1.8 (п. 1.2) вале с дисками второй диск с моментом инерции $2I$ присоединен в середине вала. Используя метод Релея, определить круговую частоту основного тона крутильных колебаний.

Решение. Для того чтобы определить перемещение при кручении, приложим крутящие моменты, численно равные $2I\alpha$ в середине длины вала и $I\alpha$ на конце его. Указанные крутящие моменты вызывают угловые перемещения, равные $2I\alpha/2k_к$ в середине длины вала и $3I\alpha/2k_к + I\alpha/2k_к = 2I\alpha/k_к$ на конце его ($k_к$ — жесткость всего вала при кручении). Подставляя эти значения в выражение (1.21), получим

$$p^2 = \frac{\alpha\,\{2I\,[3I\alpha/(2k_к)] + I\,(2I\alpha/k_к)\}}{2I\,[3I\alpha/(2k_к)]^2 + I\,(2I\alpha/k_к)^2}$$

или

$$p = \sqrt{\frac{10k_к}{17I}} = 0{,}767\sqrt{\frac{k_к}{I}}.$$

ЗАДАЧИ

1.5.1. На консольную балку с постоянной жесткостью при изгибе, один конец которой защемлен, а другой свободен, установлено два груза весом W (рис. А.1.5.1). Используя метод Релея, определить период основного тона свободных конечных колебаний, если дано: $W = 4{,}54\cdot10^3$ Н, $l = 2{,}44$ м, $EI = 13{,}2\cdot10^5$ Н·м^2.

Ответ: $\tau = 0{,}271$ с.

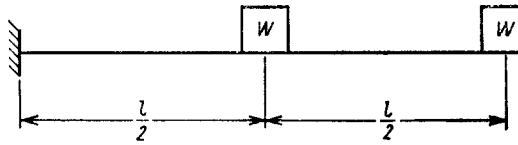


Рис. А.1.5.1

1.5.2. На свободно опертую балку со свешивающимися концами установлено три груза весом W, $2W$ и W (рис. А.1.5.2). Жесткость балки постоянного поперечного сечения $EI = 14{,}6\cdot10^3$ Н·м^2, а ее собственно распределенный вес мал по сравнению с весами грузов. Используя метод Релея, определить период основного тона поперечных колебаний, если дано: $W = 230$ Н, $a = 0{,}91$ м.

Ответ: $\tau = 0{,}269$ с.

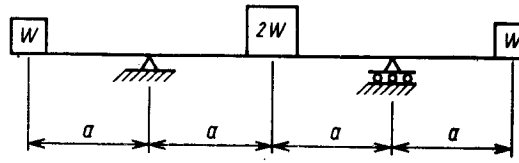


Рис. А.1.5.2

1.5.3. Предположим, что W_1, W_2 и W_3 на рис. 1.18 представляют распределенный вес балки прямоугольного поперечного сечения, сосредоточенный в сле-

дующих точках: в середине пролета балки и двух точках, удаленных на четверть длины балки от ее концов. Пусть каждый из указанных весов равен $wl/4$. Методом Релея определить приближенное значение периода основного тона колебаний.

Ответ: $\tau = 0{,}637 \sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$.

1.5.4. На рис. А.1.5.4 представлена дискретная модель с сосредоточенными массами для консольной балки постоянного поперечного сечения, один конец которой зещемлен, а другой свободен. Используя метод Релея, определить период основного тона колебаний.

Ответ: $\tau = 1{,}84 \sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$.

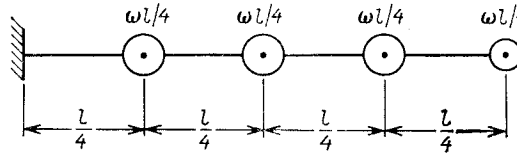


Рис. А.1.5.4

1.5.5. На рис. А.1.5.5 представлена дискретная модель с сосредоточенными моментами инерции, которая соответствует валу постоянного диаметра с заделанными концами. Определить круговую частоту первого тона крутильных колебаний.

Ответ: $p = 3{,}35 \sqrt{\frac{GJ}{il^2}}$.

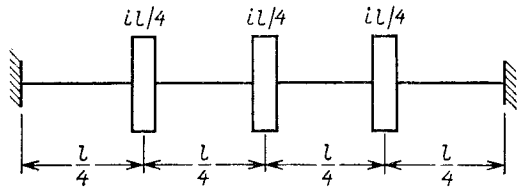


Рис. А.1.5.5

1.5.6. Пусть система, рассмотренная в задаче 1.5.4, представляет собой модель с сосредоточенными массами для задачи о продольных колебаниях стержня постоянного прямоугольного поперечного сечения с площадью F. Используя метод Релея, определить круговую частоту p первого тона продольных колебаний.

Ответ: $p = 1{,}57 \sqrt{\frac{EFg}{wl^2}}$.

1.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. УСТАНОВИВШЕЕСЯ СОСТОЯНИЕ

В п. 1.1 были рассмотрены свободные колебания системы, состоящей из пружины и сосредоточенной массы, и показано, что движение этой системы зависит только от начальных условий ее физических характеристик k и W/g, которые и определяют ее частоту соб-

ственных колебаний. Если система подвергается некоторым внешним воздействиям, подобным зависящим от времени силам или специального вида движениям опор, то динамическое поведение ее становится более сложным. Во многих практических ситуациях приходится сталкиваться с периодически изменяющимися силами, которые прикладываются к массе. Тогда реакцию системы при указанных условиях показывают вынужденными колебаниями.

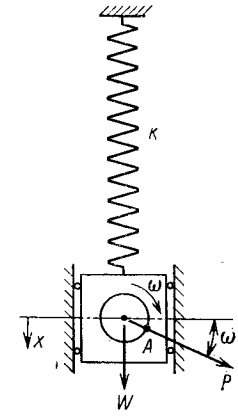


Рис. 1.21

В качестве примера вынужденных колебаний рассмотрим электродвигатель весом W (рис. 1.21), закрепленный на пружине, которая препятствует перемещениям только в вертикальном направлении. Эта ситуация имеет, как уже говорилось в п. 1.1, круговую частоту собственных колебаний $p = \sqrt{kg/W}$. Предположим, что вал электродвигателя вращается с постоянной угловой скоростью ω и что он недостаточно хорошо отбалансирован (на рис. 1.21 это показано в виде эксцентрической массы, сосредоточенной в точке A). Этот дисбаланс будет порождать вращающуюся центробежную силу P, которая, в свою очередь, вызовет вынужденные колебания системы.

В дополнение к силе тяжести и силе реакции пружины теперь необходимо рассмотреть вертикальную компоненту $P \sin \omega t$ вектора вращающейся силы. В результате получим следующее уравнение движения:

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = W - (W + kx) + P \sin \omega t, \qquad \text{(а)}$$

где слагаемое $P \sin \omega t$ называется гармонической силовой функцией. Вводя в уравнение (а) обозначения

$$p^2 = \frac{kg}{W}; \quad q = \frac{Pg}{W}, \qquad \text{(б)}$$

получим

$$\ddot{x} + p^2 x = q \sin \omega t. \qquad (1.22)$$

Частное решение этого уравнения получим, предполагая, что решение x пропорционально функции $\sin \omega t$, т. е. положив

$$x = C_3 \sin \omega t, \qquad \text{(в)}$$

где C_3 — постоянная, которая выбирается таким образом, чтобы решение удовлетворяло уравнению (1.22). Подставляя (в) в это уравнение, найдем $C_3 = q/(p^2 - \omega^2)$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$x = q \sin \omega t/(p^2 - \omega^2). \qquad \text{(г)}$$

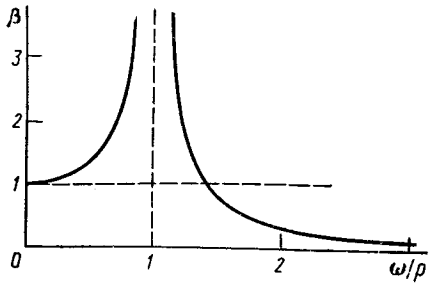


Рис. 1.22

Прибавляя это частное решение к общему решению (1.2) однородного уравнения (1.1), получим

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{q \sin \omega t}{p^2 - \omega^2}. \tag{1.23}$$

Это выражение содержит две постоянные интегрирования и является общим решением неоднородного уравнения (1.22).

Два первых слагаемых в выражении (1.23) описывают свободные колебания, которые обсуждались выше, а третье слагаемое, зависящее от возмущающей силы, характеризует вынужденные колебания системы. Можно видеть, что эти последние колебания имеют тот же период $T = 2\pi/\omega$, что и период возмущающей силы. Подставляя обозначения (б) в выражение (г) и считая свободные колебания несущественными *, получим так называемые *установившиеся вынужденные колебания*, описываемые выражением

$$x = \left(\frac{P}{k} \sin \omega t\right)\left(\frac{1}{1 - \omega^2/p^2}\right). \tag{1.24}$$

Множитель $(P/k) \sin \omega t$ представляет собой перемещение, обусловленное действием возмущающей силы $P \sin \omega t$, если она приложена статически; множитель $1/(1 - \omega^2/p^2)$ учитывает динамический характер этой силы. Абсолютная величина этого множителя обычно называется *коэффициентом усиления* [1]

$$\beta = \left|\frac{1}{1 - \omega^2/p^2}\right|. \tag{д}$$

Видно, что коэффициент β зависит от *отношения частот* ω/p, которое получают делением *навязываемой* системе *частоты* возмущающей силы на *собственную частоту* свободных колебаний системы. На рис. 1.22 представлена зависимость коэффициента β от частотного отношения ω/p, т. е. в случае, когда частота возмущающей силы мала по сравнению с частотой свободных колебаний, коэффициент усиления примерно равен единице, а перемещения являются почти такими же, как в случае статического действия силы $P \sin \omega t$.

Когда отношение ω/p достигает значения, равного единице, коэффициент усиления и *амплитуды вынужденных колебаний* быстро возрастают и обращаются в бесконечность при $\omega = p$, т. е. в том случае, когда частота возмущающей силы совпадает с частотой свободных колебаний системы. Этот случай является *условием резонанса*. Бесконечное значение амплитуды вынужденных колебаний означает, что если периодическая сила действует на колеблющуюся систему

* Взаимодействие свободных колебаний с вынужденными будет обсуждаться в следующем параграфе.

[1] Прим. ред. пер. см. в конце кн.

всегда в соответствующее время и в соответствующем направлении, то амплитуда колебаний увеличивается, стремясь к бесконечности, при условии, что отсутствует рассеивание энергии. В практических задачах всегда имеет место рассеивание энергии, обусловленное демпфированием. Влияние последнего на амплитуду вынужденных колебаний будет обсуждено ниже в п. 1.9.

Когда частота возмущающей силы становится больше частоты свободных колебаний, коэффициент усиления вновь принимает конечное значение. Его абсолютная величина уменьшается с ростом отношения ω/p и стремится к нулю, когда это отношение становится очень большим. Таким образом, когда на тело действует с высокой частотой периодическая сила, она вызывает колебания с очень малой амплитудой, и во многих случаях можно считать, что при этом тело сохраняет стационарное положение.

Рассматривая знак выражения $1/(1 - \omega^2/p^2)$, видим, что во всех случаях, когда выполняется условие $\omega < p$, это выражение является положительным и перемещения массы при колебаниях имеют то же направление, что и направление возмущающей силы. С другой стороны, во всех тех случаях, когда $\omega > p$, это выражение является отрицательным и перемещение массы имеет направление, противоположное направлению действия силы. В первом случае говорят, что колебания совпадают по фазе с возмущением, а во втором, что динамические перемещения происходят в противофазе.

В приведенном выше обсуждении величина возмущающей силы была пропорциональна $\sin \omega t$, но те же результаты были бы получены и в том случае, если указанную силу считать пропорциональной $\cos \omega t$. Кроме того, вынужденные колебания могут возникать и при *периодических движениях опор* (или *движениях основания*). Рассмотрим, например, подвешенный на пружине груз (рис. 1.23) и предположим, что верхнему концу пружины задано перемещение в вертикальном направлении по гармоническому закону

$$x_{оп} = d \sin \omega t. \qquad (е)$$

Если перемещение x подвешенного груза W измерять от положения равновесия при $x_{оп} = 0$, то удлинение пружины в произвольный момент времени t будет составлять $x - x_{оп} + \delta_{ст}$; возникающая в пружине сила, соответствующая этому перемещению, равна $k(x - x_{оп}) + W$. Таким образом, уравнение движения подвешенного груза принимает вид

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = W - [W + k(x - x_{оп})]. \qquad (ж)$$

Подставляя сюда выражение (е) для $x_{оп}$ и используя обозначения

$$p^2 = kg/W; \quad q_{оп} = kg\, d/W, \qquad (з)$$

получим уравнение

$$\ddot{x} + p^2 x = q_{оп} \sin \omega t, \qquad (1.25)$$

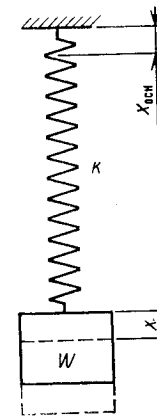


Рис. 1.23

которое совпадает с уравнением (1.22). Следовательно, можно сделать вывод, что задание верхнему концу пружины простого гармонического перемещения $d \sin \omega t$ эквивалентно непосредственному приложению возмущающей силы $(kd) \sin \omega t$. Все приведенные выше рассуждения относительно решения уравнения (1.22) применимы также и в этом случае, и поэтому в итоге можно сделать вывод, что здесь также имеют место установившиеся вынужденные колебания, определяемые выражением

$$x = \frac{d \sin \omega t}{1 - \omega^2 p^2}. \tag{1.26}$$

Можно принять, что числитель $d \sin \omega t$ описывает движение сосредоточенной массы, когда перемещение опоры происходит очень медленно (или «статически»); наличие множителя $1/(1 - \omega^2/p^2)$ указывает на то обстоятельство, что частота перемещения опоры не равна нулю. Таким образом, для того чтобы вычислить установившуюся реакцию системы, необходимо только рассмотреть перемещение массы, обусловленное перемещением опоры.

В некоторых случаях удобнее иметь дело с ускорениями опоры, чем с ее перемещениями, так как для получения информации о движении опоры используется измерительный прибор под названием акселерометр. Например, перемещения грунта при землетрясении, как правило, измеряются и записываются в виде трех взаимно-ортогональных составляющих по осям север—юг, восток —запад и вертикальной составляющей ускорений грунта. Поэтому вновь вернемся к задаче о движении основания, формулируя ее как задачу о периодических ускорениях, а не периодических перемещениях.

Предположим теперь, что на верхнем конце пружины (см. рис. 1.23) задано следующее условие относительно гармонического ускорения:

$$\ddot{x}_{\text{оп}} = a \sin \omega t. \tag{и}$$

Применительно к рассматриваемой задаче уравнение (ж) принимает вид

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + k (x - x_{\text{оп}}) = 0. \tag{к}$$

Для того чтобы уравнение (к) имело тот же вид, что и уравнение (и), сделаем следующее преобразование координат:

$$x^* = x - x_{\text{оп}}; \quad \ddot{x}^* = \ddot{x} - \ddot{x}_{\text{оп}}, \tag{л}$$

где x^* — *относительное перемещение* массы от основания. Подставляя выражения (л) для $x - x_{\text{оп}}$ и $\ddot{x}$ в уравнение (к) и выполняя соответствующие преобразования, найдем

$$\frac{W}{g} \ddot{x}^* + k x^* = -\frac{W}{g} \ddot{x}_{\text{оп}}. \tag{м}$$

Используя обозначения

$$p^2 = \frac{kg}{W}; \quad q^*_{\text{оп}} = -a \tag{н}$$

и подставляя выражение (и) в уравнение (м), получим уравнение

$$\ddot{x}^* + p^2 x^* = q^*_{\text{оп}} \sin \omega t, \tag{1.27}$$

идентичное уравнениям (1.22) и (1.25).

Решение уравнения (1.27) находим точно так же, как было сделано для аналитических уравнений в предыдущих случаях, поэтому можно сделать вывод, что реакция системы, выраженная через *относительные координаты* [определяемые соотношениями (л)], совпадает с реакцией системы, к которой приложена распределенная сила, равная $(W/g)\, a \sin \omega t$. Тогда установившиеся вынужденные колебания системы относительно смещающегося основания описываются выражением

$$x^* = \left(-\frac{Wa}{kg} \sin \omega t\right)\left(\frac{1}{1 - \omega^2/p^2}\right). \tag{1.28}$$

Несмотря на то, что начальное смещение основания и его скорость известны, абсолютное движение сосредоточенной массы не может быть рассчитано. Однако это обстоятельство обычно не является существенным, поскольку именно относительное движение определяет силу, действующую в конструкции (в данном случае в пружине).

Пример 1. Определить амплитуду вынужденных крутильных колебаний вала (см. рис. 1.8) при действии периодического крутящего момента $M \sin \omega t$, если частота свободных крутильных колебаний этого вала $f = 10\ \text{с}^{-1}$, частота крутящего момента, определяющего вынужденные колебания, $\omega = 10\pi$ рад/с, угол закручивания при действии крутящего момента M (если его приложить статически) равен 0,01 рад.

Решение. Уравнение движения в этом случае имеет (см. п. 1.2) вид

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = \frac{M}{I} \sin \omega t, \tag{о}$$

где φ — угол закручивания, $p^2 = k_{\text{к}}/I$. Вынужденные колебания описываются выражением

$$\varphi = \frac{M}{I(p^2 - \omega^2)} \sin \omega t = \frac{M}{k_{\text{к}}(1 - \omega^2/p^2)} \sin \omega t. \tag{п}$$

Учитывая, что по условию имеем $M/k_{\text{к}} = 0{,}01$ и $p = 2\pi f = 20\pi$, найдем максимальное значение амплитуды колебаний

$$\varphi_{\max} = 0{,}01/(1 - {}^1/_4) = 0{,}0133 \text{ рад}.$$

Пример 2. Колесо катится по волнистой поверхности с постоянной горизонтальной скоростью v (рис. 1.24). Определить амплитуду вынужденных колебаний в вертикальном направлении груза W, прикрепленного к оси колеса с помощью пружины. При статическом приложении груза W смещение конца пружины $\delta_{\text{ст}} = 0{,}098$ м, скорость $v = 18{,}3$ м/с и волнистая поверхность описывается функцией $y = d \sin \pi x/l$, где $d = 0{,}025$ м, $l = 0{,}91$ м.

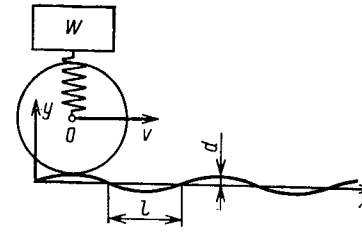


Рис. 1.24

Решение. Рассматривая вертикальные колебания груза W на пружине, находим, что квадрат круговой частоты этих колебаний $p^2 = g/\delta_{\text{ст}} = 100\ \text{с}^{-2}$. Из-за волнистости поверхности, по которой катится колесо, центр O колеса колеблется

в вертикальном направлении. Считая, что в начальный момент ($t = 0$) точка контакта колеса имеет координату $x = 0$, и полагая $x = vt$, можно описать эти колебания в вертикальном направлении функцией $y = d \sin(\pi vt/l)$. Тогда вынужденные колебания груза определяются выражением (1.26), в которое следует подставить исходные данные: $d = 0{,}025$ м, $\omega = \pi v/l = 20\pi c^{-1}$, $p^2 = 100$ с$^{-2}$. Амплитуда этих вынужденных колебаний $1/(4\pi^2 - 1) = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ м. При заданной скорости $v = 18{,}3$ м/с колебания колеса в вертикальном направлении передаются грузу W очень незначительно. Если же увеличить скорость v колеса на четверть ее величины, получим $\omega = 5\pi$, а амплитуда вынужденных колебаний станет $1/(\pi^2/4 - 1) = 1{,}73 \cdot 10^{-2}$ м. Увеличивая скорость v дальше, придем к условию резонанса (когда $\pi v/l = p$), при котором возникают условия самых интенсивных колебаний для груза W (здесь влияние массы колеса не учитывается).

Пример 3. Для случая ферменной платформы, рассмотренной в примере 3 (см. п. 1.1), изменяющееся по гармоническому закону [см. выражение (и)] ускорение основания направлено по оси x. Определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний платформы, если $a = 5{,}08$ м/с^2, $\omega = 40$ рад/с.

Решение. Выражение (1.28) описывает установившуюся реакцию системы относительно основания, а максимальное значение амплитуды при этом движении

$$x^*_{\max} = \frac{Wa}{kg}\left(\frac{1}{1 - \omega^2/p^2}\right). \qquad (р)$$

В рассматриваемом примере имеем $W = 1{,}5 \cdot 10^5$ Н, $k = 3{,}5 \cdot 10^7$ Н/м; следовательно, квадрат частоты колебаний

$$p^2 = \frac{kg}{W} = \frac{3{,}5 \cdot 10^7 \cdot 9{,}81}{1{,}5 \cdot 10^5} = 2290 \text{ с}^{-2}.$$

Амплитуда эквивалентной, статически приложенной силы в относительных координатах

$$\frac{Wa}{g} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5{,}08}{9{,}81} = 1{,}03 \cdot 10^5 \text{ Н},$$

а коэффициент усиления в этом случае

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2/p^2} = \frac{1}{1 - (1600/2290)} = 3{,}32.$$

В итоге, амплитуду вынужденных колебаний в относительных координатах получаем из выражения (р), что дает

$$x^*_{\max} = \frac{1{,}03 \cdot 10^5 \cdot 3{,}32}{3{,}5 \cdot 10^7} = 0{,}0098 \text{ м}.$$

Изменение напряжения в раскосных тросах, обусловленное найденной величиной перемещения:

$$\frac{\sqrt{2}\, kx^*_{\max}}{4A} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3{,}5 \cdot 10^7 \cdot 0{,}0098\sqrt{2}}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 3{,}43 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Пример 4. Вертикальная периодическая сила $P \sin \omega t$ приложена непосредственно к пружине (см. рис. 1.1, *а*) в точке, отстоящей на расстоянии c от опоры. Какой будет установившаяся реакция груза W?

Решение. Предположим, что пружина состоит из двух частей, как показано на рис. 1.5, *а*. Участок длиной c имеет жесткость пружины, равную k_1, жесткость пружины другого участка составляет k_2. Из примера 2 (см. п. 1.1) имеем соотношение

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \qquad (с)$$

В произвольный момент времени величина силы, передаваемой массе со стороны невесомой пружины:

$$F(t) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} P \sin \omega t = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{P \sin \omega t}{k_1}. \qquad (т)$$

Второй сомножитель в выражении (т) представляет собой перемещение массы при статическом приложении силы, обусловливающей вынужденные колебания.

Вводя обозначение

$$\Delta_{ст} = P/k_1, \qquad (у)$$

выражение (т) можно представить в виде

$$F(t) = k\Delta_{ст} \sin \omega t. \qquad (ф)$$

Эту функцию эквивалентной вынуждающей силы можно использовать вместо $P \sin \omega t$ в выражении (1.24); тогда перемещение при установившейся реакции будет иметь вид

$$x = \Delta_{ст} \sin \omega t \frac{1}{1 - \omega^2/p^2}. \qquad (х)$$

Из полученного выражения следует, что необходимо рассматривать только статическое перемещение массы при действии эквивалентной возмущающей силы, независимо от того, в каком месте прикладывается возмущающая сила.

ЗАДАЧИ

1.6.1. Найти амплитуду вынужденных колебаний подвешенного к пружине груза весом W (см. рис. 1.23), если верхний конец пружины перемещается по гармоническому закону с амплитудой $\alpha = 0{,}0254$ м и круговой частотой $\omega = 180$ с$^{-1}$. Предполагается, что при статическом приложении указанный груз вызывает смещение $\delta_{ст} = 0{,}0762$ м.

Ответ: $1{,}016 \cdot 10^{-4}$ м.

1.6.2. Показанный на рис. 1.21 и подвешенный на пружине груз вызывает статическое перемещение $\delta_{ст} = 0{,}0254$ м. Чему равна амплитуда вынужденных колебаний, обусловленных действием силы $P \cos \omega t$, если дано: $P = 9{,}08$ Н; $\omega = 10\pi$с$^{-1}$; $W = 45{,}4$ Н?

Ответ: $3{,}25 \cdot 10^{-3}$ м.

1.6.3. Балка, изготовленная из стандартного двутавра, длиной $l = 3{,}66$ м и с моментом инерции $I = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ м^4 свободно оперта по концам (рис. А.1.6.3). В середине пролета балки установлен электродвигатель весом $W = 4{,}54 \cdot 10^3$ Н, ротор которого вращается с частотой 1800 мин$^{-1}$. Из-за неуравновешенности ротора возникает центробежная сила $P = 2{,}27 \cdot 10^3$ Н. Чему равна амплитуда установившихся вынужденных колебаний, если не учитывать массу балки?

Ответ: $2{,}032 \cdot 10^{-4}$ м.

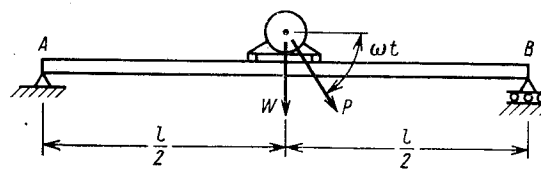


Рис. А.1.6.3

1.6.4. Стальная балка, имеющая момент инерции поперечного сечения $I = 1{,}66 \cdot 10^{-6}$ м^4, оперта, как показано на рис. А.1.6.4, и несет на незакрепленном конце груз весом $W = 2{,}7 \cdot 10^3$ Н. Подсчитать амплитуду установившихся выну-

жденных колебаний груза W, если опора A совершает малые вертикальные колебания вида $y_A = d \sin \omega t$, где $d = 3{,}05 \cdot 10^{-3}$ м, $\omega = 30$ с$^{-1}$. Опора B неподвижна, а влиянием массы балки можно пренебречь.

Ответ: $3{,}33 \cdot 10^{-3}$ м.

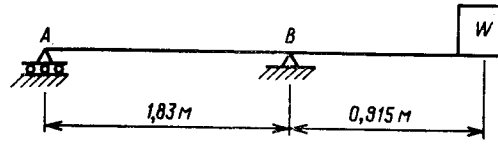


Рис. А.1.6.4

1.6.5. Груз весом $W = 5{,}45 \cdot 10^4$ Н установлен в середине пролета свободно опертой балки (рис. А.1.6.5), изготовленной из двух стальных швеллеров ($I = 2 \cdot 7{,}24 \cdot 10^{-6} = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ м^4). Пренебрегая весом балки, определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний груза W, если к концу балки приложен, как показано на рисунке, периодически изменяющийся изгибающий момент $M = M_1 \cos \omega t$ и дано, что $\omega = 0{,}90p$, $M_1 = 1{,}16 \cdot 10^3$ Н·м.

Ответ: $1{,}153 \cdot 10^{-3}$ м.

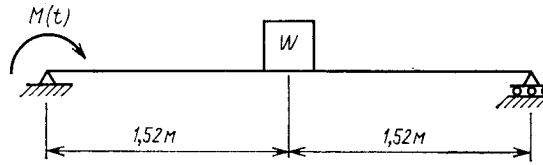


Рис. А.1.6.5

1.6.6. Электродвигатель весом $W = 7{,}26 \cdot 10^4$ Н установлен в середине пролета балки (см. рис. 1.6.3), изготовленной из двух двутавров, с моментом инерции $I = 2{,}7 \cdot 10^{-5}$ м^4 и длиной 3,66 м. Если частота вращения ротора электродвигателя равна 600 мин$^{-1}$, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2 и ротор имеет неуравновешенный вес величиной 18,2 Н на радиусе 0,254 м, то чему будет равна амплитуда установившихся вынужденных колебаний? Массой обеих балок можно пренебречь.

Ответ: $1{,}03 \cdot 10^{-4}$ м.

1.6.7. Для случая, представленного в задаче 1.6.6, предположить, что ось ротора располагается на расстоянии 0,51 м от поверхности крепления электродвигателя, который установлен на верхней полке балки. Какова будет амплитуда установившихся вынужденных угловых колебаний, обусловленных действием горизонтальной составляющей силы $P \cos \omega t$, если момент инерции электродвигателя относительно оси его ротора равен $1{,}16 \cdot 10^3$ Н·м·с$^{-2}$?

Ответ: $5.14 \cdot 10^{-5}$ рад.

1.6.8. Предположить, что электродвигатель в задаче 1.6.6 остановлен, но опоры A и B балки перемещаются вертикально с ускорением, изменяющимся по закону, задаваемому выражением (и). Определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний электродвигателя относительно основания, если дано: $a = 1{,}02$ м/с^2; $\omega = 60$ рад/с.

Ответ: $4{,}88 \cdot 10^{-4}$ м.

1.7. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ СОСТОЯНИЕ

В предыдущем параграфе рассматривалось только последнее слагаемое выражения (1.23), описывающего вынужденные колебания. В общем случае приложение возбуждающей колебания силы вы-

зывает также свободные колебания системы, которые описываются первыми двумя слагаемыми выражения (1.23). Таким образом, действительное движение представляет собой наложение двух гармонических движений, имеющих разные амплитуды и разные частоты, что в результате приводит к очень сложному по своему характеру движению. Однако благодаря влиянию затухания, неучтенного при выводе уравнения (1.23), свободные колебания исчезают в короткое время и поэтому в решении остается только та часть, которая относится к установившимся вынужденным колебаниям, постепенно поддерживаемым возбуждающей силой.

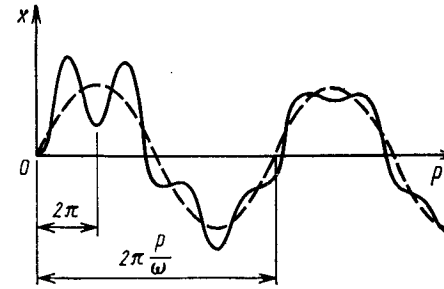


Рис. 1.25

Частный случай колебаний представлен на рис. 1.25 графиком зависимости перемещений от времени. На штриховую линию, представляющую вынужденные колебания с круговой частотой ω, накладываются свободные колебания с более высокой круговой частотой p и уменьшающейся вследствие влияния затухания амплитудой. Таким образом, результирующее движение характеризуется сплошной линией, которая постепенно приближается к штриховой линии, относящейся к установившемуся состоянию. Начальный период этого движения, т. е. несколько первых циклов, в которых присутствуют свободные колебания, обычно называется *неустановившимся состоянием*. Иногда представляет практический интерес изучить этот вид движения более подробно.

Амплитуду свободных колебаний можно найти из общего решения (1.23), рассмотрев начальные условия. Так же, как и в п. 1.1, при $t = 0$ имеем $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$. Подставляя в эти условия решение (1.23) и его производную по времени, найдем постоянные

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{p} - \frac{q\omega/p}{p^2 - \omega^2}. \qquad \text{(а)}$$

Подставляя эти постоянные в выражение (1.23), получим

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{q}{p^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right). \qquad (1.29а)$$

Если начальные условия таковы, что $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, это выражение упрощается до

$$\dot{x} = \frac{q}{p^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right). \qquad (129б)$$

Выражение (1.29б) описывает поведение во времени системы при действии возмущающей силы $P \sin \omega t$ и состоит из двух частей. Первая относится к установившемуся движению, рассмотренному в предыдущем параграфе, и пропорциональна $\sin \omega t$, тогда как вторая харак-

теризует свободные колебания и пропорциональна $\sin pt$. Их сумма не является гармоническим движением даже тогда, когда та состоит из двух гармонических функций, поскольку составляющие имеют различные частоты.

Если для возбуждающей силы взять функцию $P\cos\omega t$ вместо $P\sin\omega t$, то в выражении (1.23) следует $\sin\omega t$ заменить на $\cos\omega t$. В этом случае из граничных условий получаем следующие значения постоянных:

$$C_1 = x_0 - \frac{q}{p^2-\omega^2}; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{p}. \tag{б}$$

Подстановка этих значений в решение дает

$$x = x_0\cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt + \frac{q}{p^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos pt). \tag{1.30а}$$

Если начальные условия имеют вид $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, то это выражение примет форму

$$x = \frac{q}{p^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos pt). \tag{1.30б}$$

В этом случае часть характеристики системы, относящаяся к свободным колебаниям, имеет ту же амплитуду, что и часть, описывающая установившееся состояние, за исключением множителя ω/p.

Особый интерес представляет случай, когда частота функции возмущающей силы равна или очень близка к частоте свободных колебаний системы, т. е. когда ω и p близки. Исследуя этот случай, введем обозначения

$$p - \omega = 2\varepsilon, \tag{в}$$

где ε — малая величина. Затем перепишем выражение (1.29б), описывающее реакцию при действии возмущающей силы, задаваемой функцией $P\sin\omega t$, в следующей эквивалентной форме *:

$$x = \frac{q/p}{p^2-\omega^2}\left[\frac{p+\omega}{2}(\sin\omega t - \sin pt) + \frac{p-\omega}{2}(\sin\omega t + \sin pt)\right]. \tag{г}$$

Используя тригонометрические формулы, выражение (г) можно представить в виде

$$x = \frac{q/p}{p^2-\omega^2}\left[(p+\omega)\cos\frac{(\omega+p)t}{2}\sin\frac{(\omega-p)t}{2} + \right.$$
$$\left. + (p-\omega)\sin\frac{(\omega+p)t}{2}\cos\frac{(\omega-p)t}{2}\right]. \tag{д}$$

Подставляя обозначения (в) в выражение (д), получим

$$x = -\frac{q}{2p}\left[\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon}\cos(p-\varepsilon)t - \frac{\cos\varepsilon t}{p-\varepsilon}\sin(p-\varepsilon)t\right]. \tag{е}$$

* Это решение было предложено в частном разговоре в 1970 г. Ч. Уангом из отдела технической механики фирмы «Интерэктив текнолоджи», г. Санта-Клара, шт. Калифорния.

Рассматривая предел этого выражения, найдем *

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x = -\frac{q}{2p^2}(pt\cos pt - \sin pt). \qquad (1.31а)$$

Вводя фазовый угол, можно записать

$$x = -\frac{q}{p^2} A\cos(pt - \alpha), \qquad (ж)$$

где

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(pt)^2 + 1}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(-1/pt). \qquad (з)$$

Таким образом, в предельном случае, когда $\omega = p$, амплитуда колебания с течением времени стремится к бесконечности, как показано на рис. 1.26, где сплошная линия представляет в безразмерном виде выражение (1.31а), штриховая линия — в аналогичном виде только первое слагаемое. Можно видеть, что уже через короткое время первое слагаемое становится хорошей аппроксимацией полного динамического поведения системы, следовательно, можно принять

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x \approx -\frac{qt}{2p}\cos pt. \qquad (1.31б)$$

Кривые, представленные на рис. 1.26, показывают, что в системе при резонансе амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии затухания теоретически стремится к бесконечности, для достижения которой требуется бесконечно большое время. Таким образом, при проектировании машины, в которой имеется возможность управлять упомянутым выше резонансом, не представляет большой трудности испытать ее прохождением через резонанс при условии, что этот переход осуществляется исключительно быстро. Однако, как было обнаружено экспериментально, если колеблющаяся система такова, что установившееся состояние лежит ниже зоны резонанса, то очень сложно повысить частоту вращения с тем, чтобы заставить установку пройти через зону резонанса. Дополнительная мощность, затрачиваемая для этой цели, расходуется на увеличение амплитуд колебания, а эксплуатационная частота вращения подвижных частей установки изменяется мало.

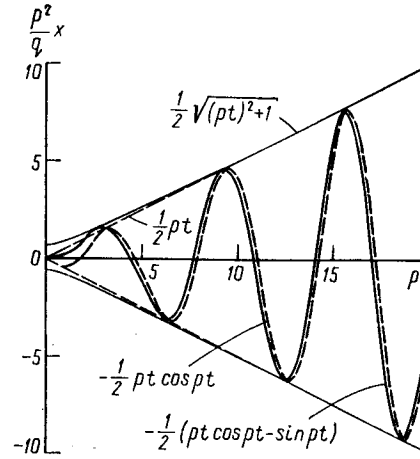


Рис. 1.26

Когда частота функции возмущающей силы близка к частоте колебаний системы (но

* Выражение (1.31а) может быть получено применением к выражению (1.29б) правила Лопиталя.

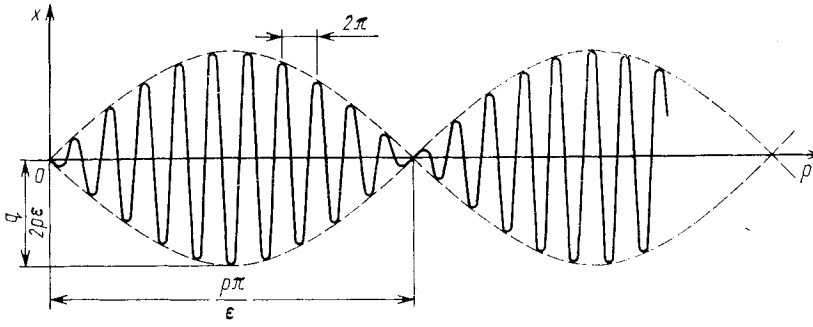


Рис. 1.27

точно не равна), может наблюдаться явление, называемое *биением*. Это явление описывается выражением (е), причем достáточно хорошее приближение для динамического поведения системы получается из упрощенной формулы, включающей в себя только первое слагаемое:

$$x \approx -\frac{q \sin \varepsilon t}{2p\varepsilon} \cos pt. \tag{1.32}$$

Поскольку величина ε в представлении (1.32) мала, функция $\sin \varepsilon t$ изменяется медленно, а ее период, равный $2\pi/\varepsilon$, является большим. Следовательно, можно считать, что представление (1.32) описывает колебания с периодом $2\pi/p$ и переменной амплитудой, равной $(q/2p\varepsilon) \sin \varepsilon t$. Такого рода колебания нарастают и затухают в виде периодических биений, показанных на рис. 1.27. Период биения, равный π/ε, увеличивается, когда частота колебаний приближается к частоте p (т. е. при $\varepsilon \to 0$). При резонансе период биения становится бесконечным, а рост амплитуды — непрерывным, как видно из рис. 1.26.

Пример. Верхний конец пружины (см. рис. 1.23) имеет постоянную, направленную вниз скорость v_0, которая в некоторый момент $t = 0$ становится скоростью простого гармонического движения вида

$$x_{\text{оп}} = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \tag{и}$$

Определить полное выражение, описывающее характер последующего движения подвешенного на пружине груза W.

Решение. В этом случае начальные условия движения имеют вид

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v_0. \tag{к}$$

Подставляя эти значения в выражение (а), получим

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{v_0}{p} = \frac{q\omega/p}{p^2 - \omega^2}. \tag{л}$$

Вновь подставляя найденные значения постоянных в выражение (1.23) и учитывая что в этом случае имеет место

$$q_{\text{оп}} = \frac{kgd}{W} = p^2 d = \frac{p^2 v_0}{\omega},$$

найдем искомое решение для реакции

$$x = \frac{v_0/\omega}{1 - \omega^2/p^2}\left(\sin \omega t - \frac{\omega^3}{p^3} \sin pt\right). \qquad \text{(м)}$$

ЗАДАЧИ

1.7.1. Для системы, показанной на рис. 1.23, даны вес груза $W = 45{,}4$ Н и жесткость пружины $k = 1{,}79 \cdot 103$ Н/м. Предполагается, что возмущающая сила описывается функцией $P \sin \omega t$, где $P = 9{,}1$ Н и $\omega = 10\pi$ с$^{-1}$, и начальные условия суть $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ при $t = 0$. Определить скорость и перемещение груза W в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: $x_1 = 3{,}73 \cdot 10^{-3}$ м, $\dot{x}_1 = 3{,}1 \cdot 10^{-2}$ м/с.

1.7.2. Какими будут перемещение и скорость груза W из предыдущей задачи в момент времени $t = 1$ с, если возбуждающая сила описывается не функцией $P \sin \omega t$, а функцией $P \cos \omega t$? Предполагается, что все остальные исходные данные такие же, как и в задаче 1.7.1.

Ответ: $x_1 = -8{,}9 \cdot 10^{-4}$ м, $\dot{x}_1 = 4{,}6 \cdot 10^{-2}$ м/с.

1.7.3. Получить выражение, аналогичное (1.31а), при условии, что возбуждающая сила описывается не функцией $P \sin \omega t$, а функцией $P \cos \omega t$.

Ответ: $x = \frac{qt}{2p} \sin pt.$

1.7.4. Для задачи 1.7.3 построить в безразмерных координатах график зависимости перемещений системы от времени, аналогичный приведенному на рис. 1.26.

1.8. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В предыдущих обсуждениях свободных и вынужденных колебаний не рассматривалось влияние диссипативных сил, таких, как силы трения или сопротивления воздуха. В результате было получено, что амплитуда свободных колебаний остается неизменной с течением времени, но, как показывают эксперименты, амплитуда с течением времени уменьшается, и колебания постепенно затухают. В случае вынужденных колебаний из теории следует, что при резонансе амплитуда может возрастать беспредельно. Однако, как известно, вследствие демпфирования амплитуда при установившемся поведении системы всегда имеет некоторую конечную величину даже при резонансе.

Для того чтобы провести аналитическое обсуждение колебаний при лучшем соответствии действительным условиям, необходимо учесть влияние *демпфирующих сил*. Эти силы могут иметь различное происхождение: трение между сухими поверхностями скольжения, трение между смазанными поверхностями, сопротивление воздуха или жидкости, электрическое демпфирование, внутреннее трение, обусловленное несовершенной упругостью материалов, и т. д. Среди всех упомянутых причин рассеивания энергии случай, в котором демпфирующая сила пропорциональна скорости (так называемое *вязкое демпфирование*), является простейшим с точки зрения математического исследования. Поэтому силы сопротивления, имеющие более сложную природу, обычно заменяют при исследованиях *эквива-*

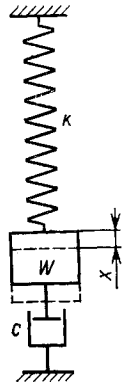


Рис. 1.28

лентным вязким демпфированием. Эквивалентное демпфирование определяют из условия, чтобы за один цикл при нем рассеивалось столько же энергии, сколько и при действии реальных сил сопротивления. Например, с помощью такого подхода можно рассматривать демпфирование, обусловленное внутренним трением.

Рассмотрим теперь случай, состоящий из пружины и сосредоточенной массы системы, в которой имеется вязкое демпфирование благодаря наличию демпфера (рис. 1.28). Предполагается, что вязкая жидкость в демпфере оказывает пропорциональное скорости сопротивление движению. В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = W - (W + kx) - c\dot{x}. \qquad \text{(а)}$$

Коэффициент c представляет собой *коэффициент вязкого демпфирования* или *постоянную демпфирования* и имеет размерность силы, отнесенной к единице скорости. Знак минус перед демпфирующей силой означает, что эта сила всегда имеет направление, противоположное направлению скорости. Разделив левую и правую части уравнения (а) на W/g и введя обозначения

$$p^2 = \frac{kg}{W}; \quad 2n = \frac{cg}{W}, \qquad \text{(б)}$$

получим уравнение *свободных колебаний с вязким демпфированием*

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0. \qquad (1.33)$$

При исследовании этого уравнения воспользуемся обычным методом решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и выберем следующее представление для искомого решения:

$$x = Ce^{rt}, \qquad \text{(в)}$$

где e — основание натурального логарифма; t — время; r — постоянная, определяемая из условия того, что представление (в) должно удовлетворять уравнению (1.33). Подставляя представление (в) в уравнение (1.33), получим $r^2 + 2nr + p^2 = 0$, откуда находим

$$r = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}. \qquad \text{(г)}$$

Рассмотрим сначала случай, когда величина n^2, зависящая от демпфирования, меньше p^2. Тогда величина $p_д^2 = p^2 - n^2$ положительна и решениями квадратного уравнения являются два комплексных корня:

$$r_1 = -n + ip_д; \quad r_2 = -n - ip_д.$$

Подставляя эти значения постоянных в выражение (в), получим два решения уравнения (1.33). Сумма или разность этих двух реше-

ний, умноженных на произвольную постоянную, также будет решением. В таком случае имеем

$$x_1 = \frac{C_1}{2}(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = C_1 e^{-nt}\cos p_д t;$$

$$x_2 = \frac{C_2}{2i}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = C_2 e^{-nt}\sin p_д t.$$

Суммируя эти решения, получим общее решение уравнения (1.33):

$$x = e^{-nt}(C_1\cos p_д t + C_2 \sin p_д t), \qquad (1.34)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые должны определяться из начальных условий. Множитель e^{-nt} в решении (1.34) уменьшается с течением времени, поэтому возникшие вначале колебания будут постепенно затухать.

Выражение в круглых скобках из решения (1.34) совпадает по форме с полученным ранее решением для задачи о колебаниях без демпфирования [см. решение (1.2)]. Оно представляет собой периодическую функцию с круговой частотой

$$p_д = \sqrt{p^2 - n^2}, \qquad (д)$$

называемую *круговой частотой затухающих колебаний при демпфировании*. Соответствующий ей период

$$\tau_д = \frac{2\pi}{p_д} = \frac{2\pi}{p}\,\frac{1}{\sqrt{1-(n^2/p^2)}}. \qquad (е)$$

Сравнивая эту величину с величиной $\tau = 2\pi/p$ периода, полученной ранее для колебаний без демпфирования, видим, что *период колебаний с демпфированием* $\tau_д$ является бóльшей величиной. Однако, если n меньше p, то это увеличение является настолько незначительным, что им можно пренебречь. Даже если *коэффициент демпфирования* n/p достигает такой большой величины, как 0,2, отношение частот $p_д/p$ близко к единице, что видно из рис. 1.29, где показан график функции $\frac{p_д}{p} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{p^2}}$, представляющий собой уравнение окружности в первом квадранте.

Для определения постоянных C_1 и C_2, входящих в решение (1.34), предположим, что в начальный момент при $t = 0$ в процессе колебания тело смещается от положения равновесия на величину x_0 и имеет начальную скорость $\dot{x}_0$. Подставляя эти данные в решение (1.34) и в его производную по времени, найдем

$$C_1 = x_0; \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_д}. \qquad (ж)$$

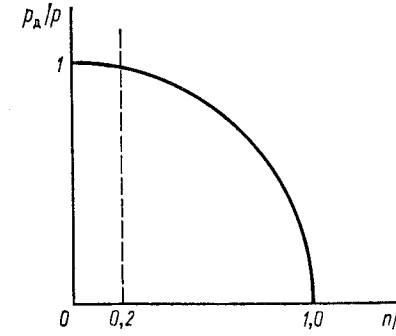


Рис. 1.29

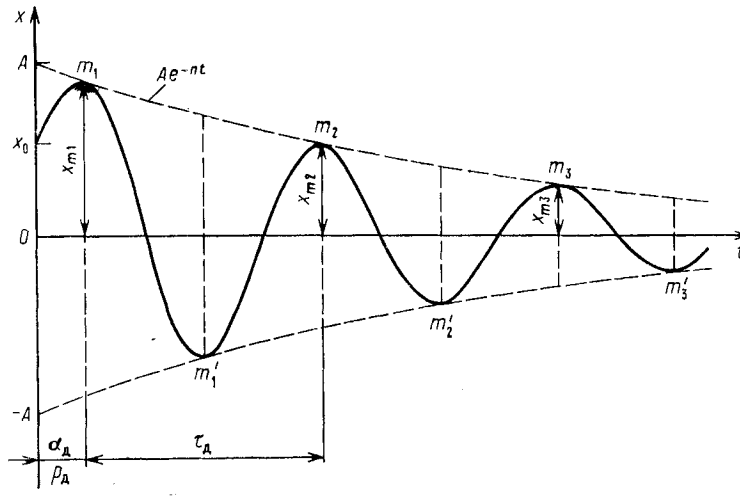


Рис. 1.30

Подставляя найденные значения (ж) постоянных в решение (1.34), получим

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos p_д t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_д} \sin p_д t\right). \tag{1.35}$$

В этом выражении первое слагаемое, пропорциональное $\cos p_д t$, зависит от начального перемещения x_0, тогда как второе слагаемое, пропорциональное $\sin p_д t$, зависит как от начального перемещения x_0, так и от начальной скорости $\dot{x}_0$.

Выражение (1.35) может быть записано в эквивалентной форме

$$x = Ae^{-nt} \cos(p_д t - \alpha_д), \tag{1.36}$$

где

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0 + nx_0)^2/p_д^2} \tag{з}$$

есть максимальное значение амплитуды;

$$\alpha_д = \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_д x_0}\right). \tag{и}$$

Можно считать, что выражение (1.36) описывает псевдогармоническое движение с уменьшающейся по экспотенциальному закону амплитудой Ae^{-nt}, с фазовым углом $\alpha_д$ и периодом $\tau_д = 2n/p_д$. На рис. 1.30 показан график этого движения. Огибающая, уравнение которой имеет вид $\pm Ae^{-nt}$, касается этого графика в точках m_1, m_1', m_2, m_2', ..., ординаты которых отстоят друг от друга на одинаковом временном интервале $\tau_д/2$. Поскольку касательные, проходящие в этих точках, не являются горизонтальными, точки касания не совпадают с точками максимума смещения от положения равновесия. Если коэффициент демпфирования мал, различием в положении этих точек можно пренебречь. Однако во всех случаях временной интер-

вал между двумя соседними крайними смещениями равен половине периода $\tau_д/2$. Для проверки этого утверждения продифференцируем выражение (1.36) один раз по времени, в результате получим скорость тела при колебаниях

$$\dot{x} = -Ae^{-nt}p_д \sin(p_д t - \alpha_д) - Ane^{-nt}\cos(p_д t - \alpha_д).$$

Приравнивая это выражение к нулю, найдем

$$\operatorname{tg}(p_д t - \alpha_д) = -\frac{n}{p_д}.$$

Таким образом, точки максимумов смещения, где скорости равны нулю, располагаются на одинаковом временном интервале $t = \pi/p_д = \tau_д/2$.

Скорость демпфирования колебаний зависит от коэффициента демпфирования n/p, при этом, как видно из рис. 1.30, отношение двух соседних амплитуд

$$\frac{x_{мi}}{x_{м\,(i+1)}} = \frac{Ae^{-nt_i}}{Ae^{-n(t_i+\tau_д)}} = e^{n\tau_д} = e^{\delta}. \qquad (к)$$

Величина $\delta = n\tau_д$ называется *логарифмическим декрементом затухания* и определяется по следующей формуле:

$$\delta = \ln\frac{x_{мi}}{x_{м\,(i+1)}} = n\tau_д = \frac{2\pi n}{p_д} \approx \frac{2\pi n}{p}. \qquad (1.37)$$

Формулу (1.37) можно использовать для экспериментального определения параметра демпфирования n. Для этого необходимо только определить из эксперимента отношение двух соседних амплитуд колебаний. Однако большая точность будет достигнута в том случае, если использовать отношение двух амплитуд, отделенных j циклами. В этом случае формула (к) принимает вид

$$\frac{x_{мi}}{x_{м\,(i+j)}} = e^{jn\tau_д}, \qquad (л)$$

а логарифмический декремент определяется выражением

$$\delta = \frac{1}{j}\ln\frac{x_{мi}}{x_{м\,(i+j)}}. \qquad (м)$$

В приведенном выше обсуждении уравнения (1.30) предполагалось, что $n < p$. Если же $n > p$, корни (г) будут действительными и отрицательными. Подставляя их значения в выражение (в), получим два решения уравнения (1.33), тогда общее решение примет вид

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \qquad (1.38)$$

В этом случае решение не является периодическим и не описывает колебательного движения. Вязкое сопротивление так велико, что когда тело смещается от положения равновесия, оно не совершает колебательных движений, а постепенно движется обратно в положение равновесия. В подобном случае система называется *передемпфированной*, а ее движение *апериодическим*.

Постоянные, входящие в решение (1.38), можно определить, подставив значения $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ в само решение и в его первую производную: $C_1 + C_2 = x_0$; $r_1C_1 + r_2C_2 = \dot{x}_0$, откуда находим

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0 - r_2x_0}{r_1 - r_2}; \qquad C_2 = \frac{r_1x_0 - \dot{x}_0}{r_1 - r_2}. \tag{н}$$

В результате решение (1.38) принимает вид

$$x = \frac{\dot{x}_0 - r_0x_0}{r_1 - r_2} e^{r_1t} + \frac{r_1x_0 - \dot{x}_0}{r_1 - r_2} e^{r_2t}. \tag{1.39}$$

Общий вид кривой, описывающей решение (1.39), зависит от величин n, x_0 и $\dot{x}_0$.

Между случаями недостаточного демпфирования и передемпфирования находится специальный случай $n = p$, когда степень демпфирования такова, что движение системы впервые начинает терять свой колебательный характер. Используя обозначения (б), для этого случая находим

$$c_{\text{кр}} = 2n\frac{W}{g} = 2p\frac{W}{g} = 2\sqrt{\frac{kW}{g}}, \tag{о}$$

где через $c_{\text{кр}}$ обозначен *критический коэффициент вязкого демпфирования*. Для случая критического демпфирования, когда $n = p$, из выражения (г) следует, что $r_1 = r_2 = -p$ и $p_{\text{д}} = 0$. Тогда как решения (1.35) и (1.36) будут относиться к частному случаю кратных корней характеристического уравнения и примут вид

$$x = C_1e^{-pt} + C_2te^{-pt}. \tag{1.40}$$

Подставляя в решение (1.40) и его первую производную заданные начальные условия, найдем

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \dot{x}_0 + nx_0. \tag{п}$$

Тогда общее решение примет вид

$$x = e^{-pt}[x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t]. \tag{1.41}$$

На рис. 1.31 представлены кривые, описывающие зависимость перемещения от времени в соответствии с выражением (1.41) при фиксированном значении x_0 и нескольких значениях $\dot{x}_0$. Для двух верхних кривых *1* и *2* начальная скорость была положительной; для кривой *3* — равной нулю, а для кривых *4* и *5* — отрицательной.

В дальнейших обсуждениях будем всегда считать величину n положительной, т. е. будем предполагать, что демпфирование представляет собой силу сопротивления. Тогда при ее действии будет происходить рассеивание энергии, амплитуда колебаний будет постепенно уменьшаться, а движение — затухать. Однако имеются случаи, когда при движении в систему привносится энергия, в результате чего с течением времени происходит увеличение амплитуды колебаний. В подобных случаях иногда используют термин *отрицательное демпфирование*. Из выражения (1.34) видно, что если n — отрицательная величина, то множитель e^{-nt} увеличивается с тече-

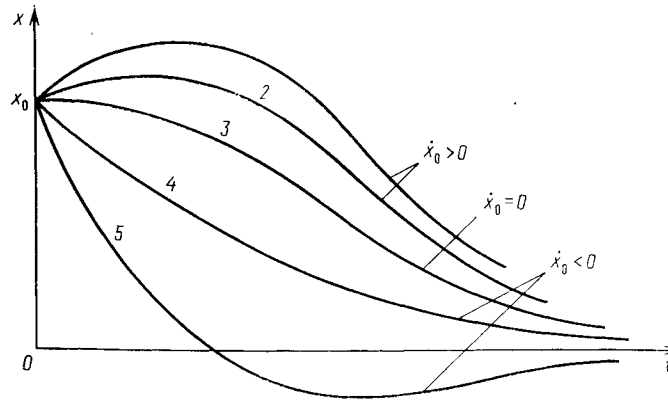


Рис. 1.31

нием времени, вследствие чего постепенно увеличиваются и амплитуды колебаний. Случай положительной величины n (когда колебания затухают) относится к *устойчивому движению*, тогда как случай отрицательной величины n — *к неустойчивому движению*.

Пример 1. Тело, совершающее колебания при наличии вязкого демпфирования, делает 10 полных колебаний в секунду и через 100 циклов амплитуда его колебаний уменьшается на 10 %. Определить логарифмический декремент, параметр демпфирования и коэффициент демпфирования n/p. Как уменьшился бы период колебания, если бы не было демпфирования?

Решение. По формуле (м) определяем логарифмический декремент

$$\delta = n\tau_д = \frac{1}{100} \ln\left(\frac{1{,}0}{0{,}9}\right) = 0{,}001054.$$

Период $\tau_д = 0{,}1$ с, частота — $p_д = 2\pi/\tau_д = 62{,}83$ с$^{-1}$. Таким образом получаем, что параметр демпфирования $n = 0{,}01054$ с$^{-1}$, а коэффициент демпфирования

$$\frac{n}{p} \approx \frac{n}{p_д} = \frac{0{,}01054}{62{,}83} = 0{,}000168.$$

Из выражения (е) следует, что отношение периодов при недемпфированных колебаниях к периоду при колебаниях с демпфированием

$$\tau/\tau_д = \sqrt{1 - \frac{n^2}{p^2}} \approx \sqrt{1 - \frac{n^2}{p_д^2}} = \sqrt{1 - 2{,}82 \cdot 10^{-8}}.$$

Пример 2. Определить общий вид зависимости перемещения от времени при движении подвешенной на пружине сосредоточенной массы, когда начальное перемещение равно x_0, а начальная скорость равна нулю, если демпфирование больше критического, т. е. при $n > p$.

Решение. Подставляя заданные начальные условия $x = x_0$ и $\dot{x}_0 = 0$ в выражение (1.39), получим

$$x = \frac{x_0}{r_1 - r_2}\left(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}\right). \qquad (р)$$

Дважды дифференцируя это выражение по времени, найдем скорость и ускорение

$$\dot{x} = \frac{r_1 r_2 x_0}{r_1 - r_2}\left(e^{r_2 t} - e^{r_1 t}\right); \qquad (с)$$

$$\ddot{x} = \frac{r_1 r_2 x_0}{r_1 - r_2}\left(r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}\right). \qquad (т)$$

Из выражения (с) видно, что скорость равна нулю при $t = 0$ и $t = \infty$ и отрицательна для всех промежуточных моментов времени t, поскольку оба корня r_1 и r_2 отрицательны. Для того чтобы найти время t_1, при котором эта отрицательная величина скорости имеет наибольшее значение, приравняем нулю выражение (т), откуда найдем

$$t_1 = \frac{\ln (r_2/r_1)}{r_1 - r_2}. \qquad (у)$$

Из выражений (с), (т) и (у) следует, что кривая, описывающая зависимость перемещения от времени, имеет общий вид, аналогичный кривой *3* (см. рис. 1.31). Для любой конкретной системы с заданным коэффициентом вязкого демпфирования c точные параметры кривой можно установить, учитывая, что

$$r_1 = -n + \sqrt{n^2 - p^2}; \qquad r_2 = -n - \sqrt{n^2 - p^2},$$

где n и p определяются из выражений (б).

ЗАДАЧИ

1.8.1. Тело весом $W = 45{,}4$ Н опирается на пружину с жесткостью $k = 1{,}79 \cdot 10^3$ Н/м и соединяется с гидравлическим демпфером (см. рис. 1.28), отрегулированным таким образом, что он создает силу сопротивления, равную $4{,}54 \times 10^{-2}$ Н при скорости $2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м/с. В каком отношении уменьшится амплитуда колебаний после 10 циклов колебаний?

Ответ: 0,539/1.

1.8.2. Груз весом $W = 9{,}1$ Н подвешен на пружине с жесткостью $k = 1{,}79 \times 10^2$ Н/м и подвержен демпфированию так, что $n = \sqrt{5}p/2$. В первоначальном положении грузу задается перемещение $x_0 = 5{,}1 \cdot 10^{-2}$ м. Какова будет максимальная отрицательная скорость, когда тело вернется в положение равновесия?

Ответ: —0,24 м/с.

1.8.3. Подвешенный на пружине с жесткостью $k = 1{,}79 \cdot 10^2$ Н/м в условиях критического демпфирования груз имеет вес $W = 17{,}5$ Н. Если грузу заданы начальные смещение $x_0 = 2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м и скорость $\dot{x}_0 = 0{,}31$ м/с, то за какое время t после начала движения тело достигнет положения равновесия $x = 0$? Насколько при этом груз сместится от положения равновесия, т. е. чему численно равно достигаемое им наибольшее отрицательное смещение?

Ответ: $t = 0{,}5$ с; $(-x)_{\max} = 1{,}26 \cdot 10^{-5}$ м.

1.8.4. Подвешенный на пружине груз весом $W = 9{,}1$ Н колеблется с периодом $\tau_д = 1/2$ с, имеющееся в этой системе демпфирование таково, что после десяти полных циклов колебаний амплитуда уменьшается от $x_1 = 5{,}1 \cdot 10^{-2}$ м до $x_{11} = 2{,}55 \cdot 10^{-2}$ м. Определить коэффициент вязкого демпфирования c.

Ответ: $c = 2{,}55 \cdot 10^{-1}$ Н·с/м.

1.8.5. Система пружин с сосредоточенной массой имеет собственную частоту колебания f в случае, когда отсутствует демпфирование. Вычислить частоту колебания f, когда коэффициент вязкого демпфирования $c = c_{кр}/2$.

Ответ: $f_д = \sqrt{3}f/2$.

1.9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В предыдущем параграфе были рассмотрены свободные колебания подвешенной на пружине сосредоточенной массы с вязким демпфированием. Рассмотрим случай, когда кроме силы упругости $-kx$, возникающей в пружине при растяжении, и силы сопротивления $-c\dot{x}$ имеется еще приложенная извне к колеблющейся массе возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону. Как уже было показано в п. 1.6, такого рода возмущающая сила может возникнуть

при работе электродвигателя с неотбалансированным ротором, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω. Таким образом, вращающаяся центробежная сила Q, приложенная, как показано на рис. 1.32, имеет вертикальную составляющую $Q\cos\omega t$. При таких условиях уравнение движения подвешенного электродвигателя массой m имеет вид

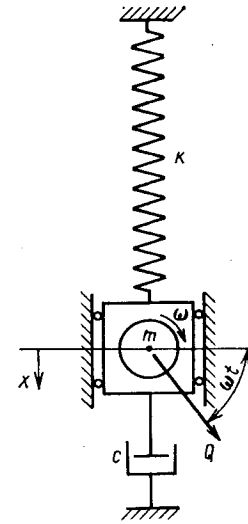


Рис. 1.32

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + Q\cos\omega t. \qquad \text{(а)}$$

Разделив на m левую и правую части и введя обозначения

$$p^2 = k/m; \quad 2n = c/m; \quad q = Q/m, \qquad \text{(б)}$$

получим уравнение

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = q\cos\omega t, \qquad (1.42)$$

являющееся дифференциальным уравнением движения при *вынужденных колебаниях с вязким демпфированием*. Частное решение уравнения (1.42) можно взять в виде

$$x = M\cos\omega t + N\sin\omega t, \qquad (1.43)$$

где M и N — произвольные постоянные. Для определения этих постоянных подставим представление (1.43) для искомого решения в уравнение (1.42) и тогда получим

$$(-\omega^2M + 2n\omega N + p^2M - q)\cos\omega t +$$
$$+ (-\omega^2N - 2n\omega M + p^2N)\sin\omega t = 0.$$

Это равенство будет удовлетворяться при любых значениях переменной t в том случае, если будут равны нулю выражения, стоящие в скобках. Вследствие сказанного для определения постоянных M и N получаем два линейных алгебраических уравнения

$$-\omega^2M + 2n\omega N + p^2M = q;$$
$$-\omega^2M - 2n\omega M + p^2N = 0.$$

Откуда находим

$$M = \frac{q(p^2-\omega^2)}{(p^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; \qquad N = \frac{q(2n\omega)}{(p^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \qquad \text{(в)}$$

Подставляя эти выражения для постоянных в представление (1.43), получим частное решение уравнения (1.42).

Общее решение уравнения (1.42) равно сумме частного решения (1.43) и общего решения (1.34), найденного в п. 1.8. Таким образом, рассматривая только случай докритического демпфирования, получим

$$x = e^{-nt}(C_1\cos p_д t + C_2\sin p_д t) + M\cos\omega t + N\sin\omega t. \qquad (1.44)$$

Первые два слагаемых в выражении (1.44) описывают *демпфированные свободные колебания*, тогда как два последних — *демпфированные вынужденные колебания*. Свободные колебания, как уже говорилось в предыдущем параграфе, имеют период $\tau_д = 2\pi/p_д$, а вынужденные колебания — период $T = 2\pi/\omega$, который совпадает с периодом возмущающей силы, вызывающей эти колебания. Видно, что благодаря присутствию множителя e^{-nt} свободные колебания постепенно уменьшаются и остаются только установившиеся вынужденные колебания, описываемые двумя последними слагаемыми. Эти вынужденные колебания поддерживаются бесконечно долго благодаря действию возмущающей силы и поэтому имеют большое практическое значение. Выше в п. 1.6 уже обсуждались такие вынужденные колебания без демпфирования, но здесь рассмотрим то, как на них влияет демпфирование.

Выражение (1.43) для установившегося поведения системы может быть записано в следующей эквивалентной форме с фазовым углом:

$$x = A\cos(\omega t - \theta), \tag{1.45}$$

где

$$A = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{q}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{q/p^2}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + 4n^2\omega^2/p^2}}; \tag{г}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{N}{M}\right) = \operatorname{arctg}\frac{2\omega n}{p^2-\omega^2} = \operatorname{arctg}\frac{2n\omega/p^2}{1-\omega^2/p^2}. \tag{д}$$

Таким образом, видим, что установившиеся вынужденные колебания с вязким демпфированием представляют собой простое гармоническое движение с постоянной амплитудой A, определяемой выражением (г), фазовым углом θ, определяемым выражением (д), и периодом $T = 2\pi/\omega$.

Используя обозначения p^2 и q из (б) и вводя обозначение γ для *коэффициента демпфирования*

$$\gamma = n/p = c/c_{кр}, \tag{е}$$

можно подставить выражение (г) в представление (1.45) и получить

$$x = (Q/k)\,\beta\cos(\omega t - \theta), \tag{1.46}$$

где *коэффициент усиления*

$$\beta = 1/\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + (2\gamma\omega/p)^2}. \tag{1.47}$$

Кроме того, выражение (д) для фазового угла можно представить в следующем виде:

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{2\gamma\omega/p}{1-\omega^2/p^2}. \tag{1.48}$$

Из представления (1.46) видно, что амплитуду установившегося вынужденного колебания можно определить, умножив величину перемещения при статическом нагружении

$$x_{ст} = Q/k \tag{ж}$$

на коэффициент усиления β. Этот коэффициент зависит не только от отношения частот ω/p, но и от коэффициента демпфирования γ.

На рис. 1.33 показано изменение коэффициента усиления β в зависимости от отношения частот ω/p для различных значений коэффициента демпфирования. Из этих кривых видно, что когда навязанная угловая частота ω мала по сравнению с собственной угловой частотой p, коэффициент усиления β незначительно отличается от единицы. Таким образом, при колебании перемещение x подвешенной сосредоточенной массы приблизительно совпадает с перемещением, обусловленным действием возмущающей силы $Q\cos\omega t$.

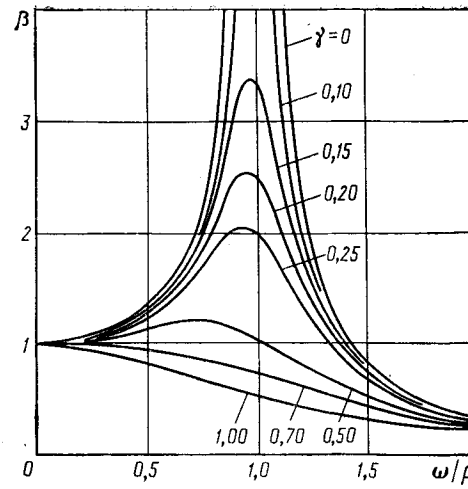


Рис. 1.33

Когда частота ω велика по сравнению с частотой p, т. е. когда навязанная частота намного меньше, чем собственная частота, величина коэффициента усиления близка к нулю независимо от степени демпфирования. Это означает, что высокочастотная возмущающая сила практически не вызывает вынужденных колебаний системы с низким значением собственной частоты. Как видно, в обоих крайних случаях ($\omega \ll p$ и $\omega \gg p$) демпфирование оказывает лишь второстепенное влияние на величину коэффициента усиления β. Таким образом, в обоих указанных случаях вынужденных колебаний вполне допустимо полностью пренебречь влиянием демпфирования и использовать решения, полученные в п. 1.6.

Когда частота ω становится близкой частоте p, т. е. отношение ω/p близко к единице, коэффициент усиления резко увеличивается и его величина при резонансе или в околорезонансной области становится очень чувствительной к изменению коэффициента демпфирования. Следует также отметить, что коэффициент β имеет максимальную величину при значениях отношения ω/p, несколько меньших единицы. Положив производную функции β по ω/p равной нулю, найдем, что максимум имеет место при

$$\frac{\omega}{p} = \sqrt{1-2\gamma^2}. \qquad (з)$$

При малых значениях коэффициента демпфирования максимальное значение коэффициента β возникает в точке, лежащей очень близко к резонансу, поэтому представляется вполне допустимым взять в качестве максимального значение коэффициента β и его значение при резонансе. Тогда из выражений (1.46), (б) и (е) получаем приближенное значение максимальной амплитуды

$$A_{\max} = \frac{Q}{k}\beta_{\text{рез}} = \frac{Q}{k}\frac{1}{2\gamma} = \frac{Q}{p^2 m}\frac{1}{2n/p} = \frac{Q}{c\omega}. \qquad (и)$$

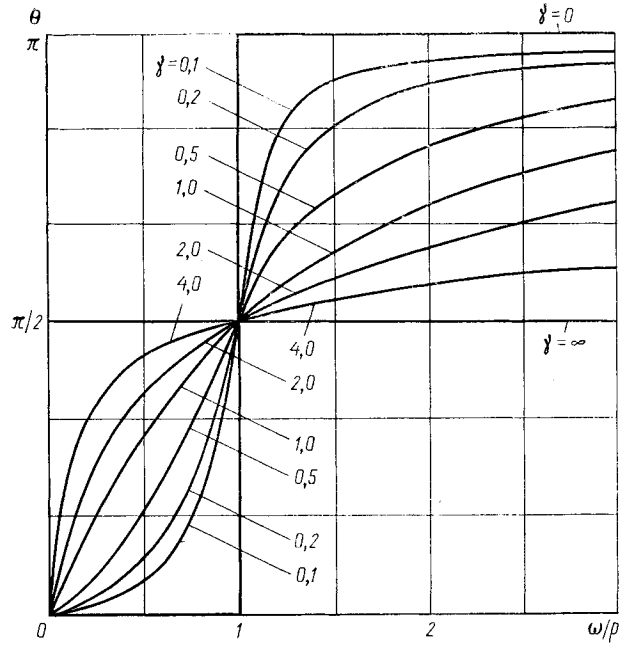


Рис. 1.34

Из сказанного следует, что хотя демпфирование имеет очень незначительное влияние на резонансное поведение системы в областях, достаточно удаленных от резонанса, оно приобретает особенно важное значение вблизи резонансной области и его уже нельзя не учитывать, если требуется получить имеющие практическое значение результаты.

Рассмотрим теперь соотношения между фазовыми углами для случаев установившихся колебаний и действия возмущающей силой, вызывающей эти колебания. Это соотношение характеризуется фазовым углом θ в выражении (1.46), величина которого задается формулой (1.48). Так как возмущающая сила изменяется в соответствии с функцией $\cos \omega t$, а вынужденные колебания происходят согласно $\cos(\omega t - \theta)$, то можно сказать, что реакция отстает от функции возмущающей силы на угол θ. Таким образом, когда сила Q (см. рис. 1.32) направлена вниз, подвешенная масса, на которую она действует, еще не достигла своего самого низкого положения; это наступает только через θ/ω, когда сила Q будет иметь направление, составляющее угол θ с вертикалью. Из формулы (1.48) видно, что величина угла θ, как и коэффициента β, зависит как от скорости затухания, так и от отношения частот. Кривые на рис. 1.34 показывают изменение фазового угла θ в зависимости от отношения частот ω/p для различных значений коэффициента демпфирования. При отсутствии демпфирования вынужденные колебания в точности совпа-

дают по фазе ($\theta = 0$) с колебаниями возмущающей силы для всех значений $\omega/p < 1$ и в то же время они различаются по фазе точно на половину цикла ($\theta = \pi$) при $\omega/p > 1$. При этом условии, как видно, фазовый угол при резонансе ($\omega = p$) является неопределенным.

При демпфировании можно видеть непрерывное изменение фазового угла θ с увеличением отношения ω/p. Кроме того, независимо от величины коэффициента демпфирования при резонансе имеем $\theta = \pi/2$. Таким образом, при резонансе вынужденные колебания отстают от возмущающей силы на четверть цикла. На рис. 1.32, например, сила Q направлена вниз, когда колеблющаяся масса проходит через свое среднее положение. Когда же масса движется к самому низкому положению, сила Q изменяет свое направление на угол $\pi/2$ и действует теперь уже в горизонтальном направлении, слева направо.

Для значений ω/p, достаточно удаленных в ту или иную сторону от резонанса, малый коэффициент демпфирования, как уже отмечалось, оказывает лишь второстепенное значение на величину фазового угла. Иначе говоря, при отношении частот, значительно меньшем единицы, фазовый угол θ практически равен нулю, тогда как при отношении, значительно большем единицы, этот угол практически равен π. Таким образом, влияние демпфирования на фазовый угол можно также не принимать во внимание всегда, за исключением областей, лежащих вблизи точки резонанса или около нее.

Пример 1. Пусть полный вес неотбалансированного электродвигателя (см. рис. 1.32) $W = 4{,}54 \cdot 10^3$ Н, неуравновешенная масса $m_1 = 1{,}79 \cdot 10^2$ Н·м²/с, а центр ее тяжести лежит на расстоянии $r_1 = 2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м от оси электродвигателя. Частота вращения ротора электродвигателя равна 600 мин$^{-1}$, перемещение пружины при статическом нагружении $\delta_{ст} = 2{,}54 \cdot 10^{-4}$ м, коэффициент вязкого демпфирования $c = 1{,}79 \cdot 10^4$ Н·с/м. Определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний при указанной частоте вращения, а также при резонансе, когда $\omega = p$.

Решение:

$$\omega = 2\pi \left(\frac{600}{60}\right) = 20\pi; \quad \omega^2 = 400\pi^2;$$

$$p^2 = \frac{g}{\delta_{ст}} = 38\,600; \quad n = \frac{cg}{2W} = \frac{1{,}79 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 4{,}54 \cdot 10^3} = 19{,}3;$$

$$q = \frac{g}{W}\omega^2 = 0{,}386 \cdot 400\pi^2.$$

Используя выражение (г), получаем

$$A = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{0{,}386 \cdot 400\pi^2}{\sqrt{(38\,600 - 400\pi^2)^2 + 4 \cdot 19{,}3^2 \cdot 400\pi^2}} = 1{,}12 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

При резонансе имеем $\omega = p = \sqrt{38\,600}$, тогда с помощью (и) получаем

$$A_{max} = \frac{Q}{c\omega} = \frac{\omega}{c} = \frac{\sqrt{38\,600}}{1{,}79 \cdot 10^4} = 4{,}98 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Пример 2. Для системы с демпфированием рассмотреть случай изменяющегося по гармоническому закону перемещения основания (рис. 1.35), а именно:

$$x_{осн} = d \cos \omega t, \qquad (к)$$

получить выражение, описывающее установившееся поведение системы при заданной функции возмущающей силы.

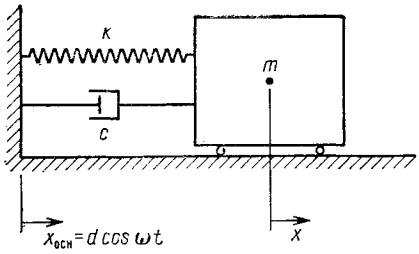


Рис. 1.35

Решение. Уравнение движения в рассматриваемом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{x}_{осн}) - k(x - x_{осн}), \qquad (л)$$

где

$$\dot{x}_{осн} = -d\omega \sin \omega t. \qquad (м)$$

Подставив выражения (к) и (м) в уравнение (л), после преобразования получим

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = d(k\cos\omega t - c\omega \sin \omega t). \qquad (н)$$

Вводя в правую часть этого уравнения фазовый угол, можно записать

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Bd\cos(\omega t - \varphi), \qquad (о)$$

где

$$B = \sqrt{k^2 + c^2\omega^2}; \qquad (п)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-c\omega/k). \qquad (р)$$

Как видно, в данном случае вместо силы $Q\cos\omega t$ имеем возмущающую силу в виде функции $Bd\cos(\omega t - \varphi)$; при этом решение можно получить, заменив в (1.46) Q на произведение Bd и введя фазовый угол φ, что в результате дает

$$x = \frac{Bd}{k}\beta\cos(\omega t - \varphi - \theta). \qquad (с)$$

Пример 3. Неустановившееся движение системы при докритическом демпфировании может быть исследовано с учетом начальных условий в выражении (1.44). Найти закон движения указанной системы при свободных колебаниях, если на систему действует возмущающая сила вида $Q\cos\omega t$.

Решение. Используя начальные условия $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ из выражения (1.44) и его первой производной, определяем постоянные интегрирования

$$C_1 = x_0 - M; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n(x_0 - M) - N\omega}{p_д}. \qquad (т)$$

Подставляя эти значения в выражение (1.44), найдем

$$x = e^{-nt}\left(x_0\cos p_д t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_д}\sin p_д t\right) +$$

$$+ M\left[\cos\omega t - e^{-nt}\left(\cos p_д t + \frac{n}{p_д}\sin p_д t\right)\right] +$$

$$+ N\left(\sin\omega t - e^{-nt}\frac{\omega}{p_д}\sin p_д t\right). \qquad (у)$$

Если взять начальные условия в виде $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, то неустановившаяся часть общего перемещения системы

$$x_н = -e^{-nt}\left(M\cos p_д t + \frac{Mn + N\omega}{p_д}\sin p_д t\right). \qquad (ф)$$

Выражая эту неустановившуюся часть общего решения в форме, содержащей фазовый угол, получим

$$x_н = -e^{-nt}\frac{c}{p_д}\cos(p_д t - \psi), \qquad (х)$$

где

$$c = \sqrt{(Mp_д)^2 + (Mn + N\omega)^2}; \qquad (ц)$$

$$\psi = \operatorname{arctg}(Mn + M\omega)/(Mp_д). \qquad (ч)$$

ЗАДАЧИ

1.9.1. В середине пролета свободно опертой балки установлен электродвигатель весом $W = 9{,}1 \cdot 10^3$ Н (см. задачи 1.6.3 и 1.6.4 в п. 1.6). Изгибная жесткость балки такова, что статический прогиб в середине пролета составляет $\delta_{ст} = 2{,}54 \times \times 10^{-3}$ м, а величина вязкого демпфирования обеспечивает уменьшение амплитуды свободных колебаний до половины ее первоначального значения за десять циклов колебаний. Частота вращения ротора электродвигателя равна 600 мин$^{-1}$. При этой частоте вращения из-за неотбалансированности ротора возникает центробежная сила $Q = 2{,}27 \cdot 10^3$ Н. Пренебрегая влиянием распределенной массы балки, определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний.

Ответ: $A = 0{,}02$ м.

1.9.2. Установка с вращающимися деталями, имеющая вес $W = 7{,}26 \cdot 10^4$ Н, смонтирована в середине пролета двух параллельных свободно опертых двутавровых балок с длиной $l = 3{,}66$ м и моментом инерции поперечного сечения $I = 2{,}67 \times \times 10^{-5}$ м^4. Ротор установки, вращающийся с частотой 300 мин$^{-1}$, имеет неуравновешенный вес 181,6 Н, находящийся на расстоянии $2{,}54 \cdot 10^{-1}$ м от оси вращения. Какова будет амплитуда установившихся вынужденных колебаний, если эквивалентное вязкое демпфирование для рассматриваемой системы составляет 10 % критического демпфирования?

Ответ: $A = 1{,}12 \cdot 10^{-3}$ м.

1.9.3. С помощью кривых (см. рис. 1.33) составить уравнение геометрического места точек их пиков для коэффициентов демпфирования.

Ответ: $\beta_{max} = 1/\sqrt{1 - \omega^4/p^4}$.

1.9.4. Для системы с демпфированием, подверженной действию возмущающей силы вида $Q \sin \omega t$, записать выражение, характеризующее установившееся поведение системы в форме, содержащей фазовый угол.

Ответ: $x = \dfrac{Q}{k} \beta \cos(\omega t - \theta)$; $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega^2 - p^2}{2n\omega}\right)$.

1.9.5. В предположении, что ускорение опоры изменяется по гармоническому закону $\ddot{x}_{оп} = a \cos \omega t$, получить выражение, характеризующее установившееся поведение системы с демпфированием в форме, содержащей фазовый угол.

Ответ: $x = \dfrac{Bd}{k} \beta \cos(\omega t - \varphi - \theta)$; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{k}{c\omega}\right)$.

1.9.6. Для системы с демпфированием, в которой опора смещается по закону $x_{оп} = d \sin \omega t$, записать выражение, характеризующее установившееся поведение системы в форме, содержащей фазовый угол.

Ответ: $x^* = \dfrac{-ma}{k} \beta \cos(\omega t - \theta)$; $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}\right)$.

1.9.7. Записать выражение, характеризующее установившееся поведение (в форме, содержащей фазовый угол) системы с демпфированием, если опора имеет ускорение $\ddot{x}_{оп} = a \sin \omega t$.

Ответ: $x^* = \dfrac{-ma}{k} \beta \cos(\omega t - \theta)$; $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega^2 - p^2}{2n\omega}\right)$.

1.9.8. Для системы с докритическим демпфированием получить выражение, характеризующее неустановившееся движение при действии возмущающей силы $Q \sin \omega t$. Решение представить в форме, аналогичной форме выражения (ф) в примере 3.

Ответ: $x_н = -e^{-nt}\left(N \cos p_д t + \dfrac{M\omega + Nn}{p_д} \sin p_д t\right)$.

1.10. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ВЯЗКОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ

Как уже отмечалось в начале п. 1.8, различные виды демпфирования могут быть заменены некоторым *эквивалентным вязким демпфированием* *, что в результате приводит к линейному дифференциаль-

* **Jacobsen L. S.** Steady forced vibrations as influenced by damping. — Trans. ASME, 1930, v. 52, N. 1, pp. 169—181.

ному уравнению для гармонического движения. Наиболее важное влияние демпфирования в задаче о вынужденных колебаниях проявляется при резонансе либо вблизи резонанса. Поэтому рассмотрим работу, совершаемую возмущающей силой в течение одного цикла при установившемся поведении системы, которая рассматривалась в предыдущем параграфе. В этом случае работа, совершаемая силой $Q\cos\omega t$ за один цикл:

$$U_Q = \int_0^T Q(\cos\omega t)\,\dot{x}\,dt. \qquad \text{(а)}$$

Скорость $\dot{x}$ можно получить, продифференцировав выражение (1.45) по времени:

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \theta). \qquad \text{(б)}$$

Подставляя это выражение в соотношение (а) и используя формулы тригонометрии, найдем

$$U_Q = -QA\omega\int_0^T (\cos\omega t)(\sin\omega t\cos\theta - \cos\omega t\sin\theta)\,dt.$$

В результате интегрирования получим

$$U_Q = \pi QA\sin\theta. \qquad \text{(в)}$$

Аналогично определяем рассеиваемую за один цикл работу демпфирующей силы $c\dot{x}$:

$$U_c = \int_0^T c\dot{x}\,\dot{x}\,dt. \qquad \text{(г)}$$

Подставляя выражение (б) в соотношение (г), найдем

$$U_c = cA^2\omega^2\int_0^T \sin^2(\omega t - \theta)\,dt,$$

что после интегрирования дает

$$U_c = \pi cA^2\omega. \qquad \text{(д)}$$

Таким образом вносимая энергия U_Q увеличивается в зависимости от амплитуды A по линейному закону, тогда как рассеиваемая энергия U_c возрастает пропорционально квадрату амплитуды. Они будут равны только в точке пересечения кривых функций для обоих видов энергии (рис. 1.36). Отсюда, приравняв выражения (в) и (д), можно определить амплитуду при установившемся состоянии

$$A = \frac{Q\sin\theta}{c\omega}. \qquad \text{(е)}$$

При резонансе ($\omega = p$) фазовый угол [см. выражение (1.48)] равен $\pi/2$, а амплитуда A достигает максимального (при $c \ll c_{кр}$) значения

$$A_{max} = \frac{Q}{c\omega}. \qquad \text{(ж)}$$

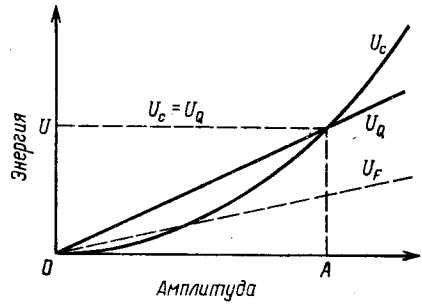


Рис. 1.36

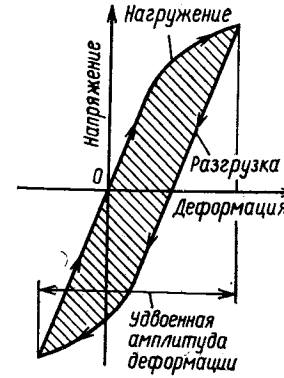


Рис. 1.37

Это выражение совпадает с аналогичным выражением (и), полученным в п. 1.9 иным способом.

Соотношение (д) выражает энергию, рассеиваемую за счет вязкого демпфирования за один цикл при вынужденных колебаниях. Это выражение для энергии можно приравнять тому выражению, которое соответствует некоторому иному типу демпфирования, и в результате определить *эквивалентный коэффициент вязкого демпфирования* $c_{эк}$. Рассмотрим, например, *конструкционное демпфирование*, которое происходит за счет внутреннего трения в конструкционных материалах (например, сталь или алюминиевые сплавы), которые не являются идеально упругими. Энергия, рассеиваемая в единице объема материала, на рис. 1.37 представлена заштрихованной областью внутри *петли гистерезиса*. Петля образована кривыми зависимостей напряжения от деформации при увеличении (или при «нагружении») и уменьшении (или при «разгрузке») величин напряжения и деформации. На рис. 1.37 показано, как происходит полное изменение направления на обратное для напряжения и деформации при одном цикле колебания. При таком механизме демпфирования энергия рассеивается почти пропорционально квадрату амплитуды деформации *, а форма петли гистерезиса практически не зависит от амплитуды и скорости деформации.

Поскольку амплитуда колебания пропорциональна амплитуде деформации, то работу, рассеиваемую за один цикл при конструкционном демпфировании, можно представить в виде

$$U_к = sA^2, \qquad (з)$$

где s — коэффициент пропорциональности. Приравнивая соотношения (д) и (з), найдем эквивалентное значение коэффициентов вязкого демпфирования

$$c_{экв} = \frac{S}{\pi\omega} = \frac{\eta k}{\omega}. \qquad (1.49)$$

* **Kimball A. L.** Vibration damping, including the case of solid damping. — Trans. ASME, 1929, v. 51, N. 30, pp. 227—236.

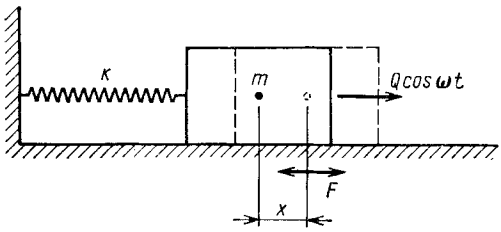


Рис. 1.38

Множитель s/π имеет размерность коэффициента k и обычно представляется, как в отношении (1.49), в виде ηk, где η — безразмерная величина:

$$\eta = \frac{s}{\pi k}, \qquad (и)$$

которая называется *коэффициентом конструкционного демпфирования*. Эту величину можно связать с величиной *эквивалентного значения коэффициента вязкого демпфирования* $\gamma_{экв}$, обусловленного жесткостью среды, разделив представление (1.49) на величину $c_{кр} = 2pm$ [см. выражение (о) в п. 1.8] и воспользовавшись обозначением $k = p^2 m$ [см. выражение (б) в п. 1.9], что дает

$$\gamma_{экв} = \frac{c_{экв}}{c_{кр}} = \frac{p}{2\omega}\eta. \qquad (1.50)$$

Если это представление для $\gamma_{экв}$ подставить в выражение (1.47), коэффициент усиления при установившемся поведении системы примет вид

$$\beta_{уст} = 1/\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + \eta^2}. \qquad (к)$$

Наконец, при резонансе имеем $\gamma_{рез} = \eta/2$, $\beta_{рез} = 1/\eta$. Тогда из представления (1.49) и выражения (ж) получим

$$A_{max} = \frac{Q}{k\eta}. \qquad (л)$$

В качестве второго примера определения эквивалентного значения коэффициента вязкого демпфирования рассмотрим рис. 1.38, где тело, прикрепленное к пружине, скользит по поверхности, которая создает сопротивление движению за счет трения. В случае сухого трения обычно используют закон Кулона *, согласно которому сила трения F пропорциональна нормальной силе N, с которой обе поверхности действуют друг на друга

$$F = \mu N, \qquad (м)$$

где μ — *коэффициент трения*. Из экспериментов следует, что коэффициент трения при движении со сравнительно небольшими скоростями является практически постоянной (и меньшей, чем в состоянии покоя) величиной. Более того, случаи, где имеется трение качения, а не скольжения, также могут рассматриваться с помощью закона (м).

---

* **Coulomb C. A.** Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et á la roideur des cordages. Nouvelle édition, á laquelle on a ajouté les mémoires du meme auteur. — Paris: Bachelier, 1821. 368 p.

Сила трения F (см. рис. 1.38) всегда действует в направлении, противоположном направлению скорости движения тела, что имеет место и в гидравлическом амортизаторе. Однако сопротивление, обусловленное трением, будем считать постоянным, независящим от скорости. Подобный механизм демпфирования носит название *кулоновского трения*, причем в этом случае получение строгого решения *, описывающего поведение системы при действии возмущающей силы в виде гармонической функции, является более сложным делом, чем в случае вязкого демпфирования. Для определения эквивалентного значения постоянной вязкого демпфирования, которое требуется подставить вместо сопротивления, обусловленного трением, подсчитаем работу $U_{тр}$ силы трения F, рассеиваемую за один цикл:

$$U_{тр} = 4AF. \qquad (н)$$

Приравнивая это соотношение к выражению (д), получим

$$c_{экв} = \frac{4F}{\pi A\omega}. \qquad (1.51)$$

В этом случае величина коэффициента $c_{экв}$ зависит не только от силы F и частоты ω, но также и от амплитуды A колебания. Разделив выражение (1.51) на величину $c_{кр} = 2pm$ и введя обозначения $k = p^2m$, для эквивалентного значения коэффициента вязкого демпфирования получим

$$\gamma_{экв} = \frac{c_{экв}}{c_{кр}} = \frac{2Fp}{\pi Ak\omega}. \qquad (1.52)$$

С использованием полученного выражения для $\gamma_{экв}$ амплитуда установившихся вынужденных колебаний с эквивалентным вязким демпфированием

$$A = \frac{Q/k}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2 + [4F/(\pi Ak)]^2}}. \qquad (о)$$

Решая это уравнение относительно A, находим

$$A = \pm \frac{Q}{k} \frac{\sqrt{1-(4F/\pi Q)^2}}{1-\omega^2/p^2}. \qquad (1.53)$$

Первый сомножитель в правой части этого выражения определяет перемещение при статическом приложении нагрузки, второй является коэффициентом усиления. Видно, что этот коэффициент является действительным числом только при

$$F/Q < \pi/4. \qquad (п)$$

В практических приложениях, когда, как правило, имеют место небольшие силы трения, данное условие выполняется. Однако, кроме этого, следует отметить, что в тех случаях, когда условие (п) выполняется, коэффициент усиления становится бесконечно большим при резонансе ($\omega = p$). Это обстоятельство можно объяснить, сравнив

* **Den Hartog J. P.** Forced vibrations with Coulomb and viscous damping. — Trans. ASME, 1931, v. 53, p. 107.

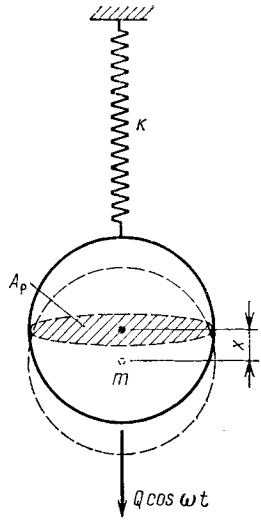


Рис. 1.39

рассеиваемую энергию $U_{тр}$ с работой U_Q, совершаемой возмущающей силой при резонансе. Решив неравенство (п) относительно силы F и подставив результат в выражение (н), получим

$$U_F < \pi QA. \qquad (р)$$

Но из неравенства (п) следует, что работа U_Q при резонансе равна πQA, отсюда неравенство

$$U_F < U_Q. \qquad (с)$$

Таким образом, величина рассеиваемой за один цикл энергии меньше энергии, подводимой извне. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 1.36, где штриховая линия, описываемая уравнением (н), имеет меньший угол наклона, чем сплошная линия, соответствующая выражению (в), если выполняется условие (п).

В качестве третьего примера, иллюстрирующего концепцию эквивалентного вязкого демпфирования, возьмем случай колебания тела, погруженного в среду с малой вязкостью типа воздуха. Если масса тела мала, а объем велик, демпфирующее влияние сопротивления среды может оказаться значительным. На рис. 1.39 представлена легкая полая сфера, совершающая вынужденные колебания в воздухе, где силу сопротивления среды можно приближенно представить в следующем виде *:

$$P = \frac{1}{2}\rho\dot{x}^2 C_D A_P. \qquad (т)$$

В выражении (т) через ρ обозначена удельная плотность среды; C_D — коэффициент лобового сопротивления; A_P — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (см. рис. 1.39). В этом случае сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости и всегда имеет противоположное направление. Работа силы P, рассеиваемая за один цикл:

$$U_P = 4\int_0^{T/4} P\dot{x}\,dt. \qquad (у)$$

Подставляя выражения (т) и (б) в соотношение (у), с учетом равенства $C_P = (1/2)\,\rho C_D A_P$ получим

$$U_P = 4C_P A^3\omega^3 \int_0^{T/4} \sin^3(\omega t - \theta)\,dt.$$

*) **Vennard J. K.** Elementary fluid mechanics. 4th ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1961. 570 p. Коэффициент лобового сопротивления C_D не является постоянной величиной, а зависит от числа Рейнольдса, которое является функцией скорости. В данном обсуждении используется некоторое среднее значение коэффициента C_D.

Выполняя интегрирование, найдем

$$U_P = \frac{8}{3} C_P A^3 \omega^3. \qquad (ф)$$

Приравниванием этого выражения выражению (д) получим

$$c_{экв} = \frac{8 C_P A \omega}{3\pi}. \qquad (1.54)$$

Таким образом, эквивалентное значение постоянной вязкого демпфирования в данном случае прямо пропорционально величинам C_P, A и ω. Как и выше, разделим выражение (1.54) на $c_{кр} = 2pm$ и введем обозначение $k = p^2 m$, что для эквивалентного значения коэффициента вязкого демпфирования дает

$$\gamma_{экв} = \frac{c_{экв}}{c_{кр}} = \frac{4 C_P A \omega p}{3\pi k}, \qquad (1.55)$$

при этом амплитуда установившихся вынужденных колебаний

$$A = \frac{Q/k}{\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + (8 C_P A \omega^2/3\pi k)^2}}. \qquad (х)$$

Возведя в квадрат левую и правую части равенства (х) и выполнив необходимые преобразования, получим следующее биквадратное уравнение:

$$\left(\frac{8 C_P \omega^2}{3\pi}\right)^2 A^4 + k^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) A^2 - Q^2 = 0, \qquad (1.56)$$

которое можно решить по известной формуле относительно A^2. Затем вычисляем амплитуду колебаний $A = \sqrt{A^2}$.

Подводя итог сказанному, отметим, что эквивалентное значение постоянной вязкого демпфирования можно всегда определить для произвольного вида механизма демпфирования, приравняв работы гипотетического вязкого демпфера и реальной конструкции. В выражении для работы используем выражение (б) для скорости системы при установившемся движении и гармонической функции возбуждающей силы, при этом эквивалентное значение постоянной вязкого демпфирования определяем соотношением

$$c_{экв} = \frac{1}{\pi A^2 \omega} \int_0^T R \dot{x}\, dt = \frac{U_R}{\pi A^2 \omega}, \qquad (1.57)$$

где R — сила сопротивления. Затем можно провести упрощенный динамический анализ системы, используя полученное таким образом значение $c_{экв}$. Более того, при этом можно рассматривать одновременно несколько типов демпфирования. Например, для комбинации кулоновского и вязкого трения из выражения (1.57) получаем

$$c_{экв} = \frac{4F}{\pi A \omega} + c. \qquad (ц)$$

Поступая с полученным выражением для $c_{экв}$ так, как это было сделано выше, при определении амплитуды A вынужденных колебаний имеем следующее алгебраическое уравнение:

$$\left[\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(2\gamma\frac{\omega}{p}\right)^2\right]A^2+\frac{16F\gamma\omega}{\pi kp}A+\left(\frac{4F}{\pi k}\right)^2-\frac{Q^2}{k^2}=0, \quad (ч)$$

которое можно решить по известной формуле.

1.11. ОБОБЩЕННАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ВОЗМУЩАЮЩАЯ СИЛА

Во всех предыдущих обсуждениях вынужденных колебаний предполагалось, что возмущающая сила описывается функцией, пропорциональной либо $\sin \omega t$, либо $\cos \omega t$. В общем случае могут встретиться возмущающие силы, описываемые периодическими функциями более сложного вида. В данном параграфе будет обсуждаться поведение системы с одной степенью свободы при действии таких возмущающих сил.

Рассмотрим, например, одноцилиндровый двигатель (рис. 1.40). Когда такой двигатель имеет неотбалансированные детали, совершающие возвратно-поступательное движение внутри картера *4*, последние порождают периодическую возмущающую силу, которая вызовет колебание всей системы. При изучении указанных вынужденных колебаний потребуется знание точного характера возмущающей силы, а особую важность имеет отношение ее периода к периоду собственных колебаний системы.

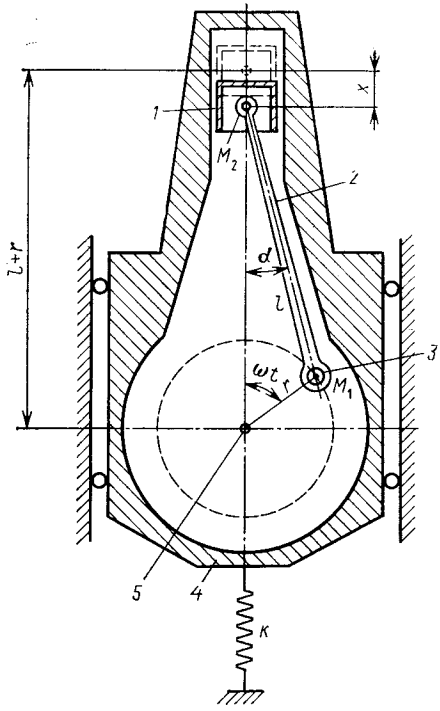


Рис. 1.40

При исследовании возмущающей силы массу шатуна *2* можно представить с достаточной точностью в виде двух сосредоточенных масс, одна из которых относится к пальцу кривошипа *3*, другая — к поршню *1*. Все остальные неуравновешенные движущиеся массы могут быть также отнесены к указанным двум точкам. В результате потребуется рассмотреть только две сосредоточенные массы M_1 и M_2 (см. рис. 1.40). Если за положительное выбрать направление сил вниз, вертикальная составляющая силы инерции массы M_1:

$$F_1 = -M_1\omega^2 r\cos\omega t, \quad (а)$$

где ω — угловая скорость вращения коленчатого вала вокруг оси 5; r — радиус кривошипа; ωt — угол, составляемый кривошипом с вертикальной осью.

Возвратно-поступательное движение массы M_2 является более сложным. Обозначим через x перемещение массы M_2 от верхней мертвой точки поршня, а через α — угол между шатуном и вертикальной осью. Из приведенного чертежа (см. рис. 1.40) имеем

$$x = l(1 - \cos\alpha) + r(1 - \cos\omega t); \qquad (б)$$

$$r\sin\omega t = l\sin\alpha. \qquad (в)$$

Из соотношения (в) следует $\sin\alpha = (r/l)\sin\omega t$. Длина l шатуна обычно в несколько раз превышает длину радиуса r кривошипа, поэтому с достаточной точностью можно положить

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t} \approx 1 - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\omega t,$$

удержав только первые два слагаемых в разложении функции в ряд Тейлора. Подставляя последнее выражение в соотношение (б), найдем

$$x = r(1 - \cos\omega t) + \frac{r^2}{2l}\sin^2\omega t. \qquad (г)$$

Дифференцируя полученное выражение по времени, определим скорость возвратно-поступательного движения массы M_2:

$$\dot{x} = r\omega\sin\omega t + \frac{r^2\omega}{2l}\sin 2\omega t,$$

а продифференцировав дважды, получим ускорение. Тогда сила инерции, действующая на массу M_2:

$$F_2 = -M_2\omega^2 r\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right). \qquad (д)$$

Суммируя эту силу с силой (а), получим окончательное выражение для возмущающей силы

$$F(t) = -(M_1 + M_2)\omega^2 r\cos\omega t - \frac{r}{l}M_2\omega^2 r\cos 2\omega t. \qquad (е)$$

Следует отметить, что полученное выражение содержит два слагаемых, одно из которых имеет круговую частоту, равную частоте вращения вала двигателя, другое — имеет круговую частоту, равную удвоенной частоте вращения. Отсюда можно сделать вывод, что в рассматриваемом случае имеется две критические частоты вращения вала двигателя: первая, когда частота вращения вала двигателя в одну секунду совпадает с частотой собственных колебаний системы $f = 1/\tau$, и вторая, когда частота вращения двигателя равна половине частоты собственных колебаний. Соответствующим выбором жесткости k пружины можно всегда сделать так, чтобы частота собственных колебаний была достаточно удалена от указанных критических частот вращения и тем самым устранить возможность возникновения больших колебаний.

Следует помнить, что выражение (д) для силы инерции массы, совершающей возвратно-поступательное движение, было получено путем удержания только первых двух членов ряда Тейлора для функции $\cos\alpha$. Более точное выражение будет содержать, кроме того, еще и гармоники более высокого порядка. А это приведет к тому, что появятся критические частоты вращения более низкие, чем рассматривались выше. Однако они практического значения не имеют, так как соответствующие им силы будут слишком малы, чтобы вызывать существенные колебания системы.

В общем случае периодическую возмущающую силу произвольного вида можно представить в виде *тригонометрического ряда* (*ряда Фурье*):

$$F(t) = a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \ldots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \ldots = \\ = a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_i\cos i\omega t + b_i\sin i\omega t). \qquad (1.58)$$

Период возмущающей силы $T = 2\pi/\omega$, коэффициенты a_0, a_i и b_i являются постоянными, которые требуется определить.

Для того чтобы определить любой из коэффициентов ряда (1.58), если известен вид функции $F(t)$, необходимо воспользоваться следующей процедурой. Предположим, требуется определить коэффициент a_i. Тогда обе части представления (1.58) можно умножить на $\cos i\omega t$ и проинтегрировать от $t = 0$ до $t = T$. Можно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$\int_0^T a_0\cos i\omega t\,dt = 0; \quad \int_0^T a_j\cos j\omega t\cos i\omega t\,dt = 0;$$

$$\int_0^T b_j\sin j\omega t\cos i\omega t\,dt = 0; \quad \int_0^T a_i\cos^2 i\omega t\,dt = \frac{a_i}{2}T = a_i\frac{\pi}{\omega},$$

где i и j — целые числа 1, 2, 3, ... Используя эти соотношения из представления (1.58), находим

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos i\omega t\,dt. \qquad (1.59а)$$

Поступая аналогичным образом и умножая представление (1.58) на $\sin i\omega t$ и интегрируя, получим

$$b_i = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin i\omega t\,dt. \qquad (1.59б)$$

И, наконец, умножив представление (1.58) на dt и проинтегрировав от $t = 0$ до $t = T$, найдем

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt. \qquad (1.59в)$$

Видно, что если известно аналитическое выражение функции $F(t)$, с помощью формул (1.59) можно определить коэффициенты представления (1.58). Если функция $F(t)$ задается графически и не представляется возможным выразить ее в аналитической форме, следует для вычисления интегралов (1.59) использовать приближенный численный метод.

Предполагая, что возмущающая сила представлена в виде тригонометрического ряда, запишем уравнение для вынужденных колебаний с демпфированием в следующем виде:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \ldots + \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \ldots \qquad (1.60)$$

Общее решение этого уравнения состоит из двух частей: одна из них описывает свободные колебания, другая — вынужденные. Свободные колебания будут постепенно затухать вследствие влияния демпфирования. Вынужденные колебания для случая линейного уравнения будут представлять собой наложение установившихся вынужденных колебаний, обусловленных каждым членом ряда (1.58). В свою очередь, эти последние колебания можно исследовать точно так же, как в п. 1.9. Отсюда можно сделать вывод, что большие вынужденные колебания могут возникнуть, когда период одного из членов ряда (1.58) совпадет с периодом собственных колебаний системы, т. е. если период T возмущающей силы будет либо равен точно, либо кратен периоду $\tau_д$.

Пример 1. Для решения системы, показанной на рис. 1.40, имеются следующие исходные данные: вес поршня $W_п = 2{,}72 \cdot 10$ Н; вес шатуна $W_ш = 1{,}36 \cdot 10$ Н; $M_1 g = 2W_ш/3 = 0{,}91 \cdot 10$ Н; $M_2 g = W_п + W_ш/3 = 3{,}18 \cdot 10$ Н; полный вес двигателя $W = 2{,}27 \cdot 10^3$ Н; частота вращения двигателя 600 мин$^{-1}$; радиус кривошипа $r = 0{,}203$ м; длина шатуна $l = 0{,}609$ м; жесткость пружины $k = 2{,}06 \cdot 10^6$ Н/м.

Пренебрегая влиянием деформирования, найти максимальное перемещение двигателя от положения равновесия при установившихся вынужденных колебаниях системы. Предполагается, что кривошип полностью отбалансирован.

Решение. Начнем с определения собственной круговой частоты колебания системы

$$p = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{2{,}06 \cdot 10^6 \cdot 9{,}81}{2{,}27 \cdot 10^3}} = \sqrt{8883} = 94{,}3 \text{ с}^{-1}.$$

Кроме того, имеем

$$\omega = \frac{600 \cdot 2\pi}{60} = 20\pi = 62{,}83 \text{ с}^{-1},$$

откуда находим

$$\frac{\omega}{p} = \frac{62{,}83}{94{,}3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2\omega}{p} = \frac{4}{3}.$$

Из найденного отношения частот видно, что частота возмущающей силы, пропорциональной $\cos \omega t$, расположена ниже резонансной частоты, тогда как частота силы, пропорциональной $\cos 2\omega t$, лежит выше резонансной частоты. Пренебрегая компонентами возмущающей силы с более высокими частотами, получаем наложение влияний только сил инерции, представляемых выражениями (а) и (д), или, что то же самое, их суммой (е). Записывая эти слагаемые в виде

$$P_1 \cos \omega t = -(M_1 + M_2)\, \omega^2 r \cos \omega t;$$

$$P_2 \cos \omega t = -\frac{r}{l} M_2 \omega^2 r \cos 2\omega t, \qquad (ж)$$

получим

$$P_1 = -(M_1 + M_2)\,\omega^2 r = -\frac{(0{,}91 + 3{,}18)\,10 \cdot 400\pi^2 \cdot 0{,}203}{9{,}81} = 3{,}341 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$P_2 = -\frac{r}{l} M_2 \omega^2 r = -\left(\frac{0{,}203}{0{,}609}\right)\left(\frac{3{,}18 \cdot 10}{9{,}81}\right)(400\pi^2)\,0{,}203 = -0{,}867 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Вновь воспользовавшись выражением (1.24) из п. 1.6, найдем, что для вынужденных колебаний без демпфирования, обусловленных действием двух возмущающих сил [см. выражения (ж)], перемещения

$$x_1 = \frac{P_1}{k}\left(\frac{1}{1 - \omega^2/p^2}\right)\cos\omega t = \frac{-3{,}341 \cdot 10^3}{2{,}06 \cdot 10^6}\left(\frac{1}{1 - 4/9}\right)\cos\omega t =$$

$$= -2{,}92 \cdot 10^{-3}\cos\omega t;$$

$$x_2 = \frac{P_2}{k}\left(\frac{1}{1 - 4\omega^2/p^2}\right)\cos 2\omega t = \frac{-0{,}867 \cdot 10^3}{2{,}06 \cdot 10^6}\left(\frac{1}{1 - 16/9}\right)\cos\omega t =$$

$$= 0{,}54 \cdot 10^{-3}\cos\omega t.$$

Максимальное перемещение имеет место при $\omega t = \pi$, что дает

$$(x_1 + x_2)_{\max} = (2{,}92 + 0{,}54)\,10^{-3} = 3{,}46 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Пример 2. На систему с одной степенью свободы действует возмущающая сила $F(t)$, которая изменяется в зависимости от времени в соответствии с диаграммой, приведенной на рис. 1.41. Пренебрегая влиянием демпфирования, рассмотреть установившиеся вынужденные колебания, которые при этом возникают, если масса m пружины и ее жесткость k таковы, что отношение частот $\omega/p = 0{,}9$.

Решение. Начнем с того, что проведем гармонический анализ заданной силы, предположив, что функция, описывающая эту силу, может быть представлена в виде тригонометрического ряда (1.58). Для этого воспользуемся выражениями (1.59), с помощью которых найдем коэффициенты a_0, a_i и b_i ряда.

Взяв сначала выражение (1.59в), видим, что интеграл $\int_0^{2\pi/\omega} F(t)\,dt$ представляет собой площадь области, заключенной между заданной пилообразной диаграммой (см. рис. 1.41) и осью абсцисс на интервале с координатами $t = 0$ и $t = T = 2\pi/\omega$. Очевидно, что эта площадь равна нулю, откуда следует, что $a_0 = 0$.

Обратившись далее к выражению (1.59а), видим, что каждая ордината диаграммы (см. рис. 1.41) должна быть умножена на $\cos i\omega t$ и затем проинтегрирована от $t = 0$ до $t = 2\pi/\omega$. Поскольку функция $F(t)$ нечетная, а функция $\cos i\omega t$ четная, их произведение будет также нечетной функцией, откуда следует, что интеграл в выражении (1.59а) также будет равен нулю, т. е. $a_i = 0$.

И наконец, взяв выражение (1.59б), видим, что каждая ордината функции $F(t)$ на рис. 1.41 должна быть умножена на $\sin i\omega t$ и проинтегрирована от $t = 0$ до $t = 2\pi/\omega$. В этом случае функция $F(t)$ на отрезке от $t = 0$ до $t = \pi/\omega$ является симметричной относительно $t = \pi/2\omega$, а на интервале от $t = \pi/\omega$ до $t = 2\pi/\omega$ она симметрична относительно $t = 3\pi/2\omega$. Однако, когда i является четным целым числом, соответствующие участки функции $\sin i\omega t$ являются антисимметричными соответственно относительно точек $t = \pi/2\omega$ и $t = 3\pi/2\omega$. Таким образом, получаем, что при $i = 2, 4, 6, \ldots$ коэффициенты $b_i = 0$.

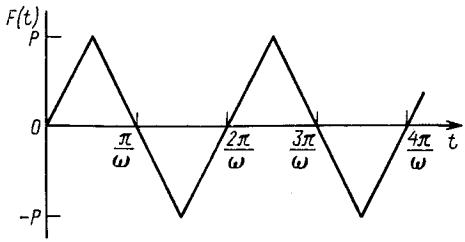


Рис. 1.41

Когда i — нечетное целое число, обе функции $F(t)$ и $\sin i\omega t$ являются антисимметричными относительно ординаты $t = \pi/\omega$. Тогда из выражения (1.59б) получаем

$$b_i = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \sin \omega t \, dt = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\pi/2\omega} F(t) \sin i\omega t \, dt. \qquad (з)$$

Вновь обращаясь к рис. 1.41, видим, что на интервале от $t = 0$ до $t = \pi/2\omega$ имеем $F(t) = 2P\omega t/\pi$. Подставим это выражение в интеграл (з), получим

$$b_i = \frac{8P\omega^2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2\omega} t \sin i\omega t \, dt = \frac{8P}{i^2\pi^2} \int_0^{i\pi/2} u \sin u \, du.$$

Проинтегрировав и подставив пределы интегрирования, найдем

$$b_i = \frac{8P}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2} = \frac{8P}{i^2\pi^2} (-1)^{(i-1)/2}, \qquad (и)$$

где $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$

Учитывая, что $a_0 = 0$, $a_i = 0$, и используя выражение (и) для тригонометрического ряда (1.58), получим

$$F(t) = \frac{8P}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \ldots \right). \qquad (к)$$

Далее, для того чтобы представить пилообразную диаграмму, приведенную на рис. 1.41, в виде тригонометрического ряда, необходимо только просуммировать синусоиды с нечетными числами волн на интервале от $t = 0$ до $t = 2\pi/\omega$. Более того, здесь можно видеть, что ряды (к) быстро сходятся, поэтому для практики важным является только первый член ряда. Таким образом, возмущающая сила, изменяющаяся по пилообразному закону, оказывает на систему примерно такое же влияние, как и возмущающая сила, изменяющаяся по синусоидальному закону с несколько меньшей амплитудой вида

$$F(t) = \frac{8P}{\pi^2} \sin \omega t. \qquad (л)$$

Для того чтобы указать на незначительное влияние второго члена ряда, отметим, что при $\omega/p = 0{,}9$ коэффициент усиления

$$\beta_3 = \frac{1}{1 - (3\omega/p)^2} = -0{,}159.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний, обусловленная вторым членом ряда, составляет только $0{,}159/3^2 = 0{,}0177$ от прогиба при статическом приложении силы $8P/\pi^2$, тогда как коэффициент усиления для первого члена ряда

$$\beta_1 = \frac{1}{1 - \omega^2/p^2} = 5{,}26.$$

Следовательно, можно сделать вывод, что приближенное выражение (л) дает ошибку, меньшую 0,4 %, а приближенное решение, описывающее перемещение в исходной задаче, при этом имеет вид

$$x = \frac{8P\beta_1}{\pi^2 k} \sin \omega t. \qquad (м)$$

ЗАДАЧИ

1.11.1. Используя данные примера 1, приведенного выше, построить кривую зависимости перемещения от времени $x = f(t)$ для установившихся вынужденных колебаний системы, показанной на рис. 1.40.

1.11.2. Разложить возмущающую силу $F(t)$, график которой представлен на рис. А.1.11.2, в тригонометрический ряд

Ответ: $F(t) = \frac{4P}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \ldots\right)$.

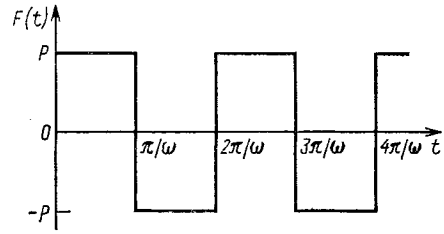


Рис. А.1.11.2

1.11.3. Разложить возмущающую силу $F(t)$, график которой представлен на рис. 1.11.3, в тригонометрический ряд.

Ответ: $F(t) = \frac{4P}{\pi}\left(\cos \omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \ldots\right)$.

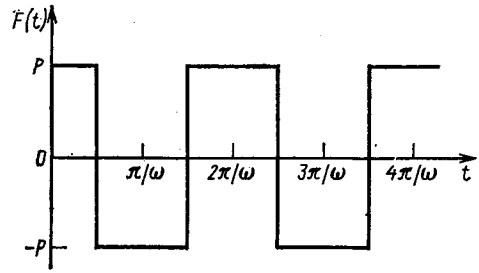


Рис. А.1.11.3

1.11.4. Разложить возмущающую силу $F(t)$, график которой представлен на рис. А.1.11.4, в тригонометрический ряд.

Ответ: $F(t) = \frac{2P}{\pi}\left(\sin \omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \ldots\right)$.

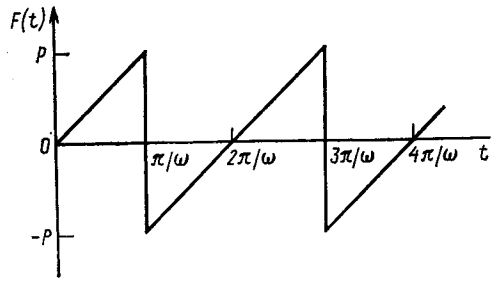


Рис. А.1.11.4

1.11.5. Разложить возмущающую силу $F(t)$, график которой представлен на рис. А.1.11.5, в тригонометрический ряд.

Ответ: $F(t) = \frac{P}{2} - \frac{P}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \ldots\right)$.

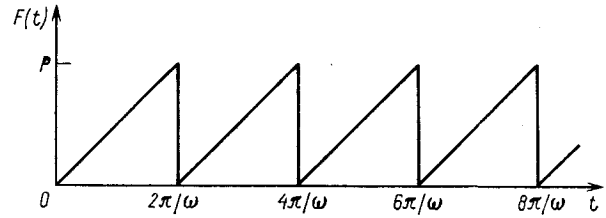


Рис. А.1.11.5

1.11.6. Получить общее решение для задачи об установившихся вынужденных колебаниях с демпфированием системы с одной степенью свободы, если возмущающая сила описывается функцией вида (1.58).

Ответ: $x = \frac{a_0}{k} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cos(i\omega t - \theta_i) + b_i \sin(i\omega t - \theta_i)}{k\sqrt{(1 - i^2\omega^2/p^2)^2 + (2\gamma i\omega/p)^2}}$.

1.12. ВОЗМУЩАЮЩАЯ СИЛА ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА

В предыдущем параграфе был рассмотрен общий случай периодической возмущающей силы, которая может быть представлена в виде ряда Фурье. Однако для случая *возмущающей силы произвольного вида* сила меняется во времени не по периодическому закону, поэтому здесь следует использовать несколько иной подход к решению задачи.

Рассмотрим дифференциальное уравнение движения демпфированной системы с одной степенью свободы (рис. 1.42, *а*) при действии возмущающей силы $Q = F(t')$ произвольного вида

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + Q. \qquad \text{(а)}$$

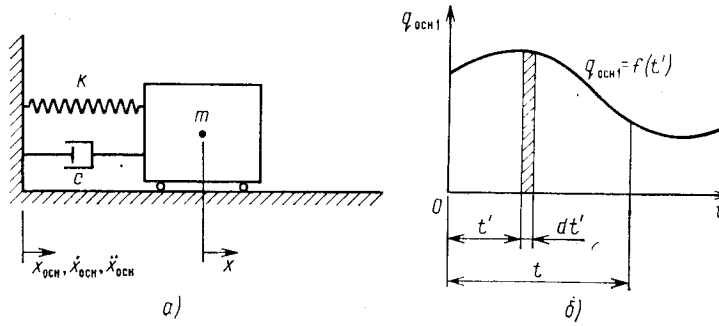


Рис. 1.42

Разделив уравнение (а) на m и сделав соответствующие преобразования, получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = q, \tag{1.61}$$

где

$$q = \frac{Q}{m} = \frac{F(t')}{m} = f(t') \tag{б}$$

является возмущающей силой, отнесенной к единице массы. При выводе уравнения (1.61) предполагалось, что сила q является функцией фиктивного времени t', как показано на рис. 1.42, *б*. Тогда в произвольный момент времени t' можно подсчитать *приращение импульса* $q\,dt'$, показанное на рисунке заштрихованным прямоугольником. Этот импульс сообщает единице массы мгновенное увеличение скорости (или *приращение скорости*)

$$d\dot{x} = q\,dt' \tag{в}$$

независимо от того, что на эту массу могут действовать и другие силы (например, сила упругости) и независимо от величины перемещения и скорости этой массы в момент t'. Рассматривая это приращение скорости как начальную скорость в момент t' и используя выражение (1.35) из п. 1.8, получим, что *приращение перемещения* системы в любой момент времени t будет иметь вид

$$dx = e^{-n(t-t')}\frac{q\,dt'}{p_д}\sin p_д(t-t'). \tag{г}$$

Поскольку такой же эффект вызывается каждым приращением импульса $q\,dt'$ на интервале от $t' = 0$ до $t' = t$, то в результате непрерывного действия возмущающей силы q получим следующее выражение для полного перемещения:

$$x = \frac{e^{-nt}}{p_д}\int_0^t e^{nt'}q\sin p_д(t-t')\,dt'. \tag{1.62}$$

Подобные представления в математике называются *интегралом Дюамеля*.

Выражение (1.62) представляет полное перемещение при действии возмущающей силы q на интервале времени от 0 до t. Оно включает как установившиеся, так неустановившиеся формы и особенно удобно при исследовании поведения системы при колебаниях, когда действует возмущающая сила произвольного вида. Если функцию $q = f(t')$ не представляется возможным выразить аналитически, интеграл (1.62) можно всегда вычислить приближенно с помощью соответствующего метода графического или численного интегрирования. Для того чтобы учесть влияние начального смещения x_0 и начальной скорости $\dot{x}_0$ при $t = 0$, необходимо только к выражению

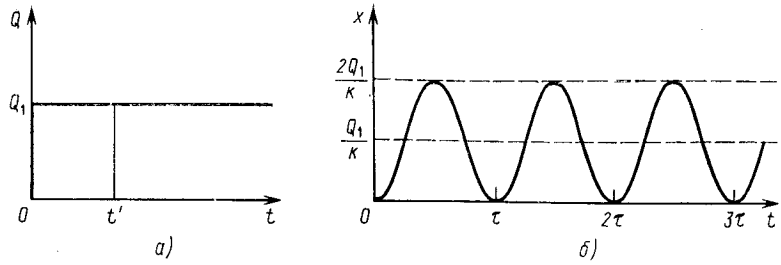


Рис. 1.43

(1.62) прибавить решение (1.35) из п. 1.8, учитывающее указанные начальные условия. Тогда общее решение примет вид

$$x = e^{-nt}\left[x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_д} \sin p_д t + \frac{1}{p_д}\int_0^t e^{nt'} q \sin p_д (t - t')\right] dt. \tag{1.63}$$

Если пренебречь влиянием демпфирования, получаем $n = 0$ и $p_д = p$, в результате чего выражение (1.62) принимает вид

$$x = \frac{1}{p}\int_0^t q \sin p(t - t')\, dt'. \tag{1.64}$$

В том случае, когда учитывается влияние начального смещения x_0 и начальной скорости $\dot{x}_0$ при $t = 0$, выражение (1.63) без учета демпфирования становится таким:

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{p}\int_0^t q \sin p(t - t')\, dt'. \tag{1.65}$$

В качестве примера применения выражения (1.64) предположим, что к массе на рис. 1.42, *а* внезапно приложена постоянная сила Q_1 (рис. 1.43, *а*). Подобный характер динамического нагружения описывается так называемой *ступенчатой функцией*. В этом случае имеем $q_1 = Q_1/m = \text{const}$. Тогда выражение (1.64) примет вид

$$x = \frac{q_1}{p}\int_0^t \sin p(t - t')\, dt'. \tag{д}$$

Этот интеграл легко вычисляется, что дает

$$x = \frac{q_1}{p^2}(1 - \cos pt) = \frac{Q_1}{k}(1 - \cos pt). \tag{1.66}$$

Из приведенного решения следует, что при внезапном приложении постоянной по величине силы возникают колебания с амплитудой Q_1/k, наложенные на статическое смещение той же величины Q_1/k (рис. 1.43, *б*). Таким образом, максимальное перемещение, возни-

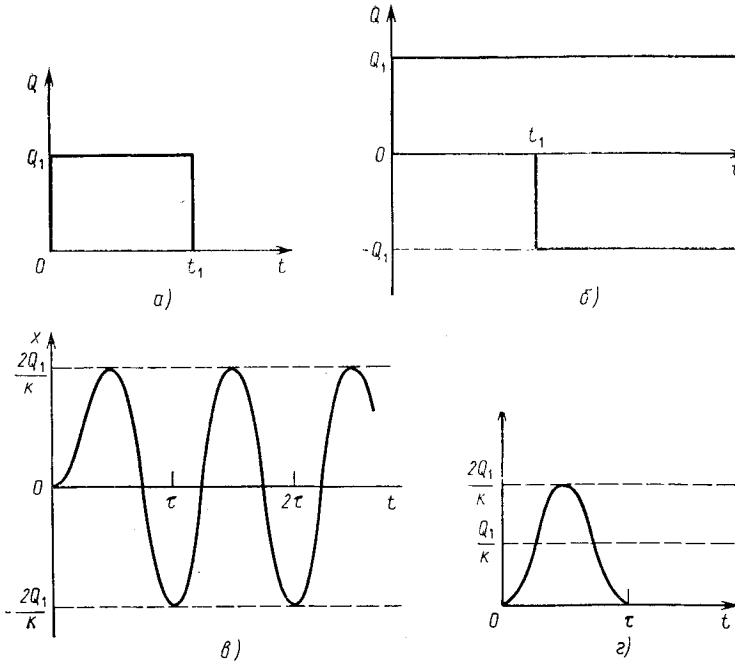


Рис. 1.44

кающее при внезапном приложении силы, в 2 раза больше перемещения, обусловленного статическим приложением силы.

В рассмотренном выше случае постоянная сила Q действует в течение бесконечно большого промежутка времени. Если же она действует только на промежутке времени t_1, имеет место *прямоугольный импульс* (рис. 1.44, *а*). В течение времени, когда сила не равна нулю, поведение системы в точности совпадает с тем, что дается выражением (1.66). Поведение же в следующее за t_1 время можно определить с помощью интеграла Дюамеля, записанного для каждого из двух интервалов времени: от 0 до t_1 и от t_1 до t. Только интегрирование по первому интервалу дает отличный от нуля результат, поскольку во втором интервале времени функция возмущающей силы равна нулю. Суммируя сказанное, решение для рассматриваемого случая можно представить в следующем виде:

$$\text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_1 \quad x = \frac{Q_1}{k}(1 - \cos pt), \text{ т. е. (1.66);}$$

$$\text{при } t \geqslant t_1 \quad x = \frac{Q_1}{k}[\cos p(t - t_1) - \cos pt]. \qquad (1.67)$$

Аналогичные результаты могут быть получены, если импульс прямоугольной формы (см. рис. 1.44, *а*) рассматривать как сумму двух ступенчатых функций, что показано на рис. 1.44, *б*. Первая

ступенчатая функция принимает значение Q_1 при $t = 0$, вторая — Q_1 при $t = t_1$.

Третий метод получения того же результата, что содержится в выражении (1.67), заключается в определении перемещения и скорости системы в момент времени t_1 с помощью выражения (1.66). В результате получим

$$x_{t_1} = \frac{Q_1}{k}(1 - \cos pt_1); \qquad (е)$$

$$\dot{x}_{t_1} = \frac{Q_1 p}{k} \sin pt_1. \qquad (ж)$$

Если эти величины рассматривать как начальные перемещение и скорость, заданные в момент времени t_1, результирующее движение системы при свободных колебаниях можно представить в виде

$$x = x_1 \cos p(t - t_1) + \frac{\dot{x}_{t_1}}{p} \sin p(t - t_1). \qquad (з)$$

Подставляя значения (е) и (ж) в выражение (з), после несложных тригонометрических преобразований снова придем к полученному выше решению (1.67).

Амплитуду свободных колебаний, возникших после воздействия импульса прямоугольной формы, можно определить по формуле

$$A = \sqrt{x_{t_1}^2 + (\dot{x}_{t_1}/p)^2}. \qquad (и)$$

Подставляя в формулу (и) значения (е) и (ж), после упрощений найдем

$$A = \frac{Q_1}{k}\sqrt{2(1 - \cos pt_1)} = \frac{2Q}{k} \sin\left(\frac{pt_1}{2}\right) = \frac{2Q}{k} \sin\left(\frac{\pi t_1}{\tau}\right). \qquad (к)$$

Из последней записи выражения (к) видно, что амплитуда свободных колебаний зависит от отношения t_1/τ, где τ — период свободных колебаний системы. Взяв в качестве длительности импульса прямоугольной формы время $t_1 = \tau/2$, получим значение амплитуды $A = 2Q_1/k$. Перемещения системы во времени при действии импульса показаны на рис. 1.44, *в*. В этом случае сила Q действует в направлении перемещения от 0 до A и совершает в системе положительную по знаку работу. Когда сила начинает действовать в крайнем положении, система, в которой отсутствует демпфирование, сохраняет эту энергию, в результате чего происходят свободные колебания относительно начального перемещения $2Q/k$, соответствующего моменту времени t_1.

Рассмотрим второй специальный случай, задав длительность импульса $t_1 = \tau$. Из выражения (к) следует, что при этом амплитуда $A = 0$, а перемещения системы во времени имеют вид, показанный на рис. 1.44, *г*. В этом случае постоянная сила совершает положительную по знаку работу на перемещении от 0 до A, которая равна по величине отрицательной работе на обратном перемещении от A до 0. Поэтому полная совершаемая работа равна нулю, и система остается в покое после прекращения действия силы.

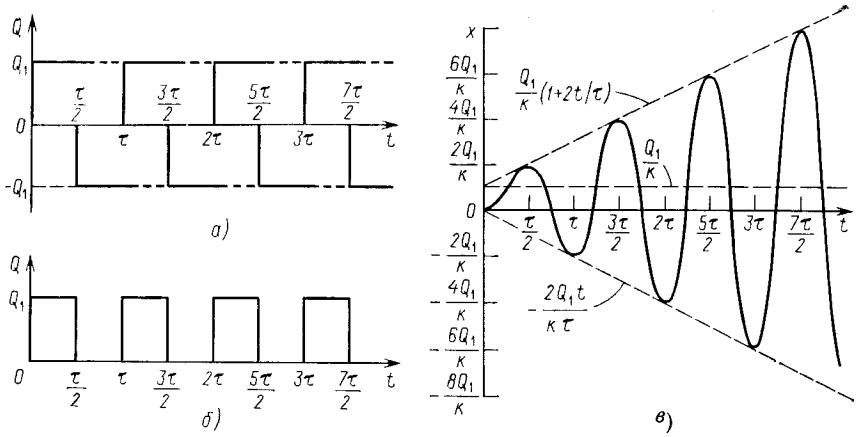


Рис. 1.45

Предположим, что ряд ступенчатых функций чередующихся знаков, действующих так, как показано на рис. 1.45, *а*, производит в результате последовательность импульсов прямоугольной формы (рис. 1.45, *б*). Пусть длительность интервала времени между смежными ступенчатыми функциями равна $\tau/2$. Тогда действие импульса будет всегда совпадать по фазе со скоростью и он будет совершать положительную работу на каждом цикле колебания. В соответствии с принципом наложения можно сделать вывод, что амплитуда свободных колебаний после n импульсов прямоугольной формы будет

$$A_n = 2nQ_1/k. \qquad (л)$$

Таким образом, при каждом цикле колебаний амплитуда увеличивается на $2Q_1/k$, в результате чего суммарное перемещение системы стремится к бесконечности. На рис. 1.45, *в* показана кривая, демонстрирующая это нарастание перемещения после нескольких первых циклов колебаний. Из сказанного можно сделать вывод, что в любой период функции возмущающей силы при совпадении частот возмущающей силы и системы будут возникать большие амплитуды вынужденных колебаний, если эта сила совершает при каждом цикле положительную работу. Таким образом, использование интеграла Дюамеля для определения перемещения системы во времени при действии обобщенной периодической возмущающей силы представляет собой метод, отличный от приведенного в п. 1.11, где динамические нагрузки были представлены в виде рядов Фурье.

Пример 1. Определить закон движения системы с одной степенью свободы без демпфирования при действии возрастающей по линейному закону силы, называемой *линейной функцией* (рис. 1.46, *а*). Скорость возрастания функции Q в единицу времени равна δQ.

Решение. В данном примере функция возмущающей силы, выраженная через δQ и t', имеет вид

$$Q = \delta Q t', \qquad (м)$$

а отнесенная к единице массы сила

$$q = \frac{\delta Q}{m} t'. \qquad (н)$$

Применительно к данному случаю выражение (1.64) дает

$$x = \frac{\delta Q}{mp} \int_0^t t' \sin p(t - t')\, dt'.$$

Тогда после интегрирования по частям получаем искомое решение

$$x = \frac{\delta Q}{k} \left(t - \frac{1}{p} \sin pt \right). \qquad (о)$$

Из полученного решения видно, что закон движения в случае возрастающей по линейному закону силы представляет собой сумму линейно возрастающего статического перемещения $\delta Qt/k$ и перемещений при свободных колебаниях с амплитудой $\delta Q/kp$ (рис. 1.46, *б*). Скорость в произвольный момент времени t равна первой производной выражения (о) по времени

$$\dot{x} = \frac{\delta Q}{k} (1 - \cos pt) = \frac{\delta Q}{k} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right). \qquad (п)$$

Таким образом, скорость равна нулю в моменты времени $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$; в те же моменты времени $\tau = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ равен нулю угол наклона кривой, описывающей зависимость перемещения от времени (см. рис. 1.46, *б*). Кроме того, в момент времени $T = \tau/2, 3\tau/2, 5\tau/2, \ldots$ скорость всегда имеет положительное значение с максимумом, равным $2\delta Q/k$.

Правая часть выражения (п) для скорости совпадает по форме с правой частью выражения (1.66) для перемещений при действии нагрузки в виде ступенчатой функции. Это объясняется тем обстоятельством, что линейно возрастающая функция пропорциональна времени, а не является постоянной величиной, не зависящей от времени. Можно также отметить, что функция возмущающей силы, изменяющейся во времени по параболическому закону, обусловливает функцию скорости, совпадающую по форме с правой частью выражения (о) для перемещений, и функцию ускорения, совпадающую по форме с правой частью выражения (п) для скорости.

Пример 2. Вновь получим выражения для перемещений при вынужденных колебаниях без демпфирования системы с одной степенью свободы, если возмущающая сила является гармонической функцией. Этот случай разбирался и подробно

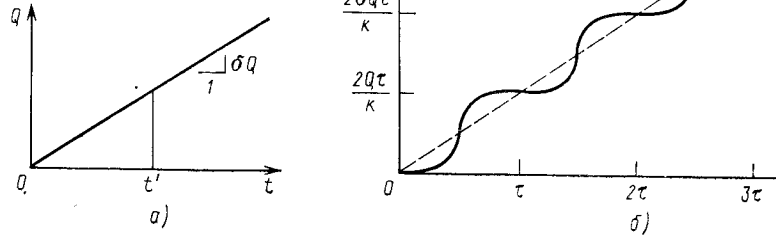


Рис. 1.46

обсуждался выше в пп. 1.6 и 1.7. Предположим, что функция возмущающей силы имеет вид

$$Q = Q_{\max} \sin \omega t'. \tag{р}$$

Силу, отнесенную к единице массы, представим в виде

$$q = q_{\max} \sin \omega t', \tag{с}$$

где $$q_{\max} = Q_{\max}/m.$$

Подставим представление (с) в выражение (1.64). Тогда получим

$$x = \frac{q_{\max}}{p} \int_0^t \sin \omega t' \sin p\,(t - t')\,dt'. \tag{т}$$

Используя тригонометрическую формулу для произведения синусов и выполняя интегрирование, приведем выражение (т) к виду

$$x = \frac{q_{\max}}{2p} \int_0^t [\cos(\omega t' - pt + pt') - \cos(\omega t' + pt - pt')]\,dt' =$$

$$= \frac{q_{\max}}{2p} \int_0^t \{\cos[(\omega + p)\,t' - pt] - \cos[(\omega - p)\,t' + pt]\}\,dt',$$

который можно интегрировать непосредственно. Выполнив интегрирование, после упрощений получим

$$x = \frac{Q_{\max}}{k} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt\right) \frac{1}{1 - \omega^2 p^2}. \tag{у}$$

Сравнивая это выражение с выражением (1.29б) в п. 1.7, видим, что они совпадают. Первый сомножитель в выражении (у) представляет статическое перемещение системы при действии постоянной нагрузки $Q_{\max}$; члены, входящие во второй сомножитель, описывают установившееся и неустановившееся поведение системы; третий сомножитель является коэффициентом усиления β при отсутствии демпфирования. Отметим, что установившаяся часть перемещений системы во времени содержится в решениях, полученных с помощью интеграла Дюамеля, если не принимаются во внимание начальные условия.

Пример 3. Для системы, показанной на рис. 1.42, *а*, определить закон движения при наличии демпфирования, если соответствующая ступенчатая функция представлена графиком на рис. 1.43, *а*.

Решение. В этом случае для нахождения закона движения при наличии демпфирования надо подставить силу, отнесенную к единице массы, $q_1 = Q_1/m$ в выражение (1.62), откуда получим

$$x = \frac{q_1 e^{-nt}}{p_д} \int_0^t e^{nt'} \sin p_д (t - t')\,dt'. \tag{ф}$$

Выражение (ф) можно проинтегрировать по частям и представить в следующем виде:

$$x = \frac{Q_1}{k} \left[1 - e^{-nt} \left(\cos p_д t + \frac{n}{p_д} \sin p_д t\right)\right]. \tag{х}$$

Полученное решение представляет собой сумму статического перемещения Q_1/k и перемещения при свободных колебаниях с демпфированием (см. п. 1.8), у которых амплитуда

$$Ae^{-nt} = \frac{Q_1}{k} e^{-nt} \sqrt{1 + \left(\frac{n}{p_д}\right)^2}, \tag{ц}$$

а фазовый угол

$$\alpha_д = \operatorname{arctg}(n/p_д). \qquad (ч)$$

Если пренебречь демпфированием, то выражение (х) совпадает с (1.66), амплитуда A становится равной Q_1/k, фазовый угол $\alpha_д$ обращается в нуль.

Пример 4. Получить выражение для кривой на рис. 1.45, *в*, описывающей поведение системы при отсутствии демпфирования для интервала времени $5\tau/2 \leqslant t \leqslant 3\tau$.

Решение. Функция возмущающей силы является периодической и имеет тот же период, что и сама система. Будем рассматривать временной интервал как период $(i-1)\tau \leqslant t \leqslant i\tau$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Общее выражение, описывающее поведение системы на первой половине i-го периода, можно записать с помощью выражения (1.66) (см. рис. 1.45, *а*), что дает

$$x_{n_1} = \frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\{1-\cos p\,[t-(i-1)\tau]\} - \frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{1-\cos p\left[t-(2i-1)\frac{\tau}{2}\right]\right\}. \qquad (ш)$$

Аналогично можно записать закон движения для второй половины n-го периода

$$x_{n_2} = \frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\cos p\,[t-(i-1)\tau]-1+\cos p\left[t-(2i-1)\frac{\tau}{2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\{\cos[pt-(2i-1)\pi]-\cos[pt-2(i-1)\pi]\}.$$

Используя тригонометрические формулы для косинусов разности двух углов, получим

$$x_{n_2} = \frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\{\cos pt\cos(2i-1)\pi+\sin pt\sin(2i-1)\pi-$$

$$-\cos pt\cos 2(i-1)\pi-\sin pt\sin 2(i-1)\pi\}.$$

Учитывая, что значения $\sin(2i-1)\pi$ и $\sin 2(i-1)\pi$ всегда равны нулю, запишем

$$x_{n_2} = \frac{Q_1}{k}\sum_{i=1}^{n}\{\cos pt\,[\cos(2i-1)\pi-\cos 2(i-1)\pi]\}.$$

Преобразования, аналогичные использованным выше, приводят окончательно к следующему выражению:

$$x_{n_2} = -\frac{2nQ_1}{k}\cos pt. \qquad (щ)$$

Временной отрезок $5\tau/2 \leqslant t \leqslant 3\tau$ соответствует второй половине третьего периода; в результате для $n = 3$ из выражения (щ) имеем

$$x_{n_2} = -\frac{6Q_1}{k}\cos pt. \qquad (э)$$

ЗАДАЧИ

1.12.1. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если функция возмущающей силы имеет вид, приведенный на рис. А.1.12.1.

Ответ:

$$x = \frac{Q_1}{k}(1 - \cos pt), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}[\cos p(t - t_1) - \cos pt] - \frac{Q_2}{k}[1 - \cos p(t - t_1)], \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}[\cos p(t - t_1) - \cos pt] - \frac{Q_2}{k}[\cos p(t - t_2) - \cos p(t - t_1)], \quad t \geqslant t_2.$$

1.12.2. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если функция возмущающей силы имеет вид, приведенный на рис. А.1.12.2.

Ответ:

$$x = \frac{Q_1}{k}\left(1 - \cos pt - \frac{t}{t_1} + \frac{\sin pt}{pt_1}\right), \quad 0 \leqslant t < t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[-\cos pt + \frac{\sin pt - \sin p(t - t_1)}{pt_1}\right], \quad t \geqslant t_1.$$

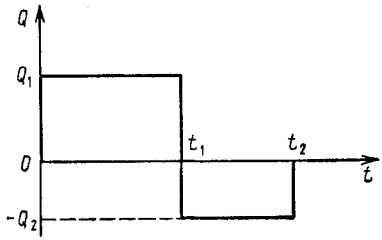


Рис. А.1.12.1

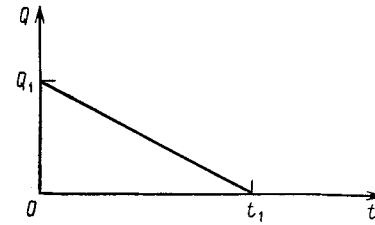


Рис. А.1.12.2

1.12.3. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если функция возмущающей силы имеет вид, показанный на рис. А.1.12.3.

Ответ:

$$x = \frac{Q_1}{k}(1 - \cos pt), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[1 - \cos pt - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} + \frac{\sin p(t - t_1)}{p(t_2 - t_1)}\right], \quad t_1 < t \leqslant t_2;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[-\cos pt + \frac{\sin p(t - t_1) - \sin p(t - t_2)}{p(t_2 - t_1)}\right], \quad t > t_2.$$

1.12.4. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если функция возмущающей силы имеет вид, приведенный на рис. А.1.12.4.

$$x = \frac{Q_1}{k}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1} - \frac{t_2(t - t_1)}{t_1(t_2 - t_1)} + \frac{t_2 \sin p(t - t_1)}{pt_1(t_2 - t_1)}\right], \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[-\frac{\sin pt}{pt_1} + \frac{t_2 \sin p(t - t_1)}{pt_1(t_2 - t_1)} - \frac{\sin p(t - t_2)}{p(t_2 - t_1)}\right], \quad t \geqslant t_2.$$

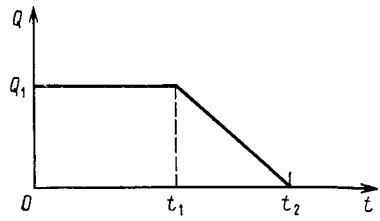


Рис. А.1.12.3

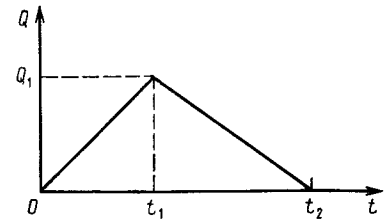


Рис. А.1.12.4

1·12.5. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если функция возмущающей силы (рис. А.1.12.5) изменяется по параболическому закону вида $Q = Q_1 (1 - t^2/t_1^2)$.

Ответ:

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[\left(1 + \frac{2}{p^2 t_1^2}\right)(1 - \cos pt) - \frac{t^2}{t_1^2}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left\{\frac{2}{p^2 t_1^2}[\cos p(t - t_1) - \cos pt] - \frac{2}{pt_1}\sin p(t - t_1) - \cos pt\right\}, \quad t \geqslant t_1.$$

1.12.6. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если функция возмущающей силы (рис. А.1.12.6) изменяется по параболическому закону вида $Q = Q_1 (t - t_1)^2/t_1^2$.

Ответ:

$$x = \frac{Q_1}{k}\left(1 - \frac{2}{p^2 t_1^2}\right)(1 - \cos pt) - \frac{2t}{t_1} + \frac{t^2}{t_1^2} + \frac{2\sin pt}{pt_1}\Big], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left\{\frac{2}{p^2 t_1^2}[\cos pt - \cos p(t - t_1)] - \cos pt + \frac{2\sin pt}{pt_1}\right\}, \quad t \geqslant t_1.$$

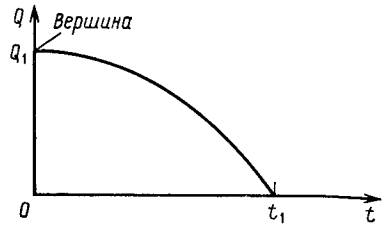


Рис. А.1.12.5

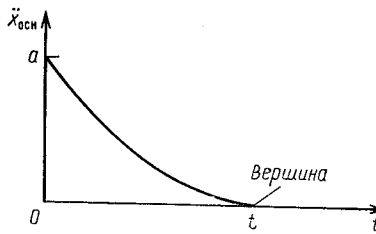


Рис. А.1.12.6

1.12.7. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если возмущающая сила описывается тригонометрической функцией $Q = Q_1 \sin[\pi t/(2t_1)]$, показанной на рис. А.1.12.7.

Ответ:

$$x = \frac{Q_1}{k}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p}\sin pt\right)\beta, \quad \omega = \frac{\pi}{2t_1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[\cos p(t - t_1) - \frac{\omega}{p}\sin pt\right]\beta, \quad t \geqslant t_1.$$

1.12.8. Определить закон движения системы с одной степенью свободы при отсутствии демпфирования, если возмущающая сила описывается тригонометрической функцией, показанной на рис. А.1.12.8.

