Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович

МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Содержит справочный материал по теории динамических систем и качественное исследование большого количества динамических систем из приложений.

Цель книги — показать эффективность методов п приемов качественного исследования динамических систем и одновременно естественность использования этой теории при рассмотрении математических моделей реальных систем.

Содержание

Предисловие к первому изданию 9

Часть I АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Глава 1. Общие сведения о динамической системе на плоскости. Основные теоремы **11**

§ 1. Автономная динамическая система на плоскости 11
§ 2. Теорема существования и единственности решения 12
§ 3. Простейшие свойства решений системы (A) 13
§ 4. Геометрическая интерпретация системы (A) на фазовой плоскости (x, y) 15
§ 5. Сопоставление геометрической интерпретации системы (A) в пространстве (x, y, t) с интерпретацией на фазовой плоскости 17
§ 6. Некоторые термины 18
§ 7. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий 19
§ 8. Направление на траекториях. Изменение параметризации 19
§ 9. Дифференциальное уравнение, соответствующее динамической системе 22
§ 10. Понятие интегральной кривой и интеграла в случае аналитических правых частей P(x, y) и Q(x, y) системы (A) 23
§ 11. Что значит "найти решение динамической системы" 25
§ 12. Примеры 26
§ 13. Замечания по поводу примеров § 12 35
§ 14. Математическое определение качественной (топологической) структуры разбиения на траектории и качественного исследования динамической системы 37

Глава 2. Возможный характер отдельной траектории. Теория Пуанкаре — Бендиксона. Особые траектории **40**

Введение 40
§ 1. Дуга без контакта 40
§ 2. Цикл без контакта 42
§ 3. Предельная точка полутраектории и траектории. Предельная траектория 43

§ 4. Основная теорема 46
§ 5. Возможные типы полутраекторий и их предельных множеств 48
§ 6. Особые и неособые полутраектории и траектории 50
§ 7. Возможные типы особых, и неособых траекторий 52
§ 8. Случай конечного числа особых траекторий. Элементарные ячейки 53
§ 9. Возможные типы ячеек. Односвязные и двусвязные ячейки 55
§ 10. Два подхода к описанию качественной структуры 56
§ 11. Качественная (топологическая) структура состояния равновесия в случае конечного числа особых траекторий. Схема динамической системы 57
§ 12. Устойчивость по Ляпунову 63
Глава 3. Исследование качественной структуры окрестности состояния равновесия (особой точки) 65
Введение 65
§ 1. Простые состояния равновесия (особые точки) 65
§ 2. Приведение динамической системы к каноническому виду 66
§ 3. Возможный характер простых состояний равновесия. Грубые состояния равновесия 68
§ 4. Замечания о методах установления характера грубых состояний равновесия 69
§ 5. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями 70
§ 6. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия 75
§ 7. Угловой коэффициент направления, в котором траектория может стремиться к простому состоянию равновесия 77
§ 8. Сводка сведений о грубых состояниях равновесия 80
Глава 4. Качественная структура окрестностей некоторых сложных состояний равновесия 84
§ 1. Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия 84
§ 2. Сложное состояние равновесия (особая точка) с нулевыми характеристическими корнями 86
§ 3. Примеры 91
§ 4. Нормальные формы 94
Глава 5. Функция последования. Простые и сложные предельные циклы 95
§ 1. Функция последования 95
§ 2. Условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки точечного отображения 97
§ 3. Функция соответствия 98
§ 4. Изучение окрестности замкнутой траектории. Простые и сложные предельные циклы 99
§ 5. Аналитические выражения для коэффициентов функции 103

последования. Характеристический показатель замкнутой траектории
Глава 6. Некоторые приемы качественного исследования **106**
§ 1. Некоторые признаки существования и отсутствия предельных циклов 106
§ 2. Изучение поведения интегральных кривых в бесконечности. Сфера Пуанкаре 107
§ 3. Примеры исследования в бесконечности 109
§ 4. Критерии Бендиксона и Дюлака отсутствия предельных циклов 113
§ 5. Топографическая система Пуанкаре. Функция Ляпунова. Кривые контактов 118
Часть II. ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ
Глава 7. Двумерные консервативные системы. Неконсервативные динамические системы теории колебаний. Общие теоремы **128**
Введение 128
§ 1. Свойства консервативных систем на плоскости 128
§ 2. Динамические системы, характерные для теории колебаний 133
§ 3. Измененные системы. Системы, правые части которых зависят от параметра 131
§ 4. Основные теоремы о зависимости решения от изменения правых частей динамической системы 133
§ 5. Грубость динамической системы и теорема о непрерывной зависимости решения от изменения правых частей 136
Глава 8. Грубые динамические системы **138**
§ 1. Определение грубой динамической системы 138
§ 2. Состояния равновесия, возможные в грубой динамической системе 141
§ 3. Состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями 142
§ 4. Замкнутые траектории, возможные в грубой системе 143
§ 5. Поведение сепаратрис седел в грубых системах 145
§ 6. Необходимые условия грубости. Достаточность этих условий для грубости системы 145
§ 7. Пространство динамических систем. Всюду плотность грубых (двумерных) динамических систем 147
§ 8. Понятие грубости при более общих предположениях относительно правых частей динамической системы 148
§ 9. Типы особых траекторий и ячеек в грубых системах 151
§ 10. Замечания по поводу определения грубой системы 153
Глава 9. Простейшие негрубые динамические системы — системы первой степени негрубости **155**
§ 1. Общие замечания 155
§ 2. Системы первой степени негрубости 155
§ 3. Состояния равновесия, возможные в системе первой степени негрубости 157

§ 4. Замкнутые траектории, возможные в системе первой степени негрубости 158
§ 5. Условия на сепаратрисы седел и седло-узлов в системе первой степени негрубости 158
§ 6. Необходимые и достаточные условия первой степени негрубости 159
§ 7. Динамические системы более высокой степени негрубости 160
Глава 10. Бифуркации при изменении правых частей динамической системы 163
§ 1. Определение бифуркации 163
§ 2. Бифуркации систем первой степени негрубости 164
§ 3. Бифуркации некоторых типов сложных особых точек 171
§ 4. Бифуркации двукратной точки, для которой $\Delta=0$ и $\sigma=0$ 174
§ 5. Рождение предельных циклов из особых траекторий степени негрубости выше первой 178
Глава 11. Динамические системы, правые части которых содержат параметры 180
§ 1. Возможный характер зависимости правых частей динамической системы от параметров 180
§ 2. Смена качественных структур при изменении параметров 184
§ 3. Случай, когда правые части зависят более чем от одного параметра 190
§ 4. Бифуркации "от бесконечности" 194
§ 5. Условия существования седло-узла и сложного фокуса первого порядка 196
§ 6. Поворот векторного поля 200
§ 7. Метод малого параметра. Метод Понтрягина 203
Глава 12. Динамические системы с цилиндрической фазовой поверхностью 208
§ 1. Цилиндрическая фазовая поверхность и характер траекторий, возможных на цилиндрической фазовой поверхности 208
§ 2. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр 209
§ 3. Приемы исследования качественной структуры динамической системы на цилиндре 212
§ 4. Понятие грубости и степени негрубости для динамических систем на цилиндре. Бифуркации на цилиндре. Поворот поля 212
§ 5. Динамические системы на цилиндре, близкие к гамильтоновым (метод Понтрягина) 215
Глава 13. Адекватное истолкование нелинейных физических явлений фактами качественной теории и теории бифуркаций динамических систем 217
Введение 217
§ 1. Мягкий и жесткий режимы 219
§ 2. Замечания о границах области устойчивости различных стационарных режимов 220
§ 3. Мягкое и жесткое возникновение колебаний 222

§ 4. "Безопасные" и "опасные" границы области устойчивости состояний равновесия 225
§ 5. Замечания по поводу других границ области устойчивости 234
Часть III. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ
Глава 14. Общие замечания о приемах качественного исследования 237
Введение 237
§ 1. Некоторые рецептурные указания 241
§ 2. Некоторые простые примеры качественного исследования динамических систем на плоскости 243
§ 3. Некоторые простые примеры динамических систем на цилиндре 252
Глава 15. Исследование методом малого параметра (методом Понтрягина) 258
§ 1. Общие замечания 258
§ 2. Примеры рассмотрения методом Понтрягина (полное исследование) 260
§ 3. Исследование методом Понтрягина с привлечением вычислительных методов 272
Глава 16. Качественное исследование динамических систем с использованием приемов, опирающихся на теорию бифуркаций 285
§ 1. Квадратичное дифференциальное уравнение 285
§ 2. Электрическая цепь с туннельным диодом 292
§ 3. Двумерная модель динамики твердотельного лазера 305
§ 4. Симметричный полет самолета в вертикальной плоскости (задача Н. Е. Жуковского) 313
§ 5. Система, описывающая динамику проточного химического реактора 324
§ 6. Фазовая автоподстройка частоты 334
§ 7. Частотно-фазовая автоподстройка частоты (случай существования трех предельных циклов) 340
§ 8. Синхронный генератор с асинхронной характеристикой 345
Часть IV. КУСОЧНО-СШИТЫЕ СИСТЕМЫ
Глава 17. Общие сведения о кусочно-сшитых системах 357
Введение 357
§ 1. Сшитые системы. Доопределение на линиях сшивания 359
§ 2. Возможные типы полутраекторий сшитых систем 361
§ 3. Особые траектории сшитых систем 363
§ 4. Бифуркации в сшитых системах. Метод Понтрягина для сшитых систем 367
Глава 18. Исследование кусочно-сшитых систем методом Понтрягина 382
§ 1. Уравнение из теории электрических машин 382
§ 2. Автоподстройка при кусочно-постоянной аппроксимации 388

характеристики
§ 3. Автоколебания синхронного мотора 392
Глава 19. Качественное исследование сшитых систем методами теории бифуркаций 399
§ 1. Кусочно-линейная система с тремя параметрами 399
§ 2. Следящая система с люфтом 404
§ 3. Электрическая цепь с туннельным диодом 408
§ 4. Система со скачками на линии сшивания 418
Глава 20. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров 431
Введение 431
§ 1. Рассмотрение системы (2) при аппроксимациях пилообразными функциями 433
§ 2. Рассмотрение системы (2) при аппроксимации, включающей отрезок параболы 437
§ 3. Рассмотрение системы (2) при аппроксимациях кусочно-постоянной для sinφ и пилообразной для cosφ функциями 439
§ 4. Исследование роли аппроксимаций для уравнения маятникова типа 444
§ 5. Динамическая система, описывающая автоколебания синхронного мотора 449
§ 6. Динамическая система, описывающая симметричный полет самолета 458
Дополнение 463
§ 1. Динамические системы на двумерных поверхностях 463
§ 2. Динамические системы в n-мерном евклидовом пространстве 467
Список литературы 476
Список дополнительной литературы 483

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание с незначительными изменениями воспроизводит текст первого издания. Несколько расширена информация, касающаяся теоретической части книги — понятий, получивших широкое распространение в математической литературе (устойчивость по Ляпунову, коразмерность, нормальные формы). Существенно изменен раздел, посвященный предельным циклам квадратичного дифференциального уравнения. Обсуждается число и расположение предельных циклов. Выделены некоторые области существования квадратичных дифференциальных уравнений с двумя, тремя и четырьмя предельными циклами.

В Дополнении обсуждается роль и значение понятий, введенных для динамических систем на плоскости, при переходе к рассмотрению динамических систем более высокого порядка или динамических систем на поверхностях, к рассмотрению которых естественно сводятся уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Авторы выражают благодарность Д. В. Аносову за многочисленные полезные замечания, использованные при подготовке второго издания.

Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга имеет своей целью: во-первых, ознакомить читателя с основными фактами качественной теории динамических систем на плоскости, причем главным образом с теорией бифуркаций таких систем, во-вторых, указать роль теории бифуркаций при объяснении целого ряда нелинейных эффектов в реальных системах, и, в-третьих, продемонстрировать на ряде динамических систем из приложений роль теории бифуркаций при качественном исследовании конкретных систем.

Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, созданная А. А. Андроновым (при сотрудничестве с его учениками),— естественная и прозрачная по своей идейной стороне — представляется имеющей большое математическое значение и большое значение для приложений. Между тем теория бифуркаций динамических систем мало известна как математикам, так и лицам, занимающимся прикладными вопросами, хотя качественная теория завоевывает все новые области естествознания.

Настоящая книга в своей теоретической части (гл. 1—13, 17, 18) носит справочный, информационный характер, все приведенные в ней предложения и факты даны без доказательств (авторы старались проиллюстрировать их рисунками). Все основные доказательства читатель может найти в «Теории колебаний» А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина [3], «Качественной теории динамических систем второго порядка» А. А. Андронова, Е. А. Леонтович, И. И. Гордона, А. Г. Майера [12], и в «Теории бифуркаций динамических систем на плоскости» А. А. Андронова, Е. А. Леонтович, И. И. Гордона, А. Г. Майера [13].

В то же время качественное исследование приведенных в книге конкретных динамических систем дано в основном в подробном изложении.

Необходимо сказать, что при переходе к динамическим системам в пространстве трех и большего числа измерений (и даже к динамическим системам на двумерных поверхностях, отличных от сферы) теория бифуркаций динамических систем чрезвычайно усложняется. Даже содержание понятия грубой системы делается значительно более сложным (см. [111]). Однако и в этом случае теория бифуркаций динамических систем на плоскости все же остается некоторой основой, и для некоторых классов много-

мерных динамических систем теория бифуркаций во многом аналогична с теорией бифуркаций на плоскости.

В заключение — о терминологии. В настоящее время в математической литературе становится также употребительной терминология, отличная от той классической, которая используется в настоящей книге. Так, например, вместо терминов «система дифференциальных уравнений» или «динамическая система» для многомерных динамических систем или систем на многообразиях часто используется термин «поток» (см., например, [111]). Однако, во-первых, в настоящей книге рассматриваются лишь системы на плоскости и, во-вторых, материал этой книги тесно связан с литературой прикладного направления (например, [3]), использующей классическую терминологию. Поэтому авторы не используют также термины «диффеоморфизм», «сечение» и др., ставшие распространенными в современной математической литературе.

Авторы

ЧАСТЬ I

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ НА ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Автономная динамическая система на плоскости. Как известно, многие задачи механики и физики при естественных упрощающих предположениях приводят к рассмотрению одного дифференциального уравнения второго порядка, т. е. уравнения

$$\ddot{x} - f(x, \dot{x}, t) = 0. \tag{I}$$

Если положить $\dot{x} = y$ и, следовательно, $\ddot{x} = \dot{y}$, то уравнение (I) очевидно приведется к системе двух дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y, t). \tag{II}$$

Рассмотрение такой системы в ряде аспектов удобнее, чем непосредственное рассмотрение уравнения (I). Во многих задачах при написании уравнений движения удобно вводить обобщенные координаты и импульсы, и тогда, пользуясь уравнениями Лагранжа, мы можем получить систему двух дифференциальных уравнений более общего вида, т. е. какую-либо систему вида

$$\dot{x} = F(x, y, t), \quad \dot{y} = G(x, y, t); \tag{III}$$

$F(x, y, t)$ не обязательно равно y, как в системе (II).

В настоящей книге рассматривается тот частный случай системы (III), когда независимое переменное t в правые части системы не входит, т. е. система имеет вид

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \tag{A}$$

Такая система в случае, когда функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ определены на всей плоскости (x, y) (x, y — декартовы координаты) или в некоторой области G плоскости (ограниченной или неограниченной)[1]), удовлетворяет условиям теоремы существования и

[1]) Напомним, что в области G в пространстве любого числа измерений все точки внутренние. Если к области присоединяется граница, например к внутренности круга — граничная окружность, то говорят, что рассматривается замкнутая область $\overline{G}$. В замкнутой области граничные точки имеют другие свойства (не все сколь угодно близкие к ним точки принадлежат $\overline{G}$).

единственности решения (см. § 2) и называется *автономной динамической системой второго порядка* (в области G)[2]).

В настоящей книге рассматривается случай, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются аналитическими функциями (т. е. $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в окрестности всякой точки $M(x, y)$ — области определения динамической системы G — могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням x и y)[3]).

Система (А) является частным случаем системы (III), правые части ее не содержат явно t, в силу чего как область пространства (x, y, t), в которой должны рассматриваться ее правые части, так и решения этой системы обладают некоторыми частными свойствами.

Пусть G — область плоскости (x, y) (в частности, могущая совпадать со всей плоскостью (x, y)), в которой определены функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Тогда правые части системы (А), рассматриваемые как функции x, y, t, определены в области R пространства (x, y, t) (x, y, t — декартовы координаты), состоящей из всевозможных точек $M(x, y, t)$, у которых t может быть любым, а x и y таковы, что точка с этими координатами принадлежит области G плоскости (x, y). Область R является, следовательно, бесконечной цилиндрической областью, образованной прямыми, параллельными оси t, пересекающими плоскость в точках области G[4]).

§ 2. Теорема существования и единственности решения. Так как мы предположили, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в области G являются аналитическими функциями, во всех точках области R очевидно обеспечены условия, при которых справедлива теорема существования и единственности решения системы (А)[5]).

---

[2]) Динамическая система второго порядка может быть определена не только на плоскости, но и на двумерных поверхностях. Однако в настоящей книге рассматриваются только динамические системы на плоскости и на «цилиндре» (см. гл. 12).

[3]) Для приложений в основном представляют интерес либо динамические системы с аналитическими правыми частями, либо динамические системы, имеющие кусочно-аналитические правые части (такими кусочно-аналитическими системами являются системы с сухим трением, системы автоматического регулирования, а также всевозможные устройства с z-характеристикой). Кусочно-аналитические («кусочно-склеенные», «кусочно-сшитые») системы рассматриваются в части IV настоящей книги.

[4]) В случае, когда t входит явно в правые части системы двух дифференциальных уравнений (III), область, в которой они определены, очевидно, может быть любой.

[5]) Для справедливости теоремы существования и единственности решения, очевидно, нужны гораздо более слабые предположения, чем сделанное нами предположение об аналитичности правых частей. Более подробную формулировку теоремы о существовании и единственности решения как для случая системы (А), так для случая общей системы (III) и ее доказательство см., например, [115, 134].

Мы сформулируем эту теорему применительно к системе (А). При этом, говоря о решении системы (А), будем здесь, как и всюду в дальнейшем, подразумевать решение, продолженное на максимально возможный интервал значений t (т. е. решение, продолженное до границы области определения правых частей системы дифференциальных уравнений)[6]).

Теорема 1 (о существовании и единственности решения системы (А)). *Какие бы значения x_0, y_0 из области определения функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ мы ни взяли, при любом t_0 существует единственное решение системы* (А), *т. е. пара функций*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

таких, что выполняются тождества

$$\dot{\varphi}(t) \equiv P(\varphi, \psi), \quad \dot{\psi}(t) \equiv Q(\varphi, \psi)$$

и удовлетворяются начальные условия

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0).$$

При этом функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определены для всех значений t в некотором определенном интервале (τ, T), содержащем t_0. В частности, решение может быть определено при всех значениях t, т. е. может быть, что τ равно $-\infty$, а T равно $+\infty$.

В силу того, что по самому определению интервала (τ, T) решение на этом интервале продолжено до границ области определения правых частей системы, нетрудно убедиться, принимая во внимание специфический характер («цилиндричность») области R пространства (x, y, t) (в которой должны рассматриваться правые части системы (А)), в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Если рассматриваемое решение системы* (А)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

таково, что при всех t из интервала (τ, T) точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ все время остается в ограниченной замкнутой области $\bar{G}^*$, целиком содержащейся в области G (в которой определены правые части системы (А)), *то обязательно $\tau = -\infty$, $T = +\infty$.*

§ 3. Простейшие свойства решений системы (А). Сформулируем ряд свойств, которыми решение системы (А) обладает в силу того, что в правые части системы независимое переменное t явно не входит.

---

[6]) В случае, когда рассматривается решение, определенное не на максимально возможном интервале значений t, его всегда можно продолжить и такое продолжение возможно до границы области определенных правых частей системы дифференциальных уравнений. Точные формулировки см. [116, 134].

I. Если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ есть решение системы (A), то и

$$x=\varphi(t+c), \quad y=\psi(t+c),$$

где c — любая постоянная, тоже есть решение системы (A). При этом, если первое решение определено на интервале (τ, T), то второе решение определено на интервале $(\tau-c, T-c)$.

II. Решения

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t);$$
$$x=\varphi(t+c), \quad y=\psi(t+c)$$

можно рассматривать как решения с одинаковыми начальными значениями x_0 и y_0 и различными начальными значениями переменного t_0. Обратно, два решения, у которых начальные значения переменных x_0 и y_0 одинаковы, а начальные значения t_0 различны, могут быть получены одно из другого заменой t на $t+c$ при надлежащем выборе постоянной c. Это является очевидным следствием свойства I и единственности решения, удовлетворяющего данным начальным значениям [7]).

III. Решение, при $t=t_0$ принимающее начальные значения x_0, y_0, может быть записано в виде

$$x=\varphi(t-t_0, x_0, y_0), \quad y=\psi(t-t_0, x_0, y_0), \tag{1}$$

т. е. в решение системы (A) t и t_0 всегда входят только в комбинации $(t-t_0)$ [8]). По самому смыслу функций (1) очевидно

$$\varphi(0, x_0, y_0)=x_0, \quad \psi(0, x_0, y_0)=y_0.$$

Если x_0, y_0 (а также t_0) рассматриваются как произвольные параметры, то функции (1) называются *общим решением системы* (A). При фиксированных x_0, y_0, t_0 функции (1) называются *частным решением* или просто *решением* (так что «решение» и «частное решение» имеют один и тот же смысл).

Теорема 3. *В случае, когда правые части системы* (A) — *аналитические функции, функции* (1) *являются аналитическими функциями всех входящих в них переменных* t, t_0, x_0, y_0 [9]).

---

[7]) Отметим, что ни в одной точке интегральной кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ системы (A) касательная не может быть параллельна плоскости (x, y).

Действительно, мы можем считать эту кривую заданной в следующем параметрическом виде: $x=\varphi(\xi)$, $y=\psi(\xi)$, $t=\xi$. Если кривая задана в параметрическом виде $x=\varphi(\xi)$, $y=\psi(\xi)$, $t=\chi(\xi)$, то, если в какой-нибудь ее точке, соответствующей $\xi=\xi_0$, касательная параллельна плоскости (x, y), непременно $\dot{\chi}(\xi_0)=0$. В рассматриваемом нами случае $\chi(\xi)=\xi$ и $\dot{\chi}(\xi_0)=1$, т. е. нигде не обращается в нуль.

[8]) Этого очевидно заведомо может не быть (и, как правило, не бывает) в случае, когда система (II) неавтономна (правые части содержат t явно).

[9]) При более общих, чем в тексте, предположениях относительно правых частей системы (A), например, при предположении, что правые части

§ 4. Геометрическая интерпретация системы (А) на фазовой плоскости (x, y). Основная геометрическая интерпретация системы (А) связана не с рассмотрением пространства (t, x, y), а с рассмотрением плоскости (x, y), которая называется *фазовой плоскостью.*

В каждой точке области G плоскости (x, y) (область G может совпадать со всей плоскостью), в которой определены правые части системы (А), рассмотрим вектор v с компонентами

$$P(x, y), \quad Q(x, y).$$

Автономная динамическая система (А) определяет в области G векторное поле. Поэтому система (А) называется также *динамической системой на плоскости.*

В точках, в которых одновременно

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \tag{2}$$

длина вектора обращается в нуль, а направление вектора становится неопределенным [10]). Такие точки называются *особыми точками векторного поля* или *особыми точками системы* (А).

Во всякой не особой точке M векторное поле непрерывно в том смысле, что угол между векторами в любых двух достаточно близких к точке M точках сколь угодно мал и длины этих векторов сколь угодно мало отличаются друг от друга. Особые точки могут быть точками разрыва векторного поля.

Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{3}$$

— какое-нибудь решение системы (А).

Множество точек

$$M(\varphi(t), \psi(t)),$$

где t принимает все значения, при которых определено решение (3), называется *траекторией*, соответствующей данному решению, или *траекторией векторного поля*, заданного динамической системой (А), а также *фазовой траекторией* (или просто *траекторией* данной *динамической системы*).

Уравнения (3) очевидно являются параметрическими уравнениями траектории. Обратно, если дана какая-нибудь траектория, то решение, которому она соответствует, называется *решением, соответствующим данной траектории.*

имеют непрерывные производные до порядка n (и не являются аналитическими функциями x, y), функции (1) имеют непрерывные производные по x_0 и y_0 до порядка n и непрерывные производные по t и t_0 до порядка $n + 1$.

[10]) Синус и косинус угла α, который образует направление вектора с осью x, даются выражениями

$$\sin\alpha = \frac{Q(x, y)}{\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}}; \quad \cos\alpha = \frac{P(x, y)}{\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}}.$$

В каждой точке $M(x, y)$ траектории L, не являющейся особой точкой векторного поля, вектор $\mathbf{v}$ с компонентами $P(x, y)$, $Q(x, y)$ является касательным вектором к траектории L (рис. 1).

Пусть $M_0(a, b)$ — особая точка системы (A), так что

$$P(a, b) = Q(a, b) = 0.$$

Тогда очевидно, что

$$x = a, \quad y = b$$

есть решение системы (A), и, следовательно, особая точка сама является отдельной траекторией. Такая траектория называется *состоянием равновесия.*

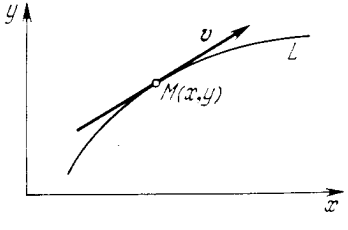


Рис. 1

На траекториях, отличных от состояний равновесия, естественным образом вводится положительное направление движения, именно движение в сторону возрастания t. В каждой точке траектории это направление дается соответствующим касательным вектором $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$.

Приведем следующие два основных предложения.

Лемма 1. *Пусть траектория L, соответствующая решению* (3), *на интервале $\tau < t < T$ отлична от состояния равновесия, и пусть существуют значения t_1 и t_2 ($\tau < t_1 < t_2 < T$) такие, что*

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \quad \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Тогда решение (3) *определено при всех значениях t (т. е. $t = -\infty$, $T = +\infty$), функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются периодическими функциями t, а соответствующая траектория — простой гладкой замкнутой кривой.*

(В силу этого предложения никакая траектория не может «самопересекаться».)

Лемма 2. а) *Всяким двум решениям, отличающимся только выбором начального значения t_0, соответствует одна и та же траектория.* б) *Всякие два различных решения, соответствующие одной и той же траектории, отличаются друг от друга только выбором начального значения t_0.*

Замечание. Все решения, соответствующие данной замкнутой траектории, являются периодическими решениями с одним и тем же периодом.

На основании лемм 1 и 2 без труда устанавливается

Теорема 4. *Через каждую точку области G (или плоскости) проходит одна и только одна траектория.*

Таким образом, задавая в области G (которая может совпадать со всей плоскостью) динамическую систему (А), мы тем самым задаем некоторое семейство траекторий, или, в другой терминологии, разбиение этой области (или плоскости) на траектории.

§ 5. Сопоставление геометрической интерпретации системы (А) в пространстве (x, y, t) с интерпретацией на фазовой плоскости. а) В каждую траекторию проектируется бесчисленное множество интегральных кривых пространства (x, y, t), получающихся друг из друга заменой t на $t - c$ (или, что то же, проходящих через точки с одними и теми же координатами x_0, y_0 и различными t_0). Каждая такая интегральная кривая соответствует некоторому решению, соответствующему траектории (рис. 2).

б) Если a, b — значения, для которых $P(a, b) = 0$, $Q(a, b) = 0$, то интегральная кривая пространства (x, y, t), проходящая через точку с координатами a, b, t_0, где t_0 любое, очевидно, является прямой, параллельной оси t; эта прямая проектируется на плоскость (x, y) в единственную точку $M(a, b)$, которая, очевидно, является состоянием равновесия системы (А) [11]).

в) Если решение — периодическое с периодом τ, то в пространстве (x, y, t) соответствующая интегральная кривая есть

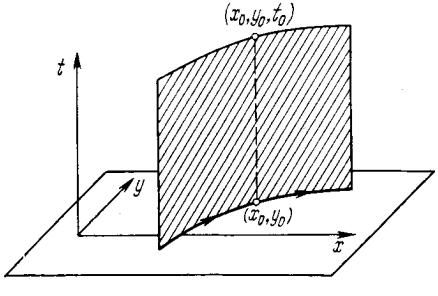


Рис. 2

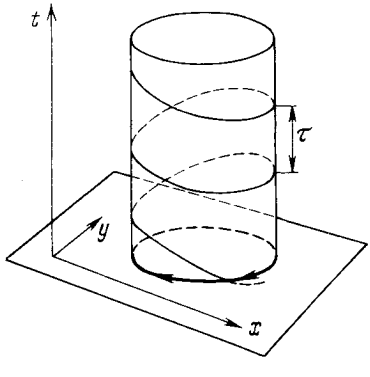


Рис. 3

спираль с шагом τ. Эта спираль проектируется на плоскость (x, y) в замкнутую кривую (рис. 3).

[11]) Отсюда очевидно, что ни в одной точке интегральной кривой пространства (x, y, t), отличной от соответствующей состоянию равновесия, касательная не может быть параллельна оси t (т. е. ни в одной точке, отличной от состояния равновесия, траектории $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не могут одновременно обращаться в нуль, в противном случае мы получили бы противоречие с теоремой о существовании и единственности решения).

Из теоремы существования и единственности решения вытекает, что точка $M(\varphi(t), \psi(t))$, при изменении t двигающаяся по некоторой траектории L, не может стремиться к точке какой-либо отличной от L траектории при t, стремящемся к конечному значению (в противном случае интегральные кривые в пространстве (x, y, t) пересекались бы, что невозможно в силу теоремы 1).

В частности, точка, двигаясь по траектории, отличной от состояния равновесия (отличной от замкнутой траектории), может неограниченно приближаться к состоянию равновесия (замкнутой траектории) либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

Состояния равновесия и замкнутые траектории являются траекториями, представляющими наибольший интерес для приложений. Состоянию равновесия соответствуют с о с т о я н и я р а в н о в е с и я той физической системы, которая описывается данной динамической системой, а замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям — к о л е б а н и я м, а в т о к о л е б а н и я м.

§ 6. Некоторые термины. Если решение, соответствующее данной траектории L, определено для всех значений t, $-\infty < t < +\infty$, то траекторию L иногда называют *целой траекторией.*

Если M_0 — точка траектории L, которая при выбранном на L движении соответствует значению $t = t_0$, то множество точек L, соответствующих значениям $t \geqslant t_0$ (или же $t \leqslant t_0$), называется *положительной полутраекторией* (соответственно *отрицательной полутраекторией*), выделенной из L, и обозначается соответственно через L^+ (или L^-).

Когда траектория L является состоянием равновесия или замкнутой траекторией, всякая положительная и всякая отрицательная полутраектории, выделенные из нее, очевидно, совпадают с ней самой. Полутраектория, выделенная из незамкнутой траектории, называется *незамкнутой полутраекторией*, траектория, выделенная из замкнутой траектории (в силу сказанного выше совпадающая с ней),— *замкнутой.* Параметр t часто называется *временем*, а решение системы (А)— *движением, соответствующим траектории*, или *движением по траектории* (*кинематическая* интерпретация динамической системы)[12]). Точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ называется *изображающей точкой.*

Используется следующая терминология: «изображающая точка при $t = t_0$ проходит через данную точку M_0 траектории L», или «траектория L при $t = t_0$ проходит через точку M_0», а также

[12]) В динамических системах, возникающих из приложений, t часто имеет смысл времени. Однако при этом следует подчеркнуть, что «траектории», о которых речь идет в тексте, являются «фазовыми траекториями» (траекториями на фазовой плоскости), а не траекториями движения.

«изображающая точка, двигаясь по L при возрастании t, пересекает данную дугу», «входит в данную область», «стремится к состоянию равновесия» и т. д. или «траектория при $t = t_0$ пересекает данную дугу», «входит в данную область» или «стремится при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) к состоянию равновесия» и т. д.

Состояние равновесия (особая точка) $M(a, b)$ системы (A) называется *изолированным* (*изолированной*), если существует окрестность точки $M(a, b)$, в которой, кроме M, не лежит больше ни одного состояния равновесия.

Если все точки кривой являются состояниями равновесия (особыми точками), т. е. во всех точках этой кривой $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, то такая кривая называется *особой линией* системы (A).

В некоторых статьях и монографиях (в основном классических, например у Пуанкаре и Бендиксона) вместо установившегося в настоящее время термина «траектория» используется термин «характеристика».

§ 7. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий. Кроме теоремы 1 (о существовании и единственности решения) основной теоремой, описывающей свойства решений, является теорема о непрерывной зависимости от начальных условий. Мы сформулируем ее применительно к системе (A) в следующей геометрической форме.

Теорема 5. *Пусть $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ — две точки одной и той же траектории L, соответствующие (при некотором выборе движения на L) значениям $t = t_0$ и $t = t_1$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\eta > 0$ такое, что всякая траектория L', при $t = t_0$ проходящая через какую-либо точку M η-окрестности точки M_0, определена при всех значениях t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и при $t = t_1$ проходит через некоторую точку M_1' окрестности точки M_1; каждая точка траектории L', соответствующая какому-либо значению t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, лежит в ε-окрестности точки траектории L, соответствующей тому же значению t [13]).

§ 8. Направление на траекториях. Изменение параметризации. Как уже было сказано, на всякой траектории L вводится определенное направление в качестве положительного (именно направ-

[13]) Отметим тот частный случай, когда траектория L является состоянием равновесия O (в этом случае при всех t мы получаем одну и ту же точку O, так как вся траектория является точкой). Тогда из теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений имеем: какой бы промежуток значения t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, мы ни взяли, при всяком $\varepsilon > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что всякая траектория, проходящая при $t = t_0$ через η-окрестность состояния равновесия O, в течение значений t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, не выйдет из ε-окрестности O, т. е., грубо говоря: «чем ближе траектория к состоянию равновесия, тем дольше она около него находится».

ление в сторону возрастания t)[14]). Введенное таким образом направление не зависит от того, какое из решений, соответствующих траектории L, мы возьмем (так как все такие решения получаются одно из другого заменой t на $t + c$).

Рассмотрим наряду с системой (A) систему

$$\dot{x} = -P(x, y), \quad \dot{y} = -Q(x, y). \tag{A'}$$

Векторное поле системы (A′) получается из векторного поля системы (A), если изменить направление каждого вектора на противоположное (не меняя длин векторов). Непосредственной проверкой устанавливается, что каждому решению

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

системы (A′) соответствует решение

$$x = \varphi(-t), \quad y = \psi(-t)$$

системы (A). Отсюда очевидно, что системы (A) и (A′) имеют одинаковые траектории, но индуцируют на траекториях противоположные направления. Таким образом, переход от системы (A) к системе (A′) можно рассматривать как изменение параметризации на траекториях, именно как замену параметра t параметром $-t$.

Рассмотрим более общий случай изменения параметризации. Пусть $f(x, y)$ — аналитическая функция, определенная в той же области плоскости, что и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, и пусть функция $f(x, y)$ отлична от нуля во всех точках, отличных от состояния равновесия системы (A) (и имеет один и тот же знак). Рассмотрим наряду с системой (A) систему

$$\begin{aligned} dx/ds &= P^*(x, y) = P(x, y) f(x, y), \\ dy/ds &= Q^*(x, y) = Q(x, y) f(x, y). \end{aligned} \tag{A*}$$

Можно показать, что системы (A) и (A*) имеют одни и те же траектории, но с различными параметризациями на них. Именно, можно показать, что между параметрами t и s существует следующая зависимость:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{f(\varphi(t), \psi(t))}.$$

Очевидно, что при переходе от системы (A) к (A*) направления на траекториях остаются неизменными, если $f(x, y) > 0$, и меняются, если $f(x, y) < 0$.

---

[14]) Пользуясь кинематической интерпретацией, т. е. считая t временем, можно сказать, что положительное направление на траектории L есть то направление, в котором точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — решение, соответствующее траектории L) движется по траектории с возрастанием t.

Предположим теперь, что функция $f(x, y)$ может обращаться в нуль в точках, отличных от состояний равновесия системы (A), а также может менять знак в области G. Рассмотрим снова систему (A*). Очевидно, что состояниями равновесия системы (A*) являются все состояния равновесия системы (A), а также все точки области G, которые не являются состояниями равновесия системы (A), но в которых $f(x, y) = 0$.

Кривая

$$f(x, y) = 0$$

будет особой линией системы (A*) (каждая точка этой кривой является состоянием равновесия системы (A*)).

Рассмотрим теперь траекторию L системы (A), отличную от состояния равновесия. Если на траектории L функция $f(x, y) \not\equiv 0$, то, так же как и выше, L является траекторией системы (A*) с измененной, вообще говоря, параметризацией. Если же на траектории L имеются точки S_1, S_2, S_3 кривой $f(x, y) = 0$, то все точки L, отличные от этих точек, распадаются, как легко видеть, на конечное или счетное число гладких кривых, являющихся траекториями системы (A*) (рис. 4). Направление на

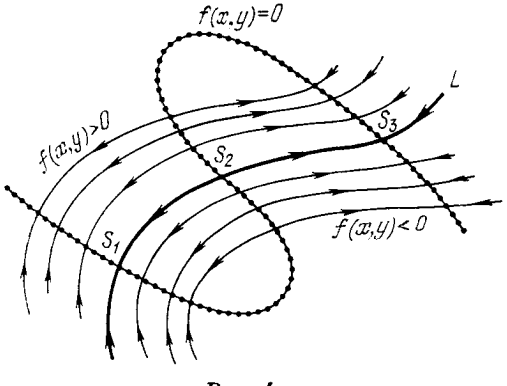


Рис. 4

каждой такой траектории совпадает с направлением на L, если на этой траектории $f(x, y) > 0$, и не совпадает в противном случае.

Таким образом, каждая траектория системы (A) либо является траекторией системы (A*), либо состоит из конечного или бесконечного множества траекторий системы (A*).

В приложениях часто встречаются динамические системы вида

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P(x, y)}{f(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{Q(x, y)}{f(x, y)}, \qquad \text{(A**)}$$

где функция $f(x, y)$ аналитическая, но может обращаться в нуль в области G (в которой рассматривается система). Очевидно, в точках, где $f(x, y)=0$, правые части рассматриваемой системы (A**) не определены. Однако при указанном виде правых частей можно путем замены параметра t привести рассмотрение системы (A**) к рассмотрению системы вида (A).

Действительно, полагая при x и y, не обращающих в нуль $f(x, y)$, $dt=f(x, y)d\tau$, мы получаем систему

$$dx/d\tau=P(x, y),\ dy/d\tau=Q(x, y). \tag{A}$$

Эту же систему мы будем рассматривать и при x и y, обращающих в нуль функцию $f(x, y)$ (что соответствует доопределению по непрерывности), так что система (A) будет определена во всей области G. Очевидно, во всякой части области G, в которой $f(x, y)$ не обращается в нуль, траектории систем (A**) и (A) совпадают как точечные множества, однако параметры на них различны. При этом там, где $f(x, y)>0$, направление по τ совпадает с направлением по t, а там, где $f(x, y)<0$,— противоположно ему. Точки с координатами x и y, обращающими в нуль функцию $f(x, y)$, в которых правые части системы (A**) не определены, естественно выделять и считать не принадлежащими траекториям системы (A) (к таким точкам, как нетрудно убедиться на простых примерах, точка может стремиться по траектории при t, стремящемся к конечному значению).

§ 9. Дифференциальное уравнение, соответствующее динамической системе. Если разделить одно из уравнений (A) на другое, то мы получим либо дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{A$_1$}$$

либо дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{A$_2$}$$

Если $M(x_0, y_0)$— точка области G, для которой $P(x_0, y_0)\neq 0$, то в силу теоремы о существовании и единственности решения существует единственное решение дифференциального уравнения (A), соответствующее начальным значениям x_0, y_0:

$$y=f(x). \tag{4}$$

Уравнение (4) является уравнением в декартовых координатах траектории L, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ (в окрестности этой точки). Оно, очевидно, может быть получено из решения системы (A): $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, соответствующего траектории L, исключением t (в окрестности точки M_0).

Если $M(x_0, y_0)$— точка, в которой $P(x_0, y_0)=0$, но $Q(x_0, y_0)\neq 0$, то можно использовать уравнение (A$_2$). Точки, в которых

одновременно $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, называются *особыми точками уравнений* (A_1) и (A_2).

Одновременное задание уравнений (A_1) и (A_2) определяет все траектории системы (A), отличные от состояний равновесия. Но, в то время как из системы (A) уравнения траекторий находятся в параметрической форме, из дифференциальных уравнений (A_1) и (A_2) они находятся в декартовых координатах. Вместо написания двух уравнений (A_1) и (A_2) часто используются следующие симметричные относительно x и y записи:

$$P(x, y)\,dy - Q(x, y)\,dx = 0, \qquad (A_3)$$

или

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Уравнения (A_1) и (A_2) определяют *угловой коэффициент касательной* к траектории, который в каждой точке может быть намечен с помощью ненаправленного отрезка (в то время как система (A) в каждой точке определяет вектор). Так, уравнение (A_3) или пара уравнений (A_1) и (A_2) задают поле «линейных элементов».

Кривые

$$Q(x, y) + c_1 P(x, y) = 0, \quad P(x, y) + c_2 Q(x, y) = 0$$

(c_1 и c_2 — постоянные), во всех точках которых направление касательных к траекториям одинаково, называются *изоклинами* (линиями равного наклона) системы (A) (или уравнения (A_3)). В частности, при $c_1 = 0$ мы получаем кривую $Q(x, y) = 0$ — изоклину горизонтальных наклонов, а при $c_2 = 0$ — кривую $P(x, y) = 0$ — изоклину вертикальных наклонов.

§ 10. Понятие интегральной кривой и интеграла в случае аналитических правых частей $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ системы (A). Термины «решение», «интегральная кривая» употреблялись выше в случае, когда правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (в частности, уравнений (A_1) и (A_2)) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности.

В классической литературе при рассмотрении системы дифференциальных уравнений, правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ которых — аналитические функции, в термины «решение» и «интегральная кривая» вкладывается несколько иное содержание.

Именно, в этом случае решением уравнения (A_1) (или уравнения (A_2)) называется аналитическая функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале значений x, $x_1 < x < x_2$, и удовлетворяющая уравнению (A_1) (или (A_2)) во всех неособых точках, но могущая принимать при некотором значении a такое значение $b = f(a)$, что a, b являются коорди-

натами особой точки. Далее, если $F(x, y)$ — функция, аналитическая во всех неособых точках уравнения (могущая, в частности, оставаться аналитической также и в особых точках) и такая, что $F_x'^2 + F_y'^2 \not\equiv 0$, но имеет место тождественное равенство

$$F_x'(x, y)\,P(x, y) + F_y'(x, y)\,Q(x, y) \equiv 0, \tag{5}$$

то соотношение

$$F(x, y) = c$$

называется *общим интегралом уравнения* (A_3) или *системы* (A). В достаточно малой окрестности каждой неособой точки $M_0(x_0, y_0)$ аналитической системы (A) существует (локально) аналитический интеграл $F(x, y) = c$ [15]). Давая c различные значения, мы будем получать уравнения «кусков» «локально» различных траекторий.

Пусть $\Phi(x, y)$ — аналитическая функция и равенство

$$\Phi_x'(x, y)\,P(x, y) + \Phi_y'(x, y)\,Q(x, y) = 0$$

удовлетворяется тождественно при значениях x, y, при которых

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{6}$$

а $\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2 \neq 0$.

---

[15]) Действительно, пусть $x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0)$, $y = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$ — общее решение системы (A), где x_0, y_0 достаточно близки к данным фиксированным значениям x_0^*, y_0^*. Если точка $M_0^*(x_0^*, y_0^*)$ — неособая, то $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ одновременно в нуль в ней не обращаются. Пусть, например, $P(x_0^*, y_0^*) \neq 0$. Мы рассмотрим все траектории в достаточно малой окрестности точки M^*, если зафиксируем x_0, положив его равным x_0^*, и будем менять y_0 (тот факт, что $P_0(x_0^*, y_0^*) \neq 0$, означает, что вблизи M_0^* прямая $x_0 = x_0^*$ не имеет контактов с траекториями), и тогда сделанное утверждение вытекает из свойства II § 1 гл. 2, т. е. если рассмотрим функции

$$x = \varphi(t - t_0, x_0^*, y_0), \quad y = \psi(t - t_0, x_0^*, y_0).$$

Разлагая их в ряд по степеням $t - t_0 = \tau$, получим

$$x = x_0^* + P(x_0^*, y_0)\,\tau + \ldots, \quad y = y_0^* + Q(x_0^*, y_0)\,\tau + \ldots$$

Нетрудно видеть, что при $\tau = 0$, $y_0 = y_0^*$ функциональный детерминант

$$\frac{D(x, y)}{D(\tau, y_0)} = \begin{vmatrix} P(x_0^*, y_0^*) & 0 \\ Q(x_0^*, y_0^*) & 1 \end{vmatrix} = P(x_0^*, y_0^*) \neq 0.$$

Следовательно, разрешая эти уравнения относительно y_0 вблизи y_0^* и τ, мы получим $\varphi(x, y) = \tau$, $F(x, y) = y_0$, где последнее соотношение и является локальным общим аналитическим интегралом. Нетрудно показать, что $F_x'^2 + F_y'^2 \not\equiv 0$.

Тогда соотношение (6) называется частным интегралом уравнения (A_3) или просто *интегралом системы* (A).

Если $y = \varphi(x)$ — решение или

$$\Phi(x, y) = 0$$

— интеграл уравнения (A_3), то соответствующая кривая называется *интегральной кривой* уравнения (A_3).

Нетрудно убедиться, рассматривая простые примеры, что, как указано, интегральная кривая в этом смысле может проходить через особые точки.

В случае, когда функция $F(x, y)$, удовлетворяющая соотношению (5), является аналитической во всех точках области G, как особых, так и неособых, то говорят, что *уравнение* (A_3) или система (A) *имеет аналитический интеграл.*

§ 11. Что значит «найти решение динамической системы»? Если математической моделью реальной физической системы является динамическая система вида (A), то представляется возможным с помощью этой системы проследить изменение состояний рассматриваемой реальной системы при изменении времени t. Именно, в силу теоремы 1 задание начальных значений x_0, y_0, t_0 однозначно определяет решение для всех значений t (т. е. однозначно определяет «прошлое» и «будущее»). Говорят, что для этого нужно только «найти решение» или проинтегрировать систему (A). Однако слова «найти решение», «проинтегрировать динамическую систему» без дополнительного уточнения не имеют смысла. Действительно, если под интегрированием системы (A) понимать нахождение аналитического выражения для решений, то естественным образом встает вопрос: каков характер аналитического выражения и каковы вообще те требования, которые можно предъявить к такому аналитическому выражению?

Известно, что выразить решение системы (A) через элементарные функции или через интегралы от элементарных функций (решить систему (A) «в квадратурах») возможно лишь в случае частных типов этой системы.

Аналитический вид решения очень хорошо известен в случае линейных систем (A). Однако далеко не всякая физическая система может быть хотя бы приближенно описана линейной системой. В случае же нелинейных систем даже тогда, когда решение может быть выражено через элементарные функции, эти выражения могут быть столь сложными, что непосредственный их анализ практически невозможен. Можно ставить задачу нахождения решения не в элементарных функциях и «в квадратурах», а в виде рядов, равномерно и абсолютно сходящихся. Однако в некоторых случаях эти ряды сходятся столь медленно, что ими практически невозможно пользоваться. К вопросу нахождения решения можно также подойти совсем иначе: именно, можно отказаться

от отыскания аналитических выражений для решений и, задавая с той или иной степенью точности некоторые начальные значения, приближенно вычислять решения на заданном промежутке значений. При наличии современных вычислительных машин такое приближенное вычисление решений играет очень большую роль и для некоторых задач может дать фактически исчерпывающий ответ. Однако в целом ряде случаев, пожалуй, даже в большинстве случаев, такой «слепой счет» ни в какой мере не может дать удовлетворительного решения задачи.

Кроме того, для многих задач представляет интерес не аналитический вид решения и не приближенное вычисление решений, а, например, ответ на следующие вопросы: каково число состояний равновесия у данной динамической системы, и устойчивы они или нет; существуют ли замкнутые траектории, сколько их и как они расположены [16])?

Таким образом, стремясь уточнить понятие «интегрирования динамической системы (А)», мы должны прежде всего внести ясность в вопрос о том, какими свойствами решений динамической системы мы интересуемся.

При рассмотрении задач небесной механики возникло понятие *качественного интегрирования*, или *качественного исследования*, динамической системы. Это понятие оказалось впоследствии чрезвычайно важным также и для задач «земной» физики, в частности радиотехники, теории регулирования, а также многих других областей.

§ 12. Примеры. В настоящем параграфе мы приведем ряд простых примеров, на которых проиллюстрируем материал предыдущих параграфов. Эти примеры в силу их простоты одновременно являются примерами полного качественного исследования динамической системы. Во всех приведенных примерах динамические системы определены на всей плоскости.

Пример 1.

$$dx/dt = 1, \quad dy/dt = 0.$$

Траектории — прямые, параллельные оси x:

$$y = c_1, \quad x = t + c_2.$$

[16]) Если рассматриваемая система (А) является математической моделью какой-либо реальной физической системы, то состояния равновесия системы (А) соответствуют состояниям равновесия реальной системы, замкнутые траектории — периодическим движениям — колебаниям (в частности, автоколебаниям). Для некоторых устройств колебания нужны: наличие их как раз и используется в этом устройстве (например, различные генераторы колебаний), в других они, наоборот, вредны (флаттер, шимми и т. д.). Отсюда очевиден первостепенный интерес для приложений сведений о существовании, взаимном расположении замкнутых траекторий и состояний равновесия их устойчивости, а также сведений от области притяжения того или другого устойчивого состояния равновесия или устойчивой замкнутой траектории и т. д.

Состояний равновесия, очевидно, нет: все траектории (совпадающие с интегральными кривыми) являются целыми траекториями.

Пример 2.

$$dx/dt = 1, \quad dy/dt = 1 + y^2, \tag{7}$$
$$y = \operatorname{tg}(t + c_1), \quad x = t + c_2.$$

Состояний равновесия нет, траектории не являются целыми траекториями ввиду того, что точки на этих траекториях уходят в бесконечность при t, стремящемся к конечному значению. Именно,

$$y = \operatorname{tg}(t + c_1) \to \infty \text{ при } t + c_1 \to \frac{\pi}{2}(2k + 1).$$

Пример 3.

$$dx/dt = ax, \quad dy/dt = by, \tag{8}$$

где a и b имеют одинаковые знаки.

На плоскости (x, y) (т. е. на фазовой плоскости системы (8)) эта система задает векторное поле, примерно изображенное на

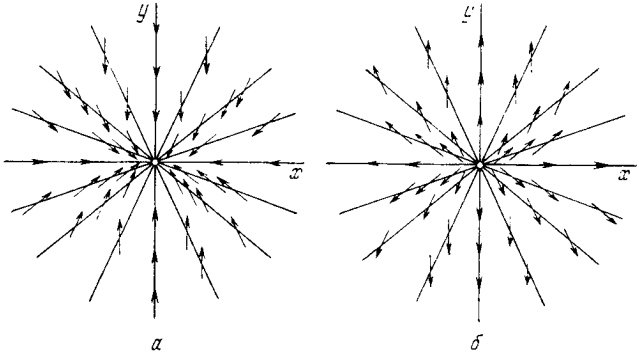


Рис. 5

рис. 5, *а* при $a < 0$, $b < 0$ и на рис. 5, *б* при $a > 0$, $b > 0$. Прямые на этом рисунке являются изоклинами.

Система (8), очевидно, имеет единственное состояние равновесия $O(0, 0)$. Решая систему (8) как линейную с постоянными коэффициентами, легко видеть, что решение, соответствующее начальным значениям t_0, x_0, y_0, имеет вид

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y = y_0 e^{b(t-t_0)}. \tag{9}$$

Очевидно, что в согласии с леммой 3 это решение является функцией $t - t_0$.

Траектории системы (8) проще всего получить, исключая $t - t_0$ в уравнениях (9), т. е. переходя к декартовым координатам.

Мы получаем

$$y = y_0 \frac{x^{b/a}}{x_0^{b/a}}. \tag{10}$$

Полагая при $x_0 \neq 0$ $y_0/x_0^{b/a} = c$, мы получим параболы

$$y = cx^{b/a},$$

а при $x_0 = 0$ (когда выражение $y_0/x_0^{b/a}$ может не иметь смысла) — $x = 0$. При $y_0 = 0$ мы получаем $y = 0$.

Перейдем от системы (8) к одному уравнению, например, записанному в виде $dy/dx = by/ax$ или в виде

$$dx/dy = ax/by. \tag{11}$$

Как было указано, уравнение (11) задает поле линейных элементов, и оно представлено на рис. 6. Если проинтегрировать уравнение (11), то в качестве интегральных кривых в смысле § 10 мы получим параболы (10) и две оси координат.

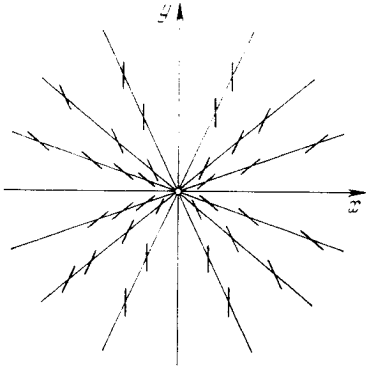


Рис. 6

Траекториями системы (8) являются те части (половины) парабол (10) и координатных осей $x = 0$ и $y = 0$, на которые эти кривые разбиваются состоянием равновесия $O(0, 0)$. Из соотношений (9) видно, что если $a < 0$, $b < 0$, то точка на любой отличной от нуля траектории стремится к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$, а если $a > 0$, $b > 0$, то при $t \to -\infty$.

Напомним (см. § 5), что когда изображающая точка, двигаясь по отличной от состояния равновесия траектории L, стремится к некоторому состоянию равновесия $A(x_0, y_0)$, то при этом всегда $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Таким образом, разбиение на траектории, определенное системой (8) (с указанными на траекториях направлениями)[17]), имеет

[17]) Если особых линий нет, то для того, чтобы наметить направление на траекториях, достаточно наметить направление в какой-либо одной точке. Тогда во всех других точках направление определяется из соображений непрерывности. Определить же направление в какой-либо точке (x_0, y_0), в которой $P(x_0, y_0) \neq 0$, можно, вычисляя в этой точке $P(x_0, y_0)$ и определяя в этой точке знак $P(x_0, y_0)$; если $P(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) $dx/dt > 0$, а значит: вблизи этой точки при движении по траектории в сторону возрастания t — x возрастает, что и определяет направления на траектории, проходящей через точку (x_0, y_0). Совершенно аналогично можно наметить направления на траекториях, рассматривая знак $Q(x_0, y_0)$ в точке, в которой $Q(x_0, y_0) \neq 0$.

вид, указанный на рис. 7. Состояние равновесия такого типа называется *узлом*, *устойчивым* в случае $a<0$, $b<0$ (рис. 7, *а*) и *неустойчивым* в случае $a>0$, $b>0$ (рис. 7, *б*).

Рассмотрим еще интерпретацию решений системы (8), т. е. интегральные кривые системы (8) в трехмерном пространстве

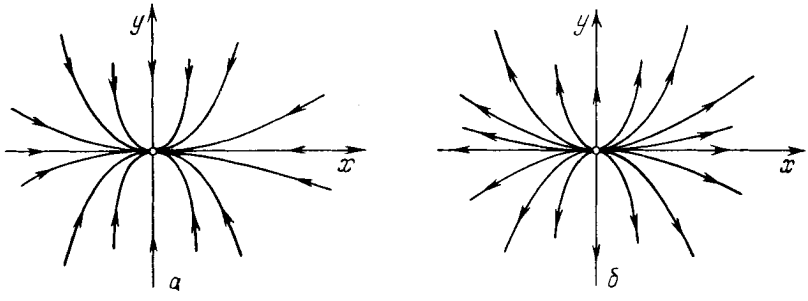


Рис. 7

(x, y, t). Из формул (9) следует, что интегральными кривыми системы (8) в пространстве (x, y, t) являются:

1) ось t, т. е. $x=0$, $y=0$ (эти уравнения получаются из уравнений (9) при $x_0=y_0=0$); она проектируется в состояние равновесия O фазовой плоскости;

2) показательные кривые

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y = 0,$$

расположенные в координатных полуплоскостях $x>0$, $y=0$ или $x<0$, $y=0$ и асимптотически стремящиеся к оси t при $t \to +\infty$, если $a<0$, и при $t \to -\infty$, если $a>0$; эти кривые проектируются в положительную и отрицательную полуоси абсцисс, являющиеся траекториями системы;

3) показательные кривые

$$x = 0, \quad y = y_0 e^{b(t-t_0)},$$

аналогичные кривым типа 2);

4) кривые

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y = y_0 e^{b(t-t_0)},$$

расположенные на параболических цилиндрах $y = cx^{b/a}$ с образующими, параллельными оси t. Ось t разбивает каждый такой цилиндр на две «половины»; каждая интегральная кривая типа 4) лежит целиком в одной половине цилиндра и асимптотически стремится к оси t при $t \to +\infty$, если $a<0$, $b<0$, и при $t \to -\infty$, если $a>0$, $b>0$. Интегральные кривые типа 4) получаются друг из друга сдвигом вдоль оси t. То же справедливо для интегральных кривых типа 2) или 3).

Пример 4.

$$dx/dt = -y + \alpha x, \quad dy/dt = x + \alpha y \tag{12}$$

(α — отличная от нуля постоянная).

Векторное поле, определенное этой системой (при $\alpha < 0$), изображено на рис. 8. Решая систему (12) как линейную систему с постоянными коэффициентами, мы получим решение, соот-

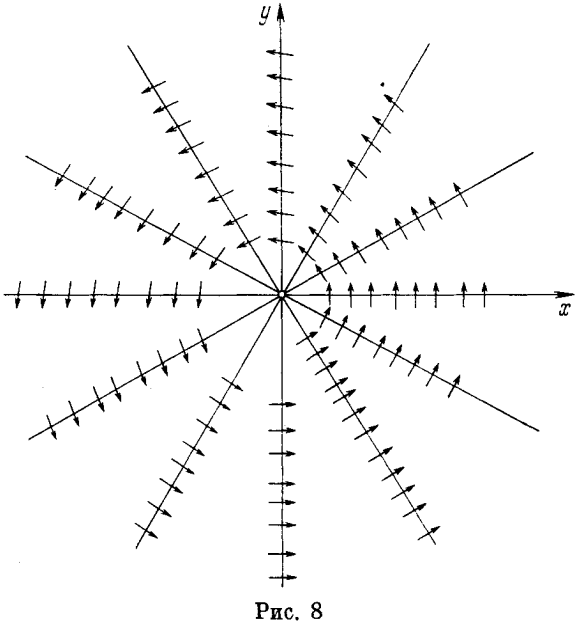


Рис. 8

ветствующее начальным значениям x_0, y_0, t_0 в следующем виде (оно, очевидно, является функцией $t - t_0$ в согласии с п. III § 3):

$$\begin{aligned} x &= e^{\alpha(t-t_0)}\,[x_0 \cos(t - t_0) - y_0 \sin(t - t_0)], \\ y &= e^{\alpha(t-t_0)}\,[x_0 \sin(t - t_0) + y_0 \cos(t - t_0)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Характер траекторий рассматриваемой системы удобнее исследовать, переходя к полярным координатам. Мы получим после элементарных вычислений

$$d\rho/dt = \alpha\rho, \quad d\theta/dt = 1. \tag{14}$$

Решение этой системы

$$\rho = \rho_0\, e^{\alpha(t-t_0)}, \quad \theta = \theta_0 + t - t_0 \tag{15}$$

является, очевидно, уравнением в полярных координатах траектории системы (12), проходящей при $x = x_0$ через такую началь-

ную точку $M(x_0, y_0)$, полярные координаты которой (ρ_0, θ). Исключая $t - t_0$ из (15), получаем

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha(\theta-\theta_0)}. \tag{16}$$

Уравнение (16) дает, очевидно, все траектории системы (12). Если $\rho_0 \neq 0$, эти траектории являются логарифмическими спиралями. При $\rho_0 = 0$ получается состояние равновесия $O(0, 0)$.

Первое из двух уравнений (15) показывает, что все траектории стремятся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$, если $\alpha < 0$ (рис. 9), и при $t \to -\infty$, если $\alpha > 0$ (рис. 10). Состояние равновесия такого типа, как в данном примере, называется *фокусом*,

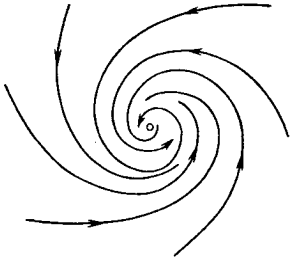


Рис. 9

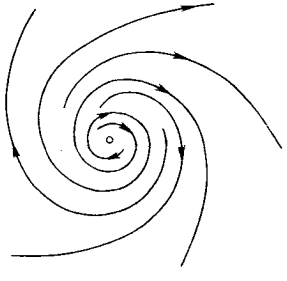


Рис. 10

устойчивым в случае $\alpha < 0$ и *неустойчивым* при $\alpha > 0$ (точное определение фокуса будет дано в дальнейшем).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{-y + \alpha x} = \frac{dy}{x + \alpha y},$$

соответствующее системе (12). Оно очевидно является однородным. Интегрируя его (с помощью подстановки $y/x = u$ или $x/y = u$), мы получим соотношение [18])

$$x^2 + y^2 - c\, e^{2\alpha \operatorname{arctg}(y/x)} = 0 \tag{17}$$

или

$$x^2 + y^2 - c\, e^{2\alpha \operatorname{arctg}(x/y)} = 0. \tag{18}$$

Первое из этих соотношений является общим интегралом системы (в смысле § 10) во всякой области, не содержащей точек оси x (т. е. точек $x = 0$), а второе — во всякой области, не содержащей точек оси $y = 0$. Однако ни одно из этих соотношений не является в строгом смысле слова общим интегралом системы в области, содержащей точку O. «Целую» интегральную кривую,

[18]) Очевидно, что мы можем получить эти соотношения также из уравнения траекторий в полярных координатах, возвращаясь от них к координатам x и y.

расположенную в такой области, можно получить, «склеивая» куски кривых (17) и (18).

Рассмотрим интерпретацию в трехмерном пространстве. Как и в предыдущем примере, ось t является интегральной кривой системы (12) в пространстве (x, y, t). Остальные интегральные кривые расположены на цилиндрических поверхностях, имеющих своими направляющими спирали (16), а образующими — прямые, параллельные оси t. Эти интегральные кривые асимптотически приближаются к оси t при $t \to +\infty$, если $\alpha < 0$, и при $t \to -\infty$, если $\alpha > 0$.

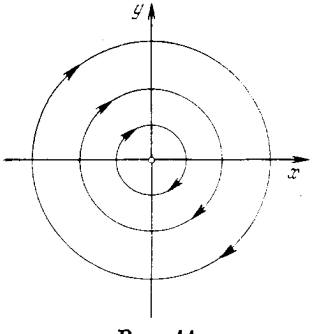


Рис. 11

Отметим, что хотя формы траекторий в примерах 3 и 4 при $a < 0$, $b < 0$ и $\alpha < 0$ ($a > 0$, $b > 0$ и $\alpha > 0$ соответственно) существенно отличаются, но в некотором смысле поведение траекторий в том и в другом случаях одинаково: именно, в обоих примерах все отличные от состояния равновесия траектории при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$) стремятся к состоянию равновесия.

Пример 5.

$$dx/dt = -y, \quad dy/dt = x. \tag{19}$$

Эта система получается как частный случай системы (12) при $\alpha = 0$. Решения, соответствующие начальным значениям x_0, y_0, t_0, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(t - t_0) - y_0 \sin(t - t_0), \\ y &= x_0 \sin(t - t_0) + y_0 \cos(t - t_0). \end{aligned} \tag{20}$$

Непосредственной проверкой (или используя (20)) нетрудно убедиться, что

$$x^2 + y^2 = C \tag{21}$$

является общим аналитическим интегралом системы. Таким образом, в этом случае система имеет аналитический интеграл.

Траекториями системы, очевидно, являются состояние равновесия $O(0, 0)$ и замкнутые траектории — концентрические окружности с центром в начале (рис. 11). Решения (20), соответствующие замкнутым траекториям — окружностям, являются периодическими функциями с периодом 2π.

Интегральными кривыми в трехмерном пространстве (x, y, t) являются ось t и винтовые линии, расположенные на круглых цилиндрах с направляющими (21). Шаг каждой винтовой линии равен 2π.

Пример 6.

$$dx/dt = -x, \quad dy/dt = y. \tag{22}$$

Векторное поле изображено на рис. 12. Решение системы, соответствующее начальным значениям x_0, y_0, t_0, имеет вид

$$x = x_0 e^{-(t-t_0)}, \quad y = y_0 e^{(t-t_0)}. \tag{23}$$

Точка $O(0, 0)$ — состояние равновесия.

Система имеет аналитический интеграл

$$xy = C. \tag{24}$$

Интегральными кривыми являются при $C \neq 0$ гиперболы (24) и при $C = 0$ — координатные оси $x = 0$ и $y = 0$. Каждая гипербола состоит из двух траекторий (ее ветвей), и каждая из координатных осей — из трех траекторий (состояния равновесия O и

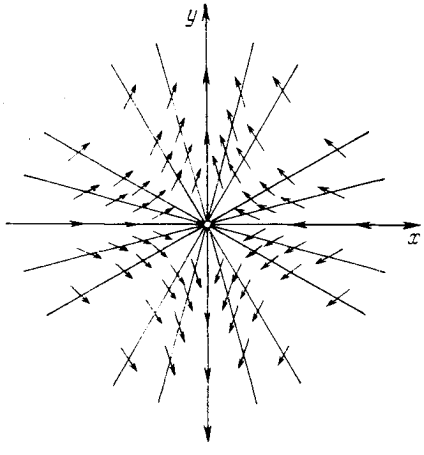


Рис. 12

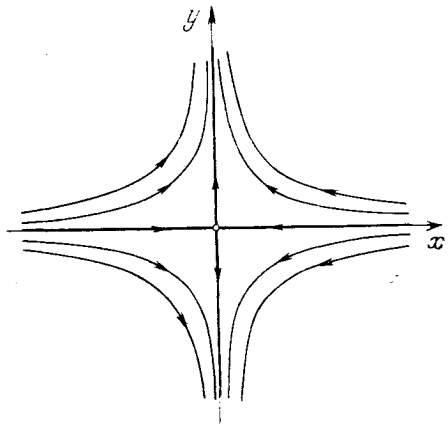


Рис. 13

двух полуосей). Соответствующее разбиение на траектории указано на рис. 13.

Из выражений (23) очевидно, что траектории, являющиеся полупрямыми оси x (получающиеся из (23) при $y_0 = 0$), стремятся к состоянию равновесия при $t \to +\infty$, а траектории, являющиеся полупрямыми оси y,— при $t \to -\infty$. Других траекторий, стремящихся к состоянию равновесия O, система не имеет.

Состояние равновесия такого типа, как у данной системы, называется *седлом*: Траектории, стремящиеся к седлу O, в данном случае четыре полуоси $x = 0$ и $y = 0$, называются *сепаратрисами седла*.

Траектории, сколь угодно близкие к точке сепаратрисы, стремящейся к O при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), при неограниченном возрастании (убывании) t удаляются от этой сепаратрисы. Обратим внимание на то, что такое поведение траекторий, очевидно, ни в какой мере не противоречит теореме 5 § 7 (о непрерывной зависимости от начальных условий), так как эта теорема рассматривает поведение близких траекторий только на конечном проме-

жутке значений t. Нетрудно убедиться в том, что если взять за исходную траекторию сепаратрису, то для любого конечного промежутка значений t теорема о непрерывной зависимости от начальных условий, очевидно, выполняется. Но при увеличении рассматриваемого промежутка величину η (теоремы 5 § 7) нужно брать все меньше и меньше.

Рассмотрение интегральных кривых системы (22) в пространстве (x, y, t) аналогично приведенному в предыдущих примерах, и мы его опускаем.

Пример 7.

$$dx/dt = -y - x(x^2 + y^2 - 1),\ dy/dt = x - y(x^2 + y^2 - 1). \quad (25)$$

Полагая $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ или $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$, найдем

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2\rho^2(1 - \rho^2),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2 + y^2} = 1, \quad (26)$$

$$\frac{d\rho^2}{d\theta} = 2\rho^2(1 - \rho^2). \quad (27)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\rho^2 = \frac{1}{1 - Ce^{-2\theta}}, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{1 - Ce^{-2\theta}}}.$$

Это — уравнение траекторий в полярных координатах. При этом $\rho = 1$, очевидно, является решением (27), соответствующим $C = 0$, т. е. траекторией. Траектории, проходящей через точку $M_0(\rho_0, \theta_0)$, соответствует значение $C = (\rho_0^2 - 1)\,e^{2\theta_0}/\rho_0^2$. Если $\rho_0 > 1$, то $C > 0$, $\rho > 1$; при $\theta \to +\infty$ $\rho \to 1$ и $\rho \to +\infty$ при $\theta \to (\ln C)/2$. (Очевидно, при этом θ изменяется в интервале $(\ln C)/2 < 0 < +\infty$.) Если $\rho_0 < 1$, то $C < 0$ и $\rho < 1$. Тогда $\rho \to 0$ при $\theta \to -\infty$ и $\rho \to 1$ при $\theta \to +\infty$. Отсюда следует, что траектории системы имеют вид, указанный на рис. 14. Второе из уравнений (26) показывает, что если траектория проходит через точку $M(\rho_0, \theta_0)$ при $t = t_0$, то $\theta = \theta_0 + (t - t_0)$. Состояние равновесия $O(0, 0)$, так же как в случае линейной системы (12) примера 4, является фокусом, причем неустойчивым.

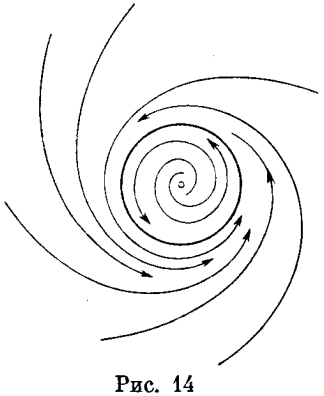


Рис. 14

Траектория $\rho = 1$, т. е. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (в отличие от того, что было в примере 6), не окружена замкнутыми траекториями. Она

является изолированной замкнутой траекторией, и все траектории, проходящие через точки достаточно малой ее окрестности, стремятся к ней при $t \to +\infty$ [19]). Такая замкнутая траектория называется предельным циклом.

Несколько более сложные примеры, исследующиеся в основном непосредственным интегрированием, см. в [12].

§ 13. Замечания по поводу примеров § 12. Приведенные выше примеры (на которых был также проиллюстрирован целый ряд указанных выше элементарных свойств системы (A)) являются примерами исчерпывающего исследования качественной структуры разбиения на траектории, т. е. исчерпывающего качественного исследования динамической системы.

Точное определение того, что называется качественным характером разбиения на траектории и качественным исследованием динамической системы, будет дано в следующем параграфе. Здесь мы опираемся пока лишь на непосредственно геометрически наглядные представления. С точки зрения качественного исследования знание точной формы траекторий не представляет интереса: мы уже подчеркивали это, указывая на одинаковое качественное поведение траекторий в случае узла или фокуса.

Однако существенный интерес представляют, например, знание числа состояний равновесия, факт наличия или отсутствия изолированной замкнутой траектории — предельного цикла, ход сепаратрис и т. д.

В приведенных примерах исчерпывающее качественное исследование разбиения на траектории удалось провести ввиду крайней простоты рассматриваемых динамических систем. Однако такое элементарное и исчерпывающее качественное исследование, как правило, не удается провести в случае произвольной динамической системы вида (A).

Мы не можем рассчитывать получить элементарные выражения для решений или интегралов в случае произвольной динамической системы. Вследствие этого даже очень простые по виду динамические системы, имеющие интерес в прикладных вопросах, требуют для своего качественного исследования создания специальных приемов. Примером этому может служить уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

[19]) На каждой траектории, лежащей вне предельного цикла, t изменяется от конечного значения $(\ln C)/2$ до ∞. Это можно выразить, сказав, что при убывании t точка на такой траектории уходит в бесконечность за конечное время, так что траектории, лежащие вне предельного цикла, не являются целыми.

т. е. система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \lambda(1 - x^2)y - x,$$

качественному исследованию которой было посвящено большое количество работ.

Таким образом, естественно встает вопрос об отыскании регулярных методов качественного исследования динамических систем или хотя бы о достаточно эффективных приемах такого исследования, тем более что, как уже указывалось в § 11, даже в тех случаях, когда у рассматриваемой системы существует аналитический интеграл (в смысле § 10) и найдено его аналитическое выражение

$$F(x, y) = C, \qquad (28)$$

вопрос качественного исследования разбиения на траектории, как правило, не делается тривиальным (в настоящее время не существует регулярных методов качественного исследования семейства кривых (28) даже в случае, когда $F(x, y)$ — многочлен).

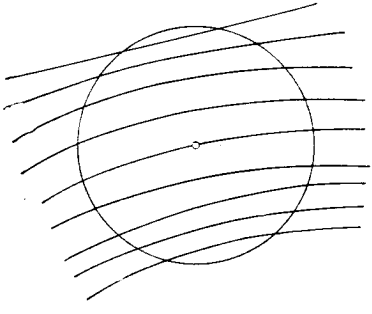


Рис. 15

Поэтому представляется целесообразным отыскание методов или приемов непосредственного качественного исследования системы (A) без предварительного нахождения аналитических выражений для решений.

Однако сначала естественно установить некоторые общие свойства разбиения на траектории. Укажем сначала следующий

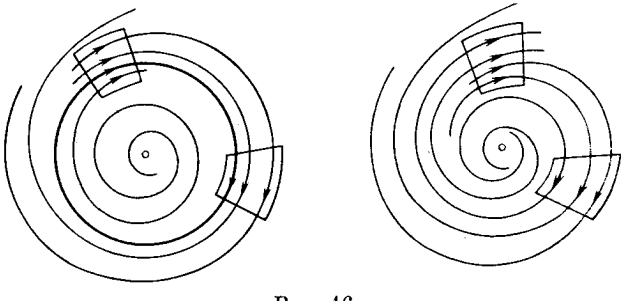


Рис. 16

весьма элементарный факт, являющийся, однако, весьма существенным для понимания основных свойств разбиения на траектории: в окрестности всякой «не особой» (отличной от состояния равновесия) точки «в малом» траектории ведут себя аналогично параллельным прямым (рис. 15). Это можно проследить на всех

рассмотренных примерах (справедливость этого факта может быть доказана, например, на основании свойств пересечения траекторий с дугой без контакта — см. гл. 2).

Поэтому по исследованию «в малом» мы не можем получить сведений о качественной структуре «в целом» (это иллюстрируется на рис. 16, на котором «в малом» в окрестности всех точек (в том числе и являющихся состояниями равновесия) качественная структура одинакова, а «глобально»— различна).

Прежде чем переходить к более детальному описанию свойств качественного характера как отдельной траектории, так и всего разбиения на траектории в целом (которое приводится в следующей главе), уточним понятие качественной (топологической) структуры разбиения на траектории.

§ 14. Математическое определение качественной (топологической) структуры разбиения на траектории и качественного исследования динамической системы. Для того чтобы привести соответствующие математические определения, напомним прежде всего используюшееся при этом понятие топологического отображения плоскости в себя (или в другую плоскость) или области в себя (или в другую область). *Топологическим отображением* (или *гомеоморфизмом*) плоскости (области) в себя называется взаимно однозначное и двусторонне непрерывное отображение плоскости (или области)[20]).

Если дана динамическая система (А), то она определяет (на плоскости или в рассматриваемой области плоскости) некоторое семейство траекторий, или, в другой терминологии, некоторое разбиение на траектории.

При всевозможных топологических отображениях плоскости в себя вид траекторий данной системы (А) может сильно измениться. Но некоторые черты разбиения на траектории остаются неизменными, или, иначе, т о п о л о г и ч е с к и и н в а р и а н т н ы м и: например, замкнутая траектория продолжает быть замкнутой, незамкнутая — незамкнутой, остается число и взаимное расположение замкнутых траекторий, состояний равновесия; остается неизменным характер состояний равновесия и т. д.[21]).

Уточнение понятия качественной картины фазовых траекторий или, в другой терминологии, топологической структуры разбиения на траектории дается следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Две топологические структуры, или, что то же, две качественные картины разбиения фазовой плоскости на

---

[20]) Геометрические образы, которые могут быть получены друг из друга топологическим отображением, называются *гомеоморфными*.

[21]) Отметим, что фокус и узел топологически тождественны, т. е. всегда можно указать такое топологическое преобразование плоскости в себя, при котором узел преобразуется в фокус и наоборот, геометрически этот факт совершенно нагляден.

траектории (или некоторой области плоскости на траектории), заданные двумя системами вида (А), называют *тождественными*, если существует топологическое (т. е. взаимно однозначное и непрерывное) отображение плоскости в себя, при котором траектории одной системы отображаются в траектории другой (при этом траектория отображается в траекторию как при прямом, так и при обратном отображении).

Это определение тождественности двух структур является косвенным определением самого понятия топологической структуры разбиения на траектории [22]).

Можно сказать, что под топологической структурой разбиения на траектории (или, что тоже самое, под качественной картиной фазовых траекторий) понимают все те свойства этого разбиения,

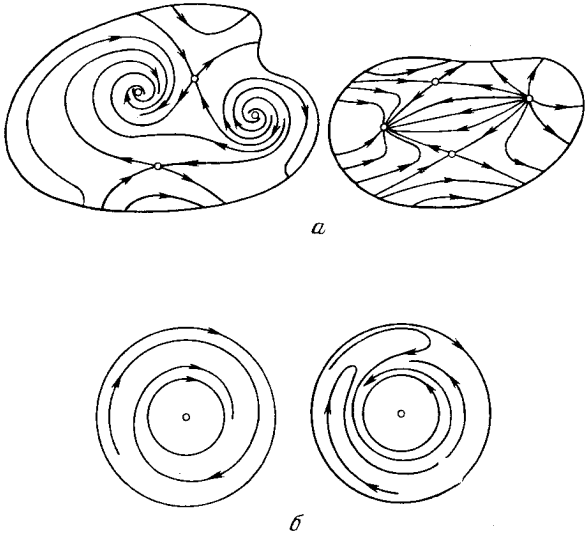


Рис. 17

которые остаются инвариантными при всевозможных топологических отображениях плоскости в себя. Примеры таких свойств были приведены выше.

Полное качественное исследование заключается в установлении всех таких свойств. Очевидно, можно также говорить о неполном качественном исследовании. Такое исследование может, например, заключаться в установлении характера состояний равновесия, установлении наличия хотя бы одной замкнутой траектории и т. д. Естественным образом возникает вопрос о том, что

[22]) «Косвенными» определениями являются, например, также определения функций, мощности множества и т. д.

нужно знать для полного определения качественной структуры разбиения на траектории. Этот вопрос для весьма широкого, в основном имеющего интерес для приложений, класса динамических систем рассматривается в гл. 2.

Качественное исследование динамической системы (дифференциального уравнения) нельзя рассматривать как некоторый суррогат количественного исследования, который заменяет отыскание аналитических выражений для решения в том случае, когда это трудно сделать [23]).

Отметим, что качественное исследование динамической системы может оказать помощь при численном решении, так как оно может помочь сознательно, не вслепую разобраться в том, приближенное вычисление каких именно решений представляет интерес.

На рис. 17, *а* приведены две непохожие, но топологически тождественные структуры, на рис. 17, *б* — две похожие, но топологически различные структуры.

---

[23]) Знание аналитических выражений для интегралов, как уже указывалось, просто несколько изменяет задачу качественного исследования, но ни в какой мере не дает непосредственного ее решения.

ГЛАВА 2

ВОЗМОЖНЫЙ ХАРАКТЕР ОТДЕЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ. ТЕОРИЯ ПУАНКАРЕ — БЕНДИКСОНА. ОСОБЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Введение. В настоящей главе приведены те определения и предложения, на основании которых устанавливаются свойства траекторий системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{A}$$

и свойства разбиения на траектории, являющиеся основными в вопросах качественного исследования. На основании этих предложений:

1) сформулировано, каков возможный характер отдельной траектории системы (A);

2) выделены некоторые особые траектории, знание взаимного расположения которых необходимо для определения качественной структуры разбиения на траектории;

3) дано понятие схемы динамической системы [1]).

Все предложения настоящей главы, позволяющие сделать весьма далеко идущие заключения относительно возможных свойств разбиения на траектории, заданного системой (A), фактически являются следствием двух основных общих теорем — теоремы о существовании и единственности решения и теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений, но при этом существенно опираются на тот основной элементарный факт, что простая замкнутая кривая делит плоскость на две области.

Во всех этих предложениях в качестве вспомогательного средства используется дуга без контакта и цикл без контакта.

§ 1. Дуга без контакта. Пусть l — простая гладкая дуга [2]), целиком лежащая в области G, в которой определена система (A).

---

[1]) Подробные доказательства всех приведенных в настоящей главе утверждений, касающихся характера отдельной траектории (см. [12, 76, 134]). Об особых траекториях см. в [12, 81], а также в [63, 64, 154].

[2]) *Простой гладкой дугой* называется дуга, которая может быть задана параметрическими уравнениями $x = f(s)$, $y = g(s)$, удовлетворяющими следующим условиям.

Функции $f(s)$ и $g(s)$ определены на некотором сегменте (отрезке) значений s, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, и при этих значениях непрерывны и имеют непрерыв-

Если траектория системы (A), проходящая через точку M дуги l, в этой точке не касается дуги l, то мы будем говорить, что *дуга l в точке M не имеет контакта с траекториями системы* (A). Если же проходящая через точку M траектория касается дуги, то мы будем говорить, что *дуга l в точке M имеет контакт с траекторией системы* (A). Простая гладкая дуга называется *дугой без контакта* для траекторий системы (A), если:

а) на l не лежит ни одно состояние равновесия;

б) ни в одной своей точке дуга l не имеет контакта с траекториями (рис. 18).