Ответ:

$$x = \frac{Q_1}{k}[t - \cos pt - (\cos \omega t - \cos pt)\beta],$$

$$\omega = \frac{\pi}{2t_1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left\{\cos p(t - t_1) - \cos pt + \left[\cos pt + \frac{\omega}{p}\sin p(t - t_1)\right]\beta, \quad t \geqslant t_1.\right.$$

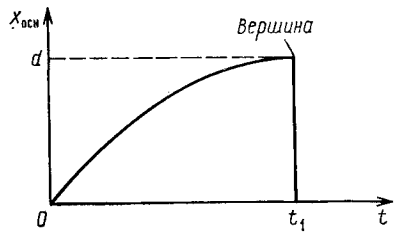


Рис. А.1.12.7

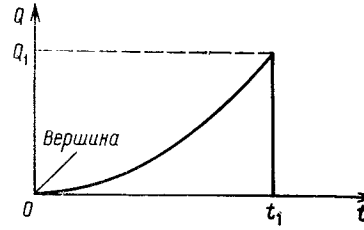


Рис. А.1.12.8

1.12.9. Для системы с одной степенью свободы (см. рис. 1.42, *а*) определить закон движения при отсутствии демпфирования и действии возмущающей силы в виде линейно возрастающей функции (см. рис. 1.46, *а*).

Ответ:

$$x = \frac{\delta Q}{k}\left[t - \frac{2n}{p^2} + e^{-nt}\left(\frac{2n}{p^2}\cos p_д t - \frac{p_д^2 - n^2}{p^2 p_д}\sin p_д t\right)\right].$$

1.13. ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ОПОРЫ

В ряде практических задач поведение колеблющейся системы обусловлено не непосредственным действием возмущающей силы, а перемещением опоры. Вынужденные колебания, вызываемые изменяющимися по гармоническому закону перемещениями и ускорениями опоры при отсутствии демпфирования и при наличии вязкого сопротивления, обсуждались соответственно в пп. 1.6 и 1.9. В данном параграфе будут рассматриваться случаи, где заданные перемещения опоры являются произвольными функциями времени.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы с демпфированием (рис. 1.47, *а*) и предположим, что перемещение опоры $x_{оп}$ является заданной аналитической функцией времени. Тогда уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{x}_{оп}) - k(x - x_{оп}), \qquad (а)$$

что после преобразования дает

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_{оп} + c\dot{x}_{оп}. \qquad (б)$$

Если выражение для перемещения $x_{оп}$ допускает дифференцирование по времени, в правой части уравнения (б) будем иметь две аналитические функции. Первая из них эквивалентна возмущающей силе, равной $kx_{оп}$ и приложенной непосредственно к массе, вторая ана-

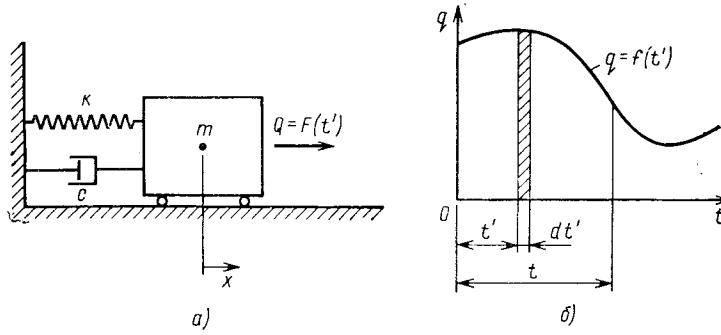


Рис. 1.47

логична силе $cx_{оп}$. Разделив обе части уравнения (б) на массу m, получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = q_{оп} = q_{оп1} + q_{оп2}, \qquad (1.68)$$

где

$$q_{оп1} = p^2x_{оп} = p^2F(t') = f(t') \qquad (в)$$

является отнесенной к единице массы эквивалентной силой, обусловленной перемещением $x_{оп}$ опоры;

$$q_{оп2} = \frac{2n}{p^2}\dot{q}_{оп1}. \qquad (г)$$

Так же, как в случае функций, описывающих возмущающие силы, предполагаем, что перемещение $x_{оп}$ и соответствующая ему сила $q_{оп1}$ являются функциями фиктивного времени t' (рис. 1.47, *б*).

С учетом сказанного дальнейшее рассмотрение проводится аналогично тому, как это делалось для функции, описывающей возмущающие силы. Однако в этом случае приращение импульса состоит из двух частей и выражение для приращения скорости в момент времени имеет вид

$$d\dot{x} = (q_{оп1} + q_{оп2})\,dt', \qquad (д)$$

где первое слагаемое представляет собой заштрихованную область на рис. 1.47, *б*. В произвольный момент времени t приращение перемещения

$$dx = e^{-n(t-t')}\frac{1}{p_д}(q_{оп1} + q_{оп2})\sin p_д(t-t')\,dt'. \qquad (е)$$

В силу того, что перемещение опоры оказывает непрерывное влияние, суммарное перемещение массы принимает вид

$$x = x_1 + x_2 = \frac{e^{-nt}}{p_д}\int_0^t e^{nt'}(q_{оп1} + q_{оп2})\sin p_д(t-t')\,dt', \qquad (1.69)$$

что является более полным выражением для интеграла Дюамеля, чем приводившееся ранее выражение (1.62) в п. 1.12.

Если не учитывать демпфирования, получим $n = 0$ и $p_д = p$, и тогда выражение (1.69) упрощается до

$$x = \frac{1}{p}\int_0^t q_{оп1} \sin p(t-t')\,dt' = p\int_0^t x_{оп} \sin p(t-t')\,dt'. \qquad (1.70)$$

Здесь первое выражение совпадает по форме с выражением (1.64) из п. 1.12.

Рассмотрим далее случай заданного ускорения $\ddot{x}_{оп}$ опоры. Так же, как это было сделано в п. 1.6 при рассмотрении вынужденных колебаний, воспользуемся следующим преобразованием координат:

$$x^* = x - x_{оп};\quad \dot{x}^* = \dot{x} - \dot{x}_{оп};\quad \ddot{x}^* = \ddot{x} - \ddot{x}_{оп}, \qquad (ж)$$

где через x^* обозначено перемещение массы относительно опоры. Подставляя выражения (ж) для x—$x_{оп}$, $\dot{x} - \dot{x}_{оп}$ и $\ddot{x}$ в уравнение (а), после преобразования получим

$$m\ddot{x}^* + c\dot{x}^* + kx^* = -m\ddot{x}_{оп}. \qquad (з)$$

Стоящий в правой части член этого уравнения эквивалентен возмущающей силе $-m\ddot{x}_{оп}$, действующей непосредственно на массу. Если уравнение (з) разделить на m, найдем

$$\ddot{x}^* + 2n\dot{x}^* + kx^* = q^*_{оп}, \qquad (1.71)$$

где

$$q^*_{оп} = -\ddot{x}_{оп} = -f(t') \qquad (и)$$

является функцией, описывающей в относительных координатах возмущающую силу, обусловленную ускорением опоры.

Уравнение (1.71) аналогично (1.61) из п. 1.12. Отсюда можно сделать вывод, что динамическое поведение системы в относительных координатах совпадает по форме с рассмотренными в предыдущих случаях. В данном случае интеграл Дюамеля для перемещения относительно опоры при наличии демпфирования имеет вид

$$x^* = \frac{e^{-nt}}{p_д}\int_0^t e^{nt'} q^*_{оп} \sin p_д(t-t')\,dt'. \qquad (1.72)$$

Если демпфирование отсутствует, решение (1.72) принимает более простой вид

$$x^* = \frac{1}{p}\int_0^t q^*_{оп} \sin p(t-t')\,dt'. \qquad (1.73)$$

Добавим, что абсолютное динамическое перемещение системы можно определить в том случае, если заданы начальные условия относительно перемещения и скорости опоры.

Пример 1. Предположим, что опора (см. рис. 1.47, *а*) внезапно сдвинулась вправо в соответствии со ступенчатой функцией, показанной на рис. 1.48. Определить закон поведения системы в условиях отсутствия демпфирования при внезапном смещении опоры.

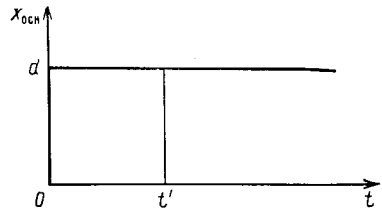


Рис. 1.48

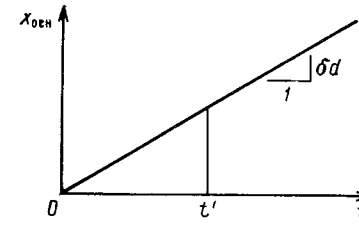


Рис. 1.49

Решение. В этом случае из выражения (в) имеем $q_{оп1} = p^2 d = \text{const}$, и тогда решение (1.70) для случая отсутствия демпфирования принимает вид

$$x = pd \int_0^t \sin p\,(t - t')\,dt' = d\,(1 - \cos pt), \qquad (к)$$

который совпадает с выражением (1.66), за исключением того, что множитель Q_1/k заменен постоянной d. Таким образом, видим, что движение представляет собой свободные колебания с амплитудой d, наложенные на статическое перемещение той же величины.

Пример 2. В качестве иллюстрации использования решения (1.69) рассмотрим перемещение опоры в виде линейно возрастающей функции (рис. 1.49). Угол наклона прямой линии на рисунке равен отношению δd к единице времени. Требуется получить выражение для обусловленного перемещением опоры движения системы с демпфированием (см. рис. 1.47, *а*).

Решение. Перемещение опоры, выраженное через t' и δd:

$$x_{оп} = t'\delta d, \qquad (л)$$

поэтому функция $q_{оп1}$, описывающая возмущающую силу в выражении (в), принимает вид

$$q_{оп1} = p^2 t'\delta d. \qquad (м)$$

Вторую часть эквивалентной силы, отнесенной к единице массы, представляем выражением (г):

$$q_{оп2} = 2n\delta d. \qquad (н)$$

Подставляя выражения (м) и (н) для $q_{оп1}$ и $q_{оп2}$ в решение (1.69), получаем

$$x = x_1 + x_2 = \frac{\delta d e^{-nt}}{p_д} \int_0^t e^{nt'} \left(p^2 t' + 2n\right) \sin p\,(t - t')\,dt'. \qquad (о)$$

После интегрирования первая часть решения принимает вид

$$x_1 = \frac{\delta d}{p^2} \left\{ p^2 t - 2n + e^{-nt} \left[2n \cos p_д t + \frac{1}{p_д} \left(n^2 - p_д^2\right) \sin p_д t \right] \right\}, \qquad (п)$$

а для второй части имеем

$$x_2 = 2n\delta d \left[1 - e^{-nt} \left(\cos p_д t + \frac{n}{p_д} \sin p_д t \right) \right]. \qquad (р)$$

Полученное выражение для первой части решения характеризует поведение, аналогичное показанному на рис. 1.46, *б*, но только в этом случае колебания постепенно затухают. Если пренебречь демпфированием, то выражение (п) сводится к (о) из п. 1.12, когда вместо δd берем $\delta Q/k$. Кроме того, выражение (р) для второй части решения совпадает с (х) из п. 1.12, если $2n\delta d$ заменить на Q_1/k.

Пример 3. Предположим, что на рис. 1.49 наклонная прямая описывает не перемещение опоры, а ее ускорение $\ddot{x}_{оп}$ и что угол наклона прямой равен отношению δa

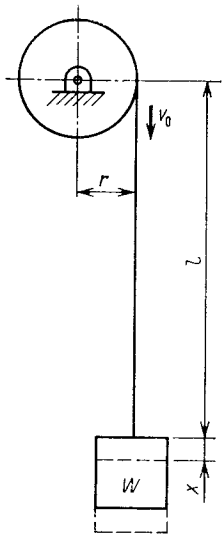


Рис. 1.50

к единице времени. Пусть известно, что в момент времени $t = 0$ заданы начальные условия относительно перемещения x_0 опоры и ее скорости $\dot{x}_0$. Для системы с одной степенью свободы без демпфирования определить обусловленный движением опоры закон абсолютного перемещения в момент времени t.

Решение. В этом случае функция, описывающая возмущающую силу, согласно выражению (и) имеет вид

$$q^*_{\text{оп}} = -t'\delta a. \qquad \text{(с)}$$

Подставляя это выражение в решение (1.73), получим

$$x^* = -\frac{\delta a}{p}\int_0^t t' \sin p\,(t-t')\,dt'. \qquad \text{(т)}$$

Интегрируя выражение (т), найдем перемещение в относительных координатах при отсутствии демпфирования

$$x^* = -\frac{\delta a}{p^2}\left(t - \frac{1}{p}\sin pt\right), \qquad \text{(у)}$$

а также скорость движения

$$\dot{x}^* = -\frac{\delta a}{p^2}(1-\cos pt). \qquad \text{(ф)}$$

Полное решение представляет сумму перемещения опоры и относительного перемещения. Таким образом, учитывая выражение (ж) и начальные условия, найдем абсолютную скорость движения

$$\dot{x} = \dot{x}_{\text{оп}} + \dot{x}^* = \dot{x}_{\text{оп0}} + \int_0^t \ddot{x}_{\text{оп}}\,dt' + \dot{x}^* =$$

$$= \dot{x}_{\text{оп0}} + \delta a\left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{p^2}(1-\cos pt)\right] \qquad \text{(х)}$$

и абсолютное перемещение

$$x = x_{\text{оп}} + x^* = x_{\text{оп0}} + \dot{x}_{\text{оп0}}t + \int_0^t \dot{x}_{\text{оп}}\,dt' + x^* =$$

$$= x_{\text{оп0}} + \dot{x}_{\text{оп0}}t + \delta a\left[\frac{t^3}{6} - \frac{1}{p^2}\left(t - \frac{1}{p}\sin pt\right)\right]. \qquad \text{(ц)}$$

Пример 1. Лифтовая кабина весом W без демпфера (рис. 1.50) подвешена на гибком тросе с площадью поперечного сечения A и модулем упругости E. Кабина опускается вниз с постоянной скоростью v_0, когда в лебедке включается тормоз, что вызывает угловое ускорение, равное a/r, где r — радиус подъемного барабана. При этом условии трос перестанет раскручиваться через промежуток времени, равный v_0/a, считая от момента времени $t = 0$, когда был включен тормоз. Найти перемещение x кабины за интервал времени $0 \leqslant t \leqslant v_0/a$, полагая, что в момент времени $t = 0$ длина свободно висящего троса равна l и она не меняется при торможении.

Решение. Данный пример представляет собой случай, когда задано постоянное (равное $-a$) ускорение опоры. Тогда согласно выражению (1.73) при отсутствии демпфирования перемещение кабины в относительных координатах имеет вид

$$x^* = \frac{a}{p}\int_0^t \sin p\,(t-t')\,dt' = \frac{a}{p^2}(1-\cos pt). \qquad \text{(ч)}$$

Как и в предыдущем примере, это перемещение в относительных координатах можно сложить с перемещением верхнего конца троса и тем самым получить выражение для суммарной реакции

$$x = x_{\text{оп}} + x^* = v_0 t - a\left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{p^2}(1 - \cos pt)\right]. \qquad \text{(ш)}$$

Разумеется, действительные конструкции лифтов таковы, что тормозные устройства включаются более плавно, а любая склонность к колебаниям подавляется соответствующими амортизаторами.

ЗАДАЧИ

1.13.1. Определить закон движения системы с одной степенью свободы без демпфирования, если перемещение опоры задано в виде, показанном на рис. А.1.13.1

Ответ:

$$x = d\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = d\left[\frac{\sin p(t - t_1) - \sin pt}{pt_1} + \cos p(t - t_1)\right], \quad t \geqslant t_1.$$

1.13.2. Определить закон движения системы с одной степенью свободы и без демпфирования, если ускорение опоры задано в виде, показанном на рис. А.1.13.2.

Ответ:

$$x^* = -\frac{a}{p^2}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x^* = -\frac{a}{p^2}\left(1 + \frac{\sin p(t - t_1) - \sin pt}{pt_1}\right), \quad t \geqslant t_1.$$

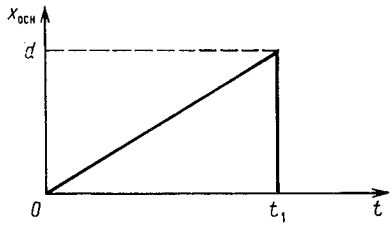


Рис. А.1.13.1

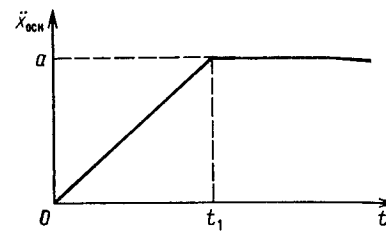


Рис. А.1.13.2

1.13.3. Определить закон движения системы с одной степенью свободы и без демпфирования, если перемещение опоры задано в виде, показанном на рис. А.1.13.3.

Ответ:

$$x = d_1(1 - \cos pt) - (d_1 + d_2)\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = -d_1 \cos pt - d_2 \cos p(t - t_1) - \frac{d_1 + d_2}{pt_1}[\sin p(t - t_1) - \sin pt], \quad t \geqslant t_1.$$

1.13.4. Определить закон движения системы с одной степенью свободы и без демпфирования, если ускорение опоры задано в виде, показанном на рис. А.1.13.4.

Ответ:

$$x^* = -\frac{a_1}{p^2}(1 - \cos pt) - \frac{a_2 - a_1}{p^2}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x^* = -\frac{a_1}{p^2}[\cos p(t - t_1) - \cos pt] -$$

$$-\frac{a_2 - a_1}{p^2}\left[\frac{\sin p(t - t_1) - \sin pt}{pt_1} + \cos p(t - t_1)\right], \quad t \geqslant t_1.$$

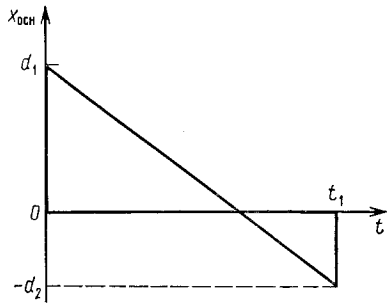


Рис. А.1.13.3

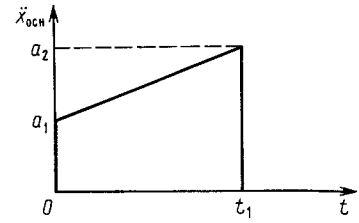


Рис. А.1.13.4

1.13.5. Определить закон движения системы с одной степенью свободы без демпфирования, если перемещение опоры задается, как показано на рис. А.1.13.5, в виде параболической функции вида

$$x_{оп} = d\left[1 - (t - t_1)^2/t_1^2\right].$$

Ответ:

$$x = d\left[\frac{2}{p^2 t_1^2}(1 - \cos pt - pt_1 \sin pt) + \frac{2t}{t_1} - \frac{t^2}{t_1^2}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = d\left\{\frac{2}{p^2 t_1^2}[\cos p(t - t_1) - \cos pt - pt_1 \sin pt] + \cos p(t - t_1)\right\}, \quad t \geqslant t_1.$$

1.13.6. Определить реакцию системы с одной степенью свободы без демпфирования, если ускорение опоры задается, как показано на рис. А.1.13.6, в виде параболической функции вида $\ddot{x}_{оп} = at^2/t_1^2$.

Ответ:

$$x^* = -\frac{a}{p^2}\left[\frac{t^2}{t_1^2} - \frac{2}{p^2 t_1^2}(1 - \cos pt)\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x^* = -\frac{a}{p^2}\left\{\frac{2}{p^2 t_1^2}[\cos pt - \cos p(t - t_1) + pt_1 \sin p(t - t_1)] + \cos p(t - t_1)\right\}, \quad t \geqslant t_1.$$

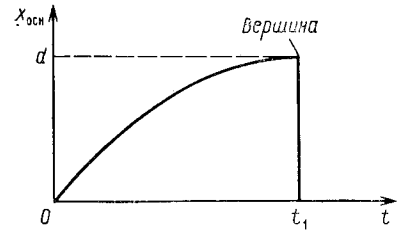


Рис. А.1.13.5

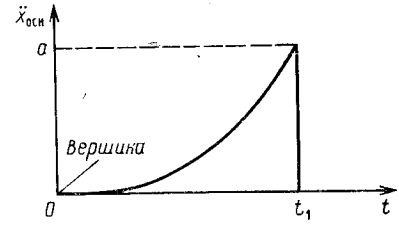


Рис. А.1.13.6

1.13.7. Определить закон движения системы с одной степенью свободы без демпфирования, если перемещение опоры задается, как показано на рис. А.1.13.7, в виде тригонометрической функции $x_{оп} = d \cos \pi t/2t_1$.

Ответ:

$$x = d(\cos \omega t - \cos pt)\,\beta, \quad \omega = \pi/2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x = -d\,[\cos pt + (\omega/p) \sin p(t - t_1)]\,\beta, \quad t \geqslant t_1.$$

1.13.8. Определить закон движения системы с одной степенью свободы без демпфирования, если ускорение опоры задается, как показано на рис. А.1.13.8, в виде тригонометрической функции $\ddot{x}_{оп} = a\,[1 - \sin(\pi t/2t_1)]$.

Ответ:

$$x^* = -\frac{a}{p^2}\left[1 - \cos pt - \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p}\sin pt\right)\beta\right], \quad \omega = \frac{\pi}{2t_1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$x^* = -\frac{a}{p^2}\left\{\cos p\,(t - t_1) - \cos pt - \left[\cos p\,(t - t_1) - \frac{\omega}{p}\sin pt\right]\beta\right\}, \quad t \geqslant t_1.$$

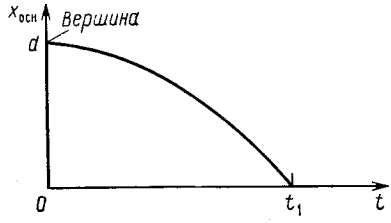


Рис. А.1.13.7

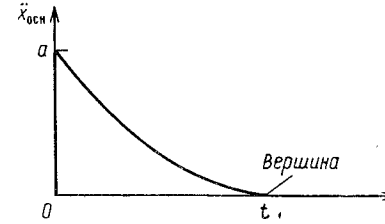


Рис. А.1.13.8

1.13.9. Используя решение, полученное в примере 4, для показанной на рис. 1.50 системы без демпфирования, определить амплитуду свободных колебаний, которые будет совершать кабина лифта после затормаживания подъемного механизма.

Ответ:

$$A^* = \frac{\sqrt{2}a}{p^2}\sqrt{1 - \cos\frac{pv_0}{a}}.$$

1.14. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Импульсные воздействия, рассмотренные в пп. 1.12 и 1.13, вызывали колебательные движения упругих систем; максимальные значения возникающих при этом перемещений могли быть или меньшими, или равными, или большими, чем соответствующие перемещения при статическом нагружении. В общем случае максимальное значение динамического перемещения зависит от характеристик системы и от природы нагрузки. Для системы с одной степенью свободы без демпфирования период (или частота) собственных колебаний является характеристикой, которая определяет характер поведения системы при действии заданной возмущающей силы. Кроме того, форма и длительность импульса возмущающей силы сами по себе оказывают важное влияние на характеристики системы. Графики зависимости максимальных значений перемещений от некоторых параметров системы или функции возмущающей силы называются *частотной характеристикой*. Такие зависимости представляют интерес для конструкторов, поскольку они позволяют предсказать отношение максимального значения динамического напряжения, возникающего в конструкции, к соответствующему статическому напряжению. Представляет интерес также и время, когда возникает максимальное значение динамического перемещения си-

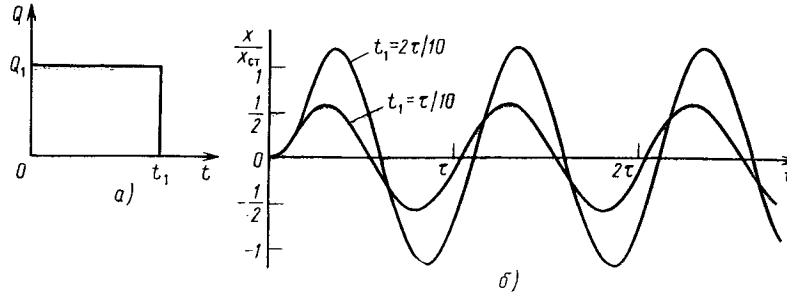


Рис. 1.51

стемы, поэтому в данном параграфе будут обсуждаться как эта зависимость, так и частотная характеристика.

Рассмотрим импульс прямоугольной формы, показанный на рис. 1.51, *а* и уже подробно обсужденный в п. 1.12. В данном параграфе положим, что импульс прямоугольной формы длительностью $t_1 = \tau/2$ таков, что способен вызвать максимальное значение перемещения $x_м = 2Q/k$. Это максимальное значение равно тому, что имеет место при внезапном приложении силы Q_1 бесконечной длительности (в виде ступенчатой функции). Таким образом, импульсу прямоугольной формы, длительность которого превышает $\tau/2$, всегда будет соответствовать перемещение, максимальное значение которого в 2 раза превышает перемещение системы при статическом нагружении. Используя обозначение

$$x_{ст} = Q_1/k, \tag{а}$$

в указанном случае можем считать

$$x_м/x_{ст} = 2, \quad t \geqslant \tau/2. \tag{б}$$

Если длительность импульса прямоугольной формы меньше, чем $\tau/2$, максимальное значение перемещения будет меньше, чем $2x_{ст}$. Примеры, иллюстрирующие сказанное, приведены на рис. 1.51, *б*, где представлены зависимости перемещений при $t_1 = \tau/10$ и $t_1 = 2\tau/10$. Во всех подобных случаях перемещение приобретает максимальное значение после завершения действия импульса, поскольку скорость на интервале времени t_1 является положительной [см. выражение (ж) в п. 1.12]. Отсюда следует, что для нахождения максимального значения перемещения, а также момента времени, когда оно возникает, нужно рассмотреть выражение (1.67) для $t \geqslant t_1$. Это выражение можно переписать в безразмерной форме

$$\frac{x}{x_{ст}} = \cos p(t - t_1) - \cos pt. \tag{в}$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$\frac{\dot{x}}{x_{ст}} = p[\sin pt - \sin p(t - t_1)]. \tag{г}$$

Приравнивая выражение, стоящее в скобках, нулю, получим уравнение для времени $t_м$ возникновения максимального значения перемещения

$$\sin pt_м = \sin p(t_м - t_1), \qquad (д)$$

откуда находим

$$pt_м = \frac{\pi}{2} + \frac{pt_1}{2}. \qquad (е)$$

Из решения (е) следует, что время $t_м$ линейно зависит от t_1. Кроме того, поскольку интерес представляют значения pt_1, относящиеся к области $0 \leqslant pt_1 \leqslant \pi$, то соответствующей областью для $pt_м$ является $\pi/2 \leqslant pt_м \leqslant \pi$. Подставляя выражение для $pt_м$, получаемое из (е), вместо значений pt, стоящих в (в), найдем

$$\frac{x_м}{x_{ст}} = 2\sin\frac{pt_1}{2} = \sqrt{2(1-\cos pt_1)}. \qquad (ж)$$

Выражение (ж) совпадает с выражением (3) из п. 1.12, которое было получено с помощью другого подхода. Таким образом, спектральная характеристика для импульсов прямоугольной формы может быть представлена в следующем виде:
при $0 \leqslant t_1/\tau \leqslant t/2$ имеем

$$\frac{x_м}{x_{ст}} = 2\sin\frac{\pi t_1}{\tau}; \qquad (1.74а)$$

$$\frac{t_м}{\tau} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2t_1}{\tau}\right), \qquad (1.74б)$$

при $t_1/\tau \geqslant 1/2$ имеем

$$\frac{x_м}{x_{ст}} = 2; \qquad (1.74в)$$

$$\frac{t_м}{\tau} = \frac{1}{2}. \qquad (1.74г)$$

Графики безразмерных зависимостей $x_м/x_{ст}$ и $t_м/\tau$ от t_1/τ представлены на рис. 1.52, *а* и *б*. Из выражения (1.74а) видно, что если длительность импульса меньше, чем $\tau/6$, динамическое перемещение будет меньше обусловленного статическим приложением нагрузки. С другой стороны, если длительность импульса лежит между $\tau/6$ и $\tau/2$, отношение $x_м/x_{ст}$ располагается между 1 и 2. Разумеется, когда $t_1 \geqslant \tau/2$, значение $x_м/x_{ст}$ всегда равно 2.

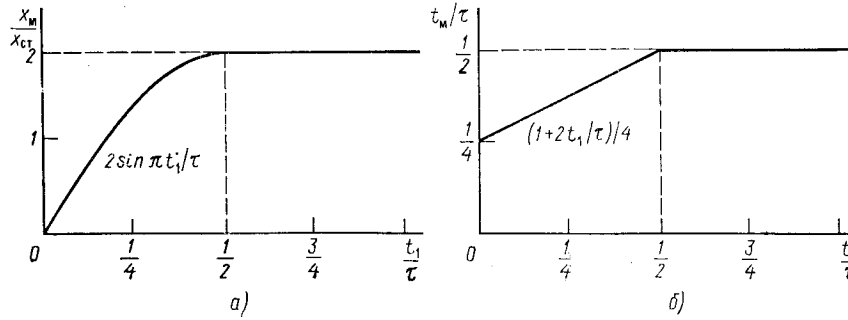


Рис. 1.52

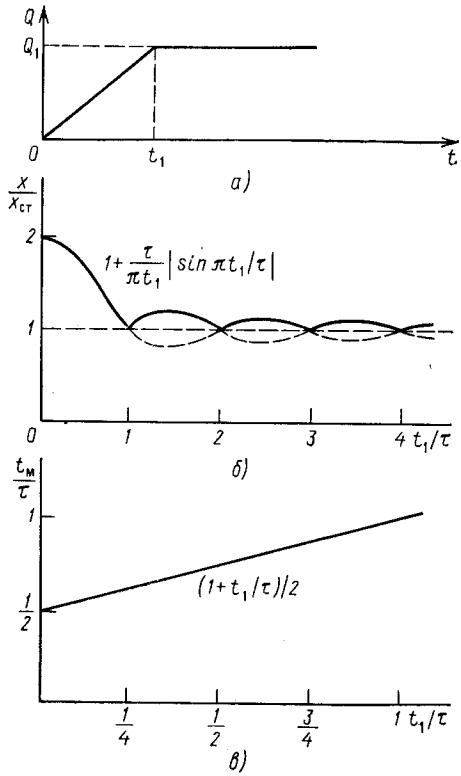


Рис. 1.53

В свете сказанного представляет интерес то обстоятельство, что график зависимости коэффициента усиления для вынужденных колебаний представляет собой спектральную характеристику в соответствии с определением, приведенным в данном параграфе. На рис. 1.33 в п. 1.9 представлено семейство кривых зависимости $\beta = x_м/x_{ст}$ от отношения частот ω/p. Следует напомнить, что кривые относились только к установившейся части поведения системы и построены были для различных значений коэффициентов демпфирования. Если бы при этом были учтены неустановившиеся части перемещений при колебаниях, то кривые спектральных характеристик (см. рис. 1.33) располагались бы несколько выше, но незначительно. Более того, хотя демпфирование имеет большое значение в задачах о вынужденных колебаниях, оно часто не учитывается при рассмотрении спектральных характеристик, обусловленных импульсными воздействиями.

Низкие значения коэффициентов демпфирования имеют незначительное влияние на указанные максимальные амплитуды, которые возникают еще до того, как рассеется значительная часть энергии. Однако в семействе кривых, описывающих спектральные характеристики при демпфировании, каждая кривая, которая соответствует значению коэффициента демпфирования, может быть всегда построена для возмущающей силы произвольного вида. Для простых случаев это можно сделать, используя при решении соответствующие аналитические выражения для функций, но в более сложных случаях следует прибегать к численным подходам.

Пример 1. На рис. 1.53, *а* представлена функция, описывающая возмущающую силу, линейно изменяющуюся от нуля до Q_1 за время t_1, а затем остающуюся постоянной. Перемещение системы с одной степенью свободы и без демпфирования при действии указанной возмущающей силы представляется в следующем виде (см. задачу 1.13.2):

$$x = \frac{Q_1}{k}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right); \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1; \tag{з}$$

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[1 + \frac{\sin p(t-t_1) - \sin pt}{pt_1}\right], \quad t \geqslant t_1. \tag{и}$$

Определить для указанного случая спектральные характеристики и соответствующие временные функции.

Решение. Из выражений (з) и (и) видно, что максимальное значение перемещения будет иметь место после времени t_1. Таким образом, здесь представляет интерес только выражение (и), которое перепишем в безразмерном виде

$$\frac{x}{x_{ст}} = \frac{1}{pt_1}[pt_1 + \sin p(t - t_1) - \sin pt]. \qquad (к)$$

Дифференцируя выражение (к) по времени, получим

$$\frac{\dot{x}}{x_{ст}} = \frac{1}{t_1}[\cos p(t - t_1) - \cos pt]. \qquad (л)$$

Полагая выражение, стоящее в квадратных скобках, равным нулю, получим уравнение относительно времени

$$\cos pt_м = \cos p(t_м - t_1), \qquad (м)$$

откуда найдем

$$pt_м = \pi + \frac{pt_1}{2}. \qquad (н)$$

Как и в ранее полученном случае, время $t_м$ линейно зависит от t_1. Кроме того, из выражения (м) следует, что величина $pt_м$ принимает значения в интервале $pt_м > \pi$. Подставляя решение (н) в выражение (к), получим

$$\frac{x_м}{x_{ст}} = 1 + \frac{2}{pt_1}\sin\frac{pt_1}{2} = 1 \pm \frac{1}{pt_1}\sqrt{2(1 - \cos pt_1)}. \qquad (о)$$

Это выражение дает как максимальные, так и минимальные значения $x_м/x_{ст}$, которые зависят от величины pt_1. Для максимальных значений этих величин в интервале $t \geqslant t_1$ имеем

$$\frac{x_м}{x_{ст}} = 1 + \frac{\tau}{\pi t_1}\left|\sin\frac{\pi t_1}{\tau}\right|; \qquad (п)$$

$$\frac{t_м}{\tau} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_1}{\tau}\right). \qquad (р)$$

На рис. 1.53, *б* и *в* представлены графики соответственно для выражений (п) и (р). Как видно из этой частотной характеристики (см. рис. 1.53, *б*), наибольшее значение $x_м/x_{ст} = 2$ возникает при $t = 0$, что соответствует случаю ступенчатой функции. При $t_1 \leqslant \pi/4$ величина $x_м/x_{ст}$ приблизительно равна 2, что не намного отличается от случая ступенчатой функции. Поскольку практически невозможно получить равный нулю отрезок времени, интересно указать, что бесконечно малый, но конечный отрезок времени приводит практически к тому же результату. При $t_1 \geqslant \tau$ величина $x_м$ не намного превышает значение $x_{ст}$, а при достаточно большом отрезке времени нагрузку, по существу, можно рассматривать как статическую.

Пример 2. Рассмотрим случай импульса прямоугольной формы (см. рис. 1.51, *а*), воздействующего на систему с одной степенью свободы и демпфированием (см. рис. 1.42, *а*). Указанную функцию для возмущающей силы можно представить в виде суммы ступенчатой функции (равной Q_1), заданной в момент времени $t = 0$, и второй ступенчатой функции (равной $-Q_1$), заданной в момент времени $t = t_1$. Таким образом, безразмерные перемещения (при $t \geqslant t_1$) системы с демпфированием могут быть описаны выражением (см. пример 3 из п. 1.12)

$$\frac{x}{x_{ст}} = e^{-n(t-t_1)}\left[\cos p_д(t - t_1) + \frac{n}{p_д}\sin p_д(t - t_1)\right] -$$

$$- e^{-nt}\left(\cos p_д t + \frac{n}{p_д}\sin p_д t\right). \qquad (с)$$

Требуется получить выражения для частотной характеристики и времени возникновения максимальных значений перемещений.

Решение. Выражение (с) можно упростить, используя тригонометрические формулы, и тогда после преобразований получим

$$\frac{x}{x_{ст}} = e^{-nt}\,(A\cos p_д t + B\sin p_д t), \qquad (т)$$

где

$$A = e^{nt_1}\left(\cos p_д t_1 - \frac{n}{p_д}\sin p_д t_1\right) - 1; \qquad (у)$$

$$B = e^{nt_1}\left(\sin p_д t_1 - \frac{n}{p_д}\cos p_д t_1\right) - \frac{n}{p_д}. \qquad (ф)$$

Дифференцируя выражение (т) по времени и приравнивая результат нулю, найдем

$$t_м = \frac{1}{p_д}\operatorname{arctg}\left(\frac{p_д B - nA}{p_д A - nB}\right); \qquad (х)$$

$$\sin p_д t_м = \frac{p_д B - nA}{C}; \quad \cos p_д t_м = \frac{p_д A + nB}{C}, \qquad (ц)$$

где $C = (p_д^2 + n^2)\,(A^2 + B^2)$.

Подставляя представления (ц) в выражение (т), после приведения подобных членов получим

$$\frac{x}{x_{ст}} = e^{-nt_м}\sqrt{1 + e^{2nt_1} - 2e^{nt_1}\cos p_д t_1}. \qquad (ч)$$

Когда постоянная демпфирования полагается равной нулю, выражение (ч) принимает тот же вид, что и (ж) для случая отсутствия демпфирования.

Описанные в данном параграфе примеры приводят к простым выражениям для отношений $t_м/\tau$ и $\dot{x}_м/x_{ст}$, но не следует забывать, что они относятся к исключительным случаям. В общем же случае трудно определить интервал времени, в течение которого возникнет максимальное значение перемещений в системе. Кроме того, уравнение относительно отношения $t_м/\tau$ может быть решено простыми способами. Поэтому значения $x_м/x_{ст}$ и $t_м/\tau$ надо получать с помощью метода последовательных приближений, задавая последовательные значения для безразмерного времени t_1/τ. Для каждого значения t_1/τ_1 можно построить график зависимости $x/x_{ст}$ от t/τ, откуда получить значения $x_м/x_{ст}$ и $t_м/\tau$.

ЗАДАЧИ

1.14.1. Построить графики для частотной характеристики и времени $t_м/\tau$ появления максимальных значений перемещений в зависимости от t_1/τ для показанной на рис. А.1.14.1 функции возмущающей силы (представление для перемещений взять из задачи 1.13.1).

1.14.2. Задачу 1.14.1 решить для показанной на рис. А.1.14.2 функции возмущающей силы (представление для перемещений взять из задачи 1.12.4).

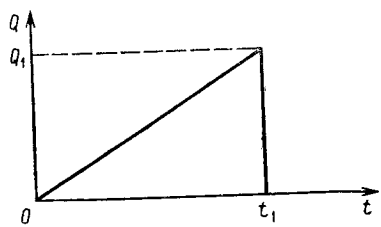


Рис. А.1.14.1

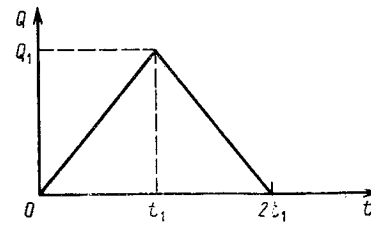


Рис. А.1.14.2

1.14.3. Задачу 1.14.1 решить для показанной на рис. А.1.14.3 функции возмущающей силы (представление для перемещений взять из задачи 1.13.4).

1.14.4. Задачу 1.14.1 решить для показанной на рис. А.1.14.4 функции возмущающей силы (представление для перемещений взять из задачи 1.12.3).

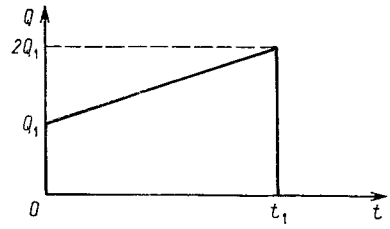


Рис. А.1.14.3

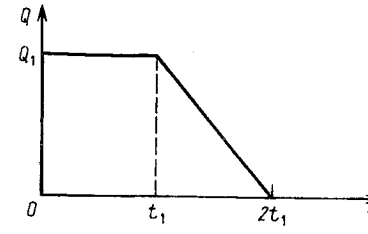


Рис. А.1.14.4

1.14.5. Задачу 1.14.1 решить для показанной на рис. А.1.14.5 параболической функции вида $Q = Q_1 t^2/t_1^2$ (представление для перемещений взять из задачи 1.13.6).

1.14.6. Задачу 1.14.1 решить для показанной на рис. А.1.14.6 параболической функции возмущающей силы вида $Q = Q_1\,(1 = t^2/t_1^2)$ (представление для перемещений взять из задачи 1.12.5).

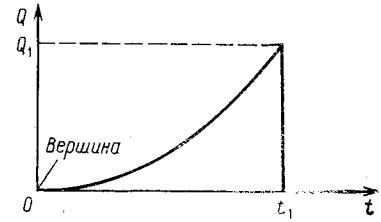


Рис. А.1.14.5

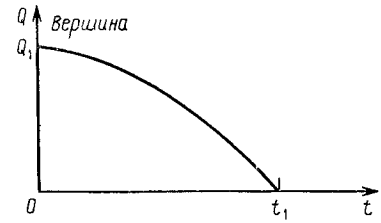


Рис. А.1.14.6

1.14.7. Задачу 1.14.1 решить для показанной на рис. А.1.14.7 тригонометрической функции возмущающей силы вида $Q = Q_1 \cos \pi t/(2t_1)$ (представление для перемещений взять из задачи 1.13.7).

1.14.8. Задачу 1.14.1 решить для показанной на рис. А.1.14.8 тригонометрической функции возмущающей силы вида $Q = Q_1 \sin \pi t/(2t_1)$ (представление для перемещений при $0 \leqslant t \leqslant 2t_1$ взять из задачи 1.12.7; причем эту формулу надо получить также для времени $t \geqslant 2t_1$).

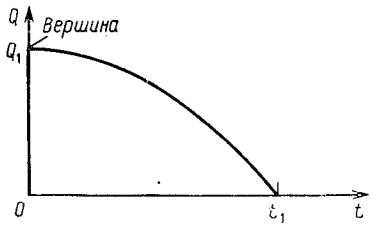


Рис. А.1.14.7

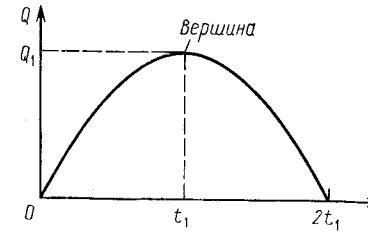


Рис. А.1.14.8

1.14.9. Построить график для безразмерных перемещений $x/x_{ст}$ и для времени $t_м/t$ появления максимальных значений перемещений в зависимости от t_1/τ для рассмотренного в примере 2 случая с демпфированием, взяв коэффициент демпфирования $\gamma = 0{,}1$.

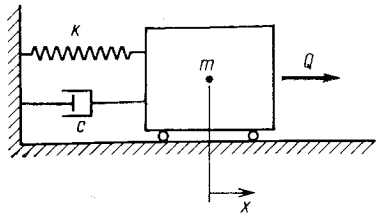


Рис. 1.54

1.15. ЧИСЛЕННЫЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Во многих важных для практики задачах функции, описывающие возмущающие силы, не удается выразить в аналитическом виде, поэтому их представляют либо в виде набора точек на диаграмме, либо в виде таблиц. В подобных случаях иногда можно аппроксимировать исходные данные с помощью формул, применяемых в методах построения кривых по точкам, и затем подставлять полученные зависимости в интеграл Дюамеля. Однако более общий подход для определения динамического поведения систем состоит в использовании некоторых простых интерполяционных функций в периодически повторяющихся сериях вычислений. Последний упомянутый метод численного исследования и будет обсуждаться в данном параграфе применительно к нескольким типам интерполирующих функций.

Предположим, что на систему с одной степенью свободы с демпфированием (рис. 1.54) действует сила Q, изменяющаяся во времени некоторым произвольным образом, аналогичным показанному на рис. 1.55. Эту непрерывную функцию, описывающую возмущающую силу, можно приближенно представить в виде набора ступенчатых функций с различными значениями в различные моменты времени, как показано на рис. 1.55. Первое значение ступенчатой функции равно ΔQ_0 в момент времени $t = 0$, второе — ΔQ в момент времени

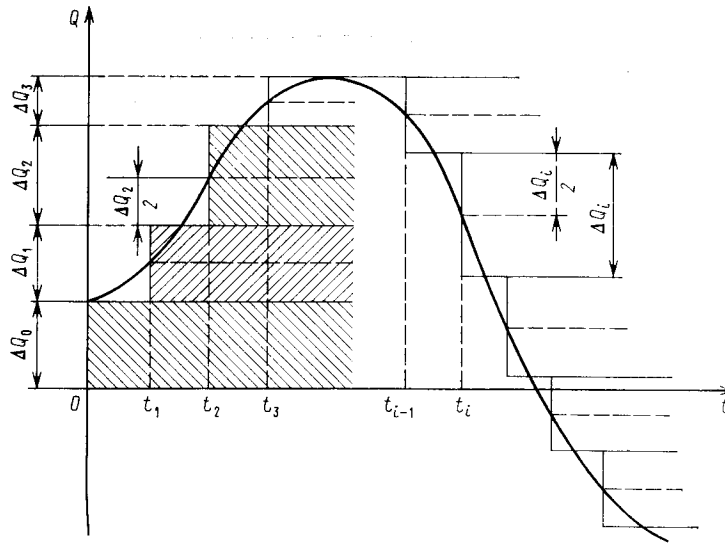


Рис. 1.55

$t = t_1$ и т. д. В произвольный интервал времени $t_{i-1} \leqslant t < t_i$ динамическое поведение системы при воздействии возмущающей силы, представляемой указанной ступенчатой функцией, можно описать выражением (ем. пример 3 из п. 1.12)

$$x = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{i-1} \Delta Q_j \left\{ 1 - e^{-n(t-t_i)} \left[\cos p_д (t - t_j) + \frac{n}{p_д} \sin p_д (t - t_j) \right] \right\}. \tag{1.75а}$$

В момент времени t_i это перемещение

$$x_i = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{i-1} \Delta Q_j \{ 1 - e^{-n(t_i - t_j)} \left[\cos p_д (t_i - t_j) + \frac{n}{p_д} \sin p_д \times \right.$$

$$\left. \times (t_i - t_j) \right] \}, \tag{1.75б}$$

что в случае отсутствия демпфирования дает

$$x = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{i-1} \Delta Q_j [1 - \cos p (t_i - t_j)], \tag{1.75в}$$

В данном методе величина ΔQ_i некоторой типичной степени может быть либо положительной, либо отрицательной, что зависит от угла наклона касательной к рассматриваемой кривой. Для получения достаточной точности в рассматриваемом методе следует выбирать достаточно малые шаги и самокомпенсирующиеся погрешности площади области, лежащей под графиком функции, описывающей возмущающую силу. Речь идет о том, чтобы заштрихованные площади на рис. 1.55, лежащие выше кривой, были примерно равны незаштрихованным площадям, лежащим ниже кривой. Использование такого приема означает, что каждый (после первого) шаг начинается в момент времени, когда ордината кривой равна средней высоте ординат на заданном шаге. Это можно видеть на рисунке. Разумеется, если функция, описывающая силу, представляет импульс, действительно ограниченный горизонтальной и вертикальными линиями, то метод приведет к точному результату.

Другой метод состоит в использовании линий, параллельных осям координат (рис. 1.56). В этом случае кривая аппроксимируется рядом импульсов прямоугольной формы, различной величины и длительности. Для получения достаточной точности величина Q_i типичного импульса должна быть выбрана такой, чтобы она равнялась ординате кривой в середине временного интервала Δt_i, как показано на рис. 1.56. В произвольный интервал времени $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$ реакцию системы с одной степенью свободы с демпфированием можно вычислить, представив ее как сумму влияний начальных условий

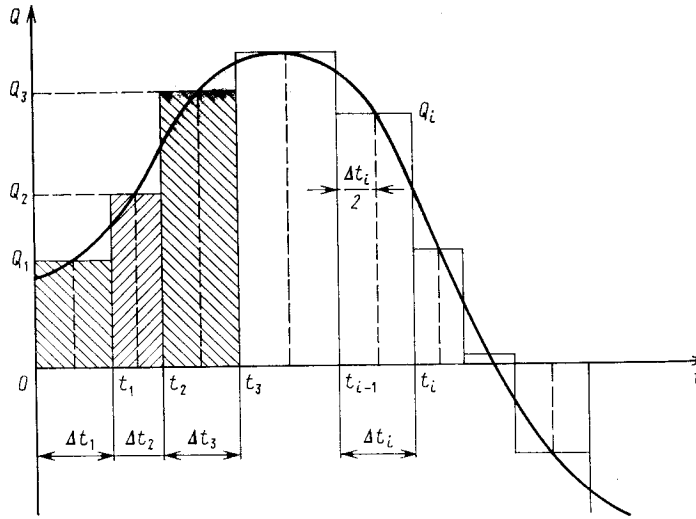


Рис. 1.56

в момент времени t_{i-1} и влияния импульса, действующего на интервале времени Δt_i, что дает

$$x = e^{-n(t-t_{i-1})}\left[x_{i-1}\cos p_д(t-t_{i-1}) + \frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_д}\sin p_д(t-t_{i-1})\right] + \\ + \frac{Q_i}{k}\left\{1 - e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\cos p_д(t-t_{i-1}) + \frac{n}{p_д}\sin p_д(t-t_{i-1})\right]\right\}. \quad (1.76а)$$

В конце интервала это выражение принимает вид

$$x_i = e^{-n\Delta t_i}\left[x_{i-1}\cos p_д\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_д}\sin p_д\Delta t_i\right] + \frac{Q_i}{k}\times \\ \times\left[1 - e^{-n\Delta t_i}\left(\cos p_д\Delta t_i + \frac{n}{p_д}\sin p_д\Delta t_i\right)\right], \quad (1.76б)$$

что в случае отсутствия демпфирования дает

$$x_i = x_{i-1}\cos p\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\,\Delta t_i + \frac{Q_i}{k}(1-\cos p\,\Delta t_i). \quad (1.76в)$$

Кроме того, можно найти скорость $\dot{x}_i$ в конце интервала времени, которая, будучи поделенной на частоту p, имеет вид

$$\frac{\dot{x}_i}{p} = -x_{i-1}\sin p\,\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\,\Delta t_i + \frac{Q_i}{k}\sin p\,\Delta t_i. \quad (1.76г)$$

Выражения (1.76в) и (1.76г) представляют собой рекуррентные формулы для определения динамического перемещения системы при

отсутствии демпфирования в конце i-го шага и тем самым начальных условий в начале шага $(i+1)$. Последовательно используя эти формулы, можно проследить, как изменяются во времени перемещения и скорость системы с одной степенью свободы, но больший интерес представляет перемещение *.

Полученные выше рекуррентные формулы (1.76в) и (1.76г) позволяют находить перемещения в конце i-го интервала времени путем последовательных вычислений. Другой подход заключается в определении перемещений (в момент времени t_i) при действии всех предыдущих импульсов прямоугольной формы. Для случая колебаний без демпфирования данный подход основывается на использовании следующей формулы:

$$x_i = x_0 \cos pt_i + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt_i + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{i} Q_j [\cos p(t_i - t_j) - \cos p(t_i - t_{j-1})]. \qquad (1.76д)$$

Поскольку в последнем слагаемом формулы (1.76д) необходимо производить суммирование членов ряда, при использовании этой формулы требуется выполнять большее число арифметических операций, чем по формулам (1.76в) и (1.76г). Поэтому с целью облегчения проведения расчетов при определении окончательного вида зависимости перемещений от времени предпочтительнее использовать выражения (1.76в) и (1.76г). Однако, если требуется определить только перемещения в конкретное время, то лучше выбрать формулу (1.76д).

При использовании *интерполяции кусочно-постоянного типа*, описанной выше, не всегда удобно делать равными погрешности площади областей, лежащих над графиком функции возмущающей силы и под ним. Более грубым подходом является выбор ординат кривой, относящихся к началу (или концу) интервала времени, в качестве значения импульса прямоугольной формы (или ступенчатой функции). При этом для сохранения заданной точности решения может потребоваться большее число шагов по времени, и при вычислении может стать значительной *ошибка округления*. Для того чтобы избежать указанных трудностей, можно воспользоваться интерполирующими функциями более высокого порядка. На рис. 1.57 показан логически вытекающий из сказанного способ представления импульсного возмущения с помощью наклонных линий и вертикальных полос. Для этой *интерполяции кусочно-линейного типа* переме-

---

* Решение задачи о колебаниях системы без демпфирования с кусочно-постоянным типом интерполяционной функции возмущающей силы можно получить графическим способом, построив на фазовой плоскости, где в качестве осей координат выбраны $\dot{x}$ и $\dot{x}/p$, зависимости для перемещений, которые будут иметь форму дуг окружностей. См. **Lamoën J.** Étude graphique des vibrations de systémes a un seul degré de liberté. — Revue Universelle des Mines, de la Metallurgie, des Travaux Publics, Ser. 8, 1935, t. 11, N. 7, p. 213—226; **Jacobsen L. S., Ayre R. S.** Engineering vibrations. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958. 564 p.

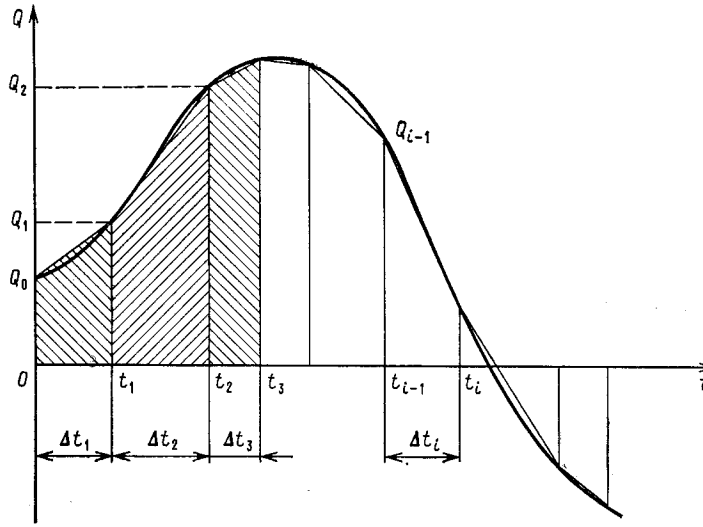


Рис. 1.57

щение системы с одной степенью свободы и демпфированием на интервале времени может быть представлено в следующем виде:

$$x = e^{-n(t-t_{i-1})}\left[x_{i-1}\cos p_д(t-t_{i-1}) + \frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_д}\sin p_д(t-t_{i-1})\right] + \\ + \frac{Q_{i-1}}{k}\left\{1 - e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\sin p_д(t-t_{i-1}) + \frac{n}{p_д}\sin p_д(t-t_{i-1})\right]\right\} + \\ + \frac{\Delta Q_i}{k\Delta t_i}\left\{t - t_{i-1} - \frac{2n}{p^2} + e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\frac{2n}{p^2}\cos p_д(t-t_{i-1}) - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{p_д^2-n^2}{p^2 p_д}\sin p_д(t-t_{i-1})\right]\right\}, \qquad (1.77а)$$

где $\Delta Q = Q_i - Q_{i-1}$. Последнее слагаемое выражения (1.77а) переписано из решения для задачи о колебаниях с демпфированием, когда возмущающая сила описывается линейной функцией (см. задачу 1.12.9). В конце i-го интервала времени выражение (1.77а) будет иметь форму

$$x_i = e^{-n\Delta t_i}\left[x_{i-1}\cos p_д\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}-nx_{i-1}}{p_д}\sin p_д\Delta t_i\right] + \frac{Q_{i-1}}{k}\times \\ \times\left[1 - e^{-n\Delta t_i}\left(\cos p_д\Delta t_i + \frac{n}{p_д}\sin p_д\Delta t_i\right)\right] + \frac{\Delta Q_i}{k\Delta t_i}\left[\Delta t_i - \frac{2n}{p^2} + \right. \\ \left. + e^{-n\Delta t_i}\left(\frac{2n}{p^2}\cos p_д\Delta t_i - \frac{p_д^2-n^2}{p^2 p_д}\sin p_д\Delta t_i\right)\right]. \qquad (1.77б)$$

Если демпфированием пренебречь, из этого выражения получим

$$x_i = x_{i-1}\cos p\,\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\,\Delta t_i + \frac{Q_{i-1}}{k}(1 - \cos p\,\Delta t_i) + \\ + \frac{\Delta Q_i}{pk\Delta t_i}(p\,\Delta t_i - \sin p\,\Delta t_i); \qquad (1.77в)$$

откуда находим выражение для скорости

$$\frac{\dot{x}_i}{p} = -x_{i-1}\sin p\,\Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\,\Delta t_i + \frac{Q_{i-1}}{k}\sin p\,\Delta t_i + \frac{\Delta Q_i}{pk\,\Delta t_i}\times$$

$$\times(1-\cos p\,\Delta t_i). \qquad (1.77г)$$

Выражения (1.77в) и (1.77г) представляют собой рекуррентные формулы, аналогичные формулам (1.76в) и (1.76г) для импульса прямоугольной формы. Для того чтобы определить перемещение только в момент времени t_i для случая отсутствия демпфирования при кусочно-линейной интерполяции, можно взять следующий вариант формулы:

$$-x_i = x_0\cos pt_i + \frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt_i + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}\{Q_{j-1}[\cos p\,(t_i-t_j) -$$

$$-\cos p\,(t_i-t_{j-1})] + \frac{\Delta Q_j}{k\Delta t_j}[\Delta t_j\cos p\,(t_i-t_j) + \frac{1}{p}\sin p\,(t_i-t_j) -$$

$$-\frac{1}{p}\sin p\,(t_i-t_{j-1})]\Big\}, \qquad (1.77д)$$

где последняя группа слагаемых взята из задачи 1.13.4.

Пример 1. На рис. 1.58, *а—г* показаны четыре различных способа представления функции возмущающей силы с использованием вертикальных полос. На всех

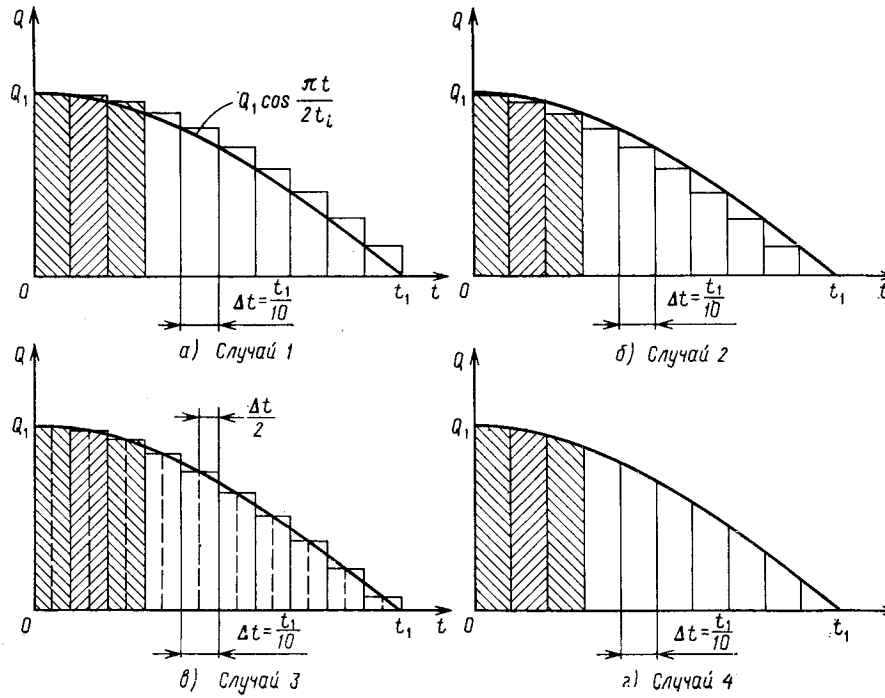


Рис. 1.58

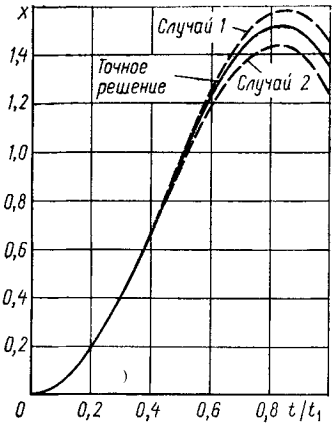


Рис. 1.59

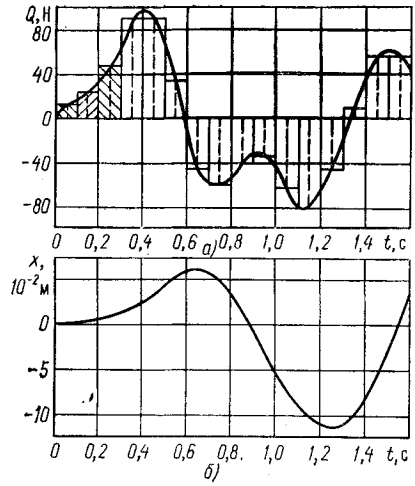


Рис. 1.60

этих рисунках применяются постоянные шаги по времени $\Delta t = t_1/10$. Первые три случая относятся к импульсам прямоугольной формы, тогда как последний — к импульсу трапецеидальной формы (с использованием кусочно-линейной интерполяции). В подходах, к которым относятся рис. 1.58, *а—в*, величины импульсов определялись значениями ординат кривой соответственно в начале, конце и середине шага. Для удобства сравнения указанных случаев была выбрана описываемая уравнением

$$Q = Q_1 \cos\left[\pi t/(2t_1)\right] \qquad \text{(а)}$$

кривая, для которой известно точное решение при отсутствии демпфирования (см. задачу 1.13.7):

$$x = \frac{Q_1}{k}\left(\cos\frac{\pi t}{2t_1} - \cos\frac{2\pi t}{\tau}\right)\beta, \qquad \text{(б)}$$

где

$$\beta = 1/[1 - (\tau/4t_1)^2]. \qquad \text{(в)}$$

В качестве специального случая положим $t_1 = \tau/2$, и тогда выражение (б) примет вид

$$x = \frac{4Q_1}{3k}\left(\sin\frac{\pi t}{2t_1} - \cos\frac{\pi t}{t_1}\right). \qquad \text{(г)}$$

Вычислить и представить графически изменения перемещений во времени для системы при колебаниях без демпфирования на интервале времени $0 \leqslant t < t_1$ для четырех способов представления кривых, показанных на рис. 1.58, *а—г*. Предполагается, что начальные условия при $t = 0$ $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ и что величины Q_1 и k равны единице.

Решение. Для первых трех случаев воспользуемся выражениями (1.76в) и (1.76г); в свою очередь, выражения (1.77в) и (1.77г) применимы для случая 4. Согласно исходным параметрам в этом примере имеем $\Delta t_i = \tau/20$, $p\Delta t_i = \pi/10 = 18$, $\cos p\Delta t_i = 0{,}951$, $\sin p\Delta t_i = 0{,}309$, $1 - \cos p\Delta t_i = 0{,}0489$, $p\Delta t - \sin p\Delta t_i = 0{,}00514$.

Полученные решения удобнее представить в табличной форме, поэтому в табл. 1.1 приведены все шаги вычислений для первого случая.

Вначале можно заполнить первые шесть столбцов в таблице, поместив начальные значения x_0 и $\dot{x}_0/p$ (в данном примере равные нулю) на первой строке столбцов

1.1. Решение для случая 1 из примера 1

i	1 t_i/t_1	2 $\Delta t_i/t_1$	3 Q_i	4 Q_i/k	5 $\frac{Q_i}{k}(1-\cos p\,\Delta t_i)$	6 $\frac{Q_i}{k}\sin p\,\Delta t_i$
0	0	—	—	—	—	—
1	0,1	0,1	1,000	1,000	0,0489	0,309
2	0,2	0,1	0,987	0,987	0,0483	0,305
3	0,3	0,1	0,951	0,951	0,0465	0,294
4	0,4	0,1	0,891	0,891	0,0436	0,275
5	0,5	0,1	0,809	0,809	0,0396	0,250
6	0,6	0,1	0,707	0,707	0,0346	0,219
7	0,7	0,1	0,588	0,588	0,0288	0,182
8	0,8	0,1	0,454	0,454	0,0222	0,140
9	0,9	0,1	0,309	0,309	0,0151	0,095
10	1,0	0,1	0,156	0,156	0,0077	0,048

i	7 $x_{i-1}\cos p\,\Delta t_i$	8 $x_{i-1}\sin p\,\Delta t_i$	9 $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\,\Delta t_i$	10 $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\,\Delta t_i$	11 x_i	12 $\frac{\dot{x}_i}{p}$
0	—	—	—	—	0	0
1	0	0	0	0	0,049	0,309
2	0,0407	0,015	0,294	0,095	0,190	0,584
3	0,181	0,059	0,555	0,180	0,408	0,790
4	0,388	0,126	0,752	0,244	0,676	0,901
5	0,643	0,209	0,857	0,278	0,961	0,898
6	0,914	0,297	0,854	0,278	1,226	0,776
7	1,166	0,379	0,738	0,240	1,434	0,540
8	1,364	0,443	0,514	0,167	1,553	0,211
9	1,477	0,480	0,201	0,065	1,558	—0,184
10	1,482	0,481	—0,175	—0,057	1,432	—0,608

с номерами соответственно 11 и 12. Тогда величины для второй строки столбцов 7—10 подсчитываем по следующим формулам:

столбец 7 $x_0 \cos p\Delta t_1 = 0$;

столбец 8 $x_0 \sin p\Delta t_1 = 0$;

столбец 9 $\frac{1}{5}(\dot{x}_0/p)\cos p\Delta t_1 = 0$;

столбец 10 $(\dot{x}_0/p)\sin p\Delta t_2 = 0$.

1.2. Перемещения для примера 1

t_i/t_1	Случаи				Точное решение
	1	2	3	4	
0,0	0	0	0	0	0
0,1	0,049	0,048	0,049	0,049	0,049
0,2	0,190	0,187	0,189	0,189	0,190
0,3	0,408	0,397	0,404	0,403	0,404
0,4	0,676	0,652	0,666	0,665	0,667
0,5	0,961	0,917	0,942	0,941	0,943
0,6	1,226	1,156	1,195	1,193	1,218
0,7	1,434	1,332	1,388	1,386	1,408
0,8	1,553	1,416	1,489	1,488	1,504
0,9	1,558	1,383	1,475	1,474	1,484
1,0	1,432	1,223	1,332	1,331	1,333

В этой точке величины x_1 и $\dot{x}_1/p$ можно подсчитать по выражениям (1.76в) и (1.76г), после чего подставить соответственно в столбцы 11 и 12; при этом имеем

$$\text{столбец } 11 = \text{столбец } 5 + \text{столбец } 7 + \text{столбец } 10;$$

$$\text{столбец } 12 = \text{столбец } 6 - \text{столбец } 8 + \text{столбец } 9.$$

Все последующие строки таблицы записываем по тем же правилам, что и для первой строки.

Аналогичным образом можно рассмотреть остальные три случая из данного примера, полученные таким образом для всех четырех случаев перемещения. Их точные значения приведены в табл. 1.2. Графики, построенные по полученным результатам, приведены на рис. 1.59, где сплошной линией представлено точное решение. Как и следовало ожидать, кривая, относящаяся к случаю 1 (см. рис. 1.58, *а*), лежит выше кривой для точного решения, тогда как в случае 2 (см. рис. 1.58, *б*) — кривая лежит ниже точного решения; в случаях 3 и 4 (см. рис. 1.58, *в* и *г*) эти кривые практически совпадают с точным решением, но из сопоставления числовых данных из табл. 1.2 следует, что оба способа интерполяции дают значения, несколько меньшие, чем точные.

Пример 2. Пусть система с одной степенью свободы без демпфирования имеет жесткость пружины $k = 1{,}787 \cdot 10^3$ Н/м и период собственных колебаний $\tau = 1{,}2$ с. Возмущающая сила Q изменяется во времени так, как показано на рис. 1.60, *а*. Числовые данные для силы Q приведены в столбце 3 табл. 1.3. Как видно из рис. 1.60, *а*, в качестве интерполирующей выбрана кусочно-постоянная функция с постоянным шагом по времени $\Delta t_i = 0{,}1$ с. В качестве значения каждого импульса прямоугольной формы выбрано значение ординаты кривой в середине шага. Кроме того, предполагается, что начальные условия в данной задаче: $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ при $t = 0$. Вычислить и построить график перемещения системы на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 1{,}6$ с.

Решение. В рассмотренном примере имеем $\Delta t_i/\tau = 1/12$, $p\Delta t_i = \pi/6 = 30°$, $\cos p\Delta t_i = 0{,}866$, $\sin p\Delta t_i = 0{,}5$, $1 - \cos p\Delta t_i = 0{,}134$. В табл. 1.3 приведены все этапы вычислений, а на рис. 1.60, *б* построен график зависимости перемещения от времени.

1.3. Решения для примера 2

i	1 t_i, с	2 Δt_i, с	3 Q_i, Н	4 $\frac{Q_i}{k}$, м·10^{-3}	5 $\frac{Q_i}{k}(1-\cos p\,\Delta t_i)$, м·10^{-3}	6 $\frac{Q_i}{k}\sin p\,\Delta t_i$, м·10^{-3}
0	0	—	—	—	—	—
1	0,1	0,1	11,35	6,35	0,84	3,17
2	0,2	0,1	20,88	11,7	1,57	5,84
3	0,3	0,1	41,77	23,4	3,12	11,7
4	0,4	0,1	86,26	48,3	6,48	24,1
5	0,5	0,1	86,26	48,3	6,48	24,1
6	0,6	0,1	29,96	16,8	2,23	8,38
7	0,7	0,1	—41,77	—23,4	—2,85	—11,7
8	0,8	0,1	—54,48	—30,5	—4,09	—15,2
9	0,9	0,1	—38,14	—21,3	—2,84	—10,7
10	1,0	0,1	—31,78	—17,8	—2,39	—8,89
11	1,1	0,1	—57,66	—32,3	—4,32	—16,1
12	1,2	0,1	—72,64	—40,6	—5,43	—20,3
13	1,3	0,1	—42,22	—23,6	—3,17	—11,8
14	1,4	0,1	6,81	3,81	0,51	1,90
15	1,5	0,1	50,85	28,4	3,81	14,2
16	1,6	0,1	50,85	28,4	3,81	14,2

i	7 $x_{i-1}\cos p\,\Delta t_i$, м·10^{-3}	8 $x_{i-1}\sin p\,\Delta t_i$, м·10^{-3}	9 $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\,\Delta t_i$, м·10^{-3}	10 $\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\,\Delta t_i$, м·10^{-3}	11 x_i, м·10^{-3}	12 $\frac{\dot{x}_i}{p}$, м·10^{-3}
0	—	—	—	—	0	0
1	0	0	0	0	0,84	3,17
2	0,74	0,432	2,74	1,58	3,89	8,18
3	3,38	1,96	7,06	4,09	10,6	16,8
4	9,17	5,28	14,6	8,41	24,0	33,4
5	20,8	12,0	28,9	16,7	44,0	41,0
6	38,1	22,0	35,5	20,5	60,9	21,9
7	52,7	30,4	19,0	11,0	60,5	—23,1
8	52,4	30,3	—20,0	—11,6	36,8	—65,5
9	31,8	18,4	—56,7	—32,8	—3,76	—85,8
10	—3,28	—1,88	—74,3	—42,9	—48,5	—81,3
11	—42,0	—24,3	—70,4	—40,7	—87,0	—62,3
12	—75,4	—43,5	—53,9	—31,1	—112	—30,7
13	—96,9	—56,0	—26,6	—15,3	—115	17,5
14	—100,0	—57,7	15,2	8,76	—90,7	74,8
15	—78,6	—45,4	64,8	37,4	—37,3	124
16	—32,3	—18,7	108	62,2	33,7	141

ЗАДАЧИ*

1.15.1. Определить выражение для скорости $\dot{x}_i$, поделенной на частоту p, для случая, когда реакция системы при колебаниях без демпфирования определяется выражением (1.76д).

Ответ:

$$\frac{x_i}{p} = -x_0 \sin pt_i + \frac{\dot{x}_0}{p} \cos pt_i + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{i} Q_j [-\sin p(t_i - t_j) + \sin p(t_i - t_{j-1})].$$

1.15.2. Определить выражение для скорости $\dot{x}_i$, поделенной на частоту p, для случая, когда реакция системы при колебаниях без демпфирования определяется выражением (1.77д).

Ответ:

$$\frac{\dot{x}_i}{p} = -x_0 \sin pt_i + \frac{\dot{x}_0}{p} \cos pt_i + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{i} \{Q_{j-1} [-\sin p(t_i - t_j) + \sin p(t_i - t_{j-1})] + \frac{\Delta Q_j}{k \Delta t_j} \left[-\Delta t_j \sin p(t_i - t_j) + \frac{1}{p} \cos p \times (t_i - t_j) - \frac{1}{p} \cos p(t_i - t_{j-1}) \right] \}.$$

1.15.3. Получить выражение, аналогичное (1.75в) для кусочно-линейной интерполяционной функции, используемой для представления импульсного воздействия с помощью горизонтальных полос (см. задачу 1.13.2).

Ответ:

$$x_i = \frac{1}{k} \left\{ \Delta Q_0 (1 - \cos pt_i) + \sum_{j=1}^{i} \frac{\Delta Q_j}{\Delta t_j} \left[\Delta t_j + \frac{1}{p} \sin p(t_i - t_j) - \frac{1}{p} \sin p(t_i - t_j) \right] \right\}.$$

1.15.4. Определить выражение для скорости $\dot{x}_i$, поделенной на частоту $p_д$, для случая, когда перемещение системы при колебаниях с демпфированием представляется выражением (1.76б).

Ответ:

$$\frac{\dot{x}_i}{p_д} = e^{-n\Delta t_i} \left[-x_{i-1} \sin p_д \Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1} + n x_{i-1}}{p_д} \cos p_д \Delta t_i - \frac{n}{p_д} \times \left(x_{i-1} \cos p_д \Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1} + n x_{i-1}}{p_д} \sin p_д \Delta t_i \right) \right] + \frac{Q_i}{k} e^{-n\Delta t_i} \left(1 + \frac{n^2}{p_д^2} \right) \times \sin p_д \Delta t_i.$$

---

* Вычисления, необходимые для решения задач этого параграфа, рекомендуется выполнять с помощью программ на ЭВМ. Для этого на языке БЕЙСИК составлена программа с разделением времени под названием CONFORCE (вычисление перемещений при действии возмущающей силы, представляемой кусочно-постоянной функцией); распечатка текста программы приведена в приложении. Аналогичную программу под названием LINFORCE (возмущающая сила представляется кусочно-линейной функцией) можно получить путем изменения в программе CONFORCE операторов для вычисления конечных разностей в рекуррентных формулах, на которых основываются эти программы.

1.15.5. Получить самостоятельно результаты, приведенные для случая 2 в табл. 1.2 (см. пример 1). При повторных применениях выражений (1.76в) и (1.76г) использовать форму, аналогичную табл. 1.1.

1.15.6. Получить самостоятельно результаты, приведенные для случая 3 в табл. 1.2 (см. пример 1). При повторных применениях выражений (1.76в) и (1.76г) использовать форму, аналогичную табл. 1.1.

1.15.7. Получить самостоятельно результаты, приведенные для случая 4 в табл. 1.2 (см. пример 1). При повторных применениях выражений (1.77в) и (1.77г) использовать форму, аналогичную табл. 1.1, но с дополнительными столбцами.

1.15.8. Используя показанный на рис. 1.56 метод кусочно-постоянной интерполяции, определить и построить график для перемещения в системе с одной степенью свободы и без демпфирования, на которую действует возмущающая сила, представляемая функцией в задаче 1.12.7. Использовать постоянный по времени шаг $\Delta t_i = t_1/10$ и рассмотреть отрезок времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Начальные условия суть $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, величины Q_1 и k равны единице. Сравнить полученные результаты с точным решением этой задачи, считая, что $t_1 = \tau/2$.

Ответ: $x_{10} = {}^4/_3$ (точное значение).

1.15.9. Задачу 1.15.8 решить, используя метод кусочно-линейной интерполяции, показанной на рис. 1.57.

1.15.10. Задачу 1.15.8 решить, используя для функции, описывающей возмущающую силу, выражение из задачи 1.12.8.

Ответ: $x_{10} = {}^2/_3$ (точное значение).

1.15.11. Задачу 1.15.10 решить, используя метод кусочно-линейной интерполяции, показанный на рис. 1.57.

1.15.12. Используя показанный на рис. 1.57 метод кусочно-линейной интерполяции, для описанной в примере 2 системы определить и построить график (на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant 1{,}0$) зависимости перемещений реакции от времени при действии возмущающей силы, заданной ниже:

t_i, с	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Q_i, Н	—37,7	—61,3	—69,6	—64,9	—52,7	—37,2

t_i, с	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Q_i, Н	—15,9	16,8	50,1	68,5	78,5

Ответ: $6{,}93 \cdot 10^{-2}$ м.

Глава 2
СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

2.1. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При обсуждении в гл. 1 колебательных свойств систем с одной степенью свободы предполагалось, что сила, возникающая в пружине, всегда пропорциональна ее перемещениям. При этом было обнаружено, что случай вязкого демпфирования, когда демпфирующая сила пропорциональна скорости, гораздо легче поддается рассмотрению, чем другие способы рассеивания энергии. Для того чтобы избежать математических трудностей, в п. 1.10 было введено представление об эквивалентном вязком демпфировании. Кроме того, масса всегда считалась неизменной во времени. В результате сказанного уравнение движения такой системы является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = kx = F(t). \tag{2.1}$$

Это уравнение очень хорошо описывает многие практические задачи и играет центральную роль в линейной теории колебаний. Однако имеется также множество физических систем, для которых линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются недостаточными для описания движения, поэтому для исследования подобных систем необходимо рассматривать нелинейные дифференциальные уравнения.

Если не учитывать возможности изменения массы, общий вид уравнения движения системы с одной степенью свободы можно представить в следующем виде:

$$m\ddot{x} + F(x, \dot{x}, t) = 0. \tag{2.2}$$

В дальнейшем системы с нелинейными характеристиками будем рассматривать как *нелинейные системы*, их движение как *нелинейные колебания*, или *нелинейное динамическое поведение*. С самого начала следует отметить, что принцип наложения, неоднократно использовавшийся в гл. 1, неприменим для нелинейных систем. Например, если увеличить в 2 раза величину функции возмущающей силы, то соответствующие перемещения нелинейной системы не обязательно будут удваиваться. В общем случае нелинейные колебания не являются гармоническими и их частоты изменяются в зависимости от амплитуды.

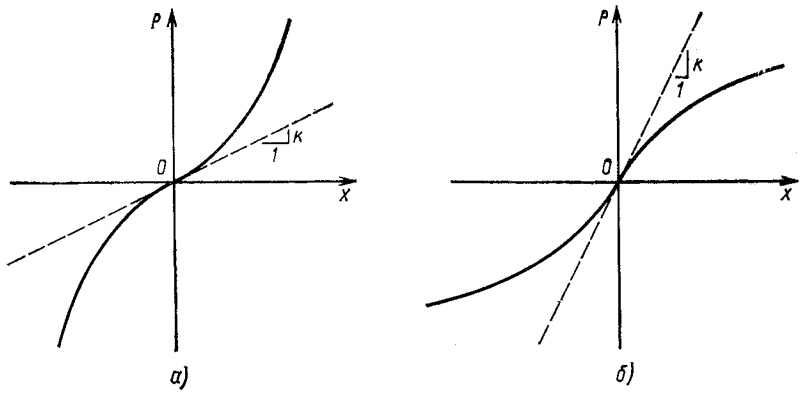


Рис. 2.1

Один из важных типов нелинейности возникает в том случае, когда сила отпора пружины не пропорциональна ее деформациям. На рис. 2.1, *а* показана кривая зависимости нагрузки от перемещения для нелинейно-упругой «*пружины с возрастающей жесткостью*», где угол наклона кривой увеличивается с ростом нагрузки. Штриховая линия на рисунке является касательной к кривой в начале координат, ее угол наклона k характеризует начальную жесткость. Аналогично на рис. 2.1, *б* представлена кривая зависимости нагрузки от перемещения для нелинейно-упругой «*пружины с уменьшающейся жесткостью*», где угол наклона касательной уменьшается с увеличением нагрузки. На обоих рисунках кривые симметричны относительно точки начала координат, и в этом случае говорят, что пружина обладает *симметричной характеристикой восстанавливающей силы*. Если кривая зависимости нагрузки от перемещения несимметрична относительно точки начала координат, то говорят, что имеет место *восстанавливающая сила с несимметричной характеристикой*.

Пример системы, имеющей характеристику типа пружины с возрастающей жесткостью и несимметричной характеристикой восстанавливающей силы, представлен на рис. 2.2, *а*. Небольшая масса m укреплена в середине растянутого троса AB длиной $2l$, который

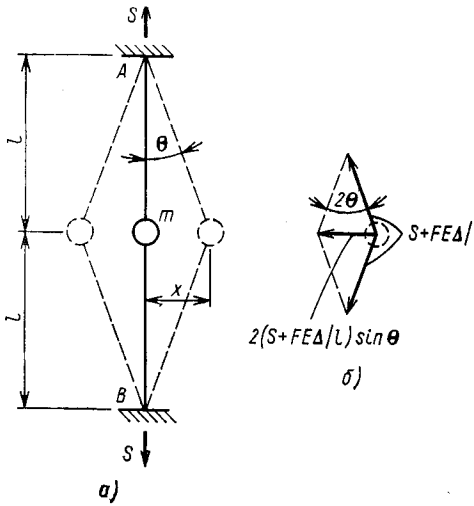


Рис. 2.2

предварительно напряжен растягивающей силой, обозначенной буквой S. Когда масса перемещается в боковом направлении на расстояние x от положения равновесия, в тросе, как показано на рис. 2.2, *б*, возникает восстанавливающая сила. Таким образом, система может совершать свободные колебания, для которых уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + 2\left(S + \frac{FE\Delta}{l}\right)\sin\theta = 0. \qquad \text{(а)}$$

В уравнении (а) через F, E и Δ обозначены соответственно площадь поперечного сечения троса, модуль упругости его материала и изменение длины l, обусловленное перемещением x; угол θ характеризует отклонение троса от вертикали. Из представленной на рис. 2.2, *а* схемы имеем следующие геометрические соотношения:

$$\Delta = \sqrt{l^2 + x^2} - l; \quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}. \qquad \text{(б)}$$

После подстановки этих соотношений в уравнение (а) получим

$$m\ddot{x} + 2\left[S + \frac{FE\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)}{l}\right]\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = 0. \qquad \text{(2.3а)}$$

Это точное нелинейное уравнение движения можно заменить более простым (но менее точным), воспользовавшись приближенными соотношениями

$$\Delta \approx \frac{x^2}{2l}; \quad \sin\theta \approx \frac{x}{l}. \qquad \text{(в)}$$

Подставив эти соотношения в уравнение (а), получим

$$m\ddot{x} + \frac{2S}{l}x + \frac{FE}{l^3}x^3 = 0. \qquad \text{(2.3б)}$$

Это дифференциальное уравнение, приближенно описывающее движение, содержит член с x в третьей степени и, следовательно, является еще и нелинейным. Если сила S предварительного напряжения велика, а перемещение мало, то кубическим членом в уравнении (2.3б) можно пренебречь. При этом движение массы является почти гармоническим, что определяется остающимися членами. В других случаях необходимо учитывать кубический член; при этом восстанавливающая сила имеет вид, представленный на рис. 2.1, *а*. Поскольку угол наклона касательной к кривой, описывающей зависимость нагрузки от перемещения, увеличивается с увеличением перемещения, частота колебаний будет увеличиваться с ростом амплитуды.

Следует отметить, что нелинейность системы на рис. 2.2, *а* связана с рассмотрением геометрии системы при больших перемещениях, а не с нелинейными свойствами материала троса. Другой пример *геометрической нелинейности* представляется *простым маятником* весом W и длиной L (рис. 2.3). В отклоненном на угол φ от вертикали положении на маятник действует равный $WL\sin\varphi$ вос-

станавливающий момент относительно точки подвеса C. Таким образом, уравнение вращательного движения относительно точки подвеса принимает вид

$$I\ddot{\varphi} + WL\sin\varphi = 0. \qquad (г)$$

Подставляя в это уравнение выражение $I = WL^2/g$ для момента инерции массы, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0. \qquad (2.4а)$$

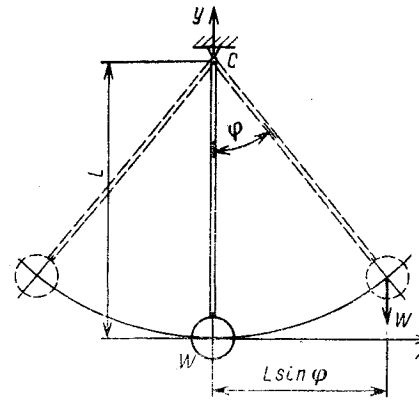


Рис. 2.3

Для малых амплитуд функции $\sin\varphi$ примерно равна углу φ, и тогда движение может рассматриваться как простое гармоническое. Если же амплитуда не мала, восстанавливающий момент пропорционален функции $\sin\varphi$, которую можно разложить в степенной ряд. Подставляя два первых члена ряда в уравнение (2.4а), найдем

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) = 0. \qquad (2.4б)$$

В этом случае видно, что угол наклона кривой, описывающей зависимость восстанавливающего момента от угла φ, уменьшается с увеличением угла φ, следовательно, частота колебаний уменьшается с увеличением амплитуды.

При сравнении уравнений (2.3б) и (2.4б) обнаруживается, что нелинейные члены в них должны стремиться компенсировать друг друга в комбинированной системе типа, показанной на рис. 2.4.

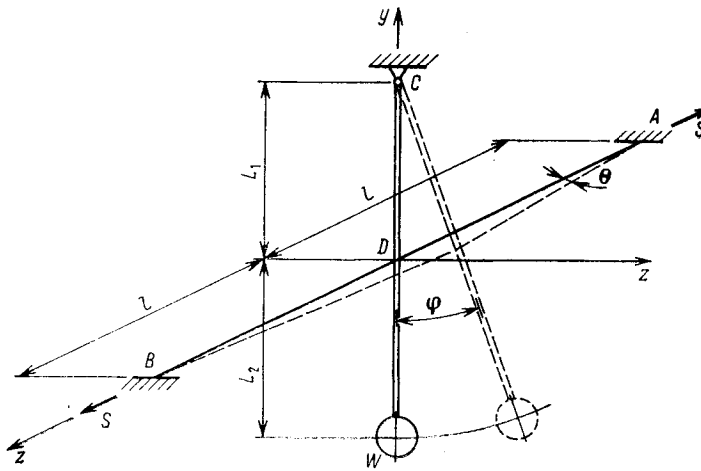


Рис. 2.4

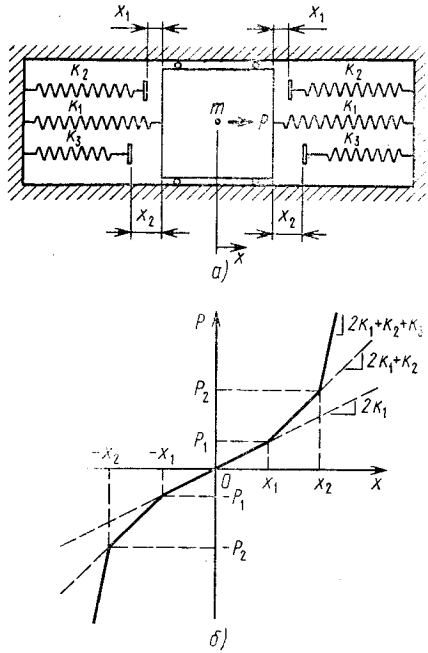


Рис. 2.5

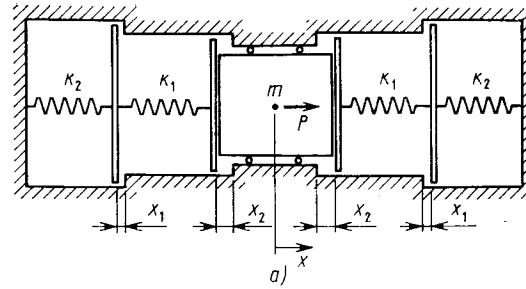
Следовательно, с помощью горизонтального предварительно напряженного троса AB, соединенного с маятником в точке D перпендикулярно плоскости колебания, можно получить более точное приближение к *изохронным колебаниям*.

На рис. 2.5, *б* и 2.6, *б* показаны графики кусочно-линейных восстанавливающих сил, которые можно рассматривать как приближенные представления непрерывных кривых, изображенных на рис. 2.1, *а* и *б*. В действительности эти графики соответствуют линейно упругим *разрывным системам* (см. рис. 2.5, *а* и 2.6, *а*). Хотя пружины на этих рисунках являются линейно упругими, движение масс описывается не непрерывными функциями. Подобные системы будут подробно рассмотрены ниже в п. 2.5. Однако здесь полезно указать на возможность приближенного представления нелинейной восстанавливающей силы кусочно-линейной функции в виде последовательности прямолинейных отрезков [2].

Если динамические нагрузки, действующие на строительное сооружение или часть какой-либо машины, вызывают появление деформаций, превышающих предел упругости материала, результирующее движение называется *неупругим*. Хотя при нормальных условиях работ обычно не допускается выход из упругой области, для инженеров-конструкторов часто представляется интересным увеличить долговечность конструкции или установки, работающих в экстремальных условиях. Например, здание при интенсивном нагружении от взрыва или землетрясения будет деформироваться неупруго.

На рис. 2.7, *а* представлена схема идеализированной прямоугольной стальной рамы здания, на которую действует боковая нагрузка P, приложенная на уровне перекрытия. Если жесткость стоек при изгибе меньше жесткости балок при изгибе и нагрузка увеличивается до бесконечности, то на концах стоек образуются так называемые *пластические шарниры* (*ПШ*). Зависимость нагрузки P от перемещения x является линейной до значения нагрузки, равного P_{y1} (см. линию *1* на рис. 2.7, *б*) и соответствующего моменту возникновения пластических деформаций в материале. Далее эта зависимость (линия *2*) переходит в кривую, аналогичную показанной на рис. 2.1, *б* для случая пружины с уменьшающейся жесткостью. При снятии

Рис. 2.6


K_2
K_1
m
P
K_1
K_2
X_1
X_2
X_2
X_1
x
а)

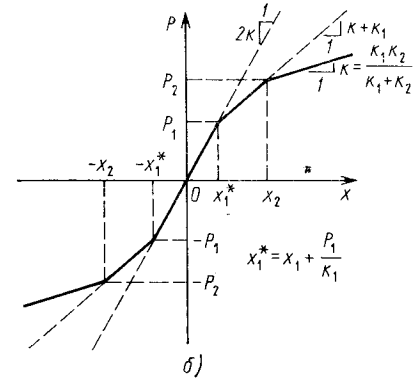
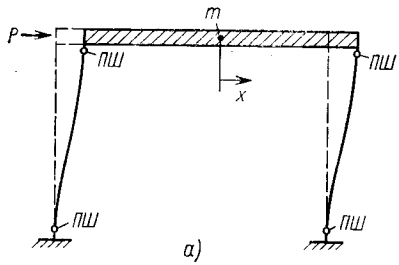
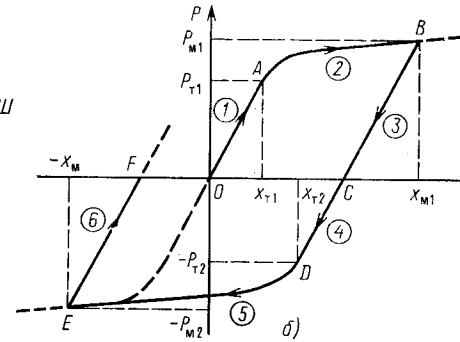
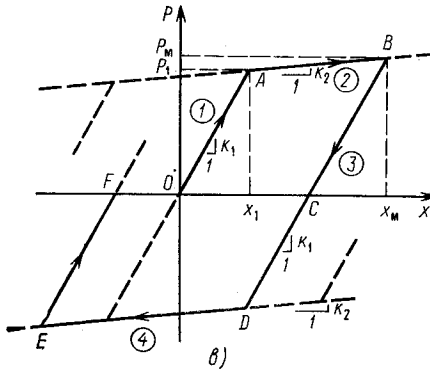
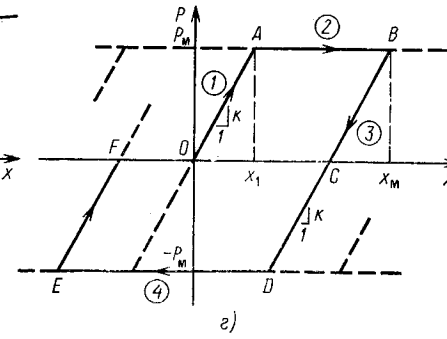

P
$2K$
$K+K_1$
$K=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}$
P_2
P_1
$-X_2$
$-X_1^*$
0
X_1^*
X_2
x
$-P_1$
$-P_2$
$X_1^*=X_1+\frac{P_1}{K_1}$
б)

Рис. 2.7


P
m
ПШ
ПШ
ПШ
ПШ
x
а)


P
$P_{м1}$
$P_{т1}$
A
B
$-X_м$
F
0
$X_{т1}$
$X_{т2}$
C
$X_{м1}$
x
$-P_{т2}$
D
E
$-P_{м2}$
б)


P
$P_м$
P_1
A
B
K_2
K_1
F
0
X_1
C
$X_м$
x
E
D
в)


P
$P_м$
A
B
K
F
0
X_1
C
$X_м$
x
$-P_м$
E
D
г)

нагрузки материал ведет себя как упругий (участок кривой *3* на рис. 2.7, *б*). Эта часть диаграммы представляет собой прямую линию, параллельную линии *1* участка упругого нагружения. Если затем прикладывается нагрузка в противоположном направлении, появляются участки кривых *4* и *5* на рис. 2.7, *б*; следующая затем разгрузка описывается линией *6*. Эксперименты показывают, что если максимальные положительная $P_{м1}$ и отрицательная $P_{м2}$ силы (т. е. ординаты точек *B* и *E* на диаграмме) равны по величине, образуемая при циклическом нагружении *петля гистерезиса* симметрична относительно начала координат *.

Криволинейные участки диаграммы на рис. 2.7, *б* зачастую заменяют прямыми линиями, приближенно описывающими действительное поведение системы. Подобная упрощенная диаграмма зависимости нагрузки от перемещения, называемая *билинейной неупругой восстанавливающей силой*, показана на рис. 2.7, *в*. Она представляет две параллельные линии *2* и *4*, характеризующие неупругое поведение системы, и семейство параллельных линий (линии *1* и *3* — типичные представители этого семейства), характеризующих упругое поведение. Если углы наклона линий *2* и *4* равны нулю, как показано на рис. 2.7, *г*, диаграмма описывает *упругопластическую восстанавливающую силу*. Таким образом, когда поведение системы предполагается либо идеально упругим, либо идеально пластическим, график зависимости силы *P* от *x* состоит из прямолинейных отрезков. Например, рассмотрим раму, показанную на рис. 2.7, *а*, и предположим, что нагрузка *P* увеличивается до значения $P_м$ (см. точку *A* на рис. 2.7, *г*). Если предположить, что пластические шарниры (см. рис. 2.7, *а*) образуются внезапно, перемещение будет увеличиваться, не сопровождаясь соответствующим ростом нагрузки, как показано участком горизонтальной линии от *A* до *B* на рис. 2.7, *г*. Уменьшение нагрузки вызывает уменьшение смещения в соответствии с кривой *3* (см. рис. 2.7, *г*) и т. д.

Рассматриваемая при исследовании упругопластического поведения балок и рам петля гистерезиса представляет собой дискретную макроскопическую форму конструкционного демпфирования, которое обсуждалось выше в п. 1.10. В данном случае предполагается, что все рассеивание энергии происходит в пластических шарнирах, а в самой конструкции энергия сохраняется неизменной. Назовем описанный механизм рассеивания *упругопластическим демпфированием*, которое представляет собой частный случай *гистерезисного демпфирования*. При этом усилия представляются кусочно-линейными функциями перемещения и имеют некоторое сходство с *кулоновским трением*, которое также относится к типу гистерезисного демпфирования, рассмотренного в п. 1.10. На рис. 2.8, *а* изобра-

* **Ramberg W., Osgood W. R.** Description of stress-strain curves by three parameters. — NACA, Tech. Note, 1943, N. 902; **Goel S. C., Berg G. V.** Inelastic earthquake response of tall steel frames. — Journal Struct. Div. Amer. Soc. Civil Eng., 1968, v. 94, N. 8, pp. 1907—1934; **Popov E. P., Pinkney B. R.** Cyclic yield reversal in steel building joints. — Journal Struct. Div., Amer. Soc. Civil Eng., 1969, v. 95, N. 3, pp. 327—353.

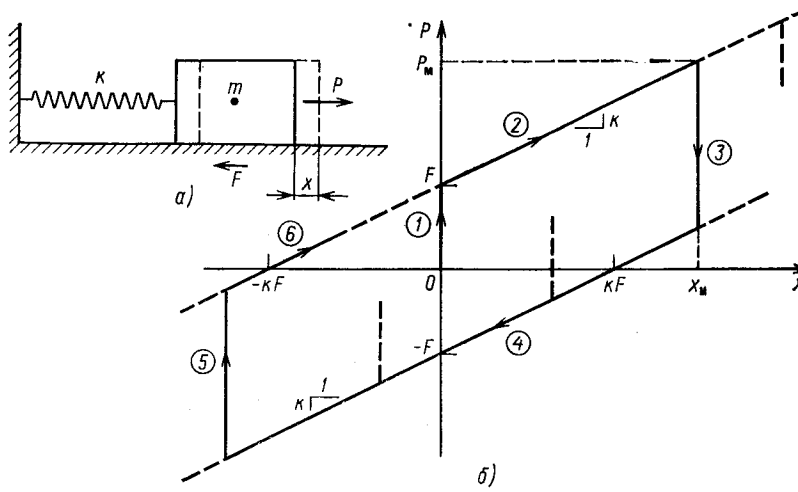


Рис. 2.8

жена система с одной степенью свободы с сопротивлением в виде силы трения F, а на рис. 2.8, *б* представлена форма петли гистерезиса для этого случая. Если после первого приложения силы P не возникает остаточной силы трения, график зависимости силы P от перемещения x представляется линиями *1* и *2* на рис. 2.8, *б*. Последующее уменьшение, а затем и изменение знака нагружения представляются линиями *3* и *4*; при этом изменении знака нагрузки приводит к повторному нагружению в соответствии с линиями *5* и *6*. В этом случае билинейная диаграмма состоит из двух наклонных линий *2* и *4* (обе линии имеют тангенс наклона, равный жесткости k пружины) и множества вертикальных линий, две из которых представлены в виде линий *3* и *5*.

Интересно отметить, что если тангенсы углов наклона линий типа *1* и *3* (см. рис. 2.7, *г*) взять равными бесконечности, а тангенсы углов наклона линий типа *2* и *4* (рис. 2.8, *б*) положить равными нулю, обе задачи, представленные на этих рисунках, станут идентичными с математической точки зрения. Предыдущая задача относилась к случаю *жесткопластической восстанавливающей силы*, когда деформация элемента в упругой области предполагается малой по сравнению с деформациями материала в пластической области. С другой стороны, эта задача описывает повышение груза без пружины, когда его движению препятствует только трение.

Как уже упоминалось в п. 1.10, все известные механизмы рассеивания, за исключением вязкого демпфирования, приводят к нелинейным колебаниям. Например, жидкостное (или осуществляемое по закону «скорость в квадрате») демпфирование обусловлено пропорциональным $\dot{x}\,|\,\dot{x}\,|$ членом, появляющимся в уравнении движения тела, перемещающегося с высокой скоростью в жидкости. Однако в дальнейшем всегда будем предполагать, что масса и характери-

стики демпфирования и жесткости колебательной системы не изменяются во времени и что функция возмущающей силы не зависит от перемещения, скорости и ускорения. Упомянутые предположения позволяют рассматривать задачи устойчивости колебаний, вязкоупругости и автоколебаний *, что выходит за рамки данной книги.

ЗАДАЧИ

2.1.1. На рис. А.2.1.1 показана сосредоточенная масса m, закрепленная на четырех линейно упругих пружинах, каждая из которых имеет жесткость k и длину l в ненапряженном состоянии. Записать: а) нелинейное уравнение движения с учетом больших перемещений массы в направлении оси x; б) приближенное нелинейное уравнение движения с учетом больших перемещений; в) приближенное линейное уравнение при малых перемещениях.

Ответ:

$$\text{а)}\ m\ddot{x} + 2kx\left(2 - l/\sqrt{l^2 + x^2}\right) = 0;$$

$$\text{б)}\ m\ddot{x} + 2kx\left[1 + x^2/(2l^2)\right] = 0;$$

$$\text{в)}\ m\ddot{x} + 2kx = 0.$$

2.1.2. Показанная на рис. А.2.1.2 система аналогична рассмотренной в задаче 2.1.1, за исключением того, что угол, составляемый каждой пружиной с осью x, равен 45°. Записать: а) нелинейное уравнение движения с учетом больших перемещений массы в направлении оси x; б) приближенное линейное уравнение движения при малых перемещениях.

Ответ:

$$\text{а)}\ m\ddot{x} + 2k\left\{2x - l\left[\frac{1}{\sqrt{1 + 1\,(1 + \sqrt{2}x/l)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(1 - \sqrt{2}x/l)^2}}\right]\right\} = 0;$$

$$\text{б)}\ m\ddot{x} + 2kx = 0.$$

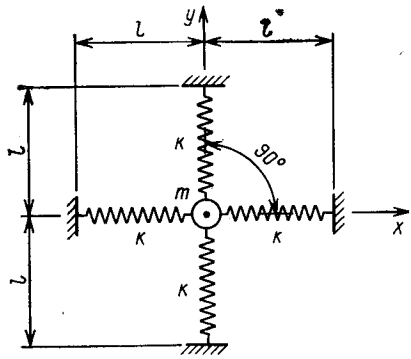


Рис. А.2.1.1

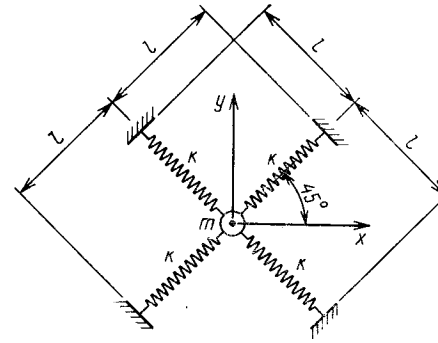


Рис. А.2.1.2

2.1.3. Для прикрепленного к пружине маятника, показанного на рис. А.2.1.3, записать: а) нелинейное уравнение движения с учетом больших углов наклонов; б) приближенное линейное уравнение движения при малых углах наклонов.

---

* Обсуждение вопросов автоколебаний и устойчивости колебаний см. в гл. 7 и 8 кн. **Den Hartog J. P.** Mechanical vibrations. 4th ed. New-York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1956. 436 p. (опубликован перевод: Ден-Гартог Дж. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 464 с.).

Ответ:

$$\text{а)}\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_1}\left[\sin\varphi + \frac{F}{W}\cos(\varphi - \theta)\right] = 0,$$

где

$$F = k\left(\frac{l_3 + l_1\sin\varphi}{\cos\theta} - l_2\right),\quad \theta = \operatorname{arctg}\left[\frac{l_1(1-\cos\varphi)}{l_2 + l_1\sin\varphi}\right];$$

$$\text{б)}\ \ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{kg}{W}\right)\varphi = 0.$$

2.1.4. Для связанного с пружиной маятника, показанного на рис. А.2.1.4, записать: а) нелинейное уравнение движения с учетом больших поворотов; б) приближенное нелинейное уравнение движения с учетом больших поворотов; в) приближенное линейное уравнение движения при малых углах наклонов.

Ответ:

$$\text{а)}\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_1}\sin\varphi + \frac{kg}{Wl_1}(l_1 + l_2)\left[1 - \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + 2l_1(l_1 + l_2)(1-\cos\varphi)}}\right]\times$$

$$\times \sin\varphi = 0;$$

$$\text{б)}\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_1}\varphi + \frac{g}{2}\left[\frac{k}{W}\left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)^2 - \frac{1}{3l_1}\right]\varphi^3 = 0;$$

$$\text{в)}\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_1}\varphi = 0.$$

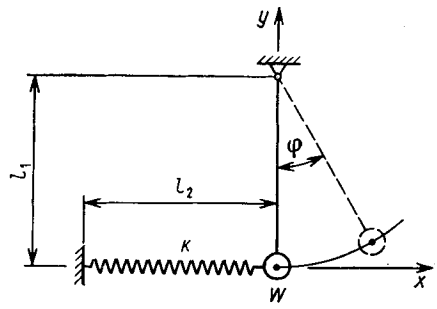


Рис. А.2.1.3

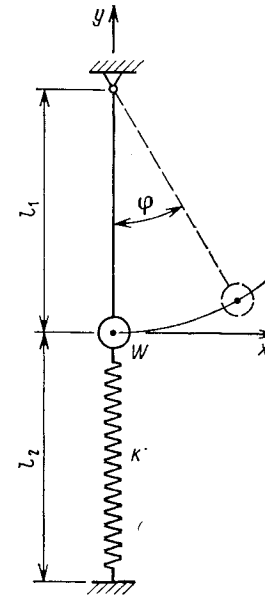


Рис. А.2.1.4

2.1.5. На рисунке показана масса, связанная с установленной наклонно пружиной, длина которой в ненапряженном состоянии равна l. В одном из устойчивых равновесных положениях пружина наклонена к горизонту, как показано на рис. А.2.1.5, под углом θ. Записать нелинейное уравнение движения этой системы с учетом больших перемещений в направлении оси x.

Ответ:

$$m\ddot{x} + k\left[x - l\cos\theta + \frac{l(l\cos\theta - x)}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\theta}}\right] = 0.$$

2.1.6. В перевернутом маятнике имеется линейно упругая спиральная пружина, установленная на опоре (рис. А.2.1.6). Записать нелинейное уравнение движения с учетом больших углов наклона этой системы.

Ответ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_{кр}g}{Wl^2}\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

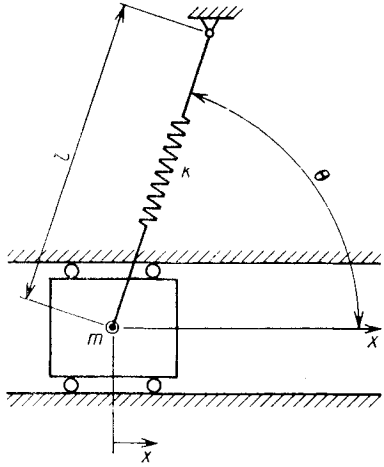


Рис. А.2.1.5

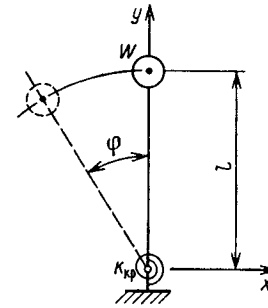


Рис. А.2.1.6

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И ПЕРИОДА КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

Рассмотрим свободные колебания системы без демпфирования и с нелинейной упругой симметричной восстанавливающей силой. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} + F(x) = 0 \qquad \text{(а)}$$

или

$$\ddot{x} + p^2 f(x) = 0, \qquad (2.5)$$

где слагаемое $p^2 f(x) = F(x)/m$ представляет отнесенную к единице массы восстанавливающую силу как функцию перемещения x. В уравнении (2.5) ускорение можно представить как производную скорости

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x})^2}{dx}. \qquad \text{(б)}$$

Подставляя это представление в уравнение (2.5), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x})^2}{dx} + p^2 f(x) = 0. \qquad \text{(в)}$$

Полагая, что восстанавливающая сила $p^2 f(x)$, отнесенная к единице массы, задается кривой, показанной на рис. 2.9, и что скорость, соответствующая координате $x_м$ крайнего положения, равна нулю, можем проинтегрировать уравнение (в) и найти

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = -p^2 \int_{x_м}^{x} f(\xi)\, d\xi = p^2 \int_{x}^{x_м} f(\xi)\, d\xi. \qquad (г)$$

Таким образом, для любого положения колеблющейся системы ее кинетическая энергия, отнесенная к единице массы, равна потенциальной энергии, представленной площадью заштрихованной области под кривой на рис. 2.9. Максимальное значение кинетическая энергия имеет, разумеется, в крайнем положении, и тогда согласно соотношению (1.13) в п. 1.3 получаем

$$E_{к\,max} = \frac{1}{2} x_м^2 = p^2 \int_{x}^{x_м} f(\xi)\, d\xi = E_{п\,max}. \qquad (2.6)$$

Из уравнения (г) находим скорость $\dot{x}$ колеблющейся массы в произвольном положении

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm p \sqrt{2 \int_{x}^{x_м} f(\xi)\, d\xi}, \qquad (д)$$

откуда повторным интегрированием можно найти продолжительность любой части цикла. Таким образом, длительность цикла

$$\tau = \frac{4}{p} \int_{0}^{x_м} \frac{dx}{\sqrt{2 \int_{0}^{x_м} f(\xi)\, d\xi}}. \qquad (2.7)$$

Следовательно, если аналитическое выражение для восстанавливающей силы задано, период колебания системы можно определить с помощью интеграла (2.7). Кроме того, из соотношения (2.6) можно получить выражение для скорости $\dot{x}_м$ в крайнем положении в зависимости от перемещения $x_м$ в крайнем положении. Это выражение удобно использовать при определении максимальной скорости перемещения в нелинейной системе, в которой было задано начальное смещение, а затем предоставлена возможность колебаться свободно. С другой стороны, это выражение можно использовать для

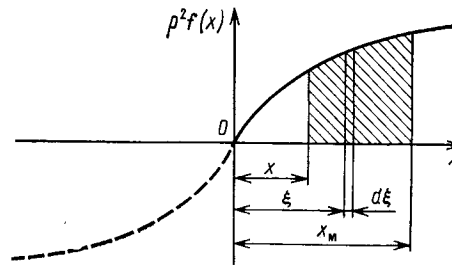


Рис. 2.9

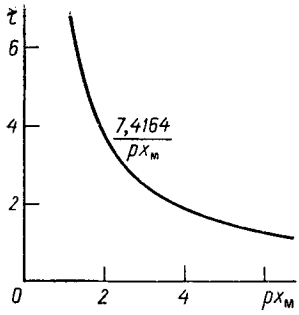


Рис. 2.10

определения максимального перемещения при заданной начальной скорости. Такую начальную скорость можно придать массе с помощью импульса, длительность которого мала по сравнению с периодом колебания системы.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев, начав со случая восстанавливающей силы, пропорциональной любой нечетной степени x:

$$f(x) = x^{2n-1}, \qquad \text{(е)}$$

где n — положительное целое число, а кривая зависимости нагрузки от перемещения симметрична относительно начала координат. Подставляя представление (е) в соотношение (2.6), найдем

$$\dot{x}_м = \pm \frac{px_м^n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{(ж)}$$

что дает $\dot{x}_м = \pm px_м$ при $n = 1$, $\dot{x}_м = \pm 0{,}707\, px_м^2$ при $n = 2$ и т. д. Подставив затем выражение (ж) в формулу (2.7) и проинтегрировав, получим

$$\tau = \frac{4\sqrt{n}}{p} \int_0^{x_м} \frac{dx}{\sqrt{x_м^{2n} - x^{2n}}}. \qquad \text{(2.8а)}$$

В случае линейной восстанавливающей силы ($n = 1$) еще одно интегрирование дает

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^{x_м} \frac{dx}{\sqrt{x_м^2 - x^2}} = \frac{4}{p} \int_1^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{4}{p} \arccos u \Big|_1^0 = \frac{2\pi}{p}, \qquad \text{(з)}$$

где $u = x/x_м$. Когда $n = 2$, восстанавливающая сила пропорциональна x^3, и тогда формула (2.8а) дает

$$\tau = \frac{4\sqrt{2}}{p} \int_0^{x_м} \frac{dx}{\sqrt{x_м^4 - x^4}} = \frac{4\sqrt{2}}{px_м} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}. \qquad \text{(и)}$$

Числовое значение последнего интеграла в формуле (и) известно из справочных таблиц интегралов и равно $1{,}8541/\sqrt{2}$. Тогда формула для периода собственных колебаний принимает вид

$$\tau = \frac{7{,}4164}{px_м}. \qquad \text{(2.8б)}$$

В этом случае период колебаний обратно пропорционален амплитуде. График зависимости (2.8б) периода от амплитуды колебаний представлен на рис. 2.10 и относится к показанной на рис. 2.2, *а*

системе, когда сила S предварительного растяжения троса равна нулю.

Если начальное растяжение троса на рис. 2.2, *а* равно нулю, имеем более общий случай колебания, в котором восстанавливающая сила, отнесенная к единице массы, имеет вид

$$p^2 f(x) = p^2 (x + \alpha x^3), \qquad (к)$$

где $p^2 = 2S/ml$; $\alpha = AE/2Sl^2$. Тогда уравнение (2.6) запишем

$$\dot{x}_м = \pm p x_м \sqrt{1 + \alpha x_м^2/2} \qquad (л)$$

и при $\alpha = 0$ оно примет вид $\dot{x}_м = \pm p x_м$. Для того чтобы вычислить период свободных колебаний, подставим представление (к) в формулу (2.7). Тогда получим

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^{x_м} \frac{dx}{\sqrt{(x_м^2 - x^2) + \alpha (x_м^4 - x^4)/2}},$$

или

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^{x_м} \frac{dx}{\sqrt{(x_м^2 - x^2)\left[1 + \alpha (x_м^2 + x^2)/2\right]}}.$$

Для сведения эллиптического интеграла в правой части последнего выражения к стандартной форме введем обозначения

$$u = x/x_м; \quad v = \alpha x_м^2,$$

что дает

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)\left[1 + v(1 + u^2)/2\right]}}, \qquad (м)$$

или

$$\tau = \frac{4}{p} \sqrt{\frac{2}{v}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)\left[(2 + v)/v + u^2\right]}}. \qquad (н)$$

Используя таблицы эллиптических интегралов, найдем

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(b^2 + u^2)}} = \frac{1}{c} F\left(\frac{a}{c}, \varphi\right), \qquad (о)$$

где $F(a/c, \varphi)$ — эллиптический интеграл первого рода. В представлении (о) используются следующие обозначения [3]: $c^2 = a^2 + b^2$; $\sin^2 \varphi = c^2/[a^2 (b^2 + 1)]$.

Сравнивая интегралы (н) и (о), получаем $a^2 = 1$; $b^2 = (2 + v)/v$. Следовательно, имеем $c = \sqrt{2(1 + v)/v}$, $\varphi = \arcsin 1 = \pi/2$. В результате выражение (н) принимает вид

$$\tau = \frac{4}{p} \frac{1}{\sqrt{1 + v}} F\left(\sqrt{\frac{v}{2(1 + v)}}, \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.9)$$

Если отклонение характеристики пружины от линейного закона очень мало, можно получить α и v равными нулю. Тогда выражение (2.9) сводится к выражению (з), соответствующему случаю линейной восстанавливающей силы. С другой стороны, если коэффициент α и скорость v очень велики, первым членом в выражении (к) можно пренебречь. Следовательно, величина $1 + v$ в выражении (2.9) становится примерно равной v, откуда приходим к выражению для периода колебаний τ:

$$\tau = \frac{7{,}4164}{px_{\text{м}}\sqrt{\alpha}}. \qquad \text{(п)}$$

Формула (п) совпадает с (2.8б) за исключением появившегося в ней множителя $\sqrt{\alpha}$, что объясняется наличием $p^2\alpha x^3$ в выражении (к) вместо p^2x^3. Для любого промежуточного случая, находящегося между этими двумя крайними, необходимо вычислять числовые значения величины $\sqrt{v/[2(1+v)]}$ и определить с помощью таблиц соответствующее значение эллиптического интеграла.

В предшествующих выкладках рассматривался случай пружины с увеличивающейся жесткостью [см. выражение (к)], когда восстанавливающая сила увеличивается с ростом перемещения. Теперь рассмотрим случай пружины с уменьшающейся жесткостью и возьмем следующее выражение для восстанавливающей силы:

$$p^2 f(x) = p^2 (x^2 - \alpha x^3). \qquad \text{(р)}$$

Проделывая те же выкладки, что и ранее, вместо выражений (л) и (н) получим

$$\dot{x}_{\text{м}} = \pm px_{\text{м}}\sqrt{1 - \alpha x_{\text{м}}^2/2}; \qquad \text{(с)}$$

$$\tau = \frac{4}{p}\sqrt{\frac{2}{v}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,[(2-v)/v - u^2]}}. \qquad \text{(т)}$$

В таблицах интегралов используется форма

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)}} = \frac{1}{b}F\left(\frac{a}{b}, \varphi\right), \qquad \text{(у)}$$

где $\sin\varphi = 1/a$. Сравнивая интегралы (т) и (у), находим $a^2 = 1$, $b^2 = (2 - v)/v$, $\varphi = \pi/2$. Следовательно, выражение (т) принимает вид

$$\tau = \frac{4}{p}\sqrt{\frac{2}{2-v}}\,F\left(\sqrt{\frac{v}{2-v}}, \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.10)$$

Как и выше, для любых значений коэффициента α и скорости v период τ можно без труда определить с помощью выражения (2.10), используя таблицы эллиптических интегралов.

Путем соответствующего подбора коэффициента α в выражениях (к) и (р) можно получить приближенное описание различных случаев пружин как с возрастающей, так и с уменьшающейся жесткостью. В более общем случае, когда восстанавливающая сила может быть представлена в виде полинома $p^2 f(x) = p^2 (x + \alpha x^2 + \beta x^3)$, задача также может быть решена с помощью эллиптических интегралов *.

Другой пример симметричного вида восстанавливающей силы, для которого может быть получено точное решение, представляет собой маятник (см. рис. 2.3). Здесь уравнение движения [см. уравнение (2.4а) в п. 2.1] имеет вид $\ddot{\varphi} + p^2 \sin \varphi = 0$, где $p^2 = g/L$. В данном случае угловых колебаний соотношения (2.6) и (2.7) принимают следующую форму:

$$E_{\text{к max}} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_{\text{м}}^2 = p^2 \int_0^{\varphi_{\text{м}}} f(\psi)\, d\psi = E_{\text{п max}}; \tag{2.11а}$$

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^{\varphi_{\text{м}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 \int_0^{\varphi_{\text{м}}} f(\psi)\, d\psi}}. \tag{2.11б}$$

Для маятника из указанных соотношений получаем

$$\dot{\varphi}_{\text{м}} = \pm p \sqrt{2(1 - \cos \varphi_{\text{м}})}; \tag{ф}$$

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^{\varphi_{\text{м}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_{\text{м}})}} = \frac{2}{p} \int_0^{\varphi_{\text{м}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_{\text{м}}/2) - \sin^2(\varphi/2)}}. \tag{х}$$

Вводя обозначения $k = \sin(\varphi_{\text{м}}/2)$ и новую переменную θ, такую, что

$$\sin(\varphi/2) = k \sin \theta = \sin(\varphi_{\text{м}}/2) \sin \theta, \tag{ц}$$

найдем

$$d\varphi = \frac{2k \cos \theta\, d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \tag{ч}$$

Подставляя выражения (ц) и (ч) в (х) и учитывая, что согласно соотношению (ц) переменная θ изменяется от 0 до $\pi/2$, тогда как угол φ изменяется от 0 до $\varphi_{\text{м}}$, получаем следующее выражение периода колебаний:

$$\tau = \frac{4}{p} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{4}{p} F(k, \pi/2), \tag{2.12}$$

---

* **Duffing G.** Erzwungene Schwiungungen bei veränderlicher Eigenfrequenz. — Braunsweig: F. Vieweg und Sohn, 1918, 134 S.; **Weigand A.** Die Berechnung freier nicht-linearer Schwingungen mit Hilfe der elliptischen Funktionen. — Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwessens, 1941, B. 12, N. 6, S. 274—284.

которое имеет стандартную форму эллиптического интеграла первого рода. Числовые значения интеграла из выражения (2.12), соответствующие различным значениям k, можно получить из таблиц.

Если максимальное угловое перемещение $\varphi_м$ маятника мало, мала и величина k и, следовательно, можно пренебречь слагаемым $k^2 \sin^2 \theta$ в выражении (2.12). При этом интеграл становится равным $\pi/2$, а период собственных колебаний маятника при малых углах наклона принимает значение $\tau = 2\pi/p$.

Пример 1. Предположим, что контейнер, содержащий закрепленную на пружинах массу m, падает с высоты h на цементный пол. Восстанавливающая сила, с которой пружины действуют на массу, в соответствии с экспериментами может быть приближенно представлена в виде

$$F(x) = \alpha x^5, \qquad \text{(ш)}$$

где x — перемещение массы относительно контейнера. Определить максимальное перемещение массы относительно контейнера при условии, что во время падения контейнера на пол происходит неупругий удар.

Решение. При внезапном ударе упавший контейнер имеет отнесенную к единице массы кинетическую энергию, равную gh. Разделив выражение (ш) на m, получим $p^2 f(x) = \alpha x^5/m$; тогда соотношение (2.6) примет вид $E_{к\,max} = gh = \alpha x_м^2/6m = E_{п max}{}^5$. Откуда находим

$$x_м = \left(\frac{6mgh}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}}. \qquad \text{(щ)}$$

Пример 2. Получить выражение для начальной скорости, которая необходима для того, чтобы масса в задаче 2.1.5 (см. п. 2.1) «перескочила» из положения с $\theta < \pi/2$ в положение с $\theta > \pi/2$.

Решение. Воспользовавшись энергетическими представлениями, видим, что начальная скорость должна быть по крайней мере такой, чтобы начальная кинетическая энергия была равна потенциальной энергии, накопленной в пружине, когда она занимает вертикальное положение ($\theta = \pi/2$). Изменение длины пружины при отклонении от вертикального положения можно представить в виде $\Delta = l(1 - \sin\theta)$. Тогда потенциальная энергия, накопленная в пружине, $E_{п\,max} = k\Delta^2/2 = kl^2 (1 - \sin\theta)^2/2$. Приравнивая это выражение начальной кинетической энергии массы, получим условие «прощелкивания»

$$\dot{x}_0 \geqslant l(1 - \sin\theta)\sqrt{k/m}. \qquad \text{(э)}$$

ЗАДАЧИ

2.2.1. На рис. А.2.2.1 показан буфер, установленный в тупике железнодорожного пути. Буфер имеет пружину с возрастающей жесткостью, которая дает восстанавливающую силу вида $F(x) = k(x + \alpha x^3)$, где $k = 7{,}15 \cdot 10^4$ Н/м и $\alpha = 3{,}1 \times 10^3$ м$^{-2}$. Приняв, что вес вагона $W = 1{,}75 \cdot 10^5$ Н, а его скорость при подходе к тупику составляет 0,254 м/с, определить максимальное перемещение буфера, максимальное значение восстанавливающей силы, а также время (считая, что удар происходит при $t = 0$), за которое оно будет достигнуто. Считать, что масса буфера мала по сравнению с массой вагона и что после удара между ними сохраняется контакт.

Ответ: $x_м = 5{,}4 \cdot 10^{-2}$ м; $P_м = 3{,}89 \cdot 10^4$ Н; $\tau/4 = 0{,}308$ с.

2.2.2. Предположить, что пружины буфера из задачи 2.2.1 заменены на систему таких, которые дают восстанавливающую силу в виде функции тангенса, как показано на рис. А.2.2.2. Пусть жесткость $k = 7{,}15 \cdot 10^4$ Н/м, а предельное перемещение, при котором восстанавливающая сила становится бесконечно боль-

шой, составляет $x_1 = 0{,}254$ м. Определить максимальные перемещения $x_м$ и восстанавливающую силу $P_м$.

Ответ: $x_м = 0{,}121$ м, $P_м = 1{,}07 \cdot 10^4$ Н.

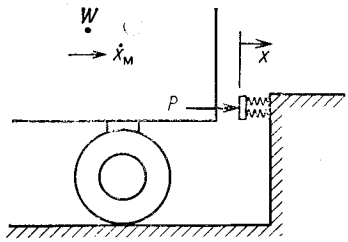


Рис. А.2.2.1

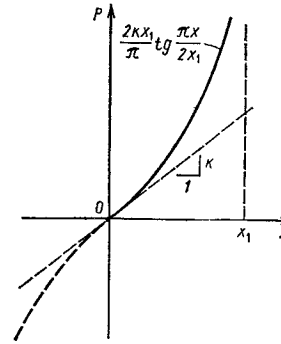


Рис. А.2.2.2

2.2.3. Пружины с увеличивающейся жесткостью, установленные в буфере из задачи 2.2.1, заменены на систему пружин с уменьшающейся жесткостью, которые дают восстанавливающую силу в виде функции гиперболического тангенса, как показано на рис. А.2.2.3. Для указанного случая считать, что тангенс угла наклона кривой в начале координат $k = 1{,}79 \cdot 10^5$ Н/м и что предельное значение восстанавливающей силы, которое может обеспечить конструкция буфера, $P_1 = 4{,}54 \times \times 10^6$ Н. Определить смещение $x_м$ и силу $P_м$, которые возникают при столкновении вагона с буфером.

Ответ: $x_м = 8{,}02 \cdot 10^{-2}$ м, $P_м = 1{,}44 \cdot 10^4$ Н.

2.2.4. Решить задачу 2.2.3 для случая восстанавливающей силы, описываемой экспоненциальной функцией (рис. А.2.2.4).

Ответ: $x_м = 8{,}07 \cdot 10^{-2}$ м, $P_м = 1{,}42 \cdot 10^4$ Н.

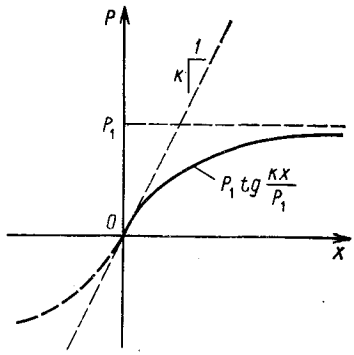


Рис. А.2.2.3

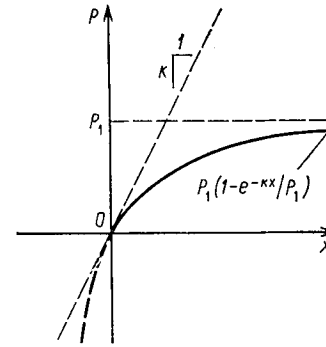


Рис. А.2.2.4

2.3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В общем случае точное решение нелинейного дифференциального уравнения не может быть получено, поэтому здесь могут быть применены только приближенные методы. В любом случае нелинейные колебания можно описать соответствующим образом подобранными

функциями времени, удовлетворяющими некоторым специальным критериям. В данном параграфе будут рассмотрены два широко известных метода, основанных на использовании упомянутых приближенных представлений.

Метод последовательных приближений. Если отклонение характеристики пружины от линейного закона сравнительно мало, уравнение движения при свободных колебаниях системы с одной степенью свободы без демпфирования может быть представлено к следующей форме:

$$\ddot{x} + p^2 x + \alpha f(x) = 0, \tag{2.13}$$

где α — малая величина; $f(x)$ — полиномиальная функция с минимальной степенью x, не меньшей двух. Для систем, в которых кривая зависимости нагрузки от перемещения симметрична относительно начала координат, имеем

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \pm x |x^i|. \tag{а}$$

Обычно подобный случай получается при оставлении только второго положительного члена в выражении (а) и подстановке этого выражения в уравнение (2.13). При этом уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x} + p^2 x + \alpha x^3 = 0. \tag{2.14}$$

Один из методов для описания движения подобных *квазилинейных систем* состоит в определении периодических решений путем последовательных приближений *.

Допустим, что в момент времени $t = 0$ начальные условия для системы имеют вид $x_0 = x_м$, $\dot{x} = 0$. Предположение о гармоническом законе движения линейной системы, заменившей действительную систему, дает следующее выражение:

$$x = x_м \cos p_1 t, \tag{б}$$

где через p_1 обозначена круговая частота заменяющей системы. Выражение (б) можно рассматривать как первое приближение решения уравнения (2.14), удовлетворяющее заданным начальным условиям. Поскольку коэффициент α мал, можно предположить, что круговая частота p_1 не существенно отличается от частоты p линейной системы, и тогда можно записать

$$p^2 = p_1^2 + (p^2 - p_1^2), \tag{в}$$

где $p^2 - p_1^2$ — малая величина. Подставляя выражение (в) в уравнение (2.14), получим

$$\ddot{x} + p_1^2 x + (p^2 - p_1^2) x + \alpha x^3 = 0. \tag{г}$$

---

* **Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.** Введение в нелинейную механику. Ин-т строительной механики. Зап. каф. мат. физики. Т. I, II. Киев: изд-во АН УССР, 1937. 363 с.

Первое приближение (б) для x теперь можно подставить в два последних слагаемых уравнения (г), которые являются малыми величинами, что дает $\ddot{x} + p_1^2 x = -x_м(p^2 - p_1^2)\cos p_1 t - \alpha x_м^3 \cos^3 p_1 t$. С учетом равенства $\cos^3 p_1 t = (3\cos p_1 t + \cos 3p_1 t)/4$ получаем

$$\ddot{x} + p_1^2 x = -\left(p^2 - p_1^2 + \frac{3\alpha x_м^2}{4}\right) x_м \cos p_1 t - \frac{\alpha x_м^3}{4} \cos 3p_1 t. \quad (д)$$

С математической точки зрения, это уравнение имеет форму, аналогичную случаю системы с одной степенью свободы без демпфирования, в которой имеется возмущающие силы в виде гармонических функций. Однако здесь первый стоящий в правой части уравнения член описывает функцию возмущающей силы, имеющей ту же частоту p_1, что и у заменяющей системы. Это приведет к тому, что динамические перемещения системы будут бесконечно возрастать со временем и не будет выполняться условие свободных колебаний с постоянной амплитудой. Для устранения такого ложного резонанса необходимо положить коэффициент при $\cos p_1 t$ равным нулю. Этот шаг является существенной особенностью метода по крайней мере потому, что тем самым удается получить приближенное значение для частоты

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha x_м^2}{4}. \quad (2.15)$$

Поскольку слагаемое p^2 может рассматриваться как первое приближение для p_1^2, выражение (2.15) представляет собой второе приближение, состоящее из первого и добавочного члена $3\alpha x_м^2/4$.

Оставшимся слагаемым уравнения (д) соответствует общее решение

$$x = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + \frac{\alpha x_м^2}{32 p_1^2} \cos 3p_1 t. \quad (е)$$

Для того чтобы удовлетворить заданным начальным условиям ($x_0 = x_м$, $\dot{x}_0 = 0$), постоянные интегрирования следует взять в виде $C_1 = x_м - \alpha x_м^3/(32p_1^2)$, $C_2 = 0$.

Следовательно, второе приближение для функции, описывающей движение системы,

$$x = x_м \cos p_1 t + \frac{\alpha x_м^3}{32 p_1^2}(\cos 3p_1 t - \cos p_1 t). \quad (2.16)$$

Таким образом, поправочный член во втором приближении содержит более высокую гармонику, пропорциональную $\cos 3p_1 t$ и показанную графически на рис. 2.11, *а*. Естественно, что величина отклонения от кривой, изображающей функцию косинуса, зависит от величины коэффициента α. Следует также учитывать, что круговая частота p_1 увеличивается с ростом амплитуды, что видно из представленной на рис. 2.11, *б* зависимости (2.15).

Если необходимо получить третье приближение для функции, описывающей движение, следует подставить второе приближение

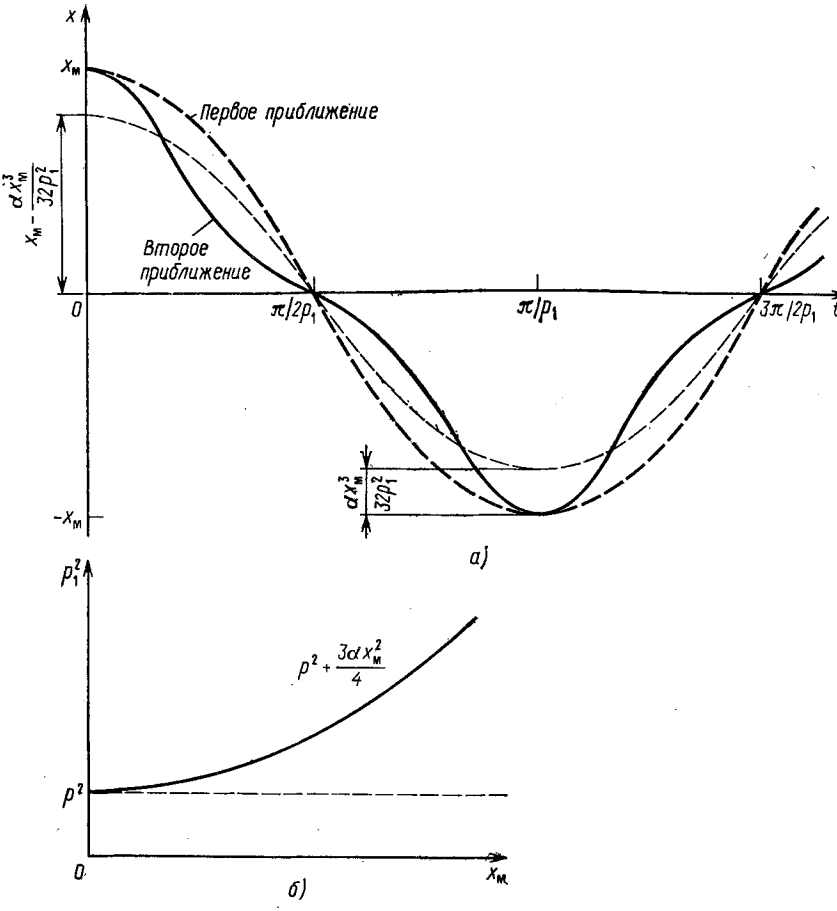


Рис. 2.11

(2.16) в уравнение (г) и вновь проделать те же выкладки, что и ранее. Однако здесь тригонометрические преобразования становятся довольно громоздкими, поэтому желательно воспользоваться более простым приемом. С учетом сказанного заметим, что выражения (2.15) и (2.16) можно записать в следующей форме:

$$p = p_1^2 + \alpha c_1; \quad x = \varphi_0 + \alpha\varphi_1. \qquad (ж)$$

Следовательно, выражения вторых приближений для частоты колебания и перемещения содержат величину α в первой степени. Тогда для получения последующих приближений надо удержать дополнительные члены в рядах

$$x = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 + \cdots; \qquad (2.17а)$$

$$p^2 = p_1^2 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \alpha^3 c_3 + \ldots. \qquad (2.17б)$$

Оба ряда содержат степени малой величины α. В этих рядах φ_0, φ_1, φ_2, ... суть неизвестные функции времени, c_1, c_2, c_3, ... — постоянные, которые должны быть выбраны таким образом, чтобы устранялись условия резонанса, как это делалось при получении второго приближения. Увеличивая число удерживаемых членов ряда, можно получить желаемое число последовательных приближений. В последующем изложении опускаются все члены, содержащие α в степени выше третьей. Подставляя представления (2.17а) и (2.17б) в уравнение (2.14), найдем

$$\ddot{\varphi}_0 + \alpha\ddot{\varphi}_1 + \alpha^2\ddot{\varphi}_2 + \alpha^3\ddot{\varphi}_3 + (p_1^2 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \alpha^3 c_3)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \\ + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3) + \alpha(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^2\varphi_3)^3 = 0. \qquad (з)$$

После приведения подобных членов и отбрасывания всех членов, содержащих α в степени выше третьей, уравнение (з) можно переписать в виде

$$\ddot{\varphi}_0 + p_1^2\varphi_0 + \alpha(\ddot{\varphi}_1 + p_1^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 + \varphi_0^3) + \alpha^2(\ddot{\varphi}_2 + p_1^2\varphi_2 + c_2\varphi_0 + \\ + c_1\varphi_1 + 3\varphi_0^2\varphi_1) + \alpha^3(\ddot{\varphi}_3 + p_1^2\varphi_3 + c_3\varphi_0 + c_2\varphi_1 + c_1\varphi_2 + 3\varphi_0^2\varphi_2 + \\ + 3\varphi_0\varphi_1^2) = 0. \qquad (и)$$

Данное соотношение должно выполняться при любых значениях малой величины α, а это означает, что коэффициент при каждой из трех степеней α должен быть равен нулю. Таким образом, вместо соотношения (и) можно записать следующую систему уравнений:

$$\ddot{\varphi}_0 + p_1^2\varphi_0 = 0;$$
$$\ddot{\varphi}_1 + p_1^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 - \varphi_0^3;$$
$$\ddot{\varphi}_2 + p_1^2\varphi_2 = -c_2\varphi_0 - c_1\varphi_1 - 3\varphi_0^2\varphi_1; \qquad (к)$$
$$\ddot{\varphi}_3 + p_1^2\varphi_3 = -c_3\varphi_0 - c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 - 3\varphi_0^2\varphi_2 - 3\varphi_0\varphi_1^2.$$

Используя те же, что и выше, начальные условия (т. е. при $t = 0$ имеем $x_0 = x_м$, $\dot{x}_0 = 0$) и подставляя их в представления (2.17а), найдем

$$\varphi_0(0) + \alpha\varphi_1(0) + \alpha^2\varphi_2(0) + \alpha^3\varphi_3(0) = x_м;$$
$$\dot{\varphi}(0) + \alpha\dot{\varphi}_1(0) + \alpha^2\dot{\varphi}_2(0) + \alpha^3\dot{\varphi}_3(0) = 0.$$

Поскольку здесь, как и выше, эти соотношения должны выполняться для любых значений коэффициента α, имеем

$$\varphi_0(0) = x_м; \quad \dot{\varphi}_0(0) = 0;$$
$$\varphi_1(0) = 0; \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0;$$
$$\varphi_2(0) = 0; \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0; \qquad (л)$$
$$\varphi_3(0) = 0; \quad \dot{\varphi}_3(0) = 0.$$

Рассматривая первое уравнение из системы (и) и соответствующие ему начальные условия, записанные в первой строке выражения (л), найдем

$$\varphi_0 = x_м \cos p_1 t. \qquad (м)$$

Подставляя это первое приближение в правую часть второго уравнения из системы (и), получим

$$\ddot{\varphi}_1 + p_1^2\varphi_1 = -c_1 x_м \cos p_1 t - x_м^3 \cos^3 p_1 t = -\left(c_1 x_м + \frac{3x_м^3}{4}\right) \times$$

$$\times \cos p_1 t - \frac{x_м^3}{4} \cos 3p_1 t.$$

Для устранения условия возникновения резонанса постоянную c_1 следует выбрать такой, чтобы первое слагаемое, стоящее в правой части уравнения, равнялось нулю, что дает

$$c_1 = -3x_м^2/4. \qquad (н)$$

Общее решение для функции φ_1 имеет вид

$$\varphi_1 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + \frac{x_м^3}{32p_1^2} \cos 3p_1 t.$$

Для того чтобы удовлетворить начальным условиям, представленным во второй строке соотношения (л), найдем $C_1 = -x_м^3/32p_1^2$, $C_2 = 0$. Тогда окончательно получим

$$\varphi_1 = \frac{x_м^3}{32p_1^2}(\cos 3p_1 t - \cos p_1 t). \qquad (о)$$

Если ограничить расчеты определением второго приближения и подставить выражения (м), (н) и (о) в представления (2.17а) и (2.17б), то придем к следующему выражению:

$$x = x_м \cos p_1 t + \frac{\alpha x_м^3}{32p_1^2}(\cos 3p_1 t - \sin p_1 t), \qquad (п)$$

где

$$p_1^2 = p^2 + 3\alpha x_м^2/4. \qquad (р)$$

Эти результаты в точности совпадают с выражениями, полученными выше [см. выражения (2.15) и (2.16)].

Для получения третьего приближения подставим выражения (м), (н) и (о) в правую часть третьего уравнения системы (к):

$$\ddot{\varphi}_2 + p_1^2\varphi_2 = -c_2 x_м \cos p_1 t + 3x_м^2\left(\frac{1}{4} - \cos^2 p_1 t\right)\left[\frac{x_м^2}{32p_1^2}(\cos 3p_1 t - \right.$$

$$\left. - \cos p_1 t)\right].$$

Используя известные тригонометрические формулы для функций кратных углов, можно это уравнение привести к виду

$$\ddot{\varphi}_2 + p_1^2\varphi_2 = -x_м\left(c_2 - \frac{3x_м^2}{128p_1^2}\right)\cos p_1 t - \frac{3x_м^5}{128p_1^2} \cos 5p_1 t.$$

Для того чтобы, как и выше, исключить условия возникновения резонанса, положим

$$c_2 = \frac{3x_м^4}{128p_1^2}. \qquad (с)$$

Тогда общим решением для функции φ_2 будет

$$\varphi_2 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + \frac{x_м^5}{1024p_1^4} \cos 5\, p_1 t.$$

Используя третью строку соотношений (л), найдем постоянные интегрирования

$$C_1 = -\frac{x_м^5}{1024p_1^4}, \quad C_2 = 0,$$

откуда получим

$$\varphi_2 = \frac{x_м^5}{1024p_1^4}(\cos 5p_1 t - \cos p_1 t). \qquad (т)$$

Тогда третье приближение, описывающее реакцию системы, принимает вид

$$x = x_м \cos p_1 t + \frac{\alpha x_м^3}{32p_1^2}(\cos 3p_1 t - \cos p_1 t) + \frac{\alpha^2 x_м^5}{1024p_1^4} \times$$
$$\times (\cos 5p_1 t - \cos p_1 t), \qquad (2.18)$$

где p_1 определяется выражением

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha x_м^2}{4} - \frac{3\alpha^2 x_м^4}{128p^2}. \qquad (2.19)$$

Для того чтобы получить четвертое приближение, подставим выражения для φ_0, φ_1, φ_2, c_1 и c_2 в последнее уравнение из системы (к) и, проделав те же, что и выше выкладки, найдем

$$x = x_м \cos p_1 t + \frac{\alpha x_м^3}{32p_1}(\cos 3p_1 t - \cos p_1 t) + \frac{\alpha^2 x_м^5}{1024p_1^4}(\cos 5p_1 t -$$
$$- \cos p_1 t) + \frac{\alpha^3 x_м^7}{32{,}768p_1^6}(\cos 7p_1 t - 6\cos 3p_1 t + 5\cos p_1 t), \qquad (2.20)$$

где частоту p_1 определяем из выражения

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha x_м^2}{4} - \frac{3\alpha^2 x_м^4}{128p^2} + \frac{9\alpha^3 x_м^6}{512p^4}. \qquad (2.21)$$

В заключение укажем, что метод последовательных приближений состоит в представлении перемещений при нелинейных свободных колебаниях рядами функций, получаемых в соответствии с выбранной формой для первого приближения, подобной представлению (б),

а затем последовательного решения системы уравнений, подобной системе (к), с учетом начальных условий, аналогичных условиям (л). Приближение, получаемое по этому методу, по существу удовлетворяет уравнению движения только в те моменты времени, когда колебательная система находится в крайнем или среднем положениях. Хотя теоретически число последовательных приближений, которые могут быть получены, неограничено, обычно для практических целей оказывается достаточным второго приближения.

Метод усреднения Ритца *. Другой способ приближенного исследования нелинейных колебаний с помощью рядов основан на том, что среднее значение возможной работы за цикл полагается равным нулю. Этот подход известный как метод усреднения Ритца [4], может дать более точное решение, чем метод последовательных приближений, при том же самом числе удерживаемых членов ряда. Более того, применение метода осреднения не ограничивается квазилинейными системами. Этот метод может применяться и для исследования как свободных, так и вынужденных (см. следующий параграф) колебаний.

Рассмотрим свободные колебания системы с одной степенью свободы без демпфирования, для которой уравнение движений можно записать в следующем виде:

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{2.22}$$

где слагаемые в левой части описывают силу инерции и восстанавливающую силу, отнесенные к единице массы. Согласно принципу Даламбера уравнение (2.22) можно рассматривать как уравнение динамического равновесия, в котором упомянутые две силы уравновешивают друг друга. Если системе задается возможное перемещение δx, то работа, совершаемая при этом указанными силами, должна равняться нулю, что дает

$$[\ddot{x} + f(x)]\,\delta x = 0. \tag{у}$$

При применении метода усреднения Ритца[4] предполагаем, что приближенное решение для задачи о свободных колебаниях можно задать в виде ряда

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + a_3\varphi_3(t) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(t), \tag{2.23}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., — выбранные функции времени; a_1, a_2, ... — весовые коэффициенты, определяемые из условия, что возможная работа, совершаемая за один цикл, равна нулю. Возможные перемещения выбираем в форме

$$\delta x_i = \delta a_i \varphi_i(t), \tag{ф}$$

---

* **Ritz W.** Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations — Probleme der mathematischen Physik. — Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), 1909, B. 135, N. 1, S. 1—61; **Галеркин Б. Г.** Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. — Вестник инженеров, 1915, т. I, № 19, с. 897—908.

после чего работу интегрируем по интервалу времени, равному длительности одного цикла:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^r [\ddot{x} + f(x)]\, \delta a_i \varphi_i(t)\, dt = 0, \qquad (\text{х})$$

откуда получаем

$$\begin{gathered}
\int_0^r [\ddot{x} + f(x)]\, \varphi_1(t)\, dt = 0; \\
\int_0^r [\ddot{x} + f(x)]\, \varphi_2(t)\, dt = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.24) \\
\int_0^r [\ddot{x} + f(x)]\, \varphi_n(t)\, dt = 0.
\end{gathered}$$

Система уравнений (2.24) представляет собой n алгебраических уравнений, решая которые можно определить величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В качестве примера рассмотрим квазилинейную систему, для которой уравнение движения имеет вид (2.14). Если в качестве первого приближения взять решение для задачи о свободных колебаниях

$$x = a_1 \varphi_1(t) = a_1 \cos p_1 t, \qquad (\text{ц})$$

то первое уравнение системы (2.24) примет вид

$$\int_0^r [-p_1^2 a_1 \cos p_1 t + p^2 a_1 \cos p_1 t + \alpha a_1^3 \cos^3 p_1 t] \cos p_1 t\, dt = 0.$$

Учитывая равенства

$$\int_0^r \cos^2 p_1 t\, dt = \frac{1}{p_1} \int_0^{2\pi} \cos^2 p_1 t\, d(p_1 t) = \frac{\pi}{p_1};$$

$$\int_0^r \cos^4 p_1 t\, dt = \frac{1}{p_1} \int_0^{2\pi} \cos^4 p_1 t\, d(p_1 t) = \frac{3\pi}{4p_1},$$

найдем

$$p_1^2 = p^2 + \frac{3\alpha a_1^2}{4}. \qquad (2.25)$$

Это выражение совпадает с выражением (2.15), полученным методом последовательных приближений, и из него можно определить величину a_1 в зависимости от p, p_1 и α. Определяя из уравнения (2.25) коэффициент a_1 и подставляя его в представление (ц), получаем

$$x = 2\sqrt{\frac{(p_1^2 - p^2)}{3\alpha}} \cos p_1 t. \qquad (2.26)$$

В качестве более точного приближения, удовлетворяющего условиям симметрии в данном примере, можно взять два члена ряда

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) = a_1 \cos p_1 t + a_2 \cos 3p_1 t. \qquad (ч)$$

Подставляя представления (ч) в первые два уравнения системы (2.24), после интегрирования получаем систему двух кубических уравнений, которую можно решить численно и определить коэффициенты a_1 и a_2. Хотя эта часть исследования является сложной, однако трудности носят только алгебраический характер.

2.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В предыдущем параграфе рассматривались только свободные колебания нелинейных систем. Здесь же будет обсуждаться установившееся поведение нелинейной системы, на которую воздействует периодическая возмущающая сила, и применение метода усреднения Ритца[4] для получения приближенного решения.

Предположим, что в системе имеется демпфирование, пропорциональное некоторой функции $f_1(\dot{x})$ скорости, и восстанавливающая сила, пропорциональная произвольной функции $f_2(x)$ перемещения. Если на массу действует возмущающая сила в виде периодической функции $mf_3(t)$, уравнение движения может быть записано в следующем виде:

$$\ddot{x} + 2nf_1(\dot{x}) + p^2 f_2(x) = f_3(t), \qquad (2.27)$$

где слагаемые соответствуют отнесенным к единице массы силам инерции, сопротивления движению и восстанавливающей внешней силе. Согласно методу усреднения Ритца[4] предполагаем, что приближенное решение для установившихся колебаний можно представить в виде ряда, аналогичному ряду (2.23) в п. 2.3. Из условия того, что возможная работа за один цикл вынужденных колебаний должна равняться нулю, получаем систему уравнений вида

$$\int_0^\tau [\ddot{x} + 2nf_1(\dot{x}) + p^2 f_2(x) - f_3(t)]\,\varphi_i(t)\,dt = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.28)$$

Рассмотрим первый частный случай, когда отсутствует демпфирование. Тогда уравнение движения

$$\ddot{x} + p^2(x \pm \mu x^3) = q\cos\omega t. \qquad (2.29)$$

Полученное соотношение представляет собой хорошо известное *уравнение Дюффинга*, которое подробно рассмотрено Дюффингом в его книге * по колебаниям. Вынужденные колебания подобного типа являются симметричными относительно положения равновесия, и при отсутствии демпфирования динамические перемещения системы

---

* См. кн. **Duffing G.** Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz, цитированную в п. 2.2.

будут либо совпадать по фазе, либо отставать на 180° от возмущающей силы. В качестве первого приближения можно выбрать

$$x = a_1\varphi_1(t) = a_1 \cos \omega t. \qquad \text{(а)}$$

Тогда первое уравнение из системы (2.28) примет вид

$$\int_0^T [-\omega^2 a_1 \cos \omega t + p^2(a_1 \cos \omega t \pm \mu a_1^3 \cos^3 \omega t) - q \cos \omega t] \cos \omega t \, dt = 0.$$

После интегрирования и приведения подобных членов получим

$$p^2 a_1 \pm \frac{3p^2 \mu a_1^3}{4} = \omega^2 a_1 + q. \qquad (2.30)$$

Для любых заданных значений параметров p^2, μ и q из уравнения (2.30) получаем два соотношения между амплитудой a_1 и частотой ω возмущающей силы при установившихся вынужденных колебаниях. С точки зрения удобства графического представления частотных характеристик (аналогичного рис. 1.22 в п. 1.6), в случае пружины с возрастающей жесткостью лучше использовать уравнение

$$\frac{3\mu a_1^3}{4} = \left(\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right) a_1 + \frac{q}{p^2}, \qquad (2.31)$$

а в случае пружин с уменьшающейся жесткостью более удобным будет уравнение

$$\frac{3\mu a_1^3}{4} = \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) a_1 - \frac{q}{p^2}. \qquad (2.32)$$

Метод построения графиков зависимости амплитуды a от отношения частот ω/p согласно уравнениям (2.31) и (2.32) приведен ниже.

Уравнение (2.31) можно представить как наложение кубической функции от a в левой части уравнения и линейной функции от a в правой части. На рис. 2.12, *а* показаны кубическая функция и набор линейных функций для ряда значений отношения частот ω/p. Наклонная линия *1* на рис. 2.12, *а* соответствует вертикальной линии $\omega/p = 0$ на рис. 2.12, *б*, пересекающей кубическую параболу в точке A. Значение амплитуды a_1 в точке пересечения на рис. 2.12, *б* обозначено через A'. На рис. 2.12, *а* линия *2*, для которой выполняется условие $0 < \omega/p < 1$, пересекает кривую в точке B; соответствующая ей точка на рис. 2.12, *б* обозначена через B'. Горизонтальная линия *3* на рис. 2.12, *а* должна была бы изображать резонанс в случае линейной системы, но в данном случае ей соответствует другая пара точек (C и C') на диаграмме. С увеличением угла наклона линий на рис. 2.12, *а* возникает условие, при котором линия *4* не только пересекает верхнюю ветвь кривой в точке D, но и оказывается касательной к нижней ветви в точке E. Соответствующие точки D' и E' для частотной характеристики на рис. 2.12, *б* попадают на *критическую частоту* ($\omega_{кр} \geqslant p$), где тангенс угла наклона графика частотной характеристики равен бесконечности (точка E'). Более круто поднимающиеся вверх линии на рис. 2.12, *а*, аналогичные линии *5*, пересекают кубическую параболу в трех точ-

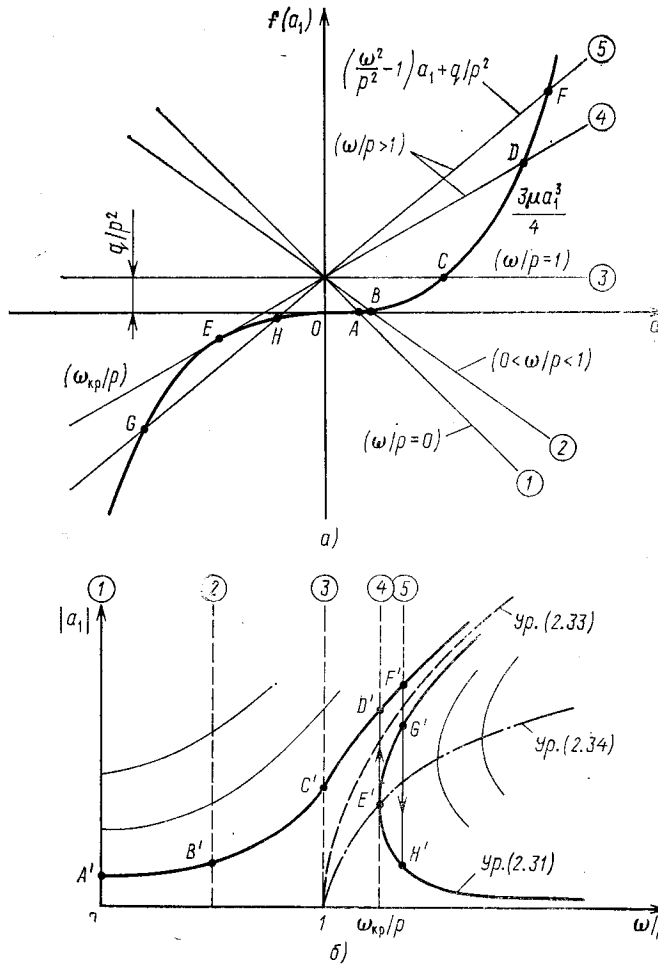


Рис. 2.12

ках (например, в точках F, G и H), которым соответствуют точки F', G' и H' на графике частотной характеристики. Таким образом, сплошная жирная линия на рис. 2.12, *б* дает графическое представление уровня (2.31).

Частотная характеристика для пружины с возрастающей жесткостью имеет асимптоту в виде гиперболы, которая показана штриховой линией на рис. 2.12, *б*. Она соответствует случаю свободных нелинейных колебаний, когда в уравнении (2.31) величина q полагается равной нулю. В результате соотношение между амплитудами и частотами при свободных колебаниях принимает следующий вид:

$$\frac{3\mu a_1^2}{4} = \frac{\omega^2}{p^2} - 1, \qquad (2.33)$$

где ω — круговая частота нелинейных колебаний. Кроме того, задавая различные значения нагрузки q, можно построить * семейство частотных характеристик (изображены сплошными светлыми линиями), аналогичных сплошной жирной линии, показанной на рис. 2.12, *б*. Геометрическое место критических точек типа E' (в которых тангенс угла наклона касательной равен бесконечности) для указанных частот представлено штрихпунктирной линией на рис. 2.12, *б*. Уравнение этой кривой можно получить, продифференцировав уравнение (2.31), в виде

$$\frac{9\mu a_1^2}{4} = \frac{\omega^2}{p^2} - 1. \qquad (2.34)$$

Возвращаясь к уравнению (2.32), полученному для случая пружины с уменьшающейся жесткостью, можно также построить характерный график частотных характеристик, используя описанный выше прием. На рис. 2.13, *а* представлены применительно к данному случаю график кубической параболы и семейство соответствующих правой части уравнения (2.32) прямых для ряда значений ω/p. Как линия *1*, так и линия *2* имеют по три точки пересечения с графиком кубической параболы, линия *3* имеет одну точку пересечения и одну точку касания, а каждая из прямых *4* и *5* имеют по одной точке пересечения с кубической параболой. Точкам A—J на рис. 2.13, *а* соответствуют точки A'—J' на рис. 2.13, *б*. В этом случае график частотной характеристики имеет вертикальную касательную в точке H', и критическая частота возникает в том случае, когда частота возмущающей силы имеет меньшую величину, чем частота резонанса в линейной системе ($\omega_{кр} \leqslant p$).

Полагая в уравнении (2.32) $q = 0$, получим уравнение показанной на рис. 2.13, *б* штриховой кривой

$$\frac{2\mu a_1^2}{4} = 1 - \frac{\omega^2}{p^2}, \qquad (2.35)$$

которая представляет собой уравнение эллипса и соответствует случаю свободных колебаний. На этом же рисунке в виде штрихпунктирной кривой представлено геометрическое место критических точек типа H' для ряда частотных характеристик. Уравнение этой кривой получаем дифференцированием уравнения (2.32), что дает

$$\frac{9\mu a_1^2}{4} = 1 - \frac{\omega^2}{p^2}. \qquad (2.36)$$

Типы показанных на рис. 2.12, *б* и 2.13, *б* частотных характеристик являются математическими моделями *явления перескока*, наблюдаемого в экспериментах с нелинейными механическими системами при действии возмущающих сил в виде гармонических функций **.

---

* **Klotter K.** Non-linear vibration problems treated by the averaging method of W. Ritz. — Proc. 1st U. S. Natl., Congr., Appl. Mech., Chicago, Illinois: Edwards Brothers Inc., 1951, pp. 125—131.

** См. кн. **Duffing G.** Erzwingene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz, цитированную в п. 2.2.

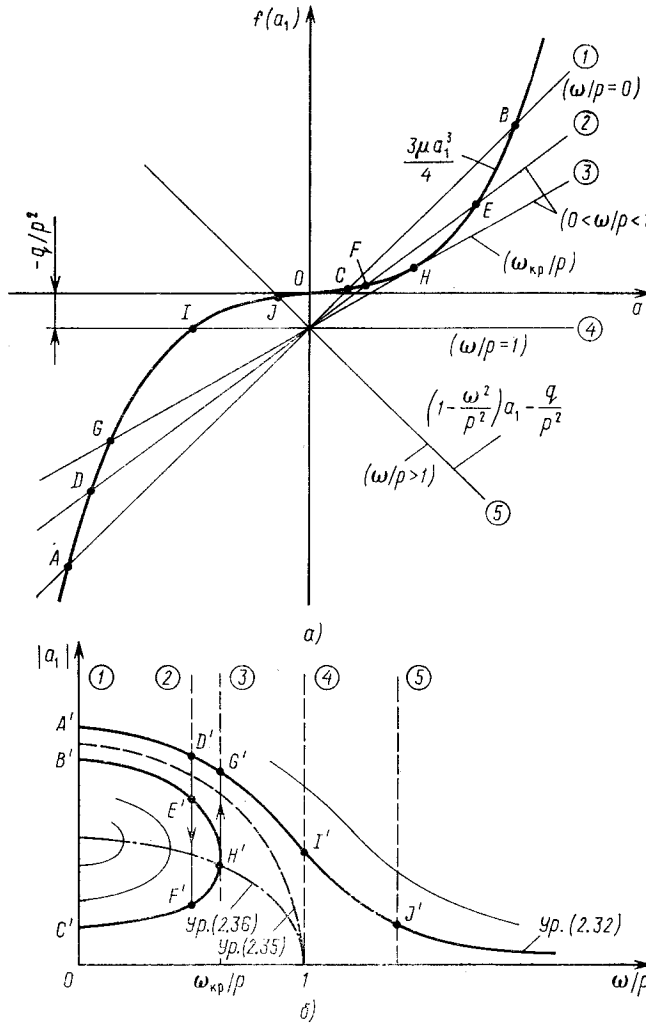


Рис. 2.13

В случае пружины с возрастающей жесткостью значительное увеличение частоты возмущающей силы (начиная с ее нулевого значения $\omega = 0$) приведет к тому, что амплитуды установившегося состояния, которым соответствует левая ветвь кривой на рис. 2.12, *б*, достигнут некоторой точки типа F'. Из-за наличия внешних возмущений система будет иметь скачок амплитуды из точки F' в точку H' на кривой; при этом фазовый угол изменяется скачком с 0 на 180°. Дальнейшее увеличение частоты возмущающей силы обусловливает поведение системы, которому соответствует монотонно убывающая часть правой ветви частотной характеристики. С другой стороны,

если частоту возмущающей силы постепенно уменьшать, начиная с некоторого ее высокого значения (большего, чем $\omega_{кр}$), то амплитуда установившегося состояния будет постепенно увеличиваться, пока не будет достигнута критическая точка E'. Затем амплитуда скачком изменится от точки E' до точки D' и также скачком изменится фазовый угол от 180° до 0. Последующее уменьшение частоты возмущающей силы приведет к тому, что динамические перемещения системы будут убывать вдоль участка $D'C'B'A'$ кривой. Таким образом, можно видеть, что при уменьшении частоты возмущающей силы амплитуда должна измениться скачком из точки E' в точку D', поскольку в случае $\omega < \omega_{кр}$ имеется только одно решение.

Как было показано К. Клоттером *, штриховая и штрихпунктирная линии на рис. 2.12, *б* очерчивают область неустойчивости; при этом точки на кривой $E'G'$ относятся к таким условиям, которые не могут быть обнаружены в реальных физических системах. Таким образом, точка E' делит правую ветвь частотной характеристики на устойчивую верхнюю часть $E'G'$ и неустойчивую нижнюю часть $E'H'$.

В случае пружины с уменьшающейся жесткостью при постепенном увеличении частоты возмущающей силы от $\omega = 0$ до $\omega > \omega_{кр}$ амплитуда установившегося состояния будет изменяться по кривой $C'F'H'G'I'J'$ (см. рис. 2.13, *б*). С другой стороны, если постепенно уменьшать частоты возмущающей силы с $\omega > \omega_{кр}$ до нуля, то реакцию системы будет описывать участок $J'I'G'D'F'C'$. В первом случае произойдет перескок из точки H' в точку G', где фазовый угол изменится от 0 до 180°. В последнем случае имеется перескок из точки D' в точку F', где фазовый угол вновь изменяется от 180° до 0. Здесь область неустойчивости ограничивается вертикальной линией $\omega/p = 0$ и кривыми, описываемыми уравнениями (2.35) и (2.36). Таким образом, точка H' делит левую часть графика частотной характеристики на неустойчивую верхнюю часть $B'E'H'$ и устойчивую нижнюю часть $C'F'H'$.

Рассмотрим теперь задачу, описываемую уравнением Дюффинга с вязким сопротивлением, где сила демпфирования пропорциональна скорости (с коэффициентом пропорциональности n). В этом случае уравнение движения может быть записано в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2(x \pm \mu x^3) = q\cos\omega t. \qquad (2.37)$$

Установившееся состояние при вынужденных колебаниях теперь будет включать в себя фазовый угол ψ, поэтому первое приближение возьмем в форме

$$x = c_1\cos(\omega t - \psi) = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t, \qquad (б)$$

где $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$, $\operatorname{tg}\psi = b_1/a_1$. Для того чтобы методом усреднения Ритца[4] определить две постоянные a_1 и b_1, воспользуемся

---

* **Klotter K., Pinney E.** A comprehensive stability criterion for the forced vibrations of non-linear systems. — Journal Appl. Mech., 1953, v. 20, N. 1, pp. 9—12.

двумя уравнениями системы (2.28), которые в этом случае примут вид

$$\int_0^\tau [\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2(x \pm \mu x^3) - q\cos\omega t]\cos\omega t\, dt = 0;$$

$$\int_0^\tau [\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2(x \pm \mu x^3) - q\cos\omega t]\sin\omega t\, dt = 0.$$

Подставив в эти уравнения представление (б) для x и проинтегрировав, получим следующие уравнения:

$$-a_1\omega^2 + 2n\omega b_1 + p^2 a_1 \pm \frac{3p^2\mu a_1 c_1^2}{4} - q = 0; \qquad (в)$$

$$-b_1\omega^2 - 2n\omega a_1 + p^2 b_1 \pm \frac{3p^2\mu b_1 c_1^2}{4} = 0. \qquad (г)$$

Используя соотношения $a_1 = c_1\cos\psi$ и $b_1 = c_1\sin\psi$, найдем

$$2n\omega c_1\sin\psi + \left(-\omega^2 + p^2 \pm \frac{3p^2\mu c_1^2}{4}\right)c_1\cos\psi - q = 0; \qquad (д)$$

$$-2n\omega c_1\cos\psi + \left(-\omega^2 + p^2 \pm \frac{3p^2\mu c_1^2}{4}\right)c_1\sin\psi = 0. \qquad (е)$$

Умножая уравнение (д) на $\cos\psi$, а уравнение (е) на $\sin\psi$ и складывая их, придем к уравнению

$$-\omega^2 + p^2 \pm \frac{3p^2\mu c_1^2}{4} = \frac{q}{c_1}\cos\psi. \qquad (ж)$$

С другой стороны, умножая уравнение (д) на H и ψ и уравнение (е) на $\cos\psi$ и вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$2n\omega = \frac{q}{c_1}\sin\psi. \qquad (з)$$

Возводя в квадрат уравнения (ж) и (з) и складывая их, имеем

$$-\omega^2 + p^2 \pm \frac{3p^2\mu c_1^2}{4} + 4n^2\omega^2 = \left(\frac{q}{c_1}\right)^2. \qquad (2.38)$$

Почленное деление уравнения (ж) на (з) дает

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{2n\omega}{-\omega^2 + p^2 \pm 3p^2\mu c_1^2/4}. \qquad (2.39)$$

Последние два уравнения связывают амплитуду c_1 и фазовый угол ψ с частотой ω возмущающей силы для произвольно заданных значений параметров p^2, μ, n и q. Если постоянную демпфирования n положить равной нулю, то получим, что фазовый угол примет значение 0 или π, $b_1 = 0$ и $c_1 = a_1$, тогда уравнение (2.38) примет вид уравнения (2.30), полученного выше для случая отсутствия демпфирования.

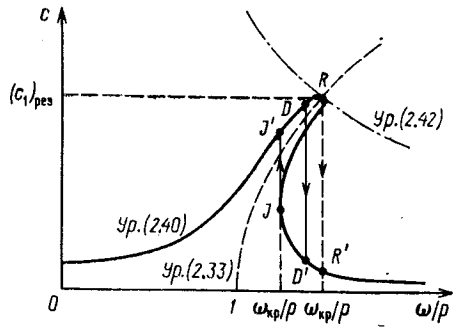


Рис. 2.14

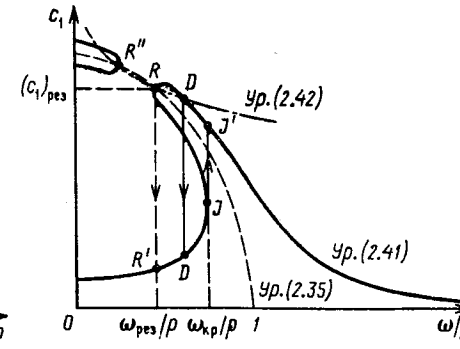


Рис. 2.15

Для того чтобы построить график частотной характеристики, преобразуем уравнение (2.38) в следующие две формы:

$$\frac{3\mu c_1^3}{4} = \left(\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right) c_1 + \frac{q}{p^2}\sqrt{1 - \frac{(2n\omega c_1)^2}{q^2}}; \qquad (2.40)$$

$$\frac{3\mu c_1^3}{4} = \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) c_1 - \frac{q}{p^2}\sqrt{1 - \frac{(2n\omega c_1)^2}{q^2}}, \qquad (2.41)$$

где первая и вторая формы будут использоваться для случаев пружин соответственно с возрастающей и уменьшающейся жесткостями.

При отсутствии демпфирования эти уравнения принимают вид уравнений (2.31) и (2.32). Правые части уравнений (2.40) и (2.41) уже не представляют собой уравнений прямых линий, поэтому в данном случае графическое построение частотной характеристики является более сложным, чем при отсутствии демпфирования. Тем не менее, общий вид результирующих графиков сходен и представлен на рис. 2.14 и 2.15 для пружин соответственно с возрастающей и уменьшающейся жесткостями.

Штриховая кривая на рис. 2.14 имеет тот же смысл, что и аналогичная кривая, получаемая по уравнению (2.33), а геометрическое место точек, в которых частотная характеристика пересекает эту кривую, соответствующую случаю свободных колебаний, можно найти, решая систему двух уравнений (2. 33) и (2.40). В результате получим

$$c_{1\,рез} = \frac{q/2np}{\omega_{рез}/p} = \frac{q}{2n\omega_{рез}}, \qquad (2.42)$$

где $\omega_{рез}$ — *резонансная частота;* $c_{1\,рез}$ — *резонансная амплитуда.* Уравнение (2.42) описывает семейство гипербол в плоскости c_1 и ω/p (см. штрихпунктирную линию на рис. 2.14). Следовательно, для любого конкретного значения величины $q/(2np)$ можно построить гиперболу по уравнению (2.42). Ее пересечение с кривой для свободных колебаний даст приближенно максимальное значение, которое может достичь амплитуда при установившихся вынужденных колебаниях. Если требуется знать только указанное максимальное значение, нет нужды строить полностью график частотной характе-

ристики и тем самым можно избежать трудностей построения графиков при решении уравнения (2.40).

Аналогично сказанному, штриховая кривая на рис. 2.15 имеет тот же смысл, что и такая же кривая, получаемая из уравнения (2.35); при этом геометрическое место точек, где график частотной характеристики пересекает соответствующую кривую, построенную для случая свободных колебаний, можно найти, решив систему уравнений (2.35) и (2.41). Результирующее выражение имеет тот же вид, что и полученное ранее выражение (2.42), поэтому штрихпунктирная линия на рис. 2.15 является такой же гиперболой. В этом случае возможно существование двух точек пересечения графиков, указывающее на наличие верхней ветви частотной характеристики, которая не имеет физического смысла.

В системах с малым демпфированием теоретическое условие резонанса, представленное точкой R на рис. 2.14 и 2.15, может в действительности оказаться недостижимым из-за возникновения перескока. На каждом из этих рисунков возможность перескока вниз отмечена переходом из точки D в точку D', перескоку вверх соответствует переход из точки J в точку J'. Наличие внешних возмущений может вызвать преждевременный перескок, тем самым исключая возможность возникновения действительного резонанса. При отсутствии упомянутого внешнего воздействия скачок на каждом из рисунков приближенно изображался бы переходом из точки R в точку R' на графике частотной характеристики.

Для систем с демпфированием фазовой угол при изменении частоты ω возмущающей силы от 0 до ∞ изменяется непрерывно от 0° до π. При резонансе фазовый угол теоретически равен $\pi/2$, но в действительности он изменяется скачком при возникновении перескока в системе. При этом он изменяется от значения несколько меньшего (или большего), чем $\pi/2$, до значения несколько большего (или меньшего), чем $\pi/2$.

Метод усреднения Ритца[4] успешно применялся к различным задачам, включая свободные и вынужденные колебания нелинейных систем. Высокая точность была достигнута * при использовании одночленного приближения для систем с восстанавливающей силой, описываемой симметричными функциями n-го порядка, а также кусочно-линейными функциями. Уравнение Дюффинга является только одним из примеров такого типа. Для систем с восстанавливающими силами несимметричного вида требуется использовать по крайней мере двучленные приближения и при этом быстро растут трудности алгебраического характера.

2.5. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Как уже упоминалось в п. 2.1, некоторые колеблющиеся системы обладают кусочно-линейными характеристиками. Подобные системы зачастую оказываются несложными для исследования, а в некоторых

* См. ст. **Klotter K.** Non-linear vibration problems treated by the averaging method of W. Ritz, цитированную в п. 2.4.

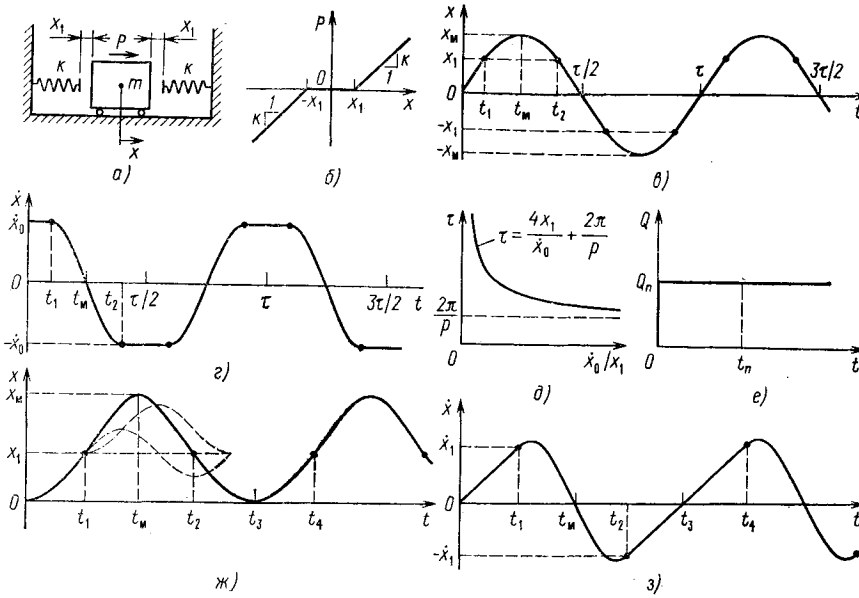


Рис. 2.16

случаях позволяют получить точные решения. К этой категории относятся системы с пружинами, не обладающими линейно-упругими характеристиками, неупругие материалы с кусочно-линейным поведением, включая упругопластические, а также и системы с сопротивлением в виде кулоновского трения. Подобные системы будут обсуждаться в данном параграфе с целью исследования их поведения при свободных колебаниях с начальными условиями в форме перемещения и скорости, при вынужденных колебаниях, обусловленных действием возмущающих сил в виде периодических функций, а также для определения неустановившегося поведения при произвольном воздействии.

На рис. 2.16, *а* показана колеблющаяся система с массой, установленной в зазор между двумя линейно упругими пружинами. Если измерить перемещение массы относительно срединного положения, то статическая диаграмма зависимости нагрузки от перемещения примет вид, показанный на рис. 2.16, *б*. В этом случае период свободных колебаний зависит от величины зазора и других параметров. Предположим, что в момент времени $t = 0$ начальное перемещение массы равно нулю, а начальная скорость равна $\dot{x}_0$. Время, необходимое для того, чтобы пройти длину зазора x_1,

$$t = \frac{x_1}{x_0}. \qquad \text{(а)}$$

После прохода через зазор масса вступает в контакт с правой пружиной, и дальнейшее движение носит гармонический характер до тех пор, пока масса не отскочит от пружины через время t_2. Время,

в течение которого скорость изменяется от $\dot{x}_0$ до нуля, равно одной четверти периода собственных колебаний массы m, прикрепленной к пружине с жесткостью k. Таким образом, время, за которое достигается максимальное перемещение,

$$t_м = t_1 + \frac{\pi}{2p} = \frac{x_1}{\dot{x}_0} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (б)$$

Следовательно, полный период колебаний действительной системы

$$\tau = 4t_м = \frac{4x_1}{\dot{x}_0} + \frac{2\pi}{p} = \frac{4x_1}{\dot{x}_0} + 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (2.43)$$

Далее заметим, что максимальное перемещение массы, обусловленное заданной начальной скоростью, равно сумме длины зазора x_1 и амплитуды упомянутого выше гармонического движения:

$$x_м = x_1 + \frac{\dot{x}_0}{p} = x_1 + \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (2.44)$$

Изменение во времени перемещения и скорости при колебаниях системы без демпфирования показано на рис. 2.16, *в* и *г*. Отметим, что скорость на последнем рисунке является постоянной, несмотря на то, что масса не имеет контакта с одной из пружин.

Для заданных значений величины зазора x_1, массы m и жесткости пружины k период колебаний τ [см. формулу (2.43)] зависит только от начальной скорости $\dot{x}_0$. Когда величина $\dot{x}_0$ приближается к нулю, период колебаний стремится к бесконечности, а когда скорость становится бесконечно большой, период колебаний принимает значения $2\pi/p$. На рис. 2.16, *д* представлен график колебаний для этих случаев, из которого видно, что подобная система будет стремиться войти в резонанс с возмущающей силой, описываемой произвольной периодической функцией, имеющей период больший или равный $2\pi/p$. Однако амплитуда таких вынужденных колебаний будет всегда иметь верхний предел, за исключением случая, когда период функции, описывающей возмущающую силу или одну из ее гармонических компонент, равен $2\pi/p$.

Предположим теперь, что система на рис. 2.16, *а* первоначально находится в покое и на нее воздействует возмущающая сила в виде ступенчатой функции, показанной на рис. 2.16, *е*. При действии постоянной силы Q_n ускорение массы при прохождении через зазор будет $q_n = Q_n/m$. Тогда скорость и перемещение соответственно составят

$$\dot{x} = q_n t; \quad x = q_n t^2/2. \qquad (в)$$

Последнее выражение представляет собой параболу на отрезке от $t = 0$ до $t = t_1$ графика зависимости перемещения от времени (рис. 2.16, *ж*), а предыдущее выражение есть уравнение прямой линии на том же самом отрезке графика скорости (рис. 2.16, *з*). В этом случае время, необходимое для того, чтобы масса прошла зазор x_1,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{q_n}}, \qquad (г)$$

а скорость в момент времени t_1

$$\dot{x}_1 = q_n t_1 = \sqrt{2 q_n x_1}. \qquad (д)$$

Когда происходит соприкосновение массы с правой пружиной, масса имеет начальную скорость $\dot{x}_1$, и тогда реакцию системы на отрезке времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ можно представить в следующем виде:

$$x = x_1 + \frac{\dot{x}_1}{p} \sin p(t - t_1) + \frac{Q_n}{k}[1 - \cos p(t - t_1)], \qquad (е)$$

где второе слагаемое в правой части обусловлено влиянием начальной скорости $\dot{x}_1$, а последнее слагаемое характеризует влияние возмущающей силы. Эти два слагаемых представлены штриховыми линиями на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ (см. рис. 2.16, *ж*), а график суммы всех трех слагаемых показан сплошной жирной линией. Продифференцировав выражение (е), найдем, что в момент времени

$$t_м = t_1 + \frac{1}{p} \operatorname{arctg}\left(-\frac{\dot{x}_1/p}{Q_n/k}\right) \qquad (2.45)$$

максимальное перемещение

$$x_м = x_1 + \frac{Q_n}{k} + \sqrt{\left(\frac{Q_n}{k}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{p}\right)^2}. \qquad (2.46)$$

Поскольку указанная кривая симметрична относительно времени $t_м$, то в значение x_1 она приходит также и в момент времени t_2, что дает

$$t_2 = 2t_м - t_1. \qquad (ж)$$

Затем масса выходит из контакта с правой пружиной и на отрезке $t_2 \leqslant t \leqslant t_4$ график ее движения представляет параболу (см. рис. 2.16, *ж*). Эта парабола симметрична относительно точки, соответствующей времени t_3. Тогда для этого отрезка времени можно записать

$$t_3 = t_2 + t_1; \quad t_4 = t_2 + 2t_1. \qquad (з)$$

В момент времени t_4 масса вновь входит в контакт с правой пружиной и вновь повторяется описанное выше перемещение. Соответствующая зависимость скорости движения от времени приведена на рис. 2.16, *з*, где можно видеть, что эта зависимость является линейной тогда, когда масса не находится в контакте с пружиной.

Если в момент времени t_n постоянная сила Q_n внезапно удаляется из системы (см. рис. 2.16, *е*), то будем иметь прямоугольный импульс вместо ступенчатой функции. В момент времени t_n система имеет некоторое перемещение x_n и некоторую скорость $\dot{x}_n$, которые можно определить из графиков на рис. 2.16, *ж* и *з*. Используя эти величины в качестве начальных условий, можно определить последующее поведение системы при свободных колебаниях, поступая точно так же, как при построении графиков на рис. 2.16, *в* и *г*.

В качестве второго примера *кусочно-линейной упругой системы* рассмотрим установку симметричной конструкции на рис. 2.17, *а*.

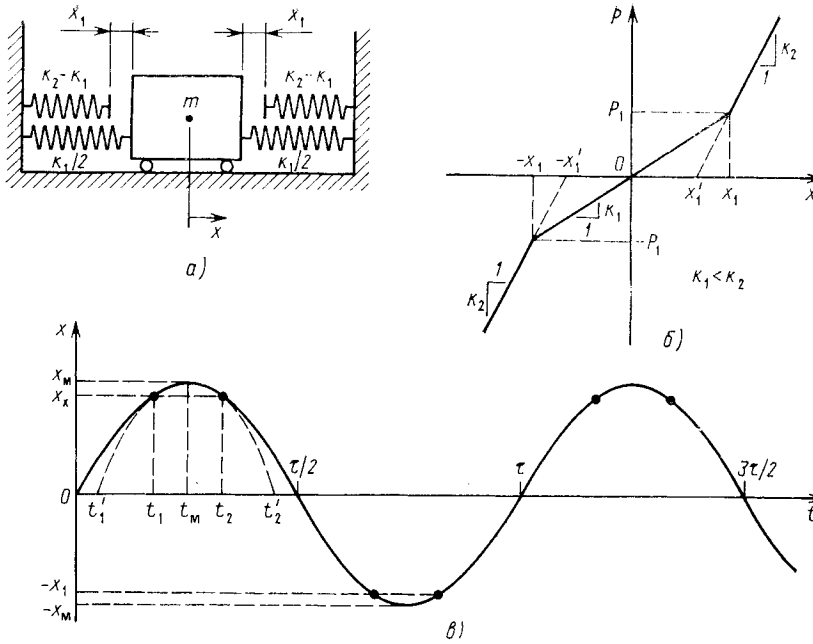


Рис. 2.17

Эта система похожа на изображенную на рис. 2.16, *а*, но в ней имеются дополнительные пружины, дающие восстанавливающую силу при любом отличном от нуля перемещении от среднего положения. Статическая диаграмма зависимости нагрузки от перемещения для этого случая показана на рис. 2.17, *б*, где прямая, выходящая из начала координат, имеет тангенс угла наклона, равный k_1, а у прямых с большим углом наклона тангенс этого угла равен k_2. Если перемещение системы никогда не превышает $\pm x_1$, движение будет простым гармоническим, но если перемещения по величине превышают x_1, характер движения становится более сложным.

Для того чтобы изучить характеристики этой системы при свободных колебаниях, предположим, что в момент времени $t = 0$ начальное перемещение массы равно нулю, но имеется начальная скорость $\dot{x}_0 > p_1 x_1$, где $p_1 = \sqrt{k_1/m}$. При такой скорости масса будет перемещаться дальше точки x_1, и тогда зависимость перемещения от времени будет иметь вид, показанный на рис. 2.17, *в*. На отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ перемещение этой системы описывается выражением

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p_1} \sin p_1 t, \qquad \text{(и)}$$

а скорость имеет вид

$$x = x_0 \cos p_1 t. \qquad \text{(к)}$$

В момент времени t_1 масса достигнет точки x_1, где кончается первая упругая область. Тогда из выражения (и) находим это время:

$$t_1 = \frac{1}{p_1} \arcsin \frac{p_1 x_1}{\dot{x}_0}, \qquad (л)$$

а соответствующую скорость находим из выражения (к):

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{p_1 x_1}{\dot{x}_0}\right)^2}. \qquad (м)$$

Далее масса вступает в контакт с верхней правой пружиной (см. рис. 2.17, *а*) и тогда уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} + k_1 x + (k_2 - k_1)(x - x_1) = 0$$

или

$$m\ddot{x} + k_2 x = (k_2 - k_1) x_1. \qquad (н)$$

В правой части уравнения (н) стоит величина, которую можно рассматривать как псевдоступенчатую функцию возмущающей силы, приложенную к системе с жесткостью пружины k_2. В рамках такого подхода суммарную реакцию можно вычислять как сумму влияния начальных условий в момент времени t_1 и влияния псевдоступенчатой функции. В результате получаем перемещение

$$x = x_1 \cos p_2 (t - t_1) + \frac{\dot{x}_1}{p_2} \sin p_2 (t - t_1) + \frac{k_2 - k_1}{k_2} x_1 [1 - \cos p_2 \times$$

$$\times (t - t_1)] = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) x_1 + \frac{k_1}{k_2} x_1 \cos p_2 (t - t_1) + \frac{\dot{x}_1}{p_2} \sin p_2 (t - t_1) \qquad (о)$$

и скорость

$$\dot{x} = -\frac{k_1}{k_2} p_2 x_1 \sin p_2 (t - t_1) + \dot{x}_1 \cos p_2 (t - t_1). \qquad (п)$$

В выражениях (о) и (п) через p_2 обозначена круговая частота $p_2 = \sqrt{k_2/m}$ при гармоническом движении во второй упругой области. Из выражения (п) видно, что максимум динамического перемещения имеет место в момент времени

$$t_м = t_1 + \frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{k_2 \dot{x}_1}{k_1 p_2 x_1}. \qquad (р)$$

Первый член в выражении (о)

$$\dot{x}_1' = [1 - (k_1/k_2)] x_1 \qquad (с)$$

указывает точку, в которой проходящая под бóльшим углом прямая на рис. 2.17, *б* пересекает положительную ось x. Далее, коэффициент при косинусе в выражении (о) характеризует начальное перемещение

$$\frac{k_1}{k_2} x_1 = x_1 - x_1'$$

относительно точки пересечения. Можно представить, что штриховая линия на рис. 2.17, *в* изображает гармоническое движение, смещен-

ное во вторую упругую область. Полуцикл этого движения начинается в момент времени t_1' и заканчивается в момент t_2'. Эти значения времени находим из выражений $t_1' = t_м - \pi/(2p_2)$; $t_2' = t_м + \pi/(2p_2)$, а время t_2, соответствующее второй точке касания штриховой и сплошной линии, получаем из выражения

$$t_2 = t_1 + \frac{2}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{k_2 \dot{x}_1}{k_1 p_2 x_1}. \qquad (т)$$

Как и в предыдущем случае, полный период колебания можно определить по формуле

$$\tau = 4t_м = 4t_1 + \frac{4}{p_2} \operatorname{arctg} \left(\frac{k_2 \dot{x}_1}{k_1 p_2 x_1} \right). \qquad (2.47)$$

Отметим так же, что, как видно из выражения (о), перемещение массы, обусловленное заданной начальной скоростью, равно сумме x_1' и амплитуды гармонического движения, смещенного во вторую упругую область:

$$x_м = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) x_1 + \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} x_1\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{p_2}\right)^2}. \qquad (2.48)$$

Очевидно, что, для того чтобы входящую в формулы (2.47) и (2.48) скорость $\dot{x}_1$ выразить через начальную скорость $\dot{x}_0$, надо воспользоваться равенством (м).

Если на систему, показанную на рис. 2.17, *а*, действует возмущающая сила, описываемая гармонической функцией $Q \sin \omega t$, ее уравнение движения следует записать отдельно для каждой из трех областей изменения перемещения x следующим образом:

для $-x_1 \leqslant x \leqslant x_1$ имеем $m\ddot{x} + k_1 x = Q \sin \omega t$; (у)

для $x_1 \leqslant x$ имеем $m\ddot{x} + k_2 x = Q \sin \omega t + (k_2 - k_1) x_1$; (ф)

для $x \leqslant x_1$ имеем $m\ddot{x} + k_2 x = Q \sin \omega t - (k_2 - k_1) x_1$. (х)

Хотя эти уравнения могут быть использованы для определения неустановившегося поведения системы, они неудобны для исследования установившегося поведения. К. Клоттер* исследовал этот случай вынужденных колебаний с помощью метода усреднения Ритца[4], используя одночленное приближение. На рис. 2.18 представлен ряд графиков частотных характеристик для отношения жесткостей $k_1/k_2 = 1/2$. Для того чтобы эти графики были безразмерными, строятся зависимости отношения x/x_1 от ω^2/p^2 для ряда значений параметра нагрузки $\zeta = Q/(k_1 x_1)$.

Для иллюстрации *неупругих кусочно-линейных систем* обратимся к системе, показанной на рис. 2.19, *а*, где масса m прикреплена к концу гибкой вертикальной стойки. Предполагается, что приложение горизонтальной нагрузки P вызывает только малые перемещения x и что система обладает упругопластической характеристикой

* **Klotter K.** Non-linear vibration problem treated by the averaging method of W. Ritz. — Div. of Engng Mech., Stanford University, Techn. Rept. 1951, N. 17, Parts I, II.

(см. п. 2.1). Таким образом, статическая диаграмма зависимости нагрузки от перемещения (рис. 2.19, *б*) имеет равный некоторой отличной от нуля константе k тангенс угла наклона до тех пор, пока около опоры стойки не образуется внезапно пластический шарнир (*ПШ*). В этот момент ордината диаграммы равна максимальному значению $P_м$ и тангенс угла наклона кривой — нулю. Предположим, что в момент времени $t = 0$ начальное перемещение массы равно нулю, а для начальной скорости выполняется условие $\dot{x}_0 > px_1$, где $p = \sqrt{k/m}$, x_1 — перемещение, достигнутое в момент времени t_1, когда образовался пластический шарнир. На отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеем следующие выражения для перемещения и скорости:

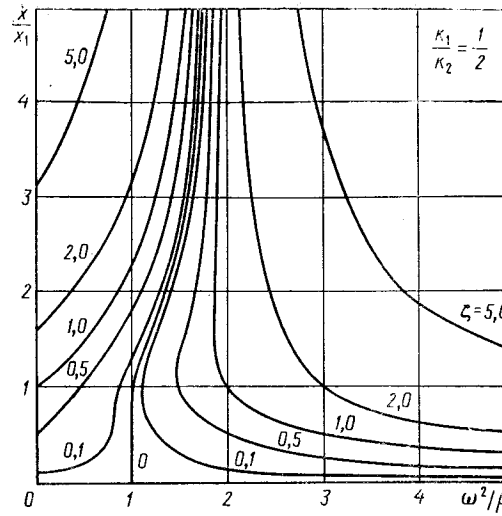


Рис. 2.18

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt; \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \cos pt, \tag{ц}$$

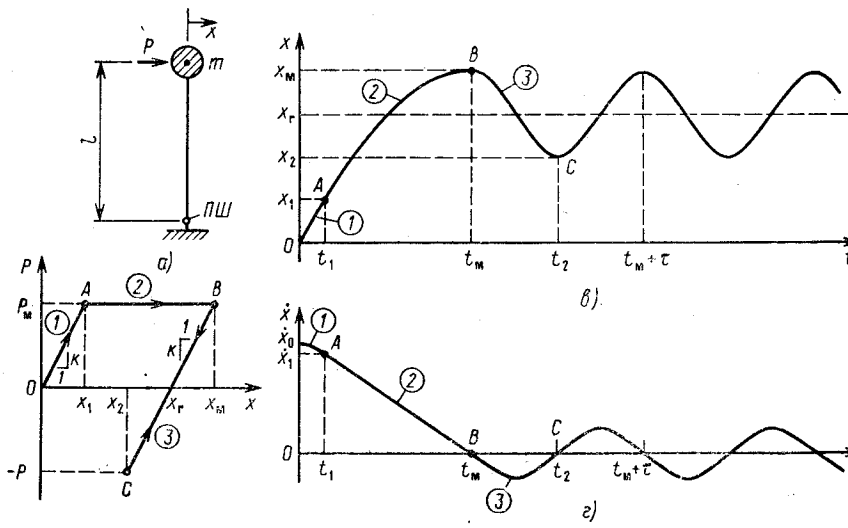


Рис. 2.19

которым соответствуют линии *1* на рис. 2.19, *в* и *г*. Подставляя $x_1 = P_м/k$ в выражения (ц), получим

$$t_1 = \frac{1}{p}\arcsin\left(\frac{P_м p}{k\dot{x}_0}\right); \quad x_1 = \dot{x}_0\sqrt{1-\left(\frac{P_м p}{k\dot{x}_0}\right)^2}. \qquad (ч)$$

После того как образовался пластический шарнир, т. е. на отрезке времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_м$, имеем следующие выражения для перемещения и скорости:

$$x = x_1 + \dot{x}_1(t-t_1) - \frac{P_м(t-t_1)^2}{2m}; \quad \dot{x} = \dot{x}_1 - \frac{P_м(t-t_1)}{m}. \qquad (ш)$$

Эти выражения (уравнения параболы и прямой линии) представлены линиями *2* на рис. 2.19, *в* и *г*. Как видно из выражений (ш), максимальное перемещение $x_м$ будет в момент времени

$$t_м = t_1 + \frac{m\dot{x}_1}{P_м} = t_1 + \frac{1}{p}\sqrt{\left(\frac{k\dot{x}_0}{P_м p}\right)^2 - 1}; \qquad (2.49)$$

при этом его амплитуда

$$x_м = x_1 + \dot{x}_1(t_м - t_1) - \frac{P_м(t_м - t_1)^2}{2m} = \frac{P_м}{2k}\left[\left(\frac{k\dot{x}_0}{P_м p}\right)^2 + 1\right]. \qquad (2.50)$$

После этого момента времени $t_м$ в основании стойки перестает работать пластический шарнир, и траектория движения массы ограничивается упругой ветвью диаграммы зависимости нагрузки от перемещения (линия *3* на рис. 2.19, *б*). При $t \geqslant t_м$ поведение системы в случае свободных колебаний представляет собой простое гармоническое движение, описываемое выражением

$$x = x_м - \frac{P_м}{k}[1 - \cos pt] = x_{ост} + \frac{P_м}{k}\cos pt, \qquad (щ)$$

где $x_{ост}$ — *остаточное перемещение*, обусловленное пластическими деформациями материала и равное

$$x_{ост} = x_м - \frac{P_м}{k} = \frac{P_м}{2k}\left[\left(\frac{k\dot{x}_0}{P_м p}\right)^2 - 1\right]. \qquad (2.51)$$

И, наконец, скорость в этом диапазоне времени можно найти из выражения

$$\dot{x} = -\frac{P_м p}{k}\sin pt. \qquad (э)$$

Выражениям (щ) и (э) соответствуют кривые *3* на рис. 2.19, *в* и *г*. Из второй формы выражения (щ) видно, что новым положением равновесия при *колебаниях с остаточными деформациями* будет *остаточное перемещение* $x_{ост}$ (см. рис. 2.19, *в*).

Если показанная на рис. 2.19, *а* система подвергается импульсному нагружению, то ее реакцию при этом можно определить так же, как это делалось выше для случая, когда задана начальная скорость. В частности, можно рассмотреть прямоугольный импульс величиной Q_n и длительностью t_n, а получив решения для ряда

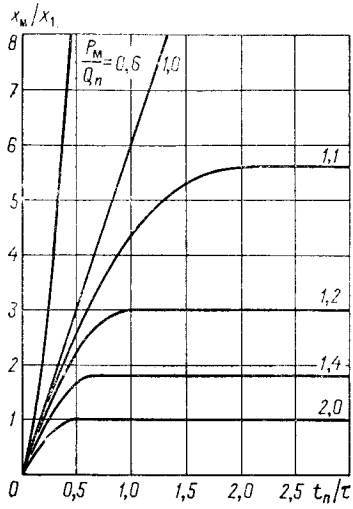


Рис. 2.20

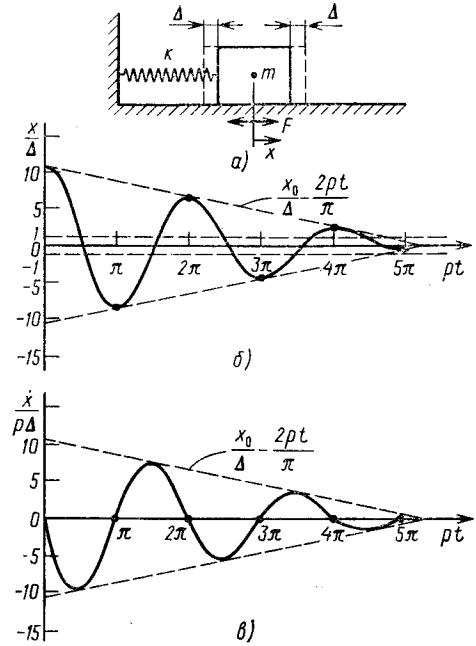


Рис. 2.21

различных значений параметров, можно построить * графики частотных характеристик спектральных функций, показанные на рис. 2.20. Эти графики характеризуют зависимость безразмерного максимального значения перемещения $x_м/x_1$ от безразмерного времени $t_п/\tau$ для различных значений отношения $P_м/Q_п$, включая случай упругого поведения, рассмотренный в п. 1.14 (см. рис. 1.52, *а*). Когда боковое перемещение x становится большим применительно к геометрии рис. 2.19, *а*, следует учитывать влияние обусловленного силой земного притяжения момента mgx, который следует добавить к моменту Pl, обусловленному действием горизонтальной силы.

В заключение приведенного обсуждения кусочно-линейных задач с кусочно-линейными характеристиками восстанавливающих сил рассмотрим *систему с кулоновским трением*, которая кратко рассматривалась в п. 2.1. Как и в предыдущем случае, отметим, что блок на рис. 2.21, *а* имеет не одно положение статического равновесия. В действительности он имеет бесконечное множество таких положений в диапазоне перемещений $-\Delta \leqslant x \leqslant \Delta$, где $\Delta = F/k$ обозначает такое положение системы, когда сила трения F и восстанавливающая сила $k\Delta$ равны. Далее отметим, что сила трения F всегда действует в направлении, противоположном направлению вектора скорости движения системы. Затем надо написать два диф-

* **Design** of structures to resist the effects of atomic weapons. — U. S. Army Corps of Engineers, Manual EM 1110-345-415, 1957.

ференциальных уравнения для свободных колебаний системы. Когда блок (см. рис. 2.21, *а*) движется вправо, то имеем

$$m\ddot{x} + kx = -F, \quad \dot{x} > 0, \tag{а'}$$

а при движении влево —

$$m\ddot{x} + kx = F, \quad \dot{x} < 0. \tag{б'}$$

Уравнения (а) и (б) могут быть записаны в более компактной форме

$$\ddot{x} + kx = -F \operatorname{sign}(\dot{x}), \tag{в'}$$

где функция sign $(\dot{x})$ обозначает знак скорости.

Предположим, что блок на рис. 2.21, *а* переместили вправо на величину $x_0 \geqslant \Delta$ и затем отпустили с начальной скоростью, равной нулю. Когда блок движется влево, следует использовать уравнение (б), решением которого будет

$$x = x_0 \cos pt + \frac{F}{k}(1 - \cos pt) = \Delta + (x_0 - \Delta)\cos pt. \tag{2.52а}$$

В это время выражение для скорости имеет вид

$$\dot{x} = -p\,(x_0 - \Delta)\sin pt. \tag{2.52б}$$

Таким образом, движение на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant \pi/p$ является гармоническим, а $p = \sqrt{k/m}$ является круговой частотой этого движения. В момент времени $t = \pi/p$ максимальное отрицательное перемещение равно $-(x_0 - 2\Delta)$, а знак скорости изменяется от минуса до плюса. Затем, в следующий отрезок времени $\pi/p \leqslant t \leqslant 2\pi/p$ блок движется вправо, и тогда, решая уравнение (а'), получаем

$$x = -(x_0 - 2\Delta)\cos pt - \frac{F}{k}(1 - \cos pt) = -\Delta - (x_0 - 3\Delta)\cos pt; \tag{2.53а}$$

при этом выражение для скорости имеет вид

$$\dot{x} = p\,(x_0 - 3\Delta)\cos pt. \tag{2.53б}$$

Таким образом, видим, что на втором отрезке времени движение также является гармоническим и имеет ту же частоту.

Рассмотрение выражений (2.53а) и (2.53б) показывает, что первое из них описывает колебание с амплитудой $x_0 - \Delta$ относительно правого положения равновесия (в точке $x = \Delta$), а второе — колебание с амплитудой $x_0 - 3\Delta$ относительно левого положения равновесия (в точке $x = -\Delta$). Таким образом, за время π/p величина максимального перемещения уменьшается на 2Δ, а за время $2\pi/p$ — на 4Δ. Продолжая рассмотрение дальше, видим, что амплитуда движения уменьшается на величину 2Δ за каждый полуцикл до тех пор, пока амплитуда не станет меньшей, чем Δ. После чего блок остановится в одном из крайних положений внутри области $-\Delta \leqslant x \leqslant \Delta$.

На рис. 2.21, *б* и *в* представлены графики зависимостей перемещения и скорости показанного на рис. 2.21, *а* блока от безразмерного времени, когда заданы начальные условия вида $x_0 = 10{,}5\Delta$;

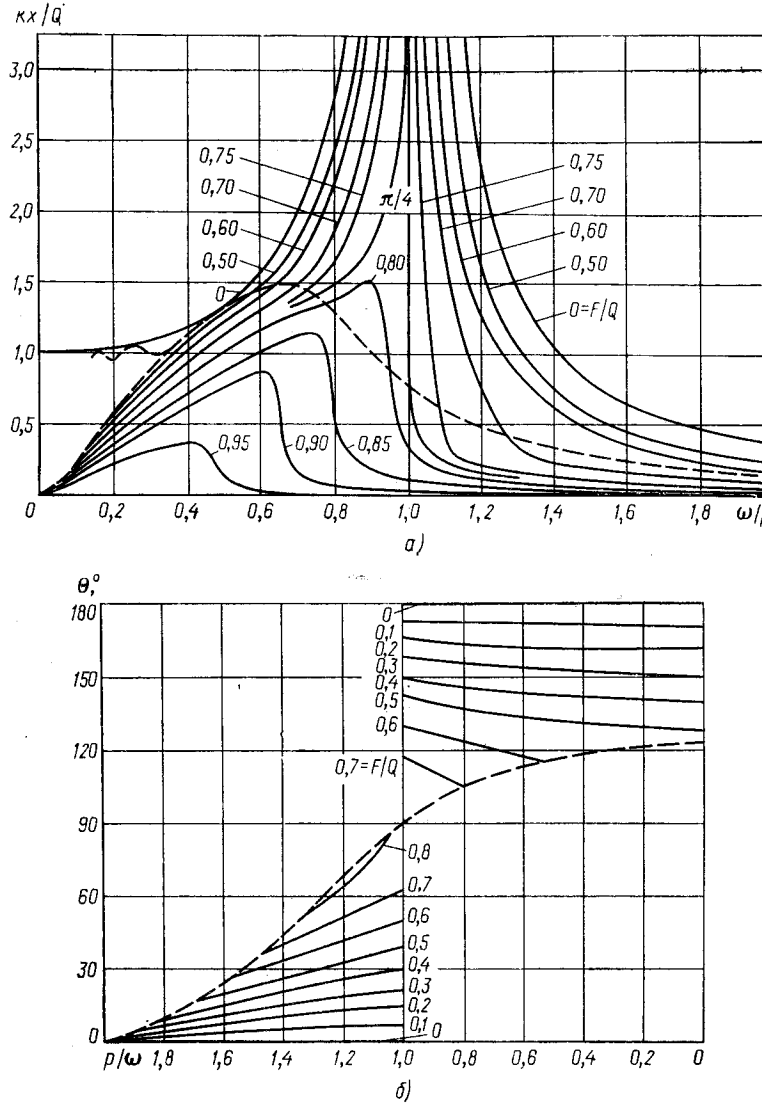


Рис. 2.22

$\dot{x}_0 = 0$. Амплитуды этих графиков уменьшаются по линейному закону в соответствии с выражением

$$\frac{x_м}{\Delta} = \frac{\dot{x}_м}{p\Delta} = \pm\left(\frac{x_0}{\Delta} - \frac{2pt}{\pi}\right). \qquad (2.54)$$

Этому выражению соответствуют наклонные штриховые линии, огибающие кривые на рис. 2.21, *б* и *в*. В соответствии с выбранными

начальными условиями масса прекращает свое движение в точке $x = -0{,}5\Delta$, совершив 2,5 цикла колебаний. Поскольку в моменты времени $t = \pi/p$, $2\pi/p$, ... демпфирующая сила меняется скачкообразно, то углы наклона кривой на рис. 2.21, *в* имеют в этих точках разрывы.

Хотя на каждом полуцикле сила трения изменяет свое направление, для системы, показанной на рис. 2.21, *а*, не представляет труда исследовать неустановившееся поведение при действии импульсного возмущения. Однако исследование установившегося поведения при действии возмущающей силы в виде периодической функции типа $Q\cos\omega t$ представляет известные трудности. Приближенное решение, основанное на представлении вязкого демпфирования, приведено в п. 1.10, но можно получить и точное решение *.

На рис. 2.22, *а* и *б* представлены графики для коэффициента усиления kx/Q и фазового угла θ, построенные для случая вынужденных колебаний системы с сопротивлением в виде трения. Каждой кривой на этих рисунках соответствует определенный уровень демпфирования, определяемый отношением F/Q. Штриховая линия на рис. 2.22, *а* обозначает предел, выше которого возникают безостановочные колебательные движения. Ниже этого предела при движении имеются промежуточные остановки, где сила трения имеет некоторое положительное значение P, лежащее в диапазоне $-F \leqslant P \leqslant F$.

ЗАДАЧИ

2.5.1. Для изображенной на рис. 2.16, *а* системы принять, что на нее действует прямоугольный импульс величиной Q_n и длительностью t_n (см. рис. 2.16, *е*). Пусть t_n — время, равное тому времени, которое требуется, чтобы скорость $\dot{x}$ (рис. 2.16, *з*) достигла своего первого максимального значения. Определить указанное время t_n и амплитуду последующих свободных колебаний.

Ответ:

$$t_n = t_1 + \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\left(\frac{Q_n}{k}\,\frac{\dot{x}_1}{p}\right);$$

$$A = \sqrt{\left(x + \frac{Q_n}{k}\right)^2 + \left(\frac{Q_n}{k}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{p}\right)^2}.$$

2.5.2. Пусть на систему, изображенную на рис. 2.17, *а*, действует возмущающая сила в виде ступенчатой функции, равной $Q_n = k_1 x_1$ и приложенной в момент времени $t = 0$. Определить значение максимального перемещения $x_м$ и время $t_м$, при котором оно имеет место.

Ответ:

$$t_м = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right);\quad x_м = x_1\left(1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right).$$

2.5.3. Предположить, что упомянутый в задаче 2.5.2 импульс прикладывается точно в момент времени t_n, когда масса достигает точки $x = x_1$ излома диаграммы. Определить время t_n и амплитуду последующих свободных колебаний.

---

* **Den Hartog J. P.** Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction. — Journal Appl. Mech., 1931, v. 53, N. 15, pp. 107—115.

Ответ:

$$t_n = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k_1}};\quad A = x_1\left[1 + \frac{k_1}{k_2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{k_2}{k_1}}\right)\right].$$

2.5.4. Предположить, что на систему, изображенную на рис. 2.19, *а*, с момента времени $t = 0$ действует сила, описываемая ступенчатой функцией с $Q_n = \frac{kx_1}{1{,}5}$. Определить выражения для максимального перемещения $x_м$ и времени $t_м$ ее появления.

Ответ:

$$t_м = 3{,}83\sqrt{\frac{m}{k}};\quad x_м = \frac{3x_1}{2}.$$

2.5.5. Предположить, что на систему, изображенную на рис. 2.19, *а*, с момента времени $t = 0$ действует прямоугольной формы импульс величиной $Q_n = kx_1$. Считая, что импульс прекращает свое действие в момент времени t_n, когда образуется пластический шарнир, определить выражения для максимального перемещения $x_м$ и остаточного перемещения $x_{ост}$.

Ответ:

$$x_м = \frac{3x_1}{2};\quad x_{ост} = \frac{x_1}{2}.$$

2.5.6. Изображенный на рис. 2.21, *а* блок смещается из нейтрального положения на расстояние $x_0 = 0{,}254$ м, а затем отпускается без начальной скорости. Блок имеет вес $W = 9{,}08$ Н; жесткость пружины $k = 1{,}79 \cdot 10^2$ Н/м. Сколько времени будет совершать колебательное движение указанный блок, если коэффициент трения равен $^1/_4$.

Ответ: 2,26 с.

2.5.7. Предположим, что жесткость пружины, изображенной на рис. 2.21, *а* системы $k = 4W$, где W — вес блока. Если амплитуда свободных колебаний уменьшается от 0,635 до 0,571 м за 10 циклов, то чему равен коэффициент трения?

Ответ: 0,25.

2.5.8. Масса, показанная на рис. А.2.5.8, *а*, соединена с пружинами, имеющими неодинаковые жесткости, поэтому статическая диаграмма зависимости нагрузки от перемещения (рис. 2.5.8, *б*) является несимметричной относительно начала координат. Предполагая, что в момент времени $t = 0$ начальные условия имеют вид $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 \neq 0$, определить зависимость перемещения и скорости от времени за один полный цикл свободного колебания.

Ответ:

$$\tau = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right),\quad x_м = \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k_2}}.$$

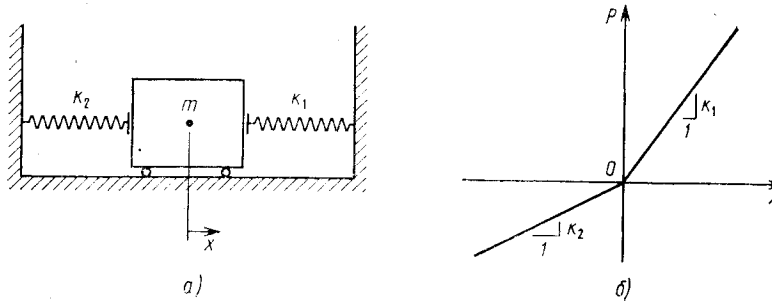


Рис. А.2.5.8

2.5.9. Пусть каждая из пружин, показанных на рис. А.2.5.9, *а*, предварительно сжата усилием P_1 в соответствии со статической диаграммой зависимости нагрузки от перемещения (рис. А.2.5.9, *б*). Для начальных условий $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 \neq 0$ определить зависимость перемещения и скорости от времени за один полный цикл свободного колебания.

Ответ:

$$\tau = \frac{2}{p} \operatorname{arctg} \frac{k\dot{x}_0}{P_1 p}, \quad x_м = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2 + \left(\frac{P_1}{k}\right)^2} - \frac{P_1}{k}.$$

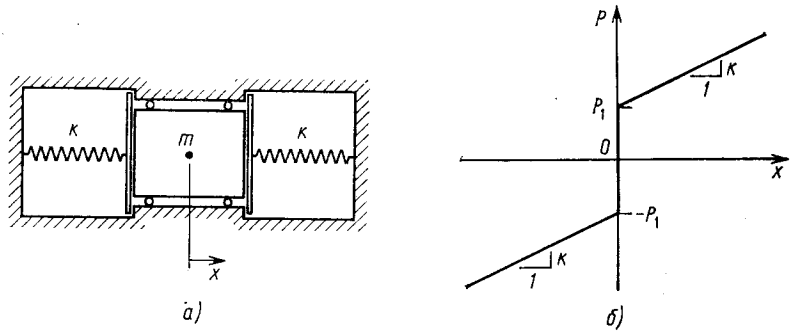


Рис. А.2.5.9

2.5.10. Пусть упругая система с кусочно-линейной характеристикой имеет статическую диаграмму зависимости нагрузки от перемещения, как показано на

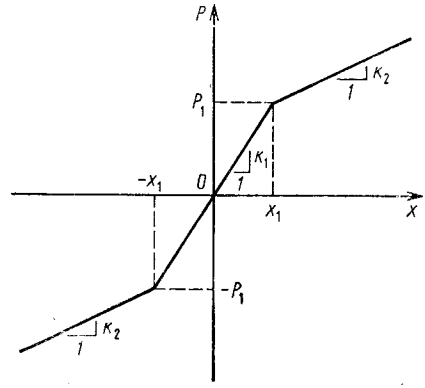


Рис. А.2.5.10

рис. А.2.5.10. Определить зависимость перемещения и скорости от времени для одного полного цикла свободных колебаний при начальных условиях следующего вида: $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 > p_1 x_1$.

Ответ:

$$\tau = 4t_1 + \frac{4}{p_2} \operatorname{arctg}\left(\frac{k_2 \dot{x}_1}{k_1 p_2 x_1}\right);$$

$$x = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) x_1 + \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} x_1\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{p_2}\right)^2}.$$

2.5.11. Применительно к билинейной диаграмме гистерезиса, показанной на рис. 2.7, *в* и обсуждавшейся в п. 2.1, принять, что $k_1 = 5k_2$. Для случая воздействия на систему с указанной характеристикой ступенчатой возмущающей силы с $Q_n = k_1 x_1$ определить зависимость перемещения от времени.

Ответ: $x_м = x_1(1 + \sqrt{5})$, $x_{ост} = 4x_1/\sqrt{5}$.

2.5.12. Рассмотреть задачу 2.5.11, взяв $Q_n = 2k_1 x_1$.

Ответ:

$$x_м = x_1(6 + 2\sqrt{10}),\ x_{ост} = 4x_1\left(1 + \frac{2}{5}\sqrt{2}\right).$$

2.6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Уравнения движения нелинейных систем могут быть всегда решены приближенно шаговым методом. Многие из хорошо известных методов основаны на использовании для отыскания решений формул экстраполяции и интерполяции, которые применяются для ряда малых, но конечных, интервалов времени. В данном параграфе дается описание и сравнение ряда эффективных подходов такого типа, дано также краткое обсуждение других подходов.

Общий вид уравнения движения системы с одной степенью свободы и нелинейной характеристикой

$$\ddot{x} = f(t,\ x,\ \dot{x}). \tag{2.55}$$

Решение можно начать с определения начального ускорения (в момент времени $t = 0$) из уравнения (2.55), что дает

$$\ddot{x}_0 = f(0,\ x_0,\ \dot{x}_0). \tag{2.56}$$

Искомое решение уравнения (2.55) в любой последующий момент времени t будем записывать в следующей символической форме:

$$x = F(t). \tag{2.57}$$

На рис. 2.23 показан график движения, представляющий собой гладкую кривую в плоскости xt. Через $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ обозначены значения перемещения x в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$, отстоя-

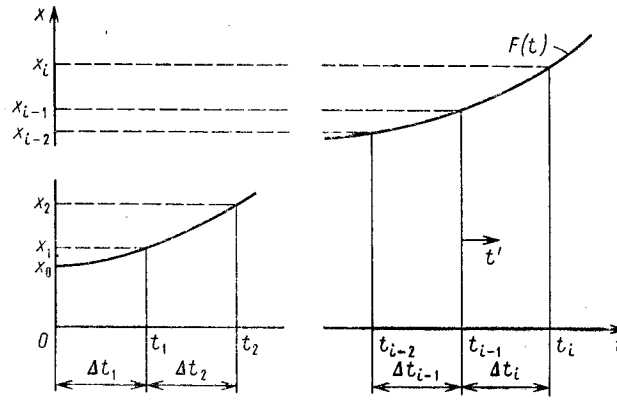


Рис. 2.23

щие друг от друга на длину временных интервалов Δt_1, Δt_2, ..., Δt_i, ... Эти временные интервалы обычно берутся постоянной длительности Δt, что не является обязательным правилом.

В подходе, который в дальнейшем будем называть как метод усреднения по ускорению, скорость $\dot{x}_i$ в момент времени определяется по приближенной формуле

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i-1} + \frac{\ddot{x}_{i-1} + \ddot{x}_i}{2} \Delta t_i, \tag{2.58}$$

где $\dot{x}_{i-1}$ — скорость на предыдущем временном интервале t_{i-1}. Данная формула, известная как *правило трапеции*, показывает, что этот подход в последние годы приобрел известность как *метод Ньюмарка* * с $\beta = 1/4$ или *метод с постоянным усреднением по ускорению*. Авторы предпочитают называть его *методом усреднения по ускорению*. На каждом шаге по времени ускорение берем как среднее арифметическое от $\ddot{x}_{i-1}$ и $\ddot{x}_i$. Аналогично по правилу трапеции определяем и приближенное выражение для перемещения

$$x_i = x_{i-1} + \frac{\dot{x}_{i-1} + \dot{x}_i}{2} \Delta t_i, \tag{2.59}$$

где скорость на каждом шаге по времени берем как среднее арифметическое от $\dot{x}_{i-1}$ и $\dot{x}_i$. Подстановка выражения (2.58) в (2.59) дает

$$x_i = x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}\Delta t_i + (\ddot{x}_{i-1} + \ddot{x}_i)(\Delta t_i)^2/4. \tag{2.60}$$

Для того чтобы определить погрешность, обусловленную непосредственным использованием выражения (2.60) для определения x_i, можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора, что дает

$$x_i = x_{i-1} + \Delta t_i \dot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^2}{2!} \ddot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^3}{3!} x^3_{i-1} + \cdots; \tag{2.61}$$

$$\ddot{x}_i = \ddot{x}_{i-1} + \Delta t_i \ddot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^2}{2!} x^{(4)}_{i-1} + \cdots \tag{2.62}$$

Подставляя разложение (2.62) в выражение (2.60) и вычитая из результата разложение (2.61), найдем *ошибку локального усечения ряда* (или *остаточный член*)

$$R_x = \frac{(\Delta t_i)^3}{12} \ddot{x}_{i-1} + \frac{(\Delta t_i)^4}{12} x^{(4)}_{i-1} + \cdots = R_{x1} + R_{x2} + \cdots \tag{2.63}$$

Первое слагаемое в этом остаточном члене ряда является наиболее существенным и называется *главным членом ошибки локального усечения ряда.*

В данном методе выражение (2.60) не использовалось непосредственно, а вместо него последовательно применялись выражения (2.58) и (2.59). Поскольку величина $\ddot{x}_i$ не известна заранее, решение необходимо отыскивать, прибегая на каждом шаге к итерациям;

---

* **Newmark N. M.** A method of computation for structural dynamics. — Journal Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1959, v. 85, N. 5, pp. 67—94.

ниже приведены рекуррентные соотношения для определения j-й итерации на i-м шаге:

$$(\dot{x}_i)_j = A_{i-1} + (\ddot{x}_i)_{j-1}\Delta t_i/2, \quad j > 1; \tag{2.64}$$

$$(x_i)_j = B_{i-1} + (\dot{x}_i)_j \Delta t_i/2; \tag{2.65}$$

$$(\ddot{x}_i)_j = f[t_i, (x_i)_j, (\dot{x}_i)_j], \tag{2.66}$$

где

$$A_{i-1} = \dot{x}_{i-1} + \ddot{x}_{i-1}\Delta t_i/2; \tag{а}$$

$$B_{i-1} = x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}\Delta t_i/2. \tag{б}$$

Данный итерационный процесс является независящим от начальных условий, поскольку требует использования специальной формулы для определения на каждом шаге по времени первого приближения. Определив $\ddot{x}_0$ из выражения (2.56), можно начать вычислять итерацию для первого шага, находя приближенное выражение для $\dot{x}_1$ с помощью *экстраполяционной формулы Эйлера:*

$$(\dot{x}_1)_1 = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0\Delta t_1. \tag{2.67}$$

Тогда первые приближения для x_1 и $\ddot{x}_1$ находим соответственно по формулам (2.65) и (2.66). Все последующие итерации на первом шаге по времени состоят в повторном использовании формул (2.64), (2.65) и (2.66).

Для того чтобы начать итерационный процесс на i-м шаге по времени, можно снова воспользоваться формулой Эйлера и определить первое приближение для $\dot{x}_i$:

$$(\dot{x}_i)_1 = \dot{x}_{i-1} + \ddot{x}_{i-1}\Delta t_i. \tag{2.68}$$

В формулах (2.67) и (2.68) предполагается, что ускорение является постоянным внутри шага по времени. Подставляя $\dot{x}_i$ из последнего выражения в формулу (2.59), получим

$$x_i = x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}\Delta t_i + \ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/2. \tag{в}$$

Вычитая из выражения (в) разложение (2.61) в ряд Тейлора для x_1, получим остаточный член ряда

$$R'_x = -\frac{(\Delta t_i)^3}{6}\ddot{x}_{i-1} - \frac{(\Delta t_i)^4}{24}x^{(4)}_{i-1} - \cdots = R'_{x1} + R'_{x2} + \cdots \tag{г}$$

В данном выражении абсолютная величина главного члена вдвое больше, чем в выражении (2.63). Для того чтобы повысить точность результатов, получаемых на первой итерации i-го шага, можно воспользоваться следующей несколько более сложной формулой, которая справедлива только при постоянном шаге по времени:

$$(\dot{x}_i)_1 = \dot{x}_{i-2} + 2\ddot{x}_{i-1}\Delta t. \tag{2.69}$$

Это выражение охватывает два одинаковых шага по времени от t_{i-2} до t_i (см. рис. 2.23) и в нем используется значение ускорения средней точки в момент времени t_{i-1}. Подставляя выражение (2.69) в (2.59), найдем

$$x_i = x_{i-1} + (\dot{x}_{i-2} + \dot{x}_{i-1} + 2\ddot{x}_{i-1}\Delta t)\Delta t/2. \tag{д}$$

Скорость $\dot{x}_{i-2}$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$\dot{x}_{i-2} = \dot{x}_{i-1} - \ddot{x}_{i-1}\Delta t + \ddot{x}_{i-1}(\Delta t)^2/4 - \cdots \qquad \text{(е)}$$

Подставляя ряд (е) в выражение (д) и вычитая из полученного результата выражение (2.61), найдем главный член ошибки локального усечения ряда

$$R_x'' = \frac{(\Delta t)^3}{12}\dddot{x}_{i-1}, \qquad \text{(ж)}$$

который совпадает [см. выражение (2.63)] с R_{x1}.

Выражения (в) и (д) являются *явными* (или *открытыми*) *экстраполяционными формулами* (или «*предиктором*»), с помощью которых приближенное значение x_i в явном виде выражается через ранее найденные значения x, $\dot{x}$ и $\ddot{x}$. С другой стороны, выражение (2.60) называется *неявной* (или *скрытой*) *интерполяционной формулой* (или «*корректором*»), которая позволяет находить более точные значения x_i, если найдено приближенное значение $\ddot{x}_i$. Метод усреднения по ускорению состоит в однократном использовании предиктора, после чего применяются итерации с корректором. Такой подход известен как *метод предиктора-корректора.*

Для решений итерационного типа требуется использовать некоторый критерий для остановки процесса или изменения шага, а также необходимо задавать предельное число выполняемых итераций. Наиболее удобным критерием сходимости процесса на i-м шаге является сравнение разности двух последовательных значений x_i и главного члена в R_x. Однако вычисление производных более высокого порядка, чем второй, не совсем удобно (причина состоит в том, что сами по себе ряды Тейлора являются не очень хорошей экстраполяционной формулой). Более удобный критерий состоит в контролировании числа значащих цифр в x_i следующим образом:

$$|(x_i)_j - (x_i)_{j-1}| < \varepsilon_x |(x_i)_j|, \qquad (2.70)$$

где ε_x — заданная малая величина. Например, желая получить приближенно точность до четырех значащих цифр, можно взять $\varepsilon_x = 0{,}0001$. Именно с такой точностью получены решения числовых примеров в данном параграфе.

Пример 1. Рассмотрим уже знакомое читателю линейное уравнение движения системы с одной степенью свободы

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Q(t). \qquad \text{(з)}$$

Здесь задано: $m = 1{,}79 \cdot 10^2$ Н·с^2/м; $c = 2{,}15 \cdot 10^2$ Н·с/м, $k = 1{,}61$ Н/м, $Q(t) = Q_1 = 40{,}1$ Н (ступенчатая функция). Тогда имеем $p = \sqrt{k/m} = 3$ с$^{-1}$, $n = c/(2m) = 0{,}6$ с$^{-1}$, $\gamma = n/p = 0{,}2$ и уравнение (з) принимает вид

$$\ddot{x} + 1{,}2\dot{x} + 9x = 9. \qquad \text{(и)}$$

Точное выражение для динамических перемещений системы при демпфировании и действии возмущающей силы в виде ступенчатой функции Q_1 известно:

$$x = \frac{Q_1}{k}\left[1 - e^{-nt}\left(\cos p_д t + \frac{n}{p_д}\sin p_д t\right)\right] = \frac{Q_1}{k}[1 - Ae^{-nt}\cos(p_д t - \alpha_д)], \qquad \text{(к)}$$

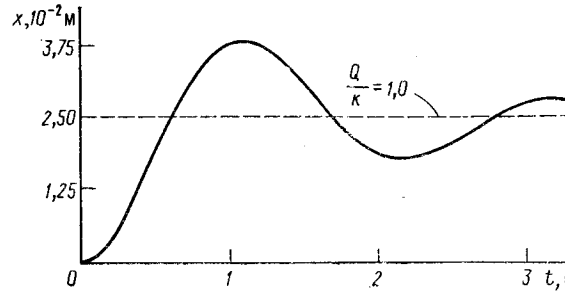


Рис. 2.24

где $p_д = p\sqrt{1-\gamma^2} = 3\sqrt{0{,}96}$ с$^{-1}$; $A = \sqrt{1+(n/p_д)^2} = 3\sqrt{2}/4$; $\alpha_д = \operatorname{arctg}(n/p_д) = \operatorname{arctg}(0{,}2/\sqrt{0{,}96})$. На рис. 2.24 представлен вид точного решения для данного случая.

Готовясь применять численный способ решения, запишем уравнение (и) в форме (2.55):

$$\ddot{x} = 9 - 9x - 1{,}2\dot{x}. \qquad (л)$$

Если начальные условия взять в виде $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, то начальное значение ускорения [см. уравнение (2.56)]

$$\ddot{x} = 9. \qquad (м)$$

Будем использовать постоянный шаг по времени $\Delta t = 0{,}1$ с и вести вычисления с точностью для перемещения до четырех значащих цифр [см. неравенство (2.70)].

Решение. Первые приближения на первом шаге вычисляем по следующим формулам:

$$(2.67) : (\dot{x}_1)_1 = 0 + 9\cdot 0{,}1 = 0{,}9;$$

$$(2.65) : (x_1)_1 = 0 + 0{,}9\cdot 0{,}1/2 = 0{,}045;$$

$$(2.66) : (\ddot{x}_1)_1 = 9 - 9\cdot 0{,}045 - 1{,}2\cdot 0{,}9 = 7{,}515.$$

Второе приближение дает

$$(2.64) : (\dot{x}_1)_2 = 0{,}45 + 7{,}515\cdot 0{,}1/2 = 0{,}82575;$$

$$(2.65) : (x_1)_2 = 0 + 0{,}82575\cdot 0{,}1/2 = 0{,}041288;$$

$$(2.66) : (\ddot{x}_1)_2 = 9 - 9\cdot 0{,}041288 - 1{,}2\cdot 0{,}82575 = 7{,}6375.$$

Третье приближение дает

$$(2.64) : (\dot{x}_1)_3 = 0{,}45 + 7{,}6375\cdot 0{,}1/2 = 0{,}83188;$$

$$(2.65) : (x_1)_3 = 0 + 0{,}83188\cdot 0{,}1/2 = 0{,}041594;$$

$$(2.66) : (\ddot{x}_1)_3 = 9 - 9\cdot 0{,}041594 - 1{,}2\cdot 0{,}83188 = 7{,}6274.$$

Четвертое приближение дает

$$(2.64) : \dot{x}_1 = 0{,}45 + 7{,}6274\cdot 0{,}1/2 = 0{,}83137;$$

$$(2.65) : x_1 = 0 + 0{,}83137\cdot 0{,}1/2 = 0{,}041569;$$

$$(2.66) : \ddot{x}_1 = 9 - 9\cdot 0{,}041569 - 1{,}2\cdot 0{,}83137 = 7{,}6282.$$

Пятое приближение дает

$$(2.64) : \dot{x}_1 = 0{,}45 + 0{,}76282\cdot 0{,}1/2 = 0{,}83141;$$

$$(2.65) : x_1 = 0 + 0{,}83141\cdot 0{,}1/2 = 0{,}041570;$$

$$(2.66) : \ddot{x}_1 = 9 - 9\cdot 0{,}041570 - 1{,}2\cdot 0{,}83141 = 7{,}6282.$$

Видно, что решение для первого шага получено с точностью до четырех значащих цифр. За пять циклов итераций первое приближение для второго шага определяем следующим образом:

$$(2.64) : (\dot{x}_2)_1 = 0 + 2 \cdot 7{,}6282 \cdot 0{,}1 = 1{,}5256;$$

$$(2.65) : (x_2)_1 = 0{,}08314 + 1{,}5256 \cdot 0{,}1/2 = 0{,}15942;$$

$$(2.66) : (\ddot{x}_2)_1 = 9 - 9 \cdot 0{,}15942 - 1{,}2 \cdot 1{,}5256 = 5{,}7345.$$

Второе приближение дает

$$(2.64) : (\dot{x}_2)_2 = 1{,}2128 + 5{,}7345 \cdot 0{,}1/2 = 1{,}4995;$$

$$(2.65) : (x_2)_2 = 0{,}08314 + 1{,}4995 \cdot 0{,}1/2 = 0{,}15812;$$

$$(2.66) : (\ddot{x}_2)_2 = 9 - 9 \cdot 0{,}15812 - 1{,}2 \cdot 1{,}4995 = 5{,}7775.$$

Третье приближение дает

$$(2.64) : (\dot{x}_2)_3 = 1{,}2128 + 5{,}7775 \cdot 0{,}1/2 = 1{,}5017;$$

$$(2.65) : (x_2)_3 = 0{,}08314 + 1{,}5017 \cdot 0{,}1/2 = 0{,}15823;$$

$$(2.66) : (\ddot{x}_2)_3 = 9 - 9 \cdot 0{,}15823 - 1{,}2 \cdot 1{,}5017 = 5{,}7739.$$

Четвертое приближение дает

$$(2.64) : (\dot{x}_2)_4 = 1{,}2128 + 5{,}7739 \cdot 0{,}1/2 = 1{,}5015;$$

$$(2.65) : (x_2)_4 = 0{,}08314 + 1{,}5015 \cdot 0{,}1/2 = 0{,}15822;$$

$$(2.66) : (\ddot{x}_2)_4 = 9 - 9 \cdot 0{,}15822 - 1{,}2 \cdot 1{,}5015 = 5{,}7742.$$

На этом шаге по времени решение сходится с точностью до четырех значащих цифр на четвертом цикле итераций.

Из табл. 2.1а, где приведены результаты для 20 шагов по времени, можно видеть, что приближенные значения x совпадают с точными [полученными с помощью выражения (к)] вплоть до трех значащих цифр. Таким образом, показанные на рис. 2.24 точки практически совпадают с соответствующими точками на кривой, представляющей точное решение.

2.1а. Решения примера 1 методом осреднения по ускорениям

i	t_i, с	Число итераций	Решение для x, м·10^{-2}		i	t_i, с	Число итераций	Решение для x, м·10^{-2}	
			приближенное	точное				приближенное	точное
0	0	—	0	0	11	1,1	3	3,89	3,87
1	0,1	5	0,105	0,109	12	1,2	3	3,80	3,78
2	0,2	4	0,402	0,410	13	1,3	3	3,62	3,59
3	0,3	4	0,843	0,857	14	1,4	3	3,37	3,34
4	0,4	3	1,38	1,39	15	1,5	2	3,08	3,05
5	0,5	3	1,95	1,97	16	1,6	3	2,78	2,75
6	0,6	3	2,50	2,52	17	1,7	3	2,49	2,46
7	0,7	3	3,00	3,02	18	1,8	3	2,23	2,22
8	0,8	3	3,41	3,42	19	1,9	3	2,03	2,02
9	0,9	3	3,69	3,70	20	2,0	3	1,90	1,90
10	1,0	3	3,85	3,85					

Другой способ получения приближенного решения уравнения (2.55) известен как *метод линейного ускорения*. Как следует из

его названия, в этом способе принято предположение, что ускорение изменяется по линейному закону и длине шага по времени. В соответствии с этим допущением выражение для $\ddot{x}$ на шаге по времени Δt_i (см. рис. 2.23) можно записать в виде

$$\ddot{x}(t') = \ddot{x}_{i-1} + (\ddot{x}_i - \ddot{x}_{i-1})t'/\Delta t_i, \qquad \text{(н)}$$

где время t' отсчитывается от начала шага. Если ускорение изменяется по линейному закону, то соответствующая ему скорость будет изменяться во времени по параболическому закону, а перемещение — по кубическому, и тогда имеем

$$\dot{x}(t') = \dot{x}_{i-1} + \ddot{x}_{i-1}t' + (\ddot{x}_i - \ddot{x}_{i-1})(t')^2/2\Delta t_i; \qquad \text{(о)}$$

$$x(t') = x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}t' + \ddot{x}_{i-1}(t')^2/2 + (\ddot{x}_i - \ddot{x}_{i-1})(t')^3/(6\Delta t_i). \qquad \text{(п)}$$

В конце шага по времени скорость и перемещение имеют вид

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i-1} + (\ddot{x}_{i-1} + \ddot{x}_i)\Delta t_i/2; \qquad (2.71)$$

$$x_i = x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}\Delta t_i + (2\ddot{x}_{i-1} + \ddot{x}_i)(\Delta t_i)^2/6. \qquad (2.72)$$

Выражение (2.71) совпадает с выражением (2.58) метода усреднения по ускорению, а выражение (2.72) несколько отличается от соответствующего ему выражения (2.60). Если выражение (2.62) для $\ddot{x}_i$ подставить в выражение (2.72) и из последнего вычесть разложение в ряд Тейлора для x_i [выражение (2.61)], то получим главный член остатка для этого случая:

$$R^{'''}_{x1} = -\frac{(\Delta t_i)^4}{24} x^{(4)}_{i-1}. \qquad \text{(р)}$$

Сравнивая выражения (р) и (2.63), видим, что перемещения, определяемые методом линейного ускорения, должны быть значительно более точными, чем получаемые методом усредненных ускорений. Однако, как было показано в проведенных исследованиях *, метод линейных ускорений является только условно устойчивым, а это означает, что при определенных неблагоприятных условиях накапливаемые погрешности могут стать бесконечно большими. Метод усредненных ускорений, напротив, является безусловно устойчивым, хотя и менее точным.

Применим метод линейных ускорений в духе, аналогичном описанному выше для подхода с усредненными ускорениями. Поскольку выражение (2.71) аналогично (2.58), то и рекуррентное выражение j-й итерации для $\dot{x}_i$ совпадает с выражением (2.64). Для получения соотношения, непосредственно связывающего x_i и $\dot{x}_i$, найдем $\ddot{x}_i$ из выражения (2.71) и подставим его в (2.72). Тогда получим

$$x_i = x_{i-1} + (2\dot{x}_{i-1} + \dot{x}_i)\Delta t_i/3 + \ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/6. \qquad (2.73)$$

---

* См. ст. **Newmark N. M.** A method of computation for structural dynamics, цитированную в п. 2.6.

В результате приходим к следующим рекуррентным формулам j-й итерации для x_i:

$$(x_i)_j = B^*_{i-1} + (x_i)_j \Delta t_i/3,$$

где

$$B^*_{i-1} = x_{i-1} + 2\dot{x}_{i-1}\Delta t_i/3 + \ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/6. \qquad (c)$$

Полученные выше формулы (2.67), а также (2.68) или (2.69) можно вновь использовать для получения на каждом шаге первоначальных значений в итерационном процессе.

Когда приведенную в примере 1 задачу решали методом линейных ускорений, были получены результаты, приведенные в табл. 2.1б. В данном случае большинство приближенных значений x ближе к точному решению, чем приведенные в табл. 2.1а, и были получены методом усредненных ускорений. Проверив эти методы на линейной задаче, применим их теперь для исследования примеров нелинейных задач.

2.1б. Решения примера 1 методом линейных ускорений

i	t_i, с	Число итераций	Решение для x, м·10^{-2}		i	t_i, с	Число итераций	Решение для x, м·10^{-2}	
			приближенное	точное				приближенное	точное
0	0	—	0	0	11	1,1	3	3,88	3,87
1	0,1	5	0,108	0,109	12	1,2	3	3,79	3,78
2	0,2	4	0,408	0,410	13	1,3	3	3,61	3,59
3	0,3	4	0,853	0,857	14	1,4	3	3,36	3,34
4	0,4	3	1,39	1,39	15	1,5	2	3,06	3,05
5	0,5	3	1,96	1,97	16	1,6	3	2,76	2,75
6	0,6	3	2,52	2,52	17	1,7	3	2,47	2,46
7	0,7	3	3,02	3,02	18	1,8	3	2,22	2,21
8	0,8	3	3,42	3,42	19	1,9	3	2,03	2,02
9	0,9	3	3,70	3,70	20	2,0	3	1,89	1,90
10	1,0	3	3,85	3,85					

Пример 2. Движение простого маятника, показанного на рис. 2.3 (см. п. 2.1), описывается нелинейным уравнением (2.4а)

$$\ddot{\varphi} + p^2 \sin\varphi = 0,$$

где $p^2 = g/L$. Если положить длину L численно равной ускорению g, получим $p^2 = 1$. Начальные условия возьмем в виде $\varphi_0 = \pi/2$, $\dot{\varphi}_0 = 0$. В п. 2.2 было получено точное выражение (2.12) для периода колебания маятника. Используя начальное условие вида $\varphi_0 = \varphi_м = \pi/2$ по таблицам эллиптических интегралов, найдем $k = F(k, \pi/2) = 1{,}8541$. Отсюда следует, что четверть периода $\tau/4 = k/p = 1{,}8541$ с. С другой стороны, если взять $p = k = 1{,}8541$, то получим $\tau/4 = 1$ с. Именно это значение в силу его простоты и будет использовано ниже.

Таким образом, уравнение, которое надо решать численно, имеет вид

$$\ddot{\varphi} = -p^2 \sin\varphi = -3{,}437687; \qquad (т)$$

при этом начальные условия таковы:

$$\ddot{\varphi}_0 = -p^2 \sin\pi/2 = -3{,}437687. \qquad (у)$$

2.2. Результаты расчетов для примера 2

i	t_i, с	Число итераций	Приближенные значения φ, рад	
			Метод усредненных ускорений	Метод линейных ускорений
0	0	—	1,5708	1,5708
1	0,1	2	1,5536	1,5536
2	0,2	2	1,5021	1,5021
3	0,3	2	1,4163	1,4163
4	0,4	3	1,2967	1,2966
5	0,5	3	1,1442	1,1440
6	0,6	3	0,9608	0,9603
7	0,7	3	0,7496	0,7487
8	0,8	3	0,5154	0,5140
9	0,9	3	0,2646	0,2627
10	1,0	4	0,0051	0,0025
11	1,1	2	—0,2546	—0,2577
12	1,2	3	—0,5059	—0,5093
13	1,3	3	—0,7409	—0,7444
14	1,4	3	—0,9530	—0,9564
15	1,5	3	—1,1376	—1,1407
16	1,6	3	—1,2913	—1,2939
17	1,7	3	—1,4123	—1,4142
18	1,8	2	—1,4994	—1,5007
19	1,9	2	—1,5522	—1,5529
20	2,0	2	—1,5708	—1,5708

В табл. 2.2 приведены результаты для 20 шагов по времени (с шагом $\Delta t = 0{,}1$ с) как методом усредненных ускорений, так и методом линейных ускорений. Величина угла φ в момент времени t_{10} должна равняться нулю, и метод линейных ускорений дает меньшее из получаемых обоими методами приближенное значение φ_{10}. Однако оба метода дают правильное конечное значение угла $\varphi_{20} = -1{,}5708$ рад. На рис. 2.25 показан график приближенных значений угла φ в зависимости от времени.

Пример 3. В качестве второго примера с нелинейной задачей рассмотрим следующее уравнение движения системы, в которой имеется пружина с возрастающей жесткостью:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \alpha x^3) = Q(t) \qquad (ф)$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2(x + \alpha x^3) = q(t). \qquad (х)$$

Из задачи 2.21 (см. п. 2.2) возьмем следующие данные: $m = 1{,}79$ Н·м/с, $k = 715$ Н/м, $p^2 = 4$ с, $\alpha = 1{,}55 \cdot 10$ м, $c = Q(t) = 0$. Для указанных значений параметров уравнение, которое необходимо решать численно, имеет вид

$$\ddot{x} = -p^2(x + \alpha x^3) = -4(x + 2x^2). \qquad (ц)$$

Подставляя начальные условия $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ в уравнение (ц), получим

$$\ddot{x}_0 = -4(0 + 0) = 0. \qquad (ч)$$

Результаты, полученные обоими методами с использованием 20 шагов по времени с шагом $\Delta t = 0{,}025$ с, приведены в табл. 2.3. На рис. 2.26 показан график приближенных значений перемещения x в зависимости от времени. Максимальное значение, приближенно равное 0,05 м, появляется, как это и должно быть, вблизи момента времени $t_{12} = 0{,}30$ с.

Хотя примеры с итерационными расчетами из этого параграфа можно решать с помощью калькуляторов, тем не менее, вычисли-

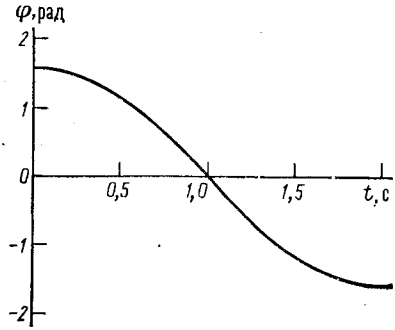


Рис. 2.25

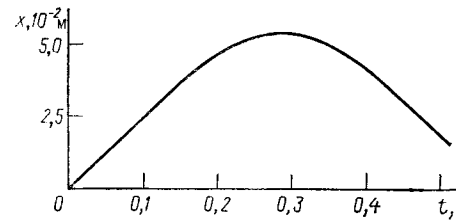


Рис. 2.26

тельные операции становятся довольно трудоемкими, поэтому лучше воспользоваться ЭВМ. Для расчетов примеров 1, 2 и 3 методом осредненных ускорений были использованы специальные программы для ЭВМ под названием соответственно AVAC1A, AVAC2A, AVAC3A. Программы были составлены на языке БЕЙСИК, тексты их приведены в приложении. Для использования метода линейных ускорений эти программы легко переделать в программы LINAC1A, LINAC2A, LINAC3A путем изменения всего нескольких строк в каждой из них. Кроме того, большинство задач, приведенных в конце этого параграфа, можно решить, слегка изменив эти же программы.

2.3. Результаты расчетов для примера 3

i	t_i, с	Число итераций	Приближенные значения $x \cdot 10^{-2}$, м, при методе ускорений	
			усредненных	линейных
0	0	—	0	0
1	0,025	3	0,634	0,635
2	0,050	3	1,27	1,27
3	0,075	3	1,894	1,895
4	0,100	3	2,511	2,512
5	0,125	3	3,107	3,110
6	0,150	3	3,672	3,676
7	0,175	3	4,188	4,194
8	0,200	2	4,637	4,644
9	0,225	2	4,997	5,004
10	0,250	3	5,249	5,256
11	0,275	3	5,377	5,384
12	0,300	3	5,374	5,378
13	0,325	3	5,239	5,241
14	0,350	3	4,982	4,979
15	0,375	3	4,617	4,610
16	0,400	2	4,165	4,154
17	0,425	3	3,646	3,632
18	0,450	3	3,079	3,063
19	0,475	3	2,481	2,463
20	0,500	3	1,864	1,845

Если уравнение движения (2.55) является линейным, то при численном решении можно избежать использования итераций с неявными формулами. Прямая *формула линейной экстраполяции* для метода усредненных ускорений может быть получена подстановкой выражений (2.58) и (2.60) в уравнение (з), решив которое относительно $\ddot{x}_i$ получим

$$\ddot{x}_i = Q_i^*/m^*, \tag{2.75а}$$

где

$$m^* = m + c\Delta t_i/2 + k(\Delta t_i)^2/4; \tag{2.75б}$$

$$Q_i^* = Q_i - c(\dot{x}_{i-1} + \ddot{x}_{i-1}\Delta t_i/2) - k[x_{i-1} + \dot{x}_{i-1}\Delta t_i + \ddot{x}_{i-1}(\Delta t_i)^2/4]. \tag{2.75в}$$

В качестве нагрузки Q_i обычно берут его постоянное среднее значение на шаге Δt_i по времени. Уравнение (2.75а) представляет собой явную формулу для ускорения $\ddot{x}_i$, выраженного через известные к началу шага значения x_{i-1}, $\dot{x}_{i-1}$ и $\ddot{x}_{i-1}$. Это выражение вместе с выражениями (2.58) и (2.59) позволяет вычислять x_{i-1}, $\dot{x}_{i-1}$ и $\ddot{x}_{i-1}$ на каждом шаге. Таким образом, имеем прием прямой экстраполяции, не зависящий от начального приближения и не требующий итераций.

Как метод линейных ускорений, так и аналогичные ему методы можно также применять в сочетании с процедурой прямой экстраполяции. Более того, уравнение движения для нелинейной системы может быть линеаризовано на малом шаге по времени, будучи записанным через приращения следующим образом:

$$m_{i-1}\Delta\ddot{x}_i + c_{i-1}\Delta\dot{x}_i + k_{i-1}\Delta x_i = \Delta Q_i. \tag{2.76}$$

Здесь Δx_i, $\Delta\dot{x}_i$, $\Delta\ddot{x}_i$ и ΔQ_i — приращения соответственно перемещения, скорости, ускорения и нагрузки на i-м шаге; m_{i-1}, c_{i-1} и k_{i-1} — значения массы, постоянной демпфирования и жесткости в начале каждого шага. Формулы явной схемы, аналогичные выражению (2.75а), можно записать относительно приращений ускорения $\Delta\ddot{x}_i$, скорости $\Delta\dot{x}_i$ и перемещения Δx_i^*.

При определении приращения перемещения линеаризованных систем, а также при использовании шаговых графических приемов ** отыскания решения в случае систем без демпфирования и с возмущающими силами вида кусочно-линейных функций полезно использовать точные выражения (см. п. 1.15). Однако, если система является существенно нелинейной, для получения хороших результатов с помощью любого из упомянутых приемов требуется применять того или иного типа итерацию и корректирующую процедуру. Таким образом, когда необходимо прибегать к помощи итерации или коррекции, может оказаться предпочтительным более прямой подход типа предиктор—корректор.

---

* **Wilson E. L., Farhoomand I., Bathe K. J.** Nonlinear dynamic analysis of complex structures. — Int. J. Earthq. Engng. Struct. Dyn., 1973, v. 1, N. 3, pp. 241—252.

. **Jacobsen L. S. On a general method of solving second order ordinary differential equations by phase-plane displacements. — J. Appl. Mech., 1952, v. 19, N. 4, pp. 543—553.

Более точные, чем описанные здесь, методы можно найти в литературе по численному анализу *. Наиболее часто используемые подходы основываются либо на разложении искомой функции $x = F(t)$ и ее производных в ряды Тейлора **, либо на использовании формул интегрирования для полиномиальных интерполирующих функций ***. Они ориентируются на дифференциальные уравнения первого порядка и отражают ту точку зрения, что любое выражение вида уравнения (2.55) с производными второго порядка можно представить в форме двух уравнений первого порядка. Последнюю форму получаем введением вспомогательной зависимой переменной

$$\dot{x} = y. \tag{2.77а}$$

Подставляя переменную y вместо $\dot{x}$ в уравнение (2.55), получаем

$$\dot{y} = f(t, x, y). \tag{2.77б}$$

Уравнения (2.77а) и (2.77б) представляют систему двух уравнений первого порядка, которую можно интегрировать численно, используя параллельные одинаковые выражения для экстраполяции неизвестных x и y. Хотя этот прием и прост, здесь не удалось обойти тот факт, что уравнение (2.77а) имеет более специфическую форму, чем уравнение (2.77б). Более эффективный подход состоит в том, чтобы вместо использования параллельной одинаковой экстраполяции выразить y, а затем и x в виде ряда. Если поступить согласно сказанному, дальнейшая методология сводится к тому же численному решению уравнения второго порядка с использованием двух последовательных экстраполирующих формул для $\dot{x}$ и x, как и описано в данном параграфе.

ЗАДАЧИ

2.6.1. Рассмотреть пример 1, взяв вместо ступенчатой функции линейную функцию вида $Q(t) = 9t$. Все остальные искомые данные взять из примера 1.

Ответ: $x_{10} \approx 1{,}93 \cdot 10^{-2}$ м.

2.6.2. Для рассмотренной в примере 1 линейной системы взять $Q(t) = 0$, а начальные условия принять в виде $x_0 = 2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м; $\dot{x}_0 = -2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м/с. Все остальные данные взять те же, что и в примере 1.

Ответ: $x_{10} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ м.

2.6.3. Вновь рассмотреть пример 2, изменив начальное условие: вместо $\varphi_0 = 0$ взять $\varphi_0 = 2{,}618$ рад/с. Все остальные данные взять те же, что и в указанном примере.

Ответ: $\varphi_{10} \approx \pi/2$ рад.

2.6.4. Для системы, рассмотренной в задаче 2.1.1 (см. п. 2.1), с помощью метода усредненных ускорений определить динамические перемещения при свобод-

---

* **Carnahan B., Luther H. A., Wilkes J. O.** Applied numerical methods. — New-York: J. Wiley, 1969. 604 p.

** **Runge C.** Über die numerische Ausflösung von Differentialgleichungen. — Mathematische Annales, 1895, B. 46, S. 167—178. **Kutta W.** Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. — Z. Math. Phys., 1901, B. 46, S. 435—453.

*** **Bashforth F.** An attempt to test the theories of capillary attraction with an explanation of the method of integration employed by J. C. Adams. — Cambridge: University Press, 1883; **Moulton F. R.** Differential equations. — New-York: Macmillan, 1930.

ных колебаниях, взяв в качестве начальных условий следующие: $x_0 = l/4$; $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = y_0 = 0$. Использовать такое уравнение движения и следующие значения параметров системы: $k = 1{,}79 \cdot 10^3$ Н/м; $l = 0{,}102$ м; $m = 1{,}43 \cdot 10^3$ Н·с^2/м. Взять постоянный шаг по времени $\Delta t = 0{,}1$ с, число шагов принять равным десяти и построить график полученного решения.

Ответ: $\dot{x}_{max} \approx 4{,}06 \cdot 10^{-2}$ м/с.

2.6.5. Для системы, рассмотренной в задаче 2.1.6 (см. п. 2.1), с помощью метода линейных ускорений определить динамические перемещения при свободных колебаниях с начальными условиями вида: $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 10{,}64$ рад/с. Использовать такое уравнение движения и следующие значения параметров системы: $W = 22{,}7$ Н; $l = 0{,}254$ м; $k_к = 1{,}16 \cdot 10^2$ Н·м/рад. Взять постоянный шаг по времени $\Delta t = 0{,}025$ с, число шагов принять равным 20, построить график полученного решения.

Ответ: $\varphi_{max} \approx \pi/2$ рад.

2.6.6. Вновь рассмотреть пример 3, но характеристики пружины взять не из задачи 2.2.1, а из задачи 2.2.2. С помощью метода усредненных ускорений определить максимальное перемещение и время, когда оно возникает.

Ответ: $x_м \approx 0{,}121$ м; $t_м \approx 0{,}725$ с.

2.6.7. Вновь рассмотреть пример 3, но характеристики пружины взять не из задачи 2.2.1, а из задачи 2.2.4. С помощью метода линейных ускорений определить максимальное перемещение и время, когда оно возникает.

Ответ: $x_м \approx 7{,}95 \cdot 10^{-2}$ м; $t_м \approx 0{,}50$ с.

2.6.8. Решить задачу 2.5.2 (см. п. 2.5) методом усредненных ускорений *, используя следующие значения параметров системы: $m = 1{,}79 \cdot 10^2$ Н·с^2/м; $k_1 = 1{,}79 \cdot 10^2\,\pi^2$ Н/м; $k_2 = 4k_1$; $x_1 = 2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м.

Ответ: $x_м \approx 3{,}81 \cdot 10^{-2}$ м; $t_м = 0{,}75$ с.

2.6.9. Решить задачу 2.5.4 (см. п. 2.5) методом линейных ускорений *, используя следующие значения параметров системы: $m = 1{,}79 \cdot 10^2$ Н·с^2/м; $k = 1{,}79 \times 10^2\pi^2$ Н/м; $x_1 = 2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м.

Ответ: $x_м = 3{,}81 \cdot 10^{-2}$ м; $t_м \approx 1{,}22$ с.

2.6.10. Решить задачу 2.5.11 (см. п. 2.5) методом линейных ускорений *, используя следующие значения параметров системы: $m = 1{,}79 \cdot 10^2$ Н·с^2/м; $k = 1{,}79 \cdot 10^2\pi^2$ Н/м; $x_1 = 2{,}54 \cdot 10^{-2}$ м.

Ответ: $x_м = 8{,}23 \cdot 10^{-2}$ м; $t_м \approx 1{,}62$ с.

---

* Задачи 2.6.8, 2.6.9 и 2.6.10 составлены для систем с кусочно-линейными характеристиками восстанавливающей силы, и на каждом этапе исследования величина k изменяется скачком от единого постоянного значения до другого.

Глава 3
СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

3.1. ПРИМЕРЫ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В гл. 1 и 2 рассматривались только системы, имеющие одну степень свободы. В данной и следующей главах будут обсуждены системы, имеющие несколько степеней свободы, простейшими из которых являются *системы с двумя степенями свободы.* Конфигурация такой системы полностью определяется двумя координатами (или перемещениями), а для того чтобы описать ее движение, требуется два дифференциальных уравнения.

На рис. 3.1, *а* показаны две массы m_1 и m_2, соединенные со стенкой и друг с другом пружинами, имеющими коэффициенты жесткости соответственно k_1 и k_2. Предполагается, что массы могут двигаться только в направлении оси x и что в системе отсутствует как трение, как и другие виды сопротивления. В качестве координат, определяющих движение системы, возьмем перемещения x_1 и x_2 масс от их положений статического равновесия, при которых отсутствуют деформации в пружинах. На рис. 3.1, *а* присутствуют также и возмущающие силы, описываемые функциями $Q_1 = F_1(t)$ и $Q_2 = F_2(t)$ и приложенные соответственно к массам m_1 и m_2. Силы, действующие на массы со стороны пружин при перемещениях во время движения, показаны на рис. 3.1, *б*. Используя второй закон Ньютона, получим уравнения движения для масс m_1 и m_2 в виде

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + Q_1; \qquad \text{(а)}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) + Q_2. \qquad \text{(б)}$$

При $x_1 > x_2$ эти уравнения не изменяются, потому что в этом случае сжимающая сила $k_2(x_1 - x_2)$, с которой пружина действует на каждую массу, будет иметь знак минус в уравнении (а) и знак плюс — в уравнении (б). Подставив входящие в эти уравнения члены, запишем

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = Q_1; \qquad (3.1а)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = Q_2. \qquad (3.1б)$$

Таким образом, получена система двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для исследования свободных колебаний этой системы положим Q_1 и Q_2 равными нулю, тогда получим однородные уравнения

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0; \qquad \text{(в)}$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0. \qquad \text{(г)}$$

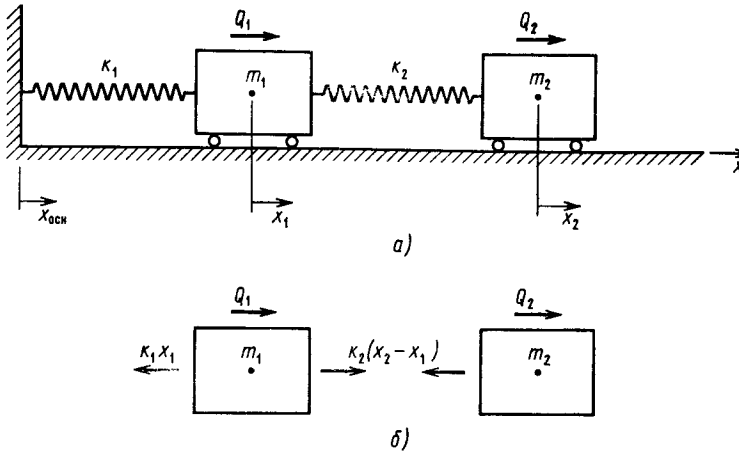


Рис. 3.1

Как и выше для системы с одной степенью свободы, будем искать решения в следующей форме:

$$x_1 = A \sin (pt + \varphi); \qquad (д)$$

$$x_2 = B \sin (pt + \varphi). \qquad (е)$$

Эти выражения показывают, что *собственные формы колебаний* обеих масс описываются одной и той же гармонической функцией с круговой частотой p и фазовым углом φ. Буквами A и B обозначены максимальные значения перемещений, или *амплитуды*, при колебательных движениях. Подставляя представления (д) и (е) в уравнения (в) и (г), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$(k_1 + k_2 - p^2 m_1)\, A - k_2 B = 0; \qquad (ж)$$

$$-k_2 A + (k_2 - p^2 m_2)\, B = 0. \qquad (з)$$

Одно из возможных решений этих уравнений имеет вид $A = B = 0$, что соответствует нахождению системы в положении равновесия и не дает информации о колебаниях. Эти уравнения могут иметь ненулевые решения только в том случае, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов при A и B, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - p^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - p^2 m_2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (и)$$

Разложение определителя имеет вид

$$(k_1 + k_2 - p^2 m_1)(k_2 - p^2 m_2) - k_2^2 = 0 \qquad (к)$$

или

$$m_1 m_2 p^4 - [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)]\, p^2 + k_1 k_2 = 0. \qquad (л)$$

Это выражение, квадратичное относительно p^2, представляет собой *частотное* (или *характеристическое*) *уравнение* системы. Оно имеет два корня (называемых характеристическими значениями), которые можно записать как решения квадратного уравнения

$$p_{1,2}^2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad (м)$$

где

$$a = m_1 m_2; \; b = -[m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)];$$

$$c = k_1 k_2. \qquad (н)$$

Поскольку выражение, стоящее под знаком корня, всегда положительно, то оба корня p_1^2 и p_2^2 являются действительными. Очевидно также, что значение квадратного корня меньше, чем $-b$, и, следовательно, оба корня положительны. Кроме того, решения (м) записаны так, что имеет место $p_1 < p_2$. Таким образом, характеристическое уравнение дает два значения собственных колебаний, которые зависят только от физических постоянных, определяющих эту систему.

Подставив характеристические значения p_1^2 и p_2^2 в однородные алгебраические уравнения (ж) и (з), обнаружим, что нельзя получить действительных значений для A и B. Однако эти уравнения можно использовать для получения отношений $r_1 = A_1/B_1$ и $r_2 = A_2/B_2$, соответствующих p_1^2 и p_2^2:

$$r_1 = \frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - p_1^2 m_1} = \frac{k_2 - p_1^2 m_2}{k_2}; \qquad (о)$$

$$r_2 = \frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - p_2^2 m_1} = \frac{k_2 - p_2^2 m_2}{k_2}. \qquad (п)$$

Эти *отношения амплитуд* характеризуют формы двух собственных частот колебаний (они также называются *главными формами колебаний*) системы. Они двойственным образом определяются из уравнения (к), и их величина зависит только от физических постоянных m_1, m_2, k_1 и k_2.

Обозначив меньшую частоту через p_1, а соответствующее ей отношение амплитуд через r_1, представления (д) и (е) запишем в виде

$$x_1' = r_1 B_1 \sin(p_1 t + \varphi_1); \qquad (р)$$

$$x_2'' = B_1 \sin(p_1 t + \varphi_1). \qquad (с)$$

Эти выражения полностью определяют *первую форму* колебания, которая иногда называется *основной формой колебания*. Она представляет гармоническое движение обеих масс с круговой частотой p_1 и фазовым углом φ_1. При этом движении в любой момент времени отношение перемещений x_1'/x_2' равно отношению амплитуд r_1. В каждом цикле колебаний обе массы дважды проходят через положения равновесия и одновременно достигают своих крайних положений. Здесь

не накладывается никаких ограничений на фазовые углы, но в соответствии с выбранными представлениями (д) и (е) они должны быть одинаковыми для обеих масс.

Подстановка большей круговой частоты p_2 и соответствующего отношения амплитуд r_2 в представления (д) и (е) дает выражения

$$x_1'' = r_2 B_2 \sin(p_2 t + \varphi_2); \qquad (т)$$

$$x_2'' = B_2 \sin(p_2 t + \varphi_2), \qquad (у)$$

описывающие *вторую форму* колебания. Это простое гармоническое движение обеих масс происходит с круговой частотой p_2 и общим для них фазовым углом φ_2. В этом случае отношение перемещений всегда $x_1''/x_2'' = r_2$.

Общее решение уравнений (в) и (г) представляет собой сумму решений (р), (с), (т) и (у) для главных форм колебаний:

$$x_1 = x_1' + x_1'' = r_1 B_1 \sin(p_1 t + \varphi_1) + r_2 B_2 \sin(p_2 t + \varphi_2); \qquad (ф)$$

$$x_2 = x_2' + x_2'' = B_1 \sin(p_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(p_2 t + \varphi_2). \qquad (х)$$

Эти выражения содержат четыре произвольных постоянных интегрирования (B_1, B_2, φ_1 и φ_2), которые можно найти, рассмотрев четыре начальных условия для перемещений и скоростей обеих масс в момент времени $t = 0$. Выражения (ф) и (х) описывают довольно сложные по характеру движения, которые не являются периодическими до тех пор, пока собственные частоты p_1 и p_2 не станут соизмеримыми. Система совершает чисто гармоническое движение только в том случае, если с достаточной точностью удается начать его по одной из ее главных форм колебаний.

Для произвольной системы с двумя степенями свободы всегда можно определить ее частоты и формы колебаний так, как было показано выше для системы, изображенной на рис. 3.1, *а*. Поскольку уравнения движения любых систем со многими степенями свободы имеют одинаковую форму с точки зрения математики, получением дальнейших решений пока заниматься не будем. Это будет сделано систематическим образом матричными методами ниже в этой главе, а также в гл. 4.

В качестве второго примера системы с двумя степенями свободы рассмотрим закрепленную на пружинах массу (рис. 3.2, *а*). Все три пружины, показанные на рисунке, лежат в одной плоскости и имеют коэффициенты жесткости k_1, k_2 и k_3. Предполагается, что масса закреплена таким образом, что может перемещаться только в плоскости пружин (т. е. в плоскости xy), и тогда ее движение можно описать с помощью проекций на оси x и y перемещения относительно положения равновесия. На рис. 3.2, *а* показаны также возмущающие силы Q_x и Q_y, направленные по осям соответственно x и y. Если рассматривать только малые перемещения, то можно считать, что восстанавливающие силы R_1, R_2 и R_3 (рис. 3.2, *б*), с которыми пружины действуют на массу, имеют те же направления, что и пружины

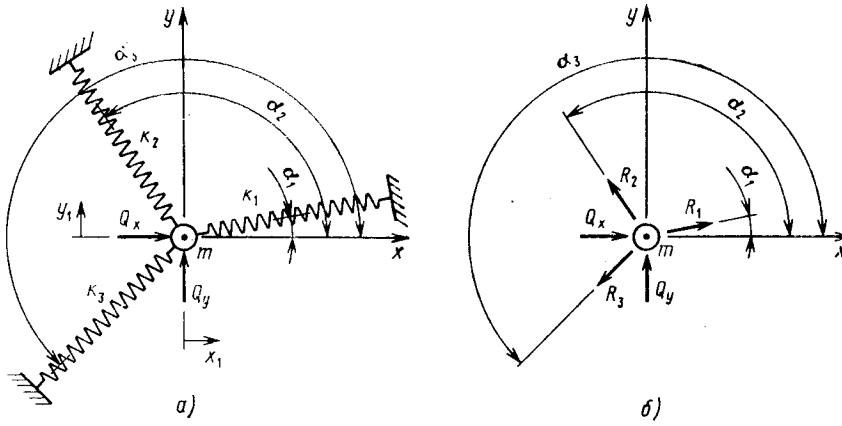


Рис. 3.2

в положении равновесия. С учетом этого допущения уравнения движения массы можно записать в следующем виде:

$$m\ddot{x}_1 = \sum_{i=1}^{3} R_i \cos\alpha_i + Q_x; \qquad (ц)$$

$$m\ddot{y}_1 = \sum_{i=1}^{3} R_i \sin\alpha_i + Q_y, \qquad (ч)$$

где

$$R_i = -k_i (x_1 \cos\alpha_i + y_1 \sin\alpha_i). \qquad (ш)$$

Подставив выражение (ш) в уравнения (ц) и (ч), после приведения подобных членов получим

$$m\ddot{x}_1 + \sum_{i=1}^{3} k_i (x_i \cos^2\alpha_i + y_1 \sin^2\alpha_i \cos\alpha_i) = Q_x; \qquad (3.2а)$$

$$m\ddot{y}_1 + \sum_{i=1}^{3} k_i (x_1 \cos\alpha_i \cos\alpha_i + y_1 \sin^2\alpha_i) = Q_y. \qquad (3.2б)$$

На рис. 3.3 показан третий пример системы с двумя степенями свободы в форме двух дисков, установленных на валу, который

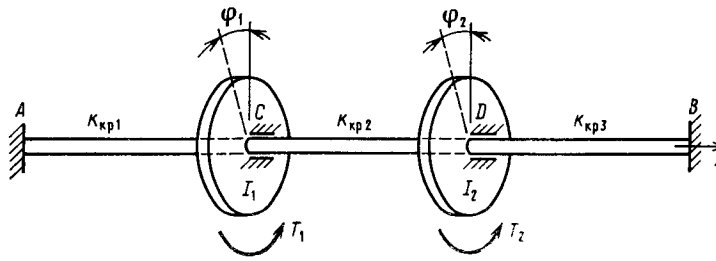


Рис. 3.3

закреплен в точках A и B, а в точках C и D имеет опоры, препятствующие боковому перемещению в этих точках. Три участка вала имеют коэффициенты жесткости при кручении, равные $k_{к1}$, $k_{к2}$ и $k_{к3}$. На рисунке также показаны степени свободы при углах поворота φ_1 и φ_2 дисков, моменты инерции из масс I_1 и I_2, приложенные к ним крутящие моменты T_1 и T_2. В этом случае уравнения угловых движений имеют вид

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = -k_{к1}\varphi_1 + k_{к2}(\varphi_2 - \varphi_1) + T_1; \quad (щ)$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 = -k_{к2}(\varphi_2 - \varphi_1) - k_{к3}\varphi_2 + T_2. \quad (э)$$

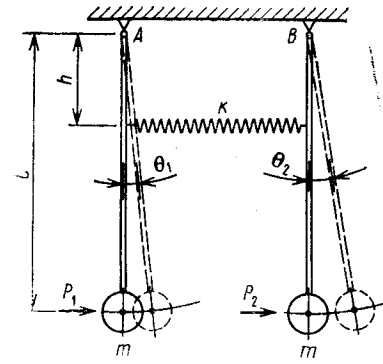


Рис. 3.4

Эти уравнения можно переписать в иной форме:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 + (k_{к1} + k_{к2})\varphi_1 - k_{к2}\varphi_2 = T_1; \quad (3.3а)$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 - k_{к2}\varphi_1 + (k_{к2} + k_{к3})\varphi_2 = T_2. \quad (3.3б)$$

В качестве последнего примера рассмотрим пару простых маятников, соединенных пружиной (рис. 3.4). Они имеют одинаковые длину l и массу m, а шарниры A и B позволяют им свободно колебаться только в плоскости рисунка. Конфигурация системы при движении определяется углами θ_1 и θ_2; при этом возбуждающие колебания силы P_1 и P_2 действуют в горизонтальном направлении. В предположении малых перемещений системы запишем уравнение движения

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 + kh^2(\theta_2 - \theta_1) + P_1 l; \quad (а')$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -mgl\theta_2 - kh^2(\theta_2 - \theta_1) + P_2 l. \quad (б')$$

Эту систему можно переписать в следующем виде:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + (kh^2 + mgl)\,\theta_1 - kh^2\theta_2 = P_1 l; \quad (3.4а)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 - kh^2\theta_1 + (kh^2 + mgl)\,\theta_2 = P_2 l. \quad (3.4б)$$

Видно, что в каждом из приведенных примеров уравнения движения имеют одинаковую форму. Это свойство уравнений будет использовано в следующем параграфе.

3.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В УСИЛИЯХ: КОЭФФИЦИЕНТЫ ЖЕСТКОСТИ

Уравнения (3.1а) и (3.1б) можно записать в *матричной форме* *:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

* Введение в операции с матрицами см. в кн.: **Gere J. M., Weaver W.** Matrix algebra for engineers. — Princeton: D. Van Nostrand, 1965. 168 p.

Эти же соотношения можно представить также и в более компактном виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q}, \tag{3.6}$$

где предполагается, что $\mathbf{X}$, $\ddot{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{Q}$ — вектор-столбцы:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \tag{а}$$

а $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$ — матрицы вида

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}. \tag{б}$$

Уравнение (3.6) можно рассматривать как систему *уравнений движения в усилиях*, выраженную в матричной форме. Подобная терминология здесь вводится, потому что это уравнение представляет большой класс уравнений движения, в которых компонентами являются либо силы, либо моменты (или говоря обобщенно — *усилия*). *Матрица жесткости* $\mathbf{S}$ имеет в качестве элементов коэффициенты влияния жесткости, а в *матрице масс* $\mathbf{M}$ в качестве диагональных элементов стоят массы m_1 и m_2. Хотя для большинства задач матрица масс является диагональной, имеются некоторые системы, где это не так. Подобные случаи обсуждены в п. 3.4.

Обратим внимание теперь на свойства матрицы жесткостей $\mathbf{S}$ и на получение ее элементов некоторым упорядоченным путем. Произвольный элемент S_{ij} матрицы представляет собой усилие, соответствующее перемещению типа i, обусловленного равным единице перемещением типа j. Задавая единичные перемещения для каждой из *координат перемещения* (в каждый момент времени) и вычисляя соответствующие усилия, получим все такие усилия. На рис. 3.5, *а* и *б* этот процесс показан применительно к примеру 1 из предыдущего параграфа. На рис. 3.5, *а* задано единичное перемещение $x_1 = 1$; при этом считается, что $x_2 = 0$. Статические силы, необходимые для выполнения этого условия, обозначены через S_{11} и S_{21} (косые черточки на векторах усилий служат для напоминания о том, что эти усилия являются удерживающими). Обозначение S_{11} относится к усилию типа 1, необходимому для создания единичного перемещения типа 1, а через S_{21} обозначено усилие типа 2, необходимое для создания единичного перемещения типа 1. Их величины $S_{11} = k_1 + k_2$, $S_{21} = -k_2$, и они составляют первый столбец матрицы жесткости. Элементы второго столбца матрицы $\mathbf{S}$ получаем в соответствии с рис. 3.5, *б*, на котором показано единичное перемещение $x_2 = 1$ (при этом $x_1 = 0$). В данном случае силы $S_{12} = -k_2$ и $S_{22} = k_2$. Они представляют собой силы типа 1 и 2, необходимые для создания единичных перемещений типа 2. Для линейно упругих систем (с ма-

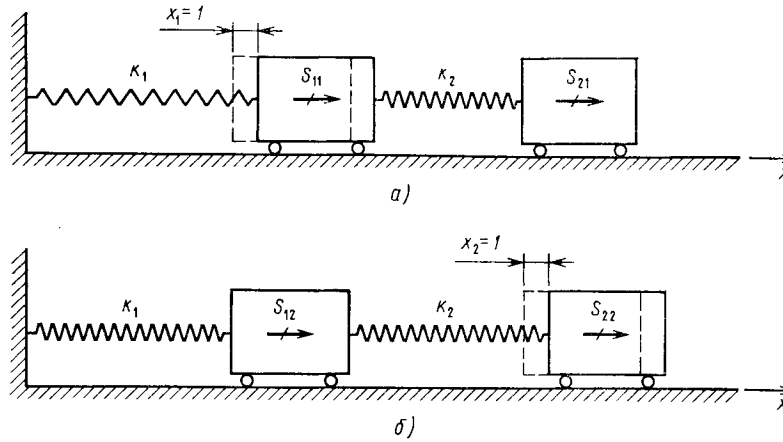


Рис. 3.5

лыми перемещениями) матрицы жесткостей всегда являются симметричными *, и здесь также видно, что $S_{12} = Q_{21} = -k_2$.

Если уравнения движения для второго примера предыдущего параграфа [см. рис. 3.2 и уравнения (3.2а) и (3.2б)] задать в матричной форме, получим

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{3} k_i \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}. \qquad (3.7)$$

В уравнении (3.7) первый столбец матрицы жесткости можно получить непосредственно из условия $x_1 = 1$ (тогда $y_1 = 0$), а второй столбец — из условия $y_1 = 1$ (тогда $x_1 = 0$).

Аналогично уравнения движения для третьего примера [см. рис. 3.3 и уравнения (3.3а) и (3.3б)] в матричной форме принимают вид

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{к1} + k_{к2} & -k_{к2} \\ -k_{к2} & k_{к2} + k_{к3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.8)$$

В данном случае перемещения представляют повороты, поэтому соответствующие усилия являются парами сил или моментами. Матрица коэффициентов, содержащая I_1 и I_2, будет по-прежнему рассматриваться как «матрица масс», хотя этот термин не совсем удачен. Как и выше, элементы матрицы жесткости можно найти из условий $\varphi_1 = 1$ (для первого столбца) и $\varphi_2 = 1$ (для второго столбца).

---

* Обоснование подобного утверждения приводится на с. 34—36 кн.: **Gere J. M., Weaver W.** Analysis of framed structures. — Princeton: D. Van Nostrand, 1965. 475 p.

И, наконец, запишем в матричной форме уравнения движения для последнего примера [см. рис. 3.4 и уравнения (3.4а) и (3.4б)]

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kh^2 + mgl & -kh^2 \\ -kh^2 & kh^2 + mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 l \\ P_2 l \end{bmatrix}. \qquad (3.9)$$

Однако в данном случае имеем комбинацию восстанавливающих усилий, обусловленных влиянием как жесткости, так и силы тяжести. Если для указанных двух типов восстанавливающих усилий коэффициенты влияния записать раздельно, получим

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S} + \mathbf{G}, \qquad (3.10)$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} kh^2 & -kh^2 \\ -kh^2 & kh^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}. \qquad (в)$$

В предыдущих случаях имели место обычные коэффициенты влияния жесткости, тогда как в последнем уже встречаются *коэффициенты влияния силы тяжести*, которые определяются как усилия, необходимые для создания единичных перемещений при наличии силы тяжести. Если сила тяжести не учитывается, элементы *матрицы G силы тяжести* полагаются равными нулю.

ЗАДАЧИ

3.2.1. Для двухмассовой системы, показанной на рис. А.3.2.1, определить матрицу жесткости **S** и записать в матричной форме уравнение движения в усилиях.

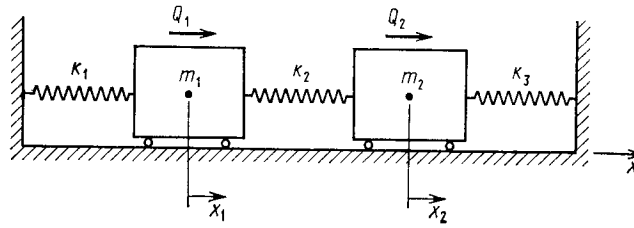


Рис. А.3.2.1

3.2.2. Пусть жесткости пружин на рис. 3.2 равны $k_1 = k_2 = k_3 = k$, а для углов заданы следующие значения: $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = 210°$. Определить элементы матрицы жесткости для подвешенной на пружинах массы, выразив их через жесткость k.

3.2.3. На рис. А.3.2.3 показан двойной маятник с пружинами, присоединенными к массам m_1 и m_2. В качестве координат перемещений взять малые перемещения x_1 и x_2 масс в горизонтальном направлении. Построить матрицу жесткости **S** и матрицу сил тяжести **G** для этой системы, а также записать в матричной форме уравнения движения в усилиях.

3.2.4. Показанный на рис. А.3.2.4 двойной маятник имеет в обоих шарнирах работающие на кручение пружины. Принимая за координаты перемещений малые горизонтальные перемещения x_1 и x_2 масс, построить матрицы **S** и **G**; записать в матричной форме уравнения движения.

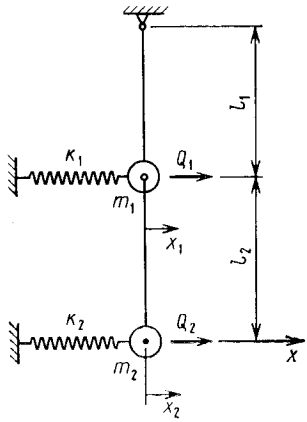


Рис. А.3.2.3

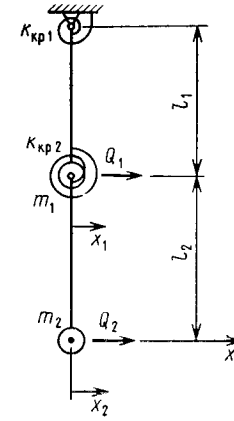


Рис. А.3.2.4

3.2.5. Для показанной на рис. А.3.2.5 двухэтажной рамы здания определить матрицу жесткости **S** и записать в матричной форме уравнения движения в усилиях. Считать, что горизонтальные балки являются абсолютно жесткими и в качестве координат перемещений использовать малые перемещения x_1 и x_2 в горизонтальном направлении. Стойки рамы являются призматическими и имеют жесткости при изгибе, равные EI_1 на нижнем этаже и EI_2 — на верхнем.

3.2.6. Абсолютно жесткий призматический стержень опирается в вертикальном положении на шарнир, а от боковых перемещений подкреплен (за верхний и нижний концы) установленными горизонтально пружинами (рис. А.3.2.6). Здесь l, A и ρ — соответственно длина, площадь поперечного сечения и плотность материала стержня. Построить для этой системы матрицы жесткости, сил тяжести и масс, используя в качестве координат перемещений малые перемещения x_C и θ_C центра тяжести (точки C) стержня. Записать уравнение движения в усилиях в матричной форме, включив в них горизонтальную силу Q_C и момент T_C, приложенные в точке C.

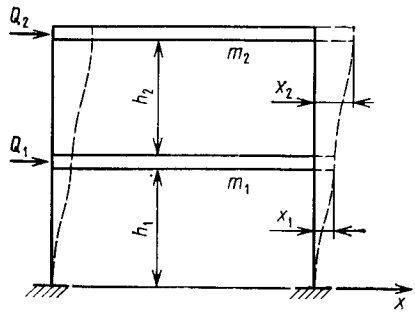


Рис. А.3.2.5

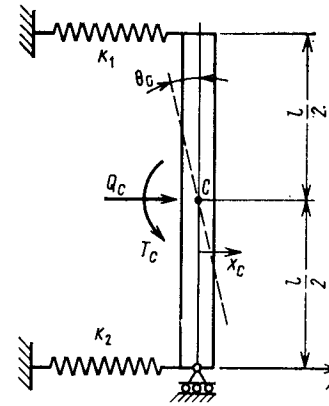


Рис. А.3.2.6

3.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ: КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОДАТЛИВОСТИ

Для статически определимых систем иногда удобнее работать не с уравнениями движения в усилиях, а с уравнениями движения в перемещениях. Согласно такому подходу выражения для *координат перемещений* (линейных перемещений или углов поворотов) системы записываются с использованием их жесткостей. С этой целью введем обозначение

$$\delta = 1/k, \tag{а}$$

которое будем рассматривать как *податливость пружины, имеющей жесткость*, равную k. Согласно этим обозначениям определим податливость обеих пружин, показанных на рис. 3.1, *а*, в виде $\delta_1 = 1/k_1$ и $\delta_2 = 1/k_2$.

Предположим, что силы Q_1 и Q_2, действующие на массы (см. рис. 3.1, *а*), были приложены статически (поэтому не возникали силы инерции). При таком условии перемещения масс, выраженные через податливости δ_1 и δ_2, принимают вид

$$(x_1)_{ст} = \delta_1 (Q_1 + Q_2); \tag{б}$$

$$(x_2)_{ст} = \delta_1 (Q_1 + Q_2) + \delta_2 Q_2. \tag{в}$$

Эти выражения можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{ст} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}. \tag{г}$$

Подобные соотношения между перемещениями и усилиями могут быть составлены в еще более компактной форме

$$\mathbf{X}_{ст} = \mathbf{FQ}, \tag{д}$$

где через $\mathbf{F}$ обозначена *матрица податливости*

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix}. \tag{е}$$

Элементами матрицы являются *коэффициенты влияния податливости*, которые определяются как перемещения, обусловленные единичными усилиями, соответствующими этим перемещениям.

Элементы матрицы податливости можно получить способом, который использовался при построении матрицы жесткости. Произвольный элемент F_{ij} матрицы податливости представляет собой перемещение типа i, обусловленное действием единичного усилия типа j. Прикладывая единичные усилия в направлении соответствующих координат перемещений (каждый раз по одному усилию) и вычисляя получаемые в результате перемещения, определим все элементы матрицы. На рис. 3.6, *а*, *б* этот процесс показан для системы, изображенной на рис. 3.1, *а*. Из рис. 3.6, *а* видно, что единичная сила $Q_1 = 1$ статически прикладывается к массе m_1, тогда как к массе m_2 сил не приложено. Получаемые при этом статические перемещения

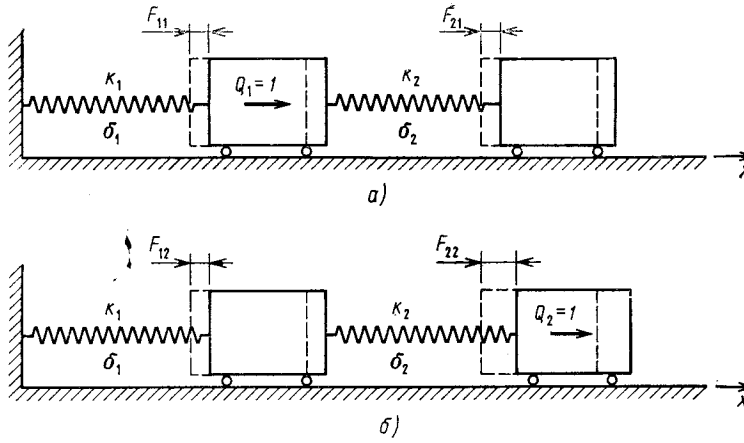


Рис. 3.6

обозначены на рисунке буквами F_{11} и F_{21}. Обозначение F_{11} относится к перемещению типа 1, обусловленному действием единичного усилия типа 1, F_{21} — перемещение типа 2, обусловленное влиянием усилия типа 1. Используя обозначение (а), найдем величины $F_{11} = F_{21} = \delta_1 = 1/k_1$, составляющие первый столбец матрицы жесткости. Элементы второго столбца в матрице **F** получаем в соответствии с рис. 3.6, *б*, на котором показана единичная сила $Q_2 = 1$, приложенная статически к массе m_1, а к массе m_2 не приложены силы. В этом случае податливости $F_{12} = \delta_1 = 1/k_1$, $F_{22} = \delta_1 + \delta_2 = (k_1 + k_2)/(k_1 k_2)$ и представляют собой перемещения типа 1 и 2, обусловленные действием единичной силы типа 2. Матрица податливости, так же как матрица жесткости, всегда симметрична * для линейной упругой системы (как свойство обращения симметричной матрицы), и в этом случае имеем $F_{12} = F_{21} = \delta_1$.

Приложим теперь силы Q_1 и Q_2 динамически, при этом необходимо принять во внимание силы инерции $-m_1\ddot{x}_1$ и $-m_2\ddot{x}_2$, и тогда уравнение (г) примет вид

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & -m_1\ddot{x}_1 \\ Q_2 & -m_2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}. \qquad (ж)$$

Если для масс и ускорений записать отдельные матрицы, то уравнение (ж) примет развернутую форму

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \right), \qquad (3.11)$$

*) Симметричность матрицы податливости следует из теоремы взаимности, Дж. Максвелла, доказанной им в 1864 г. См. **Maxwell J. C.** On calculation of the equilibrium and stiffness of frames. — Philosophical Magazine, Ser. 4, 1864, v. 27, pp. 294—299; переизд. The scientific papers of James Clark Maxwell. v. 1, Cambridge: University Press, 1890, pp. 598—604.

краткая запись которой имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}). \tag{3.12}$$

Из этого соотношения следует, что динамические перемещения равны произведению матрицы податливости на усилия, рассматриваемые в задаче. Как внешние приложенные усилия, так и инерционные усилия входят в стоящее в скобках выражение в правой части уравнения.

Для того чтобы сравнить этот метод с тем, что рассматривается в предыдущем параграфе, решим соотношение (3.6) относительно $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}). \tag{з}$$

Выражение (з) получено в предположении, что матрица жесткости $\mathbf{S}$ не особенная, поэтому существует обратная матрица $\mathbf{S}^{-1}$. Сравнивая уравнения (3.12) и (з), получаем соотношение

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}, \tag{3.13}$$

которым можно пользоваться тогда, когда матрицы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{S}$ соответствуют одним и тем же координатам одной и той же системы. Например, если взять матрицу, обратную матрице $\mathbf{F}$ из выражения (е), и использовать обозначения (а), то получим матрицу

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{\delta_1\delta_2}\begin{bmatrix} \delta_1 + \delta_2 & -\delta_1 \\ -\delta_1 & \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \tag{и}$$

являющуюся матрицей жесткости для системы, показанной на рис. 3.1, *а* [см. выражение (б) в п. 3.2]. Разумеется, если матрица жесткости системы особенная, то соответствующей ей матрицы податливости не существует.

Поскольку система, показанная на рис. 3.1, *а*, является статически определимой, то для нее матрица податливости получается легко, что, как правило, не так просто получить в случае статически неопределимых систем. Для большинства колеблющихся систем более простым является подход с использованием уравнений движения в усилиях с коэффициентами жесткости, но имеется много случаев, когда удобнее противоположный подход. В следующем примере показано использование коэффициентов влияния податливости.

Пример 1. На рис. 3.7, *а* показана консольно закрепленная балка с установленными на ней в середине пролета и на незакрепленном конце массами соответственно m_1 и m_2. Предполагается, что призматическая балка имеет жесткость EI при изгибе. Рассматривая только малые перемещения, обусловленные изгибными деформациями, возьмем в качестве координат перемещений прогибы y_1 и y_2 в направлении оси y. В этой задаче требуется получить уравнения движения в перемещениях, используя коэффициенты влияния податливости.

Решение. Для того чтобы найти искомые коэффициенты податливости, прикладываем сначала единичную силу $Q_1 = 1$ (см. рис. 3.7, *б*), и тогда получим

$$F_{11} = \frac{l^3}{24EI}; \quad F_{21} = \frac{5l^3}{48EI}. \tag{к}$$

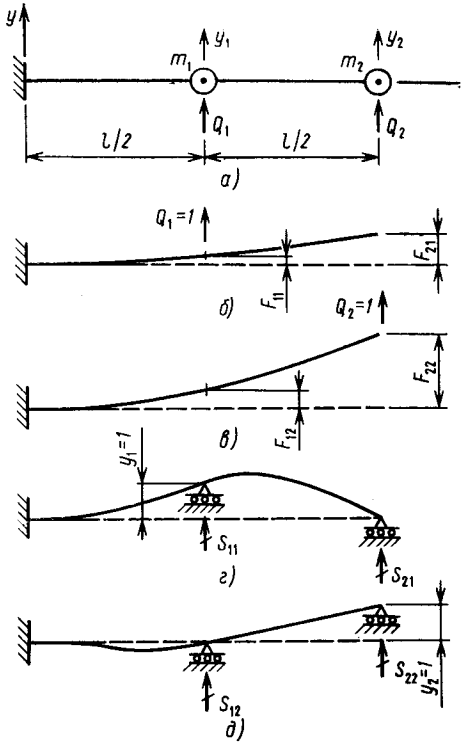


Рис. 3.7

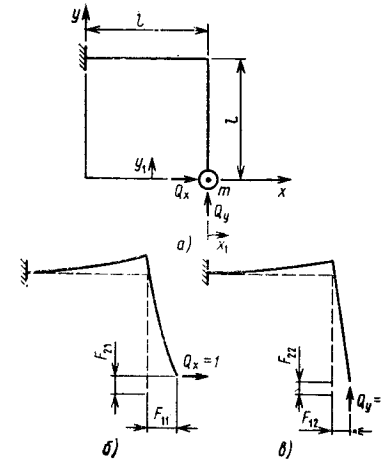


Рис. 3.8

Затем прикладываем единичную балку $Q_2 = 1$ (см. рис. 3.7, *в*) и находим

$$F_{12} = \frac{5l^3}{48EI}; \quad F_{22} = \frac{l^3}{3EI}. \qquad (л)$$

В результате матрица податливости принимает следующий вид:

$$\mathbf{F} = \frac{l^3}{48EI}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}. \qquad (м)$$

Тогда запишем матричную форму уравнений движения в перемещениях как

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{l^3}{48EI}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}\right). \qquad (н)$$

Обращение матрицы податливости дает

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} = \frac{48EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (о)$$

Эту обращенную матрицу можно получить непосредственно с помощью процесса, показанного на рис. 3.7, *г* и *д*. Однако непосредственное определение жесткостей в подобного типа задачах является более сложным, чем определение податливостей. Следовательно, если требуется найти жесткости, то более просто это сделать с помощью обращения матрицы податливости.

Пример 2. Простейшая схема, показанная на рис. 3.8, *а*, состоит из двух призматических балок с жесткостями EI при изгибе. К незакрепленному концу рамы присоединена масса m, а малые (обусловленные деформациями при изгибе) перемещения x_1 и y_1 незакрепленного конца имеют одинаковый порядок величины. Требуется записать уравнения движения в усилиях, используя координаты перемещения x_1 и y_1 и не учитывая влияния сил тяжести.

Решение. Так же, как и в предыдущем примере, здесь гораздо легче определять податливости, чем жесткости. На рис. 3.8, *б* и *в* показаны перемещения, обусловленные действием единичных нагрузок $Q_x = 1$ и $Q_y = 1$ в том случае, когда

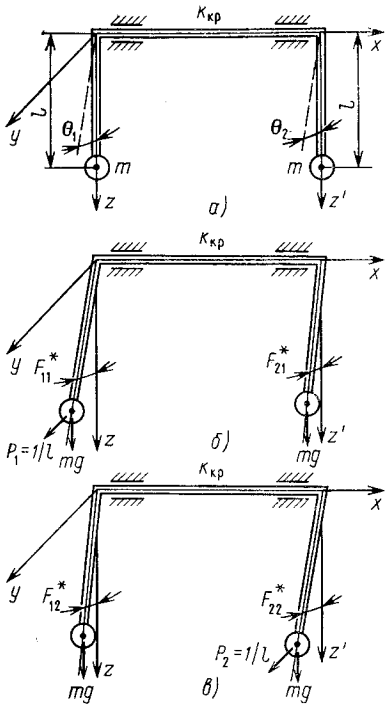


Рис. 3.9

прикладывается только одна из этих нагрузок. В результате матрица податливости принимает вид

$$\mathbf{F} = \frac{l^3}{6EI}\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (п)$$

Обращая эту матрицу, найдем

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} = \frac{6EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}. \qquad (р)$$

Тогда уравнения движения в усилиях запишем как

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \frac{6EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}. \qquad (с)$$

Пример 3. В качестве третьего примера определения податливостей рассмотрим два абсолютно жестких маятника (рис. 3.9, *а*), соединенных работающим на кручение стержнем с жесткостью $k_к$ при кручении. Требуется получить уравнения движения в перемещениях при малых поворотах (θ_1 и θ_2) маятников вокруг оси x.