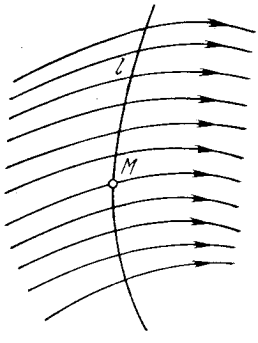


Рис. 18

Мы скажем, что дуга l *проведена через точку M* (или *в точке M*), если точка M является точкой дуги без контакта l, отличной от концов этой дуги. Очевидно, через каждую неособую точку можно провести дугу без контакта (например, достаточно малый отрезок нормали к траектории будет отрезком без контакта — дугой без контакта).

Пусть параметрическое уравнение дуги без контакта l есть $x = f(s)$, $y = g(s)$, где $f(s)$ и $g(s)$ — непрерывные функции, определенные при всех значениях

$$a \leqslant s \leqslant b$$

и в силу требования гладкости дуги имеющие при этих значениях непрерывные производные $f'(s)$ и $g'(s)$.

В силу условия а) при всех s, $a \leqslant s \leqslant b$,

$$P^2(f(s), g(s)) + Q^2(f(s), g(s)) \neq 0.$$

В силу условия б) при всех s, $a \leqslant s \leqslant b$,

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} P(f(s), g(s)) & f'(s) \\ Q(f(s), g(s)) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

В случае, когда дуга l задана не параметрическими уравнениями, а уравнением

$$F(x, y) = 0, \qquad (2)$$

мы будем, очевидно, иметь в силу условия а) при всех значениях x, y, удовлетворяющих уравнению (2),

$$P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$$

ные производные. Ни при каких двух различных значениях s' и s'', $s_1 \leqslant s' \leqslant s_2$, $s_1 \leqslant s'' \leqslant s_2$, не могут одновременно выполняться равенства $f(s') = f(s'')$, $g(s') = g(s'')$. (Простая дуга есть гомеоморф (см. § 14 гл. 1) сегмента (отрезка).)

и в силу условия б) при тех же значениях x и y

$$F'_x(x, y)\,P(x, y) + F'_y(x, y)\,Q(x, y) \neq 0. \qquad (3)$$

Так как угол между дугой без контакта l и любой пересекающей ее траекторией не обращается в нуль, то, очевидно, этот угол сохраняет постоянный знак.

Если данную гладкую дугу l пересекает другая гладкая дуга l_1 в точке M_0, отличной от концов l (касательные к дугам l и l_1 в точке M_0 различны), то точка M_0 делит дугу l_1 на две части, из которых одна лежит по одну сторону l, а другая по другую сторону l [3]).

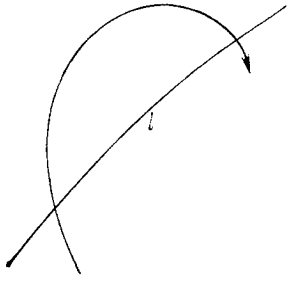


Рис. 19

Приведем два элементарных предложения, касающихся пересечения траектории с дугой без контакта:

I. Если α и β $(\alpha < \beta)$ — произвольные числа из интервала (τ, T), на котором определено соответствующее траектории L решение, то часть траектории L, соответствующая значениям из сегмента $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, может иметь лишь конечное число общих точек с любым отрезком без контакта.

II. Если M_0 — точка дуги l, отличная от ее концов, то всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через точку M в достаточно малой окрестности точки M_0, непременно пересекает дугу l и при этом при значении T, сколь угодно близком к t_0 (если точка M достаточно близка к M_0). Если траектория пересекает какую-нибудь дугу l без контакта дважды, то она, очевидно, может пересечь ее только так, как показано на рис. 21 (и невозможен случай, представленный на рис. 19).

§ 2. Цикл без контакта. Пусть C — гладкая простая замкнутая кривая [4]), лежащая в области G. Мы будем говорить (так же, как и в случае простой дуги), что кривая C в некоторой своей точке M *не имеет контакта*, если проходящая через точку M траектория системы (A) не касается кривой C в этой точке, и будем говорить, что кривая C в точке M *имеет контакт*, если проходящая через точку M траектория в этой точке касается кривой C.

Гладкая простая замкнутая кривая C называется *циклом без контакта*, если: а) на C не лежит ни одно состояние равновесия системы; б) ни в одной своей точке кривая C не имеет контакта (рис. 20).

---

[3]) Точное определение сторон дуги (см. [12], Приложение).

[4]) *Простой замкнутой кривой* называется кривая, которая является топологическим образом окружности. Она является гладкой, если в каждой ее точке существует касательная.

Рассматривая либо параметрические уравнения простой замкнутой кривой C, либо ее уравнения в декартовых координатах, можно аналитически записать условия того, что рассматриваемая замкнутая кривая C является циклом без контакта, полностью аналогичные условиям (1) и (3).

В некоторых случаях роль цикла без контакта может играть «обобщенный цикл без контакта» или «цикл однократного пересечения». Мы скажем, что простая замкнутая кривая C (эта кривая может и не быть гладкой) есть *цикл однократного пересечения* для траектории системы (A), если: а) на кривой C не лежит ни одно состояние равновесия; б) у всякой траектории, при $t = t_0$ проходящей через какую-нибудь точку кривой C, точки, соответствующие достаточно близким к t_0 значениям $t > t_0 (t < t_0)$, лежат внутри C, а точки, соответствующие достаточно близким к t значениям $t < t_0 (t > t_0)$,— вне цикла C. В частности, например, гладкая простая замкнутая кривая, не являющаяся циклом без контакта, является циклом однократного пересечения в том случае, когда в некоторых своих точках [5]) она имеет точки сокрикосновения четного порядка с траекториями, и во всех других точках не имеет контакта. Очевидно, если цикл однократного пересечения является гладким и

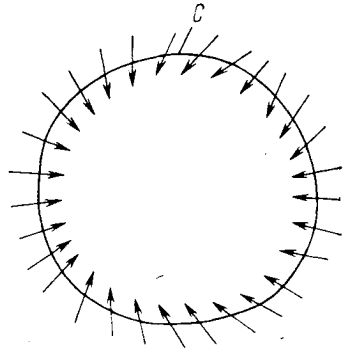


Рис. 20

$$F(x, y) = 0$$

— его уравнение, то в точках этого цикла выражение

$$F'_x(x, y) P(x, y) + F'_y(x, y) Q(x, y)$$

может обращаться в нуль.

§ 3. Предельная точка полутраектории и траектории. Предельная траектория [6]). Будем рассматривать только такие полутраек-

---

[5]) Траектории не могут касаться гладкой замкнутой кривой во всех ее точках, так как в этом случае кривая также была бы интегральной кривой. Это невозможно, так как по предположению для рассматриваемой динамической системы выполняются условия теоремы существования и единственности.

[6]) Термин «предельная точка» употребляется также в теории множеств. Именно, точка M^*, принадлежащая или не принадлежащая данному множеству K, называется *предельной точкой* или *точкой сгущения* множества K, если сколь угодно близко от точки M^* лежат точки K, отличные от M^*.

Понятие предельной точки полутраектории имеет другой смысл. Например, состояние равновесия является предельной точкой для самого се-

тории и траектории, которые целиком лежат в ограниченной части плоскости. Из теоремы 2, очевидно, следует, что на всякой такой положительной (отрицательной) полутраектории любое решение определено для всех значений $t > t_0$ ($t < t_0$), где t_0 — некоторое (зависящее от выбора решения) фиксированное значение. На всякой траектории, целиком лежащей в ограниченной части плоскости, всякое решение определено для всех значений t, $-\infty < t < +\infty$.

При рассмотрении возможного поведения отдельной полутраектории вводится понятие «предельной точки полутраектории».

Точка M^* называется *предельной точкой положительной полутраектории* L^+ (или соответственно *отрицательной полутраектории* L^-), если при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и любом сколь угодно большом $T > 0$ (любом $T < 0$) в круге радиуса ε с центром в точке M^* лежит хотя бы одна точка полутраектории L^+ (L^-), соответствующая значению $t > T$ (или соответственно $t < T$).

Из определения предельной точки полутраектории непосредственно следует, что если ξ^*, η^* — координаты предельной точки M^* положительной полутраектории L^+, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — решение, соответствующее L^+, то существует последовательность неограниченно возрастающих значений t

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \quad (t_n \to +\infty \text{ при } n \to +\infty)$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \xi^*, \quad \lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = \eta^*. \tag{4}$$

Обратно, из существования последовательности неограниченно возрастающих значений t_n, для которой выполняются условия (4), следует, что точка $M^*(\xi^*, \eta^*)$ есть предельная точка полутраектории L^+.

Точка M называется *предельной точкой целой траектории* L, если M есть предельная точка либо для положительной полутраектории L^+, либо для отрицательной полутраектории L^-, выделенной из траектории L (в первом случае точку M часто называют ω-*предельной точкой*, во втором — α-*предельной точкой* траектории L).

Предельная точка траектории L может как принадлежать самой траектории L, так и не принадлежать ей.

бя — в смысле данного в тексте определения, но не является предельной точкой в смысле теории множеств, так как в этом случае множество K состоит из одной единственной точки (состояния равновесия). Во избежание путаницы всюду в дальнейшем вместо термина «предельная точка» — в смысле теории множеств — используется термин «точка сгущения».

Примеры.

1) Всякое состояние равновесия $O(a, b)$ является своей единственной предельной точкой (как ω-, так и α-предельной), так как в этом случае при всех t $x = a$, $y = b$.

2) Все точки замкнутой траектории, очевидно, также являются ее ω- и α-предельными точками. Действительно, соответствующее замкнутой траектории L движение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ является периодическим (с некоторым периодом T_0), и каждая точка $M(\xi, \eta)$ этой траектории соответствует бесчисленному множеству значений t:

$$t_1 = \tau,\ t_2 = \tau + T_0,\ \ldots,\ t_n = \tau + (n-1)T_0,\ \ldots,$$

а также

$$t_1' = \tau,\ t_2' = \tau - T_0,\ \ldots,\ t_n' = \tau - (n-1)T_0,\ \ldots$$

Согласно определению она является, следовательно, как ω-, так и α-предельной точкой L (в рассматриваемом случае $\varphi(t_n) = \xi$, $\psi(t_n) = \eta$ при любом n).

3) Траектория, стремящаяся к состоянию равновесия (как в случае узла и фокуса, так и в случае седла), имеет своей единственной предельной точкой это состояние равновесия.

4) Для полутраектории L^+ (или L^-), имеющей вид спирали, наматывающейся на предельный цикл, очевидно, все точки этого предельного цикла являются предельными (в двух последних примерах предельная точка не являлась точкой соответствующей полутраектории).

Так как сказанное относительно положительных полутраекторий, очевидно, справедливо и для отрицательных полутраекторий (с заменой t на $-t$), то в дальнейшем будут рассматриваться только положительные полутраектории. Следующая теорема позволяет ввести понятие предельной траектории.

Теорема 1 (о предельной траектории). *Если* $M^*(\xi^*, \eta^*)$ *есть предельная точка полутраектории* L^+, *то и все точки траектории* L_0, *проходящей через точку* M^*, *являются предельными для* L^+.

Доказательство этой теоремы опирается на теорему о непрерывной зависимости от начальных условий и понятие предельной точки полутраектории.

Траектория L_0 называется *предельной траекторией для полутраектории* L^+ или просто *предельной траекторией*. Когда предельная точка траектории L является точкой самой этой траектории, то L называется *самопредельной траекторией*. В силу предыдущего состояние равновесия и замкнутая траектория являются самопредельными. В формулировке следующей теоремы используются теоретико-множественные понятия замкнутости и связности множества.

Множество точек плоскости называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки сгущения. Замкнутое, ограниченное (т. е. целиком лежащее в ограниченной части плоскости) множество называется *связным*, если оно не может быть представлено как сумма двух замкнутых множеств без общих точек. Заметим, что если мы имеем два замкнутых множества без общих точек, то наименьшее из расстояний между любыми двумя точками, из которых одна принадлежит одному множеству, а другая — другому, отлично от нуля.

Рассмотрим множество K всех предельных точек полутраектории L^+, целиком лежащей в ограниченной части плоскости: множество ее предельных точек, очевидно, также лежит в ограниченной части плоскости.

Теорема 2. *Множество всех предельных точек полутраектории замкнуто, связно и состоит из целых траекторий.*

Справедливость первых двух утверждений теоремы доказывается непосредственно, справедливость последнего утверждения следует из теоремы о предельной траектории.

Если K есть ω- (α-)предельное множество траектории L, то говорят также, что L *стремится* к K при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$).

Понятие предельной точки и теоремы 1 и 2 имеют место не только в случае динамической системы на плоскости, но и в случае динамической системы на фазовой поверхности любого жанра, а также в случае динамических систем в фазовом пространстве n измерений при $n \geqslant 2$ (т. е. для системы n автономных дифференциальных уравнений первого порядка при $n > 2$).

(Предложения следующих параграфов справедливы только для динамических систем на плоскости и на сфере.)

§ 4. Основная теорема. Приведем сначала следующие основные вспомогательные предложения, касающиеся пересечения траектории с дугой без контакта.

I. Точки пересечения незамкнутой траектории L с дугой без контакта, соседние по значениям t, являются также соседними и на дуге l. Действительно, предположим, что точки пересечения M_1 и M_2 траектории L с дугой без контакта l соответствуют значениям t_1, t_2 и что при значениях t между t_1 и t_2 у траектории L нет больше общих точек с дугой l. Для определенности предположим, что $t_1 > t_2$. Тогда, очевидно, возможен один из случаев, представленных на рис. 21. Часть M_1M_2 дуги l, очевидно, уже не может иметь общих точек с траекторией L, так как ни часть траектории L, соответствующая значениям $t > t_1$, ни часть, соответствующая значениям $t < t_2$, не может уже больше пересечь часть M_1M_2 дуги l (в противном случае траектория, очевидно, должна была бы пересечь эту дугу l в противоположном направлении, что невозможно).

Это геометрически очевидное предложение, опирающееся на тот факт, что всякая простая замкнутая кривая на плоскости разделяет плоскость на две области (область вне и область внутри этой кривой), является основным предложением

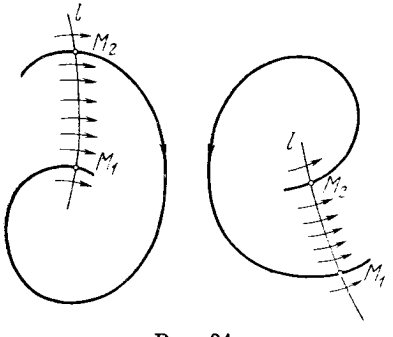


Рис. 21

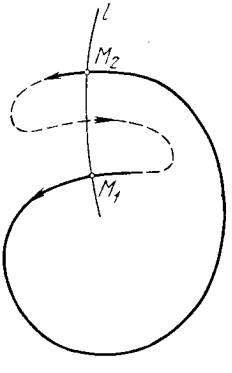


Рис. 22

при рассмотрении возможного характера траекторий на плоскости.

На основании соображений, аналогичных приведенным в связи с предложением I, нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения:

II. Замкнутая траектория может иметь с отрезком без контакта только одну точку пересечения (ситуация, изображенная на рис. 22, невозможна).

Приведем еще одно предложение, являющееся следствием предложения I и определения предельной точки.

III. Пусть незамкнутая полутраектория L^+ имеет предельную траекторию L_0, отличную от состояния равновесия. Если через какую-нибудь точку M_0 траектории L_0 проведена дуга без контакта, то на этой дуге без контакта будет лежать бесконечная последовательность точек полутраектории L^+, расположенных в порядке возрастания t, стремящаяся к точке M_0 (рис. 23).

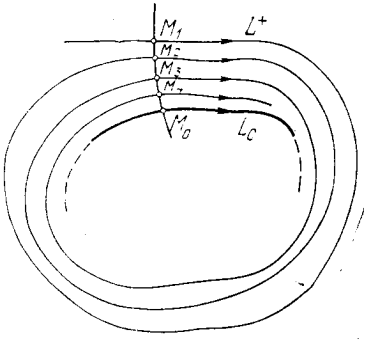


Рис. 23

Следующая теорема является основной теоремой, на основании которой могут быть сделаны заключения относительно возможного характера траектории на плоскости.

Теорема 3 (основная теорема). *Если полутраектория L^+ не замкнута и имеет хотя бы одну предельную траекторию,*

не являющуюся состоянием равновесия, то она сама не может быть предельной.

Доказательство опирается на предложения I и III.

Следствие. *Незамкнутая траектория не может быть самопредельной.*

Теорема 3 отражает черты, характерные для траекторий динамической системы на плоскости (а также на сфере), и несправедлива для траекторий в других фазовых пространствах (например, на торе или в евклидовом пространстве трех измерений).

Приведем еще две теоремы, которые позволяют полностью установить возможный характер множества предельных точек полутраектории.

(Доказательство первой из этих теорем целиком опирается на теорему о непрерывной зависимости от начальных значений, а также на предложение III.)

Теорема 4. *Если полутраектория L^+ имеет замкнутую предельную траекторию L_0, то L_0 является единственной предельной траекторией для L^+.*

Теорема 5. *Если среди предельных точек полутраектории нет состояний равновесия, то она либо замкнута, либо не замкнута, но имеет замкнутую предельную траекторию.*

Замкнутая траектория L_0, являющаяся либо ω-, либо α-предельной траекторией для всех отличных от нее траекторий, проходящих через достаточно близкие к ней точки (как внутри L_0, так и вне L_0), называется *предельным циклом.* Очевидно, предельный цикл является изолированной замкнутой траекторией, т. е. через некоторую его окрестность, кроме него, не проходит больше ни одной замкнутой траектории. С другой стороны, всякая изолированная замкнутая траектория является предельным циклом, т. е. является предельной траекторией.

Предельный цикл называется *устойчивым*[7]), если все траектории, проходящие через точки достаточно малой его окрестности, стремятся к нему при $t \to +\infty$, и *неустойчивым*, если все такие траектории стремятся к нему при $t \to -\infty$ (см. рис. 64 гл. 5).

Предельный цикл называется *полуустойчивым*, если все траектории, проходящие через достаточно близкие к нему точки, лежащие вне его, стремятся к нему при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), а лежащие внутри — при $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$) (см. рис. 65 гл. 5).

§ 5. Возможные типы полутраекторий и их предельных множеств. Сформулированные теоремы позволяют установить возможный характер множества предельных точек полутраектории,

[7]) Устойчивый предельный цикл является адекватным образом автоколебаний (см. гл. 13, [2, 3]).

целиком лежащей в ограниченной части плоскости. Именно, это множество может быть одного из следующих типов:

I. Одно состояние равновесия.

II. Одна замкнутая траектория.

III. Совокупность состояний равновесия и траекторий, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Нетрудно видеть, что состояния равновесия, входящие в множества предельных точек типа III, не могут быть фокусами или

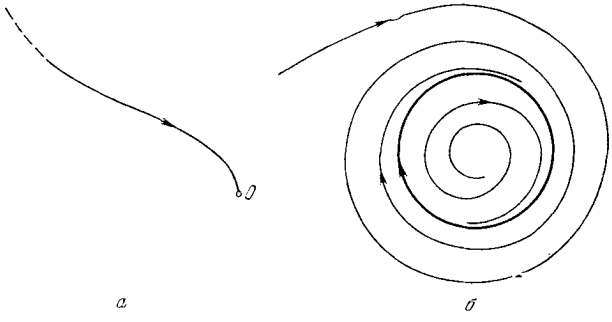


Рис. 24

узлами, так как всякая траектория, попавшая в достаточно малую окрестность такого состояния равновесия, стремится к нему и не может иметь никакой другой предельной точки. Следовательно, состояния равновесия, которые могут входить в множество точек типа III, в случае, если эти состояния равновесия простые (см. гл. 3), непременно являются седлами, а отличные от состояний равновесия траектории, входящие в это множество,— сепаратрисами седел.

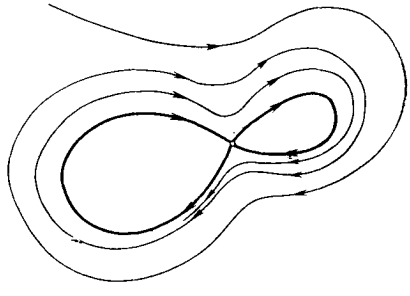


Рис. 25

Зная возможные типы предельных множеств, мы можем сразу сказать, какие типы полутраекторий возможны. Очевидно, мы получаем следующие типы: 1) состояние равновесия; 2) замкнутая полутраектория; 3) полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия (рис. 24, *а*); 4) полутраектория, стремящаяся к замкнутой траектории (рис. 24, *б*); 5) полутраектория, стремящаяся к предельному множеству типа III (рис. 25). Очевидно, во всех примерах § 12 гл. 1, кроме примеров 1 и 2, существовали траектории типа 1), т. е. состояния равновесия. Кроме того, все не являющиеся

центрами состояния равновесия были ω- (или α-) предельными для отличных от них траекторий. Замкнутые траектории существуют в примерах 5 и 7, причем в примере 1 замкнутая траектория изолирована (предельный цикл). В примере 7 существуют также траектории типа 4) (это все траектории, лежащие вне и внутри предельного цикла). Полутраектории типа 5) встречаются в рассмотренных далее примерах.

Приведем еще две основные теоремы, касающиеся уже не отдельной траектории, а всей совокупности траекторий в целом.

Теорема 6. *Если замкнутая траектория динамической системы* (A) *не содержит внутри точек границы области G, то внутри нее непременно лежит хотя бы одно состояние равновесия.*

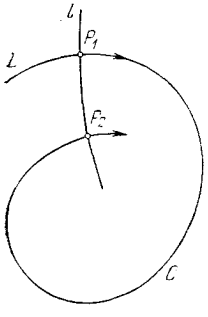


Рис. 26

Следствие 1. *Внутри всякого цикла без контакта всегда существует по крайней мере одно состояние равновесия.*

Следствие 2. *Пусть траектория L пересекает дугу без контакта l более чем в одной точке, пусть P_1 и P_2 — две последовательные по t точки ее пересечения с дугой l и C — простая замкнутая кривая, состоящая из части P_1P_2 дуги l и дуги P_1P_2 траектории L* (рис. 26). *Если внутри замкнутой кривой C не лежат точки границы области G, то внутри нее непременно должно лежать хотя бы одно состояние равновесия*[8]).

Теорема 7. *Пусть P — изолированное состояние равновесия. Тогда либо в любой сколь угодно малой окрестности точки P лежит замкнутая траектория, содержащая P внутри себя, либо существует траектория, стремящаяся к P (при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$).*

§ 6. Особые и неособые полутраектории и траектории. Рассмотрение конкретных частных примеров динамических систем естественно приводит к мысли, что для знания топологической структуры разбиения на траектории нужно знать взаимное расположение не всех траекторий, а лишь некоторого конечного числа особых траекторий. В рассмотренных выше примерах такими траекториями являлись состояния равновесия, замкнутые траектории и сепаратрисы седел. Естественно возникает вопрос о том, исчерпываются ли этими типами особые траектории и как в общем случае эти особые траектории могут быть охарактеризованы. Эти вопросы рассматриваются в настоящем параграфе.

[8]) Доказательство теоремы 6 может быть проведено как с использованием понятия индекса (см. гл. 6), так и без использования этого понятия (см. [76, 12]).

Пусть L^+ — какая-нибудь положительная полутраектория, выделенная на траектории L. В дальнейшем рассматривается ε-окрестность полутраектории. Эта окрестность, как легко видеть, непременно содержит ε-окрестность предельного множества этой полутраектории.

Определение. Будем говорить, что положительная полутраектория L^+ *орбитно-устойчива*, если при любом заданном $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta < 0$, что у всякой траектории L', проходящей при $t = t_0$ через любую точку M', принадлежащую δ-окрестности M, полутраектория L'^+ (точки которой соответствуют значениям $t > t_0$) целиком лежит в ε-окрестности полутраектории L^+.

Справедлива следующая

Теорема 8. *Если у траектории L хотя бы одна положительная полутраектория орбитно-устойчива, то всякая другая положительная полутраектория, выделенная из этой траектории, также будет орбитно-устойчивой.*

Траектория L называется тогда *ω-орбитно-устойчивой* или *орбитно-устойчивой при $t \to +\infty$*.

Полутраектории или траектории, не являющиеся орбитно-устойчивыми при $t \to +\infty$, называются *орбитно-неустойчивыми при $t \to +\infty$* или *ω-орбитно-неустойчивыми*.

Если траектория L орбитно-неустойчива при $t \to +\infty$ и M — какая-нибудь ее точка, то всегда можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдется траектория L', проходящая при $t = t_0$ через точку δ-окрестности точки M и заведомо выходящая при некотором $t = T$ из ε_0-окрестности полутраектории L [9]).

Все сказанное относительно положительной полутраектории с очевидными изменениями может быть повторено и относительно отрицательной полутраектории. Таким образом, мы будем также говорить о траектории, орбитно-устойчивой при $t \to -\infty$, или α-орбитно-устойчивой, и о траектории, орбитно-неустойчивой при $t \to -\infty$, или α-орбитно-неустойчивой. Траектория L, орбитно-устойчивая как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, называется просто *орбитно-устойчивой* или *неособой*. Всякая траектория, не являющаяся орбитно-устойчивой, называется *орбитно-неустойчивой* или *особой*. Кроме того, особой траекторией будем считать и всякое состояние равновесия [10]).

---

[9]) Отметим, что наличие орбитно-неустойчивых траекторий ни в какой мере не противоречит теореме о непрерывной зависимости от начальных значений, так как в этой теореме рассматривается лишь конечный промежуток значений t, а в понятиях орбитно-устойчивости и неустойчивости фигурируют все значения t от t_0 до $+\infty$.

[10]) Отметим, что орбитная устойчивость отличается от *устойчивости по Ляпунову* (см. [92, 99, 135]). Именно, траектория орбитно-устойчивая может не быть устойчивой по Ляпунову. В приводимой дальше теории особых и неособых траекторий имеет значение лишь орбитная устойчивость.

Таким образом, особая траектория, не являющаяся состоянием равновесия, непременно орбитно-неустойчива хотя бы «в одну сторону», т. е. она может быть орбитно-неустойчивой при $t \to +\infty$, или орбитно-устойчивой при $t \to -\infty$, или орбитно-неустойчивой и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$ [11]).

Свойство орбитной устойчивости и неустойчивости полутраектории и траектории характеризует поведение этой полутраектории или траектории не самой по себе, а по отношению к близким полутраекториям и траекториям.

Пример. Геометрически очевидно, что всякая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия типа узла или фокуса, орбитно-устойчива. Орбитно-устойчивыми будут и все полутраектории, стремящиеся к предельным циклам. Орбитно-устойчивыми, т. е. неособыми, траекториями очевидно будут траектории, стремящиеся при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ к узлам или фокусам или при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) стремящиеся к узлу, а при $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$) — к предельному циклу, а также траектории, стремящиеся к предельным циклам и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$.

Очевидно, имеет место следующая

Теорема 9. *Если разбиения на траектории, заданные двумя динамическими системами в ограниченной области G, тождественны, т. е. существует топологическое отображение области в себя, при котором траектории этих систем отображаются друг в друга, то орбитно-устойчивые полутраектории отображаются в орбитно-устойчивые, а орбитно-неустойчивые — в орбитно-неустойчивые.*

§ 7. Возможные типы особых и неособых траекторий. Приведем основные общие теоремы об особых траекториях.

Теорема 10. *Всякая траектория, являющаяся предельной для какой-либо отличной от нее траектории, является особой, т. е. орбитно-неустойчивой.*

Действительно, если траектория L_0 является ω-предельной для отличной от нее траектории L, то в случае, когда L_0 — состояние равновесия, на L заведомо существуют точки, находящиеся на не равном нулю расстоянии от L_0, а в случае, когда L_0 не является состоянием равновесия, то на L также существуют точки, лежащие на не равном нулю расстоянии от L_0 (в силу теоремы 5), т. е. траектория L либо при возрастании t, либо при убывании t выходит из некоторой ε_0-окрестности L_0.

---

[11]) Очевидно, состояние равновесия может быть орбитно-устойчивым (именно таким является состояние равновесия, в любой сколь угодно малой окрестности которого есть замкнутая траектория, содержащая его внутри).

Теорема 11. *Незамкнутая полутраектория L^+, имеющая среди своих предельных точек отличные от состояния равновесия, орбитно-устойчива.*

Теорема 12. *Замкнутая траектория L является орбитно-устойчивой тогда и только тогда, когда через точки сколь угодно малой ее окрестности, лежащие как внутри L, так и вне L, проходят отличные от L замкнутые траектории (так что траектория L не является предельной ни для одной незамкнутой траектории).*

В теоремах 11 и 12 рассмотрены полутраектории типа 2), 4) и 5) § 5. Пусть L — полутраектория типа 3), т. е. полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия, тогда:

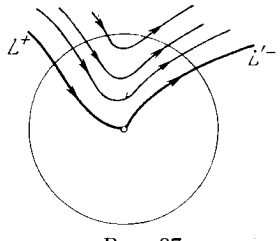


Рис. 27

Полутраектория L^+, стремящаяся к состоянию равновесия, является орбитно-неустойчивой в том и только в том случае, когда существует отрицательная полутраектория L'^-, стремящаяся при $t \to -\infty$ к тому же состоянию равновесия, которая вместе с полутраекторией L^+ ограничивает седловую область (рис. 27).

Орбитно-неустойчивая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия (безразлично, простому или сложному), называется *сепаратрисой*. В случае, когда сепаратриса является положительной полутраекторией, она называется *ω-сепаратрисой*; в случае, когда она является отрицательной полутраекторией,— *α-сепаратрисой*.

Приведенные теоремы позволяют сделать исчерпывающие заключения относительно того, какие полутраектории, а следовательно, и какие траектории орбитно-неустойчивы. Именно, всякая орбитно-неустойчивая (т. е. особая) траектория принадлежит к одному из следующих типов:

1) состояние равновесия;

2) предельный цикл;

3) незамкнутая траектория, у которой хотя бы одна полутраектория является сепаратрисой какого-нибудь состояния равновесия.

К числу особых траекторий причисляются все состояния равновесия (даже в том случае, когда они орбитно-устойчивы, как, например, в случае, когда состояние равновесия есть центр).

§ 8. Случай конечного числа особых траекторий. Элементарные ячейки. Будем теперь рассматривать систему (A) только в ограниченной области плоскости G [12]). Предположим, что систе-

[12]) Совершенно аналогичное рассмотрение может быть проведено на сфере Пуанкаре (см. гл. 6) в случае, когда правые части системы (A) — многочлены.

ма (А) в области G имеет только конечное число особых траекторий и полутраекторий [13]).

Особые траектории разделяют область G на частичные области, точки которых являются точками неособых (орбитно-устойчивых) траекторий. Граница каждой такой частичной области состоит из точек особых траекторий и точек, граничных для области G. Мы ограничимся здесь рассмотрением таких областей, в границу которых не входят граничные точки G. Такие области будем называть *элементарными ячейками* (или просто ячейками). Очевидно, ячейки состоят из целых орбитно-устойчивых (т. е. неособых) траекторий. Нетрудно видеть на основании теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений, что граница всякой ячейки состоит из целых особых траекторий. Точки одной и той же особой траектории могут быть граничными для нескольких ячеек. На основании того, что число особых траекторий конечно, нетрудно показать, что число ячеек в области G конечно.

Более детальное изучение поведения неособых траекторий одной и той же ячейки опирается на следующие вспомогательные предложения, вытекающие из определения орбитной устойчивости и предложения о конечном числе особых траекторий.

I. Вокруг каждой точки орбитно-устойчивой полутраектории L^+, стремящейся к состоянию равновесия O, всегда можно указать такую окрестность, чтобы все проходящие через точки этой окрестности траектории были орбитно-устойчивыми при $t \to +\infty$ и стремились к тому же состоянию равновесия O, что и L^+.

II. Вокруг каждой точки полутраектории L^+, имеющей отличную от состояния равновесия предельную траекторию, всегда можно указать такую окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности траектории орбитно-устойчивы при $t \to +\infty$ и при $t \to +\infty$ имеют то же предельное множество, что и L^+.

III. Вокруг каждой точки замкнутой орбитно-устойчивой траектории существует такая окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности траектории замкнуты и одна лежит внутри другой.

---

[13]) Это всегда имеет место в случае, когда правые части системы — функции, аналитические в замкнутой области $\overline{G}$, а также в рассмотренном дальше случае «грубых систем» и систем любой конечной степени «негрубости». Конечность числа сепаратрис вытекает из результатов Бендиксона [48]. Утверждение о конечности числа предельных циклов восходит к работам Дюлака [146]. Позднее Ю. С. Ильяшенко обнаружил, что из рассмотрений Дюлака прямо не следует его утверждение о конечности числа предельных циклов. Р. Бамон (список дополнительной литературы [49]) доказал конечность числа предельных циклов для $n = 2$. На Ломоносовских чтениях 1986 года Ю. С. Ильяшенко анонсировал аналогичный результат для всех n.

Опираясь на эти вспомогательные предложения, можно доказать ряд теорем, полностью характеризующих поведение траекторий одной и той же ячейки.

Теорема 13. *Если все траектории, принадлежащие одной и той же ячейке, не замкнуты, то они имеют одни и те же* ω- *и* α-*предельные множества.*

Теорема 14. *Если внутри какой-нибудь ячейки существует хоть одна замкнутая траектория, то все траектории этой ячейки замкнуты, одна лежит внутри другой и между любыми двумя траекториями этой ячейки не могут лежать точки, не принадлежащие этой ячейке.*

Установленные в теоремах факты можно наглядно охарактеризовать словами: внутри каждой ячейки неособые траектории ведут себя одинаковым образом.

Особые траектории являются либо предельными, либо разделяющими.

§ 9. Возможные типы ячеек. Односвязные и двусвязные ячейки. Естественно возникает вопрос о возможных типах элементарных ячеек. Именно, так же, как о топологической структуре разбиения области G (или замкнутой области $\bar{G}$) на траектории системы (A), можно говорить о топологической структуре ячеек

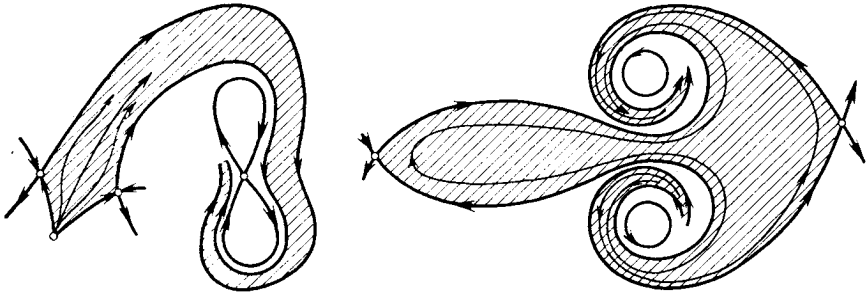


Рис. 28

(рассматриваемых без границы или с границей). Основной топологической характеристикой всякой области является число связности [14]).

[14]) Граница всякой ограниченной области может состоять либо из одного связного куска — «граничного континуума», т. е. замкнутого связного множества, либо из двух, трех и т. д. граничных континуумов (либо из бесконечного числа граничных континуумов, но этот случай не представляет для нас интереса). Если граница области состоит из одного граничного континуума, то область называется *односвязной*, если из двух, трех и т. д., то область соответственно называется *двусвязной* и т. д., один из граничных континуумов называется *внешним граничным континуумом*, остальные — внутренними.

Имеет место

Теорема 15. *Всякая ячейка не более чем двусвязна. Ячейки, заполненные замкнутыми траекториями, всегда двусвязны.*

Это непосредственно следует из теоремы 14 и того факта, что внутри замкнутой траектории всегда лежит состояние равновесия. Ячейки, заполненные незамкнутыми траекториями, могут быть как односвязными, так и двусвязными.

Приведем (без доказательства) еще следующую теорему, касающуюся свойств границ двусвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями.

Теорема 16. *В случае, когда ячейка, заполненная незамкнутыми траекториями, двусвязна, один из ее граничных конти-*

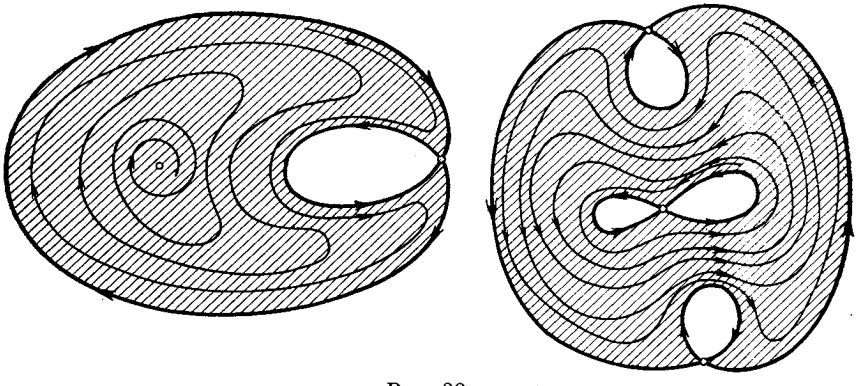


Рис. 29

нуумов является α-предельным, а другой — ω-предельным множеством для траекторий этой ячейки.

Примеры (геометрические) односвязных ячеек даны на рис. 28 [15]). Примеры двусвязных ячеек даны на рис. 29. Жирными линиями на этих рисунках обозначены особые траектории, входящие в границы ячеек (см. также рисунки грубых ячеек в гл. 8).

§ 10. Два подхода к описанию качественной структуры. Разделение на ячейки определяется взаимным расположением особых траекторий динамической системы.

Если кроме разделения на ячейки известно поведение траекторий внутри каждой отдельной ячейки, то естественно считать,

[15]) Отметим, что в примерах ячеек рис. 28 границы ячеек имеют довольно сложный характер. Все точки граничных циклов в первой ячейке рис. 28 и «восьмерки» второй ячейки являются так называемыми *недостижимыми точками границы* (не существует простой дуги, концом которой являлась бы точка этой границы, а остальные точки принадлежали бы ячейке).

что этими сведениями топологическая структура разбиения на траектории определяется полностью (это может быть доказано).

Однако к вопросу определения топологической структуры разбиения на траектории можно подойти также с несколько другой точки зрения, непосредственно не привлекая с самого начала рассмотрения ячеек.

Именно, для установления топологической структуры разбиения на траектории в первую очередь естественно исследовать характер состояний равновесия (ниже это понятие уточняется), что даст, в частности, и сведения о числе сепаратрис и их расположении вокруг каждого отдельного состояния равновесия; затем установить число и взаимное расположение предельных континуумов, в частности предельных циклов, и, наконец, установить расположения сепаратрис, не являющихся предельными, т. е. для каждого состояния равновесия установить, к какому предельному множеству стремится сепаратриса этого состояния равновесия соответственно при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

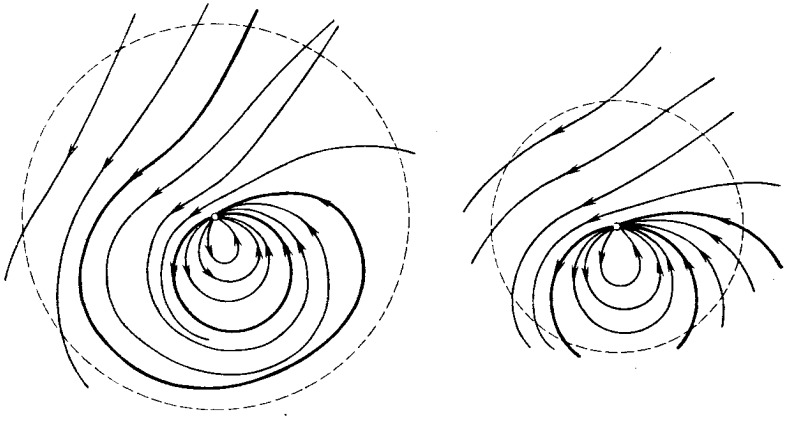
Указанный второй подход к определению топологической структуры разбиения на траектории (путем определения характера состояний равновесия, взаимного расположения предельных континуумов и хода сепаратрис) представляется наиболее естественным, так как он адекватен тому подходу, которым фактически проводится качественное исследование в тех случаях, когда существующие методы позволяют это сделать (см. ч. III).

Одним из основных элементов схемы является указание характера состояния равновесия. При этом исследование характера состояний равновесия является наиболее доступным из тех сведений, которые нужны для получения схемы. Кроме того, исследование характера состояния равновесия в ряде вопросов может иметь самостоятельный интерес. Мы остановимся поэтому несколько подробнее на некоторых фактах, касающихся состояний равновесия.

§ 11. Качественная (топологическая) структура состояния равновесия в случае конечного числа особых траекторий. Схема динамической системы. Внося точный смысл в интуитивно ясное понятие качественной (топологической) структуры состояния равновесия, прежде всего нужно отчетливо сформулировать различие между собственной, или локальной, окрестностью состояния равновесия и областью, которая уже не является собственной окрестностью состояния равновесия. На рис. 30, *а* область внутри окружности, содержащая одно только состояние равновесия, очевидно, не является его собственной окрестностью, в то время как на рис. 30, *б* соответствующая область является собственной окрестностью состояния равновесия.

Определение. Мы скажем, что изолированное состояние равновесия O *имеет определенный характер* (или *определенную*

топологическую структуру), если существует такая окрестность u точки O, не содержащая других состояний равновесия системы (A), что, сколь малое $\varepsilon > 0$ мы бы ни взяли, можно указать такую область u', целиком лежащую в ε-окрестности O, и такое



а *б*

Рис. 30

топологическое отображение u на u', при котором траектории отображаются в траектории [16]).

Всякая область u, обладающая указанными в приведенном выше определения свойствами, называется *собственной окрестностью состояния равновесия.*

Как и всюду выше, предположим, что число особых траекторий рассматриваемой системы (A) в случае, когда система определена в ограниченной области, конечно в этой области, а в случае, когда эта система определена на всей плоскости, конечно во всякой ограниченной области плоскости.

Установим при этом предположении возможный характер собственной окрестности состояния равновесия.

Из теоремы 7 при сделанном предположении следует:

Если в любой сколь угодно малой окрестности состояния равновесия O лежит замкнутая траектория, то все траектории, про-

[16]) Нетрудно привести пример состояния равновесия, не имеющего определенной топологической структуры в указанном выше смысле. Пусть, например, вокруг данного состояния равновесия существует бесчисленное множество вложенных друг в круга колец, заполненных замкнутыми траекториями. Пусть эти кольца перенумерованы в порядке их вложения друг в друга. Предположим, что между n-м и $n+1$-м кольцом лежит n предельных циклов. Нетрудно убедиться, что у такого состояния равновесия нет определенной топологической структуры в смысле данного в тексте определения. Такой пример возможен в динамической системе класса C^∞, но невозможен в аналитической системе.

ходящие через точки некоторой достаточно малой окрестности O, замкнуты.

Состояние равновесия в этом случае называется *центром.*

Рассмотрим случай, когда в любой сколь угодно малой окрестности состояния равновесия O нет замкнутых траекторий. Пусть l_0 — окружность с центром в точке O столь малого радиуса r_0, что внутри l_0, кроме O, не лежит целиком ни одна особая траектория.

Можно показать, что всякая положительная или отрицательная полутраектория, целиком лежащая внутри такой окружности, стремится к состоянию равновесия O.

Если существует окружность C_0 радиуса r_0 такая, что все траектории, проходящие через точки внутри некоторой окружности C радиуса $r \leqslant r_0$ при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$, не выходя из C_0, стремятся к состоянию равновесия O, а при убывании (возрастании) t выходят из C_0, то состояние равновесия O называется *топологическим узлом.*

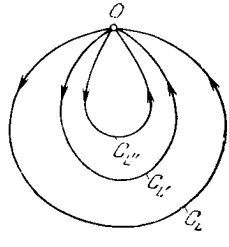


Рис. 31

Узел в примере 3 и фокус в примере 4 являются топологическими узлами.

Теорема 17. *Если состояние равновесия O есть топологический узел, то в любой сколь угодно малой его окрестности можно указать цикл без контакта, содержащий это состояние равновесия внутри.*

Рассмотрим состояние равновесия, не являющееся топологическим узлом.

Предположим, что существует траектория L, которая, не выходя из окружности C, стремится к состоянию равновесия при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

Пусть C_L — замкнутая кривая, состоящая из траектории L и точки O (рис. 31). Нетрудно показать, что всякая траектория L', проходящая через точку внутри C_L, стремится при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ к состоянию равновесия O и вместе с точкой O образует простую замкнутую кривую $C_{L'}$. При этом каждая из двух областей, ограниченных двумя различными такими кривыми $C_{L'}$ и $C_{L''}$, лежит одна внутри другой.

Область, ограниченная кривой C_L, называется *эллиптической* или *замкнутой узловой областью* и обозначается через N_l. Две эллиптические области считаются различными, если они лежат одна вне другой.

Рассмотрим теперь две стремящиеся к состоянию равновесия полутраектории L_1 и L_2, имеющие точки вне окружности C (каждая из этих полутраекторий может быть как положительной, так и отрицательной) (рис. 32 и 33).

Пусть M_1 и M_2 — соответственно последние общие точки этих полутраекторий с окружностью C (так что часть M_1O полутраек-

тории L_1 и часть M_2O полутраектории L_2 уже не имеют общих точек с C, кроме M_1 и M_2).

Рассмотрим область σ, граница которой состоит из части M_1O полутраектории L_1 и части M_2O полутраектории L_2, точки O и той из дуг окружности C с концами M_1 и M_2, на которой направление от точки M_1 к M_2 является движением против часовой стрелки на C.

Будем область σ называть *областью* (*сектором*) *между полутраекториями* L_1 и L_2[17]). При этом: 1) область σ между полутраекториями L_1 и L_2 будем называть *гиперболической* или *седловой областью* (*сектором*) и обозначать через σ_c, если через все

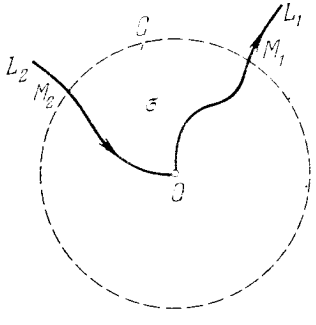


Рис. 32

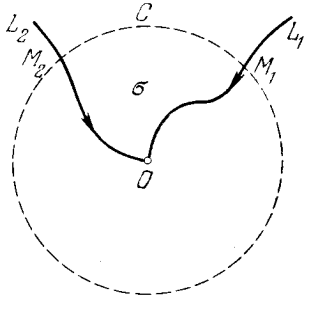


Рис. 33

точки этой области проходят траектории, как при возрастании, так и при убывании t выходящие из σ. В этом случае L_1 и L_2 являются, очевидно, сепаратрисами состояния равновесия, причем одна из них стремится к O при $t \to +\infty$, а другая — при $t \to -\infty$ (см. рис. 27, где под L^+ понимается полутраектория L_2, а под L'^- — полутраектория L_1). 2) Область σ между полутраекториями L_1 и L_2 называется *параболической* или *открытой узловой областью* (сектором), если через все точки этой области, лежащие внутри некоторой достаточно малой окружности C' (C' лежит внутри C), проходят траектории, которые при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), не выходя из σ, стремятся к состоянию равновесия O, а при убывании (возрастании) t выходят из σ[18]).

---

[17]) Окружность C при такой терминологии не указывается; это находится в согласии с тем, что сказанное ниже относительно характера области σ не зависит от окружности C, если только радиус этой окружности меньше некоторого определенного числа r_0. Порядок, в котором перечисляются траектории L_1 и L_2, очевидно, не безразличен.

[18]) Если все полутраектории параболической области стремятся к состоянию равновесия при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), то они, очевидно, являются ω-(α)-орбитно-устойчивыми. Однако среди них могут быть полутраектории особых траекторий, являющихся α-(ω)-орбитно-неустойчивыми.

Если при этом нет другой узловой области (сектора), содержащей рассматриваемую, у которой по крайней мере одна из полутраекторий L_1 и L_2 является внутренней, то область между полутраекториями L_1 и L_2 назовем *целым открытым узловым сектором* или *параболической областью* (*сектором*) и будем обозначать через N (рис. 34). Далее, говоря о целых открытых узловых областях (секторах), мы будем опускать слово «целые».

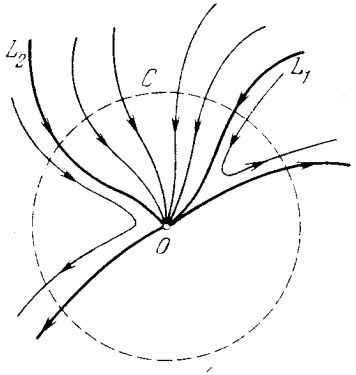


Рис. 34

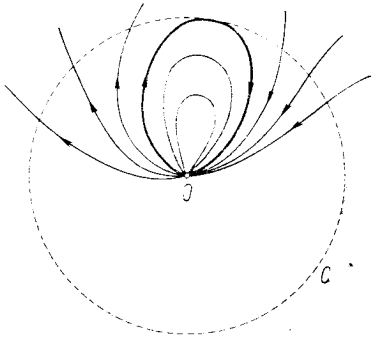


Рис. 35

Мы будем говорить, что сепаратрисы L_1 и L_2 являются *продолжением одна другой*, если они ограничивают один и тот же гиперболический сектор.

Если у данного состояния равновесия существует замкнутая узловая эллиптическая область, то непременно существуют также две содержащиеся внутри C параболические области, «сопровождающие» эту замкнутую область. Эти области непосредственно примыкают к замкнутой узловой области, образованы частями «перерезанных» окружностью траекторий замкнутой узловой области [19]) (рис. 35).

Следующие предложения имеют простой геометрический смысл.

I. Траектории двух различных (т. е. лежащих одна вне другой) эллиптических областей принадлежат различным элементарным ячейкам.

II. Если существует эллиптическая область, примыкающая к состоянию равновесия O, то к нему примыкает по крайней мере еще одна эллиптическая или гиперболическая область.

III. Между двумя различными эллиптическими областями состояния равновесия всегда существует стремящаяся к этому

[19]) Границей максимальной замкнутой узловой области, содержащей замкнутую узловую область, лежащую внутри C, является элементарная ячейка, и граница ее, очевидно, состоит из особых траекторий.

состоянию равновесия особая траектория (которая может и не быть сепаратрисой данного состояния равновесия)[20]).

Теорема 18. *Всякая достаточно малая окрестность состояния равновесия O системы* (A), *не являющаяся центром или топологическим узлом, состоит из конечного числа эллиптических (замкнутых узловых), параболических (узловых) и гиперболических (седловых) областей (в частных случаях области некоторых типов могут отсутствовать), примыкающих последовательно одна к другой, а также из точек траекторий, отделяющих эти области одну от другой и из точки O* (рис. 36).

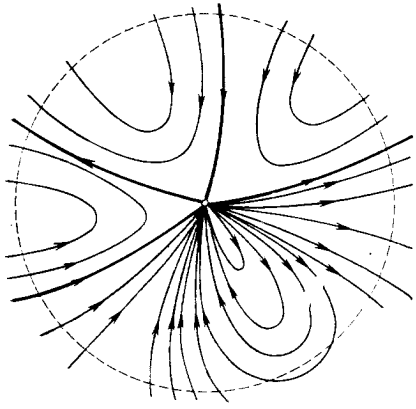


Рис. 36

Следствие 1. *Все достаточно малые окрестности данного состояния равновесия разделяются на одно и то же число эллиптических, параболических и гиперболических областей.*

Следствие 2. *В случае, когда у системы* (A), *определенной в ограниченной области плоскости, имеется конечное число особых траекторий, всякое состояние равновесия этой системы имеет определенную топологическую структуру.*

Вернемся к определению качественной структуры динамической системы в целом. Как уже было указано, для этого необходимо иметь следующие сведения:

1) характер (топологическую структуру) состояний равновесия динамической системы — это даст, в частности, сведения о числе сепаратрис и их расположении вокруг каждого отдельного состояния равновесия;

2) число и взаимное расположение предельных континуумов, в частности предельных циклов;

3) расположение сепаратрис, не входящих в предельные континуумы.

Перечисленные здесь сведения называются схемой разбиения на траектории динамической системы, а все указанные сведения — элементами схемы. Схема может быть записана специально введенными символами, описывающими все указанные в перечисленных пунктах сведения, однако на плоскости схему проще и естественнее описать *схематическим рисунком*, на котором намечены: поведение траекторий в окрестности состояний равно-

[20]) Напоминаем, что мы всюду в настоящей главе предполагаем число особых траекторий конечным.

весия, предельные континуумы с их расположением и ход сепаратрис. Во всех рассмотренных далее примерах схема задается схематическим рисунком (иногда только с точностью до четного числа предельных циклов). Можно показать, что введенная схема полностью определяет топологическую структуру разбиения на траектории и, следовательно, определяет также расположение ячеек и поведение траекторий в каждой ячейке [21]).

Установленные в настоящей главе типы траекторий и, в частности, особых траекторий возможны лишь у динамических систем (потоков) в плоской области и на сфере. При рассмотрении динамических систем (потоков) на замкнутых двумерных поверхностях (конечного рода) возможны еще другие типы траекторий (незамкнутые самопредельные) (см. дополнение).

§ 12. Устойчивость по Ляпунову. В приведенной теории особых и неособых траекторий (§ 6) и определении схемы было использовано понятие орбитной устойчивости, и именно это понятие имело при этом значение.

Однако классическое понятие устойчивости решения — это введенное Ляпуновым и широко фигурирующее в математической литературе понятие «устойчивости по Ляпунову». Мы приведем здесь это понятие для случая решения двумерных задач динамических систем. (Полностью аналогичное понятие дано Ляпуновым для многомерных динамических систем и для неавтономных дифференциальных уравнений.)

Решение $x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, что для всех решений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, для которых выполняются неравенства

$$|\varphi_0(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \quad |\psi_0(t_0) - \psi(t_0)| < \delta,$$

при всех $t > t_0$ будут выполняться неравенства

$$|\varphi_0(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \quad |\psi_0(t) - \psi(t)| < \varepsilon.$$

Если решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ устойчиво по Ляпунову и если при достаточно малом $\delta > 0$ будут выполняться условия

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_0(t) - \varphi(t)| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} |\psi_0(t) - \psi(t)| = 0,$$

то решение $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$ называется *асимптотически устойчивым.*

[21]) Сведения о числе и характере состояний равновесия, взаимном расположении предельных континуумов и ходе сепаратрис, с одной стороны, и сведения о взаимном расположении ячеек и поведении траектории внутри них — с другой (и то и другое может быть названо схемой разбиения на траектории), являются двумя различными полными системами топологических инвариантов, которые могут быть выражены одна через другую. В связи с этим можно говорить о схеме первого рода, понимая под этим указанную в тексте схему, и схеме второго рода, понимая под этим описание ячеек и их расположение.

Как уже указано, устойчивость по Ляпунову отличается от орбитной устойчивости. Поясним это различие на простом примере. Рассмотрим замкнутую траекторию L_0: $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, в окрестности которой все траектории замкнуты. Она, очевидно, орбитно-устойчива. Предположим, что период на L_0 равен τ_0, а на всех близких к ней траекториях отличен от τ_0 (это — очень часто встречающийся случай). Всякая траектория L, проходящая при $t = t_0$ достаточно близко к точке $\varphi_0(t_0)$, $\psi_0(t_0)$ на L_0, при значении $t = t_0 + \tau$ будет, очевидно, проходить (в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий) сколь угодно близко к этой же точке при значении $t = t_0 + \tau_0$. Но период на L будет отличаться от τ_0 на некоторую сколь угодно малую величину δ.

Тем не менее при неограниченном возрастании t ($t > n\tau$, где n — сколь угодно большое целое число) разность между $t_0 + n\tau_0$ и $t' = t_0 + n(\tau_0 + \tau)$ будет уже больше некоторой конечной величины, и точка на L, соответствующая этому значению t', будет находиться на конечном расстоянии от точки $\varphi_0(t_0)$, $\psi_0(t_0)$ траектории L_0.

Таким образом, решение $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$ неустойчиво по Ляпунову. В приведенной же выше теории особых и неособых траекторий имеет значение лишь обратная устойчивость.

ГЛАВА 3

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ОКРЕСТНОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ (ОСОБОЙ ТОЧКИ)

Введение. В предыдущих главах были даны сведения о том, какова вообще возможная качественная структура траекторий и расположения траекторий на фазовой плоскости, что нужно знать для того, чтобы знать эту качественную структуру. В частности, как мы видели, нужно знать характер состояний равновесия. В настоящей главе будут указаны методы определения характера состояния равновесия для некоторых классов состояний равновесия [1]).

§ 1. Простые состояния равновесия (особые точки). Пусть $M(x_0, y_0)$ — состояние равновесия (особая точка) системы (A), так что

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0.$$

Введем обозначения:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Состояние равновесия, для которого

$$\Delta(x_0, y_0) \neq 0,$$

называется *простым*.

Разлагая в окрестности простого состояния равновесия $O(x_0, y_0)$ правые части в ряд по степеням $x - x_0$, $y - y_0$, мы, оче-

---

[1]) Задача установления для конкретно заданной динамической системы существования предельных континуумов (в частности, предельных циклов) и их взаимного расположения, а также расположения сепаратрис, не являющихся предельными, представляет очень большие трудности и в гораздо меньшей степени близка к решению, чем задача определения характера состояний равновесия. В гл. 6, 14, 15 будут указаны существующие подходы и приемы решения задачи о существовании предельных циклов.

видно, получим

$$\frac{dx}{dt} = (x - x_0) P'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) P'_y(x_0, y) + \varphi(x - x_0, y - y_0),$$

$$\frac{dy}{dt} = (x - x_0) Q'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) Q'_y(x_0, y_0) + \psi(x - x_0, y - y_0),$$

где $\varphi(x - x_0,\ y - y_0)$ и $\psi(x - x_0,\ y - y_0)$ — ряды относительно $x - x_0$, $y - y_0$, начинающиеся с членов не ниже второго порядка. Перенося начало координат в точку (x_0, y_0), т. е., другими словами, полагая

$$x - x_0 = \xi,\ y - y_0 = \eta,$$

мы можем записать систему (A) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a\xi + b\eta + \varphi(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= c\xi + d\eta + \psi(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{A'}$$

где

$$a = P'_x(x_0, y_0),\ b = P'_y(x_0, y_0),$$

$$c = Q'_x(x_0, y_0),\ d = Q'_y(x_0, y_0),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 2. Приведение динамической системы к каноническому виду. При рассмотрении характера простых состояний равновесия линейные члены в системе (A′) надлежащим образом выбранным неособым линейным преобразованием

$$u = p_{11}\xi + p_{12}\eta,\quad v = p_{21}\xi + p_{22}\eta \tag{1}$$

(т. е. преобразованием, у которого $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0$) приводятся к возможно более простому, так называемому «каноническому» виду. Посмотрим прежде всего, при каких условиях надлежащим преобразованием (1) можно привести систему (A′) к виду (невыписанные члены содержат u и v в степени не ниже второй)

$$du/dt = \lambda_1 u + \ldots,\ dv/dt = \lambda_2 v + \ldots \tag{2}$$

Подставляя в (2) выражения (1) для u и v, а затем заменяя $d\xi/dt$ и $d\eta/dt$ через их выражения из (A′), мы, очевидно, получаем тождества. Приравнивая в этих тождествах коэффициенты при линейных членах, получаем следующие четыре линейных однородных уравнения относительно коэффициентов p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} искомого линейного преобразования:

$$\begin{aligned} p_{11}(a - \lambda_1) + p_{12}c = 0,&\quad p_{21}(a - \lambda_2) + p_{22}c = 0, \\ p_{11}b + p_{12}(d - \lambda_1) = 0,&\quad p_{21}b + p_{22}(d - \lambda_2) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти уравнения дают для p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} решения, не равные тождественно нулю, только в том случае, когда λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0, \qquad (4)$$

которое называется *характеристическим*. Корни λ_1 и λ_2 называются *характеристическими корнями состояния равновесия* (особой точки).

Рассмотрим различные случаи, которые здесь могут представиться.

1. Корни λ_1 и λ_2 действительны и различны. Тогда из уравнений (3) можно найти p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} такие, что $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, и, следовательно, приведение динамической системы (A) к виду (2) возможно.

2. Корни λ_1 и λ_2 кратные, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае приведение к виду (2), вообще говоря, невозможно. Однако в этом случае можно указать неособые преобразования, с помощью которых система приводится к виду

$$du/dt = \lambda u + \ldots, \quad dv/dt = \lambda v + \mu u + \ldots \qquad (5)$$

(В частных случаях μ может быть равно нулю.) Этот вид называется *каноническим* в случае кратных корней.

3. Корни λ_1 и λ_2 — комплексные сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$, α может как быть, так и не быть равным нулю). В этом случае при действительных ξ и η мы получим комплексные сопряженные u и v, так что приведение к виду (2) невозможно. В этом случае, вводя новые переменные u_1, v_1, $u = u_1 + iv_1$, $v = u_1 - iv_1$, нетрудно установить, что система может быть приведена к следующему виду:

$$du_1/dt = \alpha u_1 - \beta v_1 + \ldots, \quad dv_1/dt = \beta u_1 + \alpha v_1 + \ldots, \qquad (6)$$

который в этом случае считается каноническим видом. Дополнительно отметим, что если рассмотреть линейную систему

$$d\xi/dt = a\xi + b\eta, \quad d\eta/dt = c\xi + d\eta,$$

которая получается из системы (A′) отбрасыванием нелинейных членов, то, как известно, общее решение этой системы имеет вид

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \eta = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Здесь λ_1 и λ_2 являются корнями того же характеристического уравнения (4).

Характеристические корни не меняются при линейной замене координат (характеристические кор-

ни являются инвариантами линейного преобразования координат), т. е. пусть дана система

$$dx/dt = ax + by + \ldots, \quad dy/dt = cx + dy + \ldots,$$

у которой характеристические корни λ_1 и λ_2. Пусть после линейного преобразования

$$x = q_{11}u + q_{12}v, \; y = q_{21}u + q_{22}v$$

мы получаем систему в новых координатах u и v

$$du/dt = Au + Bv + \ldots, \quad dv/dt = Cu + Dv + \ldots$$

Тогда характеристические корни последней системы, т. е. корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

равны λ_1 и λ_2 [2]).

§ 3. Возможный характер простых состояний равновесия. Грубые состояния равновесия. Сохраняем обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad \sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Характеристическое уравнение (4), очевидно, может быть записано в виде $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$. Возможны следующие случаи.

I. $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, корни характеристического уравнения действительны и одинаковых знаков. В этом случае все траектории, проходящие через некоторую достаточно малую окрестность состояния равновесия O, стремятся к O:

при $t \to +\infty$, когда λ_1 и λ_2 отрицательны,

при $t \to -\infty$, когда λ_1 и λ_2 положительны [3]).

Состояние равновесия называется *устойчивым узлом*, когда $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, и *неустойчивым узлом*, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

II. $\Delta < 0$, корни характеристического уравнения действительны и различных знаков: $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Состояние равновесия является седлом.

III. $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, $\sigma \neq 0$, корни характеристического уравнения комплексные сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, причем действительные части этих корней отличны от нуля.

---

[2]) Это свойство вытекает из связи между матрицами $\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ и элементарных предложений линейной алгебры.

[3]) Напомним (см. гл. 1), что изображающая точка не может стремиться к состоянию равновесия при t, стремящемся к конечному значению.

В этом случае (так же, как и в случае I) все траектории, проходящие через некоторую достаточно малую окрестность состояния равновесия O, стремятся к состоянию равновесия O:

при $t \to +\infty$, когда $\alpha < 0$,

при $t \to -\infty$, когда $\alpha > 0$.

Состояние равновесия называется *фокусом* и при этом *устойчивым*, когда $\alpha < 0$, и *неустойчивым*, когда $\alpha > 0$.

§ 4. Замечания о методах установления характера грубых состояний равновесия. Указанный в предыдущем параграфе характер состояний равновесия в случаях I—III может быть установлен различными методами.

В случаях I и III (узел и фокус) качественная структура состояния равновесия может быть установлена, если заметить, что в окрестности этих состояний равновесия окружности (или в случае III — эллипсы) являются циклами без контакта, которые все траектории пересекают, входя внутрь при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\alpha < 0$ (рис. 37, *а*, *б*) (или выходя из них при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и

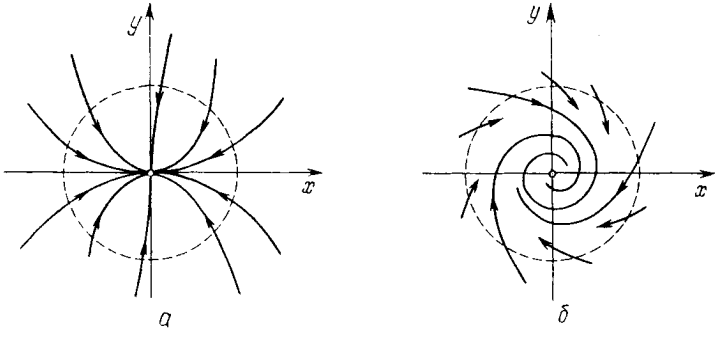


Рис. 37

$\alpha > 0$). При этом узел или фокус имеют одинаковую качественную структуру в смысле введенного в § 14 гл. 1 определения. Качественный характер состояния равновесия в случае II (седло) может быть установлен с помощью естественного выделения в окрестности этого состояния равновесия дуг без контакта, изображенных на рис. 38. Непосредственное рассмотрение поведения траекторий при наличии таких дуг без контакта с последующим доказательством единственности в каждом из треугольников «разделяющей» (сепаратрисы) полностью устанавливает качественно характер состояния равновесия в этом случае [12, 131].

Сведения о других методах исследования состояний равновесия в случаях I—III можно получить в [12] (где указана и соответствующая литература). См. также [116—118],

Отметим, что в случаях I—III качественная структура состояния равновесия определяется линейными членами правых частей системы, и эта структура такая же, как и у соответствующей линейной системы, получающейся из системы (A) отбрасыванием нелинейных частей.

Состояния равновесия типа I—III мы будем в дальнейшем называть *грубыми состояниями равновесия.*

Как уже указывалось, состояния равновесия типа I и III (узел и фокус) имеют одинаковую качественную структуру: все

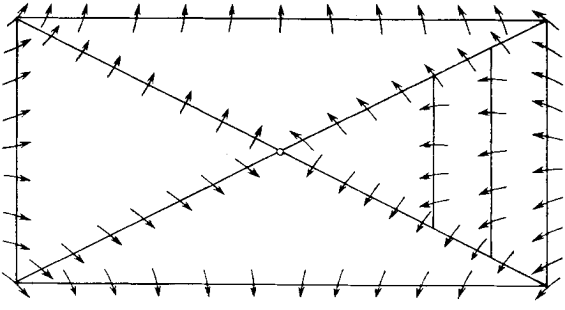


Рис. 38

траектории, проходящие через достаточно малую окрестность состояния равновесия O, стремятся к O в зависимости от знака λ_1, λ_2 и α при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Однако характер стремления к состоянию равновесия в случае I (узел) и в случае III (фокус) различен (откуда и различие в названиях этих состояний равновесия).

В следующем параграфе будет указано, что в случае III (фокус) траектории ведут себя как спирали. В § 7 будет указано, что в случае I траектории стремятся к состоянию равновесия в определенном направлении (см. § 7).

§ 5. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями. Рассмотрим особо случай, когда $\Delta > 0$, $\sigma = 0$, т. е. корни характеристического уравнения чисто мнимые.

Рассмотрим соответствующую линейную систему, т. е. систему

$$dx/dt = -by, \quad dy/dt = bx.$$

Нетрудно убедиться, что все отличные от O траектории замкнуты (являются окружностями, см. пример 5 в § 12 гл. 1). Действительно, эта система имеет аналитический интеграл

$$x^2 + y^2 = C.$$

Однако простые примеры показывают, что при наличии нелинейных членов состояние равновесия может иметь характер фокуса.

В этом нетрудно убедиться, рассматривая, например, систему

$$dx/dt = -y - x(x^2 + y^2), \quad dy/dt = x - y(x^2 + y^2).$$

Переходя в ней к полярным координатам, мы получим

$$d\rho/dt = -\rho^3,$$

откуда

$$\rho = 1/\sqrt{2t + C},$$

и, следовательно, все траектории при $t \to +\infty$ стремятся к состоянию равновесия (началу координат). Таким образом, в случае нелинейного уравнения при чисто мнимых характеристических корнях вопрос о характере состояния равновесия не решается линейными членами. Он требует специального рассмотрения.

Метод, которым в этом случае устанавливается характер состояний равновесия, применим также и в случае, когда корни комплексно сопряженные и действительные части их не равны нулю.

Поэтому мы предположим, что у состояния равновесия O системы (A) (которое мы, очевидно, можем считать лежащим в начале координат) характеристическими корнями являются комплексные сопряженные числа: $a + ib$, $a - ib$, где $b \neq 0$ и a может как быть, так и не быть равным нулю.

Предположим, что система (A) имеет канонический вид, т. е.

$$\begin{aligned} dx/dt &= P(x, y) = ax - by + \varphi(x, y), \\ dy/dt &= Q(x, y) = bx + ay + \psi(x, y). \end{aligned} \tag{A}$$

Здесь a и b — действительная и мнимая части характеристических корней, а $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — ряды по x и y, сходящиеся в некоторой окрестности начала координат, начинающиеся с членов не ниже второй степени, так что мы можем записать

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= P_2(x, y) + P_3(x, y) + \ldots, \\ \psi(x, y) &= Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \ldots, \end{aligned}$$

$P_i(x, y)$ и $Q_i(x, y)$ — однородные многочлены относительно x и y степени i.

Полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, т. е. переходя в системе (A) к полярным координатам, получаем [4])

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= ar + \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \psi(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta = \\ &= ar + r^2[P_2(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Q_2(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \ldots, \\ \frac{d\theta}{dt} &= b - \frac{\psi(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\sin\theta - \varphi(r\cos\theta, r\sin\varkappa)\, r\cos\theta}{r^2} = \\ &= b - r[P_2(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta - Q_2(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta] + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

[4]) В правых частях полученной системы мы сокращаем на r при $r \neq 0$, а затем доопределяем по непрерывности при $r = 0$.

Так как $b \neq 0$, то при всех достаточно малых r, т. е. в некоторой окрестности состояния равновесия,

$$d\theta/dt \neq 0.$$

(Это означает, что в рассматриваемом случае любая полупрямая во всех достаточно близких к началу координат точках не имеет контакта с траекториями системы (A).)

При $b > 0$ полярный угол θ возрастает при возрастании t $(d\theta/dt > 0)$, а при $b < 0$ убывает при возрастании t $(d\theta/dt < 0)$. При этом полярный угол возрастает при вращении против часовой стрелки. Для исследования характера рассматриваемого состояния равновесия удобнее систему уравнений (7) заменить одним уравнением, которое получается, если разделить первое из уравнений (7) на второе:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{ar + rF(r, \sin\theta, \cos\theta)}{b + rG(r, \sin\theta, \cos\theta)} = R(r, \theta). \tag{8}$$

Функция $R(r, \theta)$ — периодическая функция θ с периодом 2π, являющаяся аналитической при всех θ и всех достаточно малых r. Кроме того, $R(0, \theta) = 0$, т. е. $r = 0$, есть решение уравнения (8). Функция $R(r, \theta)$ может быть, следовательно, разложена в ряд по степеням r, сходящийся при всех значениях θ и всех достаточно малых r:

$$dr/d\theta = R(r, \theta) = rR_1(\theta) + r^2R_2(\theta) + \ldots \tag{9}$$

($R_i(\theta)$ — периодические функции θ с периодом 2π).

Рассмотрим решение уравнения (9), принимающее значение r_0 при $\theta = \theta_0$:

$$r = f(\theta;\ \theta_0,\ r_0).$$

Оно является, очевидно, уравнением в полярных координатах траектории системы (A), проходящей через точку с полярными координатами θ_0, r_0. Функция $f(\theta;\ \theta_0,\ r_0)$ — аналитическая функция $(\theta;\ \theta_0,\ r_0)$ (при сделанном предположении об аналитичности правых частей системы (A)), и при этом, очевидно (так как $r = 0$ есть решение уравнения (7)),

$$f(\theta;\ \theta_0,\ 0) \equiv 0. \tag{10}$$

Если использовать (10) и теорему о непрерывной зависимости от начальных значений, то можно сделать следующее заключение:

Все траектории системы (A), *проходящие через достаточно малую окрестность начала O, пересекают каждую из полупрямых* $\theta = \text{const}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (рис. 39 для случая $d\theta/dt < 0$).

Отсюда нетрудно видеть, что мы рассмотрим все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность начала O, если будем рассматривать все траектории, проходящие через до-

статочно малый отрезок (с концом в точке O) полуоси x (полупрямой $\theta = 0$), т. е. если будем рассматривать решение (при $\theta_0 = 0$)

$$r = f(\theta;\ 0,\ r_0).$$

Так как функция $f(\theta;\ 0,\ r_0)$ — аналитическая функция θ и r_0, то ее можно разложить в ряд по степеням r_0:

$$r = f(\theta;\ 0, r_0) = u_1(\theta)\, r_0 + u_2(\theta)\, r_0^2 + \ldots,$$

сходящийся при всех θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, и всех $|r_0| < r^*$. Эта функция является решением уравнения (9) и, следовательно, должна удовлетворять этому уравнению тождественно, т. е.

$$\dot{u}_1 r_0 + \dot{u}_2 r_0^2 + \ldots \equiv R_1(\theta)\,(u_1 r_0 + u_2 r_0^2 + \ldots) + R_2(\theta)\,[u_1(\theta)\, r_0 + u_2(\theta)\, r_0^2 + \ldots]^2 + \ldots$$

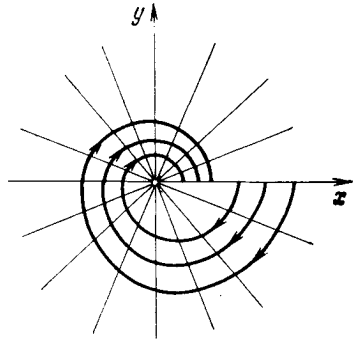


Рис. 39

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r_0, мы получаем рекуррентные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $u_2(\theta)$:

$$\begin{aligned} &\dot{u}_1 = R_1(\theta)\, u_1, \quad \dot{u}_2 = R_1(\theta)\, u_2 + R_2(\theta)\, u_1^2, \\ &\dot{u}_3 = R_1(\theta)\, u_3 + 2R_2(\theta)\, u_1 u_2 + R_3(\theta)\, u_1^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Из условия

$$f(\theta;\ 0,\ r_0) = r_0,$$

которое вытекает из самого смысла функции $f(\theta;\ 0,\ r_0)$, мы, очевидно, получаем

$$u_1(0) = 1, \quad u_i(0) = 0, \quad i > 1,$$

и, следовательно, из рекуррентных дифференциальных уравнений (11) мы можем последовательно определить $u_i(\theta)$.

В частности,

$$u_1(\theta) = e^{\theta a/b}.$$

Полагая в решении $r = f(\theta;\ 0,\ r_0)$, $\theta = 2\pi$, получим значения $r = f(2\pi;\ 0,\ r_0)$, соответствующие следующим после начальной точкам пересечения траекторий с положительной полуосью x.

Функция

$$r = f(2\pi;\ 0,\ r_0) = \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0^2 + \alpha_3 r_0^3 + \ldots,$$

где $\alpha_i = u_i(2\pi)$, называется *функцией последования* на части положительной полуоси x, соответствующей значению $|r| < r^*$. Ко-

эффициенты α_i функции последования называются *фокусными величинами.*

Несложные вычисления показывают, что

$$\alpha_1 = e^{2\pi a/b}.$$

Введем функцию

$$\psi(r_0) = f(2\pi; 0, r_0) - r_0 = (\alpha_1 - 1) r_0 + \alpha_2 r_0^2 + \ldots \qquad (12)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (Ляпунов). *Первый не равный нулю коэффициент в разложении функции* $\psi(r_0)$ *непременно нечетного номера.*

Если $\alpha_1 = 1$, то первый не равный нулю коэффициент α_i (в силу сформулированной теоремы он всегда нечетный) называется *ляпуновской величиной.* Если $\alpha_3 \neq 0$, то часто коэффициент α_3 обозначается через L_1 и называется *первой ляпуновской величиной.*

Если $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 \neq 0$, то $\alpha_5 = L_2$ называется *второй ляпуновской величиной* и т. д.

Рассмотрение функции $\psi(r_0)$ позволяет сделать исчерпывающие заключения относительно характера траекторий в окрестности состояния равновесия O.

Возможны следующие случаи:

1. Либо $a \neq 0$ (т. е. $\alpha_1 \neq 1$), либо $a = 0$ (т. е. $\alpha_1 = 1$), но хотя бы один из коэффициентов α_i отличен от нуля. Пусть в случае $a = 0$ α_{i_0} — первый отличный от нуля коэффициент в (12) (в силу теоремы Ляпунова i_0 нечетно).

Все траектории, проходящие через достаточно близкие к точке O точки,— спирали. Эти спирали стремятся к состоянию равновесия O: а) при $t \to +\infty$, когда $a/b < 0$ или когда $a = 0$ и $\alpha_{i_0} < 0$ (т. е. когда $\psi(r_0) < 0$); б) при $t \to -\infty$, когда $a/b > 0$ или $a = 0$ и $\alpha_{i_0} > 0$ (т. е. когда $\psi(r_0) > 0$). Состояние равновесия имеет характер фокуса. Когда $a \neq 0$, имеет место уже указанный в § 3 случай III (грубый фокус). В случае, когда $a = 0$, $i_0 = 2k + 1$, состояние равновесия называется *сложным фокусом* кратности k или k-кратным сложным фокусом.

2. Все коэффициенты α_i равны нулю. В этом случае $\psi(r_0) \equiv 0$ (т. е. $r \equiv r_0$) и, следовательно, все траектории, проходящие через точки достаточно малой окрестности, замкнуты. Состояние равновесия есть центр [5]).

---

[5]) При сделанных нами выводах мы существенно опирались на тот факт, что функция последования является аналитической функцией, что в свою очередь вытекало из аналитичности правых частей системы. Если правые части системы не являются аналитическими функциями, то и функция последования не будет аналитической функцией, и тогда возможен случай, когда в любой сколь угодно малой окрестности состояния равновесия O есть как замкнутые траектории, содержащие O внутри, так и спирали.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (Ляпунов). *Необходимое и достаточное условие того, что состояние равновесия системы* (A), *имеющее чисто мнимые характеристические корни, есть центр, заключается в том, что система* (A) *имеет в окрестности этого состояния равновесия аналитический интеграл.*

Этот интеграл имеет вид [6])

$$x^2 + y^2 + F_3 + \ldots + F_n + \ldots = C.$$

(*F_i содержат x, y в степени выше второй.*)

§ 6. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия. Пусть

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) \qquad (A)$$

— рассматриваемая динамическая система, а $O(0, 0)$ — ее изолированное состояние равновесия; O может быть как простым, так и сложным состоянием равновесия, так что детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(0,0) & P'_y(0,0) \\ Q'_x(0,0) & Q'_y(0,0) \end{vmatrix}$$

может быть как не равным, так и равным нулю.

Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

— траектория системы (A), стремящаяся к состоянию равновесия при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Так как оба случая ($t \to +\infty$ и $t \to -\infty$) исследуются вполне аналогично, то мы рассмотрим только один из них, например случай, когда $t \to +\infty$.

Таким образом, мы предполагаем, что при $t \to +\infty$ $y(t) \to 0$, $x(t) \to 0$ (но при этом $x(t)$ и $y(t)$ не равны нулю тождественно).

Определение. Пусть OM — луч (полупрямая), имеющий своим началом точку O и проходящий через точку $M(t)$ траектории L. Если луч OM при $t \to +\infty$ стремится к некоторому предельному положению — лучу OM^*, то мы будем говорить, что *при $t \to +\infty$ траектория стремится к состоянию равновесия O в направлении* θ^*, где θ^* — угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом OM^* (рис. 40). (Угол θ^* определяется, конечно, с точностью до соответствующего кратного 2π.)

Из данного выше определения непосредственно следует, что если полутраектория L^+ стремится к состоянию равновесия в направлении θ^*, то существует (конечный или бесконечный) пре-

[6]) При предположении, что система (A) имеет указанный в этом параграфе канонический вид. В случае, когда в окрестности состояния равновесия линейные члены отсутствуют, состояние равновесия может иметь характер центра, но аналитического интеграла может и не существовать [132].

дел отношения $y(t)/x(t)$, причем этот предел равен $\operatorname{tg}\theta^*$:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(y)}=\operatorname{tg}\theta^*=k^*.$$

Знания одного только числа k^* $\left(k^*=\lim\frac{y(t)}{x(t)}\right)$ еще недостаточно для того, чтобы определить, в каком именно направлении полутраектория L^+ стремится к состоянию равновесия O. Действительно, соотношению $\operatorname{tg}\theta^*=k^*$ $(0\leqslant\theta^*\leqslant\pi)$ удовлетворяют два (взаимно противоположных) направления.

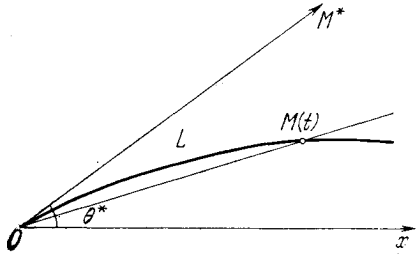


Рис. 40

В дальнейшем при рассмотрении сложных состояний равновесия мы часто будем говорить об отыскании траекторий, стремящихся к состоянию равновесия с угловым коэффициентом, или наклоном, k^*. При этом мы будем иметь в виду как траектории, стремящиеся к рассматриваемому состоянию равновесия в направлении θ^*, так и траектории, стремящиеся в направлении $\pi+\theta^*$ $(0\leqslant\theta^*\leqslant\pi,\ \operatorname{tg}\theta^*=k^*)$.

Поставленный выше вопрос о существовании для луча OM предельного положения OM^* можно рассматривать как вопрос о существовании касательной в точке O у кривой, представляющей собой траекторию L, дополненную точкой O [7]). Наряду с этим можно рассматривать вопрос о существовании предельного положения касательной к траектории L в точке $M(t)$ (при $t\to+\infty$).