Решение. Так как для данной системы несложно определить коэффициенты матрицы жесткости (матрицы сил тяжести), запишем их сразу:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S} + \mathbf{G} = \begin{bmatrix} k_к & -k_к \\ -k_к & k_к \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}. \qquad (т)$$

Поскольку матрица жесткости $\mathbf{S}$ является особенной, матрицы податливости $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$ не существует. Тем не менее, существует обратная матрице $\mathbf{S}^*$ матрица вида

$$\mathbf{F}^* = (\mathbf{S}^*)^{-1} = \frac{1}{mgl\,(2k_к + mgl)}\begin{bmatrix} k_к + mgl & k_к \\ k_к & k_к + mgl \end{bmatrix}. \qquad (у)$$

Элементы матрицы $\mathbf{F}^*$ нельзя разделить на коэффициенты влияний податливости и сил тяжести, поэтому их следует рассматривать как *псевдоподатливости*. Их можно определить непосредственно, прикладывая единичные моменты (или дающие тот же результат силы $P_1 = 1/l$ и $P_2 = 1/l$) так, как показано на рис. 3.9, *б* и *в*. В соответствии с рис. 3.9, *б* запишем условие равновесия моментов

$$mgl\,F_{11}^* + mgl\,F_{21}^* = P_1 l = 1 \qquad (ф)$$

и условие совместности при кручении

$$F_{11}^* - F_{21}^* = \frac{mgl\,F_{21}^*}{k_к}. \qquad (х)$$

Решая систему двух уравнений (ф) и (х), найдем выражение элементов матрицы

$$F_{11}^* = \frac{k_к + mgl}{mgl\,(2k_к + mgl)}; \qquad F_{21}^* = \frac{k_к}{mgl\,(2k_к + mgl)}, \qquad (ц)$$

которые совпадают с выражениями для элементов, стоящих в первом столбце матрицы (**y**). Аналогично можно определить, используя рис. 3.9, *в*, выражения для элементов второго столбца матрицы **F***. Тогда записанные с использованием матрицы **F*** уравнения для перемещений в данном примере имеют вид

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^* \left(\begin{bmatrix} P_1 l \\ P_2 l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right). \qquad (\text{ч})$$

ЗАДАЧИ

3.3.1. Для двухмассовой системы из задачи 3.2.1 определить коэффициенты податливости, приложив поочередно к массам m_1 и m_2 единичные силы. Записать в матричной форме уравнение движения и проверить справедливость соотношения $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}$.

3.3.2. К показанной на рис. 3.3 (см. п. 3.1) системе применить метод, основанный на использовании уравнений движения в перемещениях. Получить прямым путем коэффициенты податливости и проверить справедливость соотношения $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}$.

3.3.3. Вновь рассмотреть соединенные пружиной и показанные на рис. 3.4 (см. п. 3.1) пару маятников и определить матрицу **F*** псевдоподатливостей путем обращения матрицы **S***. Кроме того, определить элементы матрицы **F*** непосредственно, приложив единичные усилия, соответствующие координатам перемещения θ_1 и θ_2.

3.3.4. Для двухэтажной рамы, рассматриваемой в задаче 3.2.5, определить податливости путем приложения единичных сил. Записать в матричной форме уравнения движения в перемещениях и проверить справедливость соотношения $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}$.

3.3.5. Построить матрицу податливости $\mathbf{F}_C$ для рассматриваемой в задаче 3.2.6 системы без учета сил тяжести. Получить матрицу $\mathbf{S}_C$ путем обращения матрицы $\mathbf{F}_C$, затем путем суммирования с матрицей $\mathbf{G}_C$ получить матрицу $\mathbf{S}_C^*$, после чего обращением матрицы $\mathbf{S}_C^*$ получить матрицу $\mathbf{F}_C^*$.

3.3.6. Свободно опертая балка (рис. А.3.3.6) имеет установленные в точках, отстоящих от концов и друг от друга на треть длины балки, сосредоточенные массы m_1 и m_2. Предполагается, что призматическая балка имеет при изгибе жесткость EI. Используя y_1 и y_2 в качестве координат перемещения, определить коэффициенты податливости и записать в матричной форме уравнения движения в перемещениях.

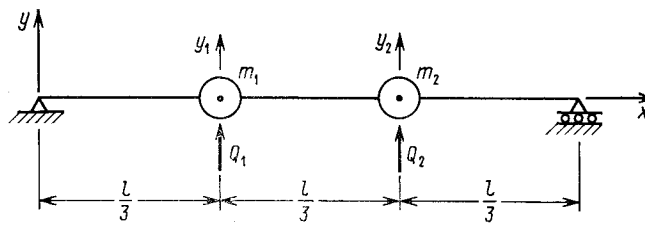


Рис. А.3.3.6

3.3.7. На рис. А.3.3.7 показана свободно опертая балка с одним свешивающимся концом (жесткость при изгибе равна EI) и с двумя массами m_1 и m_2. Определить матрицу **F** податливости, обратить ее для получения матрицы жесткости $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}$ и записать в матричной форме уравнения движения в условиях.

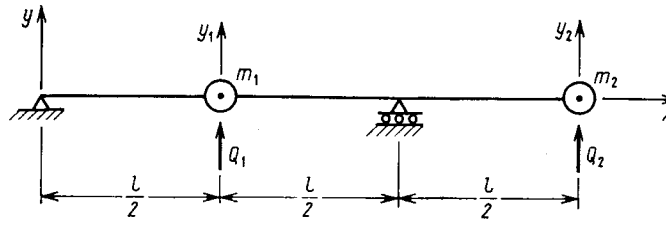


Рис. А.3.3.7

3.3.8. Каждый элемент горизонтальной рамы (рис. А.3.3.8) имеет поперечное сечение прямоугольной формы с жесткостями EI при изгибе и GJ при кручении. Определить матрицу податливости для перемещений y_1 и y_2 в вертикальном направлении, обратить ее и записать в матричной форме уравнения движения в усилиях.

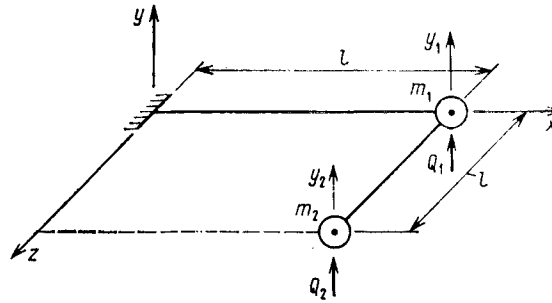


Рис. А.3.3.8

3.4. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ И СИЛ ТЯЖЕСТИ

Для большинства рассмотренных в данной главе систем с двумя стержнями свободы матрицы масс и сил тяжести были диагональными. Связанные с их совместным влиянием члены уравнений движения появились только во внедиагональных элементах матриц жескостей и податливостей. Подобного типа совместное влияние назовем *упругим взаимодействием*, поскольку эти слагаемые уравнений определяются либо жесткостными свойствами, либо свойствами податливости упругих элементов. Внедиагональные элементы матриц масс и сил тяжести можно получить и путем изменения формы записи уравнений движения. Элементы первого типа часто появляются в уравнениях движения систем с абсолютно жесткими телами и их назовем *инерционным взаимодействием*, тогда как второй тип будем называть *гравитационным взаимодействием*.

Для того чтобы показать, как может возникнуть инерционное взаимодействие, запишем уравнения движения в усилиях для показанной на рис. 3.10, *а* системы, используя различные способы выбора перемещений. Абсолютно жесткий стержень массой m закреплен в точках A и D на пружинах с жесткостями k_1 и k_2. Стержень закреп-

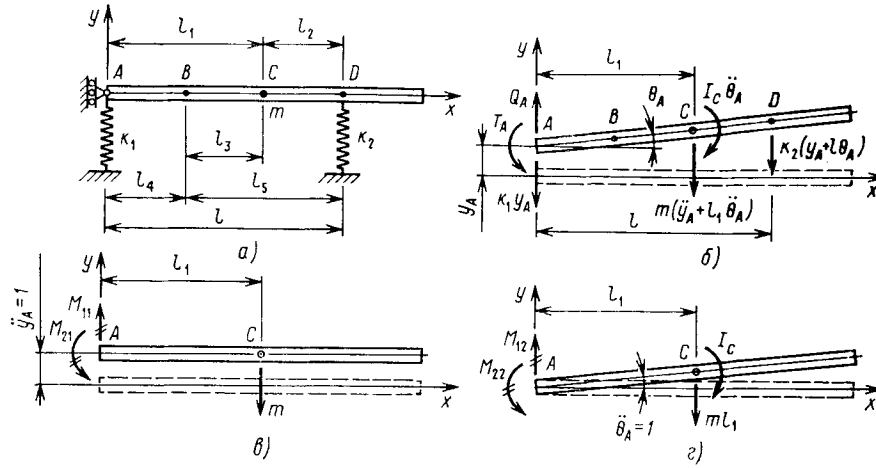


Рис. 3.10

лен так, что не может перемещаться в направлении оси x и движение совершает только в плоскости xy. Точка C есть центр тяжести стержня, I_C — момент инерции масс относительно проходящей через точку C оси z (на рисунке не показана). Точкой B обозначена такая точка стержня, для которой выполняется условие

$$k_1 l_4 = k_2 l_5. \qquad \text{(а)}$$

Приложенная в точке B и направленная параллельно оси y сила вызывает только смещение без поворота стержня, а момент вызывает только поворот без смещения.

На рис. 3.10, *б* представлен один из способов выбора координат перемещений для подобной системы, в качестве которых взяты y_A — перенос точки A в направлении оси y и θ_A — поворот стержня относительно точки A. На рисунке также показаны приложенные в точке A усилия Q_A и T_A, обусловленные реакцией пружин силы в точках A и D, а также инерционные силы в точке C. Если на схеме со свободным телом показаны эти действия, тело можно рассматривать как находящееся в состоянии *динамического равновесия*. Тогда, применяя *принцип Даламбера* для получения уравнения равновесия в усилиях в направлении оси y, найдем

$$m(\ddot{y}_A + l_1\ddot{\theta}_A) + k_1 y_A + k_2(y_A + l\theta_A)\, l = Q_A. \qquad \text{(б)}$$

Для того чтобы получить второе уравнение равновесия, подсчитаем моменты относительно точки A и запишем

$$m(\ddot{y}_A + l_1\ddot{\theta}_A)\, l_1 + I_C\ddot{\theta}_A + k_2(y_A + l\theta_A)\, l = T_A. \qquad \text{(в)}$$

В матричной форме уравнения (б) и (в) имеют вид

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & I_C + ml_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{\theta}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A \\ \theta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A \\ T_A \end{bmatrix}, \qquad (3.14а)$$

где присутствуют члены, характеризующие как инерционное, так и упругое взаимодействие.

В качестве второго варианта выбора координат перемещений для этой системы возьмем y_B и θ_B (соответственно перемещение точки B в направлении оси y и поворот стержня относительно точки B) и соответствующие усилия Q_B и T_B. Поступая так же, как и выше, запишем в матричной форме уравнения движения в условиях

$$\begin{bmatrix} m & ml_3 \\ ml_3 & I_C + ml_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_B \\ \ddot{\theta}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_4^2 + k_2 l_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_B \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_B \\ T_B \end{bmatrix}, \quad (3.14б)$$

где имеются члены, характеризующие инерционное взаимодействие, и отсутствуют члены, описывающие упругое взаимодействие.

При выборе третьего варианта координат воспользуемся центром тяжести (точка C) в качестве точки, определяющей движение стержня как абсолютно жесткого тела. В этом случае координатами перемещения являются y_C и θ_C (т. е. перемещения в направлении оси y и поворот балки относительно точки C), а соответствующими усилиями будут Q_C и T_C. Тогда применительно к рассматриваемой точке уравнения движения принимают вид

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_C \\ \ddot{\theta}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_C \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_C \\ T_C \end{bmatrix}, \quad (3.14в)$$

где имеются члены, характеризующие упругое взаимодействие, и отсутствуют члены, описывающие инерционное взаимодействие. Таким образом видим, что характер взаимодействия, присутствующего в системе уравнений движения, зависит от выбора координат перемещений.

В произвольной матрице масс вида (3.14а) ее элементы можно рассматривать как *коэффициенты влияния инерции*, которые определяются как усилия, необходимые для создания единичных ускорений:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & I_C + ml_1^2 \end{bmatrix}. \quad (г)$$

Произвольный элемент M_{ij} матрицы масс представляет собой усилие типа i, необходимое для создания единичного (мгновенного) ускорения типа j. Это определение совпадает с тем, что было дано для коэффициента влияния жесткости; при этом вычисление элементов столбцов матрицы **M** проводится так же, как было описано применительно к элементам столбцов матрицы **S**. На рис. 3.10, *в* и *г* показан процесс, при котором в качестве характерной точки для описания движений абсолютно жесткостного стержня взята точка A. На рис. 3.10, *в* представлены моменты M_{11} и M_{21}, необходимые для создания единичного ускорения $\ddot{y}_A = 1$ при $\ddot{\theta}_A = 0$, а также моменты M_{12} и M_{22} (см. рис. 3.10, *г*), необходимые для создания единичного ускорения $\ddot{\theta}_A = 1$ при $\ddot{y}_A = 0$. Для наглядности ускорения изображены так, как будто они являются перемещениями, а двой-

ные черточки на стрелках при точке A служат напоминанием о том, что эти стрелки изображают усилия, необходимые для создания единичных ускорений. Из условий динамического равновесия видно, что коэффициентами влияния инерции являются величины $M_{11} = m_1$, $M_{21} = M_{12} = ml_1$ и $M_{22} = I_C + ml_1^2$, что можно также видеть из выражения (г).

Здесь можно также определить *обратные коэффициенты влияния энерции*, которые, по определению, являются ускорениями, обусловленными единичными силами, и аналогичны коэффициентам влияния податливости. Обратная матрица $\mathbf{M}^{-1}$ существует в том случае, если матрица $\mathbf{M}$ неособенная. Тогда, решая уравнения (3.6) относительно ускорения $\ddot{\mathbf{X}}$, получим уравнение движения вида

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{SX}). \tag{3.15}$$

Подобные уравнения можно сравнить с уравнениями в перемещениях [см. уравнение (3.12)], рассмотренными в предыдущем параграфе. Однако подобный подход представляет второстепенный интерес и больше в этом параграфе обсуждаться не будет. Чтобы продемонстрировать проявление взаимодействия сил тяжести, рассмотрим соединенную пружиной пару маятников (см. рис. 3.4). Их уравнения движения (3.4а) и (3.4б), полученные выше, содержат взаимодействия, обусловленные только упругостью. Однако, если сложить уравнения (3.4б) и (3.4а) и полученное в результате уравнение рассмотреть совместно с уравнением (3.4б) как систему, то получим

$$\begin{bmatrix} ml^2 & ml^2 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -kh^2 & kh^2 \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} mgl & mgl \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 \\ T_2 \end{bmatrix}, \tag{д}$$

где $T_1 = P_1 l$ и $T_2 = P_2 l$. Первое уравнение полученной системы представляет условие равновесия динамических моментов относительно точки A для всей системы, показанной на рис. 3.4, тогда как второе уравнение представляет условие равновесия моментов относительно точки B только для правого маятника. При использовании линейной комбинации исходных уравнений как в матрицу масс, так и в матрицу сил тяжести вводятся внедиагональные элементы; при этом исчезает свойство симметрии матрицы жесткости. Уравнение (д) можно также рассматривать как результат умножения уравнения (3.9) из п. 3.2 на транспонированную матрицу $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{е}$$

а буква «т» обозначает транспонирование. Таким образом, уравнение (д) в кратком матричном представлении имеет вид

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{S} + \mathbf{G})\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}. \tag{ж}$$

Симметрия матриц коэффициентов будет восстановлена, если перед матрицами столбцами $\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$ и $\boldsymbol{\Theta}$ из уравнения (ж) поставить единичную матрицу

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}, \tag{з}$$

где $\mathbf{A}^{-1}$ — матрица, обратная матрице $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{и}$$

В результате уравнение (ж) примет вид

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{S} + \mathbf{G})\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{T} \tag{к}$$

или

$$\mathbf{M}_A\ddot{\boldsymbol{\Theta}}_A + (\mathbf{S}_A + \mathbf{G}_A)\boldsymbol{\Theta}_A = \mathbf{T}_A, \tag{3.16}$$

где

$$\boldsymbol{\Theta}_A = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -\theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_A = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 \\ T_2 \end{bmatrix};$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_A = \mathbf{A}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ -\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_A = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{A} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{A} = kh^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_A = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{A} = mgl \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{л}$$

Уравнения (3.16) представляют вариант системы уравнений движения в усилиях, в которых в качестве *обобщенных усилий* выступает матрица-столбец $\mathbf{T}_A$, а в качестве *обобщенных перемещений* — матрица-столбец $\boldsymbol{\Theta}_A$. Подобная замена координат (переход от Θ к $\boldsymbol{\Theta}_A$) называется *преобразованием координат*. Симметрия матриц преобразованных коэффициентов устанавливается благодаря тому, что *конгруэнтные преобразования* вида $\mathbf{M}_A = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{A}$ приводят к симметричным матрицам. Как видно, в новых координатах уравнения имеют члены, описывающие как инерционные взаимодействия, так взаимодействия сил тяжести, и не имеют членов, характеризующих взаимодействия, обусловленные упругостью.

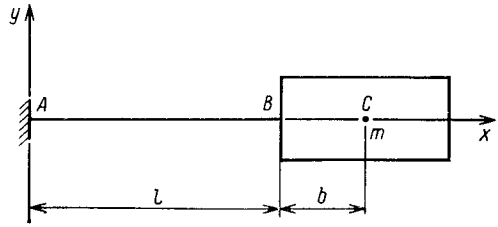


Рис. 3.11

Пример 1. На рис. 3.11 показано абсолютно жесткое тело, присоединенное к консольно закрепленной балке. Пусть I_C — момент инерции массы тела относительно оси z,

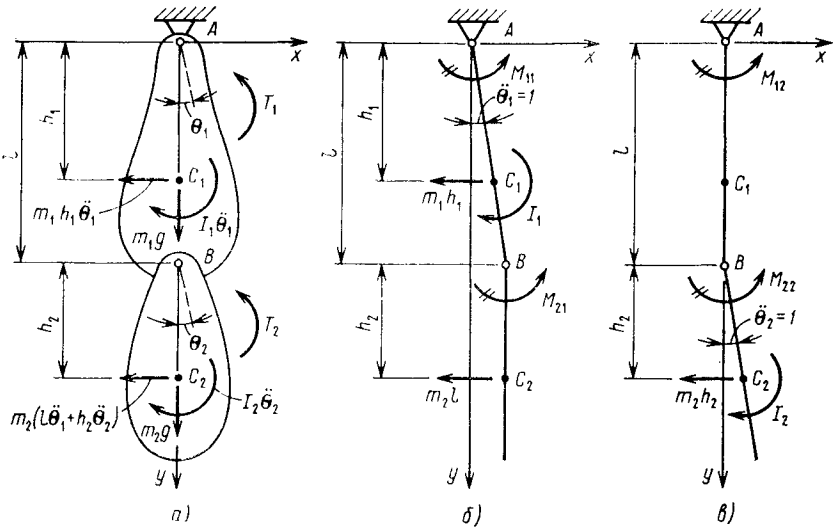


Рис. 3.12

проходящей через центр тяжести (точку C). Эта точка располагается на оси x на расстоянии b от незакрепленного конца балки. Предполагается, что призматическая балка имеет жесткость EI при изгибе. Рассматривая только малые перемещения в плоскости xy, обусловленные изгибными деформациями, и считая, что данная система имеет две степени свободы, записать уравнения движения в перемещениях.

Решение. Если в качестве координат перемещения выбрать прогиб y_B и поворот θ_B точки B абсолютно жесткого тела, то легко получить коэффициенты податливостей. Кроме того, элементы матрицы масс совпадают с элементами матрицы (г), за исключением того, что длина l_1 заменяется на расстояние b. Таким образом, можно записать уравнения движения в перемещениях для рассматриваемой точки B:

$$\begin{bmatrix} y_B \\ \theta_B \end{bmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2l^2 & 3l \\ 3l & 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Q_B \\ T_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & mb \\ mb & I_C + mb^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_B \\ \ddot{\theta}_B \end{bmatrix} \right), \qquad \text{(м)}$$

в которых имеются как инерционные взаимодействия, так и взаимодействия, обусловленные упругостью.

С другой стороны, если движения абсолютно жесткого тела рассматривать в точке C, получим следующие уравнения в перемещениях:

$$\begin{bmatrix} y_C \\ \theta_C \end{bmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2(l^2 + 3lb + 3b^2) & 3(l + 2b) \\ 3(l + 2b) & 6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} Q_C \\ T_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_C \\ \ddot{\theta}_C \end{bmatrix} \right), \qquad \text{(н)}$$

в которых отсутствуют члены, описывающие инерционные взаимодействия, но имеются члены, характеризующие более сложные взаимодействия, обусловленные упругостью.

Пример 2. Рассмотрим *двойной составной маятник* (рис. 3.12, *а*), состоящий из двух соединенных в точке B абсолютно жестких тел, шарнирно закрепленных в точке A. При наличии сил тяжести эта система может колебаться в плоскости xy. В качестве координат перемещения возьмем малые повороты θ_1 и θ_2. Тела имеют массы m_1 и m_2, центры тяжести находятся в точках C_1 и C_2, через I_1 и I_2 обозна-

чены моменты инерции масс относительно осей z, проходящие через эти точки. Требуется записать уравнения движения данной системы в усилиях.

Решение. Используя принцип Даламбера, запишем уравнение динамического равновесия моментов относительно точки A для всей системы (см. рис. 3.12, *а*)

$$I_1\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 + m_1h_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2\left(l\ddot{\theta}_1 + h_2\ddot{\theta}_2\right)(l + h_2) + m_1gh_1\theta_1 + \\ + m_2g\left(l\theta_1 + h_2\theta_2\right) = T_1 + T_2. \qquad (\text{о})$$

Аналогично, из условия равновесия моментов относительно точки B для второго тела получаем

$$I_2\ddot{\theta}_2 + m_2\left(l\ddot{\theta}_1 + h_2\ddot{\theta}_2\right)h_2 + m_2gh_2\theta_2 = T_2. \qquad (\text{п})$$

Переписав уравнения (о) и (п) в матричной форме, имеем

$$\begin{bmatrix} I_1 + m_1h_1^2 + m_2l(l+h_2) & I_2 + m_2h_2(l + h_2) \\ m_2lh_2 & I_2 + m_2h_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (m_1h_1 + m_2l)\,g & m_2h_2g \\ 0 & m_2h_2g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 \\ T_2 \end{bmatrix}. \qquad (\text{р})$$

Уравнение (р) напоминает уравнение (д), поскольку обобщенные усилия не соответствуют координатам перемещения, и матрицы коэффициентов являются несимметричными. Однако, если из уравнения (о) вычесть уравнение (п), то результирующее уравнение вместе с уравнением (п) даст следующую систему:

$$\mathbf{M}\ddot{\Theta} + \mathbf{G}\Theta = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}, \qquad (\text{с})$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{G}$ — симметричные матрицы вида

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_1 + m_1h_1^2 + m_2l^2 & m_2lh_2 \\ m_2lh_2 & I_2 + m_2h_2^2 \end{bmatrix}; \qquad (\text{т})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (m_1h_1 + m_2l)\,g & 0 \\ 0 & m_2h_2g \end{bmatrix}. \qquad (\text{у})$$

Теперь первое уравнение этой системы представляет условие динамического равновесия моментов относительно точки A только для первого тела.

Симметричные матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{G}$ можно построить непосредственно как матрицы коэффициентов влияния соответственно инерции и сил тяжести. На рис. 3.12, *б* и *в* схематично представлены условия $\ddot{\theta}_1 = 1$ (при $\ddot{\theta}_2 = 0$) и $\ddot{\theta}_2 = 1$ (при $\ddot{\theta}_1 = 0$), которые требуются для определения элементов матрицы $\mathbf{M}$. Из рис.3.12, *б* видно, что величины

$$M_{21} = m_2lh_2; \qquad (\text{ф})$$

$$M_{11} = I_1 + m_1h_1^2 + m_2l(l + h_2) - M_{21} = I_1 + m_1h_1^2 + m_2l^2 \qquad (\text{х})$$

представляют собой элементы первого столбца матрицы $\mathbf{M}$ [см. выражение (т)]. Из рис. 3.12, *в* находим элементы второго столбца

$$M_{22} = I_2 + m_2h_2^2; \qquad (\text{ц})$$

$$M_{12} = I_2 + m_2h_2(l + h_2) - M_{22} = mlh_2. \qquad (\text{ч})$$

Элементы матрицы $\mathbf{G}$ можно определить аналогичным образом, взяв вместо ускорения единичные перемещения.

3.5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ ДЕМПФИРОВАНИЯ

В п. 3.1 для двухмассовой системы, показанной на рис. 3.1, *а*, были получены выражения для собственных частот и форм при свободных колебаниях без демпфирования. Эту же задачу рассмотрим вновь с помощью более формального подхода, позволяющего полу-

чить выражения, применимые ко всем колеблющимся системам с двумя степенями свободы. Будут рассмотрены уравнения движения как в усилиях, так и в перемещениях, и обсуждено получение произвольных постоянных при задании начальных условий в виде перемещений и скоростей. Кроме того, будут проанализированы и проиллюстрированы примерами несколько специальных тем, относящихся к вопросу свободных колебаний. Если к двухмассовой системе, показанной на рис. 3.1, *а*, не приложены нагрузки, уравнения движения в усилиях (3.6) представим в форме

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{0}, \tag{3.17}$$

где через $\mathbf{0}$ обозначена матрица нулевых нагрузок. При обсуждениях в данном параграфе будем рассматривать только диагональные матрицы масс (как это имеет место в случае, показанном на рис. 3.1, *а*), тогда уравнение (3.17) в развернутом виде будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Предположим, что этой системе однородных уравнений удовлетворяют гармонические решения вида, введенного ранее в п. 3.1, а именно:

$$x_1 = x_{м1} \sin(pt + \varphi); \tag{а}$$

$$x_2 = x_{м2} \sin(pt + \varphi). \tag{б}$$

В представлениях (а) и (б) через $x_{м1}$ и $x_{м2}$ обозначены максимальные значения, или амплитуды, колебательных движений.

Подставляя представления (а) и (б) в уравнения (3.18), получим систему алгебраических уравнений

$$-p^2 M_{11} x_{м1} + S_{11} x_{м1} + S_{12} x_{м2} = 0; \tag{в}$$

$$-p^2 M_{22} x_{м2} + S_{21} x_{м1} + S_{22} x_{м2} = 0, \tag{г}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} S_{11} - p^2 M_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - p^2 M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{м1} \\ x_{м2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{д}$$

Чтобы существовали ненулевые решения для перемещений, определитель уравнений (д) должен равняться нулю, что дает

$$\begin{vmatrix} S_{11} - p^2 M_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - p^2 M_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{е}$$

Разложение этого определителя имеет вид

$$(S_{11} - p^2 M_{11})(S_{22} - p^2 M_{22}) - S_{12}^2 = 0 \tag{ж}$$

или

$$M_{11} M_{22} (p^2)^2 - (M_{11} S_{22} + M_{22} S_{11}) p^2 + S_{11} S_{22} - S_{12}^2 = 0. \tag{з}$$

Это характеристическое уравнение является квадратным относительно p^2 и его корни представляют характеристические значения для этой системы. Решая уравнение (з) по формулам для квадратного алгебраического уравнения, найдем

$$p_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{3.19}$$

где

$$a = M_{11}M_{22}; \quad b = -(M_{11}S_{22} + M_{22}S_{11});$$
$$c = S_{11}S_{22} - S_{12}^2 = |\mathbf{S}|. \tag{и}$$

Подставляя значения (и) в подкоренное выражение $b^2 - 4ac$ из решения (3.19), видим, что оно всегда положительно, поэтому корни p_1^2 и p_2^2 являются действительными числами. Далее, если определитель матрицы S, равный постоянной величине c, не отрицателен, то корень квадратный будет меньше или равен b, поэтому оба корня p_1^2 и p_2^2 будут положительными (или равны нулю). Подставляя характеристические значения p_1^2 и p_2^2 в однородные уравнения (в) и (г), можно записать решения как отношения r_1 и r_2 амплитуд

$$r_1 = \frac{x_{M\,1,1}}{x_{M\,2,2}} = \frac{-S_{12}}{S_{11} - p_1^2 M_{11}} = \frac{S_{22} - p_1^2 M_{22}}{-S_{21}}; \tag{3.20а}$$

$$r_2 = \frac{x_{M\,1,2}}{x_{M\,2,2}} = \frac{-S_{12}}{S_{11} - p_2^2 M_{11}} = \frac{S_{22} - p_2^2 M_{22}}{-S_{21}}. \tag{3.20б}$$

Оба эти представления для решений справедливы, что видно из уравнения (ж). Как и в общем случае однородных алгебраических уравнений, здесь могут быть получены только такие решения, которые содержат произвольные постоянные. Таким образом, абсолютная величина амплитуд не может быть определена, а можно найти только их отношения или формы колебаний. Второй индекс (1 и 2) в выражениях (3.20а) и (3.20б) для амплитуд означает собственные (или главные) формы колебаний, соответствующие корням p_1^2 и p_2^2. Как и в п. 3.1, решения (3.19) характеристического уравнения записаны так, что выполняется условие $p_1 < p_2$. Меньшее значение представляет круговую частоту первой или основной формы колебаний, а большее соответствует второй форме колебаний.

Чтобы показать пример вычисления частот и форм колебаний, примем для системы, показанной на рис. 3.1, *а*: $m_1 = m_2 = m$; жесткости пружин $k_1 = k_2 = k$. Тогда $M_{11} = M_{22} = m$, $S_{11} = 2k$, $S_{12} = S_{21} = -k$, $S_{22} = k$.
По формуле (3.19) получаем

$$p_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\,\frac{k}{m} = 0{,}382\,\frac{k}{m}; \tag{к}$$

$$p_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\,\frac{k}{m} = 2{,}618\,\frac{k}{m}. \tag{л}$$

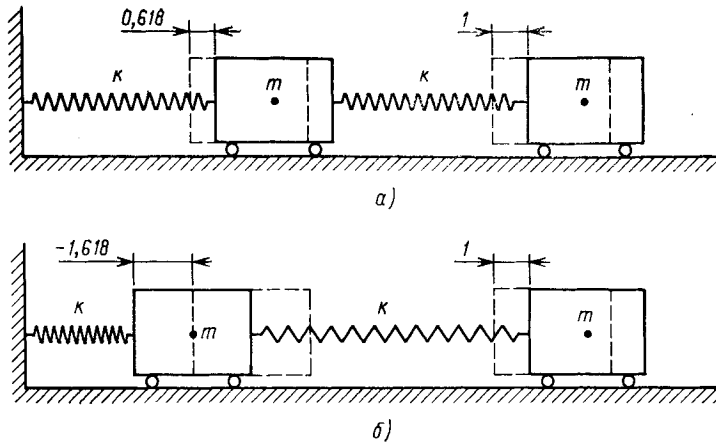


Рис. 3.13

Подставляя найденные значения этих корней в одно из выражений (3.20а) и (3.20б) для отношений амплитуд, найдем для первой формы колебаний

$$r_1 = \frac{x_{м\,1,\,1}}{x_{м\,2,\,2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618 \qquad (м)$$

и для второй формы колебаний

$$r_2 = \frac{x_{м\,1,\,2}}{x_{м\,2,\,2}} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}618. \qquad (н)$$

Разумеется, можно как угодно изменять величину амплитуд этих двух форм, но их отношение должно оставаться постоянным. На рис. 3.13, *а* показана двухмассовая система, колеблющаяся по основной форме, и указаны безразмерные значения амплитуд, отнесенные к амплитуде колебаний второй массы. Аналогично на рис. 3.13, *б* показана вторая форма колебаний; при этом безразмерные значения амплитуд также отнесены к амплитуде второй массы.

Если вместо уравнений движения в усилиях взять уравнения движения в перемещениях, уравнение (3.17) примет вид

$$\mathbf{FM\ddot{X}} + \mathbf{X} = \mathbf{0}. \qquad (3.21)$$

Развернутая форма его такова:

$$\begin{bmatrix} F_{11}M_{11} & F_{12}M_{22} \\ F_{21}M_{11} & F_{22}M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.22)$$

Подставляя представления (а) и (б) в уравнение (3.22), получим следующие алгебраические уравнения:

$$-p^2F_{11}M_{11}x_{м1} - p^2F_{12}M_{22}x_{м2} + x_{м1} = 0; \qquad (о)$$

$$-p^2F_{21}M_{11}x_{м1} - p^2F_{22}M_{22}x_{м2} + x_{м2} = 0, \qquad (п)$$

которые можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} F_{11}M_{11}-\lambda & F_{12}M_{22} \\ F_{21}M_{11} & F_{22}M_{22}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{м1} \\ x_{м2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (р)$$

где $\lambda = 1/p^2$. Для того чтобы существовали не равные тождественно нулю решения, должен равняться нулю определитель матрицы коэффициентов (р). Откуда получаем

$$(F_{11}M_{11}-\lambda)(F_{22}M_{22}-\lambda) - F_{12}^2 M_{11}M_{22} = 0 \qquad (с)$$

или

$$\lambda^2 - (F_{11}M_{11}+F_{22}M_{22})\lambda + (F_{11}F_{22}-F_{12}^2)M_{11}M_{22} = 0. \qquad (т)$$

Уравнение (т) является характеристическим, соответствующим однородным дифференциальным уравнениям движения в перемещениях, и его корни представляют обратные величины квадратов круговых частот. Корни можно определить по одной из следующих формул:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2-4e}}{2} \qquad (3.23а)$$

или

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{\lambda_{1,2}} = \frac{2}{-d \pm \sqrt{d^2-4e}}, \qquad (3.23б)$$

где

$$d = -(F_{11}M_{11}+F_{22}M_{22}); \quad e = (F_{11}F_{22}-F_{12}^2)M_{11}M_{22} = |\mathbf{F}|M_{11}M_{22}. \qquad (у)$$

В формулах (3.23а) и (3.23б) значение λ_1 (большее из двух значений λ) соответствует p_1^2 (т. е. меньшему из двух значений p^2), а значение λ_2 (меньшее из двух значений λ) соответствует p_2^2 (т. е. большему из двух значений p^2). Оба корня (и их обратные значения) будут действительными и положительными числами, если положителен определитель матрицы $\mathbf{F}$.

Подставив характеристические значения λ_1 и λ_2 в однородные уравнения (р), получим дуальные соотношения для отношений амплитуд r_1 и r_2:

$$r_1 = \frac{x_{м\,1,\,1}}{x_{м\,2,\,2}} = \frac{-F_{12}M_{22}}{F_{11}M_{11}-\lambda_1} = \frac{F_{22}M_{22}-\lambda_1}{-F_{21}M_{11}}; \qquad (3.24а)$$

$$r_2 = \frac{x_{м\,1,\,2}}{x_{м\,2,\,2}} = \frac{-F_{12}M_{22}}{F_{11}M_{11}-\lambda_2} = \frac{F_{22}M_{22}-\lambda_2}{-F_{21}M_{11}}, \qquad (3.24б)$$

правильность которых можно проверить с помощью уравнения (с).

Если снова положить, что в изображенной на рис. 3.1, *а* системе массы и жесткости пружины имеют одинаковые значения, то коэффициенты влияния гибкости будут равны $F_{11} = \delta$, $F_{12} = F_{21} = \delta$, $F_{22} = 2\delta$ (где $\delta = 1/k$).

Тогда по формуле (3.23а) получим

$$\lambda_1 = \frac{(3+\sqrt{5})\,m\delta}{2} = \frac{m\delta}{0{,}382}; \quad (ф) \quad \lambda_2 = \frac{(3-\sqrt{5})\,m\delta}{2} = \frac{m\delta}{2{,}618}, \qquad (х)$$

т. е. величины, обратные (к) и (л). Подставляя найденные значения (ф) и (к) в выражения (3.24а) и (3.24б), найдем отношения амплитуд для первой формы колебаний

$$r_1 = \frac{x_{м\,1,\,1}}{x_{м\,2,\,1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$$

и для второй формы колебаний

$$r_2 = \frac{x_{м\,1,\,2}}{x_{м\,2,\,2}} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}618,$$

которые совпадают с ранее найденными значениями (м) и (н). Отсюда следует, что частоты и формы колебаний не зависят от выбора формы уравнения движения.

Определив характеристики колебаний данной системы, можно записать полное решение для свободных колебаний в виде суммы собственных форм

$$x_1 = r_1 x_{м\,2,\,1} \sin(p_1 t + \varphi_1) + r_2 x_{м\,2,\,2} \sin(p_2 t + \varphi_2); \qquad (ц)$$

$$x_2 = x_{м\,2,\,1} \sin(p_1 t + \varphi_1) + x_{м\,2,\,2} \sin(p_2 t + \varphi_2). \qquad (ч)$$

В первом из этих выражений вместо $x_{м1,1}$ и $x_{м\,1,2}$ используются выражения $r_1 x_{м2,1}$ и $r_2 x_{м2,2}$. Выражения (ц) и (ч) можно записать также в следующих эквивалентных формулах:

$$x_1 = r_1 (C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + r_2 (C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t); \qquad (3.25а)$$

$$x_2 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t. \qquad (3.25б)$$

Продифференцировав выражения (3.25а) и (3.25б) по времени, получим выражения для скоростей

$$\dot{x}_1 = -p_1 r_1 (C_1 \sin p_1 t + C_2 \cos p_1 t) - \\ - p_2 r_2 (C_3 \sin p_2 t - C_4 \cos p_2 t); \qquad (3.25в)$$

$$\dot{x}_2 = -p_1 (C_1 \sin p_1 t - C_2 \cos p_1 t) - \\ - p_2 (C_3 \sin p_2 t - C_4 \cos p_2 t). \qquad (3.25г)$$

Четыре произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 в выражениях (3.25а)—(3.25г) можно определить, используя четыре начальных условия для перемещения и скорости. Для системы с двумя степенями свободы в момент времени $t = 0$ эти условия будем обозначать x_{01}, $\dot{x}_{01}$, x_{02}, $\dot{x}_{02}$. Подставляя начальные условия в выражения (3.25а)—(3.25г), определим

$$C_1 = \frac{x_{01} - r_2 x_{02}}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_{01} - r_2 \dot{x}_{02}}{p_1 (r_1 - r_2)}; \qquad (3.26)$$

$$C_3 = \frac{r_1 x_{02} - r_{01}}{r_1 - r_2}; \quad C_4 = \frac{r_1 \dot{x}_{02} - \dot{x}_{01}}{p_2 (r_1 - r_2)}.$$

Для иллюстрации применения этих выражений определяем динамические перемещения системы (см. рис. 3.1, *а*) при начальных условиях вида $x_{01} = x_{02} = 1$ и $\dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = 0$. Величины p_1, p_2, r_1 и r_2 уже известны [см. выражения (к), (л), (м) и (н)] для системы,

у которой равны массы и жесткости пружин. Подставляя известные величины и начальные условия в выражения (3.26), найдем следующие значения постоянных интегрирования: $C_1 = 1{,}171$, $C_2 = 0$, $C_4 = 0$ и $C_3 = -0{,}171$. Тогда выражения (3.25а) и (3.25б), описывающие новые системы, можно представить в следующем виде:

$$x_1 = 0{,}724 \cos p_1 t + 0{,}277 \cos p_2 t; \qquad \text{(ш)}$$

$$x_2 = 1{,}171 \cos p_1 t - 0{,}171 \cos p_2 t. \qquad \text{(щ)}$$

В данном случае выражения для перемещений системы содержат только функции косинуса, поскольку равны начальные скорости. Если равны нулю начальные перемещения, а начальные скорости отличны от нуля, выражения динамических перемещений будут содержать только функции синуса. Далее, свой вклад в поведение системы дают обе собственные формы колебаний, за исключением случаев, когда начальные условия системы совпадают с одной из этих собственных форм. Например, если начальные перемещения в точности соответствуют характеру первой формы колебания ($x_{01}/x_{02} = r_1$) при $\dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = 0$, динамические перемещения системы примут вид

$$x_1 = x_{01} \cos p_1 t; \; x_2 = x_{02} \cos p_1 t,$$

что в точности совпадает с первой формой колебаний.

Обобщая сказанное, отметим, что, если, как предполагается, собственные формы колебаний имеют вид (а) и (б), то можно перейти от однородных дифференциальных уравнений свободных колебаний, подобных уравнениям (3.17) или (3.21), к системе алгебраических уравнений. Полагая определитель матрицы коэффициентов равным нулю, получим характеристическое уравнение, из которого определяем частоты и формы колебаний. При таком подходе форма решения является установленной, но величина вклада соответствующих форм в суммарное динамическое перемещение должна определяться с помощью начальных условий.

Для того чтобы обсудить несколько особых ситуаций, связанных со свободными колебаниями, снова рассмотрим два простых маятника (см. рис. 3.4), соединенных пружиной. Для этой системы элементы диагональной матрицы масс [см. выражение (3.9)] имеют вид $M_{11} = M_{22} = ml^2$. Кроме того, вместо матрицы $\mathbf{S}$ там используется матрица $\mathbf{S}^*$, содержащая обусловленные силами тяжести элементы вида

$$S_{11}^* = S_{22}^* = kh^2 + mgl; \; S_{12}^* = S_{21}^* = -kh^2.$$

Используя эти значения, по формуле (3.19) определим круговые частоты собственных колебаний

$$p_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad p_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}}. \qquad \text{(э)}$$

Затем из выражений (3.20а) и (3.20б) можно найти отношения амплитуд

$$r_1 = 1; \; r_2 = -1. \qquad \text{(а')}$$

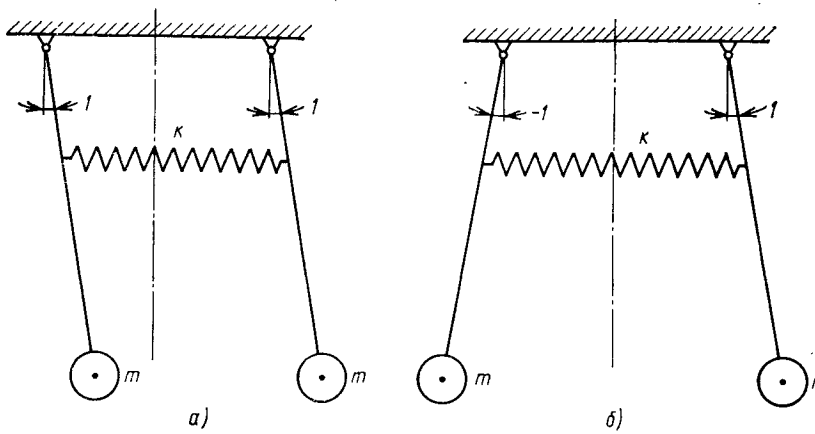


Рис. 3.14

На рис. 3.14, *а* и *б* показаны две собственные формы колебаний, где безразмерные значения амплитуд отнесены к значению амплитуды правого маятника. При колебаниях по первой форме маятники перемещаются в одном и том же направлении с одной и той же амплитудой (как если бы это был один маятник); при этом связывающая их пружина не деформируется. При колебаниях по второй форме маятники качаются с одинаковыми амплитудами в противоположные стороны, поэтому пружина периодически растягивается и сжимается.

Эта система является симметричной относительно вертикальной плоскости, равноотстоящей от обоих маятников. Как видно из рис. 3.14, *б*, вторая форма собственных колебаний является симметричной относительно этой плоскости и называется *симметричной формой колебаний*. Чтобы представить эту форму колебаний, можно использовать половину системы, закрепив неподвижную пружину в точке, расположенной в середине ее пролета (в этом случае эффективная жесткость половины пружины равна $2k$). С другой стороны, первая форма собственных колебаний (см. рис. 3.14, *а*) будет антисимметрична относительно упомянутой плоскости симметрии, вследствие чего она и называется *антисимметричной формой колебаний*. В этом случае можно пользоваться половиной системы, если позволить средней точке пружины свободно перемещаться через плоскость симметрии (следовательно, здесь эффективная жесткость половины пружины равна нулю). В общем случае в колебательной системе, имеющей единственную плоскость симметрии, будут возникать относительно этой плоскости только симметричная и антисимметричная формы, поэтому вместо исходной системы можно рассмотреть две приведенные системы. Одна из них должна быть закреплена в плоскости симметрии с тем, чтобы появились только симметричные формы перемещений, а другая должна допускать только антисимметричные перемещения.

Если на соединенные пружиной маятники не действуют силы тяжести, матрица $\mathbf{S}^*$ переходит в матрицу $\mathbf{S}$, являющуюся особенной. В этом случае корни (э) принимают вид

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{h}{l}\sqrt{\frac{2k}{m}}. \qquad (б')$$

Теперь первая форма колебаний системы состоит из движения системы как жесткого тела, которое появляется при отсутствии демпфирования. Собственная частота такой *формы движения как жесткого тела* равна нулю, а период равен бесконечности. Характеристические уравнения, имеющие только положительные корни, называются положительно определенными, а уравнения с одним или более нулевыми корнями называются положительно полуопределенными. В соответствии с этим колеблющиеся системы с одним или большим числом форм движения как жесткого тела иногда называются *полуопределенными системами*.

В качестве другого случая, относящегося к паре маятников, предположим, что имеется сила тяжести, но жесткость соединительной пружины равна нулю; при этом вторая круговая частота в выражениях (э) совпадает с первой, т. е. имеет место случай *кратных корней*. Маятники могут колебаться независимо с одинаковой частотой, а внутренней связи между их амплитудами не существует.

С другой стороны, если соединяющая маятники пружина имеет малую (но не равную нулю) жесткость, то говорят, что обе части системы являются *слабо связанными*. В этом случае частота колебаний во второй форме будет ненамного выше, чем частота колебаний, соответствующая первой форме (см. выражение (э)]. Предположим, что колебания системы возникают при начальных условиях вида $\theta_{01} = \theta_0$, $\theta_{02} = 0$, $\dot{\theta}_{01} = \dot{\theta}_{02} = 0$. Из выражения (3.26) находим $C_1 = -C_3 = \theta_0/2$, $C_2 = C_4 = 0$. Тогда согласно выражениям (3.25а) и (3.25б) для динамических перемещений системы получим

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{2}(\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \theta_0 \cos\frac{(p_1 - p_2)t}{2}\cos\frac{(p_1 + p_2)t}{2}; \qquad (в')$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_0}{2}(\cos p_1 t - \cos p_2 t) = -\theta_0 \sin\frac{(p_1 - p_2)t}{2}\sin\frac{(p_1 + p_2)t}{2}. \qquad (г')$$

Когда частоты p_1 и p_2 имеют близкие значения, каждое из перемещений θ_1 и θ_2 содержит произведение тригонометрических функций, в аргументы которых входят либо низкая $(p_1 - p_2)/2$, либо высокая $(p_1 + p_2)/2$ частоты. В результате будет возникать явление, называемое *биением* (см. п. 1.7). В начале процесса развития движения системы левый маятник колеблется с амплитудой θ_0, а правый находится в покое. Далее амплитуда у первого маятника уменьшается, тогда как у второго она нарастает. В момент времени $t = \pi/(p_1 - p_2)$ левый маятник перестанет колебаться, а правый колеблется с амплитудой θ_0. Затем колебания первого маятника начнут увеличиваться, а второго уменьшаться, пока в момент времени $t = 2\pi/(p_1 - p_2)$ состояние системы не будет снова соответствовать исходным начальным условиям. Подобная картина поведения повторяется бесконечно

долго, если в системе отсутствует демпфирование. С уменьшением жесткости пружины растет период биения. Разумеется, при жесткости пружины $k = 0$ маятники не взаимодействуют, поэтому соотношение между формами колебаний становится неопределенным.

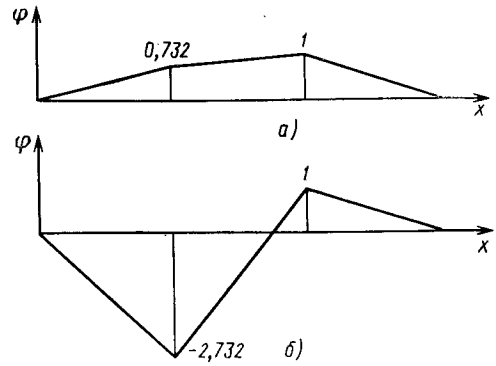


Рис. 3.15

Пример 1. Для показанной на рис. 3.3 системы принять, что каждая часть вала имеет постоянную жесткость $k_к$ при кручении и что $I_2 = 2I_1$. Определить реакцию системы при свободных колебаниях, возникающих при внезапной остановке в точках A и B вала, вращающегося с постоянной угловой скоростью φ_0.

Решение. Из уравнения (3.8) (см. п. 3.2) видно, что $M_{11} = I_1$, $M_{22} = 2I_1$, $S_{11} = S_{22} = 2k_к$, $S_{12} = S_{21} = -k_к$. Используя эти данные из выражения (3.19), определим характеристические значения

$$p_1^2 = \frac{(3-\sqrt{3})}{2}\frac{k_к}{I_1} = 0{,}634\frac{k_к}{I_1};$$

$$p_2^2 = \frac{(3+\sqrt{3})}{2}\frac{k_к}{I_1} = 2{,}366\frac{k_к}{I_1}, \qquad (д')$$

а из выражений (3.20а) и (3.20б) — отношения амплитуд

$$r_1 = \frac{2}{(1+\sqrt{3})} = 0{,}732; \; r_2 = \frac{2}{(1-\sqrt{3})} = -2{,}732. \qquad (е')$$

На рис. 3.15, *а* и *б* показаны соответственно первая и вторая формы колебаний, причем значения амплитуд даны в безразмерном виде и отнесены к величине амплитуды колебаний правого диска.

Из выражений (3.26) находим значения постоянных $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = 1{,}352\varphi_0\sqrt{I/k_к}$, $C_4 = -0{,}05024\varphi_0\sqrt{I_1/k_к}$. После чего с помощью выражений (3.25а) и (3.25б) определяем угловые перемещения системы

$$\varphi_1 = (0{,}992\sin p_1 t + 0{,}137\sin p_2 t)\,\varphi_0\sqrt{I_1/k_к}; \qquad (ж')$$

$$\varphi_2 = (1{,}352\sin p_1 t - 0{,}0502\sin p_2 t)\,\varphi_0\sqrt{I_1/k_к}. \qquad (з')$$

Пример 2. Систему, показанную на рис. 3.10, *а* из предыдущего параграфа, можно рассматривать как упрощенную схему автомобиля, опертого на передние и задние пружины. Для того чтобы исключить инерционное взаимодействие, при рассмотрении поперечных и угловых перемещений вокруг поперечной оси используем центр тяжести C. Предполагается, что известны следующие характеристики автомобиля:

$$mg = 1{,}46\cdot 10^4 \text{ Н}, \; k_1 = 3{,}57\cdot 10^5 \text{ Н/м}, \; k_2 = 4{,}47\cdot 10^5 \text{ Н/м},$$

$$I_C = 1{,}74\cdot 10^2 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2, \; l_1 = 0{,}102 \text{ м}, \; l_2 = 0{,}152 \text{ м}.$$

Определить частоты и формы колебаний системы и исследовать поведение автомобиля при свободных колебаниях, если имеется начальное перемещение Δ в вертикальном направлении без поворота:

$$(y_{0C} = \Delta, \; \theta_{0C} = 0, \; \dot{y}_{0C} = \dot{\theta}_{0C} = 0).$$

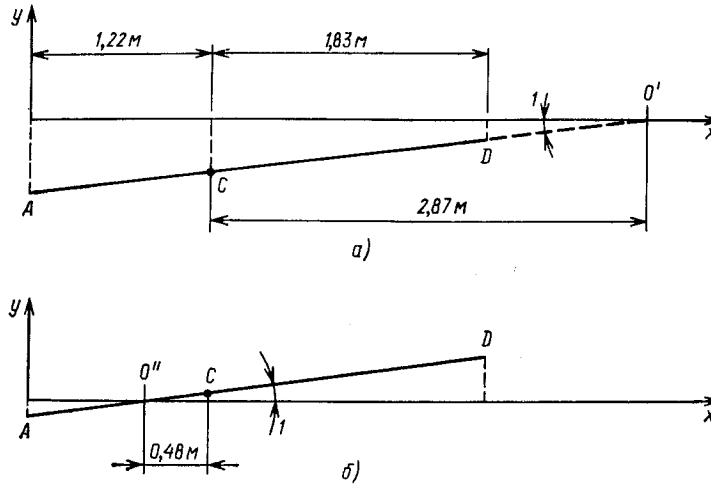


Рис. 3.16

Решение. Используя уравнения (3.14в) из предыдущего параграфа, возьмем

$$M_{11} = m = 1{,}49 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{с}^2/\text{м},\ M_{22} = I_C = 2{,}23 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{с}^2/\text{м},$$

$$S_{11} = k_1 + k_2 = 6{,}7 \cdot 10^4 \text{ Н/м},\ S_{12} = S_{21} = k_2 l_2 - k_1 l_1 = 3{,}18 \cdot 10^4 \text{ Н},$$

$$S_{22} = k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 = 1{,}42 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Для указанных данных из выражений (3.19), (3.20а) и (3.20б) следует

$$p_1 = 6{,}13 \text{ рад/с},\ p_2 = 9{,}42 \text{ рад/с},$$

$$(\tau_1 \approx 1{,}02 \text{ с}^{-1},\ \tau_2 \approx 0{,}67 \text{ с}^{-1}),$$

$$r_1 = -2{,}86 \text{ м/рад} = -0{,}05 \text{ м/град},$$

$$r_2 = 0{,}48 \text{ м/рад} = 0{,}008 \text{ м/град}.$$

На рис. 3.16, *а* и *б* представлены первая и вторая формы колебаний, значения которых отнесены к поворотам. Эти формы эквивалентны поворотам автомобиля как жесткого тела относительно узловых точек O' и O'', расположенных на расстояниях соответственно 2,87 м вправо и 0,48 м влево от точки C. При колебаниях по первой форме автомобиль в основном совершает поперечные перемещения, в то время как второй форме соответствуют в основном угловые колебания вокруг поперечной оси.

Используя заданные начальные условия из выражений (3.26), определяем произвольные постоянные интегрирования $C_1 = -C_3 = -\Delta/10{,}99$, $C_2 = C_4 = 0$. И, наконец, в соответствии с выражениями (3.25а) и (3.26а) найдем, что компоненты движения автомобиля имеют вид

$$y_C = (0{,}856 \cos p_1 t + 0{,}145 \cos p_2 t)\,\Delta, \qquad (\text{и}')$$

$$\theta_C = -0{,}0911\,(\cos p_1 t - \cos p_2 t)\,\Delta \qquad (\text{к}')$$

и представляют сложную непериодическую комбинацию поперечных и угловых колебаний.

ЗАДАЧИ

3.5.1. Для системы из задачи 3.2.1 (см. п. 3.2) принять, что $m_1 = m_2 = m$ и что $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Определить характеристические значения p_1^2 и p_2^2, а также отношения амплитуд r_1 и r_2. Взять величины $x_{01} = x_{02} = \Delta$ и $\dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = 0$ в качестве начальных условий и определить поведение системы при свободных колебаниях.

Ответ: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.

3.5.2. Используя значения параметров, приведенных в задаче 3.2.2 (см. п. 3.2) применительно к показанной на рис. 3.2 системе, определить характеристические значения p_1^2 и p_2^2, а также отношения амплитуд r_1 и r_2. Определить также поведение системы при начальных условиях $x_{01} = \Delta$, $y_{01} = 0$, $\dot{x}_{01} = \dot{y}_{01} = 0$.

Ответ: $r_1 = -\sqrt{3}/2$, $r_2 = \sqrt{3}/2$.

3.5.3. Пусть для системы, рассмотренной в задаче 3.2.3 (см. п. 3.2), дано: $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, $k_1 = k_2 = 0$. Найти p_1^2, p_2^2, r_1 и r_2 и определить реакцию системы при следующих начальных условиях: $x_{01} = x_{02} = 0$, $\dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = v$.

Ответ: $r_1 = 1/(1 + \sqrt{2})$, $r_2 = 1/(1 - \sqrt{2})$.

3.5.4. Принять, что для двухэтажной рамы, рассмотренной в задаче 3.2.5 (см. п. 3.2), дано: $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$, $EI_1 = EI_2 = EI$. Найти p_1^2, p_2^2, r_1 и r_2 и определить перемещения при свободных колебаниях, если к нижней балке рамы внезапно прикладывается статическая нагрузка $(Q_1)_{ст}$.

Ответ: $r_1 = 0{,}894$, $r_2 = -0{,}014$.

3.5.5. Принять, что для системы, показанной на рис. 3.7, *а* (см. пример 1 в п. 3.3), дано: $m_1 = m_2 = m$. Найти значения λ_1, λ_2, r_1 и r_2 с помощью выражений (3.23а), (3.24а) и (3.24б). Определить поведение системы при внезапном приложении к незакрепленному концу балки статической нагрузки $(Q_2)_{ст}$.

Ответ: $r_1 = 0{,}168$, $r_2 = -2{,}68$.

3.5.6. Для системы, показанной на рис. 3.8, *а* (см. пример 2 в п.3.3), найти λ_1, λ_2, r_1 и r_2. Дано, что при ударе масса приобретает скорость v_x в направлении оси x ($\dot{x}_{01} = v_x$, $\dot{y}_{01} = 0$, $x_{01} = \dot{y}_{01} = 0$). Определить движения системы при свободных колебаниях с учетом указанных начальных условий.

Ответ: $r_1 = 2{,}41$, $r_2 = -0{,}414$.

3.5.7. Пусть для системы, рассмотренной в задаче 3.3.6 (см. п. 3.3), дано $m_1 = m_2 = 0$. Найти λ_1, λ_2, r_1 и r_2. Предположить, что балка внезапно падает со своих опор и пролетает расстояние h, после чего снова оказывается опертой аналогичным образом. Определить движения системы при свободных колебаниях с учетом указанных начальных условий.

Ответ: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.

3.5.8. Найти λ_1, λ_2, r_1 и r_2 для системы, рассмотренной в задаче 3.3.8 (см. п. 3.3), считая, что $m_1 = m_2 = m$ и $R = EI/(GJ) = 1/3$. Кроме того, определить движение системы при внезапном приложении к первой массе статической нагрузки $(Q_1)_{ст}$.

Ответ: $r_1 = 1/(1 + \sqrt{2})$, $r_2 = -1/(1 - \sqrt{2})$.

3.5.9. Предполагается, что матрица **M** масс для системы с двумя степенями свободы является не диагональной, а заполненной. Найти p_1^2, p_2^2, r_1 и r_2, используя уравнения движения, выраженные через усилия и коэффициенты жесткости.

3.5.10. Решить задачу 3.5.9, используя уравнения движения в перемещениях и коэффициенты податливости.

3.5.11. Решить пример 2 из данного параграфа, рассмотрев точку A для описания движения автомобиля как жесткого тела. Уравнения движения в усилиях для указанной точки были получены в виде (3.14а) в п. 3.4. (Для решения этой задачи потребуется использовать результаты решения задачи 3.5.9).

Ответ: $r_1 = -4{,}08$ м/рад; $r_2 = 0{,}73$ м/рад.

3.5.12. Для показанной на рис. 3.11 системы (см. пример 1 в п. 3.4) найти λ_1, λ_2, r_1 и r_2, приняв $b = l/3$ и $I_C = 2mb^2$. Использовать точку B для рассмотрения движения как жесткого тела и уравнение движения в перемещениях, полученное в п. 3.4 [см. уравнения (м)]. (Для решения этой задачи потребуется использовать результаты решения задачи 3.5.10.)

Ответ: $r_1 = 0{,}578l$, $r_2 = -0{,}578l$.

3.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Рассмотрим теперь гармонические возбуждения систем с двумя степенями свободы. Предположим, например, что на двухмассовую систему (см. рис. 3.1, *а*) действуют возмущающие силы в виде функций синуса

$$Q_1 = P_1 \sin \omega t; \; Q_2 = P_2 \sin \omega t, \tag{а}$$

имеющие одинаковую круговую частоту ω и различные значения амплитуд P_1 и P_2. В этом случае выраженные через действие уравнения (3.6) движения в усилиях принимают вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{P} \sin \omega t, \tag{3.27}$$

где

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

В этом параграфе также будут рассмотрены только случаи с диагональными матрицами масс, и тогда в развернутом виде уравнения (3.27) будут такими:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} S_{12} \\ S_{21} S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \sin \omega t. \tag{3.28}$$

Частные решения этих уравнений можно взять в виде $x_1 = A_1 \times$ $\times \sin \omega t$; $x_2 = A_2 \sin \omega t$ или в более краткой форме

$$\mathbf{X} = A \sin \omega t, \tag{ь}$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ — *амплитуды установившихся колебаний.*

Подставляя представления (б) в уравнения (3.28), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} S_{11} - \omega^2 M & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - \omega^2 M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}. \tag{в}$$

Решая эти уравнения относительно матрицы-столбца $\mathbf{A}$, найдем

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{P}, \tag{г}$$

где $\mathbf{B}$ — матрица, обратная матрице коэффициентов из уравнений (в):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} S_{22} - \omega^2 M_{22} & -S_{21} \\ -S_{21} & S_{11} - \omega^2 M_{11} \end{bmatrix}; \tag{д}$$

$$C = (S_{11} - \omega^2 M_{11})(S_{22} - \omega^2 M_{22}) - S_{12}^2. \tag{е}$$

Элементы матрицы $\mathbf{B}$ являются коэффициентами влияния (их называют также *передаточными функциями*), которые можно рассматривать как амплитуды динамических перемещений при установившемся состоянии и при действии возмущающих сил в виде единичных гармонических функций. Подставляя выражения (г) в уравнение (б), получаем окончательный вид решения

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{P} \sin \omega t, \tag{3.29}$$

которое описывает простые гармонические движения двух масс с частотой ω.

При медленно изменяющихся возмущающих силах (т. е. при $\omega \to 0$) матрица $\mathbf{B}$ становится обратной к матрице жесткости, т. е. превращается в матрицу податливости. Сравнивая выражение (е) для C с характеристическим уравнением (ж) из п. 3.5, можно заметить, что при $\omega = p_1$ или $\omega = p_2$ амплитуды становятся бесконечно большими. Таким образом, для системы с двумя степенями свободы имеются два условия резонанса, соответствующие одной из двух частот свободных колебаний.

Из уравнения (г) получаем отношение амплитуд

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{(S_{22} - \omega^2 M_{22}) P_1 - S_{12} P_2}{S_{21} P_1 + (S_{11} - \omega^2 M_{11}) P_2}. \qquad (ж)$$

Когда $P_2 = 0$ и $\omega = p_1$ или $\omega = p_2$, это отношение принимает вид, соответствующий вторым формам записи выражений (3.20а) и (3.20б) в п. 3.5. С другой стороны, если положить $P_1 = 0$, то отношение будет соответствовать первым формам выражений для r_1 и r_2 при условиях резонанса. В более общем виде, если разделить числитель и знаменатель выражения (ж) на $-S_{12}$, получим

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_i P_1 + P_2}{P_1 + P_2/r_i} = r_i, \quad i = 1, \ 2. \qquad (3.30)$$

Полученный результат означает, что для каждого условия резонанса при вынужденных колебаниях существует соответствующая главная форма.

Чтобы построить частотную характеристику для амплитуд установившегося состояния системы с двумя степенями свободы, необходимо задать конкретные значения параметров задачи. Таким образом, для двумассовой системы (см. рис. 3.1, *а*) возьмем $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$. Для удобства графического представления введем обозначение

$$p_i^2 = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k}{2m} \qquad (з)$$

и вычислим по формуле (3.19) характеристические значения для системы, выраженные через p_0^2:

$$p_1^2 = 0{,}586 p_0^2; \ p_2^2 = 3{,}414 p_0^2. \qquad (и)$$

Если через p_0^2 выразить матрицу $\mathbf{B}$, получим

$$\mathbf{B} = \frac{k}{C} \begin{bmatrix} 1 - \omega^2/(2p_0^2) & 1 \\ 1 & 2[1 - \omega^2/(2p_0^2)] \end{bmatrix}, \qquad (к)$$

где

$$C = k^2 \{[2(1 - \omega^2/(2p_0^2)]^2 - 1\}. \qquad (л)$$

В этом случае все элементы матрицы $\mathbf{B}$ имеют одинаковую размерность, поэтому для того чтобы сделать ее безразмерной, достаточно просто умножить ее на k:

$$\boldsymbol{\beta} = k\mathbf{B}, \qquad (м)$$

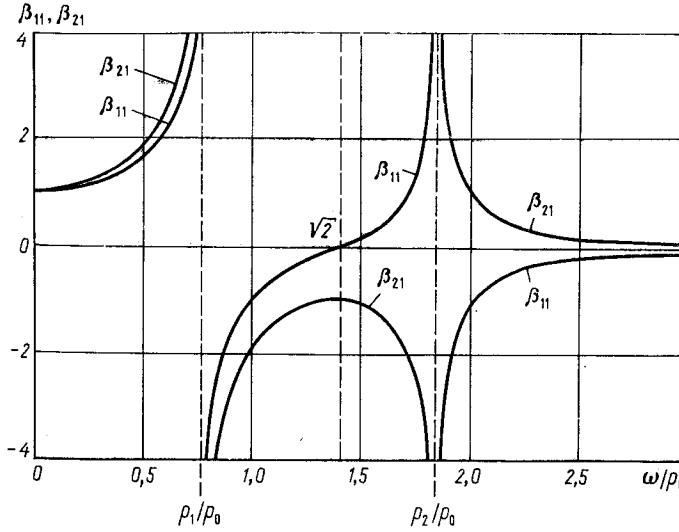


Рис. 3.17

тогда решения (3.29) примут вид

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\beta}\,(\mathbf{P}/k)\sin\omega t. \qquad \text{(н)}$$

Выражение (н) аналогично выражению (1.24) из п. 1.6. Таким образом, матрицу $\boldsymbol{\beta}$ можно рассматривать как *матрицу коэффициентов усиления* (с точностью до постоянного множителя).

На рис. 3.17 представлены в безразмерной форме зависимости для коэффициентов усиления

$$\beta_{11} = \frac{1 - \omega^2/(2p_0)}{2\,[1 - \omega^2/(2p_0^2)]^2 - 1}; \qquad \text{(о)}$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2\,[1 - \omega^2/(2p_0^2)]^2 - 1}, \qquad \text{(п)}$$

которые связаны с функцией $(P_1/k)\sin\omega t$. Оба эти коэффициента равны единице при $\omega = 0$; при увеличении частоты ω они принимают положительные значения, что указывает на то, что массы в процессе колебаний имеют одинаковую фазу с возмущающей силой $P_1 \sin\omega t$. Когда частота ω достигает значения первой собственной частоты p_1, оба коэффициента обращаются в бесконечность. Когда частота ω станет несколько большей, чем частота p_1, оба коэффициента примут отрицательные значения, указывающие на то, что массы находятся в противофазе с возмущающей силой, по по-прежнему имеют одинаковые фазы друг с другом. При дальнейшем увеличении ω оба коэффициента будут уменьшаться, пока при частоте $\omega = \sqrt{2}p_0$ коэффициент β_{11} не станет равен нулю, а коэффициент β_{21} примет значение -1. Когда ω превысит значения $\sqrt{2}p_0$, коэффициент β_{11}

будет иметь положительные значения, а β_{21} по-прежнему отрицательные. Это означает, что массы находятся в противофазе друг с другом, но первая масса снова имеет одинаковую фазу с возмущающей силой. Коэффициенты вторично обращаются в бесконечность при $\omega = p_2$, а когда частота ω значительно превысит значение p_2, перемещения обеих масс будут стремиться к нулю.

Особенно интересно то, что коэффициент β_{11} становится равен нулю при частоте $\omega = \sqrt{2}p_0$. При этой частоте первая масса находится в покое, тогда как вторая движется с амплитудой — P_1/k в противофазе с возмущающей силой. Это видно из выражения (е), где элемент β_{11} матрицы принимает нулевое значение при частоте

$$\omega = \sqrt{S_{22}/M_{22}}, \qquad (р)$$

которая в случае двухмассовой системы равна $\sqrt{k_2/m_2} = \sqrt{2}p_0$. Чтобы показать, насколько удобно пользоваться этим условием, рассмотрим электродвигатель массой m_1, установленный на балку с жесткостью k_1 (рис. 3.18, *а*). Вращение вектора силы P_1 при неуравновешенном роторе может вызвать значительные колебания системы, когда круговая частота принимает критическое значение $\omega_{кр} = \sqrt{k_1/m_1}$. Для того чтобы подавить эти вынужденные колебания, присоединим дополнительную массу m_2 к имеющей жесткость k_2 пружине, как показано на рис. 3.18, *б*. Если массу m_2 и жесткость k_2 подобрать так, чтобы выполнялось условие $\sqrt{k_2/m_2} = \omega_{кр}$, получим систему с двумя степенями свободы, в которой не будут возникать колебания, обусловленные колебаниями электродвигателя, поскольку дополнительная масса колеблется с амплитудой — P_1/k_2. Подобная дополнительная система называется *динамическим гасителем колебаний*, поскольку она может предотвратить возникновение колебаний, вызываемых вращающимися с постоянной скоростью узлами машин, если в системе отсутствует демпфирование. Для того чтобы спроектировать «гаситель колебаний», подберем сначала жесткость k_2 пружины такой, чтобы амплитуда — P_1/k_2 была достаточно большой, а затем подберем массу такой, чтобы выполнялось условие $\sqrt{k_2/m_2} = \omega_{кр}$. Для того чтобы быть эффективным и при скоростях, отличных от $\omega_{кр}$, требуется ввести в систему действительное сопротивление (см. пример, описанный в конце п. 3.8).

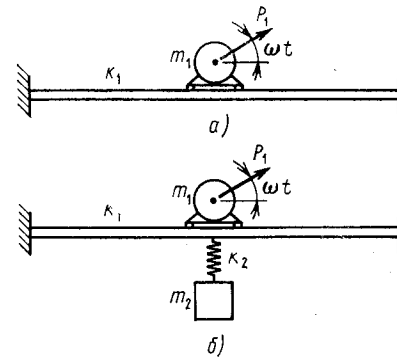


Рис. 3.18

Как уже говорилось выше в п. 1.6, вынужденные колебания могут возникать в результате *периодических движений основания*. Предположим, например, что показанное на рис. 3.1, *а* основание перемещается в направлении x

в соответствии с видом простой гармонической функции $x_{0c} = d \sin \omega t$, где d — амплитуда перемещения. В этом случае уравнения движения в усилиях имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 (x_1 - x_{\text{осн}}) + k_2 (x_2 - x_1); \qquad \text{(с)}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1). \qquad \text{(т)}$$

В матричной форме эти уравнения можно записать

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{P}_{\text{осн}} \sin \omega t. \qquad (3.31)$$

Элементами матрицы-столбца $\mathbf{P}_{\text{осн}}$ в уравнении (3.31) являются максимальные силы, передаваемые массам через пружины при перемещениях основания. В этом случае в матрице $\mathbf{P}_{\text{осн}}$ только один элемент не равен нулю:

$$\mathbf{P}_{\text{осн}} = \begin{bmatrix} k_1 d \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(у)}$$

С другой стороны, предположим, что ускорения основания в горизонтальном направлении описываются выражением вида $\ddot{x}_{\text{осн}} = a \sin \omega t$, где a — амплитуда ускорения. В этом случае перейдем к новой системе координат, используя относительные перемещения:

$$x_1^* = x_1 - x_{\text{осн}}; \quad x_2^* = x_2 - x_{\text{осн}}. \qquad \text{(ф)}$$

Соответствующие ускорения имеют вид

$$\ddot{x}_1^* = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_{\text{осн}}, \quad \ddot{x}_2^* = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_{\text{осн}}. \qquad \text{(х)}$$

Тогда можно записать матричные уравнения в относительных координатах

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{S}\mathbf{X}^* = \mathbf{P}^*_{\text{осн}} \sin \omega t. \qquad (3.32)$$

Для двухмассовой системы, показанной на рис. 3.1, *а*, матрица-столбец $\mathbf{P}^*_{\text{осн}}$ из уравнения (3.32) такова:

$$\mathbf{P}^*_{\text{осн}} = -\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} a. \qquad \text{(ц)}$$

Таким образом, задачи о вынужденных колебаниях, обусловленных движением опоры, всегда могут быть представлены в той же математической форме, что и задача с приложенными к системе возмущающими силами, соответствующими координатам перемещения. Кроме того, всегда можно определить *эквивалентные нагрузки* *, соответствующие перемещениям, обусловленным приложенными усилиями, не соответствующими этим перемещениям.

Если для исследования вынужденных колебаний воспользоваться вместо уравнений движения в усилиях этими же уравнениями в перемещениях, то вместо уравнения (3.27) получим

$$\mathbf{F}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{P} \sin \omega t, \qquad (3.33)$$

---

* **Gere J. M., Weaver W.** Analysis of framed structures. — Princeton; D. Van Nostrand, 1965, pp. 136—138.

и в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} F_{11}M_{11} & F_{12}M_{22} \\ F_{21}M_{11} & F_{22}M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}F_{12} \\ F_{21}F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \sin \omega t. \quad (3.34)$$

Подстановка представления (в) в уравнение (3.34) дает

$$\begin{bmatrix} 1 - \omega^2 F_{11}M_{11} & -\omega^2 F_{12}M_{22} \\ -\omega^2 F_{21}M_{11} & 1 - \omega^2 F_{22}M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}. \quad (ч)$$

В этом случае решение для амплитуды A можно записать в форме

$$\mathbf{A} = \mathbf{DFP}, \quad (ш)$$

где **D** — обратная матрица коэффициентов, стоящих в левой части уравнений (ч):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11}D_{12} \\ D_{21}D_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 F_{22}M_{22} & \omega^2 F_{12}M_{22} \\ \omega^2 F_{21}M_{11} & 1 - \omega^2 F_{11}M_{11} \end{bmatrix}; \quad (щ)$$

$$H = (1 - \omega^2 F_{11}M_{11})(1 - \omega^2 F_{22}M_{22}) - \omega^4 F_{12}^2 M_{11}M_{22}. \quad (э)$$

Элементы матрицы **D** являются коэффициентами влияния, которые можно рассматривать как амплитуды при установившемся поведении и при единичных гармонических перемещениях масс. Подставляя выражение (ш) в систему уравнений (в), получим решение

$$\mathbf{X} = \mathbf{DFP} \sin \omega t. \quad (3.35)$$

Сравнивая выражения (3.35) и (3.29), видим, что

$$\mathbf{DF} = \mathbf{B}, \quad (3.36а)$$

откуда следует

$$\mathbf{D} = \mathbf{BS}. \quad (3.36б)$$

Хотя обе матрицы **B** и **S** являются симметричными, их произведение **D** — обычно несимметричная матрица. Можно также ввести обозначение

$$\Delta_{ст} = \mathbf{FP}, \quad (3.37)$$

используя которое можно представить уравнение (3.33) в иной форме:

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} = \Delta_{ст} \sin \omega t. \quad (3.38)$$

Тогда решение (3.35) будет иметь вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\Delta_{ст} \sin \omega t, \quad (3.39)$$

аналогичный решению (х) из примера 4, приведенного в п. 1.6. Матрица $\Delta_{ст}$ состоит из элементов, которые представляют перемещения масс при статическом приложении нагрузок, равных максимальным значениям функций возмущающих сил. Как и в выражении (3.37), элементы матрицы $\Delta_{ст}$ обусловлены приложением сил, соответствующих коэффициентам перемещений, но такие же элементы могут быть обусловлены либо иным типом сил, либо движением основания.

Гармонические перемещения основания системы, показанной на рис. 3.1, *а*, особенно легко рассматривать с помощью уравнения (3.38).

Если, как и выше, взять перемещение основания в виде $x_{осн} = d \sin \omega t$, то матрица-столбец примет простую форму

$$\Delta_{ст} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d, \qquad (а')$$

что соответствует движению системы как жесткого тела. С другой стороны, если заданы ускорения основания в виде $x_{осн} = a \sin \omega t$, то этот случай является более трудным для исследования. При этом уравнение (3.38), записанное в относительных координатах [см. выражения (ф) и (х)], примет вид

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X}^* = \mathbf{\Delta}^*_{ст} \sin \omega t, \qquad (3.40)$$

где

$$\mathbf{\Delta}^*_{ст} = \mathbf{FP}^*_{осн}. \qquad (б')$$

Пример 1. Предположим, что в двухмассовой системе (см. рис. 3.1, *а*) задано перемещение основания в виде функции синуса $x_{осн} = d \sin \omega t$. Так же, как при построении графиков на рис. 3.17, примем, что $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$. Определить установившееся поведение системы, используя уравнения движения как в усилиях, так и в перемещениях.

Решение. Используя ранее найденные матрицы **B** [см. выражения (к) и (л)] и $\mathbf{P}_{осн}$ [см. выражение (у)] для этой системы, можно сразу подставить их в уравнение (3.29) и получить

$$x_1 = [(1 - \omega^2 m/k)\, d \sin \omega t]/[2\,(1 - \omega^2 m/k)^2 - 1]; \qquad (в')$$

$$x_2 = d \sin \omega t/[2\,(1 - \omega^2 m/k)^2 - 1]. \qquad (г')$$

Далее, учитывая, что для податливостей имеем $F_{11} = F_{12} = F_{21} = \delta$, $F_{22} = 2\delta$, получим матрицу [см. выражения (щ) и (э)]

$$\mathbf{D} = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 m\delta & \omega^2 m\delta \\ 2\omega^2 m\delta & 1 - \omega^2 m\delta \end{bmatrix}, \qquad (д')$$

где

$$H = (1 - 2\omega^2 m\delta)^2 - 2\omega^4 m^2 \delta^2 = 2\,(1 - \omega^2 m\delta)^2 - 1. \qquad (е')$$

Подстановка выражений для **D** и $\Delta_{ст}$ [см. выражение (а)] в уравнение (3.39) дает

$$x_1 = [(1 - \omega^2 m\delta)\, d \sin \omega t]/[2\,(1 - \omega^2 m\delta)^2 - 1]; \qquad (ж')$$

$$x_2 = [d \sin \omega t]/[2\,(1 - \omega^2 m\delta)^2 - 1]. \qquad (з')$$

Учитывая $\delta = 1/k$, видим, что выражения (ж') и (з') совпадают с (в') и (г').

Пример 2. Предположим, что показанная на рис. 3.8, *а* рама (см. пример 2 в п. 3.3) нагружена крутящим моментом $T = T_м \cos \omega t$ относительно оси z, приложенным к ее правому верхнему углу. Определить установившееся движение массы, присоединенной к незакрепленному концу рамы, обусловленное этим воздействием.

Решение. Будем исследовать эту систему, используя уравнения в перемещениях и учитывая, что в данном случае податливости $F_{11} = 4l^3/(3EI)$, $F_{12} = F_{21} = l^2/(2EI)$, $F_{22} = l^2/(3EI)$. Примем так же, что $M_{11} = M_{22} = m$. Подставляя эти значения в выражения (щ) и (э), получим матрицу

$$\mathbf{D} = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 ml^3/3EI & \omega^2 ml^3/2EI \\ \omega^2 ml^3/2EI & 1 - 4\omega^2 ml^3/3EI \end{bmatrix}, \qquad (и')$$

где

$$H = 1 - 5\omega^2 ml^3/3EI + 7\omega^4 m^2 l/36\,(EI)^2. \qquad (к')$$

Максимальный момент $T_м$, приложенный статически к верхнему правому углу рамы, вызывает перемещение массы на расстояние $T_м l^2/(EI)$ в направлении оси x и на

расстояние $T_м l^2/(2EI)$ в направлении оси y. Следовательно, матрица-столбец $\Delta_{ст}$ в этой задаче имеет вид

$$\Delta_{ст} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{T_м l^2}{2EI}. \qquad (л')$$

Подставляя это выражение в (3.39), найдем искомое решение

$$x_1 = \left(12 - \frac{\omega^2 m l^3}{EI}\right) \frac{T_м l^2}{12EIH} \cos \omega t; \qquad (м')$$

$$y_1 = \left(3 - \frac{\omega^2 m l^3}{EI}\right) \frac{T_м l^2}{6EIH} \cos \omega t. \qquad (н')$$

3.7. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВЯЗКОМ ДЕМПФИРОВАНИИ

На рис. 3.19, *а* показана двухмассовая система с гидравлическими гасителями колебаний, имеющими постоянные вязкого демпфирования c_1 и c_2. Если к системе не приложены нагрузки, уравнения движения в усилиях имеют вид (рис. 3.19, *б*)

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1); \qquad (а)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (\dot{x}_2 - x_1) - k_2 (x_2 - x_1). \qquad (б)$$

В матричных обозначениях эти уравнения запишутся так:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{0}, \qquad (3.41)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \qquad (в)$$

а остальные матрицы в уравнении (3.41) имеют вид, показанный ранее. Матрица демпфирования **C** состоит из *коэффициентов влияния демпфирования*, которые можно рассматривать как силы, необходимые для получения единичных скоростей. Таким образом, про-

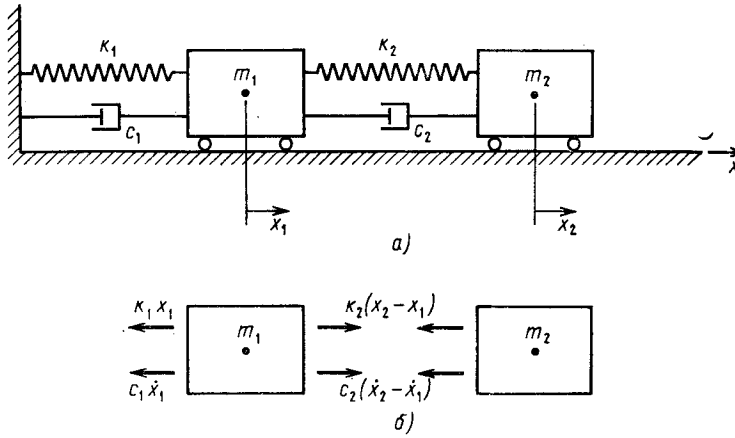


Рис. 3.19

извольный элемент C_{ij} матрицы коэффициентов влияния вязкого демпфирования представляет собой действие демпфирования типа i, которое уравновешивает действие демпфирования, соответствующее единичной скорости типа j. Это определение аналогично тому, которое давалось применительно к коэффициентам влияния жесткости и инерции, и процедура определения элементов столбцов матрицы **C** аналогична той, которая была описана выше применительно к матрицам **S** и **M**. Если следовать указанной процедуре, матрица демпфирования будет всегда симметричной.

Поскольку в уравнении (3.41) присутствуют члены, обусловленные влиянием скорости, то и решение однородных дифференциальных уравнений будет более сложным, чем приведенное в п. 3.5 для случая колебаний без демпфирования. Здесь будем искать решения в обобщенной форме

$$x_1 = A_1 e^{st}; \qquad (г)$$

$$x_2 = A_2 e^{st}. \qquad (д)$$

Подставляя представления (г) и (д), а также их производные в уравнение (3.41), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} M_{11}s^2 + C_{11}s + S_{11} & C_{12}s + S_{12} \\ C_{21}s + S_{21} & M_{22}s^2 + C_{22}s + S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (е)$$

Для того чтобы существовали нетривиальные решения этой системы, определитель системы уравнений (е) должен равняться нулю. Отсюда получаем характеристическое уравнение

$$(M_{11}s^2 + C_{11}s + S_{11})(M_{22}s^2 + C_{22}s + S_{22}) - (C_{12}s + S_{12})^2 = 0, \qquad (ж)$$

или в иной форме

$$M_{11}M_{22}s^4 + (M_{11}C_{22} + M_{22}C_{11})s^2 + (M_{11}S_{22} + C_{11}C_{22} + M_{22}S_{11} - C_{12}^2)s^2 + \\ + (C_{11}S_{22} + C_{22}S_{11} - 2C_{12}S_{12})s + S_{11}S_{22} - S_{12}^2 = 0. \qquad (з)$$

Уравнение (и) упрощается, если для системы, показанной на рис. 3.19, *а*, используются действительные значения $M_{11} = m_1$, $M_{22} = m_2$ и т. д. Если указанные значения подставить в уравнение (и), оно примет вид

$$m_1m_2s^4 + [m_1c_2 + m_2(c_1 + c_2)]s^2 + [m_1k_2 + c_1c_2 + \\ + m_2(k_1 + k_2)]s^2 + (c_1k_2 + c_2k_1)s + k_1k_2 = 0. \qquad (и)$$

Для решения этого уравнения необходимо воспользоваться тем или иным численным методом нахождения корней полинома, но общая форма решения известна и будет подробно обсуждена ниже. Поскольку все коэффициенты уравнений (к) положительны, то четыре отличных от нуля корня этого полинома четвертой степени могут быть или действительными, или положительными, или комплексными с положительными действительными частями *. Кроме того, эти корни могут быть либо действительными и отрицатель-

* См. с. 142 кн. **Rayleigh J. W. S.** Theory of sound, цитированной в п. 1.4.

ными, либо комплексными с отрицательными действительными частями. Если сопротивление мало, система может колебаться свободно; при этом все отличные от нуля корни будут комплексными. Они образуют комплексные сопряженные пары чисел и могут быть представлены в следующем виде:

$$s_{11} = -n_1 + ip_{д1};\ s_{12} = -n_1 - ip_{д1}; \tag{3.42а}$$

$$s_{21} = -n_2 + ip_{д2};\ s_{22} = -n_2 - ip_{д2}. \tag{3.42б}$$

Обозначения n_1 и n_2 относятся к положительным числам, характеризующим демпфирование; через $p_{д1}$ и $p_{д2}$ обозначены круговые частоты колебаний системы с демпфированием. Подставляя эти значения корней в уравнение (е), получим соответствующие значения отношений амплитуд

$$r_{jk} = \frac{-C_{12}s_{jk} - S_{12}}{M_{11}s_{jk}^2 + C_{11}s_{jk} + S_{11}} = \frac{M_{22}s_{jk}^2 + C_{22}s_{jk} + S_{22}}{-C_{21}s_{jk} - S_{21}}, \tag{3.43}$$

где $j = 1, 2$; $k = 1, 2$. Получаемые при этом значения представляют собой комплексно сопряженные числа r_{11}, r_{12} и r_{21}, r_{22}. В результате, общее решение можно представить в виде

$$x_1 = r_{11}A_{11}e^{s_{11}t} + r_{12}A_{12}e^{s_{12}t} + r_{21}e^{s_{21}t} + r_{22}A_{22}e^{s_{22}t}; \tag{3.44а}$$

$$x_2 = A_{11}e^{s_{11}t} + A_{12}e^{s_{12}t} + A_{21}e^{s_{11}t} + A_{22}e^{s_{22}t}, \tag{3.44б}$$

где коэффициенты A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22} — комплексно сопряженные числа, которые определяются из начальных условий.

Поступая так же, как и в п. 1.8 в случае системы с одной степенью свободы, решения (3.44а) и (3.44б) можно записать в эквивалентной тригонометрической форме. Для этого первые два слагаемых в решении (3.44б) для x_2 представим в виде

$$A_{11}e^{s_{11}t} + A_{12}e^{s_{12}t} = e^{-n_1 t}(C_1 \cos p_{д1}t + C_2 \sin p_{д1}t),$$

где

$$\cos p_{д1}t = \frac{e^{ip_{д1}t} + e^{-ip_{д1}t}}{2};$$

$$\sin p_{д1}t = \frac{e^{ip_{д1}t} - e^{-ip_{д1}t}}{2i}.$$

Здесь

$$C_1 = A_{11} + A_{12},\ C_2 = i(A_{11} - A_{12}) \tag{к}$$

действительные постоянные. Соответствующие слагаемые в решении (3.44а) можно записать в тригонометрической форме, введя обозначения:

$$r_{11} = a + ib;\ r_{12} = a - ib, \tag{л}$$

представляющие собой первую пару комплексно сопряженных значений отношений амплитуд. Тогда первые два слагаемых в решении для x_1 можно взять в следующей эквивалентной форме:

$$r_{11}A_{11}e^{s_{11}t} + r_{12}A_{12}e^{s_{12}t} = e^{-nt}[(C_1a - C_2b)\cos p_{д1}t + (C_1b + C_2a)\sin p_{д1}t].$$

В аналогичной тригонометрической форме можно записать и два последних слагаемых в решениях для x_1 и x_2, используя действительные постоянные:

$$C_3 = A_{21} + A_{22};\ C_4 = i\,(A_{21} - A_{22}) \qquad \text{(м)}$$

и обозначения

$$r_{21} = c + id;\ r_{22} = c - id. \qquad \text{(н)}$$

В такой форме общее решение имеет вид

$$x_1 = e^{-n_1 t}\,(r_1 C_1 \cos p_{д1} t + r_1' C_2 \sin p_{д1} t) + e^{-n_2 t} \times \\ \times\,(r_2 C_3 \cos p_{д2} t + r_2' C_4 \sin p_{д2} t); \qquad (3.45а)$$

$$x_2 = e^{-n_1 t}\,(C_1 \cos p_{д1} t + C_2 \sin p_{д1} t) + e^{-n_2 t}\,(C_3 \cos p_{д2} t + C_4 \sin p_{д2} t), \qquad (3.45б)$$

где

$$r_1 = \frac{C_1 a - C_2 b}{C_1};\quad r_1' = \frac{C_1 b + C_2 a}{C_2};$$
$$r_2 = \frac{C_3 c - C_4 a}{C_3};\quad r_2' = \frac{C_3 d + C_4 c}{C_4} \qquad \text{(о)}$$

— действительные значения отношений амплитуд.

Решения (3.45а) и (3.45б) во многом аналогичны решениям для колебаний без демпфирования [см. выражения (3.25а) и (3.25б) в п. 3.5]. Однако они отличаются от упомянутых более простых выражений несколькими важными обстоятельствами. Амплитуды колебаний уменьшаются с течением времени в соответствии с множителем $e^{-n_1 t}$ и $e^{-n_2 t}$ и постепенно становятся равными нулю. Кроме того, круговые частоты $p_{д1}$ и $p_{д2}$ колебаний с демпфированием не совпадают с круговыми частотами колебаний без демпфирования. Далее, в случае с демпфированием имеем четыре формы колебаний, тогда как при отсутствии демпфирования только две формы. И в заключение отметим, что первая часть решения x_1 не совпадает по фазе со второй частью решения x_2. Указанное различие в фазах ясно видно, если записать упомянутые части решений с использованием фазовых углов:

$$x_1 = B_1' e^{-n_1 t} \cos\,(p_{д1} t - \alpha_{д1}') + B_2' e^{-n_2 t} \cos\,(p_{д2} t - \alpha_{д2}'); \qquad (3.46а)$$

$$x_2 = B_1 e^{-n_1 t} \cos\,(p_{д1} t - \alpha_{д1}) + B_2 e^{-n_2 t} \cos\,(p_{д2} t - \alpha_{д2}), \qquad (3.46б)$$

где

$$B_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2};\ B_2 = \sqrt{C_3^2 + C_4^2};$$
$$B_1' = B_1 \sqrt{a^2 + b^2};\ B_2' = B_2 \sqrt{c^2 + d^2}; \qquad \text{(п)}$$
$$\alpha_{д1} = \operatorname{arctg}\frac{C_2}{C_1};\quad \alpha_{д2} = \operatorname{arctg}\frac{C_4}{C_3};$$
$$\alpha_{д1}' = \operatorname{arctg}\frac{r_1' C_2}{r_1 C_1};\quad \alpha_{д2}' = \operatorname{arctg}\frac{r_2' C_4}{r_2 C_3}. \qquad \text{(р)}$$

Таким образом видим, что формы колебаний, получившие определение в п. 3.5, в рассматриваемой системе с двумя степенями сво-

боды с демпфированием отсутствуют. Существующие же в ней собственные формы колебаний имеют такие фазовые отношения, которые трудно поддаются анализу. Главные формы колебаний и влияние демпфирования будут обсуждены в гл. 4 применительно к системам со многими степенями свободы. Если коэффициенты вязкого демпфирования очень малы, характеристическое уравнение (и) принимает вид, близкий к случаю отсутствия демпфирования, поэтому введем следующие упрощающие предположения:

$$p_{д1} \approx p_1; \quad p_{д2} \approx p_2; \quad r_1' \approx r; \quad r_2' \approx r_2. \tag{с}$$

При указанных допущениях решения (3.45а) и (3.45б) принимают более простой вид

$$x_1 \approx r_1 e^{-n_1 t}(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + r_2 e^{-n_2 t}(C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t); \tag{3.47а}$$

$$x_2 \approx e^{-n_1 t}(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + e^{-n_2 t}(C_3 \cos p_1 t + C_4 \sin p_2 t). \tag{3.47б}$$

Для того чтобы определить постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4, подставим начальные условия x_{01}, x_{02}, $\dot{x}_{01}$ и $\dot{x}_{02}$, заданные при $t = 0$, в решения (3.47а) и (3.47б) и их производные. Получим следующие выражения для этих постоянных:

$$C_1 \approx \frac{x_{01} - r_2 x_{02}}{r_1 - r_2}; \quad C_2 \approx \frac{\dot{x}_{01} + n_1 x_0 - r_2(\dot{x}_{02} + n x_{02})}{p_1(r_1 - r_2)}; \tag{т}$$

$$C_3 \approx \frac{r_1 x_{02} - x_{01}}{r_1 - r_2}; \quad C_4 \approx \frac{r_1(\dot{x}_{02} + n_2 x_{02}) - (\dot{x}_{01} + n_2 x_{01})}{p_2(r_1 - r_2)}.$$

С другой стороны, при очень значительном демпфировании все корни характеристического уравнения будут действительными и отрицательными. В этом случае решение уже не имеет колебательного характера и может быть представлено в форме

$$x_1 = r_1 D_1 e^{-u_1 t} + r_2 D_2 e^{-u_2 t} + r_3 D_3 e^{-u_3 t} + r_4 D_4 e^{-u_4 t}; \tag{3.48а}$$

$$x_2 = D_1 e^{-u_1 t} + D_2 e^{-u_2 t} + D_3 e^{-u_3 t} + D_4 e^{-u_4 t}, \tag{3.48б}$$

где u_1, u_2, u_3 и u_4 — положительные числа. Кроме того, постоянные D_1, D_2, D_3 и D_4, а также r_1, r_2, r_3 и r_4 — действительные числа.

Возможна также ситуация, при которой два корня будут действительными и отрицательными, тогда как два других — комплексно сопряженными с отрицательными действительными частями. В этом случае решение можно записать

$$x_1 = e^{-nt}(r_1 C_1 \cos p_д t + r_1' C_2 \sin p_д t) + r_3 C_3 e^{-u_3 t} + r_4 C\, e^{-u_4 t}; \tag{3.49а}$$

$$x_2 = e^{-nt}(C_1 \cos p_д t + C_2 \sin p_д t) + C_3 e^{-u_3 t} + C_4 e^{-u_4 t}. \tag{3.49б}$$

Свободные колебания с демпфированием можно рассматривать, используя вместо уравнений движения в усилиях уравнения в перемещениях. При указанном подходе дифференциальные уравнения принимают вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{X} = \mathbf{0}. \tag{3.50}$$

Подробности, связанные с применением такого подхода, аналогичны тем, что имеют место при использовании уравнений движения в усилиях, и здесь обсуждаться не будет.

3.8. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВЯЗКОМ ДЕМПФИРОВАНИИ

Пусть на систему, показанную на рис. 3.19, *а*, действует произвольного вида возмущающая сила, описываемая комплексной гармонической функцией общего вида:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}e^{i\omega t} = \mathbf{P}(\cos\omega t + i\sin\omega t), \qquad (а)$$

где вектор-столбец $\mathbf{P}$ имеет тот же смысл, что и в уравнении (3.27) из п. 3.6. Тогда уравнение (3.41) из п. 3.7 принимает вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{P}e^{i\omega t}. \qquad (3.51)$$

Рассматривая только установившиеся вынужденные колебания, будем искать решения в комплексной форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}e^{i\omega t}. \qquad (б)$$

Подставляя представления (б) и их производные в уравнение (3.51), получим следующую систему алгебраических уравнений в матричной форме:

$$(\mathbf{S} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C})\,\mathbf{A} = \mathbf{P}. \qquad (в)$$

Решая уравнение (в) относительно $\mathbf{A}$, найдем

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^*\mathbf{P}. \qquad (г)$$

Подставляя выражение (г) в представление (б), приходим к решению следующего вида:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^*\mathbf{P}e^{i\omega t}, \qquad (3.52)$$

которое описывает гармонические движения двух масс с круговой частотой ω.

Из соотношений (в) и (г) находим выражение для матрицы

$$\mathbf{B}^* = (\mathbf{S} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C})^{-1}. \qquad (д)$$

Эта матрица аналогична матрице $\mathbf{B}$, полученной в п. 3.6, но матрица $\mathbf{B}^*$ содержит мнимые части, обусловленные демпфированием. Когда матрица $\mathbf{M}$ является диагональной, развернутый вид матрицы

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{C^*}\begin{bmatrix} S_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22} & -S_{12} - i\omega C_{12} \\ -S_{12} - i\omega C_{21} & S_{11} - \omega^3 M_{11} - i\omega C_{11} \end{bmatrix}, \qquad (е)$$

где

$$C^* = (S_{11} - \omega^2 M_{11} + i\omega C_{11})(S_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22}) - (S_{12} + i\omega C_{12}). \qquad (ж)$$

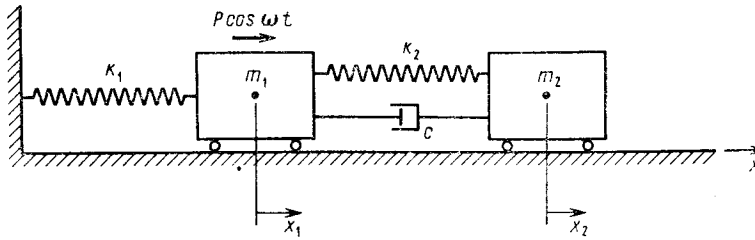


Рис. 3.20

Элементы матрицы $\mathbf{B}^*$ являются коэффициентами влияния, называемыми *комплексными передаточными функциями*. В подобных матрицах комплексные числа представляют собой амплитуды и фазы установившихся колебаний при наличии демпфирования, обусловленных действием возмущающих сил, описываемых единичными гармоническими функциями.

Используя известные формулы для алгебраических операций над комплексными числами, решение (3.52) можно выразить через действительные амплитуды и фазовые углы:

$$x_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{g^2+h^2}} P_1 \cos(\omega t - \theta_1) + \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{g^2+h^2}} P_2 \cos(\omega t - \theta_2); \qquad (3.53а)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{g^2+h^2}} P_1 \cos(\omega t - \theta_2) + \frac{\sqrt{e^2+f^2}}{\sqrt{g^2+h^2}} P_2 \cos(\omega t - \theta_3), \qquad (3.53б)$$

где

$$a = S_{22} - \omega^2 M_{22}; \quad b = \omega C_{22}; \quad c = S_{12};$$
$$d = \omega C_{12}; \quad e = S_{11} - \omega^2 M_{11}; \quad f = \omega C_{11};$$
$$g = (S_{11} - \omega^2 M_{11})(S_{22} - \omega^2 M_{22}) - S_{12}^2 - \omega^2 (C_{11} C_{22} - C_{12}^2); \qquad (з)$$
$$h = \omega [C_{11}(S_{22} - \omega^2 M_{22}) + C_{22}(S_{11} - \omega^2 M_{11}) - 2C_{12} S_{12}]$$

и

$$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{ah - bg}{ag + bh}\right); \quad \theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{ch - dg}{cg + dh}\right);$$
$$\theta_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{eh - fg}{eg + fh}\right). \qquad (и)$$

Пример. Чтобы продемонстрировать приложение к практическим задачам теории вынужденных колебаний при наличии демпфирования, рассмотрим динамический гаситель колебаний, показанный на рис. 3.18, *б* и кратко описанный в п. 3.6. На рис. 3.20 представлена схема подобного устройства с гидравлическим гасителем колебаний, установленным между основной m_1 и дополнительной m_2 массами. С учетом демпфирования дополнительную систему будем рассматривать как *динамический гаситель колебаний* *, который может подавлять колебания в машинах с постоянной и переменной частотами вращения узлов. Как показано на рисунке, к основной массе приложена вызывающая колебания сила в виде простой гармонической функции $P \cos \omega t$; коэффициент демпфирования гидравлического гасителя

* **Ormondroyd J., Den Hartog J. P.** The theory of the dynamic vibration absorber. — Trans. ASME, 1928, v. 50, N. 1, pp. 9—22.

колебаний обозначен буквой c. Так как основное значение имеет амплитуда динамических перемещений массы m_1, то для этой амплитуды в соответствии с выражением (3.53а) получим

$$x_{м1} = \frac{P\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{g^2+h^2}} =$$

$$= \frac{P\sqrt{(k_2-\omega^2 m_2)^2+(\omega c)^2}}{\sqrt{[(k-\omega^2 m_1)(k_2-\omega^2 m_2)-\omega^2 m_2 k_2]^2+[(\omega c)(k_1-\omega^2 m_1-\omega^2 m_2)]^2}}. \qquad (к)$$

Для того чтобы упростить дальнейшее обсуждение гасителя колебаний, все следующие величины будем использовать в безразмерном виде:

$\Delta_{ст} = P/k_1$ — статический прогиб при действии силы P;

$p_0 = \sqrt{k_1/m_1}$ — круговая частота колебаний только одной основной системы;

$p_д = \sqrt{k_2/m_2}$ — круговая частота колебаний только одной дополнительной системы;

$\beta_2 = m_2/m_1$ — отношение массы гасителя колебаний к массе основной системы;

$\delta = p_д/p_0$ — отношение частоты гасителя колебаний к частоте основной системы;

$\gamma = \omega/p_0$ — отношение частоты возмущающей силы к частоте основной системы.

С учетом этих обозначений выражение (к) можно представить в виде

$$\frac{x_{м1}^2}{\Delta_{ст}^2} = \frac{4\mu^2\gamma^2+(\gamma^2-\delta^2)^2}{4\mu^2\gamma^2(\gamma^2-1+\beta\gamma^2)^2+[\beta\delta^2\gamma^2-(\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)]^2}, \qquad (л)$$

где демпфирование определяется величиной $\mu = c/2m_2p_0$. Положив $\mu = 0$, из выражения (л) находим

$$\frac{x_{м1}}{\Delta_{ст}} = \frac{\gamma^2-\delta^2}{\beta\delta^2\gamma^2-(\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)}. \qquad (м)$$

На рис. 3.21 штриховыми линиями показана зависимость амплитуды от частоты для $\mu = 0$, $\beta = 1/20$ и $\delta = 1$. Следует отметить, что на рисунке представлены абсолютные значения функции (м), в то время значения этой функции меняют знак в точках $\gamma = 0{,}895$, $\gamma = 1$ и $\gamma = 1{,}12$.

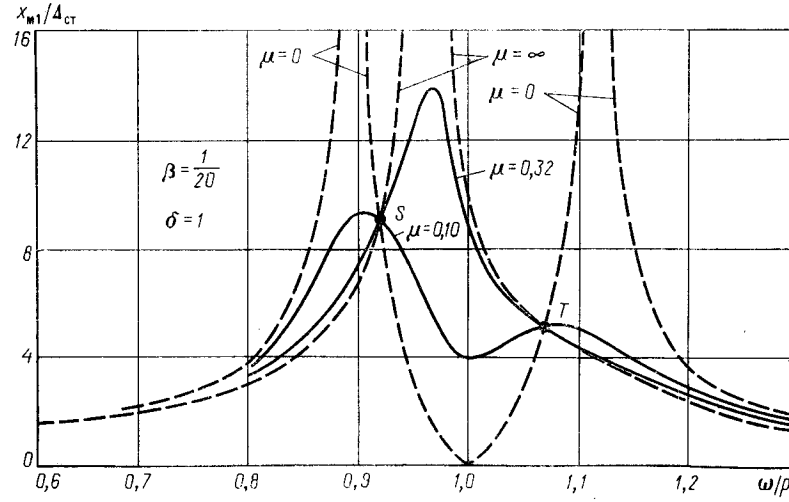


Рис. 3.21

Другой предельный случай возникает, если взять $\mu = \infty$. Если демпфирование бесконечно велико, массы m_1 и m_2 не будут смещаться относительно друг друга. Таким образом, получается система с одной степенью свободы, массой m_1 и жесткостью пружины k_1. Для определения амплитуды вынужденного колебания этой системы воспользуемся выражением (л), что дает

$$\frac{x_{м1}^2}{\Delta_{ст}^2} = \frac{1}{(\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2)^2}. \qquad (н)$$

Критическое значение отношения частоты получается приравниванием нулю знаменателя выражения (н), откуда находим

$$\gamma_{кр} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} = 0{,}976. \qquad (о)$$

Зависимость амплитуды от частоты при $\mu = \infty$ также представлена на рис. 3.21 штриховыми линиями. Эта зависимость имеет тот же вид, что и представленная на рис. 1.22 (см. п. 1.6) для системы с одной степенью свободы. Для всех остальных значений μ резонансные кривые можно построить с помощью выражения (л). На рис. 3.21 показаны кривые для $\mu = 0{,}10$ и $\mu = 0{,}32$.

Интересно отметить, что все кривые на рис. 3.21 пересекаются в точках S и T. Это означает, что для двух соответствующих значений отношения γ амплитуды вынужденных колебаний массы m_1 не зависят от величины демпфирования. Эти значения можно найти, приравняв абсолютные значения $x_{м1}/\Delta_{ст}$, получаемые из выражений (м) и (н), что дает

$$\frac{\gamma^2 - \delta^2}{\beta\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)} = \frac{1}{\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2}. \qquad (п)$$

Это же уравнение можно получить из выражения (л), считая, что точки S и T пересечения определяют те значения γ, при которых величина выражения (л) не зависит от демпфирования. В общем виде выражение (л) можно записать

$$\frac{x_{м1}^2}{\Delta_{ст}^2} = \frac{M\mu^2 + N}{P\mu^2 + Q}. \qquad (р)$$

Здесь можно видеть, что правая часть соотношения не будет зависеть от μ^2 только в том случае, если выполняется соотношение $M/P = N/Q$, откуда снова получаем уравнение (п). Это уравнение можно представить в следующей форме:

$$(\gamma^2 - \delta^2)(\gamma^2 - 1 - \beta\gamma^2) = \beta\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)$$

или

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 \frac{1 + \delta^2 + \beta\delta^2}{2 + \beta} + \frac{2\delta^2}{2 + \beta} = 0. \qquad (с)$$

Из уравнения (с) можно найти два корня γ_1^2 и γ_2^2, которые определяют значения абсцисс точек S и T. Затем подстановкой γ_1^2 и γ_2^2 в выражения (м) или (н) определяем соответствующие значения амплитуд вынужденных колебаний. Используя последнее выражение как более простое найдем ординаты точек * S и T:

$$\frac{(x_{м1})_S}{\Delta_{ст}} = -\frac{1}{\gamma_1^2 - 1 + \beta\gamma_1^2}; \qquad (т)$$

$$\frac{(x_{м1})_T}{\Delta_{ст}} = \frac{1}{\gamma_2^2 - 1 + \beta\gamma_2^2}. \qquad (у)$$

Значения этих ординат зависят от величин β и δ, определяемых массой и жесткостью пружин поглотителя колебаний. Соответствующим подбором этих характеристик можно повысить эффективность поглотителя колебаний. Поскольку все

* Предполагается, что γ_1^2 является меньшим из корней уравнений (с); корень квадратный из выражения (н) берется со знаком минус для того, чтобы получить положительное значение амплитуды.

кривые на рис. 3.21 должны проходить через точки S и T, максимальные ординаты этих кривых, дающие значения максимальных амплитуд при вынужденных колебаниях, будут зависеть от ординат точек S и T. Важно отметить, что наиболее благоприятное условие будет достигнуто в том случае, если ординаты S и T будут равными, для чего требуется, чтобы выполнялось условие

$$-\frac{1}{\gamma_1^2 - 1 + \beta\gamma_1^2} = \frac{1}{\gamma_2^2 - 1 + \beta\gamma_2^2}$$

или

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{2}{1+\beta}. \qquad (\text{ф})$$

Здесь следует помнить, что γ_1^2 и γ_2^2 — два корня квадратного уравнения (с) и что, как известно, сумма корней квадратного уравнения равна взятому с отрицательным знаком коэффициенту при среднем члене, откуда имеем

$$\frac{2}{1+\beta} = 2\frac{1+\delta^2+\beta\delta^2}{2+\beta},$$

что дает

$$\delta = \frac{1}{1+\beta}. \qquad (\text{х})$$

Эта формула указывает способ «настройки» поглотителя колебаний. Если масса m_2 поглотителя выбрана, то становится известной величина β и тогда по формуле (х) определяем соответствующее значение δ, с помощью которого находим частоту и жесткость пружины поглотителя колебаний.

Для того чтобы определить соответствующие точкам S и T амплитуды вынужденных колебаний, подставим в выражение (у) значение одного из корней уравнений (с). При правильно построенном поглотителе колебаний должно выполняться соотношение (х). Для этого случая уравнение (с) принимает вид

$$\gamma^4 - \frac{2\gamma^2}{1+\beta} + \frac{2}{(2+\beta)(1+\beta)^2} = 0,$$

откуда находим

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{1+\beta}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\beta}{2+\beta}}\right). \qquad (\text{ц})$$

Далее из выражения (у) получаем

$$\frac{(x_{\text{м1}})_T}{\Delta_{\text{ст}}} = \sqrt{\frac{2+\beta}{\beta}} = \frac{(x_{\text{м1}})_S}{\Delta_{\text{ст}}}. \qquad (\text{ч})$$

Положения точек S и T не зависят от демпфирующих свойств поглотителя колебаний. Однако максимальные значения ординат кривых зависимости амплитуды от частоты (см. рис. 3.21) зависят от величины μ. Попытаемся получить наиболее благоприятное условие, подобрав μ таким образом, чтобы кривые зависимости амплитуды от частоты имели равный нулю тангенс угла наклона касательной в точках S или T. На рис. 3.22 представлены кривые подобного рода, одна с максимальным значением в точке S, другая — в точке T. Эти кривые построены для случая при $\beta = 1/4$. Можно видеть, что максимальные значения ординат этих кривых очень незначительно отличаются от ординат точек S и T. Следовательно, можно утверждать, что выражение (ч) дает значение амплитуды вынужденного колебания массы m_1 с достаточно хорошей точностью, если величина μ выбрана так, как объяснялось выше.

Теперь рассмотрим, как надо подбирать демпфирующие характеристики поглотителя колебаний, чтобы резонансные кривые имели максимальные значения в точках S и T. Начнем с того, что представим выражение (л) в виде (р). Решив далее получившееся соотношение относительно μ^2, получим

$$\mu^2 = \frac{N - Q(x_{\text{м1}}/\Delta_{\text{ст}})^2}{P(x_{\text{м1}}/\Delta_{\text{ст}})^2 - M}. \qquad (\text{ш})$$

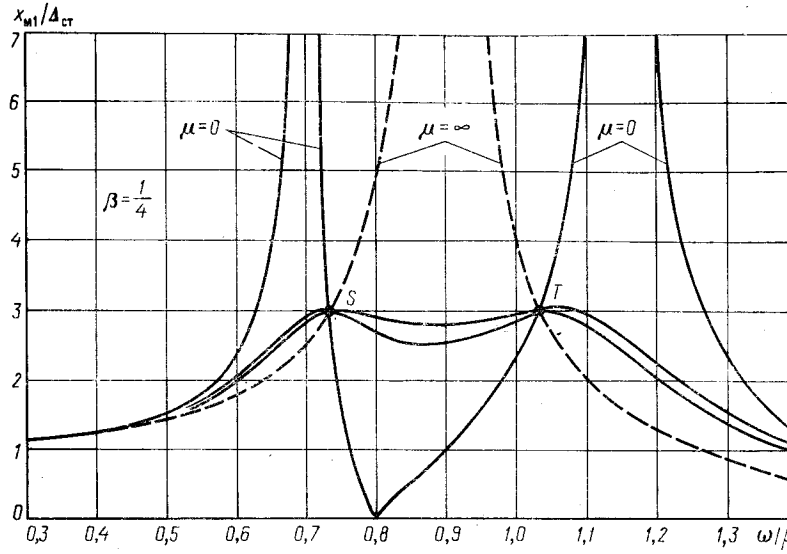


Рис. 3.22

Как только выбрана масса m_2 поглотителя колебаний, становится известной величина β и тогда из формулы (х) находим δ. Затем по формуле (ц) можно подсчитать значения γ_1^2, соответствующие точкам S и T, и далее из выражения (ч) находим $x_{м1}/\Delta_{ст}$. Если все найденные значения подставить в выражение (ш), придем к неопределенному соотношению вида 0/0 для μ^2, поскольку положения точек S и T не зависят от μ. Однако давайте рассмотрим точку, очень близко расположенную к точке S на графике зависимости амплитуды от частоты. Если максимум находится в точке S, значение $x_{м1}/\Delta_{ст}$ не будет изменяться при незначительном смещении абсциссы точки. Не будут изменяться также значения β и δ, и только корень γ_1^2 немного изменит свое значение. Благодаря такому изменению выражение (ш) дает определенное значение величины μ^2, которое требуется для того, чтобы сделать горизонтальной касательную к кривой в точке S. Аналогичным образом можно получить значение μ^2, при котором касательная в точке T будет горизонтальной.

Жесткость пружины поглотителя колебаний определяем по формуле (х). Максимальное напряжение в пружине, возникающее при колебаниях, можно найти, если известно максимальное относительное перемещение $x_{отн} = (x_2 - x_1)_{max}$. Для точного вычисления этой величины требуется проводить сложное исследование движения обеих масс m_1 и m_2 с учетом разности их фаз. Удовлетворительное приближение для $x_{отн}$ можно получить, предположив, что колебание основной массы отстает на $\pi/2$ рад от переменной нагрузки $P\cos\omega t$. При таком предположении работа, выполняемая за один цикл, равна $\pi P x_{м1}$ [см. выражение (в) в п. 1.10]. Рассеивание энергии за один цикл колебания, обусловленное силами демпфирования, пропорциональными скорости, равно $\pi c\,(x_{отн})^2\,\omega$ [см. выражение (д) в п. 1.10]. Приравнивая рассеянную энергию работе, выполненной за один цикл, получим

$$x_{отн}^2 = \frac{P x_{м1}}{c\omega}. \qquad (щ)$$

Используя введенные безразмерные параметры, формулу (щ) можно представить в виде

$$\frac{x_{отн}^2}{\Delta_{ст}^2} = \frac{x_{м1}}{\Delta_{ст}} \frac{1}{2\mu\gamma\beta}. \qquad (э)$$

Поскольку μ и β обычно малы, то, как следует из этой формулы, относительное перемещение $x_{отн}$ будет значительно больше, чем перемещение $x_{м1}$ массы m_1.

Глава 4
СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе концепции, введенные в гл. 3 для систем с двумя степенями свободы, будут распространены на *системы со многими степенями свободы*. В эту категорию будут включены все системы, имеющие более одной степени свободы, но в то же время число степеней свободы не должно быть бесконечным. Конфигурация подобной колебательной системы определяется конечным числом координат перемещений. Если имеется n степеней свободы, соответствующих элементам массы, для описания движения этой системы требуется n дифференциальных уравнений.

В гл. 3 были рассмотрены свободные колебания систем с двумя степенями свободы, что не представляло особых затруднений за исключением случая колебаний с демпфированием. Дополнительные трудности возникают в системах со многими степенями свободы, поскольку с ростом числа степеней свободы быстро растет число членов уравнений. Разумеется, матричная формулировка оказывается очень эффективным средством при работе с большим числом членов уравнений. Однако более важным обстоятельством является то, что системы, подвергаемые произвольным возмущениям, исключительно трудно исследовать в исходных координатах, особенно в случае колебаний с демпфированием. Этих трудностей можно избежать, используя более подходящую систему координат.

Если для системы со многими степенями свободы в качестве обобщенных координат использовать главные формы колебаний, уравнения движения без демпфирования становятся несвязанными. В этих координатах каждое уравнение можно решать как уравнение, записанное для системы только с одной степенью свободы. Этот подход, известный как *метод нормальных форм при динамических исследованиях*, обсуждается в данной главе и применяется к задачам, представляющим общий интерес. Сначала рассматриваются системы без демпфирования, а в последних частях обсуждаются специальные вопросы, относящиеся к системам с демпфированием.

4.2. ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ БЕЗ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Для систем с n степенями свободы уравнения (3.17) из п. 3.5 свободных колебаний в усилиях можно представить в общей форме

$$\begin{bmatrix} M_{11}M_{12}M_{13} & \dots & M_{1n} \\ M_{21}M_{22}M_{23} & \dots & M_{2n} \\ M_{31}M_{32}M_{33} & \dots & M_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ M_{n1}M_{n2}M_{n3} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11}S_{12}S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{21}S_{22}S_{23} & \dots & S_{2n} \\ S_{31}S_{32}S_{33} & \dots & S_{3n} \\ \dots\dots\dots & & \\ S_{n1}S_{n2}S_{n3} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Предположим, что собственная форма колебаний каждой массы описывается гармонической функцией вида

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{Mi} \sin(p_i t + \varphi_i), \tag{а}$$

где p_i и φ_i — соответственно круговая частота и фазовый угол i-й формы колебаний, в уравнении (а) через $\mathbf{X}_i$ обозначена матрица-столбец или вектор-столбец перемещений i-й формы, а $\mathbf{X}_{Mi}$ — то же, относящееся к их максимальным значениям, или амплитуды колебаний

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_i ; \quad \mathbf{X}_{Mi} = \begin{bmatrix} x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ \dots \\ x_{Mn} \end{bmatrix}_i .$$

Подставляя представление (а) в уравнение (4.1), получаем систему алгебраических уравнений, которую можно представить так:

$$\mathbf{H}_i \mathbf{X}_{Mi} = 0, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{H}_i$ — *характеристическая матрица* вида

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{S} - p_i^2 \mathbf{M}. \tag{4.3}$$

Для существования нетривиальных решений системы (4.2) определитель характеристической матрицы должен равняться нулю,

откуда получаем следующую форму *характеристического уравнения*:

$$|\mathbf{H}_i| = \begin{vmatrix} S_{11} - p_i^2 M_{11} & S_{12} - p_i^2 M_{12} & S_{13} - p_i^2 M_{13} \ldots & S_{1n} - p_i^2 M_{1n} \\ S_{21} - p_i^2 M_{21} & S_{22} - p_i^2 M_{22} & S_{23} - p_i^2 M_{23} \ldots & S_{2n} - p_i^2 M_{2n} \\ S_{31} - p_i^2 M_{31} & S_{32} - p_i^2 M_{32} & S_{33} - p_i^2 M_{33} \ldots & S_{3n} - p_i^2 M_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} - p_i^2 M_{n1} & S_{n2} - p_i^2 M_{n2} & S_{n3} - p_i^2 M_{n3} \ldots & S_{nn} - p_i^2 M_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

При разложении этого определителя получим полином, где член с наибольшей степенью имеет вид $(p_i^2)^n$. Если полином нельзя разложить на множители, то n его корней можно найти с помощью численной процедуры. Эти корни, которые ранее были известны как характеристические значения, иногда называют *собственными значениями*. Если матрица $\mathbb{M}$ является положительно определенной*, а матрица S либо положительно определенной, либо положительно полуопределенной, все собственные значения характеристической матрицы будут действительными, положительными или равными нулю числами. Однако они не обязательно будут различными, т. е. отличающимися друг от друга. Вопрос о кратных корнях обсуждается ниже в п. 4.7.

Векторы, компонентами которых являются амплитуды форм колебаний и которые обозначаются через $\mathbf{X}_{Mi}$, называются *характеристическими векторами* или *собственными векторами*. Если собственные значения системы были найдены как корни характеристического уравнения (4.4), то из однородных алгебраических уравнений (4.2) можно определить собственные векторы (с точностью до произвольных постоянных).

Поскольку имеется n характеристических значений, будем иметь n соответствующих векторов, компонентами которых являются перемещения. В случае некратных корней для различных собственных значений $(n-1)$ амплитуды собственных векторов можно выразить через одну последнюю амплитуду, решая систему $(n-1)$ алгебраических уравнений. Однако можно видеть, что такие громоздкие вычисления не требуются, если рассмотреть формальное определение матрицы, обратной матрице $\mathbf{H}_i$,

$$\mathbf{H}_i^{-1} = \frac{\mathbf{H}_i^{\text{п}}}{|\mathbf{H}_i|}, \tag{б}$$

где $\mathbf{H}_i^{\text{п}}$ — *присоединенная матрица*. В действительности, конечно, матрица, обратная матрице $\mathbf{H}_i$, не существует, поскольку определитель $|\mathbf{H}_i|$ равен нулю [см. уравнение (4.4)]. Тем не менее, приме-

* Матрица, элементы которой — действительные числа, является положительно определенной, если все ее главные миноры положительны. Если некоторые из этих миноров равны нулю, такая матрица называется положительно полуопределенной.

нительно к обсуждаемому здесь вопросу соотношение (б) можно переписать в виде

$$\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^{\text{п}} = |\mathbf{H}_i|\mathbf{I} = 0. \qquad \text{(в)}$$

Сравнивая равенство (в) и уравнение (4.2), можно заключить, что собственный вектор $\mathbf{X}_{Mi}$ пропорционален любому столбцу присоединенной матрицы $\mathbf{H}_i^{\text{п}}$. Так как собственный вектор может иметь произвольную длину, его по желанию можно взять либо равным такому столбцу, либо нормированному.

Если вместо уравнений в усилиях взять уравнения движения в перемещениях, вместо уравнений (4.1) запишем следующие уравнения [см. уравнения (3.1)]:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \dots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \dots & F_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & \dots & M_{2n} \\ M_{13} & M_{32} & M_{33} & \dots & M_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.5)$$

Подставляя представления (а) в уравнения (4.5), получим систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{L}_i\mathbf{X}_{Mi} = 0. \qquad (4.6)$$

Здесь $\mathbf{L}_i$ — характеристическая матрица, определяемая соотношением

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{FM} - \lambda_i\mathbf{I}, \qquad (4.7)$$

где $\lambda_i = 1/p_i^2$. Для существования нетривиальных решений уравнений (4.6) необходимо, чтобы определитель матрицы $\mathbf{L}_i$ равнялся нулю, что в данном случае приводит к следующей общей форме характеристического уравнения:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \dots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \dots & F_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \dots & M_{21} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \dots & M_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} - \lambda_i \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 0. \qquad (4.8)$$

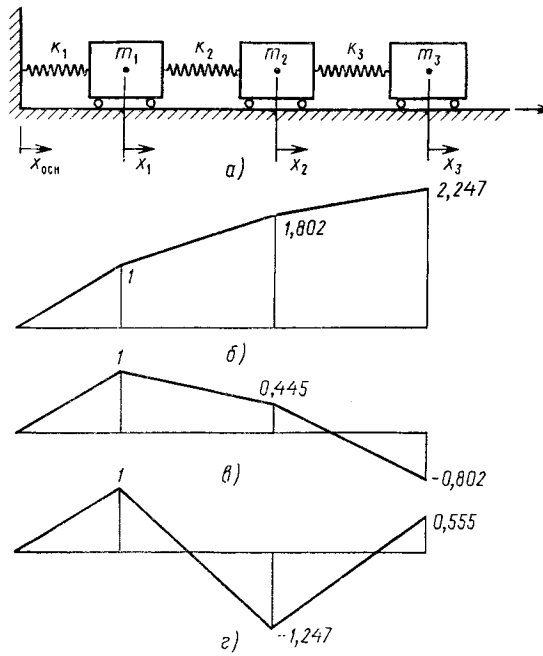


Рис. 4.1

При разложении определителя (4.8) получаем полином степени n, которому соответствуют корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n$. В данном случае эти корни представляют собой собственные значения, а собственные векторы можно определить, подставляя эти значения в уравнения (4.6). С другой стороны, в качестве одного из таких собственных векторов можно взять в произвольном масштабе произвольный столбец матрицы $\mathbf{L}_i^{\text{д}}$ алгебраических дополнений.

Из обсуждений, приведенных в гл. 3, видно, что в соотношении (4.3) матрицу жесткости **S** можно заменить либо дополнить матрицей **G** сил тяжести [см. выражение (3.10)]. Аналогично в соотношении (4.7) матрицу податливости **F** можно заменить матрицей псевдоподатливости, отражающей влияние силы тяжести (см. пример 3 в п. 3.3). В любом случае расчеты значительно упростятся, если матрица **M** будет диагональной, а не произвольного вида. Теперь проиллюстрируем определение собственных частот и форм колебаний на отдельных примерах систем со многими степенями свободы.

Пример 1. На рис. 4.1, *а* показана система, состоящая из трех масс, соединенных друг с другом и с основанием тремя пружинами. Движение этой системы с тремя степенями свободы определяется координатами перемещений x_1, x_2 и x_3. Пусть для простоты имеем $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Используя уравнения в усилиях, определить характеристические значения и главные формы колебаний.

Решение. Для рассматриваемой системы матрица масс является диагональной:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (г)$$

а матрица жесткости имеет вид

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (д)$$

Используя эту матрицу, запишем характеристическую матрицу в соответствии с соотношением (4.3):

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} 2k - p_i^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - p_i^2 m & -k \\ 0 & -k & k - p_i^2 m \end{bmatrix}. \qquad (е)$$

Полагая определитель матрицы $\mathbf{H}_i$ равным нулю [см. уравнение (4.4)], после приведения подобных членов получаем следующее характеристическое уравнение:

$$(p_i^2)^3 - 5\left(\frac{k}{m}\right)(p_i^2)^2 + 6\left(\frac{k}{m}\right)^2 (p_i^2) + \left(\frac{k}{m}\right)^3 = 0. \qquad (ж)$$

Корни этого кубического уравнения можно определить методом последовательного приближения (проб и ошибок), откуда имеем

$$p_1^2 = 0{,}198\,\frac{k}{m}; \quad p_2^2 = 1{,}555\,\frac{k}{m}; \quad p_3^2 = 3{,}247\,\frac{k}{m}. \qquad (з)$$

Для того чтобы найти форму колебаний, соответствующую наименьшему собственному значению, подставим значение p_1^2 в уравнения (4.2) и выразим оттуда $x_{м\,2,\,1}$ и $x_{м\,3,\,1}$ через $x_{м\,1,\,1}$, тогда получим

$$x_{м\,2,\,1} = 1{,}802 x_{м\,1,\,1}; \quad x_{м\,3,\,1} = 2{,}247 x_{м\,1,\,1}. \qquad (и)$$

Поступая аналогичным образом, из уравнений (4.2) путем подстановки значений p_2^2 и p_3^2 найдем следующие решения:

$$x_{м\,2,\,2} = 0{,}445 x_{м\,1,\,2}; \quad x_{м\,3,\,2} = 0{,}802 x_{м\,1,\,2}; \qquad (к)$$

$$x_{м\,2,\,3} = -1{,}247 x_{м\,1,\,3}; \quad x_{м\,3,\,3} = 0{,}555 x_{м\,1,\,3}. \qquad (л)$$

С другой стороны, присоединенная матрица $\mathbf{H}_i^{п}$ в соответствии с выражением (е) имеет вид

$$\mathbf{H}_i^{п} = \begin{bmatrix} (2k - p_i^2 m)(k - p_i^2 m) - k^2 & k(k - p_i^2 m) & k^2 \\ k(k - p_i^2 m) & (2k - p_i^2 m)(k - p_i^2 m) & k(2k - p_i^2 m) \\ k^2 & k(2k - p_i^2 m) & (2k - p_i^2 m)^2 - k^2 \end{bmatrix} \qquad (м).$$

Подставляя в выражение (м) найденное значение p_1^2, получим

$$\mathbf{H}_i^{п} = k^2 \begin{bmatrix} 0{,}445 & 0{,}802 & 1{,}000 \\ 0{,}802 & 1{,}445 & 1{,}802 \\ 1{,}000 & 1{,}802 & 2{,}247 \end{bmatrix}.$$

Третий столбец этой матрицы при делении на k^2 дает компоненты первого собственного вектора, приведенные к амплитуде перемещений первой массы. Таким образом, имеем

$$\mathbf{X}_{м_1} = \{1{,}000;\ 1{,}802;\ 2{,}247\}, \qquad (н)$$

что совпадает с решениями (и). Разумеется, для получения этих результатов требуется определять только один столбец присоединенной матрицы, поскольку все столбцы пропорциональны $\mathbf{X}_{M1}$.

В подобной же духе путем подстановки значений p_2^2 и p_3^2 в третий столбец выражения (м) для матрицы $\mathbf{H}_i^{\text{п}}$ определяются собственные векторы $\mathbf{X}_{M2}$ и $\mathbf{X}_{M3}$, которые имеют вид

$$\mathbf{X}_{M2} = \{1{,}000;\ 0{,}445;\ -0{,}805\}; \qquad (о)$$

$$\mathbf{X}_{M3} = \{1{,}000;\ -1{,}247;\ 0{,}555\}, \qquad (п)$$

совпадающий с видом выражений (к) и (л). Три главные формы колебаний, описываемые выражениями (н), (о) и (п), представлены значениями ординат на рис. 4.1, *б* *в* и *г* соответственно.

Предположим теперь, что жесткость k_1 первой пружины на рис. 4.1, *а* равна нулю. В этом случае система будет свободно передавать и движение как жесткого тела, и колебания. Коэффициент жесткости S_{11} изменит свое значение с $2k$ на k, а соответствующий элемент характеристической матрицы примет вид $H_{i11} = k - p_i^2 m$. Соответственно упростится характеристическое уравнение, которое в данном случае может быть разложено на простейшие множители:

$$p_i^2 \left(p_i^2 - \frac{k}{m}\right)\left(p_i^2 - \frac{3k}{m}\right) = 0, \qquad (р)$$

откуда получаем

$$p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = \frac{k}{m}, \quad p_3^2 = \frac{3k}{m}, \qquad (с)$$

где равный нулю корень соответствует форме движения как абсолютно жесткого тела.

Третий столбец в выражении (м) для присоединенной матрицы $\mathbf{H}_i^{\text{п}}$ принимает вид

$$\mathbf{H}_{i,\,3}^{\text{п}} = \begin{bmatrix} k^2 \\ k\,(k - p_i^2 m) \\ (k - p_i^2 m)\,(2k - p_i^2 m) - k^2 \end{bmatrix}. \qquad (т)$$

Последовательной подстановкой собственных значений для этой полуопределенной системы в выражение (т) получаем следующие выражения для собственных векторов:

$$\mathbf{X}_{M1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{M2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{M3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (у)$$

Из рассмотрения этих векторов легко устанавливаются главные формы колебаний этой системы.

Пример 2. Три сосредоточенные массы прикреплены к предварительно растянутой нити, как показано на рис. 4.2, *а*. Предполагается, что растягивающая сила T в тросе достаточно велика, поэтому при малых перемещениях масс она изменяется незначительно. Требуется определить характеристические значения и собственные векторы этой системы, используя уравнения в перемещениях и считая, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

Решение. Матрица масс имеет тот же вид, что и в примере 1, а матрица податливостей

$$\mathbf{F} = \frac{l}{4T}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (ф)$$

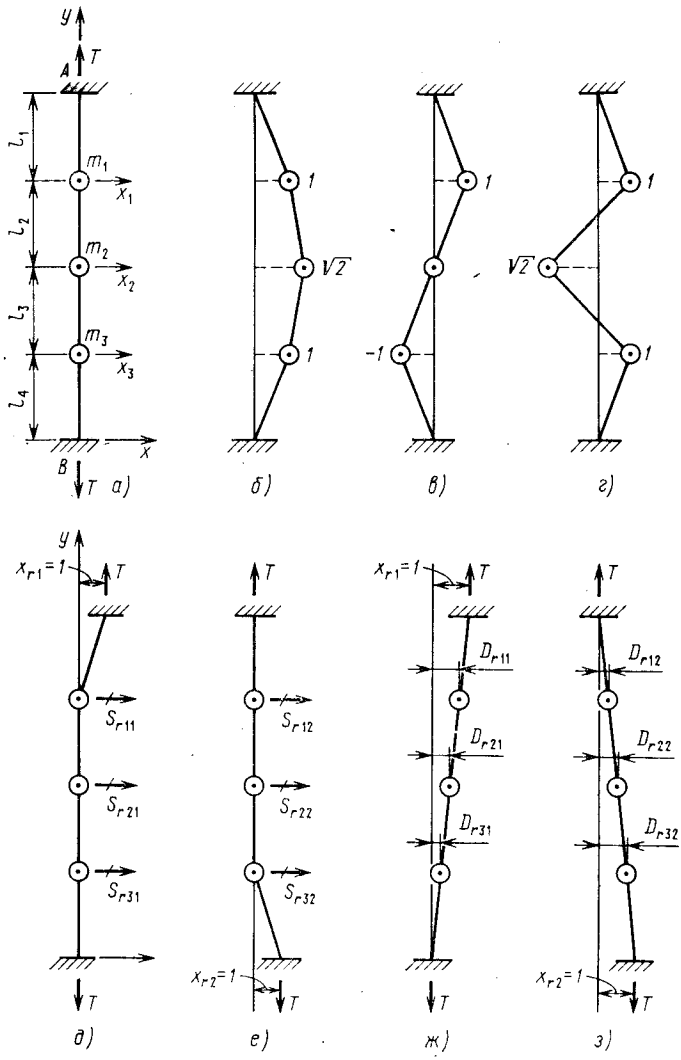


Рис. 4.2

Используя эту матрицу, запишем характеристическую матрицу в соответствии с выражением (4.7):

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} 3\alpha - \lambda_i & 2\alpha & \alpha \\ 2\alpha & 4\alpha - \lambda_i & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha - \lambda_i \end{bmatrix}, \qquad \text{(х)}$$

где $\alpha = lm/(4T)$. Затем определитель матрицы $\mathbf{H}_i$ полагаем равным нулю и получаем характеристическое уравнение

$$(\lambda_i - 2\alpha)\left(\lambda_i^2 - 8\alpha\lambda_i + 8\alpha^2\right) = 0. \qquad \text{(ц)}$$

Корни данного уравнения в порядке убывания суть

$$\lambda_1 = 2(2+\sqrt{2})\alpha, \quad \lambda_2 = 2\alpha, \quad \lambda_3 = 2(2-\sqrt{2})\alpha. \tag{ч}$$

Для того чтобы найти формы колебаний этой системы, построим только первый столбец матрицы, присоединенной к матрице $\mathbf{L}_i$:

$$\mathbf{L}^{\text{п}}_{i,1} = \begin{bmatrix} (4\alpha-\lambda_i)(3\alpha-\lambda_i) - 4\alpha^2 \\ -2\alpha(3\alpha-\lambda_i) + 2\alpha^2 \\ 4\alpha^2 - \alpha(4\alpha-\lambda_i) \end{bmatrix}. \tag{ш}$$

Последовательно подставляя собственные значения в выражение (ш), после деления каждой компоненты на величину компоненты x_{M1} получим следующие выражения для собственных векторов:

$$\mathbf{X}_{M1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{M2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{M3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{щ}$$

Эти формы колебаний представлены на рис. 4.2, *б*, *в* и *г*.

Описанные в данном параграфе два метода получения характеристических значений и векторов можно представить единым образом в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{Mi} = \lambda_i \mathbf{X}_{Mi}, \tag{э}$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, элементами которой являются действительные числа. Уравнение (э) известно как *стандартная форма задачи на собственные значения*. Для линейно упругих колебательных систем путем соответствующего выбора координат матрица коэффициентов $\mathbf{A}$ всегда может быть преобразована к симметричному, положительно или полуположительно определенному виду. Такая форма часто бывает предпочтительной в том случае, когда задача на собственные значения решается численно, поэтому в последующем обсуждении дана процедура приведения матрицы коэффициентов к симметричному виду.

Уравнение движения (4.6) в перемещениях можно записать, используя матрицы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$, в форме

$$\mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi} = \lambda_i \mathbf{X}_{Mi}. \tag{4.9}$$

Это уравнение имеет стандартную форму (э), но матрица коэффициентов $\mathbf{FM}$ является несимметричной. Произведение матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ не обладает симметричной структурой, даже если матрица $\mathbf{M}$ диагональная, за исключением специального случая, когда все диагональные элементы равны между собой. Чтобы получить симметричную матрицу коэффициентов, требуется изменить координаты. Если матрица $\mathbf{M}$ является положительно определенной, с помощью *метода квадратного корня Холецкого* * ее можно представить в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}^{\text{т}}\mathbf{U}, \tag{4.10}$$

где $\mathbf{U}$ — верхнетреугольная матрица, $\mathbf{U}^{\text{т}}$ — транспонированная матрица $\mathbf{U}$. Подставляя представление (4.10) в уравнение (4.9) и умножая его слева на матрицу $\mathbf{U}$, получим $\mathbf{U}\mathbf{F}\mathbf{U}^{\text{т}}\mathbf{U}\mathbf{X}_{Mi} = \lambda_i \mathbf{U}\mathbf{X}_{Mi}$. Это уравнение можно переписать в виде

$$\mathbf{F}_U \mathbf{X}_{Ui} = \lambda_i \mathbf{X}_{Ui}, \tag{4.11}$$

где

$$\mathbf{X}_{Ui} = \mathbf{U}\mathbf{X}_{Mi} \tag{4.12а}$$

или

$$\mathbf{X}_{Mi} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}_{Ui}, \tag{4.12б}$$

тогда

$$\mathbf{F}_U = \mathbf{U}\mathbf{F}\mathbf{U}^{\text{т}}. \tag{4.13}$$

---

* **Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960, с. 165.

Элементами матрицы-столбца [см. выражение (4.12а)] являются амплитуды форм колебаний, записанные в новой системе координат, где матрица обобщенных масс представляет собой единичную матрицу. В этих координатах матрица обобщенных податливостей, представляемая выражением (4.13), является симметричной, поскольку она получается с помощью преобразования подобия симметричной матрицы **F**.

Таким образом, уравнение (4.11) имеет стандартную форму задачи на собственные значения с симметричной, положительно определенной матрицей коэффициентов. Очевидно, что это преобразованное уравнение имеет те же собственные значения λ_i, что и исходное уравнение (4.9). Однако собственные векторы $\mathbf{X}_{Ui}$ и $\mathbf{X}_{Mi}$ не являются тождественными. Найдя выражения собственных векторов $\mathbf{X}_{Ui}$ в обобщенных координатах, можно затем преобразовать их, выразив через исходные координаты с помощью соотношения (4.12б).

Преобразования, задаваемые выражениями (4.12а) и (4.12б), упрощаются, если матрица масс диагональная. В этом случае из выражения (4.10) для матрицы **M** получаем

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}^{1/2}, \qquad \mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}^{-1/2}. \tag{4.14}$$

Здесь $\mathbf{M}^{1/2}$ — диагональная матрица с диагональными элементами, равными квадратному корню из соответствующих элементов матрицы **M**, а $\mathbf{M}^{-1/2}$—диагональная матрица, диагональными элементами которой являются величины, обратные значениям соответствующих элементов матрицы $\mathbf{M}^{1/2}$. Тогда выражения (4.12а), (4.12б) и (4.13) принимают вид

$$\mathbf{X}_{Ui} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}_{Mi} \tag{4.15а}$$

или

$$\mathbf{X}_{Mi} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{X}_{Ui}, \tag{4.15б}$$

а также

$$\mathbf{F}_U = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{F}\mathbf{M}^{1/2}. \tag{4.16}$$

Уравнение движения в усилиях также можно преобразовать, используя обобщенные координаты. Сначала представим это уравнение с помощью матриц **S** и **M** в следующей форме:

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mi} = p_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi}, \tag{4.17}$$

которая отличается от стандартной формы уравнения (э), поскольку в правой части присутствует матрица **M**. Уравнение (4.17) является *задачей на собственные значения в нестандартной форме*, имеющей две симметричные матрицы коэффициентов. Это уравнение можно было бы привести к стандартной форме, умножив обе части этого уравнения слева на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$, но при этом результирующая матрица $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}$ коэффициентов оказалась бы несимметричной. Чтобы избежать потери матрицами свойства симметрии, подставим выражение (4.12б) в уравнение (4.17) и умножим слева обе части этого уравнения на $(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}$, тогда получим

$$(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}_{Ui} = p_i^2(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}_{Ui}. \tag{4.18}$$

Подставляя в правую часть уравнения (4.18) выражение (4.10) для матрицы **M**, придем к соотношению вида

$$\mathbf{S}_U\mathbf{X}_{Ui} = p_i^2\mathbf{M}_U\mathbf{X}_{Ui} = p_i^2\mathbf{X}_{Ui}, \tag{4.19}$$

где

$$\mathbf{S}_U = (\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{F}_U^{-1}. \tag{4.20}$$

Отсюда становится очевидным способ приведения матрицы **M** к симметричному виду

$$\mathbf{M}_U = (\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}. \tag{4.21}$$

В этом случае уравнение (4.19) имеет стандартную форму задачи на собственные значения с симметричной матрицей коэффициентов. Как следует из выражения (4.20), матрица $\mathbf{S}_U$ обобщенных жесткостей является обратной матрице обобщенных

податливостей, описываемой выражением (4.13). Разумеется, взаимообратимость этих утверждений справедлива только в том случае, когда матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}_U$ положительно определенные. Если матрица масс диагональная, то сведение матрицы $\mathbf{S}$ к виду (4.20) упрощается до

$$\mathbf{S}_U = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{M}^{-1/2}. \tag{4.22}$$

Пример 3. Предположим, что вторая масса на рис. 4.2, *а* $m_2 = 4m_1$, а для остальных, как и в примере 2, имеем $m_1 = m_3 = m$. В этом случае произведение $\mathbf{FM}$ в уравнении (4.9) принимает вид следующей матрицы:

$$\mathbf{FM} = \frac{l}{4T}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m = \alpha\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 16 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}. \tag{а'}$$

Эта матрица является несимметричной, поскольку масштаб второго столбца матрицы $\mathbf{F}$ изменялся независимо от других столбцов. Вместо того чтобы использовать эту форму, можно сохранить симметрию матрицы $\mathbf{M}$, построив сначала диагональную матрицу $\mathbf{M}^{1/2}$ и обратную матрицу

$$\mathbf{M}^{1/2} = \sqrt{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{б'}$$

Тогда, как следует из соотношения (4.16), матрицу $\mathbf{M}^{1/2}$ можно применять как оператор преобразования, что дает матрицу

$$\mathbf{F}_U = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{F}\mathbf{M}^{1/2} = \alpha\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \tag{в'}$$

которая обладает требуемой симметрией. Преобразованную матрицу $\mathbf{F}_U$ можно использовать для решения задачи на собственные значения в стандартной форме (4.11). И, наконец, с помощью выражения (4.15б) и оператора $\mathbf{M}^{-1/2}$ определяются собственные векторы в исходных координатах.

ЗАДАЧИ

4.2.1. Используя уравнения в усилиях и коэффициенты влияния жесткости для системы, показанной на рис. 4.2, *а*, определить собственные значения p_i^2 и собственные векторы $\mathbf{X}$ ($i = 1, 2, 3$). Принять, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $l_1 = l_2 = l$.

Ответ: $p^2_{1,2,3} = (2 + \sqrt{2})\,T/(ml)$; $2T/(ml)$; $(2 + \sqrt{2})\,T/(ml)$.

4.2.2. На рис. А.4.2.2 показаны три массы и четыре пружины. Определить собственные значения и собственные векторы, используя уравнения в перемещениях и коэффициенты влияния податливости, если дано: $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$.

Ответ: $\lambda_{1,2,3} = (2 + \sqrt{2})\,m/(2k)$; $m/(2k)$; $(2 - \sqrt{2})\,m/(2k)$.

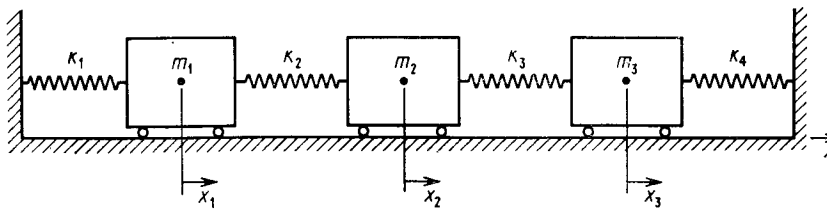


Рис. А.4.2.2

4.2.3. Три простейших маятника соединены двумя пружинами (рис. А.4.2.3). Дано: $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$. Используя уравнения в усилиях, найти собственные значения и собственные векторы, взять в качестве координат перемещений малые углы θ_1, θ_2 и θ_3.

Ответ:

$$p^2_{1,2,3} = \frac{g}{l}; \quad \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}; \quad \frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2}.$$

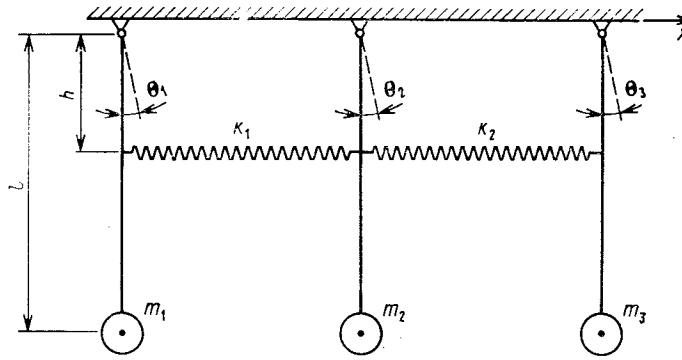


Рис. А.4.2.3

4.2.4. На рис. А.4.2.4 показаны три диска, установленные на валу, который неподвижно закреплен в точке A и свободно поворачивается в подшипниках в точках B, C и D. Определить собственные значения и собственные векторы, используя уравнения в перемещениях, если дано: $I_1 = I_2 = I_3 = I$, $k_{к1} = k_{к2} = k_{к3} = k_к$. В качестве координат перемещений использовать углы φ_1, φ_2, φ_3.

Ответ: $\lambda_{1,2,3} = 5{,}05I/k$; $0{,}643I/k_к$; $0{,}308I/k_к$.