Можно показать, что в случае, когда они существуют, они совпадают (см. также § 4).

Для кривых, не являющихся траекториями, данное утверждение, вообще говоря, несправедливо. Рассмотрим, например, кривую, заданную уравнениями

$$y=x^2\sin(1/x)\quad\text{при}\quad x\neq 0,$$
$$y=0\quad\text{при}\quad x=0.$$

Эта кривая имеет касательную в каждой точке, в том числе с абсциссой $x=0$, однако касательная в точке M с абсциссой x не стремится, как легко видеть, ни к какому предельному положению при $x\to 0$.

---

[7]) При этом касательную надо понимать как предельное положение секущей OM при $t\to+\infty$. Это замечание приходится делать ввиду того, что траектория L, дополненная точкой O, не является кривой, заданной параметрически (точка O не соответствует никакому значению t).

§ 7. Угловой коэффициент направления, в котором траектория может стремиться к простому состоянию равновесия. Запишем рассматриваемую систему в виде

$$dx/dt = ax + by + \varphi(x, y),\ dy/dt = cx + dy + \psi(x, y) \qquad (A)$$

($\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — ряды, начинающиеся со степеней x и y не ниже второй), и при этом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Предположим, кроме того, что рассматриваемое состояние равновесия не центр, так что существует полутраектория $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), стремящаяся к состоянию равновесия $O(0, 0)$.

Тогда dy/dx имеет предел при $t \to +\infty$ (конечный или бесконечный) в том и только в том случае, когда имеет предел $y(t)/x(t)$, причем в случае существования этих пределов они равны, т. е.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = k.$$

При этом угловой коэффициент k удовлетворяет соотношению

$$k = \frac{c + dk}{a + bk},$$

т. е. квадратному уравнению

$$bk^2 + (a - d)k - c = 0. \qquad (13)$$

При этом, если $b = 0$, то одним из корней этого уравнения считается ∞, т. е. одно из направлений, по которому траектории стремятся к состоянию равновесия O, есть направление оси y.

Отметим, что дискриминант квадратного уравнения (13) совпадает с дискриминантом характеристического уравнения. Поэтому в случае, когда этот дискриминант отрицателен, т. е. в случае фокуса (простого или сложного), не существует направлений, в которых траектории могут стремиться к состоянию равновесия. Нетрудно показать, что корни уравнения (13) k_1 и k_2 связаны с характеристическими корнями λ_1 и λ_2 соотношениями

$$k_1 = (\lambda_1 - a)/b,\ k_2 = (\lambda_2 - a)/b.$$

Приведем результаты, касающиеся простых состояний равновесия в предположении, что в окрестности простого состояния равновесия система приведена к каноническому виду.

1. а) Характеристические корни действительны, различны и одинаковых знаков (узел). Система приводится к каноническому виду

$$dx/dt = \lambda_1 x + \varphi(x, y),\quad dy/dt = \lambda_2 y + \psi(x, y). \qquad (14)$$

В этом случае в уравнении (13) мы имеем $b = 0$, $c = 0$, $a - d = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, и, следовательно, существует два значения k (напомним, что при $b = 0$ мы считаем один корень равным ∞). Предположим для определенности, что $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (устойчивый узел).

Все траектории системы (14) стремятся к состоянию равновесия O в определенных направлениях, и этими направлениями являются $\pi/2$ и $3\pi/2$, 0 и π. При этом в направлениях $\pi/2$ и $3\pi/2$ стремятся только по одной траектории[8]). Все остальные траектории стремятся к узлу в направлениях 0 и π, причем в каждом из этих направлений стремится бесчисленное множество полутраекторий (рис. 41).

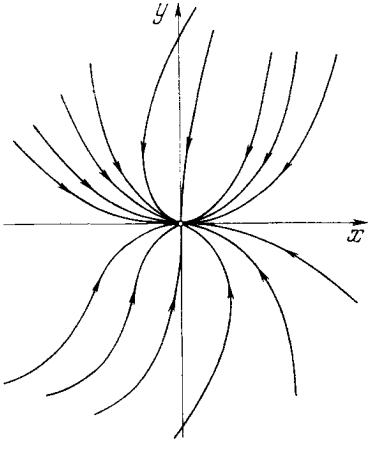


Рис. 41

Соответствующим образом измененное утверждение имеет место для случая $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, а также для случая, когда O — неустойчивый узел ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$ или $0 < \lambda_2 < \lambda_1$).

б) Характеристические корни равны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), и система может быть приведена к каноническому виду

$$dx/dt = \lambda x + \varphi(x, y), \qquad dy/dt = \lambda y + \psi(x, y). \tag{15}$$

В этом случае узел называют *дикритическим*. В уравнении (13) $b = c = a - d = 0$. В этом случае каждая траектория системы (15), стремящаяся к узлу O (при $t \to +\infty$, если $\lambda < 0$, и при $t \to -\infty$, если $\lambda > 0$), стремится к нему в определенном направлении, причем для любого направления имеется в точности одна соответствующая ему полутраектория (рис. 42).

в) Характеристические корни равны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), и система может быть приведена к виду

$$dx/dt = \lambda x + \varphi(x, y), \quad dy/dt = \lambda y + \mu x + \psi(x, y), \tag{16}$$
$$\mu \neq 0.$$

В этом случае узел иногда называется *вырожденным*. В этом случае в уравнении, определяющем угловые коэффициенты направлений

$$bk^2 + (a - d)k + c = 0,$$

как нетрудно видеть, $b = a - d = 0$, $c = \mu \neq 0$; оба корня этого

[8]) Доказательство этого утверждения может быть проведено различными способами. См., например, [12, 130].

уравнения равны бесконечности, и мы получаем два возможных направления: $\pi/2$ и $3\pi/2$.

Каждая траектория системы (16) стремится к состоянию равновесия O в определенном направлении, именно либо в направ-

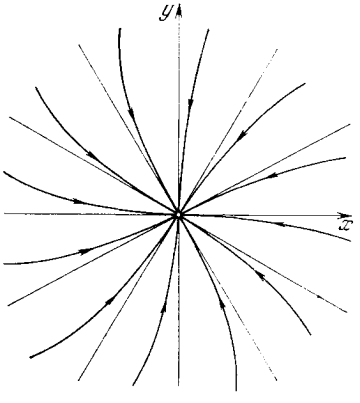


Рис. 42

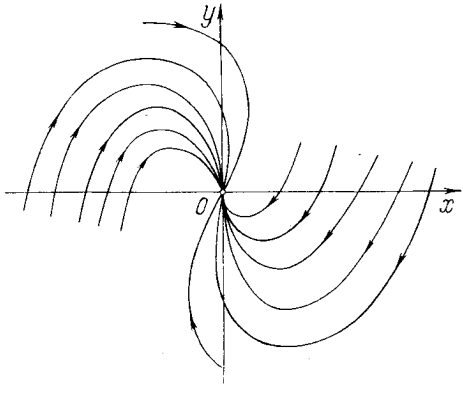


Рис. 43

лении $\pi/2$, либо в направлении $3\pi/2$; при этом имеется бесчисленное множество полутраекторий, стремящихся к O как в том, так и в другом направлении (рис. 43).

2. Характеристические корни действительны и разных знаков. Канонический вид системы:

$$dx/dt = \lambda_1 x + \varphi(x, y), \quad dy/dt = \lambda_2 y + \psi(x, y),$$
$$\lambda_1\lambda_2 < 0.$$

Уравнение (13) (как и в случае 1) имеет один нулевой корень и один, равный бесконечности. Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$.

Траектории (полусепаратрисы седла) стремятся к седлу O в направлениях $\pi/2$ и $3\pi/2$, 0 и π. При этом две полусепаратрисы стремятся к O при $t \to -\infty$ соответственно в направлениях $\pi/2$ и $3\pi/2$, две при $t \to +\infty$ в направлениях 0 и π.

Во всех проведенных рассмотрениях мы предполагали, что система приведена к каноническому виду, и поэтому направления, в которых полутраектории стремились к состоянию равновесия, совпадали с направлением осей координат. Очевидно, для системы, не приведенной к каноническому виду, направления могут быть любыми в зависимости от коэффициентов системы.

В случае фокуса, простого или сложного (т. е. когда характеристические корни комплексные или чисто мнимые), корни уравнения (13) тоже комплексные, т. е. нет направлений, по которым траектории могут стремиться к состоянию равновесия. Как мы видели в § 5, в этом случае траектории — спирали.

Можно показать, что в этом случае угол между положительным направлением касательной к траектории, стремящейся к фокусу, и положительным направлением оси неограниченно возрастает при $t \to +\infty$, если $\alpha < 0$ (и при $t \to -\infty$, если $\alpha > 0$).

§ 8. Сводка сведений о грубых состояниях равновесия[9]). Пусть $O(x_0, y_0)$ — состояние равновесия системы (A), а выражения для Δ и σ приведены в § 3 и

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0 \qquad (17)$$

— характеристическое уравнение этого состояния равновесия. Для простого состояния равновесия по самому его определению $\Delta \neq 0$, т. е. корни уравнения (17) — характеристические корни — отличны от нуля. Уравнение, определяющее направления, по которым траектории стремятся к состояниям равновесия:

$$P'_y(x_0, y_0)\, k^2 - (Q'_y - P'_x)\, k + Q'_x(x_0, y_0) = 0. \qquad (18)$$

Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (17) и корни k_1 и k_2 уравнения (18) связаны соотношениями

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - P'_x(x_0, y_0)}{P'_y(x_0, y_0)}, \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - P'_x(x_0, y_0)}{P'_y(x, y)}.$$

Очевидно, корни k_1 и k_2 действительны тогда и только тогда, когда действительны λ_1 и λ_2.

В зависимости от того, каковы характеристические корни состояния равновесия, система может быть в окрестности этого состояния равновесия приведена линейным преобразованием переменных к одному из следующих видов, которые называются *каноническими* (обозначения переменных сохраняются прежними).

1. Характеристические корни действительны и различны ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Канонический вид системы:

$$\dot{x} = \lambda_1 x + \varphi(x, y), \quad \dot{y} = \lambda_2 y + \psi(x, y).$$

2. Характеристические корни равны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Канонический вид системы:

$$\dot{x} = \lambda x + \varphi(x, y), \quad \dot{y} = \lambda y + \mu x + \psi(x, y)$$

(μ может быть как равным, так и не равным нулю).

3. Характеристические корни комплексно сопряженные ($\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$). Канонический вид системы:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta y + \varphi(x, y), \quad \dot{y} = \beta x + \alpha y + \psi(x, y).$$

[9]) Состояния равновесия с чисто мнимыми корнями, рассмотренные в § 5, здесь, очевидно, не фигурируют.

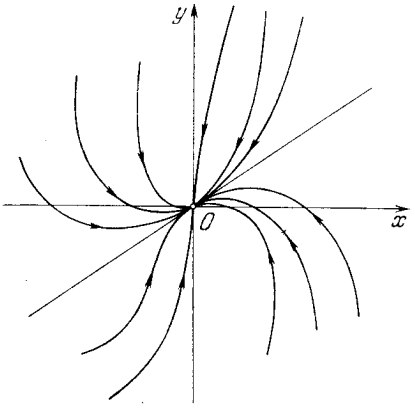


Рис. 44

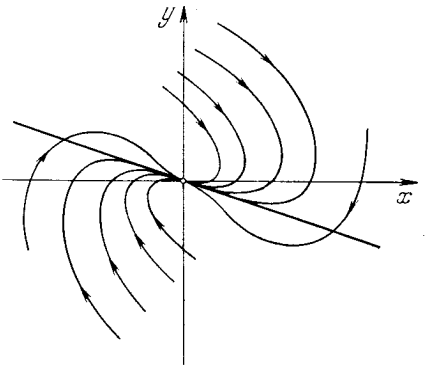


Рис. 45

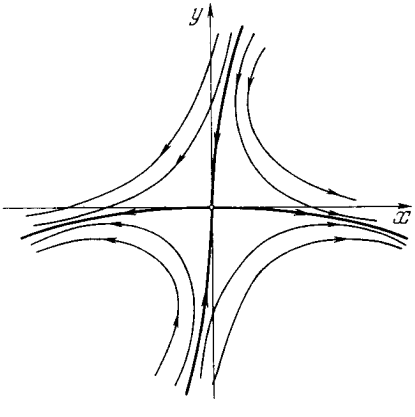


Рис. 46

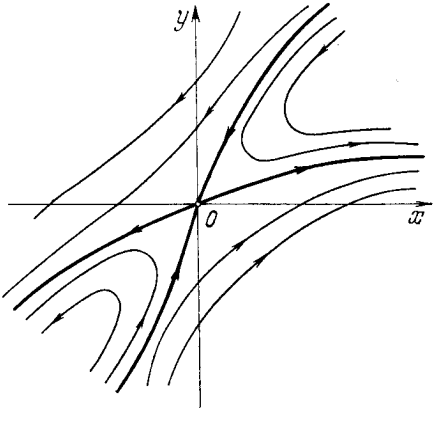


Рис. 47

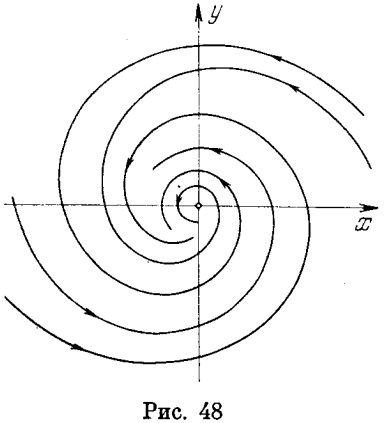


Рис. 48

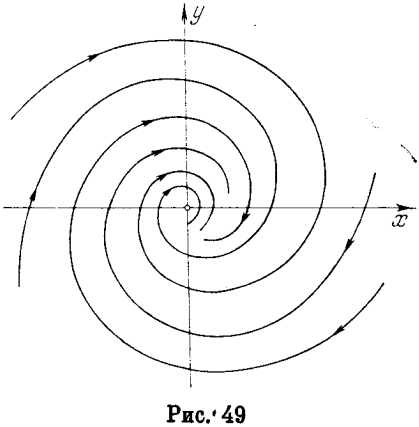


Рис. 49

Ниже перечислены все возможные типы состояний равновесия с не равными нулю действительными частями характеристических корней и приведены схематические рисунки расположения траекторий в их окрестности.

При этом для недикритического узла и для седла рисунки приводятся как в случае, когда рассматриваемая система имеет канонический вид (когда направления, по которым к состоянию равновесия стремятся траектории, совпадают с направлением осей координат), так и в общем случае (т. е. в случае, когда система не имеет канонического вида, так что направления k_1 и k_2 могут быть любыми).

I. Узел (характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и одинаковых знаков, т. е. $\lambda_1\lambda_2 > 0$; $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta > 0$).

А. Невырожденный узел ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

а) устойчивый: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, т. е. $\sigma < 0$ (рис. 41, 44);

б) неустойчивый: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, т. е. $\sigma > 0$.

(Рисунки даются только для устойчивого узла, в случае неустойчивого узла надо переменить направление стрелок. При этом рис. 41 соответствует случаю, когда система имеет канонический вид, а рис. 44 соответствует общему виду.)

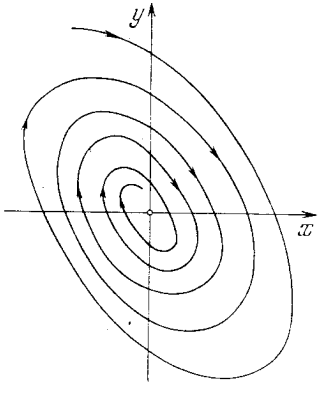


Рис. 50

Б. Вырожденный узел ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, но в канонической форме $\mu \neq 0$, $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta = 0$):

а) устойчивый: $\lambda < 0$ (рис. 43, 45);

б) неустойчивый: $\lambda > 0$.

(Рис. 43 соответствует случаю, когда система имеет канонический вид, а рис. 45 соответствует общему виду.)

В. Дикритический узел ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\mu = 0$):

а) устойчивый: $\lambda < 0$ (рис. 42);

б) неустойчивый: $\lambda > 0$.

II. Седло (характеристические корни λ_1 и λ_2 действительны и разных знаков, т. е. $\lambda_1\lambda_2 < 0$, либо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, либо $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\Delta < 0$) изображено на рис. 46 и 47 (рис. 46 соответствует случаю системы в каноническом виде при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, рис. 47 — общему случаю).

III. Фокус (характеристические корни комплексные сопряженные, т. е. $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$):

а) устойчивый: $\alpha < 0$ ($\sigma < 0$) (см. рис. 48 и 49 для устойчивого фокуса в случае канонического вида системы: рис. 48 соответствует случаю $\beta > 0$, рис. 49 — случаю $\beta < 0$; рис. 50 соответствует случаю, когда система имеет общий вид);

б) неустойчивый: $\alpha > 0$ ($\sigma > 0$).

Пример 1.

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(a^2 - x^2) + by.$$

Состояние равновесия $O(0, 0)$ — седло. Определим направления сепаратрис в седле. Уравнение для нахождения углового коэффициента сепаратрис в седле имеет вид $k^2 - bk - a^2 = 0$, откуда $k_{1,2} = b/2 \pm \sqrt{b^2/4 + a^2}$.

Пример 2.

$$\dot{x} = -x(2 + y), \quad \dot{y} = x + \beta y.$$

Состояние равновесия $O(0, 0)$ — седло. Уравнение для определения направлений сепаратрис в седле: $(\beta + 2)k + 1 = 0$, откуда $k = -1/(2 + \beta)$. Нетрудно видеть, что второе значение k есть ∞, а сепаратриса с наклоном $k = \infty$ есть прямая $x = 0$.

ГЛАВА 4

КАЧЕСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ОКРЕСТНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ СЛОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

§ 1. Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия. При исследовании сложных состояний равновесия иногда бывает весьма существенно знание направлений, в которых траектории могут стремиться к этому состоянию равновесия [1]).

Рассмотрим динамическую систему

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y),$$

для которой начало координат является *сложным состоянием равновесия*, так что

$$P(0, 0) = 0, \quad Q(0, 0) = 0,$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(0, 0) & P'_y(0, 0) \\ Q'_x(0, 0) & Q'_y(0, 0) \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Предположим, что разложения правых частей в ряд по степеням x, y в окрестности точки $O(0, 0)$ имеют вид

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \varphi(x, y),$$
$$Q(x, y) = Q_m(x, y) + \psi(x, y),$$

где $m \geqslant 1$, $P_m(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ — однородные многочлены, состоящие из всех членов m-го порядка соответствующих разложений, а функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — ряды, состоящие из членов более высоких порядков. При этом мы считаем, что многочлены $P_m(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ одновременно не равны тождественно нулю (в противном случае мы бы взяли $m' > m$).

Рассмотрим выражение

$$xQ_m(x, y) - yP_m(x, y), \tag{2}$$

а также выражение

$$Q_m(1, k) - kP_m(1, k),$$

---

[1]) Методы исследования сложных особых точек (метод Бендиксона [143] и метод Фроммера [132]) опираются на рассмотрение траекторий, стремящихся в определенном направлении.

которое мы получим из предыдущего, если поделим его на x^{m+1} и введем обозначение

$$k = y/x.$$

Мы будем также рассматривать выражение

$$\cos\theta\, Q_m(\cos\theta,\ \sin\theta) - \sin\theta\, P_m(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

Имеет место

Теорема 1. *Всякая полутраектория системы*

$$dx/dt = P_m(x,\ y) + \varphi(x,\ y),$$
$$dy/dt = Q_m(x,\ y) + \psi(x,\ y)$$

(P_m *и* Q_m *не равны тождественно нулю*), *стремящаяся к состоянию равновесия* $O(0,\ 0)$, *либо является спиралью, стремящейся к* O *при* $t \to +\infty$ (*или* $t \to -\infty$), *либо стремится к* O *в определенном направлении* θ^*.

При этом:

I. Если хоть одна из траекторий системы является спиралью, стремящейся к O при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$), то все траектории, проходящие через точки некоторой окрестности состояния равновесия O, являются такими же спиралями (т. е. точка есть устойчивый или неустойчивый «фокус высшей сложности»).

II. Если выражение (2) не обращается тождественно в нуль, то наклоны k, с которыми траектории стремятся к состоянию равновесия O, удовлетворяют уравнению

$$Q_m(1,\ k^*) - k^* P_m(1,\ k^*) = 0, \tag{3}$$

или, иначе, направления θ^*, с которыми траектории стремятся к O, удовлетворяют уравнению

$$\cos\theta^*\, Q_m(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*) - \sin\theta^*\, P_m(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*) = 0. \tag{4}$$

III. Если

$$xQ_m(x,\ y) - yP_m(x,\ y) \equiv 0$$

и, следовательно,

$$P_m(x,\ y) = xQ_{m-1}(x,\ y), \quad Q_m(x,\ y) = yQ_{m-1}(x,\ y),$$

где $Q_{m-1}(x,\ y)$ — некоторый не равный нулю тождественно однородный многочлен степени $m-1$, то, какое бы направление θ, не удовлетворяющее уравнению

$$Q_{m-1}(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*) = 0, \tag{5}$$

мы ни взяли, существует в точности одна полутраектория, стремящаяся к O в направлении θ. Для особого же направления θ^*, удовлетворяющего (5), может оказаться, что не существует ни одной полутраектории, стремящейся к O в этом направлении θ^*, либо есть конечное число таких траекторий, либо, наконец, таких траекторий может существовать бесчисленное множество.

Замечание. Если существует траектория, стремящаяся к состоянию равновесия O с определенным наклоном k^*, то этот

наклон, согласно сформулированной теореме 1, является действительным корнем уравнения $Q_m(1, k) - kP_m(1, k) = 0$. Однако если это уравнение имеет действительные корни, то это еще не означает, что существуют траектории, стремящиеся к O с этим наклоном: возможны случаи, когда при этом все траектории являются спиралями или замкнутыми траекториями.

§ 2. Сложное состояние равновесия (особая точка) с нулевыми характеристическими корнями[2]**).** В настоящем параграфе мы приведем результаты исследования одного простейшего типа сложных особых точек.

Рассмотрим систему

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y),$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции, не имеющие общего множителя, отличного от постоянного.

Пусть начало координат является сложным состоянием равновесия этой системы, т. е. мы имеем

$$P(0, 0) = 0, \quad Q(0, 0) = 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(0, 0) & P'_y(0, 0) \\ Q'_x(0, 0) & Q'_y(0, 0) \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

и, следовательно, хотя бы один из характеристических корней этого состояния равновесия равен нулю. Мы будем рассматривать здесь такие сложные состояния равновесия, когда в разложениях по степеням x и y функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ хотя бы один из линейных членов не равен нулю, т. е. когда

$$|P'_x(0, 0)| + |P'_y(0, 0)| + |Q'_x(0, 0)| + |Q'_y(0, 0)| \neq 0.$$

Рассмотрим наряду с величиной $\Delta(0, 0)$ величину

$$\sigma = P'_x(0, 0) + Q'_y(0, 0).$$

Среди состояний равновесия, для которых выполняется условие (6), естественным образом выделяются два случая в зависимости от того, что имеет место: $\sigma(0, 0) \neq 0$ или $\sigma(0, 0) = 0$. Так как характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

---

[2]) Качественный характер таких состояний равновесия был рассмотрен методом Бендиксона (см. [143, 60, 70]) и методом Фроммера (см. [1, 132, 133]). Мы приводим здесь величины, определяющие характер этих состояний равновесия, однако способом, указанным в работе [70] (см. также монографии [12, 13]), так как этот способ их введения значительно более естествен при рассмотрении бифуркаций этих состояний равновесия в гл. 10.

то, очевидно, в случае, когда $\sigma \neq 0$, только один характеристический корень равен нулю, второй же равен σ. В случае, когда $\sigma = 0$, оба характеристических корня равны нулю.

I. $\Delta(0, 0) = 0$, $\sigma(0, 0) \neq 0$. В этом случае существует неособое линейное преобразование (см. § 2 гл. 3), с помощью которого система в окрестности начала $O(0, 0)$ может быть представлена в следующем каноническом виде:

$$dx/dt = P^*(x, y), \quad dy/dt = by + Q^*(x, y), \tag{7}$$

где $b \neq 0$, а разложения по степеням x, y функций $P^*(x, y)$ и $Q^*(x, y)$ начинаются с членов не менее чем второго порядка.

Введем в рассмотрение функцию

$$y = \varphi(x),$$

являющуюся решением уравнения [3])

$$by + Q^*(x, y) = 0.$$

Подставим функцию $y = \varphi(x)$ в $P^*(x, y)$ и введем обозначение

$$\psi(x) = P^*(x, \varphi(x)).$$

Так как мы предположили, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не имеют общего множителя, отличного от постоянного, то $P^*(x, \varphi(x))$ не может быть тождественно равна нулю и, следовательно, в разложении функции $\psi(x)$ по степеням x заведомо будут отличные от нуля члены.

Таким образом, мы можем написать

$$\psi(x) = P^*(x, \varphi(x)) = \Delta_m x^m + \ldots,$$

где $m \geqslant 2$ (так как разложение $P^*(x, y)$ по степеням x и y начинается с членов не ниже второй степени и $\Delta_m \neq 0$). Число m, очевидно, характеризует кратность общей точки [4]) кривых

$$P^*(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad by + Q^*(x, y) = 0.$$

Теорема 2. *Состояние равновесия* $O(0, 0)$, *для которого* $\Delta(0, 0) = 0$ *и* $\sigma(0, 0) \neq 0$, *может иметь следующий качественный характер*:

а) *характер седла* (*при* m *нечетном и* $\Delta_m > 0$);

---

[3]) Такая функция всегда существует, так как для уравнения $by + Q^*(x, y) = 0$ выполняются условия существования неявной функции. Действительно, при $x = 0$, $y = 0$ будет

$$by + Q^*(x, y) \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(by + Q^*(x, y)) \equiv b \neq 0.$$

[4]) Кроме того, Δ_m является ляпуновской величиной, соответствующей одному, равному нулю характеристическому корню (см. гл. 6).

б) *характер узла (при m нечетном и $\Delta_m < 0$); причем при $b < 0$ узел устойчивый, а при $b > 0$ — неустойчивый;*

в) *состояние равновесия с одним узловым сектором и двумя седловыми (при m четном и любом знаке Δ_m). При $b < 0$ узловой сектор устойчивый, при $b > 0$ — неустойчивый. Кроме того, если*

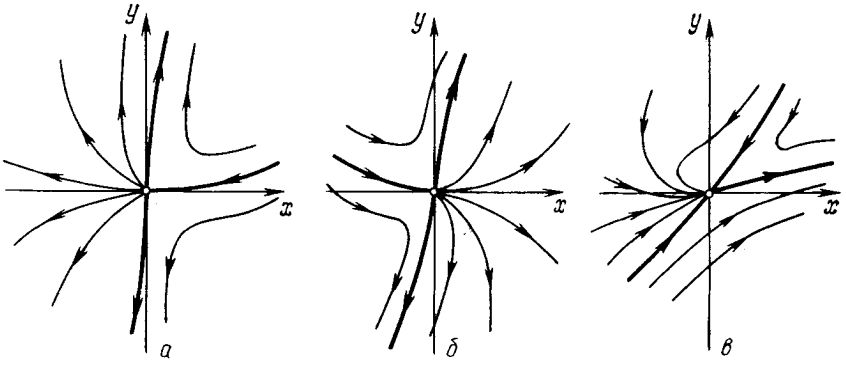


Рис. 51

$b\Delta_m < 0$, то траектории узлового сектора стремятся к O (при $t \to -\infty$ или при $t \to +\infty$ в зависимости от знака b) слева от оси y (рис. 51, *а*), *а если $b\Delta_m > 0$, то справа от оси y* (рис. 51, *б*)[5]).

Состояние равновесия в случае а) мы будем называть *сложным седлом*, в случае в) — *седло-узлом*, а в случае б) — *сложным узлом*[6]).

Нетрудно видеть (см. §1), что, когда система имеет канонический вид (7), существует два направления, по которым траектории могут стремиться к рассматриваемому состоянию равновесия, это: 0, π и $\pi/2$, $3\pi/2$.

На рис. 51, *а*, *б* представлен седло-узел в случае, когда система приведена к каноническому виду (7).

Очевидно, в случае, когда в рассматриваемых координатах x и y система не имеет канонического вида, направления, в которых траектории стремятся к началу координат, могут быть отличны от направления осей. Такой случай представлен для случая седло-узла на рис. 51, *в*.

В дальнейшем особый интерес для нас будет представлять случай $m = 2$, который мы будем называть случаем *простейшего двукратного седло-узла*. В случае $m > 2$ будем называть состояние равновесия *сложным седло-узлом*.

---

[5]) Хотя на рис. 51 оси координат нарисованы, но они не относятся к качественной структуре состояния равновесия и не надо придавать значения деталям взаимного расположения траектории и осей.

[6]) Геометрически в рассматриваемом случае сложное седло и сложный узел ничем не отличаются от простого седла и узла.

II. $\Delta(0, 0) = 0$, $\sigma(0, 0) = 0$. В этом случае, очевидно, оба характеристических корня состояния равновесия равны нулю.

В рассматриваемом случае система линейным неособенным преобразованием приводится к виду

$$dx/dt = y + P_2^*(x, y), \quad dy/dt = Q_2^*(x, y),$$

где $P_2^*(x, y)$ и $Q_2^*(x, y)$ — аналитические функции, разложения которых по степеням x и y начинаются с членов не менее чем второго порядка.

Рассмотрим следующие функции:

1) функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением уравнения

$$y + P^*(x, y) = 0;$$

2) функцию $y = \psi(x)$, определяемую формулой

$$\psi(x) = Q^*(x, \varphi(x));$$

эта функция заведомо не равна нулю тождественно (в силу предположения об отсутствии общих множителей, отличных от постоянных у правых частей рассматриваемой системы), поэтому в разложении $\psi(x)$ по степеням x заведомо будут отличные от нуля члены, и мы можем написать

$$\psi(x) = Q^*(x, \varphi(x)) = a_k x^k + \ldots; \quad a_k \neq 0;$$

3) функцию

$$\sigma(x) = P_{2x}^{*\prime}(x, \varphi(x)) + Q_{2y}^{*\prime}(x, \varphi(x)) = b_n x^n + \ldots$$

Функция $\sigma(x)$, в отличие от $\psi(x)$, может тождественно обращаться в нуль. Рассмотрим сначала случай, когда $\sigma(x) \not\equiv 0$, так что при некотором n $b_n \neq 0$. Числа k, n и коэффициенты a_k и b_n характеризуют качественную структуру особой точки. При этом число k характеризует кратность общей точки изоклин (см. ч. II). Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть k четное, $k = 2m$.*

Тогда: 1) *в случае, если $n < m$, особая точка $O(0, 0)$ имеет качественный характер седло-узла* (рис. 52);

2) *в случае, когда $n \geqslant m$, существует одна полутраектория, стремящаяся к O при $t \to -\infty$, и одна полутраектория, стремящаяся к O при $t \to +\infty$, все остальные траектории и при возрастании, и при убывании t выходят из окрестности O (т. е. окрестность особой точки O состоит из двух седловых секторов).*

Такое состояние равновесия мы будем называть *вырожденным седло-узлом* (рис. 53).

Отметим, что рис. 53 выполнен при условии $b_n > 0$ и $a_{2m} < 0$, а рис. 52 соответствует случаю $b_n > 0$, $a_{2m} < 0$.

Теорема 4. *Пусть $k = 2m + 1$ — нечетное число и $a_{2m+1} \neq 0$, и пусть $\gamma = b_n^2 + 4(m + 1) a_{2m+1}$.*

Тогда: 1) *если* $a_{2m+1} > 0$, *то особая точка* $O(0, 0)$ *имеет качественный характер седла* (рис. 54);

2) *если* $a_{2m+1} < 0$, *то особая точка имеет*:

а) *характер фокуса или центра при* $n > m$, *а также при* $n = m$ *и* $\gamma < 0$ [92];

б) *характер узла, если* n *четное и при этом* $n < m$ *или* $n = m$ *и* $\gamma \geqslant 0$;

в) *одну замкнутую узловую (эллиптическую) область, две сопровождающие ее узловые области и одну седловую область*

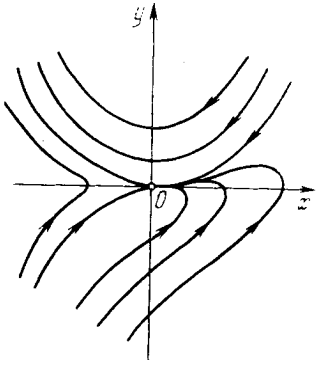


Рис. 52

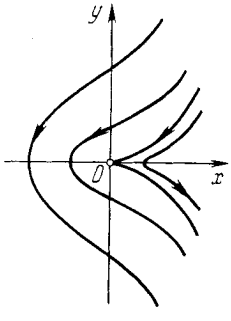


Рис. 53

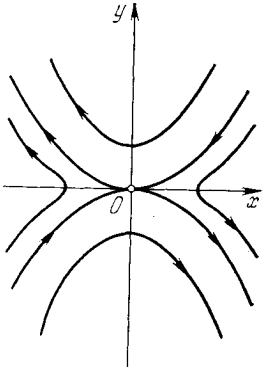


Рис. 54

(рис. 55), *если* n — *нечетное число и при этом* $n < m$ *или* $n = m$ *и* $\gamma \geqslant 0$.

Рис. 54 и 55 выполнены при условии $b_n > 0$; в случае $b_n < 0$ расположение траекторий получается симметричным отображением относительно оси x.

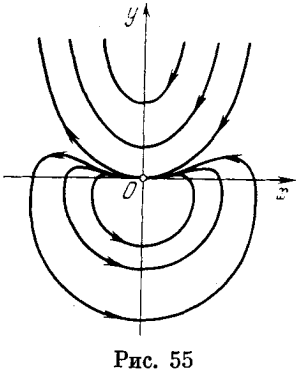


Рис. 55

Нетрудно видеть, что в случае рассматриваемых состояний равновесия уравнение для определения направления, по которому траектории стремятся к состоянию равновесия:

$$bk^2 + (a - d)k - c = 0, \qquad (8)$$

имеет двукратный нулевой корень (так как мы имеем $a = d = c = 0$, $b \neq 0$). Все стремящиеся к состоянию равновесия с определенным направлением траектории стремятся к нему, касаясь оси x (см. рис. 52—55). Однако если состояние равновесия есть фокус или центр, то имеем, очевидно, случай, возможность которого была указана: когда, несмотря на наличие действительных корней уравнения (8) и траекторий, стремящихся

к состоянию равновесия, нет траекторий, стремящихся в этом направлении, а все траектории в достаточно малой окрестности являются спиралями или замкнутыми траекториями.

§ 3. Примеры.

Пример 1.

$$dx/dt = \lambda x^2, \quad dy/dt = by.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$dy/dx = by/(\lambda x^2).$$

Это уравнение элементарно интегрируется:

$$y = ce^{-b/(\lambda x)}.$$

Пусть для определенности $b/\lambda > 0$; тогда, очевидно, если $x \to +0$, то $y \to 0$, а при $x \to -0$ $y \to +\infty$. Состояние равновесия — седло-узел. Узловая область расположена как на рис. 51, *б*, если $b > 0$, $\lambda > 0$.

Нетрудно также установить расположение узловой области и направление на траекториях при других знаках b и λ.

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^3 + 2y^4 + x^5}{2x + x^2 - 3y^3}.$$

Для точки $O(0, 0)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(0,0) & P'_y(0,0) \\ Q'_x(0,0) & Q'_y(0,0) \end{vmatrix} = 0, \quad \delta = P'_x(0,0) + Q'_y(0,0) = 2.$$

Подстановкой $x = 2\bar{y}$, $y = -\frac{1}{4}\bar{x} + \bar{y}$ преобразуем уравнение к виду

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{y + Q_2(\bar{x}, \bar{y})}{P_2(\bar{x}, \bar{y})}.$$

Ищем решение уравнения

$$\bar{y} + Q_2(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{y} + \bar{y}^2 - \frac{3}{4}\left(\bar{y} - \frac{\bar{x}}{4}\right) = 0$$

в виде ряда по степеням $\bar{x}$. Получим

$$\bar{y} = \varphi(\bar{x}) = -\frac{3}{256}\bar{x}^3 + \ldots,$$

$$\psi(x) = P_2(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \equiv \frac{1}{64}\bar{x}^3 + \ldots$$

Здесь $m = 3$, $\Delta_m = 1/64 > 0$ и, следовательно, точка $O(0, 0)$ — узел.

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}.$$

Интегрируя, получаем $y^2 = \frac{2x^3}{3} + C$. Нетрудно видеть, что разбиение на траектории имеет вид, представленный на рис. 53.

Пример 4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + x^4 - 3x^2y^2}{xy^p + y^4 + x^6}, \quad p \text{ — целое число.}$$

Для точки $O(0, 0)$: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ и $\delta = 0$. Подстановкой $x = -\bar{y}$, $y = -\bar{x}$ уравнение приводим к виду

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{Q_2(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{y} + P_2(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{\bar{y}\bar{x}^p - \bar{x}^4 - \bar{y}^6}{\bar{y} + \bar{y}^4 - 3\bar{x}^2\bar{y}^2}.$$

Ищем решение уравнения $\bar{y} + \bar{y}^4 - 3\bar{x}^2\bar{y}^2 = 0$ в виде ряда по степеням $\bar{x}$. Находим $\bar{y} = \varphi(\bar{x}) \equiv 0$. Поэтому

$$\psi(\bar{x}) = Q_2(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = -\bar{x}^4, \quad \sigma(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = \bar{x}^p.$$

Здесь $k = 2m = 4$, $n = p$, $a_k = -1$, $b_n = 1$. Если $p < m = 2$, то точка $O(0, 0)$ — седло-узел (это может быть только в случае $p = 1$). Если $p \geqslant m = 2$, то точка $O(0, 0)$ — вырожденная особая точка (для нее $c = 2$, $N = 0$, $N_f = 0$). Если в исходном уравнении будет отсутствовать член xy^p, то $\sigma(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \equiv 0$, и тогда $b_n = 0$ и, следовательно, точка $O(0, 0)$ будет вырожденной особой точкой.

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^ny - x^7 + y^2}{y + x^7 + 4x^4y^2 - y} = \frac{Q_2(x, y)}{y + P_2(x, y)}, \quad n \geqslant 1, \ a \neq 0.$$

Из уравнения $y + P_2(x, y) = 0$ находим $y = \varphi(x) = -x^7 + \ldots$, и, следовательно,

$$\psi(x) = Q_2(x, \varphi(x)) = ax^n(-x^7 + \ldots) - x^7 + (-x^7 + \ldots)^2 = \\ = -x^7 + \ldots \text{ (так как } n \geqslant 1),$$

$$\sigma(x, \varphi(x)) = P^{*'}_{2x}(x, \varphi(x)) + Q^{*'}_{2y}(x, \varphi(x)) = ax^n + 7x^6 + \ldots$$

Таким образом, возможны случаи:

1. $n \geqslant 6$. Тогда $b_n = a + 7$ $(n = 6)$ или $b_n = 7$ $(n > 6)$ и, следовательно, $b_n \neq 0$ и $n > m$. Особая точка $O(0, 0)$ является фокусом или центром.

2. $n < 6$. Тогда $b_n = a \neq 0$ и $\gamma = b_n^2 + 4(m+1)a_{2m+1} = a^2 - 16$. Теперь если $n = 4$ или $n = 5$, или $n = 3$ и $\gamma = a^2 - 16 < 0$, то точка $O(0, 0)$ — фокус или центр. Если $n = 2$, то точка $O(0, 0)$ — узел. Если $n = 3$ и $\gamma = a^2 - 16 > 0$, то точка $O(0, 0)$ — точка с замкнутой узловой областью.

Примеры более сложных состояний равновесия. Мы предоставляем читателю рассмотреть приведенные ни-

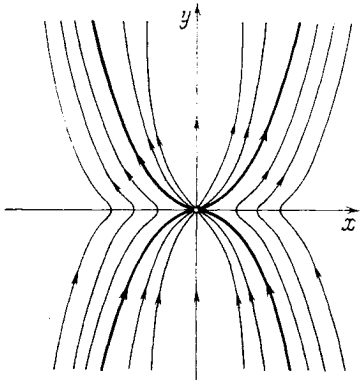


Рис. 56

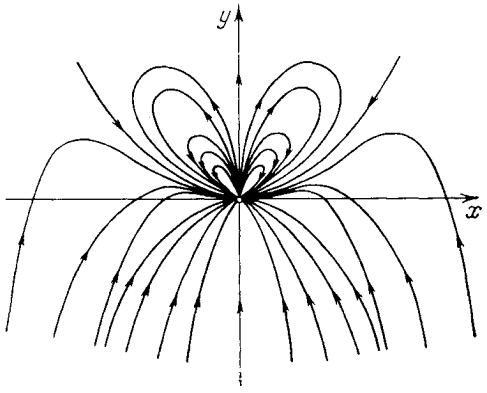


Рис. 57

же примеры (во всех этих примерах системы могут быть проинтегрированы в квадратурах).

Пример 6.

$$dx/dt = xy, \quad dy/dt = x^2 + y^2.$$

Система интегрируется путем замены $y/x = u$. Можно показать, что в окрестности состояния равновесия траектории имеют характер, представленный на рис. 56.

Пример 7.

$$dx/dt = xy,$$
$$dy/dt = y^2 - 6x^2y + x^4.$$

Система интегрируется с помощью замены $y/x^2 = u$. Рассматривая полученный интеграл, нетрудно убедиться, что состояние равновесия имеет вид, представленный на рис. 57.

Пример 8.

$$dx/dt = xy, \quad dy/dt = y^2 - x^4.$$

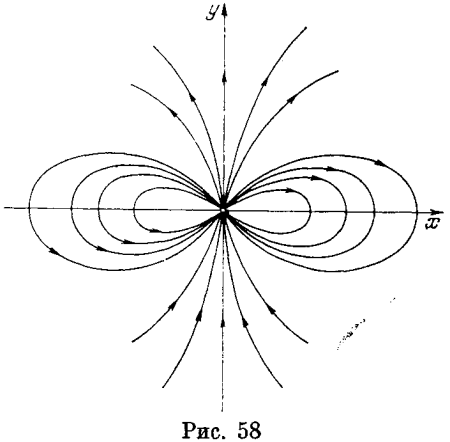


Рис. 58

Траекториями этой системы являются кривые $y^2 + x^4 = Cx^2$ и, кроме того, полуоси $x = 0$, $y > 0$ и $x = 0$, $y < 0$. Состояние равновесия имеет вид, представленный на рис. 58.

В настоящее время методы исследования сложных особых точек получили дальнейшее развитие (список дополнительной литературы [31, 15, 17, 27]).

§ 4. Нормальные формы. В последнее время широкое распространение получило рассмотрение так называемых «нормальных форм» дифференциального уравнения в окрестности особой точки (состояния равновесия). «Нормальная форма»— это максимально простой вид дифференциального уравнения в окрестности особой точки после надлежащим образом подобранной замены переменных, в котором: во-первых, важные для характеристики особой точки величины оказываются выписанными в явном виде (например, ляпуновские величины) и, во-вторых, в некоторых случаях уравнение в окрестности особой точки приводится к интегрируемому виду. Если существует преобразование переменных, при котором система делается линейной, то ее нормальная форма — линейная. Дюлаком были рассмотрены те нормальные формы, к которым могут быть приведены дифференциальные уравнения (с аналитическими правыми частями) в окрестности седла.

В зависимости от того, является ли модуль отношения характеристических чисел седла λ_1 и λ_2, т. е. $|\lambda_1/\lambda_2| = \lambda$, рациональным или иррациональным, эти формы различны. Именно, Дюлак показал, что когда λ иррационально, аналитической заменой переменных можно привести дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\lambda + x^l y^k F(x, y)\right],$$

где l и k — любые целые числа. Однако привести такое уравнение, несмотря на то, что l и k могут быть сколь угодно большими, к линейному виду может оказаться невозможным, так как преобразование, приводящее к линейному виду, окажется расходящимся рядом.

Когда λ рационально ($\lambda = m/n$), Дюлак приводит уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\frac{m}{n} + c_1 x^m y^n + c_2 x^{2m} y^n + \ldots + x^{rm} y^{rk} F(x,\ y)\right],$$

где c_i — величины, имеющие тесные связи с ляпуновскими величинами.

В настоящее время рассматривается приведение к нормальной форме не обязательно аналитических систем и аналитическими преобразованиями, а вообще гладких до некоторого порядка систем гладкими же преобразованиями. При этом каноническая форма Дюлака в случае рационального λ существенно упрощается.

Отметим, что нормальной формой в случае одного нулевого корня (см. § 3 гл. 4) является

$$\frac{dy}{dx} = \frac{by}{ax^2 + cx^3}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

(но c может обращаться в нуль).

В настоящей книге нормальные формы в явном виде не используются.

ГЛАВА 5

ФУНКЦИЯ ПОСЛЕДОВАНИЯ. ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

§ 1. Функция последования. В настоящем параграфе рассматривается функция последования, которая уже использовалась при исследовании состояния равновесия, у которого $\Delta > 0$, $\sigma \geqslant 0$. В настоящей главе функция последования используется для исследования окрестности замкнутой траектории.

Пусть l — дуга без контакта, и пусть на этой дуге введен параметр s так, что каждой точке l соответствует взаимно однозначно одно значение s, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, s_1 и s_2 — некоторые фиксированные значения.

Пусть

$$x = l(s), \quad y = m(s)$$

— параметрические уравнения дуги l, которые даются с помощью введенного параметра s. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что в рассматриваемом нами случае, когда правые части системы (А) — аналитические функции, функции $l(s)$ и $m(s)$ также аналитические функции [1]).

Предположим, что траектория L, пересекающая при $t = t_0$ дугу l в точке Q, соответствующей некоторому значению s, пересекает дугу l еще раз при некотором значении $t > t_0$. Пусть t_1 — первое значение, большее t_0, при котором L пересекает дугу l, $\overline{Q}$ — соответствующая точка и $\bar{s}$ — значение параметра s в этой точке (рис. 59).

Мы скажем, что точка Q дуги l имеет последующую $\overline{Q}$. Если обе точки Q и $\overline{Q}$ отличны от концов дуги l, то на основании теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и предложения II § 1 гл. 2 у всех точек дуги l, близких к Q, будут существовать последующие (в частности, это всегда имеет место, когда траектория, проходящая через точку Q, замкнута).

Пусть s и $\bar{s}$ — координаты различных точек дуги l и их последующих на отрезке s. Ясно, что $\bar{s}$ является функцией от s. Эта функция

$$\bar{s} = f(s)$$

---

[1]) В случае, когда дуга l не является аналитической дугой, всегда можно приблизить ее аналитической дугой так, чтобы эта новая аналитическая дуга также являлась дугой без контакта.

называется *функцией последования* и выражает собой закон некоторого точечного преобразования дуги l (или ее части), устанавливающий однозначное соответствие между точками этой дуги (или ее части) и их последующими (на той же дуге l).

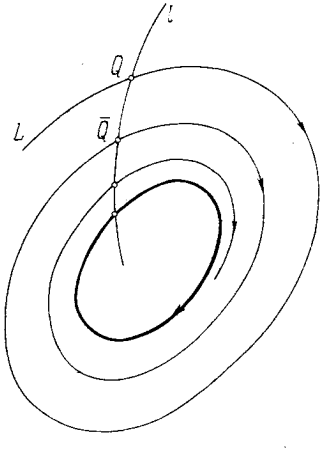


Рис. 59

Геометрически ясно, что функцию последования мы имеем тогда, когда дугу без контакта пересекают траектории, имеющие характер спиралей или замкнутые (см. рис. 59). При этом очевидно, что если некоторому значению $s = s_0$ соответствует замкнутая траектория, то $f(s_0) = s_0$, т. е. точка, соответствующая $s = s_0$, и ее последующая совпадают (а значит, совпадают и все дальнейшие последующие). Очевидно и обратное: если $f(s_0) = s_0$, то траектория, проходящая через точку, соответствующую значению s_0, замкнута. Точка, для которой $f(s_0) = s_0$, называется *неподвижной* или *инвариантной*, *точкой* точечного отображения.

Для функции последования справедливо следующее:

1. Функция последования для аналитической системы (А) при сделанном предположении относительно аналитичности дуги без контакта (функции $l(s)$ и $m(s)$ в параметрических уравнениях дуги — аналитические функции) является аналитической функцией. (Это предложение является следствием теоремы 3 гл. 1.)

2. Производная от функции последования всегда положительна (т. е. функция последования — всегда возрастающая функция). Это предложение фактически является элементарным следствием того факта, что траектории не пересекаются.

Введение функции последования позволяет для формулировки вопросов устойчивости и неустойчивости замкнутой траектории использовать вопросы устойчивости и неустойчивости неподвижной точки точечного отображения $\bar{s} = f(s)$.

Пусть рассматриваемой замкнутой траектории L_0 соответствует неподвижная точка s^* точечного отображения $\bar{s} = f(s)$. Рассмотрим последовательные точки пересечения с дугой l какой-нибудь траектории L, отличной от L_0 и проходящей через достаточно близкую к L_0 точку.

Пусть траектория L пересекает отрезок в точках, соответствующих значениям s

$$s_1, \ldots, s_n, \ldots \tag{1}$$

При этом

$$s_2 = f(s_1), \quad s_3 = f(s_2), \ldots, s_{n+1} = f(s_n).$$

Если траектория L стремится к L_0 при $t \to +\infty$, то последовательность (1) стремится к s^*, и, наоборот, если последовательность (1) стремится к s^*, то траектория L стремится к L_0. Неподвижная точка s^* точечного отображения $\bar{s} = f(s)$ называется *устойчивой*, если существует такая ее окрестность, что все последовательности вида (1) с начальными точками s_1 в этой окрестности стремятся к этой точке, и *неустойчивой*, если в любой сколь угодно малой ее окрестности найдется хотя бы одна такая точка, что соответствующая последовательность не сходится к этой точке. Устойчивому предельному циклу соответствует устойчивая неподвижная точка отображения, а неустойчивому или полуустойчивому (см. § 4) — неустойчивая точка.

§ 2. Условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки точечного отображения. I. Неподвижная точка s^* точечного отображения $\bar{s} = f(s)$ устойчива, если

$$f'(s^*) < 1,$$

и неустойчива, если

$$f'(s^*) > 1.$$

Если $f'(s) = 1$, то вопрос об устойчивости неподвижной точки определяется высшими производными.

Рассмотрим так называемую *диаграмму Ламерея*: именно, рассмотрим вспомогательную плоскость $(s, \bar{s})$, на ней график функции $\bar{s} = f(s)$ и биссектрису $\bar{s} = s$ (рис. 60). Точки пересечения кривой $\bar{s} = f(s)$ с биссектрисой $\bar{s} = s$, очевидно, соответствуют неподвижным точкам точечного отображения $\bar{s} = f(s)$.

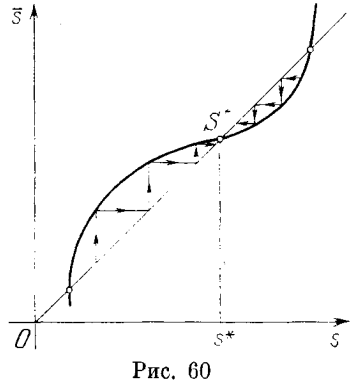


Рис. 60

Условия $f'(s^*) < 1$ и $f'(s^*) > 1$ геометрически означают тот или другой характер пересечения кривой $\bar{s} = f(s)$ с биссектрисой $\bar{s} = s$ в неподвижной точке S^*.

Если $f'(s^*) = 1$, то это означает, что кривая $\bar{s} = f(s)$ касается биссектрисы в точке S^* (рис. 61 и 62).

II. Пусть $f'(s^*) = 1$, $f''(s^*) = \ldots = f^{k-1}(s^*) = 0$, $f^k(s^*) \neq 0$. Тогда неподвижная точка изолирована, т. е. существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $|s - s^*| < \varepsilon_0$, кроме s^*, у точечного отображения $\bar{s} = f(s)$ нет больше неподвижных точек и при этом:

а) если k нечетное, то в случае $f^k(s^*) < 0$ неподвижная точка s^* устойчива, а в случае $f^k(s^*) > 0$ — неустойчива;

б) если k четное, то неподвижная точка полуустойчива, т. е. в зависимости от знака $f^k(s^*)$ при $s' < s^*$ $(s' > s^*)$, достаточно близком к s^*, точки $s'' = f(s')$, $s''' = f(s'')$, ... стремятся

к s^*, а при $s' > s^*$ ($s' < s^*$) уходят от s^* (или, иначе, к s^* стремятся последовательные «предыдущие» точки).

III. Если $f'(s^*) = 1$, $f^k(s^*) = 0$ при всех k, то все точки $s \neq s^*$ также являются неподвижными.

В этом случае

$$f(s) \equiv s$$

и точечным отображением является

$$\bar{s} = s.$$

Отметим, что для построения на диаграмме Ламерея последовательных последующих данной точки: $s', s'' = f(s'), s''' = f(s''), \ldots$

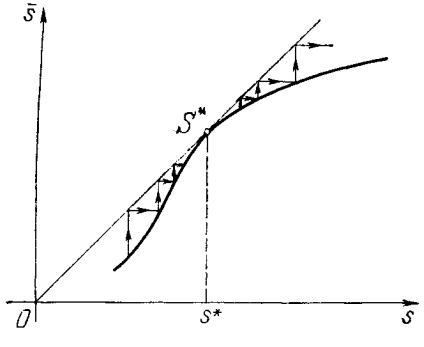


Рис. 61

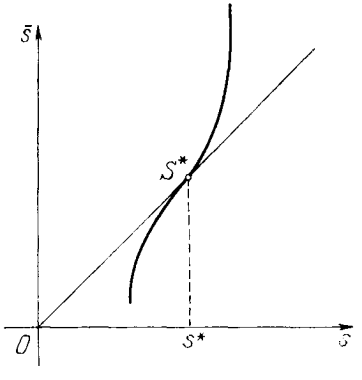


Рис. 62

нужно построить так называемую *лесенку Ламерея*, в построении которой нетрудно разобраться (см. рис. 60 и 61).

В дальнейшем мы будем также часто пользоваться вспомогательной функцией

$$\psi(s) = f(s) - s.$$

Очевидно, если

$$\psi(s_0) = 0,$$

то s_0 соответствует неподвижной точке и при этом устойчивой, если $\psi(s_0) < 0$, и неустойчивой, если $\psi'(s_0) > 0$.

§ 3. Функция соответствия. Пусть все траектории, при $t = t_0$ пересекающие некоторую дугу без контакта l_1, пересекают другую дугу без контакта l_2, не имеющую общих точек с l_1 (рис. 63). Пусть u_1 — параметр, введенный на дуге l_1, и u_2 — параметр, введенный на дуге l_2. Так же, как и в § 2, будем предполагать, что в параметрических уравнениях дуги l_1: $x = f_1(u_1)$, $y = g_1(u_1)$ и дуги l_2: $x = f_2(u_2)$, $y = g_2(u_2)$ функции $f_i(u_i)$ и $g_i(u_i)$ ($i = 1, 2$) — аналитические функции u_i. Значение параметра u_2, при котором траектория, пересекающая дугу l_1 в точке, соответству-

ющей некоторому значению u_1, пересекает дугу l_2, очевидно, является функцией этого значения u_1. Эта функция называется *функцией соответствия* (между дугами l_1 и l_2): $u_2 = h(u_1)$.

Пусть параметры u_1 и u_2 на дугах l_1 и l_2 выбраны так, что если считать положительное направление на дугах l_1 и l_2 в сторону возрастания u_i, то углы между траекторией L,

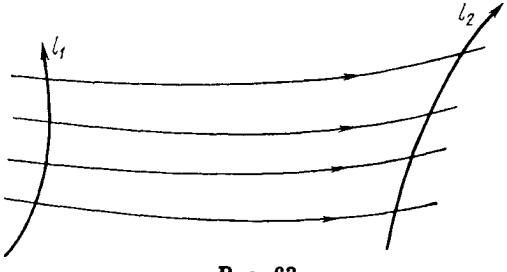


Рис. 63

пересекающей обе дуги l_1 и l_2, и этими дугами имеют один и тот же знак. Тогда:

I. Функция соответствия для аналитической системы (A) при сделанном предположении относительно параметрических уравнений дуг l_1 и l_2 является аналитической функцией.

II. Производная от функции соответствия $h'(u_1)$ всегда положительна.

В некоторых случаях (например, при рассмотрении функции последования в окрестности петли сепаратрисы) функцию последования удобнее строить как составленную из двух (или более) функций соответствия. Функция последования

$$\bar{u}_1 = f(u_1)$$

может быть составлена из двух (или нескольких) функций соответствия $\bar{u}_1 = \bar{h}(u_2)$, $u_2 = h(u_1)$ между двумя (и более) дугами без контакта.

Составление функции последования из функций соответствия широко используется при рассмотрении кусочно-склеенных систем (см. ч. IV).

§ 4. Изучение окрестности замкнутой траектории. Простые и сложные предельные циклы. В настоящем параграфе излагается некоторое чисто теоретическое исследование окрестности замкнутой траектории. Это исследование хотя и носит чисто теоретический характер [2]), но тем не менее дает весьма полезные све-

[2]) Как уже указывалось, отыскание замкнутых траекторий или даже хотя бы доказательство их существования является наряду с установлением расположения сепаратрис задачей, для решения которой не существует регулярных методов.

дения о том, каков возможный характер замкнутых траекторий. Эти сведения имеют также первостепенный интерес для понимания поведения предельных циклов при изменении параметра.

Пусть L_0 — замкнутая траектория,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

— какое-нибудь соответствующее ей движение, являющееся периодическим с периодом τ. Если l — дуга без контакта, проведенная через какую-нибудь точку Q траектории L_0, то на части этой дуги, достаточно близкой к точке Q, будет определена функция последования (см. § 1 настоящей главы). Пусть s — параметр на дуге l, s_0 — значение этого параметра, соответствующее замкнутой траектории L_0, и $\bar{s} = f(s)$ — функция последования. Введем функцию

$$\psi(s) = f(s) - s.$$

Очевидно,

$$\psi(s_0) = 0.$$

Разложим $\psi(s)$ в ряд по степеням $s - s_0$:

$$\psi(s) = \alpha_1(s - s_0) + \alpha_2(s - s_0)^2 + \ldots,$$
$$\alpha_1 = f'(s_0) - 1, \quad \alpha_i = f^i(s_0)/i!.$$

Возможны следующие случаи[3]).

1. $f'(s_0) \neq 1$.

Корень s_0 функции $\psi(s)$ очевидно изолированный, замкнутая траектория является простым предельным циклом — устойчивым, когда

$$f'(s_0) < 1, \text{ т. е. } \psi'(s_0) < 0,$$

и неустойчивым, когда

$$f'(s_0) > 1, \text{ т. е. } \psi'(s_0) > 0.$$

2. $f'(s_0) = 1$, т. е. $\psi'(s_0) = 0$,

но хотя бы одна из производных функции $\psi(s)$ не обращается в нуль при $s = s_0$, т. е. существует такое k, что

$$\psi'(s_0) = \ldots = \psi^{k-1}(s_0) = 0, \quad k!\alpha_k = \psi^k(s_0) \neq 0.$$

Мы будем иметь, следовательно,

$$\psi(s) = (s - s_0)^k[\alpha_k + \alpha_{k+1}(s - s_0) + \ldots].$$

Корень s_0 функции $\psi(s_0)$, так же как и в случае 1, изолированный. Замкнутая траектория L_0 называется *сложным k-кратным предельным циклом.*

---

[3]) Проведенное здесь рассмотрение во многом аналогично проведенному в § 5 гл. 3.

а) k нечетное. Предположим, что $\psi^{(k)}(s_0)=\alpha_k<0$. Тогда при $s<s_0$

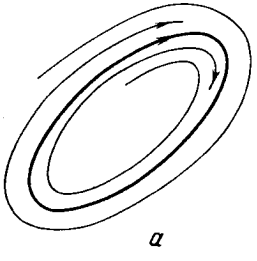
$$\psi(s)>0, \text{ т. е. } f(s)>s,$$

а при $s>s_0$

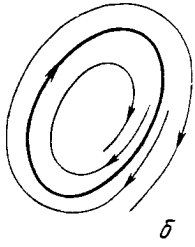
$$\psi(s)<0, \text{ т. е. } f(s)<s.$$

Следовательно, всякая последующая точка на отрезке l ближе к точке Q (в которой замкнутая полутраектория L_0 пересекает отрезок l), чем предыдущая. Так как по самому построению функции последования последующая точка соответствует значению t бóльшему, чем предыдущая, то, принимая во внимание, что L_0 — единственная замкнутая траектория, пересекающая рассматриваемую часть отрезка без контакта l, нетрудно показать, что всякая отличная от L_0 траектория, пересекающая отрезок l достаточно близко к точке Q, при $t\to+\infty$ стремится к предельному циклу L_0. Предельный цикл L_0 является устойчивым (нечетно-кратным) предельным циклом (рис. 64, *а*).

Если $\psi^k(s_0)>0$, то совершенно так же можно показать, что всякая траектория, пересекающая отрезок l достаточно близко



а



б

Рис. 64

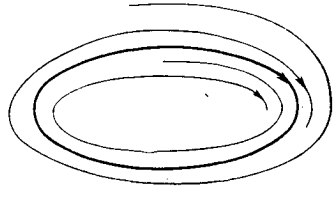


Рис. 65

к точке Q, при $t\to-\infty$ стремится к предельному циклу L_0. Предельный цикл L_0 является неустойчивым (нечетно-кратным) предельным циклом (рис. 64, *б*).

б) k четное. Тогда при $s\neq s_0$ в зависимости от знака $\alpha_k=\psi^k(s_0)$ либо $\psi(s)>0$, т. е. $f(s)>s$ (если $\psi^{(k)}(s_0)>0$), либо $\psi(s)<0$, т. е. $f(s)<s$ (если $\psi^{(k)}(s_0)<0$). Нетрудно показать, что в случае, когда $\psi^{(k)}(s_0)>0$, все траектории, проходящие через точки отрезка l, соответствующие значениям $s<s_0$, стремятся к L_0 при $t\to+\infty$, а все траектории, проходящие через точки отрезка l, соответствующие значениям $s>s_0$, стремятся к L_0 при $t\to-\infty$, и наоборот, когда $\psi^{(k)}(s_0)<0$ (рис. 65).

Очевидно, в рассматриваемом случае (четное k) предельный цикл L_0 неустойчив. Однако часто предельный цикл этого типа

называют *полуустойчивым* (*четно-кратным*), сохраняя термин «неустойчивый» лишь для цикла, к которому все достаточно близкие траектории стремятся при $t \to -\infty$.

3. Производные всех порядков от функции $\psi(s)$ при $s = s_0$ равны нулю, т. е. при всех i $\psi^{(i)}(s_0) = 0$. Тогда $\psi(s) \equiv 0$, т. е. функция последования имеет вид

$$\bar{s} \equiv s.$$

В этом случае все траектории, проходящие через достаточно близкие к L_0 точки, замкнуты (этот случай аналогичен случаю центра).

На рис. 61 и 62 даны диаграммы Ламерея для случая нечетно-кратного предельного цикла (см. рис. 62) и четно-кратного предельного цикла (см. рис. 61).

Рассмотрение функции последования, в частности условий кратности замкнутой траектории, было проведено при определенном выборе дуги без контакта. Однако можно показать, что эти условия не зависят от выбора дуги без контакта и от выбора параметра на этой дуге (при условии, конечно, что параметрические уравнения рассматриваемых дуг являются аналитическими функциями).

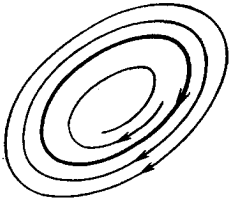


Рис. 66

Далее, из проведенного исследования функции последования, в котором существенно использовался тот факт, что функция последования является аналитической функцией, очевидно вытекает, что у системы с аналитическими правыми частями:

1) не может существовать бесчисленное множество предельных циклов, накапливающихся к замкнутой траектории;

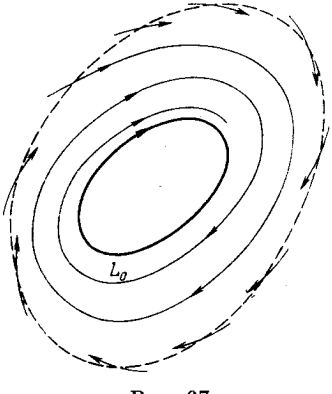


Рис. 67

2) не может существовать замкнутая траектория такая, что вне (внутри) нее все траектории не замкнуты, а внутри (вне) нее — замкнуты, т. е. не может осуществляться, например, случай, представленный на рис. 66.

Указанные свойства могут быть сформулированы в виде следующего предложения.

Теорема 1. *Если у динамической системы* (А), *правые части которой — аналитические функции, существует замкнутая траектория, то она либо является изолированной, либо все траектории в ее окрестности замкнуты.*

Сделаем еще одно замечание, которое бывает весьма полезным в ряде случаев.

Пусть L_0 — предельный цикл — устойчивый, неустойчивый (простой или сложный) или полуустойчивый. В любой достаточно малой его окрестности, именно в любой такой окрестности, которая не содержит ни состояния равновесия, ни отличных от него предельных циклов, всегда могут быть построены циклы без контакта, как лежащие вне L_0 (содержащие L_0 внутри), так и лежащие внутри L_0 (рис. 67).

§ 5. Аналитические выражения для коэффициентов функции последования. Характеристический показатель замкнутой траектории. Аналитические выражения для коэффициентов α_i могут быть найдены методом, полностью аналогичным тому, которым находятся ляпуновские величины (см. гл. 3).

Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

— движение, периодическое с периодом τ, соответствующее рассматриваемой замкнутой траектории L_0. В окрестности L_0 вводится криволинейная система координат с помощью формул

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) + v\dot{\psi}(u), \\ y &= \psi(u) - v\dot{\varphi}(u). \end{aligned} \tag{2}$$

Прямые $u = \text{const}$ являются нормалями к замкнутой траектории L_0 и, следовательно, не имеют контактов с траекториями, достаточно близкими к L_0, а кривые $v = \text{const}$ — замкнутыми кривыми (кривая $v = 0$ совпадает с L_0) (рис. 68). Якобиан преобразования (2) при $v = 0$ отличен от нуля [4]).

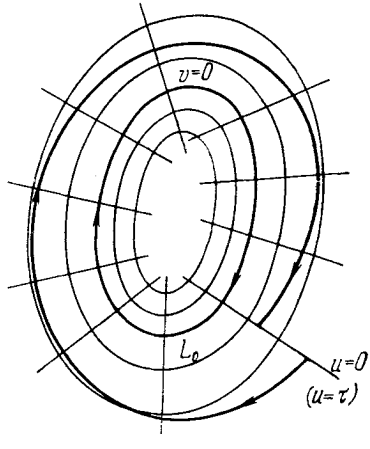


Рис. 68

Функция последования на отрезке нормали $u = 0$ может быть найдена совершенно аналогично тому, как это делалось в окрестности фокуса. После перехода в системе (А) к координатам u и v и исключения t мы получаем соответствующее системе (А) дифференциальное уравнение

$$dv/du = \Phi(u, v) = \\ = A_1(u)v + A_2(u)v^2 + \ldots, \tag{3}$$

[4]) Криволинейные координаты u и v во многом аналогичны полярным координатам. Координата u циклическая.

которое дает уравнение траектории в координатах u, v (уравнение замкнутой траектории L_0 есть $v=0$). Выражение коэффициентов $A_i(u)$ через функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ может быть найдено. В частности,

$$A_1(u) = P'_x(\varphi(u), \psi(u)) + Q'_y(\varphi(u), \psi(u)) - \\ - \frac{d}{du}\left[\ln\left(\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)\right)\right]. \quad (4)$$

Решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям $(0, v_0)$

$$v = f(u;\ 0,\ v_0),$$

является аналитической функцией v_0 и может быть разложено в ряд по степеням v_0:

$$v = f(u; 0, v_0) = a_1(u)\, v_0 + a_2(u)\, v_0^2 + \ldots$$

Подставляя (ср. § 5 гл. 3) это выражение в уравнение (3), получаем тождественное равенство

$$\dot{a}_1(u)\, v_0 + \dot{a}_2(u)\, v_0^2 + \ldots \equiv A_1(u)\left(a_1(u)\, v_0 + a_2(u)\, v_0^2 + \ldots\right) + \\ + A_2(u)\left(a_1(u)\, v_0 + a_2(u)\, v_0^2 + \ldots\right)^2 + \ldots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях v_0, получаем рекуррентные уравнения для определения $a_i(u)$:

$$\begin{aligned} &\dot{a}_1(u) = A_1(u)\, a_1(u), \\ &\dot{a}_2(u) = A_1(u)\, a_2(u) + A_2(u)\,(a_1(u))^2, \\ &\dot{a}_3(u) = A_1(u)\, a_3(u) + 2A_2(u)\, a_1(u)\, a_2(u) + A_3(u)\,(a_1(u))^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (5)$$

Начальные условия для определения $a_i(u)$ из этих уравнений мы получаем из очевидного условия $f(0;\ 0,\ v_0) \equiv v_0$, откуда

$$a_1(0) = 1, \quad a_i(0) = 0, \quad i > 1.$$

Функцией последования на отрезке $u=0$, очевидно, является функция

$$v = f(\tau;\ 0,\ v_0),$$

где τ — период на замкнутой траектории. Возвращаясь к обозначениям § 4, мы можем написать

$$\bar{s} = f(\tau;\ 0,\ s) = f(s),$$

причем $s=0$ соответствует замкнутой траектории L_0.

Далее,

$$\alpha_i = a_i(\tau) = f^i(0)/i!.$$

Для первого коэффициента α_1 мы получаем из уравнений (5)

$$\alpha_1 = a_1(\tau) = \exp\left\{\int_0^\tau A_1(u)\,du\right\},$$

или, принимая во внимание выражение (4) для $A_1(u)$,

$$\alpha_1 = \exp\left\{\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi(u), \psi(u)) + Q'_y(\varphi(u), \psi(u))\right] du\right\}.$$

Выражение

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi(u), \psi(u)) + Q'_y(\varphi(u), \psi(u))\right] du$$

называется *характеристическим показателем замкнутой траектории* L_0.

Очевидно, $\alpha_1 = e^{h\tau}$, и, следовательно, предельный цикл устойчивый, если $h < 0$, и неустойчивый, если $h > 0$. При этом $\alpha_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $h = 0$, и только в этом случае ($\alpha_1 = 1$) предельный цикл является сложным.

Величина $\alpha_1 = e^{h\tau}$ называется *мультипликатором предельного цикла.*

ГЛАВА 6

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 1. Некоторые признаки существования и отсутствия предельных циклов. В настоящей главе мы приводим некоторые классические приемы качественного исследования системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \tag{A}$$

Если удается исследовать состояния равновесия (что далеко не всегда является элементарной задачей, как мы увидим на ряде примеров), то далее для полного качественного исследования необходимо установить наличие или отсутствие предельных циклов и расположение сепаратрис. Как уже отмечалось, эта задача принципиально более сложная, чем установление характера состояний равновесия.

Мы приведем в настоящей главе приемы, позволяющие в некоторых частных случаях давать ответ на вопрос о существовании или отсутствии замкнутых траекторий (предельных циклов).

Напомним, что *гладким циклом однократного пересечения* называется простая гладкая замкнутая кривая C, обладающая следующими свойствами (см. § 2 гл. 2):

1) на кривой C не лежит ни одного состояния равновесия;

2) во всех точках кривой C, кроме, быть может, конечного числа, траектории не имеют с ней касания и либо все входят внутрь области, ограниченной кривой C, либо все выходят из этой области.

Приведем простейшие признаки существования предельных циклов, основанные на рассмотрении циклов однократного пересечения.

Теорема 1. *Пусть C — цикл однократного пересечения, а G — ограниченная им область, принадлежащая области определения системы* (A). *Если выполняются следующие условия*: 1) *все траектории, пересекающие C, при возрастании t входят в G*; 2) *в области G имеется единственное состояние равновесия O, являющееся неустойчивым узлом или фокусом*; 3) *в области G имеется лишь конечное число замкнутых траекторий системы, тогда число расположенных в G устойчивых предельных циклов системы на единицу больше числа неустойчивых.* (*Следовательно, существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл.*)

Приведем еще аналогичную теорему для кольцевой области.

Теорема 2. *Пусть G — двусвязная область, ограниченная двумя циклами без контакта (циклами однократного пересечения) C_1 и C_2, не содержащая состояний равновесия и имеющая конечное число замкнутых траекторий. Если все траектории, пересекающие C_1 и C_2, при возрастании t входят в G (выходят из G), то число устойчивых предельных циклов, расположенных в G, на единицу больше (меньше) числа неустойчивых предельных циклов.*

§ 2. Изучение поведения интегральных кривых в бесконечности. Сфера Пуанкаре. Во многих случаях чрезвычайно полезными для исследования вопроса о наличии замкнутых траекторий являются сведения о поведении траекторий при удалении в бесконечность, т. е., так сказать, исследование «бесконечно удаленных» частей плоскости. В случае, когда правые части динамической системы — многочлены, для этого используется отображение фазовой плоскости на так называемую «сферу Пуанкаре», т. е. на сферу радиуса единица, касающуюся плоскости (x, y) в начале координат. Каждой точке (x, y) плоскости ставятся в соответствие две точки сферы, лежащие на прямой,

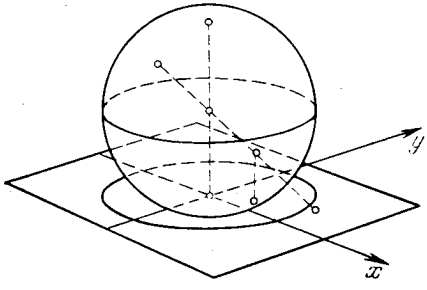


Рис. 69

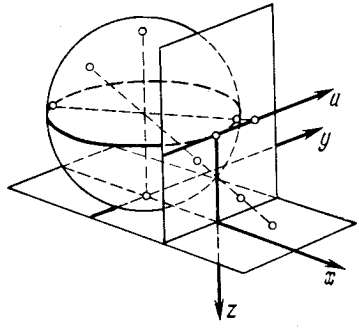


Рис. 70

проходящей через центр сферы и эту точку плоскости. На экватор (большой круг, параллельный плоскости (x, y)) отображаются бесконечно удаленные точки плоскости (рис. 69).

Интегральные кривые плоскости перейдут при этом в соответственные кривые сферы, причем седла, узлы и фокусы сохраняют тот же вид.

Однако на сфере появятся новые особые точки, лежащие на экваторе. Часто это будут особые точки высших порядков. Ортогональная проекция нижнего полушария на плоскость, касательную к сфере, дает удобное окончательное отображение всей плоскости (x, y) на внутренность круга.

Пусть у системы (А) правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены по x и y.

Преобразование $x = 1/z$, $y = u/z$ позволяет изучить особые точки, лежащие на экваторе сферы Пуанкаре, за исключением тех точек, которые соответствуют «концам» оси y. Можно построить плоскость, на которой z и u будут служить прямоугольными декартовыми координатами: это будет касательная плоскость к сфере, перпендикулярная плоскости (x, y). Ось u будет прямой, лежащей в плоскости экватора (параллельно оси y). Можно провести две такие плоскости. Направления осей z и u будут зависеть от расположения касательной плоскости (рис. 70).

Для исследования концов оси y нужно положить $x = v/z$, $y = 1/z$. В этом случае плоскость (z, τ) будет располагаться параллельно оси x.

Преобразование

$$x = 1/z, \quad y = u/z$$

приводит систему (А) к системе

$$\frac{dz}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) z^2, \quad \frac{du}{dt} = Q\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) z - P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) uz, \tag{1}$$

или к уравнению

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\dfrac{Q(1/z, u/z)}{P(1/z, u/z)} - u}{z}.$$

Если привести правые части в системе (1) к общему знаменателю, то мы, очевидно, получим систему (n — наибольшая степень многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{P^*(z, u)}{z^n}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{Q^*(z, u)}{z^n}. \tag{2}$$

Вводя новый параметр

$$dt/z^n = d\tau,$$

мы можем представить систему (2) в виде

$$dz/d\tau = P^*(z, u), \quad du/d\tau = Q^*(z, u)$$

($P^*(z, u)$ и $Q^*(z, u)$, очевидно,— многочлены) или в виде одного уравнения

$$\frac{du}{dz} = \frac{Q^*(z, u)}{P^*(z, u)}.$$

Особые точки (на экваторе) находятся из уравнений

$$P^*(0, u) = 0, \quad Q^*(0, u) = 0, \tag{3}$$

или (что то же) из уравнений

$$z = 0, \quad \frac{Q(1/z, u/z)}{P(1/z, u/z)} - u = 0 \tag{4}$$

(второе из этих уравнений доопределяется при $z=0$). Если второе из уравнений не удовлетворяется тождественно, то экватор сферы Пуанкаре есть интегральная кривая. Если $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — многочлены одинаковой степени, то координаты особых точек на экваторе находятся как корни уравнения

$$Q_n(1, u) - uP_n(1, u) = 0,$$

где Q_n и P_n — члены наивысшей степени в Q и P. Каждый корень соответствует двум особым точкам на экваторе, расположенным диаметрально противоположно.

Всякая простая особая точка на экваторе есть либо узел, либо седло.

Критерий Пуанкаре. *Если Q и P одинаковой степени, то простая особая точка $(z=0,\ u=u_0)$ будет седлом, если при изменении u от $u_0-\varepsilon$ до $u_0+\varepsilon$ выражение*

$$\frac{Q_n(1, u)}{P_n(1, u)} - u$$

переходит от отрицательных значений к положительным, и узлом, если указанное выражение переходит от положительных значений к отрицательным.

§ 3. Примеры исследования в бесконечности [93].

Пример 1. Докажем наличие периодических решений у уравнения Рэлея

$$\ddot{x} - h(1-\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0, \quad h > 0.$$

Заменой $\dot{x}=y$ оно приводится к системе (на фазовой плоскости (x, y))

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = h(1-y^2)y - x, \quad h > 0. \tag{5}$$

У системы (5) начало координат $O(0, 0)$ — состояние равновесия, которое, как нетрудно видеть, является:

1) неустойчивым узлом при $h \geqslant 2$;

2) неустойчивым фокусом при $0 < h < 2$.

Проведем исследование бесконечно удаленных особых точек, т. е., спроектировав фазовую плоскость на сферу Пуанкаре, рассмотрим особые точки на сфере.

Полагая

$$x = 1/z, \quad y = u/z,$$

получаем

$$\dot{z} = -uz, \quad \dot{u} = \frac{-z^2(1-hu+u^2) - hu^3}{z^2},$$

что можно записать в виде одного уравнения:

$$\frac{dz}{du} = \frac{uz^3}{z^2(1-hu+u^2) + hu^3}. \tag{6}$$

Единственной особой точкой этого уравнения является точка $u=0$, $z=0$. Она является сложной. Исследование ее можно упростить, если положить $z^2=v$. Мы получаем уравнение

$$\frac{dv}{du}=\frac{2uv^2}{v(1-hu+u^2)+hu^3}. \tag{7}$$

Это точка рассмотренного в § 2 гл. 4 вида. Очевидно, мы имеем [1])

$$v=\varphi(u)=-hu^3+\ldots,\quad \psi(u)=2h^2u^7+\ldots$$

В силу теоремы 4 § 2 гл. 4 особая точка (0, 0) уравнения (7) — седло.

Для того чтобы установить характер особой точки (0, 0) уравнения (6), необходимо провести небольшое дополнительное рассмотрение. Запишем, вводя параметр τ, уравнение (7) в виде системы

$$dv/d\tau=-2uv^2,\quad du/d\tau=-v(1-hu+u^2)-hu^3. \tag{7'}$$

Непосредственно очевидно, что $v=0$ является интегральной прямой системы (7'). Так как (0, 0) имеет характер седла, то прямая $v=0$ должна состоять из точки (0, 0) и двух полусепаратрис. Установим, стремятся ли обе эти полусепаратрисы к точке (0, 0) при $\tau\to+\infty$ ($\tau\to-\infty$) или одна стремится к (0, 0) при $\tau\to+\infty$, а другая при $\tau\to-\infty$. Это позволит нам установить, лежат ли две другие сепаратрисы по одну сторону от оси $v=0$ или одна — по одну, а другая — по другую сторону этой оси, что, как нетрудно видеть, существенно для решения вопроса о характере состояния равновесия на плоскости (z, u).

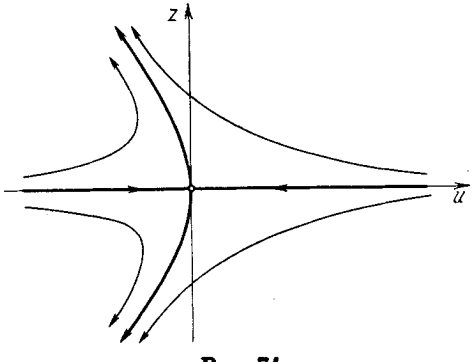


Рис. 71

При $v=0$ мы имеем

$$du/d\tau=-hu^3,$$

т. е. при $u>0$ $du/d\tau<0$; при $u<0$ $du/d\tau>0$, т. е. ось $v=0$ составлена из двух ω-полусепаратрис. Но тогда две другие полусепаратрисы, очевидно, непременно должны лежать по разные стороны оси $v=0$ [2]). Эти полусепаратрисы стремятся к состоянию равновесия (0, 0), касаясь оси $v=0$, так как в рассматриваемом случае это — един-

[1]) Здесь u играет, очевидно, роль x, а v — роль y. Для функций, введенных в § 2 гл. 4, мы сохраняем те же обозначения.

[2]) Иначе мы придем к противоречию с возможными на траекториях направлениями.

ственное направление, в котором траектории могут стремиться к состоянию равновесия (0, 0).

При переходе к плоскости (z, u) имеет, очевидно, смысл рассмотрение только значений $v>0$; так как $z=\pm\sqrt{v}$, то особая точка (0, 0) системы (6) будет иметь вид, представленный на рис. 71. Это, очевидно, также топологическое седло, причем $z=0$ состоит из двух сепаратрис, а в области $z>0$ (и соответственно $z<0$) лежит по одной сепаратрисе, стремящейся, как нетрудно убедиться, к точке (0, 0) при $\tau\to-\infty$ (рис. 71). Чтобы исследовать «концы» оси y, делаем замену

$$x=w/z,\quad y=1/z.$$

Тогда

$$\dot{z}=\frac{-hz^2+h+wz^2}{z},\qquad \dot{w}=\frac{z^2+w^2z^2+hw-hwz^2}{z^2}, \tag{8}$$

или

$$\frac{dz}{dw}=\frac{hz+z^3(w-h)}{hw+z^2(1-hw+w^2)}. \tag{9}$$

Отсюда видно, что «концы» оси y, т. е. состояние равновесия $z=0$, $w=0$ системы (8),— неустойчивый узел, так как $h>0$. Окончательный вид полусферы изображен на рис. 72 (где B', B^- — неустойчивые узлы, а A, A' — седла)[3]). Из расположения траекторий (все траектории выходят из бесконечности и из состояния равновесия $O(0, 0)$) в силу теоремы 1 вытекает существование хотя бы одного предельного цикла (на рис. 72 нарисован только один цикл).

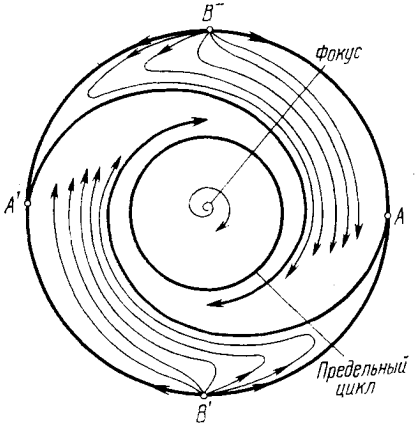


Рис. 72

Пример 2.

$$\ddot{x}-h(1-x^2)\dot{x}+x=0$$

(уравнение Ван-дер-Поля).

На фазовой плоскости $(x, y=\dot{x})$ мы получаем систему

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=h(1-x^2)y-x.$$

Единственное состояние равновесия — в начале координат. Как нетрудно видеть, мы имеем (при $h>0$):

1) неустойчивый фокус при $0<h<2$;

[3]) На рис. 72, 75 предельный цикл изображен схематично в виде окружности.

2) неустойчивый узел при $h \geqslant 2$.

Для исследования экватора сферы Пуанкаре полагаем

$$x = 1/z, \quad y = u/z.$$

Получаем систему

$$\dot{z} = -uz, \quad \dot{u} = \frac{-z^2(1 - hu + u^2) - hu}{z^2}. \tag{10}$$

Полагая $z^2 = v$, получаем

$$\frac{dv}{du} = \frac{2uv^2}{v(1 - hu + u^2) + hu}.$$

Особая точка ($z = 0$, $u = 0$) — типа, исследованного в § 2 гл. 4. Имеем

$$v = \varphi(u) = -hu, \quad \psi(u) = 2h^2u^3 + \ldots$$

Проводя дополнительные рассмотрения, полностью аналогичные проведенному в предыдущем примере, можно показать, что особая точка имеет характер седла. Возвращаясь затем к системе

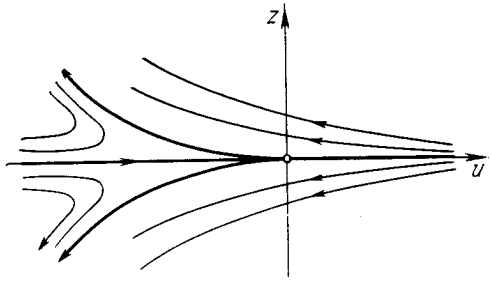


Рис. 73

(10) и устанавливая направления на траекториях, мы получаем картину, представленную на рис. 73.

Для исследования «концов оси y» полагаем

$$x = w/z, \quad y = 1/z,$$

получаем

$$\dot{z} = \frac{\dot{w}z^2 - h(z^2 - w^2)}{z}, \quad \dot{w} = \frac{z^2 + w^2z^2 - hw(z^2 - w^2)}{z^2};$$

полагая $z^2 = v$, получаем

$$\frac{dv}{dw} = \frac{2v^2(w - h) + 2hw^2v}{v(1 - hw + w^2) + hw^3}.$$

Это — также особая точка типа, исследованного в § 2 гл. 4.

Имеем

$$\psi(w) = -2h^2w^5 + \ldots, \quad \varphi(w) = -hw^3 + \ldots,$$
$$P'_w(w, \varphi(w)) + Q'_v(w, \varphi(w)) = 5hw^2 + \ldots$$

Это подходит под случай в) в теореме 4 гл. 4 — состояние равновесия имеет характер узла (рис. 74). Вид полусферы изображен

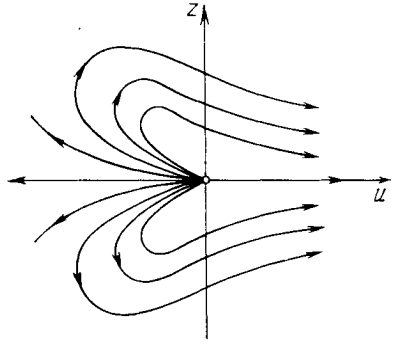


Рис. 74

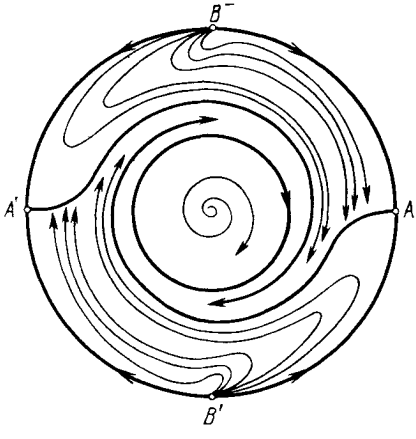


Рис. 75

на рис. 75. Очевидно, в силу расположения траекторий существует хотя бы один предельный цикл (на рисунке изображен только один).

§ 4. Критерии Бендиксона и Дюлака отсутствия предельных циклов.

1. Критерий Бендиксона. *Если в некоторой односвязной области выражение* $P'_x + Q'_y$ *не меняет знака и не равно нулю тождественно, то в этой области не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий.*

2. Критерий Дюлака. *Пусть* $B(x, y)$ *— некоторая однозначная и дифференцируемая функция, и пусть*

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x}[B(x, y)P(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y}[B(x, y) + Q(x, y)]$$

не меняет знака и не равно нулю тождественно в области G, *ограниченной произвольными дугами (не траекториями и не дугами* $B(x, y) = 0$). *Тогда:*

1) *Если* G *— односвязная область, то в области* G *не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий (нет предельных циклов).*

2) *Если G — двусвязная кольцевая область, то в области G не может быть более одного замкнутого контура, составленного из траекторий (более одного предельного цикла).*

Задача будет решена, если удастся подобрать $B(x, y)$ таким образом, чтобы кривая $D=0$ не имела действительных ветвей в тех областях плоскости (x, y), в которых можно ожидать наличия предельных циклов. Для разыскания функции $B(x, y)$ не существует, однако, регулярных приемов.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\alpha y+x^2}{y}=\frac{Q}{P},$$

$P'_x+Q'_y=\alpha$. Если $\alpha\neq 0$, то не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий.

Пример 2 [31].

$$dx/dt=y=P, \quad dy/dt=ax+by+\alpha x^2+\beta y^2=Q.$$

В качестве множителя $B(x, y)$ возьмем функцию $B(x, y)=e^{-2\beta x}$. Тогда

$$D=\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=be^{-2\beta x}$$

не меняет знака в плоскости (x, y) и не обращается тождественно в нуль, если $b\neq 0$. Поэтому при любых значениях параметров (но $b\neq 0$) не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий. Если $b=0$, то $B(x, y)=e^{-2\beta x}$ есть интегрирующий множитель. На плоскости (x, y) существует область, целиком заполненная замкнутыми фазовыми траекториями, охватывающими состояние равновесия типа центр.

Пример 3 [37].

$$dx/dt=x(a_{00}+a_{10}x+a_{01}y)=P(x, y),$$
$$dy/dt=y(b_{00}+b_{10}x+b_{01}y)=Q(x, y).$$

Возьмем в качестве множителя B функцию

$$B(x, y)=x^{h-1}y^{h-1},$$

где

$$k=\frac{b_{01}(b_{10}-a_{10})}{\Delta}, \quad h=\frac{a_{10}(a_{01}+b_{01})}{\Delta} \quad \left(\Delta=\begin{vmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01}\end{vmatrix}\neq 0\right).$$

Тогда

$$D\equiv\frac{b_{00}a_{10}(a_{01}-b_{01})+a_{00}b_{01}(b_{10}-a_{10})}{\Delta}B(x, y),$$

и, следовательно, D может обратиться в нуль только вдоль интегральных кривых $x=0$ и $y=0$. Поэтому при

$$\sigma\equiv b_{00}a_{10}(a_{01}-b_{01})+a_{00}b_{01}(b_{01}-a_{10})\neq 0$$

в конечной части плоскости не существует замкнутых контуров,

составленных из траекторий. Заметим, что если $\sigma = 0$, то имеется целая область плоскости (x, y), целиком заполненная замкнутыми траекториями. Система допускает в этом случае интеграл

$$x^h y^h (a_{10} b_{00} x + b_{01} a_{00} y + a_{00} b_{00}) = \text{const}.$$

Пример 4.

$$dx/dt = x(y - \alpha), \quad dy/dt = x + \beta y + \gamma y^2.$$

В качестве множителя B берем функцию $B(x, y) = x^{-2\gamma-1}$. Тогда $D \equiv (2\alpha\gamma + \beta) x^{-2\gamma-1}$. Если $2\alpha\gamma + \beta \neq 0$, то не может быть предельных циклов, расположенных в полуплоскостях $x > 0$ или $x < 0$ (ось $x = 0$ является траекторией). В случае $2\alpha\gamma + \beta = 0$ существует область, заполненная замкнутыми траекториями, и $B(x, y) = x^{-2\gamma-1}$ служит интегрирующим множителем.

1. Некоторые видоизменения критериев Бендиксона и Дюлака. Нетрудно видеть, что критерий Бендиксона и критерий Дюлака являются очень частными критериями: их выполнение возможно лишь для динамических систем с очень частными свойствами. Действительно, при неравенстве нулю выражения $P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)$ в некоторой области G, в этой области не может быть не только замкнутых траекторий, но вообще никаких замкнутых контуров из траекторий (не только из сепаратрис), не может также быть двух узлов, из которых один устойчивый, а другой неустойчивый.

В самом деле, в устойчивом узле $O(x_1, y_1)$ мы должны иметь

$$P'_x(x_1, y_1) + Q'_y(x_1, y_1) < 0,$$

а в неустойчивом узле $O(x_2, y_2)$ соответственно

$$P'_x(x_2, y_2) + Q'_y(x_2, y_2) > 0.$$

А тогда на всякой кривой, соединяющей точки O_1 и O_2, очевидно, должна лежать по крайней мере одна точка, в которой $P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)$ обращается в нуль.

Следующее небольшое видоизменение критериев Бендиксона и Дюлака может оказаться полезным при рассмотрении конкретных систем.

Пусть для системы (A) *кривая*

$$P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) = 0$$

является в некоторой области G незамкнутой кривой без особых точек[4]) *(т. е. линией), в обе стороны выходящей из G или ухо-*

[4]) Здесь, очевидно, речь идет об особых точках к р и в о й, а не динамической системы. В рассматриваемом случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции, у этой кривой не может быть и точек прекращения (у аналитических кривых таких точек быть не может).

дящей в бесконечность, если G — неограниченная область, не имеющей контактов с траекториями системы (А). *Тогда у системы* (А) *в области G не может быть замкнутых траекторий.*

Действительно, нетрудно видеть (проводя рассуждение, аналогичное проведенному выше), что если бы у системы (А) существовала лежащая в G замкнутая траектория, то она непременно должна была бы пересекать линию $P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) = 0$ и при этом, очевидно, не менее чем в двух точках и, во всяком случае, по крайней мере в двух точках в противоположных направлениях, что, очевидно, невозможно, так как по предположению линия $P'_x + Q'_y = 0$ является линией без контакта.

Совершенно аналогично можно сформулировать следующее видоизменение критерия Дюлака.

Пусть $B(x, y)$ — некоторая однозначная аналитическая в области G функция, и пусть линия

$$D(x, y) = \frac{\partial B(x, y) P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y) Q(x, y)}{\partial y} = 0$$

является в области G незамкнутой линией без особых точек, не имеющей контактов с траекториями системы (А). *Тогда у системы* (А) *не может быть замкнутых траекторий, целиком лежащих в области G.*

2. Индексы Пуанкаре. Распределение особых точек [77, 117]. Пусть S — простая замкнутая кривая на фазовой плоскости, не проходящая через состояние равновесия, и M — какая-нибудь

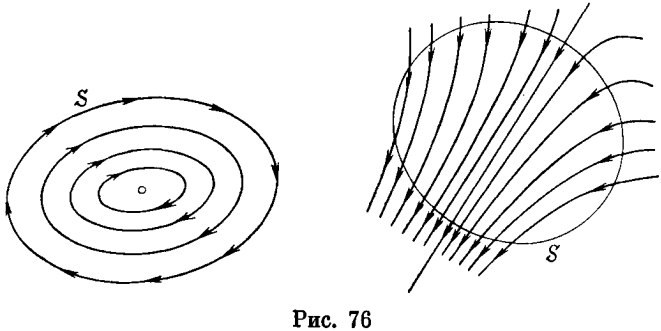


Рис. 76

точка на ней. Если точка M обходит один раз кривую S в положительном направлении, то вектор, совпадающий с направлением касательной к траектории, проходящей через точку M, поворачивается на угол $2\pi j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Целое число j называется *индексом* замкнутой кривой S по отношению к векторно-

му полю системы. На рис. 76, 77 представлены некоторые простейшие случаи, на которых представлена кривая S, и можно проследить, как поворачивается соответствующий вектор. Для j мы имеем выражение

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2 + Q^2}.$$

3. Условия сосуществования замкнутых траекторий и особых точек.

1. Внутри замкнутой траектории находится по крайней мере одна особая точка.

2. Сумма индексов особых точек, расположенных внутри замкнутой траектории, равна $+1$.

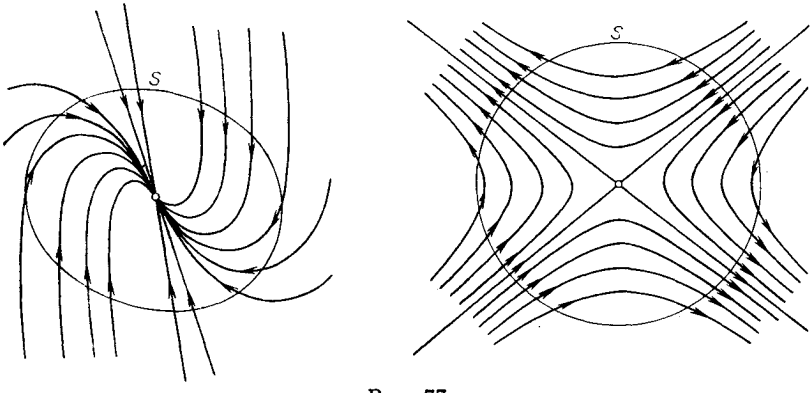


Рис. 77

3. Если внутри замкнутой траектории все точки простые, то число их нечетное, причем число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.

4. Две общие теоремы Пуанкаре.

1. *Если N, N_f и C — соответственно числа узлов, фокусов и седел в конечной части фазовой плоскости, а N' и C' — числа узлов и седел, лежащих на экваторе (считая точки, расположенные на концах одного диаметра, за одну точку), то имеет место соотношение*

$$N + N_f + N' = C + C' + 1.$$

2. *Если все точки простые, то вдоль изоклины без кратных точек, расположенной в пределах одной полусферы, особые точки располагаются так, что вслед за седлом будет фокус или узел и наоборот. Если на изоклине две точки разделены экватором, то за седлом следует опять седло, а за узлом или фокусом — узел или фокус.*

§ 5. Топографическая система Пуанкаре. Функция Ляпунова. Кривые контактов[5]. Будем предполагать, что начало координат $O(0, 0)$ является состоянием равновесия системы (А).

Рассмотрим семейство аналитических кривых

$$F(x, y) = C,$$

обладающих следующими свойствами:

1) Функция $F(x, y)$ определена и аналитична во всех точках некоторой области G, содержащей начало и не содержащей других состояний равновесия системы. В частности, область G может совпадать со всей плоскостью (x, y), и в этом случае $F(x, y)$ стремится к бесконечности.

2) $F_x'^2(x, y) + F_y'^2(x, y) \neq 0$, если x или y отличны от нуля.

3) $F(0, 0) = 0$, $F_x'(0, 0) = 0$, $F_y'(0, 0) = 0$, причем точка $O(0,0)$ является изолированной точкой кривой

$$F(x, y) = 0,$$

т. е. в окрестности этой точки $F(x, y)$ может быть записана в виде

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + F_3(x, y),$$

где $ax^2 + by^2 + cxy$ — определенно положительная квадратичная форма ($ax^2 + by^2 + cxy > 0$ при всех x, y, не равных нулю одновременно) и F_3 начинается с членов не ниже третьей степени.

При выполнении этих условий кривые $F(x, y) = c$ в области G образуют систему замкнутых кривых, лежащих одна внутри другой и содержащих внутри начало координат.

При этом через каждую точку области G проходит только одна кривая. Семейство замкнутых кривых, обладающих указанными свойствами, называется *топографической системой Пуанкаре*.

Если мы подставим в функцию $F(x, y)$ вместо x и y решение системы (А), т. е. будем рассматривать функцию

$$F(x(t), y(t)),$$

а затем продифференцируем ее по t, то получим

$$F_x'(x(t), y(t))\dot{x}(t) + F_y'(x(t), y(t))\dot{y}(t).$$

Подставляя вместо $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ соответственно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и предполагая, что $x(t)$, $y(t)$ — любое из решений системы (А), мы получим «производную от функции $F(x, y)$ в силу системы (А)», т. е.

$$\frac{dF(x, y)}{dt} = F_x'(x, y)P(x, y) + F_y'(x, y)Q(x, y). \qquad (11)$$

---

[5]) См. [117, 92, 115].

Отметим, что геометрическое место точек, в которых правая часть этого выражения обращается в нуль, является геометрическим местом точек, в которых кривые топографической системы касаются траекторий. Действительно, наклон касательной к кривой топографической системы есть $-F'_x/F'_y$, а к траектории есть $Q(x, y)/P(x, y)$, и когда правая часть соотношения (11) обращается в нуль, эти наклоны равны. Если при всех значениях x, y в некоторой области G', содержащей начало $O(0, 0)$ (область G' может совпадать с областью G или являться частью G), мы имеем

$$F'_x(x, y)\,P(x, y) + F'_y(x, y)\,Q(x, y) \not\equiv 0,$$

то функция $F(x, y)$ называется *функцией Ляпунова для системы* (А) *в области* G'.

Очевидно, в этом случае кривые

$$F(x, y) = C$$

являются замкнутыми кривыми без контакта для траекторий системы (А). Если все траектории пересекают эти кривые при возрастании t, входя в них, т. е. если

$$dF(x, y)/dt < 0,$$

состояние равновесия $O(0, 0)$ является устойчивым состоянием равновесия (его качественный характер будет такой же, как у узла или фокуса). Если все траектории пересекают эти кривые при возрастании t, выходя из них, т. е.

$$dF(x, y)/dt > 0,$$

то состояние равновесия неустойчиво. Качественный характер его такой же, как и в предыдущем случае, только направление по траекториям прямо противоположно.

Геометрическое место точек, в которых кривые топографической системы касаются траекторий, называется *кривой контактов*. Уравнение кривой контактов имеет вид

$$P(x, y)\,F'_x(x, y) + Q(x, y)\,F'_y(x, y) = 0.$$

Если удается выбрать топографическую систему так, чтобы кривая контактов имела изолированную точку в начале координат и не имела ветвей, уходящих в бесконечность, то такая топографическая система оказывается инструментом для улавливания предельных циклов. Предельный цикл (если он существует) должен пересекать кривую контактов, так как предельный цикл непременно касается каких-то кривых топографической системы и поэтому может лежать только межу крайними кривыми (внешней и внутренней), касающимися кривой контактов.

Если кривая контактов не имеет действительных ветвей, предельные циклы не могут существовать.

Пусть $F(x, y)=C_1$ — внутренняя, а $F(x, y)=C_2$ — внешняя кривые, касающиеся кривой контактов. Можно утверждать, что существует по крайней мере один предельный цикл (нечетное число), если между кривыми C_1 и C_2 нет особых точек и если производная

$$\frac{dF}{dt}=F'_x\frac{dx}{dt}+F'_y\frac{dy}{dt}=F'_xP+F'_yQ$$

имеет разные знаки на кривых $F=C_1$ и $F=C_2$ (dF/dt может обращаться в нуль в отдельных точках).

Пример 1 [53].

$$\frac{dx}{dt}=-x+\gamma y-a+\frac{x\cos\Delta-y\sin\Delta}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt}=-y-\gamma x+\frac{x\sin\Delta+y\cos\Delta}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$-\frac{\pi}{2}<\Delta<\frac{\pi}{2},\quad 0<a<\cos\Delta.$$

В качестве топографической системы возьмем семейство окружностей $x^2+y^2=C$. Кривая контактов будет иметь вид

$$-\frac{x}{y}=\frac{-y-\gamma x+\dfrac{x\sin\Delta+y\cos\Delta}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-x+\gamma y-a+\dfrac{x\cos\Delta-y\sin\Delta}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

или

$$\Phi=x^2+y^2+ax-\sqrt{x^2+y^2}\cos\Delta=0.$$

В полярных координатах

$$\Phi=r(r+a\cos\varphi-\cos\Delta)=0.$$

Следовательно, кривая контактов — окружность.

Радиусы крайних кругов топографической системы, касающихся кривой контактов, будут

$$r_1=\cos\Delta-a,\quad r_2=\cos\Delta+a.$$

Определим знак dc/dt на кривых $r=r_1$ и $r=r_2$:

$$\frac{dc}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=-2\left(x^2+y^2+ax-\sqrt{x^2+y^2}\cos\Delta\right).$$

В полярных координатах

$$dc/dt=-2r(r+a\cos\varphi-\cos\Delta)$$

и, следовательно,

$$(dc/dt)_{r=r_1} = 2ar(1-\cos\varphi) \geqslant 0,$$
$$(dc/dt)_{r=r_2} = -2ar(1+\cos\varphi) \leqslant 0.$$

Таким образом, фазовые траектории с возрастанием t через обе граничные кривые входят внутрь кольцевой области.

Применим критерий Дюлака, полагая $B(x, y) \equiv 1$:

$$D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\cos\Delta}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2.$$

Кривая $D=0$ (окружность радиуса $r_3 = (1/2)\cos\Delta$) для случая $a < (1/2)\cos\Delta$ располагается внутри меньшего круга топографической системы (рис. 78) и, следовательно, внутри кольца между крайними кругами топографической системы знака не меняет.

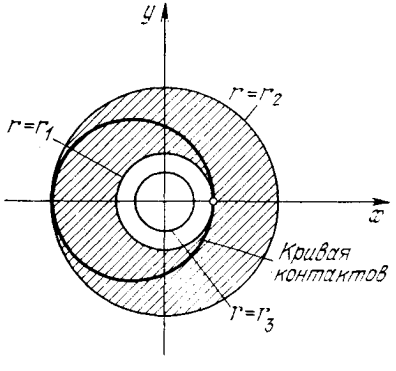


Рис. 78

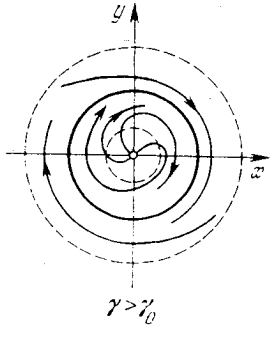


Рис. 79

Внутри кольца не может быть более одного предельного цикла (рис. 79).

Использование систем сравнения. Иногда при исследовании динамической системы можно получить сведения о ее качественной структуре, сравнивая ее с динамической системой, качественная структура которой известна. Под сравнением здесь подразумевается оценка угла между векторами исследуемой системы и системы сравнения и, в частности, установление отсутствия контактов между векторными полями, заданными данной системой и системой сравнения.

Если рассматривается система (А), а системой сравнения является

$$\dot{x} = P_0(x, y), \quad \dot{y} = Q_0(x, y), \qquad (A')$$

то, очевидно, нужно рассмотреть выражение

$$P(x, y)Q_0(x, y) - Q(x, y)P_0(x, y),$$

которое обращается в нуль в точках касания траекторий системы (A) и системы сравнения.

Использование топографической системы Пуанкаре можно рассматривать как частный случай использования системы сравнения. Системой сравнения в этом случае является система

$$\dot{x} = -F'_y(x, y), \quad \dot{y} = F'_x(x, y).$$

В некоторых случаях, когда система содержит то или другое число параметров, иногда удается в качестве удобной системы сравнения взять рассматриваемую систему при частных значениях параметров.

Пример 2[6]).

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Предполагая β отличным от нуля, можно свести исходную систему, изменяя масштабы по переменным x, y, t, к системе с двумя параметрами λ и μ:

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x - \lambda y + \mu x^2 - y^2. \tag{12}$$

Найдем ее особые точки и выясним их характер.

В конечной части плоскости — две особые точки: $K(0, 0)$ и $S(1/\mu, 0)$. Обе точки простые, их характер определяется по корням характеристических уравнений:

$$\varkappa^2 + \lambda\varkappa + 1 = 0 \text{ для точки } K(0, 0),$$
$$\varkappa^2 + \lambda\varkappa - 1 = 0 \text{ для точки } S(1/\mu, 0).$$

В точке S всегда седло (корни имеют разные знаки). В точке K при $\lambda = 0$ — всегда центр, при $0 < |\lambda| < 2$ — фокус, при $|\lambda| > 2$ — узел (устойчивый при $\lambda > 0$ и неустойчивый при $\lambda < 0$).

Для исследования бесконечно удаленных частей плоскости воспользуемся отображением фазовой плоскости на сферу Пуанкаре.

Преобразование $x = 1/z$, $y = u/z$ позволяет изучить особые точки, лежащие на экваторе сферы Пуанкаре, за исключением особых точек, в которые проектируются концы оси y.

В новых координатах u, z система (12) примет вид

$$du/d\tau = -z - \lambda uz + \mu - u^2 - u^2 z, \quad dz/d\tau = -z^2 u.$$

Особыми точками на экваторе сферы Пункаре будут точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям $z = 0$, $u^2 = \mu$. При $\mu > 0$ это сложные состояния равновесия с $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$ — два седло-узла. При $\mu = 0$ особые точки, сливаясь, образуют на концах оси x новую особую точку — топологическое седло (случай $\Delta = 0$, $\sigma = 0$), кратность которого равна пяти. Справедли-

[6]) См. [31].

вость этих утверждений можно проверить, проделав рассмотрение, описанное в гл. 4.

Для исследования концов оси y сделаем преобразование

$$x = v/z, \quad y = 1/z.$$

В новых координатах v, z система (12) примет вид

$$dv/d\tau = z + v^2 z + \lambda v z - \mu v^3 + v,$$
$$dz/d\tau = v z^2 + \lambda z^2 - \mu v^2 z + z,$$

и особой точкой, интересующей нас, является точка с координатами $v = 0$, $z = 0$. Оба корня характеристического уравнения для всех значений параметров λ и μ будут равны единице. Таким образом, соответствующая точка экватора — простой узел.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Исходная система допускает интеграл

$$H(x, y) = \left[y^2 - \mu x^2 + (\mu + 1)\, x - \frac{\mu + 1}{2}\right] e^{2x} = h,$$

что непосредственно проверяется.

Так как в начале координат — центр, в точке $S(1/\mu, 0)$ — седло, то качественная структура определяется поведением сепаратрис.

Найдем уравнение сепаратрис из условия, что они проходят через точку $S(1/\mu, 0)$. Получим

$$\left[y^2 - \mu x^2 + (\mu + 1)\, x - \frac{\mu + 1}{2}\right] e^{2x} = \frac{1 - \mu}{2} e^{2/\mu},$$

или

$$y^2 = y_1 - y_2,$$

где

$$y_1 = \frac{1 - \mu}{2} e^{2/\mu - 2x}, \quad y_2 = -\mu\left(x - \frac{\mu + 1}{2\mu}\right)^2 + \frac{1 - \mu^2}{4\mu}.$$

При $x = 1/\mu$ происходит касание кривых y_1 и y_2. Разность $y_1 - y_2$ обращается в нуль дважды: если $\mu < 0$ или $\mu > 1$. В этих случаях сепаратриса образует петлю.

При $h = 0$ и $\mu > 0$ интегральными кривыми будут гиперболы

$$y^2 - \mu\left(x - \frac{\mu + 1}{2\mu}\right)^2 + \frac{1 - \mu^2}{4\mu} = 0,$$

т. е. сепаратрисы седло-узлов на экваторе сферы Пуанкаре.

Исходя из вышеизложенного, можно представить всевозможные качественные картины консервативного[7]) случая ($\lambda = 0$).

При $\mu < 0$ на экваторе сферы Пуанкаре возможна единственная особая точка — простой узел, и, как было отмечено, сепаратриса седла имеет петлю. Качественная картина изображена на рис. 80.

---

[7]) Понятие *консервативной системы* будет дано в гл. 7.

При $\mu = 0$ седло уходит в бесконечность, образуя в точке с координатами $u = 0$, $z = 0$ сложное состояние равновесия — топологическое седло. Общий интеграл имеет вид

$$(y^2 + x - 1/2)\, e^{2x} = h.$$

При $h < 0$ кривые замкнуты, при $h \geqslant 0$ кривые не замкнуты, при $h = 0$ получим параболу $y^2 + x - 1/2 = 0$, которая является

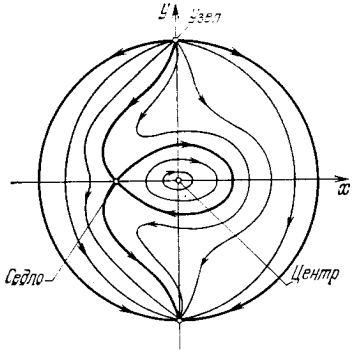


Рис. 80

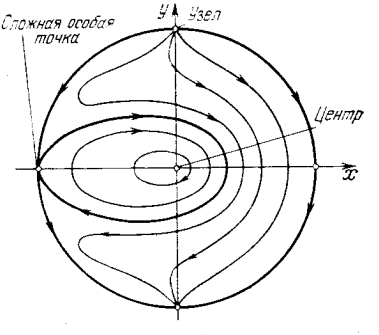


Рис. 81

сепаратрисой топологического седла на экваторе сферы Пуанкаре. Качественная картина изображена на рис. 81.

Значение параметра $\mu = 0$ является бифуркационным [8]). При возрастании μ от значения $\mu = 0$ сложная особая точка на

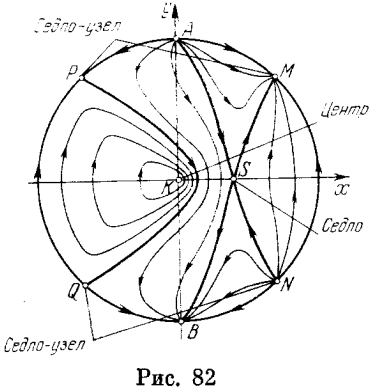


Рис. 82

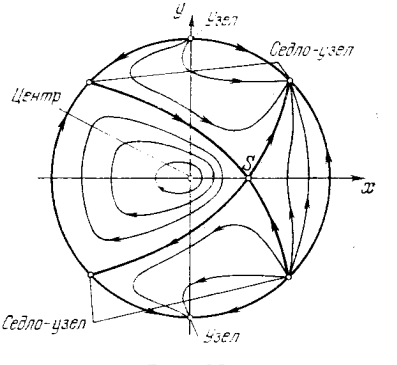


Рис. 83

экваторе распадается на два седло-узла на экваторе и седло в конечной части плоскости. Качественная картина на сфере Пуанкаре при $0 < \mu < 1$ имеет вид, изображенный на рис. 82.

[8]) Понятие бифуркации и бифуркационного значения параметра будет дано в гл. 10.

Значение параметра $\mu = 1$ опять является бифуркационным. В этом случае сепаратрисами седла $S(1/\mu, 0)$ и седло-узлов на экваторе будут прямые $y = \pm(x - 1)$. Качественная картина имеет вид, изображенный на рис. 83.

При $\mu > 1$ качественная картина имеет вид, изображенный на рис. 84.

Приведенные качественные структуры представляются исчерпывающими (единственно возможными) для консервативного

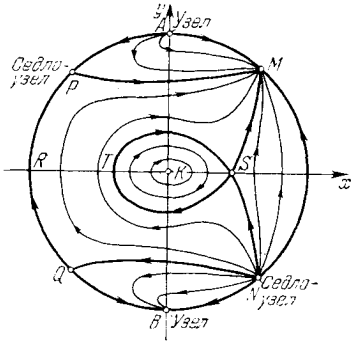


Рис. 84

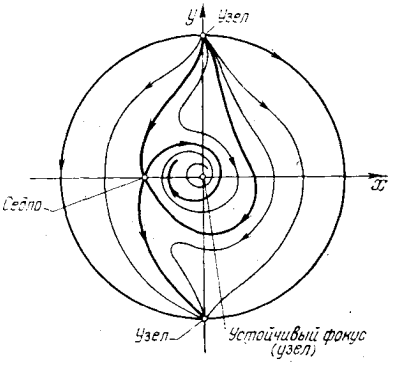


Рис. 85

случая $\lambda = 0$. Для исследования качественной структуры при $\lambda \neq 0$ удобно использовать консервативную систему в качестве системы сравнения.

Рассмотрим изменение качественной структуры разбиения сферы Пуанкаре на траектории в зависимости от параметра λ ($\lambda > 0$) и найдем контактную кривую интегральных кривых системы (12) с интегральными кривыми консервативной системы.

Уравнение контактной кривой имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0.$$

В нашем случае будет $\lambda y^2 = 0$. Заметим, что контакт на двойной прямой $y^2 = 0$ ложный, т. е. траектории системы (12) на прямой $y = 0$ пересекают траектории консервативной системы с касанием.

При изменении параметра λ:

1) Положение и характер состояний равновесия на экваторе сферы Пуанкаре не меняются.

2) Для всех $\lambda \neq 0$ начало координат — фокус или узел, в точке $S(1/\mu, 0)$ — седло.

3) Замкнутые кривые консервативной системы, окружающие начало координат, превращаются в циклы без контакта для траекторий системы (12). Предельные циклы существовать не могут.

Рассмотрим, как изменяются качественные структуры при достаточно малых положительных значениях параметра λ.

Сначала выясним, как изменяются направления сепаратрис седла при возрастании λ. Перенося начало координат в точку $S(1/\mu, 0)$, для направлений, по которым сепаратрисы входят (выходят) в седло, получим уравнение

$$k^2 + \lambda k + 1 = 0.$$

При возрастании λ от значения $\lambda = 0$ направления, по которым сепаратрисы входят в седло S или выходят из седла, сместятся на отрицательный угол. Обратимся к рассмотрению отдельных случаев.

1. $\mu < 0$. Консервативный случай изображен на рис. 80. В силу вышесказанного один «ус» седла входит в область, заполненную замкнутыми кривыми, приближаясь к особой точке, другие

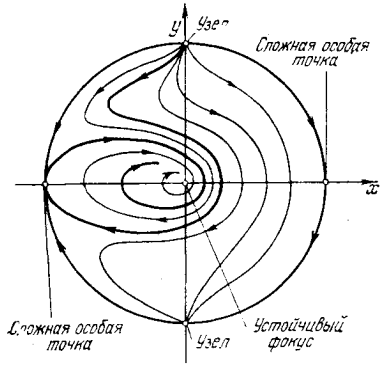


Рис. 86

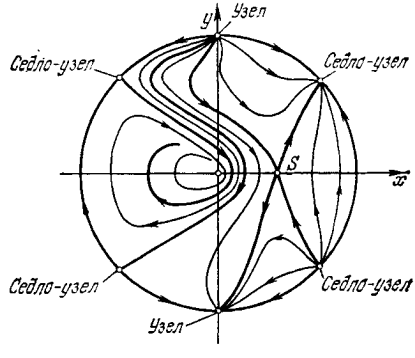


Рис. 87

же «усы» седла проходят вне области, заполненной замкнутыми кривыми, приближаясь к узлам экватора. Качественная картина определяется однозначно и будет иметь вид, изображенный на рис. 85.

2. $\mu = 0$. Консервативный случай изображен на рис. 81. Для всех $\lambda > 0$, проводя рассуждения, аналогичные случаю $\mu < 0$, получим картину, изображенную на рис. 86.

3. $0 < \mu < 1$. Качественная картина консервативного случая дана на рис. 82. В силу того, что при возрастании λ сепаратрисы смещаются на отрицательный угол, качественная картина разбиения на траектории сферы Пуанкаре для малых значений $\lambda > 0$ будет иметь вид, изображенный на рис. 87 [9]).

---

[9]) Если рассматривать систему (1) при всевозможных положительных значениях λ, то поведение «усов» седла определяется неоднозначно (см. гл. 14, § 2).

4. $\mu = 1$. Консервативный случай изображен на рис. 83. Для всех $\lambda > 0$ единственно возможной будет картина, изображенная на рис. 88.

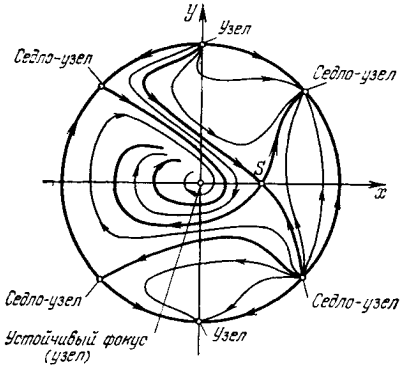


Рис. 88

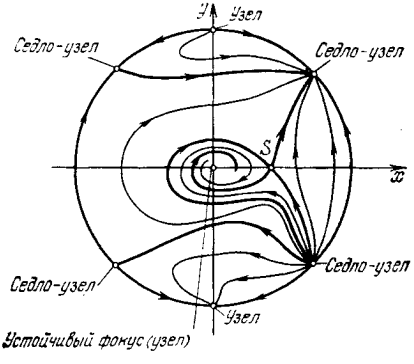


Рис. 89

5. $\mu > 1$. Консервативный случай изображен на рис. 84. Для малых значений $\lambda > 0$ качественная картина изображена на рис. 89. (В общем случае, аналогично случаю $0 < \mu < 1$, качественная структура определяется неоднозначно, см. § 2 гл. 14.)

ЧАСТЬ II
ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ

ГЛАВА 7
ДВУМЕРНЫЕ КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ. НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

Введение. Качественная теория дифференциальных уравнений, в прошлом столетии вызванная к жизни задачами небесной механики, получила в начале нашего столетия новый мощный стимул к развитию в связи с задачами радиотехники, радиофизики и вообще в связи с развернутым рассмотрением колебаний — в частности, автоколебаний — во всевозможных областях физики и техники. Качественная теория дифференциальных уравнений стала неотъемлемой частью математического аппарата теории колебаний. Однако характер динамических систем, возникающих при рассмотрении задач теории колебаний, оказался существенно отличающимся от характера динамических систем классической небесной механики. Поясним в общих чертах, в чем заключается указанное различие.

Как задачи небесной механики, так и задачи теории колебаний существенно нелинейны. Но в то время как динамические системы небесной механики являются так называемыми консервативными, в частности, гамильтоновыми системами, динамические системы теории колебаний заведомо не являются такими системами. Для того чтобы отчетливо уяснить это различие, укажем, не давая точных определений, некоторые характерные особенности консервативных систем.

§ 1. Свойства консервативных систем на плоскости [2, 3]. Как и всюду, мы предполагаем правые части динамической системы аналитическими функциями.

Простейший случай консервативной системы — это гамильтонова система, т. е. система, имеющая вид

$$\dot{x} = \partial H/\partial y, \quad \dot{y} = -\partial H/\partial x, \tag{H}$$

где $H(x, y)$ — аналитическая функция переменных x и y. Система (H) очевидно имеет аналитический интеграл

$$H(x, y) = C$$

(*интеграл энергии*). При этом:

а) в системе (H) возможны простые состояния равновесия (см. гл. 3) лишь типа центра и седла;

б) в системе (H) замкнутые траектории (соответствующие периодическим решениям этой системы) не являются изолированными, а заполняют целые области.

Отметим еще следующее характерное для гамильтоновых систем свойство.

Выделим на плоскости (x, y) область σ_0, ограниченную простой замкнутой кривой, не содержащую состояний равновесия. Площадь этой области может быть записана в виде

$$\text{пл. } \sigma_0 = \iint\limits_{\sigma_0} dx_0\, dy_0.$$

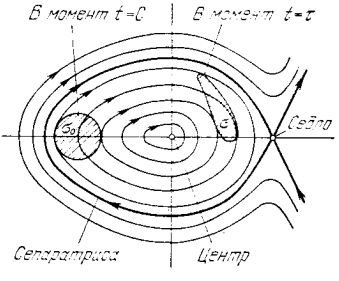


Рис. 90

Рассмотрим траектории, при $t = 0$ проходящие через точки области σ_0

$$x = \varphi(t;\ x_0,\ y_0), \quad y = \psi(t;\ x_0,\ y_0),$$

и возьмем область σ, которую при некотором фиксированном $t = \tau$ заполнят эти точки. Нетрудно показать, что мы имеем

$$\text{пл. } \sigma = \iint\limits_{\sigma} \Delta\, dx\, dy,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial x/\partial x_0 & \partial x/\partial y_0 \\ \partial y/\partial x_0 & \partial y/\partial y_0 \end{vmatrix} = 1,$$

и что при этом область σ имеет ту же площадь, что и область σ_0 (рис. 90):

$$\text{пл. } \sigma = \text{пл. } \sigma_0.$$

Это утверждение носит название *теорема Лиувилля.*

Консервативной системой мы будем называть систему

$$dx/dt = P(x,\ y), \quad dy/dt = Q(x,\ y), \tag{1}$$

определенную в некоторой области плоскости G или на всей плоскости, которая после умножения правых частей на интегрирующий множитель $M(x, y)$, являющийся аналитической функцией, не обращающейся в нуль во всей области определения системы (1), и после изменения параметризации может быть приведена к гамильтоновому виду (H):

$$dx/d\tau = M(x,\ y)P(x,\ y) = \partial H/\partial y,$$
$$dy/d\tau = M(x,\ y)Q(x,\ y) = -\partial H/\partial x,$$
$$d\tau = dt/M(x, y).$$

Свойства а) и б) остаются справедливыми и для консервативной системы (1).

Однако для консервативной системы (1) инвариантной остается не площадь, а следующий интегральный инвариант:

$$\int\int M(x, y)\, dx\, dy.$$

Консервативные системы были в основном в центре внимания при рассмотрении задач небесной механики (а также в статистической физике). Позднее обнаружились и другие области их применения, не менее важные (движение заряженных частиц в электромагнитном поле и др.). Существует развернутая теория этих систем, которой мы в этой книге касаться не будем.

§ 2. Динамические системы, характерные для теории колебаний. Динамические системы, адекватным образом описывающие задачи, рассматриваемые теорией колебаний, являются, если так можно выразиться, существенно неконсервативными[1]).

Существенная неконсервативность этих систем характеризуется тем, что у них не может быть областей (ячеек (см. § 8, 9 гл. 2)), сплошь заполненных замкнутыми траекториями: все траектории одной и той же ячейки стремятся при $t \to +\infty$ к одному и тому же центру притяжения, а при $t \to -\infty$ к одному и тому же центру отталкивания. Кроме того, замкнутые траектории таких динамических систем всегда являются изолированными, т. е. предельными, циклами. Как мы уже говорили, именно предельный цикл, а не замкнутые кривые консервативной системы, является адекватным математическим образом автоколебаний.

Дальнейшее внимательное рассмотрение вопроса о том, какие свойства следует ожидать у существенно неконсервативных динамических систем, соответствующих реальным физическим системам, если при этом изучаются те свойства реальных систем, которые описываются качественным характером траекторий (и если, конечно, соответствующая математическая модель — динамическая система — хорошо отображает свойства реальной системы), привело к понятию грубой динамической системы[2]). Точное определение грубых систем дано в § 1 гл. 8; здесь же сделаем некоторые общие замечания.

Всякая реальная физическая система характеризуется некоторыми физическими параметрами (такими параметрами могут

[1]) Отсюда, конечно, ни в какой мере не следует, что консервативные системы не представляют интереса для теории колебаний и что она не пользуется ими. Теория колебаний использует консервативные системы как для упрощенных идеализаций (элементарным примером такой идеализации является, например, маятник без трения), так и в качестве вспомогательного математического аппарата.

[2]) Это понятие впервые было введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 г. [11].

быть, например, масса, емкость, коэффициент трения и т. д.). Эти параметры никогда не могут быть абсолютно неизменными во время движения физической системы. Поэтому, если мы утверждаем, что при некоторых заданных значениях параметров движение имеет какой-то определенный характер, например имеют место автоколебания, то это может иметь смысл лишь при условии, что малые изменения физических параметров не меняют характера движения.

Это свойство реальной физической системы, без которого изучение ее поведения вообще не представляется возможным, должно найти отражение в свойствах соответствующих математических моделей, т. е. динамических систем, описывающих реальные физические системы. А это, очевидно, означает, что у таких динамических систем при малых изменениях входящих в них параметров, которые очевидно соответствуют реальным физическим параметрам, характер траекторий не меняется.

Высказанные соображения являются теми эвристическими соображениями, на основании которых представляется целесообразным выделение среди динамических систем второго порядка таких, у которых качественная структура разбиения на траектории не меняется при «малых изменениях» этих систем. Динамические системы, обладающие этими свойствами, называют *грубыми*.

В гл. 8 дается точное определение грубой динамической системы и при этом уточняется смысл слов «малые изменения динамической системы».

Грубость динамической системы именно и можно считать тем свойством, которое мы выше назвали существенной неконсервативностью[3]). До сих пор мы все время говорили лишь о динамических системах, правые части которых — аналитические функции. Однако в разных вопросах теории колебаний, а также (и в особенности) в теории регулирования для адекватного описания задач часто необходимо рассматривать динамические системы с кусочно-непрерывными или даже с разрывными правыми частями. Такие динамические системы специально также будут рассмотрены в настоящей книге в части IV. Однако в настоящей части мы все время будем предполагать правые части динамических систем аналитическими функциями.

§ 3. Измененные системы. Системы, правые части которых зависят от параметра. Прежде чем переходить к определению грубой системы, понятию, являющемуся основным в дальнейшем, мы приведем некоторый необходимый вспомогательный материал.

[3]) Следует отметить, что хотя многие понятия теории бифуркаций динамических систем переносятся на случай многомерных систем, но в этом случае все значительно сложнее, и имеют место совсем иные факты (см. [111, 25, 24, 137—141]).

Всюду в дальнейшем наряду с заданной системой

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y), \tag{A}$$

которую мы будем предполагать определенной в некоторой ограниченной области G (или замкнутой ограниченной области $\bar{G}$), будем рассматривать также другие системы вида

$$\begin{aligned} dx/dt &= \tilde{P}(x, y) = P(x, y) + p(x, y), \\ dy/dt &= \tilde{Q}(x, y) = Q(x, y) + q(x, y). \end{aligned} \tag{$\tilde{A}$}$$

Систему (A) мы будем называть *исходной системой*, отличные от (A) системы ($\tilde{A}$) — *измененными системами*.

Функции $p = \tilde{P}(x, y) - P(x, y)$ и $q = \tilde{Q}(x, y) - Q(x, y)$ называются *добавками* к правым частям системы (A). В дальнейшем всегда предполагается, что правые части являются в рассматриваемой области аналитическими функциями [4]).

В области $\bar{G}$ каждая из систем (A) и ($\tilde{A}$) задает свое векторное поле. Синус угла между направлением векторного поля, заданного системой (A), и направлением векторного поля, заданного системой ($\tilde{A}$) в каждой точке, дается выражением

$$\sin\theta = \frac{\tilde{Q}(x, y) P(x, y) - \tilde{P}(x, y) Q(x, y)}{\sqrt{\tilde{P}^2(x, y) + \tilde{Q}^2(x, y)}\,\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}}. \tag{2}$$

Очевидно, в точках, в которых

$$\tilde{Q}(x, y)P(x, y) - \tilde{P}(x, y)Q(x, y) > 0,$$

угол θ положителен, в точках, в которых

$$\tilde{Q}(x, y)P(x, y) - \tilde{P}(x, y)Q(x, y) < 0,$$

этот угол отрицателен, а в точках, где

$$\tilde{Q}(x, y)P(x, y) - \tilde{P}(x, y)Q(x, y) = 0,$$

направления поля систем (A) и ($\tilde{A}$) совпадают или прямо противоположны. В том частном случае, когда во всех точках плоскости (или рассматриваемой области)

$$\tilde{Q}(x, y)P(x, y) - \tilde{P}(x, y)Q(x, y) \geqslant 0,$$

мы будем говорить, что система ($\tilde{A}$) дает поворот поля системы (A) (или просто поворот поля) на неотрицательный или неположительный угол.

Предположим, что рассматривается динамическая система, правые части которой зависят от некоторого параметра,

$$dx/dt = P(x, y, \mu), \quad dy/dt = Q(x, y, \mu), \tag{A_μ}$$

---

[4]) Понятие *грубости динамической системы* может быть введено при значительно более широких предположениях относительно правых частей системы (A), именно при предположении, что правые части имеют лишь непрерывные частные производные (см. § 8 гл. 8).

причем эту систему при некотором частном значении параметра, например при $\mu = 0$, т. е. систему

$$dx/dt = P(x, y, 0), \quad dy/dt = Q(x, y, 0), \qquad (A_0)$$

мы будем принимать за исходную систему (A). Тогда измененной системой будет система (A_μ) при $\mu \neq 0$, и она, очевидно, может быть получена из исходной системы (A) с помощью добавок

$$P(x, y, \mu) - P(x, y, 0) = p(x, y, \mu),$$
$$Q(x, y, \mu) - Q(x, y, 0) = q(x, y, \mu).$$

В дальнейшем мы часто будем рассматривать добавки, линейно зависящие от μ, т. е. будем наряду с данной системой (A) рассматривать измененную систему вида

$$dx/dt = P(x, y) + \mu p(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) + \mu q(x, y).$$

Отметим еще один встречающийся в дальнейшем частный случай измененной системы, именно

$$dx/dt = P(x, y) \pm \mu Q(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) \mp \mu P(x, y).$$

Нетрудно видеть, пользуясь формулой (2) или выражением для $\operatorname{tg}\theta$, которое нетрудно получить, что эта система дает поворот поля системы (A) на постоянный угол, тангенс которого равен $\pm\mu$.

В этом частном случае измененной системы ее состояния равновесия совпадают с состояниями равновесия системы (A) (хотя характер их может быть отличен от характера состояний равновесия системы (A)).

Действительно, нетрудно видеть, что при любом μ мы можем иметь одновременно

$$P(x, y) \pm \mu Q(x, y) = 0, \quad Q(x, y) \mp \mu P(x, y) = 0,$$

лишь когда одновременно

$$P(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x, y) = 0.$$

Мы остановились здесь на этом частном случае добавок ввиду того, что поворот поля часто используется в дальнейшем при рассмотрении конкретных систем.

§ 4. Основные теоремы о зависимости решения от изменения правых частей динамической системы[5]). В настоящем параграфе излагаются основные теоремы, касающиеся изменения решения системы дифференциальных уравнений, рассматриваемого на конечном промежутке значений t, при изменении правых частей системы. На эти теоремы опирается все дальнейшее изложение.

[5]) См. [113, 116, 130, 134].

Отметим, что малое изменение решения на конечном промежутке значений t отнюдь не обеспечивает неизменность характера целых траекторий и тем более неизменность качественной (топологической) структуры разбиения на траектории в целом[6]).

Пусть динамическая система (А) определена в некоторой ограниченной замкнутой области G и наряду с ней рассматривается измененная система (Ā), определенная в той же области. Как и всюду, будем предполагать, что правые части систем (А) и (Ā) являются аналитическими функциями x и y.

Теорема 1 (о непрерывной зависимости решения от изменения правой части и начальных условий). *Пусть*

$$x = \varphi(t - t_0; x_0^*, y_0^*),$$
$$y = \psi(t - t_0; x_0^*, y_0^*)$$

— решение системы (А), *определенное при всех значениях*

$$\tau < t < T,$$

и t_1, t_2 *— какие-нибудь числа между* τ *и* T, *удовлетворяющие неравенству* $t_1 < t_0 < t_2$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при условии, что в области* G

$$|p(x, y)| < \delta, \quad |q(x, y)| < \delta$$

и, кроме того,

$$|x_0^* - \tilde{x}_0^*| < \delta, \quad |y_0^* - \tilde{y}_0^*| < \delta,$$

решение системы (Ā), *соответствующее начальным значениям* $t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*$:

$$x = \tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*),$$
$$y = \tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*),$$

определено при всех значениях t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *и при всех этих значениях выполняются неравенства*

$$|\tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*) - \varphi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)| < \varepsilon,$$
$$|\tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*) - \psi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)| < \varepsilon.$$

Замечание. Если правые части рассматриваемой системы являются непрерывными функциями μ, так что рассматриваемая система имеет вид

$$dx/d\tau = P(x, y, \mu), \quad dy/d\tau = Q(x, y, \mu),$$

---

[6]) Это аналогично тому, как знание структуры траекторий в малом в окрестности отдельной неособой точки не позволяет судить о качественной структуре траекторий в целом (см. § 13 гл. 1).

а, следовательно, решение этой системы зависит от μ:

$$x = \varphi(t - t_0,\ x_0,\ y_0,\ \mu),$$
$$y = \psi(t - t_0,\ x_0,\ y_0,\ \mu),$$

то функции $\varphi(t - t_0,\ x_0,\ y_0,\ \mu)$ и $\psi(t - t_0,\ x_0,\ y_0,\ \mu)$ являются непрерывными функциями μ.

Теорема 1 может быть сформулирована в следующей геометрической форме:

Задавая любой конечный промежуток времени, можно взять систему (Ā), *столь близкую к данной системе* (A), *и столь близкие начальные точки, чтобы соответствующие траектории систем* (A) *и* (Ā) *в течение выбранного конечного промежутка времени сколь угодно мало отличались друг от друга.*

Наряду с теоремой 1 основную роль в дальнейшем играет также следующая теорема, уточняющая по сравнению с теоремой 1 характер близости решений систем (A) и (Ā) в случае, когда близки не только правые части систем (A) и (Ā), но и их частные производные до порядка k.

Пусть по-прежнему решение системы (A) определено при значениях t: $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Теорема 2. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если в области* G *выполняются неравенства*

$$|p(x,\ y)| < \delta, \quad |q(x,\ y)| < \delta,$$
$$|x_0^* - \tilde{x}_0^*| < \delta, \quad |y_0^* - \tilde{y}_0^*| < \delta,$$
$$\left|\frac{\partial^n p}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right| < \delta, \quad \left|\frac{\partial^n q}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right| < \delta, \quad n = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

то решение системы (Ā)

$$x = \tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*), \quad y = \tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*)$$

определено при всех значениях t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *и при всех этих значениях выполняются неравенства*

$$\left|\frac{\partial^n \varphi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)}{\partial x_0^i \partial^{n-i} y_0}\right| - \left|\frac{\partial^n \tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*)}{\partial \tilde{x}_0^i \partial^{n-i} \tilde{y}_0}\right| < \varepsilon,$$
$$\left|\frac{\partial^n \psi(t - t_0, x_0^*, y_0^*)}{\partial x_0^i \partial^{n-i} y_0}\right| - \left|\frac{\partial^n \tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0^*, \tilde{y}_0^*)}{\partial \tilde{x}_0^i \partial^{n-i} \tilde{y}_0}\right| < \varepsilon.$$

Предположим теперь, что правые части рассматриваемой динамической системы содержат параметр μ, так что система имеет вид

$$dx/dt = P(x,\ y,\ \mu), \quad dy/dt = Q(x,\ y,\ \mu).$$

Предположим, кроме того, что функции $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ — аналитические функции также и параметра μ.

Теорема 3. *Если* $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ — *аналитические функции своих аргументов, то и функции*

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0, \mu),$$
$$y = \psi(t - t_0, x_0, y_0, \mu)$$

также являются аналитическими в окрестности всякой системы значений $t - t_0$, x_0, y_0, μ, *для которой они определены*[7]).

§ 5. Грубость динамической системы и теоремы о непрерывной зависимости решения от изменения правых частей. На основании приведенных теорем мы можем утверждать, что на любом конечном замкнутом промежутке значений (на котором определено решение исходной системы) при малых изменениях правых частей решение измененной системы мало отличается от решения исходной системы.

Однако на основании этих теорем нельзя сделать никаких заключений о неизменности поведения траектории на неограниченном интервале значений t и тем более о неизменности характера разбиения на траектории в целом.

Нетрудно убедиться, рассматривая простые примеры, что при изменении правых частей характер разбиения на траектории может как не меняться, так и меняться. Так, например, нетрудно видеть, что у линейной динамической системы вида

$$dx/dt = 2x, \quad dy/dt = y,$$

для которой начало координат является узлом (эту систему можно, например, рассматривать внутри некоторого цикла без контакта, который в этом случае заведомо существует), топологическая структура не меняется при всех достаточно малых добавках к правым частям.

С другой стороны, рассмотрим систему

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x, \tag{3}$$

у которой все траектории замкнуты (начало координат является состоянием равновесия типа «центр»). Рассмотрим наряду с этой системой измененную систему

$$dx/dt = \mu x - y, \quad dy/dt = \mu y - x. \tag{4}$$

Все траектории этой системы, кроме состояния равновесия,— спирали (состояние равновесия $O(0, 0)$ есть фокус).

---

[7]) Из теоремы 3 могут быть, как следствие, получены как утверждения теоремы 1, так и утверждения теоремы 2.

Хотя в силу теоремы 1 на любом конечном промежутке значений t при достаточно малом μ витки спирали системы (4) сколь угодно близки к соответствующей замкнутой траектории системы (3), но очевидно, что при сколь угодно малых $\mu \neq 0$ топологические структуры разбиений у систем (3) и (4) различны. Таким образом, требование неизменности всей качественной картины траекторий при малых изменениях правых частей в целом непосредственно не вытекает из приведенных теорем о непрерывной зависимости решения от изменения правых частей и требует специального рассмотрения. Мы проведем это рассмотрение в следующей главе.

ГЛАВА 8

ГРУБЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Определение грубой динамической системы. Мы будем предполагать, что у всех рассматриваемых динамических систем

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) \qquad (A)$$

правые части определены в некоторой области W плоскости (x, y) и являются в этой области аналитическими функциями x и y [1]). Однако мы будем рассматривать эти системы в некоторой замкнутой ограниченной области $\bar{G}$, целиком содержащейся в W.

Будем наряду с данной фиксированной системой (A) рассматривать всевозможные измененные системы

$$dx/dt = \tilde{P}(x, y), \quad dy/dt = \tilde{Q}(x, y), \qquad (\tilde{A})$$

правые части которых также определены и аналитичны в области W.

Будем считать измененную систему $(\tilde{A})$ близкой к системе (A) в замкнутой области $\bar{G}$, целиком (вместе с границей) лежащей в W (в которой определены системы (A) и $(\tilde{A})$), если в каждой точке $M(x, y)$ замкнутой области $\bar{G}$ не только функции $\tilde{P}(x, y)$ и $\tilde{Q}(x, y)$ близки соответственно к функциям $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, но и первые производные от функций $\tilde{P}(x, y)$ и $\tilde{Q}(x, y)$ соответственно близки к производным от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$: $P'_x(x, y)$ и $\tilde{P}'_x(x, y)$, $P'_y(x, y)$ и $\tilde{P}'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ и $\tilde{Q}'_x(x, y)$, $Q'_y(x, y)$ и $\tilde{Q}'_y(x, y)$ [2]). В соответствии с этим мы будем говорить, что система $(\tilde{A})$ *мало меняется*, если наряду с системой (A) рассматриваются всевозможные измененные системы $(\tilde{A})$, близкие к системе (A) в указанном смысле.

Впервые определение грубости динамической системы было дано (см. [2, 3, 11]) при некотором дополнительном предположении относительно множества рассматриваемых динамических

---

[1]) Понятие *грубой динамической системы* [3, 13, 26, 144] имеет смысл также и при значительно более общих предположениях относительно правых частей (см. [13] и § 8 настоящей главы).

[2]) Отметим, что при вводимом понятии грубости требование близости не только самих функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, но и их производных существенно (см. также подстрочное примечание [7])).

систем. Именно, дополнительно предполагалось, что граница области $\overline{G}$, в которой рассматривается система (А), является циклом без контакта для траекторий этой системы, т. е. простой гладкой замкнутой кривой C, не имеющей контактов (не касающейся траекторий системы (А)). Очевидно, тогда кривая C является циклом без контакта также и для траекторий всякой системы ($\widetilde{\text{А}}$), достаточно близкой к (А). Хотя это предположение сильно ограничивает класс рассматриваемых динамических систем, но при этом смысл понятия грубости системы сохраняется, а определение грубости значительно проще, чем при общих предположениях относительно границы области $\overline{G}$.

Определение I. Динамическая система (А) называется *грубой* (в замкнутой области $\overline{G}$, граница которой есть цикл без контакта), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что для всевозможных измененных систем ($\widetilde{\text{А}}$), правые части которых $\widetilde{P}(x, y)$ и $\widetilde{Q}(x, y)$ удовлетворяют в области $\overline{G}$ условиям

$$|\widetilde{P}(x, y) - P(x, y)| < \delta, \quad |\widetilde{Q}(x, y) - Q(x, y)| < \delta,$$
$$|\widetilde{P}'_x(x, y) - P'_x(x, y)| < \delta, \quad |\widetilde{P}'_y(x, y) - P'_y(x, y)| < \delta,$$
$$|\widetilde{Q}'_x(x, y) - Q'_x(x, y)| < \delta, \quad |\widetilde{Q}'_y(x, y) - Q'_y(x, y)| < \delta,$$

существует топологическое отображение области $\overline{G}$ в себя, при котором каждая траектория системы (А) отображается в траекторию измененной системы ($\widetilde{\text{А}}$) и обратно, и при этом соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε.

Предположение о том, что граница области G есть цикл без контакта, очевидно, является весьма сильным и ничем не оправданным ограничением на рассматриваемые динамические системы.

Определение грубости может быть освобождено от этого предположения, однако при этом оно значительно усложняется.

Для формулировки этого общего определения грубости введем некоторую вспомогательную терминологию. Пусть, как и выше, система (А) и измененная система ($\widetilde{\text{А}}$) рассматриваются в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$. Пусть дано некоторое $\delta > 0$.

1. Измененная система ($\widetilde{\text{А}}$) называется δ-*близкой* в $\overline{G}$ к системе (А), если во всех точках области $\overline{G}$ выполняются неравенства

$$|\widetilde{P}(x, y) - P(x, y)| < \delta; \quad |\widetilde{Q}(x, y) - Q(x, y)| < \delta;$$
$$|\widetilde{P}'_x(x, y) - P'_x(x, y)| < \delta; \quad |\widetilde{P}'_y(x, y) - P'_y(x, y)| < \delta;$$
$$|\widetilde{Q}'_x(x, y) - Q'_x(x, y)| < \delta; \quad |\widetilde{Q}'_y(x, y) - Q'_y(x, y)| < \delta.$$

Предположим теперь, что система (А) рассматривается в некоторой замкнутой области $\overline{H}$, целиком вместе с границей лежащей в области G, а данная измененная система ($\widetilde{\text{А}}$) — в некоторой замкнутой области $\widetilde{\overline{H}}$, также целиком вместе с границей лежащей в области G (так что ни одна граничная для областей H или $\widetilde{H}$ точка не является граничной для области G).

2. Разбиение области $\widetilde{\overline{H}}$ на траектории системы $(\widetilde{A})$ называется *ε-тождественным* разбиению области $\overline{H}$ на траектории системы (A), если существует топологическое отображение замкнутых областей $\overline{H}$ и $\widetilde{\overline{H}}$, при котором траектории систем (A) и $(\widetilde{A})$ отображаются друг в друга, и при этом соответствующие точки находятся на расстоянии, меньшем ε (при этом всякая точка области $\widetilde{\overline{H}}$ находится в ε-окрестности некоторой точки области $\overline{H}$).

Рассматривая исходную систему (A) и измененные системы $(\widetilde{A})$, определенные в замкнутой области $\overline{G}$, мы будем говорить о грубости системы (A) — по самому смыслу этого понятия — не во всей области $\overline{G}$, а в некоторой (произвольной) замкнутой области $\overline{G}_0$, целиком содержащейся в открытой области G.

Будем при этом предполагать, что граница области $\overline{G}_0$ является простой замкнутой кривой [3]) (но теперь уже эта граница может и не быть целиком без контакта).

Определение I′. Динамическая система (A) называется *грубой* в замкнутой области $\overline{G}_0 \subset G$, если существует замкнутая область $\overline{H}$, целиком содержащаяся в G ($\overline{H} \subset G$) и целиком содержащая $\overline{G}_0$ ($\overline{G}_0 \subset H$), в которой выполняются следующие условия: при любом $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что, какую бы систему $(\widetilde{A})$, δ-близкую в области $\overline{G}$ к системе (A), мы ни взяли, существует замкнутая область $\widetilde{\overline{H}} \subset G$, разбиение которой на траектории системы $(\widetilde{A})$ ε-тождественно разбиению области $\overline{H}$ на траектории системы (A).

В приведенном определении может вызвать недоумение рассмотрение вспомогательных областей H и $\widetilde{H}$. Непосредственно представляется естественным следующее определение: система называется грубой в замкнутой области $\overline{G}_0 \subset G$, если при любом $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что, какую бы систему $(\widetilde{A})$, δ-близкую в области $\overline{G}$ к системе (A), мы ни взяли, существует замкнутая область $\widetilde{\overline{G}}_0$, разбиение которой на траектории системы $(\widetilde{A})$ ε-тождественно разбиению области $\overline{G}_0$ на траектории системы (A).

Однако нетрудно видеть, пользуясь введенным ниже понятием грубой и негрубой траекторий, что это определение не запрещает наличия негрубых траекторий (негрубых состояний равновесия, негрубых предельных циклов), лежащих на границе области $\overline{G}_0$. А это, очевидно, не соответствует содержанию понятия грубости. Данное в тексте определение с введением вспомогательных областей H и $\overline{H}$ выделяет системы, полностью адекватные интуитивному понятию грубой системы.

Введение понятия грубости без специальных предположений о границе области представляется естественным и необходимым с различных точек зрения.

Из данного определения грубой системы, в частности, очевидно следует, что если выбрать достаточно малое $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$, то у всевозможных δ-близких к (A) систем $(\widetilde{A})$ в ε-окрестности каждого состояния равновесия системы (A) будет лежать одно и только одно состояние равновесия и при этом

[3]) Приводимое ниже определение грубости динамической системы не изменится, если сделать и более общие предположения относительно границы области $\overline{G}_0$, однако для определенности мы останавливаемся на сделанном в тексте.

того же характера, что и у системы (A), и в ε-окрестности каждого предельного цикла — один и только один предельный цикл того же характера, что и у системы (A), и т. д. Но это, очевидно, накладывает определенное ограничение на возможные у грубых систем состояния равновесия и замкнутые траектории[4]), а также на поведение сепаратрис седел. Подчеркнем, что ограничения, которые требование грубости накладывает на рассматриваемые динамические системы, таковы, что они выделяют общий случай. Другими словами, всякая наперед заданная динамическая система, вообще говоря, является грубой, в то время как негрубые системы являются исключительными системами (см. § 10).

Следующие параграфы посвящены формулировке необходимых и достаточных условий грубости и некоторым дополнительным рассмотрениям, которые для этого необходимы. Для простоты формулировок будем считать, что граница области $\bar{G}$ — цикл без контакта. Однако все дальнейшее справедливо и при более общих предположениях относительно границ области[5]).

§ 2. Состояния равновесия, возможные в грубой динамической системе.

Теорема 1. *Если система* (A) *является грубой в замкнутой области* $\bar{G}$, *то в* $\bar{G}$ *у нее может существовать только конечное число состояний равновесия.*

В рассматриваемом случае аналитических правых частей системы (A) бесчисленное множество состояний равновесия возможно лишь в случае, когда правые части имеют общий множитель. Но тогда можно рассмотреть сколь угодно близкую вместе со своими производными аналитическую систему, у которой правые части уже не имеют общих множителей, откуда и будет следовать справедливость теоремы 1.

При более общих предположениях относительно правых частей динамической системы (например, при предположении о наличии производных до некоторого конечного порядка $k \geqslant 1$) у системы (A) может существовать бесчисленное множество корней и в том случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не имеют общего множителя. В этом случае всегда можно взять сколь угодно близкую к (A) систему ($\bar{A}$) с аналитическими правыми частями, не имеющими общего множителя.

Таким образом, у грубой в $\bar{G}$ системы все состояния равновесия изолированные.

---

[4]) Эти ограничения являются ограничениями аналитического характера и при этом типа неравенств, а не равенств (см. § 10 настоящей главы).

[5]) Развернутые доказательства приводимых в настоящей главе предположений см. в [3, 13, 144, 26].

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — состояние равновесия системы (A). В дальнейшем мы будем рассматривать величины

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

$$\sigma = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y).$$

Теорема 2. *Если система* (A) *является грубой в замкнутой области* $\bar{G}$, *то у нее не может существовать в* $\bar{G}$ *состояния равновесия, для которого*

$$\Delta(x_0, y_0) = 0.$$

Действительно, условие $\Delta(x_0, y_0) = 0$, очевидно, означает, что изоклины $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ в их общей точке $Q(x_0, y_0)$ не просто пересекаются, а имеют кратную общую точку. Тогда очевидно, всегда найдется измененная система $(\tilde{A})$, у которой сколь угодно близко от точки O существует более одной общей точки, что противоречит грубости системы.

Из теоремы 2, очевидно, следует, что если система (A) является грубой в $\bar{G}$, то в $\bar{G}$ могут существовать только простые состояния равновесия.

Состояния равновесия, возможные в грубой системе, будем называть *грубыми* состояниями равновесия.

Теорема 3. *Простые состояния равновесия, у которых* $\Delta > 0$, $\sigma \neq 0$, *и у которых* $\Delta < 0$ (*т. е. простые состояния равновесия типа «узел», «фокус» и «седло»*), *являются грубыми* (см. [12, 13]).

Отметим, что доказательство этой интуитивно очевидной теоремы хотя элементарно по идее (строится топологическое отображение области, содержащей состояние равновесия системы (A) на область, содержащую близкое состояние равновесия системы $(\tilde{A})$), но довольно кропотливо.

Как мы видели в § 5 гл. 3, возможно еще также простое состояние равновесия, у которого $\Delta > 0$, $\sigma = 0$ (т. е. у которого характеристические корни чисто мнимые). Это состояние равновесия рассматривается в следующем параграфе. Мы увидим, что оно является негрубым.

§ 3. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями, как было указано в § 5 гл. 3, может быть изучено после перехода к полярной системе координат путем рассмотрения функции последования $r = f(r_0)$, построенной, например, на оси x. Рассмотрение такой функции последования для систем, близких к данной, т. е. построение функции последования

$$r = \tilde{f}(r_0)$$

для надлежащим образом выбранной системы $\dot{x} = \tilde{P}(x, y)$, $\dot{y} = \tilde{Q}(x, y)$, близкой к данной, позволяет установить следующее предложение.

Теорема 4 (о рождении предельного цикла из сложного фокуса). *Если состояние равновесия O системы с чисто мнимыми характеристическими корнями является сложным фокусом кратности $k \geqslant 1$, то при любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ всегда существует такая δ-близкая к системе* (A) *система* ($\tilde{\text{A}}$), *у которой в ε-окрестности состояния равновесия O существует по крайней мере один предельный цикл.*

Естественно говорить, что предельный цикл $\tilde{L}$ системы ($\tilde{\text{A}}$), лежащий в указанной ε-окрестности состояния равновесия O, «рождается из сложного фокуса» (см. также гл. 10, 11 и 13).

Теорема 5. *Если состояние равновесия O системы* (A) *является центром, то при любом $\delta > 0$ существует измененная система* ($\tilde{\text{A}}$), *δ-близкая к* (A), *у которой состояние равновесия O является фокусом.*

Доказательство утверждений теорем 4 и 5 элементарным образом может быть получено путем рассмотрения измененной системы, у которой действительные части характеристических корней не равны нулю, с привлечением функции $\tilde{\psi}(r_0)$, аналогичной $\psi(r_0)$ (см. § 5 гл. 3), построенной для такой измененной системы, и использованием выражения для первого не равного нулю из коэффициентов в разложении функции $\psi(r_0)$[6]).

Следующая теорема, дающая второе необходимое условие грубости системы, непосредственно вытекает из предыдущей теоремы.

Теорема 6. *Если система* (A) *является грубой в $\bar{G}$, то в $\bar{G}$ не может быть состояния равновесия, для которого $\Delta > 0$, $\sigma = 0$.*

§ 4. Замкнутые траектории, возможные в грубой системе. Замкнутые траектории, возможные в грубой системе, будем называть *грубыми*.

Как мы видели в гл. 5, свойства замкнутой траектории данной системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ естественным образом изучаются с помощью функции последования $\bar{s} = f(s)$, построенной на дуге без контакта l (s — параметр на этой дуге). Рассматривая наряду с данной системой измененную систему

$$\dot{x} = \tilde{P}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{Q}(x, y), \qquad (\tilde{\text{A}})$$

достаточно близкую к системе (A), построим на той же дуге l функцию последования, соответствующую такой системе (функция последования для системы ($\tilde{\text{A}}$), достаточно близкой к (A), на дуге l всегда существует в силу теорем 1—3 гл. 7). Тогда справедливы следующие предложения.

---

[6]) См. также гл. 11, где дано выражение для $L_1 = \alpha_3 = \psi'''(0)/3!$.

Теорема 7. *Замкнутая траектория с характеристическим показателем, не равным нулю, т. е. такая, для которой* $\alpha_1 \neq 1$ (см. гл. 5), *является грубой.*

На диаграмме Ламерея (см. гл. 5) грубым предельным циклам, очевидно, соответствуют простые точки пересечения кривой $\bar{s} = f(s)$ с биссектрисой $\bar{s} = s$. Если $\bar{s} = \tilde{f}(s)$ — функция последования системы (Ā), достаточно близкой к (А), то в силу требования близости производных от правых частей систем (А) и (Ā) не только сама функция $\tilde{f}(s)$ близка к $f(s)$, но и производная $\tilde{f}'(s)$ близка к производной $f'(s)$. При этом условии, очевидно, всегда существует только одна точка пересечения кривой $\bar{s} = f(s)$ с прямой $\bar{s} = s$, близкая к точке пересечения кривой $\bar{s} = \tilde{f}(s)$ с этой прямой[7]).

Пусть L_0 — сложный k-кратный ($k \geqslant 2$) предельный цикл. Следующая теорема аналогична теореме 4 настоящей главы.

Теорема (о рождении предельного цикла из сложного предельного цикла).

Если L_0 — *сложный* (k-*кратный при* $k \geqslant 2$) *предельный цикл системы* (А), *то при любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ *всегда можно указать такую систему* (Ā), δ-*близкую к системе* (А), *у которой в* ε-*окрестности* L_0 *существуют по крайней мере два предельных цикла*[8]).

Мы будем говорить, что предельные циклы системы (Ā), существование которых доказано в теореме, «рождаются» из предельного цикла L_0.

Теорема 8. *Если* L_0 — *замкнутая траектория системы* (А), *и все траектории, проходящие через точки некоторой* ε_0-*окрестности этой траектории, замкнуты, то при любом достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *можно указать такую измененную систему* (Ā), δ-*близкую к* (А), *у которой в* ε-*окрестности* L_0 *не существует ни одной замкнутой траектории.*

Следующая теорема, дающая необходимые условия грубости динамической системы (А), непосредственно вытекает из двух предыдущих.

Теорема 9. *Если система* (А) *является грубой в области* $\bar{G}$, *то в области* $\bar{G}$ *не может существовать замкнутая траектория с характеристическим показателем, равным нулю.*

---

[7]) Обратим внимание на то, что при этом близость производных функций $f(s)$ и $\tilde{f}(s)$, вытекающая из близости производных от правых частей систем (А) и (Ā), существенна.

Действительно, при отсутствии требования близости производных функций $f(s)$ и $\tilde{f}(s)$ всегда можно указать функцию, сколь угодно близкую к $f(s)$, которая в окрестности простой точки пересечения кривой $\bar{s} = f(s)$ с прямой $\bar{s} = s$ имеет любое данное число общих точек с этой прямой.

[8]) Доказательство этого предложения может быть проведено приемом, отличным от данного в [3, 13, 26].

§ 5. Поведение сепаратрис седел в грубых системах. Теоремы 1—9 касаются двух типов особых траекторий: состояний равновесия и замкнутых траекторий. В настоящем пункте рассматривается последний тип особых траекторий — сепаратрисы.

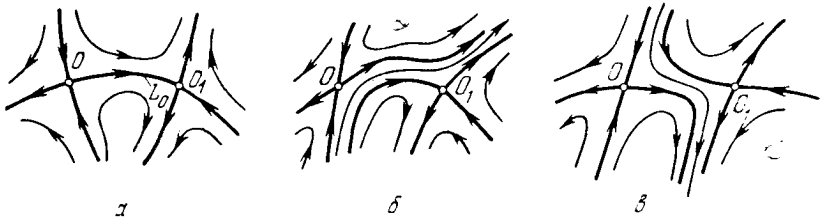


Рис. 91

В грубых системах в силу теоремы 2, очевидно, возможны только сепаратрисы седел.

Если сепаратриса L_0 седла O, стремящаяся к этому седлу, например, при $t \to +\infty$, при $t \to -\infty$ также стремится к седлу (отличному от O или к тому же седлу O), то мы будем коротко говорить, что «сепаратриса седла O идет из седла в седло». Следующая теорема дает последнее необходимое условие грубости системы (А).

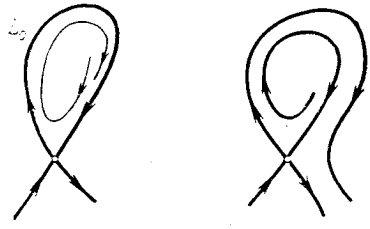


Рис. 92

Теорема 10. *В грубых системах не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло (т. е. невозможны случаи, представленные на рис.* 91, *а*; 92, *а*).

Для доказательства этой теоремы наряду с данной системой (А) рассматривается измененная система, дающая поворот поля, т. е. система (A_α). Как мы видели (см. гл. 7), состояния равновесия системы (A_α) те же, что и у системы (А). Однако нетрудно показать, что сепаратриса состояния равновесия O системы (A_α) уже не идет из седла в седло («сепаратриса L_0 разделяется» (рис. 91, *б*, *в* и рис. 92, *б*). Отсюда, очевидно, вытекает справедливость утверждения теоремы.

Следствие. В грубой системе сепаратриса не может быть предельной траекторией типа III § 5 гл. 2 (т. е. в грубой системе предельными траекториями могут быть только состояния равновесия (грубые) и предельные циклы (грубые)).

§ 6. Необходимые условия грубости. Достаточность этих условий для грубости системы. Объединение полученных результатов дает следующие необходимые условия грубости:

I. В замкнутой области $\bar{G}$ могут быть только грубые состояния равновесия, т. е. такие, для которых действительные части корней характеристического уравнения отличны от нуля. Это требование может быть сформулировано еще так: в области $\bar{G}$ не может быть состояний равновесия $x = x_0$, $y = y_0$, для которых:

а) $$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

б) при $\Delta > 0$ $\sigma = [P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)] = 0$.

II. В области $\bar{G}$ могут быть только простые (грубые) предельные циклы, т. е. такие предельные циклы, для которых характеристический показатель не равен нулю. Это требование может быть сформулировано еще и так: в области $\bar{G}$ не может быть периодических движений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad [\varphi(t+\tau) = \varphi(t),\ \psi(t+\tau) = \psi(t)],$$

для которых

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))]\, dt = 0.$$

III. В области $\bar{G}$ не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло.

В силу этих условий в грубой системе возможны особые траектории лишь следующих типов: грубые состояния равновесия, т. е. состояния равновесия узел, фокус и седло, простые (грубые) предельные циклы, сепаратрисы седел, в одну сторону стремящиеся к узлу, фокусу или к предельному циклу или при некотором значении t выходящие из замкнутой области $\bar{G}$.

Предельными траекториями в грубых системах могут быть только состояния равновесия и предельные циклы (см. следствие из теоремы 10).

Сформулируем еще следующую теорему, непосредственно вытекающую из необходимых условий грубости.

Теорема 11. *У грубой в замкнутой области $\bar{G}$ системы может существовать только конечное число предельных циклов.*

Необходимые условия I—III являются также достаточными для грубости системы вида (A). Именно, имеет место

Теорема 12. *Если для системы* (A) *в области $\bar{G}$ выполняются условия* I—III, *то такая система в области $\bar{G}$ является грубой.*

Доказательство теоремы состоит в фактическом построении для всякой измененной системы (Ā), достаточно близкой к системе (A), такого топологического отображения области $\bar{G}$ в себя, при котором траектории системы (Ā) отображаются в траектории системы (A) и соответствующие друг другу точки находятся на сколь угодно малом расстоянии друг от друга.

В заключение сформулируем следующую теорему, которая позволяет охарактеризовать, какое место грубые динамические системы вида (А) занимают среди всевозможных систем, рассматриваемых в замкнутой области $\bar{G}$.

Теорема 13. *Если система* (А) *является грубой в области* $\bar{G}$, *то существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что все измененные системы* (Ā), δ_0-*близкие к системе* (А), *также являются грубыми в области* $\bar{G}$ (*и имеют ту же качественную структуру*).