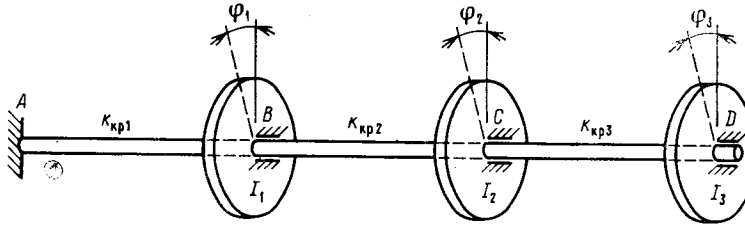


Рис. А.4.2.4

4.2.5. Четыре массы, соединенные тремя пружинами, могут свободно перемещаться в направлении оси (рис. А.4.2.5). Определить собственные значения и собственные векторы, используя уравнения движения в усилиях, если дано: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

Ответ: $p^2_{1,2,3,4} = 0$; $(2 - \sqrt{2})\, k/m$; $2k/m$; $(2 + \sqrt{2})\, km$.

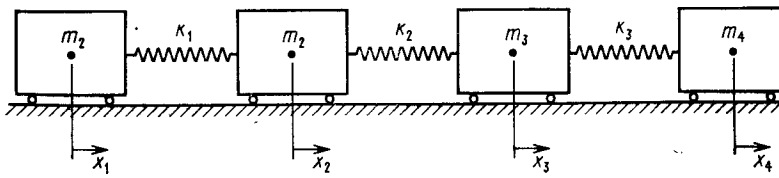


Рис. А.4.2.5

4.2.6. На свободно опертой балке (рис. А.4.2.6) закреплены три массы в точках, отстоящих друг от друга и от концов балки на четверть ее длины. Используя в качестве координат перемещений малые смещения y_1, y_2 и y_3, определить собственные значения и собственные векторы для этой системы с помощью уравнений в перемещениях. Принять, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и что невесомая призматическая балка имеет жесткость при изгибе EI.

Ответ: $\lambda_{1,\,2,\,3} = 31{,}6\alpha;\ 2\alpha;\ 0{,}444\alpha$ [$\alpha = ml^3/(768EJ)$].

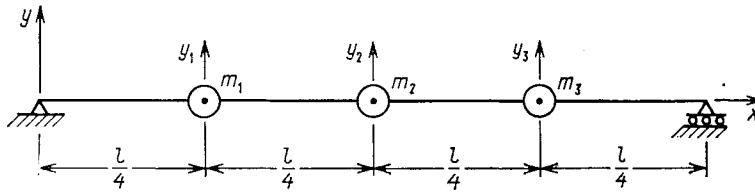


Рис. А.4.2.6

4.2.7. Для показанного на рис. А.4.2.7 тройного маятника определить собственные значения и собственные векторы, используя уравнения движения в усилиях. В качестве координат перемещений взять x_1, x_2 и x_3; считать, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

Ответ: $p^2_{1,\,2,\,3} = 0{,}416g/l;\ 2{,}29g/l;\ 6{,}29g/l$.

4.2.8. На рис. А.4.2.8 показан каркас трехэтажного дома с абсолютно жесткими балками и гибкими стойками. Дано: $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $h_1 = h_2 = h_3 = h$, $EI_1 = 3EI$, $EI_2 = 2EI$, $EI_3 = EI$. Используя в качестве координат перемещений горизонтальные перемещения x_1, x_2 и x_3, определить собственные значения и собственные векторы с помощью уравнений в перемещениях.

Ответ: $\lambda_{1,\,2,\,3} = 14{,}4\alpha;\ 2{,}62\alpha;\ 0{,}954\alpha$ [$\alpha = mh^3/(144EI)$].

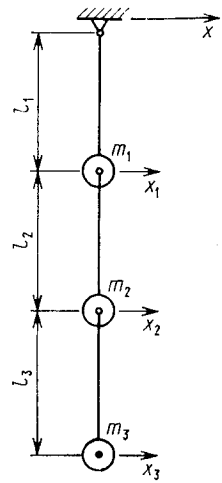


Рис. А.4.2.7

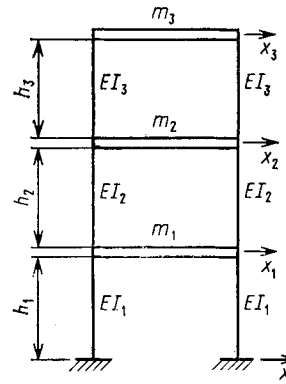


Рис. А.4.2.8

4.2.9. Для подвешенной на пружинах массы (рис. А.4.2.9) в качестве координат перемещений используются ортогональные смещения x_1, y_1 и z_1. Пружины установлены в направлениях, определяемых следующими единичными векторами: $\mathbf{e}_1 = 0{,}8\mathbf{i} - 0{,}6\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = 0{,}6\mathbf{j} + 0{,}8\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}_3 = 0{,}6\mathbf{j} - 0{,}8\mathbf{k}$ (где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные

векторы в направлениях соответственно x, y и z). Используя уравнения движения в усилиях, определить собственные значения и собственные векторы, приняв, что жесткость всех пружин одинакова.

Ответ: $p^2_{1,\,2,\,3} = 0{,}332k/m;\ 1{,}28k/m;\ 1{,}39k/m$.

4.2.10. Показанная на рис. А.4.2.10 плоская рама состоит из двух призматических стержней с жесткостью EI при изгибе. Она неподвижно закреплена в точке A, а в точках B и D на ней закреплены сосредоточенные массы. В качестве координат перемещения берутся малые перемещения x_1, y_1 и y_2. Принимая, что $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$, с помощью уравнений движения в перемещениях определить собственные значения и собственные векторы.

Ответ: $\lambda_{1,\,2,\,3} = 74{,}7\alpha;\ 6{,}99\alpha;\ 0{,}307\alpha\ [\alpha = ml^3/(48EI)]$.

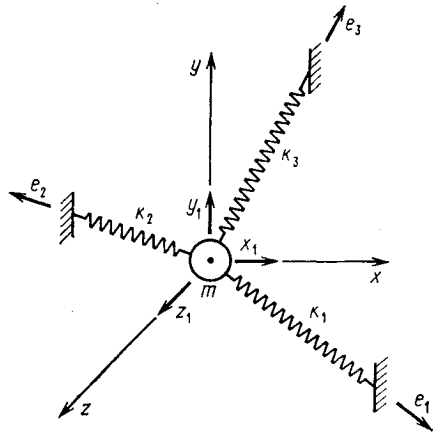


Рис. А.4.2.9

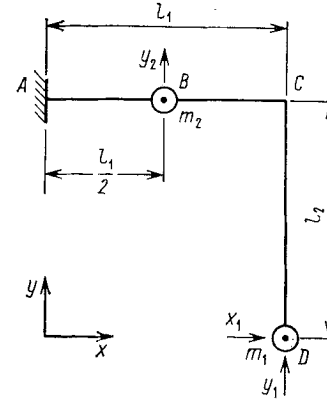


Рис. А.4.2.10

4.2.11. Предположим, что балка, на которой закреплены три сосредоточенные массы (рис. А.4.2.11), может свободно перемещаться только в направлении оси y. Приняв, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и $l_1 = l_2 = l$, найти собственные значения и собственные векторы с помощью уравнений движения в усилиях. Балка является призматической и ее жесткость при изгибе равна EI.

Ответ: $p_{1,\,2,\,3} = 0;\ 0;\ 9EI/(ml^3)$.

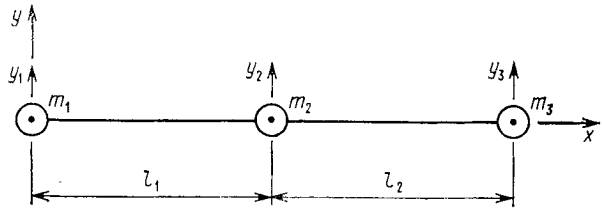


Рис. А.4.2.11

4.2.12. На рис. А.4.2.12 показаны два абсолютно жестких стержня, соединенных в точке B с помощью шарнира. Предполагается, что $l_1 = l_2 = l$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $m_1 = m_2 = m$ и что массы равномерно распределены по длине стержней. В качестве координат перемещений используются малое перемещение y_1

точки B и малые повороты θ_1 и θ_2 стержней вокруг точки B. С помощью уравнений движения в усилиях определить собственные значения и собственные векторы этой системы.

Ответ: $p^2_{1,2,3} = (3 - \sqrt{3})\ k/m;\ 3k/m;\ (3 + \sqrt{3})\ k/m$.

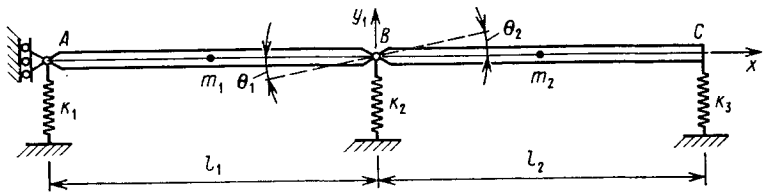


Рис. А.4.2.12

4.3. ГЛАВНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Для того чтобы выявить определенные внутренние связи между главными формами колебаний, рассмотрим i-ю и j-ю формы в задаче на собственные значения для уравнений движения в усилиях [см. уравнение (4.17)]

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mi} = p_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi}; \qquad \text{(а)}$$

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mj} = p_j^2\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mj}. \qquad \text{(б)}$$

Умножением слева первого из этих уравнений на матрицу $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}$ и умножением справа на $\mathbf{X}_{Mi}$ транспонированного второго уравнения получаем

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mj} = p_i^2\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi}; \qquad \text{(в)}$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mj} = p_j^2\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi}. \qquad \text{(г)}$$

Поскольку левые части уравнений (в) и (г) равны, то вычитанием второго уравнения из первого придем к соотношению

$$(p_i^2 - p_j^2)\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi} = 0. \qquad \text{(д)}$$

С другой стороны, если обе части уравнения (в) разделить на p_i^2 и обе части уравнения (г) на p_j^2, то получим, что правые части этих уравнений равны. Вычитая одно уравнение из другого, найдем

$$\left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{S}\mathbf{M}_{Mi} = 0. \qquad \text{(е)}$$

Для того чтобы удовлетворялись соотношения (д) и (е) при $i \neq j$ и различных собственных значениях ($p_i^2 \neq p_j^2$), должны выполняться следующие условия:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mi}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mj} = 0; \qquad (4.23)$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mj}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mi} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{Mi}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mj} = 0. \qquad (4.24)$$

Эти равенства выражают *условия ортогональности* главных форм колебаний. Из соотношения (4.23) видно, что собственные векторы

ортогональны с матрицей $\mathbf{M}$, а соотношение (4.24) показывает, что они ортогональны с матрицей S.

В случае, когда $i = j$, из соотношений (д) и (е) следует

$$\mathbf{X}_{Mi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{Mi} = M_{\Gamma i}; \tag{4.25}$$

$$\mathbf{X}_{Mi}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{Mi} = S_{\Gamma i}, \tag{4.26}$$

где $M_{\Gamma i}$ и $S_{\Gamma i}$ — постоянные, зависящие от того, как нормирован собственный вектор $\mathbf{X}_{Mi}$. Для удобства представления, расположим все собственные векторы в виде столбцов *матрицы $n \times n$ форм колебаний* вида

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}} = [\mathbf{X}_{M1}\mathbf{X}_{M2}\mathbf{X}_{M3} \ \ldots \ \mathbf{X}_{Mn}]. \tag{4.27}$$

Затем уравнения (4.23) и (4.25) можно объединить общим выражением вида

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}} = \mathbf{M}_{\Gamma}, \tag{4.28}$$

где $\mathbf{M}_{\Gamma}$ — диагональная матрица, которую будем рассматривать как *главную матрицу масс*. Аналогично уравнения (4.24) и (4.26) можно объединить и представить в виде

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}} = \mathrm{S}_{\Gamma}, \tag{4.29}$$

где S_{Γ} — диагональная, отличная от $\mathbf{M}_{\Gamma}$ матрица, которую будем называть *главной матрицей податливостей*. Преобразования (4.28) и (4.29) описывают процесс *диагонализации матриц* $\mathbf{M}$ и S. Если окажется, что одна из них имеет диагональное строение, то преобразование (4.28) или (4.29) приводит к простому умножению всех диагональных элементов на одно и то же число.

Для того чтобы продемонстрировать преимущества процесса диагонализации, рассмотрим уравнения движения в усилиях для свободных колебаний без демпфирования системы со многими степенями свободы:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = 0. \tag{4.30}$$

Умножая уравнение (4.30) слева на $\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}$ и подставляя единичную матрицу $\mathbf{I} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}}\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{-1}$ перед $\ddot{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{X}$, получим

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{M}}\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{-1}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{M}}\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{-1}\mathbf{X} = 0,$$

что можно переписать в виде

$$\mathbf{M}_{\Gamma}\ddot{\mathbf{X}}_{\Gamma} + \mathrm{S}_{\Gamma}\mathbf{X}_{\Gamma} = 0. \tag{4.31}$$

В этом уравнении векторы перемещения и ускорения

$$\mathbf{X}_{\Gamma} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{-1}\mathbf{X}; \tag{4.32}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\Gamma} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{-1}\ddot{\mathbf{X}}. \tag{4.33}$$

Благодаря выражениям (4.28) и (4.29) обе матрицы обобщенных масс и обобщенных жесткостей, стоящие в уравнении (4.31), являются диагональными. Обобщенные перемещения $\mathbf{X}_{\Gamma}$, определяемые вы-

ражением (4.32), называются *главными координатами*, для которых уравнение движения (4.31) не имеет ни инерционного, ни упругого взаимодействия. Из выражения (4.32) находим, что исходные координаты связаны с главными координатами преобразованием

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{М}}\mathbf{X}_{\Gamma}. \tag{4.34}$$

Кроме того, из выражения (4.33) получаем

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_{\text{М}}\ddot{\mathbf{X}}_{\Gamma}. \tag{4.35}$$

Учитывая данное выше определение (4.27) матрицы форм колебаний, видим, что обобщенные перемещения $\mathbf{X}_{\Gamma}$ в выражении (4.34) фигурируют как масштабные коэффициенты перед столбцами форм колебаний в матрице $\mathbf{X}_{\text{М}}$, которые вводятся для получения значений действительных перемещений $\mathbf{X}$. Таким образом, главные координаты системы со многими степенями свободы являются собственными формами колебаний.

Задачу на собственные значения (а) можно переформулировать в более ясной форме, заменив $\mathbf{X}_{\text{М}i}$ на $\mathbf{X}_{\text{М}}$ [см. выражение (4.27)]:

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_{\text{М}} = \mathbf{M}\mathbf{X}_{\text{М}}\mathbf{p}^2. \tag{ж}$$

В уравнении (ж) $\mathbf{p}^2$ — диагональная матрица со следующими значениями p_i^2 на диагонали:

$$\mathbf{p}^2 = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n^2 \end{bmatrix}. \tag{4.36}$$

Эта матрица, иногда называемая *спектральной*, будет рассматриваться как *матрица собственных значений* или *матрица характеристических значений*. Матрица $\mathbf{X}_{\text{М}}$ в уравнении (ж) умножается справа на матрицу $\mathbf{X}_{\text{М}i}$, поэтому произвольный столбец, определяющий соответствующую форму колебаний, масштабируется соответствующим собственным значением p_i^2. Умножая уравнение (ж) слева на матрицу $\mathbf{X}_{\text{М}}^{\text{т}}$ и используя выражения (4.28) и (4.29), получим

$$\mathbf{S}_{\Gamma} = \mathbf{M}_{\Gamma}\mathbf{p}^2, \tag{4.37}$$

откуда найдем

$$S_{\Gamma i} = M_{\Gamma i}p_i^2. \tag{з}$$

Таким образом, в главных координатах i-я главная жесткость равна i-й главной массе, умноженной на i-е собственное значение.

Поскольку векторы, компоненты которых определяют форму колебаний, можно умножать на произвольное постоянное число, то главные координаты не определяются единственным образом. В действительности имеется бесконечное число систем таких обобщенных перемещений, но наиболее часто выбирается такая, при которой

матрица масс преобразуется в единичную матрицу. Формулируя это условие, покажем, что постоянная $M_{\Gamma i}$ в соотношении (4.25) должна равняться единице, а именно:

$$\mathbf{X}_{\mathrm{H}i}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{H}i} = \mathbf{M}_{\Gamma i} = 1, \qquad (\text{и})$$

где

$$\mathbf{X}_{\mathrm{H}i} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}i}/C_i. \qquad (\text{к})$$

При этом условии масштабированный собственный вектор $\mathbf{X}_{\mathrm{H}i}$ называется *нормированным по отношению к матрице масс.* Скалярную величину C_i из выражения (к) определяем по формуле

$$C_i = \pm\sqrt{\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i}} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_{\mathrm{M}\,ji}\left(\sum_{k=1}^{n} M_{jk}X_{\mathrm{M}ki}\right)}. \qquad (4.38)$$

Если матрица масс диагональная, эта формула упрощается до

$$C_i = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(M_j X_{\mathrm{M}\,ji}^2)}. \qquad (4.39)$$

Когда все векторы, составляющие матрицу форм колебаний, будут указанным образом пронормированы, индекс М изменим на Н и введем обозначение $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$ вместо $\mathbf{X}_{\mathrm{M}}$. Тогда главная матрица масс, определяемая выражением (4.28), примет вид

$$\mathbf{X}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathrm{H}} = \mathbf{M}_{\Gamma} = \mathbf{I}. \qquad (4.40)$$

С учетом выражений (4.29) и (4.37) для главной матрицы жесткостей можно записать

$$\mathbf{X}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{H}} = \mathbf{S}_{\Gamma} = \mathbf{p}^2. \qquad (4.41)$$

Для i-й формы колебаний это выражение принимает следующую форму:

$$\mathbf{X}_{\mathrm{H}i}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\mathrm{H}i} = S_{\Gamma i} = p_i^2. \qquad (\text{л})$$

Таким образом, когда собственные векторы нормируются по отношению к матрице **M**, жесткости в главных координатах равны собственным значениям. Эта частная система главных координат называется *нормальными координатами.*

Для иллюстрации использования нормальных координат в уравнениях, записанных через усилия, рассмотрим три массы, закрепленные на растянутом тросе (см. рис. 4.2, *а*). Собственные векторы этой системы, полученные в примере 2 предыдущего параграфа, являются столбцами матрицы форм колебаний

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (\text{м})$$

Для того чтобы пронормировать эту матрицу по отношению к матрице $m\mathbf{I}$, из выражений (4.39) найдем

$$C_1 = \sqrt{m(1)^2 + m(\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = 2\sqrt{m};$$

$$C_2 = \sqrt{m(1)^2 + m(0)^2 + m(-1)^2} = \sqrt{2m};$$

$$C_3 = \sqrt{m(1)^2 + m(-\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = 2\sqrt{m}.$$

Разделив столбцы матрицы $\mathbf{X}_M$ на эти значения, получим

$$\mathbf{X}_H = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}. \qquad (н)$$

Матрица жесткости для этой системы имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{T}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (о)$$

Подставляя выражения (н) и (о) в (4.41), получаем матрицу

$$\mathbf{S}_\Gamma = \frac{T}{ml} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad (п)$$

у которой на диагонали располагаются значения p_1^2, p_2^2 и p_3^2 (см. ответы к задаче А.4.2.1). Разумеется, собственные значения, фигурирующие в выражении (г), были уже получены выше, поэтому преимущества преобразования матрицы жесткости к нормальным координатам здесь не очевидны. Эти преимущества станут видны при определении поведения систем, описанных в последующих параграфах.

Вместо того чтобы пользоваться уравнениями движения в форме (4.30), умножим их слева на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$ и тем самым приведем их к виду *уравнений, записанных через ускорения:*

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{X} = 0. \qquad (4.42)$$

Это уравнение можно преобразовать к главным координатам, подставив выражения (4.34) для $\mathbf{X}$ и (4.35) для $\ddot{\mathbf{X}}$. Тогда, умножив слева на матрицу $\mathbf{X}_M^{-1}$, получим

$$\ddot{\mathbf{X}}_\Gamma + \mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{X}_M\mathbf{X}_\Gamma = 0. \qquad (р)$$

Если в матрице коэффициентов уравнения (р) поместить перед $\mathbf{S}$ единичную матрицу $\mathbf{I} = (\mathbf{X}_M^{-1})^T\mathbf{X}_M^T$, то придем к соотношению

$$\mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}_M^{-1})^T\mathbf{X}_M^T\mathbf{S}\mathbf{X}_M = \mathbf{M}_\Gamma^{-1}\mathbf{S}_\Gamma = \mathbf{p}^2. \qquad (с)$$

Отсюда следует записанное в главных координатах матричное уравнение для ускорений

$$\ddot{\mathbf{X}}_\Gamma + \mathbf{p}^2\mathbf{X}_\Gamma = 0, \tag{4.43}$$

которое можно получить также, умножив слева уравнение (4.31) на матрицу $\mathbf{M}_\Gamma^{-1}$. Поскольку один и тот же результат получается с помощью различных подходов, можно обойтись без уравнения (4.42), которое требует построения матрицы $\mathbf{M}^{-1}$. Разумеется, обращение матрицы $\mathbf{M}$ не представляет труда в том случае, когда она диагональная, однако если она заполненная, то нахождение матрицы $\mathbf{M}^{-1}$ значительно усложняется.

С другой стороны, матрица $\mathbf{M}_\Gamma$ всегда является диагональной, поэтому обращение ее выполняется просто. Это обстоятельство важно при обращении матрицы форм колебаний. Формулу такого обращения получаем умножением уравнения (4.28) справа на матрицу $\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1}$ и умножением слева на матрицу $\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1}$:

$$\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_\Gamma^{-1}\mathbf{X}_\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}. \tag{4.44а}$$

Если собственные векторы нормируются по отношению к матрице $\mathbf{M}$, все главные массы будут равны единице и в результате получим

$$\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{X}_\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}. \tag{4.44б}$$

Формулы, аналогичные (4.44а) и (4.44б), можно получить из уравнения (4.29), записанного с использованием матриц жесткостей, в том числе и главных. Однако, если собственные векторы не нормируются по отношению к матрице $\mathbf{S}$, предпочтительнее использовать выражения (4.44а) и (4.44б).

Если вместо уравнений движения в усилиях использовать уравнения в перемещениях, вместо уравнения (4.30) надо взять

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} = 0. \tag{4.45}$$

Взяв выражения (4.34) для $\mathbf{X}$ и (4.35) для $\ddot{\mathbf{X}}$, можно записать это уравнение в главных координатах, для чего умножим его справа на матрицу $\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1}$, откуда получим

$$\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1}\mathbf{FM}\mathbf{X}_\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_\Gamma + \mathbf{X}_\Gamma = 0. \tag{т}$$

Если перед матрицей $\mathbf{M}$ подставить единичную матрицу $\mathbf{I} = (\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$, матрица коэффициентов в уравнении (т) примет вид

$$\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\,(\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{X}_\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_\mathbf{M} = \mathbf{F}_\Gamma\mathbf{M}_\Gamma. \tag{у}$$

В уравнении (у) соответствующая матрице $\mathbf{S}_\Gamma$ *главная матрица податливостей*

$$\mathbf{F}_\Gamma = \mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\,(\mathbf{X}_\mathbf{M}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{S}_\Gamma^{-1}. \tag{4.46}$$

Естественно, такое представление возможно только в том случае, если матрица $\mathbf{S}$ (а отсюда и $\mathbf{S}_\Gamma$) является положительно определен-

ной. Таким образом, уравнения движения в главных координатах можно записать так:

$$\mathbf{F}_{\Gamma}\mathbf{M}_{\Gamma}\ddot{\mathbf{X}}_{\Gamma} + \mathbf{X}_{\Gamma} = 0. \tag{4.47}$$

Далее, развернутую форму (ж) задачи на собственные значения заменим на следующую:

$$\mathbf{FMX}_{\mathrm{M}} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}}\lambda. \tag{ф}$$

В уравнении (ф) матрица λ собственных значений имеет диагональный вид, при котором на диагонали располагаются собственные значения λ_i:

$$\lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = (\mathbf{p}^2)^{-1}. \tag{4.48}$$

Умножая уравнение (ф) слева на матрицу $\mathbf{X}_{\mathrm{M}}^{-1}$ с учетом соотношения (у), найдем

$$\mathbf{F}_{\Gamma}\mathbf{M}_{\Gamma} = \lambda. \tag{4.49}$$

Когда матрица форм колебаний нормируется по отношению к матрице масс, главная матрица податливостей в соответствии с выражениями (4.46) и (4.49) принимает вид

$$\mathbf{X}_{\mathrm{H}}^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{H}}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}_{\Gamma} = \lambda = (\mathbf{p}^2)^{-1}. \tag{4.50}$$

Таким образом, матрица податливостей в нормальных координатах превращается в матрицу собственных значений λ, которая также равна $(\mathbf{p}^2)^{-1}$. Отсюда заключаем, что уравнение (4.43) принимает форму уравнений движения в нормальных координатах, независимо от способа получения уравнения в исходных координатах. В качестве примера использования нормальных координат в уравнениях, записанных через перемещения, вновь рассмотрим задачу о трех массах, закрепленных на предварительно растянутой нити (см. рис. 4.2, *а*). Для этой системы матрица податливостей имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{l}{4T}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{х}$$

Обращая матрицу $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$ [см. матрицу (н)] в соответствии с выражением (4.44б) и подставляя результат вместе с матрицей (х) в соотношение (4.50), получим матрицу

$$\mathbf{F}_{\Gamma} = \frac{lm}{2T}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}, \tag{ц}$$

диагональными элементами которой являются $\lambda_1 = 1/p_1^2$, $\lambda_2 = 1/p_2^2$ и $\lambda_3 = 1/p_3^2$ (см. пример 2 в п. 4.2).

Как уже говорилось в конце предыдущего параграфа, задачу на собственные значения часто решают после преобразования ее к стандартной форме с симметричной матрицей коэффициентов. При использовании такого подхода собственные векторы обычно нормируют, чтобы их длина равнялась единице. Введя обозначение $\mathbf{V}_i$ для такого нормированного собственного вектора, получим

$$\mathbf{V}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_i = 1. \qquad (\text{ч})$$

Собственный вектор, соответствующий стандартной форме [см. уравнение (4.12а)], масштабируется для того, чтобы получить вектор $\mathbf{V}_i$:

$$\mathbf{V}_i = \frac{\mathbf{X}_{Ui}}{D_i}, \qquad (\text{ш})$$

где скалярная величина

$$D_i = \pm\sqrt{\mathbf{X}_{Ui}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{Ui}} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_{Uji}^2}. \qquad (4.51)$$

При таком способе нормированная матрица $\mathbf{V}$ форм колебаний обладает следующим свойством:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \qquad (4.52)$$

и обычно называется просто *ортогональная матрица*. Преобразуя эту матрицу форм колебаний вновь к исходным координатам [см. выражение (4.12б) в п. 4.2], получим

$$\mathbf{X}_{\mathrm{H}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{V}. \qquad (4.53)$$

Чтобы доказать, что в результате такой операции получаем $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$, подставим выражение (4.53) и представлением $\mathbf{M} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}$ в уравнение (4.40), откуда следует

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}(\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{I}.$$

Таким образом видим, что собственные векторы в исходных координатах являются нормированными по отношению к матрице $\mathbf{M}$.

4.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Из уравнения (4.43) предыдущего параграфа видно, что типичной формой уравнения для свободных колебаний без демпфирования в нормальных координатах является следующая:

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + p_i^2 x_{\Gamma i} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (4.54)$$

Каждое уравнение подобного типа не связано со всеми остальными, поэтому оно будет рассматриваться как относящееся к системе

с одной степенью свободы [см. уравнение (1.1)]. Если бы для каждой нормальной координаты можно было определить начальные условия, заданные относительно перемещения $x_{0\Gamma i}$ и скорости $\dot{x}_{0\Gamma i}$ при $t = 0$, то можно было бы определить поведение системы при свободных колебаниях по i-й форме:

$$x_{\Gamma i} = x_{0\,\Gamma i} \cos p_i t + \frac{\dot{x}_0}{p_i} \sin p_i t, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{4.55}$$

Это выражение получено из решения (1.5) для системы с одной степенью свободы, колеблющейся без демпфирования.

Из выражения (4.32) получаем начальные перемещения, выраженные в нормальных координатах:

$$\mathbf{X}_{0\Gamma} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1} \mathbf{X}_0, \tag{4.56}$$

где $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{X}_{0\Gamma}$ — векторы начальных перемещений соответственно в исходных и нормальных координатах следующего вида:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \ldots \\ x_{0n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{0\Gamma} = \begin{bmatrix} x_{0\Gamma 1} \\ x_{0\Gamma 2} \\ x_{0\Gamma 3} \\ \ldots \\ x_{0\Gamma n} \end{bmatrix}. \tag{а}$$

Аналогичным образом можно записать начальные скорости системы через нормальные координаты с помощью преобразования

$$\dot{\mathbf{X}}_{0\Gamma} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1} \dot{\mathbf{X}}_0, \tag{4.57}$$

где $\dot{\mathbf{X}}_0$ и $\dot{\mathbf{X}}_{0\Gamma}$ — векторы начальных скоростей, выраженные, соответственно, через исходные и нормальные координаты. Соотношение (4.57) получаем путем дифференцирования соотношения (4.56) по времени, при этом форма каждого вектора скорости аналогична форме каждого вектора перемещения в выражениях (а).

Имея требуемые начальные условия, выраженные через нормальные координаты, можно путем повторного применения решения (4.55) определить компоненты вектора $\mathbf{X}_\Gamma = \{x_{\Gamma i}\}$ перемещений при нормальных формах колебаний системы. Полученные значения затем преобразуем вновь к исходным координатам, используя преобразование (4.34), что дает

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{Н}} \mathbf{X}_\Gamma. \tag{4.58}$$

Такая последовательность операций остается неизменной независимо от того, записаны исходные уравнения движения в усилиях или перемещениях. Однако в подходе, использующем уравнения в усилиях, существует возможность появления одной или нескольких *форм движений как абсолютно жесткого тела.* Для главной формы подобного типа собственное значение равно нулю, поэтому уравнение (4.54) принимает вид

$$\ddot{x}_{\Gamma i} = 0. \tag{4.59}$$

Интегрируя это уравнение дважды по времени, получим

$$x_{\Gamma i} = x_{0\Gamma i} + \dot{x}_{0\Gamma i} t. \qquad (4.60)$$

Уравнение (4.60) используется вместо (4.55) для того, чтобы описать поведение в нормальных координатах по форме, соответствующей движению как абсолютно жесткого тела.

Пример 1. В п. 3.5 были определены динамические перемещения двухмассовой системы при свободных колебаниях (см. рис. 3.1, *а*), при этом произвольные постоянные находились из начальных условий $x_{01} = x_{02} = 1$ и $\dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = 0$. Получим те же самые результаты с помощью метода нормальных форм колебаний.

Решение. В предположении, что $m_1 = m_2 = m$ и $k_1 = k_2 = k$, ранее были определены собственные значения системы $p_1^2 = 0{,}382k/m$; $p_2^2 = 2{,}618k/m$. Кроме того, были найдены значения отношений амплитуд $r_1 = 0{,}618$ и $r_2 = -1{,}618$. Следовательно, матрица форм колебаний имеет вид

$$\mathbf{X}_{\text{М}} = \begin{bmatrix} 0{,}618 & -1{,}618 \\ 1{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix}. \qquad (б)$$

Для того чтобы пронормировать эту матрицу по отношению к матрице $\mathbf{M} = m\mathbf{I}$, из соотношений (4.39) определим скаляры

$$C_1 = \sqrt{m\,(+0{,}618)^2 + m\,(1{,}000)^2} = 1{,}175\,\sqrt{m};$$

$$C_2 = \sqrt{m\,(-1{,}618)^2 + m\,(1{,}000)^2} = 1{,}902\,\sqrt{m}.$$

Разделив столбцы матрицы $\mathbf{X}_{\text{М}}$ на эти значения, получим

$$\mathbf{X}_{\text{Н}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0{,}526 & -0{,}851 \\ 0{,}851 & 0{,}526 \end{bmatrix}. \qquad (в)$$

Обращение матрицы $\mathbf{X}_{\text{Н}}$, необходимое для преобразования исходных данных к нормальным координатам, получаем в соответствии с выражением (4.44б):

$$\mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{\text{т}}\mathbf{M} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0{,}526 & 0{,}851 \\ -0{,}851 & 0{,}520 \end{bmatrix}. \qquad (г)$$

Начальные условия в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (д)$$

В соответствии с выражением (4.56) вектор не равных нулю начальных перемещений преобразуем в нормальных координатах следующим образом:

$$\mathbf{X}_{0\Gamma} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\mathbf{X}_0 = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 1{,}377 \\ -0{,}325 \end{bmatrix}. \qquad (е)$$

Дважды воспользовавшись выражением (4.55), получим вектор решения в нормальных координатах

$$\mathbf{X}_{\Gamma} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 1{,}377 \cos p_1 t \\ -0{,}325 \cos p_2 t \end{bmatrix}. \qquad (ж)$$

Затем с помощью обратного преобразования (4.58) приходим к выражению, определяющему поведение системы в исходных координатах:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{Н}}\mathbf{X}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0{,}724 \cos p_1 t + 0{,}276 \cos p_2 t \\ 1{,}171 \cos p_1 t - 0{,}171 \cos p_2 t \end{bmatrix}. \qquad (з)$$

Полученный результат совпадает с найденным в п. 3.5.

Пример 2. Для примера, где имело место движение как абсолютно жесткого тела, рассмотрим систему с тремя массами (см. рис. 4.1, *а*) и положим $k_1 = 0$. Кроме того, предположим, что $m_1 = m_2 = m$ и $k_2 = k_3 = k$. Как было найдено выше (см. пример 1 в п. 4.2), здесь собственные значения $p_1^2 = 0$, $p_2^2 = k/m$ и $p_3^2 =$

$= 3k/m$. Так же были получены собственные векторы, при этом матрица форм колебаний имела вид

$$\mathbf{X}_{\text{М}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(и)}$$

Предположим, что система находится в покое в тот момент, когда по первой массе ударяют таким образом, что она внезапно приобретает скорость v. Определить поведение системы, обусловленное этим ударом.

Решение. Нормируя матрицу $\mathbf{X}_{\text{М}}$ по отношению к матрице масс, получим

$$\mathbf{X}_{\text{Н}} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(к)}$$

тогда матрица, обратная $\mathbf{X}_{\text{Н}}$, будет иметь вид

$$\mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{\text{т}}\mathbf{M} = \sqrt{\frac{m}{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(л)}$$

Векторы начальных условий таковы:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(м)}$$

Преобразуя не равный нулю вектор начальных скоростей к нормальным координатам, найдем

$$\dot{\mathbf{X}}_{0\Gamma} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\dot{\mathbf{X}}_0 = v\sqrt{\frac{m}{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(н)}$$

Для описания движения системы как абсолютно жесткого тела следует использовать выражение (4.60), тогда как поведение с учетом колебательных форм движений описывается выражением (4.55). Таким образом, динамическое перемещение системы по нормальным формам колебаний можно записать в виде вектора-столбца

$$\mathbf{X}_{\Gamma} = v\sqrt{\frac{m}{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}t \\ (\sqrt{3}\sin p_2 t)/p_2 \\ (\sin p_3 t)/p_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(о)}$$

Преобразуя эти значения к исходным координатам, получим

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{Н}}\mathbf{X}_{\Gamma} = \frac{v}{6} \begin{bmatrix} 2t + (3\sin p^2 t)/p_2 + (\sin p_3 t)/p_3 \\ 2t - (2\sin p_3 t)/p_3 \\ 2t - (3\sin p_2 t)/p_2 + (\sin p_3 t)/p_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(п)}$$

В выражении (о) составляющая каждой формы движения, определяющая движение как абсолютно жесткого тела, равна $vt/3$.

Если все массы имеют одну и ту же начальную скорость v, то вектор начальных скоростей имеет вид $\dot{\mathbf{X}}_0 = \{v, v, v\}$, и тогда выражения (н), (о) и (п) принимают вид

$$\mathbf{X}_{0\Gamma} = v\sqrt{3m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{\Gamma} = v\sqrt{3m} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = vt \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(р)}$$

В этом случае движение представляет собой перенос системы как абсолютно жесткого тела без колебаний.

Пример 3. Определить поведение системы (см. рис. 4.2, *а*) при свободных колебаниях в случае внезапного приложения ко второй массе в направлении оси x постоянной во времени силы P. Предполагается, что дано: $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$.

Решение. В примере 2 из п. 4.2 была получена матрица форм колебаний

$$\mathbf{X}_{\text{М}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(с)}$$

Нормирование матрицы $\mathbf{X}_{\text{М}}$ по отношению к матрице $\mathbf{M}$ дает

$$\mathbf{X}_{\text{М}} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{\text{М}}^{-1} = \frac{\sqrt{m}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(т)}$$

Векторы начальных условий имеют вид

$$\mathbf{X}_0 = \frac{Pl}{2T} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(у)}$$

В нормальных координатах начальные перемещения принимают вид

$$\mathbf{X}_{0\text{г}} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\mathbf{X}_0 = \frac{Pl\sqrt{m}}{2T} \begin{bmatrix} 1 & + & \sqrt{2} \\ & 0 & \\ 1 & - & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \qquad \text{(ф)}$$

Пользуясь выражением (4.55), найдем реакции системы по нормальным формам

$$\mathbf{X}_{\text{г}} = \frac{Pl\sqrt{m}}{2T} \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})\cos p_1 t \\ 0 \\ (1-\sqrt{2})\cos p_3 t \end{bmatrix}. \qquad \text{(х)}$$

Затем определим искомые величины в исходных координатах

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{Н}}\mathbf{X}_{\text{г}} = \frac{Pl}{4T} \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})\cos p_1 t + (1-\sqrt{2})\cos p_3 t \\ (\sqrt{2}+2)\cos p_1 t - (\sqrt{2}-2)\cos p_3 t \\ (1+\sqrt{2})\cos p_1 t + (1-\sqrt{2})\cos p_3 t \end{bmatrix}. \qquad \text{(ц)}$$

Здесь отсутствует антисимметричная вторая форма, и в выражении (ц) фигурируют только симметричные первая и третья формы колебаний. Следовательно, массы m_1 и m_3 колеблются с одной и той же формой.

ЗАДАЧИ

4.4.1. Определить поведение системы (см. рис. 4.1, *а*) при свободных колебаниях, если к третьей массе в направлении оси внезапно прикладывается постоянная во времени сила P. Если здесь взять $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и $k_1 = k_2 = k_3 = k$,

собственные значения и собственные векторы будут равны этим величинам, определенным в примере 1 в п. 4.2 для первого случая.

Ответ: $x_1 = P\,(1{,}220\cos p_1 t - 0{,}280\cos p_2 t + 0{,}060\cos p_3 t)/(4k)$.

4.4.2. Для трехмассовой системы, рассмотренной в задаче 4.2.2, определить неустановившееся поведение при свободных колебаниях, если заданы начальные условия $\mathbf{X}_0 = \{0;\ 0;\ 0\}$; $\dot{\mathbf{X}}_0 = \{v;\ 0;\ -v\}$.

Ответ: $x_1 = v\,(\sin p_2 t)/p_2$.

4.4.3. Для рассмотренных в задаче 4.3.3 маятников, соединенных пружинами, определить неустановившееся поведение при свободных колебаниях, если заданы начальные условия $\theta_0 = \{0;\ \varphi;\ 0\}$, $\dot{\theta}_0 = \{0;\ 0;\ 0\}$.

Ответ: $\theta_1 = \varphi\,(\cos p_1 t - \cos p_3 t)/3$.

4.4.4. Определить неустановившееся поведение вращающейся системы из задачи 4.2.4, если заданы начальные условия $\mathbf{\Phi}_0 = \{0;\ 0;\ 0\}$; $\dot{\mathbf{\Phi}}_0 = \{\dot{\theta};\ \dot{\theta};\ \dot{\theta}\}$.

Ответ: $\varphi_1 = \theta\,[0{,}543\,(\sin p_1 t)/p_1 + 0{,}349\,(\sin p_2 t)/p_2 + 0{,}108\,(\sin p_3 t)/p_3]$.

4.4.5. Определить неустановившуюся реакцию системы с четырьмя массами, рассмотренную в задаче 4.2.5, при начальных условиях $\mathbf{X}_0 = \{0;\ 0;\ 0;\ 0\}$ и $\dot{\mathbf{X}}_0 = \{v;\ 0;\ 0;\ v\}$.

Ответ: $x_1 = v\,[t + (\sin p_3 t)/p_3]/2$.

4.4.6. Предположим, что невесомая балка, рассмотренная в задаче 4.2.6, вращаясь с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta}$ относительно левой опоры, внезапно зацепляется за правую опору. Определить неустановившееся поведение системы при указанном начальном условии в виде начальной скорости.

Ответ: $y_1 = \dot{\theta} l\,[1{,}707\,(\sin p_1 t)/p_1 - (\sin p_2 t)/p_2 + 0{,}293\,(\sin p_3 t)/p_3]/4$.

4.4.7. Для тройного маятника, рассмотренного в задаче 4.2.7, взять начальные условия в виде $\mathbf{X}_0 = \{\Delta;\ \Delta;\ \Delta\}$, $\dot{\mathbf{X}}_0 = \{0;\ 0;\ 0\}$ и определить соответствующие динамические перемещения.

Ответ. $x_1 = \Delta\,(0{,}334\cos p_1 t + 0{,}314\cos p_2 t + 0{,}352\cos p_3 t)$.

4.4.8. Определить неустановившееся поведение рассмотренного в задаче 4.2.8 каркаса трехэтажного дома при внезапном приложении к перекрытию третьего этажа постоянной во времени нагрузки $Q_3 = P$.

Ответ. $x_1 = Ph^3\,(2{,}611\cos p_1 t - 0{,}754\cos p_2 t + 0{,}142\cos p_3 t)/(144EI)$.

4.4.9. Пусть масса (см. задачу 4.2.9) имеет начальную скорость v_x в направлении оси x, а остальные компоненты начальной скорости и перемещения равны нулю. Определить характер результирующего движения системы.

Ответ: $x_1 = v_x\,[0{,}708\,(\sin p_1 t)/p_1 + 0{,}292\,(\sin p_3 t)/p_3]$.

4.4.10. Предположим, что постоянная во времени сила P приложена в направлении оси y в точке C рамы, рассмотренной в задаче 4.2.10. Определить реакцию системы при внезапном приложении этой силы.

Ответ: $x_1 = Pl^3\,(26{,}40\cos p_1 t - 2{,}381\cos p_2 t - 0{,}021\cos p_3 t)/(48EI)$.

4.4.11. Определить динамические перемещения системы, рассмотренной в задаче 4.2.11, при начальных условиях $\mathbf{Y}_0 = \{0;\ 0;\ 0\}$; $\dot{\mathbf{Y}}_0 = \{v;\ 2v;\ v\}$.

Ответ: $y_1 = v\,[4t - (\sin p_3 t)/p_3]/3$.

4.4.12. Для системы, рассмотренной в задаче 4.2.12, определить ее динамические перемещения при начальных условиях $y_{01} = \Delta$; $\theta_{01} = \theta_{02} = 0$; $\dot{y}_{01} = 0$; $\dot{\theta}_{01} = \dot{\theta}_{02} = 0$, если задано $l = 0{,}915$ м.

Ответ: $y_1 = \Delta\,(1{,}367\cos p_1 t - 0{,}367\cos p_3 t)$.

4.5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНИХ СИЛ

Рассмотрим теперь случай системы со многими степенями свободы, к которой приложены внешние силы, соответствующие координатам перемещения. Матричная форма уравнений движения в усилиях имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q}, \tag{4.61}$$

где через $\mathbf{Q}$ обозначена следующая матрица-столбец (или вектор-столбец) приложенных к системе изменяющихся со временем сил:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \dots\dots \\ F_n(t) \end{bmatrix}. \qquad \text{(а)}$$

Умножая слева обе части уравнения (4.61) на матрицу $\mathbf{X}_{\text{М}}^{\text{т}}$ и используя представления (4.34) и (4.35), преобразуем это уравнение к главным координатам

$$\mathbf{X}_{\text{М}}^{\text{т}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\text{М}}\ddot{\mathbf{X}}_{\text{Г}} + \mathbf{X}_{\text{М}}^{\text{т}}\mathbf{S}\mathbf{X}_{\text{М}}\mathbf{X}_{\text{Г}} = \mathbf{X}_{\text{М}}^{\text{т}}\mathbf{Q}.$$

Это уравнение можно переписать в следующей форме:

$$\mathbf{M}_{\text{Г}}\ddot{\mathbf{X}}_{\text{Г}} + \mathbf{S}_{\text{Г}}\mathbf{X}_{\text{Г}} = \mathbf{Q}_{\text{Г}}, \qquad (4.62)$$

где матрицы $\mathbf{M}_{\text{Г}}$ и $\mathbf{S}_{\text{Г}}$ определяются, соответственно, выражениями (4.28) и (4.29). Через $\mathbf{Q}_{\text{Г}}$ в уравнении (4.62) обозначен вектор-столбец внешних сил, записанный в главных координатах:

$$\mathbf{Q}_{\text{Г}} = \mathbf{X}_{\text{М}}^{\text{т}}\mathbf{Q}. \qquad (4.63\text{а})$$

В развернутой форме произведение этих матриц имеет вид

$$\begin{bmatrix} Q_{\text{Г}1} \\ Q_{\text{Г}2} \\ Q_{\text{Г}3} \\ \dots\dots \\ Q_{\text{Г}n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\text{М}11}Q_1 + X_{\text{М}12}Q_2 + X_{\text{М}31}Q_3 + \dots + X_{\text{М}n1}Q_n \\ X_{\text{М}12}Q_2 + X_{\text{М}22}Q_2 + X_{\text{М}32}Q_3 + \dots + X_{\text{М}n2}Q_n \\ X_{\text{М}13}Q_1 + X_{\text{М}23}Q_2 + X_{\text{М}33}Q_3 + \dots + X_{\text{М}n3}Q_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{\text{М}1n}Q_1 + X_{\text{М}2n}Q_2 + X_{\text{М}4n}Q_3 + \dots + X_{\text{М}nn}Q_n \end{bmatrix}. \qquad (4.63\text{б})$$

Если матрица форм колебаний нормируется по отношению к матрице масс, выражение (4.63а) принимает вид

$$\mathbf{Q}_{\text{Г}} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{\text{т}}\mathbf{Q}, \qquad (4.64)$$

а i-е уравнение движения в нормальных координатах запишем в следующей форме:

$$\ddot{x}_{\text{Г}i} + p_i^2 x_{\text{Г}i} = q_{\text{Г}i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \qquad (4.65)$$

где i-я *нормальная сила* имеет вид

$$q_{\text{Г}i} = X_{\text{Н}1i}Q_1 + X_{\text{Н}2i}Q_2 + X_{\text{Н}3i}Q_3 + \dots + X_{\text{Н}ni}Q_n. \qquad (4.66)$$

Определяемая выражением (4.66) величина $q_{\text{Г}i}$ обозначает i-ю нормальную координату приложенной силы. Она вводится для того, чтобы сделать равным единице ускорение обобщенной единичной массы.

Каждое из n уравнений (4.65) является несвязанным со всеми остальными и, как можно видеть, имеет такую же форму, как и в случае системы с одной степенью свободы. Поэтому динамические

перемещения системы на внешнее воздействие по i-й нормальной координате можно вычислить, используя интеграл Дюамеля:

$$x_{\Gamma i} = \frac{1}{p_i} \int_0^t q_{\Gamma i} \sin p_i (t - t')\, dt'. \qquad (4.67)$$

Это выражение записано в соответствии с выражением (1.64) из п. 1.12, полученным для системы с одной степенью свободы без демпфирования, в начальный момент находившейся в покое. Это выражение используется для определения компонентов вектора $\mathbf{X}_\Gamma = \{x_{\Gamma i}\}$ перемещений по нормальным формам. Затем, с помощью выражения (4.58) из предыдущего параграфа полученные значения преобразуются к исходным координатам.

Для нормальной формы, соответствующей движению как абсолютно жесткого тела, собственное значение p_i^2 равно нулю, поэтому уравнения (4.65) принимают вид

$$\ddot{x}_{\Gamma i} = q_{\Gamma i}. \qquad (4.68)$$

В этом случае динамическое перемещение по соответствующей форме колебаний (для системы, находящейся в покое в начальный момент времени) имеет вид

$$x_{\Gamma i} = \int_0^t \int_0^{t'} q_{\Gamma i}\, dt''\, dt'. \qquad (4.69)$$

Выражение (4.69) используется вместо (4.67) в том случае, когда имеется форма движения системы как абсолютно жесткого тела.

Суммируя сказанное, отметим, что для определения динамического поведения системы со многими степенями свободы при внешних воздействиях сначала следует с помощью выражения (4.64) преобразовать функции, описывающие эти воздействия, к нормальным координатам, затем с помощью интегрального представления (4.67) определить динамические перемещения системы по каждой форме колебаний, при этом для каждой формы, соответствующей движению как абсолютно жесткого тела, такие динамические перемещения системы определяются из выражения (4.69). И, наконец, с помощью обратного преобразования (4.58) находятся значения действительных координат перемещений. Если примененные внешние воздействия не соответствуют координатам перемещения, то в качестве предварительного шага можно подсчитать соответствующие *эквивалентные нагрузки* (см. пример 3 в конце данного параграфа).

Прежде чем идти дальше, проанализируем влияние силы $Q_j = F_j(t)$, соответствующей j-й координате перемещений, на возникновение динамического перемещения по k-й координате. В соответствии с выражением (4.66) i-я нормальная нагрузка под действием силы

$$q_{\Gamma i} = X_{\mathrm{H}ji} Q_j. \qquad (б)$$

Если в системе имеются только колебательные формы движения, то согласно выражению (4.67) динамические перемещения по i-й форме

$$x_{\Gamma i} = \frac{X_{\text{Н}ji}}{p_i} \int_0^t Q_j \sin p_i (t - t')\, dt'. \qquad \text{(в)}$$

Преобразуя найденное значение перемещений с помощью выражения (4.58) обратно к исходным координатам, получаем выражение для динамических перемещений системы по k-й координате перемещения

$$(x_k)_{Q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{X_{\text{Н}ki} X_{\text{Н}ji}}{p_i} \int_0^t Q_j \sin p_i (t - t')\, dt' \right]. \qquad \text{(г)}$$

Аналогичным образом можно записать выражение для динамических перемещений системы по j-й координате перемещения, обусловленной нагрузкой $Q_k = F_k(t)$, соответствующей k-й координате перемещения:

$$(x_j)_{Q_k} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{X_{\text{Н}ji} X_{\text{Н}ki}}{p_i} \int_0^t Q_k \sin p_i (t - t')\, dt' \right]. \qquad \text{(д)}$$

Если $Q_j = Q_k = F(t)$, то правые части выражений (г) и (д) равны между собой, и тогда для левых частей можно записать

$$(x_k)_{Q_j} = (x_j)_{Q_k} \quad \text{при} \quad Q_j = Q_k = F(t). \qquad (4.70)$$

Равенство (4.70) представляет собой *теорему взаимности для динамических нагрузок* *, аналогичную теореме взаимности Максвелла для статических нагрузок [5]. В нем говорится, что динамическое перемещение по k-й координате перемещения, обусловленное изменяющейся во времени по произвольному закону нагрузкой, соответствующей j-й координате, равно перемещению по j-й координате, обусловленному той же самой нагрузкой, соответствующей k-й координате. Теорема справедлива для систем, обладающих формами движения как абсолютно жесткого тела, так и с колебательными формами движения, что можно видеть, подставив в интегральное соотношение (в) выражение (4.69) вместо (4.67).

Если колеблющуюся систему исследовать, используя вместо уравнений в усилиях уравнения в перемещениях, то уравнение (4.61) примет вид

$$\mathbf{FM\ddot{X}} + \mathbf{X} = \mathbf{FQ} = \mathbf{\Delta}. \qquad (4.71)$$

В этом уравнении через $\mathbf{\Delta}$ обозначен вектор изменяющихся во времени перемещений, определяемых из статического рассмотрения. Так как этот вектор содержит функции времени, то он является более общим, чем вектор $\mathbf{\Delta}_{\text{ст}}$, определяемый выражением (3.37) в п. 3.6. Последнее обозначение относится к вектору с постоянными

* Это одна из теорем, приведенных в кн. **Rayleigh J. W. S.** Theory of sound, с. 151, цитированной в п. 1.4.

компонентами, которые представляют собой статические перемещения, обусловленные максимальными значениями гармонической возмущающей функции. Вектор-столбец в уравнении (4.71) может иметь компоненты, обусловленные действиями возмущений, которые отличаются от усилий, соответствующих координатам перемещений. Случаи, при которых изменяющиеся во времени перемещения обусловлены движениями опор, обсуждены в следующем параграфе.

Уравнение (4.71) преобразуется к нормальным координатам путем подстановки выражений (4.34) и (4.35) для вектор-столбцов соответственно $\mathbf{X}$ и $\ddot{\mathbf{X}}$, при этом вектор-столбец $\mathbf{X}_{\text{М}}$ нормируется, после чего получается вектор-столбец $\mathbf{X}_{\text{Н}}$. Тогда умножением слева на вектор-столбец $\mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}$ получаем

$$\mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\text{Н}}\ddot{\mathbf{X}}_{\Gamma} + \mathbf{X}_{\Gamma} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{Q} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\boldsymbol{\Delta}$$

или

$$\mathbf{F}_{\Gamma}\ddot{\mathbf{X}}_{\Gamma} + \mathbf{X}_{\Gamma} = \boldsymbol{\Delta}_{\Gamma}, \tag{4.72}$$

где $\mathbf{F}_{\Gamma}$ определяется выражением (4.50), а вектор-столбец $\boldsymbol{\Delta}_{\Gamma}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\Delta}_{\Gamma} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\boldsymbol{\Delta}. \tag{4.73}$$

Каждое из n уравнений (4.72) имеет форму

$$\lambda_i\ddot{x}_{\Gamma i} + x_{\Gamma i} = \delta_{\Gamma i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{4.74}$$

где $\delta_{\Gamma i}$ — изменяющееся во времени перемещение по i-й нормальной координате.

Если обе части уравнения (4.72) умножить слева на матрицу $\mathbf{S}_{\Gamma} = \mathbf{F}_{\Gamma}^{-1}$, то в матричной форме уравнение примет вид

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\Gamma} + \mathbf{S}_{\Gamma}\mathbf{X} = \mathbf{S}_{\Gamma}\boldsymbol{\Delta}_{\Gamma}, \tag{4.75}$$

при этом каждое из n уравнений имеет форму

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + p_i^2 x_{\Gamma i} = q_{\Gamma\delta i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{4.76}$$

где

$$q_{\Gamma\delta i} = p_i^2\delta_{\Gamma i}. \tag{4.77}$$

Величина $q_{\Gamma\delta i}$, определяемая выражением (4.77), представляет собой *эквивалентную нормальную нагрузку*, обусловленную изменяющимся во времени перемещением $\delta_{\Gamma i}$. Эта величина заменяет $q_{\Gamma i}$ при использовании уравнений движения в перемещениях.

Динамические перемещения по i-й нормальной форме движения на действие эквивалентной нагрузки $q_{\Gamma\delta i}$ можно определить, также воспользовавшись интегралом Дюамеля, что в этом случае дает

$$x_{\Gamma i} = \frac{1}{p_i}\int_0^t q_{\Gamma\delta i}\sin p_i(t-t')\,dt' = p_i\int_0^t \delta_{\Gamma i}\sin p_i(t-t')\,dt'. \tag{4.78}$$

Это выражение совпадает с выражением (1.70). К величинам, найденным с помощью выражений (4.78), затем применяется преобразование (4.58) к исходным координатам.

Теорема взаимности для динамических перемещений[6] может быть сформулирована точно так же, как было сделано для динамических нагрузок [см. соотношение (4.70)], а именно:

$$(x_k)_{\Delta j} = (x_j)_{\Delta k}, \quad \Delta_j = \Delta_k = f(t). \tag{4.79}$$

Из этого соотношения следует, что динамическое перемещение по k-й координате перемещения, обусловленное изменяющимся во времени перемещением по j-й координате, равно перемещению по j-й координате, обусловленному таким перемещением по k-й координате.

Пример 1. Вновь рассмотрим показанную на рис. 3.1, *а* двухмассовую систему, для которой в примере 1 предыдущего параграфа были определены динамические перемещения на заданные начальные условия. Предположим, что к первой массе приложена нагрузка в виде ступенчатой функции $Q_1 = P$. Определить динамические перемещения системы при этой возмущающей нагрузке, считая, что в начальный момент времени система находится в покое.

Решение. В этом простом случае вектор внешних нагрузок равен $\mathbf{Q} = \{P; 0\}$. Преобразуем этот вектор к нормальным координатам, воспользовавшись для этого выражением (4.64):

$$\mathbf{Q}_\Gamma = \mathbf{X}_\text{Н}^\text{т}\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0{,}526 & 0{,}851 \\ -0{,}851 & 0{,}526 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{P}{\sqrt{m}}. \tag{е}$$

Применив интеграл Дюамеля к ступенчатой функции [см. выражение (1.66)], получим форму перемещений по i-й нормальной координате

$$x_{\Gamma i} = q_{\Gamma i}\left(1 - \cos p_i t\right)/p_i^2. \tag{ж}$$

Таким образом, вектор перемещений по нормальным формам имеет вид

$$\mathbf{X}_\Gamma = \frac{P}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0{,}526\,(1 - \cos p_1 t)/p_1^2 \\ -0{,}851\,(1 - \cos p_2 t)/p_2^2 \end{bmatrix}. \tag{з}$$

Подстановка $p_1^2 = 0{,}382k/m$ и $p_2^2 = 2{,}618k/m$ в выражение (з) дает

$$\mathbf{X}_\Gamma = \frac{P\sqrt{m}}{k}\begin{bmatrix} 1{,}377\,(1 - \cos p_1 t) \\ -0{,}325\,(1 - \cos p_2 t) \end{bmatrix}. \tag{и}$$

Преобразуя согласно (4.58) полученное решение к исходным координатам, найдем

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_\text{Н}\mathbf{X}_\Gamma = \frac{P}{k}\begin{bmatrix} 1 - 0{,}724\cos p_1 t - 0{,}276\cos p_2 t \\ 1 - 1{,}171\cos p_1 t + 0{,}171\cos p_2 t \end{bmatrix}. \tag{к}$$

Из рассмотрения этих результатов видно, что массы совершают колебания относительно точек с координатами $(x_1)_\text{ст} = (x_2)_\text{ст} = P/k$, соответствующими перемещениям при статическом приложении нагрузки.

Таким путем можно определить динамические перемещения при действии нагрузки в виде ступенчатой функции $Q_2 = P$, приложенной ко второй массе, что в этом случае дает

$$\mathbf{X} = \frac{P}{k}\begin{bmatrix} 1 - 1{,}171\cos p_1 t + 0{,}171\cos p_2 t \\ 2 - 1{,}895\cos p_1 t - 0{,}105\cos p_2 t \end{bmatrix}. \tag{л}$$

Из выражения (л) видно, что первая масса колеблется около точки с координатой $(x_1)_\text{ст} = P/k$, вторая масса — около точки с координатой $(x_2)_\text{ст} = 2P/k$, т. е. около точек, соответствующих перемещениям при статическом приложении нагрузки. Из сравнения выражений (к) и (л) видно, что динамические перемещения массы m_2 при приложении к массе m_1 нагрузки в виде ступенчатой функции $Q_1 = k$ равны перемещению массы m_1, обусловленной действием приложенной к массе m_2 нагрузки

в виде ступенчатой функции $Q_2 = P$. Сказанное подтверждает справедливость теоремы взаимности [см. соотношение (4.70)].

Пример 2. Предположим, что на полуопределенную систему из примера 2 предыдущего параграфа действует нагрузка в виде линейной функции $Q_1 = Rt$, приложенная ко второй массе. Величина R характеризует скорость изменения силы во времени. Определить реакцию трехмассовой системы на указанное возмущение.

Решение. Умножая вектор-столбец приложенных сил $\mathbf{Q} = \{0; Rt; 0\}$ слева на матрицу $\mathbf{X}_{\text{H}}^{\text{T}}$ для данной системы, преобразуем этот вектор к нормальным координатам

$$\mathbf{Q}_{\Gamma} = \mathbf{X}_{\text{H}}^{\text{T}}\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ Rt\\ 0\end{bmatrix} = \frac{Rt}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ -2\end{bmatrix}. \qquad \text{(м)}$$

Перемещение по первой нормальной форме, т. е. движение как абсолютно жесткого тела, определяем из выражения (4.69):

$$x_{\Gamma 1} = Rt^3\sqrt{2}/(6\sqrt{6m}). \qquad \text{(н)}$$

Поскольку вторая форма колебаний является симметричной, она не будет возникать при антисимметричном нагружении. Однако в соответствии с выражением (4.67) здесь будут возбуждаться колебания третьей формы. Подставляя в интеграл Дюамеля заданную линейную функцию, получим решение

$$x_{\Gamma_3} = -2R\left(t - \frac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)\Big/[p_3^2\sqrt{6m}], \qquad \text{(о)}$$

что следует из примера 1 в п. 1.12. Используя ранее найденное значение $p_3^2 = 3k/m$, перемещение системы по нормальным формам можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{X}_{\Gamma} = \frac{R}{6\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} t^3\sqrt{2}\\ 0\\ \dfrac{-4m}{k}\left(t - \dfrac{1}{R_3}\sin p_3 t\right)\end{bmatrix}. \qquad \text{(п)}$$

Преобразуя этот вектор-столбец перемещений к исходным координатам, найдем

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{H}}\mathbf{X}_{\Gamma} = \frac{R}{18m}\begin{bmatrix} t^3 - \dfrac{2m}{k}\left(t - \dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)\\ t^3 + \dfrac{6m}{k}\left(t - \dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)\\ t^3 - \dfrac{2m}{k}\left(t - \dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)\end{bmatrix}. \qquad \text{(р)}$$

Фигурирующая в каждой из форм колебаний, входящих в матрицу-столбец (р), составляющая, которая определяет движение как абсолютно жесткого тела, равна $Rt^3/18$; в то же время среди главных форм движения только третья главная форма соответствует колебательным движениям.

Пример 3. Вновь возвращаясь к показанной на рис. 4.2, *а* системе, предположим, что заданы такие же значения масс и длин, как и в примере 3 предыдущего параграфа. Предположим также, что в середине пролета между первой и второй массами к тросу приложена действующая в направлении x возмущающая сила в виде гармонической функции $P\sin\omega t$. Требуется определить результирующие установившиеся вынужденные колебания этой системы, применяя как подход, основанный на уравнении движения в усилиях, так и метод, использующий уравнения движения в перемещениях.

Решение. Проверкой убеждаемся, что эквивалентные силы, приложенные к массам, $\mathbf{Q} = \{P(\sin\omega t)/2; P(\sin\omega t)/2; 0\}$. Умножая этот вектор на матрицу

$\mathbf{X}_{\text{н}}^{\text{т}}$, получаем следующие выражения для функций возмущающих сил в нормальных координатах:

$$\mathbf{Q}_{\text{г}} = \mathbf{X}_{\text{н}}\mathbf{Q} = \frac{P\sin\omega t}{4\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{P\sin\omega t}{4\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad \text{(с)}$$

Опуская промежуточные выкладки, перемещения по нормальным формам можно записать в виде

$$\mathbf{X}_{\text{г}} = \frac{P\sin\omega t}{4\sqrt{m}}\begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})\,\beta_1/p_1^2 \\ \sqrt{2}\,\beta_2/p_2^2 \\ (1-\sqrt{2})\,\beta_3/p_3^2 \end{bmatrix}, \quad \text{(т)}$$

где коэффициент усиления для i-й нормальной формы

$$\beta_i = \frac{1}{1-\omega^2/p_i^2}, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \quad \text{(у)}$$

Подставляя в выражение (т) значения $1/p_1^2 = (2+\sqrt{2})\,lm/(2T)$, $1/p_2^2 = lm/(2T)$ и $1/p_3^2 = (2-\sqrt{2})\,lm/(2T)$, перепишем это выражение в следующей форме:

$$\mathbf{X}_{\text{г}} = \frac{Pl\sqrt{m}\sin\omega t}{8T}\begin{bmatrix} (4+3\sqrt{2})\,\beta_1 \\ \sqrt{2}\beta_2 \\ (4-3\sqrt{2})\,\beta_3 \end{bmatrix}. \quad \text{(ф)}$$

Тогда перемещение системы в исходных координатах будет иметь форму

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{н}}\mathbf{X}_{\text{г}} = \frac{Pl\sin\omega t}{16T}\begin{bmatrix} (4+3\sqrt{2})\,\beta_1 + 2\beta_2 + (4-3\sqrt{2})\,\beta_3 \\ 2\,(3+2\sqrt{2})\,\beta_1 + 2\,(3-2\sqrt{2})\,\beta_3 \\ (4+3\sqrt{2})\,\beta_1 - 2\beta_2 + (4-3\sqrt{2})\,\beta_3 \end{bmatrix}. \quad \text{(х)}$$

Для того чтобы воспользоваться методом, в котором для решения этой задачи применяются уравнения движения в перемещениях, запишем сначала вектор перемещения Δ в виде следующего произведения:

$$\Delta = \mathbf{F}\mathbf{Q} = \frac{Pl\sin\omega t}{8t}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Pl\sin\omega t}{8T}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad \text{(ц)}$$

Эти перемещения с помощью выражения (4.73) преобразуем к нормальным координатам вида

$$\mathbf{Q}_{\text{г}} = \mathbf{X}_{\text{н}}^{-1}\Delta =$$

$$= \frac{Pl\sqrt{m}^{-1}\sin\omega t}{16T}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{Pl\sqrt{m}\sin\omega t}{8T}\begin{bmatrix} 4+3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 4-3\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad \text{(ч)}$$

Видно, что этот вектор описывает те же самые перемещения по нормальным формам, что и полученные в выражении (ф). Окончательный результат будет совпадать с выражением (х).

ЗАДАЧИ

4.5.1. Для трехмассовой системы (см. рис. 4.1, *а*) дано $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Определить динамические перемещения этой системы при действии приложенной к третьей массе возмущающей силы в виде гармонической функции $Q_3 = P\cos\omega t$.

Ответ: $x_1 = (P\cos\omega t)\,(0{,}242\beta_1/p_1^2 - 0{,}436\beta_2/p_2^2 + 0{,}194\beta_3/p_3^2)/m$.

4.5.2. Определить динамические перемещения трехмассовой системы, рассмотренной в задаче 4.2.2, при действии приложенной к первой массе силы в виде ступенчатой функции $Q_1 = P$.

Ответ: $x_1 = P\,[6 - (2 + \sqrt{2})\cos p_1 t - 2\cos p_2 t - (2 - \sqrt{2})\cos p_3 t]/(8k)$.

4.5.3. Предположим, что к центру тяжести центрального маятника (см. задачу 4.2.3) приложена в горизонтальном направлении и направо изменяющаяся по линейному закону сила Rt. Определить динамические перемещения этой системы при малых углах поворотов.

Ответ: $\theta = \dfrac{R}{3ml}\left[\left(t - \dfrac{1}{p_1}\sin p_1 t\right)\Big/ p_1^2 - \left(t - \dfrac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)\Big/ p_3^2\right]$.

4.5.4. Для системы, рассмотренной в задаче 4.2.4, определить динамические перемещения при действии крутящего момента $T\sin\omega t$, приложенного в середине пролета между вторым и третьим дисками.

Ответ: $\varphi_1 = (T\sin\omega t)\,(0{,}218\beta_1/p_1^2 - 0{,}097\beta_2/p_2^2 - 0{,}121\beta_3/p_3^2)/I$.

4.5.5. Определить динамические перемещения четырехмассовой системы, рассмотренной в задаче 4.2.5, при действии сил в виде ступенчатых функций $Q_1 = Q_2 = P$, приложенных к первой и четвертой массам.

Ответ: $x_1 = P\,[(t^2 + (1 - \cos p_3 t)\,m/k]\,4m$.

4.5.6. Предполагая, что к установленным на балке массам m_1 и m_3 (см. задачу 4.2.6) приложены силы в виде линейных функций $Q_1 = Q_3 = Rt$, определить динамические перемещения системы.

Ответ:

$$y_1 = \frac{R}{2m}\left[\left(t - \frac{1}{p_1}\sin p_1 t\right)\Big/ p_1^2 + \left(t - \frac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)\Big/ p_3^2\right].$$

4.5.7. На тройной маятник (см. задачу 4.2.7) действует в направлении оси x сила $P\cos\omega t$, приложенная в середине пролета между первой и второй массами. Определить установившиеся динамические перемещения системы.

Ответ: $x_1 = (P\cos\omega t)\,(0{,}077\beta_1/p_1^2 + 0{,}290\beta_2/p_2^2 + 0{,}132\beta_3/p_3^2)/m$.

4.5.8. Исследовать поведение каркаса трехэтажного здания (см. задачу 4.2.8) при действии одновременно приложенных к каждому междуэтажному перекрытию нагрузок в виде ступенчатых функций $Q_1 = Q_2 = Q_3 = P$.

Ответ: $x_1 = Ph^3\,(5{,}977 - 4{,}820\cos p_1 t - 0{,}821\cos p_2 t - 0{,}336\cos p_3 t)/(144EI)$.

4.5.9. Определить динамические перемещения подвешенной на пружинах массы (см. задачу 4.2.9) при действии изменяющейся по линейному закону силы Rt, приложенной к этой массе, направленной по оси z.

Ответ:

$$z_1 = \frac{R}{p_2^2 m}\left(t - \frac{1}{p_2}\sin p_2 t\right).$$

4.5.10. Исследовать установившиеся динамические перемещения рамы, рассмотренной в задаче 4.2.10, при действии силы $P\sin\omega t$, приложенной в точке B и направленной по оси y.

Ответ: $x_1 = (P\sin\omega t)\,(0{,}095\beta_1/p_1^2 - 0{,}146\beta_2/p_2^2 + 0{,}052\beta_3/p_3^2)/m$.

4.5.11. Пусть на систему, рассмотренную в задаче 4.2.11, действуют в направлении оси y приложенные к первой и третьей массам силы в виде линейных функций $Q_1 = Q_3 = Rt$. Определить динамические перемещения системы.

Ответ:

$$y_1 = \frac{R}{9m}\left[t^3 + 3\left(t - \frac{1}{p_3}\sin p_3 t\right)\Big/ p_3^2\right].$$

4.5.12. Для системы, рассмотренной в задаче 4.2.12, найти динамические перемещения при действии силы в виде ступенчатой функции P, приложенной в направлении оси y к центру тяжести правого стержня; принять $l = 0{,}915$ м.

Ответ: $y_1 = P\,(0{,}0379 - 0{,}0631\cos p_1 t + 0{,}0252\cos p_3 t)/k$.

4.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ЗАДАННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ОПОР

Во многих случаях, обсуждавшихся выше, исследовались такие системы со многими степенями свободы, поведение которых было обусловлено не действием возмущающих сил, а движением опор. Например, если перемещения (см. рис. 4.1, *а*) основания в направлении оси x можно описать функцией

$$x_{\text{осн}} = F_{\text{осн}}(t), \tag{а}$$

то уравнение движения в усилиях примет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X}^* = 0, \tag{б}$$

где вектор-столбец $\mathbf{X}^*$ характеризует перемещения сосредоточенных масс относительно основания

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X} - \mathbf{1}x_{\text{осн}}. \tag{в}$$

В выражении (в) обозначение $\mathbf{1}$ используется для представления вектора с равными единице компонентами, который указывает на то, что перемещение $x_{\text{осн}}$ берется n раз. Подобный прием использования перемещений основания аналогичен подходу, который применялся выше для систем с одной или двумя степенями свободы [см., например, уравнение (к) в п. 1.6]. Однако более общий подход состоит в том, чтобы записать уравнения движения в эквивалентной форме

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{\text{осн}}x_{\text{осн}} = 0, \tag{г}$$

где

$$\mathbf{S}_{\text{осн}} = -\mathbf{S}\mathbf{1}. \tag{д}$$

Через $\mathbf{S}_{\text{осн}}$ обозначен вектор-столбец коэффициентов влияния жесткости, которые представляют собой соответствующие свободным координатам перемещения * дополнительные усилия, возникающие при задании единичного перемещения $x_{\text{осн}}$. Подобные дополнительные усилия можно определить непосредственно из рассмотрения статического состояния системы при заданном перемещении основания $x_{\text{осн}} = 1$, но в данном случае их можно вычислить с помощью выражения (д), из которого видно, что дополнительные усилия равны суммам элементов строк матрицы S, взятым со знаком минус.

---

* Чтобы в данном параграфе избежать двусмысленности в используемой терминологии, здесь применяется термин «свободные координаты перемещения» в отличие от координат перемещения, соответствующих свободному и «навязанному» движениям. Последний тип рассматривается как стесненное или связанное движение.

Представим уравнение (г) в форме (4.61), перенеся произведение $\mathbf{S}_{\text{осн}}x_{\text{осн}}$ в правую часть уравнения и оставив без изменения знак. Тогда получим

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q}_{\text{осн}}, \tag{4.80}$$

где

$$\mathbf{Q}_{\text{осн}} = -\mathbf{S}_{\text{осн}}x_{\text{осн}} = \mathbf{S}\,\mathbf{1}x_{\text{осн}}. \tag{4.81}$$

Компонентами вектора $\mathbf{Q}_{\text{осн}}$ являются эквивалентные нагрузки, соответствующие свободным координатам перемещений, возникающих при движениях основания. Подобные эквивалентные нагрузки можно преобразовать к нормальным координатам, применив ту же процедуру, что и в случае действительных нагрузок. Тогда с учетом выражения (4.64) можно записать

$$\mathbf{Q}_{\text{Г осн}} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{\text{т}}\mathbf{Q}_{\text{осн}}. \tag{4.82}$$

Записанное в нормальных координатах i-е уравнение движения примет вид

$$\ddot{x}_{\text{Г}i} + p_i^2 x_{\text{Г}i} = q_{\text{Г осн}\,i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{4.83}$$

где $q_{\text{Г осн}\,i}$ — эквивалентное усилие в i-й нормальной координате, обусловленное движениями основания.

Для того чтобы определить перемещения, соответствующие i-й форме колебаний, воспользуемся интегралом

$$x_{\text{Г}i} = (1/p_i)\int_0^t q_{\text{Г осн}\,i}\sin p_i(t-t')\,dt'. \tag{4.84}$$

Это выражение будет иметь ту же форму, что и (4.67), если в последнем выражении заменить $q_{\text{Г}i}$ на $q_{\text{Г осн}\,i}$. Значения перемещений, определяемые с помощью выражения (4.84), можно, как это делалось выше, преобразовать к исходным координатам, используя соотношение $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{Н}}\mathbf{X}_{\text{Г}}$.

Если вместо перемещения основания $x_{\text{осн}}$ задается ускорение $\ddot{x}_{\text{осн}}$ основания системы, показанной на рис. 4.1, *а*, следует перейти к новым координатам, описывающим относительное движение согласно выражению (в). Ускорения, соответствующие перемещениям $\mathbf{X}^*$:

$$\ddot{\mathbf{X}}^* = \ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{1}\,\ddot{x}_{\text{осн}}. \tag{е}$$

Подставляя выражение (е) для $\ddot{\mathbf{X}}$ в уравнение (б), получим уравнение движения в относительных координатах

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{S}\mathbf{X}^* = \mathbf{Q}^*_{\text{осн}}, \tag{4.85}$$

где

$$\mathbf{Q}^*_{\text{осн}} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\,\ddot{x}_{\text{осн}}. \tag{4.86}$$

Поскольку для системы, показанной на рис. 4.1, *а*, матрица масс является диагональной, в этом частном случае матрица-столбец

$$\mathbf{Q}^*_{\text{осн}} = \begin{bmatrix} -m_1\ddot{x}_{\text{осн}} \\ -m_2\ddot{x}_{\text{осн}} \\ -m_3\ddot{x}_{\text{осн}} \end{bmatrix}. \qquad (ж)$$

Таким образом, эквивалентные нагрузки, соответствующие относительным свободным координатам перемещения, равны взятым со знаком минус произведениям масс на ускорение $\ddot{x}_{\text{осн}}$ основания. Определив эти эквивалентные усилия, можно найти перемещение системы относительно основания, если взять вместо вектора $\mathbf{Q}_{\text{осн}}$ вектор $\mathbf{Q}^*$. Поскольку матрицы коэффициентов в уравнениях (4.85) и (4.80) одинаковые, ту же матрицу преобразования $\mathbf{X}_{\text{Н}}$ можно использовать для перехода от относительных координат к нормальным.

Если вместо уравнений движения в усилиях взять уравнения движения в перемещениях, влияние перемещения основания (см. рис. 4.1, *а*) в уравнении движения можно учесть следующим образом:

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} - \mathbf{1}\,x_{\text{осн}} = \mathbf{0}, \qquad (з)$$

причем то же самое уравнение можно получить из уравнения (б), умножив его слева на матрицу-столбец $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$. Представляя это уравнение в той же форме, что и уравнение (4.71) предыдущего параграфа, получим

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} = \mathbf{\Delta}_{\text{осн}}, \qquad (4.87)$$

где

$$\mathbf{\Delta}_{\text{осн}} = \mathbf{1}\,x_{\text{осн}}. \qquad (4.88)$$

Компонентами вектора-столбца $\mathbf{\Delta}_{\text{осн}}$ являются зависящие от времени и обусловленные движениями основания свободные координаты перемещения, которые можно определить из статического рассмотрения. Разумеется, в данном случае каждая компонента этого вектора попросту равна перемещению $x_{\text{осн}}$. Преобразуя свободные координаты перемещений к нормальным координатам с помощью приведенной выше процедуры (4.73), получаем

$$\mathbf{\Delta}_{\text{Г осн}} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{-1}\,\mathbf{\Delta}_{\text{осн}}. \qquad (4.89)$$

В этом случае i-е уравнение движения в нормальных координатах [см. уравнение (4.74)] принимает вид

$$\lambda_i\ddot{x}_{\text{Г}i} + x_{\text{Г}i} = \delta_{\text{Г осн}\,i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \qquad (4.90)$$

где $\delta_{\text{Г осн}\,i}$ — зависящее от времени перемещение i-й нормальной координаты, обусловленное движениями основания.

Для того чтобы определить перемещения, соответствующее i-й форме колебаний, воспользуемся второй формой представления интеграла Дюамеля

$$x_{\text{Г}i} = p_i \int_0^t \delta_{\text{Г осн}\,i} \sin p_i (t - t')\, dt', \qquad (4.91)$$

где $\delta_{\text{г осн } i}$ заменяется на $\delta_{\text{г}_i}$. Последовательно используя выражение (4.91), преобразуем полученные результаты к исходным координатам обычным способом.

Если вместо перемещения $x_{\text{осн}}$ известно ускорение $\ddot{\mathbf{x}}_{\text{осн}}$ основания, уравнение движения в перемещениях, записанное через относительные координаты перемещений, принимает вид

$$\mathbf{FM}\ddot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{X}^* = \mathbf{FQ}^*_{\text{осн}}, \tag{4.92}$$

который получается при умножении слева уравнения (4.85) на матрицу $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$. В этом случае из выражения (4.86) следует

$$\Delta^*_{\text{осн}} = \mathbf{FQ}^*_{\text{осн}} = -\mathbf{FM1}\,\ddot{x}_{\text{осн}}. \tag{4.93}$$

Тогда перемещение системы относительно основания можно определить, взяв Δ^* вместо $\Delta_{\text{осн}}$.

Выше были обсуждены четыре способа исследования движений частного вида системы со многими степенями свободы (см. рис. 4.1, *а*) при наличии движения основания. Если использовать уравнения движения в усилиях, с помощью выражения (4.81) можно определить эквивалентные нагрузки для заданных перемещений, а с помощью выражения (4.86) те же нагрузки для заданных ускорений. Последняя процедура легче первой, однако при этом вычисляются динамические перемещения относительно движущегося основания. С другой стороны, когда записываются уравнения движения в перемещениях, зависящие от времени, свободные координаты перемещений, обусловленных перемещениями основания, определяются из выражения (4.88), а когда задаются ускорения перемещений, эти координаты определяются из выражения (4.93). Сравнивая оба выражения, видим, что первое удобнее второго. Более того, выражение (4.88) также проще, чем выражения (4.81) или (4.86), используемые в подходах с применением уравнений движения в усилиях. Следовательно, в том случае, когда заданы перемещения основания и не трудно определить податливости системы, предпочтительнее подход, основанный на использовании уравнений движения в перемещениях. Это, безусловно, справедливо и для показанной на рис. 4.1, *а* статически определимой системы, в которой возникают перемещения как абсолютно жесткого тела при движениях основания. Однако для статически неопределимых систем, как правило, удобнее методы, в которых используются уравнения движения в усилиях.

Пример 1. Предположим, что основание, на котором установлена двухмассовая система (см. рис. 3.1, *а*), внезапно переместилась вправо как абсолютно жесткое тело, при этом перемещение представляется в виде ступенчатой функции $x_{\text{осн}} = d$. Определить динамические перемещения системы, обусловленные указанным внезапным перемещением основания, если дано: $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$.

Решение. Согласно подходу, основанному на использовании уравнений движения в усилиях, определим с помощью выражения (4.81) эквивалентные нагрузки, соответствующие свободным координатам перемещений:

$$\mathbf{Q}_{\text{осн}} = -\mathbf{S}_{\text{осн}} x_{\text{осн}} = \mathbf{S1}\, x_{\text{осн}} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} kd \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{и}$$

Преобразование этого вектора-столбца к нормальным координатам согласно выражению (4.82) дает

$$\mathbf{Q}_{\Gamma\,\text{осн}} = \mathbf{X}_{\text{н}}^{\text{т}}\mathbf{Q}_{\text{осн}} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0{,}526 & 0{,}851 \\ -0{,}851 & 0{,}526 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kd \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{kd}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0{,}526 \\ -0{,}851 \end{bmatrix}. \qquad \text{(к)}$$

Применяя выражение (4.84) дважды, определим перемещения в нормальных координатах, обусловленные влиянием заданного перемещения в виде ступенчатой функции:

$$\mathbf{X}_{\Gamma} = \frac{kd}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0{,}526\,(1-\cos p_1 t)/p_1^2 \\ -0{,}851\,(1-\cos p_2 t)/p_2^2 \end{bmatrix} = d\sqrt{m}\begin{bmatrix} 1{,}377\,(1-\cos p_1 t) \\ -0{,}325\,(1-\cos p_2 t) \end{bmatrix}. \qquad \text{(л)}$$

В исходных координатах искомое решение принимает вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{н}}\mathbf{X}_{\Gamma} = d\begin{bmatrix} 1 - 0{,}724\cos p_1 t - 0{,}276\cos p_2 t \\ 1 - 1{,}171\cos p_1 t + 0{,}171\cos p_2 t \end{bmatrix}, \qquad \text{(м)}$$

аналогичный тому, что имел место в случае приложения к первой массе силы в виде ступенчатой функции (см. пример 1 в предыдущем параграфе), если там множитель P/k заменить на d.

Для того чтобы решить эту задачу с использованием уравнений движения в перемещениях, найдем из выражения (4.88) переносы свободных координат перемещения, обусловленные заданием основанию перемещения в виде ступенчатой функции:

$$\Delta_{\text{осн}} = \mathbf{1}\,x_{\text{осн}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix}. \qquad \text{(н)}$$

В нормальных координатах этот вектор-столбец преобразуется к виду

$$\Delta_{\Gamma\,\text{осн}} = \mathbf{X}_{\text{н}}^{-1}\,\Delta_{\text{осн}} = \sqrt{m}\begin{bmatrix} 0{,}526 & 0{,}851 \\ -0{,}851 & 0{,}526 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix} = d\sqrt{m}\begin{bmatrix} 1{,}377 \\ -0{,}325 \end{bmatrix}. \qquad \text{(о)}$$

Дважды применяя выражение (4.91), получим те же значения для перемещений в нормальных координатах, что и в выражении (л). Последующим преобразованием координат вновь получаем окончательные результаты в виде (м).

Пример 2. Для трехмассовой системы (см. рис. 4.1, *а*) дано: $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Определить динамические перемещения этой системы, обусловленные заданным в виде параболической функции ускорением основания $\ddot{x}_{\text{осн}} = a_1 t^2/t_1^2$, где a_1 — ускорение основания в момент времени t_1 при перемещении его как абсолютно жесткого тела.

Решение. Рассматривая задачу сначала в соответствии с методом, в котором используются уравнения движения в усилиях, получим с помощью выражения (ж) эквивалентные нагрузки $\mathbf{Q}^*$ для данной системы

$$\mathbf{Q}^*_{\text{осн}} = \frac{-a_1 t^2 m}{t_1^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(п)}$$

В нормальных координатах этот вектор-столбец имеет вид

$$\mathbf{Q}^*_{\Gamma\,\text{осн}} = \mathbf{X}_{\text{н}}^{\text{т}}\mathbf{Q}^*_{\text{осн}} = \frac{-a_1 t^2\sqrt{m}}{t_1^2}\begin{bmatrix} 0{,}328 & 0{,}591 & 0{,}737 \\ 0{,}737 & 0{,}328 & -0{,}591 \\ 0{,}591 & -0{,}737 & 0{,}328 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-a_1 t^2\sqrt{m}}{t_1^2}\begin{bmatrix} 1{,}656 \\ 0{,}474 \\ 0{,}182 \end{bmatrix}. \qquad \text{(р)}$$

Трижды применяя интеграл Дюамеля, найдем

$$\mathbf{X}^*_{\Gamma} = \frac{-a_1\sqrt{m}}{t_1^2}\begin{bmatrix} 1{,}656\,[t^2 - 2\,(1-\cos p_1 t)/p_1^2]/p_1^2 \\ 0{,}474\,[t^2 - 2\,(1-\cos p_2 t)/p_2^2]/p_2^2 \\ 0{,}182\,[t^2 - 2\,(1-\cos p_3 t)/p_3^2]/p_3^2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(с)}$$

где каждое решение, представляющее элемент матрицы столбца, соответствует форме колебаний, приведенной в ответе задачи 1.13.6 (см. п. 1.13). Подставляя значения $1/p_1^2 = 5{,}05m/k$, $1/p_2^2 = 0{,}643m/k$, $1/p_3^2 = 0{,}308m/k$ в выражение (с), получим

$$\mathbf{X}_\Gamma^* = \frac{-a_1\sqrt{m^3}}{t_1^2 k}\begin{bmatrix} 8{,}363\,[t^2 - 10{,}10m\,(1 - \cos p_1 t)/k] \\ 0{,}305\,[t^2 - 1{,}286m\,(1 - \cos p_2 t)/k] \\ 0{,}056\,[t^2 - 0{,}616m\,(1 - \cos p_3 t)/k] \end{bmatrix}. \qquad (\text{т})$$

После чего приходим к следующим выражениям для перемещений системы в исходных относительных координатах:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_\text{Н}\mathbf{X}_\Gamma^* = \frac{-a_1 m}{t_1^2 k}\begin{bmatrix} 3t^2 - 27{,}70f_1(t) - 0{,}289f_2(t) - 0{,}020f_3(t) \\ 5t^2 - 49{,}92f_1(t) - 0{,}129f_2(t) + 0{,}025f_3(t) \\ 6t^2 - 62{,}26f_1(t) + 0{,}232f_2(t) + 0{,}011f_3(t) \end{bmatrix}, \qquad (\text{у})$$

где $f_1(t) = m\ (1 - \cos p_1 t)/k$; $f_2(t) = m\ (1 - \cos p_2 t)/k$; $f_3(t) = m\ (1 - \cos p_3 t)/k$. Возвращаясь к подходу, использующему уравнения движения в перемещениях, определим из выражения (4.93) вектор-столбец $\Delta_{\text{осн}}^*$:

$$\Delta_{\text{осн}}^* = -\mathbf{FM1}\,\ddot{x}_{\text{осн}} = \frac{-a_1 t^2 m}{t_1^2 k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-a_1 t^2 m}{t_1^2 k}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}. \qquad (\text{ф})$$

Преобразуя этот вектор-столбец к нормальным координатам, найдем

$$\Delta_{\Gamma\ \text{осн}}^* = \mathbf{X}_\text{Н}^{-1}\,\Delta_{\text{осн}}^* = \frac{-a_1 t^2\sqrt{m^3}}{t_1^2 k}\begin{bmatrix} 0{,}328 & 0{,}591 & 0{,}737 \\ 0{,}737 & 0{,}328 & -0{,}591 \\ 0{,}591 & -0{,}737 & 0{,}328 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-a_1 t^2\sqrt{m^3}}{t_1^2 k}\begin{bmatrix} 8{,}363 \\ 0{,}305 \\ 0{,}056 \end{bmatrix}. \qquad (\text{х})$$

Трижды применяя интеграл Дюамеля, получим выражение (т) для перемещений в нормальных координатах, а окончательные результаты совпадают с решениями (у). Из приведенных результатов с очевидностью следует, что наибольший вклад в динамическое поведение системы дает основная форма колебаний, вторая форма колебаний дает вклад намного меньший, чем первая, а третья форма колебаний — намного меньший, чем вторая.

Приведенные выше примеры иллюстрируют способы исследования систем, для которых задается только один вид перемещения основания как абсолютно жесткого тела. В более сложных задачах могут иметь место три составляющие перемещения основания как абсолютно жесткого тела, а также три поворота как абсолютно жесткого тела. В подобных случаях перемещение $x_{\text{осн}}$ должно представлять собой вектор с компонентами в виде шести типов перемещений, тогда вектор $\mathbf{S}_{\text{осн}}$ превратится в матрицу $n \times 6$. Кроме того, повороты основания должны быть малыми, с тем чтобы оставалось справедливым допущение о линейности характеристик системы, на котором основывается метод нормальных форм колебаний. Единственными большими перемещениями, допустимыми при линейных исследованиях, являются перемещения как абсолютно жесткого тела. Задачи, которые включают рассмотрение подобных больших динамических перемещений, необходимо исследовать с использованием относительных координат с тем, чтобы избежать потери точности при определении динамических перемещений системы.

Тогда абсолютное динамическое перемещение системы можно найти, сложив относительное перемещение системы и перемещения основания.

Для системы, которая соединяется с основанием во многих точках, также можно определить динамическое перемещение, рассматривая *независимые движения каждой точки соединения системы* с опорами, для чего вычисляются соответствующие коэффициенты жесткости или податливости *. В подобном случае относительные перемещения точек соединения системы с опорой должны быть малы по сравнению с общими линейными перемещениями. Если система с n степенями свободы имеет r точек соединения с опорами, которые могут двигаться независимо друг от друга, уравнение движения в усилиях (б) можно обобщить следующим образом:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{\text{оп}}\mathbf{X}_{\text{оп}} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q}_{\text{оп}}. \tag{4.94}$$

где

$$\mathbf{Q}_{\text{оп}} = -\mathbf{S}_{\text{оп}}\mathbf{X}_{\text{оп}}. \tag{4.95}$$

Здесь $\mathbf{X}_{\text{оп}}$ — вектор-столбец перемещений системы в точках опор; $\mathbf{S}_{\text{оп}}$ — матрица $n \times r$ жесткостей, связывающая свободные координаты перемещений с перемещениями опор; $\mathbf{Q}_{\text{оп}}$ — вектор-столбец эквивалентных нагрузок, обусловленных перемещениями опор.

С другой стороны, умножив уравнение (4.94) слева на матрицу $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$, получим уравнение движения в перемещениях

$$\mathbf{F}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} = \Delta_{\text{оп}}, \tag{4.96}$$

где

$$\Delta_{\text{оп}} = -\mathbf{F}\mathbf{S}_{\text{оп}}\mathbf{X}_{\text{оп}} = \mathbf{D}_{\text{оп}}\mathbf{X}_{\text{оп}}. \tag{4.97}$$

В данном подходе вектор-столбец $\Delta_{\text{оп}}$ имеет компоненты в виде зависящих от времени координат свободных перемещений, обусловленных независимыми перемещениями опор. Так же, как и в других векторах подобного вида, его компоненты определяются из статического рассмотрения. Из выражения (4.97) видно, что эти компоненты можно найти, умножив слева вектор $\mathbf{X}_{\text{оп}}$ на матрицу

$$\mathbf{D}_{\text{оп}} = -\mathbf{F}\mathbf{S}_{\text{оп}} = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}_{\text{оп}}. \tag{4.98}$$

Здесь $\mathbf{D}_{\text{оп}}$ — матрица $n \times r$ *коэффициентов влияния перемещений*, представляющих собой перемещения, выраженные в свободных координатах перемещений и обусловленные влиянием единичных перемещений в опорах. Поскольку выражение (4.98) представляет удобную формулу для вычисления элементов таких матриц для сложных систем, то иногда можно вывести их непосредственно. Приведенный ниже пример демонстрирует применение подобного подхода к системе, в которой опоры имеют возможность совершать независимые движения.

Пример 3. Вновь возвращаясь к системе, показанной на рис. 4.2, *а*, предположим, что опоры A и B могут перемещаться независимо друг от друга в напра-

* **Weaver W., Jr.** Dynamics of discrete-parameter structures. Development in Theoret. and Appl. Mech. v. 2. New-York; Pergamon Press, 1965, pp. 629—651.

влении, параллельном оси x. Пусть через $x_{оп1}$ и $x_{оп2}$ обозначены малые перемещения точек соответственно A и B. Определить установившееся поведение системы, когда одна из опор движется по закону $x_{оп2} = d \sin \omega t$, а другая неподвижна, т. е. $x_{оп1} = 0$. Как и ранее, принимаем, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$, поэтому можно использовать найденные выше характеристики системы.

Решение. Вектор-столбец перемещений опор в данной системе можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{X}_{оп} = \begin{bmatrix} x_{оп1} \\ x_{оп2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \sin \omega t \end{bmatrix}. \qquad (ц)$$

Для того чтобы воспользоваться подходом, в котором используются уравнения движения в усилиях вида (4.94), построим матрицу

$$\mathbf{S}_{оп} = \begin{bmatrix} S_{оп\,11} & S_{оп\,12} \\ S_{оп\,21} & S_{оп\,22} \\ S_{оп\,31} & S_{оп\,32} \end{bmatrix} = \frac{T}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (ч)$$

Первый столбец данной матрицы представляет усилия в точках закрепления масс (см. рис. 4.2, *д*), возникающие при задании $x_{оп1} = 1$. Аналогично, второй столбец в матрице $\mathbf{S}_{оп}$ представляет усилия, возникающие при перемещении второй опоры $x_{оп2} = 1$ (см. рис. 4.2, *е*). С помощью выражения (4.95) получим эквивалентные нагрузки, соответствующие свободным координатам перемещения:

$$\mathbf{Q}_{оп} = -\mathbf{S}_{оп}\mathbf{X}_{оп} = \frac{Td \sin \omega t}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (ш)$$

Преобразование этого вектора к нормальным координатам дает

$$\mathbf{Q}_{Г\,оп} = \mathbf{X}_{Н}^{т}\mathbf{Q}_{оп} = \frac{Td \sin \omega t}{2l\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{Td \sin \omega t}{2l\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (щ)$$

Установившееся динамическое перемещение системы по главным формам колебаний имеет вид

$$\mathbf{X}_{Г} = \frac{Td \sin \omega t}{2l\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \beta_1/p_1^2 \\ -\sqrt{2}\beta_2/p_2^2 \\ \beta_3/p_3^2 \end{bmatrix} = \frac{d\sqrt{m} \sin \omega t}{4} \begin{bmatrix} (2+\sqrt{2})\beta_1 \\ -\sqrt{2}\beta_2 \\ (2-\sqrt{2})\beta_3 \end{bmatrix}. \qquad (э)$$

Таким образом, в исходных координатах решение следует записать в форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{Н}\mathbf{X}_{Г} = \frac{d \sin \omega t}{2} \begin{bmatrix} (2+\sqrt{2})\beta_1 - 2\beta_2 + (2-\sqrt{2})\beta_3 \\ 2(1+\sqrt{2})\beta_1 + 2(1-\sqrt{2})\beta_3 \\ (2+\sqrt{2})\beta_1 + 2\beta_2 + (2-\sqrt{2})\beta_3 \end{bmatrix}. \qquad (а')$$

Используя уравнения движения в перемещениях (4.96), можно построить матрицу коэффициентов влияния перемещений

$$\mathbf{D}_{оп} = -\mathbf{F}\mathbf{S}_{оп} = \frac{-l}{4T} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{T}{l} = 1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D_{оп\,11} & D_{оп\,12} \\ D_{оп\,21} & D_{оп\,22} \\ D_{оп\,31} & D_{оп\,32} \end{bmatrix}. \qquad (б')$$

С другой стороны, элементы первого и второго столбцов матрицы $\mathbf{D}_{оп}$ представляют перемещения в точках крепления масс (см. рис. 4.2, *ж* и *з*), обусловленные перемещениями опор соответственно $x_{оп1} = 1$ и $x_{оп2} = 1$. Когда вектор-столбец $\mathbf{X}_{оп}$

[см. выражение (ц)] умножаем слева на эту матрицу, получаем зависящие от времени перемещения, выраженные через свободные координаты перемещений:

$$\Delta_{\text{оп}} = \mathbf{D}_{\text{оп}}\mathbf{X}_{\text{оп}} = \frac{d\sin\omega t}{4}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{d\sin\omega t}{4}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}. \qquad (в')$$

Преобразуя этот вектор-столбец к нормальным координатам, найдем

$$\Delta_{\text{г оп}} = \mathbf{X}_{\text{н}}^{-1}\Delta_{\text{оп}} = \frac{d\sqrt{m}\sin\omega t}{8}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{d\sqrt{m}\sin\omega t}{4}\begin{bmatrix}2+\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\\ 2-\sqrt{2}\end{bmatrix}. \qquad (г')$$

Это решение, выраженное через нормальные координаты, совпадает с решением (э), следовательно, решение в исходных координатах будет определяться выражением (а).

ЗАДАЧИ

4.6.1. Предположим, что основание системы (см. рис. 4.1, *а*) перемещается по закону в виде линейной функции $x_{\text{осн}} = d_1 t/t_1$, где d_1 — перемещение основания как абсолютно жесткого тела в момент времени t. Используя уравнения движения в усилиях, определить динамическое перемещение этой системы, если дано $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

Ответ: $x_1 = kd_1\,[0{,}108f_1(t) + 0{,}543f_2(t) + 0{,}349f_3(t)]/(t_1 m)$, где $f_1(t) = [t - (1/p_1)\sin p_1 t]/p_1^2$ и т. д.

4.6.2. Определить динамические перемещения в трехмассовой системе, рассмотренной в задаче 4.2.2, если задано, что основание системы внезапно смещается на величину $x_{\text{осн}} = d$. При решении воспользоваться уравнением движения в перемещениях.

Ответ: $x_1 = d\,[4 - (2+\sqrt{2})\cos p_1 t - (2-\sqrt{2})\cos p_3 t]/4$.

4.6.3. Используя уравнения движения в усилиях, определить установившееся состояние при движениях, соединенных пружиной маятников (см. задачу 4.2.3), обусловленных ускорениями основания системы, заданными в виде гармонической функции $\ddot{x}_{\text{осн}} = a\sin\omega t$. В этом случае угловые перемещения маятников являются абсолютными, а не относительными.

Ответ: $\theta_1 = -(a/g)\,\beta_1\sin\omega t$.

4.6.4. Рассмотреть обсужденную в задаче 4.2.4 систему, предположив, что в точке A вала задано угловое ускорение, равное $\ddot{\varphi}_A = \alpha_1 t^2/t_1^2$, где α_1 — величина углового ускорения в момент времени t_1. Найти угловые перемещения дисков относительно поворота вала в точке A, воспользовавшись уравнениями движения в перемещениях.

Ответ: $\varphi_1^* = -\alpha_1 I\,[3t^2 - I(28{,}01 - 27{,}70\cos p_1 t - 0{,}289\cos p_2 t - 0{,}020\cos \times p_3 t)/k_{\text{к}}]/(t_1^2 k_{\text{к}})$.

4.6.5. Пусть дано, что четвертая масса системы из задачи 4.2.5 перемещается по закону в виде линейной функции $x = d_1 t/t_1$, где d_1 — перемещение в момент времени t_1. Определить динамические перемещения остальных трех масс, используя уравнения движения в усилиях.

Ответ: $x_1 = kd_1\,[0{,}242f_1(t) - 0{,}435f_2(t) + 0{,}194f_3(t)]/(t_1 m)$, где $f_1(t) = [t - (1/p_1)\sin p_1 t]/p_1^2$ и т. д.

4.6.6. Предположим, что левая опора стержня в задаче 4.2.6 внезапно перемещается на расстояние d в направлении оси y. Определить закон движения прикрепленных к стержню масс, используя уравнения движения в перемещениях.

Ответ: $y_1 = d\,(3 - 1{,}707\cos p_1 t - \cos p_2 t - 0{,}293\cos p_3 t)/4$.

4.6.7. Используя уравнения движения в перемещениях, найти закон движения тройного маятника, обсужденного в задаче 4.2.7, если задано, что точка закрепления маятника перемещается по закону ступенчатой функции $x_{\text{осн}} = d$.

Ответ: $x_1 = d\,(1 - 0{,}334\cos p_1 t - 0{,}314\cos p_2 t - 0{,}352\cos p_3 t)$.

4.6.8. Предположим, что для каркаса здания, рассмотренного в задаче 4.2.8, задано ускорение основания в виде функции $\ddot{x}_{\text{осн}} = a\sin\omega t$. Определить закон установившихся движений перекрытия третьего этажа относительно основания, используя уравнения движения в усилиях.

Ответ: $x_1^* = -a\sin\omega t\,(0{,}334\beta_2/p_1^2 + 0{,}314\beta_2/p_2^2 + 0{,}352\beta_3/p_3^2)$.

4.6.9. Рассмотреть подвешенную на пружинах массу из задачи 4.2.9, предположив, что точка присоединения первой (нижней) пружины к основанию внезапно перемещается на расстояние d в направлении оси x. Определить закон движения массы, используя уравнение движения в усилиях.

Ответ: $x_1 = d\,(1 - 0{,}708\cos p_1 t - 0{,}292\cos p_3 t)$.

4.6.10. Пусть точка A рамы из задачи 4.2.10 совершает малые гармонические угловые перемещения, описываемые функцией $\theta_A = \varphi\cos\omega t$ относительно оси, перпендикулярной плоскости xy. Найти закон установившегося движения прикрепленных к раме масс, используя уравнения движения в перемещениях.

Ответ: $x_1 = \varphi l\cos\omega t\,(1{,}242\beta_1/p_1^2 - 0{,}248\beta_2/p_2^2 + 0{,}007\beta_3/p_3^2)$.

4.6.11. Предположим, что для центральной массы системы, рассмотренной в задаче 4.2.11, задано ускорение в виде параболической функции $\ddot{y}_2 = a_1 t^2/t_1^2$, где a_1 — значение ускорения в момент времени t_1. Определить закон движения масс m_1 и m_3 относительно массы m_2, используя уравнения движения в усилиях.

Ответ: $y_1^* = y_3^* = -a_1\,[t^2 - 2\,(1 - \cos pt)\,p^2]/(p^2 t_1^2)$,
где $p^2 = 3EI/l^3 m$.

4.6.12. Предположим, что точка крепления нижнего конца расположенной под точкой C пружины в системе из задачи 4.2.12 совершает гармонические перемещения в направлении оси y по закону $y_{\text{оп}} = d\sin\omega t$. Используя уравнения движения в перемещениях, найти закон установившегося движения при таком виде возмущения, если $f = 0{,}91$ м.

Ответ: $y_1^* = d\sin\omega t\,(0{,}096\beta_1/p_1^2 - 0{,}096\beta_3/p_3^2)$.

4.7. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ

Обсужденный в п. 4.2 метод определения собственных частот колеблющихся систем обычно используется только в тех случаях, когда найти корни характеристического уравнения не представляет труда. Здесь также возможно применение различных численных методов *, но они обычно эффективнее в случае систем с большим числом степеней свободы. Обсуждаемый в данном параграфе подход иногда называют *методом степенных рядов* или *методом Стодолы—Вианелло*, но, как правило, его именуют просто *итерационным методом*. Этот подход удобно применять для работы с матрицами невысокого порядка, используя при расчетах логарифмическую линейку или настольный калькулятор, но решения больших задач следует программировать, чтобы проводить вычисления на цифровых ЭВМ.

Итерационный метод наиболее полезен при решении таких задач, в которых требуется определять только низшие частоты и соответствующие им формы колебаний. Если же требуется находить все собственные значения и собственные векторы колеблющейся системы,

---

* **Wilkinson J. H.** The algebraic eigenvalue problem. Oxford, London: Clarendon Press, 1965. 662 p.

предпочтительнее использовать иные численные подходы, поскольку они требуют меньше арифметических операций. Кроме того, итерационный процесс будет сходиться быстрее, если можно заранее установить форму колебаний. Обычно достаточно хорошо удается задать основную форму колебаний, но для более высоких форм это сделать гораздо сложнее. Тем не менее, точность, с которой удается предсказать формы колебаний, влияет только на скорость сходимости итерационного процесса, но не на конечный результат.

Для того чтобы построить итерационный процесс, не связывая его с конкретным приложением к колебаниям, начнем с рассмотрения задачи на собственные значения, представленной в следующей стандартной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{M_i} = \lambda_i \mathbf{X}_{M_i}, \tag{4.99}$$

совпадающей с уравнением (э) в п. 4.2. Первое приближение для одного из собственных значений λ_i можно найти, подставив пробный собственный вектор $(\mathbf{X})_1$ в левую и правую части уравнения (4.99) и решив результирующее соотношение по λ_i. Для этого обозначим через вектор $(\mathbf{Y})_1$ стоящее в левой части соотношения произведение матрицы $\mathbf{A}$ и выбранного пробного значения собственного вектора-столбца $(\mathbf{X})_1$:

$$(\mathbf{Y})_1 = \mathbf{A}\,(\mathbf{X})_1. \tag{а}$$

Если вектор $(\mathbf{X})_1$ не является точным значением собственного вектора, то после подстановки его в уравнение (4.99) последнее будет удовлетворяться только приближенно:

$$(\mathbf{Y})_1 \approx \lambda_i\,(\mathbf{X})_1. \tag{б}$$

Первое приближение для собственного значения $(\lambda_i)_1$ можно получить, разделив любую из n компонент вектора $(\mathbf{Y})_1$ на соответствующую компоненту вектора $(\mathbf{X})_1$. Отметим, что если бы удалось установить точное значение собственного вектора, то все подобные отношения были бы равны между собой. Обозначим все возможные значения, получающиеся при таком делении, в виде

$$(\lambda_i)_1 = (y_j)_1/(x_j)_1, \tag{в}$$

где $1 \leqslant j \leqslant n$.

Прежде чем перейти ко второму шагу итерации, обычно проводят нормирование вектора $(\mathbf{Y})_1$ тем или иным способом, например, разделив все его компоненты на первую или последнюю компоненту. В общем случае разделим вектор $(\mathbf{Y})_1$ на произвольную постоянную и результат возьмем в качестве второго приближения для вектора

$$(\mathbf{X})_2 = (\mathbf{Y})_1/b_1. \tag{г}$$

Этот вектор умножаем слева на матрицу $\mathbf{A}$, что дает вектор

$$(\mathbf{Y})_2 = \mathbf{A}\,(\mathbf{X})_2. \tag{д}$$

Далее вычисляем второе приближение для собственного значения

$$(\lambda_i)_2 = (y_j)_2/(x_j)_2. \tag{е}$$

Затем вектор $(\mathbf{Y})_2$ масштабируем путем деления на произвольную постоянную b_2, что дает третье приближение для вектора

$$(\mathbf{X})_3 = (\mathbf{Y})_2/b_2. \qquad (ж)$$

Подобную процедуру повторяем до тех пор, пока собственные значения и соответствующий им собственный вектор не будут определены с желаемой степенью точности.

На k-м шаге итерации описанным выше процедурам соответствуют следующие рекуррентные уравнения:

$$(\mathbf{Y})_k = \mathbf{A}\,(\mathbf{X})_k; \qquad (4.100)$$

$$(\lambda_i)_k = (y_j)_k/(x_j)_k; \qquad (4.101)$$

$$(\mathbf{X})_{k+1} = (\mathbf{Y})_k/b_k, \qquad (4.102)$$

где b_k — произвольно выбранное число. Ниже будет показано, что в результате повторяющейся процедуры вычислений по этим уравнениям процесс сходится к численно наибольшим собственному значению и собственному вектору. Поэтому для ускорения сходимости первое приближение для вектора $(\mathbf{X})_1$ следует выбирать таким, чтобы оно численно соответствовало наибольшему собственному значению.

Для того чтобы доказать, что процесс итераций сходится к наибольшему собственному значению, разложим первое приближение для вектора $(\mathbf{X})_1$ по действительным значениям собственных векторов системы

$$(\mathbf{X})_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{X}_{Mi}, \qquad (з)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ — масштабирующие множители. Возможность подобного представления зависит от существования линейно независимых (хотя и неизвестных) собственных векторов, каждый из которых удовлетворяет рассматриваемым колеблющимся системам. Здесь также предполагается, что соответствующие собственные значения располагаются в порядке убывания, при этом имеется только одно наибольшее собственное значение

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_i \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n. \qquad (и)$$

Подставляя представление (з) в соотношение (а) и используя уравнение (4.99), можно получить следующее разложение для вектора $(\mathbf{Y})_1$ по точным значениям собственных векторов:

$$(\mathbf{Y})_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{A}\mathbf{X}_{Mi} = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \mathbf{X}_{Mi}. \qquad (к)$$

На втором шаге итерации имеем

$$(\mathbf{Y})_2 = \mathbf{A}\,(\mathbf{X})_2 = \mathbf{A}\,(\mathbf{Y}_1)\,b_1. \qquad (л)$$

Подставляя представление (к) в выражение (л) и вновь используя уравнение (4.99), найдем выражение

$$(\mathbf{Y})_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \mathbf{A} \mathbf{X}_{Mi}/b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^2 \mathbf{X}_{Mi}/b_1. \qquad (м)$$

На k-м шаге итерации получаем следующее выражение для вектора:

$$(\mathbf{Y})_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k \mathbf{X}_{Mi}/b_1 b_2 \ \ldots \ b_{k-1}, \qquad (н)$$

в которое собственное значение λ_i входит в k-й степени. Вынося за скобку общий множитель λ_1^k и выделяя отдельно слагаемое, запишем содержащее $\mathbf{X}_{M1}$:

$$(\mathbf{Y})_k = \lambda_1^k \left[a_1 \mathbf{X}_{M1} + \sum_{i=2}^{n} a_i \, (\lambda_i/\lambda_1)^k \mathbf{X}_{Mi} \right] \Big/ b_1 b_2 \ \ldots \ b_{k-1}.$$

В соответствии с выбранным порядком расположения собственных значений [см. выражение (и)] можно заключить, что величина $(\lambda_i/\lambda_1)^k$ стремится к нулю при увеличении номера k, поэтому можно записать

$$(\mathbf{Y})_k \approx \lambda_1^k a_1 \mathbf{X}_{M1}/b_1 b_2 \ \ldots \ b_{k-1}. \qquad (о)$$

Из этого выражения видно, что k-е приближение вектора стремится к собственному вектору $\mathbf{X}_{M1}$, поскольку остальные величины в этом выражении являются постоянными. Если в правой части выражения (о) выделить множитель λ_1, получим

$$(\mathbf{Y})_k \approx \lambda_1 \left(\lambda_1^{k-1} a_1 \mathbf{X}_{M1}/b_1 b_2 \ \ldots \ b_{k-1} \right) = \lambda_1 (\mathbf{X})_k. \qquad (п)$$

Таким образом, k-е приближение для λ_i, задаваемое выражением (4.101), как это видно из выражения (о), принимает значения, близкие к λ_1. Благодаря указанному условию сходимости итерационного процесса численно наибольшее собственное значение λ_1 называют *основной собственной частотой*, а соответствующий этому значению вектор $\mathbf{X}_{M1}$ — *основным собственным вектором*.

Воспользуемся теперь итерационным методом и определим собственное значение и собственный вектор, соответствующие основной форме колебаний системы с несколькими степенями свободы. Поскольку при использовании этого метода решение сходится к наибольшему собственному значению, здесь следует применять уравнения движения в перемещениях, где наибольшее собственное значение равно обратной величине квадрата наименьшей круговой частоты. Таким образом, из уравнения (4.9) имеем

$$\mathbf{FM}\mathbf{X}_{M1} = \lambda_1 \mathbf{X}_{M1}, \qquad (4.103)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{p_1^2}. \qquad (4.104)$$

Уравнение (4.103) представляет стандартную форму задачи на собственные значения [см. уравнение (4.99)]. В результате видим, что матрица

$$\mathbf{A} = \mathbf{FM} \tag{4.105}$$

является несимметричной, хотя здесь $\mathbf{M}$ — диагональная матрица с одинаковыми элементами на диагонали. Однако указанная потеря симметрии не существенна в том случае, когда основная форма колебаний определяется с помощью метода итераций.

В качестве числового примера рассмотрим применение уравнений движения в перемещениях к трехмассовой системе (см. рис. 4.1, *а*), которая уже рассматривалась ранее с помощью уравнений движения в усилиях (см. пример 1 в п. 4.2). При $k_1 = k_2 = k_3 = k$ и $m_1 = m_2 = m_3 = m$ матрицы податливости масс для этой системы имеют вид

$$\mathbf{F} = \delta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где, как и выше, имеем $\delta = 1/k$. В результате матрица $\mathbf{A}$ согласно выражению (4.105) принимает вид

$$\mathbf{A} = m\delta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{р}$$

В качестве достаточно хорошего приближения для основной формы колебаний можно было бы взять суммы строк мартицы $\mathbf{A}$. В результате получается вектор перемещений, обусловленных статически приложенными силами, которые, как и в методе Релея (см. п. 1.14), пропорциональны массам. Непрямой способ применения того же самого приема состоит в задании представления $(\mathbf{X})_1 = \{1; 1; 1\}$ в качестве первого приближения для искомого вектора. Умножая вектор $(\mathbf{X})_1$ слева на матрицу $\mathbf{A}$, согласно выражению (4.100) получим вектор $(\mathbf{Y})_1 = m\delta\{3; 5; 6\}$. Первое приближение для λ_1, как следует из выражения (4.101), можно определить тремя различными путями. Для удобства проведения дальнейших вычислений разделим последнюю компоненту вектора $(\mathbf{Y})_1$ на последнюю компоненту вектора $(\mathbf{X})_1$, что дает $(\lambda_1)_1 = (y_n)_1/(x_n)_1 = 6m\delta$. Прежде чем перейти ко второму шагу итераций, пронормируем вектор $(\mathbf{Y})_1$ путем деления каждой его компоненты на последнюю компоненту [см. выражение (4.102)], в результате получаем представление для второго приближения вектора $(\mathbf{X})_2 = \{0{,}500; 0{,}833; 1{,}000\}$. Когда используется нормирование подобного типа, делитель $b_1 = 6m\delta$ приближенно равен собственному значению.

Второй шаг итерации состоит в использовании выражений (4.100)—(4.102) для получения соответственно $(\mathbf{Y})_2$, $(\lambda_1)_2$ и $(\mathbf{X})_3$. Этот процесс итераций повторяется до тех пор, пока собственные векторы, определяемые на двух последующих шагах итераций, не совпадут с заранее заданной точностью. В табл. 4.1 приведены результаты расчетов, из которых видно, что в этом случае вектор, получаемый на пятом шаге итераций, совпадает с вектором, найденным на четвертом шаге, с точностью до третьего знака после запятой. Таким образом, окончательно можно принять

$$\lambda_1 \approx 5{,}049m\delta, \quad p_1^2 = 1/\lambda_1 \approx 0{,}198\frac{k}{m},$$

$$\mathbf{X}_{M1} \approx \{0{,}445; 0{,}802; 1{,}000\}, \tag{с}$$

что полностью совпадает с результатами, полученными в примере 1 (см. п. 4.2), за исключением отличающихся способом нормирования векторов $\mathbf{X}_{M1}$.

После того как найдена основная форма колебаний, можно продолжить этот процесс дальше и с помощью метода последователь-

4.1. Результаты расчетов основной формы колебаний методом последовательных приближений

Приближенное значение вектора $(\mathbf{X})_k$	$(\mathbf{X})_1$	$(\mathbf{X})_2$	$(\mathbf{X})_3$	$(\mathbf{X})_4$	$(\mathbf{X})_5$
$\frac{\mathbf{A}}{m\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	1 1 1	0,500 0,833 1,0000	0,452 0,806 1,0000	0,446 0,803 1,0000	0,445 0,802 1,0000
Собственное значение $(\lambda_1)_k/m\delta$	6	5,167	5,065	5,051	5,049

ных приближений определить собственные значения и собственные векторы для высших форм колебаний. Если благодаря введению соответствующих подкреплений первая форма колебаний не реализуется, основной становится вторая форма колебаний. Если не реализуются ни первая, ни вторая формы, основной становится третья форма колебаний и т. д. Поскольку число собственных форм колебаний равно числу степеней свободы, введение *дополнительных связей для соответствующих форм колебаний* уменьшает число степеней свободы системы. Таким образом, можно ожидать, что матрица коэффициентов после второго шага итераций будет иметь порядок $n - 1$, после третьего шага итерации $n - 2$ и т. д. Однако при проведении числовых расчетов, а также при использовании ЭВМ удобнее сохранять порядок матрицы, равный n. Для этого применяется простой прием, суть которого объяснена ниже.

Ограничение на реализацию соответствующих форм колебаний в системе можно ввести, положив равным нулю соответствующие перемещения в главной форме. Из выражений (4.32) и (4.44а) следует соотношение

$$\mathbf{X}_\Gamma = \mathbf{X}_M^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{M}_\Gamma^{-1}\mathbf{X}_M^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}, \qquad \text{(т)}$$

которое связывает главные координаты в векторе $\mathbf{X}_\Gamma$ с исходными координатами вектора $\mathbf{X}$. Для того чтобы исключить появление первой формы колебаний, положим равным нулю компоненту $x_{\Gamma 1}$ в выражении (т) для вектора $\mathbf{X}_\Gamma$:

$$x_{\Gamma 1} = \frac{1}{M_{\Gamma 1}}\mathbf{X}_{M1}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X} = 0. \qquad \text{(у)}$$

Если вектор $\mathbf{X}$ берется в качестве собственного вектора $\mathbf{X}_{Mi}$ (где $i = 2, 3, \ldots, n$), то видно, что это условие положения дополнительной связи совпадает с условием ортогональности первой и высших форм колебаний по отношению к матрице $\mathbf{M}$. Для упрощения полагаем матрицу масс диагональной, тогда развернутая форма выражения (у) имеет вид

$$M_{11}X_{M11}x_1 + M_{22}X_{M21}x_2 + M_{33}X_{M31}x_3 + \cdots + M_{nn}X_{Mn1}x_n = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться всегда, выразим перемещения x_1 через остальные перемещения следующим образом:

$$x_1 = -\frac{M_{22}X_{M21}}{M_{11}X_{M11}}x_2 - \frac{M_{33}X_{M31}}{M_{11}X_{M11}}x_3 - \ldots - \frac{M_{nn}X_{Mn1}}{M_{11}X_{M11}}x_n. \qquad (ф)$$

Подстановкой этого выражения для x_1 в исходные уравнения задачи на собственные значения [см. уравнение (4.99)] получаем n уравнений для $n-1$ неизвестных. Первое из этих уравнений будет представлять собой линейную комбинацию остальных $n-1$ уравнений и поэтому может быть отброшено, в результате чего получается редуцированная система $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными. Однако при определении второй формы колебаний можно проводить итерации для полной системы n линейно зависимых уравнений, не понижая порядка матрицы, поскольку отсутствует первая форма колебаний уравнений. С этой целью представим выражение (ф), дополненное тривиальными соотношениями вида $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, ..., в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad (х)$$

где

$$c_{12} = -\frac{M_{22}X_{M21}}{M_{11}X_{M11}}, \quad c_{13} = \frac{M_{33}X_{M31}}{M_{11}X_{M11}}, \quad \ldots, \quad c_{1n} = \frac{M_{nn}X_{Mn1}}{M_{11}X_{M11}}. \qquad (ц)$$

Первый элемент x_1' стоящего в правой части уравнения (х) вектора-столбца является фиктивным перемещением, которое всегда умножается на ноль. В краткой форме это матричное уравнение имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{B1}\mathbf{X}', \qquad (ч)$$

где матрица $\mathbf{T}_{B1}$ характеризует зависимость x_1, x_2, x_3, ..., x_n от x_2, x_3, ..., x_n. Подставляя в соответствии с выражением (ч) представление для $\mathbf{X}_{Mi}$ в правую часть уравнения (4.99), получаем

$$\mathbf{A}\mathbf{T}_{B1}\mathbf{X}_{Mi} = \lambda_i \mathbf{X}_{Mi}. \qquad (ш)$$

Присутствие в этом соотношении матрицы $\mathbf{T}_{B1}$ обеспечивает наличие линейной зависимости, что необходимо для проведения итераций при нахождении второй формы колебаний. На каждом шаге итерации эта матрица умножается слева на выбранное представление для вектора перемещений и предполагается их ортогональность с первой формой колебаний. Однако для удобства эта матрица используется только один раз — на эту матрицу справа умножается матрица **A**. Матрица $\mathbf{T}_{B1}$ называется *вычищающей*, поскольку ее влияние сказывается в том, что она «вычищает» все относящееся

к первой форме колебаний и тем самым позволяет второй форме стать главной формой колебаний. Таким образом, можно записать

$$\mathbf{A}_1\mathbf{X}'_{Mi} = \lambda_i \mathbf{X}_{Mi}, \tag{4.106}$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}\mathbf{T}_{B1}, \tag{4.107}$$

а матрица $\mathbf{T}_{B1}$ имеет вид (х).

Для того чтобы показать, как применяется этот способ, определим собственное значение и собственный вектор, соответствующие второй форме колебаний системы, показанной на рис. 4.1, *а*. Зная первый собственный вектор $\mathbf{X}_{M1}$, используем его компоненты для построения матрицы $\mathbf{T}_{B1}$ в следующей форме:

$$\mathbf{T}_{B1} = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}802 & -2{,}247 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{щ}$$

Умножая матрицу **A** [см. выражение (р)] справа на матрицу $\mathbf{T}_{B1}$, получим

$$\mathbf{A}_1 = m\delta \begin{bmatrix} 0 & -0{,}802 & -1{,}247 \\ 0 & 0{,}198 & 0{,}247 \\ 0 & 0{,}198 & 0{,}753 \end{bmatrix}. \tag{э}$$

Предположив, что нам ничего неизвестно относительно второй формы колебаний, возьмем первое приближение для вектора перемещений в виде $(\mathbf{X})_1 = \{1; 1; 1\}$, что является плохим приближением для действительного значения собственного вектора. Более разумный выбор этого приближения позволил бы сойтись процессу итераций к точному решению за меньшее число шагов.

Умножая вектор-столбец $(\mathbf{X})_1$ на матрицу $\mathbf{A}_1$ (согласно выражению (4.100)), получим вектор $(\mathbf{Y})_1 = m\delta$ {—2,049; —0,049; 0,951}. Разделив согласно выражению (4.101) последний элемент вектора $(\mathbf{Y})_1$ на последний элемент вектора $(\mathbf{X})_1$, найдем для λ_2 первое приближение $(\lambda_2)_1 = 0{,}951m\delta$. Затем нормализуем вектор $(\mathbf{Y})_1$ путем деления каждой его компоненты на значение последней компоненты [см. выражение (4.102)], что в результате дает второе приближение для вектора перемещений $(\mathbf{X})_2 = \{-2{,}155; -0{,}052; 1{,}000\}$. Эти результаты, а также результаты, получаемые на последующих шагах итераций, представлены в табл. 4.2, причем после пяти шагов итераций процесс еще не сходится. Продолжая этот процесс в течение одиннадцати шагов итераций, получим, что процесс итераций сходится при следующих значениях параметров:

$$\lambda_2 \approx 0{,}643m\delta; \quad p_2^2 = \frac{1}{\lambda_2} \approx 1{,}555\,\frac{k}{m};$$

$$\mathbf{X}_{M2} \approx \{-1{,}247; \ -0{,}555; \ 1{,}000\}. \tag{а'}$$

За исключением способа, которым был пронормирован вектор $\mathbf{X}_{M2}$, эти результаты совпадают с теми, которые были получены в примере 1 (см. п. 4.2).

4.2. Результаты расчетов второй формы колебаний методом последовательных приближений

Приближенное значение вектора $(\mathbf{X})_k$	$(\mathbf{X})_1$	$(\mathbf{X})_2$	$(\mathbf{X})_3$	$(\mathbf{X})_4$	$(\mathbf{X})_5$
$\frac{\mathbf{A}}{m\delta} = m\begin{bmatrix} 0 & -0{,}802 & -1{,}247 \\ 0 & 0{,}198 & -0{,}247 \\ 0 & 0{,}198 & 0{,}753 \end{bmatrix}$	1	—2,155	—1,623	—1,416	—1,326
	1	—0,052	—0,346	—0,461	—0,511
	1	1,000	1,000	1,000	1,000
Собственные значения $(\lambda_2)_k/m\delta$	0,951	0,743	0,684	0,662	0,652

После определения второй формы колебаний ее можно исключить из системы уравнений с помощью процедуры, аналогичной той, которая использовалась для исключения первой формы колебаний. Используя условия введения дополнительных связей $x_{г1} = 0$ и $x_{г2} = 0$, выразим x_2 через компоненты x_3, ..., x_n и представим соотношения между перемещениями в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \cdots \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & d_{23} & \cdots & d_{n2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad (б')$$

где

$$d_{23} = -\frac{M_{33}\,(X_{M11}X_{M32} - X_{M12}X_{M31})}{M_{22}\,(X_{M11}X_{M22} - X_{M12}X_{M21})}, \quad \ldots,$$

$$d_{n3} = -\frac{M_{nn}\,(X_{M11}X_{Mn2} - X_{M12}X_{Mn1})}{M_{22}\,(X_{M11}X_{M22} - X_{M12}X_{M21})}. \qquad (в')$$

Стоящие в скобках выражения являются минорами первых двух столбцов матрицы $\mathbf{X}_M$, которые появляются в процессе получения решений для x_2, выраженных через x_3, ..., x_n. Дополнительное фиктивное перемещение x_2' фигурирует в качестве компонент вектора, стоящего в правой части уравнения (б'). Это уравнение можно переписать в более компактной форме

$$\mathbf{X}' = \mathbf{T}_{B2}\mathbf{X}''. \qquad (г')$$

Матрица $\mathbf{T}_{B2}$ характеризует зависимость x_2, x_3, ..., x_n от x_3, ..., x_n. Подстановкой выражения (г') для $\mathbf{X}_{Mi}$ в левую часть уравнения (4.106) получим

$$\mathbf{A}_2\mathbf{X}''_{Mi} = \lambda_i\mathbf{X}_{Mi}, \qquad (4.108)$$

где

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{T}_{B2}. \qquad (4.109)$$

Теперь уравнение (4.108), в котором отсутствуют члены, описывающие влияние первых двух форм колебаний, можно использовать в итерационной процедуре для определения третьей формы колебаний.

Применяя описанный подход к системе, изображенной на рис. 4.1, *а*, найдем что первое из выражений (в')

$$d_{23} = \frac{0{,}445 \cdot 1{,}000 - (-1{,}247)\,1000}{0{,}445\,(-0{,}555) - (-1{,}247)\,0{,}802} = -\frac{1{,}692}{0{,}753} = -2{,}247,$$

а матрица

$$\mathbf{T}_{B2} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2{,}247 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \qquad (д')$$

Умножая матрицу **A** [см. выражение (э)] справа на матрицу, получим

$$\mathbf{A}_2 = m\delta \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0{,}555 \\ 0 & 0 & -0{,}692 \\ 0 & 0 & 0{,}308 \end{array}\right]. \qquad (\text{е}')$$

Третий столбец матрицы **A** пропорционален третьему собственному вектору, поэтому для определения последней искомой формы колебаний не требуется применять итерации. Более того, третья компонента этого вектора равна собственному значению. Таким образом, имеем

$$\lambda_3 \approx 0{,}308 m\delta, \quad p_2^2 = 1/\lambda_2 \approx 3{,}247 k/m,$$

$$\mathbf{X}_{\text{М3}} \approx \{1{,}802,\ -2{,}247,\ 1{,}000\}. \qquad (\text{ж}')$$

Эти значения совпадают с результатами, полученными в примере 1 (см. п. 4.2), за исключением вектора $\mathbf{X}_{\text{М3}}$, который здесь нормирован иначе.

Если система имеет два или более *одинаковых собственных значения*, они будут в равной степени главными, и собственный вектор, к которому будет сходиться итерационный процесс, в свою очередь зависит от выбранного первого приближенного значения для вектора перемещений. С помощью матрицы $\mathbf{T}_{\text{B}}$ каждый последующий собственный вектор становится ортогональным к предыдущему собственному вектору, причем это имеет место и в том случае, когда имеются кратные собственные значения. Поскольку собственные векторы, соответствующие кратным собственным значениям, часто имеют нулевые компоненты, необходимо внимательно ознакомиться с проведением процесса ортогонализации, чтобы избежать деления на ноль.

В качестве простого примера системы с кратными корнями возьмем систему, рассмотренную в задаче 4.2.9 (см. п. 4.2), и предположим, что три пружины, на которых закреплена масса, расположены вдоль осей x, y и z. Положив $k_1 = k_2 = k_3 = k$, найдем матрицу **A** для этой задачи:

$$\mathbf{A} = \mathbf{FM} = m\delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как можно убедиться простой проверкой, собственные значения для этой системы $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = m\delta$. Однако собственные векторы здесь неизвестны и их надо определить, используя тот же подход, что и при решении предыдущего примера. Выбор приближенного выражения для вектора в виде $\{x_1, y_1, z_1\} = \{1, 1, 1\}$ позволяет удовлетворить уравнению (4.103), поэтому этот вектор становится первым собственным вектором системы. Первая матрица $\mathbf{T}_{\text{B1}}$ [см. выражения (х), (ц) и (ч)] имеет вид

$$\mathbf{T}_{\text{B1}} = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

а матрицу **A** находим с помощью выражения (4.107):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}\mathbf{T}_{\text{B1}} = m\delta \left[\begin{array}{c:cc} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Для определения второй формы колебаний опять возьмем первое приближение для вектора перемещений в форме $\{x_1; y_1; z_1\} = \{1; 1; 1\}$, тогда на втором шаге

итераций находим второй собственный вектор $\{x_1, y_1, z_1\} = \{-2, 1, 1\}$. Вторая матрица $\mathbf{T}_{B2}$ [см. выражения (б′), (в′) и (г′)] принимает вид

$$\mathbf{T}_{B2} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

С помощью этой матрицы и выражения (4.109) находим матрицу $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{T}_{B2} = m\delta \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Таким образом, третий собственный вектор равен $\{x_1, y_1, z_1\} = \{0, -1, 1\}$ и ортогонален двум остальным собственным векторам относительно матрицы **M**. Подобная система собственных векторов не является единственной, но она удовлетворяет условиям ортогональности, выполнение которых необходимо для собственных векторов при использовании метода нормальных форм колебаний.

Итерационный процесс понижения числа степеней свободы системы, описанный выше, теоретически можно применять многократно до тех пор, пока не будут определены все частоты и формы колебаний системы со многими степенями свободы. Однако каждое собственное значение и собственный вектор, определяемые таким образом, являются только приближенными. Поэтому проводимая на каждом шаге ортогонализация будет неполной. Более того, каждое понижение числа степеней свободы сопровождается ошибками округления, которые накапливаются с каждым шагом. С вопросом о точности связано и то обстоятельство, что для получения большого числа частот и форм колебаний требуется выполнять необычно большое число арифметических операций. Следовательно, как об этом уже говорилось в начале данного параграфа, итерационный метод лучше всего использовать в том случае, когда требуется определить только несколько низших форм колебаний. Кроме того, необходимость выполнения большого числа арифметических операций в случае систем с очень большим числом степеней свободы требует применения ЭВМ, особенно тогда, когда трудно предугадать формы колебаний. Поэтому в приложении к книге дан текст программы на языке БЕЙСИК, под названием EIGIT3, которая позволяет вычислять три первые собственные значения и собственные векторы матрицы с помощью итерационного метода.

Хотя итерационный метод позволяет находить только несколько собственных значений и собственных векторов системы, это не мешает использовать метод нормальных форм колебаний при определении динамических перемещений в системе. Если найдены n_1 форм колебаний, где $n_1 \leqslant n$, матрица форм (или $\mathbf{X}_M$) содержит вместо n только n_1 столбцов. Такая прямоугольная матрица не имеет обратной матрицы, поэтому вместо выражений, содержащих обратные матрицы, следует использовать выражения (4.44а) и (4.44б), в которых имеются транспонированные матрицы $\mathbf{X}_M^T$ и $\mathbf{X}_H^T$; при этом удается определить только n_1 первых нормальных форм колебаний, тогда как влиянием остальных форм колебаний на суммарное динамическое

перемещение пренебрегаем. Подобный упрощенный вариант метода нормальных форм колебаний будем называть *методом усеченных форм колебаний*. В этой связи в задачах для систем, в которых имеется только несколько собственных форм колебаний, остро встает проблема больших чисел.

Здесь не было рассмотрено применение итерационного метода к задачам на собственные значения, представленным в виде уравнений движения в усилиях [см. уравнение (4.17)], поскольку главным при этом были бы наибольшие собственные значения p_n^2. В задаче, в которой проще определяются коэффициенты жесткости, а не податливости, можно всегда обратить неособенную матрицу жесткостей $\mathbf{S}$ и тем самым получить матрицу податливостей $\mathbf{F}$, которая имеется в уравнении (4.103). С другой стороны, для *полуопределенной системы*, матрица жесткостей которой является особенной, требуется проводить специальное исследование. В этом случае матрицы жесткостей и податливостей следует редуцировать путем перехода к новой системе координат, чтобы исключить формы движения как абсолютно жесткого тела, которые можно определить с помощью простого рассмотрения и составить процедуру для исключения этих форм.

Допустим известно, что колеблющаяся система имеет только одну форму движения как абсолютно жесткого тела, которая обозначена как первый собственный вектор $\mathbf{X}_{M1}$. Эту форму исключаем из системы уравнений движения в усилиях, задав специальное условие дополнительного закрепления в виде $x_{r1} = 0$. Затем строим *усеченную матрицу преобразования* $\mathbf{T}_{оп1}$, состоящую из подматрицы $n \times (n-1)$ матрицы $\mathbf{T}_{B1}$ справа от разделяющей линии в выражении (х). В данном случае воспользуемся соотношением

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{оп1}\mathbf{X}_{оп1}, \tag{4.110}$$

выражающим зависимость вектора $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ от вектора $\mathbf{X}_{оп1} = \{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. Последний вектор не содержит фиктивного перемещения x_1', которое использовалось в матрице $\mathbf{T}_{B1}$. Поскольку компоненты матрицы $\mathbf{T}_{оп1}$ не зависят от времени, можно также записать

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{T}_{оп1}\ddot{\mathbf{X}}_{оп1}, \tag{з′}$$

где $\ddot{\mathbf{X}}_{оп1} = \{\ddot{x}_2, \ddot{x}_3, \ldots, \ddot{x}_n\}$. Подставляя выражения (4.110) и (з′) в уравнения движения в усилиях, записанные для случая свободных колебаний [см. уравнение (4.30)], и умножая результат слева на матрицу $\mathbf{T}_{оп1}^{\mathrm{T}}$, получим

$$\mathbf{T}_{оп1}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{T}_{оп1}\ddot{\mathbf{X}}_{оп1} + \mathbf{T}_{оп1}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{T}_{оп1}X_{оп1} = \mathbf{0}$$

или

$$\mathbf{M}_{оп1}\ddot{\mathbf{X}}_{оп1} + \mathbf{S}_{оп1}X_{оп1} = \mathbf{0}, \tag{4.111}$$

где

$$\mathbf{M}_{оп1} = \mathbf{T}_{оп1}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{T}_{оп1}, \quad \mathbf{S}_{оп1} = \mathbf{T}_{оп1}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{T}_{оп1}. \tag{4.112}$$

Здесь $\mathbf{M}_{оп1}$ и $\mathbf{S}_{оп1}$ — квадратные симметричные матрицы порядка $n-1$, а уравнения (4.111) представляют собой уравнения движения, преобразованные к редуцированной системе координат, в кото-

рых исключены перемещения как абсолютно жесткого тела. В этой системе координат матрицу жесткостей $\mathbf{S}_{оп1}$ можно обратить, в результате получим матрицу податливостей

$$\mathbf{F}_{оп1} = \mathbf{S}_{оп1}^{-1}. \tag{4.113}$$

Для подготовки применения ее в дальнейшем к решению задачи на собственные значения, соответствующей уравнениям (4.111), методом последовательных приближений запишем произведение

$$\mathbf{A}_{оп1} = \mathbf{F}_{оп1}\mathbf{M}_{оп1}. \tag{4.114}$$

Собственные векторы, определяемые с помощью подобной процедуры, преобразуются к исходным координатам согласно выражению (4.110).

Если в системе имеет место вторая форма движения как жесткого тела, определяемая собственным вектором $\mathbf{X}_{M2}$, требуется ввести второе условие, ограничивающее перемещения, в виде $x_{Г2} = 0$. Усеченная матрица преобразования $\mathbf{T}_{оп2}$, соответствующая этому условию, представляет подматрицу порядка $(n-1) \times (n-2)$ матрицы $\mathbf{T}_{B2}$, расположенную ниже и правее разделительных штриховых линий в выражении (6′). В этом случае имеем соотношение

$$\mathbf{X}_{оп2} = \mathbf{T}_{оп2}\mathbf{X}_{оп2}, \tag{4.115}$$

выражающее связь между векторами $\mathbf{X}_{оп1} = \{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ и $\mathbf{X}_{оп2} = \{x_3, \ldots, x_n\}$. Повторяя приведенные выше рассуждения, можем свести матрицы $\mathbf{M}_{оп1}$ и $\mathbf{S}_{оп1}$ к матрицам $\mathbf{M}_{оп2}$ и $\mathbf{S}_{оп2}$ с помощью следующих преобразований:

$$\mathbf{M}_{оп2} = \mathbf{T}_{оп2}^{т}\mathbf{M}_{оп1}\mathbf{T}_{оп2}, \quad \mathbf{S}_{оп2} = \mathbf{T}_{оп2}^{т}\mathbf{S}_{оп1}\mathbf{T}_{оп2}. \tag{4.116}$$

С другой стороны, подставив выражение (4.115) в соотношение (4.110), получим

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{оп2}^{*}\mathbf{X}_{оп2}, \tag{4.117}$$

где

$$\mathbf{T}_{оп2}^{*} = \mathbf{T}_{оп1}\mathbf{T}_{оп2}. \tag{4.118}$$

Комбинированная матрица $\mathbf{T}_{оп2}^{*}$ порядка $n \times (n-2)$ выражает зависимость вектора $\mathbf{X}$ от вектора $\mathbf{X}_{оп2}$ и равна произведению матриц $\mathbf{T}_{оп1}$ и $\mathbf{T}_{оп2}$ порядков соответственно $n \times (n-1)$ и $(n-1) \times (n-2)$. С помощью этой комбинированной матрицы можно преобразовать матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$ непосредственно в матрицы $\mathbf{M}_{оп2}$ и $\mathbf{S}_{оп2}$ с помощью следующих преобразований:

$$\mathbf{M}_{оп2} = (\mathbf{T}_{оп2}^{*})^{т}\mathbf{M}\mathbf{T}_{оп2}^{*}, \quad \mathbf{S}_{оп2} = (\mathbf{T}_{оп2}^{*})^{т}\mathbf{S}\mathbf{T}_{оп2}^{*}. \tag{4.119}$$

Подобный прием можно распространить на случай произвольного числа форм движений как абсолютно жесткого тела, существующих в данной системе.

Для иллюстрации этого метода предположим, что первая пружина в системе, изображенной на рис. 4.1, *а*, имеет жесткость $k_1 = 0$. Если $k_2 = k_3 = k$ и $m_1 = m_2 = m_3 = m$, то матрицы жесткостей и масс имеют вид

$$\mathbf{S} = k\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся, что система является полуопределенной и что форма, соответствующая движению как абсолютно жесткого тела, определяется следующим вектором:

$$\mathbf{X}_{M1} = \{1;\ 1;\ 1\}.$$

С учетом сказанного редуцированная матрица преобразования $\mathbf{T}_{оп1}$ порядка 3×2 имеет вид

$$\mathbf{T}_{оп1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (и')$$

Используя эту матрицу, преобразуем матрицы масс и жесткостей с помощью выражения (4.112) к виду

$$\mathbf{M}_{оп1} = m \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad (к')$$

$$\mathbf{S}_{оп1} = k \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (л')$$

Обращая последнюю матрицу, получим матрицу податливостей

$$\mathbf{F}_{оп1} = \mathbf{S}_{оп1}^{-1} = \frac{\delta}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}. \qquad (м')$$

Далее, в соответствии с выражением (4.114) найдем произведение

$$\mathbf{A}_{оп1} = \mathbf{F}_{оп1}\mathbf{M}_{оп1} = \frac{m\delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (н')$$

Легко проверить либо прямым решением, либо методом последовательных приближений, что собственные значения этой матрицы суть $\lambda_2 = m\delta$ и $\lambda_3 = m\delta/3$, а собственные векторы $(\mathbf{X}_{оп1})_{M2} = \{0, -1\}$, $(\mathbf{X}_{оп1})_{M3} = \{-2, 1\}$. Преобразуя эти векторы к исходным координатам с помощью выражения (4.110), найдем

$$\mathbf{X}_{M2} = \mathbf{T}_{оп1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{M3} = \mathbf{T}_{оп1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (о')$$

что совпадает с решением, полученным в последней части примера 1 в п. 4.2.

ЗАДАЧИ

4.7.1. Используя метод последовательных приближений, определить собственные значения и собственные векторы для системы, изображенной на рис. 4.2, *а*. Принять $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 2m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$.

Ответ: $\lambda_{1,\,2,\,3} \approx 1{,}707ml/T;\ 0{,}500ml/T;\ 0{,}293ml/T$.

4.7.2. Решить задачу 4.2.2 методом последовательных приближений, приняв $m_1 = m_3 = 2m$, $m_2 = m$.

Ответ: $\lambda_{1,\,2,\,3} \approx 2{,}618m\delta;\ 1{,}000m\delta;\ 0{,}382m\delta$.

4.7.3. Решить задачу 4.2.6 методом последовательных приближений, приняв $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = 2m$.

Ответ: $\lambda_{1,\,2,\,3} \approx 39{,}68\alpha;\ 2{,}815\alpha;\ 0{,}501\alpha$ $[\alpha = ml^3/(768EI)]$.

4.7.4. Решить задачу 4.2.7 методом последовательных приближений, приняв $m_1 = m_2 = 3m$, $m_3 = m$.

Ответ: $p^2_{1,\,2,\,3} \approx 0{,}246g/l;\ 1{,}252g/l;\ 2{,}169g/l$.

4.7.5. Решить задачу 4.2.8 методом последовательных приближений, приняв $m_1 = m_2 = 2m$, $m_3 = m$.

Ответ: $\lambda_{1,2,3} \approx 19{,}12\alpha;\ 4{,}000\alpha;\ 1{,}884\alpha$ $[\alpha = mh^3/(144EI)]$.

4.7.6. Решить задачу 4.2.10 методом последовательных приближений, приняв $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$.

Ответ: $\lambda_{1,2,3} \approx 76{,}32\alpha;\ 8{,}978\alpha;\ 0{,}700\alpha$ $[\alpha = ml^3/(48EI)]$.

4.7.7. Решить задачу 4.2.11, используя метод исключения форм движения как абсолютно жесткого тела, описанный в конце этого параграфа. Принять $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 2m$.

Ответ: $p^2_{1,2,3} = 0;\ 0;\ 6EI/(ml^3)$.

4.8. ДЕМПФИРОВАНИЕ В СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Метод нормальных форм колебаний, рассмотренный в пп. 4.3—4.6, применялся там только при исследованиях систем со многими степенями свободы без демпфирования. Часто влияние демпфирования на динамическое поведение колеблющихся систем незначительно и им можно пренебречь. Например, влияние небольшого демпфирования на динамическое поведение системы при действии возмущающей силы на небольшом промежутке времени, очевидно, не будет значительным. Кроме того, демпфирование играет незначительную роль при установившемся динамическом поведении системы и при действии на нее возмущающей силы в виде периодической функции, когда частота возмущающей функции не близка к частоте резонанса. Однако при периодическом возмущении с частотой собственных колебаний или близкой к ней демпфирование приобретает первостепенное значение и должно учитываться. Поскольку характер его влияния обычно заранее неизвестен, демпфирование обычно включается в рассмотрение при динамических исследованиях до тех пор, пока не будет выявлено его истинное значение.

В гл. 3 рассматривались свободные и вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы при вязком демпфировании, теперь займемся исследованием поведения систем с демпфированием, имеющих n степеней свободы. Когда в состоящей из трех масс системе силы сопротивления создаются гидравлическими амортизаторами (рис. 4.3), уравнения движения в усилиях можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q}, \tag{4.120}$$

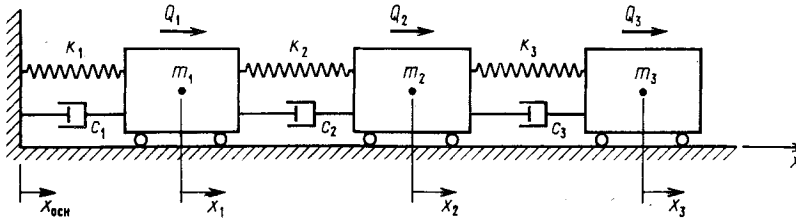


Рис. 4.3

где матрица демпфирования имеет обобщенную форму

$$\mathbf{C}=\begin{vmatrix} C_{11}\,C_{12}\,C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21}\,C_{22}\,C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31}\,C_{32}\,C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ C_{n1}C_{n2}C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \text{(а)}$$

Коэффициенты влияния этой симметричной матрицы были определены выше, в п. 3.7.