§ 7. Пространство динамических систем. Всюду плотность грубых (двумерных) динамических систем. При изложении теории грубых систем весьма естественно и удобно ввести пространство динамических систем. Именно, рассмотрим всевозможные динамические системы, правые части которых определены в данной ограниченной замкнутой области $\bar{G}$ и являются в этой области аналитическими функциями x и y. Введем пространство, точками которого являются такие динамические системы. Расстоянием между двумя точками этого пространства, т. е. между точками, соответствующими динамической системе (A_1):

$$dx/dt = P_1(x, y), \quad dy/dt = Q_1(x, y) \qquad (A_1)$$

и динамической системе (A_2):

$$dx/dt = P_2(x, y), \quad dy/dt = Q_2(x, y), \qquad (A_2)$$

будем считать максимум модуля выражений

$$|P_1(x, y) - P_2(x, y)|, \quad |Q_1(x, y) - Q_2(x, y)|,$$
$$|P'_{1x}(x, y) - P'_{2x}(x, y)|,$$
$$|P'_{1y}(x, y) - P'_{2y}(x, y)|, \quad |Q'_{1x}(x, y) - Q'_{2x}(x, y)|,$$
$$|Q'_{1y}(x, y) - Q'_{2y}(x, y)|.$$

Будем введенное пространство обозначать через R_A[9]). Очевидно, динамические системы, δ-близкие к данной динамической системе (А), соответствующей точке M пространства R_A, соответствуют точкам R_A, лежащим на расстоянии, меньшем δ от точки M.

---

[9]) Отметим, что введение такого пространства весьма естественно не только с чисто математической точки зрения, но и с точки зрения приложений: именно динамические системы, получающиеся из приложений, всегда содержат то или другое число параметров. Каждой совокупности значений параметров соответствует динамическая система, так что пространство параметров рассматриваемой динамической системы можно интерпретировать как пространство динамических систем — частного вида.

Введенное выше пространство динамических систем является очевидно наиболее общим из таких пространств, включающим в себя все «частные пространства».

Воспользовавшись введенным пространством R_A, можно сформулировать теорему 13 в следующей геометрической форме.

Если динамическая система (A), *соответствующая точке M пространства* R_A, *является грубой, то и все точки некоторой окрестности точки M соответствуют грубым динамическим системам* (*с той же качественной структурой*).

Отсюда очевидно следует, что грубые динамические системы заполняют области пространства динамических систем. Однако можно доказать еще более сильное утверждение. Будем рассматривать в пространстве динамических систем всевозможные системы, как грубые, так и негрубые. Тогда справедлива следующая теорема [10]).

Теорема 14. *Если* (A) — *негрубая система, то при любом* $\delta > 0$ *можно указать* δ-*близкую к системе* (A) *систему* (A), *являющуюся грубой.*

Из этой теоремы очевидно вытекает, что грубые системы всюду плотны в пространстве динамических систем.

Таким образом, грубые системы можно рассматривать как наиболее простые, наиболее многочисленные динамические системы в соответствующем пространстве динамических систем. Действительно, грубые системы выделяются условиями типа неравенств, и поэтому их естественно рассматривать как общий случай.

В гл. 7 целесообразность введения понятия «грубости динамической системы» оправдывалась естественными соображениями, касающимися свойств динамических систем, описывающих реальные задачи. Однако в силу указанных свойств грубых систем это понятие естественно возникает также в силу внутренней математической необходимости [11]).

§ 8. **Понятие грубости при более общих предположениях относительно правых частей динамической системы.** Мы рассматривали выше динамические системы, правые части которых — аналитические функции. Однако понятие «грубости динамической системы» может быть введено совершенно так же и в случае, когда относительно правых частей $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ рассматриваемых динамических систем сделаны более общие предположения.

Наиболее общим — возможным по самому смыслу понятия грубости — является требование наличия у функций $P(x, y)$ и

[10]) Отметим, что все приведенные здесь предложения справедливы лишь для двумерных динамических систем (см. Дополнение).

[11]) Можно провести далеко идущую аналогию между грубыми динамическими системами и функциями одной переменной, имеющими только простые корни, а также кривыми, не имеющими особенностей (особых точек), рассматриваемыми в конечной части плоскости. Эта аналогия является, в частности, весьма плодотворной для выработки эффективных методов качественного исследования.

$Q(x, y)$ лишь частных производных первого порядка (как и выше, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ предполагаются определенными в ограниченной замкнутой области $\bar{G}$). При этом вывод необходимых условий фактически не изменяется [12]) и не изменяется также доказательство теорем 13 и 14.

С другой стороны, можно определить грубость динамической системы, предполагая правые части рассматриваемых динамических систем аналитическими (или имеющими непрерывные частные производные до порядка m) при другом определении близости динамической системы. Именно, можно считать близкими динамические системы (A) и ($\tilde{\text{A}}$), у которых близки не только сами функции и их производные первого порядка, но и все соответствующие производные до порядка m. Это, очевидно, означает, что мы рассматриваем пространство, точками которого являются динамические системы с аналитическими правыми частями, в котором расстоянием между двумя точками M и $\tilde{M}$ — одной, соответствующей системе (A), другой — системе ($\tilde{\text{A}}$), является наибольшая из величин

$$|P(x, y) - \tilde{P}(x, y)|, \quad |Q(x, y) - \tilde{Q}(x, y)|, \ldots$$
$$\ldots, \left|P^k_{x^i y^{k-i}}(x, y) - \tilde{P}^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right|,$$
$$\left|Q^k_{x^i y^{k-i}}(x, y) - \tilde{Q}^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right|;$$
$$i = 0, 1, \ldots, n, \ k \geqslant i, \ k = 1, 2, \ldots, n, \ n \geqslant 2.$$

В дальнейшем мы будем говорить, что *система* ($\tilde{\text{A}}$) δ-*близка в* C_m-*топологии к системе* (A), если выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |P(x, y) - \tilde{P}(x, y)| < \delta, \quad |Q(x, y) - \tilde{Q}(x, y)| < \delta, \\ \left|P^k_{x^i y^{k-i}}(x, y) - \tilde{P}^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right| < \delta, \\ \left|Q^k_{x^i y^{k-i}}(x, y) - \tilde{Q}^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right| < \delta, \\ i = 0, 1, \ldots, m, \ k \geqslant i, \ k = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{1}$$

Вводя добавки

$$p(x, y) = \tilde{P}(x, y) - P(x, y), \quad q(x, y) = \tilde{Q}(x, y) - Q(x, y),$$

неравенства (1) можем записать в виде

$$|p(x, y)| < \delta, \quad |q(x, y)| < \delta,$$
$$\left|p^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right| < \delta, \quad \left|q^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right| < \delta,$$

и в этом случае будем называть добавки $p(x, y)$ и $q(x, y)$ δ-*добавками ранга* m.

---

[12]) Доказательство некоторых теорем (например, теоремы 9) даже упрощается.

Пространство динамических систем с введенным здесь определением расстояния между точками (динамическими системами) будем обозначать через R_A^m.

Две динамические системы, близкие в смысле определения, данного в § 1, очевидно, могут не быть близкими при $m \geqslant 2$ в смысле данного здесь определения.

Нетрудно убедиться, что и при данном здесь определении близости динамических систем при $m \geqslant 2$ необходимые и достаточные условия грубости те же, что и сформулированные в § 6, и, так же как и в случае пространства R_A^m, грубые динамические системы заполняют области в соответствующем пространстве [13]). Справедливы также теоремы 13 и 14.

До сих пор мы рассматривали при том или другом определении расстояния между динамическими системами пространство всевозможных динамических систем. Однако в ряде вопросов представляет интерес рассмотрение относительной грубости, именно грубости по отношению к некоторому классу динамических систем, т. е. по отношению к некоторому подмножеству пространства динамических систем (R_A или R_A^m). Таким понятием относительной грубости мы воспользуемся при выделении простейших негрубых систем (см. следующую главу), так называемых систем первой степени негрубости, а также при классификации негрубых систем по степени сложности, или степени негрубости. Отметим, что с точки зрения такой классификации негрубых систем консервативные системы (см. гл. 7) являются системами бесконечной степени негрубости, другими словами, системами степени негрубости более высокой, чем любая конечная степень негрубости. Таким образом, в пространстве R_A (или R_A^m) консервативные системы являются с точки зрения такой классификации чрезвычайно «редкими» системами.

Однако мы можем, рассматривая класс консервативных (или гамильтоновых) систем, ввести понятие грубости системы относительно этого класса. Таким понятием (без термина «грубость») фактически пользовался Пуанкаре.

Отметим еще также, что введение понятия грубости естественно не только при рассмотрении дифференциальных уравнений. Так, например, рассматривая вопрос о топологии аналитической кривой

$$F(x, y) = 0$$

[13]) Большой математический интерес представляет также рассмотрение динамических систем, правые части которых — многочлены данной фиксированной степени n. В этом случае динамические системы естественно рассматривать на сфере Пуанкаре (см. гл. 6). Пространством динамических систем является в этом случае проективное пространство коэффициентов многочленов, стоящих в правых частях. Мы не останавливаемся, однако, на этом случае ввиду отсутствия здесь законченных результатов.

или аналитического многообразия

$$F(x, y, z, u, v, \ldots) = 0,$$

естественно ввести понятие грубости кривой или многообразия.

Рассматривая общие точки двух кривых

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0,$$

естественно ввести понятие грубости расположения двух кривых и т. д.[14]).

Можно было бы указать еще целый ряд математических объектов другого характера, при рассмотрении которых введение понятий грубости, а также степеней негрубости было бы весьма плодотворным.

§ 9. Типы особых траекторий и ячеек в грубых системах. Необходимые и достаточные условия грубости налагают определенные ограничения на возможные в грубых системах типы особых траекторий.

Особыми траекториями в грубых системах, очевидно, являются: грубые состояния равновесия (узлы, грубые фокусы, седла), предельные циклы (грубые) и сепаратрисы седел. При этом α (ω)-сепаратрисы при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) стремятся либо к узлу, либо к фокусу, либо к предельному циклу.

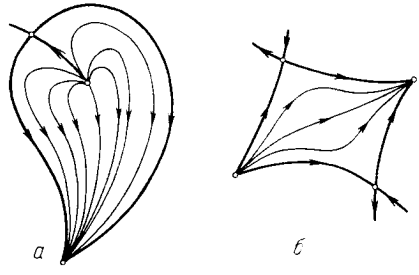


Рис. 93

Как уже было сказано, знание расположения этих особых траекторий (схема динамической системы) полностью определяет качественную структуру разбиения на траектории. В рассматриваемом случае грубых систем нужно знать число и характер состояний равновесия, число предельных циклов, взаимное расположение состояний равновесия и предельных циклов и ход сепаратрис.

Особые траектории разделяют область $\bar{G}$ на подобласти — ячейки, заполненные неособыми траекториями.

Укажем возможные в грубых системах типы ячеек. При этом будем рассматривать лишь ячейки, в границы которых не входят граничные для замкнутой области $\bar{G}$ точки. Нетрудно показать, что могут иметь место следующие возможности.

---

[14]) Требование аналитичности может быть ослаблено. Достаточно потребовать, чтобы функции $F(x, y)$, $F(x, y, z, u, v)$, $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ и т. д. имели непрерывные производные до порядка $m \geqslant 1$.

1. Ячейка двусвязна, и граница ее состоит либо из двух предельных циклов (устойчивого и неустойчивого), либо из предельного цикла и одного лежащего внутри этого цикла состояния равновесия, являющегося узлом или фокусом.

2. Ячейка односвязна, и в границу ее входят:

а) одно седло, три сепаратрисы этого седла: две, стремящиеся к седлу при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), и одна — при $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$),

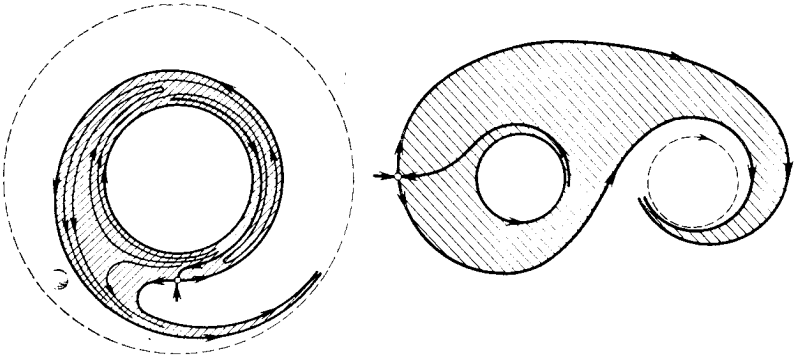


Рис. 94

и состояния равновесия или предельные циклы, являющиеся предельными для этих сепаратрис;

б) два седла, две сепаратрисы одного седла, стремящиеся к нему при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$, и две сепаратрисы другого седла, стремящиеся к нему при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$, и два состояния равновесия (или один или два предельных цикла) — устойчивое и неустойчивое, являющиеся предельными для этих сепаратрис.

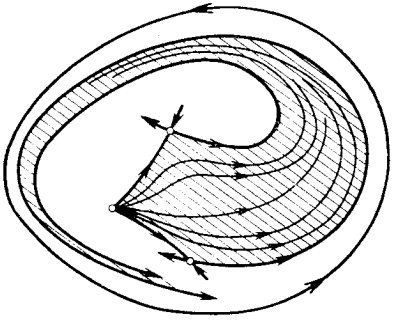


Рис. 95

Примеры ячеек типа а) и б) в случае, когда сепаратрисы стремятся к состояниям равновесия, представлены на рис. 93, *а* и 93, *б*. Когда предельными для сепаратрис являются предельные циклы, могут представиться различные случаи в зависимости от того, лежат сепаратрисы, входящие в границу ячейки, вне или внутри того предельного цикла, к которому они стремятся и в зависимости от того, совпадает ли положительное направление обхода предельного цикла с направлением обхода в сторону возрастания t или противоположно ему.

На рис. 94 и 95 приведены некоторые ячейки типа а) и б) (полную классификацию см. [2, 3, 13]). Очевидно, число различных типов ячеек в грубых системах на плоскости конечно.

§ 10. Замечания по поводу определения грубой системы. Как уже было сказано в § 1, определение грубой динамической системы впервые было дано в предположении, что граница замкнутой области $\overline{G}$, в которой рассматривается данная система и все близкие измененные системы, является циклом без контакта. Это предположение, очевидно, вызвано только тем, что формулировка определения грубости при нем упрощается.

Очевидно, однако, что при принятии такого определения мы не имели возможности говорить о грубости целого ряда систем, которые естественно считать грубыми. Так, например, пусть рассматривается динамическая система, которая имеет в некоторой области $\overline{G}$ (ограниченной замкнутой кривой) только одно седло или узел и седло. Такие системы мы должны, очевидно, считать грубыми. Но мы не можем пользоваться определением I, так как граница области $\overline{G}$ в этих примерах, очевидно, не может быть циклом без контакта. Индекс замкнутой кривой, являющейся границей области $\overline{G}$, в этих случаях, очевидно, не равен единице, и, следовательно, она не может быть циклом без контакта. Можно «подправить» определение I, делая более общие предположения относительно границы области $\overline{G}$. Например, можно допускать, что граница области $\overline{G}$ есть гладкая простая замкнутая кривая, имеющая конечное число касаний с траекториями системы (A) и не содержащая состояний равновесия (см. [155]). Однако всякие такие предположения относительно границы области всегда являются ограничениями, посторонними понятию грубости динамической системы. Ограничения на возможные границы должны вытекать из определения грубости. Кроме того, по смыслу понятия грубости из грубости системы в некоторой области $\overline{G}$ должна вытекать — непосредственно из определения — грубость системы в произвольной замкнутой области $\overline{G}_0$, содержащейся в $\overline{G}$. Поэтому все указанные определения грубости (с условиями на границе) не полностью отражают смысл понятия грубости системы, а его отражает более сложное по форме определение I′. Отметим, что из определения I′ непосредственно вытекает, что система (A) — грубая в некоторой области $\overline{G}$ — груба во всякой области $\overline{g} \subset \overline{G}$. Определение I′ фактически используется также при рассмотрении негрубых систем, когда область, в которой рассматривается негрубая система, естественным образом разделяется на части, в которых система является грубой, и части, в которых система содержит негрубые элементы.

Кроме приведенных в настоящей главе определений грубости I и I′ в математической литературе существует еще несколько

отличное определение грубости, данное Пейксото (см. [156, 157]), которое мы здесь приведем.

Это определение также было дано в предположении, что граница области $\overline{G}$, в которой рассматривается система (А), является циклом без контакта.

Определение II (грубости динамической системы без ε-тождественности). Система (А) является *грубой* в области G (ограниченной циклом без контакта), если существует такое $\delta > 0$, что всякая динамическая система (Ã), δ-близкая к (А), имеет в области $\overline{G}$ ту же качественную структуру, что и система (А).

Очевидно, что если система груба в смысле определения I, то она является грубой и в смысле определения II. Обратное не очевидно. Однако Пейксото [157] показано, что необходимые и достаточные условия грубости в смысле определения II совпадают с необходимыми и достаточными условиями грубости в смысле определения I. Определение II имеет следующее преимущество: непосредственно из этого определения вытекает тот факт, что грубые системы в пространстве динамических систем заполняют области. При определении I этот факт нужно доказать, опираясь на необходимые и достаточные условия грубости.

В настоящее время широко используется определение грубости динамической системы на двумерных (и многомерных) многообразиях, а также определение грубости диффеоморфизмов многообразий (точечных отображений) без ε-тождественности (см. список литературы в [111]). При этом используется не термин «грубость», а термин «структурная устойчивость».

Рассмотрение условий грубости динамических систем на поверхностях выходит за рамки настоящей книги (см. [14—18, 111]).

ГЛАВА 9

ПРОСТЕЙШИЕ НЕГРУБЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ — СИСТЕМЫ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ НЕГРУБОСТИ

§ 1. Общие замечания. При исследовании динамических систем, соответствующих физическим задачам, нельзя ограничиться только одним понятием грубой динамической системы. При этом не только потому, что при некоторых идеализациях имеет смысл рассматривать негрубые системы, например консервативные, а прежде всего потому, что при изменении параметров, входящих в динамическую систему, мы можем перейти от одной грубой системы к другой, качественно отличной грубой системе. Такой переход всегда совершается через негрубую динамическую систему. Отсюда естественно вытекает задача рассмотрения негрубых динамических систем и их классификации. С этим вопросом тесно связана теория зависимости качественной картины разбиения на траектории от параметра, которую мы будем называть *теорией бифуркаций динамических систем.*

Отметим, что рассмотрение возможных бифуркаций (т. е. возможных изменений качественной структуры разбиения на траектории в зависимости от изменения правых частей динамической системы) дает в руки приемы эффективного исследования качественной структуры.

В настоящем параграфе дается определение простейших негрубых систем, которые названы *системами первой степени негрубости.* Приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы система была системой первой степени негрубости (см. [6, 9, 10]).

§ 2. Системы первой степени негрубости. Пусть, как и всюду выше, рассматривается динамическая система

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{A}$$

правые части которой — аналитические функции x и y в некоторой ограниченной замкнутой области $\bar{G}$ плоскости (x, y)[1]).

[1]) Понятие динамической системы первой степени негрубости, так же как и понятие грубости, может быть дано при более общих предположениях относительно правых частей. Однако, как и всюду, мы предполагаем правые части аналитическими ввиду того, что этот случай является наиболее интересным с точки зрения приложений.

Так же, как и при определении грубой динамической системы, мы будем предполагать, что граница области $\bar{G}$ является циклом без контакта для траекторий системы (A).

Будем наряду с системой (A) рассматривать всевозможные измененные системы

$$\dot{x} = \tilde{P}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{Q}(x, y), \tag{$\tilde{\text{A}}$}$$

определенные в той же области $\bar{G}$, что и система (A), с правыми частями, также являющимися аналитическими функциями x и y. При введении понятия системы первой степени негрубости по самому смыслу понятия естественно использовать другое определение близости двух динамических систем, чем при рассмотрении грубых динамических систем (см. по этому поводу § 8 гл. 8).

Именно, будем говорить, что система ($\tilde{\text{A}}$) δ-*близка* в области $\bar{G}$ к системе (A) до ранга 3, если выполняются неравенства

$$|\tilde{P}(x, y) - P(x, y)| < \delta, \quad |\tilde{Q}(x, y) - Q(x, y)| < \delta,$$

$$\left|\tilde{P}^k_{x^{k-i}y^i}(x, y) - P^k_{x^{k-i}y^i}(x, y)\right| < \delta,$$

$$\left|\tilde{Q}^k_{x^{k-i}y^i}(x, y) - Q^k_{x^{k-i}y^i}(x, y)\right| < \delta,$$

$$k = 1, 2, 3, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad k > i$$

(т. е. если близки и сами функции $\tilde{Q}(x, y)$, $Q(x, y)$ и $\tilde{P}(x, y)$, $P(x, y)$, и их производные до третьего порядка включительно).

В дальнейшем мы будем для краткости опускать слова «в области $\bar{G}$»[2]).

Определение III. Динамическая система (A) называется *системой первой степени негрубости в области* $\bar{G}$, если она не является грубой в $\bar{G}$ и если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что, какую бы систему ($\tilde{\text{A}}$), негрубую в $\bar{G}$ и δ-близкую до ранга 3 к системе (A), мы ни взяли, существует топологическое отображение области $\bar{G}$ на себя, при котором траектории системы (A) и ($\tilde{\text{A}}$) отображаются друг в друга, и соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε.

В силу определения III динамические системы первой степени негрубости являются, очевидно, системами релятивно грубыми в множестве негрубых систем.

---

[2]) Определение динамической системы первой степени негрубости, так же как и определение грубой динамической системы, было сначала дано в предположении, что граница рассматриваемой области $\bar{G}$ является циклом без контакта для траекторий системы (A). При этом предположении определение значительно упрощается. Однако это определение, так же как и определение грубости, может быть с соответствующими изменениями (полностью аналогичными тем, которые были сделаны при определении грубой системы) дано и без каких-либо частных предположений относительно расположения траекторий системы (A) по отношению к границе.

Мы сформулируем здесь основные предложения, с помощью которых устанавливаются необходимые и достаточные условия того, что система (А) является системой первой степени негрубости в $\overline{G}$.

Необходимыми и достаточными условиями грубости динамической системы являются условия I—III § 6 гл. 8.

Следовательно, если система (А) является негрубой, то у нее непременно должны существовать:

1) либо состояние равновесия, у которого $\Delta = 0$;

2) либо состояние равновесия, у которого $\Delta > 0$, $\sigma = 0$;

3) либо предельный цикл с характеристическим показателем, равным нулю;

4) либо сепаратриса, идущая из седла в седло.

§ 3. Состояния равновесия, возможные в системе первой степени негрубости. Сохраним обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad \sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Теорема 1. *Если система* (А) *является системой первой степени негрубости в замкнутой области* $\overline{G}$, *то она не может иметь в* $\overline{G}$ *состояния равновесия, для которого* $\Delta = 0$ *и* $\sigma = 0$.

Всегда можно считать, что $x_0 = y_0 = 0$, и тогда систему (А) в окрестности состояния равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, можно привести линейной заменой переменных к виду

$$\dot{x} = P_2(x, y), \quad \dot{y} = by + Q_2(x, y),$$

$P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — функции, разложение которых по степеням x и y начинается с членов не ниже второй степени.

Теорема 2. *Если система* (А) *является системой первой степени негрубости в области* $\overline{G}$, *то в* $\overline{G}$ *у нее не может быть состояний равновесия, у которых* $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, 0) = 0$.

Состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, 0) = l_0 \neq 0$, является седло-узлом[3]).

Геометрически это состояние равновесия имеет вид, представленный на рис. 51, гл. 4.

Отметим, что седло-узел есть двукратное состояние равновесия (см. § 3 гл. 10).

Рассмотрим теперь состояние равновесия O, для которого $\Delta > 0$, $\sigma = 0$, т. е. состояние равновесия, уже изучавшееся в § 5 гл. 3, которое может быть либо фокусом, либо центром. Как мы видели в § 5 гл. 3, в окрестности этого состояния равновесия на некоторой части полупрямой, примыкающей к точке O, можно

[3]) Кроме седло-узла, на плоскости других двукратных состояний равновесия нет.

построить функцию последования

$$r = f(r_0) = \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0^2 + \alpha_3 r_0^3 + \ldots$$

в случае, когда $\sigma = 0$, $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0$.

Теорема 3. *Если система* (A) *является системой первой степени негрубости в области* $\bar{G}$, *то в области* $\bar{G}$ *не может существовать состояние равновесия, для которого* $\Delta > 0$, $\sigma = 0$ *и* $\alpha_3 = 0$.

§ 4. Замкнутые траектории, возможные в системе первой степени негрубости. Перейдем теперь к выяснению вопроса о том, какие замкнутые траектории возможны в системе первой степени негрубости. Пусть L_0 — замкнутая траектория, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — соответствующее ей решение. Пусть

$$\bar{s} = h_1 s + h_2 s^2 + h_3 s^3 + \ldots$$

— функция последования, построенная в окрестности L_0 на некоторой дуге без контакта, проведенной через какую-нибудь точку L_0.

При этом, как мы видели,

$$h_1 = e^{h\tau}, \quad h = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left[P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))\right] d\tau.$$

Теорема 4. *Если система* (A) *является системой первой степени негрубости в* $\bar{G}$, *то в* $\bar{G}$ *не может существовать замкнутая траектория, у которой*

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left[P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))\right] d\tau = 0,$$

т. е. $h_1 = 1$ *и одновременно* $h_2 = 0$.

Замкнутая траектория, для которой $h = 0$ (т. е. $h_1 = 1$) и $h_2 \neq 0$, называется *двойным* (*двукратным*) *предельным циклом* (этот цикл очевидно является полуустойчивым) (рис. 65 гл. 5).

§ 5. Условия на сепаратрисы седел и седло-узлов в системе первой степени негрубости. Пусть теперь у системы (A) существует сепаратриса, идущая из седла в седло. Рассмотрим, в частности, тот случай, когда сепаратриса L_0 идет из седла O в то же седло. Тогда L_0 вместе с седлом O образует простую замкнутую кривую C_0. Мы будем говорить в этом случае, что сепаратриса образует петлю или что мы имеем *петлю сепаратрисы*. Если при этом сепаратрисы седла O, отличные от L_0, лежат внутри петли (внутри C_0), то мы будем говорить, что L_0 образует *большую петлю*. Укажем следующие основные свойства петли сепаратрисы.

1. Если в седле $O(x_0, y_0)$ величина

$$\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) > 0,$$

то петля *неустойчива* (т. е. все траектории, проходящие через достаточно близкие к ней точки, лежащие внутри нее или сосоответственно вне ее, стремятся к петле при $t \to -\infty$).

Если величина

$$\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) < 0,$$

то петля *устойчива* (см. рис. 96 и 97).

2. Если в седле

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0,$$

то возможен как случай, когда петля устойчива, так и случай, когда петля неустойчива, а также случай, когда все траектории,

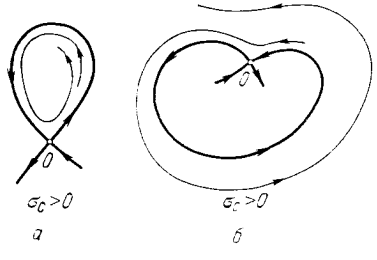


Рис. 96

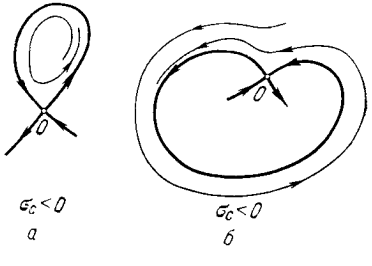


Рис. 97

проходящие через точки внутри (вне) петли, достаточно близкие к петле, замкнуты.

Теорема 5. *Если система* (A) *является системой первой степени негрубости в* $\overline{G}$, *то в* $\overline{G}$ *не может существовать сепаратриса, идущая из седла в то же седло, если в этом седле* $P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0$ (x_0, y_0 — *координаты седла*).

Величина $\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$ ($O(x_0, y_0)$ — седло) называется *седловой величиной.*

§ 6. Необходимые и достаточные условия первой степени негрубости. Назовем *независимой особой траекторией первой степени негрубости* каждую из траекторий следующих типов:

1) состояние равновесия седло-узел, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, 0) \neq 0$ (см. § 3);

2) сложный фокус первого порядка ($\sigma = 0$, $L_1 = \alpha_3 \neq 0$) (см. гл. 3, § 5);

3) двойной предельный цикл ($h = 0$, $h_2 \neq 0$) (см. § 4);

4) сепаратрису, идущую из одного седла в другое;

5) сепаратрису, идущую из седла в то же седло, причем в седле $\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (x_0, y_0 — координаты седла).

Теорема 6. *Если система* (А) *является системой первой степени негрубости в* $\overline{G}$, *то у нее не может существовать в* $\overline{G}$ *двух независимых особых траекторий первой степени негрубости.*

Теорема 7. *Если система* (А) *является системой первой степени негрубости в области* $\overline{G}$, *то в* $\overline{G}$ *не может быть*:

а) *сепаратрисы седло-узла, идущей в седло* (*или из седла*);

б) *двух сепаратрис седло-узла, являющихся продолжением одна другой*;

в) *двух сепаратрис седел, одна из которых накручивается на двойной предельный цикл, а другая скручивается с него*;

г) *сепаратрисы, образующей петлю, на которую накручивается* (*или с которой скручивается*) *сепаратриса другого седла.*

Мы скажем, что система (А) в области $\overline{G}$ удовлетворяет условиям Г, если в области $\overline{G}$:

А) она имеет одну и только одну негрубую независимую особую траекторию первой степени негрубости;

Б) эта особая траектория принадлежит к одному из следующих типов:

1) седло-узел;

2) сложный фокус первого порядка;

3) двойной предельный цикл;

4) сепаратриса, идущая из седла в седло, причем если она возвращается в то же седло, то в этом седле

$$\sigma_c \neq 0;$$

В) сепаратрисы седел и седло-узлов (являющиеся не независимыми негрубыми особыми траекториями) удовлетворяют следующим требованиям:

1) сепаратриса седла не может накручиваться на сепаратрису другого седла, идущую из седла в то же самое седло (или скручиваться в нее);

2) сепаратриса седла не может накручиваться на двойной цикл, если есть сепаратриса, скручивающаяся с него (и наоборот);

3) сепаратрисы седло-узла не могут ни идти в седло, ни являться продолжением одна другой.

Теорема 8. *Если система* (А) *удовлетворяет в области* $\overline{G}$ *условиям* Г, *то она является системой первой степени негрубости в* $\overline{G}$.

§ 7. Динамические системы более высокой степени негрубости. В рассматриваемом случае аналитических динамических систем или в более общем случае, требуя у правых частей динамической системы наличия не менее пяти производных, можно определить динамические системы второй степени негрубости

как системы, релятивно грубые в множестве систем, негрубых и не являющихся системами первой степени негрубости.

Совершенно аналогично можно определить динамические системы 3-й, 4-й, ..., n-й степени негрубости. Определение вводится индуктивно. В рассматриваемом случае динамических систем с аналитическими правыми частями введем определение близости систем (расстояния между двумя системами) до ранга $5, 7, \ldots, 2n+1$. Именно, пусть даны системы:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{A}$$

$$\dot{x} = \tilde{P}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{Q}(x, y). \tag{$\tilde{\text{A}}$}$$

Система ($\tilde{\text{A}}$) называется δ-*близкой* к системе (A) в C_{2n+1}-топологии, если выполняются неравенства

$$|\tilde{P}(x, y) - P(x, y)| < \delta, \quad |\tilde{Q}(x, y) - Q(x, y)| < \delta,$$

$$\left|\tilde{P}^k_{x^i y^{k-i}}(x, y) - P^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right| < \delta,$$

$$\left|\tilde{Q}^k_{x^i y^{k-i}}(x, y) - Q^k_{x^i y^{k-i}}(x, y)\right| < \delta,$$

$$k = 1, 2, \ldots, 2n+1, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1.$$

Динамическая система (A) называется системой *n-й степени негрубости в замкнутой области* G, если она является негрубой системой, не являющейся негрубой системой степени, меньшей или равной $n-1$, и если она является релятивно грубой в множестве негрубых систем, не являющихся негрубыми системами степени, меньшей или равной $n-1$.

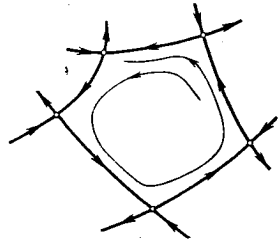


Рис. 98

Консервативные динамические системы (см. гл. 7), как уже указывалось, естественно рассматривать как динамические системы бесконечной степени негрубости.

Отметим, что условия, определяющие ту или другую степень негрубости, являются аналитическими условиями. При этом топологический характер траекторий в окрестности особой траектории той или другой степени негрубости может и не отличаться от характера траекторий в окрестности некоторой грубой особой траектории или особой траектории меньшей степени негрубости.

Укажем некоторые особые траектории или образования из особых траекторий степени негрубости выше первой.

1. Состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, кратности больше двух (т. е. для которого $P_2(1, 0) = 0$).

Такими состояниями равновесия являются в гл. 6 состояния равновесия, для которых $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$ и $m > 2$ (см. [69, 70]).

2. Состояния равновесия, для которых $\Delta = 0$ и $\sigma = 0$. Такие состояния равновесия также могут иметь различную кратность.

Характер таких состояний равновесия в зависимости от их кратности, а также других определяющих их величин может быть любым из типов, описанных в § 2 гл. 4, а также более сложным (примеры более сложных состояний равновесия см. § 3 гл. 4).

3. Сложный фокус кратности выше первой, т. е. такой, для которого $\sigma = 0$, т. е. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, а некоторое $\alpha_i \neq 0$ $(i \geqslant 5)$.

4. Предельный цикл кратности больше двух (см. [7]).

5. Петля сепаратрисы, у которой в седле $O(x_0, y_0)$ (см. [8])

$$\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0.$$

6. Замкнутый контур, составленный из сепаратрис седел (рис. 98).

ГЛАВА 10

БИФУРКАЦИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§ 1. Определение бифуркации. *Бифуркацией* динамической системы мы будем называть изменение качественной (топологической) структуры разбиения на траектории, происходящее при переходе от данной негрубой системы

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) \tag{A}$$

к сколь угодно близкой измененной системе

$$\begin{aligned} dx/dt &= \bar{P}(x, y) = P(x, y) + p(x, y), \\ dy/dt &= \bar{Q}(x, y) = Q(x, y) + q(x, y), \end{aligned} \tag{$\bar{A}$}$$

имеющей качественную структуру, отличную от качественной структуры системы (A). При этом под измененными системами, близкими к системе (A), будем (см. § 8 гл. 8) понимать систему, у которых не только сами правые части $\bar{P}(x, y)$ и $\bar{Q}(x, y)$ соответственно близки к $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, но и частные производные от $\bar{P}(x, y)$ и $\bar{Q}(x, y)$ до некоторого определенного (каждый раз устанавливаемого) порядка близки.

У всякой негрубой системы (A) непременно существует по крайней мере одна негрубая особая траектория, т. е. либо негрубое состояние равновесия, либо негрубый предельный цикл, либо негрубая сепаратриса состояния равновесия.

Рассматривая изменение качественного характера траекторий в некоторой достаточно малой окрестности какой-либо негрубой особой траектории (т. е. в окрестности особой точки, в окрестности замкнутой траектории, в окрестности сепаратрисы или некоторого контура, составленного из сепаратрис), мы будем говорить, что рассматривается *бифуркация негрубой особой траектории* (или контура, составленного из особых траекторий) того или другого типа.

Простейшей бифуркацией называется бифуркация при переходе от данной системы (A), являющейся системой первой степени негрубости, к сколь угодно близким грубым системам. При рассмотрении простейших бифуркаций системой ($\bar{A}$), близкой к системе (A), мы будем, так же как и в гл. 9, считать систему, у которой правые части $\bar{P}(x, y)$ и $\bar{Q}(x, y)$ и их производные до

третьего порядка близки соответственно к $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и производным от них до третьего порядка.

Как мы видели, в случае, когда система (А) является системой первой степени негрубости, у нее имеется негрубая (независимая) траектория одного из следующих типов:

а) двукратное состояние равновесия седло-узел;

б) сложный фокус первого порядка;

в) двойной предельный цикл;

г) сепаратриса, идущая из одного седла в другое, или сепаратриса, идущая из седла в то же седло (образующая петлю), в случае, когда в этом седле $O(x, y)$

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Мы рассмотрим каждую из этих негрубых траекторий и их бифуркации.

Мы уже говорили, что (см. § 8 гл. 8) Пуанкаре фактически пользовался понятием грубости двумерных консервативных систем (в классе консервативных систем) и рассматривал изменение качественной структуры таких систем при изменении параметра [1]). Им же введены термины «бифуркация», «бифуркационное значение параметра», которые использовались впоследствии в [2, 3] (и в настоящей книге) в более широком смысле.

§ 2. Бифуркации систем первой степени негрубости.

I. Бифуркации двукратного состояния равновесия седло-узел. В этом случае линейной заменой переменных (на основании изложенного в гл. 4; случай $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$) систему можно привести к виду

$$\begin{aligned} dx/dt &= P_2(x, y) + P_3(x, y) + \ldots = P(x, y), \\ dy/dt &= by + Q_2(x, y) + \ldots = Q(x, y), \end{aligned} \tag{А}$$

где $P_k(x, y)$ — однородные многочлены степени k. При этом

$$P'_x(0, 0) + Q'_y(0, 0) = b \neq 0, \quad P_2(1, 0) = \gamma \neq 0.$$

В зависимости от знаков величин b и γ мы получаем различные случаи расположения узловой области и ее устойчивости (см. гл. 4).

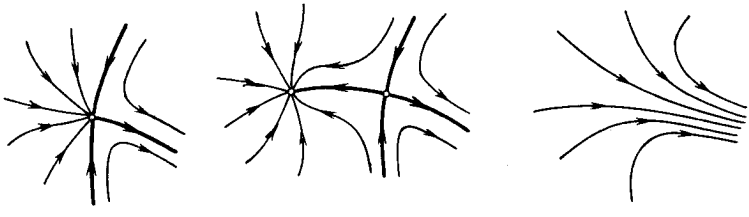
При достаточно малых изменениях правых частей (напомним, что мы рассматриваем только такие достаточно малые изменения правых частей, при которых их частные производные до третьего порядка достаточно мало меняются), при которых система делается грубой, возможны два случая:

---

[1]) Кроме весьма простых необходимых условий грубости состояний равновесия гамильтоновых систем для них существуют еще также условия грубости сепаратрис, которые мы здесь не приводим.

1) либо седло-узел (рис. 99, *а*) разделяется на два грубых состояния равновесия — седло и узел (узел устойчив, если $b = P'_x(0, 0) + Q'_y(0, 0) < 0$, и неустойчив, если $b = P'_x(0, 0) + Q'_y(0, 0) > 0$ (рис. 99, *б* при условии $b < 0$, $\gamma > 0$));

2) либо седло-узел исчезает (рис. 99, *в*).



а *б* *в*

Рис. 99

Точнее: если O — двукратное состояние равновесия типа седло-узел, то:

а) существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что всякая система $(\widetilde{A})$, δ_0-близкая $\left(\text{в } R^3_A\right)$ к системе (A), либо не имеет в ε_0-окрестности O ни одного состояния равновесия, либо имеет одно состояние равновесия типа седло-узел, либо имеет два грубых состояния равновесия, из которых одно — седло, а другое — узел, и больше никаких особых траекторий, целиком лежащих в ε_0-окрестности O;

б) при всяком $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует такое $\delta < \delta_0$, что у всякой δ-близкой к (A) системы $(\widetilde{A})$, у которой в ε_0-окрестности O существуют состояния равновесия, эти состояния равновесия лежат в ε-окрестности O.

II. Бифуркации сложного фокуса первого порядка, т. е. состояния равновесия O с чисто мнимыми характеристическими корнями ($\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$) и с не равной нулю первой ляпуновской величиной ($\alpha_3 = L_1 \neq 0$). Как было указано (см. § 5 гл. 3), в случае состояния равновесия с чисто мнимыми корнями все полупрямые с концом в точке O не имеют контактов с траекториями в достаточно малой окрестности O, и на достаточно близкой к O части (с концом в O) любой из таких полупрямых может быть построена функция последования, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \ldots$$

Коэффициент α_3 (в других принятых обозначениях L_1) и есть *первая ляпуновская величина.* В зависимости от знаков величин $b \neq 0$ и $L_1 \neq 0$ сложный фокус может быть разной устойчивости и по-разному закручиваться (см. рис. 48, 49). При достаточно малых изменениях правых частей, при которых система делается грубой (т. е. действительные части характеристических корней делаются не равными нулю):

1) сложный фокус делается грубым той же устойчивости, что и сложный фокус;

2) сложный фокус делается грубым фокусом противоположной устойчивости, и при этом из него появляется («рождается») предельный цикл той же устойчивости, что и сложный фокус.

(См. рис. 117, 118, на которых представлены бифуркации сложного фокуса в случаях 1) и 2).)

Точнее: если O — устойчивый (неустойчивый) сложный фокус первого порядка системы (A), то:

а) существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что у всякой системы $(\tilde{A})$, δ_0-близкой к (A), в ε_0-окрестности O может существовать либо один устойчивый (неустойчивый) сложный фокус первого порядка (и ни одной замкнутой траектории), либо неустойчивый (устойчивый) грубый фокус и устойчивый (неустойчивый) предельный цикл;

б) при всяком $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \varepsilon_0)$ можно указать $\delta > 0$ $(\delta < \delta_0)$ такое, что у всякой системы $(\tilde{A})$, δ-близкой к (A), у которой в ε_0-окрестности O существует фокус или предельный цикл, этот фокус или предельный цикл целиком лежит в ε-окрестности O.

III. Бифуркации двукратного (двойного) предельного цикла. *Двукратным предельным циклом* L_0 (см. § 4 гл. 9) называется такой цикл, что в функции последования $\bar{s} = \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots$,

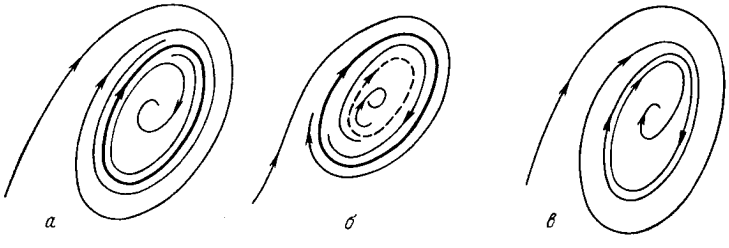


Рис. 100

построенной на дуге без контакта l_0, проведенной через какую-нибудь точку L_0, коэффициент $\alpha_1 = 1$, а $\alpha_2 \neq 0$.

Так как

$$\alpha_1 = \exp\left\{\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)\right] dt\right\},$$

то, очевидно, для двукратного цикла (рис. 100, *а*)

$$\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)\right] dt = 0, \quad \alpha_2 \neq 0.$$

При достаточно малых изменениях правых частей (удовлетворяющих условиям § 2 гл. 9), при которых система (A) грубая, возможны два случая:

1) двукратный предельный цикл разделяется на два грубых предельных цикла — устойчивый и неустойчивый (рис. 100, *б*);

2) двукратный предельный цикл исчезает (рис. 100, *в*).

IV. Бифуркации сепаратрисы, идущей из седла в седло. Возможны два случая.

IVа. Сепаратриса L_0 идет из седла O_1 в другое седло O_2 (см. рис. 91, *а* гл. 8).

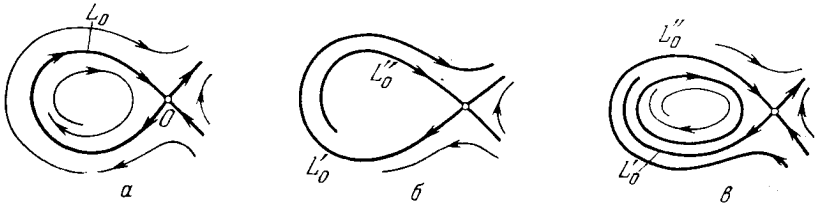


Рис. 101

IVб. Сепаратриса L_0 выходит из седла $O(x_0, y_0)$ и возвращается в то же седло (образует петлю) (рис. 101, *а*), и в седле $O(x_0, y_0)$

$$\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Величину σ_c мы назвали (см. гл. 9) *седловой величиной.*

Если в седле O

$$\sigma_c < 0,$$

то петля, образованная сепаратрисой L_0, устойчива (см. рис. 97).

Если в седле O

$$\sigma_c > 0,$$

то петля, образованная сепаратрисой L_0, неустойчива (см. рис. 96).

При всех достаточно малых добавках, удовлетворяющих условиям § 2 гл. 9, при которых система (А) является грубой, могут представиться следующие возможности.

Случай IVа. Сепаратриса L_0 может разделиться на две сепаратрисы (L_0' и L_0''), и при этом могут быть два различных поведения этих сепаратрис (см. рис. 91, *б*, *в*).

Случай IVб. Сепаратриса L_0, образующая петлю в системе (А), разделяется на две L_0' и L_0'', причем:

1) При одном характере поведения сепаратрис L_0' и L_0'' обе сепаратрисы L_0' и L_0'' уходят из окрестности бывшей петли сепаратрисы L_0, так же как и все отличные от седла траектории, проходящие через близкие к L_0' и L_0'' точки (рис. 101, *б*).

2) При другом характере поведения сепаратрис L_0' и L_0'' от петли, образованной сепаратрисой L_0, появляется (рождается)

предельный цикл C, к которому стремится одна из сепаратрис L_0' (или L_0'') (рис. 101, *в*). При этом:

Если в седле $O(x_0, y_0)$ системы (A) седловая величина σ_c была отрицательна, т. е.

$$\sigma_c = P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) < 0$$

(т. е. петля, образованная в системе (A) сепаратрисой L_0, была устойчива), то рождающийся из петли предельный цикл устойчив (как на рис. 101).

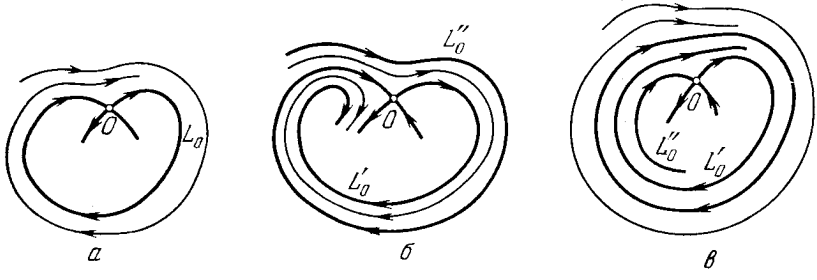


Рис. 102

Если седловая величина σ_c была положительна, т. е.

$$\sigma_c = P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) > 0$$

(т. е. петля была неустойчива), то рождающийся из петли предельный цикл неустойчив. То же справедливо в случае, представленном на рис. 102.

Точнее, можно сформулировать следующее предложение.

Если L_0 — сепаратриса системы (A), идущая из седла O_1 в седло O_2, то:

а) существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что у всякой системы $(\widetilde{A})$, δ-близкой к (A), в ε_0-окрестности L_0 седел O_1 и O_2 существуют седла O_1' и O_2' и в ε_0-окрестности L_0 либо существует сепаратриса, идущая из седла в седло (и, кроме этой сепаратрисы и двух седел, больше нет ни одной негрубой особой траектории), либо нет сепаратрисы, идущей из седла в седло, и тогда система $(\widetilde{A})$ является грубой;

б) при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует $\delta < \delta_0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) такое, что у всякой системы $(\widetilde{A})$, δ-близкой к (A), у которой в ε-окрестности L_0 существует сепаратриса, идущая из седла в седло, эта сепаратриса целиком лежит в ε_0-окрестности L_0.

Если L_0 — сепаратриса седла $O(x_0, y_0)$ системы (A), образующая петлю, причем

$$\sigma_c = P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) \neq 0,$$

то:

а) существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что у всякой δ_0-близкой к (A) системы $(\widetilde{A})$ в ε_0-окрестности L_0 лежат седло O' и либо сепаратриса L_0' седла O', образующая петлю (и, кроме L_0' и седла O', нет ни одной особой

траектории, целиком лежащей в ε_0-окрестности L_0), либо устойчивый при $\sigma_c < 0$ (соответственно неустойчивый при $\sigma_c > 0$) предельный цикл C, к которому стремится одна из сепаратрис (L_0') седла O' (и, кроме седла O' сепаратрисы L_0' и указанного цикла, больше нет ни одной особой траектории, целиком лежащей в ε_0-окрестности L_0), либо, наконец, лежит только седло O' (все сепаратрисы которого при возрастании или убывании выходят из ε_0-окрестности L_0) и больше нет ни одной особой траектории, целиком лежащей в ε_0-окрестности L_0;

б) при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует $\delta < \delta_0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) такое, что у всякой системы $(\tilde{A})$, δ-близкой к (A), у которой в ε_0-окрестности L_0 существует сепаратриса L_0', образующая петлю или предельный цикл, эта сепаратриса или предельный цикл целиком лежит в ε-окрестности L_0.

Таким образом, условие $\sigma_c < 0$ ($\sigma_c > 0$), достаточное для устойчивости (неустойчивости) петли, одновременно является необходимым условием того, чтобы при надлежащем характере разделения сепаратрис от петли рождался устойчивый (неустойчивый) предельный цикл и притом единственный.

V. Бифуркации сепаратрис седло-узла. Рождение предельного цикла из сепаратрисы седло-узла. Пусть у системы (A), являющейся системой первой степени негрубости, негрубой особой траекторией является седло-узел $O(x_0, y_0)$. Тогда в силу условий Г (см. гл. 9) ни одна из сепаратрис седло-узла не может идти в седло или являться и ω- и α-сепаратрисой седло-узла.

Пусть L_1 и L_2 — сепаратрисы седло-узла O, ограничивающие узловую область седло-узла, и L_0 — третья сепаратриса седло-узла.

В случае $P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) < 0$ узловая область седло-узла является устойчивой (ω-узловой), а сепаратрисы L_1 и L_2 — ω-сепаратрисами.

В случае $P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) > 0$ узловая область седло-узла является неустойчивой (α-узловой), а L_1 и L_2 — α-сепаратрисами.

Возможны следующие типы поведения сепаратрисы L_0, согласующиеся с условиями Г (см. § 6 гл. 9).

Va. Сепаратриса L_0 стремится к узлу, фокусу или предельному циклу [2]) при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ в зависимости от того, будет ли L_0 α- или ω-сепаратрисой седло-узла, и, значит, в зависимости от того, будет ли в седло-узле

$$P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) < 0$$

или

$$P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) > 0.$$

В этом случае возможные бифуркации сепаратрисы L_0 очевидны. Один из примеров изображен на рис. 103.

[2]) Так как мы предполагаем, что система (A) является системой первой степени негрубости, то в силу условий Г кроме седло-узла O все остальные особые траектории этой системы грубые.

Рис. 103, *б* соответствует тому случаю, когда седло-узел (рис. 103, *а*) разделяется на седло и узел, рис. 103, *в* — случаю, когда седло-узел исчезает.

Vб. Сепаратриса L_0 стремится к седло-узлу O и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$, однако не является ω- и α-сепаратрисой седло-узла (рис. 104, *а*).

В этом случае при достаточно малых добавках к правым частям системы (А), при которых седло-узел разделяется (на

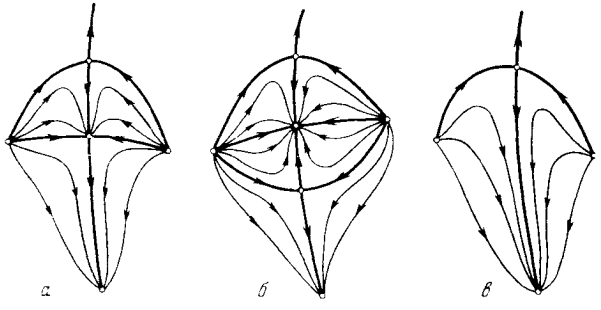


Рис. 103

седло и узел), мы получаем, очевидно, в окрестности L_0 качественную структуру, изображенную на рис. 104, *б*.

При достаточно малых добавках, при которых седло-узел исчезает, от сепаратрисы L_0 рождается предельный цикл, и притом

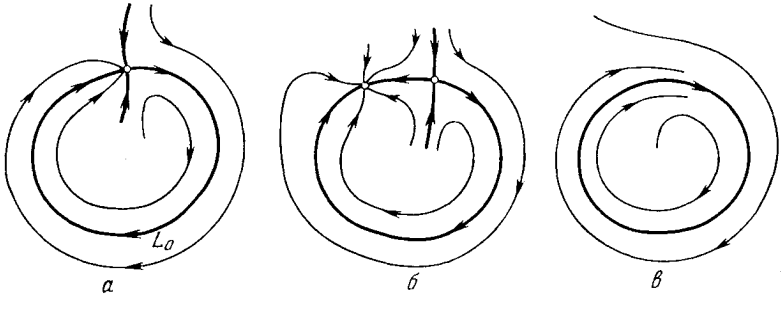


Рис. 104

единственный (рис. 104, *в*). Этот предельный цикл устойчив, если в седло-узле мы имели

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) < 0,$$

и неустойчив, если в седло-узле мы имели

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) > 0.$$

Точнее:

а) существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что в ε_0-окрестности сепаратрисы L_0 седло-узла $O(x_0, y_0)$ системы (А), идущей из седло-узла в него же, у всех δ_0-близких к системе (А) систем $(\tilde{A})$ существует не более одного предельного цикла;

б) при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно указать $\delta < \delta_0$ такое, что у всякой системы $(\tilde{A})$, δ-близкой к системе (А) и такой, у которой в ε_0-окрестности седло-узла O нет состояний равновесия, существует предельный цикл, целиком лежащий в ε-окрестности сепаратрисы L_0, и притом этот предельный цикл устойчив, если $P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) < 0$, и неустойчив, если $P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) > 0$.

§ 3. Бифуркации некоторых типов сложных особых точек. Пусть для рассматриваемой системы

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y)$$

точка $O(x_0, y_0)$ является (изолированной) сложной особой точкой, т. е. особой точкой, для которой

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае всегда можно так изменить правые части этой системы, чтобы «сложная точка O» распалась на несколько особых точек, т. е. чтобы у соответствующей измененной системы

$$dx/dt = \bar{P}(x, y) = P(x, y) + p(x, y),$$
$$dy/dt = \bar{Q}(x, y) = Q(x, y) + q(x, y)$$

в достаточно малой окрестности точки O было несколько особых точек. Поэтому естественно ввести понятие **кратности** особой точки.

Определение. Особая точка $O(x_0, y_0)$ системы (А) называется *m-кратной*, если: а) существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, что при всевозможных δ_0-добавках ранга m у соответствующей системы $(\bar{A})$ в ε_0-окрестности O может быть не более чем m особых точек; б) при любых $\delta < \delta_0$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ всегда существуют такие δ-добавки ранга m, при которых у соответствующей системы $(\bar{A})$ в ε-окрестности точки O существует m грубых особых точек [3]).

[3]) Если бы среди m особых точек, на которые при сколь угодно малых добавках разделяется данная сложная особая точка O, была бы сложная особая точка (т. е. такая, для которой $\Delta = 0$), то всегда можно было бы указать такие сколь угодно малые добавки, при которых особая точка O разделялась бы более чем на m особых точек, что противоречит условию а). Если бы среди особых точек, на которые разделяется O, была бы простая, но не грубая особая точка (т. е. такая, для которой $\Delta > 0$, $\sigma = 0$), то всегда можно было бы указать и такие сколь угодно малые добавки, при которых все особые точки были бы грубыми. Кратность сложного состояния равновесия, очевидно, совпадает с кратностью общей точки любых двух различных изоклин, проходящих через эту особую точку.

Очевидно, особая точка кратности m может при надлежащем выборе добавок разделяться и на меньшее, чем m, число особых точек, и, в частности, могут быть такие сложные особые точки, которые при надлежащим образом выбранных, но сколь угодно малых добавках исчезают (например, седло-узел).

Теорема 1. *Индекс сложной особой точки O кратности m равен сумме индексов тех особых точек, на которые сложная особая точка O может разделяться при сколь угодно малых добавках ранга m.*

I. Разделение при малых добавках к правым частям системы (A) сложной особой точки O с одним нулевым характеристическим корнем (т. е. особой точки, для которой $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$) на грубые особые точки. Такая сложная особая точка была рассмотрена в гл. 4. В окрестности такой особой точки, как мы видели (см. § 2 гл. 4), система может быть приведена линейным неособым преобразованием к виду

$$\begin{aligned} dx/dt &= P(x, y) = P_2(x, y), \\ dy/dt &= Q(x, y) = Q_2(x, y) + by, \end{aligned} \tag{A}$$

где $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$ — функции, разложения которых по степеням x, y начинаются с членов не ниже второй степени, и $b \neq 0$.

В гл. 4 были введены в рассмотрение следующие функции:

а) $y = \varphi(x)$, являющаяся решением уравнения

$$by + Q_2(x, y) = 0;$$

б) $z = \psi(x) = P_2(x, \varphi(x)) = \Delta_m x^m + \ldots$ (не выписанные члены содержат x в степени выше m), где $\Delta_m \neq 0$ и $m \geqslant 2$.

Как мы видели (см. гл. 4), четность и нечетность m и знак Δ_m и b определяли характер рассматриваемой особой точки.

Наряду с системой (A) будем рассматривать измененную систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= P(x, y) + p(x, y) = \bar{P}(x, y), \\ dy/dt &= Q(x, y) + q(x, y) = \bar{Q}(x, y). \end{aligned} \tag{$\tilde{\text{A}}$}$$

Теорема 2. *Если $\Delta_m \neq 0$, то кратность особой точки O системы* (A) *есть m* [4]).

Теорема 3. *Если кратность особой точки O системы* (A) *есть m ($m \geqslant 2$), то число грубых состояний равновесия (O_1, O_2, ..., O_k) системы* ($\tilde{\text{A}}$), *на которые точка O может разделиться при сколь угодно малых добавках $p(x, y)$ и $q(x, y)$ ранга m, при m нечетном может быть любым нечетным числом, меньшим*

[4]) Очевидно, m является также кратностью общей точки O изоклин системы (A).

или равным m, при m четном — любым четным числом, меньшим или равным m; при этом:

1) *если O имеет характер узла (т. е. m нечетно и $\Delta_m < 0$), то число грубых узлов среди особых точек $O_1, \ldots, O_k$ системы (Ā) на единицу больше числа грубых седел;*

2) *если O имеет характер седла (т. е. m нечетно и $\Delta_m > 0$), то число грубых седел среди особых точек $O_1, \ldots, O_k$ системы (Ā) на единицу больше числа грубых узлов;*

3) *если O имеет характер седло-узла (т. е. m четно), то среди особых точек $O_1, \ldots, O_k$ системы (Ā) число узлов равно числу седел.*

Замечание 1. В силу того, что в рассматриваемой особой точке $\sigma \neq 0$, ни при каких (достаточно малых) добавках среди грубых особых точек $O_1, \ldots, O_k$ системы (Ā) не может быть фокусов и не может быть также предельных циклов, рождающихся из состояния равновесия O (это элементарно устанавливается использованием критерия Дюлака).

Замечание 2. Из настоящей теоремы, очевидно, следует, что индекс состояния равновесия $O(0, 0)$ системы (A), имеющего характер узла, равен $+1$, имеющего характер седла, равен -1, и имеющего характер седло-узла, равен 0.

В случае системы (A) изоклины, имеющие наклон, отличный от нуля, не имеют особенности в точке O[5]).

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом простейшем случае сложной особой точки ее качественный характер полностью определяется числом и характером грубых состояний равновесия, на которые она разделяется.

II. Разделение при малых добавках к правым частям системы (A) сложной особой точки O (0, 0) с двумя нулевыми корнями ($\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$), для которой $|P'_x(0, 0)| + |P'_y(0, 0)| + |Q'_x(0, 0)| + |Q'_y(0, 0)| \neq 0$, на грубые особые точки. Как уже было указано в гл. 4, в этом случае система может быть приведена линейным неособым преобразованием к виду

$$dx/dt = by + P_2^*(x, y) = P(x, y), \quad dy/dt = Q_2^*(x, y) = Q(x, y); \quad \text{(B)}$$

как и в гл. 4, рассмотрим функции:

1) функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением уравнения

$$by + P_2^*(x, y) = 0;$$

2) функцию

$$z = \psi(x) = Q_2^*(x, \varphi(x)) = \Delta_m x^m + \ldots$$

---

[5]) Здесь, очевидно, речь идет об особенности кривой, а не дифференциального уравнения.

Здесь $m \geqslant 2$ и $\Delta_m \neq 0$.

Наряду с системой (B) будем рассматривать всевозможные измененные системы

$$\begin{aligned} dx/dt &= \bar{P}(x, y) = P(x, y) + p(x, y), \\ dy/dt &= \bar{Q}(x, y) = Q(x, y) + q(x, y), \end{aligned} \tag{$\tilde{\text{B}}$}$$

достаточно близкие до ранга m к системе (B).

Имеют место предложения, полностью аналогичные теоремам 1 и 2.

Теорема 4. *Если* $\Delta_m \neq 0$, *то кратность особой точки* O *системы* (B) *есть* m.

Теорема 5. *Если* m — *кратность состояния равновесия* O, *то число* k *грубых состояний равновесия системы* ($\tilde{\text{B}}$) $O_1, \ldots, O_k$, *на которые* O *может разделиться при сколь угодно малых добавках* $p(x, y)$ *и* $q(x, y)$ *ранга* m, *при* m *нечетном может быть любым нечетным числом, меньшим или равным* m, *при* m *четном — любым четным числом, меньшим или равным* m, *и при этом*:

1) *если* m *нечетно и особая точка* O *либо имеет характер узла или фокуса, либо является особой точкой с эллиптической областью, то среди особых точек* $O_1, O_2, \ldots, O_k$ *системы* ($\tilde{\text{B}}$) *число грубых узлов или фокусов на единицу больше числа грубых седел*;

2) *если* m *нечетно и* O *имеет характер седла, то среди особых точек* $O_1, \ldots, O_k$ *число грубых седел на единицу больше числа грубых узлов или фокусов*;

3) *если* m *четно, т. е. особая точка* O *либо является вырожденной особой точкой, либо имеет характер седло-узла, то число грубых узлов или фокусов равно числу седел.*

Замечание 1. В рассматриваемом случае $\sigma = 0$ всегда можно указать такие, сколь угодно малые до ранга m добавки, при которых среди грубых особых точек $O_1, \ldots, O_k$ системы ($\tilde{\text{B}}$) были бы фокусы и такие добавки, при которых существовали бы предельные циклы (целиком лежащие в сколь угодно малой окрестности O).

Замечание 2. Индекс особой точки O системы (B), имеющей характер узла, фокуса или являющейся особой точкой с эллиптической областью, равен $+1$, индекс особой точки O, имеющей характер седла, равен -1 и индекс особой точки O, имеющей характер седло-узла или вырожденной, равен 0.

§ 4. Бифуркации двукратной точки, для которой $\Delta = 0$ и $\sigma = 0$. В предыдущих параграфах было рассмотрено расщепление при малых изменениях правых частей некоторых типов сложных состояний равновесия на грубые состояния равновесия (можно также установить расщепление на состояния равновесия, среди

которых существуют сложные состояния равновесия меньшей кратности). Для сложного состояния равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, все бифуркации исчерпывающим образом описываются числом и характером состояний равновесия, на которые это сложное состояние равновесия может разделиться. Для сложных состояний равновесия, для которых $\Delta = 0$, $\sigma = 0$, это не так. Действительно, как было указано, из этих состояний равновесия возможно рождение предельных циклов. В настоящем параграфе мы рассмотрим двукратное состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma = 0$ и выполнены еще некоторые дополнительные условия. Такое состояние равновесия неоднократно встречается в рассматриваемых далее примерах, и знание его бифуркаций дает весьма полезную информацию при качественном исследовании конкретных систем.

Как мы уже указывали в гл. 4, состояние равновесия $O(x_0, y_0)$, для которого выполняются условия

$$\Delta(x_0, y_0) = \sigma(x_0, y_0) = 0,$$

$$|P'_x(x_0, y_0)| + |P'_y(x_0, y_0)| + |Q'_x(x_0, y_0)| + |Q'_y(x_0, y_0)| \neq 0,$$

может быть приведено линейной заменой к виду

$$dx/dt = by + P_2^*(x, y) = P(x, y), \quad dy/dt = Q_2^*(x, y) = Q(x, y). \quad (1)$$

Полагая

$$by + P_2^*(x, y) = v,$$

выражая из этого соотношения y через x и v и переходя к переменным x и v, мы придем к системе вида

$$dx/dt = v, \quad dv/dt = Q_2^*(x, v).$$

Возвращаясь к прежним обозначениям для переменных и записывая полученную систему подробнее, мы получим

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + Q_3(x, y), \qquad (2)$$

где $Q_3(x, y)$ начинается с членов степени, большей или равной трем.

Нетрудно убедиться в том, что в силу предположения о двукратности состояния равновесия $a_{20} \neq 0$. В силу теоремы 3 § 2 гл. 4 это состояние равновесия O имеет вид, представленный на рис. 105, *а*. Предположим, кроме того, что $a_{11} \neq 0$. Смысл этого условия будет ясен из дальнейшего.

Будем наряду с системой (2) рассматривать всевозможные, достаточно близкие к ней до ранга 3 системы. Так как качественный характер тех близких систем, у которых в окрестности $O(0, 0)$ нет ни одного состояния равновесия, очевиден (рис. 105, *б*), то мы обратимся к рассмотрению близких систем, имеющих состояния равновесия. Такие близкие системы можно,

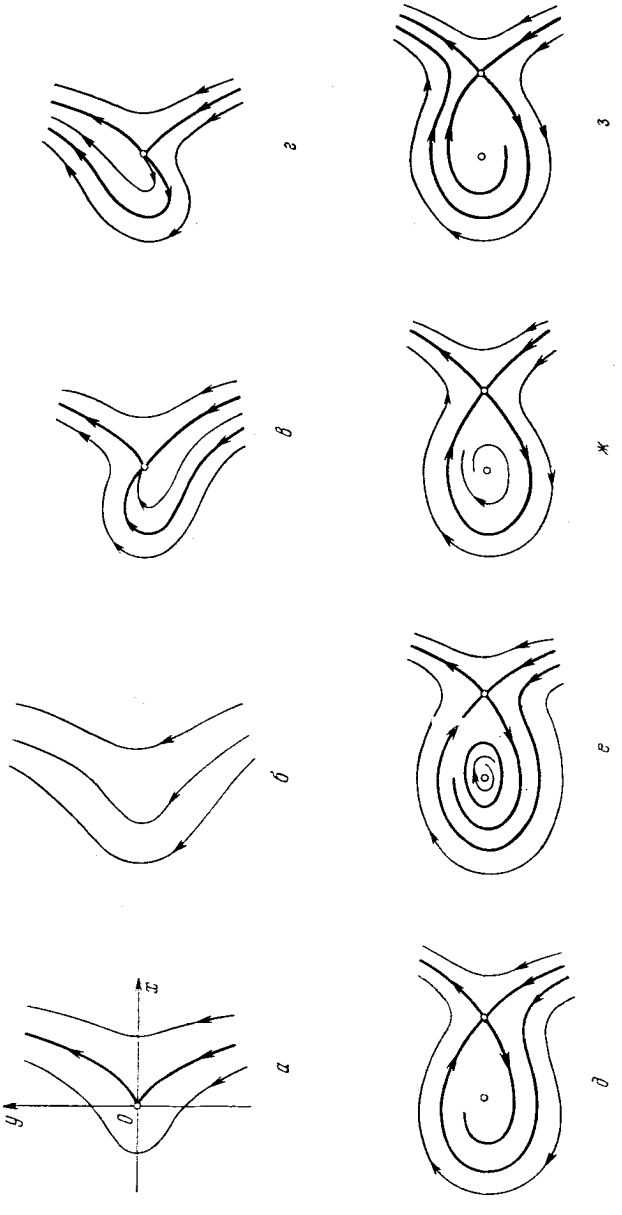


Рис. 105

как нетрудно показать, всегда представить в виде

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -\varepsilon^2 x + \mu y + \tilde{Q}_2(x, y),$$
$$\tilde{Q}_2(x, y) = \tilde{a}_{20}x^2 + \tilde{a}_{11}xy + \tilde{a}_{02}y^2 + \tilde{Q}_3(x, y), \tag{3}$$

где $\tilde{Q}_3(x, y)$ начинается со степеней по x и y, не меньших трех. Нетрудно видеть, что в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $O(0, 0)$ системы (2) у всевозможных систем (3) может быть: 1) одно двукратное состояние равновесия того же типа, что и у исходной системы; 2) одно двукратное состояние равновесия типа седло-узел (при $\varepsilon = 0$, $\mu \neq 0$) с устойчивым узловым сектором при $\mu < 0$, и неустойчивым при $\mu > 0$ (рис. 105, *в*, *г*); 3) два грубых состояния равновесия: узел или фокус и седло (узел при $\mu \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ и $\mu^2 > 4\varepsilon^2$ и фокус при $\mu \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ и $\mu^2 < 4\varepsilon^2$); 4) два состояния равновесия — сложный фокус и седло при $\mu = 0$, $\varepsilon \neq 0$ (рис. 105, *д*).

Непосредственным вычислением устанавливается, что первая ляпуновская величина сложного фокуса имеет вид

$$L_1 = \frac{\pi}{2^6}\left[\tilde{a}_{20}\tilde{a}_{11} + \varepsilon f(\tilde{a}_{ik}, \varepsilon)\right],$$

где $f(\tilde{a}_{ik}, \varepsilon)$ — функция, зависящая от коэффициентов $\tilde{a}_{ik}$ в разложении $\tilde{Q}_2(x, y)$, в которых $i + k \geqslant 3$. Так как в силу предположения $a_{20}a_{11} \neq 0$, то для всех достаточно близких систем (3) $\tilde{a}_{20}\tilde{a}_{11} \neq 0$ и, следовательно,

$$L_1 \neq 0.$$

Таким образом, сложный фокус, возможный у близких систем (при $\mu = 0$), является устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака выражения $a_{20}a_{11}$, и из него может рождаться единственный цикл — соответственно устойчивый или неустойчивый (рис. 105, *е*). Однако того факта, что из сложного фокуса системы (3) может рождаться единственный предельный цикл еще недостаточно для того, чтобы сделать заключение о том, что в достаточно малой окрестности состояния равновесия O системы (3) может быть только один предельный цикл, так как предельные циклы могут еще появляться из двукратных предельных циклов, появляющихся из «уплотнения траекторий».

Если предполагать, что цикл единственный, то для различных достаточно близких к (2) систем (3) возможна, кроме указанных выше, одна из качественных структур, представленных на рис. 105, *ж*, *з*.

Отметим, что знание возможных бифуркаций двукратной точки с двумя нулевыми корнями может оказаться весьма полезным при качественном исследовании конкретных динамических систем.

§ 5. Рождение предельных циклов из особых траекторий степени негрубости выше первой. I. В § 2 было рассмотрено рождение предельного цикла из сложного фокуса первого порядка, т. е. из состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями, для которого первая ляпуновская величина

$$L_1 = \alpha_3 \neq 0.$$

Здесь рассматривается случай, когда система (A) имеет сложный фокус кратности $m > 1$, т. е. состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями такое, что первый, не равный нулю коэффициент α_i $(i > 1)$ функции последования есть

$$\alpha_{2m+1} = L_m \neq 0, \quad m > 1.$$

Как и всюду, наряду с данной системой

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y), \tag{A}$$

имеющей сложный фокус порядка $m > 1$, будем рассматривать измененную систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= \tilde{P}(x, y) = P(x, y) + p(x, y), \\ dy/dt &= \tilde{Q}(x, y) = Q(x, y) + q(x, y), \end{aligned} \tag{$\tilde{\text{A}}$}$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — достаточно малые добавки ранга $2m + 1$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *При любом $k \leqslant m$ всегда можно подобрать такие (сколь угодно малые добавки) $p(x, y)$ и $q(x, y)$ ранга $2m + 1$, чтобы при переходе от системы* (A) *к системе* ($\tilde{\text{A}}$) *из сложного фокуса рождалось k грубых предельных циклов.*

Точнее: пусть $O(0, 0)$ — сложный фокус порядка m системы (A) (т. е. $L_m = \alpha_{2m+1} \neq 0$, $\alpha_i = 0$, $i < 2m + 1$), тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что при любых δ_0-добавках ранга $2m + 1$ у системы ($\tilde{\text{A}}$) в ε_0-окрестности O может существовать не более m предельных циклов, и, какое бы $k \leqslant m$ мы ни взяли, при любых $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\delta < \delta_0$ существуют δ-добавки ранга $2m + 1$ такие, при которых у системы ($\tilde{\text{A}}$) в ε-окрестности O существует k предельных циклов, и все эти предельные циклы целиком лежат в ε-окрестности O.

Всегда можно также подобрать такие сколь угодно малые добавки ранга $2m + 1$, чтобы из сложного фокуса O рождался негрубый цикл любой кратности $k \leqslant m$, или s предельных циклов соответственно кратностей $n_1, n_2, \ldots, n_s$ таких, чтобы сумма их кратностей не превышала m.

Пусть теперь O есть центр системы (A). Тогда, какое бы целое k мы ни взяли, всегда можно указать систему ($\tilde{\text{A}}$), сколь угодно близкую до ранга $2k + 1$ к системе (A) и такую, что в данной сколь угодно малой окрестности O у этой системы существует k предельных циклов.

II. Предположим теперь, что система (A) имеет сложный предельный цикл L_0 кратности m выше 2 ($m>2$); т. е. если рассмотреть функцию последования на дуге без контакта l, проведенной через какую-нибудь точку предельного цикла L_0

$$\bar{s} = \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots$$

(s — параметр на дуге l), то мы будем иметь

$$\alpha_1 = \exp\left\{\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)\right] dt\right\} = 1$$

($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ — решение, соответствующее предельному циклу L_0, τ — период на L_0), $\alpha_2=0$ и первый, не равный нулю коэффициент функции последования —

$$\alpha_m \neq 0, \quad m \geqslant 3.$$

Имеет место следующая теорема (аналогичная теореме 6).

Теорема 7. *Всегда можно указать сколь угодно малые добавки $p(x, y)$ и $q(x, y)$ ранга m такие, чтобы при переходе от системы* (A) *к системе* ($\tilde{\text{A}}$) *от замкнутой траектории L_0 системы* (A) *рождалось любое число k ($k \leqslant m$) грубых циклов или k_1 ($k_1 \leqslant m$) предельных циклов кратностей n_i таких, что*

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{k_1} = m.$$

Точнее: если L_0 — сложный предельный цикл кратности m системы (A), то существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что при любых δ_0-добавках ранга m в ε_0-окрестности L_0 существует не более m предельных циклов, и, какое бы $k \leqslant m$ мы ни взяли, при любом $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ и такие δ-добавки ранга m, $p(x, y)$ и $q(x, y)$, чтобы у соответствующей системы ($\tilde{\text{A}}$) в ε-окрестности L_0 существовало k грубых предельных циклов, и все эти предельные циклы лежали в ε-окрестности L_0 или k_1 предельных циклов кратностей $n_1, n_2, \dots, n_{k_1}$, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leqslant m$.

III. Рассмотрим случай, когда сепаратриса седла $O(x_0, y_0)$ образует петлю, и при этом в седле

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0.$$

В этом случае возможен как случай, когда петля устойчива, так и случай, когда петля неустойчива, а также случай, когда все траектории, проходящие через близкие к петле точки, замкнуты.

Можно показать, что в этом случае заведомо существуют такие сколь угодно малые до ранга 3 (или до ранга $m>3$) добавки, что у соответствующей системы (A) существует не менее двух предельных циклов в сколь угодно малой окрестности петли (см. [84]).

ГЛАВА 11

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПРАВЫЕ ЧАСТИ КОТОРЫХ СОДЕРЖАТ ПАРАМЕТРЫ

§ 1. Возможный характер зависимости правых частей динамической системы от параметров. Динамические системы, правые части которых зависят от того или другого числа параметров, всегда естественно возникают при рассмотрении различных задач из приложений.

Пусть правые части динамической системы зависят от n параметров, т. е. имеют вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= P(x,\ y,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n), \\ dy/dt &= Q(x,\ y,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n). \end{aligned} \qquad (A_\lambda)$$

Мы будем предполагать, что правые части являются аналитическими функциями не только переменных x, y, но и параметров λ_i.

Если обратиться к рассмотрению одного из общих пространств динамических систем R_A^m (см. гл. 8), то, очевидно, при каждом наборе значений параметров λ_i мы получаем точку в этом пространстве, а при всевозможных значениях параметров λ_i — в пространстве R_A^m выделяется n-мерное подпространство динамических систем (A_λ).

Очевидно, что, в частности, система (A_λ) может быть негрубой при всех значениях параметров λ. Так, например, мы можем рассматривать систему вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial x},$$

которая является гамильтоновой системой при всех значениях параметров (т. е. с точки зрения введенной классификации — бесконечной степени негрубости)[1]).

[1]) В случае, когда мы рассматриваем всевозможные динамические системы с аналитическими правыми частями. Как уже было указано в § 8 гл. 8, если мы ограничиваемся рассмотрением только множества гамильтоновых систем, то можно естественным образом ставить вопрос о грубости внутри этого множества, как это фактически и было сделано А. Пуанкаре.

Очевидно, также возможны системы вида (A_λ), не являющиеся гамильтоновыми, но являющиеся негрубыми при всех значениях параметров. Например, при всех значениях параметров у системы может быть сложное состояние равновесия, сепаратриса, идущая из седла в седло, и т. д.

Однако в дальнейшем мы будем предполагать, что у рассматриваемых систем, правые части которых зависят от n параметров: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, в пространстве параметров (являющемся n-мерным пространством) не существует никакой n-мерной области, всем точкам которой соответствуют негрубые системы.

Это предположение является существенным для рассмотрения настоящей главы.

Можно считать, что это предположение является предположением о некотором общем случае расположения многообразия размерности n (выделенного в пространстве R_A^m системой (A_λ), правые части которой зависят от n параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) по отношению к тем подпространствам пространства R_A^m, которые соответствуют негрубым динамическим системам. Именно такой характер вхождения параметра типичен для задач теории колебаний.

При этом предположении грубые системы в пространстве параметров заполняют области. Действительно, если в n-мерном пространстве параметров существует хотя бы одна точка, которой соответствует грубая динамическая система, то тогда, очевидно, в пространстве параметров непременно будет существовать и целая n-мерная область, заполненная грубыми системами. Так как грубые системы выделяются условиями типа неравенств, полное качественное исследование системы типа (A_λ) сводится к установлению разбиения пространства параметров на области с одинаковой — грубой — качественной структурой и к установлению этой качественной структуры. Значения параметров λ_i, соответствующее грубым системам, будем называть *грубыми значениями параметров*, а области, заполненные грубыми значениями параметров,— *грубыми областями*.

Области, заполненные грубыми системами с различными качественными структурами, разделяются $n-1$-мерными «пленками», точкам которых соответствуют негрубые системы, причем в общем случае — это системы первой степени негрубости.

Действительно, системы первой степени негрубости — это системы, которые выделяются одним (и только одним) условием типа равенства (например)

$$\Delta(x_0, y_0) = 0,$$

или

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0,$$

или

$$\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)\right] dt = 0.$$

Это условие в пространстве параметров выделяет в общем случае n — 1-мерную поверхность — «пленку».

В математической литературе в настоящее время при рассмотрении функциональных пространств, а также введенного в гл. 8 пространства динамических систем, используется понятие «коразмерность». Не давая точного определения, поясним смысл этого понятия. В элементарном случае евклидова трехмерного пространства: «коразмерность 1» — множество точек (гладкая поверхность), задаваемое функцией $\Phi(x, y, z) = 0$ с градиентом, не равным нулю; «коразмерность 2» соответствует трансверсальным (без касания) пересечениям двух гладких поверхностей; «коразмерность 3» соответствует точке. В n-мерном пространстве: коразмерность 1 задается одним условием — $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ — это гладкая гиперповерхность с числом измерений $n - 1$; коразмерность 2 — гладкая гиперповерхность с числом измерений $n - 2$ и т. д. Таким образом, в евклидовом пространстве понятие коразмерности не вносит ничего нового по сравнению с числом измерений. Когда рассматривается функциональное пространство, точками которого являются, например, динамические системы, о числе измерений, как правило, говорить уже невозможно. Однако можно (по аналогии с конечномерными) ввести понятия: «гладкое функциональное соотношение», «гладкая гиперповерхность», удовлетворяющая одному функциональному соотношению между элементами этого пространства, а также понятие «трансверсальное» пересечение. Тогда множество элементов этого пространства, удовлетворяющее одному функциональному соотношению,— это множество коразмерности 1. Множество элементов, удовлетворяющих n функциональным соотношениям, определяющим n гладких гиперповерхностей, пересекающихся трансверсально,— множество коразмерности n. Пусть у динамической системы $\dot{x} = P$, $\dot{y} = Q$ есть единственный негрубый элемент — простое состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями и не равной нулю первой ляпуновской величиной. Если рассматривать всевозможные системы $\dot{x} = \tilde{P}$, $y = \tilde{Q}$, близкие к данной, на которые накладывается единственное требование сохранения чисто мнимых корней для близкого состояния равновесия (т. е. требование $\tilde{P}'_x + \tilde{Q}'_y = 0$), то динамические системы, удовлетворяющие этому условию, лежат на гиперповерхности коразмерности 1 в пространстве динамических систем («гладкость» этой поверхности устанавливается с использованием понятия «обобщенный градиент»). На гиперповерхности коразмерности 2 лежат, напри-

мер, динамические системы с состоянием равновесия с чисто мнимыми корнями и равной нулю первой ляпуновской величиной ($P'_x + Q'_y = 0$, $\alpha_3 = 0$) и т. д.

С «порядком» коразмерности 1, 2, ..., как и со «степенями» негрубости 1, 2, ..., связываются представления о возможных в системе при изменениях правых частей наборах бифуркаций. Понятия степеней негрубости связаны с этим более органично.

Как мы видели, при рассмотрении систем первой степени негрубости для таких систем запрещаются: а) случай, когда существует двукратный предельный цикл, на который извне и изнутри накручиваются сепаратрисы, и б) случай, когда на петлю сепаратрисы накручивается хотя бы одна сепаратриса. Оба эти случая невозможны в системах первой степени негрубости в силу данного определения таких систем, так что при наличии таких образований система рассматривается как система более высокой степени негрубости.