Сначала рассмотрим специальные системы, в которых матрицы демпфирования являются линейными комбинациями матриц масс и жесткостей

$$\mathbf{C}=a\mathbf{M}+b\mathbf{S}, \qquad (4.121)$$

где a и b — постоянные. Подобного типа демпфирование называется *пропорциональным* в силу линейности зависимости между матрицами $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$. В этом случае уравнения движения (4.120) могут быть приведены к несвязанной форме с помощью преобразования, аналогичного применявшемуся для систем без демпфирования *. Тогда эти уравнения, переписанные в главных координатах, примут вид

$$\mathbf{M}_\Gamma\ddot{\mathbf{X}}_\Gamma+\mathbf{C}_\Gamma\dot{\mathbf{X}}_\Gamma+\mathbf{S}_\Gamma\mathbf{X}_\Gamma=\mathbf{Q}_\Gamma, \qquad (4.122)$$

где

$$\mathbf{C}_\Gamma=\mathbf{X}_\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathbf{C}\mathbf{X}_\mathrm{M}=a\,\mathbf{M}_\Gamma+b\,\mathbf{S}_\Gamma. \qquad \text{(б)}$$

Здесь диагональная матрица $\mathbf{C}_\Gamma$, которую будем называть *главной матрицей демпфирования*, представляет собой линейную комбинацию матриц $\mathbf{M}_\Gamma$ и $\mathbf{S}_\Gamma$. Когда матрица форм колебаний нормируется по отношению к матрице $\mathbf{M}$, матрицу демпфирования в нормальных координатах запишем как

$$\mathbf{C}_\Gamma=\mathbf{X}_\mathrm{H}^\mathrm{T}\mathbf{C}\mathbf{X}_\mathrm{H}=a\,\mathbf{I}+b\,\mathbf{p}^2. \qquad (4.123)$$

Диагональная матрица $\mathbf{p}^2$ в этом выражении имеет в качестве элементов характеристические значения p_i^2 для той же системы без демпфирования [см. выражение (4.36)]. Поэтому i-е уравнение движения в нормальных координатах будет иметь вид

$$\ddot{x}_{\Gamma i}+(a+bp_i^2)\,\dot{x}_{\Gamma i}+p_i^2x_{\Gamma i}=q_{\Gamma i}, \quad i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n. \qquad \text{(в)}$$

Чтобы сделать это уравнение аналогичным уравнению для системы с одной степенью свободы [см. уравнение (1.61)], введем обозначение

$$C_{\Gamma i}=2n_i=a+bp_i^2, \quad \gamma_i=n_i/p_i, \qquad \text{(г)}$$

где $C_{\Gamma i}=2n_i$ — *постоянная демпфирования по i-й форме*, γ_i — соответствующее значение *коэффициента демпфирования*. Подставляя первое из этих обозначений в уравнение (в), получим

$$\ddot{x}_{\Gamma i}+2n_i\dot{x}_{\Gamma i}+p_i^2x_{\Gamma i}=q_{\Gamma i}, \quad i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n. \qquad (4.124)$$

* См. кн. **Rayleigh J. W. S.** The theory of sound, pp. 130—132, цитированную в п. 1.4.

Каждое из этих n уравнений является несвязанным со всеми остальными. Поэтому динамическое перемещение, соответствующее i-й форме колебаний, можно найти точно так же, как это делалось для системы с одной степенью свободы с вязким демпфированием.

Используя обозначения (г), можно выразить коэффициент демпфирования γ_i через постоянные a и b:

$$\gamma_i = \frac{a + bp_i^2}{2p_i}. \tag{4.125}$$

Это выражение полезно при изучении влияния на демпфирование по соответствующим формам изменения постоянных a и b из выражения (4.121). Полагая, например, постоянную a равной нулю при $b \neq 0$, получаем, что матрица демпфирования пропорциональна матрице жесткости. Подобный тип демпфирования иногда называют *относительным*, поскольку последнее связывают с относительными координатами скоростей перемещений. Таким образом, при условии $a = 0$ выражение (4.125) имеет вид

$$\gamma_i = \frac{b}{2} p_i \tag{д}$$

и означает, что коэффициент демпфирования по каждой главной форме пропорционален круговой частоте этой формы колебаний без демпфирования. Следовательно, динамические перемещения, соответствующие высшим формам колебаний системы, будут демпфироваться сильнее и поэтому быстрее затухать, чем перемещения, соответствующие низшим формам колебаний.

С другой стороны, полагая постоянную b равной нулю при $a \neq 0$, получаем, что матрица демпфирования пропорциональна матрице масс. Такой тип демпфирования иногда называют *абсолютным*, поскольку оно связано с абсолютными координатами скоростей перемещений. В этом случае выражение (4.125) упрощается и принимает вид

$$\gamma_i = \frac{a}{2} p_i. \tag{е}$$

Оно означает, что коэффициент демпфирования по каждой форме колебаний обратно пропорционален частоте колебаний без демпфирования. При таком условии низшие формы колебаний системы будут подавляться сильнее, чем высшие формы.

Как было обнаружено *, условие, представляемое выражением (4.121), является достаточным, но не будет необходимым условием существования главных форм колебаний в демпфированных системах. Существенным условием, вытекающим из наличия главных форм колебаний, является то, что преобразование матрицы демпфирования к диагональному виду также приводит к несвязанной системе уравнений движения. Это условие является менее ограничи-

* **Caughey T. K.** Classical normal modes in damped linear dynamic systems. — Journal Appl. Mech. Trans. ASME, 1960, v. 27, N. 2, pp. 269—271; то же, 1965, v. 32, N. 3, pp. 583—588.

тельным, чем описываемое выражением (4.121), и представляет больше возможностей.

Однако в самом общем случае коэффициенты влияния демпфирования таковы, что матрица демпфирования не может быть приведена к диагональному виду одновременно с матрицами масс и жесткостей. Как было показано в п. 3.7, собственные формы колебаний системы имеют такие соотношения между собой, которые трудно поддаются анализу. Собственные значения для подобного рода систем являются либо действительными и отрицательными, либо комплексными с отрицательными действительными частями чисел. Комплексные собственные значения являются комплексно сопряженными числами [см. выражения (3.42а) и (3.42в)], а соответствующие им собственные векторы также являются комплексно сопряженными. Для исследования систем со значительным демпфированием, где обусловленные влиянием сил сопротивления мнимые части имеют большую величину, можно воспользоваться подходом, описанным в статье К. Фосса *. Этот подход состоит в преобразовании системы n уравнений движения второго порядка в систему $2n$ несвязанных уравнений первого порядка.

Нет необходимости исследовать слабо демпфированные системы таким сложным способом, особенно с учетом того обстоятельства, что еще недостаточно известна сама природа явления демпфирования в физических системах. Простейшим является подход, основанный на предположении, что уравнения движения приводятся к несвязанному виду с помощью матрицы форм колебаний, полученной для системы без демпфирования. Другими словами, матрица $\mathbf{X}_\mathrm{M}$ считается ортогональной не только матрицам $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$ [см. выражения (4.23) и (4.24)], но также и матрице $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{X}_{\mathrm{M}j}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{X}_{\mathrm{M}i} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}i}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{X}_{\mathrm{M}j} = \mathbf{0}, \quad i \neq j. \tag{4.126}$$

Это допущение означает, что все внедиагональные элементы матрицы, получающейся при преобразовании вида $\mathbf{C}_\Gamma = \mathbf{X}_\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{X}_\mathrm{M}$, малы и ими можно пренебречь. Кроме того, удобнее получать значения коэффициентов демпфирования γ_i для собственных форм колебаний из экспериментов, чем вычислять коэффициенты влияния демпфирования для получения матрицы $\mathbf{C}$. Поэтому перепишем уравнение (4.124) в форме, в которой используется коэффициент γ_i:

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + 2\gamma_i p_i \dot{x}_{\Gamma i} + p_i^2 x_{\Gamma i} = q_{\Gamma i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{4.127}$$

Для того чтобы это уравнение можно было применять к системе со слабым демпфированием, будем считать, что для всех форм колебаний коэффициенты демпфирования принимают значения $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 0{,}20$. Характер демпфирования, которому соответствуют принятые значения коэффициента демпфирования, имеет большое практическое значение и называется *демпфированием по формам колебаний.*

* **Foss K. A.** Coordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems. — Journ. Appl. Mech. Trans. ASME, 1958, v. 25, N. 3, pp. 361—364.

Следует напомнить, что этот подход основан на применении нормальных координат для системы без демпфирования и что значения коэффициентов демпфирования задаются применительно к этим координатам.

Когда исследования проводят, рассматривая демпфирование по соответствующим формам колебаний, иногда требуется найти матрицу демпфирования в исходных координатах. Ее можно получить с помощью обратного преобразования вида

$$\mathbf{C} = (\mathbf{X}_{\text{н}}^{-1})^{\text{т}} \mathbf{C}_{\text{г}} \mathbf{X}_{\text{н}}^{-1}. \qquad \text{(ж)}$$

Однако вместо того, чтобы пытаться обращать матрицу $\mathbf{X}_{\text{н}}$, воспользуемся соотношением $\mathbf{X}_{\text{н}}^{-1} = \mathbf{X}_{\text{н}}^{\text{т}}\mathbf{M}$ [см. выражение (4.44б)], и тогда выражение (ж) можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{X}_{\text{н}}\mathbf{C}_{\text{г}}\mathbf{X}_{\text{н}}^{\text{т}}\mathbf{M}. \qquad (4.128)$$

Преобразование такого вида особенно удобно тогда, когда во внимание принимаются не все собственные формы колебаний, например при уменьшении форм колебаний.

4.9. ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Как уже говорилось в предыдущем параграфе, демпфирование становится исключительно важным в том случае, когда периодические возмущения имеют частоту, близкую к одной из частот собственных колебаний системы со многими степенями свободы. Вопрос об установившихся вынужденных колебаниях систем с двумя степенями свободы исследовался в п. 3.8 с помощью метода передаточных функций. Этот подход может быть легко распространен на системы с n степенями свободы, при этом основные соотношения [см. выражения (3.51) и (3.52)] сохраняют свою форму неизменной. Однако решение в рамках указанного подхода требует обращения матрицы порядка $n \times n$, содержащей комплексные числа. Если собственные значения и собственные векторы системы предварительно были определены тем или иным способом, подходу с использованием передаточных функций лучше предпочесть метод нормальных форм колебаний. Зная частоту изменения возмущений и собственную частоту колебаний системы, можно непосредственным путем определить динамические перемещения по формам колебаний, чьи частоты близки к частоте возмущения. Ниже будут рассмотрены возмущения, имеющие вид либо одной гармонической функции, либо произвольного вида периодических функций, при этом будет предполагаться, что система имеет либо пропорциональное демпфирование, либо демпфирование по формам колебаний, аналогичное тому, о котором говорилось в предыдущем параграфе.

Если на систему со слабым демпфированием действуют силы, каждая из которых пропорциональна одной гармонической функции $\cos \omega t$, вектор усилий $\mathbf{Q}$ можно представить в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \cos \omega t, \qquad \text{(а)}$$

где

$$\mathbf{P} = \{P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n\}. \qquad (б)$$

В выражении (а) величины P представляют собой скалярные множители перед функциями $\cos \omega t$. Преобразование уравнения движения в условиях к нормальным координатам позволяет записать типичное уравнение движения для соответствующей формы колебаний

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + 2n_i \dot{x}_{\Gamma i} + p_i^2 x_{\Gamma i} = q_{\Gamma i} \cos \omega t, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n, \qquad (4.129)$$

где $q_{\Gamma i}$ — постоянная величина. Это уравнение совпадает по виду с уравнением (1.42). Поэтому представление для i-й формы колебаний системы с демпфированием при установившемся поведении можно взять в следующем виде:

$$x_{\Gamma i} = (q_{\Gamma i}/p_i^2)\,\beta_i \cos(\omega t - \theta_i), \qquad (4.130)$$

где коэффициент усиления

$$\beta_i = 1/\sqrt{(1 - \omega^2/p_i^2)^2 + (2\gamma_i \omega/p_i)^2}, \qquad (4.131)$$

а фазовый угол

$$\theta_i = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma_i \omega/p_i}{1 - \omega^2/p_i^2}. \qquad (4.132)$$

Выражения (4.130)—(4.132) получены, соответственно, из выражений (1.46)—(1.48). Выражение (4.130) для динамических перемещений можно затем преобразовать с помощью известной процедуры вновь к исходным координатам.

Для того чтобы определить перемещения по форме, имеющей круговую частоту p_i, наиболее близкую к круговой частоте изменения возмущений, следует использовать только столбец $\mathbf{X}_{Hi}$ в матрице форм при преобразованиях к нормальным координатам и наоборот. Вследствие сказанного выражение (4.64) принимает вид

$$q_{\Gamma i} = \mathbf{X}_{Hi}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}, \qquad (4.133)$$

а выражение (4.58) в п. 4.4 запишем в форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{Hi} x_{\Gamma i}. \qquad (4.134)$$

При необходимости этот процесс можно повторить и для других форм колебаний, чьи частоты близки к частоте ω.

Когда вместо уравнений движения в усилиях используются уравнения в перемещениях, вектор гармонических перемещений принимает вид

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{FQ} = \mathbf{FP} \cos \omega t = \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{ст}} \cos \omega t, \qquad (в)$$

где $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{ст}}$ — вектор перемещений, возникающих при статическом приложении сил $\mathbf{P}$. Поскольку к нормальным координатам перемещения преобразуются с помощью обратной матрицы $\mathbf{X}_H^{-1} = \mathbf{X}_H^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$, выражение (4.133) в данном случае примет вид

$$\delta_{\Gamma i} = \mathbf{X}_{Hi}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{ст}}, \qquad (4.135)$$

где $\delta_{\Gamma i}$ — постоянная величина. Эквивалентную нагрузку, соответствующую i-й нормальной форме, находим из выражения (4.77):

$$q_{\Gamma\delta i} = p_i^2 \delta_{\Gamma i}. \qquad \text{(г)}$$

Поэтому динамическое перемещение системы с демпфированием по i-й нормальной форме установившихся колебаний [см. выражение (4.130)]

$$x_{\Gamma i} = \delta_{\Gamma i} \beta_i \cos(\omega t - \theta_i). \qquad (4.136)$$

Преобразование этого перемещения вновь к исходной системе координат проводится в соответствии с выражением (4.134).

Рассмотрим теперь систему со слабым демпфированием, на которую действуют нагрузки, каждая из которых пропорциональна произвольного вида периодической функции $f(t)$. Тогда для вектора усилий $\mathbf{Q}$ можно записать следующее выражение:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}(t) = \mathbf{P} f(t), \qquad \text{(д)}$$

где вектор $\mathbf{P}$ имеет вид (б). Как и в п. 1.1, представим функцию $f(t)$ в виде ряда Фурье [см. выражение (1.58)]:

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{m} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t). \qquad (4.137)$$

Коэффициенты a_j, b_j и a_0 находим из выражений, аналогичных (1.59а)—(1.59в).

Преобразуя уравнения движения в условиях к нормальным координатам, получаем уравнение для произвольной формы колебаний

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + 2n_i \dot{x}_{\Gamma i} + p_i^2 x_{\Gamma i} = q_{\Gamma i} f(t), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \qquad (4.138)$$

где $q_{\Gamma i}$ — постоянные величины. Из решения задачи 1.11.6 следует, что динамическое перемещение по i-й форме колебаний системы с демпфированием при установившемся состоянии можно представить в форме

$$x_{\Gamma i} = \frac{q_{\Gamma i}}{p_i^2} \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} [a_j \cos(j\omega t - \theta_{ij}) + b_j \sin(j\omega t - \theta_{ij})] \right\}, \qquad (4.139)$$

где коэффициент усиления

$$\beta_{ij} = 1/\sqrt{(1 - j^2\omega^2/p_i^2)^2 + (2\gamma_i j\omega/p_i)^2}, \qquad (4.140)$$

а фазовый угол

$$\theta_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma_i j\omega/p_i}{1 - j^2\omega^2/p_i^2}. \qquad (4.141)$$

Поскольку слагаемые, входящие в выражение (4.139) для динамических перемещений по i-й форме, дают вклады, кратные друг другу, то в этом случае возникновение резонанса (при $j\omega \approx p_i$) имеет гораздо большую вероятность в случае общего вида периодической функции и менее вероятно в случае, когда возмущения представляются одной гармонической функцией. Поэтому заранее трудно предсказать, какая из собственных форм колебаний окажет наиболь-

шее влияние на поведение системы. Однако после того, как функция возмущающей силы представлена в виде ряда Фурье, можно сравнить каждую частоту $j\omega$ с частотой p_i и отсюда сделать вывод о возможности возникновения больших вынужденных колебаний.

Если используются уравнения движения в перемещениях, вектор периодических перемещений Δ можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_{ст} f(t), \qquad (е)$$

где $\Delta_{ст}$ имеет указанный ранее смысл. Рассуждая, как и выше, видим, что в выражении (4.139) величину $q_{Гi}/p_i^2$ следует заменить на $\delta_{Гi}$. Во всех случаях полученные результаты преобразуются к исходным координатам с помощью уравнения (4.134).

Пример 1. Предположим, что на показанную на рис. 4.3 систему действуют возмущающие силы, описываемые периодическими функциями $Q_1 = Q_2 = Q_3 = P\cos\omega t$, где $\omega = 1{,}25\sqrt{k/m}$. Исследовать установившееся движение масс, предполагая, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ и коэффициент демпфирования по каждой главной форме $\gamma_i = 0{,}001$ $(i = 1, 2, 3)$.

Решение. Квадрат круговой частоты возмущающей нагрузки ($\omega^2 = 1{,}5625k/m$) очень близок ко второму собственному значению системы ($p_2^2 = 1{,}555k/m$), найденному в примере 1 (см. п. 4.2). Следовательно, можно ожидать, что основной вклад в результирующие динамические перемещения будет давать вторая форма колебаний, несмотря на то, что характер изменения во времени возмущающих сил аналогичен первой форме колебаний системы. С помощью выражения (4.133) определяем нагрузки, соответствующие второй нормальной форме колебаний системы:

$$q_{Г2} = \mathbf{X}_{H2}^{T}\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{m}}[0{,}737 \quad 0{,}328 \quad -0{,}591]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}P = 0{,}474\frac{P}{\sqrt{m}}.$$

Согласно выражению (4.131) коэффициент усиления для второй формы колебаний

$$\beta_2 = 1/\sqrt{(1 - 1{,}5625/1{,}555)^2 + 0{,}02^2 \cdot 1{,}5625/1{,}555} =$$
$$= 1/\sqrt{0{,}004823^2 + 0{,}02006^2} = 48{,}50.$$

Из выражения (4.130) определяем динамические перемещения, соответствующие второй форме колебаний, при установившемся движении демпфированной системы

$$x_{Г2} = \frac{0{,}474 \cdot 48{,}50}{1{,}555}\frac{P}{k}\sqrt{m}\cos(\omega t - \theta_2) = 14{,}77\,(P/k)\sqrt{m}\cos(\omega t - \theta_2),$$

где [см. выражение (4.132)] имеем

$$\theta_2 = \operatorname{arctg}\frac{0{,}02006}{0{,}004823} = \operatorname{arctg} 4{,}159 = 76°29'.$$

Преобразуя в соответствии с выражением (4.134) перемещения по второй форме колебаний к исходным координатам, найдем

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{H2}x_{Г2} = \begin{bmatrix}10{,}89\\4{,}84\\-8{,}73\end{bmatrix}\frac{P}{k}\cos(\omega t - \theta_2). \qquad (ж)$$

Можно видеть, что наличие малого по величине демпфирования в данной системе оказывает большое влияние на динамические перемещения, соответствующие второй форме колебаний. Если бы в этой системе демпфирование отсутствовало, коэффициент усиления был бы равен $\beta_2 = 1/0{,}004823 = 207{,}3$, а фазовый угол $\theta_2 = 0$.

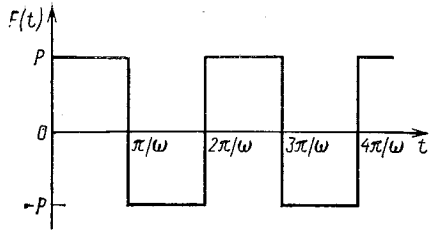


Рис. 4.4

Поступая аналогичным образом, можем определить динамические перемещения, соответствующие первой форме колебаний:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0{,}398 \\ 0{,}717 \\ 0{,}895 \end{bmatrix} \frac{P}{k} \cos(\omega t - \theta_1) \qquad (з)$$

и третьей форме колебаний

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0{,}0637 \\ -0{,}0794 \\ 0{,}0353 \end{bmatrix} \frac{P}{k} \cos(\omega t - \theta_3). \qquad (и)$$

Амплитуды компонент обоих этих векторов малы по сравнению с амплитудами из выражения (ж). Отсюда следует, что демпфирование оказывает незначительное влияние на формы колебаний (з) и (и).

Пример 2. На рис. 4.4 представлен график изменения во времени возмущающей силы в виде периодической функции с прямоугольной формой волны. Исследовать установившееся движение системы с демпфированием (см. рис. 4.3) по каждой из нормальных форм колебаний, если возмущающая сила указанного вида приложена к первой массе.

Решение. Раскладывая функцию в ряд Фурье (см. задачу 1.11.2), получим

$$F(t) = Pf(t) = \frac{4P}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right). \qquad (к)$$

Раскладывая вектор нагрузки по нормальным координатам, найдем

$$\mathbf{Q}_\Gamma = \mathbf{X}_\mathrm{H}^\mathrm{T}\mathbf{Q} = \mathbf{X}_\mathrm{H}^\mathrm{T}\begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\mathrm{H}11} \\ X_{\mathrm{H}12} \\ X_{\mathrm{H}13} \end{bmatrix} F(t). \qquad (л)$$

Из выражения (4.139) определяем динамические перемещения системы по нормальным формам колебаний

$$\mathbf{X}_\Gamma = \frac{4P}{\pi} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} X_{\mathrm{H}11}\left[\beta_{11}\sin(\omega t - \theta_{11}) + {}^1\!/_3\beta_{13}\sin(3\omega t - \theta_{13}) + \cdots\right]/p_1^2 \\ X_{\mathrm{H}12}\left[\beta_{21}\sin(\omega t - \theta_{21}) + {}^1\!/_3\beta_{23}\sin(3\omega t - \theta_{23}) + \cdots\right]/p_2^2 \\ X_{\mathrm{H}13}\left[\beta_{31}\sin(\omega t - \theta_{31}) + {}^1\!/_3\beta_{33}\sin(3\omega t - \theta_{33}) + \cdots\right]/p_3^2 \end{bmatrix}. \qquad (м)$$

Относящиеся к данному случаю коэффициенты усиления и фазовые углы можно найти из выражений (4.140) и (4.141).

4.10. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

При исследованиях неустановившегося поведения системы влияние демпфирования следует учитывать в тех случаях, когда длительность промежутка времени, представляющая интерес для исследователя, достаточно велика по сравнению с периодом собственных колебаний системы. Если этот промежуток мал, но коэффициенты

демпфирования по соответствующим формам колебаний сравнительно велики ($\gamma_i > 0{,}05$), наличие демпфирования может еще оказывать заметное влияние. Поэтому в данном параграфе для того чтобы учесть влияние демпфирования при неустановившихся колебаниях системы, соотношения, полученные в п. 4.4—4.6, будут преобразованы применительно к нормальным координатам. Так же, как и в предыдущем параграфе, здесь будет предполагаться, что имеет место либо пропорциональное демпфирование, либо демпфирование по соответствующим формам колебаний.

В п. 4.4 была сформулирована задача о динамических перемещениях, выраженных через нормальные формы колебаний системы со многими степенями свободы, когда начальные условия задаются в виде перемещения и скорости. При наличии демпфирования динамические перемещения, соответствующие i-й форме свободных колебаний системы, в соответствии с выражением (4.55) должны описываться следующим выражением:

$$x_{\Gamma i} = e^{-n_i t}\left(x_{0\Gamma i}\cos p_{\text{д}i}t + \frac{\dot{x}_{0\Gamma i} + n_i x_{0\Gamma i}}{p_{\text{д}i}}\sin p_{\text{д}i}t\right), \qquad (4.142)$$

полученным из выражения (1.35). Круговая частота при демпфированных колебаниях определяется выражением (4.142):

$$p_{\text{д}i} = \sqrt{p_i^2 - n_i^2} = p_i\sqrt{1-\gamma_i^2}, \qquad \text{(а)}$$

где p_i — круговая частота недемпфированных колебаний. Преобразование векторов начальных условий $\mathbf{X}_0$ и $\dot{\mathbf{X}}_0$ к нормальным координатам проводим в соответствии с выражениями (4.56) и (4.57), а для преобразования перемещений к исходным координатам используем выражение (4.58).

Ни демпфирование по формам колебаний, ни относительное демпфирование, пропорциональное матрице жесткости, не будет оказывать влияния на движения системы как абсолютно жесткого тела. Влияние на подобные движения системы будет оказывать абсолютное демпфирование, пропорциональное матрице масс, поэтому для такого типа демпфирования уравнение (4.59) берем в виде

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + a\dot{x}_{\Gamma i} = 0. \qquad (4.143)$$

Решением уравнения (4.143) будет

$$x_{\Gamma i} = x_{0\Gamma i} + \dot{x}_{0\Gamma i}\left(\frac{1-e^{-at}}{a}\right). \qquad (4.144)$$

Это решение можно использовать вместо выражения (4.60) при исследованиях движений системы как абсолютно жесткого тела при абсолютном демпфировании. Заметим, что если величина $a = 0$ (т. е. демпфирование отсутствует), выражение в скобках принимает вид

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1-e^{-at}}{a}\right) = t, \qquad \text{(б)}$$

и тогда решение приобретает форму (4.60).

Точно такого же небольшого изменения процедуры, изложенной в п. 4.5, требуется и при определении динамических перемещений по нормальным формам при действии приложенных нагрузок, когда в системе имеется пропорциональное демпфирование или демпфирование по формам колебаний. Преобразование приложенных нагрузок к нормальным координатам проводится в соответствии с выражением (4.64), но интеграл Дюамеля в выражении (4.67) следует взять в виде

$$x_{\Gamma i} = \frac{e^{-n_i t}}{p_{\text{д}i}} \int_0^t e^{n_i t'} q_{\text{д}i} \sin p_{\text{д}i} (t - t')\, dt', \tag{4.145}$$

соответствующем выражению (1.62). Если предполагается, что имеет место абсолютное демпфирование, уравнение движения (4.68) как абсолютно жесткого тела следует взять в форме

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + a\dot{x}_{\Gamma i} = q_{\Gamma i}. \tag{4.146}$$

Для системы, находящейся в покое в начальный момент времени, в качестве решения уравнения (4.146) вместо выражения (4.69) следует взять

$$x_{\Gamma i} = \int_r^t q_{\Gamma i} \left[\frac{1 - e^{-a(t-t')}}{a}\right] dt'. \tag{4.147}$$

Если используются уравнения движения в перемещениях вместо уравнений в усилиях, то для преобразования вектора перемещений $\boldsymbol{\Delta}$ к нормальным координатам следует использовать выражение (4.73). Кроме того, соответствующая i-й нормальной форме колебаний эквивалентная нагрузка [см. выражение (4.77)]

$$q_{\Gamma\delta i} = p_i^2 \delta_{\Gamma i}. \tag{в}$$

Интеграл Дюамеля [выражение (4.145)] принимает вид

$$x_{\Gamma i} = \frac{p_i^2}{p_{\text{д}i}} e^{-n_i t} \int_0^t e^{n_i t'} \delta_{\Gamma i} \sin p_{\text{д}i} (t - t')\, dt'. \tag{4.148}$$

Подобная форма интеграла особенно удобна при исследованиях поведения демпфированных систем, у которых изменяющиеся во времени перемещения $\boldsymbol{\Delta}$ можно легко найти из статического анализа, подобного тому, который был описан в п. 4.5.

Обусловленные движениями опор динамические перемещения по нормальным формам колебаний, рассмотренные в п. 4.6, также можно представить в преобразованном виде, позволяющем учесть как пропорциональное демпфирование, так и демпфирование по формам колебаний. Во многих случаях для этого необходимо только в выражениях (4.145) и (4.148) величины $q_{\Gamma i}$ и $\delta_{\Gamma i}$ заменить на соответствующие им пары $q_{\Gamma \text{осн}\, i}$ и $\delta_{\Gamma \text{осн}\, i}$, $q_{\Gamma \text{оп}\, i}$ и $\delta_{\Gamma \text{оп}\, i}$ или $q^*_{\Gamma \text{осн}\, i}$ и $\delta^*_{\Gamma \text{осн}\, i}$, выражения для которых приводились в п. 4.6. Однако в тех случаях, когда задаются перемещения опор, записанные в исходных координатах, векторы $\mathbf{Q}_{\text{осн}}$, $\boldsymbol{\Delta}_{\text{осн}}$, $\mathbf{Q}_{\text{оп}}$ и $\boldsymbol{\Delta}_{\text{оп}}$ должны быть

преобразованы таким образом, чтобы их выражения учитывали связь между скоростями свободных координат перемещений и ограничениями по скоростям в опорах. Если основание перемещается в направлении оси x в соответствии с законом $x_{\text{осн}} = F_{\text{осн}}(t)$, уравнения движения в усилиях примут вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{\text{осн}}\dot{x}_{\text{осн}} + \mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{S}_{\text{осн}}x_{\text{осн}} = \mathbf{0}, \qquad \text{(г)}$$

где $\mathbf{C}_{\text{осн}}$ — матрица коэффициентов влияния демпфирования на движение масс, обусловленного движением основания. Представляя уравнение (г) в форме уравнения (4.120), получим

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{Q}_{\text{осн}} = \mathbf{Q}_{\text{осн}\,1} + \mathbf{Q}_{\text{осн}\,2}, \qquad (4.149)$$

где

$$\mathbf{Q}_{\text{осн}\,1} = -\mathbf{S}_{\text{осн}}x_{\text{осн}}, \quad \mathbf{Q}_{\text{осн}\,2} = -\mathbf{C}_{\text{осн}}\dot{x}_{\text{осн}}. \qquad (4.150)$$

Векторы-столбцы $\mathbf{Q}_{\text{осн1}}$ и $\mathbf{Q}_{\text{осн2}}$ имеют в качестве компонент эквивалентные нагрузки, соответствующие координатам перемещений и обусловленные перемещением основания и его скоростью. Эти слагаемые можно сохранять раздельными в течение всего исследования, при этом преобразование к нормальным коэффициентам проводится по следующим выражениям:

$$\mathbf{Q}_{\text{Г осн}} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{\text{т}}\mathbf{Q}_{\text{осн}} = \mathbf{X}_{\text{Н}}^{\text{т}}\mathbf{Q}_{\text{осн}\,1} + \mathbf{X}_{\text{Н}}^{\text{т}}\mathbf{Q}_{\text{осн}\,2} = \mathbf{Q}_{\text{Г осн}\,1} + \mathbf{Q}_{\text{Г осн}\,2}. \qquad (4.151)$$

Тогда i-е уравнение движения в нормальных координатах принимает вид, аналогичный (1.68):

$$\ddot{x}_{\text{Г}i} + 2n_i\dot{x}_{\text{Г}i} + p_i^2 x_{\text{Г}i} = q_{\text{Г осн}\,i} = q_{\text{Г осн}\,i1} + q_{\text{Г осн}\,i2}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (4.152)$$

И, наконец, переходя к интегралу Дюамеля [см. выражение (4.145)], получим

$$x_{\text{Г}i} = x_{\text{Г}i1} + x_{\text{Г}i2} = \frac{e^{-n_i t}}{p_{\text{д}i}} \int_0^t e^{n_i t'} (q_{\text{Г осн}\,i1} + q_{\text{Г осн}\,i2}) \sin p_{\text{д}i}(t - t')\, dt'. \qquad (4.153)$$

Это выражение соответствует (1.69).

Некоторое усложнение решения приведенного выше примера, в котором задавались перемещения основания и его скорости, можно избежать, если рассматривать ускорения основания и взять в качестве координат относительные перемещения $\mathbf{X}^* = \mathbf{X} - \mathbf{1}x_{\text{осн}}$. Как было показано в п. 1.13 [см. выражения (1.71) и (1.72)], для системы с одной степенью свободы отсутствует связь между перемещениями и скоростями масс и основания, если записать их в относительных координатах. В этом случае имеется только связь с перемещениями основания через инерционные силы, но она аналогична тому, что имеет место в системе без демпфирования. С другой стороны, если при анализе принимать во внимание r независимых движений в местах закрепления, то следует отказаться от концепции движения

основания как абсолютно жесткого тела. В этом случае необходимо непосредственным образом учитывать все связи между свободными координатами перемещений и характером связей, налагаемых в опорах.

Пример 1. Предположим, что на третью массу системы, показанной на рис. 4.3, действует нагрузка в виде ступенчатой функции $Q_3 = P$, при этом $Q_1 = Q_2 = 0$. Считая, что в начальный момент времени система находится в покое, определить обусловленные этой нагрузкой динамические перемещения по нормальным формам системы с демпфированием.

Решение. Преобразуя вектор нагрузки к нормальным координатам, получим

$$\mathbf{Q}_{\Gamma} = \mathbf{X}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{X}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\0\\P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X_{\mathrm{H}\,31}\\X_{\mathrm{H}\,32}\\X_{\mathrm{H}\,33}\end{bmatrix}P. \qquad (\text{д})$$

Обусловленные действием ступенчатой нагрузки динамические перемещения по нормальным формам (см. пример 3 в п. 1.12) имеют вид

$$\mathbf{X}_{\Gamma} = P\begin{bmatrix} X_{\mathrm{H}\,31}\left[1 - e^{-n_1 t}\left(\cos p_{\mathrm{д}1}t + \dfrac{n_1}{p_{\mathrm{д}1}}\sin p_{\mathrm{д}1}t\right)\right]\Big/ p_1^2 \\ X_{\mathrm{H}\,32}\left[1 - e^{-n_2 t}\left(\cos p_{\mathrm{д}2}t + \dfrac{n_2}{p_{\mathrm{д}2}}\sin p_{\mathrm{д}2}t\right)\right]\Big/ p_2^2 \\ X_{\mathrm{H}\,33}\left[1 - e^{-n_3 t}\left(\cos p_{\mathrm{д}3}t + \dfrac{n_3}{p_{\mathrm{д}3}}\sin p_{\mathrm{д}}t\right)\right]\Big/ p_3^2 \end{bmatrix}. \qquad (\text{е})$$

Пример 2. Предположим, что основание системы (см. рис. 4.3) перемещается по закону линейной функции $x_{\mathrm{осн}} = d_1 t/t_1$, где d_1 — перемещение как абсолютно жесткого тела в момент времени t_1. Определить динамические перемещения по нормальным формам, считая, что в начальный момент времени система с демпфированием находится в покое.

Решение. Векторы эквивалентных нагрузок в соответствии с выражением (4.150)

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{осн}1} = -\mathbf{S}_{\mathrm{осн}}x_{\mathrm{осн}} = \begin{bmatrix}k_1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{d_1 t}{t_1};$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{осн}\,2} = -\mathbf{C}_{\mathrm{осн}}\dot{x}_{\mathrm{осн}} = \begin{bmatrix}c_1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{d_1 t}{t_1}. \qquad (\text{ж})$$

Преобразуя эти векторы к нормальным координатам [см. выражение (4.151)], получим

$$\mathbf{Q}_{\Gamma\,\mathrm{осн}} = \mathbf{Q}_{\Gamma\,\mathrm{осн}\,1} + \mathbf{Q}_{\Gamma\,\mathrm{осн}\,2} = \frac{k_1 d_1 t}{t_1}\begin{bmatrix}X_{\mathrm{H}\,11}\\X_{\mathrm{H}\,12}\\X_{\mathrm{H}\,13}\end{bmatrix} + \frac{c_1 d_1}{t_1}\begin{bmatrix}X_{\mathrm{H}\,11}\\X_{\mathrm{H}\,12}\\X_{\mathrm{H}\,13}\end{bmatrix}. \qquad (\text{з})$$

Динамические перемещения, обусловленные действием нагрузки, изменяющейся по линейному закону:

$$x_{\Gamma i1} = \frac{k_1 d_1 X_{\mathrm{H}1i}}{t_1 p_i^2}\left[t - \frac{2n_i}{p_i^2} + e^{-n_i t}\left(\frac{2n_i}{p^2}\cos p_{\mathrm{д}i}t - \frac{p_{\mathrm{д}i}^2 - n_i^2}{p_i^2 p_{\mathrm{д}i}}\sin p_{\mathrm{д}i}t\right)\right], \qquad (\text{и})$$

где $i=1, 2, 3$ (см. задачу 1.12.9). Кроме того, нагрузка $Q_{\text{г осн 2}}$, имеющая вид ступенчатой функции, вызывает следующие динамические перемещения по нормальным формам (см. пример 1):

$$x_{\text{г}i2} = \frac{c_1 d_1 X_{\text{н}1i}}{t_1 p_i^2}\left[1 - e^{-n_i t}\left(\cos p_{\text{д}i} t + \frac{n_i}{p_{\text{д}i}} \sin p_{\text{д}i} t\right)\right], \qquad \text{(к)}$$

где $i = 1, 2, 3$.

4.11. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ

В п. 1.15 обсуждались численные решения для систем с одной степенью свободы, при действии возмущающей силы, которые нельзя было описать аналитическими выражениями. В двух основных подходах, использовавшихся там, применялись кусочно-постоянные и кусочно-линейные интерполирующие функции. Указанные подходы здесь будут применены в методе нормальных форм колебаний при исследованиях неустановившегося поведения систем со многими степенями свободы. Как и в предыдущих параграфах, предполагаем, что имеет место пропорциональное демпфирование или демпфирование по формам колебаний. Поскольку здесь потребуется большой объем вычислений, предполагается, что методы, описываемые в данном параграфе, будут применяться с использованием ЭВМ.

Рассмотрим вначале интерполяцию кусочно-постоянного типа, описанную в п. 1.15 (см. рис. 1.56б). Не теряя общности, здесь будем использовать только кусочно-постоянного вида функцию возмущающей силы $f_{\text{п}}(\Delta t_j)$, кусочно-постоянная форма вектора сил имеет вид

$$\mathbf{Q}_{\text{п}j} = \mathbf{F}_{\text{п}}(\Delta t_j) = \mathbf{P} f_{\text{п}}(\Delta t_j), \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n_1, \qquad \text{(а)}$$

где Δt_j — шаг по времени конечной длительности, n_1 — число шагов. В такой форме величины компонент вектора $\mathbf{P}$ служат скалярными множителями для произвольного вида функции $f_{\text{п}}(\Delta t_j)$. Если одновременно прикладывается несколько возмущающих сил, представляемых подобными функциями, определяются динамические перемещения, соответствующие каждой из сил, а результирующее динамическое перемещение можно определить, просуммировав перемещения для каждой силы.

Преобразованием уравнений движения в усилиях к нормальным координатам получаем следующее уравнение, записанное относительно i-й формы колебаний:

$$\ddot{x}_{\text{г}i} + 2n_i \dot{x}_{\text{г}i} + p_i^2 x_{\text{г}i} = q_{\text{г}i,\,j}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n; \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n, \qquad (4.154)$$

где $q_{\text{г}\,i,\,j}$ — величина, постоянная на длине j-го шага по времени.

Используя выражение (1.76б), найдем динамические перемещения по i-й форме колебаний системы с демпфированием в момент времени t_j

$$x_{\text{г}i,\,j} = e^{-n_i \Delta t_j}\left[x_{\text{г}i,\,j-1}\cos p_{\text{д}i}\Delta t_j + \frac{x_{\text{г}i,\,j-1} + n_i x_{\text{г}i,\,j-1}}{p_{\text{д}i}} \sin p_{\text{д}i}\Delta t_j\right] +$$
$$+ \frac{q_{\text{г}i,\,j}}{p_i^2}\left[1 - e^{-n_i \Delta t_j}\left(\cos p_{\text{д}i}\Delta t_j + \frac{n_i}{p_{\text{д}i}} \sin p_{\text{д}i}\Delta t_j\right)\right]. \qquad (4.155\text{а})$$

Продифференцировав это выражение по времени и разделив результат на $p_{дi}$, получим

$$\frac{\dot{x}_{Гi,\,j}}{p_{дi}} = e^{-n_i\,\Delta t_j}\left[-x_{Гi,\,j-1}\sin p_{дi}\,\Delta t_j + \frac{\dot{x}_{Гi,\,j-1} + n_i x_{Гi,\,j-1}}{p_{дi}}\cos p_{дi}\,\Delta t_j - \right.$$

$$\left. - \frac{n_i}{p_{дi}}\left(x_{Гi,\,j-1}\cos p_{дi}\,\Delta t_j + \frac{\dot{x}_{Гi,\,j-1} + n_i x_{Гi,\,j-1}}{p_{дi}}\sin p_{дi}\,\Delta t_j\right)\right] +$$

$$+ \frac{q_{Гi,\,j}}{p_i^2}\,e^{-n_i\,\Delta t_j}\left(1 + \frac{n_i^2}{p_{дi}^2}\right)\sin p_{дi}\,\Delta t_j. \qquad (4.155б)$$

Выражения (4.155а) и (4.155б) представляют рекуррентные формулы для вычисления динамических перемещений при колебаниях системы с демпфированием по каждой нормальной форме колебаний в конце каждого j-го шага по времени. Они также служат начальными условиями для перемещения и скорости в начале $(j+1)$-го шага. Применяя эти формулы последовательным образом, можно проследить историю изменения во времени динамических перемещений, соответствующих каждой нормальной форме колебаний. Затем по известным соотношениям полученные на каждом шаге перемещения преобразуем к исходным координатам.

Если i-я форма перемещений системы представляет движение как абсолютно жесткого тела, вместо указанных выше рекуррентных формул следует использовать соответствующие выражения, описывающие движения как жесткого тела. Например, если в системе не имеется абсолютного демпфирования, то вместо выражения (4.155а) для перемещения берем следующее выражение:

$$x_{Гi,\,j} = x_{Гi,\,j-1} + \dot{x}_{Гi,\,j-1}\,\Delta t_j + \frac{q_{Гi,\,j}}{2}(\Delta t_j)^2. \qquad (4.156а)$$

Выражение (4.155б) для скорости принимает вид

$$\dot{x}_{Гi,\,j} = \dot{x}_{Гi,\,j-1} + q_{Гi,\,j}\,\Delta t_j. \qquad (4.156б)$$

Однако следует иметь в виду, что, рассматривая абсолютное демпфирование, необходимо использовать выражения (4.144) и (4.147), полученные в предыдущем параграфе.

Когда вместо уравнений движения в усилиях используются уравнения движения в перемещениях, вектор динамических перемещений, описываемых кусочно-постоянными функциями, принимает вид

$$\Delta_{пj} = \mathbf{FQ}_{пj} = \mathbf{FP}f_п(\Delta t_j) = \Delta_{ст}f_п(\Delta t_j), \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n, \qquad (б)$$

где $\Delta_{ст}$ — вектор статических перемещений, обусловленных действием нагрузок $\mathbf{P}$. Следуя той же схеме рассуждений, что и в предыдущих параграфах, видим, что множитель $q_{Г\,i,\,j}/p_i^2$ при слагаемых в выражениях (4.155а) и (4.155б) здесь заменен на $\delta_{Г\,i,\,j}$, что получается в результате преобразования вектора $\Delta_{пj}$ к нормальным координатам.

Для того чтобы можно было использовать рекуррентные формулы (4.155а) и (4.155б), была составлена программа на языке БЕЙСИК

для вычислительной машины, текст которой приведен в приложении. Эта программа, носящая название DYNACON3, позволяет определять динамические перемещения, соответствующие трем первым формам колебаний, когда на систему с демпфированием со многими степенями свободы действует возмущающая сила в виде кусочно-постоянной функции. В верхней части рис. 4.5 представлен график изменения такой функции $f_{\text{п}}$, при этом ее числовые значения, заданные с интервалом 0,5 с по времени, приведены в четвертом столбце табл. 4.3. Эта функция, умноженная на вектор нагрузки $\mathbf{P} = \{0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}6\}$, использовалась в качестве возмущающей силы для системы, изображенной на рис. 4.3; в последних трех столбцах таблицы представлены полученные с помощью программы DYNACON3 данные, описывающие неустановившееся поведение системы. Использованы следующие данные: $m_1 = m_2 = m_3 = 0{,}179 \cdot 10^3$ Н·с^2/м, $k_1 = k_2 = k_3 = 0{,}179 \cdot 10^3$ Н/м, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0{,}05$. Начальные условия имели вид: $x_{01} = x_{02} = x_{03} = 0$, $\dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = \dot{x}_{03} = 0$.

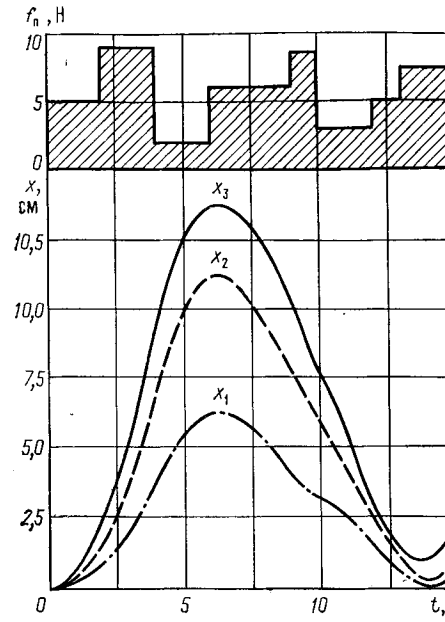


Рис. 4.5

На нижней части рис. 4.5 представлены графики изменения во времени перемещений x_1, x_2 и x_3. Видно, что основной вклад в суммарное динамическое перемещение дает первая форма колебаний, период которых равен 14,1 с. Для выявления на этих графиках локальных изменений, обусловленных влиянием колебаний третьей формы, необходимо использовать достаточно малый шаг по времени. В данном примере период собственных колебаний по третьей форме равен примерно 3,5 с при постоянном шаге $\Delta t = 0{,}5$ с.

Теперь рассмотрим интерполирующую функцию кусочно-линейного типа (см. рис. 1.57) и возьмем произвольную функцию $f_{\text{л}}(\Delta t_j)$ от времени. Тогда кусочно-линейный вектор сил принимает вид

$$\mathbf{Q}_{\text{л}j} = \mathbf{F}_{\text{л}}(\Delta t_j) = \mathbf{P} f_{\text{л}}(\Delta t_j), \quad j = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n. \qquad \text{(в)}$$

В этом случае, преобразуя уравнения движения в усилиях к нормальным координатам, получаем для i-й формы колебаний системы уравнение следующего вида:

$$\ddot{x}_{\Gamma i} + 2n_i \dot{x}_{\Gamma i} + p_i^2 x_{\Gamma i} = q_{\Gamma i,\ j-1} + \frac{\Delta q_{\Gamma i, j} t}{\Delta t_j}, \qquad (4.157)$$

4.3. Результаты расчетов, полученные с помощью программы DYNACON3

j	t_j, с	Δt_j, с	$f_{пj}$, Н	x_{1j}, см	x_{2j}, см	x_{3j}, см
0	0	—	—	0	0	0
1	0,5	0,5	4,54	0,063	0,096	0,188
2	1,0	0,5	4,54	0,241	0,396	0,719
3	1,5	0,5	4,54	0,521	0,922	1,532
4	2,0	0,5	4,54	0,894	1,676	2,550
5	2,5	0,5	8,17	1,410	2,697	3,856
6	3,0	0,5	8,17	2,108	4,003	5,524
7	3,5	0,5	8,17	2,964	5,527	7,455
8	4,0	0,5	8,17	3,924	7,198	9,543
9	4,5	0,5	1,82	4,841	8,809	11,425
10	5,0	0,5	1,82	5,570	10,117	12,776
11	5,5	0,5	1,82	6,081	10,998	13,602
12	6,0	0,5	1,82	6,337	11,366	13,919
13	6,5	0,5	5,45	6,365	11,272	13,899
14	7,0	0,5	5,45	6,180	10,853	13,675
15	7,5	0,5	5,45	5,784	10,221	13,205
16	8,0	0,5	5,45	5,225	9,469	12,456
17	8,5	0,5	5,45	4,595	8,644	11,440
18	9,0	0,5	5,45	3,998	7,747	10,211
19	9,5	0,5	7,72	3,531	6,827	8,948
20	10,0	0,5	7,72	3,218	5,959	7,828
21	10,5	0,5	2,72	2,929	5,116	6,708
22	11,0	0,5	2,72	2,535	4,249	5,451
23	11,5	0,5	2,72	2,027	3,383	4,155
24	12,0	0,5	2,72	1,443	2,499	2,924
25	12,5	0,5	4,54	0,881	1,631	1,915
26	13,0	0,5	4,54	0,424	0,864	1,224
27	13,5	0,5	6,81	0,140	0,338	0,922
28	14,0	0,5	6,81	0,063	0,208	1,039
29	14,5	0,5	6,81	0,200	0,528	1,511
30	15,0	0,5	6,81	0,556	1,278	2,299

где через $q_{Г\,i,\,j-1}$ обозначена величина возмущающей силы $q_{Гi}$, приложенной к системе в момент времени t_{j-1}. Кроме того, использовано обозначение $\Delta q_{Г\,i,\,j} = q_{Г\,i,\,j} - q_{Г\,i,\,j-1}$, которое характеризует изменение силы $q_{Гi}$ на шаге Δt_j по времени.

Из выражения (1.77б) получаем следующее представление для динамических перемещений по i-й форме колебаний в момент времени t_j системы с демпфированием:

$$x_{Гi,\,j} = e^{-n_i \Delta t_j}\left[x_{Гi,\,j-1}\cos p_{дi}\Delta t_j + \frac{\dot{x}_{Гi,\,j-1} + n_i x_{Гi,\,j-1}}{p_{дi}}\sin p_{дi}\Delta t_j\right] + \\ + \frac{q_{Гi,\,j-1}}{p_i^2}\left[1 - e^{-n_i \Delta t_j}\left(\cos p_{дi}\Delta t_j + \frac{n_i}{p_{дi}}\sin p_{дi}\Delta t_j\right)\right] + \\ + \frac{\Delta q_{Гi,\,j}}{p_i^2 \Delta t_j}\left[\Delta t_j - \frac{2n_i}{p_i^2} + e^{-n_i \Delta t_j}\left(\frac{2n_i}{p_i^2}\cos p_{дi}\Delta t_j - \frac{p_{дi}^2 - n_i^2}{p_i^2 p_{дi}}\sin p_{дi}\Delta t_j\right)\right]. \quad (4.158а)$$

Продифференцировав это выражение по времени и поделив результат на $p_{дi}$, найдем

$$\frac{\dot{x}_{Гi,\,j}}{p_{дi}} = e^{-n_i \Delta t_j}\left[-x_{Гi,\,j-1}\sin p_{дi}\Delta t_j + \frac{\dot{x}_{Гi,\,j-1} + n_i x_{Гi,\,j-1}}{p_{дi}}\cos p_{дi}\Delta t_j - \right.$$

$$\left. - \frac{n_i}{p_{дi}}\left(x_{Гi,\,j-1}\cos p_{дi}\Delta t_j + \frac{\dot{x}_{Гi,\,j-1} + n_i x_{Гi,\,j-1}}{p_{дi}}\sin p_{дi}\Delta t_j\right)\right] +$$

$$+ \frac{q_{Гi,\,j-1}}{p_i^2} e^{-n_i \Delta t_j}\left(1 + \frac{n_i^2}{p_{дi}^2}\right)\sin p_{дi}\Delta t_j +$$

$$+ \frac{\Delta q_{Гi,\,j}}{p_i^2 p_{дi}\Delta t_j}\left[1 - e^{-n_i \Delta t_j}\left(\cos p_{дi}\Delta t_j + \frac{n_i}{p_{дi}}\sin p_{дi}\Delta t_j\right)\right]. \quad (4.158б)$$

Выражения (4.158а)и (4.158б) представляют рекуррентные формулы для вычислений динамических перемещений и скоростей си-

4.4. Результаты расчетов, полученные с помощью программы DYNALIN3

j	t_j, с	Δt_j, с	$f_{дj}$, Н	x_{1j}, см	x_{2j}, см	x_{3j}, см
0	0	—	8,17	5,080	—5,080	2,540
1	0,5	0,5	6,36	3,188	—3,061	2,009
2	1,0	0,5	4,54	—0,925	1,323	0,963
3	1,5	0,5	2,72	—4,150	4,765	0,477
4	2,0	0,5	0,91	—4,270	4,986	1,229
5	2,5	0,5	2,72	—1,361	2,311	2,832
6	3,0	0,5	4,54	2,395	—0,810	4,295
7	3,5	0,5	6,36	4,440	1,775	4,845
8	4,0	0,5	6,36	3,703	0,231	4,374
9	4,5	0,5	6,36	1,168	3,790	3,589
10	5,0	0,5	6,36	—1,064	6,431	3,414
11	5,5	0,5	6,36	—1,440	6,520	4,506
12	6,0	0,5	5,90	0,081	4,397	6,446
13	6,5	0,5	5,45	2,202	1,971	8,230
14	7,0	0,5	4,99	3,414	1,227	8,900
15	7,5	0,5	4,54	3,109	2,766	8,151
16	8,0	0,5	4,99	1,912	5,461	6,583
17	8,5	0,5	5,45	1,016	7,379	5,232
18	9,0	0,5	3,63	1,176	7,214	4,867
19	9,5	0,5	1,82	2,222	5,166	5,364
20	10,0	0,5	0,00	3,241	2,642	5,875
21	10,5	0,5	0,00	3,284	1,140	5,065
22	11,0	0,5	0,00	2,103	1,179	4,171
23	11,5	0,5	0,00	0,317	2,024	2,141
24	12,0	0,5	0,00	—1,034	12,380	0,173
25	12,5	0,5	0,00	—1,306	1,384	—1,224
26	13,0	0,5	0,00	—0,693	0,770	—1,999
27	13,5	0,5	0,00	—0,030	—3,053	—2,502
28	14,0	0,5	0,00	—0,124	—4,392	—3,139
29	14,5	0,5	0,00	—1,161	—4,420	—4,041
30	15,0	0,5	0,00	—2,596	—3,658	—4,973

стемы с демпфированием, соответствующих каждой нормальной форме колебаний, в момент времени t_j; они также позволяют определить начальные перемещение и скорость для интегрирования на следующем шаге по времени.

Если i-я форма соответствует движению как абсолютно жесткого тела, выражение (4.158а) для перемещения следует заменить на

$$x_{\Gamma i,\, j} = x_{\Gamma i,\, j-1} + \dot{x}_{\Gamma i,\, j-1}\,\Delta t_j + \frac{q_{\Gamma i,\, j-1}}{2}(\Delta t_j)^2 + \frac{\Delta q_{\Gamma i,\, j-1}}{6}(\Delta t_j)^3. \quad (4.159а)$$

Соответственно, выражение (4.158б) для скорости заменяется на

$$\dot{x}_{\Gamma i,\, j} = \dot{x}_{\Gamma i,\, j-1} + q_{\Gamma i,\, j-1}\,\Delta t_j + \frac{\Delta q_{\Gamma i,\, j-1}}{2}(\Delta t_j)^2. \quad (4.159б)$$

При записи этих выражений подразумевалось, что в системе нет абсолютного демпфирования. Далее следует использовать выражения (4.144) и (4.147).

Если вместо уравнений движения в усилиях используются уравнения движения в перемещениях, вектор перемещений $\mathbf{\Delta}_{лj}$, описываемых кусочно-линейными функциями, можно представить в форме

$$\mathbf{\Delta}_{лj} = \mathbf{FQ}_{лj} = \mathbf{F}\mathbf{P}f_л(\Delta t_j) = \mathbf{\Delta}_{ст}f_л(\Delta t_j), \quad j = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n_1. \quad (г)$$

В рамках такого подхода в выражениях (4.158а) и (5.158б) множители $q_{\Gamma\, i,\, j-1}/p_i^2$ и $\Delta q_{\Gamma\, i,\, j}/p_i^2$ следует заменить соответственно на $\delta_{\Gamma\, i,\, j-1}$ и $\Delta\delta_{\Gamma\, i,\, j}$.

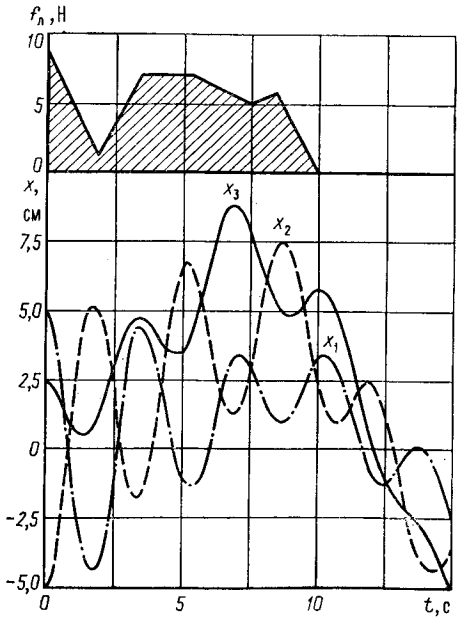


Рис. 4.6

Для вычислений с помощью формул (4.158а) и (4.158б) была составлена вторая программа для ЭВМ, записанная на языке БЕЙСИК и названная DYNALIN3. Эта программа позволяет определить динамическое перемещение при колебаниях по первым трем формам демпфированной системы со многими степенями свободы, на которую действует возмущающая сила в виде кусочно-линейной функции. Программа DYNALIN3 может быть получена заменой в программе DYNACON3 некоторых строк в процедуре, в которой используются рекуррентные формулы и входящие в них приращения.

На рис. 4.6 в верхней части представлен график изменения

во времени возмущающей силы $f_л$ кусочно-линейного типа, а ее значения, полученные на интервалах времени, равных 0,5 с, приводятся в четвертом столбце табл. 4.4 При использовании значений вектора возмущающей силы $\mathbf{P} = \{-0{,}3;\ 0;\ 0{,}6;\}$ и векторов начальных условий $\mathbf{X}_0 = \{2;\ -2;\ 1\}$ и $\mathbf{X}_0 = \{0;\ 0;\ 0\}$, а также прежних значений параметров, характеризующих колеблющуюся систему, с помощью программы DYNALIN3 были определены динамические перемещения, значения которых для соответствующих форм колебаний приведены в трех последних столбцах табл. 4.4. В нижней части рис. 4.6 представлены графики изменения перемещений x_1, x_2 и x_3 в зависимости от времени, из которых видно, что характер заданных начальных перемещений обусловливает заметное искажение колебаний третьей формы. Поскольку возмущающая сила действует на систему только на интервале времени длительностью 10 с, последующие динамические перемещения системы будут определяться только свободными колебаниями этой системы.

Глава 5
КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Все сооружения и машины состоят из частей, каждая из которых обладает как массой, так и жесткостью. Во многих случаях эти части можно путем идеализации представлять как сосредоточенные в точке массы, абсолютно жесткие тела или деформируемые невесомые элементы. Подобные системы обладают конечным числом степеней свободы, поэтому их можно исследовать с помощью методов, описанных в предыдущих главах. Однако некоторые системы можно исследовать и в более строгой постановке, не прибегая к дискретизации аналитической модели. В данной главе будут рассматриваться упругие тела, чьи массовые и деформационные характеристики распределены непрерывным образом. В число элементов конструкций, которые можно рассматривать подобным образом, входят стержни, валы, канаты, балки, простые рамы, кольца, арки, мембраны, пластины, оболочки, а также трехмерные тела. Многие из задач, связанных с этими элементами, будут здесь обсуждаться подробно, но вопросы, связанные с оболочками и трехмерными телами, рассматриваются как выходящие за рамки этой книги *. Очень трудно исследовать с позиций упругих сред такие геометрически сложные конструкции, как каркасы, арки, пластины с вырезами, фюзеляжи самолетов, корпуса судов и т. д. В подобных случаях необходимо использовать дискретные аналитические модели с большим, но конечным числом степеней свободы **.

Когда тело рассматривается как упругая среда, подразумевается, что оно состоит из бесконечного числа частиц. Для того чтобы указать положение каждой точки тела, требуется ввести бесконечное число координат перемещений, поэтому говорят, что система обладает бесконечным числом степеней свободы. Эти координаты рассматриваются как непрерывные функции, первая и вторая производные по времени которых представляют соответственно скорость и ускорение

---

* Более полное обсуждение вопроса колебаний упругих тел можно найти в кн. **Rayleigh J. W. S.** Theory of sound, цитированной в п. 1.4, и **Love A. E. H.** A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: University Press, v. 1, 1892, 354 p.; v. 2: 1893, 327 p.; 4th ed.: 1927. 643 p. (опубликован перевод 4-го изд.: **Ляв А.** Математическая теория упругости. М. — Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.).

** Обсуждение применения метода конечных элементов к исследованию дискретных сред приводится в кн. **Przemieniecki J. S.** Theory of matrix structural analysis. N.-Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968. 468 p.

характерной точки. Благодаря распределению массы упругое тело имеет бесконечное число собственных форм колебаний, поэтому его динамические перемещения можно рассматривать как сумму перемещений по каждой из нормальных форм колебаний.

Рассматривая колебания упругих тел, будем предполагать, что материал этих тел однороден, изотропен и подчиняется закону Гука. Кроме того, перемещения достаточно малы, чтобы рассматривать поведение при динамических возмущениях как линейно упругое. Хотя в данной главе демпфирование не рассматривается, оно может быть легко учтено с помощью коэффициентов демпфирования по соответствующим формам колебаний, как это делалось в п. 4.8.

5.2. СВОБОДНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Среди различных типов собственных колебаний, возникающих в упругом стержне, продольные колебания являются наиболее простыми для исследования. В стержне могут возникнуть крутильные и поперечные колебания, которые рассматриваются в соответствующих параграфах. При исследовании продольных колебаний предполагаем, что поперечные сечения стержня остаются плоскими и что каждая точка поперечного сечения совершает только осевые перемещения. Продольные растяжения и сжатия, имеющие место при таких колебаниях стержня, сопровождаются возникновением той или иной величины поперечных деформаций. Однако в последующем обсуждении рассмотрим только те случаи, для которых длина продольных волн колебаний велика по сравнению с размерами поперечных сечений стержня. В этих случаях *, не совершая существенной ошибки, можно пренебречь влиянием поперечных перемещений на характер продольных движений [7].

На рис. 5.1, *а* показан свободный от нагрузок призматический стержень длиной l, бесконечно малый элемент которого длиной dx расположен на расстоянии x от левого конца. Обозначим через u продольное перемещение точки поперечного сечения с координатой x. Когда в стержне происходят продольные колебания, сумма продольных сил, действующих на бесконечно малый элемент стержня (рис. 5.1, *б*), в соответствии с принципом Деламбера

$$S + \frac{\partial S}{\partial x}\,dx - S - \rho F\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \qquad \text{(а)}$$

здесь S — направленная вдоль оси равнодействующая внутренних напряжений, возникающих в поперечном сечении с координатой x.

* Полное решение задачи о продольных колебаниях цилиндрического стержня кругового поперечного сечения с учетом влияния поперечных перемещений было получено Л. Похгаммером и описано в кн. **Pochhammer L.** Über die Fortpflanzungsgeschwindingkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder. — J. für die reine und angewandte Mathematik (J. von A. Crelle), 1876, B. 81, N. 4, S. 324—336; см. также **Giebe E., Blechschmidt E.** Experimentelle und theoretische untersuchungen über dehnungseigenschwingungen von Stäben und Rohren. — Annalen der Physik, 1933, F. 5, B. 18, N. 5, S. 457—485.

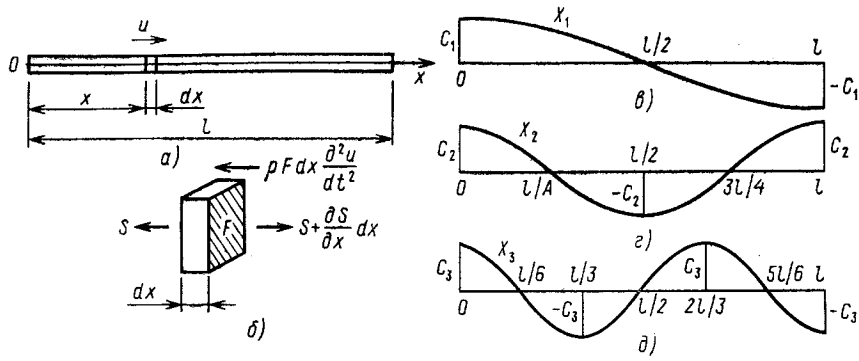


Рис. 5.1

Внутренняя сила, фигурирующая в этом уравнении, равна произведению *плотности* ρ материала на объем малого сегмента Fdx (где F — площадь поперечного сечения стержня) и ускорение $\partial^2 u/\partial t^2$. Используя закон Гука, продольную силу S можно выразить через продольное напряжение и, далее, через осевую деформацию $\varepsilon = \partial u/\partial x$, что дает

$$S = F\sigma = EF\varepsilon = EF\partial u/\partial x, \qquad (б)$$

где E — модуль Юнга Подставляя выражение (б) в уравнение (а), после преобразований получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}, \qquad (5.1)$$

где

$$a = \sqrt{E/\rho}. \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.1) часто называют *одномерным волновым*, чтобы указать на то обстоятельство, что при продольных колебаниях контур перемещений распространяется в осевом направлении со скоростью a, т. е. со скоростью распространения звука в материале. *Волновое решение* этой задачи имеет вид

$$u = f(x - at) \qquad (в)$$

и представляет некоторую произвольную функцию от x, перемещающуюся со скоростью a. Можно показать, что это представление удовлетворяет уравнению (5.1), для чего найдем соответствующие производные этой функции

$$\partial u/\partial x = f'(x - at);$$

$$\partial^2 u/\partial x^2 = f''(x - at);$$

$$\partial u/\partial t = -af'(x - at);$$

$$\partial^2 u/\partial t^2 = a^2 f''(x - at).$$

Подстановкой этих выражений в уравнение (5.1) получаем тождество, следовательно, это уравнение удовлетворяется. Более общая форма волнового решения имеет вид

$$u = f_1(x - at) + f_2(x - at). \qquad (г)$$

где первое слагаемое представляет собой функцию $f_1(x)$, перемещающуюся в положительном направлении оси x, а второе слагаемое состоит из функции $f_2(x)$, перемещающейся в отрицательном направлении оси x. Хотя указанное волновое решение удобно использовать при исследовании некоторых задач об ударе, когда имеются импульсы очень малой длительности, эта форма решения не столь полезна, как *решение для задачи о колебаниях*, которое здесь и будет рассматриваться подробно.

Когда стержень, показанный на рис. 5.1, *а*, колеблется по одной из собственных форм, решение уравнения (5.1) можно взять в форме

$$u = X(A \cos pt + B \sin pt), \qquad (д)$$

где A и B — произвольные постоянные; p — круговая частота. Через X обозначена функция от x, описывающая форму собственных колебаний; она называется *главной* или *нормальной функцией*. Подставляя выражение (д) в уравнение (5.1), получаем уравнение

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{p^2}{a^2}X = 0, \qquad (е)$$

решение которого будет

$$X = C\cos\frac{px}{a} + D\sin\frac{px}{a}. \qquad (ж)$$

В этом выражении для функции X произвольные постоянные C и D определяются из условия удовлетворения *концевым условиям* на концах стержня. Поскольку показанный на рис. 5.1,*а* стержень имеет незакрепленные концы, продольная сила, которая пропорциональна dX/dx, должна быть равна нулю на каждом конце. Таким образом, концевые условия для рассматриваемой задачи можно записать в форме

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l} = 0. \qquad (з)$$

Для того чтобы удовлетворить первому из этих условий, необходимо в выражении (ж) положить $D = 0$. Второе условие будет удовлетворяться, если считать, что $C \neq 0$, т. е. существует нетривиальное решение, только при

$$\sin\frac{pl}{a} = 0. \qquad (5.3)$$

Это соотношение представляет *частотное уравнение* для рассматриваемого случая, откуда можно найти частоты собственных форм продольных колебаний стержня с незакрепленными концами. Уравнение будет удовлетворяться, если положить

$$\frac{p_i l}{a} = i\pi, \qquad (и)$$

где i — целое число. Полагая $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, можно получить частоты различных форм продольных колебаний. Значение $i = 0$ соответствует частоте, равной нулю, что означает перемещение стержня как абсолютно жесткого тела в направлении оси x. Частоту основной формы колебаний можно найти, положив в равенстве (и) $i = 1$, что дает

$$p_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{5.4}$$

Соответствующий период колебаний

$$\tau_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{p_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{E}}. \tag{5.5}$$

Эта форма колебаний показана на рис. 5.1, *в* и описывается [см. выражение (ж)] функцией вида

$$X_1 = C_1 \cos\frac{p_1 x}{a} = C_1 \cos\frac{\pi x}{l}.$$

На рис. 5.1, *г* и *д* представлены графики соответственно для второй и третьей форм колебаний, для которых имеем

$$\frac{p_2 l}{a} = 2\pi; \quad X_2 = C_2 \cos\frac{2\pi x}{l};$$

$$\frac{p_3 l}{a} = 3\pi; \quad X_3 = C_3 \cos\frac{3\pi x}{l}.$$

Общий вид частных решений (д) уравнения колебаний (5.1) можно представить так:

$$u_i = \cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \cos\frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin\frac{i\pi a t}{l}\right). \tag{к}$$

Суммируя эти решения, перемещения при произвольных продольных колебаниях можно представить в следующей форме:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \cos\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \cos\frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin\frac{i\pi a t}{l}\right). \tag{5.6}$$

Постоянные A_i и B_i, входящие в решение (5.6), можно всегда подобрать таким образом, чтобы были удовлетворены начальные условия произвольного вида. Предположим, например, что в начальный момент времени (при $t = 0$) перемещения u являются функцией продольной координаты вида $(u)_{t=0} = f_1(x)$, а начальные скорости задаются функцией вида $(\dot{u})_{t=0} = f_2(x)$. Подставляя $t = 0$ в выражение (5.6), получим

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos\frac{i\pi x F}{l}. \tag{л}$$

Продифференцировав выражение (5.6) по t и подставив $t = 0$, найдем

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\pi a}{l} B_i \frac{i\pi x}{l}. \qquad (м)$$

Коэффициенты A_i и B_i, входящие в выражения (л) и (м), можно определить, используя, как и выше [см. выражение (1.59а)], следующие формулы:

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{i\pi x}{l}\, dx; \qquad (н)$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_2(x) \cos \frac{i\pi x}{l}\, dx. \qquad (о)$$

В качестве примера рассмотрим теперь случай, когда сжатый приложенными по концам силами призматический стержень внезапно освобождается от этих сил в момент времени $t = 0$. Предполагая, что поперечное сечение в середине пролета стержня сохраняет свое положение, получаем

$$(u)_{t=0} = f_1(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{2} - \varepsilon_0 x; \quad f_2(x) = 0,$$

где ε_0 — деформация сжатия в момент времени $t = 0$. Тогда из выражений (н) и (о) получаем

$$A_i = \frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2 i^2}, \quad i \text{ — нечетное};$$

$$A_i = 0, \quad i \text{ — четное}; \quad B_i = 0.$$

Общее решение (5.6) в этом случае принимает вид

$$u = \frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cos \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi a t}{l}. \qquad (п)$$

В этом решении i принимает только нечетные целочисленные значения, следовательно, перемещения при колебаниях являются симметричными относительно поперечного сечения, лежащего в середине пролета стержня.

В качестве второго примера рассмотрим свободные продольные колебания стержня, один конец которого защемлен, а другой остается незакрепленным (рис. 5.2, *а*). Концевые условия в этом случае имеют вид

$$(u)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 0. \qquad (р)$$

Чтобы удовлетворить первому из этих условий, положим в общем выражении (ж) для нормальных функций, что $l = 0$. Второе условие дает частотное уравнение вида

$$\cos(pl/a) = 0,$$

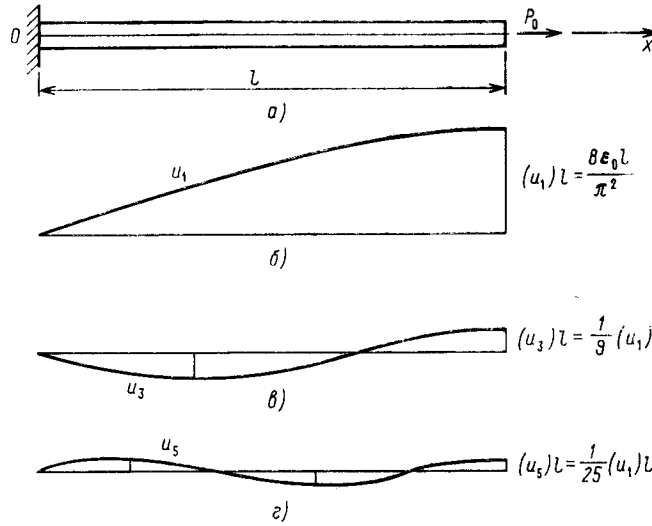


Рис. 5.2

откуда находим следующие значения частот и периодов различных форм колебаний:

$$p_i = \frac{i\pi a}{2l}; \quad \tau_i = \frac{2\pi}{p_i} = \frac{4l}{ia}, \quad i = 1,\ 3,\ 5, \ldots \tag{с}$$

Тогда общее выражение (д) для различных форм колебаний принимает форму

$$u_i = \sin\frac{i\pi x}{2l}\left(A_i \cos\frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin\frac{i\pi at}{2l}\right). \tag{т}$$

Общее решение для продольных колебаний получаем суммированием всех решений, что дает

$$u = \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{2l}\left(A_i \cos\frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin\frac{i\pi at}{2l}\right). \tag{5.7}$$

Постоянные A_i и B_i в каждом конкретном случае определяем из начальных условий (при $t = 0$).

Предположим, например, что со стержня, первоначально сжатого приложенной к незакрепленному концу (см. рис. 5.2, *а*) продольной силой P_0, в момент времени $t = 0$ внезапно убирается эта сила. Обозначив через ε_0 начальную деформацию P_0/EF, получаем следующие выражения для начальных условий:

$$(u)_{t=0} = \varepsilon_0 x; \quad (\dot{u})_{t=0} = 0.$$

Второе из этих условий будет удовлетворено, если в выражении (т) положить постоянную B_i равной нулю. После чего для определения постоянной A_i получаем уравнение

$$A_i \sin(i\pi x/2l) = \varepsilon_0 x, \ i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ \infty.$$

Используя выражение (1.59, б) найдем

$$A_i = \frac{2\varepsilon_0}{l}\int_0^l x \sin\frac{i\pi x}{2l}\,dx = \frac{8\varepsilon_0 l}{i^2\pi^2}(-1)^{(i-1)/2},$$

тогда решение (5.7) сводится к следующему виду:

$$u = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum_{i=1,\,3,\ldots,}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2}\sin\frac{i\pi x}{2l}\cos\frac{i\pi at}{2l}. \qquad (у)$$

На рис. 5.2, *б—г* показаны вклады первых трех форм колебаний в суммарное динамическое перемещение стержня. Можно отметить, что амплитуды различных форм колебаний быстро уменьшаются с увеличением i. Перемещение на незакрепленном конце стержня получаем подстановкой $x = l$ в выражение (у).

Для момента времени $t = 0$, как и следовало ожидать, имеем

$$(u)_{\substack{x=l\\ t=0}} = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{8}\right) = \varepsilon_0 l.$$

Пример 1. Найти нормальные функции задачи о продольных колебаниях стержня длиной l, у которого оба конца жестко закреплены.

Решение. В данном случае граничные условия имеют вид

$$(u)_{x=0} = (u)_{x=l} = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, в выражении (ж) положим $C = 0$, в результате получим частотное уравнение $\sin p_i l/a = 0$, откуда находим $p_i = i\pi a/l$. Следовательно, нормальные функции берем в форме

$$X_i = A_i \sin(i\pi x/l),\ i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \qquad (ф)$$

Пример 2. Стержень, жестко закрепленный по обоим концам, нагружается в середине пролета сосредоточенной продольной силой P (рис. 5.3, *а*). Исследовать колебания, которые возникнут в стержне, если внезапно убрать силу P.

Решение. Деформации растяжения в левой части стержня, численно равные деформациям сжатия его правой части, составляют $\varepsilon_0 = P_0/2EF$. Распределение начальных перемещений (рис. 5.3, *б*) описывается следующими функциями: при $t = 0$ перемещения имеют вид $g_1(x) = \varepsilon_0 x$ при $0 \leqslant x \leqslant l/2$ и $g_2(x) = \varepsilon_0(l - x)$ при $l/2 \leqslant x \leqslant l$. В предыдущем примере были определены нормальные функции [см. выражение (ф)], относящиеся к данному случаю; общее же выражение для

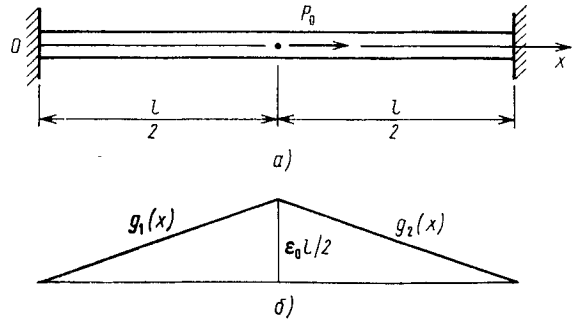


Рис. 5.3

динамических перемещений, удовлетворяющее начальному условию $(\dot{u})_{t=0} = 0$, имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi a t}{l}. \qquad (\text{х})$$

Постоянные A_i находим с учетом заданной формы начальных перемещений, что дает

$$A_i = \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} \varepsilon_0 x \sin \frac{i\pi x}{l}\, dx + \int_{l/2}^{l} \varepsilon_0 (l-x) \sin \frac{i\pi x}{l}\, dx\right] =$$

$$= \frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2 i^2} (-1)^{(i-1)/2} \quad \text{при} \quad i = 1,3,5,\ldots, \infty;$$

$$A_i = 0 \text{ при } i = 2, 4, \ldots, \infty.$$

Искомое решение имеет окончательный вид

$$u = \frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \cos p_i t. \qquad (\text{ц})$$

Пример 3. Движущийся вдоль оси x с постоянной скоростью v стержень останавливается при внезапном закреплении его конца $x = 0$. Таким образом, начальные условия имеют вид $(u)_{t=0} = 0$ и $(\dot{u})_{t=0} = v$. Найти выражение для возникающих при этом динамических перемещений.

Решение. В данном случае общее выражение для перемещений имеет вид (5.7). Поскольку начальные перемещения равны нулю, положим в этом выражении $A_i = 0$. Затем получаем уравнение для определения постоянных B_i:

$$(\dot{u})_{t=0} = \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} B_i \frac{i\pi a}{2l} \sin \frac{i\pi x}{2l} = v,$$

откуда находим

$$B_i = \frac{8vl}{\pi^2 i^2 a},$$

что окончательно дает

$$u = \frac{8vl}{\pi^2 a} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \sin p_i t. \qquad (\text{ч})$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислить перемещение произвольного поперечного сечения стержня в произвольный момент времени. Возьмем, например, незакрепленный конец стержня ($x = l$), тогда в момент времени $t = l/a$ (т. е. за время, которое требуется для того, чтобы звук распространился на расстояние l) получим перемещение

$$(u)_{\substack{x=l \\ t=l/a}} = \frac{8vl}{\pi^2 a}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = \frac{vl}{a}.$$

При колебаниях стержня в нем возникают деформации, равные

$$\frac{du}{dx} = \frac{8vl}{\pi^2 a} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{i\pi}{2l} \cos \frac{i\pi x}{2l} \sin p_i t.$$

На закрепленном конце ($x = 0$) имеем

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = \frac{4v}{\pi a} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi at}{2l} = \frac{v}{a}, \quad 0 < \frac{\pi at}{2l} < \frac{\pi}{2}.$$

Волна сжатия, которая зарождается на левом конце стержня в момент остановки при $t = 0$, распространяется вдоль стержня со скоростью a и в момент времени $t = l/a$ она достигает незакрепленного конца стержня. В этот момент скорости всех точек стержня равны нулю, а стержень равномерно растянут так, что деформация растяжения $\varepsilon = v/a$.

ЗАДАЧИ

5.2.1. Определить общее выражение для перемещений при продольных колебаниях стержня, конец $x = 0$ которого не закреплен, а конец $x = l$ жестко закреплен.

Ответ: $u = \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \cos \frac{i\pi x}{2l} \left(A_i \cos \frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{2l} \right).$

5.5.2. В стержне, движущемся вдоль оси x с постоянной скоростью v, внезапно закрепляется поперечное сечение, лежащее в середине пролета ($x = l/2$). Найти выражение для перемещений при возникающих в результате мгновенной фиксации свободных колебаниях.

Ответ: $u = \frac{4vl}{\pi^2 a} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cos \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at}{l}.$

5.2.3. Предположим, что заданная в примере 2 сила приложена на расстоянии четверти длины $x = l/4$, а не в середине стержня. Кроме того, на расстоянии три четверти длины стержня $x = {}^3/_4 l$ приложена сила $-P_0$, равная первой силе и противоположно направленная ей. Исследовать колебания, которые возникнут, если внезапно убрать эти силы.

Ответ: $u = \frac{P_0 l}{\pi^2 EF} \sum_{i=2,\ 4,\ 6,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-2)/4}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l}.$

5.2.4. Пусть сила P_0 (см. рис. 5.2, *а*) равномерно распределена по длине стержня, при этом интенсивность нагрузки P_0/l. Определить возникающие в стержне динамические перемещения, когда нагрузки внезапно убираются.

Ответ: $u = \frac{16P_0 l}{\pi^3 EF} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{i\pi at}{2l}.$

5.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим теперь возмущающую силу $P = F(t)$, приложенную к правому концу призматического стержня, показанного на рис. 5.2, *а*. Свободные колебания этого стержня рассматривались в предыдущем параграфе, поэтому нормальные функции для данного случая можем записать в виде

$$X_i = D_i \sin (i\pi x/2l), \quad i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ \infty. \qquad \text{(а)}$$

Произвольного вида перемещение $u = f(x)$ можно получить, просуммировав перемещения, соответствующие нормальным формам колебаний (а). Следовательно, перемещения при колебаниях, обусловленных действием возмущающей силы P_1, можно представить в виде следующего ряда:

$$u = \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{2l} + \varphi_3 \sin\frac{3\pi x}{2l} + \cdots = \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \varphi_i \sin\frac{i\pi x}{2l}, \quad (5{,}8)$$

где φ_1, φ_3, φ_5, ... — некоторые неизвестные функции времени. В случае свободных колебаний эти функции равны выражениям, стоящим в скобках в представлении (5.7). Для того чтобы определить эти функции применительно к случаю вынужденных колебаний, воспользуемся принципом возможной работы. Здесь необходимо рассмотреть три вида сил: силу инерции, действующую на каждый малый элемент колеблющегося стержня; силу упругости, действующую на каждый элемент и обусловленную деформацией стержня, и, наконец, возмущающую силу, приложенную к концу стержня. В качестве возможного перемещения можно взять произвольное продольное перемещение δu, удовлетворяющее условию непрерывности деформаций и заданному условию на жестко закрепленном конце ($\delta u_{x=0} = 0$). Удобнее взять возможные перемещения в виде нормальных функций, описываемых выражением (а):

$$\delta u_i = X_i = D_i \sin(i\pi x/2l). \quad (б)$$

Учитывая, что масса малого элемента стержня, заключенного между двумя смежными поперечными сечениями, равна $\rho F dx$, найдем работу, совершаемую силами инерции на заданном возможном перемещении:

$$\delta W_{\text{и}} = \int_0^l (-\rho F\, dx)\, \ddot{u}\delta u_i = -\rho F \int_0^l \ddot{u} D_i \sin\frac{i\pi x}{2l}\, dx.$$

Подставляя в это выражение представление (и) в виде ряда (5.8) и учитывая, что

$$\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{2l} \sin\frac{j\pi x}{2l}\, dx = 0; \quad \int_0^l \sin^2\frac{i\pi x}{2l}\, dx = l/2,$$

получим

$$\delta W_{\text{и}} = -\frac{\rho F l}{2} D_i \ddot{\varphi}_i. \quad (в)$$

Для того чтобы подсчитать работу $\delta W_{\text{у}}$, совершаемую упругими силами, заметим, что на каждый элемент действует сила $EFu''dx$, и тогда получим

$$\delta W_{\text{у}} = \int_0^l (EFu''\, dx)\, \delta u_i.$$

Подставляя в это выражение вторую производную представления (5.8) по x и используя выражение (б) для δu_i, найдем

$$\delta W_{\text{у}} = -\frac{i^2\pi^2 EF}{8l} D_i \varphi_i. \qquad \text{(г)}$$

В последующих параграфах при подсчете возможной работы, совершаемой упругими силами, будет удобно сначала определить *энергию деформации* тела. В рассматриваемом случае с упругим стержнем энергия деформации

$$u = \frac{1}{2}\int_0^l EF\,(\partial u/\partial x)^2\,dx. \qquad \text{(д)}$$

Подставляя сюда представление в форме тригонометрического ряда (5.8) для функции u и учитывая равенства

$$\int_0^l \cos\frac{i\pi x}{2l}\cos\frac{j\pi x}{2l}\,dx = 0;$$

$$\int_0^l \cos^2\frac{i\pi x}{2l}\,dx = \frac{l}{2},$$

найдем окончательное выражение для энергии деформации

$$U = \frac{i^2\pi^2 EF}{16l}\sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty}\varphi_i^2. \qquad \text{(е)}$$

Отсюда видно, что величина энергии деформации стержня в любой момент времени зависит от величин φ_i, определяющих перемещение стержня. Если одной из этих величин задать приращение $\delta\varphi_i$, то соответствующее перемещение

$$\delta u_i = \delta\varphi_i \sin(i\pi x/2l), \qquad \text{(ж)}$$

а соответствующее приращение энергии деформации

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i = \frac{i^2\pi^2 EF}{8l}\varphi_i\,\delta\varphi_i. \qquad \text{(з)}$$

Той же самой величине, взятой с отрицательным знаком, будет равна работа упругих сил на перемещении (ж). Для того чтобы получить работу упругих сил на возможном перемещении (б), необходимо заменить $\delta\varphi_i$ на D_i, что следует из сравнения выражений (б) и (ж). Таким образом, видим, что работа, определяемая выражением

$$\delta W_{\text{у}} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = -\frac{i^2\pi^2 EF}{8l}\varphi_i D_i, \qquad \text{(и)}$$

равна работе, определяемой выражением (г).

Для того чтобы определить возможную работу δW_P возмущающей силы P, приложенной на конце стержня, заметим, что возмож-

ное перемещение этого конца получается подстановкой $x = l$ в выражение (б), и тогда указанная возможная работа

$$\delta W_P = PD_i \sin \frac{i\pi}{2} = PD_i (-1)^{(i-1)/2}. \qquad (к)$$

Суммируя выражения (в), (и) и (к), найдем выражение для полной возможной работы. Приравнивая это выражение нулю, получим

$$\frac{\rho Fl}{2} \ddot{\varphi}_i + \frac{i^2\pi^2 EF}{8l} \varphi_i = P (-1)^{(i-1)/2}$$

или

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = \frac{2}{\rho Fl} P (-1)^{(i-1)/2}, \qquad (л)$$

где $p_i = i\pi a/2l$; $i = 1, 3, 5, \ldots$ Отметим, что, как и следовало ожидать, постоянная D_i, определяющая мгновенное значение возможного перемещения (б), в уравнении (л) сократилась.

Каждую из величин φ_i, входящую в ряд (5.8), можно легко найти, решив уравнение (л), если известно выражение для P как функции от времени. Если начальные перемещения и скорости равны нулю, необходимо рассмотреть только колебания, обусловленные возмущающей силой P. Представив решение уравнения (л) в форме интеграла Дюамеля, найдем

$$\varphi_i = \frac{4 (-1)^{(i-1)/2}}{i\pi a \rho F} \int_0^t P \sin \left[\frac{i\pi a}{2l} (t - t') \right] dt'. \qquad (м)$$

Подставляя представление (м) в выражение (5.8), получим выражение для динамических перемещений стержня, обусловленных действием возмущающей силы P:

$$u = \frac{4}{\pi a \rho E} \sum_{i=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i} \sin \frac{i\pi x}{2l} \int_0^t P \sin \left[\frac{i\pi a}{2l} (t - t') \right] dt'. \qquad (5.9)$$

В качестве частного примера рассмотрим случай колебаний, возникающих в стержне, когда в момент времени $t = 0$ внезапно прикладывается постоянная сила P. Тогда стоящий в выражении (5.9) интеграл легко вычисляется и в результате находим

$$u = \frac{8lP}{\pi^2 a^2 \rho F} \sum_{i=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left(1 - \cos \frac{i\pi a t}{2l} \right). \qquad (н)$$

Подставляя сюда $x = l$, получаем перемещение на конце стержня

$$u_{x=l} = \frac{8lP}{\pi^2 a^2 \rho F} \sum_{i=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left(1 - \cos \frac{i\pi a t}{2l} \right). \qquad (о)$$

Видно, что при внезапном приложении силы P в стержне возбуждаются все формы колебаний. Максимальное перемещение возникает

при $t = 2l/a$, поскольку в этот момент времени имеем $1 - \cos \times$ $\times$ $(i\pi at/2l) = 2$, что дает следующее значение перемещения:

$$(u)_{x=l} = \frac{16lP}{\pi^2 a^2 \rho F} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{8}; \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

находим $(u)_{x=l} = 2lP/(EF)$. Таким образом приходим к выводу, что внезапно приложенная нагрузка P вызывает в 2 раза большее перемещение, чем эта же нагрузка при статическом приложении.

В качестве второго примера рассмотрим продольные динамические перемещения стержня с обоими незакрепленными концами * (см. рис. 5.1, *а*), к концу $x = l$ которого внезапно прикладывается сила P. Поступая, как и в предыдущем параграфе, и используя нормальные функции для стержня с обоими незакрепленными концами [см. выражение (5.6)], продольные перемещения колеблющегося стержня представим в виде следующего ряда:

$$u = \varphi_0 + \varphi_1 \cos\frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \varphi_3 \cos\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$

$$\cdots = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \cos\frac{i\pi x}{l}. \qquad (5.10)$$

Первое слагаемое φ_0 описывает движение стержня как абсолютно жесткого тела. На это движение накладываются движения по остальным формам продольных колебаний стержня. Для определения функции φ_0 имеем уравнение

$$\rho Fl\ddot{\varphi}_0 = P. \qquad (\text{п})$$

Функции φ_1, φ_2, φ_3, ..., как и выше, будем определять с помощью принципа возможных перемещений. Взяв для возможного перемещения следующее представление:

$$\delta u_i = C_i \cos(i\pi x/l), \qquad (\text{р})$$

найдем работу сил инерции на этом перемещении:

$$\delta W_{\text{и}} = -\int_0^l \rho F \ddot{u} C_i \cos\frac{i\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{2}\rho F l C_i \ddot{\varphi}_i. \qquad (\text{с})$$

---

* Подобная задача возникает при исследовании колебаний, возникающих при подъеме длинной буровой штанги, которая используется для бурения глубоких нефтяных скважин. Эта задача была рассмотрена в работе **Langer B. F., Lamberger E. H.** Calculation of load and stroke in oil-well pumb rods. — Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1943, v. 10, N. 1, p. A1—A12.

Энергия деформации колеблющегося стержня в произвольный момент времени

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EF\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2 EF}{4l}\sum_{i=1}^{\infty} i^2\varphi_i^2, \qquad (т)$$

а работа сил упругости на перемещении (р)

$$\delta W_y = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i = -\frac{i^2\pi^2 EF}{2l}C_i\varphi_i. \qquad (у)$$

И, наконец, работа силы P на перемещении (р)

$$\delta W_P = PC_i\cos i\pi = C_i P(-1)^i. \qquad (ф)$$

Приравняв нулю сумму выражений (с), (у) и (ф), получим уравнение

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2\varphi_i = \frac{2}{\rho Fl}P(-1)^i, \qquad (х)$$

где $p_i = i\pi a/l$. Из этого уравнения и уравнения (и), полагая, что в начальный момент времени стержень находился в покое, получаем

$$\varphi_0 = \frac{Pt^2}{2\rho Fl}; \qquad (ц)$$

$$\varphi_i = (-1)^i\frac{2}{i\pi a\rho F}\int_0^t P\sin\left[\frac{i\pi a}{l}(t-t')\right]dt' =$$

$$= \frac{(-1)^i 2lP}{i^2\pi^2 a^2\rho F}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right). \qquad (ч)$$

Подставляя эти выражения в представление (5.10), найдем

$$u = \frac{Pt^2}{2\rho Fl} + \frac{2lP}{\pi^2 a^2\rho F}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right). \qquad (ш)$$

Для того чтобы найти перемещение того конца стержня, к которому приложена сила P, в решение (ш) подставим $x = l$, что дает

$$(u)_{x=l} = \frac{Pt^2}{2\rho Fl} + \frac{2lP}{\pi^2 a^2\rho F}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right). \qquad (щ)$$

Для момента времени $t = l/a$ имеем

$$(u)_{x=l} = \frac{Pl}{2EF} + \frac{4Pl}{\pi^2 EF}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right) = \frac{Pl}{EF}. \qquad (э)$$

В этот момент времени перемещение равно удлинению стержня при действии постоянной растягивающей силы P.

Пример 1. Определить динамические перемещения при установившихся вынужденных колебаниях стержня, один конец которого жестко закреплен, а второй свободен (см. рис. 5.2, *а*), если к незакрепленному концу стержня прикладывается изменяющаяся во времени сила $P = P_1\sin\omega t$.

Решение. Уравнение (л) в данном случае принимает вид

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = \frac{2(-1)^{(i-1)/2}}{\rho F l} P_1 \sin \omega t.$$

Решая его применительно к случаю установившихся вынужденных колебаний, получим

$$\varphi_i = \frac{2P_1 (-1)^{(i-1)/2}}{\rho F l (p_i^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Подставляя эти функции в представление (5.8), можем найти искомые динамические перемещения при вынужденных колебаниях стержня. Амплитуда колебаний соответствующего типа становится большой, когда частота ω достигает значения, равного одной трети собственной частоты колебаний стержня.

Пример 2. Буровая штанга представляет стальную трубу длиной 101,6 м. Рассматривая штангу как стержень с незакрепленными концами, определить период колебаний τ основной формы. Найти, кроме того, перемещение δ конца $x = l$ в момент времени $t = \tau_1/2$, обусловленное внезапным приложением к этому концу растягивающего напряжения $\sigma = P/F = 2{,}11 \cdot 10^7$ Па. Принять, что $E = 2{,}11 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ Н·с^2/м^4.

Решение. Скорость распространения звука в стержне

$$a = \sqrt{E/\rho} = 5184 \text{ м/с},$$

а период основной формы колебаний $\tau = 2l/a = 0{,}47$ с. Из выражения (э) находим искомое перемещение

$$\delta = 2{,}11 \cdot 10^{7} \cdot 101{,}6/(2{,}11 \cdot 10^{11}) = 1{,}02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

ЗАДАЧИ

5.3.1. Предположим, что в середине пролета стержня с жестко закрепленными концами внезапно прикладывается постоянная продольная сила P (см. рис. 5.3, *а*). Определить продольные динамические перемещения стержня, который в начальный момент времени находился в покое.

Ответ: $u = \dfrac{2lP}{\pi^2 a^2 \rho F} \sum\limits_{i=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \dfrac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \sin \dfrac{i\pi x}{l} \left(1 - \cos \dfrac{i\pi a t}{l}\right).$

5.3.2. К концу $x = 0$ стержня, оба конца которого не закреплены, прикладывается продольная сила $P = P_1 t/t_1$, изменяющаяся по линейному закону во времени. Определить динамические продольные перемещения стержня, если в начальный момент времени стержень находился в покое.

Ответ: $u = \dfrac{P_1 t^3}{6\rho F l t_1} + \dfrac{2lP_1}{\pi^2 a^2 \rho F t_1} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2} \cos \dfrac{i\pi x}{l} \left(t - \dfrac{l}{i\pi a} \sin \dfrac{i\pi a t}{l}\right).$

5.3.3. Определить динамические перемещения при вынужденных установившихся колебаниях жестко закрепленного на конце $x = 0$ стержня и не закрепленного на конце $x = l$ (см. рис. 5.2, *а*), если на него действует равномерно распределенная по его длине сила $(P_1/l) \sin \omega t$.

Ответ: $u = \dfrac{4P_1 \sin \omega t}{\pi \rho F l} \sum\limits_{i=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \dfrac{\sin (p_i x/a)}{i (p_i^2 - \omega^2)}; \quad p_i = \dfrac{i\pi a}{2l}.$

5.3.4. Рассмотреть стержень, не закрепленный на конце $x = 0$ и жестко закрепленный на конце $x = l$. Определить динамические перемещения стержня,

возникающие при внезапном приложении постоянной продольной силы P в среднем сечении стержня $x = l/2$.

Ответ: $u = \dfrac{8lP}{\pi^2 a^2 \rho F} \sum\limits_{i=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \dfrac{\cos(i\pi/4)}{i^2} \cos\dfrac{i\pi x}{2l} \left(1 - \cos\dfrac{i\pi at}{2l}\right)$.

5.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ

Подходы, применявшиеся к решению задач, излагавшихся в предыдущих параграфах, обнаруживают известное сходство с методом нормальных форм колебаний, с помощью которого исследовались в гл. 4 системы со многими степенями свободы. Теперь применим метод нормальных форм колебаний к исследованию призматических стержней с непрерывно распределенной массой и бесконечным числом степеней свободы. Хотя метод будет сформулирован применительно к частной задаче о продольных колебаниях призматических стержней, общие положения рассматриваемого здесь метода нормальных форм колебаний можно распространить на исследование произвольных упругих тел.

Вновь рассмотрим свободные продольные колебания призматического стержня, показанного на рис. 5.1, *а*. Дифференциальное уравнение движения малого элемента стержня [см. выражение (а) и (б) в п. 5.2] можно записать в виде

$$m\ddot{u}dx - ru''dx = 0, \qquad \text{(а)}$$

где точками и штрихами обозначено дифференцирование перемещения u соответственно по t и x. Величина $m = \rho F$ характеризует *массу стержня, отнесенную к единице его длины*, а величина $r = EF$ — *жесткость стержня в продольном направлении*. Когда стержень колеблется по i-й собственной форме, его перемещение

$$u_i = X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \qquad \text{(б)}$$

Подставляя выражение (б) в уравнение (а), после несложных преобразований получим уравнение

$$rX_i'' + mp_i^2 X_i = 0, \qquad \text{(в)}$$

решение которого, как уже говорилось в п. 5.2, имеет вид

$$X_i = C_i \cos(p_i x/a) + D_i \sin(p_i x/a), \qquad \text{(г)}$$

где $a = \sqrt{r/m}$.

Перепишем уравнение (в) в следующей форме:

$$X_i'' = \lambda_i X_i, \qquad (5.11)$$

где

$$\lambda_i = -mp_i^2/r = -(p_i/a)^2. \qquad \text{(д)}$$

Уравнение (5.11) имеет форму задачи на собственные значения, в которой собственные значения λ_i и собственные функции X_i определя-

ются с учетом заданных концевых условий. В подобного типа задачах на собственные значения вторая производная по x функции X_i приравнивается самой функции, умноженной на постоянную λ_i.

Проверим, обладают ли свойством ортогональности соответствующие i-й и j-й формам колебаний собственные функции в задаче на собственные значения:

$$X_i'' = \lambda_i X_i; \tag{е}$$

$$X_j'' = \lambda_j X_j. \tag{ж}$$

Умножим уравнение (е) на X_j и уравнение (ж) на X_i и, проинтегрировав результат по длине стержня, получим

$$\int_0^l X_i'' X_j \, dx = \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx; \tag{з}$$

$$\int_0^l X_j'' X_i \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx. \tag{и}$$

Интегрирование по частям интегралов, стоящих в левых частях этих уравнений, дает

$$[X_i' X_j]_0^l - \int_0^l X_i' X_j' \, dx = \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx; \tag{к}$$

$$[X_j' X_i]_0^l \int_i^l X_i' X_j' \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx. \tag{л}$$

Независимо от того, являются ли концы стержня жестко закрепленными или незакрепленными, первые слагаемые в левых частях уравнений (к) и (л) равны нулю, поэтому, вычитая из уравнения (л) уравнение (к), придем к равенству

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^l X_i X_j \, dx = 0. \tag{м}$$

Чтобы это равенство выполнялось при $i \neq j$ и при различных собственных значениях (т. е. при $\lambda_i \neq \lambda_j$), должно иметь место следующее равенство:

$$\int_0^l X_i X_j \, dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{5.12}$$

Подставляя это равенство в уравнение (к), получим

$$\int_0^l X_i' X_j' \, dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{5.13}$$

Из уравнения (з) следует равенство

$$\int_0^l X_i'' X_j \, dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{5.14}$$

Таким образом, видим, что для призматического стержня ортогональны не только собственные функции, но также и их производные.

При $i = j$ интеграл в соотношении (м) может равняться произвольной постоянной. Если эту постоянную обозначить через α_i, получим

$$\int_0^l X_i^2\,dx = \alpha_i \quad \text{при} \quad i = j. \tag{5.15}$$

Если указанным способом пронормировать собственные функции, выражения (з) и (к) примут вид

$$\int_0^l X_i'' X_i\,dx = -\int_0^l (X_i')^2\,dx = \lambda_i\alpha_i = -\frac{mp_i^2}{r}\alpha_i = -\left(\frac{p_i}{a}\right)^2\alpha_i. \tag{5.16}$$

Из последующего обсуждения уясним, каким образом следует подбирать значения α_i при исследовании динамических перемещений в стержне.

Как и в предыдущем параграфе, представим перемещения стержня при продольных колебаниях в виде набора произведений, зависящих от времени функций φ_i и функций X_i, описывающих перемещения:

$$u = \sum_i \varphi_i X_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \tag{5.17}$$

Подставляя представление (5.17) в уравнение движения (а) при свободных колебаниях стержня, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m\ddot{\varphi}_i X_i - r\varphi_i X_i'')\,dx = 0.$$

Умножая это соотношение на нормальную функцию X_j и интегрируя результат по длине стержня, найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(m\ddot{\varphi}_i\int_0^l X_i X_j\,dx - r\varphi_i\int_0^l X_i'' X_j\,dx\right) = 0. \tag{н}$$

Учитывая условия ортогональности, задаваемые выражениями (5.12) и (5.14), видим, что при $i = j$ уравнение движения (н) принимает вид

$$m_{\Gamma i}\ddot{\varphi}_i = r_{\Gamma i}\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty, \tag{5.18}$$

где

$$m_{\Gamma i} = m\int_0^l X_i^2\,dx = m\alpha_i; \tag{5.19}$$

$$r_{\Gamma i} = -r\int_0^l X_i'' X_i\,dx = r\int_0^l (X_i')^2\,dx = mp_i^2\alpha_i. \tag{5.20}$$

Здесь через $m_{\Gamma i}$ обозначена *главная масса* или *обобщенная масса* для i-й формы колебаний, через $r_{\Gamma i}$ — *главная* или *обобщенная*

жесткость. Таким образом, уравнение (5.18) представляет собой уравнение движения в *главных координатах* при свободных колебаниях.

Если собственные функции X_i нормируются таким образом, что имеет место равенство

$$m_{\Gamma i} = m \int_0^l X_i^2 \, dx = 1, \qquad \text{(о)}$$

то говорят, что они нормированы по отношению к массе, отнесенной к единице длины стержня. При таком способе нормирования главная масса $m_{\Gamma i}$ равна единице, постоянная α_i [см. равенство (5.15)] равна $1/m$, а из равенства (5.20) следует, что главная жесткость

$$r_{\Gamma i} = p_i^2. \qquad \text{(п)}$$

С учетом сказанного уравнение движения (5.18) принимает более простой вид

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty \qquad (5.21)$$

и тогда говорят, что это уравнение записано в *нормальных координатах*. Если произвольная постоянная $\alpha_i = 1$, получаем $m_{\Gamma i} = m$ и $r_{\Gamma i} = m p_i^2$. Тогда уравнение движения (5.21) будет содержать общий множитель m, на который его можно разделить. Поэтому для удобства будем полагать $\alpha_i = 1$ вместо $\alpha_i = 1/m$.

Подводя итоги сказанному, отметим, что уравнение движения (а) было преобразовано к нормальным координатам путем подстановки в него представления (5.17) для u, умножения на X_j и последующего интегрирования результата по длине стержня. Когда собственные функции нормируются так, что имеет место

$$\int_0^l X_i^2 \, dx = 1; \quad \int_0^l X_i'' X_i \, dx = -\int_0^l (X_i')^2 \, dx = -\left(\frac{p_i}{a}\right)^2, \qquad (5.22)$$

обобщенная масса, соответствующая каждой главной координате, равна m, а обобщенная жесткость составляет $m p_i^2$. Однако после деления на общий множитель m можно получить уравнение (5.21).

Воспользуемся теперь подходом, основанным на применении нормальных форм колебаний, для определения продольных динамических перемещений в стержне при заданных начальных условиях по перемещению и скорости. Как и в п. 5.2, предполагаем, что при $t = 0$ начальные перемещения представлены в виде $u_0 = f_1(x)$, а начальные скорости заданы в виде функции $\dot{u}_0 = f_2(x)$.

Представляя функции u_0 и $\dot{u}_0$ в виде рядов (5.17), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} X_i = f_1(x); \qquad \text{(р)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} X_i = f_2(x). \qquad \text{(с)}$$

Умножив эти представления на X_j и проинтегрировав по длине стержня, найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} \int_0^l X_i X_j \, dx = \int_0^l f_1(x) X_j \, dx; \qquad (т)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} \int_0^l X_i X_j \, dx = \int_0^l f_2(x) X_j \, dx. \qquad (у)$$

Из выражений (5.12) и (5.22), определяющих условия ортогональности и ортонормированности, видно, что при $i = j$ для начальных условий могут быть получены следующие представления в нормальных координатах:

$$\varphi_{0i} = \int_0^l f_1(x) X_i \, dx; \qquad (5.23)$$

$$\dot{\varphi}_{0i} = \int_0^l f_2(x) X_i \, dx. \qquad (5.24)$$

Следовательно, динамическое поведение при свободных колебаниях, выраженное с помощью нормальных форм, можно описать выражением

$$\varphi_i = \varphi_{0i} \cos p_i t + \frac{\dot{\varphi}_{0i}}{p_i} \sin p_i t, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \qquad (ф)$$

Подставляя эти выражения в представление (5.17), получаем следующее суммарное по всем формам колебаний выражение для динамических перемещений:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \left(\varphi_{0i} \cos p_i t + \frac{\dot{\varphi}_{0i}}{p_i} \sin p_i t \right). \qquad (5.25)$$

Это выражение представляет обобщенную форму решений частного вида (5.6) и (5.7).

Применим теперь метод нормальных форм колебаний к исследованию вынужденных продольных динамических перемещений призматических стержней. С этой целью предположим, что на стержень (рис. 5.4) действует распределенная сила $Q(x, t)$. В этом случае

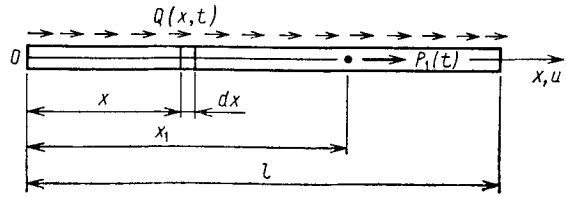


Рис. 5.4

дифференциальное уравнение движения, записанное для малого элемента стержня, имеет вид

$$m\ddot{u}dx - ru''dx = Q(x_1 t)\,dx. \qquad (х)$$

Для удобства разделим обе части этого уравнения на $m = \rho F$, т. е. на массу, отнесенную к единице длины. Тогда получим

$$\ddot{u}dx - a^2 u''dx = q(x,\ t)\,dx, \qquad (ц)$$

где $a^2 = r/m = E/\rho$, $q(x, t) = Q(x, t)/m$. Преобразуем уравнение (ц) к нормальным координатам подстановкой представления (5.17) для u, умножением на X_j и интегрированием по длине стержня, что дает

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\ddot{\varphi}_i \int_0^l X_i X_j\,dx - a^2\varphi_i \int_0^l X_i'' X_j\,dx\right) = \int_0^l X_j q(x,\ t)\,dx. \qquad (ч)$$

Используя условия ортогональности и нормированности, задаваемые выражениями (5.12), (5.14) и (5.22), при $i = j$ получим

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2\varphi_i = \int_0^l X_i q(x,\ t)\,dx,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty. \qquad (5.26)$$

Это соотношение представляет уравнение движения в нормальных координатах, где стоящий в правой части интеграл является *нагрузкой, соответствующей i-й форме колебаний.*

Динамическое поведение, соответствующее i-й форме колебаний, описывается с помощью интеграла Дюамеля

$$\varphi_i = \frac{1}{p_i}\int_0^l X_i \int_0^t q(x,\ t')\sin p_i(t - t')\,dt'\,dx. \qquad (5.27)$$

Подстановка этих функций, зависящих от времени, в представление (5.17) дает суммарное динамическое перемещение в виде

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i}{p_i}\int_0^l X_i \int_0^t q(x,\ t')\sin p_i(t - t')\,dt'\,dx. \qquad (5.28)$$

Если нагрузка $P_1(t)$ является сосредоточенной и приложенной в точке x_1 (см. рис. 5.4), интегрировать по длине стержня не требуется. Динамическое перемещение при такого рода нагружении вычисляем по более простой формуле

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i X_{i1}}{p_i}\int_0^t q_1(t')\sin p_i(t - t')\,dt', \qquad (5.29)$$

где через X_{i1} обозначена нормальная функция X_i, соответствующая случаю приложения единичной нагрузки в точке x_1; $q_1(t) = P_1(t)/m$.

Метод нормальных форм колебаний для исследования неустановившегося поведения стержня при действии возмущающих сил эквивалентен методу возможной работы, изложенному в предыдущем параграфе. Ниже приведены примеры, демонстрирующие применения выражений (5.28) и (5.29) соответственно для распределенной и соредоточенной возмущающих сил.

Пример 1. Предполагается, что стержень, показанный на рис. 5.4, жестко закреплен на левом конце и не закреплен на правом, исследовать его динамическое поведение при внезапном приложении равномерно распределенной продольной силы интенсивностью Q.

Решение. Поскольку нагрузка $q = Q/m$ не зависит ни от времени t, ни от координаты x, ее можно вынести из-под знака интеграла в выражении (5.28). Рассматривая свободные колебания этого стержня, получим

$$p_i = i\pi a/(2l); \quad X_i = D_i \sin(p_i x/a), \quad i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ \infty.$$

Для того чтобы пронормировать функции X_i в соответствии с выражениями (5.22), следует взять $D_i = \sqrt{2/l}$. Тогда выражение (5.28) принимает вид

$$u = \frac{2Q}{lm} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} \frac{1}{p_i} \sin\frac{p_i x}{a} \int_0^t \sin\frac{p_i x}{a} \int_0^t \sin p_i (t - t')\, dt'\, dx =$$

$$= \frac{4Q}{\pi m} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} \frac{1}{i p_i^2} \sin\frac{p_i x}{a} (1 - \cos p_i t) =$$

$$= \frac{16 l^2 Q}{\pi^3 a^2 m} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin\frac{i\pi x}{2l} \left(1 - \cos\frac{i\pi a t}{2l}\right). \qquad (\text{ш})$$

Пример 2. Исследовать динамическое поведение стержня, взяв такие же концевые условия, как и в примере 1, на случай, когда внезапно снимается нагрузка P, первоначально приложенная к правому концу $x = l$ стержня.

Решение. В этом случае для получения динамических перемещений в стержне воспользуемся выражением (5.29):

$$u = \frac{2P}{lm} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} \frac{1}{p_i} \sin\frac{p_i x}{a} \sin\frac{p_i l}{a} \int_0^t \sin p_i (t - t')\, dt' =$$

$$= \frac{2P}{lm} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} \frac{1}{p_i^2} \sin\frac{p_i x}{a} \sin\frac{p_i l}{a} (1 - \cos p_i t) =$$

$$= \frac{8lP}{\pi^2 a^2 m} \sum_{i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \sin\frac{i\pi x}{2l} (1 - \cos p_i t).$$

Полученное выражение совпадает с выражением (н), найденным в п. 5.3.

ЗАДАЧИ

5.4.1. Предположим, что сила P_0, первоначально действующая на стержень, приложена не в середине пролета, а на расстоянии, равном одной трети длины стержня ($x = l/3$). Используя подход, основанный на рассмотрении нормальных

форм колебаний, исследовать свободные колебания, возникающие при внезапном снятии указанной силы.

$$\textit{Ответ: } u = \frac{2P_0}{3\pi EF}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\frac{l}{i\pi}\left(3\sin\frac{i\pi}{3}-\sin\frac{2i\pi}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{l}{3}\cos\frac{2i\pi}{3}\right]\cos\frac{i\pi at}{l}.$$

5.4.2. Предположим, что правой половине стержня, показанного на рис. 5.2, *а*, задана в момент времени $t = 0$ начальная скорость v в продольном направлении. Исследовать свободные колебания стержня, обусловленные указанным условием.

$$\textit{Ответ: } u = \frac{8vl}{\pi^2 a}\sum_{i=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cos\frac{i\pi}{4}\sin\frac{i\pi x}{2l}\sin\frac{i\pi at}{2l}.$$

5.4.3. К стержню с жестко закрепленными концами внезапно прикладывается распределенная продольная нагрузка, которая изменяется по линейному закону от нулевого значения при $x = 0$ до значения Q при $x = l$. Методом нормальных форм колебаний исследовать динамические продольные перемещения этого стержня.

$$\textit{Ответ: } u = \frac{2l^2Q}{\pi^3a^2m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right).$$

5.4.4. Определить динамические продольные перемещения стержня с незакрепленными концами, если в середине пролета $x = l/2$ прикладывается изменяющаяся во времени продольная сила $P = P_1\,(t/t_1)^2$.

$$\textit{Ответ: } u = \frac{P_1t^4}{12lmt_1^2}+\frac{2lP_1}{\pi^2a^2mt_1^2}\sum_{i=2,\,4,\,6,\,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{i/2}}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{l}\times$$

$$\times\left[t^2-\frac{2l^2}{(i\pi a)^2}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right)\right].$$

5.5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С МАССОЙ ИЛИ ПРУЖИНОЙ НА КОНЦЕ

Кроме обсуждавшихся в предыдущих параграфах концевых условий типа жесткого закрепления или свободных от закреплений концов могут встретиться случаи сосредоточенной массы или упругого подкрепления, что изображено у правого конца стержня, показанного на рис. 5.5. Оба этих случая будут рассмотрены в этом параграфе с помощью метода нормальных форм колебаний.

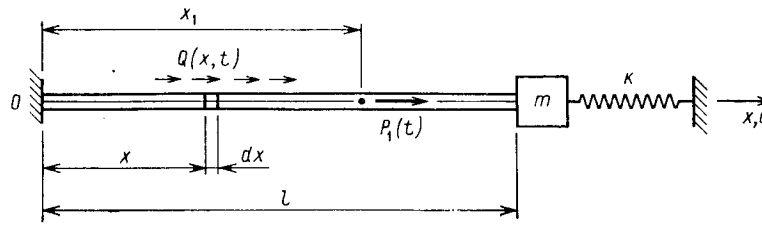


Рис. 5.5

Сначала рассмотрим случай, когда жесткость k пружины (см. рис. 5.5) равна нулю и имеется только сосредоточенная масса M, присоединенная к правому концу стержня. При этом сила, передаваемая от сосредоточенной массы к концу стежня при колебаниях, равна $-M(\ddot{u})_{x=l}$. Таким образом, концевые условия для стержня можно представить в следующем виде:

$$(u)_{x=0} = 0; \quad r(u')_{x=l} = -M(\ddot{u})_{x=l}. \tag{а}$$

Поскольку второе из этих условий включает движение сосредоточенной массы, исследование данного случая несколько сложнее, чем когда рассматривается только один стержень. Однако движение будет по-прежнему гармоническим, поэтому здесь можно вновь взять для i-й формы колебаний следующее выражение:

$$u_i = X_i(A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \tag{б}$$

Подставляя выражение (б) в концевые условия (а), получим

$$X_{i0} = 0; \quad rX'_{il} = Mp_i^2 X_{il}, \tag{в}$$

где индексы 0 и l обозначают соответственно точки $x = 0$ и $x = l$. Как и в предыдущих случаях, нормальные функции имеют вид

$$X_i = C_i \cos(p_i x/a) + D_i \sin(p_i x/a). \tag{г}$$

Из первого концевого условия (в) следует, что $C_i = 0$, а из второго получаем соотношение

$$\frac{rp_i}{a} \cos\frac{p_i l}{a} = Mp_i^2 \sin\frac{p_i l}{a}. \tag{д}$$

Это соотношение можно представить в более компактной форме

$$\xi_i \operatorname{tg} \xi_i = \eta, \tag{5.30}$$

где $\xi = p_i l/a$; $\eta = ml/M$ — отношение массы стержня к сосредоточенной массе.

Соотношение (5.30) представляет частотное уравнение для рассматриваемого случая. Поскольку это уравнение является трансцендентным, круговую частоту p_i необходимо искать методом подбора. Наибольший интерес обычно представляет основная форма колебаний, и поэтому ниже приводятся значения параметра частоты ξ_1 первой формы колебаний, соответствующие различным значениям отношения масс:

η	0,01	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	1,00	1,50
ξ_1	0,10	0,32	0,52	0,65	0,75	0,82	0,86	0,98
η	2,00	3,00	4,00	5,00	10,0	20,0	100,0	∞
ξ_1	1,08	1,20	1,27	1,32	1,42	1,42	1,57	$\pi/2$

Если масса стержня мала по сравнению с прикрепленной массой, обе величины η и ξ_1 малы, и тогда уравнение (5.30) можно упростить к виду $\operatorname{tg} \xi_1 \approx \xi_1$, откуда следует

$$\xi^2 \approx \eta = \frac{ml}{M}; \quad \xi_1 = \frac{p_1 l}{a} \approx \sqrt{\frac{ml}{M}}.$$

Таким образом

$$p_1 \approx \frac{a}{l}\sqrt{\frac{ml}{M}} = \sqrt{\frac{EF}{Ml}},$$

где EF/l — параметр *продольной жесткости* стержня. Этот результат совпадает с результатом, полученным при рассмотрении стержня и массы как системы с одной степенью свободы. С другой стороны, если отношение масс является большой величиной, уравнение частот принимает вид

$$\operatorname{tg}(p_i l/a) = \infty.$$

Из этого уравнения получаем следующие значения круговых частот:

$$p_i = i\pi a/2l, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \infty,$$

которые совпадают с найденными в п. 5.2.

Для того чтобы записать соотношения ортогональности для стержня с прикрепленной на конце массой, перепишем задачу на собственные значения [см. уравнение (5.11)] для двух различных форм с номерами i и j колебаний:

$$rX_i'' = -mp_i^2 X_i; \qquad \text{(е)}$$

$$rX_j'' = -mp_j^2 X_j. \qquad \text{(ж)}$$

Умножая первое из этих соотношений на X_j, а второе — на X_i и интегрируя по длине стержня, получим

$$r\int_0^l X_i'' X_j\,dx = -mp_i^2\int_0^l X_i X_j\,dx; \qquad \text{(з)}$$

$$r\int_0^l X_j'' X_i\,dx = -mp_j^2\int_0^l X_i X_j\,dx. \qquad \text{(и)}$$

Массу, помещенную в точку $x = l$, также следует включить в рассматриваемые соотношения ортогональности, и тогда второе концевое условие (в) для i-й и j-й форм колебаний можно представить в виде

$$rX_{il}' X_{jl} = Mp_i^2 X_{il} X_{jl}; \qquad \text{(к)}$$

$$rX_{jl}' X_{il} = Mp_j^2 X_{il} X_{jl}, \qquad \text{(л)}$$

где первое соотношение умножается на X_{jl}, а второе — на X_{il}. Вычитание соотношений (к) и (л) из равенств (з) и (и) приводит к следующим комбинированным соотношениям:

$$r\int_0^l X_i'' X_j\,dx - rX_{il}' X_{jl} = -p_j^2\left(m\int_0^l X_i X_j\,dx + MX_{il}X_{jl}\right); \qquad \text{(м)}$$

$$r\int_0^l X_j'' X_i\,dx - rX_{jl}' X_{il} = p_j^2\left(m\int_0^l X_i X_j\,dx + MX_{il}X_{jl}\right). \qquad \text{(н)}$$

Интегрируя выражение, стоящее в левой части этих равенств, найдем

$$-rX'_{i0}X_{j0} - r\int_0^l X'_iX'_j\,dx = -p_i^2\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx + MX_{il}X_{jl}\right); \quad \text{(о)}$$

$$-rX'_{j0}X_{i0} - r\int_0^l X'_iX_j\,dx = -p_j^2\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx + MX_{il}X_{jl}\right). \quad \text{(п)}$$

Поскольку интегралы, стоящие в левых частях соотношений (о) и (п), равны нулю, то, вычитая из (п) соотношение (о), получим

$$(p_i^2 - p_j^2)\left(m\int_0^l X_iX_j\,dx + MX_{il}X_{jl}\right) = 0. \quad \text{(р)}$$

Когда $i \neq j$ и, следовательно, $p_i^2 \neq p_j^2$, из равенства (р) следует соотношение ортогональности

$$m\int_0^l X_iX_j\,dx + MX_{il}X_{jl} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (5.31)$$

Из соотношения (о), кроме того, следует

$$r\int_0^l X'_iX'_j\,dx = 0 \text{ при } i = j, \quad (5.32)$$

а из соотношения (м) получаем

$$r\int_0^l X''_iX_j\,dx - rX'_{il}X_{jl} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (5.33)$$

Сравнивая эти соотношения с соответствующими им равенствами (5.12)—(5.14), видим, что в соотношениях (5.31) и (5.33) присутствуют дополнительные слагаемые.

При $i = j$ второй сомножитель, стоящий в круглых скобках соотношения (р), можно положить равным произвольной постоянной. Полагая эту постоянную равной m, получим

$$m\int_0^l X_i^2\,dx + MX_{il}^2 = m \text{ при } j = j. \quad (5.34)$$

При нормировании собственных функций таким образом, чтобы они удовлетворяли этому равенству, из соотношений (м) и (о) следует

$$r\int_0^l X''_iX_i\,dx - rX'_{il}X_{il} = -r\int_0^l (X'_i)^2\,dx = -mp^2. \quad (5.35)$$

Для того чтобы исследовать неустановившееся поведение системы при продольных перемещениях, обусловленное начальными условиями вида $u_0 = f_1(x)$ и $\dot{u}_0 = f_2(x)$ при $t = 0$, определим сначала начальные перемещения $u_{0l} = f_1(l)$ и скорость $\dot{u}_{0l} = f_2(l)$ массы,

прикрепленной к стержню в точке $x = l$. Затем начальные условия для стержня и массы представим в виде рядов по функциям времени φ_i и перемещения X_i [см. представления (5.17)]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} X_i = f_1(x); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} X_i = f_2(x); \tag{с}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} X_{il} = f_1(l); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} X_{il} = f_2(l). \tag{т}$$

Далее, соотношения (с) умножаем на mX и интегрируем по длине стержня. Затем представления (т) умножаем на MX_{jl} и полученные результаты складываем с результатом указанных преобразований над соотношениями (с), что в итоге дает

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} \left(m \int_0^l X_i X_j \, dx + M X_{il} X_{jl} \right) = m \int_0^l f_1(x) X_j \, dx + M f_1(l) X_{jl}; \tag{у}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} \left(m \int_0^l X_i X_j \, dx + M X_{il} X_{jl} \right) = m \int_0^l f_2(x) X_j \, dx + M f_2(l) X_{jl}. \tag{ф}$$

Используя соотношения ортогональности (5.31) и нормированности (5.34), находим, что при $i = j$ из соотношений (у) и (ф) получаются следующего вида представления начальных условий в нормальных координатах:

$$\varphi_{0i} = \int_0^l f_1(x) X_i \, dx + \frac{l}{\eta} f_1(l) X_{il}; \tag{5.36}$$

$$\dot{\varphi}_{0i} = \int_0^l f_2(x) X_i \, dx + \frac{l}{\eta} f_2(l) X_{il}. \tag{5.37}$$

С учетом этих представлений для функций φ_{0i} и $\dot{\varphi}_{0i}$ выражение для динамических перемещений стержня, обусловленных заданными начальными условиями, принимает такой же вид, что и выражение (5.25).

Для того чтобы показать, как можно определить динамические перемещения системы, обусловленные приложенными к ней продольными силами, начнем с того, что запишем уравнение движения для малого элемента стержня (см. рис. 5.5):

$$m\ddot{u}dx - ru''dx = Q(x, t)\, dx. \tag{х}$$

На правом конце стержня из выражений (а) получаем условие вида

$$M\ddot{u}_l + ru'_l = 0. \tag{ц}$$

Подставляя в уравнение (х) представления (5.17), затем умножая на X_j и интегрируя по длине стержня, найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m\ddot{\varphi}_i \int_0^l X_i X_j \, dx - r\varphi_i \int_0^l X_i'' X_j \, dx \right) = \int_0^l X_j Q(x, t) \, dx. \tag{ч}$$

Подстановка аналогичного представления в соотношение (ц) и умножение затем на X_{jl} дает

$$\sum_{i=1}^{\infty} (M\ddot{\varphi}_i X_{il} X_{jl} + r\varphi_i X'_{il} X_{jl}) = 0. \qquad (ш)$$

Складывая почленно соотношения (ч) и (ш), приходим к соотношению вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{\varphi}_1 \left(m \int_0^l X_i X_j \, dx + M X_{il} X_{jl} \right) - \varphi_i r \left(\int_0^l X''_i X_j \, dx - X'_{il} X_{jl} \right) \right] =$$

$$= \int_0^l X_j Q(x, t) \, dx. \qquad (щ)$$

Из условий (5.31), (5.33) — (5.35) ортогональности и нормированности следует, что при $i = j$ имеем

$$m\ddot{\varphi}_i + m p_i^2 \varphi_i = \int_0^l X_i Q(x, t) \, dx. \qquad (э)$$

Если правую и левую части этого уравнения разделить на m, в результате получим уравнение (5.26), в котором $q(x, t) = Q(x, t)/m$. Поэтому динамические перемещения, соответствующие i-й форме колебаний, будут и здесь представляться выражением (5.27), а суммарные динамические перемещения можно найти из выражения (5.28). В случае действия сосредоточенной нагрузки $P_1(t)$, приложенной в точке x_1 (см. рис. 5.5), динамические перемещения можно найти из выражения (5.29). Если $x = l$, это означает, что сосредоточенная сила прикладывается непосредственно к массе M, поэтому данный случай не требует специального исследования.

Все изложенные выше рассуждения в этом параграфе относились к случаю, когда жесткость k пружины (см. рис. 5.5) равнялась нулю, а сосредоточенная масса M была ненулевой. Рассмотрим теперь противоположную ситуацию, когда $k \neq 0$ и $M = 0$. В этом случае сила, передаваемая пружиной к концу стержня при его колебаниях, будет равна $-k(u)_{x=l}$. Согласно этому концевые условия для стержня примут вид

$$(u)_{x=0} = 0; \quad r(u')_{x=l} = -k(u)_{x=l}. \qquad (а')$$

Рассуждая, как и в случае сосредоточенной массы, приходим к выводу, что для нормальных функций следует взять выражение

$$X_i = D_i \sin(p_i x/a), \qquad (б')$$

и тогда второе концевое условие в (а') приводит к соотношению

$$\frac{r p_i}{a} \cos \frac{p_i l}{a} = -k \sin \frac{p_i l}{a}. \qquad (в')$$

Если ввести безразмерный параметр $\zeta_i = ml^2 p_i^2/k$, частотное уравнение можно представить в следующей компактной форме:

$$\xi_i \operatorname{tg} \xi_i = -\zeta_i, \qquad (5.38)$$

где, как и выше, $\xi_i = p_i a/l$. Таким образом, приведенная ранее таблица числовых значений для первой формы колебаний будет применима и в данном случае, если параметр η заменить на $-\zeta_i$. Когда жесткость k пружины мала ($k \to 0$), уравнение (в′) превращается в частотное уравнение для стержня с незакрепленным правым концом и жестко закрепленным на левом конце. С другой стороны, когда k велико ($k \to \infty$), уравнение (в′), если его разделить на k, перейдет в частотное уравнение для стержня, жестко закрепленного по обоим концам.

Для того чтобы получить соотношения ортогональности для стержня, подпружиненного на конце, поступим так же, как и в случае стержня с сосредоточенной массой, прикрепленной к его концу. В этом случае вместо соотношений (к) и (л) следует взять

$$rX'_{il}X_{jl} = -kX_{il}X_{jl}; \qquad (г')$$

$$rX'_{jl}X_{il} = -kX_{il}X_{jl}. \qquad (д')$$

Вычитая эти равенства почленно из соотношений (з) и (и), получим следующие комбинированные соотношения:

$$r\int_0^l X''_iX_j\,dx - rX'_{il}X_{jl} - kX_{il}X_{jl} = -mp_i^2\int_0^l X_iX_j\,dx; \qquad (е')$$

$$r\int_0^l X''_jX_i\,dx - rX'_{jl}X_{il} - kX_{il}X_{jl} = -mp_j^2\int_0^l X_iX_j\,dx. \qquad (ж')$$

Интегрируя по частям интегралы, стоящие в левых частях этих соотношений, и вычитая соотношение (е′) из соотношения (ж), получим соотношения ортогональности для рассматриваемой системы:

$$m\int_0^l X_iX_j\,dx = 0 \text{ при } i \neq j; \qquad (5.39)$$

$$r\int_0^l X'_iX'_j\,dx + kX_{il}X_{jl} = 0 \text{ при } i \neq j; \qquad (5.40)$$

$$r\int_0^l X_iX_j\,dx - rX'_{il}X_{jl} - kX_{il}X_{jl} = 0 \text{ при } i \neq j. \qquad (5.41)$$

Сравнивая эти соотношения с (5.12)—(5.14), видим, что соотношение (5.39) совпадает с аналогичным выражением для системы без пружины. Однако в соотношениях (5.40) и (5.41) появляются дополнительные слагаемые.

Для случая $i = j$ процедуру нормирования выполним так:

$$m\int_0^l X_i^2\,dx = m; \qquad (5.42)$$

$$r\int_0^l X''_iX_i\,dx - rX'_{il}X_{il} - kX_{il}^2 = -r\int_0^l (X'_i)^2\,dx - kX_{il}^2 = -mp_i^2. \qquad (5.43)$$

Поскольку соотношение нормированности (5.42) совпадает с аналогичным (5.22), то и выражения (5.23)—(5.25), полученные в п. 5.4 для динамических перемещений при заданных начальных условиях, применимы в данном случае. Более того, динамические перемещения системы, обусловленные действием продольных сил, можно найти, воспользовавшись выражениями (5.28) и (5.29), также полученными в п. 5.4. Таким образом, видим, что хотя наличие пружины и оказывает влияние на частоты и формы продольных колебаний стержня, тем не менее суть метода нормальных форм колебаний для определения динамического поведения системы не изменилась.

Если в системе одновременно присутствуют как сосредоточенная масса, так и пружина ($M \neq 0$; $k \neq 0$) (см. рис. 5.5), концевые условия принимают вид

$$(u)_{x=0} = 0; \quad r(u')_{x=l} = -M(\ddot{u})_{x=l} = -k(u)_{x=l}. \qquad (з')$$

В данном случае, являющемся комбинацией двух изученных ранее, выражения для нормальных функций можно по-прежнему брать в форме (в'). Тогда из второго концевого условия в (з') получим

$$\frac{rp_i}{a}\cos\frac{p_i l}{a} = (Mp_i^2 - k)\sin\frac{p_i l}{a}, \qquad (и')$$

откуда следует частотное уравнение в безразмерной форме

$$\xi_i \operatorname{tg}\xi_i = \eta\zeta_i/(\zeta_i - \eta). \qquad (5.44)$$

Соотношения ортогональности определяются в данном случае выражениями (5.31), (5.40) и (5.41), а нормированности — выражениями (5.34) и (5.43). Начальные перемещения и скорости в нормальных координатах представляются выражениями (5.36) и (5.37), а решения для динамических перемещений, обусловленных заданными начальными условиями и действием приложенных сил, задаются выражениями (5.25), (5.28) и (5.29).

Изложенный в этом параграфе подход может быть распространен и на более сложный случай, когда массы и пружины прикрепляют к обоим концам стержня. В этом случае, как следует из выражения (г), нормальные функции будут содержать оба ненулевых слагаемых, поэтому частотное уравнение будет иметь больше членов. Кроме того, соотношения ортогональности и нормированности будут содержать члены с массами и жесткостями пружин, прикрепленными к обоим концам стержня, но при этом начальные условия, записанные в нормальных координатах, можно представить в виде, когда они будут определяться только влиянием прикрепленных на концах стержня масс. В качестве упражнения предлагаем читателю получить эти более сложные (но и более общие) выражения, описывающие продольные колебания призматических стержней. Аналогичный с точки зрения математической формулировки случай вала с закрепленными на концах дисками будет обсужден в п. 5.7, а случай предварительно растянутой нити с дополнительными пружинами, препятствующими поперечным перемещениям, будет рассмотрен в п. 5.8.

5.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ЗАДАННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ОПОР

Рассмотрим теперь динамические перемещения стержней при продольных колебаниях, обусловленных не действием приложенных сил, а заданными перемещениями опор. Например, если основание показанной на рис. 5.6 системы перемещается в направлении оси x по закону, определяемому функцией

$$u_{\text{осн}} = g(t), \tag{а}$$

то дифференциальное уравнение движения малого элемента стержня можно записать в виде

$$m\ddot{u}dx - r(u - u_{\text{осн}})'' dx = 0. \tag{б}$$

Приступая к решению этого уравнения, введем обозначение

$$u^* = u - u_{\text{осн}}, \tag{в}$$

которое характеризует перемещение произвольной точки стержня относительно перемещения основания как абсолютно жесткого тела. Кроме того, абсолютное ускорение произвольной точки можно представить в виде

$$\ddot{u} = \ddot{u}^* + \ddot{u}_{\text{осн}}. \tag{г}$$

Подставляя представления (в) и (г) в уравнение (б), получим

$$m(\ddot{u}^* + \ddot{u}_{\text{осн}})\,dx - r(u^*)'' dx = 0$$

или

$$m\ddot{u}^* dx - r(u^*)'' dx = -m\ddot{u}_{\text{осн}}\,dx = -m\ddot{g}(t)\,dx. \tag{д}$$

Сравнивая это уравнение движения с уравнением (х) из п. 5.4, видим, что эквивалентная распределенная нагрузка в относительных координатах равна $-m\ddot{g}(t)$. Подобная формулировка исходной задачи аналогична той, которая была использована в предыдущих параграфах, где рассматривалось поведение систем с дискретными параметрами, обусловленное заданным ускорением основания [см. уравнение (м) в п. 1.6].

Для удобства разделим уравнение (д) на отнесенную к единице длины стержня массу m, откуда получим

$$\ddot{u}^* dx - a^2(u^*)'' dx = -\ddot{g}(t)\,dx. \tag{е}$$

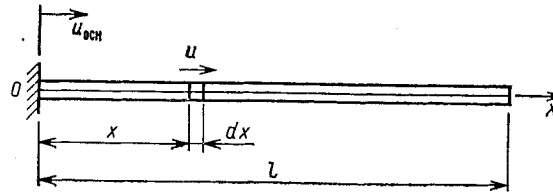


Рис. 5.6

Сравнивая это уравнение с уравнением (ц) из п. 5.4, видим, что здесь вместо функции $q(x, t)$ стоит функция $-\ddot{g}(t)$. Тогда уравнение (5.26) принимает вид

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = -\ddot{g}(t) \int_0^l X_i \, dx, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty, \qquad (5.45)$$

где член, стоящий в правой части, представляет *эквивалентную нагрузку для соответствующей нормальной формы колебаний*. Для i-й формы колебаний интеграл Дюамеля принимает вид

$$\varphi_i = -(1/p_i) \int_0^l X_i \, dx \int_0^t \ddot{g}(t') \sin p_i (t - t') \, dt'. \qquad (5.46)$$

Просуммировав перемещения по всем нормальным формам колебаний в соответствии с выражением (5.17), получим

$$u^* = -\sum_{i=1}^{\infty} (X_i/p_i) \int_0^l X_i \, dx \int_0^t \ddot{g}(t') \sin p_i (t - t') \, dt', \qquad (5.47)$$

что представляет динамическое перемещение произвольной точки стержня относительно движущегося основания. Общее решение определяется суммированием относительного (колебательного) движения и движения основания:

$$u = u_{\text{осн}} + u^* = g(t) + u^*. \qquad (5.48)$$

Таким образом, подставляя вторую производную по времени функции $u_{\text{осн}} = g(t)$ в выражение (5.47), а саму функцию в равенство (5.48), получим закон динамических перемещений стержня, обусловленных движениями основания как абсолютно жесткого тела. Функцию $u_{\text{осн}} = g(t)$ из выражения (5.48) можно охарактеризовать как *закон движения невесомого стержня или основания как абсолютно жесткого тела*, при этом относительное движение u^* обусловлено влиянием сил инерции, распределенных по длине стержня.

Применяя подход, который до некоторой степени аналогичен использовавшемуся при исследовании случая движения основания как абсолютно жесткого тела, получим выражение для продольных динамических перемещений стержня, обусловленных перемещениями обоих концов, задаваемых независимым образом. С этой целью рассмотрим рис. 5.7 и функции вида

$$u_{\text{оп}\,1} = g_1(t); \quad u_{\text{оп}\,2} = g_2(t), \qquad (ж)$$

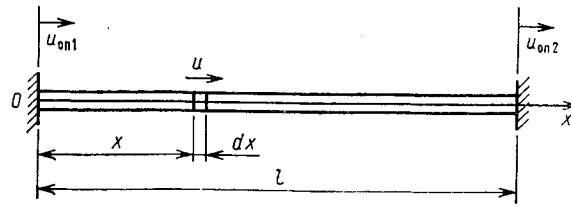


Рис. 5.7

которые описывают независимые перемещения соответственно левого и правого концов. Здесь предполагается, что хотя эти перемещения могут быть большими, их разность в произвольный момент времени t мала.

При исследовании динамических продольных перемещений стержня, обусловленных движениями опор, удобно абсолютное перемещение u представить в виде суммы

$$u = u_{ст} + u^*. \qquad (з)$$

Здесь через $u_{ст}$ обозначено перемещение произвольной точки невесомого стержня, жестко закрепленного по обоим концам при заданном законе движений опор. Это перемещение определяется из статического анализа, и для призматического стержня оно имеет вид

$$u_{ст} = \frac{l-x}{l} g_1(t) + \frac{x}{l} g_2(t) = u_{ст\,1} + u_{ст\,2}. \qquad (5.49)$$

Эта часть общего перемещения будет называться *перемещением невесомого стержня, обусловленным его податливостью*. Тогда функция u^* в выражении (з) будет представлять перемещение произвольной точки стержня относительно перемещения $u_{ст}$. Таким образом, видим, что относительное перемещение u^*, как и выше, обусловлено влиянием сил инерции, распределенных по длине стержня.

Аналогично можно записать и ускорение $\ddot{u}$ произвольной точки стержня

$$\ddot{u} = \ddot{u}_{ст} + \ddot{u}^*, \qquad (и)$$

которое получается дифференцированием выражения (з) дважды по времени. Уравнение движения для малого элемента стержня (см. рис. 5.7) с использованием выражений (з) и (и) принимает вид

$$m(\ddot{u}_{ст} + \ddot{u}^*)\,dx - r(u_{ст} + u^*)''\,dx = 0. \qquad (к)$$

Для призматического стержня величина $u_{ст}''$ равна нулю, поэтому уравнение (к) можно переписать в виде

$$m\ddot{u}^*\,dx - r(u^*)''\,dx = -m\ddot{u}_{ст}(x,\ t)\,dx, \qquad (л)$$

сходным с уравнением (д), записанным для случая движения основания как абсолютно жесткого тела. Из уравнения (л) видно, что в рассматриваемом случае эквивалентная распределенная нагрузка в относительных координатах равна $-m\ddot{u}_{ст}(x,\ t)$. Разделив обе части уравнения (л) на величину, представляющую отношение массы m стержня к его длине, получим

$$\ddot{u}^*\,dx - a^2(u^*)''\,dx = -\ddot{u}_{ст}(x,\ t)\,dx, \qquad (м)$$

откуда видно, что здесь вместо функции $q(x,\ t)$ стоит функция $-\ddot{u}_{ст}(x,\ t)$. Поэтому i-е уравнение движения в нормальных координатах принимает вид

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2\varphi_i = -\int_0^l X_i\ddot{u}_{ст}(x,\ t)\,dx, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty, \qquad (5.50)$$

где в правой части уравнения стоит эквивалентная нагрузка для i-й нормальной формы колебаний. Используя интеграл Дюамеля для i-й формы колебаний, получим

$$\varphi_i = -(1/p_i)\int_0^l X_i \int_0^t \ddot{u}_{ст}(x,\ t')\sin p_i(t-t')\,dt'\,dx; \qquad (5.51)$$

суммированием всех форм колебаний приходим к следующему выражению для перемещений:

$$u^* = -\sum_{i=1}^{\infty}(X_i/p_i)\int_0^l X_i \int_0^t \ddot{u}_{ст}(x,\ t')\sin p_i(t-t')\,dt'\,dx. \qquad (5.52)$$

Это выражение описывает перемещение произвольной точки стержня относительно перемещения $u_{ст}$ невесомого стержня. Для того чтобы получить общее перемещение, сложим оба типа перемещений, что дает

$$u = u_{ст} + u^* = \frac{l-x}{l}g_1(t) + \frac{x}{l}g_2(t) + u^*. \qquad (5.53)$$

Подводя итоги сказанному, видим, что продольные динамические перемещения стержня, обусловленные независимыми перемещениями концевых опор, можно определить, сложив относительное перемещение u^* (которое можно также назвать колебательным движением) с перемещением $u_{ст}$, обусловленным податливостью невесомого стержня. Хотя перемещение $u_{ст}$ определяется из статического рассмотрения, функция u зависит как от x, так и от t. Перемещение u^* характеризует отклонение суммарного динамического перемещения u от перемещения $u_{ст}$ стержня, масса которого не равна нулю. Однако в уравнении (л) эквивалентная распределенная нагрузка $-m\ddot{u}_{ст}$ не равна распределенной силе инерции $-m\ddot{u}$, выраженной в исходных координатах, или распределенной силе инерции $-m\ddot{u}^*$, выраженной через относительные координаты. Этот член можно истолковать как приложенную нагрузку, обусловленную возможными изменениями определяющих движение координат от абсолютных к относительным. Собственные значения и собственные функции, найденные в относительных и исходных координатах, равны между собой (в случае, когда оба конца стержня жестко закреплены), поскольку коэффициенты m и r в уравнении (л) имеют то же значение, что и выше.

Если функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$, описывающие перемещения обоих концов стержня,

$$g_1(t) = g_2(t) = g(t),$$

из выражения (5.49) получаем $u_{ст} = u_{осн} = g(t)$. В этом случае движение, обусловленное податливостью стержня, представляет движение как абсолютно жесткого тела (с жестко закрепленными обоими концами), а выражения (5.50)—(5.53) совпадают с соответствующими выражениями (5.45)—(5.48).

Пример 1. Предположим, что движение опоры показанного на рис. 5.6 стержня происходит по закону, описываемому параболической функцией $u_{\text{осн}} = g(t) = u_1 (t/t_1)^2$, где u_1 — перемещение в момент времени t_1. Определить обусловленные указанным движением динамические перемещения стержня, если в начальный момент времени стержень находился в покое.

Решение. Из приведенных выше исследований продольных колебаний стержня имеем

$$p_i = i\pi a/2l; \quad X_i = \sqrt{2/l}\,\sin(p_i x/a), \quad i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ \infty,$$

где X_i — нормированные в соответствии с выражением (5.22) функции. Дифференцируя функцию $u_{\text{осн}}$, определяющую закон движения основания системы, дважды по времени, получим

$$\ddot{u}_{\text{осн}} = \ddot{g}(t) = 2u_1/t_1^2.$$

Тогда из выражения (5.47) получаем перемещения при относительном движении

$$u^* = -\frac{4u_1}{lt_1^2} \sum_{i=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \frac{1}{p_i} \sin\frac{p_i x}{a} \int_0^l \sin\frac{p_i x}{a}\,dx \int_0^t \sin p_i (t-t')\,dt' =$$

$$= -\frac{8u_1}{\pi t_1^2} \sum_{i=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \frac{1}{ip_i^2} \sin\frac{p_i x}{a} (1 - \cos p_i t) =$$

$$= -\frac{32l^2 u_1}{\pi^3 a^2 t_1^2} \sum_{i=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin\frac{i\pi x}{2l} \left(1 - \cos\frac{i\pi a t}{2l}\right), \qquad \text{(н)}$$

а из выражения (5.48) определяем общее перемещение

$$u = \frac{u_1}{t_1^2}\left[t^2 - \frac{32l^2}{\pi^3 a^2} \sum_{i=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin\frac{i\pi x}{2l} \left(1 - \cos\frac{i\pi a t}{2l}\right)\right]. \qquad \text{(о)}$$

Пример 2. Предположим, что опоры показанного на рис. 5.7 стержня совершают простые гармонические движения в виде

$$u_{\text{осн }1} = g_1(t) = u_1 \sin\omega_1 t; \quad u_{\text{осн }2} = g_2(t) = u_2 \sin\omega_2 t;$$

здесь u_1 и u_2 — амплитуды колебательных движений соответственно левой и правой опор; ω_1 и ω_2 — круговые частоты колебательных движений опор. Определить перемещения произвольной точки стержня при установившихся вынужденных колебаниях, обусловленных указанными независимыми движениями опор.