Между тем динамические системы, для которых осуществляется случай а) или б), в общем пространстве динамических систем заполняют пленки, т. е. имеют коразмерность 1. Действительно, в случае а) эта пленка выделяется условием наличия двукратного цикла, а в случае б) — условием наличия петли сепаратрисы. Однако эти пленки существенно отличаются от пленок, соответствующих системам первой степени негрубости: в любой их окрестности существуют другие негрубые пленки; как в случае а), так и в случае б) — это пленки, соответствующие сепаратрисе, идущей из одного седла в другое седло. Можно показать, что в указанных случаях а) и б) пленка является *недостижимой* границей области, заполненной грубыми системами, т. е. не существует простой дуги, соединяющей сколь угодно близкую точку грубой области с указанной пленкой, не пересекающей других пленок.

Мы уже отмечали, что понятия грубости и степени негрубости могут быть полностью аналогично введены и в других математических объектах. Рассмотрим, например, пространство кривых

$$F(x, y) = 0, \qquad (C)$$

где $F(x, y)$ — аналитическая функция.

Для таких кривых можно ввести понятие «грубой кривой» и кривой «первой степени негрубости», «второй степени негрубости» и т. д. Однако при этом возникает существенное различие с динамическими системами. Можно показать, что в пространстве кривых (C) множество кривых первой степени негрубости (и только кривых первой степени негрубости) является пленкой, и всякая такая пленка является достижимой в множестве грубых кривых. Множество кривых более высокой степени является пересечением двух (или более) пленок и всегда имеет

размерность меньшую, чем множество кривых первой степени негрубости. Можно показать, что все границы грубых областей пространства (C) достижимы.

Указанная разница между свойствами границ грубых областей в пространстве кривых (C) и в пространстве динамических систем R_A является несомненным отражением того обстоятельства, что, наряду с большими аналогиями, между ними существуют и существенные различия. Мы не можем здесь останавливаться на этих, с нашей точки зрения, весьма интересных вопросах.

Значения параметров $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$, соответствующие негрубой системе (при которых точка $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$ лежит хотя бы на одной пленке, разделяющей две различные грубые области), будем называть *бифуркационными значениями параметров*, а изменение качественной структуры, которое происходит в системе (A_λ) при переходе от бифуркационных значений параметров к грубым значениям параметров, как и в гл. 10, будем называть *бифуркацией*. Разбиение пространства параметров на «грубые области» и разделяющие их пленки, соответствующие негрубым системам, называется *бифуркационной диаграммой*.

В § 2 гл. 10, рассматривая исходную негрубую систему, мы устанавливали все возможные бифуркации при переходе от этой негрубой системы к любым достаточно близким грубым системам пространства.

Однако для задач из приложений при рассмотрении бифуркаций основной интерес представляет следующий вопрос: *какова последовательная смена качественных структур при изменении параметров вдоль кривой в пространстве параметров, проходящей через бифуркационное значение параметров и переходящей из одной грубой области в другую?*

Следующий параграф посвящен рассмотрению указанной смены качественных структур.

§ 2. Смена качественных структур при изменении параметров. Рассмотрим подробно случай, когда правые части системы содержат один параметр λ, так что система имеет вид [2])

$$dx/dt = P(x, y, \lambda), \quad dy/dt = Q(x, y, \lambda). \qquad (B_\lambda)$$

Пусть значение $\lambda = \lambda_0$ является бифуркационным, а все достаточно близкие к λ_0 значения $\lambda \neq \lambda_0$ соответствуют грубым системам (причем качественные структуры грубых систем при $\lambda < \lambda_0$ и $\lambda > \lambda_0$ различны). Рассмотрим сначала (как и в гл. 10) случай, когда значению λ_0 соответствует система первой степени не-

[2]) Мы предполагаем, что система (B_λ) определяется при значениях x и y в некоторой ограниченной области G и при значениях λ, $\lambda^* < \lambda < \lambda^{**}$, где, в частности, λ^* может быть $-\infty$, λ^{**} может быть $+\infty$.

грубости, т. е. когда система (B_{λ_0}) имеет один из негрубых особых элементов следующего характера (см. гл. 9, 10):

I. Двукратное состояние равновесия седло-узел.

II. Сложный фокус первого порядка.

III. Двойной предельный цикл.

IV. Сепаратрису, идущую из седла в седло, причем в случае, когда она идет из седла $O(x_0, y_0)$ в то же седло (образует петлю), седловая величина σ_c не равна нулю:

$$\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Рассмотрим последовательную смену качественных структур в некоторой достаточно малой окрестности (в ε_0-окрестности, где ε_0 — надлежащим образом подобранная величина) негрубого особого элемента в каждом из указанных случаев; значения λ рассматриваются в достаточно малом промежутке $(|\lambda - \lambda_0| < \delta_0)$, и при этом λ изменяется от значений $\lambda < \lambda_0$ к значениям $\lambda > \lambda_0$. Величина ε_0 подбирается так, чтобы в ε_0-окрестности рассматриваемого особого негрубого элемента типа I—IV не лежал целиком больше ни один особый элемент системы (B_{λ_0}), а δ_0 — так, чтобы при значениях $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$ λ_0 было единственным бифуркационным значением. Величины $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ имеют тот же смысл, что и в предложениях гл. 10.

Отметим еще, что в случае, когда система (B_λ) при $\lambda = \lambda_0$ является системой первой степени негрубости, смена качественных структур в окрестности негрубого особого элемента (типа I—IV) однозначно определяет смену качественных структур во всей области определения G системы (B_λ).

I. При $\lambda = \lambda_0$ система (B_{λ_0}) имеет двукратное состояние равновесия седло-узел O (т. е. состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$ и величина $\sigma \neq 0$).

Возможны следующие случаи смены качественных структур:

а) При $\lambda < \lambda_0$ $(|\lambda - \lambda_0| < \delta_0)$ в окрестности O нет ни одного состояния равновесия, при $\lambda = \lambda_0$ появляется седло-узел (из «сгущения траекторий»), при $\lambda > \lambda_0$ седло-узел разделяется на седло и узел.

б) При $\lambda < \lambda_0$ в окрестности O находятся два грубых состояния равновесия (седло и узел), при $\lambda = \lambda_0$ они сливаются в сложное двукратное состояние равновесия седло-узел, которое при $\lambda > \lambda_0$ исчезает (см. рис. 99 гл. 10, а также рис. 119 гл. 13).

II. При $\lambda = \lambda_0$ система (B_{λ_0}) имеет сложный фокус первого порядка (т. е. состояние равновесия $O(\lambda_0)$) с чисто мнимыми характеристическими корнями

$$\pm i\beta_0, \quad \beta_0 \neq 0,$$

и первой ляпуновской величиной, отличной от нуля (см. § 5 гл. 3):

$$L_1 = \alpha_3(\lambda_0) \neq 0.$$

При всех достаточно близких к λ значениях $\lambda \neq \lambda_0$ ($|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$) в ε_0-окрестности сложного фокуса $O(\lambda_0)$ существует грубый фокус $O(\lambda)$, который при изменении λ от значений $\lambda < \lambda_0$ к значениям $\lambda > \lambda_0$ из устойчивого делается неустойчивым[3]).

Таким образом, если $\alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$ — характеристические корни фокуса $O(\lambda)$, то при всех λ, $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$,

$$\beta(\lambda) \neq 0, \quad (\beta(\lambda_0) = \beta_0),$$

при $\lambda < \lambda_0$ $\alpha(\lambda) < 0$, при $\lambda > \lambda_0$ $\alpha(\lambda) > 0$, $\alpha(\lambda_0) = 0$.

В зависимости от знака $L_1 = \alpha_3$, т. е. в зависимости от того, является ли сложный фокус устойчивым или неустойчивым, возможны следующие случаи смены качественных структур в окрестности $O(\lambda_0)$:

а) $L_1 < 0$. При всех $\lambda < \lambda_0$ (достаточно близких к λ_0, $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$) в ε_0-окрестности $O(\lambda_0)$ существует устойчивый фокус $O(\lambda)$ (т. е. при $\lambda < \lambda_0$, $\alpha(\lambda) < 0$) и не существует ни одной замкнутой траектории.

При переходе через значение λ_0 из сложного устойчивого фокуса $O(\lambda_0)$ появляется единственный устойчивый предельный цикл, а фокус при $\lambda > \lambda_0$ делается неустойчивым (т. е. при $\lambda < \lambda_0$ $\alpha(\lambda) > 0$) (см. рис. 117 гл. 13);

б) $L_1 > 0$. При всех $\lambda < \lambda_0$ ($|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$) в ε_0-окрестности $O(\lambda_0)$ существует устойчивый фокус $O(\lambda)$ (при $\lambda < \lambda_0$ $\alpha(\lambda) < 0$), окруженный неустойчивым предельным циклом.

При $\lambda \to \lambda_0$ этот неустойчивый предельный цикл сжимается и при $\lambda = \lambda_0$ влипает в состояние равновесия $O(\lambda_0)$, которое теперь является неустойчивым фокусом. При $\lambda > \lambda_0$ фокус становится грубым неустойчивым ($\alpha(\lambda) > 0$). При $\lambda > \lambda_0$ в окрестности нет предельных циклов (см. рис. 118 гл. 13)[4]).

При обратном изменении λ (от значений $\lambda > \lambda_0$ к значениям $\lambda < \lambda_0$) смена качественных структур, очевидно, происходит в обратном порядке.

Не представляет также труда совершенно аналогично описать смену качественных структур, когда при изменении λ от значений $\lambda > \lambda_0$ к значениям $\lambda < \lambda_0$ фокус из неустойчивого делается устойчивым.

Замечание 1. Из проведенного рассмотрения очевидно следует, что сведений о смене устойчивости фокуса (т. е. знания

---

[3]) Эти случаи — смены устойчивости фокуса — представляют особенный интерес для приложений.

[4]) Очевидно, если бы мы изменяли λ в противоположном направлении, то при этом мы сказали бы, что неустойчивый цикл рождается из сложного неустойчивого фокуса.

того факта, что фокус из устойчивого делается неустойчивым) недостаточно для однозначного заключения о происходящей смене качественных структур (так как при этом может быть либо случай а), либо случай б)[5]): для этого необходимы еще дополнительно сведения об устойчивости или неустойчивости сложного фокуса при $\lambda = \lambda_0$, т. е. о знаке ляпуновской величины

$$L_1 = \alpha_3(\lambda_0).$$

Замечание 2. Значения λ_0, при которых состояние равновесия типа «узел» сливается с седлом (при $\lambda \to \lambda_0$, образуя при $\lambda = \lambda_0$ седло-узел), а также значения λ_0, при которых устойчивый при $\lambda < \lambda_0$ фокус делается сложным, а затем неустойчивым (при $\lambda > \lambda_0$), естественно рассматривать как граничные для области устойчивости, а условия $\Delta = 0$ или $\sigma = 0$ — как нарушение условий Раута — Гурвица (отрицательности действительных частей характеристического уравнения (см. § 4 гл. 13)).

III. При $\lambda = \lambda_0$ у системы (B_{λ_0}) существует двойной предельный цикл L_0, т. е. такой предельный цикл, для которого в функции последования, построенной на дуге без контакта, проведенной через какую-нибудь его точку

$$s = \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots, \quad \alpha_2 \neq 0,$$

$$\alpha_1 = \exp\left\{\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)\right] dt\right\} = 1$$

и, следовательно,

$$\int_0^\tau \left[P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)\right] dt = 0.$$

Тогда при переходе от значений $\lambda < \lambda_0$ $(|\lambda - \lambda_0| > \delta_0,\ \delta_0 > 0)$ к значениям $\lambda > \lambda_0$ в ε_0-окрестности L_0 $(\varepsilon_0 > 0)$ возможны следующие два случая смены качественных структур:

а) При $\lambda < \lambda_0$ $(|\lambda - \lambda_0| > \delta_0)$ в ε_0-окрестности L_0 нет ни одной замкнутой траектории. При $\lambda = \lambda_0$ появляется двукратный предельный цикл (из уплотнения траекторий), который затем при $\lambda > \lambda_0$ разделяется на два грубых предельных цикла — устойчивый и неустойчивый (см. рис. 100 гл. 10).

б) При $\lambda < \lambda_0$ в ε_0-окрестности L_0 существует два грубых предельных цикла, из которых один устойчивый, а другой неустойчивый. При $\lambda \to \lambda_0$ эти циклы сближаются, и при $\lambda = \lambda_0$ сливаются в двукратный предельный цикл, который при $\lambda > \lambda_0$ исчезает.

[5]) Эти случаи совершенно различны с точки зрения приложений: в случае а) при смене устойчивости фокуса появляются автоколебания с малой амплитудой, а в случае б) имеет место «срыв» изображающей точки.

Замечание 3. Если мы знаем, что у рассматриваемой системы при значении $\lambda = \lambda_0$ существует двукратный предельный цикл, то, как мы видели, вопрос о возможной смене качественных структур решается элементарно.

Однако вопрос об установлении факта появления двукратного предельного цикла (он появляется из уплотнения траекторий)[6]), об установлении отсутствия такого появления является одной из наиболее сложных задач теории бифуркаций, для решения которой в настоящее время нет сколько-нибудь общих методов (или приемов). Если не доказано (методом Дюлака, использованием топографической системы или еще каким-либо частным приемом) отсутствия предельных циклов, то мы, вообще говоря, не имеем никаких оснований для того, чтобы утверждать отсутствие любого числа двукратных предельных циклов, а следовательно, и любого четного числа предельных циклов. Мы не можем также (без дополнительных специальных сведений о правых частях) ни утверждать, что при изменении параметра λ не появляются двукратные предельные циклы, ни утверждать их появление. Правда, иногда косвенным рассуждением появление двукратных циклов удается показать (см. гл. 16).

IV. При $\lambda = \lambda_0$ у системы (B_{λ_0}) существует сепаратриса L, идущая из седла в седло.

Рассмотрим случай, когда сепаратриса L седла $O(x_0, y_0)$ образует петлю. В силу предположения о первой степени негрубости системы при $\lambda = \lambda_0$ седловая величина

$$\sigma_c = P'_x(x_0, y_0, \lambda_0) + Q'_y(x_0, y_0, \lambda_0) \neq 0.$$

В этом случае возможны следующие две смены качественных структур:

а) Пусть $\sigma_c < 0$ $(\sigma_c > 0)$. При всех $\lambda < \lambda_0$ $(|\lambda - \lambda_0| > \delta_0)$ в ε_0-окрестности седла $O(\lambda_0)$ лежит седло $O(\lambda)$. Все сепаратрисы седла $O(\lambda)$ выходят из ε_0-окрестности петли L: одни — при возрастании t, другие — при убывании t. Все отличные от $O(\lambda)$ и от сепаратрис траектории системы (B_λ), проходящие через ε_0-окрестность L, выходят из этой окрестности и при возрастании, и при убывании t.

---

[6]) Появление двукратных предельных циклов полностью аналогично появлению двукратных корней у функции (очевидно, при появлении двукратного цикла появляется двукратный корень у функции последования).

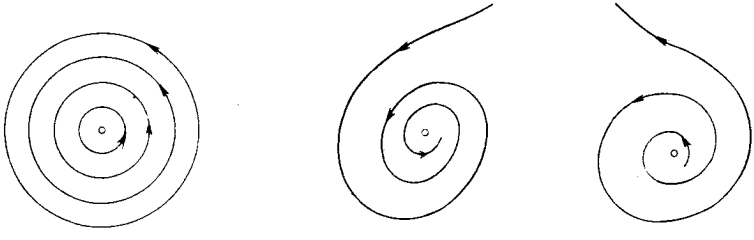
Именно, пусть рассматривается функция $y = f(x, \mu)$ (непрерывная, с непрерывными производными до порядка не меньшего двух) и ее корни, т. е. точки пересечения кривой $y = f(x, \mu)$ с осью x. При изменении μ функция $y = f(x, \mu)$ меняется, и при этом всегда может появиться двукратный корень (который при дальнейшем изменении μ может разделиться на два). Без априорных сведений о характере функции $f(x, \mu)$ мы не можем ни утверждать, что такое появление двукратного корня невозможно, ни утверждать его наличие.

При $\lambda \to \lambda_0$ две из сепаратрис седла $O(\lambda) - L'$ и L'' сближаются и при $\lambda = \lambda_0$ совпадают в одну сепаратрису L, образующую устойчивую (неустойчивую) петлю. При $\lambda > \lambda_0$ сепаратриса L разделяется на две — L^* и L^{**} (с другим взаимным расположением, чем L' и L''), и при этом из петли рождается единственный устойчивый (неустойчивый) предельный цикл.

б) При всех $\lambda < \lambda_0$ ($|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$) в ε_0-окрестности седла $O(\lambda_0)$ лежит седло $O(\lambda)$, и единственный устойчивый (неустойчивый) предельный цикл L, на который накручивается одна из α-сепаратрис седла $O(\lambda)$,— сепаратриса L^*. При $\lambda = \lambda_0$ с сепаратрисой L^* сближается ω-сепаратриса седла $O(\lambda)$ — сепаратриса L^{**}, при $\lambda = \lambda_0$ сепаратрисы L^* и L^{**} совпадают с сепаратрисой L, образующей петлю, предельный цикл S при этом «влипает» в сепаратрису L. При $\lambda > \lambda_0$ сепаратриса L разделяется на две (без рождения предельного цикла) (см. рис. 101, 102 гл. 10).

Замечание 4. Подчеркнем тот факт (он часто используется в дальнейшем при рассмотрении конкретных задач), что устойчивый (неустойчивый) предельный цикл может родиться только из устойчивой (неустойчивой) петли, в которой $\sigma_c < 0$ ($\sigma_c > 0$), и влипнуть только в петлю, в которой $\sigma_c < 0$ ($\sigma_c > 0$).

Случай, когда сепаратриса при $\lambda = \lambda_0$ идет из одного седла в другое, мы предоставляем рассмотреть читателю (см. рис. 91



а *б* *в*

Рис. 106

гл. 8). Рассмотрим еще два часто встречающихся в задачах случая (которые по недоразумению часто путают со случаями II и IV).

V. Рассмотрим случай смены устойчивости фокуса без рождения предельного цикла, когда бифуркационному значению параметра $\lambda = \lambda_0$ соответствует консервативная система.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ состояние равновесия $O(\lambda_0)$ является центром (рис. 106, *а*), при $\lambda < \lambda_0$ ($|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$) состояние равновесия $O(\lambda)$ (лежащее в ε_0-окрестности $O(\lambda_0)$) является устойчивым фокусом (рис. 106, *б*), а при $\lambda > \lambda_0$ — неустойчивым фокусом (рис. 106, *в*).

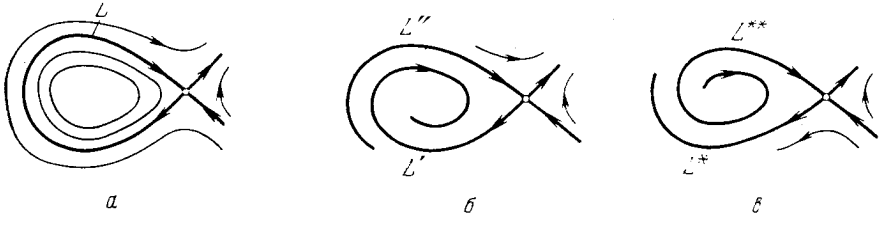
Тогда при переходе от значений $\lambda < \lambda_0$ к значениям $\lambda > \lambda_0$ смена устойчивости фокуса может осуществляться без рождения предельного цикла. Простейший пример такой бифуркации дает линейная система вида

$$\dot{x} = \alpha(\lambda)x + \beta(\lambda)y,$$
$$\dot{y} = -\beta(\lambda)x + \alpha(\lambda)y \quad (\beta(\lambda) \neq 0 \text{ при } |\lambda - \lambda_0| < \delta_0).$$

Если: при $\lambda < \lambda_0$ $\alpha(\lambda) < 0$; при $\lambda = \lambda_0$ $\alpha(\lambda_0) = 0$; при $\lambda > \lambda_0$, $\alpha(\lambda) > 0$, то мы, очевидно, получаем смену качественных структур, представленную на рис. 106, и очевидно, без рождения предельного цикла.

VI. Рассмотрим случай разделения сепаратрисы без рождения предельного цикла, когда значению параметра $\lambda = \lambda_0$ соответствует консервативная система.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ у системы (A_{λ_0}) сепаратриса L седла $O(\lambda_0)$ образует петлю, причем все траектории в окрестности петли



а *б* *в*

Рис. 107

замкнуты (рис. 107, *а*). (В этом случае, очевидно, $\sigma_c = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0$.)

Тогда возможна смена качественных структур, представленная на рис. 107 (при $\lambda < \lambda_0$ и $\lambda > \lambda_0$ сепаратрисы L' и L'' (рис. 107, *б*) и соответственно L^* и L^{**} (рис. 107, *в*) различно расположены, но при этом ни при $\lambda < \lambda_0$, ни при $\lambda > \lambda_0$ не рождается предельный цикл).

§ 3. Случай, когда правые части зависят более чем от одного параметра. В случае, когда правые части динамической системы зависят более, чем от одного параметра, каждая из указанных в § 2 последовательных смен качественных структур будет происходить при изменении параметров вдоль дуги, пересекающей в пространстве параметров негрубую n — 1-мерную пленку, точкам которой соответствуют системы первой степени негрубости с одним из негрубых особых элементов типов I—IV § 2.

Пусть, например, $n = 2$, т. е. правые части системы (A_λ) зависят от двух параметров λ_1 и λ_2, и мы имеем плоскость параметров λ_1 и λ_2.

Будем называть линию в плоскости параметров λ_1 и λ_2, все точки которой соответствуют бифуркационным значениям параметров, *бифуркационной кривой*. Предположим, что для рассматриваемой динамической системы, правые части которой зависят от двух параметров,

$$\begin{aligned} dx/dt &= P(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \\ dy/dt &= Q(x, y, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \tag{A_λ}$$

точки бифуркационных кривых соответствуют системам первой степени негрубости (как указывалось, это должно иметь место в общем случае вхождения параметров в правые части).

Пусть, например, у системы (A_λ) существует двукратное состояние равновесия седло-узел. Это означает, что рассматриваемая система соответствует значениям параметров λ_1 и λ_2, которые удовлетворяют системе уравнений

$$P(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad Q(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

$$\Delta(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} P'_x(x, y, \lambda_1, \lambda_2) & P'_y(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \\ Q'_x(x, y, \lambda_1, \lambda_2) & Q'_y(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Исключая x и y из этих трех уравнений, мы получим одно соотношение между параметрами λ_1 и λ_2:

$$\Delta^*(\lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Это соотношение дает уравнение бифуркационной кривой, неособым точкам которой (т. е. значениям $(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$ точек этой кривой, для которых $(\partial\Delta^*/\partial\lambda_1)^2 + (\partial\Delta^*/\partial\lambda_2)^2 \neq 0$) соответствуют системы (A_λ), имеющие двукратное состояние равновесия седло-узел.

Если у кривой $\Delta^*(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ есть особые точки, т. е. точки, в которых $\partial\Delta^*/\partial\lambda_1 = \partial\Delta^*/\partial\lambda_2 = 0$, то эти точки соответствуют системе (A_λ), имеющей состояние равновесия кратности выше второй. Если мы в пространстве параметров пересечем кривую $\Delta^* = 0$, переходя с одной стороны этой кривой на другую, то на плоскости (x, y) для рассматриваемой динамической системы в окрестности седло-узла будет осуществляться смена качественных структур, рассмотренная в § 2 (см. рис. 99 гл. 10).

Рассмотрим еще другой случай системы первой степени негрубости, именно случай, когда система (A_{λ_0}) имеет сложный фокус первого порядка, т. е. когда для рассматриваемой системы (A_{λ_0}) выполняются условия

$$P(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad Q(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

$$\sigma(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = P'_x(x, y, \lambda_1, \lambda_2) + Q'_y(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{2}$$

и при этом $\Delta(x, y, \lambda_1, \lambda_2) > 0$. Исключая x и y из трех соотношений, мы, вообще говоря, получим одно соотношение между параметрами λ_1 и λ_2:

$$\sigma^*(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \qquad (\sigma^*)$$

Точкам бифуркационной кривой $\sigma^* = 0$ (т. е. значениям λ_1^0 и λ_2^0 для точек этой кривой) соответствуют системы (A_λ), у которых есть сложный фокус. Так как мы предположили, что бифуркационным кривым соответствуют системы первой степени негрубости, то при значениях λ_1^0 и λ_2^0, соответствующих кривой $\sigma^* = 0$, $L_1 \neq 0$. Обычно по знакам $\partial\sigma^*/\partial\lambda_1$ и $\partial\sigma^*/\partial\lambda_2$ можно установить, с какой стороны от кривой $\sigma^* = 0$ фокус устойчив, а с какой — неустойчив. Если можно установить знак L_1, то тогда мы можем различить, какая из смен качественных структур: случая IIа, или IIб, имеет место при пересечении бифуркационной кривой.

Обратим внимание на следующее. Если исключить значения x, y из трех уравнений (2), не учитывая условия $\Delta(x, y, \lambda_1, \lambda_2) > 0$, то мы получим кривую на плоскости (λ_1, λ_2)

$$\sigma^*(\lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

которая состоит из двух частей σ_1^* и σ_2^*; точки одной части σ_1^* соответствуют системам (A_λ), имеющим сложный фокус, а другой части — σ_2^* — системам, имеющим седла, в которых седловая величина

$$\sigma_c = 0.$$

Точки второй части σ_2^* могут представить интерес для качественного рассмотрения системы (A_λ). Действительно, значениям параметров по разные стороны от части σ_2^* соответствуют динамические системы, имеющие седла с различными знаками седловой величины σ_c.

Если, кроме того, известно, что, как в области, где $\sigma_c > 0$, так и в области, где $\sigma_c < 0$, есть точки, которые соответствуют системам (A_λ), имеющим сепаратрису, образующую петлю, то знание знака σ_c, очевидно, позволяет судить об устойчивости или неустойчивости цикла, рождающегося из этой петли. Примеры использования сведений о знаке σ_c даются в задачах ч. III и IV.

Методы нахождения (аналогичные методам нахождения кривых $\sigma = 0$ и $\Delta = 0$) уравнений бифуркационных кривых, соответствующих двукратным циклам или сепаратрисам, идущим из седла в седло, очевидно, отсутствуют. Действительно, для того чтобы методом, аналогичным методу определения кривых $\Delta^* = 0$ и $\sigma^* = 0$, найти уравнение бифуркационной кривой, соответствующей двукратному предельному циклу, нужно, очевидно, найти решение, соответствующее предельному циклу (соответ-

ствующее периодическое решение), как функцию параметров, а также его период как функцию параметров и затем подставить это решение и период в выражение

$$\int_0^\tau [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)]\, dt = 0.$$

Однако очевидно, что проведение всех указанных действий может быть осуществлено лишь в очень частных случаях. Иногда удается косвенными методами установить существование таких бифуркационных кривых и даже получить некоторые сведения об их расположении.

Укажем один из случаев, когда можно доказать существование в плоскости параметров бифуркационной кривой, соответствующей двукратному предельному циклу.

Предположим, что на некоторой части σ' кривой $\sigma^* = 0$ (кривая $\sigma^* = 0$ соответствует сложному фокусу) величина L_1 положительна, на части σ'' отрицательна и в точке M этой кривой, являющейся общим концом этих двух частей σ' и σ'', величина $L_1 = 0$. Если удается показать, что в точке M вторая ляпуновская величина $L_2 = \alpha_5(\lambda_1) \neq 0$, то на основании общей теории (см. гл. 10) отсюда можно заключить, что при значениях параметров, соответствующих точке M плоскости параметров, динамическая система имеет сложный фокус второго порядка, из которого при изменении параметров могут появиться два (и не более) предельных цикла (см. гл. 10).

Принимая во внимание, что от сложного фокуса, в котором $L_1 < 0$, рождается устойчивый предельный цикл, а от сложного фокуса с $L_1 > 0$ — неустойчивый, и используя соображения непрерывного перехода от одних значений параметров к другим, в этом случае можно установить, что на плоскости параметров существует бифуркационная кривая с концом в точке M, соответствующая двукратному предельному циклу (см. примеры гл. 16).

Если на плоскости параметров λ_1, λ_2 точки бифуркационной кривой S соответствуют системам первой степени негрубости, имеющим один из указанных в гл. 9 негрубых элементов, то при изменении параметров вдоль какой-нибудь дуги, пересекающей кривую S, смена качественных структур будет одной из описанных в § 2 (при изменении λ от $\lambda < \lambda_0$ к $\lambda > \lambda_0$).

Особым точкам бифуркационных кривых или общим точкам различных бифуркационных кривых соответствуют динамические системы степени негрубости выше первой.

В то время как точки бифуркационных кривых, соответствующих системам первой степени негрубости, являются граничными для двух различных грубых областей пространства параметров, точки, соответствующие системам более высокой сте-

пени негрубости, могут быть граничными более чем для двух грубых областей. Поэтому нахождение точек пространства параметров, соответствующих системам степени негрубости выше первой, и изучение поведения системы в окрестности таких значений параметра часто позволяют установить наличие целого ряда различных грубых областей с различными качественными структурами.

Остановимся на одном частном случае динамической системы второй степени негрубости, именно, динамической системы, имеющей двукратное состояние равновесия, для которого $\sigma = 0$ (см. гл. 10, § 4). Можно показать, что все бифуркации этого состояния равновесия могут быть получены при изменении двух независимых параметров. В пространстве этих параметров — мы их будем обозначать через λ_1 и λ_2 — такому состоянию равновесия соответствует общая точка кривых

$$\Delta^*(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \text{ и } \sigma^*(\lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

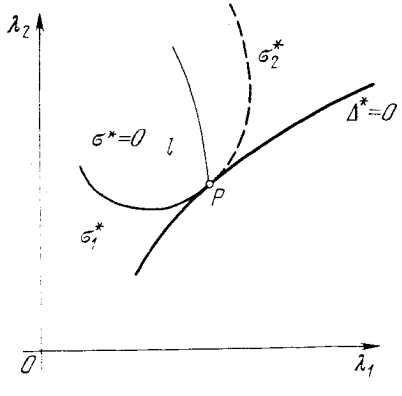


Рис. 108

Можно показать, что при значениях параметров, соответствующих этой точке (рис. 108), кривые $\Delta^* = 0$ и $\sigma^* = 0$ касаются в точке P. При этом всем отличным от P точкам Δ^* соответствуют седло-узлы, но точкам кривой Δ^*, лежащим по одну сторону точки P,— седло-узлы с устойчивой или соответственно неустойчивой узловой областью, а по другую сторону P — с неустойчивой (устойчивой) узловой областью. Кривая $\sigma^* = 0$ точкой P делится на две части: σ_1^* и σ_2^*. Одной (σ_1^*)соответствует сложный фокус (сплошная линия на рис. 108), другой — седло, для которого $\sigma_c = 0$. Между двумя ветвями кривой $\sigma^* = 0$ лежит кривая l (упирающаяся в точку P), соответствующая петле сепаратрисы.

§ 4. Бифуркации «от бесконечности». В § 2 рассматривалась смена качественных структур, которая происходила вблизи негрубого особого элемента (сложной особой точки, сложного фокуса и т. д.), лежащего внутри области определения динамической системы. Очевидно, можно также рассмотреть и возможные смены качественных структур в том случае, когда негрубый особый элемент лежит на границе области определения динамической системы. Не останавливаясь на случае, когда система (A_λ) определена в ограниченной части плоскости, укажем некоторые возможности бифуркаций «от бесконечности» в случае, когда

система

$$\begin{aligned} dx/dt &= P(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), \\ dy/dt &= Q(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{aligned} \qquad (A_\lambda)$$

определена на всей плоскости. В этом случае при изменении параметров от некоторых фиксированных значений λ_i^0 возможно, например:

1. Появление состояния равновесия из бесконечности.

Пример 1.

$$\dot{x} = y - (1 + \varepsilon)x, \quad \dot{y} = x - y - 1.$$

При $\varepsilon = 0$ у системы нет состояний равновесия, при $\varepsilon \neq 0$ (но сколь угодно малом) появляется состояние равновесия с координатами $x = -1/\varepsilon$, $y = -1/\varepsilon - 1$.

2. Рождение предельного цикла из бесконечности[7]).

Пусть в системе (A) при значении параметра λ_0 бесконечность устойчива. Это означает, что все траектории, проходящие вне окружности достаточно большого радиуса, уходят в бесконечность.

Пусть далее при значениях $\lambda > \lambda_0$ (или $\lambda < \lambda_0$) бесконечность делается неустойчивой, т. е. все траектории, проходящие вне окружности достаточно большого радиуса, входят внутрь этой окружности. Нетрудно видеть, что тогда при $\lambda > \lambda_0$ ($\lambda < \lambda_0$) существует устойчивый предельный цикл и этот цикл при $\lambda \to \lambda_0$ уходит в бесконечность.

Естественно считать, что этот цикл «рождается» из бесконечности. Очевидно, из бесконечности может также родиться неустойчивый предельный цикл.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x - \lambda(x^2 + y^2)x, \\ \dot{y} &= x + y - \lambda(x^2 + y^2)y. \end{aligned} \qquad (3)$$

При $\lambda = 0$ мы получаем линейную систему

$$\dot{x} = -y + x, \quad \dot{y} = x + y$$

с единственным неустойчивым фокусом в начале.

Если составить выражение

$$d(x^2 + y^2)/dt = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2(x^2 + y^2),$$

то нетрудно видеть, что бесконечность устойчива, так как все окружности являются циклами без контакта и траектории при возрастании t выходят из этих окружностей.

---

[7]) В случае, когда правые части динамической системы (A) — многочлены, так что систему можно рассматривать на сфере Пуанкаре (см. гл. 6), бифуркациям от бесконечности соответствуют бифуркации от экватора сферы Пуанкаре. При этом, очевидно, необходимо ввести понятие грубости системы на сфере Пуанкаре и условия грубости и негрубости экватора. Однако в настоящей книге эти вопросы не рассматриваются.

Составляя то же выражение $d(x^2+y^2)/dt$ при $\lambda \neq 0$, мы получим

$$d(x^2+y^2)/dt = 2[(x^2+y^2)(1-\lambda(x^2+y^2))].$$

Очевидно, если $x^2+y^2 > 1/\lambda$, то $d(x^2+y^2)/dt < 0$, т. е. бесконечность неустойчива.

Нетрудно непосредственно проверить, что окружность

$$x^2+y^2 = 1/\lambda$$

является предельным циклом системы (3). Этот цикл рождается из бесконечности.

Пример 3.

$$\dot{x} = y - x(\lambda x^2 + y^2 - 1),$$
$$\dot{y} = -\lambda x - y(\lambda x^2 + y^2 - 1).$$

При $\lambda = 0$ мы имеем, как нетрудно видеть, качественную структуру, изображенную на рис. 109, при $\lambda > 0$ — изображенную на рис. 110.

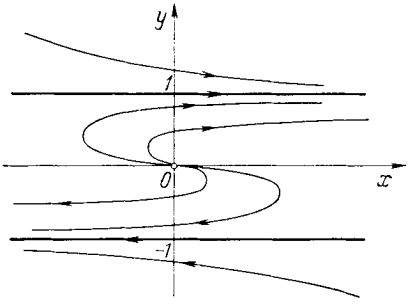


Рис. 109

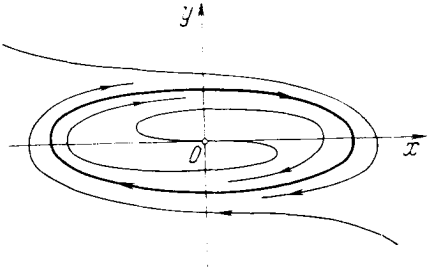


Рис. 110

Предельный цикл — эллипс

$$x^2 + y^2/\lambda = 1/\lambda,$$

родился из бесконечности (из пары прямых $y^2 - 1 = 0$).

§ 5. Условия существования седло-узла и сложного фокуса первого порядка. В гл. 3 и 4 мы предполагали, рассматривая состояния равновесия, для которого $\Delta = 0$, а также рассматривая сложный фокус ($\Delta > 0$, $\sigma = 0$), что в окрестности этого состояния равновесия система приведена к каноническому виду. Однако при качественном исследовании конкретных динамических систем это бывает очень неудобно, так как приведение к каноническому виду иногда требует больших вычислений. В настоящем параграфе мы дадим условия для существования двукратного седло-узла, а также для существования сложного фокуса первой степени негрубости, предполагая, что в окрестности со-

стояния равновесия $O(0, 0)$ система имеет общий вид, т. е.

$$dx/dt = ax + by + f(x, y), \quad dy/dt = cx + dy + g(x, y), \qquad (4)$$

где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ содержат члены по x и y порядка выше первого. Коэффициенты в разложении правых частей по x, y предполагаются зависящими от параметра λ.

Характеристическое уравнение для рассматриваемого состояния равновесия $O(0, 0)$ имеет вид

$$\varkappa^2 - \sigma\varkappa + \Delta = 0 \qquad (\sigma = a + d,\ \Delta = ad - bc).$$

Условия устойчивости состояния равновесия $O(0, 0)$ (условия Рауса — Гурвица) сводятся к неравенствам

$$\sigma = a + d < 0, \quad \Delta = ad - bc > 0.$$

Разложение $f(x, y)$ и $g(x, y)$ по степеням x и y представим в виде

$$f(x, y) = P_2(x, y) + P_3(x, y) + \ldots,$$
$$g(x, y) = Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \ldots,$$

где

$$P_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$
$$Q_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2,$$
$$P_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$
$$Q_3(x, y) = b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3.$$

I. Пусть при некоторых значениях параметров $\lambda_i = \lambda_i^0$ мы имеем в точке $O(0, 0)$

$$\Delta(\lambda_i^0) = 0, \quad \sigma(\lambda_i^0) \neq 0.$$

Для определенности предположим, что в системе (4) $a \neq 0$. Этого всегда можно добиться, заменяя x на y или наоборот.

Для того чтобы состояние равновесия $O(0, 0)$ было седло-узлом, нужно, чтобы величина $l(\lambda_i^0) \neq 0$ [8]), причем

$$l(\lambda_i^0) = \frac{1}{a(a^2 + bc)}(ca_{02} - ab_{02}) +$$
$$+ \frac{1}{a(a^2 + bc)^2}[ab(ab_{11} - ca_{11}) + 2bc(ab_{02} - ca_{02})] +$$
$$+ \frac{1}{a(a^2 + bc)^3}[a^2b^2(ca_{20} - ab_{20}) + ab^2c(ca_{11} - ab_{11}) +$$
$$+ b^2c^2(ca_{02} - ab_{02})].$$

[8]) Неравенство нулю $l(\lambda_i^0)$ означает, что состояние равновесия двукратное. Когда система имеет канонический вид, то $l(\lambda_i^0) = P_2(1, 0)$ (см. гл. 9).

Все коэффициенты предполагаются взятыми при значениях $\lambda_i = \lambda_i^0$.

II. Пусть при некоторых значениях параметров $\lambda_i = \lambda_i^0$ мы имеем в точке $O(0, 0)$

$$\sigma = (a + d) = 0 \text{ и } \Delta > 0$$

(т. е. состояние равновесия $O(0, 0)$ — сложный фокус).

Вычисление дает для $L_1 = \alpha_3(\lambda_i^0)$ следующее выражение через коэффициенты системы [9]):

$$L_1 = -\frac{\pi}{4b\omega^3}\{[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + b_{11}a_{20} + b_{20}a_{11}) +$$

$$+ c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) -$$

$$- b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] -$$

$$- (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - b_{21}b)]\}.$$

Коэффициенты членов $P_i(x, y)$, $Q_i(x, y)$ $(i > 3)$ не входят в выражение для $L_i(\lambda_i^0)$. Здесь $\omega^2 = ad - bc = -(a^2 + bc) > 0$.

Поведение динамических систем вблизи таких значений параметров, при которых первая ляпуновская величина L_1 обращается в нуль, существенно зависит от знака второй ляпуновской величины

$$L_2 = \alpha_5(\lambda_i^0).$$

Для вычисления L_2 необходимо учесть в разложениях правых частей уравнений члены до пятого порядка включительно. В зависимости от первой и второй ляпуновских величин и знака действительной части корней характеристического уравнения в малой окрестности состояния равновесия на фазовой плоскости могут существовать один или два предельных цикла при всех возможных сочетаниях устойчивости и неустойчивости (один устойчивый или неустойчивый предельный цикл или два предельных цикла — устойчивый внутри неустойчивого или наоборот).

Пусть в некоторой точке M пространства параметров системы $a + d = L_1 = 0$, $L_2 \neq 0$. Тогда, каково бы ни было положительное число $\gamma < 1$, можно найти такие числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta > 0$, что для точек из ε_0-окрестности точки M справедливы следующие утверждения [121]:

1) если в точке M в ряду σ, L_1, L_2 имеется две перемены знака, то в δ_0-окрестности состояния равновесия соответствую-

[9]) Все коэффициенты берутся при значениях параметров λ_i^0.

щая система имеет два предельных цикла, если

$$L_1^2(1-\gamma)-\frac{8\pi\sigma}{\sqrt{4\Delta-\sigma^2}}L_2>0,$$

и не имеет предельных циклов, если

$$L_1^2(1+\gamma)-\frac{8\pi\sigma}{\sqrt{4\Delta-\sigma^2}}L_2<0;$$

2) если в точке M в ряду σ, L_1, L_2 имеется не более одной перемены знака, то число предельных циклов в δ_0-окрестности состояния равновесия системы равно числу перемен знака в ряду σ, L_1, L_2.

Система (A_{λ_0}) при условиях

$$\sigma=(a+d)=0 \text{ и } \Delta>0$$

подстановкой

$$\xi=x,\ \eta=-\frac{ax+by}{\sqrt{\Delta}},\ \tau=\sqrt{\Delta}\tau$$

приводится к виду

$$\frac{d\xi}{dt}=-\eta+P_2(\xi,\eta)+P_3(\xi,\eta)+P_4(\xi,\eta)+P_5(\xi,\eta)+\ldots,$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\xi+Q_2(\xi,\eta)+Q_3(\xi,\eta)+Q_4(\xi,\eta)+Q_5(\xi,\eta)+\ldots,$$

где

$$P_2(\xi,\ \eta)=a_{20}\xi^2+a_{11}\xi\eta+a_{02}\eta^2,\quad Q_2(\xi,\ \eta)=b_{20}\xi^2+b_{11}\xi\eta+b_{02}\eta^2$$

и

$$P_i(\xi,\ \eta)=a_{i0}\xi^i+a_{i-1,1}\xi^{i-1}\eta+\ldots+a_{0i}\eta^i,$$
$$Q_i(\xi,\ \eta)=b_{i0}\xi^i+b_{i-1,1}\xi^{i-1}\eta+\ldots+b_{0i}\eta^i,$$
$$i=3,4,5.$$

При условии $L_1=0$ мы имеем следующее выражение для L_2 [121]:

$$L_2=\frac{1}{24}\pi\left[a_{02}b_{20}(5a_{02}b_{11}+10a_{02}a_{20}+4b_{11}^2+11a_{20}b_{11}+6a_{20}^2-\right.$$
$$-5a_{11}b_{20}-10b_{20}b_{02}-4a_{11}^2-11a_{11}b_{02}-6b_{02}^2)+a_{20}b_{02}(6b_{02}^2-$$
$$-5a_{11}b_{02}+10b_{02}b_{20}-2a_{11}^2-5a_{11}b_{20}+5a_{20}b_{11}-6a_{20}^2-10a_{20}a_{02}+$$
$$+2b_{11}^2+5a_{02}b_{11})+a_{02}b_{02}(5b_{11}^2-a_{11}^2-6a_{11}b_{02})-a_{20}b_{20}(5a_{11}^2-$$
$$-b_{11}^2-6a_{20}b_{11})+a_{11}^3(a_{20}+a_{02})-b_{11}^3(b_{02}+b_{20})-5b_{20}^2(a_{12}+3b_{03})+$$
$$+b_{02}^2(3b_{21}-6a_{12}-5a_{30})+a_{11}^2(a_{12}+a_{30})+b_{20}b_{02}(5b_{21}-5a_{12}-$$
$$\left.-9b_{03}+5a_{30})-b_{20}a_{11}(4a_{12}+9b_{03}+5a_{30})+b_{02}a_{11}(3b_{21}-a_{12}+\right.$$

$$+ 4a_{30}) - 5a_{02}^2(b_{21} + 3a_{30}) + a_{20}^2(3a_{12} - 6b_{21} - 5b_{03}) +$$
$$+ b_{11}^2(b_{21} + b_{03}) + a_{20}a_{02}(5a_{12} - 5b_{21} - 9a_{30} + 5b_{03}) -$$
$$- a_{02}b_{11}(4b_{21} + 9a_{30} + 5b_{03}) + a_{20}b_{11}(3a_{12} - b_{21} + 4b_{03}) +$$
$$+ 4b_{20}b_{11}(2b_{30} + b_{12}) + b_{02}b_{11}(7b_{30} - a_{21} + 5b_{12} + a_{03}) +$$
$$+ 2a_{11}b_{11}(a_{03} + b_{30}) + 2a_{20}b_{20}(8b_{30} - 5a_{21} - b_{12}) + 2a_{20}b_{02}(4b_{30} -$$
$$- 5a_{21} - 5b_{12} + 4a_{03}) + a_{20}a_{11}(b_{30} + 5a_{21} - b_{12} + 7a_{03}) -$$
$$-2a_{02}b_{20}(a_{21} + b_{12}) + 2a_{02}b_{02}(8a_{03} - 5b_{12} - a_{21}) + 4a_{02}a_{11}(2a_{03} +$$
$$+ a_{21}) + b_{11}(5b_{04} - b_{22} + 2a_{13} - 3b_{40}) + a_{02}(2b_{22} + 20b_{04} + 5a_{13} +$$
$$+ 3a_{31}) + a_{20}(4b_{22} + 22b_{04} + 7a_{13} - 6b_{40} + 9a_{31}) -$$
$$- b_{20}(2a_{22} + 20a_{40} + 5b_{31} + 3b_{13}) - a_{11}(5a_{40} - a_{22} + 2b_{31} - 3a_{04}) +$$
$$+ 3a_{21}(2a_{30} + b_{03} + a_{12}) - 3b_{12}(2b_{03} + a_{30} + b_{21}) + 3a_{03}(a_{12} +$$
$$+ 3b_{03}) - 3b_{30}(b_{21} + 3a_{30}) - b_{02}(4a_{22} + 22a_{40} + 7b_{31} - 6a_{04} + 9b_{13}) +$$
$$+ 3b_{41} + 3b_{23} + 15b_{05} + 15a_{50} + 3a_{32} + 3a_{14}].$$

§ 6. Поворот векторного поля. В гл. 7 мы уже рассматривали случай, когда в каждой точке угол между вектором, определенным системой

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{A}$$

и вектором, определенным системой

$$\dot{x} = \tilde{P}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{Q}(x, y), \tag{$\tilde{A}$}$$

имеет один и тот же знак. Именно, в качестве системе ($\tilde{A}$) мы рассматривали систему вида

$$\dot{x} = P(x, y) + \mu Q(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) - \mu P(x, y).$$

Тогда тангенс угла φ между вектором, определенным системой (A), и вектором, определенным системой ($\tilde{A}$), будет

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{Q(x, y) - \mu P(x, y)}{P(x, y) + \mu Q(x, y)} - \dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}}{1 + \dfrac{Q(x, y) - \mu P(x, y)}{P(x, y) + \mu Q(x, y)} \cdot \dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}} \equiv -\mu,$$

т. е. угол φ один и тот же во всех точках плоскости. Очевидно, при $\mu < 0$ угол φ положителен, а при $\mu > 0$ отрицателен. Мы будем также рассматривать и более общий случай, когда угол между векторами, определенными соответственно системами (A) и ($\tilde{A}$), в каждой точке плоскости (или некоторой данной области) не меняет знака, хотя и не постоянен.

Будем говорить, что при переходе от системы (A) к системе ($\tilde{A}$) мы имеем поворот поля (или что поле поворачивается на угол того или другого знака), если $\tilde{P}(x, y)$ и $\tilde{Q}(x, y)$ обращаются

в нуль в тех и только тех точках, в которых

$$P(x, y)=0,\ Q(x, y)=0,$$

и выражение

$$P(x, y)\tilde{Q}(x, y)-Q(x, y)\tilde{P}(x, y)$$

не меняет знака на плоскости (x, y) (или в некоторой данной области) и не обращается в нуль вдоль интегральных кривых систем (A) и $(\tilde{A})$.

Рассмотрим простые примеры.

Пример 1. Пусть дана система

$$dx/dt = y,\ dy/dt = \gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)y. \qquad (A)$$

Рассмотрим ее при некотором фиксированном значении $\gamma = \gamma_0$ и посмотрим, как меняется поле при фиксированных λ и d и при изменении γ, т. е. рассмотрим угол между векторами, определяемыми системой

$$dx/dt = y,\quad dy/dt = \gamma_0 - \lambda(1 - d\cos\varphi)y, \qquad (A_0)$$

и векторами, определенными системой (A).

Выражение $P(x, y)\tilde{Q}(x, y)-Q(x, y)\tilde{P}(x, y)$ в этом случае имеет вид

$$(\gamma - \gamma_0)y.$$

Таким образом, в области, где $y > 0$, при увеличении γ поле поворачивается на положительный угол, а в области, где $y < 0$,— на отрицательный. При уменьшении γ до γ_0, очевидно, имеет место обратное.

Пример 2. Пусть

$$\dot{x} = y = P(x, y),\quad \dot{y} = -x + \mu x^2 - y^2 = Q(x, y).$$

Рассмотрим измененную систему

$$\dot{x} = y,\quad \dot{y} = -x + dy + \mu x^2 - y^2.$$

Выражение

$$P(x, y)\tilde{Q}(x, y)-Q(x, y)\tilde{P}(x, y) = dy^2$$

не меняет знака на плоскости (x, y), касание траекторий происходит вдоль оси x, не являющейся интегральной кривой, и при этом касание нечетного порядка. Траектории измененной системы всюду пересекают траектории исходной системы.

Опишем поведение некоторых особых траекторий при повороте поля.

1. Состояния равновесия остаются на прежних местах (имеют те же координаты).

2. При повороте на положительный (отрицательный) угол сепаратрисы седел (как α-, так и ω-сепаратрисы) поворачиваются на положительный (отрицательный) угол (рис. 111).

Если не совпадающие друг с другом ω- и α-сепаратрисы одного и того же седла или различных седел системы (А) пересекают одну и ту же дугу без контакта l, то при повороте на угол одного знака их точки пересечения с дугой l сближаются, а при повороте на угол другого знака — удаляются друг от друга. При этом части одноименных сепаратрис между седлом и точкой пересечения с дугой l до и после поворота не могут иметь общих точек.

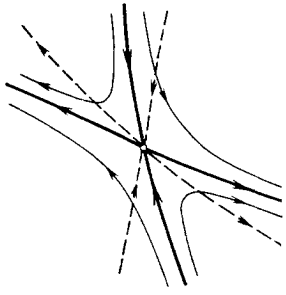


Рис. 111

3. Сепаратрисы системы (А), идущие из седла в седло, при повороте разделяются (различным образом при повороте на угол различных знаков). Если сепаратриса системы (А) образует петлю и в седле $\sigma_c \neq 0$, то при повороте на угол одного знака она разделяется без рождения предельного цикла, а при повороте на угол другого знака она разделяется с рождением предельного цикла (см. рис. 101, 102).

4. Двойной предельный цикл при повороте на угол одного знака исчезает, при повороте на угол другого знака — разделяется на два предельных цикла (устойчивый и неустойчивый).

При повороте на угол одного знака грубый предельный цикл расширяется (содержит внутри цикл исходной системы (А)), при повороте на угол другого знака — сжимается (содержится внутри цикла исходной системы).

а) Если у исходной системы (А) существуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы, на которых направление обхода по t одинаково (т. е. направление обхода по t на обоих циклах является направлением по часовой стрелке или на обоих — против часовой стрелки), то если при повороте на положительный (отрицательный) угол устойчивый предельный цикл расширяется, то неустойчивый сжимается, и наоборот.

б) Если у системы (А) существует два устойчивых (неустойчивых) цикла с различными направлениями обхода по t, то если при повороте один сжимается, то другой расширяется, и наоборот.

в) Если у устойчивого и неустойчивого циклов системы (А) направление обхода по t неодинаково, то при повороте эти циклы либо оба одновременно сжимаются, либо оба одновременно расширяются.

Предположим, что у рассматриваемой системы при $\mu = \mu_0$ существует три грубых предельных цикла, вложенных один внутрь другого: L_1^0, L_2^0, L_3^0. Пусть L_1^0 и L_3^0— устойчивые, L_2^0 — неустойчивый. Тогда при повороте поля (происходящем, например, при возрастании μ от значения μ_0) при достаточно малых μ циклы L_1^μ и L_3^μ (близкие к L_1^0 и L_3^0) расширяются, а цикл

L_2^μ (близкий к L_2^0) сужается. Если поворот происходит на достаточно большой угол, то при некотором $\mu = \mu_1$ циклы L_1^μ и L_2^μ (или L_2^μ и L_3^μ в зависимости от того, в какую сторону поворачивается поле) могут слиться, образуя двукратный цикл, который затем при $\mu > \mu_1$ исчезает.

С другой стороны, пусть при $\mu = \mu_0$ у системы один грубый цикл L^0. Предположим для определенности, что при возрастании μ цикл L^μ *расширяется*. Существует такая логическая возможность: при некотором $\mu_1 > \mu_0$ из уплотнения траектории возникает двукратный цикл, содержащий L^μ *внутри*, который затем разделяется на два предельных цикла L_1^μ и L_2^μ.

§ 7. Метод малого параметра. Метод Понтрягина. Как неоднократно указывалось при качественном исследовании, вопрос об установлении существования (или отсутствия) предельных циклов является одним из наиболее трудных вопросов; для решения его отсутствуют регулярные методы.

Поэтому любой метод, который позволяет (хотя бы для систем специального типа) устанавливать наличие предельных циклов, представляет большую ценность.

В настоящем параграфе мы изложим классические методы нахождения предельных циклов у динамических систем, близких к консервативным.

I. Системы, близкие к линейной консервативной. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \mu p(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= x + \mu q(x, y, \mu), \end{aligned} \tag{A_μ}$$

которая при $\mu = 0$ обращается в линейную консервативную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x; \end{aligned} \tag{A}$$

траекториями этой системы являются окружности

$$x^2 + y^2 = C.$$

Функции $p(x, y, \mu)$ и $q(x, y, \mu)$ мы будем предполагать аналитическими функциями всех входящих в них переменных и, кроме того, такими, что

$$p(0, 0, \mu) = 0, \quad q(0, 0, \mu) = 0.$$

(Если бы это условие не было выполнено, то, как нетрудно показать, можно заменой переменных x и y прийти к случаю, когда оно выполняется.) Системы вида (A_μ) часто встречаются в приложениях. Так, например, если на фазовой плоскости (x, y) $(y = -\dot{x})$ рассматривать уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}),$$

близкое при малых μ к уравнению гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + x = 0,$$

то мы придем к системе

$$\dot{x} = -y,\ \dot{y} = x - \mu f(x, -y),$$

имеющей указанный вид.

В системе (A) направление обхода траекторий по t совпадает с положительным направлением обхода. Если это не так (как в системе $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x$), то в дальнейшем нужно внести очевидные изменения.

Положим $x = C\cos\varphi,\ y = C\sin\varphi$; рассмотрим функцию $\psi(C)$:

$$\psi(C) = \int_0^{2\pi} [p(C\cos\varphi, C\sin\varphi, 0)\cos\varphi + q(C\cos\varphi, C\sin\varphi, 0)\sin\varphi]\, d\varphi.$$

После некоторых элементарных преобразований мы получим также [10])

$$\psi'(C) = \int_0^{2\pi} [p'_x(C\cos\varphi, C\sin\varphi, 0) + q'_y(C\cos\varphi, C\sin\varphi, 0)]\, d\varphi - \frac{\psi(C)}{C}.$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Если для некоторого значения $C = C^*$ выполняются условия*

$$\psi(C^*) = \int_0^{2\pi} [p(C^*\cos\varphi, C^*\sin\varphi, 0)\cos\varphi + q(C^*\cos\varphi, C^*\sin\varphi, 0)\sin\varphi]\, d\varphi = 0,$$

$$\psi'(C^*) = \int_0^{2\pi} [p'_x(C^*\cos\varphi, C^*\sin\varphi, 0) + q'_y(C^*\cos\varphi, C^*\sin\varphi, 0)]\, d\varphi \neq 0,$$

то существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что:

а) *для любого μ, $|\mu| < \delta$, система (A_μ) имеет в ε-окрестности кривой $x^2 + y^2 = c^*$ один и только один предельный цикл,*

---

[10]) Эти интегралы находятся на основании рассмотрения функции последования, построенной для системы (A_μ) на какой-либо полупрямой с концом в начале координат, например, на полуоси x. Очевидно, при $\mu = 0$ всякая такая полупрямая не имеет контактов с траекториями системы (A_0) (а значит, любой ее конечный кусок при достаточно малом μ не имеет контактов и с траекториями системы (A_μ)), и для системы (A_0) функция последования, очевидно, будет $\bar{c} = c$.

причем при $\mu \to 0$ *он стягивается к окружности* $x^2 + y^2 = c^*$ *(являющейся траекторией системы* (A_0)*);*

б) *этот предельный цикл является грубым предельным циклом, устойчивым, когда*

$$\mu\psi'(C^*) < 0,$$

и неустойчивым, когда

$$\mu\psi'(C^*) > 0.$$

Так как при $\mu \to 0$ предельный цикл системы (A_μ) стремится к кривой $x^2 + y^2 = c^*$, то естественно говорить, что этот предельный цикл системы (A_μ) «рождается» из кривой $x^2 + y^2 = C^*$.

Теорема 1 имеет локальный характер в том смысле, что в ней идет речь о возникновении предельного цикла в окрестности одной траектории системы (A_0). Следующая теорема, опирающаяся на предыдущую теорему, имеет уже более общий характер.

Теорема 2. *Пусть* A *и* B *— некоторые положительные числа* $A < B$.

Если уравнение

$$\psi(C) = 0$$

имеет в точности s *решений* $C = C_i$, $A < C_i < B$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, *причем каждое из этих решений удовлетворяет условию*

$$\psi'(C_i) \neq 0,$$

то при достаточно малом μ *система* (A_μ) *имеет в кольце*

$$A < x^2 + y^2 < B$$

в точности s *предельных циклов. Каждый из этих предельных циклов стремится при* $\mu \to 0$ *соответственно к кривой*

$$x^2 + y^2 = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

II. Системы, близкие к нелинейной гамильтоновой системе. Метод Понтрягина. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu p(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} + \mu q(x, y, \mu). \end{aligned} \tag{B_μ}$$

При $\mu = 0$ мы получаем гамильтонову систему

$$\dot{x} = -\partial H/\partial y, \; \dot{y} = \partial H/\partial x, \tag{B_0}$$

интегралом которой является

$$H(x, y) = C.$$

Мы будем предполагать, что при рассматриваемых нами значениях C $(C' < C < C'')$ кривые $H(x, y) = C$ являются замкнутыми кривыми.

Пусть $x = \varphi(t, C)$, $y = \psi(t, C)$ — решение системы (B_0), соответствующее некоторой кривой $H(x, y) = C$, где C — одно из рассматриваемых значений. Подставив в $p(x, y, 0)$ и $q(x, y, 0)$ решение $x = \varphi(t, C)$, $y = \psi(t, C)$, рассмотрим интеграл (этот интеграл, так же как и следующий, находится из рассмотрения функции последования в окрестности кривой $H(x, y) = C$):

$$I(C) = \int_0^\tau [p(\varphi, \psi, 0)\,\dot{\psi} - q(\varphi, \psi, 0)\,\dot{\varphi}]\,dt\ ^{11}).$$

Функцию $I(C)$ будем в дальнейшем называть *функцией Понтрягина* [12]). Рассмотрим также следующий интеграл:

$$I_1(C) = \int_0^\tau [q'_y(\varphi(t), \psi(t), 0) + p'_x(\varphi(t), \psi(t), 0)]\,dt.$$

Рассмотрим производную $I'(C)$. Можно показать, что $I'(C) = I_1 C$. Имеет место следующая теорема 3 (теорему 1 можно рассматривать как частный случай теоремы 3).

Теорема 3. *Пусть L_0 — замкнутая траектория гамильтоновой системы*

$$\dot{x} = -\partial H/\partial y, \quad \dot{y} = \partial H/\partial x, \tag{B_0}$$

уравнение которой —

$$H(x, y) = C_0;$$

$$x = \varphi_0(t), \quad y = \psi_0(t)$$

— соответствующее ей решение, τ_0 — период функций $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$.

Пусть

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu p(x, y, \mu), \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} + \mu q(x, y, \mu) \tag{B_μ}$$

— система, близкая к гамильтоновой (μ — малый параметр). Тогда, если выполняются условия

$$I(C_0) = \int_0^\tau [p(\varphi_0, \psi_0, 0)\,\dot{\psi} - q(\varphi_0, \psi_0, 0)\,\dot{\varphi}]\,dt = 0,$$

$$I'(C) = I_1(C_0) = \int_0^\tau [p'_x(\varphi_0, \psi_0, 0) + q'_y(\varphi_0, \psi_0, 0)]\,dt \neq 0,$$

то существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что:

---

[11]) Заметим, что в случае нелинейной консервативной системы период τ, вообще говоря, зависит от C.

[12]) В случае линейной системы $I(C) = C\psi(C)$.

а) *для любого* μ, $|\mu| < \delta$, *система* (B_μ) *имеет в* ε*-окрестности кривой* L_0 *предельный цикл* L_μ, *причем* L_μ *стягивается к* L_0 *при* $\mu \to 0$;

б) *этот предельный цикл является грубым и притом устойчивым, если* $I_1\mu < 0$, *и неустойчивым, если* $I_1\mu > 0$.

Замечание. Интеграл $I(C)$ может быть, очевидно, записан как криволинейный интеграл по кривой $H(x, y) = C$. Поэтому в том случае, когда системы (B_0) и (B_μ) определены во всей области внутри кривой L_0, интеграл $I(C)$ может быть также представлен в виде

$$I = \iint\limits_{G_0} [p'_x(x, y, 0) + q'_y(x, y, 0)]\, dx\, dy,$$

где G_0 — область, заключенная внутри кривой L_0.

Отметим, что при использовании метода малого параметра мы можем установить только существование таких значений μ, при которых рассматриваемая система имеет предельный цикл. Однако при этом не дается никаких оценок на значения μ, при которых это имеет место.

ГЛАВА 12

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

§ 1. Цилиндрическая фазовая поверхность и характер траекторий, возможных на цилиндрической фазовой поверхности. Отображая поведение реальной динамической системы в фазовом пространстве, естественно требовать взаимно однозначного соответствия между состояниями системы и точками фазового пространства.

Существуют такие реальные системы, для которых плоскость не может служить фазовым пространством. Примером такой системы может служить обычный физический маятник, движение которого описывается уравнением

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0. \tag{1}$$

Состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия φ и скоростью $\dot{\varphi}$. При изменении отклонения на 2π, мы получаем совершенно такое же положение маятника (физически ничем не отличимое от исходного).

Поэтому, если мы перейдем от уравнения (1) к системе

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = mgl \sin \varphi, \tag{2}$$

то на фазовой плоскости (φ, y), мы получим бесконечное множество точек, соответствующих одному и тому же физическому состоянию — это точки, у которых значения φ отличаются на 2π. Поэтому естественно эти точки отождествлять и рассматривать систему (2) на фазовом круговом цилиндре, отождествляя, например, прямые $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. При этом, очевидно, движения маятника, при которых он делает проворот вокруг оси, будут отображаться траекториями, обходящими цилиндр.

Аналогичная картина имеет место для всех механических (или электромеханических) систем, положение которых определяется *углом*. Так как такие системы встречаются довольно часто, то использование цилиндрической фазовой поверхности представляет большой интерес.

Итак, в настоящей главе рассматриваются системы вида

$$d\varphi/dt = P(\varphi, y), \quad dy/dt = Q(\varphi, y), \tag{3}$$

правые части которых — периодические функции φ с периодом 2π и непериодические функции y [1]). На плоскости (φ, y) картина траекторий будет полностью повторяться через 2π, и, как уже сказано, мы будем рассматривать траектории этой системы на круговом цилиндре, который мы получим из полосы плоскости между прямыми $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$, отождествляя точки этих прямых с одним и тем же значением y (или на полосе $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$).

Бесконечный цилиндр можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно (т. е. топологически) отобразить на плоское круговое кольцо без границ (и на этом кольце координаты φ и y можно рассматривать как полярные координаты). Поэтому любое разбиение на траектории, заданное на цилиндре, может быть отображено на плоское кольцо (и может рассматриваться как заданное динамической системой, определенной на этом плоском кольце). А отсюда, очевидно, следует, что на цилиндре возможны те и только те типы траекторий, которые возможны на плоскости.

Однако, очевидно, мы будем различать замкнутые траектории, охватывающие цилиндр (которым на плоскости соответствуют замкнутые траектории, охватывающие границу кольца) и не охватывающие цилиндр [2]). Точно так же при рассмотрении замкнутых контуров, составленных из траекторий (например, из сепаратрис седел), возможен случай, когда этот контур охватывает цилиндр, и когда он не охватывает цилиндр.

Для замкнутых траекторий, не охватывающих цилиндр, очевидно справедливы все рассмотрения, проведенные в гл. 5.

При рассмотрении замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр, возникают некоторые отличия, поэтому мы остановимся на этом случае особо.

§ 2. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Пусть L_0 — такая траектория, и пусть $\varphi = \chi(t)$, $y = \psi(t)$ — решение системы (3), ей соответствующее. В этом решении обе функции уже не являются периодическими, как для случая замкнутой траектории на плоскости, а значит, и для замкнутой траектории, не охватывающей цилиндр, а, очевидно, удовлетворяют следующему условию: при некотором $\tau > 0$ [3])

$$\begin{aligned} \varphi &= \chi(t+\tau) = \chi(t) + 2\pi, \\ y &= \psi(t+\tau) = \psi(t). \end{aligned} \tag{4}$$

---

[1]) В случае, когда правые части — периодические функции обоих аргументов, систему естественно рассматривать уже не на цилиндре, а на торе, и при этом возможный характер траекторий существенно усложняется.

[2]) Этим двум типам замкнутых траекторий в конкретных системах соответствуют различные типы движений.

[3]) Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр, очевидно, возможны и при отсутствии состояний равновесия у системы (3).

Если во всех точках замкнутой кривой, охватывающей цилиндр,

$$d\varphi/dt = P(\varphi, y) \neq 0,$$

то уравнение такой кривой после исключения t из уравнений (4) будет иметь вид

$$y = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ — периодическая функция φ с периодом 2π, т. е.

$$f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi).$$

Так как в минимуме и максимуме функции $y = \psi(t)$

$$\dot{\psi} = Q(\varphi, \psi) = 0,$$

то отсюда, очевидно, следует, что если ординаты изоклины

$$Q(\varphi, y) = 0$$

ограничены, m и M — соответственно наименьшая и наибольшая ординаты этой кривой, то, если система (3) имеет замкнутую траекторию, охватывающую цилиндр, эта траектория может лежать на цилиндре только в полосе

$$m \leqslant y \leqslant M.$$

Для изучения окрестности замкнутой кривой L_0, охватывающей цилиндр, так же как и в случае замкнутой кривой на плоскости, построим функцию последования на каком-нибудь отрезке без контакта, проведенном через точку L_0. В качестве отрезка без контакта всегда можно взять отрезок некоторой прямой $\varphi = \varphi_0$ (φ_0 — постоянная), содержащий точку — обозначим ее через M_0 — замкнутой траектории L_0.

Так как функция последования (и функция соответствия) всегда строится (см. гл. 5) в направлении возрастания t, то нетрудно видеть, развернув цилиндр на плоскость (φ, y), что функция последования на отрезке l прямой $\varphi = \varphi_0$ строится либо как функция соответствия между отрезком $\varphi = \varphi_0$ и конгруэнтным ему отрезком прямой $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$, либо как функция соответствия между отрезком l и конгруэнтным ему отрезком прямой $\varphi = \varphi_0 - 2\pi$.

Пусть s — параметр на отрезке l и

$$\bar{s} = \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \ldots$$

— функция последования на нем (т. е. на плоскости (φ, y) — функция соответствия между указанными выше отрезками). Очевидно, так же как и в гл. 5, грубый предельный цикл — это замкнутая траектория, для которой $\alpha_1 \neq 1$. Предельный цикл, охватывающий цилиндр, устойчив, если $\alpha_1 < 1$, и неустойчив, если $\alpha_1 > 0$.

Предельный цикл, охватывающий цилиндр, называется *k-кратным*, если $\alpha_1 = 1$ и первый не равный нулю коэффициент α_i $(i \geqslant 2)$ есть α_k.

Если $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_i = 0$ $(i \geqslant 2)$, то все траектории в окрестности рассматриваемой траектории L_0 замкнуты (и, очевидно, охватывают цилиндр).

При этом

$$\alpha_1 = e^{h\tau},$$

где

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left[P'_\varphi(\varphi, y) + Q'_y(\varphi, y)\right] dt, \quad \varphi = \chi(t), \quad y = \psi(t).$$

В случае, когда в точках L_0 $P(\varphi, y) \neq 0$, так что уравнение L_0 может быть записано в виде

$$y = f(\varphi)$$

$(y = f(\varphi)$, очевидно, является решением уравнения $dy/d\varphi = Q(\varphi, y)/P(\varphi, y))$, мы имеем

$$h = \frac{1}{\int_0^{2\pi} [P^{-1}(\varphi, f(\varphi))]\, d\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[P'_\varphi(\varphi, f(\varphi)) + Q'_y(\varphi, f(\varphi))\right] d\varphi}{P(\varphi, f(\varphi))}.$$

При этом в случае, когда в точках L_0

$$P(\varphi, y) > 0,$$

мы имеем

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{P(\varphi, f(\varphi))},$$

а в случае, когда в точках L_0

$$P(\varphi, y) < 0,$$

имеем

$$\tau = -\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{P(\varphi, f(\varphi))}.$$

Условием устойчивости цикла является

$$h < 0,$$

условием неустойчивости —

$$h > 0.$$

Принимая во внимание знак $P(\varphi, y)$ в точках L_0, мы можем также записать условия устойчивости цикла, охватывающего цилиндр, в следующей форме.

Условие устойчивости:
при $P(\varphi, y) > 0$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\left[P'_\varphi(\varphi, f(\varphi)) + Q'_y(\varphi, f(\varphi))\right] d\varphi}{P(\varphi, f(\varphi))} < 0;$$

при $P(\varphi, y) < 0$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\left[P'_\varphi(\varphi, f(\varphi)) + Q'_y(\varphi, f(\varphi))\right] d\varphi}{P(\varphi, f(\varphi))} > 0. \tag{5}$$

Условие неустойчивости:
при $P(\varphi, y) > 0$

$$I > 0;$$

при $P(\varphi, y) < 0$

$$I < 0.$$

§ 3. Приемы исследования качественной структуры динамической системы на цилиндре.

1. Критерии Бендиксона и Дюлака. Если удается подобрать такую аналитическую функцию $F(\varphi, y)$, что в некоторой области, заключенной между двумя замкнутыми кривыми, охватывающими цилиндр, имеют место неравенства

$$\frac{\partial(F(\varphi, y) P(\varphi, y))}{\partial\varphi} + \frac{\partial(F(\varphi, y) Q(\varphi, y))}{\partial y} \neq 0,$$

то в этой области G не существует замкнутых траекторий, не охватывающих цилиндр, и может существовать не более одной замкнутой траектории, охватывающей цилиндр.

2. Топографическая система на цилиндре. Топографическая система на цилиндре

$$F(\varphi, y) = C$$

может быть системой замкнутых (непересекающихся) кривых, как охватывающих, так и не охватывающих цилиндр. Использование топографических систем на цилиндре для установления существования предельных циклов, полностью аналогично (с очевидными изменениями) их использованию на плоскости.

Использование систем сравнения, в частности консервативных систем, может быть на цилиндрической поверхности проведено полностью аналогично тому, как это делалось на плоскости.

§ 4. Понятие грубости и степени негрубости для динамических систем на цилиндре. Бифуркации на цилиндре. Поворот поля[4]. Определение грубости и первой степени негрубости системы на цилиндре в области, ограниченной двумя циклами без

[4]) См. [46].

контакта, охватывающими цилиндр [5]), совершенно такое же, как и на плоскости, и мы его не приводим.

Необходимые и достаточные условия для грубости и первой степени негрубости динамической системы на цилиндре, с очевидными дополнениями (касающимися замкнутых траекторий и замкнутых контуров, охватывающих цилиндр) те же, что и на плоскости, именно:

А. Для того чтобы динамическая система на цилиндре была грубой в области G, ограниченной двумя циклами без контакта, охватывающими цилиндр, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) В области G существуют только грубые состояния равновесия (т. е. состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$ и в случае, когда $\Delta > 0$, $\sigma \neq 0$).

2) В области G нет предельных циклов, как не охватывающих, так и охватывающих цилиндр, для которых $h = 0$.

3) В области G не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло.

Б. Для того чтобы динамическая система на цилиндре была системой первой степени негрубости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий (ср. гл. 9):

1) Система имеет одну и только одну из негрубых особых траекторий следующих типов:

а) двукратное состояние равновесия седло-узел;

б) сложный фокус первого порядка ($\sigma = 0$, $L_1 \neq 0$);

в) двукратный предельный цикл, не охватывающий или охватывающий цилиндр (т. е. предельный цикл, для которого $h = 0$, а в функции последования $\alpha_2 \neq 0$);

г) сепаратрису, идущую из седла в седло, причем в случае, когда сепаратриса идет из седла $O(\varphi_0, y_0)$ в него же, она может как не охватывать, так и охватывать цилиндр, и при этом в седле $O(\varphi_0, y_0)$ должно быть $\sigma_c = P'_\varphi(\varphi_0, y_0) + Q'_y(\varphi_0, y_0) \neq 0$.

2) Сепаратриса седла не может иметь в качестве своей предельной траектории сепаратрису, идущую из седла в то же седло (образующую петлю, либо не охватывающую, либо охватывающую цилиндр).

3) Сепаратриса седло-узла не может: быть одновременно и ω-, и α-сепаратрисой седло-узла; быть одновременно сепаратрисой седла.

4) С двух различных сторон двукратного цикла (как охватывающего, так и не охватывающего цилиндр) к нему не могут стремиться сепаратрисы седел.

Бифуркации в динамических системах на цилиндре, при которых исходная система (или система, соответствующая бифурка-

[5]) От требования, что область ограничена циклами без контакта, можно освободиться, однако при этом определение усложняется.

ционному значению параметра, в случае, когда рассматривается система, правые части которой зависят от параметра) является системой первой степени негрубости, те же, что и описанные в гл. 10, со следующими очевидными добавлениями.

I. Двукратный цикл, охватывающий цилиндр при достаточно малых добавках, либо разделяется на два цикла, охватывающих цилиндр, либо исчезает.

II. Сепаратриса седла $O(\varphi_0, y_0)$, образующая петлю, охватывающую цилиндр (при этом в седле $\sigma_c = P'_\varphi(\varphi_0, y_0) + Q'_y(\varphi_0, y_0) \neq \neq 0$), при всех достаточно малых добавках либо разделяется без рождения предельного цикла, либо разделяется с рождением предельного цикла, охватывающего цилиндр, причем этот предельный цикл (при условии, что $\sigma_c \neq 0$) единственный и устойчивый, когда $\sigma_c < 0$, и неустойчивый, когда $\sigma_c > 0$.

III. Если сепаратриса седло-узла, охватывающая цилиндр, возвращается в него же (в узловую область седло-узла), то при всех достаточно малых добавках, при которых седло-узел исчезает, от сепаратрисы рождается предельный цикл, охватывающий цилиндр.

В случае динамических систем на цилиндре можно также отметить следующую бифуркацию от бесконечности:

IV. Рождение из бесконечности предельного цикла, охватывающего цилиндр (такое рождение происходит при смене устойчивости бесконечности (ср. гл. 11)).

Поворот поля. Как и в случае плоскости, мы скажем, что при переходе от системы

$$d\varphi/dt = P(\varphi, y), \quad dy/dt = Q(\varphi, y) \tag{A}$$

к системе

$$d\varphi/dt = \tilde{P}(\varphi, y), \quad dy/dt = \tilde{Q}(\varphi, y) \tag{$\tilde{\text{A}}$}$$

имеет место поворот поля (или поле поворачивается на угол одного знака), если во всех точках, отличных от состояний равновесия системы (A), одновременно являющихся состояниями равновесия системы ($\tilde{\text{A}}$), выполняется неравенство

$$P(\varphi, y)\tilde{Q}(\varphi, y) - Q(\varphi, y)\tilde{P}(\varphi, y) \neq 0.$$

Все сказанное в гл. 11 по поводу сепаратрис и, в частности, по поводу сепаратрис, образующих петлю, справедливо, очевидно, и для сепаратрис, образующих петлю, охватывающую цилиндр.

Предельный цикл, охватывающий цилиндр при повороте поля в одну сторону, поднимается вверх, а при повороте поля в другую сторону — опускается вниз.

Если на цилиндре существуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы, охватывающие цилиндр, на которых направления обхода по t одинаковы, то при повороте на угол такого знака, при котором устойчивый цикл поднимается, неустойчивый цикл опускается, а при повороте другого знака — наоборот.

Если на двух устойчивых циклах, охватывающих цилиндр, направления обхода по t противоположны, то при повороте поля на угол одного и того же знака предельные циклы «двигаются» в противоположных направлениях.

Утверждения о поведении при повороте, аналогичные утверждениям гл. 11, справедливы также для устойчивого и неустойчивого предельных циклов, охватывающих цилиндр, на которых направления обхода по t противоположны, а также для двукратного предельного цикла, охватывающего цилиндр, и для сепаратрисы, образующей петлю, охватывающую цилиндр.

§ 5. Динамические системы на цилиндре, близкие к гамильтоновым (метод Понтрягина). Предположим, что рассматриваемая система на цилиндре имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu p(\varphi, y, \mu), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \mu q(\varphi, y, \mu). \end{aligned} \tag{A_μ}$$

Мы рассмотрим случай, когда у семейства кривых

$$H(\varphi, y) = C \tag{C}$$

существуют области, заполненные замкнутыми кривыми, охватывающими цилиндр, и сформулируем условия, достаточные для того, чтобы у системы (A) при всех достаточно малых μ существовал предельный цикл, рождающийся из некоторой кривой (C) при условии, что в точках этой кривой (C)

$$\partial H/\partial y \neq 0.$$

Если в точках некоторой кривой

$$H(\varphi, y) = C_0$$

$\partial H/\partial y \neq 0$, то уравнение этой кривой, а также всех близких кривых

$$H(\varphi, y) = C, \quad |C - C_0| < \alpha, \quad \alpha > 0,$$

может быть представлено в виде

$$y = f(\varphi, C),$$

Теорема 1. *Для того чтобы у системы* (A_μ) *существовал предельный цикл, рождающийся из кривой*

$$y = f(\varphi, C_0),$$

необходимо, чтобы

$$I(C_0) = \int_0^{2\pi} \left[q(\varphi, f(\varphi, C_0), 0) - p(\varphi, f(\varphi, C_0), 0) f'_\varphi(\varphi, C_0)\right] d\varphi = 0, \tag{6}$$

и достаточно, чтобы при условии (6) *выполнялось*

$$I_1(C_0)=\int_0^{2\pi}\frac{[p'_\varphi(\varphi, f(\varphi, C_0), 0)+q'_y(\varphi, f(\varphi, C_0), 0)]\,d\varphi}{-H'_y(\varphi, f(\varphi, C_0))}\neq 0. \quad (7)$$

Если $I(C_0)=0$ *и* $I_1(C_0)\neq 0$, *то рождающийся цикл единственный и притом устойчивый, если*

$$\mu I_1(C_0)<0, \quad H'_y(\varphi, f(\varphi, C))>0$$

или

$$\mu I_1(C_0)>0, \quad H'_y(\varphi, f(\varphi, C))<0,$$

и неустойчивый, если

$$\mu I_1(C_0)>0, \quad H'_y(\varphi, f(\varphi, C))>0$$

или

$$\mu I_1(C_0)<0, \quad H'_y(\varphi, f(\varphi, C))<0.$$

Замечание 1. Элементарными вычислениями нетрудно установить, что если

$$I(C)=\int_0^{2\pi}[q(\varphi, f(\varphi, C), 0)H'_y(\varphi, f(\varphi, C))+$$
$$+p(\varphi, f(\varphi, C), 0)H'_\varphi(\varphi, f(\varphi, C))]\,d\varphi,$$

то

$$I_1(C)=dI(C)/dC. \quad (8)$$

Во многих случаях удобнее пользоваться этим свойством и непосредственно устанавливать наличие условий

$$I(C)=0, \quad dI(C)/dC\neq 0,$$

чем пользоваться приведенным выше выражением для $I_1(C)$.