Решение. Поскольку оба конца показанного на рис. 5.7 стержня жестко закреплены, собственные частоты и нормированные формы колебаний применительно к данному случаю имеют вид

$$p_i = i\pi a/l; \quad X_i = \sqrt{2/l}\,\sin(p_i x/a), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty.$$

Из выражения (5.49) видно, что перемещения, обусловленные податливостью невесомого стержня:

$$u_{\text{ст}} = \frac{l-x}{l} u_1 \sin\omega_1 t + \frac{x}{l} u_2 \sin\omega_2 t, \qquad \text{(п)}$$

тогда вторая производная этой функции по времени будет иметь вид

$$\ddot{u}_{\text{ст}} = -\frac{l-x}{l} \omega_1^2 u_1 \sin\omega_1 t - \frac{x}{l} \omega_2^2 u_2 \sin\omega_2 t. \qquad \text{(р)}$$

Возникающие при установившихся колебаниях динамические перемещения u^* произвольной точки стержня относительно перемещения $u_{ст}$ находим из выражения (5.52), выполнив интегрирование по времени

$$u^* = \frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(\omega_1^2 u_1\beta_{i1}\sin\omega_1 t\int_0^t\frac{l-x}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx + \right.$$

$$\left. + \omega_2^2 u_2\beta_{i2}\sin\omega_2 t\int_0^l\frac{x}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\omega_1^2 u_1\beta_{i1}\sin\omega_1 t - (-1)^i\omega_2^2 u_2\beta_{i2}\sin\omega_2 t\right], \qquad (с)$$

где $\beta_{i1} = 1/[1-\omega_1^2/p_i^2]$; $\beta_{i2} = 1/[1-\omega_2^2/p_i^2]$.

Подставляя выражения (п) и (с) в выражение (5.53), найдем суммарное перемещение стержня

$$u = \left[\frac{l-x}{l} + \frac{2l^2\omega_1^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_{i1}}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\right]u_1\sin\omega_1 t + $$

$$+ \left[\frac{x}{l} - \frac{2l^2\omega_2^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\beta_{i2}}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\right]u_2\sin\omega_2 t. \qquad (т)$$

ЗАДАЧИ

5.6.1. Стержень, конец $x = 0$ которого свободен, а конец $x = l$ жестко закреплен, колеблется вследствие того, что основание совершает колебательное движение по гармоническому закону $u_{осн} = g(t) = d\sin\omega t$, где d — амплитуда колебательного движения.

Определить динамические перемещения стержня при установившихся колебаниях при заданном движении основания.

Ответ: $u_{\text{д}}^{\text{т}} = \left[1 + \frac{16l^2\omega^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1,3,5,\ldots}\frac{\beta_i}{i^3}(-1)^{(i-1)/2}\cos\frac{i\pi x}{2l}\right]d\sin\omega t.$

5.6.2. Определить динамические продольные перемещения стержня с жестко закрепленными концами при движении основания как абсолютно жесткого тела по закону $u_{осн} = g(t) = u_1(t/t_1)^2$.

Ответ: $u = \frac{u_1}{t_1^2}\left[t^2 - \frac{8l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1,3,5,\ldots}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right)\right].$

5.6.3. Опора $x = 0$ жестко закрепленного по обоим концам стержня совершает движение по закону $u_{осн1} = g_1(t) = u_1(t/t_1)^2$, тогда как опора $x = l$ остается неподвижной. Определить возникающие при этих условиях продольные динамические перемещения стержня.

Ответ: $u = \frac{u_1}{t_1^2}\left[\frac{l-x}{l}t^2 - \frac{4l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(1-\cos\frac{i\pi at}{l}\right)\right].$

5.6.4. Предположим, что опора на конце $x = l$ стержня, рассмотренного в задаче 5.6.3, совершает движение по закону

$$u_{\text{осн}2} = g_2(t) = u_2 (t/t_2)^3.$$

Определить те добавочные динамические продольные перемещения, обусловленные указанным движением, которые следует прибавить к перемещениям, найденным в задаче 5.6.3.

Ответ: $u = \dfrac{u_2}{t_2^3}\left[\dfrac{x}{l}t^3 + \dfrac{12l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^i}{i^3}\sin\dfrac{i\pi x}{l}\left(t - \dfrac{l}{i\pi a}\sin\dfrac{i\pi a t}{l}\right)\right]$.

5.7. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОВ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

На рис. 5.8, *а* показан прямолинейный вал, крутильные колебания которого рассмотрим ниже. Через θ обозначим угол закручивания (вокруг оси вала) произвольного поперечного сечения, расположенного на расстоянии x от левого конца вала. При крутильных колебаниях вала условие равновесия упругих и инерционных крутящих моментов, действующих на малый элемент вала (рис. 5.8, *б*), запишем в соответствии с принципом Даламбера в виде

$$T + \frac{\partial T}{\partial x}dx - T - \rho I_{\text{п}}\,dx\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0. \qquad \text{(а)}$$

В этом дифференциальном уравнении крутящий момент, являющийся равнодействующим внутренних сил, действующих в поперечном сечении с координатой x, обозначен через T, а его положительное направление показано на рис. 5.8, *б*. Через $I_{\text{п}}$ обозначен полярный момент инерции поперечного сечения. В соответствии с введенными обозначениями момент инерции масс для части вала длиной dx равен $\rho I_{\text{п}}\,dx$, а угловое ускорение $\partial^2\theta/\partial t^2$. Из теории простого кручения следует соотношение

$$T = GI_{\text{п}}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad \text{(б)}$$

где G — модуль упругости при сдвиге. Подставив выражение (б) в уравнение (а), после преобразований получим

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}. \qquad (5.54)$$

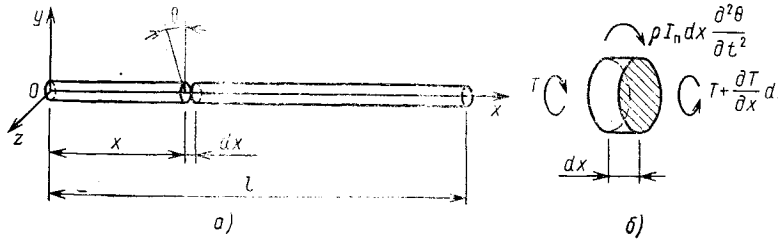


Рис. 5.8

Это выражение имеет форму одномерного волнового уравнения, из которого следует, что скорость распространения крутильных волн

$$b = \sqrt{G/\rho}. \qquad (5.55)$$

Уравнение (5.54) и формула (5.55) совпадут по форме с уравнением (5.1) и формулой (5.2), если в последних величины u, a и E заменить соответственно на θ, b и G. Поэтому все полученные результаты для задачи о продольных колебаниях призматических стержней можно распространить и на задачи о крутильных колебаниях валов кругового поперечного сечения путем простой замены обозначений. Например, в случае вала с незакрепленными концами частоты и нормальные функции для соответствующих собственных форм крутильных колебаний имеют вид

$$p_i = i\pi b/l; \quad X_i = C_i \cos(p_i x/b), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty, \qquad (в)$$

а угловые перемещения при свободных колебаниях [см. выражение (5.6)]

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \cos(i\pi x/l)\,[A_i \cos(i\pi bt/l) + B_i \sin(i\pi bt/l)]. \qquad (5.56)$$

Аналогичным образом из полученных выше, в п. 5.2, выражений можно получить решения для задачи о свободных крутильных колебаниях валов, жестко защемленных по одному или обоим концам, а общее выражение для решения в виде суммы нормальных форм колебаний следует из выражения (5.25) в п. 5.4.

Для того чтобы исследовать угловые перемещения при вынужденных крутильных колебаниях вала, обусловленных действием распределенного крутящего момента, воспользуемся выражением (5.28). В этом случае величина $q(x, t)$ будет обозначать удельный распределенный крутящий момент, поделенный на момент инерции $\rho I_{\text{п}}$ массы, отнесенный к единице длины вала. Аналогично, выражение (5.29) может быть использовано для случая сосредоточенного крутящего момента $T_1(t)$, приложенного в точке $x = x_1$, при этом в качестве члена, определяющего нагрузку, в данном выражении следует взять $q_1(t) = T_1(t)/\rho I_{\text{п}}$.

В предыдущем параграфе было рассмотрено динамическое поведение призматического стержня при продольных перемещениях опор. Развитый там метод можно легко распространить на случай, когда для вала заданы определенного вида угловые перемещения на опорах. Если обе опоры поворачиваются как абсолютно жесткое тело, можно использовать выражения (5.47) и (5.48), но функцию, описывающую закон движения опор, следует взять в виде $\theta_{\text{осн}} = g(t)$. С другой стороны, если вал закреплен по концам таким образом, что на каждом могут быть заданы независимые угловые перемещения, следует использовать выражения (5.52) и (5.53). В этом случае угловые перемещения на опорах задаются в виде функций $\theta_{\text{осн }1} = g_1(t)$ и $\theta_{\text{осн }2} = g_2(t)$ соответственно для левого и правого концов вала.

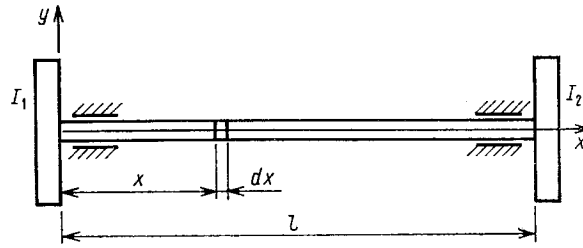


Рис. 5.9

Рассмотрим теперь случай вала с закрепленными на его концах дисками (см. рис. 5.9). Вал может свободно вращаться, а моменты инерции дисков относительно оси x вала обозначены через I_1 для диска на левом конце ($x = 0$) и через I_2 для диска на правом конце ($x = l$). Подобная конструкция уже рассматривалась выше, в п. 1.2, как система только с одной формой крутильных колебаний, при этом пренебрегалось влияние распределенной массы вала. С учетом этой массы система имеет уже бесконечное число собственных форм колебаний, поэтому при таком подходе можно получить более точные результаты. Для исследования поведения вала с дисками, прикрепленными к обоим его концам, будет применен подход, описанный выше, в п. 5.5, для призматического стержня с пружиной или массой, прикрепленной к одному концу.

При крутильных колебаниях системы, показанной на рис. 5.9, возникающие при этом инерционные крутящие моменты от закрепленных на концах вала дисков приводят к концевым условиям вида

$$GI_{\text{п}}(\theta')_{x=0} = I_1(\ddot{\theta})_{x=0}; \quad GI_{\text{п}}(\theta')_{x=l} = -I_2(\ddot{\theta})_{x=l}. \qquad \text{(г)}$$

Как и ранее, предполагаем, что i-я собственная форма гармонических колебаний имеет вид

$$\theta_i = X_i(A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \qquad \text{(д)}$$

Подставляя это выражение в выражения (г), получим

$$GI_{\text{п}}X'_{i0} = -I_1 p_1^2 X_{i0}, \qquad GI_{\text{п}}X'_{il} = I_2 p_i^2 X_{il}, \qquad \text{(е)}$$

где индексы 0 и l относятся к сечениям соответственно $x = 0$ и $x = l$. В этом случае нормальные функции можно записать в виде

$$X_i = C_i \cos(p_i x/b) + D_i \sin(p_i x/b). \qquad \text{(ж)}$$

Подставляя выражение (ж) в концевые условия (е), получим

$$GI_{\text{п}}(p_i/b) D_i = -I_1 p_i^2 C_i; \qquad \text{(з)}$$

$$GI_{\text{п}}(p_i/D)[-C_i \sin(p_i l/b) + D_i \cos(p_i l/b)] = I_2 p_i^2 [C_i \cos(p_i l/b) + D_i \sin(p_i l/b)]. \qquad \text{(и)}$$

Соотношения (з) и (и) представляют систему двух однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин C_i и D_i.

Исключая эти постоянные из последних соотношений, получим частотное уравнение

$$-GI_{\text{п}}\frac{p_i}{b}\left(\sin\frac{p_i l}{b}+\frac{I_1 b p_i}{GI_{\text{п}}}\cos\frac{p_i l}{b}\right)=I_2 p_i^2\left(\cos\frac{p_i l}{b}-\frac{I_1 b p_i}{GI_{\text{п}}}\sin\frac{p_i l}{b}\right). \tag{к}$$

Поскольку p_i является общим множителем для обеих частей данного соотношения, из этого следует, что $p_0 = 0$ является частотой вращения системы как абсолютно жесткого тела. Для удобства проведения расчетов при отыскании частот форм колебаний введем обозначения

$$\xi_1 = p_i l/b; \qquad \eta_1 = \rho I_{\text{п}} l/I_1 = I_0/I_1; \qquad \eta_2 = I_0/I_2, \tag{л}$$

где $I_0 = \rho I_{\text{п}} l$ — момент инерции вала относительно его собственной оси. Используя обозначения (л), перепишем уравнение частот (к) в более простой форме

$$-\left(\operatorname{tg}\xi_i+\frac{\xi_i}{\eta_1}\right)=\frac{\xi_i}{\eta_2}\left(1-\frac{\xi_i}{\eta_1}\operatorname{tg}\xi_i\right)$$

или

$$\left(\frac{\xi_i^2}{\eta_1\eta_2}-1\right)\operatorname{tg}\xi_i=\left(\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}\right)\xi_i. \tag{5.57}$$

Если ξ_1, ξ_2, ξ_3, ..., — ненулевые положительные корни (расположенные в порядке возрастания) этого трансцендентного уравнения, то из выражения (ж) и концевого условия (з) получаем соответствующие нормальные функции

$$X_i = C_i\left[\cos(\xi_i x/l)-(\xi_i/\eta_1)\sin(\xi_i x/l)\right]. \tag{5.58}$$

Предположим, что моменты инерции I_1 и I_2 дисков малы по сравнению с моментом инерции I_0 вала. В этом случае параметры η_1 и η_2 будут иметь большие значения, корнями уравнения (5.57) будут числа π, 2π, 3π, ..., нормальные функции (5.58) примут вид, соответствующий валу с незакрепленными концами [см. выражение (в)]. С другой стороны, если величины I_1 и I_2 велики по сравнению с I_0, то отношения η_1 и η_2 будут малыми величинами, поэтому в правой части уравнения (5.57) можно пренебречь единицей по сравнению со слагаемым $\xi_i^2/(\eta_1\eta_2)$. Тогда уравнение частот примет вид

$$\xi_i \operatorname{tg}\xi_i = \eta_1 + \eta_2. \tag{м}$$

Это уравнение совпадает по формуле с уравнением (5.30), относящимся к задаче о продольных колебаниях стержня. Для первой крутильной формы колебаний все слагаемые, входящие в уравнение (м), будут малы. С учетом этого можно упростить соотношение, если положить $\operatorname{tg}\xi_1 = \xi_1$. Тогда получим

$$\xi_1^2 \approx \eta_1 + \eta_2 = I_0(I_1+I_2)/I_1 I_2.$$

Решив это уравнение, найдем частоту

$$p_1 = \frac{b\xi_1}{l} \approx \frac{b}{l}\sqrt{\frac{I_0(I_1+I_2)}{I_1 I_2}} = \sqrt{\frac{GI_{\text{п}}(I_1+I_2)}{lI_1 I_2}}$$

и период колебаний основной формы

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{lI_1I_2}{GI_\text{п}(I_1+I_2)}}.$$

Эта формула совпадает с формулой (1.11), которая была получена в пренебрежении массой вала и в предположении, что система имеет только одну форму колебаний.

На основе подхода, описанного в п. 5.5, можно получить соотношения ортогональности для вала с закрепленными на обоих концах дисками

$$\rho I_\text{ц} \int_0^l X_i X_j\,dx + I_1 X_{i0} Y_{j0} + I_2 X_{il} X_{jl} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \tag{5.59}$$

$$GI_\text{п} \int_0^l X_i' X_j'\,dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \tag{5.60}$$

$$GI_\text{п} \left(\int_0^l X_i'' X_j\,dx + X_{i0}' X_{j0} - X_{il}' X_{jl} \right) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{5.61}$$

Кроме того, если выбрать соотношение нормировки (при $i = j$) в виде

$$\rho I_\text{п} \int_0^l X_i^2\,dx + I_1 X_{i0}^2 + I_2 X_{il}^2 = \rho I_\text{п}, \tag{5.62}$$

можно получить

$$GI_\text{п} \left(\int_0^l X_i'' X_i\,dx + X_{i0}' X_{i0} - X_{il}' X_{il} \right) = -GI_\text{п} \int_0^l (X_i')^2\,dx = -\rho I_\text{п} p_i^2. \tag{5.63}$$

Соотношения (5.59)—(5.63) аналогичны соотношениям (5.31)—(5.35), поэтому следует только заменить $m = \rho F$ на $\rho I_\text{п}$ и $r = EF$ на $GI_\text{п}$. Более того, в выражениях, относящихся к рассматриваемой здесь задаче, имеются члены, учитывающие диски, прикрепленные в валу в сечениях $x = 0$ и $x = l$.

Рассмотрим динамические угловые перемещения системы (см. рис. 5.9), если начальные условия при $t = 0$ имеют вид $\theta_0 = f_1(x)$ и $\dot{\theta}_0 = f_2(x)$. Для этого необходимо определить начальные перемещения $f_1(0)$, $f_1(l)$ и начальные скорости $f_2(0)$, $f_2(l)$ дисков, установленных в сечениях $x = 0$ и $x = l$ Тогда начальные условия для вала и дисков, представленные в виде рядов, по функциям времени φ_{0i} и функциям перемещения X_i имеют вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} X_i = f_1(x); \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} X_i = f_2(x); \tag{н}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} X_{i0} = f_1(0); \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} X_{i0} = f_2(0); \tag{о}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} X_{il} = f_1(l); \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} X_{il} = f_2(l). \tag{п}$$

Для того чтобы пронормировать эти выражения, умножим выражения (н) на $\rho I_{\text{п}} X_j$ и проинтегрируем по длине вала. Затем умножим выражения (о) и (п) соответственно на $I_1 X_{j0}$ и $I_2 X_{jl}$ и сложим результаты с преобразованными выражениями (н). В результате получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{0i} \left(\rho I_{\text{п}} \int_0^l X_i X_j \, dx + I_1 X_{i0} X_{j0} + I_2 X_{il} X_{jl} \right) =$$

$$= \rho I_{\text{п}} \int_0^l f_1(x) X_j \, dx + I_1 f_1(0) X_{j0} + I_2 f_1(l) X_{jl}; \qquad \text{(р)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{0i} \left(\rho I_{\text{п}} \int_0^l X_i X_j \, dx + I_1 X_{i0} X_{j0} + I_2 X_{il} X_{jl} \right) =$$

$$= \rho I_{\text{п}} \int_0^l f_2(x) X_j \, dx + I_1 f_2(0) X_{j0} + I_2 f_2(l) X_{jl}. \qquad \text{(с)}$$

Из соотношений ортогональности (5.59) и нормированности (5.62) видно, что при $i = j$ соотношения (р) и (с) приводят к следующим представлениям для начальных перемещений и скоростей в нормальных координатах:

$$\varphi_{0i} = \int_0^l f_1(x) X_i \, dx + \frac{l}{\eta_1} f_1(0) X_{i0} + \frac{l}{\eta_2} f_1(l) X_{il}; \qquad (5.64)$$

$$\dot{\varphi}_{0i} = \int_0^l f_2(x) X_i \, dx + \frac{l}{\eta_1} f_2(0) X_{i0} + \frac{l}{\eta_2} f_2(l) X_{il}. \qquad (5.65)$$

Эти выражения совпадают с (5.36) и (5.37) за исключением учитывающих влияние обоих дисков слагаемых, присутствующих в (5.64) и (5.65). Имея эти представления для φ_{0i} и $\dot{\varphi}_{0i}$, можно исследовать динамическое поведение рассматриваемой системы, используя выражение (5.25).

Если собственные функции нормируются в соответствии с выражением (5.62), динамическое поведение показанной на рис. 5.9 системы можно исследовать, воспользовавшись выражениями (5.28) и (5.29). К получаемому при этом перемещению следует прибавить перемещение как абсолютно жесткого тела, которое определяется из уравнения

$$J\ddot{\varphi}_0 = R. \qquad \text{(т)}$$

В этом уравнении $J = I_0 + I_1 + I_2$ — суммарный момент инерции системы; $\ddot{\varphi}_0$ — ускорение движения как абсолютно жесткого тела; R — суммарный крутящий момент, приложенный к валу и дискам.

Пример 1. Предположим, что к левому концу вала с незакрепленными концами (см. рис. 5.8, *а*) приложен изменяющийся во времени по линейному закону крутящий момент $R = R_1 t/t_1$ (где R_1 — значение крутящего момента в момент времени t_1). Исследовать обусловленное действием указанного крутящего момента динамическое поведение вала, если в начальный момент времени вал находился в покое.

Решение. Подставляя $J = I_0 = \rho I_{\text{п}} l$ и $R = R_1 t/t_1$ в уравнение (т) и интегрируя последнее по t дважды, получим угловое перемещение вала как абсолютно жесткого тела

$$\varphi_0 = \frac{R_1 t^3}{6\rho I_{\text{п}} l t_1} = \frac{R_1 t^3}{6 I_0 t_1}. \qquad (у)$$

Динамические угловые перемещения, которые следует просуммировать с перемещениями (у) как абсолютно жесткого тела, определяются из выражения (5.29), что дает

$$\theta = \frac{2R_1}{\rho I_{\text{п}} l t_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \cos \frac{p_i x}{b} \int_0^t t' \sin p_i (t - t')\, dt' =$$

$$= \frac{2R_1}{I_0 t_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^2} \cos \frac{p_i x}{b} \left(t - \frac{1}{p_i} \sin p_i t \right) =$$

$$= \frac{2l^2 R_1}{\pi^2 b^2 I_0 t_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cos \frac{i\pi x}{l} \left(t - \frac{l}{i\pi b} \sin \frac{i\pi b t}{l} \right). \qquad (ф)$$

Результирующие угловые перемещения вала равны сумме перемещений (у) и (ф). Например, результирующее угловое перемещение конца стержня в месте приложения ($x = 0$) крутящего момента

$$(\theta)_{x=0} = \frac{R_1}{I_0 t_1} \left[\frac{t^3}{6} + \frac{2l^2}{\pi^2 b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left(t - \frac{l}{i\pi b} \sin \frac{i\pi b t}{l} \right) \right]. \qquad (х)$$

Полагая $t = t_1 = l/b$, находим

$$(\theta)_{x=0} = \frac{R_1 l^2}{I_0 b^2} \left[\frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots \right) \right] = \frac{R_1 l}{2 G I_{\text{п}}}. \qquad (ц)$$

Пример 2. Полагая, что моменты инерции трех частей, составляющих систему, показанную на рис. 5.9, равны между собой, т. е. $I_0 = I_1 = I_2$, определить динамические угловые перемещения, если заданы следующие начальные условия:

$$\theta_0 = f_1(x) = \alpha_0 (2x - l)/l; \quad \dot{\theta}_0 = f_2(x) = 0. \qquad (ч)$$

Начальное перемещение, описываемой функцией θ_0, обусловлено равными и противоположно направленными крутящими моментами, приложенными к дискам и вызывающими относительный поворот концевых сечений на угол $2\alpha_0$, которые в момент времени $t_0 = 0$ внезапно принимают значения, равные нулю.

Решение. В рассматриваемом случае $\eta_1 = \eta_2 = 1$, и трансцендентное частотное уравнение (5.57) принимает более простой вид

$$\left(\xi_i^2 - 1 \right) \operatorname{tg} \xi_i = 2\xi_i. \qquad (ш)$$

Здесь функции X_i нормируются в соответствии с выражением (5.62), что дает

$$\int_0^l X_i^2\, dx + X_{i0}^2 + X_{il}^2 = 1. \qquad (щ)$$

Для заданных начальных условий (ч) из выражений (5.64) и (5.65) получаем

$$\varphi_{0i} = \frac{\alpha_0}{l} \left[\int_0^l (2x - l)\, X_i\, dx - l^2 (X_{i0} - X_{il}) \right]; \qquad \dot{\varphi}_{0i} = 0.$$

В результате угловые перемещения при свободных колебаниях в соответствии с выражением (5.25) можно представить в следующем виде:

$$\theta = \frac{\alpha_0}{l} \sum_{i=1}^{\infty} X_i \left[\int_0^l (2x - l) X_i \, dx - l^2 (X_{i0} - X_{il}) \right] \cos \frac{\xi_i b t}{l}. \qquad (э)$$

5.8. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО РАСТЯНУТЫХ НИТЕЙ

Еще одна из систем, для которых уравнение движения имеет форму одномерного волнового уравнения, показана на рис. 5.10, *а*. Система представляет собой предварительно растянутую, не обладающую жесткостью при изгибе нить, которая может свободно колебаться в поперечном направлении. Предполагается, что растягивающая сила S в нити остается постоянной при малых колебаниях в плоскости xy. Обозначим через y поперечное перемещение произвольной точки нити, отстоящей на расстоянии x от левого конца. На рис. 5.10, *б* показаны силы, действующие на малый элемент нити длиной dx, при этом основной интерес представляют проекции этих сил на ось y. При колебаниях сила инерции уравновешивается растягивающими силами, приложенными к концам малого элемента нити. При малых углах наклона из условий динамического равновесия следует

$$S\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx\right) - S \frac{\partial y}{\partial x} - m \, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (а)$$

где m — масса единицы длины нити. Отсюда получаем дифференциальное уравнение движения этой системы

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad (5.66)$$

где

$$c = \sqrt{S/m} \qquad (5.67)$$

есть скорость распространения поперечных волн в продольном направлении.

Как можно видеть, уравнение (5.56) и выражение (5.67) будут совпадать соответственно с уравнением (5.1) и выражением (5.2),

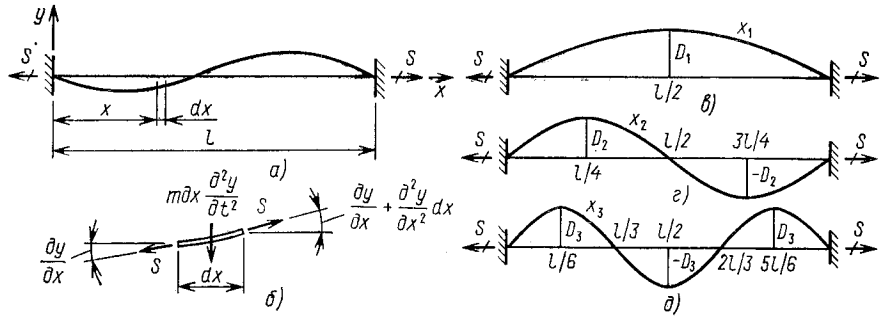


Рис. 5.10

если в последних вместо u, a, E и ρ взять соответственно y, c, S и m. Поэтому многие из ранее полученных выражений, описывающих продольные и крутильные колебания стержней и валов, могут быть применены к случаю поперечных колебаний растянутых нитей путем простой замены соответствующих обозначений. Однако в данном случае несколько усложняются концевые условия, что связано с необходимостью учитывать силы S предварительного растяжения нити. Простейший вид концевых условий показан на рис. 5.10, *а* для нити с обоими закрепленными концами. В этом случае концевые условия имеют вид

$$(y)_{x=0} = 0; \qquad (y)_{x=l} = 0. \tag{б}$$

Тогда частоты и нормальные функции

$$p_i = i\pi x/l; \qquad X_i = p_i \sin(p_i x/l), \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty. \tag{в}$$

На рис. 5.10, *в—д* показаны нормальные функции соответственно для первой, второй и третьей форм колебаний. Если эти функции нормируются в соответствии с выражением (5.22), имеем

$$D_i = \sqrt{2/l}.$$

Представим начальное поперечное перемещение произвольной точки нити в момент времени $t = 0$ в виде функции $y_0 = f_1(x)$, а начальную скорость в виде функции $\dot{y}_0 = f_2(x)$. В соответствии с выражениями (5.23) и (5.24) имеем следующие представления для начальных условий в нормальных координатах:

$$\varphi_{0i} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{i\pi x}{l}\, dx; \quad \dot{\varphi}_{0i} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{i\pi x}{l}\, dx. \tag{г}$$

Тогда из выражения (5.25) получаем соответствующие этим условиям динамические перемещения нити

$$y = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left(\varphi_{0i} \cos \frac{i\pi ct}{l} + \frac{\dot{\varphi}_{0i}}{p_i} \sin \frac{i\pi ct}{l} \right). \tag{5.68}$$

Далее, из выражения (5.28) находим динамические перемещения, обусловленные действием распределенной поперечной силы $Q(x, t)$:

$$y = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \sin \frac{i\pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{i\pi x}{l} \int_0^t q(x, t') \sin p_i (t - t')\, dt'\, dx, \tag{5.69}$$

где $q(x, t) = Q(x, t)/m$. Если в точке x_1 прикладывается сосредоточенная сила $P_1(t)$, динамические перемещения при этом определяются выражением (5.29):

$$y = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi x_1}{l} \int_0^t q_1(t') \sin p_i (t - t')\, dt', \tag{5.70}$$

где $q_1(t) = P_1(t)/m$.

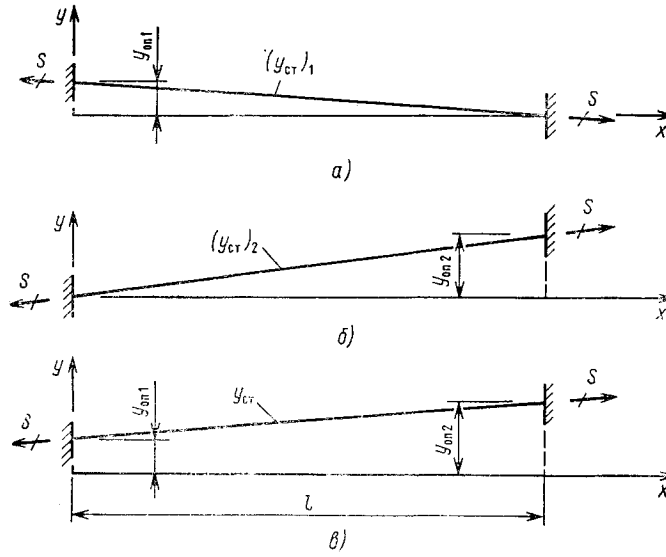


Рис. 5.11

В п. 5.6 рассматривался случай призматического стержня, для каждого конца которого задаются независимые продольные перемещения. Полученные там выражения очень просто распространить на случай, когда концы растянутой нити перемещаются в поперечном (параллельно оси y) направлении. На рис. 5.11, *а* и *б* показаны независимые перемещения опор, задаваемые в виде функций времени:

$$y_{оп\,1} = g_1(t); \qquad y_{оп\,2} = g_2(t) \tag{д}$$

соответственно для левого и правого концов. При таким образом заданных перемещениях концов закон движения произвольной точки невесомой нити имеет вид

$$y_{ст} = (y_{ст})_1 + (y_{ст})_2 = \frac{l-x}{l} g_1(t) + \frac{x}{l} g_2(t). \tag{5.71}$$

В данном случае перемещение $y_{ст}$ (рис. 5.11, *в*) описывает движение как абсолютно жесткого тела, состоящее из перемещения в направлении оси y и малого поворота относительно оси, перпендикулярной плоскости xy. Более того, подобный характер движения свойственен и каждой компоненте $(y_{ст})_1$ и $(y_{ст})_2$ (см. рис. 5.11, *а* и *б*). Результирующее движение представляет собой чистый перенос, когда $g_1(t) = g_2(t) = g(t)$, и чистый поворот относительно точки, расположенной в середине пролета, когда $g_1(t) = -g_2(t)$. Таким образом, видим, что введенное в п. 5.6 представление о движении как податливого тела для невесомых систем совпадает с представлением движений как абсолютно жесткого тела в случае предварительно растянутой нити при заданных поперечных перемещениях ее концов.

Подставляя в выражение (5.52) вторую производную по времени функции (5.71) и нормированные функции из выражения (в), получим решение для задачи о неустановившемся поведении нити при колебаниях

$$y^* = -\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t\left[\frac{l-x}{l}\ddot{g}_1(t')+\frac{x}{l}\ddot{g}_2(t')\right]\times$$

$$\times \sin p_i(t-t')\,dt'\,dx. \qquad (5.72)$$

Для того чтобы получить полное перемещение, сложим перемещения, обусловленные колебательным движением и движением как абсолютно жесткого тела, и в результате получим

$$y = y_{ст} + y^* = \frac{l-x}{l}g_1(t) + \frac{x}{l}g_2(t) + y^*. \qquad (5.73)$$

Приведенное выше обсуждение относилось к предварительно растянутой нити, концы которой были жестко закреплены. Рассмотрим теперь случай нити с упругим в поперечном направлении закреплением на концах (рис. 5.12). Предполагается, что жесткости k_1 и k_2 пружин, установленных в точках $x = 0$ и $x = l$, известны и что концы нити могут перемещаться только в направлении оси y. Подход, применявшийся выше (см. п. 5.5) для исследования призматического стержня с установленными на одном из его концов массой или пружиной, теперь используем в задаче о нити, опирающейся по концам на пружины.

Уравнение движения, получаемое из рассмотрения [см. уравнение (а)] условия динамического равновесия малого элемента нити, показанного на рис. 5.12, можно записать в виде

$$m\ddot{y}dx - Sy''dx = 0. \qquad (е)$$

На каждом конце нити должно выполняться условие равенства силы, возникающей в пружине при ее перемещении на величину y, и проекции на ось y растягивающей силы S нити. Поэтому концевые условия принимают форму

$$S(y')_{x=0} = k_1(y)_{x=0}; \qquad S(y')_{x=l} = -k_2(y)_{x=l}. \qquad (ж)$$

Как обычно, для i-й формы собственных гармонических колебаний принимаем

$$y_i = X_i(A_i\cos p_i t + B_i\sin p_i t). \qquad (з)$$

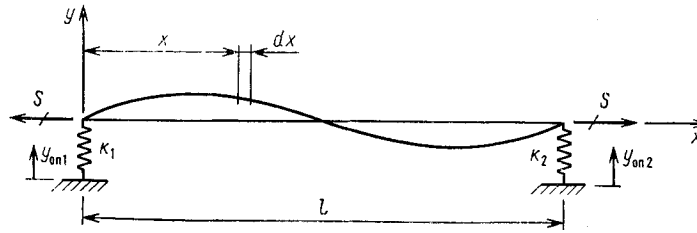


Рис. 5.12

Подставляя это выражение в условия (ж), получаем

$$SX'_{i0} = k_1 X_{i0}; \qquad SX'_{il} = -k_2 X_{il}. \tag{и}$$

Нормальные функции возьмем в том же виде, что и выше:

$$X_i = C_i \cos(p_i x/c) + D_i \sin(p_i x/c). \tag{к}$$

Подставляя выражение (к) в соотношения (и), найдем

$$Sp_i D_i/c = k_1 C_i; \tag{л}$$

$$\frac{Sp_i}{c}\left(-C_i \sin\frac{p_i l}{c} + D_i \cos\frac{p_i l}{c}\right) = -k_2\left(C_i \cos\frac{p_i l}{c} + D_i \sin\frac{p_i l}{c}\right). \tag{м}$$

Исключая из выражений (л) и (м) постоянные C_i и D_i, получим частотное уравнение

$$\frac{Sp_i}{c}\left(\sin\frac{p_i l}{c} - \frac{k_1 c}{Sp_i}\cos\frac{p_i l}{c}\right) = k_2\left(\cos\frac{p_i l}{c} + \frac{k_1 c}{Sp_i}\sin\frac{p_i l}{c}\right). \tag{н}$$

Для упрощения введем обозначения

$$\xi_i = p_i l/c; \qquad \zeta_{i1} = mlp_i^2/k_1; \qquad \zeta_{i2} = mlp_i^2/k_2 \tag{о}$$

и перепишем уравнение (н) в виде

$$\operatorname{tg}\xi_i - \frac{\xi_i}{\zeta_{i1}} = \frac{\xi_i}{\zeta_{i2}}\left(1 + \frac{\xi_i}{\zeta_{i1}}\operatorname{tg}\xi_i\right)$$

или

$$\left(1 - \frac{\xi_i^2}{\zeta_{i1}\zeta_{i2}}\right)\operatorname{tg}\xi_i = \left(\frac{1}{\zeta_{i1}} + \frac{1}{\zeta_{i2}}\right)\xi_i. \tag{5.74}$$

Полученное соотношение представляет собой трансцендентное частотное уравнение для нити, оба конца которой установлены на поперечные пружины. В этом случае нормальные функции (к) с учетом соотношения (л) можно представить в следующей форме:

$$X_i = C_i\left[\cos(\xi_i x/l) + (\xi_i/\zeta_{i1})\sin(\xi_i x/l)\right]. \tag{5.75}$$

При больших значениях величин k_1 и k_2 уравнение (н) сводится к виду

$$\sin(p_i l/c) = 0, \tag{п}$$

что представляет собой частотное уравнение для нити, неподвижно закрепленной по обоим концам. В этом случае выражение (5.75) принимает форму (в). С другой стороны, если k_1 и k_2 малы, из уравнения (5.74) и выражения (5.75) следует

$$p_i = i\pi c/l; \qquad X_i = C_i \cos(p_i x/c), \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty, \tag{р}$$

что соответствует случаю, когда оба конца не закреплены. И, наконец, если величина k_1 большая, а k_2 малая, уравнение (н) сводится к виду

$$\cos(p_i l/c) = 0, \tag{с}$$

откуда получаем выражения для частот и нормальных функций [см. выражение (5.75)]

$$p_i = i\pi c/2l; \qquad X_i = D_i \sin(p_i x/c), \qquad i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ \infty. \tag{т}$$

Эти выражения показывают, что левый конец нити неподвижно закреплен, а правый может свободно перемещаться.

С помощью изложенного в п. 5.5 метода можно получить следующие соотношения ортогональности для случая колебаний предварительно растянутой нити, оба конца которой установлены на поперечные пружины, при $i \neq j$:

$$m \int_0^l X_i X_j \, dx = 0; \tag{5.76}$$

$$S \int_0^l X_i' X_j' \, dx + k_1 X_{i0} X_{j0} + k_2 X_{il} X_{jl} = 0; \tag{5.77}$$

$$S \int_0^l X_i'' X_j \, dx + S X_{i0}' X_{j0} - k_1 X_{i0} X_{j0} - S X_{il}' X_{jl} - k_2 X_{il} X_{jl} = 0. \tag{5.78}$$

Условие нормированности выбираем в виде

$$m \int_0^l X_i^2 \, dx = m \quad \text{при} \quad i = j, \tag{5.79}$$

откуда следует

$$S \int_0^l X_i'' X_i \, dx + S X_{i0}' X_{i0} - k_1 X_{i0}^2 - S X_{il}' X_{il} - k_2 X_{il}^2 =$$

$$= -S \int_0^l (X_i')^2 \, dx - k_1 X_{i0}^2 - k_2 X_{il}^2 = -m p_i^2. \tag{5.80}$$

Соотношения (5.76)—(5.80) совпадают с соотношениями (5.39)—(5.43), если в последующих жесткость $r = EF$ заменить на растягивающую силу S. Кроме того, первые соотношения содержат слагаемые, учитывающие влияние жесткости пружин, установленных как на правом, так и на левом концах стержня.

Поскольку условие (5.79) совпадает с условием нормированности, использовавшимся в п. 5.4, полученные там выражения (5.23)—(5.25), описывающие неустановившееся поведение системы при заданных начальных условиях, можно применять и в случае нити, опирающейся на упругие опоры. Используя выражения (5.28) и (5.29), можно также исследовать динамическое поведение системы при действии изменяющихся во времени поперечных сил. Более того, из выражений (5.52) и (5.53) можно определить динамические перемещения при колебаниях нити, обусловленных изменяющимися во времени независимым образом перемещениями $y_{\text{оп}\,1}$ и $y_{\text{оп}\,2}$ опор (см. рис. 5.12). Таким образом, видно, что введение упругих опор, оказывает влияние на частоты и формы колебаний, но не на последовательность шагов при решении задачи о динамическом поведении.

5.9. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим теперь поперечные колебания призматического стержня (рис. 5.13, *а*) в плоскости xy, которая является плоскостью симметрии для его поперечных сечений. Так же, как и выше, в случае колебаний растянутой нити через y обозначим поперечное перемещение малого элемента стержня, расположенного на расстоянии x от левого конца последнего. Если для нити жесткость при изгибе EI предполагалась малой, в случае стержня эту жесткость следует учитывать. На рис. 5.13, *б* показан малый элемент стержня длиной dx, а также внутренние и внешние силы, действующие на него. На этом рисунке знаки поперечной силы V и изгибающего момента M взяты в соответствии с принятым в теории изгиба стержней правилом *. При поперечных колебаниях стержней условие динамического равновесия сил, действующих в направлении оси y, имеет вид

$$V - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx - \rho F dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{(а)}$$

а условие равенства моментов дает

$$-V dx + \frac{\partial M}{\partial x} dx \approx 0. \qquad \text{(б)}$$

Выражая V из уравнения (б) и подставляя результат в уравнение (а), получим

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx = -\rho F dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad \text{(в)}$$

Из элементарной теории изгиба стержней имеем соотношение

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad \text{(г)}$$

Подставляя это выражение в уравнение (в), находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx = -\rho F dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad (5.81)$$

---

* См. с. 96 в кн. **Timoshenko S., Young D. H.** Elements of strength of materials, цитированной в п. 1.1.

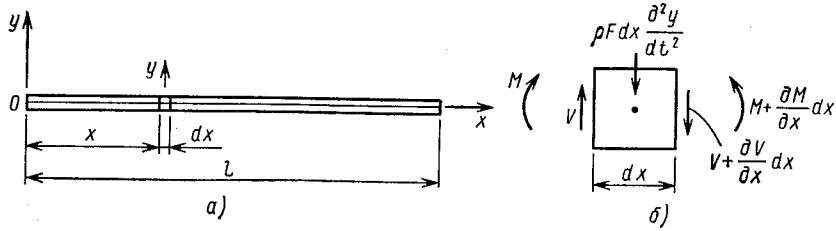


Рис. 5.13

что является общим уравнением поперечных свободных колебаний стержней. В частном случае призматического стержня с жесткостью EI при изгибе, не зависящей от x, имеем

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}dx = -\rho F\,dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{5.82}$$

Это уравнение может быть представлено и в такой форме:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{5.83}$$

где

$$a = \sqrt{EI/\rho F}. \tag{5.84}$$

Когда стержень колеблется в поперечном направлении по одной из форм собственных колебаний, его прогибы в произвольной точке будут изменяться во времени по гармоническому закону

$$y = X(A\cos pt + B\sin pt). \tag{д}$$

Здесь для удобства записи опущен индекс i, обозначающий i-ю форму колебаний. Подставляя представление (д) в уравнение (5.83), получим

$$\frac{d^4X}{dx^4} - \frac{p^2}{a^2}X = 0. \tag{е}$$

Учитывая необходимость решать обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, введем обозначение

$$p^2/a^2 = k^4 \tag{ж}$$

и перепишем уравнение (е) в виде

$$\frac{d^4X}{dx^4} - k^4X = 0. \tag{з}$$

Примем в уравнении (з) $X = e^{nx}$, что даст

$$e^{nx}(n^4 - k^4) = 0. \tag{и}$$

Таким образом, видим, что величина n может принимать следующие значения: $n_1 = k$, $n_2 = -k$, $n_3 = ik$, $n_4 = -ik$, где $i^2 = -1$. Общее решение уравнения (и)

$$X = Ce^{kx} + De^{-kx} + Ee^{ikx} + Fe^{-ikx}, \tag{к}$$

которое можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$X = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3\,\mathrm{sh}\,kx + C_4\,\mathrm{ch}\,kx. \tag{5.85}$$

Полученное выражение является нормальной функцией задачи о поперечных колебаниях призматического стержня.

Постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4, входящие в выражение (5.85), являются произвольными и должны определяться в каждом частном случае в соответствии с условиями, заданными на концах стержня. Например, для свободного конца прогиб и изгибающий момент равны нулю, что дает

$$X = 0;\ X'' = 0. \tag{л}$$

На защемленном конце равны нулю прогиб и угол наклона, следовательно, в этом случае имеем

$$X = 0; \quad X' = 0. \tag{м}$$

На незакрепленном конце обращаются в нуль изгибающий момент и поперечная сила. В результате получаем

$$X'' = 0; \quad X''' = 0. \tag{н}$$

Поскольку у стержня есть два конца, всегда имеется возможность записать такие концевые условия, используя которые можно найти величины C_1, C_2, C_3 и C_4, а найдя их, определить частоты и формы свободных колебаний. Затем нормальные формы можно просуммировать и получить результирующие перемещения при поперечных колебаниях стержня

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \tag{5.86}$$

Конкретные случаи поперечных колебаний стержней с различными концевыми условиями будут рассматриваться в следующих параграфах.

Запишем уравнение (з) в форме задачи на собственные значения

$$X_i^{\mathrm{IV}} = \lambda_i X_i, \tag{5.87}$$

где

$$\lambda_i = k_i^4 = (p_i/a)^2. \tag{о}$$

Подобный тип задач можно представить как задачи, в которых четвертая производная (в данном случае по x) функции X приравнивается самой функции, умноженной на собственное значение λ_i. Свойства ортогональности собственных функций исследуем путем рассмотрения i-й и j-й форм колебаний:

$$X_i^{\mathrm{IV}} = \lambda_i X_i; \tag{п}$$

$$X_j^{\mathrm{IV}} = \lambda_j X_j. \tag{р}$$

Умножая уравнение (п) на X_j и уравнение (р) на X_i и интегрируя результат по длине балки, получим

$$\int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_j \, dx = \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx; \tag{с}$$

$$\int_0^l X_j^{\mathrm{IV}} X_i \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx. \tag{т}$$

Интегрируя по частям выражения, стоящие в левых частях этих равенств, приходим к соотношениям вида

$$[X_i''' X_j]_0^l - [X_i'' X_j']_0^l + \int_0^l X_i'' X_j'' \, dx - \lambda_i \int_0^l X_i X_j \, dx; \tag{у}$$

$$[X_j''' X_i]_0^l - [X_j'' X_i']_0^l + \int_0^l X_i'' X_j'' \, dx = \lambda_j \int_0^l X_i X_j \, dx. \tag{ф}$$

Из концевых условий (л) и (н) следует, что стоящие в квадратных скобках слагаемые в левых частях соотношений (у) и (ф) должны быть равны нулю. Тогда вычитая равенство (ф) из (у), получим

$$(\lambda_i - \lambda_i) \int_0^l X_i X_j \, dx = 0. \qquad \text{(х)}$$

Для того чтобы равенство (х) выполнялось при $i \neq j$ и при различных собственных значениях (т. е. при $\lambda_i \neq \lambda_j$), следует положить

$$\int_0^l X_i X_j \, dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \qquad (5.88)$$

Подставляя это равенство в соотношение (у), получим

$$\int_0^l X_i'' X_j'' \, dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \qquad (5.89)$$

а из соотношения (с) следует

$$\int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_j \, dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \qquad (5.90)$$

Соотношения (5.88)—(5.90) определяют условие ортогональности для задачи о поперечных колебаниях призматического стержня. Для случая $i = j$ интеграл в соотношении (х) может принимать произвольное постоянное значение α_i, а именно:

$$\int_0^l X_i^2 \, dx = \alpha_i \quad \text{при} \quad i = j. \qquad (5.91)$$

Если собственные функции нормируются в соответствии с этим соотношением, из равенств (с) и (у) следует

$$\int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_i \, dx = \int_0^l (X_i'')^2 \, dx = \lambda_i \alpha_i = k_i^4 \alpha_i = \left(\frac{p_i}{a}\right)^2 \alpha_i. \qquad (5.92)$$

Для того чтобы преобразовать уравнение движения (5.82) к главным координатам, перепишем его в форме

$$m\ddot{y} \, dx + r y^{\mathrm{IV}} \, dx = 0, \qquad \text{(ц)}$$

где $m = \rho F$ — масса единицы длины балки, $r = EI$ — жесткость при изгибе. Представляя динамические перемещения в виде ряда по функциям времени φ_i и функциям перемещений X_i, запишем

$$y = \sum_i \varphi_i X_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \qquad (5.93)$$

Подставляя представление (5.93) в уравнение движения (ц), найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m\ddot{\varphi}_i X_i + r\varphi_i X_i^{\mathrm{IV}}\right) dx = 0. \qquad \text{(ч)}$$

Умножая равенство (ч) на нормальную функцию X_j и интегрируя по длине стержня, приходим к следующему равенству:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m\ddot{\varphi}_i \int_0^l X_i X_j\, dx + r\varphi_i \int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_j\, dx \right) = 0. \qquad \text{(ш)}$$

Из соотношений (5.88) и (5.90)—(5.92) видно, что при $i = j$ уравнение движения в главных координатах принимает вид

$$m_{\Gamma i}\ddot{\varphi}_i + r_{\Gamma i}\varphi_i = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty, \qquad (5.94)$$

где

$$m_{\Gamma i} = m \int_0^l X^2\, dx = m\alpha_i; \qquad (5.95)$$

$$r_{\Gamma i} = r \int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_i\, dx = r \int_0^l (X_i'')^2\, dx = m p_i^2 \alpha_i. \qquad (5.96)$$

Таким образом, главная масса $m_{\Gamma i}$ при изгибных колебаниях вычисляется так же, как и в случае продольных колебаний [см. выражение (5.19)]. Однако здесь главная жесткость $r_{\Gamma i}$ [см. выражение (5.96)] определяется иначе, чем в случае продольных колебаний [см. выражение (5.20)].

Как и выше, положим в соотношениях нормированности постоянную равной единице, поэтому соотношения (5.91) и (5.92) примут вид

$$\int_0^l X_i^2\, dx = 1; \qquad \int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_i\, dx = \int_0^l (X_i'')^2\, dx = k_i^4 = \left(\frac{p_i}{a}\right)^2. \qquad (5.97)$$

Тогда, разделив уравнение (5.94) на величину m, получим

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty. \qquad (5.98)$$

Можно видеть, что применение метода нормальных форм к задаче изгибных колебаний стержней приводит к уравнению, аналогичному по форме уравнению для продольных колебаний стержня, полученному в п. 5.4. В силу отмеченной аналогии, здесь не будут вновь выводиться выражения, описывающие динамическое поведение стержней при поперечных колебаниях при заданных начальных условиях и приложенных динамических нагрузках. Выражение для динамических перемещений при изгибных колебаниях будут совпадать с аналогичным выражением для задачи о продольных колебаниях [см. выражения (5.23)—(5.29)], если в последних выражениях продольное перемещение u заменить на поперечное y.

5.10. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНО ОПЕРТОГО СТЕРЖНЯ

В качестве первого частного случая поперечных колебаний стержня исследуем свободно опертый призматический стержень, показанный на рис. 5.14. Концевые условия для этого случая имеют вид

$$(X)_{x=0} = 0; \qquad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0} = 0;$$

$$(X)_{x=l} = 0; \qquad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0 \qquad \text{(а)}$$

и означают, что перемещение и изгибающий момент равны нулю на каждом конце.

Здесь полезно записать общее выражение для нормальной функции [см. выражение (5.85)] в следующей эквивалентной форме:

$$X = C_1(\cos kx + \operatorname{ch} kx) + C_2(\cos kx - \operatorname{ch} kx) + \\ + C_3(\sin kx + \operatorname{sh} kx) + C_4(\sin kx - \operatorname{sh} kx). \qquad (5.99)$$

Из первых двух условий (а) следует, что постоянные C_1 и C_2 в выражении (5.99) должны быть равны нулю. Из третьего и четвертого условий следует, что $C_3 = C_4$,

$$\sin kl = 0, \qquad (5.100)$$

причем последнее равенство является частотным уравнением для рассматриваемого случая. Не равные нулю положительные корни этого уравнения $k_i l = i\pi$ при $i = 1, 2, 3, \ldots, \infty$. Отсюда следует

$$k_i = i\pi/l, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \qquad (5.101)$$

Круговую частоту, соответствующую этим значениям k_i, получаем из формулы

$$p_i = k_i^2 a = \frac{i^2\pi^2 a}{l^2} = \frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho F}}. \qquad (5.102)$$

Тогда период колебаний находим из выражения

$$\tau_i = \frac{1}{f_i} = \frac{2\pi}{p_i} = \frac{2l^2}{i^2\pi}\sqrt{\frac{\rho F}{EI}}. \qquad (5.103)$$

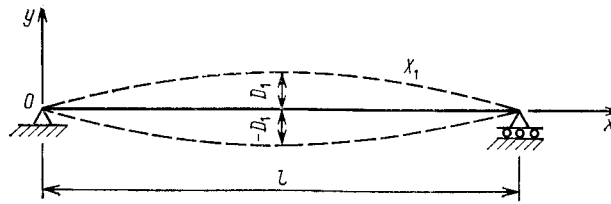


Рис. 5.14

Как видно, период колебаний для произвольной формы колебаний пропорционален квадрату длины и обратно пропорционален радиусу инерции поперечного сечения. Таким образом, для геометрически подобных стержней, изготовленных из одного материала, периоды собственных колебаний прямо пропорциональны геометрическим размерам.

Формы кривых, описывающих прогибы при колебаниях, задаются нормальной функцией [см. выражение (5.99)] при

$$C_1 = C_2 = 0 \text{ и } C_3 = C_4 = D/2,$$

а именно:

$$X_i = D_i \sin k_1 x = D_i \sin (i\pi x/l), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \qquad (5.104)$$

Таким образом, формы колебаний имеют вид синусоид, первая из которых показана штриховыми линиями на рис. 5.14. Нормальные функции для свободно опертого стержня, как видно из сказанного, совпадают с нормальными функциями для колеблющейся предварительно растянутой нити с неподвижно закрепленными концами (см. рис. 5.10, *в*, *д*). Для того чтобы удовлетворить условиям (5.97) нормированности, надо положить $D_i = \sqrt{2/l}$.

Определим теперь динамические перемещения при поперечных колебаниях свободно опертого стержня, обусловленных начальными условиями, заданными в виде перемещений и скоростей. Как и в случае колебаний растянутой нити, представим распределение начальных поперечных перемещений в произвольном сечении стержня в момент времени $t = 0$ в виде функции $y_0 = f_1(x)$, а распределение начальных скоростей — в виде функции $\dot{y}_0 = f_2(x)$. Общая форма решения задается выражением (5.86), полученным в предыдущем параграфе, и она аналогична решению (5.25), полученному методом нормальных форм в п. 5.4. Если нормированные функции (5.104) подставить в выражения (5.23) и (5.24), в результате получим

$$\varphi_{0i} = \int_0^l f_1(x) X_i \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{i\pi x}{l} \, dx; \qquad (б)$$

$$\dot{\varphi}_{0i} = \int_0^l f_2(x) X_i \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{i\pi x}{l} \, dx. \qquad (в)$$

Подставляя эти выражения в решение (5.25) и заменив u на y, получим

$$y = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left[\cos p_i t \int_0^l f_1(x) \sin \frac{i\pi x}{l} \, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{p_i} \sin p_i t \int_0^l f_2(x) \sin \frac{i\pi x}{l} \, dx \right]. \qquad (5.105)$$

Сравнивая это выражение с выражением (5.86), видим, что постоянные

$$A_i = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx; \qquad \text{(г)}$$

$$B_i = \frac{2}{lp_i}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx. \qquad \text{(д)}$$

В качестве примера задачи о поперечном ударе предположим, что на коротком участке стержня длиной δ, расположенном на расстоянии x_1 от левой опоры, задана начальная скорость v. В этом случае $f_1(x) = 0$, а функция $f_2(x)$ равна нулю во всех точках, кроме точки $x = x_1$, где $f_2(x_1) = v$. Подставляя эти условия в выражения (г) и (д), получим

$$A_i = 0; \quad B_i = \frac{2v\delta}{lp_i}\sin\frac{i\pi x_1}{l},$$

тогда суммарное динамическое перемещение определяется выражением

$$y = \frac{2v\delta}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\sin p_i t. \qquad \text{(е)}$$

Если удар производится в середину пролета (т. е. в точку $x_1 = l/2$), имеем

$$y = \frac{2v\delta}{l}\left(\frac{1}{p_1}\sin\frac{\pi x}{l}\sin p_1 t - \frac{1}{p_3}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin p_3 t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p_5}\sin\frac{5\pi x}{l}\sin p_5 t - \ldots\right) = \frac{2v\delta l}{a\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\sin p_1 t - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin p_3 t + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{l}\sin p_5 t - \ldots\right). \qquad \text{(ж)}$$

Видно, что в этом случае возникают только симметричные формы колебаний, при этом величины амплитуд, входящих в выражение (ж) форм колебаний с последовательно возрастающими номерами, убывают по закону $1/i^2$.

ЗАДАЧИ

5.10.1. Определить собственные частоты f_i колебаний двутавровой балки, колеблющейся в плоскости ее стенки, если дано, что $l = 9{,}14$ м, $E = 2{,}11\cdot10^{11}$ Па, $I = 1{,}26\cdot10^{-3}$ м^4, погонный вес составляет $1{,}489\cdot10^3$ Н/м.

Ответ: $f_i = 24{,}8i^2$ с$^{-1}$.

5.10.2. Свободно опертый стержень прогнулся под действием силы P, приложенной в середине пролета. Определить поперечные динамические перемещения стержня при колебаниях, возникающих при внезапном снятии силы P.

Ответ: $y = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI}\sum_i \frac{(-1)^{i-1/2}}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\cos p_i t, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \infty.$

5.10.3. Решить предыдущую задачу, предполагая, что сила P приложена в точке $x = x_1$.

Ответ: $y = \dfrac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum\limits_i \dfrac{1}{i^4} \sin \dfrac{i\pi x}{l} \sin \dfrac{i\pi x_1}{l} \cos p_i t, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty.$

5.10.4. К свободно опертому стержню приложена равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью w. Определить поперечные динамические перемещения стержня при колебаниях, возникающих при внезапном снятии нагрузки:

Ответ: $y = \dfrac{4wl^4}{\pi^5 EI} \sum\limits_i \dfrac{1}{i^5} \sin \dfrac{i\pi x}{l} \cos p_i t, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \infty.$

5.10.5. Определить поперечные динамические перемещения свободно опертого стержня, для которого задано, что в момент времени $t = 0$ все точки стержня, за исключением концевых точек, внезапно приобретают скорость v.

Ответ: $y = \dfrac{4v}{\pi} \sum\limits_i \dfrac{1}{ip_i} \sin \dfrac{i\pi x}{l} \sin p_i t, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \infty.$

5.11. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ КОНЦЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Стержни с незакрепленными концами. В этом случае имеем следующие концевые условия:

$$\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=0} = 0;$$

$$\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0; \quad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l} = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить первым двум из указанных условий, в общем выражении (5.99) для решения надо положить $C_2 = C_4 = 0$, тогда получим

$$X = C_1 (\cos kx + \operatorname{ch} kx) + C_3 (\sin kx + \operatorname{sh} kx). \qquad (5.106)$$

Из третьего и четвертого условий следует

$$C_1 (-\cos kl + \operatorname{ch} kl) + C_3 (-\sin kl + \operatorname{sh} kl) = 0; \qquad (б)$$

$$C_1 (\sin kl + \operatorname{sh} kl) + C_3 (-\cos kl + \operatorname{ch} kl) = 0. \qquad (в)$$

Отличные от нуля решения для постоянных C_1 и C_3 можно получить в том случае, когда равен нулю определитель матрицы, составленный из коэффициентов уравнений (б) и (в). Из этого условия получаем частотное уравнение

$$(-\cos kl + \operatorname{ch} kl)^2 - (\operatorname{sh}^2 kl - \sin^2 kl) = 0, \qquad (г)$$

откуда, учитывая соотношения $\operatorname{ch}^2 kl - \operatorname{sh}^2 kl = 1$, $\cos^2 kl + \sin^2 kl = 1$, для уравнения (г) получаем следующую форму:

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = 1. \qquad (5.107)$$

Несколько наименьших корней этого уравнения, расположенных в порядке возрастания номеров, приведены ниже, где первое значе-

ние принадлежит двум равным корням, относящимся к двум формам движения как абсолютно жесткого тела:

$k_0 l$	$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$
0	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279

Ненулевые значения корней можно приближенно определить по формуле $k_i l \approx (1/2 + i)/\pi$. Для рассматриваемого стержня частоты его колебаний можно определить, используя формулу $f_i = p_i/2\pi = k_i^2 a/2\pi$, откуда находим

$$f_0 = 0; \quad f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{k_1^2 a}{2\pi}; \quad f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = \frac{k_2^2 a}{2\pi}, \quad \ldots \qquad (д)$$

Подставляя корни уравнения (5.107) в порядке возрастания их номеров в уравнения (б) и (в), определим отношение C_1/C_3 для каждой формы колебаний. Тогда из выражения (5.106) можно найти форму прогибов стержня при колебаниях. Первые три формы колебаний, соответствующие частотам f_1, f_2 и f_3, показаны соответственно на рис. 5.15, *а—в*. К перемещениям, обусловленным колебаниями стержня, можно прибавить колебания его как абсолютно жесткого тела. Комбинированное движение как абсолютно жесткого тела можно описать функцией

$$X = C_1 + C_2 x. \qquad (е)$$

Эта функция описывает движение как переносом, так и вращением, и ее можно прибавить к функции, описывающей перемещения при свободных колебаниях стержня.

Стержни с жестко защемленными концами. Концевые условия в этом случае имеют вид

$$(X)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0;$$

$$(X)_{x=l} = 0; \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l} = 0. \qquad (ж)$$

Первым двум из этих условий можно удовлетворить, если в общем решении (5.99) положим $C_1 = C_2 = 0$. В результате получим

$$X = C_2 (\cos kx - \operatorname{ch} kx) + C_4 (\sin kx - \operatorname{sh} kx). \qquad (5.108)$$

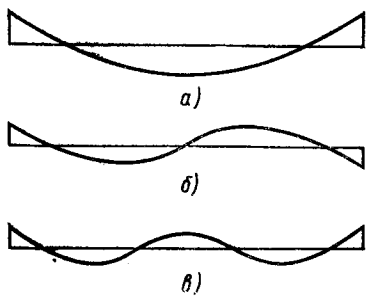


Рис. 5.15

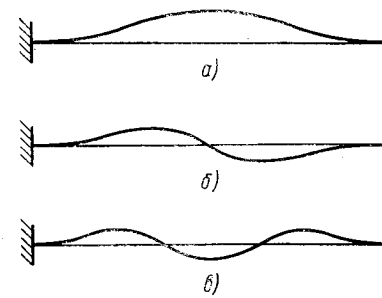


Рис. 5.16

Удовлетворяя двум другим условиям, приходим к следующей системе уравнений:

$$C_2 (\cos kl - \operatorname{ch} kl) + C_4 (\sin kl - \operatorname{sh} kl) = 0; \quad (з)$$

$$C_2 (\sin kl + \operatorname{sh} kl) + C_4 (-\cos kl + \operatorname{ch} kl) = 0, \quad (и)$$

из которых следует такое же частотное уравнение, что и уравнение (5.107), найденное в предыдущем случае. Из сказанного вытекает, что для стержня с жестко защемленными концами последовательный ряд ненулевых частот колебаний будет таким же, как и для стержня со свободными концами. На рис. 5.16, *а—в* показаны первые три формы колебаний для данного случая.

Стержень с одним жестко защемленным концом. Если принять, что левый конец (при $x = 0$) жестко защемлен, то концевые условия будут иметь вид

$$(X)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0;$$

$$\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0; \quad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l} = 0. \quad (к)$$

Из первых двух условий получаем, что в решении (5.99) $C_1 = C_3 = 0$, поэтому общим решением, описывающим формы колебаний, снова будет выражение (5.108). Из остальных двух условий вытекает следующее частотное уравнение:

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1. \quad (5.109)$$

Последовательный ряд корней этого уравнения приведен ниже:

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$	$k_6 l$
1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	17,279

Приближенные значения этих корней можно определить по формуле $k_i l \approx (i - 1/2)\,\pi$.

С увеличением частоты корни уравнения (5.109) становятся близкими к корням уравнения (5.107), полученного выше для стержня с незакрепленными концами.

Частота колебаний по произвольной форме

$$f_i = \frac{p_i}{2\pi} = \frac{ak_i^2}{2\pi}. \quad (л)$$

Взяв, например, основную форму колебаний, получим

$$f_1 = \frac{a}{2\pi}\left(\frac{1{,}875}{l}\right)^2. \quad (м)$$

Соответствующий период колебаний

$$\tau_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{a}\frac{l^2}{(1{,}875)^2} = \frac{2\pi}{3{,}515}\sqrt{\frac{\rho F l^4}{EI}}. \quad (н)$$

Первые три формы колебаний, относящиеся к данному случаю, изображены на рис. 5.17, *а—в*.

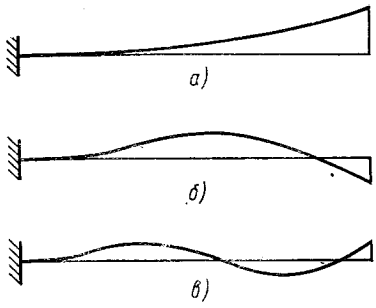


Рис. 5.17

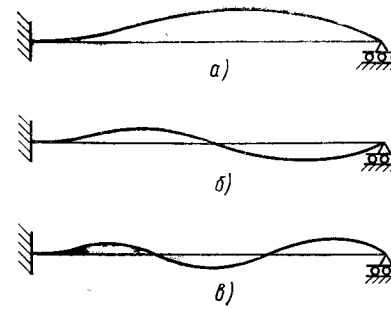


Рис. 5.18

Стержень с одним концом жестко защемленным, а другим — свободно опертым. В этом случае частотное уравнение имеет вид

$$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl. \tag{5.110}$$

Последовательный ряд корней этого уравнения приведен ниже:

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$
3,927	7,069	10,210	13,352	16,493

Приближенные значения этих корней можно найти с достаточной точностью по формуле

$$k_i l \approx \left(i + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

На рис. 5.18, *а—в* показаны относящиеся к данному случаю три первые формы колебаний.

Для всех рассмотренных выше концевых условий составлены таблицы нормальных функций и их производные.* Пользуясь этими таблицами, можно значительно упростить решение задач о поперечных колебаниях стержней. Покажем теперь, как данные из подобных таблиц могут быть использованы при исследовании динамического поведения стержней при заданных начальных условиях. Аналогичный подход для исследования динамического поведения, обусловленного действием изменяющихся во времени нагрузок, будет рассмотрен в следующем параграфе.

Метод, использовавшийся выше для исследования динамического поведения упругого тела, обусловленного заданными начальными условиями, включал вычисления интегралов вида

$$\int_0^l f_1(x)\, X_i\, dx; \quad \int_0^l f_2(x)\, X_i\, dx.$$

Непосредственно интегрировать подобные выражения трудно, если нормальные функции x_i имеют сложный вид. Среди изученных выше типов стержней только свободно опертые стержни имели

* **Young D., Felgar R. P.** Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam. — Univ. Texas Publ., 1949, N. 4913.

простые формы колебаний. Решения для стержней с иными концевыми условиями содержат гиперболические функции, для которых обычно требуется численное интегрирование. Поэтому, как будет показано ниже, более удобен иной подход, особенно в тех случаях, когда начальные условия определяются сосредоточенными силой или моментом. Ниже обсужден случай, когда начальное перемещение $y_0 = f_1(x)$ создается сосредоточенной силой P_0, внезапно удаляемой в момент времени $t = 0$; аналогичным образом можно рассмотреть и случай с сосредоточенным моментом.

Функцию $y_0 = f_1(x)$, описывающую начальные перемещения стержня, можно представить в виде ряда по нормальным функциям X_i:

$$y_0 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} b_iX_i, \qquad \text{(о)}$$

где постоянные b_i являются неизвестными, которые необходимо определить. Энергию деформации призматического стержня в изогнутом состоянии можно определить из выражения

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^l (y_0'')^2\,dx. \qquad \text{(п)}$$

Подставляя в выражение (о) вторую производную функции y_0 [см. представление (о)] по x, получим

$$U = \frac{EI}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \int_0^l (X_i'')^2\,dx. \qquad \text{(р)}$$

Из соотношений (5.91) и (5.92) следует

$$\int_0^l (X_i'')^2\,dx = k_i^4\int_0^l X_i^2\,dx. \qquad \text{(с)}$$

Используя эти равенства, из выражения (р) находим

$$U = \frac{EI}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2k_i^4 \int_0^l X_i^2\,dx. \qquad \text{(т)}$$

Предположим, что начальные перемещения y_0, описываемые представлением (о), создаются сосредоточенной силой P_0, приложенной в точке $x = x_1$ и направленной параллельно оси y. Для определения входящих в представление (о) постоянных b_i применительно к рассматриваемой задаче воспользуемся принципом возможных работ. Рассмотрим возможное перемещение δb_iX_i и приравняем возможную работу приложенной силы приращению энергии деформации

$$P_0\delta b_iX_{i1} = \frac{\partial U}{\partial b_i}\delta b_i = EIb_ik_i^4\delta b_i\int_0^l X_i^2\,dx, \qquad \text{(у)}$$

где через X_{i1} обозначено значение функции X_i в точке $x = x_1$. Решая равенство (у) относительно b_i, получим

$$b_i = \frac{P_0 X_{i1}}{EIk_i^4 \int\limits_0^l X_i^2\, dx}. \qquad (ф)$$

Подставляя это выражение для b_i в представление (о), найдем

$$y_0 = \frac{P_0}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{X_i X_{i1}}{k_i^4 \int\limits_0^l X_i^2\, dx} \right). \qquad (х)$$

Здесь можно видеть, что способ нормирования функций не влияет на величину y_0. В упомянутых выше таблицах процедура нормирования задается соотношением

$$\int_0^l X_i^2\, dx = l. \qquad (ц)$$

С учетом этого соотношения коэффициенты (ф) можно представить в форме

$$b_i = \frac{P_0 l^3 X_{i1}}{EI\,(k_i l)^4}, \qquad (5.111)$$

тогда выражение (х) для искомого решения принимает окончательный вид

$$y_0 = \frac{P_0 l^3}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i X_{i1}}{(k_i l)^4} \qquad (5.112)$$

и может быть использовано при статическом анализе для определения формы линии прогибов стержня.

Учитывая, что динамические перемещения упругого стержня при свободных поперечных колебаниях, вызванных начальным перемещением $b_i X_i$, равны

$$y_i = b_i X_i \cos p_i t, \qquad (ч)$$

можно определить суммарное динамическое поперечное перемещение, если начальное перемещение задано в виде функции y_0:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i X_i \cos p_i t. \qquad (ш)$$

Подставляя в (ш) выражение (5.111) для b_i, найдем

$$y = \frac{P_0 l^3}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i X_{i1}}{(k_i l)^4} \cos p_i t. \qquad (5.113)$$

Проводя числовые расчеты с помощью этого выражения, из таблиц находят столько значений X_{i1}, сколько форм колебаний собираются учесть в этом выражении.

Точно так же, как и для сосредоточенных сил, этот метод может быть использован в случае распределенных нагрузок, однако с практической точки зрения так поступать не особенно удобно. Определение возможной работы, совершаемой распределенной нагрузкой [см. выражение (у)], приводит к необходимости вычислять интегралы от произведения интенсивности нагрузки на каждую нормальную функцию по длине стержня. Эти интегралы с функцией нагрузки аналогичны тем интегралам с функцией перемещения, для которых выше указывалось на нежелательность интегрирования. Однако в большинстве случаев более просто вычислить интеграл с функцией нагрузки, чем с функцией перемещения.

Пример. Стержень с жестко защемленными концами нагружен поперечной силой P_0, приложенной в середине пролета. Определить поперечное динамическое перемещение в середине пролета стержня при его колебаниях, возникающих, когда в момент времени $t = 0$ сила внезапно удаляется.

Решение. Нормальные функции для стержня с жестко защемленными концами [см. выражение (5.108)] можно представить в виде

$$X_i = \operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x - \alpha_i (\operatorname{sh} k_i x - \sin k_i x), \qquad (щ)$$

где

$$\alpha_i = \frac{\operatorname{ch} k_i l - \cos k_i l}{\operatorname{sh} k_i l - \sin k_i l}.$$

Здесь имеем $\alpha_1 = 0{,}9825$; $\alpha_2 = 1{,}0008$; $\alpha_3 \approx 1$; $\alpha_4 \approx 1$ и т. д. С помощью упомянутых выше таблиц для нечетных форм колебаний стержня с жестко защемленными концами находим

$$(X_1)_{x=l/2} = 1{,}588; \quad (X_3)_{x=l/2} = 1{,}406; \quad (X_5)_{x=l/2} = 1{,}415; \quad \ldots$$

Подставляя в выражение (5.113) эти значения, а также значения $k_i l$, приведенные для уравнения (5.107), получим следующее выражение для изменяющегося во времени прогиба в середине пролета стержня:

$$(y)_{x=l/2} = \frac{P_0 l^3}{EI}\left[\frac{1{,}558^2}{4{,}730^4}\cos p_1 t + \frac{1{,}406^2}{10{,}996^4}\cos p_3 t + \frac{1{,}415^2}{17{,}279^4}\cos p_5 t + \ldots\right] =$$

$$= \frac{P_0 l^3}{EI}(5038\cos p_1 t + 135\cos p_3 t + 22\cos p_5 t + \ldots)\,10^{-6}. \qquad (э)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае ряд, представляющий искомое решение, сходится быстро.

ЗАДАЧИ

5.11.1. Численно определить нормальные функции для стержня с одним жестко защемленным концом и свободно опертым другим и построить графики линий прогибов, соответствующих первой и второй формам колебаний.

Ответ: Нормальные функции [см. выражения (б), (в) и (5.106)] имеют вид

$$X_i = \operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x - \alpha_i (\operatorname{sh} k_i x - \sin k_i x),$$

$$\text{где } \alpha_i = \frac{\operatorname{ch} k_i l - \cos k_i l}{\operatorname{sh} k_i l - \sin k_i l}.$$

Используя значения корней частотного уравнения, относящегося к данному случаю, получим

$$k_1 l = 3{,}927; \; k_2 l = 7{,}069; \; \alpha_1 = 1{,}0008; \; \alpha_2 = 1{,}0000.$$

Используя полученные числовые данные, можно построить искомые кривые.

5.11.2. Решить предыдущую задачу, приняв, что конец $x = 0$ стержня жестко защемлен, а конец $x = l$ не закреплен.

Ответ: В данном случае нормальные функции имеют вид

$$X_i = \operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x - \alpha_i (\operatorname{sh} \beta_i x - \sin \beta_i x),$$

где $\alpha = \dfrac{\operatorname{ch} k_i l + \cos k_i l}{\operatorname{sh} k_i l + \sin k_i l}$.

Зная корни соответствующего характеристического уравнения, для данного стержня получаем

$$k_1 l = 1{,}875;\ k_2 l = 4{,}694;\ \alpha_1 = 0{,}7341;\ \alpha_2 = 1{,}0185.$$

5.11.3. Показать пригодность частотного уравнения (5.110) для задачи о консоли с дополнительной опорой и найти выражение для нормальных функций.

5.11.4. Определить выражение для поперечных динамических перемещений стержня с жестко защемленными концами, если он изгибается под действием сосредоточенной силы P_0, приложенной в точке $x = l/4$, а затем начинает колебаться при внезапном удалении этой силы в момент времени $t = 0$.

5.11.5. Решить предыдущую задачу для стержня, один конец которого жестко защемлен, а другой не закреплен. Начальный прогиб создается силой P_0, приложенной к незакрепленному концу стержня.

5.12. ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

В предыдущих рассмотрениях задачи об изгибных колебаниях предполагалось, что размеры поперечных сечений малы по сравнению с длиной стержня. Здесь будет дано уточнение теории, целью которой является учет влияния размеров поперечных сечений на частоты колебаний. Эти уточнения могут иметь важное значение при исследовании форм колебаний с высокими частотами, когда колеблющийся стержень разделяется *узловыми поперечными сечениями* на сравнительно короткие отрезки.

Легко видеть, что при колебаниях стержня его малый элемент (см. рис. 5.13, *б*) совершает движения, соответствующие не только переносу, но и повороту *. Угол поворота, который равен углу наклона кривой прогибов, имеет вид $\partial y/\partial x$, тогда соответствующие угловые скорость и ускорение представляются выражениями

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t} \text{ и } \frac{\partial^3 yt}{\partial x\, \partial t^2}.$$

Поэтому момент инерции этого малого элемента относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости xy, равен **

$$-\rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x\, \partial t^2}\, dx.$$

Этот момент инерции следует учитывать при записи условия динамического равновесия для малого элемента стержня. Тогда вместо уравнения (б) из п. 5.9 получим

$$-V\, dx + \frac{\partial M}{\partial x}\, dx - \rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x\, \partial t^2}\, dx = 0. \qquad \text{(а)}$$

---

* См. § 186 в кн. **Rayleigh J. W. S.** Theory of sound, цитированной в п. 1.4.

** Положительным будем считать направление вращения против часовой стрелки.

Подставляя выражение поперечной силы V, получаемое из этого выражения, в уравнение равновесия проекции сил на ось y [см. уравнение (а) в п. 5.9], найдем

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \rho I\,\frac{\partial^3 y}{\partial x\,\partial t^2}\right)dx = -\rho F\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (б)$$

Тогда с учетом выражения (д) из п. 5.9 придем к уравнению

$$EI\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho F\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho I\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2}. \qquad (5.114)$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение для поперечных колебаний призматических стержней, в правой части которого второе слагаемое учитывает влияние инерции вращения.

Еще более точное дифференциальное уравнение можно получить, если учесть не только инерции вращения, но также и прогибы, обусловленные поперечным сдвигом.* Угол наклона кривой прогибов зависит не только от поворота поперечных сечений стержня, но также и от деформаций поперечного сдвига. Обозначим через ψ угол наклона кривой прогибов в том случае, когда поперечная сила не учитывается, а через β — угол поперечного сдвига на нейтральной оси для того же самого поперечного сечения. Таким образом, суммарный угол наклона

$$dy/dx = \psi + \beta. \qquad (в)$$

Из элементарной теории изгиба стержней следуют такие выражения для изгибающего момента и поперечной силы:

$$M = EI\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};\quad V = -k'\beta FG = -k'\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right)FG, \qquad (г)$$

где k' — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения; F — площадь поперечного сечения; G — модуль сдвига. Дифференциальное уравнение, описывающее условие равенства нулю моментов, действующих на малый элемент, имеет вид

$$-V\,dx + \frac{\partial M}{\partial x}\,dx - \rho I\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,dx = 0. \qquad (д)$$

---

* См. статью **Timoshenko S.** On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. — Philosophical Magazine and Journal of Science, 1922, Ser. 6, v. 41, N. 245, pp. 744—746; On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. — То же, 1922, Ser. 6, v. 43, N. 253, pp. 125—131 (переводы на русский язык этих статей приведены в кн. **Тимошенко С. П.** Статические и динамические проблемы теории упругости. — Киев: Наукова думка, 1975, с. 56—57 и 62—65. Экспериментальная оценка влияния поперечного сдвига дана в работе **Goens E.** Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen. — Annalen der Physik, 1931, B. 11, N. 6, S. 649—678; см. также: **Davies R. M.** The frequency of transverse vibration of a loaded fixed-free bar. — IV. The effect of shearing of the bar. — Philosophical Magazine and Journal of Science, Ser. 7, 1937, V. 23, N. 158, pp. 1129—1145. О необходимости учета деформации поперечного сдвига в задачах о поперечном ударе по стержню см. **Flügge W.** Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben. — Z. angew. Math. und Mech., 1942, B. 22, N. 6, S. 312—318.

Подставляя выражения (г) в уравнение (д), найдем

$$EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k'\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)FG-\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \qquad (е)$$

Дифференциальное уравнение, вытекающее из условия равенства проекций на вертикальную ось сил, действующих на малый элемент стержня, можно представить в форме

$$-\frac{\partial V}{\partial x}dx-\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx=0. \qquad (ж)$$

Подставляя второе из выражений (г) в уравнение (ж), получим

$$k'\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)G-\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \qquad (з)$$

Исключая функцию ψ из уравнений (е) и (з), находим более полное уравнение поперечных колебаний призматических стержней

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\rho I\left(1+\frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2}+\frac{\rho^2 I}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0. \qquad (5.115)$$

Применение этого уравнения [9] при определении частот колебаний стержней будет показано ниже.

Вновь вернемся к свободно опертому стержню, который уже исследовался в п. 5.10 (см. рис. 5.14). Для того чтобы точнее определить частоты колебаний, воспользуемся уравнением (5.115) вместо (5.83). Разделив каждый член уравнения (5.115) на ρF и введя обозначение

$$r_в^2=I/F_1, \qquad (и)$$

получим

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-r_в^2\left(1+\frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2}+r_в^2\frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0. \qquad (5.116)$$

Этому уравнению и заданным концевым условиям удовлетворяет решение вида

$$y_i=\sin(i\pi x/l)\,(A_i\cos p_i t+B_i\sin p_i t), \qquad (к)$$

которое содержит те же нормальные функции, что и относящиеся к случаю рассмотрения поперечных колебаний стержня без учета инерции вращения и деформации поперечного сдвига. Подставляя выражение (к) в уравнение (5.116), получим следующее уравнение для нахождения частот колебаний:

$$a^2\frac{i^4\pi^4}{l^4}-p_i^2-p_i^2\frac{i^2\pi^2 r_в^2}{l^2}-p_i^2\frac{\pi^2 r_в^2}{l^2}\frac{E}{k'G}+\frac{r_в^2\rho}{k'G}p_i^4=0. \qquad (5.117)$$

Если в этом уравнении сохранить только первые два слагаемых, найдем

$$p_i=a\frac{i^2\pi^2}{l^2}=\frac{a\pi^2}{\lambda_i^2}, \qquad (л)$$

где $\lambda_i=l/i$ — длины полуволн, на которые разделяется длина стержня при его колебаниях. Полученный результат совпадает с полученным выше результатом (5.102). Сохраняя в уравнении

(5.117) первые три слагаемых и используя формулу биномиального разложения, получим

$$p_i = \frac{a\pi^2}{\lambda_i^2}\left(1 - \frac{\pi^2 r_в^2}{2\lambda_i^2}\right). \qquad (м)$$

В этой формуле учитывается *влияние инерции вращения*, из которой видно, что уточнение становится тем существеннее, чем меньше λ_i, т. е. чем больше частота колебаний.

Для того чтобы учесть *влияние деформаций поперечного сдвига*, возьмем уравнение (5.117) в полном виде, когда в нем учитываются все слагаемые. Подставляя первое приближенное значение (л) для p_i в последний член этого уравнения, видим, что он является малой величиной более высокого порядка, чем величина $\pi^2 r_в^2/\lambda_i^2$. Пренебрегая последним членом уравнения, найдем

$$p_i = \frac{a\pi^2}{\lambda_i^2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2 r_в^2}{\lambda_i^2}\left(1 + \frac{E}{k'G}\right)\right]. \qquad (5.118)$$

Приняв, что $G = 3E/8$ и что поперечное сечение стержня имеет прямоугольную форму, для которой $k' = 0{,}833$ *, получаем $(E/k')\,G = 3{,}2$. Таким образом, поправка на поперечный сдвиг в 3,2 раза больше поправки, учитывающей инерцию вращения.** Предположив, что длина волны λ_i i-й формы колебаний в 10 раз больше, чем высота поперечного сечения стержня, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\pi^2 r_в^2}{\lambda_i^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{1}{100} \approx 0{,}004,$$

откуда следует, что суммарная поправка по частоте p_i, обусловленная учетом инерции вращения и деформацией поперечного сдвига, составляет примерно 1,7 %.

5.13. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНО ОПЕРТОГО СТЕРЖНЯ

В этом параграфе рассмотрим динамические прогибы свободно опертого стержня при поперечных колебаниях, обусловленных распределенной нагрузкой $Q(x, t)$, сосредоточенной силой $P_1(t)$ или сосредоточенным моментом $M_1(t)$, приложенным в точке $x = x_1$ (рис. 5.19). Как уже указывалось выше (см. п. 5.9), для первых двух случаев нагружения не требуется получать общих выражений, описывающих неустановившееся поведение стержня. Из выражения

---

* Несколько иное значение для k' было получено Р. Олссоном. См. **Olsson R. G.** Zur Berechnung der Frequenz der Transversalschwingung des prismatischen Stabes. — Z. angew. Math. und Mech., 1935, B. 15, N. 4, 245 S.

** По решению уравнения (5.116) см. **Anderson R. A.** Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory. — Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1953, v. 20, No. 4, pp. 504—510.

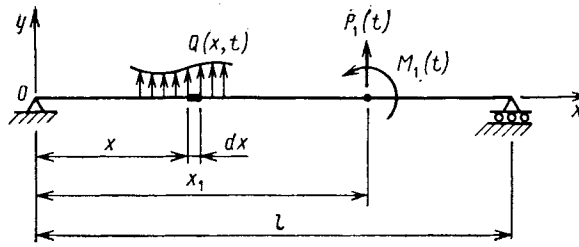


Рис. 5.19

(5.28) можно найти поперечное динамическое перемещение y, обусловленное действием распределенной поперечной нагрузки $Q(x, t)$:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{p_i} \int_0^l X_i \int_0^t q(x, t') \sin p_i (t - t')\, dt'\, dx, \qquad (5.119)$$

где $q(x, t) = Q(x, t)/m$.

Аналогичным образом из выражения (5.29) определяем перемещение при действии сосредоточенной силы $P_1(t)$:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i X_{i1}}{p_i} \int_0^t q_1(t') \sin p_i (t - t')\, dt', \qquad (5.120)$$

где X_{i1} — значение функции X_i в точке $x = x_1$; $q_1(t) = P_1(t)/m$.

Поскольку момент $M_1(t)$ не соответствует виду возникающих перемещений, последние нельзя определять непосредственно. С этой целью воспользуемся методом возможной работы так, как это было сделано выше (п. 5.3). При таком подходе функцию, описывающую линию прогибов, представляют в виде ряда

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j X_j, \qquad (а)$$

тогда возможное перемещение при i-й форме колебаний $\delta y_i = \delta\varphi_i X_i$. В этом случае возможная работа распределенных сил инерции на возможном перемещении при i-й форме колебаний

$$\delta W_{Ии} = \int_0^l (-\rho F\, dx\, \ddot{y})\, \delta y_i = -m\delta\varphi_i \int_0^l \ddot{y} X_i\, dx. \qquad (б)$$

Подставляя представление (а) в выражение (б) и учитывая соотношения ортогональности (5.88) и нормированности (5.97) при $i = j$, получим

$$\delta W_{Ии} = -m\ddot{\varphi}_i \delta\varphi_i \int_0^l X_i^2\, dx = -m\ddot{\varphi}_i \delta\varphi_i. \qquad (в)$$

Энергия деформации, обусловленная изгибом стержня:

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2} (y'')^2 \, dx = \frac{r}{2} \int_0^l (y'')^2 \, dx. \qquad (г)$$

Подставляя выражение (а) в выражение (г) и учитывая соотношения (5.89) и (5.97), найдем

$$U = \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^2 \int_0^l (X_j'')^2 \, dx = \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k_j^4 \varphi_j^2. \qquad (д)$$

Возможную работу упругих сил при $i = j$ можно определить следующим образом:

$$\delta W_{yi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i = -rk_i^4 \varphi_i \delta\varphi_i = -mp_i^2 \varphi_i \delta\varphi_i. \qquad (е)$$

Для того чтобы определить возможную работу, совершаемую сосредоточенным моментом, заметим, что этот момент совершает работу на угловом перемещении $\delta y_i'$, возникающем в точке его приложения. Тогда работу момента M_1 на возможном перемещении при i-й форме колебаний можно записать в виде

$$\delta W_{M_1 i} = M_1 \delta y_{i1}' = M_1 \delta\varphi_i X_{i1}', \qquad (ж)$$

где X_{i1}' — значение первой производной функции X_i по x, вычисленное в точке $x = x_1$.

Суммируя выражения (в), (е) и (ж) и приравнивая результат нулю, получим

$$m\ddot{\varphi}_i + mp_i^2 \varphi_i = M_1 X_{i1}'. \qquad (з)$$

Разделив левую и правую части равенства (з) на m, найдем

$$\ddot{\varphi}_i + p_i^2 \varphi_i = M_1 X_{i1}'/m, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \qquad (5.121)$$

Полученное соотношение представляет типичное уравнение движения в нормальных координатах, а стоящий в правой части член — нагрузку, соответствующую i-й нормальной форме колебаний.

Для i-й формы колебаний интеграл Дюамеля для рассматриваемой задачи

$$\varphi_i = \frac{X_{i1}'}{mp_i} \int_0^t M_1(t') \sin p_i (t - t') \, dt', \qquad (5.122)$$

а соответствующие полные поперечные динамические перемещения стержня имеют вид

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i X_{i1}}{mp_i} \int_0^t M_1(t') \sin p_i (t - t') \, dt'. \qquad (5.123)$$

Таким образом, с помощью подхода, основанного на рассмотрении возможной работы, и представления решения в виде ряда по нормальным формам колебаний мы получили выражение для перемещений при неустановившемся поведении, аналогичное выражению

для случая действия сосредоточенной силы [см. выражение (5.120)]. Однако в последнем выражении величины P_1 и X_{i1} следует при этом заменить соответственно на M_1 и X'_{i1}.

В частном случае свободно опертого стержня его круговые частоты и нормированные функции, описывающие формы колебаний (см. п. 5.10), имеют вид

$$p_i = k_i^2 a = \frac{i^2\pi^2 a}{l^2}; \quad X_i = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{i\pi x}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \tag{и}$$

Подстановкой нормальных функций в выражение (5.119) для перемещений при действии изменяющейся во времени распределенной силы получаем

$$y = \frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^t q(x,\ t')\sin p_i(t-t')\,dt'\,dx. \tag{5.124}$$

Аналогично из выражения (5.120) для случая действия изменяющейся во времени сосредоточенной силы имеем

$$y = \frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t q_1(t')\sin p_1(t-t')\,dt', \tag{5.125}$$

а выражение (5.123) дает решение для случая действия сосредоточенного момента

$$y = \frac{2\pi}{ml^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t M_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt'. \tag{5.126}$$

Выражения (5.124) и (5.125) аналогичны выражениям (5.69) и (5.70) для предварительно растянутой нити (см. п. 5.8), а выражение (5.126) применимо только к элементам конструкций, обладающим изгибной жесткостью.

В качестве примера рассмотрим случай, когда сила изменяется во времени по гармоническому закону $P_1 = P\sin\omega t$ и приложена в точке $x = x_1$. Тогда соответствующие динамические перемещения стержня в соответствии с выражением (5.125) имеют вид

$$y = \frac{2P}{ml}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t \sin\omega t'\sin p_i(t-t')\,dt' =$$

$$= \frac{2P}{ml}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{p_i}\sin p_i t\right)\beta_i =$$

$$= \frac{Pl^3}{m\pi^4 a^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\left(\sin\omega t - \frac{\omega l^2}{i\pi^2 a}\sin p_i t\right)\beta_i, \tag{5.127}$$

где коэффициент усиления

$$\beta_i = 1/(1 - \omega^2/p_i^2). \qquad (к)$$

Первое слагаемое выражения (5.127) характеризует установившееся поведение при вынужденных колебаниях стержня, второе описывает неустановившееся поведение при свободных колебаниях. При наличии демпфирования последние будут затухать, поэтому практический интерес будет представлять только установившееся поведение балки.

Если сила $P \sin \omega t$ изменяется во времени очень медленно, т. е. ω является очень малой величиной, то можно принять $\beta_i \approx 1$ и для поперечных динамических перемещений при установившемся поведении записать

$$y = \frac{2Pl^3}{m\pi^4 a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi x_1}{l} \sin \omega t$$

или, положив $ma^2 = EI$,

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi x_1}{l} \sin \omega t. \qquad (л)$$

Это выражение описывает статический прогиб стержня при действии нагрузки $P \sin \omega t$. В частном случае, когда сила P прикладывается в середине пролета стержня (т. е. в точке $x_1 = l/2$), имеем

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{l} - \ldots\right) \sin \omega t. \qquad (м)$$

Ряд (м) является быстросходящимся и хорошее приближение для прогибов получается при удержании только первого члена. Таким образом, определяем амплитуду y_0 прогибов в середине пролета балки:

$$(y_c)_{x=l/2} = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} = \frac{Pl^3}{48{,}7EI}.$$

Ошибка при таком приближении составляет около 1,5 %.

Обозначив через α отношение частоты изменения возмущающей силы к частоте основной формы свободных колебаний, из выражений (и) получаем

$$\alpha = \omega/p_1 = \omega l^2/(a\pi^2),$$

тогда прогибы при установившихся вынужденных колебаниях согласно выражению (5.127)

$$y = \frac{2Pl^3 \sin \omega t}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin (i\pi x/l) \sin (i\pi x_1/l)}{i^4 - \alpha^2}. \qquad (н)$$

Если изменяющаяся по закону синуса сила прикладывается в середине пролета, для прогибов имеем

$$y = \frac{2Pl^3 \sin \omega t}{EI\pi^4}\left[\frac{\sin (\pi x/l)}{1 - \alpha^2} - \frac{\sin (3\pi x/l)}{3^4 - \alpha^2} + \frac{\sin (5\pi x/l)}{5^4 - \alpha^2} - \ldots\right]. \qquad (о)$$

При малых значениях α высокую точность при определении прогибов стержня получим, удержав только первый член этого ряда, а сравнивая выражения (а) и (м), можно видеть, что отношение динамического прогиба к статическому

$$\beta_1 = \frac{1}{1-\alpha^2}. \qquad (\text{п})$$

Например, если частота изменения возмущающей силы равна одной четвертой частоты основной формы колебаний, динамический прогиб будет на 6 % превышать статический.

Из выражения (5.126) можно найти динамические прогибы, вызываемые изменяющимся по закону синуса изгибающим моментом $M_1 = M \sin \omega t$, приложенным на левом ($x = 0$) конце стержня. Следуя приведенным выше рассуждениям, найдем

$$y = \frac{2Ml^2 \sin \omega t}{EI\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^3} \sin \frac{i\pi x}{l}, \qquad (5.128)$$

что представляет собой динамические прогибы при установившихся колебаниях, обусловленных действием изгибающего момента.

Поскольку задачи о колебаниях стержней описываются линейными дифференциальными уравнениями, то здесь может применяться принцип наложения решений. Поэтому при действии на стержень нескольких изменяющихся во времени сил и изгибающих моментов результирующее перемещение можно получить, сложив перемещения, соответствующие каждому из указанных силовых факторов.

Случай непрерывно распределенных, изменяющихся по закону синуса возмущающих сил может быть также рассмотрен аналогичным образом с помощью выражения (5.124). Предположим, например, что стержень нагружен равномерно распределенной поперечной силой с интенсивностью $Q(t) = w \sin \omega t$. Тогда из выражения (5.124) получаем

$$y = \frac{4wl^4 \sin \omega t}{EI\pi^5} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^5} \sin \frac{i\pi x}{l}. \qquad (5.129)$$

Если частота изменения нагрузки очень мала по сравнению с частотой основной формы поперечных колебаний стержня, можно воспользоваться следующим приближенным выражением:

$$y = \frac{4wl^4}{EI\pi^5}\left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^5} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \cdots\right) \sin \omega t. \qquad (\text{р})$$

Этот быстросходящийся ряд описывает статический прогиб стержня при действии равномерно распределенной нагрузки $w \sin \omega t$. Положив $x = l/2$, найдем выражение для динамического прогиба в середине пролета стержня

$$(y)_{x=l/2} = \frac{4wl^4}{EI\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots\right) \sin \omega t. \qquad (\text{с})$$

Если в этом ряду удержать только первый член, прогиб в середине пролета будет определяться с ошибкой 0,25 %.

ЗАДАЧИ

5.13.1. Свободно опертый стержень, нагруженный в середине пролета поперечной силой P, прогибается на величину 0,01 м в точке приложения силы. Определить амплитуду вынужденных колебаний, под действием силы $P \sin \omega t$, если частота ω равна половине основной частоты колебаний стержня.

$$\textit{Ответ: } (y_C)_{x=l} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1}{1-1/4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3^4-1/4} + \frac{1}{5^4-1/4} + \cdots\right) \approx 0{,}034 \text{ м}.$$

5.13.2. Стержень, рассмотренный в предыдущей задаче, нагружается двумя силами $P \sin \omega t$, точки приложения которых отстоят на треть длины стержня от его концов и друг от друга. Определить амплитуду вынужденных колебаний в середине пролета стержня, если частота ω здесь такая же, как и в предыдущей задаче

$$\textit{Ответ: } (y_C)_{x=l/2} = \frac{4Pl^3}{\pi^4 EI}\left[\frac{\sin(\pi/3)}{1-1/4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(5\pi/3)}{5^4-1/4} - \frac{\sin(7\pi/3)}{7^4-1/4} + \cdots\right] \approx 0{,}057 \text{ м}.$$

5.13.3. Определить амплитуду вынужденных колебаний в середине пролета свободно опертого стержня, на левой половине длины которого приложена распределенная изменяющаяся во времени нагрузка с интенсивностью $w \sin \omega t$.

$$\textit{Ответ: } (y_C)_{x=l/2} = \frac{2wl^4}{\pi^5 EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i\,(i^4-\alpha^2)}.$$

5.13.4. Определить динамические прогибы свободно опертого стержня, возникающие при внезапном приложении в середине его пролета силы P.

Ответ:

$$y = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI}\sum_{i=1,\,3,\,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(1-\cos p_i t\right).$$

5.13.5. Определить динамические перемещения при установившихся поперечных колебаниях свободно опертого стержня, нагруженного изменяющейся по длине по закону синуса нагрузкой $Q(x, t) = w \sin \dfrac{\pi x}{l} \sin \omega t$.

$$\textit{Ответ: } y = \frac{wl^4\beta_1 \sin\omega t}{\pi^4 EI} \times \sin\frac{\pi x}{l}.$$

5.13.6. С помощью подхода, основанного на рассмотрении возможной работы, получить общее выражение для динамических прогибов стержня при действии распределенного изгибающего момента интенсивностью $M(x, t)$. Затем найти решение для случая свободно опертого стержня.

$$\textit{Ответ: } y = \frac{2\pi}{ml^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^l\cos\frac{i\pi x}{l}\int_0^t M(x, t')\times$$

$$\times \sin p_i(t-t')\,dt'dx.$$

5.14. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ КОНЦЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Полученное в предыдущем параграфе выражение (5.119) относилось к общему виду распределенной возмущающей нагрузки, зависящей как от продольной координаты x, так и от времени t. Однако, если функцию нагрузки $Q(x, t)$ можно представить в виде произведения

$$Q(x, t) = f(x)\, Q(t), \qquad \text{(а)}$$

то выражение (5.119) можно записать в более простой форме

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{p_i} \int_0^t f(x)\ X_i\ dx \int_0^t q(t') \sin p_i (t - t')\, dt', \qquad (5.130)$$

где $q(t) = Q(t)/m$. Подобного типа процедура уже обсуждалась выше, в п. 5.11, и ее выполнение представляет трудности для стержней, у которых концевые условия отличаются от свободного опирания.

С другой стороны, если нагрузки представляют сосредоточенные силы или изгибающие моменты, для определения динамических перемещений колеблющихся стержней можно использовать выражения (5.120) и (5.123) независимо от вида закрепления концов стержня. В качестве примера рассмотрим случай стержней с жестко защемленными концами и предположим, что ее колебания вызываются изменяющейся во времени силой $P_1(t) = P \sin \omega t$, приложенной на расстоянии $x = x_1$ от левого конца стержня (рис. 5.20). В этом случае из выражения (5.120) следует

$$y = \frac{2P}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i X_{i1}}{p_i} \int_0^t \sin \omega t'\ \sin p_i (t - t')\, dt' =$$

$$= \frac{2P}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i X_{i1}}{p_i^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p_i} \sin p_i t \right) \beta_i. \qquad (5.131)$$

Это выражение является общим и применимо для произвольным образом закрепленных стержней, поэтому, если необходимо его применить к рассматриваемому случаю, надо подставить в него частоты p_i и нормальные функции X_i для стержней с жестко защемленными концами.

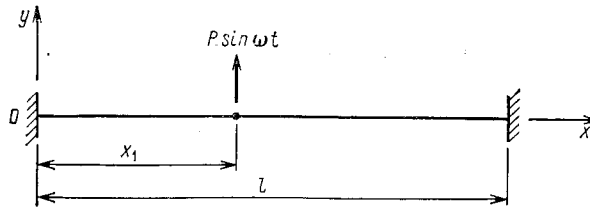


Рис. 5.20

Предположим, что изменяющаяся во времени сила (см. рис. 5.20) прикладывается в середине пролета стержня и что требуется вычислить динамический прогиб в точке приложения нагрузки при установившихся колебаниях. Тогда, учитывая первое слагаемое в выражении (5.131), имеем

$$(y)_{x=l/2} = \frac{2P \sin \omega t}{ml} \sum_i \frac{\beta_i}{p_i^2} (X_i)^2_{x=l/2}, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \infty. \qquad (б)$$

Подставляя в выражение (б) величины $p_i^2 = a^2 k_i^4$ и $ma^2 = EI$, получим

$$(y)_{x=l/2} = \frac{2Pl^3 \sin \omega t}{EI} \sum_i \frac{\beta_i}{(k_i l)^4} (X_i)^2_{x=l/2}, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \infty. \qquad (в)$$

В примере, рассмотренном в п. 5.11, получены числовые значения членов записанного выше ряда. С учетом этого имеем

$$(y)_{x=l/2} = \frac{2Pl^3 \sin \omega t}{EI} (5038\beta_1 + 135\beta_3 + 22\beta_5 + \ldots) 10^{-6}. \qquad (г)$$

ЗАДАЧИ

5.14.1. Определить динамические прогибы при установившихся вынужденных колебаниях консольного стержня, к незакрепленному концу которого приложена поперечная сила $P \sin \omega t$.

Ответ: $y = \frac{Pl^3 \sin \omega t}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i X_i (X_i)_{x=l}}{(k_i l)^4}$; $\beta_i = \frac{1}{1 - \omega^2/p_i^2}$.

Здесь X_i — нормальные функции для стержня с одним жестко защемленным концом и незакрепленным другим; $k_i l$ — круговые частоты свободных форм колебаний рассматриваемого стержня.

5.14.2. Определить динамические прогибы на незащемленном конце консольного стержня, рассматриваемого в предыдущей задаче.

Ответ: $(y)_{x=l} =$

$$= \frac{Pl^3 \sin \omega t}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i (X_i)^2_{x=l}}{(k_i l)^4}.$$

Из таблиц находим

$$(X_i)_{x=l} = 2(-1)^{i+1}.$$

Тогда, взяв значения $k_i l$ из п. 5.11, получим

$$(y)_{x=l} = \frac{4Pl^3}{EI} \left[\frac{\beta_1}{1{,}875^4} + \frac{\beta_2}{4{,}694^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_3}{7{,}855^4} + \cdots \right] \sin \omega t = \frac{4Pl^3}{EI} (0{,}08091\beta_1 +$$

$$+ 0{,}00206\beta_2 + 0{,}00026\beta_3 + \ldots) \sin \omega t.$$

5.14.3. Исследовать установившиеся вынужденные колебания стержня, один конец которого жестко защемлен, а другой — свободно оперт, если изменяющаяся во времени сила $P \sin \omega t$ приложена в середине пролета стержня.

5.14.4. Определить динамические прогибы в середине пролета стержня, рассмотренного в предыдущей задаче, если заданы следующие числовые величины:

$$(X_1)_{x=l/2} = 1{,}4449; \quad (X_2)_{x=l/2} = 0{,}5704; \quad (X_3)_{x=l/2} = -1{,}3005;$$

$$(X_4)_{x=l/2} = -0{,}5399; \quad (X_5)_{x=l/2} = 1{,}3068.$$

Необходимые для заданного в этой задаче стержня значения $k_i l$ приведены в п. 5. 11.

5.15. СТЕРЖНИ С ПЕРЕМЕЩАЮЩИМИСЯ ОПОРАМИ

В п. 5.6 рассматривались продольные колебания призматического стержня, обусловленные либо переносом основания как абсолютно жесткого тела, либо независимыми перемещениями опор в продольном направлении. Для стержня следует рассматривать два типа перемещений как абсолютно жесткого тела. В качестве таких перемещений обычно берут чистый параллельный перенос в направлении оси y и малые угловые перемещения вокруг оси z, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскости xy (см. рис. 5.13). Учитывая указанные два типа перемещений, перемещение в направлении оси y произвольной точки стержня можно представить в следующем виде:

$$y_{\text{осн}} = g_1(t) + x g_2(t), \tag{а}$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — соответственно перенос и поворот как абсолютно жесткого тела. В соответствии с выражением (5.47) относительное перемещение колеблющегося стержня при указанного вида перемещениях основания как абсолютно жесткого тела можно представить в форме

$$y^* = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{p_i} \left[\int_0^l X_i dx \int_0^t \ddot{g}_1(t') \sin p_i (t - t')\, dt' + \right.$$

$$\left. + \int_0^l x X_i dx \int_0^t \ddot{g}_2(t') \sin p_i (t - t')\, dt' \right], \tag{5.132}$$

где X_i — функции, описывающие форму прогибов стержня при колебаниях и нормированные в соответствии с соотношением (5.97). Выражение (5.132) описывает динамические перемещения произвольной точки стержня относительно перемещений его как абсолютно жесткого тела. Результирующее перемещение представляем в виде суммы перемещений стержня при колебаниях и перемещений основания .

$$y = y_{\text{осн}} + y^* = g_1(t) + x g_2(t) + y^*. \tag{5.133}$$

Как видно из выражения (5.132), оно содержит сравнительно несложные для вычисления интегралы по длине стержня, не связанные с интегрированием по времени.

Более сложный случай относится к независимым перемещениям каждой из опор. На рис. 5.21, *а* и *б* показано влияние единичных

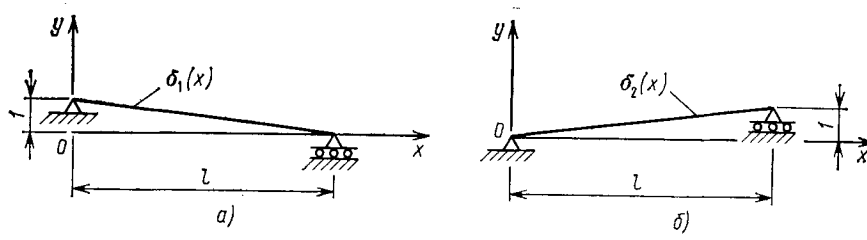


Рис. 5.21

перемещений в направлении оси y опор свободно опертого стержня. Для стержня этого типа функции перемещения

$$\delta_1(x) = 1 - x/l; \quad \delta_2(x) = x/l \tag{б}$$

и нормальные функции X_i совпадают с аналогичными функциями для предварительно растянутой нити, рассмотренной в п. 5.8. Тогда выражение для относительных динамических перемещений стержня можно записать [см. выражение (5.72)] в виде

$$y^* = -\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\int_0^l \delta_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx \times \right.$$
$$\times \int_0^t g_1(t')\sin p_i(t-t')\,dt' + \int_0^l \delta_2(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx \times$$
$$\left. \times \int_0^t \ddot{g}_2(t')\sin p_i(t-t')\,dt'\right], \tag{5.134}$$

а суммарное перемещение при этом [см. выражение (5.73)]

$$y = y_{ст} + y^* = \delta_1(x)\,g_1(t) + \delta_2(x)\,g_2(t) + y^*, \tag{5.135}$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — зависящие от времени перемещения, заданные соответственно для левого и правого концов стержня.

Функции перемещения (б) для свободно опертого стержня являются примером выражений, которые в дальнейшем будем называть *функциями влияния перемещений*. Эти функции описывают перемещение рассматриваемой точки, при единичном перемещении опоры. На рис. 5.22, *а—г* для стержня с жестко защемленными концами показаны четыре типа таких функций вида

$$\delta_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}; \quad \delta_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2};$$
$$\delta_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}; \quad \delta_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \tag{в}$$

При умножении функций влияния на заданные перемещения опор получаем соответствующие перемещения стержня как деформируемого тела

$$y_{ст} = \delta_1(x)\,g_1(t) + \delta_2(x)\,g_2(t) +$$
$$+ \delta_3(x)\,g_3(t) + \delta_4(x)\,g_4(t). \tag{г}$$

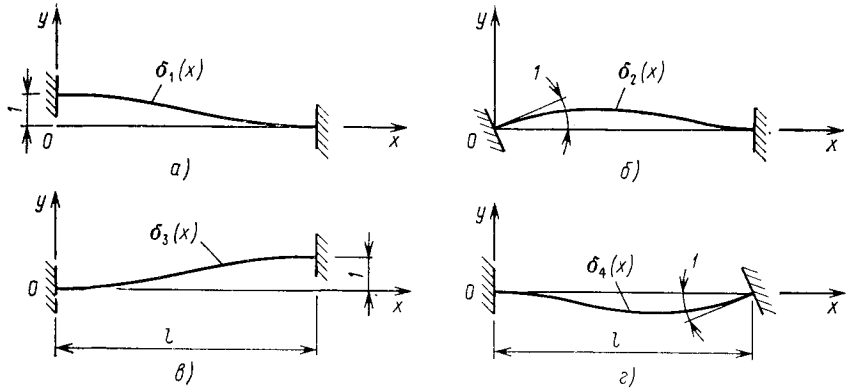


Рис. 5.22

Через $g_1(t)$ и $g_2(t)$ здесь обозначены соответственно параллельный перенос и поворот для левого конца, а через $g_3(t)$ и $g_4(t)$ — для правого.

На рис. 5.23, *а* и *б* представлены перемещения консольного стержня, обусловленные единичными независимыми перемещениями левой опоры, в которой защемлен стержень и которая совпадает с началом координат. В этом случае функции влияния перемещения опор имеют вид

$$\delta_1(x) = 1; \quad \delta_2(x) = x \tag{д}$$

и совпадают с формами движения как абсолютно жесткого тела, рассмотренными выше [см. выражение (а)]. С другой стороны, для стержня, жестко защемленного на левом конце и свободно опертого на правом (рис. 5.24, *а* и *б*), функции перемещения

$$\delta_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}; \quad \delta_2(x) = x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2};$$

$$\delta_3(x) = \frac{3x^3}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}. \tag{е}$$

При умножении этих функций на соответствующие перемещения опор получаем следующее выражение, описывающее движение указанного консольного стержня как податливого тела:

$$y_{ст} = \delta_1(x)\, g_1(t) + \delta_2(x)\, g_2(t) + \delta_3(x)\, g_3(t). \tag{ж}$$

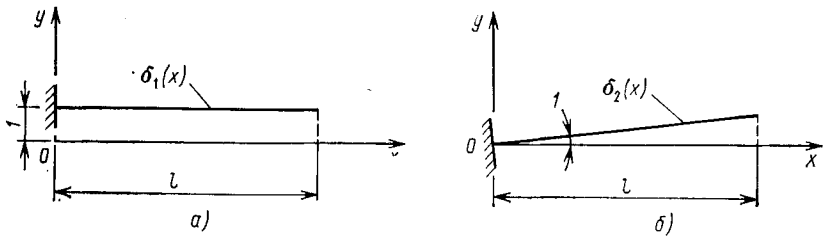


Рис. 5.23

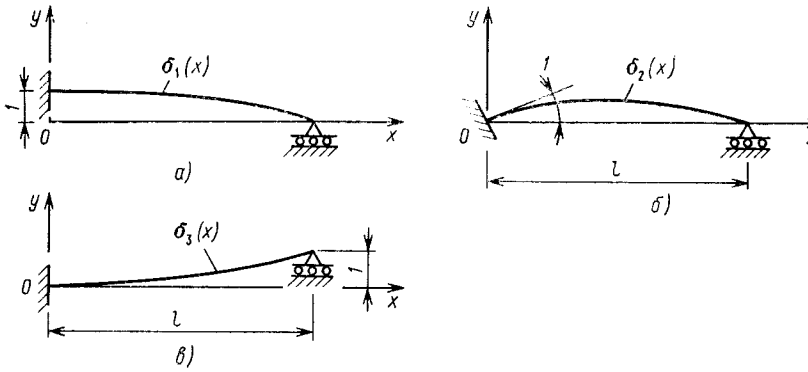


Рис. 5.24

Таким образом, для любого заданного вида независимых перемещений $g\,(t)$ опор можно определить соответствующую функцию $\delta\,(x)$ влияния перемещения и получить в результате выражение для динамических прогибов

$$y^* = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{p_i} \int_0^l \delta\,(x)\, X_i dx \int_0^t \ddot{g}\,(t') \sin p_i\,(t-t')\, dt'. \qquad (5.136)$$

Суммарное перемещение стержня

$$y = y_{ст} + y^* = \delta\,(x)\, g\,(t) + y^*. \qquad (5.137)$$

Если перемещение опоры определяется несколькими видами движений, следует вычислить динамические перемещения стержня, соответствующие каждому виду движения опор, и результаты сложить, как было показано на примере свободно опертого стержня [см. выражения (5.134) и (5.135)].

Пример. Предположим, что имеется стержень, свободно опертый на левом конце и защемленный на правом. Записать выражение для динамических прогибов стержня, вызванных заданным, параллельным оси y, перемещением $g\,(t)$ левой опоры стержня.

Решение. В рассматриваемом случае нормальные функции имеют вид

$$X_i = \operatorname{sh} k_i l \sin k_i x - \sin k_i l \operatorname{sh} k_i x, \qquad (з)$$

где значения k_i находим из решения трансцендентного частотного уравнения (см. п. 5.11)

$$\operatorname{tg} k_i l = \operatorname{th} k_i l. \qquad (и)$$

Нормируя функции (з) в соответствии с выражением (5.97), получим

$$\int_0^l X_i^2 dx = \frac{l}{2}\,(\operatorname{sh}^2 k_i l - \sin^2 k_i l) = \alpha_i. \qquad (к)$$

После нормирования функции X_i примут вид

$$X_i = (\operatorname{sh} k_i l \sin k_i x - \sin k_i l \operatorname{sh} k_i x)/\sqrt{\alpha_i}. \qquad (л)$$

Для случая перемещения левой опоры в направлении оси функция влияния перемещения имеет вид

$$\delta(x) = 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}. \qquad (м)$$

Далее, из выражения (5.136) определяем относительные динамические прогибы

$$y^* = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{p_i} \int_0^l \left(1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}\right) \times$$

$$\times X_i dx \int_0^t \ddot{g}(t') \sin p_i (t - t')\, dt', \qquad (н)$$

где X_i — нормальные функции (л). Общее решение для данного случая [см. выражение (5.137)] можно представить в следующей форме:

$$y = \left(1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}\right) g(t) + y^*. \qquad (о)$$

ЗАДАЧИ

5.15.1. Определить динамические прогибы свободно опертого стержня, обусловленные перемещениями его левой опоры, изменяющимися во времени по гармоническому закону $g_1(t) = y_1 \sin \omega t$ (см. рис. 5.21, *а*).

Ответ:

$$y - \left[1 - \frac{x}{l} + \frac{2l^4\omega^2}{\pi^5 a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i^5} \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{i\pi x}{l}\right] y_1 \sin \omega t.$$

5.15.2. Предположим, что консольный стержень, показанный на рис. 5.23, *б*, поворачивается вокруг опоры так, что угловые перемещения описываются функцией $g_2(t) = \theta_2 (t/t_2)^2$, где θ_2 — малый угол. Получить общее выражение для динамических перемещений стержня через функции X_i и частоты p_i.

Ответ:

$$y = \frac{\theta_2}{t_2^2}\left[\frac{x}{l} t^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2X_i}{p_i^2} \int_0^l x X_i dx\, (1 - \cos p_i t)\right].$$

5.15.3. Получить общее выражение для динамических прогибов стержня с жестко защемленными концами, обусловленных угловыми перемещениями правой опоры, заданными в виде $g_4 = \theta_4 \sin \omega t$ (см. рис. 5.22, *е*), если угол θ_4 мал.

Ответ:

$$y = \left[-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega^2 X_i}{(p_i^2 - \omega^2)} \int_0^l \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times X_i dx\right] \theta_4 \sin \omega t.$$

5.15.4. Получить общее выражение для динамических прогибов стержня с жестко защемленным левым концом и свободно опертым правым, обусловленные перемещениями правой опоры, заданными в виде $g_3(t) = y_3 (t/t_3)^3$ (рис. 5.24, *в*).

Ответ: $$y = \frac{y_3}{t_3^3}\left[\left(\frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}\right)t^3 - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{6X_i}{p_i^2}\int_0^l\left(\frac{3x^2}{2l^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{x^3}{2l^3}\right)X_i dx\left(t - \frac{1}{p_i}\sin p_i t\right)\right].$$

5.16. СТЕРЖЕНЬ ПРИ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗКАХ

Хорошо известно, что нагрузка, движущаяся по мосту или балке, вызывает в последних бо́льшие прогибы и напряжения, нежели при статическом приложении той же самой нагрузки. Учет влияния движущихся нагрузок на конструкции мостов имеет очень важное практическое значение, поэтому многие инженеры трудились над решением данной задачи.* В этом параграфе будет обсуждаться случай движущейся нагрузки, которая воздействует на балку либо как постоянная, либо как изменяющаяся во времени сила. Будет учтена распределенная масса стержня, но масса самой нагрузки рассматриваться не будет. Системы, в которых учитывается влияние массы нагрузки (как подпружиненной, так и неподпружиненной), описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, поскольку положение нагрузки меняется непрерывным образом. Исследование такой системы становится довольно сложным делом и выходит за рамки этой книги.

Рассмотрим** сначала движущуюся нагрузку P, направленную вниз и перемещающуюся по свободно опертому стержню слева направо с постоянной скоростью v, как показано на рис. 5.25, *а*. Предположив, что в момент времени $t = 0$ нагрузка находилась над левой опорой, видим, что в произвольный момент времени t расстояние между левой опорой и нагрузкой будет равно vt. Возмож-

---

* Задача о невесомой балке, по которой перемещалась неподпружиненная масса, впервые была рассмотрена Р. Уиллисом (см. **Willis R.** Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures. — London: William Clowes and Sones, 1849. 435 p.). Решение этой задачи для массы, движущейся с постоянной скоростью, было получено с помощью рядов Г. Стоксом (см. **Stokes G. G.** Discussions of a differential equation related to the breaking of railway bridges. — Trans. Cambridge Phil. Soc., 1867, v. 8, N. 5, pp. 707—735). Им же было дано решение для стержня с постоянной погонной массой, нагруженного силой, движущейся с постоянной скоростью.

** **Крылов А. Н.** Собрание трудов. Т. 5. Математика и механика. М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1937, с. 513—537; перевод на русский язык работы «О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней» опубликован в кн. **Крылов А. Н.** Избранные труды. Л.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 288—314. См. также **Тимошенко С. П.** Прочность и колебания конструкций. М.: Физматгиз, 1975, с. 139—179; **Inglis C. E.** A mathematical treatise on vibrations in railway bridges. Cambridge: University Press, 1934.

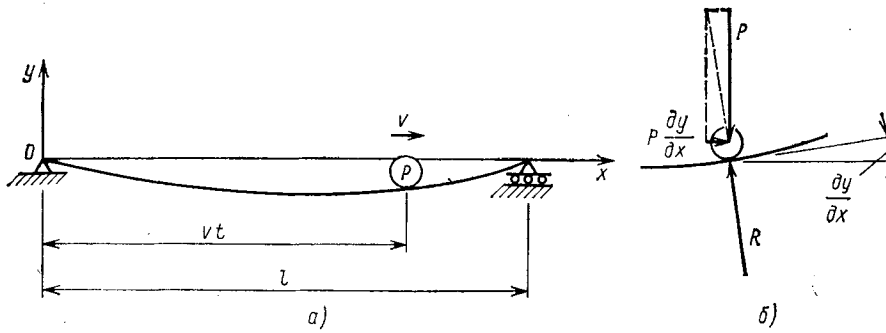


Рис. 5.25

ная работа, совершаемая вертикальной силой на возможном перемещении $\delta y_i = \delta\varphi_i X_i$ при i-й собственной форме колебаний стержня,

$$\delta W_{pi} = -P\delta\varphi_i X_{i1} = -P\delta\varphi_i \sin\frac{i\pi vt}{l}. \qquad \text{(а)}$$

Используя это выражение для возможной работы движущейся нагрузки, а также выражение, полученное в п. 5.13, найдем искомое выражение для динамических прогибов

$$y = -\frac{2Pl^3}{m\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)}{i^2(i^2\pi^2a^2 - v^2l^2)}\sin\frac{i\pi vt}{l} +$$

$$+\frac{2Pl^4v}{m\pi^3a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)}{i^3(i^2\pi^2a^2 - v^2l^2)}\sin\frac{i^2\pi^2at}{l^2}. \qquad (5.138)$$

Первый ряд, входящий в это решение, описывает вынужденные колебания, второй ряд относится к свободным колебаниям стержня.

Если скорость v движения силы очень мала и в приведенном выше решении можно положить $v = 0$ и $vt = x_1$, тогда получим

$$y = -\frac{2Pl^3}{m\pi^4a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}. \qquad \text{(б)}$$

Это выражение представляет статический прогиб стержня при действии силы P, приложенной на расстоянии x_1 от левой опоры. Используя обозначение

$$\alpha^2 = \frac{v^2}{ap_1} = \frac{v^2l^2}{a^2\pi^2}. \qquad \text{(в)}$$

и равенство $ma^2 = EI$, можно часть решения (5.138), относящуюся к вынужденным колебаниям, представить в следующей форме:

$$y = -\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)\sin(i\pi vt/l)}{i^2(i^2 - \alpha^2)}. \qquad \text{(г)}$$

Интересно отметить, что это выражение для прогиба совпадает с выражением для прогиба стержня при статическом приложении поперечной нагрузки P_3 на расстоянии $x_1 = vt$ от левой опоры и продольной сжимающей силы S вида

$$\frac{S}{S_{кр}} = \frac{Sl^2}{EI\pi^2} = \alpha^2, \qquad (д)$$

где $S_{кр}$ — эйлерова критическая нагрузка для продольно сжатого стержня. Из соотношений (в) и (д) имеем

$$\frac{Sl^2}{EI\pi^2} = \frac{v^2l^2}{a^2\pi^2}$$

или

$$S = mv^2. \qquad (е)$$

С другой стороны, влияние этой силы на статические прогибы стержня, на который действует нагрузка P, эквивалентно влиянию скорости движущейся силы P на динамические прогибы (г) при вынужденных колебаниях стержня.

Если увеличивать скорость v, возникает ситуация, при которой один из знаменателей в выражении (5.138) станет равным нулю. Пусть, например, имеем

$$v^2l^2 = a^2\pi^2. \qquad (ж)$$

В этом случае период основной формы колебаний стержня $\tau_1 = 2\pi/p_1 = 2l^2/(a\pi)$ становится равным $2l/v$ и в 2 раза превышает время, которое требуется силе P для прохождения длины стержня. При выполнении условия (ж) знаменатели первых членов обоих рядов, составляющих выражение (5.138), становятся равными нулю, при этом сумма этих двух членов ряда

$$y = -\frac{2Pl^3}{m\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)\frac{\sin(\pi vt/l) - (lv/\pi a)\sin(\pi^2 at/l^2)}{\pi^2a^2 - v^2l^2}. \qquad (з)$$

Это выражение представляет неопределенность вида 0/0, для которой имеем

$$\lim_{v\to a\pi/l} y = \frac{Pt}{m\pi v}\cos\frac{\pi vt}{l}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{Pl}{m\pi^2v^2}\sin\frac{\pi v_t}{l}\cos\frac{\pi x}{l}. \qquad (и)$$

Выражение (и) имеет максимальное значение при $t = l/v$, что дает

$$y_{max} = -\frac{Pl}{m\pi^2v^2}\left(\sin\frac{\pi vt}{l} - \frac{\pi vt}{l}\cos\frac{\pi vt}{l}\right)_{t=l/v}\sin\frac{\pi x}{l} =$$

$$= -\frac{Pl^3}{EI\pi^3}\sin\frac{\pi x}{l}. \qquad (к)$$

Поскольку выражение (и) дает достаточно хорошее приближение для динамических прогибов, точное выражение для которых (5.138) получено выше, видим, что максимальное значение динамических прогибов при выполнении условия (ж) резонанса примерно на 50 % больше, чем максимальный статический прогиб:

$$y_{ст} = -\frac{Pl^3}{48EI}. \qquad (л)$$

Интересно отметить, что свое максимальное значение динамический прогиб приобретает в момент, когда сила P достигает противоположного конца балки. В этот момент прогиб в точке приложения силы P равен нулю, поэтому работа, совершаемая этой силой при движении по стержню, очевидно, также равна нулю. Для того чтобы выяснить источник энергии, накопленной в колеблющемся стержне при движении по ней силы P, предположим, что трение скольжения отсутствует и что стержень при изгибе статической силой P дает составляющую R, направленную по нормали к упругой кривой (рис. 5.25, *б*). Из условия равновесия следует, что при этом должна возникать горизонтальная сила $P\,(\partial y/\partial x)$. Работа, совершаемая этой силой при ее передвижении по стержню,

$$W = \int_0^{l/8} P \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=vt} v\,dt. \qquad \text{(м)}$$

Подставляя выражение (и) для прогиба y в равенство (м), получим

$$W = -\frac{P^2}{m\pi v^2} \int_0^{l/v} \left(\sin\frac{\pi vt}{l} - \frac{\pi vt}{l}\cos\frac{\pi vt}{l}\right)\cos\frac{\pi vt}{l}\,v\,dt = \frac{P^2 l}{m\pi^2 v^2}\left(\frac{\pi^2}{4}\right).$$

Используя соотношение (ж) и равенство $ma^2 = EI$, найдем

$$W = \frac{P^2 l^3}{4EI\pi^2}. \qquad \text{(н)}$$

Это значение работы внешней силы очень близко по величине потенциальной энергии изгиба стержня в момент времени $t = l/v$. Потенциальная энергия изогнутого стержня при действии силы P, приложенной в середине пролета, $U = P^2 l^2/(96EI)$, тогда $W/U = 2{,}43$. Полученное отношение очень близко по значению к квадрату отношения максимальных динамических и статических прогибов, т. е. $(48/\pi^3)^2 = 2{,}38$. Имеющееся расхождение следует отнести за счет высших форм колебаний.*

Время, необходимое для прохождения длины моста, обычно велико по сравнению с периодом основной формы колебаний, поэтому величина в выражении (в) мала. Тогда, удержав только по одному первому члену в каждом ряду, входящем в выражение (5.138), и приняв за наиболее неблагоприятный случай тот, при котором амплитуды вынужденных и свободных колебаний суммируются, получим следующее выражение для максимального динамического прогиба:

$$y_{\max} = -\frac{2Pl^3}{m\pi^2}\left(\frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2} + \frac{vl}{a\pi}\,\frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2}\right) =$$

$$= -\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha^2} = -\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\,\frac{1}{1-\alpha}. \qquad (5.139)$$

---

* Для более глубокого ознакомления см. ст. **Lee E. H.** On a «paradox» in beam vibration theory. — Quarterly of Appl. Math., 1952, v. 10, N 3, p. 290—292.

Полученное значение является несколько завышенным, так как при его вычислении полностью исключалось из рассмотрения влияние демпфирования. Используя принцип наложения, можно без труда получить решение для систем с несколькими движущимися сосредоточенными силами и для случая движущихся распределенных сил.

Рассмотрим случай, когда по стержню с постоянной скоростью v движется изменяющаяся во времени сила * $P_1(t) = -P\cos\omega t$. Подобное условие может возникнуть, например, тогда, когда по мосту перемещается неуравновешенное колесо локомотива. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ сила имеет максимальное значение и направлена вниз. Рассуждая так же, как и выше, найдем, что возможная работа, совершаемая подвижной изменяющейся во времени движущейся силой на перемещении $\delta y_i = \delta\varphi_i X_i$:

$$\delta W_{Pi} = -P\cos\omega t\left(\delta\varphi_i \sin\frac{i\pi vt}{l}\right). \qquad (o)$$

Используя это выражение для возможной работы, совершаемой движущейся нагрузкой, и рассуждая, как и выше, получим выражение для прогиба

$$y = -\frac{Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{l}\left[\frac{\sin\left((i\pi v/l)+\omega\right)t}{i^4-(\psi+i\alpha)^2}+\frac{\sin\left(i\pi v/l-\omega\right)t}{i^4-(\psi-i\alpha)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{i}\left(\frac{\sin\left(i^2\pi^2at/l^2\right)}{-i^2\alpha^2+(i^2-\psi)^2}+\frac{\sin\left(i^2\pi^2at/l^2\right)}{-i^2\alpha^2+(i^2+\psi)^2}\right)\right], \qquad (5.140)$$

где $\alpha = vl/(\pi a)$ — отношение периода $\tau_1 = 2l^2/(\pi a)$ основной формы колебаний стержня к удвоенному времени $t = l/v$, за которое сила пробегает расстояние, равное длине стержня; $\psi = \tau_1/T$ — отношение периода основной формы колебаний стержня к периоду $T = 2\pi/\omega$ изменения силы.

Когда период T изменения силы равен периоду τ_1 основной формы колебаний стержня, имеем $\psi = 1$ и, следовательно, возникает условие резонанса. Амплитуда колебаний при движении периодически изменяющейся во времени силы будет постоянно возрастать и достигнет своего максимального значения в момент времени $t = l/v$. Для этого момента времени, удерживая только первые члены (при $i = 1$) в рядах, стоящих в правой части выражения (5.140) и дающих наиболее существенный вклад в прогиб y, можно получить

$$y = \frac{-2Pl^3}{\alpha EI\pi^4}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\omega t. \qquad (п)$$

---

* См. **Timoshenko S. P.** The collected papers. N.-Y.: McGraw-Hill Publishing Co. 1953, pp. 329—333 (перевод этой статьи под названием «О поперечных колебаниях балок постоянного поперечного сечения» см. в кн. **Тимошенко С. П.** Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наукова думка, 1975, т. 56—57).

Тогда максимальный динамический прогиб можно найти по формуле

$$y_{\max} = -\frac{2Pl^3}{\alpha EI\pi^4} = -\frac{2l}{v\tau_1}\left(\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\right). \qquad (5.141)$$

Благодаря тому, что в действительности интервал времени $t = l/v$ велик по сравнению с периодом τ_1 собственных колебаний, максимальный динамический прогиб, обусловленный периодически изменяющейся силой, будет во много раз большим, чем прогиб $2Pl^3/(EI\pi^4)$, создаваемый той же силой, приложенной статически в середине пролета стержня.

5.17. ВЛИЯНИЕ ОСЕВОЙ СИЛЫ НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

Если на колеблющийся стержень действует растягивающая сила S (рис. 5.26), дифференциальное уравнение для кривой прогибов при действии статической поперечной нагрузки имеет вид

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M + Sy, \qquad (а)$$

где M — изгибающий момент, создаваемый поперечной распределенной нагрузкой с интенсивностью w (см. рис. 5.26). Дважды продифференцировав левую и правую части этого уравнения по x, получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = w + S\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (б)$$

Для того чтобы получить уравнение для поперечных колебаний, подставим вместо w величину силы инерции, отнесенной к единице длины,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\right) - S\frac{\partial^2y}{\partial x^2} = -\rho F\frac{\partial^2y}{\partial t^2}. \qquad (в)$$

В случае стержня постоянного поперечного сечения имеем

$$EI\frac{\partial^4y}{\partial x^4} - S\frac{\partial^2y}{\partial x^2} = -\rho F\frac{\partial^2y}{\partial t^2}. \qquad (5.142)$$

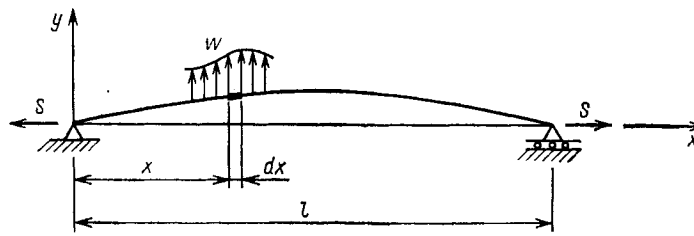


Рис. 5.26

Предполагая, что стержень колеблется по одной из собственных форм, найдем решение уравнения (5.142) в форме

$$y = X\,(A\cos pt + B\sin pt), \qquad \text{(г)}$$

где X — нормальная функция. Подставляя в уравнение (5.142) представление (г), получим

$$EI\frac{d^4X}{dx^4} - S\frac{d^2X}{dx^2} = \rho F p^2 X. \qquad \text{(д)}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным концевым условиям, должно включать в себя соответствующие нормальные функции. Простейший случай имеет место при свободном опирании стержня. Эти условия будут удовлетворены, если взять

$$X_i = \sin(i\pi x/l),\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty. \qquad \text{(е)}$$

Подставляя это выражение в уравнение (д), найдем соответствующую круговую частоту колебаний

$$p_i = \frac{i^2\pi^2 a}{l^2}\sqrt{1 + \frac{Sl^2}{iEI\pi^2}}, \qquad (5.143)$$

где, как и прежде, имеем $a = \sqrt{EI/(\rho F)}$. Эта частота больше той [см. выражение (5.102)], которая была получена при рассмотрении колебаний без учета осевой силы S.

Если имеется очень податливый на изгиб стержень (допустим, трос), второе слагаемое, стоящее под корнем в выражении (5.143), становится намного большим единицы, и если при этом i^2 не слишком велико, можно принять

$$p_i \approx \frac{i^2\pi^2 a}{l^2}\sqrt{\frac{Sl^2}{iEI\pi^2}} = \frac{i\pi}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho F}}, \qquad \text{(ж)}$$

что представляет собой выражение для собственных частот предварительно растянутой нити (см. п. 5.8).

Подставляя функции (е) в представление (г) для решения, найдем собственную форму колебаний, представляющую синусоиду с числом полуволн, равным i. Суммируя подобные формы, получим общее решение задачи о свободных колебаниях свободно опертого стержня при действии осевой растягивающей силы

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{l}(A_i\cos p_i t + B_i\sin p_i t), \qquad \text{(з)}$$

где p_i находим по формуле (5.143). Если заданы начальные прогибы и начальные скорости, произвольные постоянные A_i и B_i, входящие в решение (з), можно определить точно так же, как и выше (см. п. 5.10).

Если на стержень вместо растягивающей действует сжимающая сила, частоты поперечных колебаний уменьшаются и выражение

для определения значений частот получаем заменой S в формуле (5.143) на $-S$, что дает

$$p_i = \frac{i^2\pi^2 a}{l^2}\sqrt{1 - \frac{Sl^2}{i^2 EI\pi^2}}. \qquad (5.144)$$

Эта формула дает меньшие значения частот, чем получаемые для свободно опертого стержня без сжимающей осевой силы. Указанные значения зависят от члена $Sl^2/EI\pi^2$, представляющего собой отношение осевой силы к эйлеровой критической сжимающей нагрузке. Если это отношение становится равным единице, частота низшей формы колебаний принимает значение, равное единице, и тогда приходим к случаю потери устойчивости при осевом сжатии.

При исследовании динамических перемещений в условиях вынужденных колебаний свободно опертого стержня, сжатого осевой силой S, поступают так, как описано в п. 5.13. При этом необходимо только вместо простого выражения (5.102) взять более сложные выражения (5.143) или (5.144). Все остальные этапы исследования остаются без изменения.*

5.18. СТЕРЖНИ НА УПРУГИХ ОПОРАХ ИЛИ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Всевозможные условия закрепления концов стержня могут иметь промежуточные значения между двумя крайними случаями: отсутствием закрепления и жестким защемлением. Если характер закрепления концов таков, что возникающие в опорах силовые факторы являются линейными относительно смещений или углов поворотов, связи в опорах можно представить в виде набора пружин, показанных на рис. 5.27. Пусть k_1 и k_2 — жесткости пружин, работающих соответственно на растяжение — сжатие и закручивание и установленных на левом конце; k_3 и k_4 — то же, для правого конца.

---

* Если стержень имеет концевые условия, отличные от свободного опирания, формы колебаний должны удовлетворять как уравнению (5.142), так и заданным концевым условиям. В этом случае ни формы, ни собственные частоты колебаний не будут совпадать с теми, что были найдены в п. 5.11.

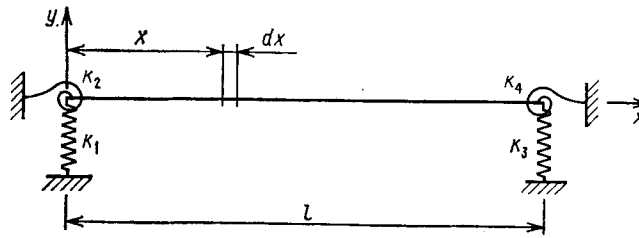


Рис. 5.27

Для указанного случая концевые условия можно выразить следующим образом:

$$V_{x=0} = EI\,(X''')_{x=0} = -k_1\,(X)_{x=0};$$
$$M_{x=0} = EI\,(X'')_{x=0} = k_2\,(X')_{x=0}; \qquad \text{(а)}$$
$$V_{x=l} = EI\,(X''')_{x=l} = k_3\,(X)_{x=l};\ M_{x=l} = EI\,(X'')_{x=l} = -k_4\,(X')_{x=l}.$$

Нормальные функции и их производные по x, необходимые для рассмотрения данного случая, имеют [см. выражение (5.85)] вид

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx;$$
$$X' = k\,(C_1 \cos kx - C_2 \sin kx + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx); \qquad \text{(б)}$$
$$X'' = k^2\,(-C_1 \sin kx - C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx);$$
$$X''' = k^3\,(-C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx),$$

где, как и выше, $k = \sqrt{p/a}$. Подставляя выражения (б) в условия (а), получим

$$EIk^3C_1 - k_1C_2 - EIk^3C_3 - k_1C_4 = 0;$$
$$-k_2C_1 - EIkC_2 - k_2C_3 + EIkC_4 = 0;$$
$$(-EIk^3 \cos kl - k_3 \sin kl)\,C_1 + (EIk^3 \sin kl - k_3 \cos kl)\,C_2 +$$
$$+ (EIk^3 \operatorname{ch} kl - k_3 \operatorname{sh} kl)\,C_3 + (EIk^3 \operatorname{sh} kl - k_3 \operatorname{ch} kl)\,C_4 = 0;$$
$$(-EIk \sin kl + k_4 \cos kl)\,C_1 + (-EIk \cos kl - k_4 \sin kl)\,C_2 +$$
$$+ (EIk \sin kl + k_4 \operatorname{ch} kl)\,C_3 +$$
$$+ (EIk \operatorname{ch} kl + k_4 \operatorname{sh} kl)\,C_4 + 0 \qquad (5.145)$$

Эта система четырех однородных алгебраических уравнений будет иметь нетривиальные решения только в том случае, если определитель матрицы, составленный из коэффициентов при C_1, C_2, C_3 и C_4, равен нулю. Тогда, разложив этот определитель, можем получить частотное уравнение для стержня с упругим закреплением на концах (см. рис. 5.27). Подставив корни этого характеристического уравнения обратно в уравнения (5.145), можно определить нормальные функции (с точностью до произвольной постоянной).

Полагая жесткости соответствующих пружин равными либо нулю, либо бесконечности, из системы уравнений (5.145) можно получить определители как для стержня с незакрепленными концами, так и для стержня с жестко защемленными концами. Например, для консольного стержня, левый конец которого жестко защемлен, а правый не закреплен, имеем $k_1 = \infty$, $k_2 = \infty$, $k_3 = 0$ и $k_4 = 0$. В этом случае определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos kl & \sin kl & \operatorname{ch} kl & \operatorname{sh} kl \\ -\sin kl & -\cos kl & \operatorname{sh} kl & \operatorname{ch} kl \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(в)}$$

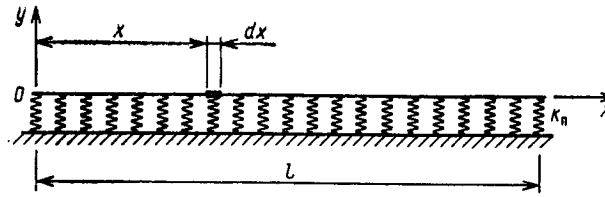


Рис. 5.28

где элементы первой строки были поделены на $-k_1$, а второй — на $-k_2$. Разложение этого определителя приводит к следующему частотному уравнению:

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1, \tag{г}$$

которое совпадает с уравнением (5.109). Выражение для нормальных функций (с точностью до произвольных постоянных C_i) имеет вид

$$X_i = C_i \left(\frac{\sin k_i x - \operatorname{sh} k_i x}{\cos k_i l + \operatorname{ch} k_i l} - \frac{\cos k_i x - \operatorname{ch} k_i x}{\sin k_i l - \operatorname{sh} k_i l} \right). \tag{д}$$

Если упругие опоры, препятствующие свободному перемещению в поперечном направлении, распределены непрерывным образом по длине стержня, имеет место задача о стержне на сплошном упругом основании. На рис. 5.28 показан такой стержень, для которого упругое основание представляется в виде большого числа близко расположенных пружин. Будем называть коэффициентом постели $k_п$ отнесенную к единице длины стержня силу, необходимую для создания равного единице прогиба стержня, лежащего на упругом основании. При поперечных колебаниях стержня дифференциальное уравнение динамического равновесия сил, действующих на малый элемент dx, можно представить в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx = -k_п y\, dx - \rho F\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{е}$$

где первое слагаемое в правой части описывает силу отпора со стороны основания. Для стержня постоянного поперечного сечения это уравнение имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + k_п y = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{5.146}$$

Для того чтобы решить это уравнение, возьмем для собственных форм колебаний следующее представление:

$$y_i = X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \tag{ж}$$

Подставляя выражение (ж) в уравнение (5.146), получим

$$EI \frac{d^4 X_i}{dx^4} - (\rho F p_i^2 - k_п) X_i = 0. \tag{з}$$

Разделив левую и правую части этого уравнения на EI, найдем

$$\frac{d^4 X_i}{dx^4} - \left(\frac{p_i^2}{a^2} - \frac{k_п}{EI} \right) X_i = 0. \tag{и}$$

Для удобства введем обозначение

$$\frac{p_i^2}{a^2} - \frac{k_{\text{п}}}{EI} = k_i^4. \qquad \text{(к)}$$

Тогда уравнение (и) можно представить в следующей форме:

$$\frac{d^4X_i}{dx^4} - k_i^4 X_i = 0. \qquad \text{(л)}$$

Решением этого дифференциального уравнения будет

$$X_i = C_{1i} \sin k_i x + C_{2i} \cos k_i x + C_{3i} \operatorname{sh} k_i x + C_{4i} \operatorname{ch} k_i x, \qquad \text{(м)}$$

что совпадает с решением задачи о стержне без упругого сплошного основания. Поэтому в рассматриваемом случае могут быть использованы все результаты, полученные выше для стержня с различными концевыми условиями. Единственное отличие состоит в том, что требуется заменить $p_i = k_i^2 a$ на величину, определяемую из выражения (к):

$$p_i = k_i^2 a \sqrt{1 + k_{\text{п}}/(EIk_i^4)}. \qquad (5.147)$$

Рассматривая простейший случай стержня, концы которого закреплены так, что не могут перемещаться в вертикальном направлении (т. е. случай свободно опертого стержня на упругом основании), найдем, что нормальные функции имеют вид

$$X_i = C_i \sin k_i x, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty, \qquad \text{(н)}$$

а круговые частоты

$$p_i = \frac{i^2\pi^2 a}{l^2} \sqrt{1 + \frac{k_{\text{п}} l^4}{EIi^4\pi^4}} = \frac{\pi^2 a}{l^2} \sqrt{i^4 + \mu}, \qquad (5.148)$$

где $\mu = k_{\text{п}} l^4/EI\pi^4$. За исключением указанного уточнения, выражения для динамических прогибов свободно опертого стержня при различных условиях (см., например, пп. 5.10, 5.13, 5.15 и 5.16) можно применять также и для стержня на сплошном упругом основании.

Суммируя сказанное, видим, что упругое закрепление на концах стержня (см. рис. 5.27) влияет как на частоты, так и на формы его колебаний, тогда как присутствие упругого основания (см. рис. 5.28) оказывает влияние только на собственные частоты колебаний. Как и в случае растянутой нити с упругим закреплением на концах, решение задачи о динамическом поведении стержня на упругих опорах или упругом основании будет аналогично тому, что имело место для обсуждавшихся выше более простых случаев.

Пример. Рассмотрим случай, когда изменяющаяся во времени сила $P_1(t) = P \sin \omega t$ приложена на расстоянии x_1 от левой опоры свободно опертого стержня, лежащего на сплошном упругом основании. Определить динамические прогибы стержня.

Решение. Колебания, возникающие при действии возмущающей силы, описываются выражением (5.127), которое применительно к рассматриваемому случаю можно записать в виде

$$y = \frac{2Pl^3}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(i\pi x/l) \sin(i\pi x_1/l) \sin \omega t}{\pi^4 a^2 (i^4 + \mu) - \omega^2 l^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega \sin(i\pi x/l) \sin(i\pi x_1/l) \sin p_i t}{l^4 p_i (p_i^2 - \omega^2)} \right]. \qquad (о)$$

В этом выражении первое слагаемое в квадратных скобках описывает поведение при вынужденных колебаниях, а второе относится к свободным колебаниям стержня.

Если переменная во времени сила $P \sin \omega t$ изменяется медленно ($\omega \to 0$), часть решения (о), относящуюся к установившимся колебаниям, можно представить в форме

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i\pi x/l) \sin(i\pi x_1/l) \sin \omega t}{i^4 + \mu}. \qquad (п)$$

В случае, когда $x_1 = l/2$, из выражения (п) получаем

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \left[\frac{\sin(\pi x/l)}{1 + \mu} - \frac{\sin(3\pi x/l)}{3^4 + \mu} + \frac{\sin(5\pi x/l)}{5^4 + \mu} - \ldots \right] \sin \omega t. \qquad (р)$$

Сравнивая это выражение с выражением (м) из п. 5.13, видим, что влияние упругого основания на динамические прогибы учитывается наличием дополнительного слагаемого μ в знаменателях членов ряда (р).

5.19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ РЕЛЕЯ—РИТЦА

В п. 1.4 с помощью метода Релея мы приближенно определили низшую частоту колебаний стержня или вала. При использовании этого метода необходимо сделать некоторое предположение о форме изгиба упругого тела при колебаниях. Соответствующую частоту затем определяют из рассмотрения энергии системы. Задавая определенную форму прогибов, тем самым неявным образом накладывают некоторые дополнительные связи, которые исходную систему сводят к системе с одной степенью свободы. Введение дополнительных связей может только увеличить жесткость системы и тем самым сделать частоту колебаний (при определении ее методом Релея) несколько большей точного значения. Более точные приближения для основной частоты (а также и для частот более высоких форм колебаний) можно получить с помощью метода Ритца *, который представляет собой дальнейшее развитие метода Релея [10, **]. При использовании метода Ритца кривая прогибов стержня при коле-

---

* **Ritz W.** Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. — Annalen der Physik, 1909, B. 28, N. 4, S. 737—786.

** Релей использовал этот метод только для приближенного определения частоты основной формы колебаний сложных систем. Он сомневался в возможности применения его для исследования высших форм колебаний. См. его статью **Rayleigh J. W. S.** On the calculation of the frequency of vibration of a system in its gravest mode, with an example from hydrodynamics. — Phil. Mag., 1899, Ser. 5, v. 47, pp. 556—572; 1911, v. 22, Ser. 6, p. 225.

баниях задается с помощью нескольких параметров, величины которых выбирают таким образом, чтобы свести к минимуму частоту колебаний. Способ выбора формы прогибов и процедура вычисления последовательных значений частот будут показаны ниже на простом случае колебаний предварительно растянутой нити (см. также п. 5.8).

Если прогибы предварительно растянутой нити малы, можно пренебречь изменением растягивающей силы S при колебаниях. Тогда увеличение потенциальной энергии деформации, обусловленной прогибами, можно получить, умножив силу на приращение длины нити. В изогнутом состоянии длина нити равна

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Для малых прогибов это выражение можно упростить, взяв приближенно

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx.$$

Тогда увеличение потенциальной энергии составит

$$\Delta U \approx \frac{1}{2} S \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \qquad \text{(а)}$$

Максимальное значение потенциальной энергии будет иметь место в тот момент времени, когда колеблющаяся нить находится в крайнем положении. В этом положении $y_{\max} = X$. Тогда из выражения (а) следует

$$\Delta U_{\max} \approx \frac{1}{2} S \int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx. \qquad \text{(б)}$$

Кинетическая энергия колеблющейся нити

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^l (\dot{y})^2\, dx. \qquad \text{(в)}$$

Максимальное значение эта энергия имеет в тот момент, когда нить проходит через нейтральное положение, т. е. при $\dot{y}_{\max} = pX$. Отсюда имеем

$$T_{\max} = \frac{1}{2} p^2 m \int_0^l X^2\, dx. \qquad \text{(г)}$$

Считая, что потери энергии отсутствуют, можно приравнять выражения (б) и (г). В результате получим

$$p^2 = \frac{S}{m} \int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx \Bigg/ \int_0^l X^2\, d\lambda. \qquad (5.149)$$

Задавая различные представления для форм колебаний и подставляя в формулу (5.149) соответствующие выражения для X, можем подсчитать приближенные значения частот колебаний по этим формам.

Первым шагом в методе Ритца является выбор подходящего выражения для кривой прогибов. Пусть $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ... — последовательность функций $\Phi_n(x)$, соответствующим образом описывающих выражение X и удовлетворяющих концевым условиям. Тогда можем записать

$$X = a_1\Phi_1(x) + a_2\Phi_2(x) + a_3\Phi_3(x) + \ldots \qquad (д)$$

Известно, что, удерживая конечное число членов ряда (д), тем самым накладывают определенные ограничения на возможные формы кривой прогибов нити. Поэтому частоты, определяемые по формуле (5.149), будут, как правило, превышать точные значения этих частот. Для того чтобы полученное таким образом приближенное значение было как можно ближе к истинному, В. Ритц предложил коэффициенты a_1, a_2, a_3, ..., входящие в представление (д), выбирать таким образом, чтобы квадрат частоты p^2 в формуле (5.149) принимал наименьшее значение. В соответствии с этим можно получить систему уравнений, каждое из которых имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx \Bigg/ \int_0^l X^2\,dx = 0. \qquad (5.150)$$

Выполняя в выражении (5.150) дифференцирование, найдем

$$\int_0^l X^2\,dx \frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l X^2\,dx = 0. \qquad (е)$$

Представив выражение (5.149) в форме

$$\int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx = \frac{p^2 m}{S}\int_0^l X^2\,dx,$$

можем записать

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 - \frac{p^2 m}{S}X^2\right] dx = 0. \qquad (5.151)$$

Подставляя представление (д) для X в равенство (5.151) и выполнив указанные действия, получим систему уравнений, которые являются однородными и линейными относительно a_1, a_2, a_3, ... Число таких уравнений будет равно числу коэффициентов a_1, a_2, a_3, ..., в представлении (д). Подобная система уравнений будет иметь решение, отличное от нуля, только в том случае, если равен нулю определитель матрицы коэффициентов при a_1, a_2, a_3, ... Из этого условия получается частотное уравнение, решив которое можно определить частоты колебаний по различным формам.

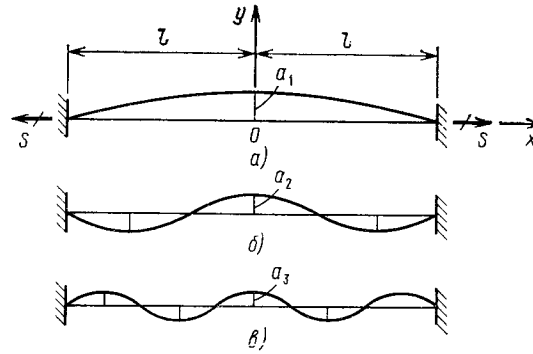


Рис. 5.29

Рассмотрим симметричные относительно середины пролета формы колебаний предварительно растянутой нити (рис. 5.29, *а—в*). Легко показать, что функция вида $y = l^2 - x^2$, описывающая симметричную параболу и удовлетворяющая концевому условию $(y)_{x=\pm l} = 0$, достаточно хорошо описывает форму колебаний, показанную на рис. 5.29, *а*. Умножив эту функцию на x^2, x^4, ..., получим набор также симметричных кривых, удовлетворяющих концевым условиям. Используя указанный прием, получим следующее выражение для кривой прогибов при колебаниях нити:

$$X = a_1 (l^2 - x^2) + a_2 x^2 (l^2 - x^2) + \\ + a_3 x^4 (l^2 - x^2) + \cdots . \qquad (ж)$$

Для того чтобы показать, насколько быстро повышается точность вычислений с увеличением числа членов ряда (ж), возьмем только один член

$$X_1 = a_1 (l^2 - x^2). \qquad (з)$$

Интегралы *, входящие в формулу (5.149):

$$\int_0^l (X_1)^2 dx = \frac{8}{15} a_1^2 l^5; \quad \int_0^l \left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2 dx = \frac{4}{3} a_1^2 l^3.$$

Подставляя эти величины в формулу (5.149), найдем

$$p_1^2 = 5S/2l^2 m. \qquad (и)$$

Сравнивая это значение с точным решением $p_1^2 = \pi^2 S/4l^2 m$, видим, что ошибка при определении частоты составляет примерно 0,66 %. Таким образом, форма прогибов полностью определяется при удержании только одного члена ряда (ж), при этом исходная система сводится к системе с одной степенью свободы, как и при использовании метода Релея.

* Как для симметричной, так и для несимметричной форм колебаний нити достаточно рассмотреть только ее половину.

Для того чтобы получить более точное значение частоты, удержим в ряде (ж) два члена. Тогда будем иметь два параметра a_1 и a_2. Изменяя их отношение, можно также изменять (в определенной мере) форму прогибов. Наилучшее приближение соответствует такому отношению, при котором формула (5.149) дает минимальное значение частоты, для чего требуется выполнение условия (5.151). Взяв в качестве второго приближения

$$X_2 = a_1 (l^2 - x^2) + a_2 x^2 (l^2 - x^2), \qquad (к)$$

найдем

$$\int_0^l X_2^2 dx = \frac{8}{15} a_1^2 l^5 + \frac{16}{105} a_1 a_2 l^7 + \frac{8}{315} a_2^2 l^9;$$

$$\int_0^l \left(\frac{dX_2}{dx}\right)^2 dx = \frac{4}{3} a_1^2 l^3 + \frac{8}{15} a_1 a_2 l^5 + \frac{44}{105} a_2^2 l^7.$$

Подставив эти выражения в равенство (5.151) и продифференцировав результат по a_1 и a_2, получим

$$\left(1 - \frac{2}{5} k^2 l^2\right) a_1 + l^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{35} k^2 l^2\right) a_2 = 0; \qquad (л)$$

$$\left(1 - \frac{2}{7} k^2 l^2\right) a_1 + l^2 \left(\frac{11}{7} - \frac{2}{21} k^2 l^2\right) a_2 = 0, \qquad (м)$$

где

$$k^2 = p^2 m/S. \qquad (н)$$

Определитель уравнений (л) и (м) должен быть равен нулю, что дает

$$k^4 l^4 - 28 k^2 l^2 + 63 = 0.$$

Два корня этого уравнения $k_1^2 l^2 = 2{,}46744$; $k_2^2 l^2 = 25{,}6$. Учитывая, что рассматриваются только формы колебаний, симметричные относительно середины пролета, и принимая во внимание обозначение (н), для первой и второй форм колебаний найдем

$$p_1^2 = 2{,}46744 S/l^2 m; \quad p_3^2 = 25{,}6 S/l^2 m.$$

Сравнивая эти значения с точными

$$p_1^2 = \frac{\pi^2 S}{4 l^2 m} = \frac{2{,}46740 S}{l^2 m}; \quad p_3^2 = \frac{9\pi^2 S}{4 l^2 m} = \frac{22{,}207 S}{l^2 m},$$

видим, что точность, с которой определяется основная частота колебаний, очень велика (ошибка составляет 0,00081 %). С другой стороны, ошибка определения частоты колебаний по третьей форме составляет 7,4 %. При удержании трех членов ряда (ж) частота колебаний по третьей форме будет получена с ошибкой, не превышающей 0,5 %.

Из сказанного следует, что при использовании метода Релея—Ритца можно определить с высокой точностью не только частоту основной формы колебаний, но также и частоты более высоких форм, удержав достаточное число членов в представлении для кривой про-

гибов. В следующем параграфе будет показано применение метода Релея—Ритца к исследованию колебаний стержня переменного поперечного сечения. Другой метод Ритца будет также описан и применен для расчета примеров.

5.20. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В предыдущих параграфах были рассмотрены различные задачи, относящиеся к колебаниям стержней постоянного поперечного сечения. Однако некоторые важные для техники задачи, такие, как колебания турбинных лопаток, корпусов судов и мостовых балок переменной высоты, требуют применения теории колебаний стержней переменного поперечного сечения. Дифференциальное уравнение движения такого стержня при колебаниях было получено выше [см. уравнение (5.8)] и имело вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0, \qquad \text{(а)}$$

где I и F — функции от x. Только в некоторых специальных случаях, которые будут рассмотрены ниже, можно получить точные выражения для нормальных функций и частот колебаний. Поэтому для определения собственных частот колебаний часто используют приближенные методы.

Применяя метод Релея—Ритца к задаче о колебаниях стержня, запишем следующие выражения для максимальных значений потенциальной и кинетической энергий:

$$U_{\max}=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)dx; \qquad \text{(б)}$$

$$T_{\max}=\frac{1}{2}p^2\int_0^l \rho F X^2\,dx, \qquad \text{(в)}$$

откуда следует

$$p^2=\frac{E}{\rho}\int_0^l I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx\Bigg/\int_0^l FX^2\,dx. \qquad \text{(г)}$$

Для того чтобы получить приближенное решение, поступим, как в предыдущем параграфе, и зададим форму кривой прогибов в виде ряда

$$X=a_1\Phi_1(x)+a_2\Phi_2(x)+a_3\Phi_3(x)+\ldots, \qquad \text{(д)}$$

где каждая из функций Φ_n удовлетворяет концевым условиям для стержней. Условие минимума значения частоты (г) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\left[\int_0^l I\,(d^2X/dx^2)^2\,dx\Bigg/\int_0^l FX^2\,dx\right]=0 \qquad \text{(е)}$$

или

$$\int_0^l FX^2\,dx\,\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx\,\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l FX^2\,dx = 0. \quad (ж)$$

Из формулы (г) и равенства (ж) следует

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l \left[I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 - \frac{p^2F\rho}{E}X^2\right]dx = 0 \qquad (5.152)$$

Таким образом, задача сводится к определению значений входящих в представление (д) постоянных a_1, a_2, a_3, ..., которые соответствовали бы минимальному значению интеграла

$$Z = \int_0^l \left[I\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 - \frac{p^2F\rho}{E}X^2\right]dx. \quad (з)$$

Уравнения, получающиеся из равенства (5.152), являются однородными и линейными относительно a_1, a_2, a_3, ..., и их число равно числу удерживаемых членов ряда (д). Приравнивая нулю определитель этих уравнений, получим частотное уравнение, при решении которого можно определить частоты различных форм колебаний.

Колебания клина. Применим теперь метод Релея—Ритца к случаю клина постоянной толщины, один конец которого не закреплен, а второй жестко заделан (рис. 5.30). В данной задаче имеем следующие геометрические характеристики поперечного сечения:

$$F = 2bx/l;\ I = (2bx)^3/(12l^3), \quad (и)$$

где l — длина консольного стержня; $2b$ — высота его поперечного сечения на жестко заделанном конце.

В рассматриваемом случае концевые условия имеют вид

$$\left(EI\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0} = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=0} = 0;$$

$$(X)_{x=l} = 0;\quad (dX/dx)_{x=l} = 0. \quad (к)$$

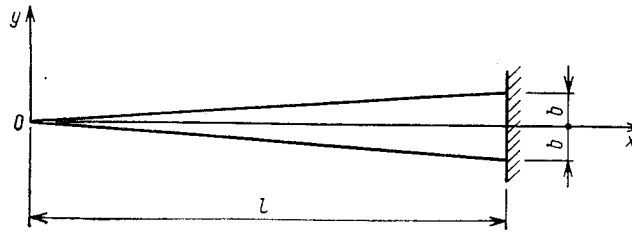


Рис. 5.30

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, зададим кривую прогибов в виде ряда

$$X = a_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + a_2\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + a_3\frac{x^2}{l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + \cdots \quad (л)$$

Легко видеть, что каждый член ряда, а также его производная по x обращаются в нуль при $x = l$. Поэтому будут выполняться третье и четвертое условия (к). Первое и второе условия также будут выполняться, поскольку I и dI/dx равны нулю при $x = 0$.

Взяв в качестве первого приближения представление

$$X_1 = a_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2, \quad (м)$$

после подстановки его в формулу (г) получим

$$p^2 = \frac{10Eb^2}{\rho l^4}; \quad f = \frac{p}{2\pi} = \frac{5{,}48}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}. \quad (н)$$

Для получения более точного решения удержим в представлении (л) два первых слагаемых:

$$X_2 = a_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + a_2\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2. \quad (о)$$

Подставляя это представление в выражение (з), найдем

$$Z_2 = \frac{2}{3}\frac{b^3}{l^3}\left[(a_1-2a_2)^2 + \frac{24}{5}a_2(a_1-2a_2) + 6a_2^2\right] -$$

$$-\frac{2b\rho l p^2}{E}\left[\frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280}\right].$$

Условия

$$\partial Z_2/\partial a_1 = 0; \ \partial Z_2/\partial a_2 = 0$$

дают следующие два линейных уравнения:

$$\left(\frac{E}{\rho}\frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{30}\right)a_1 + \left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{105}\right)a_2 = 0; \quad (п)$$

$$\left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{105}\right)a_1 + \left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{280}\right)a_2 = 0. \quad (р)$$

Приравнивая нулю определитель матрицы, составленной из коэффициентов этого уравнения, приходим к уравнению

$$\left(\frac{E}{\rho}\frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{30}\right)\left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{280}\right) - \left(\frac{2E}{5\rho}\frac{b^2}{3l^4} - \frac{p^2}{105}\right)^2 = 0. \quad (с)$$

Решив это уравнение, можно вычислить $p_{1,2}^2$. Тогда наименьшему из этих корней будет соответствовать

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{5{,}319b}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}. \quad (т)$$

Для рассматриваемого случая имеется точное решение, для которого нормальные функции являются функцией Бесселя *. Из этого точного решения следует

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{5{,}315b}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}. \qquad (5.153)$$

Сравнивая это решение с (н) и (т), видим, что погрешность первого приближения составляет примерно 3,1 %, тогда как второе приближение дает ошибку примерно 0,075 %. Дальнейшее увеличение числа удерживаемых членов ряда (д) необходимо только в том случае, когда вычисляются также и частоты высших форм колебаний. Для сравнения укажем, что в случае консольного стержня постоянного поперечного сечения, равного поперечному сечению клина в его основании, было получено

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{(1{,}875)^2 a}{2\pi l^2} = \frac{3{,}515b}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}. \qquad (у)$$

Метод Релея—Ритца (первый метод Ритца) может применяться также и в случаях, когда площадь F и момент инерции I поперечного сечения стержня не являются непрерывными функциями от x. Эти функции могут иметь несколько точек разрыва или описываться различными выражениями на различных интервалах по длине l стержня. В подобных случаях интервал интегрирования в выражении (з) следует разбивать на несколько интервалов, внутри каждого из которых момент инерции I и площадь F поперечного сечения представляются непрерывными функциями **. Метод Релея—Ритца можно применять и в том случае, когда функции F и I представляются в графическом или табличном виде. При этом интегралы в выражении (з) необходимо вычислять численно.

Описанные выше расчеты гораздо легче можно выполнить с помощью второго *метода Ритца*[11], ***, в котором вместо рассмотрения энергетических соотношений используется непосредственным образом дифференциальное уравнение движения. В качестве примера рассмотрим уже известный случай колебаний консольно закрепленного стержня постоянного поперечного сечения, где дифференциальное уравнение для нормальных функций имеет вид

$$EI\frac{d^4X}{dx^4} - \rho F p^2 X = 0. \qquad (ф)$$

---

* **Kirchhoff G. R.** Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichen Querschnitt. — Monatsbericht der Königlich Preussichen Academie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse, 1879, Oktober, S. 815—828.

** Примеры такого рода обсуждались в работе **Traenkle A.** Berechnung kritischer Drehzahlen beliebiger Ordnung nach dem Verfahren von Ritz. — Ingenieur-Archiv, 1930, B. 1, N. 5, S. 499—526.

*** Как уже указывалось в п. 2.3, этот метод иногда приписывается Галеркину, но первым его ввел В. Ритц.

Предполагая, что стержень жестко защемлен на левом конце и не закреплен на правом, запишем концевые условия в виде

$$(X)_{x=0}=0,\ \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0}=0,$$

$$\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l}=0,\ \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l}=0. \qquad (\text{х})$$

При использовании второго метода Ритца[11] вновь возьмем функцию в форме ряда (д). Поскольку это решение неточное, оно не будет удовлетворять уравнению (ф) и при подстановке в левую часть равенства будет давать отличное от нуля значение, которое представляет некоторую нагрузку $Q(x)$, распределенную по длине консольного стержня. Тогда значения коэффициентов a_1, a_2, a_3, ... ряда (ж) можно получить, воспользовавшись тем условием, что возможная работа нагрузки $Q(x)$ на возможных перемещениях $\delta y_n = \delta a_n \Phi_n(x)$ равна нулю. В результате получаем равенства следующей формы:

$$\int_0^l \left(EI\frac{d^4X}{dx^4} - \rho F p^2 X\right)\Phi_n(x)\,dx = 0. \qquad (5.154)$$

После подстановки ряда (ж) в это равенство и после интегрирования получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно a_1, a_2, a_3, ... Как и выше, частотное уравнение получаем приравниванием нулю определителя этого уравнения.

Взяв только два члена ряда (ж), предположим, что в рассматриваемом случае

$$X = a_1(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4) + \\ + a_2(20l^3x^2 - 10l^2x^3 + x^5). \qquad (\text{ц})$$

Каждое из выражений, стоящих в скобках, удовлетворяет концевым условиям (х). Первое слагаемое с точностью до постоянного множителя описывает прогибы консольного стержня при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки, второе — прогибы консольного стержня при действии распределенной поперечной нагрузки, изменяющейся по линейному закону и принимающей нулевое значение в месте заделки. Подставляя представление (ц) в равенство (5.154) и выполнив интегрирование, получим

$$\left(\frac{104}{45}\frac{p^2l^4}{a^2} - \frac{144}{5}\right)a_1 + \left(\frac{2644}{315}\frac{p^2l^4}{a^2} - 104\right)a_2 = 0; \qquad (\text{ч})$$

$$\left(\frac{2644}{315}\frac{p^2l^4}{a^2} - 104\right)a_1 + \left(\frac{21,128}{693}\frac{p^2l^4}{a^2} - \frac{2640}{7}\right)a_2 = 0. \qquad (\text{ш})$$

Приравнивая нулю определитель этих двух уравнений, найдем

$$p_1 = 3,517\frac{a}{l^2} = \frac{3,517}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho F}},\ p_2 = \frac{22,78}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho F}}. \qquad (\text{щ})$$

Значение p_1 здесь найдено с высокой точностью, а ошибка в значении p_2 составляет примерно 3,4 %.

Колебания конического стержня. Задача колебаний конического стержня, вершина которого не закреплена, а основание жестко

заделано, впервые была рассмотрена Кирхгофом *. Для основной формы колебаний в этом случае получаем

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{4{,}359\, r}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (5.155)$$

где r — радиус основания конуса; l — длина конического стержня. Для сравнения напомним, что цилиндрический стержень той же длины и площадью поперечного сечения, как у основания конуса, имеет частоту колебаний

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{(1{,}875)^2 a}{2\pi l^2} = \frac{1{,}758\, r}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (э)$$

Таким образом, видим, что частоты основных форм поперечных колебаний конического и цилиндрического стержней относятся как $4{,}359/1{,}758 \approx 2{,}5$. В более общем виде частоту колебаний конического стержня по произвольной форме можно определить по формуле

$$f_n = \frac{p_n}{2\pi} = \frac{\alpha_n r}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (5.156)$$

где α_n имеет следующие значения **:

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
4,359	10,573	19,225	30,339	43,921	59,956

Другие случаи консольно закрепленных стержней переменного поперечного сечения. В общем случае частоты поперечных колебаний консольно закрепленных стержней можно определить по формуле

$$f_n = \frac{p_n}{2\pi} = \frac{\alpha_n r_{\text{п}}}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (5.157)$$

В этой формуле $r_{\text{п}}$ — радиус инерции поперечного сечения, расположенного в месте жесткой заделки; l — длина консольного стержня; α_n — постоянная, зависящая от конфигурации стержня и от формы колебаний. Для наиболее важных с практической точки зрения случаев постоянная α_1 принимает следующие значения:

1. Если изменения площади и момента инерции поперечного сечения в зависимости от x можно представить в виде

$$F = ax^m, \quad I = bx^m \qquad (а')$$

(x измеряется от незакрепленного конца), радиус $r_{\text{п}}$ инерции остается постоянным по длине консольного стержня, и постоянную α_1 для основной формы колебаний с достаточной точностью можно определять по формуле ***

$$\alpha_1 = 3{,}47\,(1 + 1{,}05m). \qquad (б')$$

---

* См. ст. Кирхгофа, цитированную выше.

** **Wrinch D.** On the lateral vibrations of bars of conical type. — Proc. Roy. Soc., London, Ser A, 1922, v. 101, N. A713, pp. 493—508.

*** **Ono A.** Journ. Soc. Mech. Engrs, Tokyo, 1924, v. 27, p. 467.

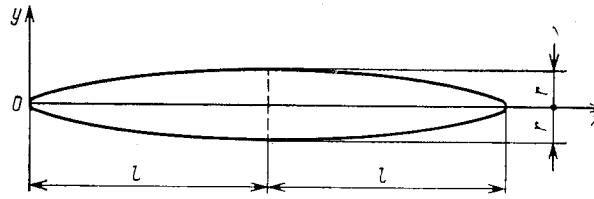


Рис. 5.31

2. Если изменения площади и момента инерции поперечного сечения в зависимости от x можно представить в виде

$$F = a\left(1 - \frac{cx}{l}\right), \quad I = b\left(1 - \frac{cx}{l}\right) \qquad (в')$$

(x измеряется от места жесткой заделки), радиус r_n остается постоянным по длине стержня, а величину α_1 можно выбрать из следующих значений *:

c	0	0,4	0,6	0,8	1,0
α_1	3,515	4,098	4,585	5,398	7,16

Стержни переменного поперечного сечения с незакрепленными концами. Рассмотрим теперь случай колеблющегося в поперечном направлении стержня с незакрепленными концами, состоящего из двух равных половин, соединенных своими большими основаниями (рис. 5.31), при этом контур левой половины стержня образуется вращением кривой

$$y = ax^m \qquad (г')$$

вокруг оси x. Точное решение этой задачи, выраженное в функциях Бесселя, было получено ** для некоторых значений m, при этом частоту основной формы колебаний можно было представить в виде

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\alpha_1 r}{4\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (5.158)$$

В этой формуле r — радиус наибольшего поперечного сечения: $2l$ — длина стержня; α_1 — постоянная, зависящая от формы кривой (г') и принимающая следующие значения:

m	0	1/4	1/2	3/4	1
α_1	5,593	6,957	8,203	9,300	10,173

* **Ono A.** Journ. Soc. Mech. Engrs, Tokyo, 1925, v. 28, p. 429.

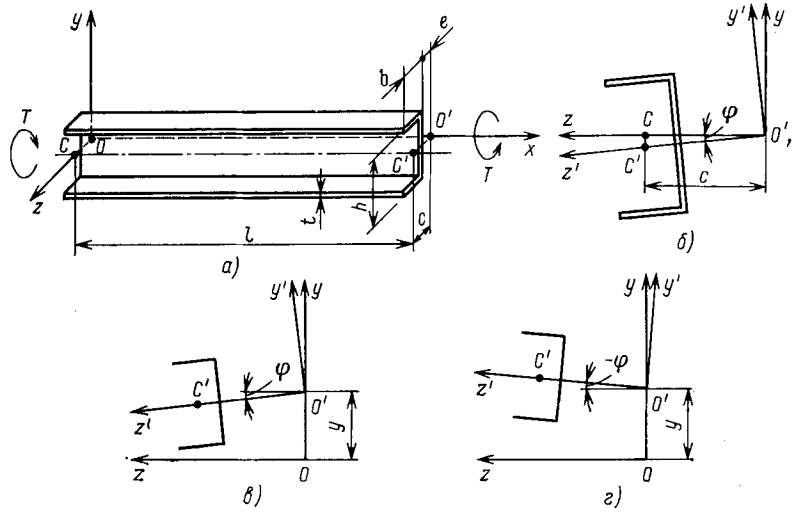
** **Nicholson J. W.** The lateral vibrasions of bars of variable section. — Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, 1917, v. 93, N. A654, pp. 506—519.

5.21. СОВМЕСТНЫЕ ИЗГИБНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

В приведенных выше обсуждениях поперечных колебаний стержней всегда предполагалось, что стержень колеблется в плоскости симметрии. Если это не так, то изгибные колебания будут сопровождаться, как правило, крутильными колебаниями. В качестве примера рассмотрим колебания швеллера (рис. 5.32, *а*) в плоскости xy, перпендикулярной плоскости симметрии (т. е. плоскости zx). Изгиб швеллера под действием вертикальной нагрузки будет происходить в вертикальной плоскости и не будет сопровождаться кручением только тогда, когда нагрузка прикладывается вдоль проходящей через *центр сдвига оси* OO', которая параллельна центральной оси CC' и лежит в плоскости симметрии. Ось, проходящая через центр сдвига, берется в качестве оси x. Эта ось отстоит на расстоянии e от срединной плоскости стенки и c от центра тяжести поперечного сечения швеллера. Их величины определяем по следующим формулам *:

$$e = \frac{b^2h^2t}{4I_z}, \quad c = e + \frac{b^2}{2b+h}, \tag{а}$$

где b — ширина полок; h — расстояние между срединными плоскостями полок; t — толщина полок и стенки.



* См. **Timoshenko S.** Strength of materials. Part I. 3rd ed. — N. Y. — Toronto — Ld: Van Nostrand Co., 1955, p. 239 (опубликован перевод **Тимошенко С. П.** Сопротивление материалов. Ч. I. М.: Физматгиз, 1960. 379 с).

Рис. 5.32

Для вертикальной нагрузки дифференциальное уравнение для кривой прогибов имеет вид

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = w, \qquad (б)$$

где w — интенсивность распределенной поперечной нагрузки (за положительное берется направление вверх); EI_z — жесткость при изгибе швеллера относительно оси z.

Если нагрузка распределена вдоль центральной оси, ее всегда можно заменить на такую же нагрузку и распределенный крутящий момент интенсивностью wc, распределенные вдоль проходящей через центр сдвига оси x. В подобном случае будем иметь одновременное действие изгиба, описываемого уравнением (б), и кручения относительно оси x, проходящей через центр сдвига. Это кручение будет неоднородным, и соотношение между изменяющимся в зависимости от координаты x крутящим моментом $T(x)$ и углом кручения φ имеет вид *

$$T(x) = R \frac{d\varphi}{dx} - R_1 \frac{d^3\varphi}{dx^3}, \qquad (в)$$

где R — *крутильная жесткость;* R_1 — *жесткость стесненного кручения*. Положительное направление для угла закручивания показано на рис. 5.32, *б*. Оно определяется правилом правой руки. Дифференцируя выражение (в) по x и учитывая, что положительное направление крутящего момента соответствует показанному на рис. 5.32, *а*, получим

$$R \frac{d^2\varphi}{dx^2} - R_1 \frac{d^4\varphi}{dx^4} = wc. \qquad (г)$$

Уравнения (б) и (г) определяют связь между изгибом и кручением тонкостенного стержня в том случае, когда статическая нагрузка распределена вдоль центральной оси.

При колебаниях стержня необходимо учесть поперечные силы инерции ** интенсивностью $-\rho F \partial^2 (y - c\varphi)/\partial t^2$ и моменты инерции, интенсивность которых равна $-\rho I_п \partial^2\varphi/\partial t^2$, где $I_п$ — центральный полярный момент инерции поперечного сечения. Подставляя первый из инерционных силовых факторов в уравнения (б) и (г) вместо статических нагрузок, получим следующие дифференциальные уравнения для совместных изгибных и крутильных колебаний:

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho F \frac{\partial^2}{\partial t^2}(y - c\varphi); \qquad (5.159а)$$

$$R \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - R_1 \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = -\rho F c \frac{\partial^2}{\partial t^2}(y - c\varphi) + \rho I_п \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (5.159б)$$

---

* См. **Timoshenko** S. Strength of materials. Part II. 3rd. ed. N.-Y. Van Nostrand Co., 1956, p. 265 (опубликован перевод: **Тимошенко С. П.** Сопротивление материалов. Ч. II. М.: Физматгиз, 1960, с. 214).

** Продольные силы инерции, обусловленные искажением плоской формы поперечного сечения, здесь не учитываются.

Полагая, что стержень колеблется по одной из собственных форм, положим

$$y = X\,(A\cos pt + B\sin pt);$$
$$\varphi = X_1\,(A_1\cos pt + B_1\sin pt), \qquad (д)$$

где p — круговая частота колебаний; X и X_1 — нормальные функции. Подставляя выражения (д) в уравнения (5.159а) и (5.159б), получим следующие уравнения относительно функций X и X_1:

$$EI_z X^{IV} = \rho F p^2\,(X - cX_1); \qquad (е)$$

$$R_1 X_1^{IV} - RX_1'' = -\rho F p^2 c\,(X - cX_1) + \rho I_п p^2 X_1, \qquad (ж)$$

В каждом конкретном случае следует отыскивать решения для функций X и X_1, которые удовлетворяли бы заданным концевым условиям для стержня, а также уравнениям (е) и (ж).

В качестве примера рассмотрим случай стержня со свободно опертыми концами, для которого условия на концах имеют вид

$$y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l. \qquad (з)$$

Этим условиям удовлетворяют функции:

$$X_i = C_i \sin(i\pi x/l);\ X_{1i} = D_i \sin(i\pi x/l),\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty, \qquad (и)$$

где C_i и D_i — произвольные постоянные. Подставляя эти выражения в уравнения (е) и (ж) и используя обозначения

$$\frac{EI_z i^4\pi^4}{l^4\rho F} = \omega_{иi}^2,$$

$$\frac{Ri^2\pi^2 l^2 + R_1 i^4\pi^4}{l^4\rho\,(I_п + Fc^2)} = \omega_{кi}^2;\ \frac{Fc^2}{I_п + Fc^2} = \lambda, \qquad (к)$$

получим

$$\left(\omega_{иi}^2 - p_i^2\right) C_i - p_i^2 c D_i = 0; \qquad (л)$$

$$(\lambda/c)\,p_i^2 C_i + \left(\omega_{кi}^2 - p_i^2\right) D_i = 0. \qquad (м)$$

Эти уравнения могут дать решения для C_i и D_i, отличные от нуля, только в том случае, если равен нулю их определитель. Тогда частотное уравнение можно представить в форме

$$\left(\omega_{иi}^2 - p_i^2\right)\left(\omega_{кi}^2 - p_i^2\right) - \lambda p_i^4 = 0, \qquad (н)$$

откуда находим

$$p_i^2 = \frac{\left(\omega_{кi}^2 + \omega_{иi}^2\right) \pm \sqrt{\left(\omega_{кi}^2 - \omega_{иi}^2\right)^2 + 4\lambda\omega_{иi}^2\omega_{кi}^2}}{2\,(1-\lambda)}. \qquad (5.160)$$

Аналогичный результат будет получаться и для всех других случаев свободно опертых стержней с одной плоскостью симметрии, которые колеблются в плоскости, перпендикулярной плоскости симметрии.

Если центр сдвига совпадает с центром тяжести, расстояние $c = 0$ и $\lambda = 0$, что дает

$$p_i^2 = (\omega_{\text{к}i}^2 + \omega_{\text{и}i}^2)/2 \mp (\omega_{\text{к}i}^2 - \omega_{\text{и}i}^2)/2,$$

откуда получаем две системы значений частот

$$p_{1i} = \omega_{\text{и}i}, \quad p_{2i} = \omega_{\text{к}i}. \tag{о}$$

Как видно из обозначений (к), эти частоты являются частотами несвязанных изгибных и крутильных колебаний и не зависят друг от друга. Если величина c не равна нулю, из выражения (5.160) получаем два значения для p_i^2, одно из которых больше, а другое меньше значений частот (о). Для большего из значений p_i^2 из равенств (л) и (м) следует, что постоянные C_i и D_i имеют одинаковые знаки, а для меньшего — различные. Обе соответствующие этим случаям конфигурации представлены на рис. 5.32, *в* и *г*.

Аналогичные результаты получаются и в случае стержней с иными концевыми условиями. Решения уравнений (е) и (ж) при этом усложняются, но можно найти приближенные значения частот связанных колебаний, если использовать метод Релея—Ритца *. В случае стержня, не имеющего плоскости симметрии, задача становится более сложной **. Крутильные колебания здесь сочетаются с изгибными в двух главных плоскостях, поэтому система уравнений содержит не два, а три дифференциальных уравнения. На практике можно также встретиться с еще более сложной задачей связанных крутильных и изгибных колебаний несимметричных стержней переменного поперечного сечения. Подобные задачи возникают, например, при исследованиях колебаний турбинных лопаток, крыльев самолетов и воздушных винтов. При решении указанных задач обычно применяют численные методы.

5.22. КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

Задача о колебаниях кругового кольца является составной частью исследований колебаний различных деталей конструкций с вращающимися узлами круговой формы. Ниже приведено обсуждение нескольких несложных задач о колебаниях кругового кольца постоянного поперечного сечения в предположении, что размеры поперечного сечения кольца малы по сравнению с радиусом r центральной линии (рис. 5.33, *а*). Предполагается также, что плоскость xy, в которой лежит кольцо, является плоскостью симметрии каждого его поперечного сечения.

---

* Подобным способом были исследованы связанные изгибно-крутильные колебания консольных стержней в работе **Garland C. F.** Normal modes of vibrations of beams having noncolinear elastic and mass axes. — Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1940, v. 7, N. 3, pp. 97—105.

** Дифференциальные уравнения для общего случая были рассмотрены в работе **Federhofer K.** Berechnung der Drehschwingungen eines Kreiszylinders. — Sitz.-Ber. Akad. Wiss., Wien, 1947, Abt. IIa, B. 156, S. 573—582.

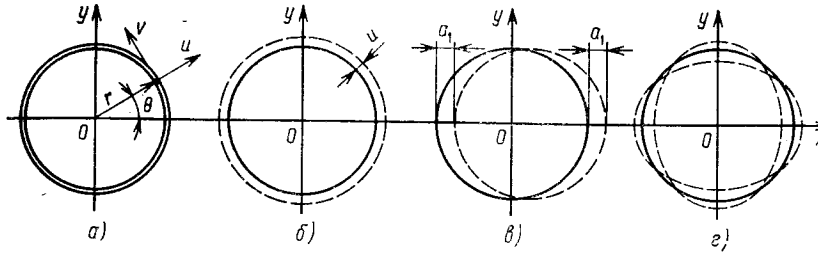


Рис. 5.33

Колебания растяжения—сжатия. Простейшей формой колебаний типа растяжения — сжатия является форма, при которой центральная линия кольца образует кольцо с периодически изменяющимся радиусом, а все поперечные сечения перемещаются в радиальном направлении без поворотов (рис. 5.33, *б*). Обозначим через u перемещение в радиальном направлении (за положительное берется направление наружу) произвольной точки кольца. Тогда относительное удлинение кольца в окружном направлении (деформация растяжения) равно u/r. Потенциальная энергия деформации, представляющая в данном случае энергию простого растяжения, будет представляться следующим выражением:

$$U = \frac{FEu^2}{2r^2}\, 2\pi r, \qquad \text{(а)}$$

где F — площадь поперечного сечения кольца. Далее кинетическую энергию движений при колебаниях можно записать в виде

$$T = \frac{\rho F}{2}\, \dot{u}^2 2\pi r. \qquad \text{(б)}$$

Приравнивая максимальные значения потенциальной и кинетической энергий и используя равенство $\dot{u}_{\max} = pu_{\max}$, получим

$$p = \sqrt{\frac{E}{\rho r^2}}. \qquad \text{(в)}$$

Таким образом, находим частоту основной формы колебаний растяжения—сжатия (см. рис. 5.33, *б*)

$$f_1 = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho r^2}}. \qquad (5.161)$$

Круговое кольцо имеет и другие формы колебаний растяжения—сжатия, которые напоминают формы, образующиеся при продольных колебаниях призматических стержней. Если i — число волн, расположенных по окружности, то частоты высших форм колебаний

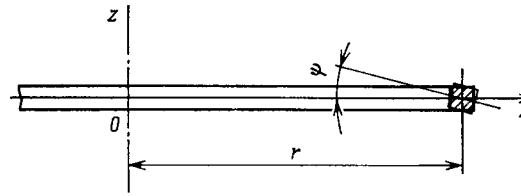


Рис. 5.34

типа растяжения—сжатия кольца определяем по следующей формуле *:

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E(1+i^2)}{\rho r^2}}. \qquad (5.162)$$

При $i = 0$ это выражение совпадает с формулой (5.161) для чисто радиальных колебаний.

Крутильные колебания. Теперь рассмотрим основную форму крутильных колебаний. При таких колебаниях центральная линия кольца остается недеформированной, а все его поперечные сечения поворачиваются на один и тот же угол ψ (рис. 5.34). При таких поворотах точка, расположенная на расстоянии z от срединной поверхности кольца, переместится в радиальном направлении примерно на величину $z\psi$, при этом соответствующую окружную деформацию можно положить равной $z\psi/r$. Потенциальная энергия деформации кольца может быть определена в этом случае из выражения

$$U = 2\pi r \int_F \frac{E}{2}\left(\frac{z\psi}{r}\right)^2 dF = \frac{\pi E I_x \psi^2}{r}, \qquad (г)$$

где I_x — момент инерции поперечного сечения относительно оси x.

Кинетическая энергия кольца при крутильных колебаниях

$$T = 2\pi r \frac{\rho I_п}{2}\dot{\psi}^2, \qquad (д)$$

где $I_п$ — полярный момент инерции поперечного сечения.

Приравнивая друг другу U_{max} и T_{max} и учитывая равенство $\psi_{max} = p\psi_{max}$, найдем

$$p = \sqrt{EI_x/\rho r^2 I_п}. \qquad (е)$$

Тогда частоту крутильных колебаний можно определить по формуле

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI_x}{\rho r^2 I_п}}. \qquad (5.163)$$

---

* **Love A. E. H.** Mathematical theory of elasticity. 4th ed. Cambridge: University Press, 1927, p. 454 (опубликован перевод: **Ляв А.** Математическая теория упругости. М. — Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.).

Сравнивая эту формулу с формулой (5.161), видим, что частоты крутильных и чисто радиальных колебаний относятся, как $\sqrt{I_x/I_п}$.

Для кольца с поперечным сечением круговой формы частоты крутильных форм колебаний определяем по следующей формуле *:

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E(1+i^2)}{2\rho r^2}}. \qquad (5.164)$$

Учитывая равенство $\sqrt{E/(\rho r^2)} = a/r$, где a — скорость распространения звука вдоль кольца, видим, что рассмотренные выше колебания с растяжением—сжатием и крутильные колебания, как правило, имеют высокие частоты. Намного более низкие значения частот будут получаться при рассмотрении изгибных колебаний кольца.

Изгибные колебания кругового кольца распадаются на два класса, а именно: изгибные колебания в плоскости кольца и изгибные колебания, включающие как перемещения под прямым углом к плоскости кольца, так и кручение. Рассмотрим изгибные колебания в плоскости кольца (см. рис. 5.33, *а*) и введем следующие обозначения: θ — угол, определяющий положение точки на кольце; u — радиальное перемещение (за положительное принимается направленное наружу); v — окружное перемещение (за положительное принимается направление в сторону увеличения угла θ); I — момент инерции поперечного сечения относительно своей главной оси, перпендикулярной плоскости кольца.

Обусловленное перемещениями u и v относительное удлинение в произвольной точке, расположенной на центральной оси кольца:

$$r = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad (ж)$$

а изменение кривизны можно представить соотношением **

$$\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r} = -\frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{u}{r^2}. \qquad (з)$$

Для самого общего случая изгибных колебаний в плоскости кольца радиальное перемещение u можно представить в виде тригонометрического ряда ***

$$u = a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \cdots, \qquad (и)$$

---

* См. цитированную выше кн. **Love A. E. H.** Mathematical theory of elasticity, p. 453.

** Это соотношение было получено Ж. Буссинеском. См. **Boussinesq J.** Résistance d'un anneau á la flexion, quand sa surface extérieure supporte une pression normale constante par unite de longueur de sa fibre moyenne. — Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1883, t. 97, N. 15, p. 842—848.

*** Постоянный член этого ряда, соответствующий чисто радиальным колебаниям, здесь опущен.

где коэффициенты a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... являются функциями времени. Рассматривая изгибные колебания без растяжения *, положим $e = 0$. Тогда из выражения (ж) следует

$$u = -\partial v/\partial\theta. \qquad (к)$$

Подставив представление (и) в выражение (к) и проинтегрировав результат, найдем **

$$v = -a_1 \sin\theta - \frac{1}{2} a_2 \sin 2\theta - \cdots +$$

$$+ b_1 \cos\theta + \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta + \cdots \qquad (л)$$

Изгибающий момент в произвольном поперечном сечении кольца определяем выражением

$$M = -\frac{EI}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u\right), \qquad (м)$$

откуда находим потенциальную энергию изгиба

$$U = \frac{EI}{2r^4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u\right)^2 r\, d\theta. \qquad (н)$$

Подставляя ряд (и) в выражение (н) и используя равенства

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta\, d\theta = 0; \quad \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta\, d\theta = 0 \text{ при } m \neq n;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin n\theta\, d\theta = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\theta\, d\theta = \pi;$$

получим

$$U = \frac{EI\pi}{2r^3}\sum_{i=1}^{\infty}(1 - i^2)^2 (a_i^2 + b_i^2). \qquad (о)$$

Кинетическая энергия колеблющегося кольца

$$T = \frac{\rho F}{2}\int_0^{2\pi}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)\, r\, d\theta. \qquad (п)$$

---

* Обсуждение изгибных колебаний с учетом растяжения см. в работах Ф. Уолткинга (**Waltking F. W.** Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern. — Ingenieur-Archiv, 1934, B. 15, N. 6, S. 429—449) и К. Федергофера (**Federhofer K.** Über die Eigenschwingungen des senkrecht zu seiner Ebene Schwingenden Kreisbogens. — Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, 1936, Abt. IIa, B. 145, S. 29—50).

** Постоянную интегрирования, соответствующую вращению кольца в своей плоскости как абсолютно жесткого тела, здесь опускаем.

Подставляя выражения (и) и (л) для u и v в выражение (п), найдем

$$T = \frac{\pi r \rho F}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{i^2}\right)(\dot{a}_i^2 + \dot{b}_i^2). \qquad (р)$$

Используя уравнение Лагранжа для консервативной системы * и обобщенных координат a_i, получим следующее дифференциальное уравнение движения:

$$\pi r \rho F \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \ddot{a}_i + \frac{EI\pi}{r^3}(1 - i^2)^2 a_i = 0$$

или

$$\ddot{a}_i + \frac{EIi^2(1 - i^2)^2}{\rho F r^4 (1 + i^2)} a_i = 0. \qquad (с)$$

Такое же уравнение получаем и для обобщенной координаты b_i. Отсюда находим, что частота колебаний по i-й форме

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EIi^2(1 - i^2)^2}{\rho F r^4 (1 + i^2)}}. \qquad (5.165)$$

При $i = 1$ получаем $f_1 = 0$. В этом случае $u = a_1 \cos\theta$ и $v = a_1 \sin\theta$, и кольцо движется как абсолютно жесткое тело. Как видно из рис. 5.33, *в*, коэффициент a_1 определяет движение как абсолютно жесткого тела в направлении оси x. При $i = 2$ имеет место основная форма изгибных колебаний кольца. Формы кольца при крайних положениях, соответствующие таким колебаниям, показаны на рис. 5.33, *г* штриховыми линиями.

В случае изгибных колебаний кольца с поперечным сечением круговой формы, когда учитываются как перемещения, направленные под прямым углом к плоскости кольца, так и кручение, частоты основных форм колебаний можно определить с помощью формулы **

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EIi^2(i^2 - 1)^2}{\rho F r^4 (i^2 + 1 + \nu)}}, \qquad (5.166)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Сравнивая формулы (5.165) и (5.166), видим, что даже для низшей формы ($i = 2$) колебаний из рассмотренных двух видов изгибных колебаний частоты различаются, но незначительно.

5.23. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАН

Двумерным аналогом предварительно растянутой колеблющейся нити (или струны), рассмотренной в п. 5.8, является предварительно растянутая мембрана [12]. В последующем обсуждении предполагается, что мембрана является идеально гибкой, тонкой и постоянной толщины. Кроме того, она растянута одинаковым во всех направлениях и настолько большим равномерно распределенным усилием,

* См. **Timoshenko S., Young D. H.** Advanced dynamics. — New York: McGraw-Hill Book Co., 1948, p. 212.

** См. цитированную в п. 5.22 кн. **Love A. E. H.** Mathematical theory of elasticity, p. 453.

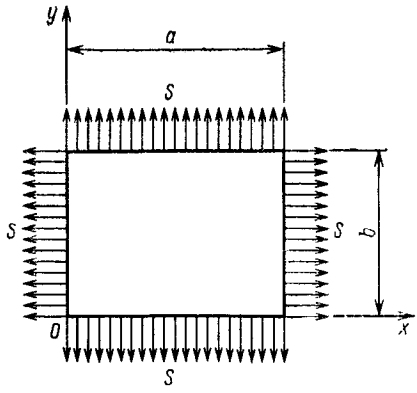


Рис. 5.35

что можно пренебречь малыми изменениями этих усилий, обусловленных малыми прогибами, возникающими при колебаниях. Взяв за плоскость мембраны плоскость xy, введем следующие обозначения: v — перемещение произвольной точки мембраны в направлении, перпендикулярном плоскости xy; S — равномерное удельное растягивающее усилие, приложенное на границе (рис. 5.35); w — вес единицы площади мембраны.

Приращение потенциальной энергии изогнутой мембраны можно найти, умножив равномерное растягивающее усилие S на приращение площади мембраны. В изогнутом положении площадь поверхности мембраны

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Для малых прогибов это выражение можно приближенно взять в виде

$$F \approx \iint \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy.$$

Тогда приращение потенциальной энергии будет равно

$$\Delta U \approx \frac{1}{2} S \iint \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy. \qquad \text{(а)}$$

Кинетическая энергия колеблющейся мембраны

$$T = \frac{w}{2g} \iint \dot{v}^2\, dx\, dy. \qquad \text{(б)}$$

Ниже будут исследованы динамические характеристики различного вида мембран.

Прямоугольные мембраны. Пусть a и b — стороны прямоугольной мембраны, показанной на рис. 5.35. Независимо от вида функции координат v в пределах прямоугольной области ее всегда можно представить в виде двойного ряда

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \qquad \text{(в)}$$

где коэффициенты φ_{mn} являются функциями времени. Легко видеть, что каждый член ряда (в) удовлетворяет граничным условиям, а именно: при $x = 0$ и $x = a$ имеем $v = 0$ и при $y = 0$ и $y = b$ имеем

$v = 0$. Подставляя представление (в) в выражение (а) для приращения потенциальной энергии, получим

$$\Delta U \approx \frac{S\pi^2}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \frac{m}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 \right\} dx\, dy.$$

Проинтегрировав это выражение по площади мембраны, с учетом приведенных в п. 1.1 равенств найдем

$$\Delta U \approx \frac{S}{2} \frac{ab\pi^2}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \varphi_{mn}^2. \qquad (г)$$

Аналогичным образом можно с помощью выражения (б) вычислить кинетическую энергию

$$T = \frac{wab}{8g} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\varphi}_{mn}^2. \qquad (д)$$

Сила инерции, действующая на малый элемент мембраны, равна $-(w/g)\,\ddot{v}\,dxdy$. Поступая, как и выше, и взяв возможное перемещение в виде $\delta v_{mn} = \delta\varphi_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$, получим дифференциальное уравнение движения в главных координатах при свободных колебаниях

$$\frac{wab}{4g} \ddot{\varphi}_{mn} + S \frac{ab\pi^2}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \varphi_{mn} = 0, \qquad (е)$$

отсюда следует

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gS}{w} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}. \qquad (5.167)$$

Частоту колебаний по основной форме получим, положив $m = n = 1$, что дает

$$f_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gS}{w} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}. \qquad (5.168)$$

Изогнутая форма мембраны в этом случае определяется первым членом ряда (в):

$$v = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \qquad (ж)$$

Как видно из уравнения (е), подобные члены ряда (в) представляют нормальные функции для рассматриваемого случая. Если мембрана является квадратной в плане ($a = b$), частота, соответствующая низшей форме колебаний:

$$f_{11} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{gS}{2w}}. \qquad (5.169)$$

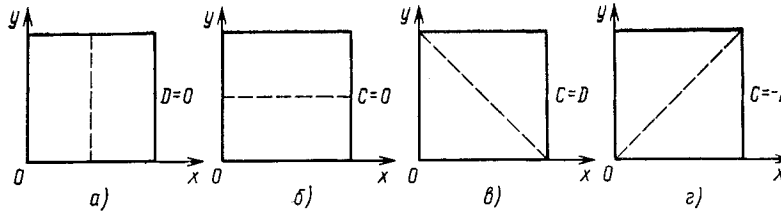


Рис. 5.36

Эта частота прямо пропорциональна квадратному корню из усилия S и обратно пропорциональна длине a и квадратному корню из веса w единицы площади пластины.

Следующие две высшие формы колебаний получим, положив одно из чисел m или n равным 2, а другое 1. Эти две формы имеют одну и ту же частоту (при $a = b$), но различные конфигурации. На рис. 5.36, *а* и *б* показаны узловые линии[13] для этих двух форм колебаний (на этих линиях прогибы при колебаниях равны нулю). Поскольку, как уже говорилось выше, эти частоты совпадают, интересно посмотреть, что получится при наложении данных поверхностей друг на друга, если задавать различные отношения их максимальных прогибов. Получающаяся в результате наложения комбинация имеет вид

$$v = C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + D \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a},$$

где C и D — произвольные малые постоянные. Четыре частных случая подобных комбинированных колебаний показаны на рис. 5.36, *а—г*. Положив $D = 0$, получим случай колебаний, упоминавшийся выше и представленный на рис. 5.36, *а*. Колеблющуюся мембрану разбиваем на две равные части узловой линией, параллельной оси y. При $C = 0$ мембрану разбиваем на две части узловой линией, параллельной оси x, как показано на рис. 5.36, *б*. При $C = D$ получаем

$$v = C\left(\sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}\right) =$$

$$= 2C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}\left(\cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a}\right).$$

Это выражение принимает нулевые значения при $\sin(\pi x/a) = 0$ или $\sin(\pi y/a) = 0$, а также при $\cos(\pi x/a) + \cos(\pi y/b) = 0$. Первые два уравнения имеют в качестве решения границы мембраны, а из третьего уравнения получаем $\pi x/a = \pi - (\pi y/a)$ или $x + y = a$.

Это равенство является уравнением одной диагонали квадрата (см. рис. 5.36, *в*). С другой стороны, на рис. 5.36, *г* представлен случай, когда $C = -D$. Каждую из половин мембраны, образующихся

в двух последних случаях, можно рассматривать как независимо колеблющуюся треугольную мембрану. Частоту любой из показанных на рис. 5.36, *а—г* форм колебаний находим по формуле (5.167), что дает

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gS}{w}\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^2}\right)} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{5gS}{w}}. \qquad (5.170)$$

Точно также можно рассмотреть высшие формы колебаний квадратной или прямоугольной мембраны *.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания, для которых дифференциальное уравнение движения (е) имеет вид

$$\frac{wab}{4g}\ddot{\varphi}_{mn} + S\frac{ab\pi^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\varphi_{mn} = Q_{mn}, \qquad (з)$$

где Q_{mn} выбирается таким образом, чтобы произведение $Q_{mn}\delta\varphi_{mn}$ представляло возможную работу возмущающих сил в главных координатах. В качестве примера возьмем гармоническую силу $P_1(t) = P\cos\omega t$, приложенную в центре мембраны. Вводя возможное перемещение δw_{mn} мембраны [см. выражение (в)], найдем совершаемую силой возможную работу

$$\delta W_P = P\cos\omega t\,\delta\varphi_{mn}\sin(m\pi/2)\times$$
$$\times\sin(n\pi/2) = Q_{mn}\delta\varphi_{mn}.$$

Из этого выражения видно, что когда m и n — нечетные числа, то имеем $Q_{mn} = \pm P\cos\omega t$, в противном случае $Q_{mn} = 0$. Учитывая это, из уравнения (з) с помощью интеграла Дюамеля получаем

$$\varphi_{mn} = \pm\frac{4gP}{abwp_{mn}}\int_0^t \sin p_{mn}(t-t')\cos\omega t'\,dt' =$$
$$= \pm\frac{4gP}{abw(p_{mn}^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos p_{mn}t) \qquad (и)$$

где m и n — нечетные числа;

$$p_{mn}^2 = \frac{gS\pi^2}{w}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

Подставляя выражение (л) в представление (в), получим общее решение для рассматриваемого случая.

Когда на мембрану действует распределенная возмущающая сила $Q(x, y, t)$, имеем

$$Q_{mn} = \int_0^b\int_0^a Q\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy. \qquad (к)$$

---

* Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в гл. 9 кн. Релея. См. **Rayleigh J. W. S.** The theory of sound. Vol. 1. 2nd ed. New York: Dover Publication, 1945, 504 p. (опубликован перевод: **Стретт Дж. В. (Релей).** Теория звука. Т. 1. М. — Л.: Гостехиздат, 1940. 499 с.).

Предположим, например, что в начальный момент времени $t = 0$ к мембране внезапно прикладывается равномерно распределенное давление Q_0. Тогда выражение (к) принимает вид

$$Q_{mn} = \frac{abQ_0}{mn\pi^2}(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi).$$

Когда m и n являются нечетными числами, из этого выражения получаем

$$Q_{mn} = 4abQ_0/(mn\pi^2). \qquad (л)$$

В других случаях нагрузка Q_{mn} равна нулю. Подставляя выражение (л) в уравнение (з) и предполагая, что в начальный момент времени мембрана находится в покое, имеем

$$\varphi_{mn} = \frac{16gQ_0(1 - \cos p_{mn}t)}{w mn\pi^2 p_{mn}^2}. \qquad (м)$$

Отсюда получаем выражение для динамических прогибов при колебаниях, обусловленных внезапно приложенным давлением Q_0:

$$v = \frac{16gQ_0}{\pi^2 w}\sum_m\sum_n \frac{1 - \cos p_{mn}t}{mnp_{mn}^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (н)$$

где m и n — нечетные числа.

Метод Релея—Ритца. При определении частот собственных форм колебаний мембран может оказаться очень полезным метод Релея—Ритца. Для того чтобы воспользоваться этим методом, предположим, что прогибы колеблющейся мембраны задаются выражением

$$v = Z\cos(pt - \alpha), \qquad (о)$$

где Z — функция координат x и y, которая соответствующим образом описывает форму прогибов мембраны, т. е. форму колебаний. Подставляя прогибы (о) в выражение (а) для приращения потенциальной энергии, найдем, что максимальное его значение

$$\Delta U_{\max} \approx \frac{S}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy, \qquad (п)$$

а максимальное значение кинетической энергии в соответствии с выражением (б) составляет

$$T_{\max} = \frac{w}{2g}p^2\iint Z^2\,dx\,dy. \qquad (р)$$

Приравнивая друг другу выражения (п) и (р), находим

$$p^2 = \frac{Sg}{w}\frac{\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy}{\iint Z^2\,dx\,dy}. \qquad (с)$$

Применяя метод Релея—Ритца, возьмем выражение для функции Z, описывающей поверхность прогибов мембраны, в виде ряда

$$Z = a_1\Phi_1(x, y) + a_2\Phi_2(x, y) + a_3\Phi_3(x, y) + \cdots, \qquad (т)$$

каждый член которого удовлетворяет условиям на границе. (Прогибы на границе мембраны должны быть равны нулю). Коэффициенты a_1, a_2, a_3, ... этого ряда должны быть выбраны такими, чтобы выражение (с) давало минимальное значение для p^2. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy\Big/\iint Z^2\,dx\,dy=0$$

или

$$\iint Z^2\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial a_n}\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy-$$

$$-\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial a_n}\iint Z^2\,dx\,dy=0.$$

Подставляя в последнее равенство выражение (с), найдем

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\iint\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2-\frac{p^2w}{gS}Z^2\right\}dx\,dy=0. \qquad (у)$$

Таким образом получаем столько уравнений типа (у), сколько имеется коэффициентов в ряде (т). Все эти уравнения будут линейными относительно неизвестных коэффициентов a_1, a_2, a_3, ... Частотное уравнение для мембраны получаем приравниванием нулю определителя этой системы уравнений.

Рассматривая, например, формы колебаний квадратной мембраны, симметричные относительно осей x и y (рис. 5.37), ряд (т) можно взять в следующем виде:

$$Z = (a^2 - x^2)(a^2 - y^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + a_4x^2y^2 + \cdots).$$

Каждый член этого ряда принимает нулевые значения при $x = y = \pm a$. Тем самым будут удовлетворяться граничные условия.

Для мембраны в форме выпуклого многоугольника граничные условия будут удовлетворяться, если взять

$$Z = [(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)\ldots]\sum_m\sum_n a_{mn}x^my^n,$$

где $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, ... — уравнения сторон многоугольника. Удержав в этом ряду только первый член ($m = 0$, $n = 0$), можно определить, как правило, с достаточной точностью основную форму колебаний. Если требуется найти частоты высших форм колебаний, необходимо удержать большее число членов ряда.

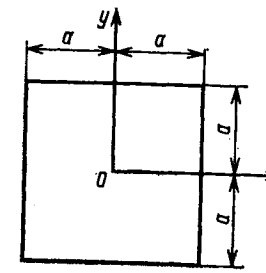


Рис. 5.37

Круговые мембраны. Рассмотрим теперь простейший случай колебания круговой мембраны, когда поверхность ее прогибов симметрична относительно центра круга. В этом случае прогибы зависят только от расстояния по радиусу r, а граничным условиям можно удовлетворить с помощью ряда

$$Z = a_1 \cos(\pi r/2a) + a_2 \cos(3\pi r/2a) + \cdots, \qquad (\text{ф})$$

где a — радиус границы.

Для удобства воспользуемся полярной системой координат, тогда выражение (п) необходимо представить в следующей форме:

$$\Delta U_{\max} \approx \frac{S}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 2\pi r\, dr. \qquad (\text{п}')$$

Затем вместо выражения (р) следует взять

$$T_{\max} = \frac{w}{2g} p^2 \int_0^a Z^2 2\pi r\, dr, \qquad (\text{р}')$$

а равенство (у) заменить на следующее:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^a \left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 - \frac{p^2 w}{gS} Z^2\right\} 2\pi r\, dr = 0. \qquad (\text{у}')$$

Удержав в ряду (ф) только один член и подставив представление $Z = a_1 \cos(\pi r/2a)$ в равенство (у'), получим

$$\frac{\pi^2}{4a^2} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi r}{2a} r\, dr = \frac{p^2 w}{gS} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi r}{2a} r\, dr,$$

откуда следует

$$\frac{\pi^2}{4a^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{p^2 w}{gS}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right)$$

или

$$p = \frac{2{,}415}{a} \sqrt{\frac{gS}{w}}.$$

Точное решение * в этом случае имеет вид

$$p = \frac{2{,}404}{a} \sqrt{\frac{gS}{w}}. \qquad (5.171)$$

Ошибка первого приближения не превышает 0,5 %.

Для того чтобы получить более точное приближение для основной формы колебаний, а также для частот более высоких форм колебаний, необходимо удержать большее число членов ряда (ф). Эти

* См. кн. Релея, цитированную выше.

формы колебаний будут иметь одну, две, три и т. д. *узловых окружностей*, на которых равны нулю прогибы при колебаниях.

Кроме форм колебаний, симметричных относительно центра, круговая мембрана может иметь также такие формы, при которых образуются один, два, три и т. д. диаметров круга, называемых *узловыми диаметрами*, на которых прогибы при колебаниях равны нулю. Несколько форм колебаний круговой мембраны показаны на рис. 5.38, где узловые окружности и узловые диаметры изображены штриховыми линиями.

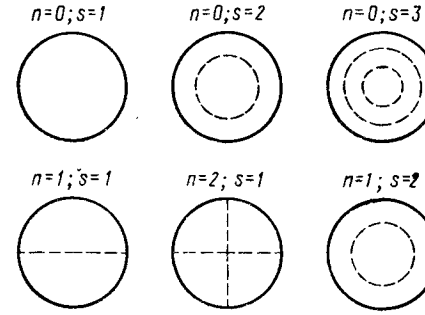


Рис. 5.38

Во всех случаях величину p_{ns}, представляющую собой частоту, можно выразить в виде

$$p_{ns} = \frac{\alpha_{ns}}{a}\sqrt{\frac{gS}{w}}. \qquad (5.172)$$

Значения входящих в эту формулу постоянных α_{ns} приведены в табл. 5.1 *, где n — число узловых диаметров, s — число узловых окружностей. (Граничная окружность входит в число последних).

5.1. Значения α_{ns} для круговой мембраны

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	2,404	3,832	5,135	6,379	7,586	8,780
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
4	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982
5	14,931	16,470	17,960	19,410	20,827	22,220
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,018	25,431
7	21,212	22,760	24,270	25,749	27,200	28,628
8	24,353	25,903	27,421	28,909	30,371	31,813

В предыдущих обсуждениях предполагалось, что мембрана представляет сплошной круг и что она закреплена только на граничной окружности. Полученные выше результаты также могут быть использованы в качестве решения других задач, таких, как мембраны, ограниченные двумя окружностями и двумя радиусами, или мембраны в форме секторов. Рассмотрим, например, мембрану в форме половины круга. Все возможные формы колебаний этой мем-

* Приведенные в табл. 5.1 данные взяты из работы М. Бурже. См. **Bourget M. J.** Mémoire sur mouvement vibratoire des membranes circulaires. — Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 1866, t. 3, S. 55—95.

браны будут входить в число тех форм, которые образуются при колебании круговой мембраны. При этом необходимо только один из узловых диаметров круговой мембраны считать за жестко защемленную границу.

Когда граница мембраны несколько отличается от круговой, частота низшей формы колебаний мембраны примерно равна частоте круговой мембраны, имеющей ту же площадь и то же значение величины gS/w. В общем случае формулу для определения частоты основной формы колебаний мембраны можно взять в виде

$$p=\alpha\sqrt{\frac{gS}{wF}}, \tag{5.173}$$

где F — площадь мембраны. Ниже приведены значения постоянной α, стоящей в этой формуле и показывающей влияние на частоту отношения от круговой формы *:

Круг	$\alpha = 2{,}404\sqrt{\pi} = 4{,}261$
Квадрат	$\alpha = \pi/2 = 4{,}443$
Четверть круга	$\alpha=(5{,}135/2)/\sqrt{\pi} = 4{,}551$
Сектор круга с углом раствора 60°	$\alpha = 6{,}379\sqrt{\pi/6} = 4{,}616$
Прямоугольник ($a/b = 3/2$)	$\alpha = \pi\sqrt{13/6} = 4{,}624$
Равносторонний треугольник	$\alpha = 2\pi\sqrt{\operatorname{tg} 30°} = 4{,}774$
Половина круга	$\alpha = 3{,}832\sqrt{\pi/12} = 4{,}803$
Прямоугольник ($a/b = 2/1$)	$\alpha = \pi\sqrt{5/2} = 4{,}967$
Прямоугольник ($a/b = 3/1$)	$\alpha = \pi\sqrt{10/3} = 5{,}736$

В тех случаях, когда граница отличается от рассмотренных выше, исследование колебаний представляет значительные математические трудности. Однако для случая эллиптической границы имеется точное решение **.

5.24. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН

На рис. 5.39, *а* показана пластина постоянной толщины h, причем толщина ее полагается малой по сравнению с другими размерами. Возьмем в качестве срединной плоскости пластины плоскость xy и предположим, что прогибы малы по сравнению с толщиной h. Кроме того, нормали к срединной плоскости пластины остаются нормалями к деформированной срединной поверхности, образующейся за счет прогибов при колебаниях.

Рассмотрим деформации тонкого слоя малого элемента, показанного в виде заштрихованной площади, расположенной на расстоя-

---

* См. кн. Релея, цитированную выше.

** **Mathieu E.** Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. — Journal de mathematique pures et appliquees (Liouville), Ser. 2, t. 13, 1869, p. 137—203.

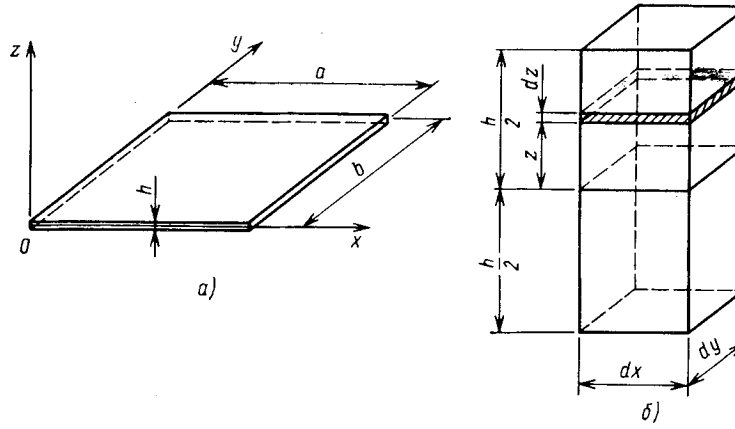


Рис. 5.39

нии z от срединной поверхности (рис. 5.39, *б*). Эти деформации можно представить следующими соотношениями *:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}. \qquad \text{(а)}$$

В этих выражениях v обозначает прогибы (перемещения в направлении оси z) пластины; ε_x, ε_y и γ_{xy} — нормальные и касательная деформации тонкого слоя. Напряжения, соответствующие этим деформациям, определяются соотношениями **

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right); \qquad \text{(б)}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Потенциальная энергия, накопленная в заштрихованном слое малого элемента при деформации:

$$dU = \left(\frac{\varepsilon_x\sigma_x}{2} + \frac{\varepsilon_y\sigma_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}\tau_{xy}}{2}\right)dx\,dy\,dz.$$

---

* Предполагается, что срединная поверхность пластины не деформируется в своей плоскости.

** См. **Timoshenko S., Goodier J. N.** Theory of elasticity. 3rd ed. — New York: McGraw-Hill Book Co., 1970, 567 p. (опубликован перевод: **Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Н.** Теория упругости. — М.: Физматгиз, 1979. 560 с.).

Подставляя сюда выражения (а) и (б), получим

$$dU = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz. \qquad (в)$$

Интегрируя выражение (в) по объему пластины, получим потенциальную энергию изгиба

$$U = \iiint dU = \frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy, \qquad (5.174)$$

где $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — жесткость пластины при изгибе.

Кинетическая энергия поперечных колебаний пластины

$$T = \frac{\rho h}{2}\iint \dot{v}^2\,dx\,dy, \qquad (5.175)$$

где ρh — масса, приходящаяся на единицу поверхности пластины. Полученные выражения для потенциальной U и кинетической T энергий будут использованы при исследовании конкретного вида пластин.

Прямоугольные пластины. В случае прямоугольной пластины (см. рис. 5.39, *а*) со свободно опертыми краями можно поступить так, как и при прямоугольной мембране. Тогда возьмем выражение для прогибов пластины при колебаниях в виде двойного ряда

$$v = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (г)$$

по нормальным функциям, соответствующим рассматриваемому случаю. Легко проверить, что каждый член этого ряда удовлетворяет условиям на краях вида $v = \partial^2 v/\partial x^2 = 0$ при $x = 0$ и $x = a$; при $y = 0$ и $y = b$ имеем $v = \partial^2 v/\partial y^2 = 0$. Если представление (г) подставить в выражение (5.174), для потенциальной энергии получим

$$U = \frac{\pi^4 ab}{8} D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2. \qquad (5.176)$$

При этом для кинетической энергии (5.175) имеем

$$T = \frac{\rho hab}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\varphi}_{mn}^2. \qquad (5.177)$$

Сила инерции, действующая на малый элемент пластины, равна $-\rho h\ddot{v}dxdy$.

Поступая аналогично вышеизложенному и взяв для возможного перемещения выражение

$$\delta v_{mn} = \delta\varphi_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b),$$

получим дифференциальное уравнение движения при свободных колебаниях в главных координатах

$$\rho h \ddot{\varphi}_{mn} + \pi^4 D \varphi_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_{mn} = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

где

$$p = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \qquad (5.178)$$

По этой формуле легко можно подсчитать частоты колебаний пластины. Например, в случае квадратной пластины для частоты низшей формы колебаний имеем

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\pi}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \qquad (5.179)$$

Рассматривая высшие формы колебаний и соответствующие им узловые линии, видим, что приведенные выше обсуждения квадратных мембран (см. рис. 5.36) в равной степени применимы и к квадратным пластинам. Кроме того, без особого труда может быть решена задача о вынужденных колебаниях прямоугольной пластины со свободно опертыми краями. Отметим также, что не встречаются особые математические трудности при исследовании колебаний прямоугольной пластины, две противоположные стороны которой свободно оперты, а две другие либо не закреплены, либо жестко защемлены *.

Однако гораздо более сложными являются задачи исследования колебаний пластин, все стороны которых не закреплены или жестко защемлены. Как обнаружилось, очень удобен при решении таких задач метод Релея—Ритца[14], **. Для того чтобы воспользоваться этим методом, положим

$$v = Z \cos(pt - \alpha), \qquad (д)$$

где Z — функция x и y, приближенно описывающая форму колебаний. Подставляя представление (д) в выражения (5.174) и (5.175),

---

* **Voigt W.** Problem der transversalen Schwingungen rechteckigen Platten. — Nachrichten von der Königlichen Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1893, N. 6, S. 225—230.

** **Ritz W.** Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. — Annalen der Physik, 1909, B. 28, N. 4, S. 737—786. Точность метода Релея — Ритца обсуждалась в работе **Tomatika S.** Vibration of a square plate clamped at four edges. — Phil. Mag., Ser. 7, 1936, v. 21, N. 142, pp. 745—760. См. также работу **Weinstein A., Chien W. Z.** On the vibrations of clamped plate under tension. — Quart. Appl. Math., 1943, v. 1, N. 1, pp. 61—68.

получим следующие выражения для максимальных значений потенциальной и кинетической энергий при колебаниях:

$$U_{\max} = \frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy;$$

$$T = \frac{\rho h p^2}{2}\iint Z^2\,dx\,dy.$$

Приравнивая эти выражения друг другу, для частоты p^2 найдем выражение

$$p^2 = \frac{2}{\rho h}\frac{U_{\max}}{\iint Z^2\,dx\,dy}. \tag{5.180}$$

Возьмем теперь функцию Z в виде следующего ряда:

$$Z = a_1\Phi_1(x, y) + a_2\Phi_2(x, y) + \\ + a_3\Phi_3(x, y) + \ldots, \tag{е}$$

каждый член которого удовлетворяет условиям на границе пластины. Далее необходимо определить такие значения коэффициентов a_1, a_2, a_3, ..., которым соответствовало бы минимальное значение квадрата частоты (5.180). Таким путем приходим к системе уравнений типа

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{p^2\rho h}{D}Z^2\right\} dx\,dy = 0, \tag{5.181}$$

линейных относительно постоянных a_1, a_2, a_3, ... Приравнивая нулю определитель этих уравнений, найдем частотное уравнение для пластины.

В. Ритц применил этот метод к исследованию колебаний квадратной пластины с незакрепленными краями *. Ряд (е) в этом случае был взят в виде

$$Z = \sum_m\sum_n a_{mn}X_m(x)\,Y_n(y), \tag{е'}$$

где $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ — нормальные функции задачи о поперечных колебаниях призматического стержня с незакрепленными кон-

---

* См. ст. В. Ритца, цитированную выше. Применение метода Релея — Ритца для ряда других граничных условий показано в работе **Young D.** Vibration of rectangular plate by Ritz method. — Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1950, v. 17, N. 4. pp. 448—453.

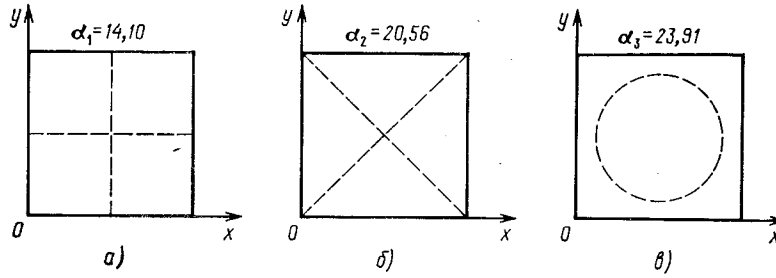


Рис. 5.40

цами (см. п. 5.11). Частоты различных форм колебаний можно определить по формуле

$$p = \frac{\alpha}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \tag{5.182}$$

где α — постоянная, зависящая от формы колебаний. Для трех низших форм эта постоянная имеет следующие значения *: $\alpha_1 = 14{,}10$; $\alpha_2 = 20{,}56$; $\alpha_3 = 23{,}91$. Узловые линии для соответствующих форм колебаний[15] показаны на рис. 5.40, *а—в*.

Круговые пластины. Задача колебания круговой пластины была решена Г. Кирхгофом **, который определил частоты нескольких форм колебаний пластин с незакрепленным контуром. Точное решение этой задачи выражается через функции Бесселя. Ниже излагается приближенное решение, получаемое методом Релея—Ритца, который для низших форм колебаний обычно дает достаточную для практики точность. Применяя этот метод, удобнее преобразовать выражения (5.174) и (5.175) соответственно для потенциальной и кинетической энергий к полярной системе координат.

Из треугольника ABC, изображенного на рис. 5.41, видно, что малое приращение dx координаты x соответствует следующим приращениям полярных координат:

$$dr = dx\cos\theta,\quad d\theta = -dx\sin\theta/r.$$

Тогда, рассматривая прогиб v как функцию от r и θ, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}.$$

---

* Коэффициент Пуассона полагался равным 0,225.

** **Kirchhoff G. R.** Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. — Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), 1850, B. 40, Nr. 1, S. 51—80. Перепечатка: **Kirchhoff G.** Gesammelte Abhandlungen. — Leipzig: Johan Ambrosius Barth, 1882, S. 237—272; Über die Transversalschwingungen eines Stabes von verändlichen Quershnitt. — Monatsbericht der Königlich Preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse, 1879, Oktober, S. 815—828. Перепечатка: **Kirchhoff G.** Gesammelte Abhandlungen. — Leipzig: Johan Ambrosius Barth, 1882, S. 339—351.

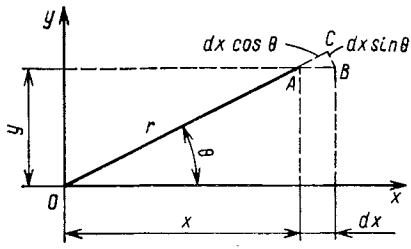


Рис. 5.41

Аналогичным образом находим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

Повторное дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\,\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}; \qquad (ж)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\,\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} +$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} - 2\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}; \qquad (з)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos 2\theta}{r^2} -$$

$$- \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}, \qquad (и)$$

откуда следует

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}; \qquad (к)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right) - \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\right\}^2. \qquad (л)$$

Подставляя выражения (к) и (л) в выражение (5.174) и помещая начало координат в центр пластины, получим

$$U = \frac{D}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right)^2 -\right.$$

$$- 2(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right) +$$

$$\left. + 2(1-\nu)\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\right\}^2\right] r\,d\theta\,dr, \qquad (5.183)$$

где a — радиус пластины. Если форма прогибов пластины симметрична относительно центра пластины, v будет функцией только радиуса r. Тогда выражение (5.183) принимает вид

$$U = \pi D\int_0^{a}\left\{\left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right)^2 - 2(1-\nu)\frac{d^2 v}{dr^2}\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right\} r\,dr. \qquad (5.184)$$

В случае пластины, жестко защемленной на крае, интеграл

$$\iint \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\}^2 \right] r \, d\theta \, dr$$

обращается в нуль. Тогда из выражения (5.183) получаем

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right)^2 r \, d\theta \, dr. \qquad (5.185)$$

Если прогибы рассматриваемой пластины симметричны относительно ее центра, имеем

$$U = \pi D \int_0^a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 r \, dr. \qquad (5.186)$$

Кинетическая энергия круговой пластины в полярной системе координат принимает вид

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \dot{v}^2 r \, d\theta \, dr \qquad (5.187)$$

или в случае центральной симметрии

$$T = \pi \rho h \int_0^a \dot{v}^2 r \, dr. \qquad (5.188)$$

Используя эти выражения для потенциальной и кинетической энергий, можно найти частоты собственных форм колебаний круговой пластины при различных граничных условиях *.

Круговая пластина, жестко защемленная по контуру. Задача о круговой пластине, жестко защемленной по контуру, представляет собой интерес в связи с приложением к расчету телефонных мембран и другим аналогичным случаям. Используя метод Релея—Ритца, предположим, что искомое решение имеет вид (е), но Z является функцией как r, так и θ. При колебаниях по низшей форме конфигурация прогибов колеблющейся пластины симметрична относительно центра пластины, поэтому Z будет функцией только r. Если функцию Z задавать в виде ряда

$$Z = a_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 + a_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^3 + \cdots, \qquad (м)$$

условие симметрии прогибов будет выполнено. Условия на контуре будут также выполняться, поскольку каждый член ряда (м),

* Вынужденные колебания круговых пластин были исследованы В. Флюгге (см. **Flügge W.** Die erzwungenen Schwingungen der Kreisplatten. — Zeitschrift technische Physik, 1932, B. 13, N. 4, S. 199—204).

а также их первые производные по r при $r = a$ будут обращаться в нуль.

Условие минимума, соответствующее равенству (5.181), в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^a\left\{\left(\frac{d^2Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}\right)^2-\frac{p^2\rho h}{D}Z^2\right\}r\,dr=0. \qquad (5.189)$$

Удержав только один член ряда (м) и подставив его в равенство (5.189), получим

$$\frac{96}{9a^2}-\frac{p^2\rho h}{D}\frac{a^2}{10}=0,$$

откуда

$$p=(10{,}33/a^2)\sqrt{D/(\rho h)}. \qquad (5.190)$$

Для того чтобы получить более близкое к точному значение для частоты колебаний, удержим в ряде (м) два первых члена. В результате получим

$$\int_0^a\left(\frac{d^2Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}\right)r\,dr=\frac{96}{9a^2}\left(a_1^2+\frac{3}{2}a_1a_2+\frac{9}{10}a_2^2\right);$$

$$\int_0^a Z^2r\,dr=\frac{a^2}{10}\left(a_1^2+\frac{5}{3}a_1a_2+\frac{5}{7}a_2^2\right).$$

Из условия (5.189) находим

$$\begin{aligned}a_1\left(\frac{192}{5}-\frac{\lambda}{5}\right)+a_2\left(\frac{144}{9}-\frac{\lambda}{6}\right)&=0;\\ a_1\left(\frac{144}{9}-\frac{\lambda}{6}\right)+a_2\left(\frac{96}{5}-\frac{\lambda}{7}\right)&=0,\end{aligned} \qquad (н)$$

где

$$\lambda=a^4p^2\rho h/D. \qquad (о)$$

Приравнивая нулю определитель системы (н), получим

$$\lambda^2-\frac{204\cdot48}{5}\lambda+768\cdot36\cdot7=0,$$

откуда имеем

$$\lambda_1=104{,}3;\ \lambda_2=1854.$$

Подстановка этих значений в (о) дает

$$p_1=\frac{10{,}21}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}},\quad p^2=\frac{43{,}06}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \qquad (5.191)$$

Таким образом, видим, что p_1 является уточненным значением частоты низшей формы колебаний круговой пластины, а p_2 представляет грубое приближение для частоты второй формы колебаний, когда колеблющаяся пластина имеет одну узловую окружность. С помощью

указанного подхода могут быть исследованы также и формы колебаний с узловыми диаметрами.

Во всех рассмотренных выше случаях частоту колебаний можно определить по формуле

$$p = \frac{\alpha}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \qquad (5.192)$$

Некоторые значения постоянной α (для заданного числа s узловых диаметров и заданного числа n узловых окружностей) приведены в табл. 5.2.

5.2. Значения α для круговой пластины

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$
0	10,21	21,22	34,84
1	39,78	—	—
2	88,90	—	—

5.3. Значения α для круговой пластины с незакрепленным контуром

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	—	—	5,251	12,23
1	9,076	20,52	35,24	52,91
2	38,52	59,86	—	—

Если пластину погрузить в воду, частоты ее собственных колебаний могут значительно измениться. Для того чтобы учесть влияние массы жидкости на частоту основной формы колебаний, вместо формулы (5.192) возьмем следующую *:

$$p_1 = \frac{10{,}21}{a^2\sqrt{1+\eta}}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \qquad (5.193)$$

5.4. Значения α для круговой пластины, жестко защемленной в центре

s	0	1	2	3
α	3,75	20,91	60,68	119,7

где $\eta = 0{,}6689\,(\rho_1/\rho)\,(a/h)$; ρ_1/ρ — — отношение плотности жидкости к плотности материала пластины. Рассмотрим, например, круговую стальную пластину, жестко защемленную по контуру и погруженную в воду. Если $a = 8{,}9\cdot 10^{-2}$ м, $h = 3{,}2\cdot 10^{-3}$ м, то величина η принимает значение

$$\eta = 0{,}6689\left(\frac{1}{7{,}8}\right)\left(\frac{8\cdot 9\cdot 10^{-2}}{3\cdot 2\cdot 10^{-3}}\right) = 2{,}40.$$

Тогда имеем $1/\sqrt{1+\eta} = 0{,}542$, а это означает, что частота низшей формы колебаний будет меньше в 0,542 раза по отношению к исходной.

Круговая пластина при других граничных условиях. Во всех случаях частоты колебаний круговой пластины можно определить

* **Lamb H.** On the vibrations of an elastic plate in contact with water. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1920, v. 98, N. A690, pp. 205—216.

по формуле (5.192), подобрав соответствующее значение постоянной α. Для круговой пластины с незакрепленным контуром, при колебаниях которой образуются n узловых диаметров и s узловых окружностей, постоянная α принимает значения *, приведенные в табл. 5.3.

Для круговой пластины, жестко защемленной в центре и образующей при колебаниях s узловых окружностей, значения ** α приведены в табл. 5.4. Частоты форм колебаний, имеющих узловые диаметры, будут совпадать с частотами пластины с незакрепленным контуром[16].

---

* Коэффициент Пуассона при этом полагался равным $^1/_3$.

** См. **Southwell R. V.** On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre and on the effects of rotation. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1922, v. 101, N. A709, pp. 133—153. Коэф ициент Пуассона здесь полагался равным 0,3.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

П.1. ВВЕДЕНИЕ

По ряду затронутых в этой книге вопросов было весьма желательным использование вычислительной машины для облегчения расчетов. Эти вопросы касались вычислений и для своего решения требовали выполнения большого числа арифметических операций. Поэтому были разработаны и в данном приложении приведены несколько полезных для изучения программ. Они записаны на языке с разделением времени * БЕЙСИК, который широко распространен и несложен в изучении. Пользователь ЭВМ, работающий с языками ФОРТРАН, АЛГОЛ и др., может транслировать приводимые здесь программы, не заручаясь согласием автора.

П.2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В п. 1.15 тема численных решений обсуждалась применительно к линейным системам с одной степенью свободы. Для определения динамических перемещений при отсутствии демпфирования в подобной системе и при действии на нее возмущающих сил, описываемых кусочно-постоянными и кусочно-линейными функциями, там приводятся выражения (1.76в), (1.76г), (1.77в) и (1.77г). Программа CONFORCE построена на использовании первых двух из этих выражений в алгоритме, вычисляющем динамические перемещения при действии кусочно-постоянной возмущающей силы. Текст этой программы приведен ниже вместе с результатами расчетов по ней для тестовой задачи, проведенных для отладки программы. Этот пример относится к системе с одной степенью свободы, жесткость пружины равна $k = 0{,}18 \cdot 10^3$ Н/м, период собственных колебаний составляет $\tau = 10$ с. В качестве возмущающей силы прикладывается единичная ступенчатая функция, динамические перемещения вычисляются на пяти постоянных шагах по времени, равных $\Delta t = 1$ с. В конце пятого шага по времени перемещение x_5 должно равняться 0,0508 м, а скорость v_5 должна принять значение 0 м/с. Проверка этих результатов показывает, что их точность равна машинной точности.

Программа CONFORCE была переделана во вторую программу, названную LINFORCE и предназначенную для вычисления динамических перемещений системы с одной степенью свободы при действии возмущающей силы в виде кусочно-линейной функции. В этом случае вместо формул (1.76в) и (1.76г) используются рекуррентные формулы (1.77в) и (1.77г). Поэтому потребовалось несколько изменить текст программы CONFORCE, чтобы учесть различие этих формул. Хотя программа LINFORCE является в какой-то мере более гибкой, чем программа CONFORCE, обе они полезны при исследовании неустановившегося поведения системы в случаях когда возмущающие силы описываются функциями, которые не относятся к классу непрерывных аналитических функций.

---

* **Kemeny J. G., Kurtz T. E.** BASIC programming. — New-York: J. Wiley, 1967. 122 p.

П.3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В п. 2.6 описаны численные методы решения нелинейных уравнений движения систем с одной степенью свободы. Два подробно обсужденных там подхода представляют методы осредненных и линейных ускорений, включающие итерации на каждом шаге по времени. Экстраполяционные формулы для метода осредненных ускорений составляют выражения (2.64)—(2.69). Для демонстрации возможности применения этих формул к примерам 1, 2 и 3 из п. 2.6 здесь представлены три специализированные программы под названием AVAC1A, AVAC2A и AVAC3A.

Программа AVAC1A вычисляет динамические перемещения демпфированной линейной системы при действии возмущающей силы в виде ступенчатой функции Q_1 и сравнивает полученные результаты с точным решением. Данные, приведенные в конце текста программы, соответствуют тому, что было задано в примере 1 из п. 2.6, а результаты расчетов вошли в табл. 2.1а. Эту программу можно переделать в программы AVAC1B, AVAC1C и т. д., относящиеся к иным типам возмущающих сил, путем переделки процедур, в которых вычисляются ускорение и точное значение перемещения на каждом шаге по времени.

Программа AVAC2A предназначена для определения приближенных значений динамических перемещений простого маятника при задании начальных условий на перемещения и скорость. Данные, содержащиеся в конце программы, относятся к примеру 2 из п. 2.6, а результаты расчетов помещены в табл. 2.2. С целью исследования других систем с геометрическими нелинейностями типа рассмотренных в задачах из п. 2.1 можно составить варианты этой программы, озаглавив их AVAC2B, AVAC2C и т. д.

Программа AVAC3A предназначена для определения приближенных значений динамических перемещений демпфированной системы с пружиной, имеющей возрастающую жесткость и зависимость нагрузки от перемещения в виде кубической функции (см. пример 3 из п. 2.6). Предполагается, что в системе имеется вязкое демпфирование и на нее действует возмущающая сила в виде ступенчатой функции Q_1. Данные в конце программы относятся к примеру 3, результаты расчетов сведены в табл. 2.3. Для систем, чьи зависимости нагрузки от перемещения имеют нелинейности, типа рассматривавшихся в задачах к п. 2.2, можно составить программы, озаглавив их AVAC3B и т. д.

Набор специализированных программ под названием AVAC4A, 4B и т. д. можно составить для исследования систем с кусочно-линейными характеристиками, типа приводившихся в задачах к п. 2.5. Кроме того, любая из программ, использующая метод осредненных ускорений, может быть без особого труда переделана применительно к методу линейных ускорений, если вместо выражения (2.65) взять формулу (2.74). По существу для перехода от программ AVAC1A, AVAC2A и AVAC3A к программам LINAC1A, LINAC2A и LINAC3A требуется изменить только несколько строк в каждой из этих программ.

Более того, при программировании можно использовать как формулы экстраполяции, приведенные в п. 2.6, так и итерационный подход. Но программа, основанная на последнем, в приложение не включена.

П.4. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Итерационный метод вычисления частот и форм колебаний для линейных систем со многими степенями свободы был описан в п. 4.7. Рекуррентными формулами для определения главного собственного значения и соответствующего собственного вектора являются выражения (4.100)—(4.102), соответствующие формулы для задачи на собственные значения, колеблющейся системы, суть (4.103)—(4.105). Кроме того, введение ограничений на формы колебаний и использование «выметающих» матриц для нахождения первой и второй форм колебаний приводит к алгоритму, использующему выражения (4.106)—(4.109). Все эти выражения включены в программу

EIGIT3 для определения методом итераций первых трех собственных значений и собственных векторов системы со многими степенями свободы. Распечатка этой программы содержит исходные данные для трехмассовой системы, показанной на рис. 4.1, *а*, которая использовалась в качестве числового примера в п. 4.7 (см. табл. 4.1 и 4.2). EIGIT3 удобно использовать для исследования систем со многими степенями свободы с положительно определенной матрицей коэффициентов (см. задачи из п. 4.7). Эту программу можно усовершенствовать, чтобы иметь возможность исследовать более трех форм колебаний, и тогда ее можно использовать в качестве блока для описываемой ниже программы DYNACON3.

П.5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В п. 4.11 метод нормальных форм колебаний применен к решению задачи исследования неустановившегося поведения демпфированной линейной системы со многими степенями свободы при действии возмущающих сил, описываемых кусочно-постоянными и кусочно-линейными функциями. Программа DYNACON3 основана на применении выражений (4.155а) и (4.155б) для определения первых трех форм колебаний системы при действии возмущающей силы в виде кусочно-постоянной функции. Эта программа сочетает логику программ CONFORCE и EIGIT3 с концепцией координатных преобразований, лежащей в основе метода динамических исследований с помощью нормальных форм колебаний.

Данные, помещенные в конце распечатки программы DYNACON3, относятся к трехмассовой системе, показанной на рис. 4.3, которая представляет одну из отладочных задач. В этом примере система имела следующие параметры: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0{,}05$; $k_1 = k_2 = k_3 = 0{,}18 \cdot 10^3$ Н/м; $m_1 = m_2 = m_3 = 0{,}18 \cdot 10^3$ Н·с^2/м. Начальные перемещения и скорости были равны нулю, и к третьей массе была приложена сила в виде ступенчатой функции, равной единице. Поведение системы исследуется на интервале времени длиной 10 с с постоянным шагом по времени, равным $\Delta t = 1$ с. После выполнения программы печатаются результаты в виде собственных значений, собственных векторов и динамических перемещений по трем первым формам колебаний системы. Приведенные там числа были подтверждены путем ручного счета, что позволяет рассматривать эту программу как вполне корректную.

Как уже отмечалось в п. 4.11, программа DYNACON3 была использована для получения результатов, приведенных в табл. 4.3 и показанных на рис. 4.5. Кроме того, результаты, полученные с помощью аналогичной программы DYNALIN3, помещены в табл. 4.4 и показаны на рис. 4.6. Эта программа позволяет определить динамические перемещения по первым трем формам колебаний демпфированной системы, на которую действует возмущающая сила в виде кусочно-линейной функции. Она была получена путем модификации программы DYNACON3, где вместо выражений (4.155а) и (4.155б) были использованы выражения (4.158а) и (4.158б). Читателю было бы полезно в качестве упражнения определить вид тех изменений, которые при этом необходимо сделать. Энергичному программисту может представиться интересным расширить возможности программы DYNALIN3, чтобы число форм колебаний системы стало входным параметром, который мог бы принимать целочисленные значения не от 1 до 3, а от 1 до n. Было бы полезно включить в круг возможностей программы исследование формы движения как абсолютно жесткого тела (см. п. 4.11), при этом некоторые численные методы решения задач на собственные значения можно заменить итерационными методами. Суммируя сказанное, отметим, что существует много интересных и полезных с точки зрения программирования возможностей и в данной книге была затронута только малая их часть.

COMPUTER PROGRAM

```
  1.      REM-----VIBRATIONS PROGRAM  CONFORCE                W. WEAVER, JR.
  2.      REM   (PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION)         STANFORD UNIV.
  3.      REM-----NOTATION
  4.      REM       N1 = NUMBER OF TIME STEPS
  5.      REM       T = TIME;  D = TIME INTERVAL
  6.      REM       Q = MAGNITUDE OF FORCING FUNCTION
  7.      REM       X = DISPLACEMENT;  V = VELOCITY
  8.      REM       K = SPRING CONSTANT
  9.      REM       T1 = NATURAL PERIOD;  P = ANGULAR FREQUENCY
 10.      REM       X0,V0 = INITIAL VALUES OF X AND V
 11.      DIM T(100),D(100),Q(100),X(100),V(100)
 12.      READ K,T1,X0,V0,N1
 13.      P = 2*PI/T1
 14.      MAT READ T(N1),Q(N1)
 15.      PRINT 'UNDAMPED RESPONSE TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION'
 16.      PRINT
 17.      PRINT
 18.      PRINT 'T(I)  D(I)  Q(I)    X(I)           V(I)'
 19.      PRINT
 20.      PRINT ' 0      -      -     ';X0,V0
 21.      REM-----COMPUTE AND PRINT RESPONSE
 22.      D(1) = T(1)
 23.      X1 = X0
 24.      V1 = V0
 25.      FOR I = 1 TO N1
 26.          IF I = 1 THEN GO TO 30
 27.          D(I) = T(I) - T(I-1)
 28.          X1 = X(I-1)
 29.          V1 = V(I-1)
 30.          C1 = COS(P*D(I))
 31.          C2 = SIN(P*D(I))
 32.          X(I) = X1*C1 + V1*C2/P + Q(I)*(1 - C1)/K
 33.          V(I) = - X1*C2*P + V1*C1 + Q(I)*C2*P/K
 34.          PRINT T(I);D(I);Q(I);X(I),V(I)
 35.      NEXT I
 36.      PRINT
 37.      STOP
 38.      DATA  1,10,0,0,5
 39.      DATA  1,2,3,4,5
 40.      DATA  1,1,1,1,1
 41.      END
COMMAND ? go

UNDAMPED RESPONSE TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION

T(I)  D(I)  Q(I)    X(I)            V(I)

 0     -     -     0               0
 1     1     1     .190983         .3693163
 2     1     1     .6909829        .5975664
 3     1     1     1.309016        .5975664
 4     1     1     1.809015        .3693166
 5     1     1     1.999998        1.430511E-06

LINE    37   (4000) STOP EXECUTED
COMMAND ?
```

COMPUTER PROGRAM

```
  1.      REM-----VIBRATIONS PROGRAM--AVAC3A
  2.      REM     (AVERAGE-ACCELERATION METHOD)
  3.      REM-----NOTATION
  4.      REM         T = TIME;  D = TIME INTERVAL
  5.      REM         X,Y,Z = DISPLACEMENT, VELOCITY, AND ACCELERATION
  6.      REM         M,C,K = MASS, DAMPING, AND SPRING CONSTANTS
  7.      REM         S = SCALAR MULTIPLYING NONLINEAR TERM
  8.      REM         X0,Y0 = INITIAL VALUES OF X AND Y AT TIME T = 0
  9.      REM         T1 = TIME RANGE OF INTEREST
 10.      REM         N1 = NUMBER OF TIME INTERVALS
 11.      REM         E1 = ALLOWABLE ERROR RATIO
 12.      REM         Q1 = MAGNITUDE OF STEP FUNCTION
 13.      DIM T(100),X(100),Y(100),Z(100)
 14.      READ M,C,K,S,X0,Y0,T1,N1,E1,Q1
 15.      D = T1/N1
 16.      PRINT 'AVAC3A-----TIME INTERVAL = ', D
 17.      PRINT
 18.      PRINT
 19.      PRINT 'TIME            ITERS.          APPROX. X       APPROX. Y'
 20.      PRINT
 21.      PRINT ' 0               -              ',X0,Y0
101.      REM-----INITIALIZE Z0 AND ITERATE Y(I),X(I),Z(I)
102.      Z0 = (Q1 - C*Y0 - K*(X0 + S*X0*X0*X0))/M
103.      FOR I = 1 TO N1
104.          T(I) = I*D
105.          IF I = 1 THEN GO TO 111
106.          IF I = 2 THEN GO TO 115
107.          A = Y(I-1) + Z(I-1)*D/2
108.          B = X(I-1) + Y(I-1)*D/2
109.          Y1 = Y(I-2) + 2*Z(I-1)*D
110.          GO TO 118
111.          A = Y0 + Z0*D/2
112.          B = X0 + Y0*D/2
113.          Y1 = Y0 + Z0*D
114.          GO TO 118
115.          A = Y(1) + Z(1)*D/2
116.          B = X(1) + Y(1)*D/2
117.          Y1 = Y0 + 2*Z(1)*D
118.          J = 1
119.          GO TO 123
120.          J = J + 1
121.          X(I) = X1
122.          Y1 = A + Z1*D/2
123.          X1 = B + Y1*D/2
124.          Z1 = (Q1 - C*Y1 -K*(X1 + S*X1*X1*X1))/M
125.          IF J = 10 THEN GO TO 127
126.          IF ABS(X1 - X(I)) >= E1*ABS(X1) THEN GO TO 120
127.          X(I) = X1
128.          Y(I) = Y1
129.          Z(I) = Z1
130.          PRINT T(I),J,X(I),Y(I)
131.      NEXT I
132.      PRINT
133.      STOP
134.      DATA 100,0,400,2,0,10,0.5,20,0.0001,0
135.      END
COMMAND ?
```

```
    1.      REM-----VIBRATIONS PROGRAM--AVAC2A
    2.      REM     (AVERAGE-ACCELERATION METHOD)
    3.      REM-----NOTATION
    4.      REM         T = TIME;  D = TIME INTERVAL
    5.      REM         X,Y,Z = DISPLACEMENT, VELOCITY, AND ACCELERATION
    6.      REM         K1 = P**2 = G/L FOR A SIMPLE PENDULUM
    7.      REM         X0,Y0 = INITIAL VALUES OF X AND Y AT TIME T = 0
    8.      REM         T1 = TIME RANGE OF INTEREST
    9.      REM         N1 = NUMBER OF TIME INTERVALS
   10.      REM         E1 = ALLOWABLE ERROR RATIO
   11.      DIM T(100),X(100),Y(100),Z(100)
   12.      READ K1,X0,Y0,T1,N1,E1
   13.      D = T1/N1
   14.      PRINT 'AVAC2A-----TIME INTERVAL = ', D
   15.      PRINT
   16.      PRINT
   17.      PRINT 'TIME            ITERS.          APPROX. X       APPROX. Y'
   18.      PRINT
   19.      PRINT ' 0                                ',X0,Y0
  101.      REM-----INITIALIZE Z0 AND ITERATE Y(I),X(I),Z(I)
  102.      Z0 = - K1*SIN(X0)
  103.      FOR I = 1 TO N1
  104.          T(I) = I*D
  105.          IF I = 1 THEN GO TO 111
  106.          IF I = 2 THEN GO TO 115
  107.          A = Y(I-1) + Z(I-1)*D/2
  108.          B = X(I-1) + Y(I-1)*D/2
  109.          Y1 = Y(I-2) + 2*Z(I-1)*D
  110.          GO TO 118
  111.          A = Y0 + Z0*D/2
  112.          B = X0 + Y0*D/2
  113.          Y1 = Y0 + Z0*D
  114.          GO TO 118
  115.          A = Y(1) + Z(1)*D/2
  116.          B = X(1) + Y(1)*D/2
  117.          Y1 = Y0 + 2*Z(1)*D
  118.          J = 1
  119.          GO TO 123
  120.          J = J + 1
  121.          X(I) = X1
  122.          Y1 = A + Z1*D/2
  123.          X1 = B + Y1*D/2
  124.          Z1 = - K1*SIN(X1)
  125.          IF J = 10 THEN GO TO 127
  126.          IF ABS(X1 - X(I)) >= E1*ABS(X1) THEN GO TO 120
  127.          X(I) = X1
  128.          Y(I) = Y1
  129.          Z(I) = Z1
  130.          PRINT T(I),J,X(I),Y(I)
  131.      NEXT I
  132.      PRINT
  133.      STOP
  134.      DATA 3.437687,1.570796,0,2,20,0.0001
  135.      END
COMMAND ?
```

COMPUTER PROGRAM

```
  1.      REM-----VIBRATIONS PROGRAM--AVAC1A
  2.      REM     (AVERAGE-ACCELERATION METHOD)
  3.      REM-----NOTATION
  4.      REM         T = TIME;  D = TIME INTERVAL
  5.      REM         X,Y,Z = DISPLACEMENT, VELOCITY, AND ACCELERATION
  6.      REM         M,C,K = MASS, DAMPING, AND SPRING CONSTANTS
  7.      REM         X0,Y0 = INITIAL VALUES OF X AND Y AT TIME T = 0
  8.      REM         T1 = TIME RANGE OF INTEREST
  9.      REM         N1 = NUMBER OF TIME INTERVALS
 10.      REM         E1 = ALLOWABLE ERROR RATIO
 11.      REM         Q1 = MAGNITUDE OF STEP FUNCTION
 12.      DIM T(100),X(100),Y(100),Z(100)
 13.      READ M,C,K,X0,Y0,T1,N1,E1,Q1
 14.      N = C/(2*M)
 15.      P = SQR(K/M - N*N)
 16.      D = T1/N1
 17.      PRINT 'AVAC1A-----TIME INTERVAL = ', D
 18.      PRINT
 19.      PRINT
 20.      PRINT 'TIME            ITERS.          APPROX. X       EXACT X'
 21.      PRINT
 22.      PRINT ' 0                -                ',X0,X0
101.      REM-----INITIALIZE Z0 AND ITERATE Y(I),X(I),Z(I)
102.      Z0 = (Q1 - C*Y0 - K*X0)/M
103.      FOR I = 1 TO N1
104.          T(I) = I*D
105.          IF I = 1 THEN GO TO 111
106.          IF I = 2 THEN GO TO 115
107.          A = Y(I-1) + Z(I-1)*D/2
108.          B = X(I-1) + Y(I-1)*D/2
109.          Y1 = Y(I-2) + 2*Z(I-1)*D
110.          GO TO 118
111.          A = Y0 + Z0*D/2
112.          B = X0 + Y0*D/2
113.          Y1 = Y0 + Z0*D
114.          GO TO 118
115.          A = Y(1) + Z(1)*D/2
116.          B = X(1) + Y(1)*D/2
117.          Y1 = Y0 + 2*Z(1)*D
118.          J = 1
119.          GO TO 123
120.          J = J + 1
121.          X(I) = X1
122.          Y1 = A + Z1*D/2
123.          X1 = B + Y1*D/2
124.          Z1 = (Q1 - C*Y1 - K*X1)/M
125.          IF J = 10 THEN GO TO 127
126.          IF ABS(X1 - X(I)) >= E1*ABS(X1) THEN GO TO 120
127.          X(I) = X1
128.          Y(I) = Y1
129.          Z(I) = Z1
130.          E = EXP(-N*T(I))*(X0*COS(P*T(I)) + (YC+N*X0)*SIN(P*T(I)))/P)
131.          E = EXP(-N*T(I))*(COS(P*T(I)) + N*SIN(P*T(I)))/P)
132.          E = E + (Q1/K)*(1 - E)
133.          PRINT T(I),J,X(I),E
134.      NEXT I
135.      PRINT
136.      STOP
137.      DATA 1,1.2,9,0,0,2,20,0.0001,9
138.      END
COMMAND ?
```

```
 1.     REM-----VIBRATIONS PROGRAM--EIGIT3
 2.     REM  (EIGENVALUES AND VECTORS BY ITERATION)
 3.     REM-----NOTATION
 4.     REM          A = COEFFICIENT MATRIX (OF ORDER N)
 5.     REM          M = MASS VECTOR
 6.     REM          X,Y,Z = EIGENVECTORS
 7.     REM          E = EIGENVALUE
 8.     REM          S = SWEEPING MATRIX
 9.     REM          E1 = ALLOWABLE ERROR
10.     DIM A(10,10),M(10),X(10),Y(10),Z(10,2),S(10,10)
11.     READ N,E1
12.     MAT READ A(N,N),M(N)
13.     PRINT 'EIGIT3-----THREE EIGENVALUES AND VECTORS BY ITERATION'
14.     PRINT
15.     I = 0
16.     REM-----ITERATE AND PRINT EIGENVALUE AND EIGENVECTOR
17.     I = I + 1
18.     MAT X = CON(N)
19.     FOR K = 1 TO 20
20.         MAT Y = A*X
21.         E = Y(N)/X(N)
22.         J1 = 0
23.         FOR J = 1 TO N
24.             Y(J) = Y(J)/Y(N)
25.             IF ABS(Y(J) - X(J)) < E1 THEN J1 = J1 + 1
26.             X(J) = Y(J)
27.         NEXT J
28.         IF J1 = N THEN GO TO 30
29.     NEXT K
30.     PRINT
31.     PRINT 'MODE ';I;'EIGENVALUE = ';E;'NO. OF ITERS. = ';K
32.     PRINT 'EIGENVECTOR'
33.     MAT PRINT X
34.     IF I = 3 THEN GO TO 57
35.     REM-----SET UP AND APPLY SWEEPING MATRIX
36.     MAT S = IDN(N,N)
37.     IF I = 2 THEN GO TO 46
38.     S(1,1) = 0
39.     Z(1,1) = X(1)
40.     C = M(1)*X(1)
41.     FOR J = 2 TO N
42.         S(1,J) = - M(J)*X(J)/C
43.         Z(J,1) = X(J)
44.     NEXT J
45.     GO TO 54
46.     S(2,2) = 0
47.     Z(1,2) = X(1)
48.     Z(2,2) = X(2)
49.     C = M(2)*(Z(1,1)*Z(2,2) - Z(1,2)*Z(2,1))
50.     FOR J = 3 TO N
51.         Z(J,2) = X(J)
52.         S(2,J) = - M(J)*(Z(1,1)*Z(J,2) - Z(1,2)*Z(J,1))/C
53.     NEXT J
54.     MAT B = A*S
55.     MAT A = B
56.     GO TO 17
57.     PRINT
58.     STOP
59.     DATA  3, 0.0001
60.     DATA  1,1,1, 1,2,2, 1,2,3
61.     DATA  1,1,1
62.     END
COMMAND ?
```

COMPUTER PROGRAM

```
REM-----VIBRATIONS PROGRAM--DYNACON3
REM   (DYNAMIC RESPONSE OF MULTI-DEGREE SYSTEM
REM    TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION)
REM-----NOTATION
REM        N = NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM
REM        N1 = NUMBER OF TIME STEPS
REM        E1 = ALLOWABLE ERROR FOR EIGENVECTORS
REM        G1 = MODAL DAMPING RATIO (GAMMA)
REM        I1 = TYPE INDICATOR (0-STIFFNESS;  1-FLEXIBILITY)
REM        A = STIFFNESS OR FLEXIBILITY MATRIX
REM        M = MASS VECTOR
REM        B,C = INITIAL DISPLACEMENTS AND VELOCITIES
REM        P = VECTOR OF LOAD FACTORS
REM        T = TIME;  D = TIME INTERVAL
REM        F = FORCING FUNCTION (PIECEWISE-CONSTANT)
REM        E = EIGENVALUES;  X,Y,Z = EIGENVECTORS
REM        S = SWEEPING MATRIX
REM        G,H = INITIAL DISPLS. AND VELS. IN NORMAL COORDS.
REM        Q = NORMAL-MODE LOADS
REM        P1,P2 = UNDAMPED AND DAMPED ANGULAR FREQUENCIES
REM        U,V = NORMAL-MODE DISPLACEMENTS AND VELOCITIES
REM        R = RESPONSE IN ORIGINAL COORDINATES
REM        W,L = WORKING STORAGE
DIM A(10,10),M(10),B(10),C(10),P(10),T(100),D(100),F(100),E(3),X(10)
DIM Y(10),Z(10,3),Q(3,100),U(3,100),V(3,100),R(1,10),W(10,10),L(10)
READ N,N1,E1,G1,I1
MAT READ A(N,N),M(N),B(N),C(N),P(N),T(N1),F(N1)
IF I1 = 0 THEN MAT A = INV(A)
FOR K = 1 TO N
    FOR J = 1 TO N
        A(J,K) = A(J,K)*M(K)
    NEXT J
NEXT K
D(1) = T(1)
FOR J = 2 TO N1
    D(J) = T(J) - T(J-1)
NEXT J
PRINT 'DYNACON3--DYNAMIC RESPONSE OF FIRST THREE MODES OF DAMPED'
PRINT 'MULTI-DEGEE SYSTEM TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION'
PRINT
PRINT
PRINT 'THREE EIGENVALUES AND VECTORS BY ITERATION'
MAT Z = ZER(N,3)
I = 0
REM-----ITERATE AND PRINT EIGENVALUE AND ANGULAR FREQUENCY
I = I + 1
MAT X = CON(N)
FOR K = 1 TO 20
    MAT Y = A*X
    E(I) = Y(N)/X(N)
    J1 = 0
    FOR J = 1 TO N
        Y(J) = Y(J)/Y(N)
        IF ABS(Y(J) - X(J)) < E1 THEN J1 = J1 + 1
        X(J) = Y(J)
    NEXT J
    IF J1 = N THEN GO TO 59
NEXT K
FOR J = 1 TO N
    Z(J,I) = X(J)
NEXT J
P1 = 1/SQR(E(I))
```

```
 63.      PRINT
 64.      PRINT 'MODE ';I;'E-VAL. = ';E(I);'ANG. FREQ. = ';P1;'ITERS. = ';K
 65.      IF I = 3 THEN GO TO 84
 66.      REM-----SET UP AND APPLY SWEEPING MATRIX
 67.      MAT S = IDN(N,N)
 68.      IF I = 2 THEN GO TO 75
 69.      S(1,1) = 0
 70.      C1 = M(1)*X(1)
 71.      FOR J = 2 TO N
 72.          S(1,J) = - M(J)*X(J)/C1
 73.      NEXT J
 74.      GO TO 81
 75.      IF N = 2 THEN GO TO 84
 76.      S(2,2) = 0
 77.      C2 = M(2)*(Z(1,1)*Z(2,2) - Z(1,2)*Z(2,1))
 78.      FOR J = 3 TO N
 79.          S(2,J) = - M(J)*(Z(1,1)*Z(J,2) - Z(1,2)*Z(J,1))/C2
 80.      NEXT J
 81.      MAT W = A*S
 82.      MAT A = W
 83.      GO TO 46
 84.      PRINT
 85.      PRINT 'MODAL MATRIX'
 86.      PRINT
 87.      MAT PRINT Z
 88.      REM-----NORMALIZE MODAL MATRIX WITH RESPECT TO M
 89.      FOR I = 1 TO 3
 90.          C1 = 0
 91.          FOR J = 1 TO N
 92.              C1 = C1 + M(J)*Z(J,I)*Z(J,I)
 93.          NEXT J
 94.          IF C1 = 0 THEN GO TO 100
 95.          C1 = SQR(C1)
 96.          FOR J = 1 TO N
 97.              Z(J,I) = Z(J,I)/C1
 98.          NEXT J
 99.      NEXT I
100.      REM-----TRANSFORM INFORMATION TO NORMAL COORDINATES
101.      FOR I = 1 TO 3
102.          G(I) = H(I) = L(I) = 0
103.          FOR K = 1 TO N
104.              G(I) = G(I) + Z(K,I)*M(K)*B(K)
105.              H(I) = H(I) + Z(K,I)*M(K)*C(K)
106.              L(I) = L(I) + Z(K,I)*P(K)
107.          NEXT K
108.          FOR J = 1 TO N1
109.              Q(I,J) = L(I)*F(J)
110.          NEXT J
111.      NEXT I
112.      REM-----COMPUTE RESPONSE IN NORMAL COORDINATES
113.      FOR I = 1 TO 3
114.          U1 = G(I)
115.          V1 = H(I)
116.          IF E(I) = 0 THEN GO TO 134
117.          P1 = 1/SQR(E(I))
118.          P2 = P1*SQR(1 - G1*G1)
119.          FOR J = 1 TO N1
120.              IF J = 1 THEN GO TO 123
121.              U1 = U(I,J-1)
122.              V1 = V(I,J-1)
123.              C1 = EXP( - P1*G1*D(J))
124.              C2 = COS(P2*D(J))
```

```
 125.              C3 = SIN(P2*D(J))
 126.              C4 = (V1 + P1*G1*U1)/P2
 127.              C5 = P1*G1/P2
 128.              C6 = Q(I,J)/(P1*P1)
 129.              U(I,J) = C1*(U1*C2 + C4*C3) + C6*(1 - C1*(C2 + C5*C3))
 130.              V(I,J) = C1*( - U1*C3 + C4*C2 - C5*(U1*C2 +C4*C3))*P2
 131.              V(I,J) = V(I,J) + C6*C1*(1 + C5*C5)*C3*P2
 132.          NEXT J
 133.      NEXT I
 134.      REM-----TRANSFORM AND PRINT RESPONSE
 135.      PRINT
 136.      PRINT 'RESPONSE IN ORIGINAL COORDINATES (PRINTED COLUMN-WISE)'
 137.      PRINT
 138.      FOR J = 1 TO N1
 139.          MAT R = ZER(1,N)
 140.          FOR K = 1 TO N
 141.              FOR I = 1 TO 3
 142.                  R(1,K) = R(1,K) + Z(K,I)*U(I,J)
 143.              NEXT I
 144.          NEXT K
 145.          MAT PRINT R
 146.      NEXT J
 147.      PRINT
 148.      STOP
 149.      DATA  3,10,0.00001,0.05,0
 150.      DATA  2,-1,0, -1,2,-1, 0,-1,1
 151.      DATA  1,1,1, 0,0,0, 0,0,0, 0,0,1
 152.      DATA  1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
 153.      DATA  1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
 154.      END
COMMAND ? go

DYNACON3--DYNAMIC RESPONSE OF FIRST THREE MODES OF DAMPED
MULTI-DEGEE SYSTEM TO PIECEWISE-CONSTANT FORCING FUNCTION


THREE EIGENVALUES AND VECTORS BY ITERATION

MODE  1    E-VAL. =  5.048918   ANG. FREQ. =  .445042   ITERS. =  7

MODE  2    E-VAL. =  .6431057   ANG. FREQ. =  1.246978   ITERS. =  17

MODE  3    E-VAL. =  .3079775   ANG. FREQ. =  1.801941   ITERS. =  2

MODAL MATRIX

 .445042        -1.246984        1.801909
 .8019375       -.5549535       -2.246983
 1               1               1

RESPONSE IN ORIGINAL COORDINATES (PRINTED COLUMN-WISE)

 3.058553E-03   4.285055E-02   .4488853
 7.557404E-02   .4513053       1.422269
 .4499555       1.361509       2.416564
 1.195432       2.370045       3.339921
 1.856796       3.163614       4.245371
 2.014587       3.692737       5.019314
 1.878725       3.859205       5.430093
 1.811241       3.647371       5.271109
 1.74055        3.225843       4.54407
 1.438758       2.635145       3.558956
```

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

[1] Величину β иногда называют динамическим коэффициентом.

[2] Нелинейные колебания этого вида были разобраны в работе **Лурье А. И., Чекмарев А. И.** Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. Прикладная математика и механика, 1938, т. 1, вып. 3, с. 307—324.

[3] Выше и в дальнейшем через c обозначена постоянная демпфирования.

[4] Метод восходит к основополагающим исследованиям. И. Г. Бубнова (1872—1919 гг.) и был опубликован им дважды. См. **Бубнов И. Г.** Отзывы профессоров Кирпичева, Белзецкого, Бубнова и Колосова о сочинениях профессора Тимошенко, удостоенных премии им. Д. И. Журавского. Сб. Спб. ин-та инж. путей сообщ. 1913, вып. 81, разд. III, с. 33—36 (переизд.: **Бубнов И. Г.** Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко. Об устойчивости упругих систем. Избр. тр. Л.: Судпромгиз, 1956, с. 136—139); **Бубнов И. Г.** Строительная механика корабля. Ч. II. Спб.: Тип. мор. м-ва, 1914, с. 515—544.

[5] Теорема взаимности работ в сущности содержится в упомянутой в п. 3.3 статье Дж. Максвелла (1831—1879), в которой рассматриваются две однородные внешние силы. Для произвольных сил формулировка теоремы при статическом нагружении дана Э. Бетти (1823—1892 гг.), см. **Betti E.** Teoria della elasticita. — Il nuova cimento, Ser. 2a, 1872, t. 7—8, Juglio, pp. 5—21; Agosto, pp. 69—97; Septembro, pp. 158—180; Novembre, pp. 357—367.

Дж. Релей рассмотрел упругую систему, совершающую малые колебания за счет гармонических сил заданного периода и амплитуды, приложенных в двух различных точках системы (см. **Rayleigh. J. W. S.** Some general theorems relating to vibrations. — Proceedings of the London Mathematical Society, 1873, v. 4, N. 63. pp. 357—368). В дальнейшем он (см. **Rayleigh J. W. S.** A statical theorem. Philosophical Magazine, 4th Series, 1874, v. 48, pp. 452—456; 1875, v. 49, pp. 183—185) перешел к статической задаче для теоремы взаимности работ, полагая период действия силы бесконечно большим; здесь важны введенные Релеем понятия обобщенных сил и обобщенных перемещений, когда уже не нужно различать внешние усилия — сила это или момент. Теорема взаимности была сформулирована Релеем в двух известных ныне вариантах — и для жесткостей, и для податливостей. Доказательство теоремы взаимности работ для двух упругих систем, совершающих малые колебания и нагруженных произвольным числом сил, содержится в т. 1 его монографии, цитированной в п. 1.4.

[6] Теорема взаимности перемещений была впервые сформулирована Дж. Максвеллом в 1864 г. на примере статически нагруженной плоской статически неопределимой фермы для случая двух сил (см. его статью, цитированную в п. 3.3). Обобщение этой теоремы на случай произвольного числа сил различного типа и на случай гармонических колебаний было дано Релеем (см. сноску 5). Теорема взаимности перемещений представляет собой частный случай теоремы взаимности работ.

[7] Следует упомянуть также и работу К. Хри, так как в научной литературе точные решения уравнений динамической теории упругости для прямого стержня кругового поперечного сечения называют решениями Похгаммера — Хри (см. **Chree C.** The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. — Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1889, v. 14, P. III, p. 250—369). Хри также получил точные решения и при распространении осесимметричных (продольных) волн в анизотропных цилиндрических стержнях (см. **Chree C.** On the longitudinal vibrations of aelotropic bars with one axis of material symmetry. — Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1890, v. 24, p. 340).

[8] Удобнее применять функции А. Н. Крылова.

[9] Дифференциальное уравнение (5.115) поперечных колебаний прямого стержня с учетом поперечного сдвига и инерции вращения известно как (уточненное) уравнение Тимошенко или уравнение балки Тимошенко (двухмодовая аппроксимация). Вывод его можно найти в кн. **Тимошенко С. П.** Курс теории упругости. 2-е изд, Киев: Наукова думка, 1972, с. 338. См. также **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ,

Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел, т. 5, 1973. 272 с.

[10] Иногда в научной литературе процедуру определения собственной основной частоты колебаний на основе энергетического подхода называют методом Релея, а высших форм — методом Релея — Ритца. Для вычисления основной частоты (1873 г.) и высших частот (1877, 1899 гг.) Релей применял метод, основанный на равенстве кинетической и потенциальной энергий для предельных состояний (или, как теперь говорят, метод стационарного значения суммарной энергии системы). Он рассмотрел колебания упругих струн, стержней, цилиндрических, сферических и конических оболочек, использовал в основном для описания движения системы форму колебаний простейшего осциллятора. Полученные результаты вошли в его кн. «Теория звука», цитированную в п. 1.4; первая публикация метода относится к 1873 г.: **Rayleigh. J. W. S.** Some general theorems relating to vibrations. Proceedings of the London Mathematical Society, 1873, V. 4, No. 63, pp. 357—368.

В гл. 9 упомянутой книги при исследовании колебаний прямоугольной мембраны прогиб выражается в форме

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \qquad (*)$$

где φ_{mn} — нормальные координаты.

Для квадратной мембраны ($a = b$) подробно рассмотрены формы φ_{11}, φ_{22}, φ_{12}, φ_{31}, φ_{33}, φ_{32}, φ_{23}, разобрано наложение форм φ_{21} и φ_{12}, φ_{31} и φ_{13}, φ_{32} и φ_{23}.

Там же обсуждены колебания круговой мембраны, когда

$$w = \sum I_\lambda (kr) (\varphi \cos n\theta + \psi \sin n\theta),$$

где k — величина, пропорциональная частоте; $n = 0, 1, 2, \ldots$; r, θ — полярные координаты; φ, ψ — константы.

В гл. 10 рассмотрены осесимметричные и несимметричные колебания круговых пластин, приведены выражения для частоты колебаний свободно опертой пластины, когда прогиб имеет вид (*). Кроме того, определены формы колебаний квадратной пластины со свободными краями, в частности, разобраны формы

$$w = w^* \left(\cos \frac{n\pi x}{a} \pm \cos \frac{n\pi y}{a} \right),$$

когда $n = 1, 2, 3, 4$.

В 1899 г. Релеем также определены высшие частоты упругих колебаний. Работа В. Ритца 1908 г. озаглавлена: «Об одном новом методе решения некоторых вариационных задач математической физики». В этой связи в 1911 г., уже после смерти В. Ритца, Релей пишет (**Rayleigh J. W. S.** On the calculation of Chladni's figures for a square plate. — Philosophical Magazine and Journal of Sciences, 1911, Ser. 6, pp. 225—229):

«.....удивительно, как он [В. Ритц] мог рассматривать метод как новый....», в «одной из моих ранних работ (1899).... этот метод дан в форме, почти в точности совпадающей с той, в какой он предложен Ритцем....», «....я полагал, что это исследование [В. Ритца] ограничивается применениями этого метода». Может быть, В. Ритц развил свой метод, причем независимо от Релея. Во всяком случае, протест Релея не был услышан и его имя после работы В. Ритца надолго исчезает при упоминании обсуждаемого энергетического метода.

На основании вышеизложенного редактор всюду в книге ввел метод Релея — Ритца. Таким образом, говорить о том, что Ритц дал дальнейшее развитие метода Релея, неверно. Правильно сказать, что он нашел ему блестящее применение, которое позволило на метод Релея и его возможности взглянуть другими глазами.

[11] Автор пишет о втором методе Ритца, однако, как указано в примечании 4 редактора перевода, речь идет о методе ортогонализации Бубнова.

[12] Леонард Эйлер (1707—1783 гг.) для анализа колебаний колоколов, как тонких оболочек вращения переменной толщины, первым построил теорию малых поперечных колебаний мембран в предположении, что мембрана представляет собой систему ортогональных упругих нитей, и получил дифференциальное уравнение

второго порядка $a_1 w_{xx} + a_2 w_{yy} = w_{tt}$, где a_1, a_2 — постоянные, а w — прогиб мембраны.

[13] Опыты с колебаниями покрытых песком стеклянных пластин, проведенные Хладни (1756—1827 гг.) (см. **Chladni E. F. F.** Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig, 1787; Die Akustik. Leipzig, 1802; Neue Beiträge zur Akustik. Leipzig, 1817), указали на существование узловых линий ряда колебаний. Хладни первым обнаружил узловые линии при колебаниях полностью незакрепленных квадратных пластин; он демонстрировал фигуры колебаний стеклянных пластин: по краю плоской пластины, посыпанной мелкозернистым песком или порошком, проводят перпендикулярно поверхности смычком и при этом возникают места скопления и разрежения песка или порошка, соответствующие узловым линиям.

[14] Если считать, что по всей длине контура прямоугольной пластины закрепление одинаково и что может быть только три вида условий на каждом контуре — свободноопертый край (1), защемленный край (2), свободный край (3), то для пластины может существовать 21 вариант контурных условий: 1111, 1212, 1211, 1213, 1113, 1313, 2222, 2221, 2223, 2211, 2231, 2233, 2123, 2132, 2133, 2323, 2313, 2333, 1133, 1333, 3333. Первые шесть относятся к случаю, когда два противоположных края пластины свободно оперты, для них решение при симметричных и антисимметричных формах колебаний найдены, как указано в предыдущей сноске, В. Фойгтом, а многочисленные результаты для этих шести вариантов контурных условий получены К. Зейсигом. См. (**Zeissig C.** Ein einfacher Fall der transversalen Schwingungen einer rechtekigen elastischen Platte. Annalen der Physik, 1898, Bd. 4, SS. 361—397).

[15] А. Лейсса (см. **Leissa A. W.** Free vibration of rectangular plates. Journal of Sound and Vibration, 1973, v. 31, N. 3, pp. 257—293) составил табличные значения частот для 21 указанного в предыдущем примечании редактора перевода случая. При этом 6 случаев, разобранных В. Фойгтом, соответствуют точному решению задачи, а 15 — приближенному (методом Релея — Ритца). Систематические результаты о малых свободных поперечных колебаниях тонких упругих прямоугольных пластин, включая анализ частот и форм колебаний, оценку влияния размеров в плане на частоту колебаний, содержатся в кн. Д. Гормана (см. **Gorman D. J.** Free vibration analysis of rectangular plates. Elsevier, North Holland, Inc., New York: 1982, 324 pp.), причем для шести случаев контурных условий, когда два противоположных края свободно оперты, решения известны и они точные. Для остальных случаев, когда непосредственно нельзя решить уравнение Жермена — Лагранжа, решение построено методом наложения.

[16] В ст. А. Лейссы (см. **Leissa. A. W.** Free vibrations of elastic plates.—AIAA Paper, N. 6924, AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting, New York: January 20—22, 1969, 34 p.) представлен обзор 500 работ по теоретическим и экспериментальным исследованиям свободных недемпфированных поперечных колебаний упругих пластин. Этот обзор охватывает однородные изотропные пластины в форме круга, эллипса, прямоугольника, параллелограмма, треугольника; разбирается влияние анизотропии, переменности толщины, неоднородности по толщине, окружающей среды, больших прогибов, поперечного сдвига и инерции вращения; обсуждаются также колебания в плоскости пластины. См. также **Leissa A. W.** Vibration of plates. — NASA SP-160, 1969, 353 p.). В 12 главах этой книги рассматриваются малые поперечные колебания тонких упругих пластин, подчиняющиеся гипотезам Кирхгоффа, и подробно излагаются вопросы, кратко затронутые в предыдущей статье Лейсы.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Андерсон (Anderson R. A.) 390
Бате (Bathe K.) 189
Бетти (Betti E.) 466
Берг (Berg G. V.) 136
Бикли (Bickley W. G.) 43
Боголюбов Н. Н. 148
Бубнов И. Г. 466
Бурже (Bourget M. J.) 443
Буссинеск (Boussinesq J.) 433
Бэшфорт (Bashforth F.) 190
Вайнштейн (Weinstein A.) 447
Вейганд (Weigand A.) 145
Веннард (Vennard J. K.) 84
Ринч (Wrinch D.) 425
Галеркин Б. Г. 154, 423
Гарланд (Garland C. F.) 430
Гере (Gere J. M.) 197, 199, 230
Гибе (Giebe E.) 323
Горман (Gorman D. J.) 468
Гоэл (Goel S. C.) 136
Гоэнс (Goens E.) 388
Григолюк Э. И. 466
Гудьер Дж. Н. (Goodier J. N.) 445
Ден-Гартог Дж. (Den Hartog J. P.) 83, 138, 176, 239
Дуффинг (Duffing G.) 145, 156, 159
Дэвис (Davies R. M.) 388
Зейссиг (Zeissig C.) 468
Инглис (Inglis C. E.) 404
Карнахан (Carnahan B.) 190
Кимени (Kemeny J. G.) 455
Кимбелл (Kimball A. L.) 81
Кирхгоф (Kirchhoff G. R.) 423, 449
Клоттер (Klotter K.) 159, 161, 164, 170
Кафи (Caughey T. K.) 304
Крылов А. Н. 148, 404
Кулон (Coulomb C. A.) 82
Куртц (Kurtz T. E.) 455
Кутта (Kutta W.) 190
Ламбергер (Lamberger E. H.) 335
Ламон (Lamoën J.) 121
Лангер (Janger B. F.) 335
Лейсса (Leissa A. W.) 468
Ли (Lee E. H.) 407
Лузер (Luther H. A.) 190
Лурье А. И. 466
Лэмб (Lamb H.) 453
Ляв (Love A. E. H.) 322, 432, 433, 435
Максвелл (Maxwell J. C.) 203, 466
Матье (Mathieu E.) 444
Мултон (Moulton F. R.) 190
Николсон (Nicholson J. W.) 426
Ньюмарк (Newmark N. M.) 180, 185
Олсон (Olson R. G.) 390
Оно (Ono A.) 425, 426
Ормондройд (Ormondroyd J.) 239
Осгуд (Osgood W. R.) 136
Пинкни (Pinkney B. R.) 136
Пинни (Pinney E.) 161
Попов (Popov E. P.) 136
Похгаммер (Pochhammer L.) 323
Пржеминицки (Przemieniecki J. S.) 322
Рамберг (Ramberg W.) 136
Релей (Rayleigh J. W. S.) 37, 38, 47, 234, 273, 303, 322, 387, 415, 439, 466, 467
Ритц (Ritz W.) 154, 415, 423, 447, 467
Рунге (Runge C.) 190
Саутуэлл (Southwell R. V.) 454
Селезов И. Т. 466
Стокс (Stokes G. G.) 404
Темпл (Temple G. F. J.) 43
Тимошенко С. П. (Timoshenko S.) 9, 14, 16, 26, 41, 388, 404, 408, 427, 428, 435, 445, 466
Томатика (Tomatika S.) 447
Трэнкле (Traenkle A.) 423
Уанг (Wang C. C.) 62
Уивер (Weaver W.) 197, 199, 230, 285
Уилкинсон (Wilkinson J. H.) 288
Уилкс (Wilkes J. O.) 190
Уиллис (Willis R.) 404
Уилсон (Wilson E. L.) 189
Уолткинг (Waltking F. W.) 434
Фаддеев Д. К. 252
Фаддеева В. Н. 252
Фархуманд (Farhoomand I.) 189
Федергофер (Federhofer K.) 430, 434
Фелгар (Felgar R. P.) 383
Флюгге (Flügge W.) 451
Фойхт (Voigt W.) 447
Фосс (Foss K. A.) 305
Хладни (Chladni F. F. F.) 468
Хри (Chree C.) 466
Чекмарев А. И. 466
Чин (Chien W. Z.) 447
Эйр (Ayre R. S.) 121
Якобсен (Jacobsen L. S.) 79, 121, 189
Янг (Young D. H.) 26, 383, 448

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Амплитуда колебаний вынужденных 54
— — — с демпфированием 75, 81, 162
— — свободных 19, 193, 215, 245
— — — с демпфированием 69
— — установившихся 54, 193, 226

Б

Балки с сосредоточенными массами консольные 40
— — — свободно опертые 38, 43, 47
Биение 64, 222

В

Вал коленчатый 31
— кругового поперечного сечения 359
— эквивалентный 27
Вектор нормированный 261
— собственный основной 246, 296
Взаимодействие инерционное 208
— упругое 208
Возмущения гармонические 53, 99, 156, 226, 238, 306, 393
— кусочно-линейные 121, 316, 455, 457
— кусочно-постоянные 119, 315, 455, 457
— линейные 98
— периодические 53, 86, 306
— произвольные 93
— ступенчатые 95
Волновое уравнение 324

Г

Гаситель колебаний динамический 229
Гистерезис 81, 136

Д

Декремент затухания логарифмический 69
Демпфирование абсолютное 304
— вязкое 65, 72
— — эквивалентное 79
— гистерезисное 134
— конструкционное 81
— относительное 304
— отрицательное 70
— пропорциональное 303
— упругопластическое 134
— по формам колебаний 305
— эквивалентное 66, 79
Деформация поперечного сдвига 390
Движения апериодические 69
— независимые 282
— опор периодические 55, 229
— устойчивые 71
Диаметры узловые 443

Ж

Жесткость главная (обобщенная) 340
— при изгибе стержней 373
— — пластин 446
— — швеллера 428
— при кручении 25, 428
— — стесненном 428
— пружины 16
— стержней при растяжении или сжатии 338, 347
— эквивалентная 20, 21

З

Задача на собственные значения 245, 252, 258, 264, 289, 338, 456
— — — в нестандартной форме 236, 253
Закрепление стержня жесткое 329, 345
— — упругое 350
Значения собственные 246
— — одинаковые 297

И

Импульс прямоугольный 96
Инерция вращения 387, 390
Интеграл Дюамеля 94, 281, 312, 343, 354, 392, 439
Интегрирование уравнения движения непосредственное 141
Интерполяция кусочно-линейная 121
— кусочно-постоянная 121
Итерационный метод 288

К

Колебания вынужденные 52, 60
— изгибно-крутильные тонкостенных стержней 427
— изохронные 134
— — нелинейные 156
— крутильные 359, 430
— — при движении опор 55
— неустановившиеся 60
— — с вязким демпфированием 65, 72
— продольные 327, 331
— свободные гармонические 16, 17
— — с вязким демпфированием 65
Кольца круговые 430
— — Колебания изгибные 433
— — — крутильные 432
Координаты главные 258, 341

— нормальные 258, 261
— относительные 57
— перемещения 198
— полярные 433, 442, 449
Коэффициенты влияния демпфирования 233
— — инерции 210
— — перемещений 285
— — энергии 211
— демпфирования 67, 303
— — вязкого 74
— — критические 70
— — эквивалентные 85
— жесткости 197
— податливости 202
— трения 82
— усиления 54, 74

Л

Линии узловые мембран 438
— — прямоугольных пластин 449

М

Масса главная (обобщенная) 340
Матрица демпфирования 303
— жесткости 198
— коэффициентов усиления 228
— масс 198
— — главная 259
— ортогональная 265
— податливости 202
— — главная 259, 263
— присоединенная 246
— собственных значений 260
— спектральная 260
— усеченная 299
Маятник двойной 201
— — составной 213
— крутильный 25
— обратный 34
— тройной 256
Мембраны круговые 442
— прямоугольные 435
Метод Бубнова 154, 155, 156, 161, 164, 170, 424, 466
— вращающихся векторов 18
— итерационный 288
— квадратного корня (Холецкого) 252
— линейных ускорений 186
— непосредственного интегрирования 140
— нормальных форм колебаний 244, 265, 338
— Ньюмарка 180
— осреднения 154
— — по ускорениям 183
— последовательных приближений 148, 289
— Релея 37, 467
— Релея—Ритца 415, 467
— степенных рядов 288
— Стодолы—Вианелло 288
— усреднения Ритца 154
— энергетический 32, 148
Момент изгибающий сосредоточенный 392

Н

Нагрузки движущиеся 405
— критические эйлеровы 406
— нормальные 274
— эквивалентные 230, 272
— — нормальные 274
Нелинейность геометрическая 132
Нити растянутые 366
— — неустановившееся поведение 369
Ньютона второй закон 17, 192

О

Окружности узловые 443
Опоры:
— — перемещение линейное 107
— — произвольное 104
— — ступенчатое 106
Основание упругое 411
Отношение амплитуд 194, 216, 218, 235
Ошибка округления 121

П

Перемещения обобщенные 212
— опор 279, 282, 353
— — стержни 353, 399
— основания 282
— остаточные 172
— призматических стержней вынужденные 331
— — — — обусловленные податливостью 355
Период колебаний демпфированных 67
— — свободных 17
Петля гистерезиса 81, 136
Пластины круговые 449
— — жестко защемленные 451
— — при различных граничных условиях 453
— прямоугольные 444, 446
— — жестко защемленные 447
— — свободно опертые 446
Пластический шарнир 134
Поведение нелинейное 130
— неустановившееся 310, 315
Постоянная вязкого демпфирования 85, 303
Преобразование координат 212
Призматические стержни 272, 323, 338
— — Движение как абсолютно жесткого тела 354
— — Заданные перемещения опор 353
— — Колебания вынужденные 391, 397
— — — поперечные 372, 377, 380

ния 377, 420
— — с пружиной 345
— — с сосредоточенной массой 345
Принцип Даламбера 209, 323
Прогибы стержней 391

Р

Работа сил инерции 332
— — упругих 332
Равновесие динамическое 209
Резонанс 75, 76, 243
Решение волновое 324
— численное 118, 315
— — для систем линейных 455
— — — нелинейных 179, 456
Ряд Тейлора 180, 181, 185
— Фурье 88, 307, 433

С

Связи дополнительные 293
Сдвиг поперечный 387
Сечения узловые 27
Сила возмущающая периодическая 86, 308
— — произвольная 93
— восстанавливающая жесткопластическая 137
— — билинейная 136
— нормальная 271
— осевая 409
Силы внешние 270
Системы с двумя степенями свободы 192, 197, 202, 208, 214
— — — — с вязким демпфированием 233
— с кулоновским трением 173
— кусочно-линейные 164
— со многими степенями свободы 244
— — — — демпфированные 302
— — — — Координаты главные 263
— — — — — нормальные 261
— — — — Метод нормальных форм 265, 270, 279
— — — — — итерационный 288
— с одной степенью свободы 16
— — — — с демпфированием 65, 72, 79
Стержень с движущимися нагрузками 404
— с перемещающимися опорами 399
— с различными концевыми условиями 397

Т

Теорема взаимности для динамических нагрузок 273
— — — перемещений 275

У

Угол поперечного сдвига 388
Уравнение волновое одномерное 324
— движения 17
— — в матричной форме 197
— — в перемещениях 202
— — в усилиях 197
— Дуффинга 156
— частотное 325
Условия концевые 325
— начальные 265
— ортогональности 258, 339, 340

Ф

Форма движения как абсолютно жесткого тела 222, 266
— колебаний вторая 195
— — основная 194
— — первая 194
Формулы экстраполяции 182, 185, 189
Функции передаточные 226
— — комплексные 239
Функция влияния перемещений 400
— главная (нормальная) 325
— нагрузки линейная 98
— — ступенчатая 95

Ч

Частота колебаний 18
— — демпфированных 67
— — критическая 87
— — круговая 18
— — резонансная 54, 63, 75, 87, 163, 228, 308
— — собственная 64
— — — основная 291

Э

Энергии принцип сохранения 32
Энергия деформации 33, 333, 384, 416, 432, 437, 446
— кинетическая 32, 39, 416, 432, 437, 446
— потенциальная 33, 39, 416, 432, 437, 446

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 8
Предисловие 10
Предисловие к четвертому изданию 12
Предисловие к первому изданию 14

Глава **1**

Системы с одной степенью свободы

1.1. Свободные гармонические колебания 16
1.2. Крутильные колебания 25
1.3. Энергетический метод 32
1.4. Метод Релея 37
1.5. Балки и валы, несущие несколько сосредоточенных масс 47
1.6. Вынужденные колебания. Установившееся состояние 52
1.7. Вынужденные колебания. Неустановившееся состояние 60
1.8. Свободные колебания с вязким демпфированием 65
1.9. Вынужденные колебания с вязким демпфированием 72
1.10. Эквивалентное вязкое демпфирование 79
1.11. Обобщенная периодическая возмущающая сила 86
1.12. Возмущающая сила произвольного вида 93
1.13. Произвольное перемещение опоры 104
1.14. Частотная характеристика 111
1.15. Численные способы определения динамических перемещений . 118

Глава **2**

Системы с нелинейными характеристиками

2.1. Примеры нелинейных систем 130
2.2. Определение скорости и периода колеблющейся системы непосредственным интегрированием 140
2.3. Приближенные методы исследования свободных колебаний . . . 147
2.4. Вынужденные нелинейные колебания 156
2.5. Кусочно-линейные системы 164
2.6. Численные решения нелинейных систем 179

Глава **3**

Системы с двумя степенями свободы

3.1. Примеры систем с двумя степенями свободы 192
3.2. Уравнения движения в усилиях: коэффициенты жесткости . . . 197

3.3. Уравнения движения в перемещениях: коэффициенты податливости 202
3.4. Совместное действие инерционных сил и сил тяжести 208
3.5. Свободные колебания без демпфирования 214
3.6. Вынужденные колебания без демпфирования 226
3.7. Свободные колебания при вязком демпфировании 233
3.8. Вынужденные колебания при вязком демпфировании 238

Глава 4

Системы со многими степенями свободы

4.1. Введение 244
4.2. Частоты и формы колебаний систем без демпфирования 245
4.3. Главные и нормальные координаты 258
4.4. Исследование поведения системы методом нормальных форм колебаний с учетом начальных условий 265
4.5. Исследование поведения системы методом нормальных форм колебаний при действии внешних сил 270
4.6. Исследование поведения системы методом нормальных форм колебаний при заданных перемещениях опор 279
4.7. Итерационный метод определения частот и форм колебаний . . . 288
4.8. Демпфирование в системах со многими степенями свободы . . . 302
4.9. Поведение системы с демпфированием при периодических возмущениях 306
4.10. Неустановившееся поведение систем с демпфированием 310
4.11. Численные исследования неустановившегося поведения систем . 315

Глава 5

Колебания упругих тел

5.1. Введение 322
5.2. Свободные продольные колебания призматических стержней . . 323
5.3. Вынужденные динамические перемещения при продольных колебаниях призматических стержней 331
5.4. Исследование призматических стержней методом нормальных форм колебаний 338
5.5. Исследование призматического стержня с массой или пружиной на конце 345
5.6. Исследование поведения стержней при заданных продольных перемещениях опор 353
5.7. Крутильные колебания валов кругового поперечного сечения . 359
5.8. Поперечные колебания предварительно растянутых нитей . . . 366
5.9. Поперечные колебания призматических стержней 372
5.10. Поперечные колебания свободно опертого стержня 377
5.11. Колебания стержней с различными концевыми условиями . . . 380
5.12. Влияние инерции вращения и поперечного сдвига 387
5.13. Вынужденные колебания свободно опертого стержня 390
5.14. Вынужденные колебания стержней с различными концевыми условиями 397
5.15. Стержни с перемещающимися опорами 399
5.16. Стержень при движущихся нагрузках 404
5.17. Влияние осевой силы на поперечные колебания стержня 409
5.18. Стержни на упругих опорах или упругом основании 421
5.19. Определение частот колебаний методом Релея — Ритца 415
5.20. Колебания стержней переменного поперечного сечения 420
5.21. Совместные изгибные и крутильные колебания стержней . . . 427

5.22. Колебания круговых колец 430
5.23. Поперечные колебания мембран 435
5.24. Поперечные колебания пластин 444

Приложение: Программы для ЭВМ

П. 1. Введение 455
П. 2. Численные решения для линейных систем 455
П. 3. Численные решения для нелинейных систем 456
П. 4. Итерационный метод определения собственных значений и собственных векторов 456
П. 5. Численные решения для систем со многими степенями свободы . 457
Примечания редактора перевода 466
Именной указатель 469
Предметный указатель 470