Замечание 2. В тех случаях, когда почему-либо удобнее использовать параметрические уравнения кривых $H(x, y)=C$:

$$x=g(t), \quad y=h(t),$$

очевидно, нужно пользоваться теми же выражениями, что и в § 7 гл. 11 (только с другими обозначениями), т. е.

$$I(C)=\int_0^{\tau}[p(g(t), h(t), 0)\dot{h}(t)-q(g(t), h(t), 0)\dot{g}(t)]\,dt,$$

$$I'(C)=I_1(C)=\int_0^{\tau}[p'_x(g(t), h(t), 0)+q'_y(g(t), h(t), 0)]\,dt.$$

ГЛАВА 13

АДЕКВАТНОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ ФАКТАМИ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ И ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ [1])

Введение. Очень многие явления и многочисленные практически важные устройства целесообразно объединить в отдельный класс — класс «автоколебательных» систем. Общей чертой этих систем является их способность совершать «автоколебания», т. е. такие колебания, период и амплитуда [2]) которых в течение долгого времени могут оставаться постоянными и не зависят от начальных значений (если не для всей плоскости, то во всяком случае для целой области начальных значений), а определяются свойствами самой системы. К числу классических автоколебательных систем относятся, например: ламповый генератор, часы, паровая машина, звонок, духовые и смычковые инструменты и т. д. Автоколебания возникают в передней подвеске автомобиля («шимми»), у самолета при полете («флаттер») и т. д. В различных реальных автоколебательных системах автоколебания играют разную роль. В одних системах автоколебания являются основой этого устройства (ламповый генератор, транзистор, часы, смычковые и духовые инструменты и т. д.), и поэтому реальные параметры подбираются так, чтобы автоколебания имели место, в других — они вредны (шимми, флаттер, колебания в различных регулирующих устройствах), и поэтому реальные параметры, если это возможно, нужно брать такими, чтобы автоколебания отсутствовали. Кроме того, в автоколебательных системах может существовать не один, а несколько «стационарных режимов»— равновесных (состояний равновесия) и автоколебательных с различными периодами и амплитудами,— которые устанавливаются в зависимости от того, из какой области фазового пространства берутся начальные значения и каковы значения параметров, входящих в систему. Однако всегда один и тот же режим устанавливается для целой области начальных значений. Типичной чертой автоколебательных систем является то, что *незатухающие колебания — автоколебания — возникают в них за счет непериодического источника энергии* (напряжение, которое создает анодная батарея в ламповом гене-

[1]) См. [2—4, 100, 101].

[2]) Точнее, следует сказать «период и весь спектр амплитуд».

раторе, заводной механизм в часах и др.), и притом *источника энергии, не зависящего от времени.* Таким образом, автоколебательные системы описываются не зависящими от времени, т. е. автономными, дифференциальными уравнениями.

Так как в настоящей книге рассматриваются только автономные системы двух дифференциальных уравнений, то мы будем здесь говорить только об автоколебательных системах, с достаточной точностью описываемых системой двух автономных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \dot{y} = Q(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n). \qquad (A_\lambda)$$

Здесь λ_i — параметры, которые в принятой идеализации соответствуют тем реальным параметрам, которые были учтены при написании дифференциальных уравнений. В случае автоколебательных систем эти уравнения заведомо нелинейны и, кроме того, заведомо неконсервативны. Кроме того, как мы уже говорили ранее, такие системы, вообще говоря, за исключением некоторых бифуркационных значений параметров, являются грубыми. Реальные автоколебательные режимы, устанавливающиеся в системах, достаточно точно отображаемых уравнениями вида (A_λ), математически соответствуют устойчивым предельным циклам. Наличие таких предельных циклов в соответствующей системе дифференциальных уравнений является необходимым и достаточным условием для возможности (при надлежащих начальных условиях) существования автоколебаний в системе.

Неустойчивые предельные циклы, а также сепаратрисы отделяют на фазовой плоскости области начальных значений, при которых устанавливается тот или другой стационарный режим, т. е. либо устойчивый предельный цикл, либо устойчивое состояние равновесия [3]).

Аппарат нелинейных и неконсервативных дифференциальных уравнений оказался привлеченным к прикладным задачам в начале нашего столетия в основном в связи с развитием радиотехники [4]), в частности, с изучением работы лампового генера-

[3]) Если начальная точка взята не на самом устойчивом предельном цикле и не в состоянии равновесия, то, как известно (см. гл. 2), изображающая точка по соответствующей траектории стремится к состоянию равновесия или предельному циклу при $t \to +\infty$. Однако, очевидно, она будет уже через конечное время весьма близка к предельному циклу или состоянию равновесия и при дальнейшем возрастании t так и будет оставаться близко. Поэтому естественно считать, что в реальной системе стационарный режим устанавливается через конечный промежуток времени.

[4]) До развития радиотехники интересы физиков и техников были главным образом сосредоточены на линейных задачах, описываемых хорошо разработанным и простым аппаратом линейных дифференциальных уравнений. Естественно, что новые явления в радиотехнике сначала пытались объяснить, используя тот же аппарат линейных дифференциальных уравнений. Однако это оказалось невозможным, так как рассматривавшиеся новые явления никак не укладывались в этот аппарат.

тора. Простое нелинейное уравнение, описывающее работу лампового генератора, позволило адекватным образом объяснить нелинейные эффекты, которые, конечно, имеют место не только в ламповом генераторе, но также и во множестве других устройств, динамика которых достаточно точно описывается дифференциальными уравнениями с аналогичным разбиением фазового пространства на траектории.

§ 1. Мягкий и жесткий режимы. Так как эти понятия связаны со структурой разбиения фазового пространства на траектории, а не со специальным аналитическим видом соответствующих дифференциальных уравнений, то мы здесь не будем обращаться к виду дифференциальных уравнений.

Пусть при некоторых фиксированных значениях параметров у системы дифференциальных уравнений, описывающих работу данного устройства (например, лампового генератора), разбиение фазового пространства на траектории имеет вид, представленный на рис. 112, *б*, т. е. начало координат O — неустойчивый

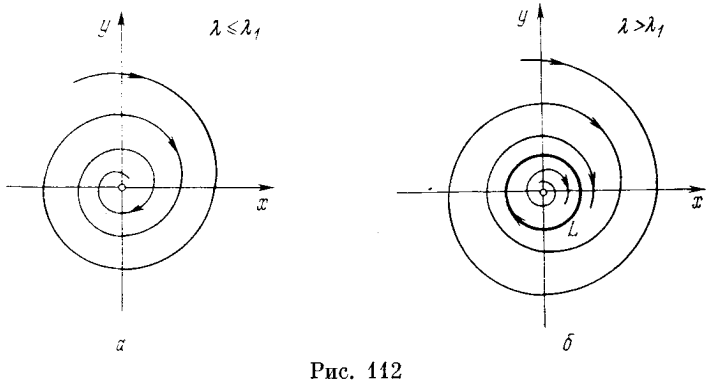


Рис. 112

фокус, и существует единственный предельный цикл L, окружающий начало O. Тогда, очевидно, при любых начальных значениях (за исключением того нереального случая, когда начальная точка совпадает с началом O) изображающая точка будет по соответствующей траектории стремиться к предельному циклу (так как состояние равновесия неустойчиво). На физическом языке это означает, что при любых начальных условиях (и, в частности, при таких, при которых начальная точка сколь угодно близка к началу O, но не совпадает с O) будет устанавливаться один и тот же автоколебательный режим.

В этом случае говорят, что имеет место *мягкий режим.*

Предположим теперь,— опять не обращаясь к конкретному аналитическому виду системы дифференциальных уравнений,— что у этой системы (которая описывает работу некоторого устройства, например, лампового генератора при другой характеристике лампы, чем в выше рассмотренном случае) при некоторых фиксированных значениях параметров разбиение фазового пространства на траектории имеет вид, представленный на рис. 113, *а*, т. е. начало координат O — устойчивый фокус,

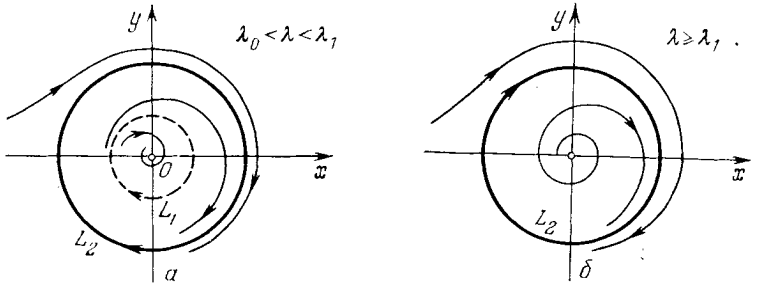


Рис. 113

и вокруг этого фокуса — два предельных цикла — неустойчивый L_1 и устойчивый L_2 (неустойчивый предельный цикл отделяет состояние равновесия O от устойчивого предельного цикла L_2). Очевидно, если начальная точка на фазовой плоскости достаточно близка к началу O (лежит между точкой O и предельным циклом L_1), то изображающая точка по соответствующей траектории стремится к устойчивому состоянию равновесия, колебаний не возникает (устанавливается равновесный режим). Для того чтобы возникли автоколебания, надо начальную точку «забросить» достаточно далеко от начала, т. е. во всяком случае за неустойчивый цикл L_1. Очевидно, для всех начальных точек, лежащих вне неустойчивого цикла, изображающая точка стремится к устойчивому предельному циклу L_2, т. е. возникают автоколебания.

В этом случае говорят, что имеет место *жесткий режим.*

§ 2. Замечания о границах области устойчивости различных стационарных режимов. Мы указывали, что стационарным режимам реальной системы в описывающей ее системе дифференциальных уравнений соответствуют устойчивые узлы или фокусы (равновесные режимы) и устойчивые предельные циклы (автоколебательные режимы). Неустойчивые же предельные циклы и сепаратрисы (как мы увидим, не все сепаратрисы) являются разделяющими для области начальных значений на частичные

области, из которых изображающая точка стремится к различным стационарным режимам. Естественно, таким образом, что в динамической системе, описывающей реальную систему, в которой параметр t соответствует реальному времени, мы не можем считать роли значений $t > t_0$ и $t < t_0$, где t_0 — некоторое фиксированное значение (т. е. роли «прошедшего» и «будущего»), симметричными.

Мы остановимся здесь несколько подробнее на роли неустойчивых предельных циклов, и ω-сепаратрис (т. е. сепаратрис, стремящихся к седлу при $t \to +\infty$) в описании реальной системы. При этом, конечно, мы будем считать рассматриваемую динамическую систему грубой.

Предположим, что у этой динамической системы существует область начальных значений, границей которой является неустойчивый предельный цикл, как, например, в случаях рассмотренной выше динамической системы, описывающей жесткий режим.

Если мы возьмем начальную точку в области притяжения состояния равновесия O (см. рис. 113, *а*) или в области притяжения устойчивого предельного цикла L_2 достаточно далеко от границы — неустойчивого предельного цикла L_1, то достаточно малые случайные толчки (которые мы всегда должны предполагать существующими в реальной системе) не выведут изображающую точку из соответствующей области притяжения, и она при увеличении t будет стремиться все к тому же стационарному режиму. Очевидно, так же будет вести себя и соответствующая реальная система. Иначе обстоит дело, если начальное значение взять достаточно близко к разделяющему неустойчивому предельному циклу L_1. Малый случайный толчок может перекинуть изображающую точку в область притяжения состояния равновесия O либо в область притяжения предельного цикла L_2, поэтому при начальных значениях, достаточно близких к разделяющему циклу L_1, существует неопределенность; в зависимости от случайных толчков возможно установление одного из двух равновесных режимов.

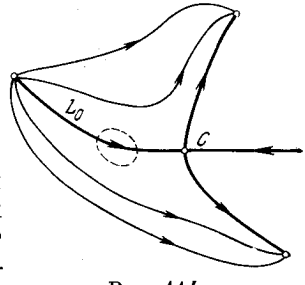


Рис. 114

Полностью аналогичную роль играют ω-сепаратрисы седла. Сепаратрисы седла, стремящиеся к седлу при $t \to -\infty$ (α-сепаратрисы седла), стремятся при $t \to +\infty$ либо к устойчивому состоянию равновесия, либо к устойчивому предельному циклу (напоминаем, что мы естественным образом предполагаем систему грубой), так же как и все близкие к этой сепаратрисе траектории. Поэтому при малых случайных толчках изображающая точка, находящаяся вблизи точек такой сепаратрисы, не

выпадает из области притяжения того стационарного состояния, к которому стремится сепаратриса.

Однако ситуация делается другой, если начальная точка взята достаточно близко к точке ω-сепаратрисы такого седла, у которого две его α-сепаратрисы стремятся к двум различным стационарным режимам (рис. 114).

В этом случае ω-сепаратриса L_0 седла C является граничной для двух областей притяжения различных устойчивых элементов (устойчивых состояний равновесия или предельных циклов), и поэтому малые случайные толчки могут привести к тому, что изображающая точка пойдет к одному или другому стационарному режиму. Здесь, так же как в предыдущем случае для реальной системы, имеет место некоторая неопределенность возможного поведения.

§ 3. Мягкое и жесткое возникновение колебаний. В предыдущем параграфе мы рассматривали реальную систему и соответствующую систему дифференциальных уравнений при фиксированных значениях параметров.

Сейчас мы будем рассматривать, как некоторые нелинейные эффекты, происходящие при изменении реальных параметров, адекватным образом объясняются теорией бифуркаций дифференциальных уравнений. Мы по-прежнему не будем выписывать формулы, а ограничимся лишь чертежами и пояснениями. Однако, предполагая для простоты, что система близка к линейной консервативной (см. [2—4]), будем рассматривать зависимость амплитуды колебания ξ от некоторого параметра λ, соответствующего реальному параметру [5]).

Рассмотрим два основных случая возникновения колебаний при изменении параметра λ: случай мягкого и жесткого возбуждения колебаний.

Физически тот или другой характер возбуждения колебаний, очевидно, зависит от характера реальной задачи [6]) — математически он связан с характером соответствующей системы дифференциальных уравнений и тех бифуркаций, которые осуществляются в ней при изменении параметра.

Предположим, что при значениях параметра λ, меньших некоторого значения λ_1, разбиение фазовой плоскости имеет следующий простой характер: существует единственное состояние равновесия O в начале координат — устойчивый фокус. Где бы ни находилась изображающая точка, она через некоторое время окажется вблизи этого устойчивого фокуса. Значение λ_1 яв-

---

[5]) В случае лампового генератора этим параметром является коэффициент взаимоиндукции между цепью сетки и колебательным контуром.

[6]) В ламповом генераторе он зависит от характеристики лампы.

ляется бифуркационным; при этом значении фокус делается сложным (см. рис. 112, *а*).

При $\lambda > \lambda_1$ из этой особой точки рождается устойчивый предельный цикл, а состояние равновесия O делается неустойчивым. Изображающая точка начинает стремиться к этому предельному циклу, так как теперь состояние равновесия неустойчиво. На физическом языке это означает, что начались колебания — имеет место самовозбуждение[7]). При дальнейшем увеличении λ радиус предельного цикла увеличивается, а при уменьшении λ — уменьшается и при приближении λ к λ_1 предельный цикл сжимается в точку (в сложный фокус): колебания исчезают. На физической диаграмме (ξ, λ) (рис. 115) имеет место плавный (мягкий) переход с постепенно меняющейся амплитудой от состояния равновесия к периодическим движениям и обратно. Явление ведет себя обратимо.

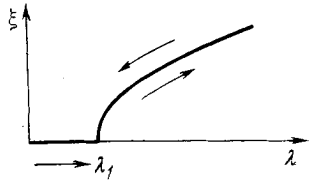


Рис. 115

Прибор, измеряющий амплитуду колебаний генератора при изменении параметра, покажет плавный (мягкий) переход с постепенно (без скачков) меняющейся амплитудой от состояния покоя к стационарным колебаниям и обратно.

Перейдем теперь к описанию жесткого возбуждения колебаний. В этом случае и реальная система, и соответствующие ей дифференциальные уравнения по-другому зависят от параметра, но при значениях $\lambda < \lambda_0$ (λ_0 — некоторое определенное значение), так же как и в рассмотренном случае мягкого возбуждения, у системы дифференциальных уравнений существует устойчивый фокус O, и изображающая точка, находящаяся вблизи состояния равновесия, будет все время находиться вблизи него (так как траектории стремятся к состоянию равновесия O при $t \to +\infty$). При $\lambda = \lambda_0$ у системы из уплотнения траекторий появляется двукратный предельный цикл, который затем при $\lambda > \lambda_0$ (но $\lambda < \lambda_1$) разделяется на два предельных цикла (рис. 113, *а*), из которых один устойчивый. Однако это не касается изображающей точки, если она находится достаточно близко к состоянию равновесия, так как устойчивый характер состояния равновесия не меняется.

При увеличении λ устойчивый предельный цикл расширяется, а неустойчивый сжимается и, наконец, при некотором $\lambda = \lambda_1$ «влипает» в состояние равновесия O, которое делается сложным неустойчивым фокусом, а затем при $\lambda > \lambda_1$ — грубым неустойчивым фокусом. Изображающая точка (которая до $\lambda = \lambda_1$ все время находилась вблизи точки O) «срывается» при переходе через значение $\lambda = \lambda_1$ и «перескакивает», как ей велят траек-

[7]) При всяком фиксированном $\lambda > \lambda_1$ имеет место мягкий режим.

тории, и, следовательно, приходит к устойчивому предельному циклу (амплитуда которого все время возрастала, начиная с λ_0) (см. рис. 113, *б*). Будем теперь уменьшать λ от значения $\lambda > \lambda_1$ до $\lambda < \lambda_0$. Изображающая точка будет при всех $\lambda > \lambda_0$ все время оставаться вблизи устойчивого предельного цикла L_2 (грубо говоря, двигаться по этому циклу) до тех пор, пока при $\lambda = \lambda_0$ с ним не сольется неустойчивый предельный цикл, образуя двукратный цикл, который затем при $\lambda < \lambda_0$ исчезает. После этого изображающая точка вынуждена будет «перескочить» к состоянию равновесия O, которое теперь устойчиво. Изображающая точка не будет реагировать на то, что при $\lambda = \lambda_1$ состояние равновесия делается устойчивым (из него рождается тот неустойчивый предельный цикл, который затем сливается с устойчивым), так как это не меняет характера того предельного цикла, по которому она при этом значении движется. При переходе же через значение $\lambda = \lambda_0$ (при котором цикл L_1, сливаясь с циклом L_2, делается двойным и затем исчезает) изображающая точка, следуя траекториям, перейдет к состоянию равновесия и останется там при дальнейшем уменьшении λ.

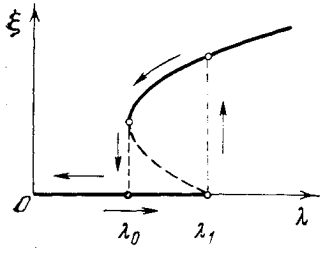


Рис. 116

Прибор, измеряющий амплитуду колебаний тока в колебательном контуре, обнаружит скачки — резкое жесткое изменение амплитуды ξ для $\lambda = \lambda_1$ при увеличении λ и для $\lambda = \lambda_0$ при уменьшении λ. Явление протекает поразному при увеличении и уменьшении λ. Мы имеем дело с процессом, имеющим необратимый, гистерезисный характер (рис. 116).

Это интересное для радиотехники (а также для других областей науки) явление жесткого возбуждения колебаний получает здесь на языке состояний равновесия, предельных циклов и бифуркационных значений параметра естественное адекватное объяснение. Значения параметра λ_1 и λ_0, соответствующие сложному фокусу и двукратному предельному циклу, являются, очевидно, бифуркационными [8]).

Понятия мягкого и жесткого режимов, мягкого и жесткого возникновения колебаний введены при рассмотрении лампового генератора, когда фазовая плоскость имеет весьма простой вид: при всех значениях параметра существует только одно состояние равновесия — фокус и в зависимости от значений параметра могут существовать окружающие его предельные циклы.

---

[8]) Из рассмотренной картины, например, сразу видно, что при значениях $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ изображающую точку можно «перекинуть» из одного устойчивого режима в другой достаточно сильным толчком.

Однако эти понятия могут быть перенесены и на случай, когда фазовая плоскость дифференциального уравнения, описывающего тот или другой реальный объект, имеет более сложный вид, т. е. когда на фазовой плоскости существует не единственное состояние равновесия, а несколько и среди них есть седла, а значит, сепаратрисы. И в случае более сложной фазовой плоскости имеет смысл говорить о мягком и жестком возникновении колебаний, если описанная выше ситуация имеет место вокруг одного из существующих в системе фокусов.

Кроме того, очевидно, при большом числе предельных циклов у системы дифференциальных уравнений возможно резкое изменение амплитуды колебания, соответствующее тому, что изображающая точка при исчезновении одного цикла перескакивает на другой.

Рассмотренные случаи перескоков изображающей точки, вызванных бифуркациями, возникающими при изменении параметров, естественным образом привели к понятию «безопасных» и «опасных» границ области устойчивости.

§ 4. «Безопасные» и «опасные» границы области устойчивости состояний равновесия[9]**).** Вопрос об устойчивости состояний равновесия (равновесных режимов)[10]) возникает при решении многих прикладных задач (из области автоматического регулирования, гироскопической стабилизации, радиотехники, электротехники и т. д.).

Естественно предполагать (см. гл. 8, § 1), что в прикладных задачах соответствующая система дифференциальных уравнений (в частности ее состояния равновесия) грубая и что, следовательно, при анализе устойчивости можно ограничиться тем случаем, когда этот вопрос может быть решен путем отбрасывания всех нелинейных членов и исследования характеристического уравнения[11]) (состояние равновесия устойчиво, если действительные части характеристических корней отрицательны)[12]).

---

[9]) См. [34—36].

[10]) Равновесные режимы, которым соответствуют состояния равновесия, естественно понимать в обобщенном смысле; например, режимы, связанные с наличием постоянной угловой скорости, постоянного тока и т. д., рассматриваются как равновесные режимы. При этом предполагается, что поведение рассматриваемой реальной задачи описывается после выбора надлежащей системы координат автономным дифференциальным уравнением, а равновесным режимам соответствуют состояния равновесия. Такие состояния равновесия, следуя Раусу и Ляпунову, называют также *установившимися движениями*.

[11]) В характеристическое уравнение входят только коэффициенты линейных членов правых частей системы (A), поэтому такое исследование называется *линеаризацией* данной системы.

[12]) Условие отрицательности действительных частей характеристических корней в случае динамических систем любого числа измерений даны Раусом и Гурвицем в форме неравенств для ряда детерминантов. Для мно-

Исследование вопроса о том, при каких значениях параметров, входящих в правые части динамических систем, рассматриваемое состояние равновесия устойчиво, позволяет выделить область устойчивости этого состояния равновесия в пространстве параметров. Мы будем дальше называть эту область *областью Рауса — Гурвица.*

Хотя основной интерес для прикладных вопросов (в которых играет роль устойчивость равновесных режимов) имеют такие системы, действительные части корней характеристических уравнений которых отрицательны, т. е. системы со значениями параметров внутри области Рауса — Гурвица, тем не менее для ряда прикладных вопросов представляет интерес выяснение поведения системы в случае, когда изображающая ее в пространстве параметров точка лежит на границе области Рауса — Гурвица или (что физически эквивалентно) достаточно близко к этой границе. Дело в том, что в прикладных вопросах приходится считаться не только с требованиями устойчивости, но и с другими требованиями, относящимися к работе устройства, и может оказаться, что одновременное удовлетворение этих условий наилучшим образом достигается выбором параметров, соответствующих точкам, лежащим в сравнительной близости к границам области Рауса — Гурвица. Таким образом, возникает вопрос о поведении динамической системы вблизи границы области Рауса — Гурвица. Действительно, выбирая значения параметров, близкие к границе этой области, мы никогда не можем быть уверены, что случайные отклонения этих параметров в реальной системе не выведут точку, представляющую систему в пространстве параметров, за границу области Рауса — Гурвица.

Поведение динамической системы при малых отклонениях от границы области Рауса — Гурвица определяет и особенности поведения систем, для которых представляющая их точка в пространстве параметров лежит в области Рауса — Гурвица, но в достаточной близости к границам этой области.

Как мы видели в предыдущем параграфе, вопрос о поведении системы в случае, когда изображающая ее точка в пространстве параметров переходит через границу области Рауса — Гурвица (именно, через границу, соответствующую системе со сложным фокусом), связан с вопросом возбуждения колебаний (мягкого и жесткого самовозбуждений, см. § 3).

Мы рассмотрим сначала те точки границы области Рауса — Гурвица, которые соответствуют негрубым состояниям равновесия первой степени негрубости — именно, сложному фокусу с

гомерных систем часто вместо условий Рауса — Гурвица используют *критерий Найквиста.* Однако, так как в настоящей книге рассматриваются только системы двух дифференциальных уравнений, для которых характеристическое уравнение является квадратным уравнением, то мы здесь не обращаемся к этим общим критериям.

не равной нулю первой ляпуновской величиной (коэффициент α_3 в функции последования) и двукратному состоянию равновесия — седло-узлу.

В этом случае части границы области Рауса — Гурвица могут быть двоякой природы: б е з о п а с н ы е г р а н и ц ы — достаточно малое нарушение которых влечет за собой лишь весьма малые (сколь угодно малые при достаточно малых нарушениях) изменения состояния системы; о п а с н ы е г р а н и ц ы — сколь угодно малое нарушение которых повлечет за собой переход системы в новое состояние, которое мы не можем приблизить к исходному выбором достаточно малых нарушений границы.

Иначе говоря, может оказаться, что состояние равновесия измененной системы (сколь угодно мало измененной) будет неустойчиво, но практически система будет вести себя как устойчивая, так как изображающая точка, взятая из некоторой окрестности состояния равновесия, будет для всех t (начиная с начального значения t_0) оставаться в малой окрестности состояния равновесия (сколь угодно малой при достаточно малых изменениях системы), и, наоборот, может оказаться, что, хотя состояние равновесия измененной системы устойчиво, но система практически будет неустойчива, так как изображающую точку, взятую вне малой окрестности состояния равновесия (сколь угодно малой при достаточно малых изменениях системы), нельзя заставить оставаться вблизи состояния равновесия.

Предположим, что рассматриваемое состояние равновесия лежит в начале координат, так что мы можем предполагать систему в виде

$$\dot{x} = a(\lambda)x + b(\lambda)y + P(x, y, \lambda),$$
$$\dot{y} = c(\lambda)x + d(\lambda)y + Q(x, y, \lambda),$$

где λ — параметр.

Рассмотрим подробно два указанных выше случая поведения системы при значениях λ, близких к значению λ_0, соответствующему сложному фокусу или седло-узлу первой степени негрубости (см. гл. 10).

I. При $\lambda = \lambda_0$ система имеет сложный фокус первого порядка, т. е. состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями, у которого первая ляпуновская величина $L_1 = \alpha_3(\lambda_0)$ отлична от нуля. Вводя обозначения

$$\Delta(\lambda) = a(\lambda)d(\lambda) - b(\lambda)c(\lambda), \quad R(\lambda) = a(\lambda) + d(\lambda)$$

($R(\lambda)/2$ — действительная часть характеристических корней), мы, очевидно, будем иметь в рассматриваемом случае

$$\Delta(\lambda_0) > 0, \quad R(\lambda_0) = 0.$$

Далее естественно сделать предположение, что $\partial R/\partial\lambda \neq 0$. Мы получим наглядную картину поведения системы вблизи гра-

ницы области устойчивости, рассматривая изменение качественной структуры в окрестности состояния равновесия в зависимости от изменения параметра λ. Как мы видели (см. гл. 11), возможны следующие случаи:

а) $L_1 < 0$, сложный фокус устойчив. При переходе через границу $R(\lambda)=0$ от значений $\lambda < \lambda_0$ к значениям $\lambda > \lambda_0$ появляется единственный устойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра λ устойчивый цикл стягивается в точку (в сложный фокус);

б) $L_1 > 0$, сложный фокус неустойчив. При переходе через границу $R(\lambda)=0$ от значений $\lambda < \lambda_0$ к значениям $\lambda > \lambda_0$ к состоянию равновесия стягивается единственный неустойчивый предельный цикл; при обратном изменении параметра из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл.

Изменение качественной структуры разбиения окрестности состояния равновесия на траектории для этих двух случаев изображено на рис. 117, 118. Штриховкой показана область

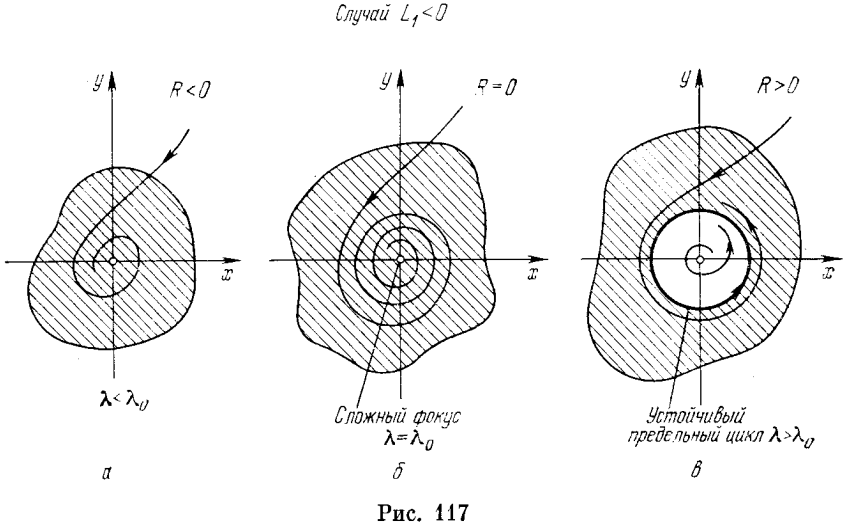


Рис. 117

устойчивости, для которой траектории представляют собой спирали, накручивающиеся на состояние равновесия, или предельный цикл. Область неустойчивости заполнена раскручивающимися спиралями. Рисунки наглядно показывают различие в поведении системы вблизи границы по отношению к случайным толчкам. Сравнивая для $R < 0$ случаи $L_1 < 0$ и $L_1 > 0$, видим, что во втором случае возможно выбивание случайным толчком изображающей точки из устойчивого состояния равновесия за границы области устойчивости (внутри рассматриваемой окрестности состояния равновесия), тогда как в первом случае это

невозможно. Рисунки показывают, далее, различие в поведении системы при нарушении условий устойчивости. Переход через границу $R=0$ в первом случае ($L_1<0$) соответствует возникновению области неустойчивости внутри устойчивого предельного цикла, которая, однако, остается сколь угодно малой при

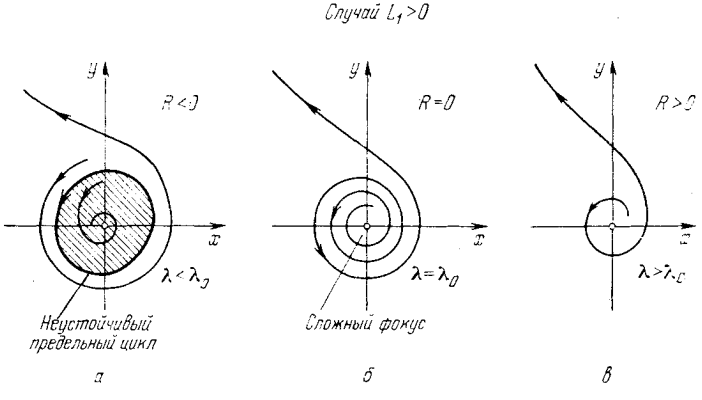


Рис. 118

достаточно малом нарушении условий устойчивости и стягивается в точку при обратном изменении параметра; изображающая точка при этом возвращается в состояние равновесия — система ведет себя обратимо. Во втором случае ($L_1>0$) переход через границу $R=0$ соответствует исчезновению области устойчивости внутри неустойчивого предельного цикла; изображающая точка при этом срывается с состояния равновесия и уходит за пределы рассматриваемой окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия — система ведет себя необратимо.

В § 3 настоящей главы при рассмотрении жесткого возникновения колебаний изображающая точка после срыва уходит на устойчивый предельный цикл, окружающий начало, в силу предположения о специальном характере разбиения плоскости на траектории. Однако при другом виде фазовой плоскости изображающая точка после срыва при $\lambda=\lambda_0$ может пойти либо к другому устойчивому состоянию равновесия, либо к предельному циклу, не окружающему начало. Мы вернемся к этому более сложному случаю в следующем параграфе.

II. При $\lambda=\lambda_0$ система имеет двукратное состояние равновесия — седло-узел, т. е. состояние равновесия, для которого

$$\Delta(\lambda_0)=0 \quad \text{и} \quad a(\lambda_0)+d(\lambda_0)<0,\ l(\lambda_0)\neq 0$$

(неравенство нулю $l(\lambda_0)$ и означает, что точка двукратная).

Состояние равновесия O (см. гл. 4, 9, 10) имеет вид, представленный на рис. 119, *б*). Вблизи границы $\Delta(\lambda)=0$ малая окрестность состояния равновесия O имеет вид, представленный на одном из рис. 119. Из рисунков видно, как при приближении к границе $\Delta(\lambda)=0$ в малую окрестность устойчивого состояния равновесия вторгается область неустойчивости (на рис. 119, *а*, *а'*, *б* заштрихованная область), попав в которую изображающая точка выбрасывается из рассматриваемой окрестности состояния равновесия. Для изображающей точки при

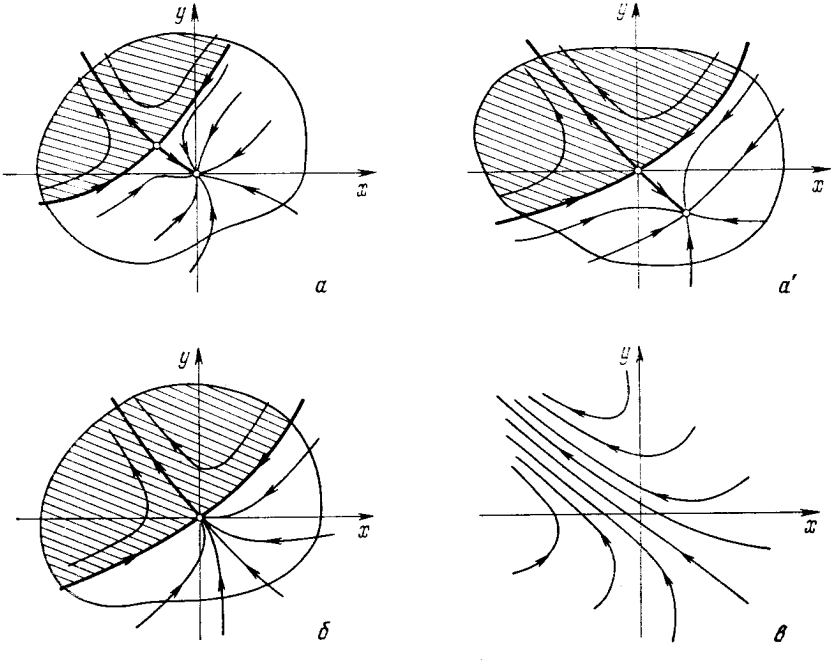


Рис. 119

приближении к границе $\Delta(\lambda)=0$ возрастает опасность быть выброшенной случайным толчком из устойчивого состояния равновесия. При невырожденном вхождении параметра λ, при его изменении от значений $\lambda<\lambda_0$ к значениям $\lambda>\lambda_0$ мы получаем последовательность качественных структур, изображенных на рис. 119.

Значениям $\lambda<\lambda_0$ соответствуют рис. 119, *а* и 119, *а'* (два состояния равновесия — узел и седло), значению $\lambda=\lambda_0$ — рис. 119, *б* (начало координат — седло-узел), значениям $\lambda>\lambda_0$ — рис. 119, *в* (сложное состояние равновесия — седло-узел исчезает).

Рассмотренная граница области устойчивости, очевидно, является опасной.

После исчезновения седло-узла изображающая точка либо стремится к устойчивому состоянию равновесия или к устойчивому предельному циклу, близкому к тому, к которому стремилась α-сепаратриса седло-узла (см. рис. 103 гл. 10), либо, в случае, когда сепаратриса седло-узла возвращается в него же, начинает двигаться (сначала с очень большим периодом) по предельному циклу, образовавшемуся из сепаратрисы седло-узла (см. рис. 104 гл. 10). Во всех этих случаях граница области устойчивости опасна.

Следует, однако, обратить внимание на то, что если при значениях $\lambda < \lambda_0$ изображающая точка двигается по предельному циклу, на котором при $\lambda = \lambda_0$ возникает двукратное состояние равновесия седло-узел, то соответствующая граница, очевидно, является безопасной (изображающая точка не выходит из окрестности цикла).

Рассмотрим еще дополнительно поведение динамических систем вблизи тех точек границы, в которых $\Delta > 0$ и $R = 0$, где безопасная граница переходит в опасную, т. е. где первая ляпуновская величина L_1 обращается в нуль. В этом случае поведение системы может быть определено знаком второй ляпуновской величины $L_2 = \alpha_5 \neq 0$ (см. гл. 11, § 5).

При рассмотрении этого случая мы предположим, что в систему входит не один, а два параметра λ и μ (при наличии только одного параметра картина смазывается), и пусть в некоторой точке $M(\lambda_0, \mu_0)$ плоскости параметров $R = 0$, $L_1 = 0$, но $L_2 \neq 0$. На рис. 120 большая точка соответствует точке плоскости параметров, в которой $R = 0$, $L_1 = 0$, $L_2 \neq 0$; в точках части линии $R = 0$, обозначенной белыми точками, $L_1 > 0$ (для соответствующих значений параметров система имеет неустойчивый сложный фокус первого порядка); в точках части линии $R = 0$, обозначенной черными точками, $L_1 < 0$ (система имеет устойчивый сложный фокус).

В заштрихованной части плоскости параметров $R < 0$, в незаштрихованной (но в которой может быть область, обозначенная мелкими штрихами) $R > 0$. Напомним, что при переходе через часть границы $R = 0$, в которой $L_1 < 0$, из заштрихованной области в незаштрихованную из сложного фокуса рождается устойчивый предельный цикл, а при переходе через $R = 0$, где $L_1 > 0$, из незаштрихованной в заштрихованную область — неустойчивый цикл.

Пусть в точке, в которой $R = L_1 = 0$, мы имеем $L_2 > 0$, тогда соответствующий сложный фокус (второй степени негрубости) неустойчив (рис. 120, *а*, 121, *а*).

Если в пространстве параметров мы перейдем по линии $R = 0$ в точки, где $L_1 < 0$, то, как нетрудно показать, рассмат-

ривая функцию последования (см. гл. 8, § 3), на фазовой плоскости из сложного фокуса второго порядка родится неустойчивый предельный цикл (грубый), а фокус делается негрубым устойчивым (рис. 121, *б*). Если затем в пространстве параметров

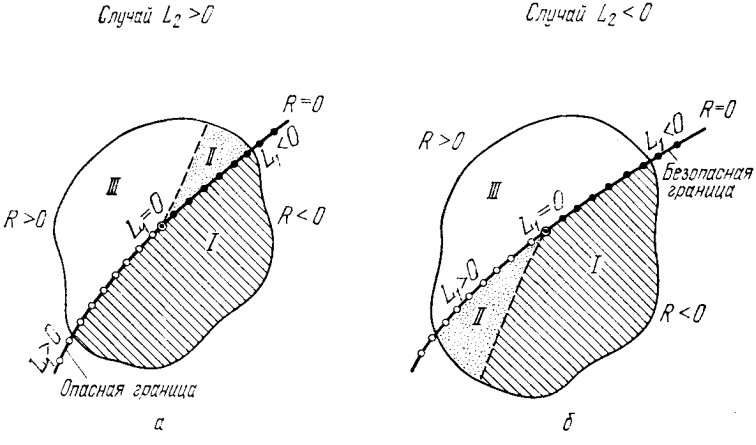


Рис. 120

мы выйдем в незаштрихованную область (на рис. 120, *а*) область *II*), то из устойчивого сложного фокуса рождается устойчивый предельный цикл. При этом ранее родившийся неустойчи-

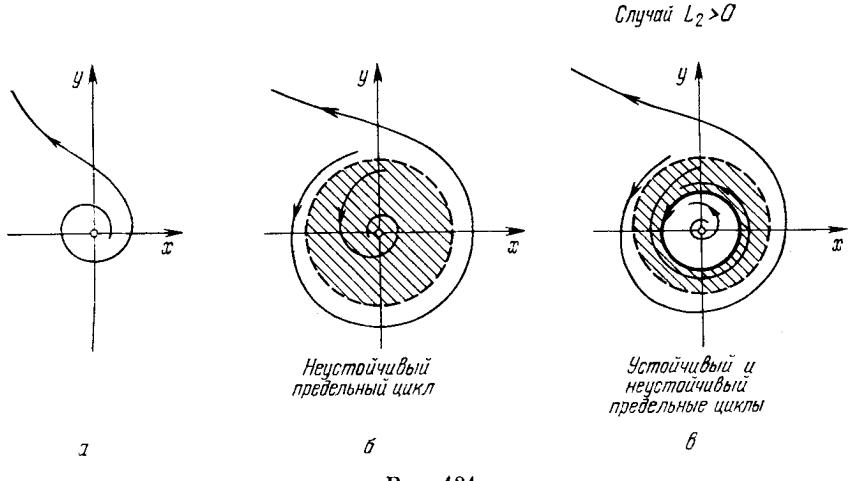


Рис. 121

вый цикл сохраняется, так что в области параметров *II* у системы на фазовой плоскости вокруг грубого неустойчивого фокуса будет существовать два предельных цикла (рис. 121, *в*).

С другой стороны, нетрудно показать, что при значениях параметров в области *III* у системы вокруг неустойчивого фокуса нет предельных циклов. (При переходе из точки, где $R = L_1 = 0$, $L_2 > 0$, на часть линии $R = 0$, где $L_1 > 0$, циклы не рождаются, и в силу сделанных выше замечаний не рождаются при переходе в область *III*.) Но тогда при движении в пространстве параметров из области *III* в область *II* непременно должны встретиться бифуркационные значения параметров, при которых у системы существует двукратный цикл. На рис. 120 линия в пространстве параметров, соответствующая двукратным предельным циклам, изображена штрихами. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и в случае $L_2 < 0$ (рис. 120, *б* и рис. 122, *а — в*).

В рассмотренном случае знак второй ляпуновской величины L_2 играет роль, подобную знаку L_1, увеличивая или уменьшая

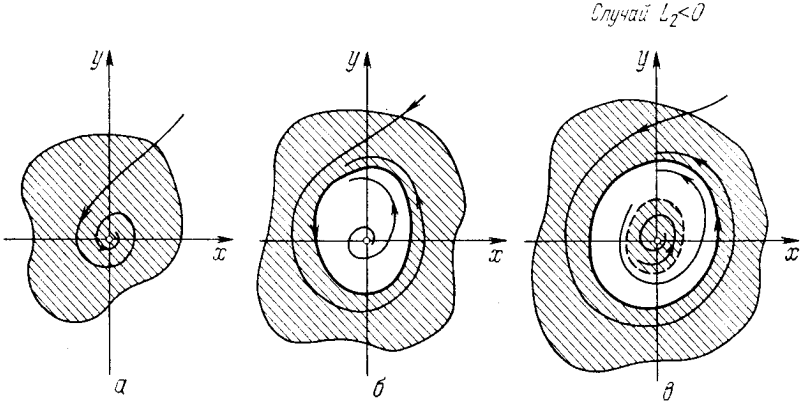


Рис. 122

опасность для изображающей точки быть выброшенной из окрестности состояния равновесия.

Пусть $L_2 > 0$ (при $R = L_1 = 0$) и пусть значения параметров достаточно близки к значениям, определяемым этими условиями; тогда в достаточно малой окрестности начала координат в фазовом пространстве может быть одна из структур, изображенных на рис. 121.

При нарушении безопасной границы области устойчивости изображающая точка остается в малой окрестности состояния равновесия вблизи устойчивого предельного цикла, если начальные возмущения не превосходят некоторой малой величины (определяемой размерами второго, неустойчивого предельного цикла, также вторгающегося в малую окрестность начала ко-

ординат); при возмущениях, превосходящих эти пределы, изображающую точку нельзя заставить оставаться в малой окрестности состояния равновесия.

С другой стороны, выбивание системы малым толчком из устойчивого состояния равновесия возможно и вблизи безопасной границы области устойчивости (см. рис. 121).

Пусть $L_2 < 0$ (при $R = L_1 = 0$), и пусть параметры опять мало изменены; тогда в достаточно малой окрестности начала координат может быть одна из структур, изображенных на рис. 122. Здесь даже нарушение опасной границы может оставить изображающую точку в малой окрестности состояния равновесия, если параметры достаточно близки к значениям, определяемым условиями $R = L_1 = 0$.

§ 5. Замечания по поводу других границ области устойчивости. Мы рассмотрели части границы области устойчивости в случае, когда эти части соответствуют негрубым состояниям равновесия. Очевидно, аналогично могут быть рассмотрены границы области устойчивости, соответствующие еще и другим системам первой степени негрубости [13]); именно в нумерации § 6 гл. 9: 3) — системе, имеющей двукратный предельный цикл; 4) — системе, имеющей сепаратрису, идущую из седла в седло.

Случай 3) естественным образом имеет место, когда при изменении параметра к устойчивому предельному циклу приближается неустойчивый предельный цикл (как в рассмотренном в § 3 случае жесткого возбуждения колебаний), который сливается с устойчивым циклом. Образуется двукратный цикл, который при дальнейшем изменении параметра исчезает. Изображающая точка «срывается» и стремится либо к устойчивому состоянию равновесия, либо к другому устойчивому предельному циклу.

Граница опасная. Нетрудно убедиться, что система при любой ее качественной структуре в этом случае ведет себя необратимо.

В случае 4) предположим, что изображающая точка при значениях $\lambda < \lambda_0'$ двигается по устойчивому предельному циклу, который при $\lambda = \lambda_0$ влипает в сепаратрису. Очевидно, по мере образования петли сепаратрисы период предельного цикла, влипающего в эту петлю, неограниченно увеличивается. Когда после образования петли петля разрушается без образования предельного цикла, что всегда имеет место при общем вхождении параметра, изображающая точка стремится к тому устойчивому

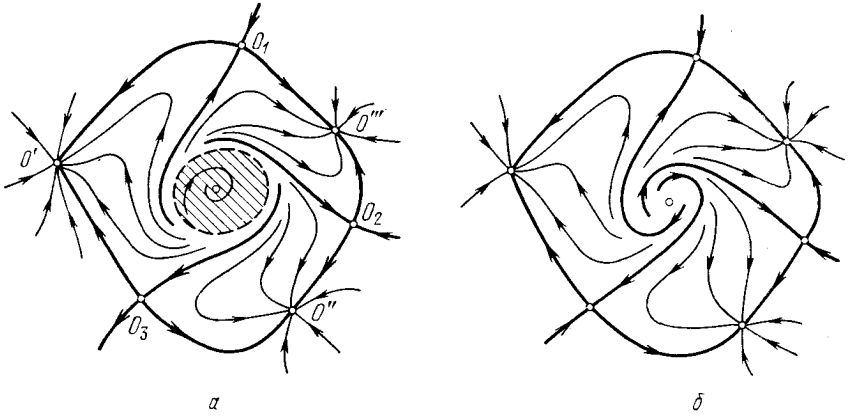
---

[13]) Напоминаем, что только в случае систем первой степени негрубости в окрестности точки границы области устойчивости в соответствующем функциональном пространстве негрубые системы образуют пленку.

состоянию равновесия или предельному циклу, к которому стремилась α-сепаратриса седла. При обратном изменении λ имеет место необратимость (изображающая точка, находящаяся около устойчивого состояния равновесия или предельного цикла, к которому стремилась указанная α-сепаратриса седла, не реагирует на образование петли сепаратрисы).

Мы остановимся сейчас еще на весьма интересных случаях, связанных с опасной границей, возникающей при существовании сложного фокуса и двукратного цикла, в которых не можем однозначно указать поведение системы после прохождения через границу области Рауса — Гурвица.

Предположим, что неустойчивый предельный цикл, на который навивается при $t \to -\infty$ несколько сепаратрис, входящих в границы ячеек с различными центрами притяжения, устойчивыми состояниями равновесия или предельными циклами (рис. 123, *а*), при возрастании параметра стягивается к устойчивому фокусу, в окрестности которого находилась изображающая точка. Пусть при $\lambda = \lambda_0$ (рис. 123, *б*) предельный цикл влипает



а *б*

Рис. 123

в состояние равновесия, которое делается сложным неустойчивым фокусом, а затем грубым неустойчивым фокусом. При $\lambda > \lambda_0$ сепаратрисы стремятся к этому фокусу, и, очевидно, нет возможности однозначно указать, к центру притяжения какой из ячеек (для всех этих ячеек фокус является теперь граничным) будет стремиться изображающая точка (см. [141])[14]).

Полностью аналогичная ситуация имеет место также, например, в случае, когда изображающая точка двигается по

[14]) Таким образом, можно сказать, что мы имеем здесь «динамическую неопределенность».

устойчивому предельному циклу L_0, внутри которого находится единственное неустойчивое состояние равновесия типа узел или фокус.

К циклу L_0 приближается неустойчивый предельный цикл L, являющийся предельным для ряда сепаратрис, входящих в границы ячеек с различными центрами притяжения. При некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$ цикл L_1 сливается с циклом L_0 и исчезает.

В рассматриваемом случае, так же как и в предыдущем, нет возможности однозначно указать поведение изображающей точки при $\lambda > \lambda_0$.

ЧАСТЬ III

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

ГЛАВА 14

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРИЕМАХ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Введение. В настоящей части приводятся примеры качественного исследования динамических систем из приложений, в той или другой форме опирающиеся на изложенные в ч. I классические приемы качественного исследования (метод малого параметра, установление характера состояний равновесия, критерии Бендиксона и Дюлака, построение топографической системы, использование теории индексов) и на приемы, использующие теорию бифуркаций.

В книге особое внимание уделяется именно использованию методов теории бифуркаций.

Сделаем прежде всего некоторые общие замечания.

Мы уже говорили, что одной из наиболее трудных задач качественного исследования динамической системы является задача установления существования или отсутствия предельных циклов. При этом мы останавливались (см. § 13 гл. 1) на том элементарном факте, что по локальным свойствам разбиения на траектории ничего нельзя сказать о существовании или отсутствии замкнутой траектории.

Иногда в литературе встречаются работы, в которых делаются попытки дать общий универсальный алгоритмический метод отыскания предельных циклов для любых динамических систем с аналитическими (или неаналитическими) правыми частями.

Постараемся пояснить бессмысленность таких попыток на простом примере. Предположим, что рассматриваются *всевозможные* аналитические на некотором промежутке значений x функции $y=f(x)$ и ставится вопрос об общем универсальном методе отыскания (разделения) корней любой из функций

$$f_0(x)=0.$$

Предположим, что рассматриваются функции $f(x)$, аналитические при всех x $(-\infty<x<+\infty)$, и ставится вопрос об общем универсальном методе определения числа корней любой из этих функций $f_0(x)=0$ на некотором конечном интервале значений x

$(a < x < b)$[1]). По сделанному предположению относительно функций $f(x)$ число их на конечном интервале $a < x < b$ обязательно конечно (но всегда, очевидно, можно указать функцию $f(x)$, у которой на этом интервале любое данное число корней). Однако функции рассматриваемого класса столь разнообразны (они зависят от счетного множества параметров, например коэффициентов тех рядов, в которые они могут быть разложены), что, очевидно, нет никаких возможностей дать метод определения числа корней на интервале (a, b), годный для л ю б о й из этих функций.

Если бы мы обратились к вычислительным методам, то могли бы «выловить» корни, находящиеся друг от друга на расстоянии, не меньшем некоторого расстояния, допускаемого точностью вычислений. Между тем в силу широты рассматриваемого класса функций среди них всегда найдется функция, у которой корни находятся друг от друга на меньшем расстоянии и количество их может быть равно любому данному числу на рассматриваемом промежутке.

Таким образом, попытки установить общие, универсальные алгоритмические методы отыскания числа корней для указанного широкого класса функций заведомо лишены смысла.

Однако необходимо подчеркнуть, что ситуация делается совсем иной, когда класс рассматриваемых функций сравнительно узкий и зависит от конечного числа параметров. Так, например, если мы будем рассматривать всевозможные многочлены $P_n(x)$ данной ф и к с и р о в а н н о й степени n и будем ставить вопрос о нахождении всех корней любого из этих многочленов

$$P_n^*(x) = 0,$$

то, как известно, для решения этой задачи существует регулярный алгоритмический метод — классический метод Штурма.

Несомненно, задача о регулярных методах отыскания корней функции, принадлежащей некоторому классу функций, отличному от многочленов, но также зависящему от конечного числа параметров (в случае, конечно, когда этот класс функций хорошо определен), имеет смысл и может решаться.

Все сказанное относительно рассмотренной задачи определения числа корней может быть перенесено и на вопрос отыскания числа предельных циклов. Естественно думать, что, в то время как установление универсальных методов определения числа предельных циклов бессмысленно, в случае, когда правые части системы — любые аналитические (или неаналитические) функции, задача отыскания таких методов для систем узкого класса,

---

[1]) Задачу о числе корней функции на данном интервале можно рассматривать как простейшую задачу качественного характера (поскольку ставится вопрос только о числе корней, а не об их численных значениях).

например для случая, когда правые части — многочлены данной фиксированной степени n, представляется имеющей смысл, однако, конечно, очень далекой от решения (такой метод определения числа предельных циклов был бы в некотором смысле аналогичен методу Штурма).

То же справедливо и в отношении динамических систем, правые части которых не обязательно многочлены, но зависят от конечного числа параметров.

Из сказанного выше очевидно, что не только для задачи определения числа и расположения предельных циклов, но даже для значительно более простой задачи — задачи определения числа состояний равновесия, которая сводится к определению числа общих корней пары функций

$$P(x, y)=0, \quad Q(x, y)=0,$$

также можно сделать полностью аналогичные высказывания.

В случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены данной фиксированной степени n, эта задача при использовании результанта этих многочленов, очевидно, сводится к методу Штурма.

В случае, когда рассматривается класс функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, не обязательно являющихся многочленами данной фиксированной степени n, но зависящих от конечного числа параметров, то задача установления регулярных методов отыскания числа их общих корней приобретает смысл.

Очевидно, по отношению к задаче установления расположения сепаратрис, тесно связанной с задачей отыскания состояний равновесия и предельных циклов, можно сделать аналогичные высказывания.

Всякая задача, возникающая из приложений, как правило, содержит то или иное конечное число параметров. Обычная задача качественного исследования такой системы заключается в установлении областей значений параметров с той или другой качественной структурой (т. е. с наличием тех или других режимов). При этом наиболее важным является указание тех областей значений параметров, в которых существуют предельные циклы или в которых предельные циклы отсутствуют.

В тех областях значений параметров, в которых есть предельные циклы,— в реальной системе, описываемой рассматриваемой динамической системой,— существуют автоколебания; в тех областях значений параметров, в которых нет предельных циклов, автоколебания отсутствуют.

Если динамическая система описывает какое-нибудь техническое устройство, то для устройств одного типа автоколебания вредны, для технических устройств другого типа (например, для генераторов) они нужны, так как они являются основой работы этого устройства.

Другими словами, качественное исследование системы, содержащей параметры, заключается в установлении разбиения пространства параметров бифуркационными пленками (в случае двух параметров — бифуркационными кривыми) на области с одинаковым качественным поведением фазовых траекторий и при этом, конечно, в установлении этого качественного поведения. Очевидно, все понятия теории бифуркаций (понятие грубости, первой степени негрубости, бифуркации) при этом крайне естественны и необходимы.

Методы качественного исследования динамической системы, правые части которой содержат параметры, использующие теорию бифуркаций, опираются на следующее общее, эвристически не вызывающее сомнений утверждение.

Если известно множество всех бифуркационных значений параметров (или доказано их отсутствие), известен характер всех бифуркаций при прохождении через различные бифуркационные значения и, кроме того, известна качественная структура динамической системы при каких-либо частных значениях параметров, то, используя соображения непрерывности, можно на основании этих сведений определить качественную структуру для любой точки во всем пространстве параметров.

Таким образом, знание бифуркационных значений параметров является очень важной задачей, так как знание этих параметров одновременно и помогает качественному исследованию, и дает разделение на области с различными качественными структурами.

Трудности в определении бифуркационных значений параметров заключаются в том, что явные аналитические выражения для условий, выделяющих бифуркационные значения параметров, фактически известны лишь в случае состояний равновесия (условия $\Delta = 0$ и $\sigma = 0$). Однако в некоторых случаях удается косвенными соображениями установить наличие той или другой бифуркационной поверхности.

Иногда удается весьма эффективно использовать свойство поворота поля (в тех случаях, конечно, где поворот поля имеет место), а также знание качественной структуры при некоторых частных значениях параметров и т. д. Отметим, что всюду (за небольшим исключением) в дальнейших примерах грубые динамические системы заполняют области.

Один из основных вопросов качественного исследования — вопрос отыскания предельных циклов — в некоторых прикладных задачах иногда удается решать весьма распространенным классическим методом исследования нелинейных систем — методом малого параметра.

Очевидно, этот метод тоже в каком-то смысле можно считать методом теории бифуркаций, так как в этом методе фактически рассматривается бифуркация от линейной (нелинейной) консер-

вативной системы

$$\dot{x} = -\partial H/\partial y, \quad \dot{y} = \partial H/\partial x.$$

При использовании этого метода, как мы видели (гл. 11, § 7), данная система рассматривается как система, близкая к линейной или нелинейной консервативной. Очевидно, для этого нужно специально представить рассматриваемую систему в таком виде. Это, во-первых, далеко не всегда бывает возможно в сколько-нибудь разумных границах и, во-вторых, требует предположения о малости по крайней мере одного из параметров, которое также не всегда соответствует тому, что имеет место в реальной задаче.

Кроме того, по смыслу метода малого параметра он не дает никаких методов оценки для величины параметров, при которых мы можем утверждать, например, существование цикла.

Тем не менее этот метод иногда бывает весьма полезным, и мы приведем в дальнейшем ряд задач, рассмотренных этим методом. Во всяком случае он дает знание качественной структуры при частных значениях параметров (именно, в предположении, что некоторые из параметров малы), которое вместе с исследованием вопроса о возможных бифуркациях при переходе от одной качественной картины к другой может помочь установить возможные качественные структуры системы и без всяких предположений о малости каких-либо параметров.

Отметим, что во всех рассмотренных в дальнейшем примерах грубые системы в пространстве параметров заполняют области.

§ 1. Некоторые рецептурные указания. Качественное исследование динамической системы без использования метода малого параметра

$$dx/dt = P(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$
$$dy/dt = Q(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

естественно начинать с исследования состояний равновесия. При этом:

1) Если удается определить координаты состояний равновесия (при всех значениях параметров, входящих в правые части) и установить их характер, то необходимо установить также значения параметров, при которых у системы существуют негрубые состояния равновесия, т. е.:

а) состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$;

б) состояние равновесия, для которого $\Delta > 0$, $\sigma = 0$.

Таким образом, в пространстве параметров определяются бифуркационные поверхности (в случае двух параметров — бифуркационные кривые $\Delta^* = 0$ и $\sigma^* = 0$).

2) Если координаты состояний равновесия не определяются элементарно, то рекомендуется непосредственно отыскивать либо состояния равновесия максимальной кратности, возможные у рассматриваемой системы (т. е. состояния равновесия, для ко-

торых прежде всего $\Delta = 0$, а затем выполняются условия, характеризующие возможно большую кратность), либо состояния равновесия, для которых $\Delta > 0$, $\sigma = 0$.

Как правило, координаты сложных состояний равновесия удается определить проще, чем грубых. (Этот факт будет проиллюстрирован на ряде примеров.)

Прием, заключающийся в рассмотрениях грубых объектов, близких к объектам «высокой степени негрубости», используется не только при рассмотрении дифференциальных уравнений, но также в разных других областях (так, например, при рассмотрении алгебраических кривых, для которых, так же как и для динамических систем, имеют смысл и значение понятия грубости и степеней негрубости).

Рассмотрение кривых, близких к кривым со многими особыми точками (в частности, к распадающимся кривым высокой степени негрубости), является в настоящее время основным приемом (этот прием использован в работах Харнака, Гильберта и др.), позволяющим устанавливать возможную качественную структуру грубых алгебраических кривых.

Если установлены координаты и значения параметров, соответствующие состоянию равновесия максимальной сложности, то часто удается установить все возможности, которые могут осуществиться в отношении числа и характера состояний равновесия, при значениях параметров, близких к значениям, соответствующим состоянию равновесия максимальной сложности.

Если установлены значения параметров, соответствующие наличию состояния равновесия, для которого $\Delta > 0$, $\sigma = 0$ (т. е. имеющему чисто мнимые характеристические корни), и удается найти его координаты, то иногда, если удается вычислить ляпуновскую величину, можно сделать заключение также и о наличии при некоторых значениях параметров предельного цикла.

3) Если какими-либо приемами (например, классическими, или путем приближенного вычисления, или путем использования при малых значениях параметров метода малого μ) установлена качественная структура в двух различных точках R_1 и R_2 пространства параметров, то при изменении параметров от одной точки R_1 к другой R_2 иногда можно установить, например, наличие сепаратрисы, идущей из седла в седло, и в связи с этим появление предельных циклов.

Иногда удается также установить расположение сепаратрисы седло-узла и в связи с этим — появление предельного цикла при исчезновении седло-узла.

Таким образом, вопрос о расположении сепаратрис, в частности, тесно связан с вопросом о существовании предельных циклов.

4) При исследовании вопроса о существовании или отсутствии предельных циклов следует пробовать как все классические

приемы — критерии Бендиксона и Дюлака, подбор топографической системы, метод малого μ, исследование бесконечности (когда это возможно),— так и описанные выше приемы теории бифуркаций (исследование возможности рождения предельного цикла из сложного фокуса, из петли сепаратрисы седло-узла при его исчезновении). При этом, пожалуй, наиболее эффективным методом, с помощью которого может быть доказано существование предельного цикла (при некоторых значениях параметров), является установление существования сложного фокуса (если, конечно, такой фокус вообще существует) и доказательство рождения из него предельного цикла (той или другой устойчивости).

Иногда удается доказать наличие петли сепаратрисы и, используя седловую величину, доказать рождение при ее разделении предельного цикла, устойчивого или неустойчивого (в зависимости от знака седловой величины). При использовании методов теории бифуркаций наибольшие трудности возникают при доказательстве отсутствия или наличия предельных циклов, появляющихся при разделении двукратного предельного цикла, возникающего из уплотнения траекторий.

Доказать как невозможность возникновения двукратных циклов из уплотнения траекторий, так и их возникновение, как уже было сказано, обычно не представляется возможным, и поэтому полное однозначное исследование вопроса о предельных циклах удается проводить очень редко. Обычно проводится исследование «с точностью до четного числа предельных циклов». Однако существование двукратных циклов иногда все же удается доказать, как мы это увидим на ряде примеров.

Приведем в настоящей главе некоторые несложные примеры качественного исследования. Более сложные примеры даны в гл. 16.

§ 2. Некоторые простые примеры качественного исследования динамических систем на плоскости.

Пример 1 [31]. Рассмотрим систему примера 2 § 5 гл. 6, т. е. систему

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x - \lambda y + \mu x^2 - y^2. \tag{1}$$

В гл. 6 эта система рассматривалась при всевозможных значениях параметра μ, но при некоторых ограничениях на значение λ. Здесь мы рассмотрим изменение качественной структуры системы (1) в зависимости от входящих в нее параметров λ и μ при любых $\lambda > 0$.

Напомним, что кривая контактов системы (1) с консервативной системой, соответствующей значению $\lambda = 0$, есть

$$\lambda y^2 = 0,$$

т. е. контакт ложный — траектории системы (1) при $\lambda \neq 0$ образуют с траекториями консервативной системы угол одного знака.

Заметим, что для двух различных значений параметра λ: λ_1 и λ_2, траектории системы с $\lambda = \lambda_1$ пересекают повсюду траектории системы с $\lambda = \lambda_2$.

Направление поворота векторного поля определяется знаком $\lambda_1 - \lambda_2$, что следует из рассмотрения контактной кривой системы с $\lambda = \lambda_1$ и системы с $\lambda = \lambda_2$:

$$(dy/dx)_{\lambda=\lambda_2} - (dy/dx)_{\lambda=\lambda_1} = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Кроме того, как мы видели, при фиксированном значении параметра μ при всех $\lambda \neq 0$ начало координат — фокус или узел, точка $(1/\mu, 0)$ — седло, и положение и характер состояний равновесия на экваторе не меняются.

Разбиение сферы Пуанкаре на траектории при значениях параметра $\mu < 0$, $\mu = 0$ и $\mu = 1$ сохраняет свою качественную структуру при любых значениях $\lambda > 0$.

В случаях $0 < \mu < 1$ и $\mu > 1$ качественная картина разбиения сферы Пуанкаре на траектории зависит от величины параметра λ (см. подстрочное примечание на с. 126).

Рассмотрим случай $0 < \mu < 1$. При $\lambda = 0$ имеет место рис. 82 гл. 6.

При $\lambda > 0$ поведение сепаратрис седла S, попадающих внутрь областей ASM, MSN, NSB, ограниченных сепаратрисами консервативной системы и дугами экватора (эти области не содержат особых точек, лежащих в конечной части плоскости), в силу поворота поля определяется однозначно (см. рис. 87 гл. 6). Поведение уса седла, попадающего в область G, ограниченную сепаратрисами SA и SB консервативной системы и дугой экватора и содержащую внутри себя особую точку, не определяется однозначно и зависит от параметра λ.

Есть три возможности для поведения этого уса седла:

а) идет в узел (B) на экваторе;

б) идет в сложную особую точку Q (седло-узел) на экваторе;

в) идет в особую точку K (фокус или узел) внутри области G.

Вторая возможность имеет место при значении параметра

$$\lambda_0 = (1 - \mu)/\sqrt{\mu}.$$

В этом случае существует интегральная прямая, идущая из седла в особую точку Q (седло-узел) на экваторе. Уравнение интегральной прямой будет

$$y = \sqrt{\mu}(x - 1/\mu),$$

что непосредственно проверяется. Качественная структура разбиения сферы Пуанкаре на траектории определяется теперь од-

нозначно и изображена на рис. 124. Значение параметра $\lambda = \lambda_0$, очевидно, бифуркационное. При $\lambda > \lambda_0$ качественная картина будет иметь вид такой же, как на рис. 88 гл. 6, а при $\lambda < \lambda_0$ будет иметь место рис. 87 гл. 6. Во всех случаях структура определяется однозначно.

Рассмотрим случай $\mu > 1$. При $\lambda = 0$ имеем качественную картину, изображенную на рис. 84 гл. 6. При $\lambda > 0$ однозначно определяется поведение смещенных сепаратрис, попадающих в

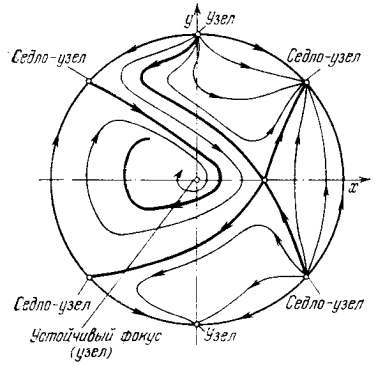


Рис. 124

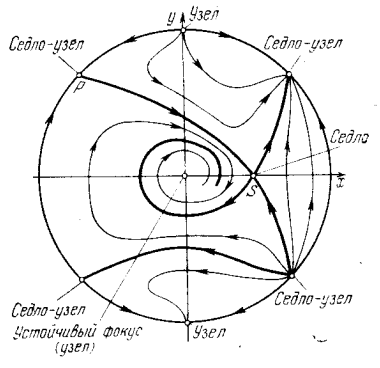


Рис. 125

области *I—III* (область *I* ограничена сепаратрисами *SM* и *SN* консервативной системы и близлежащей дугой экватора, область *II* заполнена замкнутыми кривыми, область *III* ограничена сепаратрисами *SN* и *ST* консервативной системы, отрезком *RT* оси x и дугой *PQN*, включающей дугу экватора). Они ведут себя так же, как при малых значениях λ.

Поведение сепаратрисы, входящей в область *IV* (симметричную области *III* относительно оси x), не определяется однозначно и зависит от величины λ (аналогично случаю $0 < \mu < 1$ здесь имеется три возможности).

1) При $\lambda_0' = (\mu - 1)/\sqrt{\mu}$ существует интегральная прямая

$$y = -\sqrt{\mu}(x - 1/\mu),$$

идущая из седла S в седло-узел P на экваторе сферы Пуанкаре — качественная картина изображена на рис. 125; $\lambda_0' = (\mu - 1)/\sqrt{\mu}$ — бифуркационное значение.

2) При $\lambda > \lambda_0'$ и $\lambda < \lambda_0'$ поведение сепаратрисы определяется однозначно, и соответственно имеем качественные картины, изображенные на рис. 88, 89 гл. 6.

На рис. 126 представлено разбиение пространства параметров λ, μ. Точкам на осях λ и μ, а также на кривой $\mu\lambda^2 - (\mu - 1)^2 = 0$ соответствуют бифуркационные структуры.

3) При $\lambda = 0$ на фазовой плоскости (x, y) существуют области, заполненные замкнутыми кривыми, при $\mu\lambda^2 - (\mu - 1)^2 = 0$ существуют сепаратрисы, идущие из седла в седло (интегральные прямые), и при $\mu = 0$ — сложная особая точка высокого порядка, распадающаяся при изменении параметра μ.

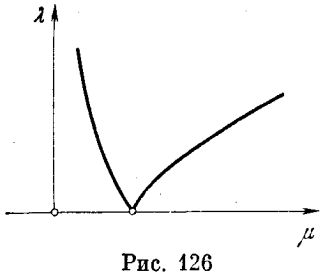


Рис. 126

Пример 2 [30].

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax + by - x(x^2 + y^2), \\ dy/dt &= cx + dy - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Особые точки фазовой плоскости удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} ax + by - x(x^2 + y^2) &= 0, \\ cx + dy - y(x^2 + y^2) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Умножая первое из этих уравнений на y, второе на x и вычитая, получим следующее уравнение, которому должны удовлетворять координаты особых точек:

$$axy + by^2 - cx^2 - dxy = 0.$$

Полагая $y = kx$, мы получаем уравнение для k

$$bk^2 + (a - d)k - c = 0. \tag{4}$$

Корни этого уравнения действительны в случае, когда

$$D = (a - d)^2 + 4bc > 0.$$

Обозначаем их через k_1 и k_2 и, подставляя в одно из уравнений (3), получаем в этом случае пять состояний равновесия:

$$\begin{aligned} &x = 0, \quad y = 0; \quad x = \pm \sqrt{\frac{a + bk_1}{1 + k_1^2}}, \quad y = \pm k_1 \sqrt{\frac{a + bk_1}{1 + k_1^2}}; \\ &x = \pm \sqrt{\frac{a + bk_2}{1 + k_2^2}}, \quad y = \pm k_2 \sqrt{\frac{a + bk_2}{1 + k_2^2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$, очевидно, простое, если $\Delta = ad - bc \neq 0$ [2]). Нетрудно также видеть, что в случае $D > 0$ остальные состояния равновесия тоже простые. Отметим, кроме того, что при $D > 0$ прямые $y = k_i x$ $(i = 1, 2)$ являются интегральными прямыми рассматриваемого дифференциального уравнения, так как соотношение

$$k_i = \frac{cx + dy - y(x^2 + y^2)}{ax + by - x(x^2 + y^2)}$$

[2]) См. § 1 гл. 3.

удовлетворяется тождественно при подстановке $y = k_i x$. Действительно, мы имеем

$$k_i\left(ax + bk_i x - x\left(x^2 + k_i^2 x^2\right)\right) = cx + dk_i x - k_i x\left(x^2 + k_i^2 x^2\right),$$

или

$$x\left(bk_i^2 + (a - d)\,k_i - c\right) = 0,$$

так как выражение в скобках равно нулю (k_i есть корень уравнения (4)). Характер состояния равновесия в начале координат легко может быть определен по корням соответствующего характеристического уравнения. Для исследования остальных состояний равновесия достаточно ограничиться рассмотрением каких-либо двух, не лежащих одновременно на одной и той же прямой $y = k_i x$, так как векторное поле, определяемое системой (3), симметрично относительно начала координат. (Система (3) не меняется при замене x на $-x$ и y на $-y$.) Определение их характера путем вычисления характеристических корней очень громоздко, и это можно сделать проще, воспользовавшись теорией индекса Пуанкаре.

Так как при $D > 0$ все состояния равновесия простые, и при изменении знака D, когда корни k_1 и k_2 делаются мнимыми, исчезают (кроме (0, 0)), то сумма их индексов должна равняться нулю. Кроме того, ни одно из них не может быть фокусом, так как через них проходят интегральные прямые $y = k_i x$. Отсюда заключаем, что одно из них — седло, другое — узел.

Когда $D = 0$, эти точки сливаются в двойную точку — седло-узел (если при этом $\Delta \neq 0$).

В случае $\Delta = 0$ две симметричные точки сливаются с особой точкой в начале координат в одну и образуют особую точку высшего порядка. Заметив, что при $\Delta > 0$ индекс особой точки в начале координат равен $+1$, а при $\Delta < 0$ равен -1, заключаем отсюда, что сумма индексов особых точек, слившихся с началом, равна -2, т. е. эти особые точки — седла, и сложная особая точка имеет характер седла, а оставшиеся две — узлы.

В случае, когда

$$D \equiv (a - d)^2 + 4bc < 0,$$

система имеет в начале координат единственную особую точку типа фокус. Постараемся выяснить наличие предельных циклов. Выберем в качестве топографической системы семейство окружностей

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{6}$$

Тогда контактная кривая (т. е. кривая, где окружности (6) касаются траектории системы (3)) будет иметь вид

$$\frac{cx + dy - y\left(x^2 + y^2\right)}{ax + by - x\left(x^2 + y^2\right)} = -\frac{x}{y},$$

или

$$F(x, y) = ax^2 + (b + c)xy + dy^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

В полярных координатах

$$2\rho^2 = a + d + (a - d)\cos 2\varphi + (b + c)\sin 2\varphi.$$

Радиусы R_1 и R_2 крайних кругов, касающихся кривой контакта, определяются из условия $d\rho^2/d\varphi = 0$, которое дает $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b+c}{a-d}$.

Отсюда находим радиусы крайних кругов топографической системы, касающихся контактной кривой:

$$R_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + (b + c)^2}}{2}.$$

Предельный цикл лежит в кольцевой области между этими кругами, R_1 и R_2 будут оба положительными, если $(a + d)^2 > (a - d)^2 + (b + c)^2$, или $4ad - (b + c)^2 > 0$. Последнее условие совпадает с условием, при котором кривая контактов имеет в начале координат изолированную точку:

$$F''_{xx}F''_{yy} - (F''_{xy})^2 = 4ad - (b + c)^2 > 0.$$

Если это условие не выполнено, кривая контактов проходит через начало координат, а величина R_1 становится отрицательной, и можно лишь утверждать, что предельный цикл (если он существует) располагается внутри окружности радиуса R_2. Нетрудно доказать, что предельный цикл единствен. Воспользуемся с этой целью критерием Дюлака для кольцевой области (см. гл. 6). Очевидно, что функции

$$X(x, y) = ax + by - x(x^2 + y^2),$$
$$Y(x, y) = cx + dy - y(x^2 + y^2)$$

и

$$F(x, y) = \frac{1}{by^2 - cx^2 + (a - d)xy}$$

удовлетворяют условиям теоремы Дюлака для кольцевой области (см. гл. 6), так как в этом случае $F(x, y)$ дифференцируема в любой кольцевой области G, окружающей начало координат. Легко проверить, что

$$B(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(XF) + \frac{\partial}{\partial y}(YF) = \frac{-2(x^2 + y^2)}{by^2 - cx^2 + (a - d)xy}$$

не меняет знака в области G. Таким образом, цикл один.

Доказанная единственность предельного цикла позволяет утверждать, что при смене устойчивости особой точки в начале координат предельный цикл стягивается в особую точку.

В самом деле, в противном случае должно было бы существовать четное число предельных циклов. Отсюда же следует, что для $a + d < 0$ предельных циклов нет.

На рис. 127 и 128 даны картины разбиения сферы на траектории для случая одной особой точки: рис. 127 — для $D<0$, $a+d>0$; рис. 128 — для $\Delta>0$, $a+d<0$.

Взаиморасположение различных областей значений параметров системы (разбиение пространства коэффициентов системы) может быть дано в очень удобной и наглядной форме. Заметим с этой целью, что заменой $t=\tau/d$, $x=\sqrt{d}\xi$, $y=\sqrt{d}\eta$ система (2)

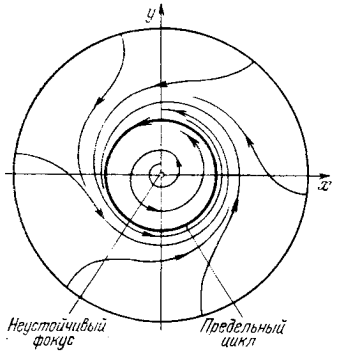


Рис. 127

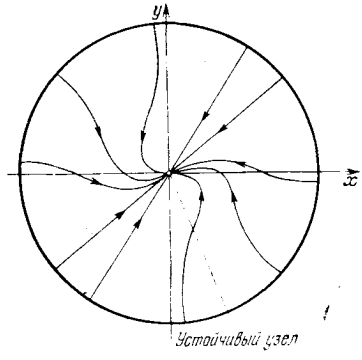


Рис. 128

может быть приведена к виду, где $d=1$ (для $d>0$). Тогда пространство коэффициентов может быть реализовано в виде плоскости (a, bc). На рис. 129 изображены кривые $D=0$, $\Delta=0$, $a+d=0$, разбивающие плоскость на области, соответствующие различным случаям разбиения сферы на траектории. Области I (рис. 129) соответствует разбиение сферы на траектории, изображенное на рис. 130; области II соответствует рис. 131 и т. д. Точкам плоскости, лежащим на прямой $\Delta=0$, соответствуют бифуркационные значения параметра, при которых начало координат является особой точкой высокого порядка. Качественная картина на сфере эквивалентна в этом случае либо рис. 131 $(a+d>0)$, либо рис. 128 $(a+d\leqslant 0)$. Штриховкой на рис. 129 покрыта область, для которой существует предельный цикл. Случай $D=0, \Delta>0$ изображен на рис. 132.

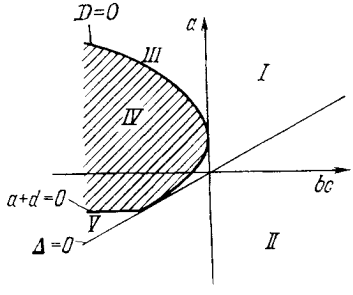


Рис. 129

Пример 3 [4].

$$dx/dt=-ay+x(1-x^2-y^2)=P,$$
$$dy/dt=A+ax+y(1-x^2-y^2)=Q.$$

Для исследования особых точек (состояний равновесия) удобно перейти к полярным координатам. Получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}[Ay + \rho^2(1-\rho^2)], \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho^2}(Ax + a\rho^2).$$

Особые точки — точки пересечения изоклин

$$d\rho/d\varphi = 0, \quad Ay + \rho^2(1-\rho^2) = 0, \tag{7}$$

$$d\varphi/dt = 0, \qquad Ax + a\rho^2 = 0. \tag{8}$$

Кривая (7) — изоклина в полярной системе координат — легко может быть построена. При $0 < A^2 < 4/27$ она состоит из двух

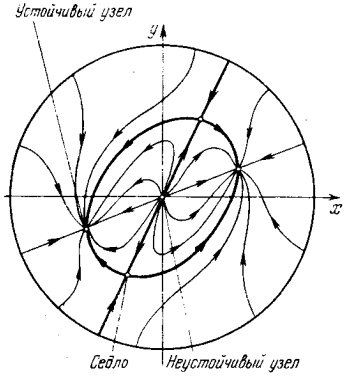


Рис. 130

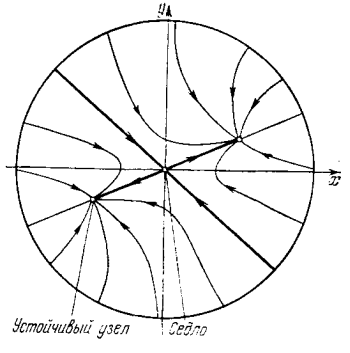


Рис. 131

симметричных относительно оси y замкнутых ветвей, охватывающих одна другую (сплошные замкнутые кривые на рис. 133). Кривая (8) — окружность радиуса $A/(2a)$, касающаяся оси y в начале координат (штриховые линии на рис. 133 соответствуют трем различным значениям a). Возможны три точки пересечения изоклин (8) и (7) (точка $\rho = 0$ исключается): две с внешней ветвью (7) и одна с внутренней (см. рис. 133). С возрастанием параметра a точки пересечения внешней ветви (7) с окружностью двигаются навстречу друг другу и затем при $a = a_1$ сливаются; при дальнейшем возрастании a эта точка исчезает.

Пусть A фиксировано и выбрано так, чтобы кривая $\rho = 1/\sqrt{2}$ отделяла внешнюю часть кривой (7) от внутренней, не пересекаясь с ними. Это возможно сделать, так как при $A \to 0$ внутренняя ветвь стягивается в точку $x = y = 0$, а наружная превращается в окружность $\rho = 1$. При таком выборе A величина

$$P'_x + Q'_y = 2(1 - 2\rho^2) \tag{9}$$

меняет знак как раз на кривой $\rho = 1/\sqrt{2}$ и, следовательно, будет

положительной для особой точки на внутренней ветви кривой (7) и отрицательной для особых точек на внешней ветви.

Возьмем в качестве топографической системы Пуанкаре семейство окружностей $x^2 + y^2 = C$ и составим производную dC/dt вдоль траекторий системы

$$\frac{dC}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2[Ay + \rho^2(1 - \rho^2)].$$

Как видно, производная dC/dt меняет знак на кривой (7). Две крайние кривые топографической системы, касающиеся контакт-

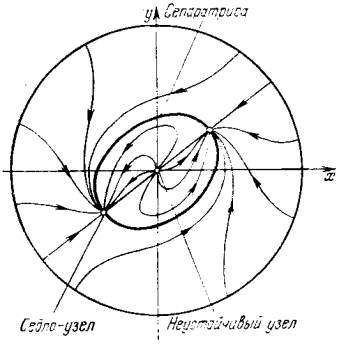


Рис. 132

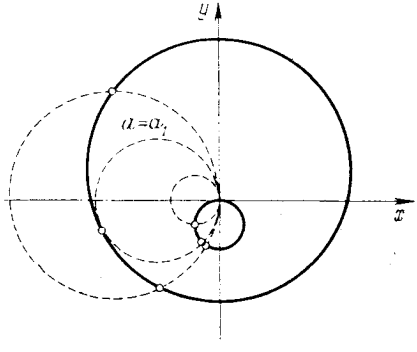


Рис. 133

ной кривой (изоклины (7)), образуют кольцо, на внешней и внутренней границе которого производная dC/dt имеет разные знаки. Очевидно, что при больших ρ будет $dC/dt < 0$. Таким образом, на внешней границе кольца $dC/dt < 0$, а на внутренней $dC/dt > 0$. Через обе границы траектории входят внутрь кольца. Особая точка на внутренней ветви кривой (7) лежит внутри цикла без контакта, ее индекс Пуанкаре, следовательно, равен $+1$, и точка может быть лишь узлом либо фокусом. Так как для нее выражение (9) положительно, то фокус или узел неустойчивы. Две другие точки лежат в кольце между циклами без контакта, следовательно, сумма индексов этих точек равна нулю, и одно из них седло. Вторая точка устойчива, так как для нее выражение (9) отрицательно.

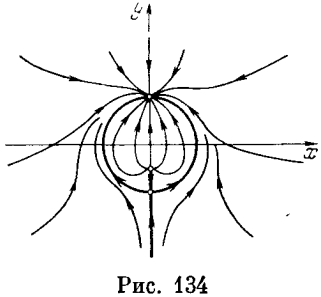


Рис. 134

Проследим изменение качественной структуры траекторий в зависимости от параметра a. При $a = 0$ прямая $x = 0$ будет интегральной кривой. Качественная картина траекторий определяется однозначно и будет такая, как на рис. 134.

При возрастании a точки (седло и устойчивый узел) будут сближаться, но до момента слияния качественная структура не может измениться, так как не меняются число и характер особых точек и поведение сепаратрис и так как внутри кольца не могут возникнуть предельные циклы за счет сгущения траекторий. Последнее невозможно, потому что кривая $P'_x + Q'_y = 0$

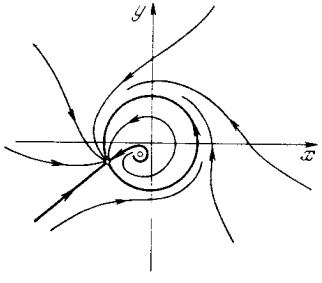


Рис. 135

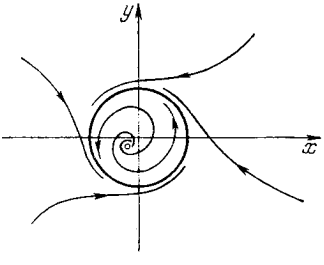


Рис. 136

лежит вне кольца (критерий Дюлака). При дальнейшем возрастании a точки сливаются и затем исчезают.

Из особой точки седло-узел и сепаратрисы седло-узла (см. гл. 10, 11) рождается единственный (так как $P'_x + Q'_y \neq 0$ в седло-узле) предельный цикл (рис. 135 и 136).

§ 3. Некоторые простые примеры динамических систем на цилиндре. В дальнейшем мы подробно остановимся на качественном исследовании классического уравнения движения самолета в вертикальной плоскости [45, 42, 75, 148], которое после надлежащей замены переменных и параметров может быть записано в виде системы

$$d\varphi/dt = \rho - \cos\varphi, \quad d\rho/dt = 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin\varphi) \qquad (1)$$

(λ и μ — положительные параметры). Следующие примеры посвящены рассмотрению частных случаев этого уравнения.

Пример 1.

$$d\varphi/dt = \rho - \cos\varphi = P, \quad d\rho/dt = 2\rho(\lambda - \sin\varphi) = Q \qquad (2)$$

(эта система получается из системы (1) при $\mu = 0$). Будем рассматривать только часть фазового цилиндра, соответствующую (что соответствует смыслу этих переменных) $\rho > 0$.

а) $\lambda = 0$. В этом случае мы получаем систему

$$d\varphi/dt = \rho - \cos\varphi, \quad d\rho/dt = -2\rho\sin\varphi \qquad (3)$$

и, взяв в качестве интегрирующего множителя $M = 1/(2\sqrt{\rho})$, получаем интеграл системы

$$H(\rho, \varphi) = \frac{1}{3}\rho^{3/2} - \rho^{1/2}\cos\varphi = h,$$

или

$$\rho\left(\frac{1}{3}\rho - \cos\varphi\right)^2 = h^2.$$

Состояниями равновесия этой системы являются

$$O_1(-\pi/2, 0),\ O_2(\pi/2, 0) \text{ и } O_3(0, 1).$$

Нетрудно убедиться в том, что состояния равновесия O_1 и O_2 — седла, а также, что для состояния равновесия $O_3(0, 1)$ характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни, и система в окрестности этого состояния равновесия имеет аналитический интеграл, т. е. состояние равновесия — центр.

Нетрудно, кроме того, непосредственно проверить, что кривая

$$\rho = 3\cos\varphi$$

интегральная и является сепаратрисой, идущей из седла в седло. Наметив направления на траекториях, составляющих интегральную кривую $\rho = 0$, мы получаем картину траекторий, изображенную на рис. 137, *а* [3]).

б) $1 > \lambda > 0$. При $\lambda < 1$ у системы (2) три состояния равновесия:

$$O_1(-\pi/2, 0),\ O_2(\pi/2, 0) \text{ и } O_3(\varphi_3, \rho_3),$$

где

$$\varphi_3 = \arcsin\lambda, \quad \rho_3 = \sqrt{1-\lambda^2}.$$

в) При $\lambda > 1$ у системы два состояния равновесия O_1 и O_2. Записывая для всех состояний равновесия соответствующее характеристическое уравнение

$$\varkappa^2 - \sigma\varkappa + \Delta = 0,$$

находим: 1) характеристические корни для состояния равновесия O_1:

$$\varkappa_1 = -1, \quad \varkappa_2 = 2(\lambda + 1),$$

т. е. состояние равновесия O_1 — седло при всех $\lambda \geqslant 0$; 2) характеристические корни для состояния равновесия O_2:

$$\varkappa_1 = 1, \quad \varkappa_2 = 2(\lambda - 1),$$

т. е. O_2 — седло при $\lambda < 1$ и неустойчивый узел при $\lambda > 1$.

---

[3]) Здесь и далее для большей наглядности масштабы на рисунках не всегда соблюдены.

При $\lambda = 1$ будет $\varkappa_2 = 0$, т. е. значение $\lambda = 1$ является бифуркационным. Состояние равновесия $O_3(\varphi_3, \rho_3)$, существующее при $\lambda < 1$, является неустойчивым фокусом или узлом.

При $\lambda = 1$ состояние равновесия O_3 сливается с O_2, образуя сложную особую точку, которая при $\lambda > 1$ делается грубым неустойчивым узлом.

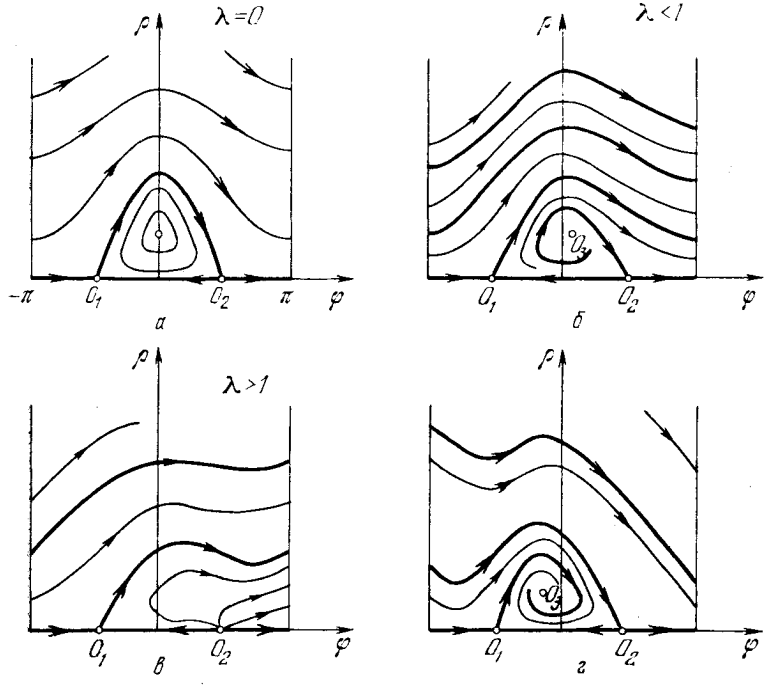


Рис. 137

Разность наклонов траекторий системы (2) при $\lambda > 0$ и $\lambda = 0$ есть

$$\frac{2\rho(\lambda - \sin\varphi)}{\rho - \cos\varphi} + \frac{2\rho\sin\varphi}{\rho - \cos\varphi} \equiv \frac{2\rho\lambda}{\rho - \cos\varphi}.$$

При $\rho - \cos\varphi > 0$ это выражение положительно, и, следовательно, выше сепаратрисы, и на сепаратрисе консервативной системы $\rho = 3\cos\varphi$, идущей из седла в седло, поле поворачивается на положительный угол. Поэтому нет циклов, охватывающих цилиндр.

Так как

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}}P\right]'_{\varphi} + \left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}}Q\right]'_{\rho} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\rho}},$$

то нет и циклов, охватывающих состояния равновесия (критерий Дюлака). Расположение траекторий представлено на рис. 137, *б* и 137, *в*.

Пример 2 [150].

$$d\varphi/dt = \rho - \cos\varphi = P, \quad d\rho/dt = 2\rho(-\mu\rho - \sin\varphi) = Q. \qquad (4)$$

(Эта система получается из системы (1) при $\lambda = 0$.) При $\mu = 0$ мы получаем систему (соответствующую $\lambda = 0$ предыдущего примера), изображенную на рис. 137, *а*.

При $\mu > 0$ у системы три состояния равновесия. В точках $O_1(-\pi/2, 0)$, $O_2(\pi/2, 0)$ будут седла.

Если положить

$$\mu = \operatorname{tg}\beta, \quad 0 < \beta < \pi/2,$$

то третье состояние равновесия будет

$$O_3(-\beta, \cos\beta).$$

Оно является устойчивым фокусом или узлом.

Так как

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}}P\right]'_\varphi + \left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}}Q\right]'_\rho = -\frac{3\mu\sqrt{\rho}}{2},$$

то у системы нет предельных циклов, охватывающих состояния равновесия (критерий Дюлака).

Сравнивая эту систему с системой (3), мы, так же как и в предыдущем примере, заключаем, что у системы (4) нет предельных циклов, охватывающих цилиндр.

Расположение траекторий представлено на рис. 137, *г*.

Пример 3.

$$d\varphi/dt = y = P(\varphi, y), \quad dy/dt = \gamma - \sin\varphi - 2hy = Q(\varphi, y).$$

(К рассмотрению этой системы сводится целый ряд задач: движение маятника с постоянным моментом, динамика синхронного мотора в простейшей идеализации, стабилизация скорости вращения двигателя постоянного тока часовым регулятором и др. В дальнейшем она будет использована и как система сравнения.) Эта система подробно рассмотрена в [162, 2, 3, 149, 39].

Приведем здесь исследование этой системы в простейших случаях:

а) $\gamma = 0$, $h = 0$; система имеет вид

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = -\sin\varphi.$$

Очевидно, она имеет интеграл

$$H(\varphi, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos\varphi = C.$$

Картина траекторий представлена на рис. 138, *а*.

б) $\gamma \neq 0$. При $\gamma < 1$ — два состояния равновесия:

$$O_1(\alpha, 0) \quad \text{и} \quad O_2(\pi - \alpha_1, 0),$$

где $\sin \alpha_1 = \gamma$; в точке O_2 — всегда седло. Когда $h = 0$, система имеет аналитический интеграл

$$y^2/2 - \cos \varphi - \gamma\varphi = C,$$

и состояние равновесия O_1 — центр. Картина траекторий на фазовом цилиндре в этом случае имеет вид, представленный на рис. 138, *б*.

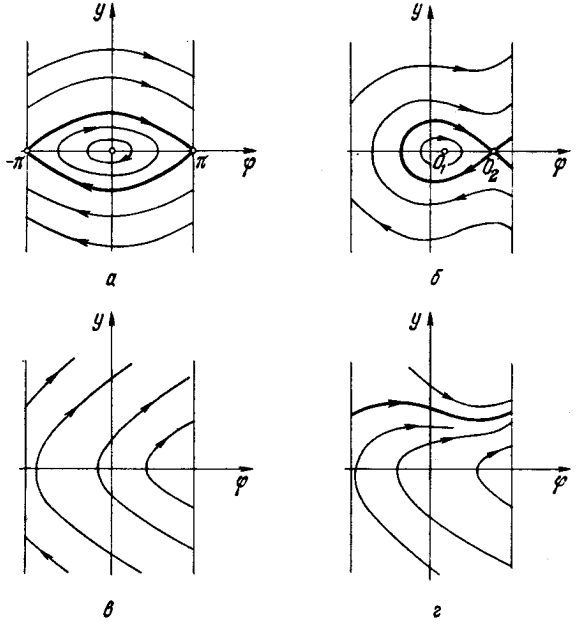


Рис. 138

При $\gamma = 1$ состояния равновесия O_1 и O_2 сливаются в одно двукратное состояние равновесия; центр и седло сливаются, образуя одну двукратную точку.

При $\gamma > 1$ у системы нет состояний равновесия (рис. 138, *в*).

Так как

$$P'_\varphi + Q'_y = -2h,$$

то при $h \neq 0$ система не имеет предельных циклов, охватывающих состояние равновесия, и может иметь не более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр, если такой цикл существует. Для того чтобы показать существование предельного

цикла, охватывающего цилиндр, достаточно указать два частных решения системы $y_1(\varphi)$, $y_2(\varphi)$ такие, что

$$y_1(\varphi + 2\pi) \leqslant y_1(\varphi), \quad y_2(\varphi + 2\pi) \geqslant y_2(\varphi).$$

Первым из этих решений, как нетрудно видеть, будет любая кривая, проходящая через точку, лежащую выше изоклины горизонтальных наклонов

$$y = \frac{\gamma - \sin\theta}{2h}.$$

Вторым решением $y_2(\theta)$ в случае $\gamma > 1$, как нетрудно видеть, будет любая кривая, проходящая через точку на оси $y = 0$ (рис. 138, *г* [4]).

---

[4]) Использование системы при $h = 0$ как системы сравнения здесь не может дать необходимую информацию относительно существования циклов, охватывающих цилиндр, так как кривые, схватывающие цилиндр, незамкнутые.

ГЛАВА 15

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА (МЕТОДОМ ПОНТРЯГИНА)

§ 1. Общие замечания. В связи с использованием метода Понтрягина сделаем сначала некоторые замечания общего характера.

Рассмотрим систему, близкую к консервативной (линейной или нелинейной):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H'_y + \mu p, \\ \dot{y} &= -H'_x + \mu q, \end{aligned} \qquad (A_\mu)$$

где

$$\dot{x} = H'_y, \quad \dot{y} = -H'_x \qquad (A_0)$$

— консервативная система и

$$H(x, y) = h$$

— ее интеграл.

Относительно консервативной системы (A_0) предположим дополнительно, что у нее только простые состояния равновесия, т. е. только седла и центры. В § 7 гл. 11 было дано условие, необходимое для того, чтобы у системы (A_μ) при малых μ существовал предельный цикл, близкий к некоторой кривой C_{h_0} (уравнение кривой C_{h_0}: $H(x, y) = h_0$) системы (A_0) (т. е. предельный цикл при $\mu \to 0$, стремящийся к C_{h_0}). Это условие заключается в равенстве нулю при $h = h_0$ функции

$$\psi(h) = \int_{C_h} p\,dy - q\,dx.$$

Достаточное условие существования такого предельного цикла — это

$$\psi(h_0) = 0, \quad \psi'(h_0) \neq 0.$$

Функция $\psi(h)$ в § 7 гл. 11 была определена только в случае кривой C_h $(H(x, y) = h)$ консервативной системы, ни в одной точке которой обе производные H'_x и H'_y одновременно не об-

ращались в нуль, т. е. в случае, когда кривая C_{h_0} не проходит через седло и не вырождается в точку (центр).

Однако при рассмотрении конкретных примеров часто представляет интерес также и рассмотрение вырожденных случаев, т. е. случаев, когда предельный цикл системы (A_μ) рождается от петли сепаратрисы и из центра. Кроме того, обычно при рассмотрении конкретных задач функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ зависят от параметров, отличных от μ, и естественно возникает вопрос: от каких из кривых C_h рождается предельный цикл системы (A_μ) при различных значениях этих параметров?

Поэтому в конкретных задачах (как это будет проиллюстрировано на примерах) исследование методом Понтрягина проводится следующим образом.

Функция $\psi(h)$, непосредственно определенная лишь для значений h, соответствующих интегральным кривым C_h без особенностей (отличным от состояний равновесия и сепаратрис), доопределяется по непрерывности (когда это возможно) и для значений h, соответствующих центрам и сепаратрисам.

Предположим, что функция $\psi(h)$ доопределена для всех значений h, и пусть функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ зависят от некоторых параметров, например от двух параметров λ_1 и λ_2. Очевидно, тогда и функция ψ также будет зависеть от этих параметров: $\psi(h, \lambda_1, \lambda_2)$.

Естественно при рассмотрении вопроса о циклах системы (A_μ), сводящегося к рассмотрению нулей функции $\psi(h, \lambda_1, \lambda_2)$, выделить следующие «бифуркационные» (в полном согласии с ранее введенным смыслом этого термина) случаи и соответствующие им бифуркационные значения параметров λ_1 и λ_2.

1) Пусть при значении h_0, соответствующем интегральной кривой системы (A_0), не имеющей особенностей, выполняются равенства

$$\psi(h_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad \psi'_h(h_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

В этом случае от кривой C_{h_0} консервативной системы может появиться более одного предельного цикла (в простейшем случае два).

2) Пусть значение h_0, при котором

$$\psi(h_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

соответствует вырожденной в точку кривой консервативной системы. В этом случае предельный цикл рождается (при $\psi'_h(h_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0$) из состояния равновесия типа центра консервативной системы.

3) Пусть значение h_0, при котором

$$\psi(h_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

соответствует сепаратрисе консервативной системы. В этом случае предельный цикл системы может рождаться из петли сепаратрисы консервативной системы.

В дальнейшем при рассмотрении конкретных примеров естественным образом будут выделяться указанные бифуркационные значения параметров λ_i.

Подчеркнем, что при использовании методов малого параметра (метода Пуанкаре или метода Понтрягина) не дается никаких оценок для тех значений μ, при которых у системы (A_μ) существуют предельные циклы.

Этим методом можно получить лишь доказательство существования таких значений μ («достаточно малых», но без всякой оценки малости), при которых система (A_μ) имеет предельный цикл.

Кроме того, при доказательстве существования $\mu^* > 0$ такого, что при $|\mu| < \mu^*$ существует предельный цикл, родившийся от одной или нескольких кривых C_h консервативной системы, предполагается, что рассматривается ограниченная часть плоскости (без этого предположения доказательство теряет смысл). Если же необходимо рассмотреть всю плоскость, то нужно специально рассматривать рождение предельных циклов из бесконечности.

Заметим еще, что так как в конкретных задачах выражения для функции $\psi(h)$ и ее производных бывают столь сложны, что их аналитическое исследование представляется невыполнимым, то часто в задачах используется построение этой функции вычислительным путем. Это сделано в примерах § 3.

§ 2. Примеры рассмотрения методом Понтрягина (полное исследование).

Пример 1. Рассмотрим систему, которая (при предположении малости некоторых параметров) может служить моделью частотно-фазовой автоподстройки частоты (см. [136]):

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \mu\left(\gamma - y - b\frac{2\beta y}{1+(\beta y)^2} - \sin\varphi\right). \tag{1}$$

Очевидно, эта система является близкой к очень простой консервативной системе на цилиндре

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = 0,$$

интеграл которой

$$H(\varphi, y) = y^2/2 = h.$$

На плоскости (φ, y) это — прямые, параллельные оси φ, на фазовом цилиндре все кривые замкнуты (окружности). Составим

выражение для $\psi(h)$. Так как в рассматриваемом случае

$$p = 0, \quad q = \gamma - y - \frac{2\beta b y}{1 + (\beta y)^2} - \sin\varphi,$$

то

$$\psi(h) = \int_0^{2\pi} \left(\gamma - y - \frac{2b\beta y}{1 + (\beta y)^2} - \sin\varphi\right) d\varphi,$$

где, очевидно, $y = \sqrt{2h}$.

Мы получаем

$$\psi(h) = 2\pi \left(\gamma - \sqrt{2h} - \frac{2b\beta\sqrt{2h}}{1 + \beta^2 2h}\right),$$

или, вводя обозначение $\eta = \sqrt{2h}$, будем иметь

$$\bar{\varphi}(\eta) = 2\pi\{\gamma - \eta - 2b\beta\eta\,[1 + (\beta\eta)^2]^{-1}\}. \qquad (2)$$

Для того чтобы найти значения h, при которых от кривой консервативной системы рождается предельный цикл, нужно, очевидно, рассмотреть уравнение (которое мы получим, если приравнять нулю числитель $\chi_1(\eta)$ выражения (2))

$$\bar{\psi}_1(\eta) = (\gamma - \eta)\,[1 + (\beta\eta)^2] - 2b\beta\eta =$$
$$= -\beta^2\eta^3 + \gamma\beta^2\eta^2 - (1 + 2b\beta)\,\eta + \gamma = 0. \qquad (3)$$

Это — кубическое уравнение, которое может быть исследовано известными методами. Мы, однако, не будем останавливаться на его исследовании подробно, а покажем только, что существуют как значения параметров b, γ и β, при которых это уравнение имеет только один корень, так и значения параметров, при которых это уравнение имеет три корня. Очевидно, случай, когда уравнение (3) имеет один корень, соответствует случаю (при достаточно малых μ), когда существует один устойчивый предельный цикл, а случай, когда это уравнение имеет три корня, соответствует случаю, когда система (1) имеет три предельных цикла — два устойчивых и между ними неустойчивый.

При граничном значении $\gamma = 0$ (по смыслу константы γ всегда $\gamma > 0$) уравнение (3) превращается в уравнение

$$[-\beta^2\eta^2 - (1 + 2b\beta)]\,\eta = 0,$$

имеющее единственный действительный корень $\eta = 0$. Очевидно, уравнение (3) будет иметь единственный действительный корень и при всех достаточно малых $\gamma > 0$. При достаточно больших $\eta > 0$ $\bar{\psi}_1(\eta) < 0$ (член наивысшей степени по η есть $-\beta^2\eta^3$; при $\eta > 0$ он отрицателен). В нуле η_0 функции $\bar{\psi}_1(\eta)$, очевидно,

$\bar{\psi}_1'(\eta_0) < 0$, что и означает, что соответствующий предельный цикл устойчив.

Для доказательства существования значений параметров, при которых у системы (1) существует три цикла, найдем сначала значения параметров, при которых уравнение $\bar{\psi}(\eta) = 0$ имеет трехкратный корень. При этих значениях параметров должны удовлетворяться следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(\eta) &= -\beta^2\eta^3 + \gamma\beta^2\eta^2 - (1 + 2b\beta)\eta + \gamma = 0, \\ \bar{\psi}_1'(\eta) &= -3\beta^2\eta^2 + 2\gamma\beta^2\eta - (1 + 2b\beta) = 0, \\ \bar{\psi}_1''(\eta) &= -6\beta^2\eta + 2\gamma\beta^2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из последнего уравнения находим

$$\eta_0 = \gamma/3.$$

Подставляя это значение η_0 в первые два из уравнений (4) (и сокращая первое уравнение на γ), получаем следующие два соотношения для параметров, при которых $\bar{\psi}(\eta)$ имеет тройной корень (а система (1) — трехкратный цикл):

$$\begin{aligned} \frac{2}{27}\beta^2\gamma^2 - \frac{1 + 2b\beta}{3} + 1 = 0, \\ \frac{1}{3}\gamma^2\beta^2 - (1 + 2b\beta) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда мы получаем значения для $\beta^2\gamma^2$ и $1 + 2b\beta$, при которых выполняются условия (4) (т. е. уравнение $\bar{\psi}(\eta) = 0$ имеет трехкратный корень):

$$\beta^2\gamma^2 = 27, \quad 1 + 2b\beta = 9.$$

Представим теперь $\bar{\psi}_1(h)$ в следующем виде, раскладывая $\bar{\psi}_1(\eta)$ по степеням $\eta - \eta_0$ ($\eta_0 = \gamma/3$) и принимая во внимание, что $\bar{\psi}_1''(\eta_0) = 0$:

$$\bar{\psi}_1(\eta) = \bar{\psi}_1(\eta_0) + (\eta - \eta_0)\bar{\psi}_1'(\eta_0) + \frac{\bar{\psi}_1'''(\eta_0)}{3!}(\eta - \eta_0)^3, \tag{6}$$

где $\bar{\psi}_1'''(\eta_0) = -6\beta^2 \neq 0$, когда $\beta \neq 0$.

Но, очевидно, мы всегда можем, принимая во внимание выражение (5) и полагая

$$\frac{1 + 2b\beta}{3} = 1 + \frac{2}{27}\beta^2\gamma^2,$$

т. е. выбирая $1 + 2b\beta$ так, чтобы $\bar{\psi}_1(\eta_0) = 0$, взять $\beta\gamma$ таким, чтобы

$$\bar{\psi}_1'(\eta_0) = \frac{1}{3}\gamma^2\beta^2 - (1 + 2b\beta) = \frac{1}{3}\gamma^2\beta^2 - 3\left(1 + \frac{2}{27}\beta^2\gamma^2\right) = \frac{\beta^2\gamma^2}{9} - 3$$

было бы не равно нулю и знака, противоположного знаку $\bar{\psi}_1'''(\eta_0)$. Тогда, очевидно, уравнение (6), которое принимает вид

$$\bar{\psi}_1(\eta) = \bar{\psi}_1'(\eta_0)(\eta - \eta_0) + \frac{\bar{\psi}_1'''(\eta_0)}{3!}(\eta - \eta_0)^3,$$

будет иметь, кроме $\eta = \eta_0$, еще два различных корня, η_1 и η_2. Нетрудно, принимая во внимание вид $\bar{\psi}_1(\eta)$, а значит, и знак $\bar{\psi}_1'(\eta_0)$, убедиться в том, что больший и меньший корни соответствуют устойчивым предельным циклам, а средний — неустойчивому предельному циклу.

Пример 2 (динамическая система, описывающая динамику синхронного мотора в простейшей идеализации). Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + \sin\varphi = \gamma, \quad \gamma \geqslant 0, \quad b \geqslant 0. \tag{7}$$

Полагая $b = \mu b_0$, $\gamma = \mu\gamma_0$ и записывая уравнение (7) в виде системы, получаем

$$\dot{\varphi} = y = \partial H/\partial y = P(\varphi, y),$$
$$\dot{y} = -\sin\varphi + \mu(\gamma_0 - b_0 y) = -\partial H/\partial\varphi + \mu q = Q(\varphi, y, \mu),$$

где $H(\varphi, y) = y^2/2 - \cos\varphi$, $q = \gamma_0 - b_0 y$.

Семейство кривых

$$y^2/2 - \cos\varphi = h$$

имеет вид, представленный на рис. 138, *а*.

Значениям h из интервала $-1 < h < +1$ соответствуют замкнутые траектории, охватывающие состояние равновесия типа центра, значениям h из интервала $1 < h < \infty$ — замкнутые траектории, охватывающие цилиндр; при $h = 1$ сепаратрисы седла образуют петлю, охватывающую цилиндр (см. рис. 138, *а*).

По критерию Бендиксона $\left(P_\varphi' + Q_y' = -\mu b_0 \neq 0\right)$ циклов, охватывающих состояние равновесия, нет. Функция Понтрягина для верхнего полуцилиндра имеет вид

$$\psi(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} q\, d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\gamma_0 - b_0\sqrt{2(\cos\varphi + h)}\right] d\varphi.$$

Для нижнего полуцилиндра соответствующая функция будет отличаться знаком перед радикалом и, следовательно, всегда будет положительной. Поэтому на нижнем полуцилиндре циклов нет.

Полагая $\varkappa^2 = 2/(h+1)$, мы получим

$$\psi(h) = \Psi(\varkappa) =$$
$$= 2\pi\gamma_0 - b_0\sqrt{2}\,\frac{4\sqrt{2}}{\varkappa}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \varkappa^2(\sin\theta)^2}\, d\theta = 2\pi\gamma_0 - \frac{8b_0}{\varkappa}E,$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода:

$$E = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\varkappa^2}{4} - \frac{3}{4\cdot 16}\varkappa^4 - \ldots\right). \tag{8}$$

Далее мы имеем

$$\frac{dE}{d\varkappa} = \frac{E-F}{\varkappa},$$

где F — полный эллиптический интеграл первого рода и

$$F = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\varkappa^2}{4} + \frac{9}{4\cdot 16}\varkappa^4 + \ldots\right). \tag{9}$$

Используя разложения (8) и (9), мы, очевидно, получаем

$$\frac{dE}{d\varkappa} = \frac{E-F}{\varkappa} \leqslant 0.$$

Для существования циклов необходимо, чтобы

$$\psi(h) = \Psi(\varkappa) = 0$$

или

$$\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_0}{b_0}\varkappa = E(\varkappa).$$

Очевидно, нули этого уравнения будут абсциссами точек пересечения кривой $z = E(\varkappa)$ и прямой $z = \frac{\pi}{4}\frac{\gamma_0}{b_0}\varkappa$ (рис. 139). Уравнение может иметь не более одного корня $\varkappa = \varkappa_0$, так как

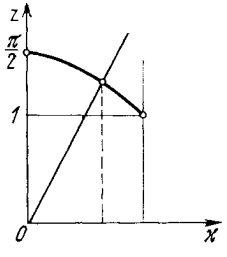


Рис. 139

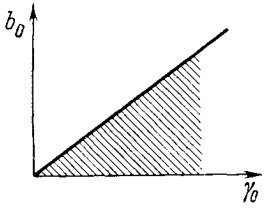


Рис. 140

$dE/d\varkappa < 0$ при $\varkappa \neq 0$. Из условия $\varkappa_0 = 1$ находим границу области существования предельного цикла:

$$\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_0}{b_0} = 1, \text{ или } b_0 = \frac{\pi}{4}\gamma_0.$$

Плоскость параметров представлена на рис. 140. Заштрихованная область соответствует значениям параметров, при которых есть цикл.

Пример 3 (фазовая автоподстройка частоты). Рассмотрим динамическую систему

$$d\varphi/dt = y = P, \quad dy/dt = -\sin\varphi + \gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)y = Q, \quad (10)$$

которая является одной из моделей фазовой автоподстройки частоты. Мы рассмотрим эту систему в предположении, что γ и λ малы. Заменяя γ на $\mu\gamma_0$ и λ на $\mu\lambda_0$ ($\mu > 0$), получим систему с малым параметром μ:

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = -\sin\varphi + \mu[\gamma_0 - \lambda_0(1 - d\cos\varphi)y], \quad (11)$$

которую рассмотрим методом Понтрягина как близкую к консервативной, получающейся из (11) при $\mu = 0$.

При $\mu = 0$ система (11) имеет интеграл

$$H(\varphi, y) \equiv y^2/2 - \cos\varphi = h$$

и семейство кривых имеет вид, представленный на рис. 138, *а*.

Если систему (11) записать в виде

$$d\varphi/dt = H'_y, \quad dy/dt = -H'_\varphi + \mu q(\varphi, y), \qquad q = \gamma_0 - \lambda_0(1 - d\cos\varphi)y, \quad (12)$$

то значения константы h, выделяющие кривые консервативной системы, вблизи которых при малом μ на верхнем и нижнем полуцилиндрах будут предельные циклы системы, соответственно определяют как корни уравнений

$$\psi_1(h) = 0, \quad \psi_2(h) = 0,$$

т. е.

$$\psi_{1,2}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} q\,d\varphi - p\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} [\gamma_0 - \lambda_0(1 - d\cos\varphi)y]\,d\varphi, \quad p = 0.$$

Для $\psi_1(h)$ уравнения замкнутых кривых C_h ($h > 1$), охватывающих цилиндр, будут $y = +\sqrt{2(\cos\varphi + h)}$, а для $\psi_2(h)$ — будут $y = -\sqrt{2(\cos\varphi + h)}$.

Полагая $\varkappa^2 = 2/(h+1)$, мы получим

$$\psi_{1,2}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} [\gamma_0 \mp \lambda_0(1 - d\cos\varphi)\sqrt{2(\cos\varphi + h)}]\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\gamma_0 \mp \lambda_0\left\{\frac{8E}{\varkappa} - \frac{8d}{3\varkappa^3}[2(\varkappa^2 - 1)F + (2 - \varkappa^2)E]\right\} \equiv$$

$$\equiv 2\pi\gamma_0 \mp \lambda_0\Phi_0(\varkappa, d) \equiv \Psi_{1,2}(\varkappa). \quad (13)$$

Здесь $F(\pi/2, \varkappa)$ и $E(\pi/2, \varkappa)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода и $\varkappa$ изменяется в интервале $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$. Верхний знак соответствует индексу 1 в обозначении $\Psi_{1,2}$, а нижний — индексу 2.

Значения константы h, выделяющие кривые C_h консервативной системы, охватывающие состояние равновесия, определяются как корни уравнения

$$\psi_3(h) = 0. \tag{14}$$

Здесь

$$\psi_3(h) = \iint\limits_{C_h} \frac{\partial q}{\partial y}\, d\varphi\, dy = \iint\limits_{C_h} -\lambda_0 (1 - d\cos\varphi)\, d\varphi\, dy$$

и C_h — одна из кривых $y^2 = 2(\cos\varphi + h)$ при $-1 < h < 1$.

Как нетрудно видеть,

$$\psi_3(h) = -2\sqrt{2}\lambda_0 \int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (1 - d\cos\varphi)\sqrt{\cos\varphi + h}\, d\varphi,$$

где φ_0 — корень уравнения $\cos\varphi_0 + h = 0$ (геометрический смысл φ_0 см. рис. 141).

Полагая $(1+h)/2 = \varkappa$ (в интервале $-1 < h < 1$), для функции Понтрягина $\psi_3(h)$ окончательно получаем

$$\psi_3(h) = \frac{16}{3}\lambda_0 \{[(1-\varkappa^2)F + (2\varkappa^2 - 1)E]\, d - 3[E - (1-\varkappa^2)F]\} \equiv$$

$$\equiv \Psi_3(\varkappa). \tag{15}$$

Корни уравнений $\Psi_1(\varkappa) = 0$, $\Psi_2(\varkappa) = 0$, $\Psi_3(\varkappa) = 0$ зависят от параметров γ_0, λ_0, d. Пространство параметров можно разбить на области, соответствующие различным возможным распределениям корней уравнений. Каждому такому распределению будет соответствовать определенная структура разбиения фазового пространства на траектории. Условия появления или исчезновения корней (бифуркации) дают уравнения граничных поверхностей, разбивающих пространство параметров на области.

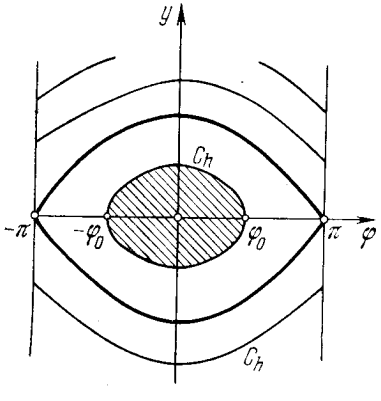


Рис. 141

Для исследования поведения функций Понтрягина вычислим их производные по $\varkappa$.

Принимая во внимание, что

$$\frac{dF}{d\varkappa} = \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{E}{1-\varkappa^2} - F\right], \quad \frac{dE}{d\varkappa} = \frac{1}{\varkappa}(E - F),$$

из (13) получим

$$\Psi'_{1,2}(\varkappa) = \pm 8\lambda_0 \left[\frac{F}{\varkappa^2} + \frac{d}{\varkappa^4}\Phi_1(\varkappa)\right]. \tag{16}$$

Здесь, как и в (13), верхний знак соответствует индексу 1 и введено обозначение

$$\Phi_1(\varkappa)=(2-\varkappa^2)F-2E. \tag{17}$$

Заметим, что $\Phi_1(\varkappa)$ для $\varkappa\neq 0$ всегда положительно (приложение I).

Вторая производная будет

$$\Psi''_{1,2}(\varkappa)=\pm 8\lambda_0\left\{\frac{E}{\varkappa^3(1-\varkappa^5)}-\frac{3F}{\varkappa^3}-\frac{d}{\varkappa^5}\left[(8-3\varkappa^2)F+\frac{7\varkappa^2-8}{1-\varkappa^2}E\right]\right\}. \tag{18}$$

Для $\Psi_3(\varkappa)$ находим

$$\Psi'_3(\varkappa)=16\lambda_0\varkappa\,[2\,dE-(1+d)F], \tag{19}$$

$$\Psi''_3(\varkappa)=\frac{16\lambda_0}{1-\varkappa^2}\{d\,[(3-4\varkappa^2)E-2(1-\varkappa^2)F]-E\}. \tag{20}$$

В дальнейшем будем считать фиксированным γ_0 и проследим за возможными бифуркациями в плоскости параметров (λ_0, d).

1. Бифуркации, связанные с поведением функции $\Psi_1(\varkappa)$. Рассмотрим поведение $\Psi_1(\varkappa)$ на интервале $0\leqslant\varkappa\leqslant 1$. Используя разложения

$$\begin{aligned} F&=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\varkappa^2}{4}+\frac{9}{4\cdot 16}\varkappa^4+\ldots\right),\\ E&=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\varkappa^2}{4}-\frac{3}{4\cdot 16}\varkappa^4-\ldots\right),\end{aligned} \tag{21}$$

для малых $\varkappa$ из (13) находим

$$\Psi_1(\varkappa)=2\pi\gamma_0-\lambda_0\left(\frac{4\pi}{\varkappa}-\frac{\pi d}{2}\varkappa+\ldots\right)\approx\frac{-4\pi\lambda_0}{\varkappa}, \tag{22}$$

где невыписанные члены уже не содержат $\varkappa$ в знаменателе. Из (22) следует, что

$$\Psi_1(0)=-\infty. \tag{23}$$

Заметив, что $F(1)=\infty$, но $(1-\varkappa)F^2\to 0$ при $\varkappa\to 1$, из (13) находим

$$\Psi_1(1)=2\pi\gamma_0+\frac{8}{3}\lambda_0(d-3). \tag{24}$$

Представим выражение для $\Psi'_1(\varkappa)$ из (16) в виде

$$\Psi'_1(\varkappa)=\frac{8\lambda_0}{\varkappa^4}\,[(\varkappa^2+d)F-2Ed+(1-\varkappa^2)Fd], \tag{25}$$

из (25) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_1'(1) &= +\infty, \quad d+1>0, \\ \Psi_1'(1) &= 16\lambda_0, \quad d+1=0, \\ \Psi_1'(1) &= -\infty, \quad d+1<0. \end{aligned} \tag{26}$$

Покажем, что $\Psi_1(\varkappa)$ может иметь не более одного экстремума (максимума). Это будет следовать из того, что при условии $\Psi_1'(\varkappa_0)=0$ будет всегда $\Psi_1''(\varkappa_0)<0$. Из (16), (17) видно, что $\Psi_1'(\varkappa_0)$ обращается в нуль при значении

$$d=-\frac{\varkappa_0^2 F}{\left(2-\varkappa_0^2\right)F-2E}. \tag{27}$$

Для $\Psi_1''(\varkappa_0)$ из (18) и (27) находим

$$\Psi_1''(\varkappa_0)=-\frac{16\lambda_0\left[E^2-\left(1-\varkappa_0^2\right)F^2\right]}{\varkappa_0^3\left(1-\varkappa_0^2\right)\left[\left(2-\varkappa_0^2\right)F-2E\right]}<0, \tag{28}$$

так как выражения в квадратных скобках положительны в интервале $0<\varkappa<1$ (приложения I и II).

Сопоставляя (23), (26) и (28), заключаем, что при $d+1>0$ функция $\Psi_1(\varkappa)$ будет монотонной (возрастающей); при $d+1<0$ она будет иметь один максимум.

Возможные типы поведения функции $\Psi_1(\varkappa)$ представлены на рис. 142.

Если $d+1>0$ и $\Psi_1(1)>0$, то существует единственный корень $\varkappa=\varkappa_1$ функции $\Psi_1(\varkappa)$, соответствующий предельному

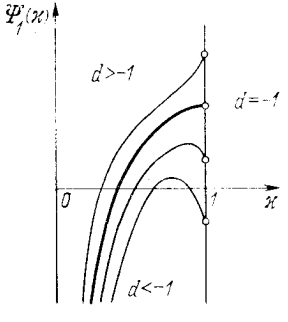


Рис. 142

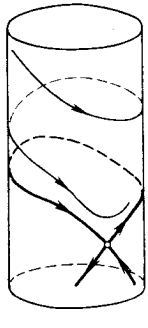


Рис. 143

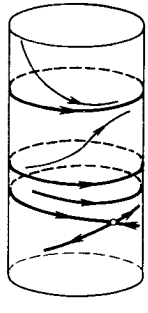


Рис. 144

циклу, охватывающему верхний фазовый полуцилиндр (устойчивому, так как $y\Psi_1'(\varkappa_1)>0$).

Если при этом $d-3<0$, то из (24) следует, что при возрастании λ_0 значение $\Psi_1(1)$ может стать отрицательным, и тогда функция $\Psi_1(\varkappa)$ корней иметь не будет. Значениям параметров,

при которых $\Psi_1(1)=0$, соответствует стягивание устойчивого предельного цикла к петле сепаратрисы седла, охватывающей верхний фазовый полуцилиндр (рис. 143).

Если $d+1<0$ (и, следовательно, $d-3<0$), то при $\Psi_1(1)>0$ опять существует единственный корень $\Psi_1(\varkappa)$, но теперь функция $\Psi_1(\varkappa)$ имеет один максимум и при перемене знака $\Psi_1(1)$ (при возрастании λ_0) из точки $\varkappa=1$ появляется второй корень функции $\Psi_1(\varkappa)$, соответствующий неустойчивому предельному циклу на верхнем фазовом полуцилиндре.

На верхнем фазовом полуцилиндре будет два предельных цикла (рис. 144).

При дальнейшем возрастании λ эти циклы сближаются, сливаются в двойной (полуустойчивый) и затем исчезают.

Бифуркационная кривая, соответствующая существованию двойного цикла, определяется условиями

$$\Psi_1'(\varkappa)=0, \quad \Psi_1(\varkappa)=0,$$

или в параметрическом виде

$$d=-\varkappa^2 F/\Phi_1, \quad \lambda_0=2\pi\gamma_0/\Phi_0, \tag{29}$$

где Φ_0 и Φ_1 — то же, что в (13) и (17).

Нетрудно обнаружить, что бифуркационная кривая двойных циклов (28) при $\varkappa\to 0$ уходит в бесконечность (прямая $\lambda_0=0$ будет асимптотой), а при $\varkappa\to 1$ имеет предельную точку $d=-1$, $\lambda_0=3\pi\gamma_0/16$, расположенную на бифуркационной кривой петель сепаратрис

$$\Psi_1(1)\equiv 2\pi\gamma_0+\frac{8}{3}\lambda_0(d-3)=0. \tag{30}$$

2. Бифуркации, связанные с поведением функции $\Psi_2(\varkappa)$. Для $\Psi_2(\varkappa)$ из (13) имеем

$$\Psi_2(0)=+\infty, \tag{31}$$

$$\Psi_2(1)=2\pi\gamma_0-(8/3)\lambda_0(d-3). \tag{32}$$

Из (16) видно, что $\Psi_2'(\varkappa)$ отличается от $\Psi_1'(\varkappa)$ только знаком. Поэтому в силу (26) будет

$$\Psi_2'(\varkappa)=+\infty \text{ при } d+1<0.$$

Кривая $\Psi_2(\varkappa)$ будет иметь экстремум (минимум) лишь для отрицательных значений d, но из (13) непосредственно обнаруживается, что в этом случае $\Psi_2(\varkappa)$ обращаться в нуль не может, так как квадратная скобка в (13) положительна (приложение III).

Функция $\Psi_2(\varkappa)$ будет иметь единственный корень, соответствующий устойчивому предельному циклу, охватывающему

нижний фазовый полуцилиндр, если $\Psi_2(1)<0$. Из условия $\Psi_2(1)<0$ вытекает, что $d-3>0$ и, следовательно, выражение (33) при убывании λ может менять знак. Обращению в нуль величины $\Psi_2(1)$ при убывании λ соответствует стягивание устойчивого предельного цикла к сепаратрисе седла, охватывающей нижний фазовый полуцилиндр (рис. 145).

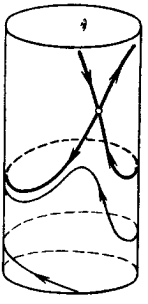


Рис. 145

3. Бифуркации, связанные с поведением функции $\Psi_3(\varkappa)$. Перейдем теперь к рассмотрению предельных циклов, рождающихся на кривых центра. Из (15) непосредственно обнаруживается, что при $d<0$ функция $\Psi_3(\varkappa)$ обращаться в нуль не может, так как выражение в квадратных скобках в (15) положительно (приложения I и IV). По критерию Бендиксона при $0<d<1$ циклов нет $(P'_\varphi+Q'_y\neq 0)$, поэтому $\Psi_3(\varkappa)$ при $0<d<1$ корней также не имеет. Проследим поведение $\Psi_3(\varkappa)$ при $d\geqslant 1$.

Из (15), (19) и (20) получаем

$$\Psi_3(0)=0,\quad \Psi_3(1)=\frac{16}{3}\lambda(d-3), \tag{33}$$

$$\Psi'_3(0)=0,\quad \Psi'_3(1)=-\infty, \tag{34}$$

$$\Psi''_3(0)=8\pi\lambda(d-1). \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует, что при любых положительных $d>1$ у кривой $\Psi_3(\varkappa)$ в интервале $0<\varkappa<1$ существует по крайней мере один экстремум. Нетрудно убедиться, что экстремум (максимум) может быть только один. Мы будем иметь, очевидно, $\Psi'_3(\varkappa_0)=0$, если $\varkappa_0$ такое, что обращается в нуль выражение в квадратной скобке в (19), т. е. если

$$d=\frac{F}{2E-F}>1. \tag{36}$$

Нетрудно видеть, что при условии (36) будет

$$\Psi''_3(\varkappa_0)=\frac{16\lambda_0}{1-\varkappa_0^2}\cdot\frac{2}{2E-F}\cdot\left[2\left(1-\varkappa_0^2\right)EF-\left(1-\varkappa_0^2\right)F^2-E^2\right]<0,$$

так как квадратная скобка знака не меняет (дискриминант отрицателен) и $2E-F>0$.

Так как $\Psi''_3(\varkappa_0)<0$, то экстремум кривой $\Psi_3(\varkappa)$ является максимумом.

Вид кривой при различных d приведен на рис. 146. При $d>3$ кривая не пересекает ось $\varkappa$ — циклов нет. При $d=3$ будет $\Psi_3(1)=0$, $\Psi'_3(1)=-\infty$ — это соответствует возникновению предельного цикла, охватывающего состояние равновесия. При

$1 < d < 3$ кривая $\Psi_3(\varkappa)$ имеет единственную точку пересечения с осью $\varkappa$ и в ней $\Psi_3'(\varkappa) < 0$. Существует единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия. При $d = 1$ производная $\Psi_3''(0)$ обращается в нуль. Это соответствует стягиванию (при убывании d) предельного цикла к состоянию равновесия. При $d < 1$ циклов нет.

Бифуркационные кривые и разбиение пространства параметров λ_0, d (при фиксированном γ_0) на области с различным распределением корней функций Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 представлено на

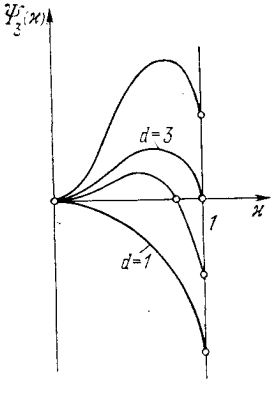


Рис. 146

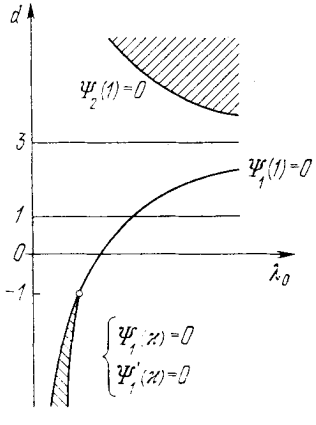


Рис. 147

рис. 147. Штриховкой покрыты области, соответствующие существованию двух предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр. Узкой заштрихованной области внизу рисунка соответствует структура с двумя предельными циклами на верхнем фазовом полуцилиндре (с двумя корнями функции $\Psi_1(\varkappa) = 0$).

Проведенное в рассматриваемой задаче методом Понтрягина полное качественное исследование справедливо, конечно, лишь для достаточно малых μ, причем никакой оценки величины μ мы получить не можем.

Приложение I. Для $\Phi_1(\varkappa) \equiv (2 - \varkappa^2)F - 2E$ имеем

$$\Phi_1'(\varkappa) = \frac{\varkappa}{1-\varkappa^2}\,[E - (1-\varkappa^2)\,F] \equiv \frac{\varkappa}{1-\varkappa^2}\,\Phi^*(\varkappa) \text{ и } \Phi^{*\prime}(\varkappa) = \varkappa F \geqslant 0.$$

Так как $\Phi^*(0) = 0$ и $\Phi^{*\prime}(\varkappa) \geqslant 0$, то $\Phi^*(\varkappa) \geqslant 0$ $\left(\text{и } \Phi_1'(\varkappa) \geqslant 0\right)$, но так как $\Phi_1(0) = 0$ и $\Phi_1'(\varkappa) \geqslant 0$, то $\Phi(\varkappa) \geqslant 0$.

Приложение II. Обозначим $\Phi_2 \equiv E^2 - (1-\varkappa^2)F^2$. Так как $\Phi_2'(\varkappa) = \frac{2}{\varkappa}(F-E)^2 \geqslant 0$ и $\Phi_2(0) = 0$, то $\Phi_2(\varkappa) \geqslant 0$.

Приложение III. Обозначим $\Phi_3 \equiv 2(\varkappa^2-1)F+(2-\varkappa^2)E$. Так как $\Phi_3'(\varkappa)=3\varkappa(F-E)\geqslant 0$ и $\Phi_3(0)=0$, то $\Phi_3'(\varkappa)\geqslant 0$.

Приложение IV. Обозначим $\Phi_4 \equiv (1-\varkappa^2)F+(2\varkappa^2-1)E$, имеем

$$\Phi_4'(\varkappa)=3\varkappa(2E-F),\quad \Phi_4''(\varkappa)=6(2E-F)-\frac{3E}{1-\varkappa^2}.$$

Функция $\Phi_4(\varkappa)$ принимает на концах интервала $0\leqslant\varkappa\leqslant 1$ значения 0 и 1 и имеет внутри интервала единственный максимум $\Phi_4(\varkappa_0)=E(\varkappa_0)>1$. Следовательно, $\Phi_4(\varkappa)\geqslant 0$.

§ 3. Исследование методом Понтрягина с привлечением вычислительных методов.

Пример 1 (нелинейная система частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях)[1]. Рассмотрим еще один случай, когда эта система приводится к виду

$$\frac{d\varphi}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\sin\varphi+\mu\left[1-k\left(1+\frac{2MN}{N^2+y^2}\right)y\right]. \tag{1}$$

В рассматриваемом случае консервативная система, к которой близка рассматриваемая, та же, что и в примерах 2, 3 § 2, т. е. (см. рис. 138, *а*)

$$H(\varphi,y)=\frac{y^2}{2}-\cos\varphi=h. \tag{2}$$

Функция Понтрягина в этом случае имеет вид

$$\psi(h)=2\int_0^{\pi}\left(1-k\frac{2MN}{N^2+y^2}\,y\right)d\varphi-2\int_0^{\pi}ky\,d\varphi,$$

где y, очевидно, определяется из уравнения (2).

Выражение для функции $\psi(h)$ после некоторых преобразований можно записать через эллиптические интегралы, полагая $\varkappa^2=2/(h+1)$ в виде[2]

$$\psi(h)=\Psi(\varkappa)=2\pi-\frac{8k}{\varkappa}E(\varkappa)-4MNk\varkappa\left[F(\varkappa)-\frac{N^2\varkappa^2}{4+N^2\varkappa^2}\,\pi(\varkappa)\right]. \tag{3}$$

Здесь F и E, как и выше,— полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $\pi(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода. Полученное выражение для $\psi(h)$ сложно, и его аналитическое исследование затруднительно. Мы приведем здесь лишь данные в [136] результаты просчета на ЭВМ функции $\psi(h)$

[1]) См. [136].

[2]) Здесь по сравнению со статьей [136] изменены обозначения.

по формуле (3) при некоторых фиксированных значениях параметров M, N и k.

На рис. 148 в плоскости (ψ, h) представлены кривые $\psi = \psi(h)$, просчитанные при $N = 1$ соответственно для:

а) $M = 10$ (штриховая линия);

б) $M = 7$ (сплошная линия);

в) $M = 1$ (штрихпунктирная линия).

Значения k, при которых проводился счет, указаны на рис. 148. Из рассмотрения графиков кривых, соответствующих $M = 10$ и $M = 7$, видно, что система (1) при малых k имеет один устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр (в верхней части цилиндра). При увеличении k кривая $\psi(h)$ сдвигается вниз и при некотором значении k касается оси $\varphi = 0$. Это, очевидно, означает, что из уплотнения траекторий появляется полуустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, который при дальнейшем увеличении k разделяется на два — устойчивый (нижний) и неустойчивый (верхний). Для значения $M = 10$ при дальнейшем увеличении k устойчивый цикл влипает в петлю сепаратрисы, охватывающей цилиндр (это происходит, когда левый конец кривой $\psi(h)$ лежит на оси $\psi = 0$), а затем оставшийся неустойчивый предельный цикл сливается с устойчивым и этот двукратный цикл затем исчезает (это имеет место, когда максимум кривой $\psi = \psi(h)$ попадает на ось $\psi = 0$). При $M = 7$ сначала самый верхний устойчивый цикл сливается с неустойчивым, получившийся двукратный цикл исчезает, а затем, при дальнейшем возрастании k, оставшийся устойчивый цикл влипает в сепаратрису. При $M = 1$ и малых k имеется устойчивый предельный цикл, который при увеличении k влипает в сепаратрису (охватывающую цилиндр). При достаточно больших k во всех рассмотренных случаях система (1) не имеет циклов, охватывающих цилиндр.

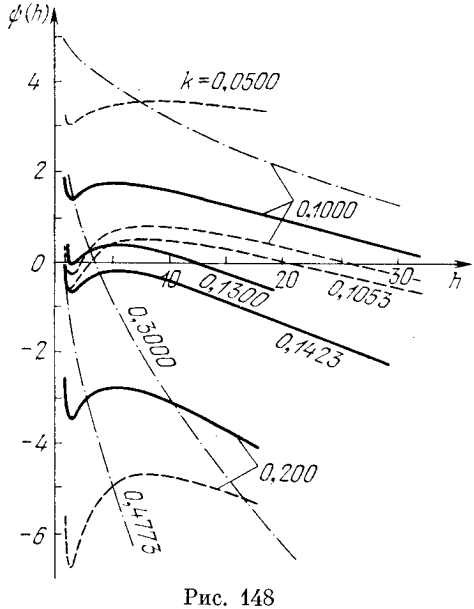


Рис. 148

Из наличия указанных бифуркаций очевидно, что в рассматриваемой задаче в пространстве параметров заведомо существуют

три бифуркационные поверхности: две — соответствующие двукратным циклам (охватывающим цилиндр) и одна — сепаратрисе, идущей из седла в седло.

Пример 2 (исследование уравнения движения самолета методом Понтрягина [33]). Введем в уравнения движения самолета (см. § 3 гл. 14) новое переменное $y = \sqrt{\rho}$ и малое μ, полагая

$$\lambda = \mu k.$$

Тогда система (1) § 3 гл. 14 может быть записана в виде

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= y^2 - \cos\varphi = \partial H/\partial y, \\ dy/dt &= -y\sin\varphi + \mu(k - y^2)y = -\partial H/\partial\varphi + \mu f(y), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$H(\varphi, y) = y^3/3 - y\cos\varphi = h, \tag{5}$$

т. е. при $\mu = 0$ мы получаем консервативную систему.

По смыслу задачи рассматриваются лишь значения $y > 0$. Траектории этой системы изображены на рис. 149. Замкнутым кривым, охватывающим состояние равновесия, соответствуют значения $h < 0$, а охватывающим цилиндр — значения $h > 0$.

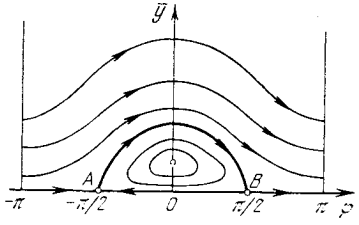


Рис. 149

Самому состоянию равновесия типа центра соответствует значение $h = -2/3$. В точках $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$ — седла.

При $\mu \neq 0$ в точках $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$ — по-прежнему седла, и среди сепаратрис этих седел, как и при $\mu = 0$, есть части оси $y = 0$. Кроме того, в этом случае, очевидно, существует еще одно состояние равновесия, координаты которого y_3, φ_3 удовлетворяют соотношениям $(y \neq 0)$

$$y^2 - \cos\varphi = 0, \quad -\sin\varphi + \mu(k - \cos\varphi) = 0. \tag{6}$$

Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{2\mu^2 k \pm \sqrt{4\mu^4 k^2 - 4(\mu^2 k^2 - 1)(\mu^2 + 1)}}{2(1 + \mu)^2}. \tag{7}$$

Так как $\cos\varphi_3 = y_3^2 > 0$, то, очевидно, в выражении (7) мы должны взять знак + перед корнем (при малых μ будет $\mu^2 k^2 - 1 < 0$ и подкоренное выражение больше $4\mu^4 k^2$). Таким образом, после элементарных преобразований мы получаем для третьего состояния равновесия $O_3(\varphi_3, y_3)$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\mu^2 k + \sqrt{\mu^2(1 - k^2) + 1}}{\mu^2 + 1}. \tag{8}$$

В силу того, что при $\mu = 0$ состояние равновесия O_3 — центр, т. е. для него $\Delta > 0$, $\sigma = 0$, то, очевидно, и при достаточно малых μ для состояния O_3 будет $\Delta > 0$, т. е. O_3 — фокус.

Отметим еще, что для значений параметра, при которых сепаратриса идет из седла в седло, одновременно образуется два замкнутых контура из сепаратрис (среди которых есть части оси φ): контур, охватывающий состояние равновесия, и контур, охватывающий цилиндр. От первого из этих контуров может появиться предельный цикл, охватывающий состояние равновесия, а из второго — охватывающий цилиндр.

В согласии с методом Понтрягина для решения вопроса о циклах, охватывающих состояние равновесия, рассматриваем функцию

$$\psi_1(h, k) = \int\int (p'_\varphi + q'_y)\, d\varphi\, dy = \int\int (k - 3y^2)\, d\varphi\, dy, \qquad (9)$$

где двойной интеграл распространен на площадь, ограниченную кривой $H(\varphi, y) = h$ при $-2/3 < h < 0$.

Для решения вопроса о циклах, охватывающих фазовый цилиндр, рассматриваем выражение

$$\psi_2(h, k) = \int_{-\pi}^{+\pi} y\,(k - y^2)\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} y\,(k - y^2)\, d\varphi, \qquad (10)$$

где y определяется из уравнения $H(\varphi, y) = h$ (см. гл. 12) при $h > 0$.

Функции $\psi_1(h, k)$ и $\psi_2(h, k)$ мы доопределим по непрерывности до значения $h = 0$, соответствующего сепаратрисе (консервативной системы), и доопределенную таким образом функцию будем обозначать через $\psi(h, k)$. Все дальнейшее посвящено изучению возможного характера функции $\psi(h, k)$ при разных k.

Мы можем записать выражения для $\psi_1(h, k)$ и $\psi_2(h, k)$ в одинаковом виде.

Действительно, так как из (5)

$$\varphi = \arccos \frac{y^3 - 3h}{3y},$$

то, очевидно, мы имеем, как нетрудно видеть,

$$\psi_1(h, k) = 2\int_{e_2(h)}^{e_1(h)} (k - 3y^2) \arccos \frac{y^3 - 3h}{3y}\, dy, \qquad (11)$$

где $e_1(h)$ и $e_2(h)$ — корни уравнения

$$y^3 - 3y = 3h, \quad -2/3 \leqslant h < 0$$

(при этом $1 \leqslant e_1 \leqslant \sqrt{3}$).

Геометрический смысл $e_1(h)$ и $e_2(h)$ $(-2/3 \leqslant h < 0)$ представлен на рис. 150.

Интегрируя стоящий в выражении (11) интеграл по частям, мы получим

$$\psi_1(h, k) = \left[2(k - y^2)\, y \arccos \frac{y^3 - 3h}{3y}\right]\Bigg|_{e_2}^{e_1} + 2\int_{e_2}^{e_1} \frac{(k - y^2)(2y^3 + 3h)}{\sqrt{9y^2 - (3h - y^3)^2}}\, dy.$$

Или

$$\psi_1(h, k) = 2\int_{e_2}^{e_1^*} \frac{(k - y^2)(2y^3 + 3h)}{\sqrt{9y^2 - (3h - y^3)^2}}\, dy. \tag{12}$$

К аналогичному виду преобразуется и выражение для $\psi_2(h_1, k)$.

Действительно, из (5) мы имеем

$$d\varphi = -\frac{2y^3 + 3h}{y\sqrt{9y^2 - (3h - y^3)^2}}\, dy.$$

Очевидно, получаем

$$\psi_2(h, k) = 2\int_{e_2^*}^{e_1} \frac{(k - y^2)(2y^3 + 3h)}{\sqrt{9y^2 - (3h - y^3)^2}}\, dy \tag{13}$$

(здесь e_1^* — положительный корень уравнения $y^3 - 3y = 3h$ $(e_1^* > \sqrt{3})$, а e_2^* — положительный корень уравнения $y^3 + 3y = 3h$,

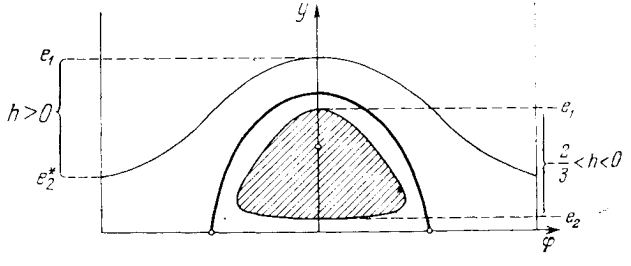


Рис. 150

которое получается, если в $H(\varphi, y) = h$ подставить $\varphi = \pi$). Зависимость корней e_1, e_2, e_2^* от h изображена на рис. 151. (Часть кривой $e_1(h)$ (начинающейся в точке A), лежащая слева от оси ординат, соответствует значениям h, $-2/3 < h < 0$, т. е. замкнутым кривым, охватывающим центр; часть этой кривой, лежащая справа от оси ординат, соответствует $h > 0$, т. е. кривым, охватывающим цилиндр (см. рис. 151).)

Подкоренное выражение в знаменателе, очевидно, может быть записано в виде

$$9y^2-(3h-y^3)^2=-(y^3-3y-3h)(y^3+3y-3h).$$

Так как пределы интегралов в (12) и в (13) являются корнями подкоренного выражения, то оба эти интегралы несобственные, но, очевидно, оба сходящиеся, так как они могут быть представлены в виде

$$\int_{e_2}^{e_1}\frac{(k-y^2)(2y^3+3h)}{\sqrt{(y-e_2)(e_1-y)G_1(y)}}\,dy$$

и соответственно

$$\int_{e_2^*}^{e_1}\frac{(k-y^2)(2y^3+3h)}{\sqrt{(y-e_2^*)(e_1-y)G_2(y)}}\,dy.$$

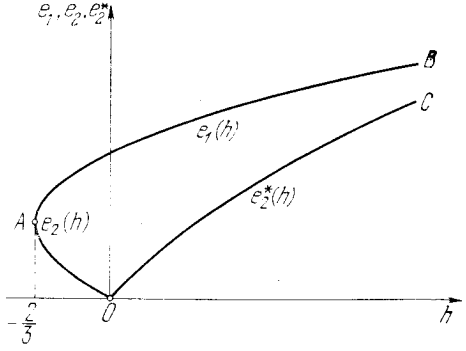


Рис. 151

Выражения для $\psi_1(h, k)$ и $\psi_2(h, k)$ отличаются только видом аналитической зависимости от h нижнего предела интеграла. Так как

$$e_2(0)=e_2^*(0)=0,$$

то равны предельные значения $\psi_1(h, k)$ и $\psi_2(h, k)$ при $h\to 0$, и мы можем рассматривать эти функции как значения одной и той же непрерывной функции $\psi(h, k)$, определенной для всех $h>-2/3$. Нетрудно найти значение $\psi(0, k)$: оно просто выражается через значение гамма-функции; так как $e_1(0)=\sqrt{3}$, $e_2(0)=0$, то находим из (12)

$$\psi(0,k)=4\int_0^{\sqrt{3}}\frac{y^2(k-y^2)}{\sqrt{9-y^4}}\,dy=$$

$$=4k\sqrt{3}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx-12\sqrt{3}\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=$$

$$=4\sqrt{3}\left[k\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)}{4\Gamma(5/4)}-3\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(5/4)}{4\Gamma(7/4)}\right]=4\pi\sqrt{6\pi}\left[\frac{k}{\Gamma^2(1/4)}-\frac{\Gamma^2(1/4)}{8\pi^2}\right] \tag{14}$$

Покажем теперь, что: 1) $\psi(-2/3, k)=0$ (независимо от k); 2) для любого k можно выбрать столь большое h, что $\psi(h, k)$ будет отрицательно.

При $h\to -2/3$ в (12) не только длина промежутка интегрирования e_1-e_2, но также числитель и знаменатель стремятся к

нулю. Преобразуем поэтому (12) с помощью подстановки $y = e_2 + (e_1 - e_2)\sin^2\Phi$, отображающей интервал $e_1 - e_2$ изменения y на интервал $(0, \pi/2)$ новой переменной Φ. Знаменатель в (12) можно представить в виде

$$9y^2 - (3h - y^3)^2 = (y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)(3h - 3y - y^3)$$

(e_3 — отрицательный корень уравнения $y^3 - 3y = 3h$). Поэтому

$$\lim_{h \to -2/3} \psi(h, k) = \lim_{h \to -2/3} \int_0^{\pi/2} \frac{4(k - y^2)(2y^3 + 3h)}{\sqrt{(y - e_3)(y^3 + 3y - 3h)}}\, d\Phi = 0.$$

Так как $e_2 < y < e_1$ и при $h \to -2/3$ и e_2, и e_1 стремятся к единице и знаменатель остается положительным, а $2y^3 + 3h \to 0$, то, следовательно, $\lim \psi(h, k) = 0$, если $h \to -2/3$.

Чтобы оценить значение $\psi(h, k)$ при больших h, обратимся к выражению (10)

$$\psi(h, k) = 2\int_0^{\pi} y(k - y^2)\, d\varphi$$

и заметим, что минимум кривой $y(\varphi)$ (см. рис. 150), определяемый в зависимости от h уравнением $y^3 + 3y = 3h$, неограниченно возрастает с возрастанием h (см. рис. 151). Таким образом, при фиксированном k для достаточно больших h подынтегральное выражение становится отрицательным, т. е. $\psi(h, k) < 0$.

Сопоставляя этот результат с выражением для $\psi(0, k)$, можем заключить, что для тех значений k, при которых $\psi(0, k) > 0$, всегда существует по крайней мере один положительный корень уравнения $\psi(h, k) = 0$.

Для более подробного изучения поведения $\psi(h, k)$ найдем $\psi'(h, k)$. Функцию $\psi(h, k)$ удобно для этого взять в виде

$$\psi(h, k) = 2\int_{e_2}^{e_1} (k - 3y^2) \arccos \frac{y^3 - 3h}{3y}\, dy.$$

Тогда получим [3])

$$\psi'(h, k) = 2(k - 3e_1^2) \arccos \frac{e_1^3 - 3h}{3e_1} \cdot \frac{de_1}{dh} -$$

$$- 2(k - 3e_2^2) \arccos \frac{e_2^3 - 3h}{3e_2} \cdot \frac{de_2}{dh} +$$

$$+ 6\int_{e_2}^{e_1} \frac{k - 3y^2}{\sqrt{9y^2 - (y^3 - 3h)^2}}\, dy = 6\int_{e_2}^{e_1} \frac{k - 3y^2}{\sqrt{9y^2 - (y^3 - 3h)^2}}\, dy. \quad (15)$$

[3]) h входит и в подынтегральное выражение, и в пределы интегрирования, поэтому нужно использовать соответствующую формулу дифференцирования интегралов по параметру.

Так как $e_1(h)$ и $e_2(h)$ — положительные корни уравнения $y^3 - 3y = 3h$ (которое получается, если в уравнение (5) подставить $\varphi = 0$), то, очевидно, находя производные de_1/dh и de_2/dh как производные от неявной функции, мы получим

$$\frac{de_1}{dh} = \frac{1}{e_1^2 - 1}, \qquad \frac{de_2}{dh} = \frac{1}{e_2^2 - 1}.$$

Эти выражения конечны для всех $h \neq -2/3$.

Выражение (15) дает значение $\psi'(h, k)$ для $-2/3 < h < 0$. Для $h > 0$ получаем, дифференцируя (10),

$$\psi'(h, k) = 2\int_0^{\pi} (k - 3y^2)\frac{dy}{dh}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \frac{k - 3y^2}{y^2 - \cos\varphi}\, d\varphi. \qquad (16)$$

Последнее выражение, разумеется, можно было бы преобразовать к виду, совершенно аналогичному (15) (с заменой только e_2 на e_2^*), переходя к переменной y.

Выражения (15) и (16) определяют $\psi'(h, k)$ в интервалах $-2/3 < h < 0$ и $h > 0$. Нетрудно показать, что для $k > 0$

$$\lim_{h \to +0} \psi'(h, k) = \lim_{h \to -0} \psi'(h, k) = +\infty; \qquad (17)$$

для $k < 0$

$$\lim_{h \to +0} \psi'(h, k) = \lim_{h \to -0} \psi'(h, k) = -\infty$$

и для $k = 0$

$$\lim_{h \to +0} \psi'(h, 0) = \lim_{h \to -0} \psi'(h, 0) = -9\pi/2.$$

Найдем также предельное значение $\psi'(h, k)$ при $h \to -2/3$. Преобразуя опять (16) подстановкой

$$y = e_2 + (e_1 - e_2)\sin^2\Phi$$

и замечая, что

$$e_1(-2/3) = e_2(-2/3) = 1$$

и, следовательно, $y(\Phi, -2/3) \equiv 1$, а также, что $e_3(-2/3) = -2$, получаем

$$\lim_{h \to -2/3} \psi'(h, k) = \lim 12 \int_0^{\pi/2} \frac{k - 3y^2}{\sqrt{(y - e_3)(y^2 + 3y - 3h)}}\, d\Phi = \pi\sqrt{2}(k - 3). \qquad (18)$$

Выражения (15)—(18) определяют $\psi'(h, k)$ при $k > 0$ как однозначную непрерывную функцию в интервалах

$$-2/3 \leqslant h < 0, \quad 0 < h < +\infty,$$

принимающую при малых h положительное значение.

Уравнение

$$\psi'(h,\ k)=0 \tag{19}$$

можно рассматривать как уравнение кривой в плоскости $(h,\ k)$. Разрешая уравнение (19) относительно k (что, очевидно, возможно, принимая во внимание выражение для $\psi'(h,\ k)$), будем на плоскости $(h,\ k)$ рассматривать эквивалентную (19) кривую

$$k=k(h). \tag{20}$$

Функция $k=k(h)$ определена для всех $h\geqslant -2/3$, за исключением $h=0$. Изучение поведения кривой $k=k(h)$ (или, что то же, кривой (19)) будет иметь для изучения поведения кривой $\psi(h,\ k)=0$ основное значение.

Воспользовавшись опять преобразованием

$$y=e_2+(e_1-e_2)\sin^2\Phi,$$

представим функцию $k=k(h)$ для значений h, $-2/3\leqslant h<0$, в виде

$$k=\frac{3\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{y^2\,d\Phi}{\sqrt{(y-e_3)(y^3+3y-3h)}}}{\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{d\Phi}{\sqrt{(y-e_3)(y^3+3y-3h)}}}, \tag{21}$$

а для $0<h<\infty$ в виде

$$k=\frac{3\int\limits_0^{\pi}\dfrac{y^2}{y^2-\cos\varphi}\,d\varphi}{\int\limits_0^{\pi}\dfrac{d\varphi}{y^2-\cos\varphi}}. \tag{22}$$

В обоих случаях $k\to 0$ при $h\to 0$, но точка $(k=0,\ h=0)$ не принадлежит кривой $k=k(h)$ (предельные значения $\psi'(0,\ k)$ при перемене знака k переходят от $+\infty$ к $-\infty$, проходя через значение $-9\pi/2$).

Для дальнейшего исследования привлечено численное интегрирование.

Численным интегрированием устанавливается[4]), что функция $k=k(h)$, определенная формулой (21), есть монотонная (убывающая) функция при значениях $-2/3\leqslant h<0$.

---

[4]) Очевидно, что при этом делается соответствующее допущение, что увеличение точности счета не изменит сделанные выводы.

Для значений $h>0$ из выражения (21) численным интегрированием устанавливается монотонный характер функции $k(h)$ для тех значений h, при которых $k<3$.

Монотонный характер возрастания $k(h)$ при тех значениях h, при которых $k\geqslant 3$, следует из выражения для dk/dh. Именно, после надлежащих вычислений можно получить следующее выражение для dk/dh:

$$\frac{dk}{dh}=\frac{\int\limits_0^{\pi}\frac{2y\,(k-3\cos\varphi)}{(y^2-\cos\varphi)^3}\,d\varphi}{\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{y^2-\cos\varphi}}.$$

Это выражение заведомо положительно для $k\geqslant 3$, так как для $h>0$ будет $y^2-\cos\varphi>0$.

График кривой $k=k(h)$ представлен на рис. 152. Уравнения (21) и (22) дают для каждого $h=h_0$ то значение $k=k_0$, которому соответствует кривая $\psi=\psi(h,\ k_0)$ в плоскости $(\psi,\ h)$, имеющая экстремум при $h=h_0$. Так как $k=k(h)$ — монотонная функция в каждом из интервалов $-2/3\leqslant h<0$ и $0<h<\infty$, то, очевидно, для каждого фиксированного $k=k_0$ кривая $\psi=\psi(h,\ k_0)$

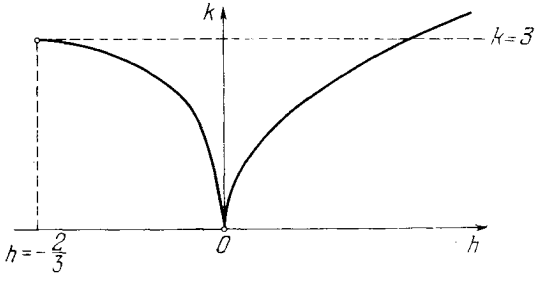


Рис. 152

в плоскости $(\psi,\ h)$ может иметь не более одного экстремума в каждом из интервалов (иначе различным h соответствовало бы одно значение k; это невозможно в силу монотонности $k(h)$). Рассмотрим возможные случаи поведения $\psi(h,\ k)$ для различных значений параметра.

1) $k=k_1>3$. Так как в этом случае $\psi'(-2/3,\ k_1)>0$ и $\psi(h,\ k_1)>0$ в интервале $-2/3<h<0$ (множитель $k-y^2$ в (12) положителен), то в этом интервале нет ни одного корня $\psi(h,\ k)$. Так как $\psi(0,\ k_1)>0$, а $\psi(h,\ k_1)$ для достаточно больших h отрицательно, всегда существует корень $\psi(h,\ k_1)$ в интервале $0<h<\infty$. Этот корень единственный, так как $\psi(h,\ k)$ может иметь здесь только один экстремум (максимум).

2) $\frac{\Gamma^4(1/4)}{8\pi^2} < k = k_2 < 3$. В этом случае $\psi'(-2/3,\ k_2) < 0$, $\psi(0,\ k_2) > 0$. В интегвале $-2/3 < h < 0$ функция $\psi(h,\ k_2)$ имеет один экстремум (минимум), в интервале $0 < h < \infty$ функция $\psi(h,\ k_2)$ имеет один экстремум (максимум). В каждом из интервалов $\psi(h,\ k_2)$ имеет по одному корню.

3) $k^* < k = k_3 < \frac{\Gamma^4(1/4)}{8\pi^2}$ (k^* «достаточно близко» к значению $\frac{\Gamma^4(1/4)}{8\pi^2}$). Здесь опять $\psi'(-2/3,\ k_3) < 0$, но $\psi(0,\ k_3) < 0$ и $\psi'(h,\ k_3) > 0$ для достаточно малых h. В интервале $-2/3 < h < 0$ функция $\psi(h,\ k_3)$ не имеет корней. Если k_3 лежит достаточно близко к значению $\frac{1}{8\pi^2}\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)$, при котором $\psi(h,\ k)$ проходит через начало координат, то кривая $\psi(h,\ k_3)$ должна пересекать для положительных h ось h. Так как для достаточно больших h будет $\psi(h,\ k_3) < 0$, то должен существовать и второй корень функции $\psi(h,\ k_3)$. Таким образом, в интервале $0 < h < \infty$ функция $\psi(h,\ k_3)$ имеет два корня (не может быть более двух корней, так как $\psi(h,\ k_3)$ имеет один экстремум).

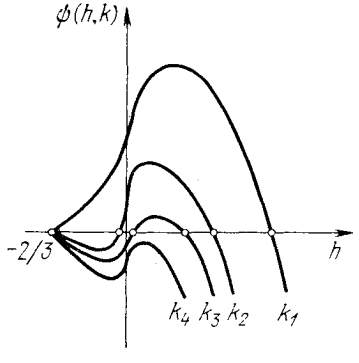


Рис. 153

4) $0 < k = k_4 < k^*$. В интервале $-2/3 < h < 0$ опять нет корней. В интервале $0 < h < \infty$ также их нет, так как по самому определению величины k^* только для значений $k > k^*$ кривая $\psi(h,\ k)$, пересекающая ось ψ в точке с отрицательной ординатой, пересекает далее ось h. Существование такого значения $k = k^*$ следует из того, что для $k \leqslant 0$ будет $\psi'(-2/3,\ k) < 0$, $\psi(0,\ k) < 0$, $\psi'(h,\ k) < 0$ для малых h и $\psi(h,\ k)$ не имеет действительных корней [5]).

Рассмотренные случаи поведения $\psi(h,\ k)$ изображены на рис. 153. Из выражений (9) и (10) следует также, что $d\psi/dk > 0$ для всех k, отличных от нуля. Отсюда следует, что $\psi(h,\ k)$ образует для $k \neq 0$ в плоскости $(\psi,\ h)$ семейство непересекающихся кривых, непрерывно зависящих от параметра k. Это обстоятельство позволяет легко проследить зависимость корней $\psi(h,\ k)$.

Для $k > 3$ существует единственный положительный корень $\psi(h,\ k)$. С убыванием k этот корень убывает.

---

[5]) Значение k^*, очевидно, может быть вычислено из условий $\psi(h,\ k) = 0$, $\psi'(h,\ k) = 0$.

При $k=3$ ось h становится касательной к кривой $\psi(h, k)$ в точке $h=-2/3$ ($\psi'(-2/3, 3)=0$), и при дальнейшем убывании k от корня $h=-2/3$ отделяется корень, возрастающий с убыванием k. Этот корень с убыванием k продолжает дальше возрастать, проходит при $k=\frac{1}{8\pi^2}\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)$ через значение $h=0$ и затем становится положительным. При $k=k^*$ для положительного $h=h^*$ оба положительных корня сливаются и при дальнейшем убывании k исчезают.

Отрицательные корни $h=h_0$ соответствуют неустойчивым предельным циклам, охватывающим состояние равновесия (так как, как легко убедиться, для них $\psi'(h_0, k)>0$).

Положительные корни соответствуют предельным циклам, охватывающим цилиндр. Легко убедиться, что меньший корень соответствует неустойчивому, а больший — устойчивому предельному циклу (это обстоятельство вполне наглядно отражено на рис. 153). Для меньшего корня $\psi'(h, k)>0$, для большего $\psi'(h, k)<0$.

Корень $h=0$ соответствует влипанию предельного цикла в сепаратрису, идущую из седла в седло. При этом значении h происходит превращение цикла, охватывающего состояние равновесия, в предельный цикл, охватывающий цилиндр.

Слияние положительных корней при $h=h^*$ соответствует слиянию устойчивого и неустойчивого циклов в один полуустойчивый предельный цикл.

На основании проведенного рассмотрения мы можем сделать следующее заключение о возможной качественной структуре разбиения на траектории.

а) Состояния равновесия. При $\mu\neq 0$, но достаточно малом, состояния равновесия в точках $(-\pi/2, 0)$ и $(\pi/2, 0)$ остаются простыми седлами. Состояние равновесия в точке $(0, 1)$ превращается в фокус — устойчивый, если $k<3$, неустойчивый, если $k>3$.

б) Поведение сепаратрис. Сепаратрисы, связанные с седлами в точках $(-\pi/2, 0)$ и $(\pi/2, 0)$, могут идти из седла в седло только при значении параметра k, соответствующем «влипанию» предельного цикла в сепаратрису; в других случаях сепаратрисы могут иметь своими предельными точками либо состояние равновесия $(0, 1)$, либо предельные циклы, либо могут уходить в бесконечность. Поведение сепаратрис однозначно определяется характером и распределением циклов.

в) Предельные циклы. Поведение предельных циклов определяется поведением корней функций $\psi(h, k)$ в зависимости от k (напомним, что $k=\lambda/\mu$, где λ пропорционально тяге пропеллера, а μ — коэффициенту лобового сопротивления).

На рис. 154, *1—7* изображены возможные случаи разбиения фазового пространства на траектории. Рис. 154, *1* соответствует

случаю $\mu = 0$ (отсутствует лобовое сопротивление и тяга пропеллера). Последовательность рисунков от *2* до *7* соответствует последовательной смене качественных структур разбиения цилиндра на траектории при возрастании параметра k от нуля до

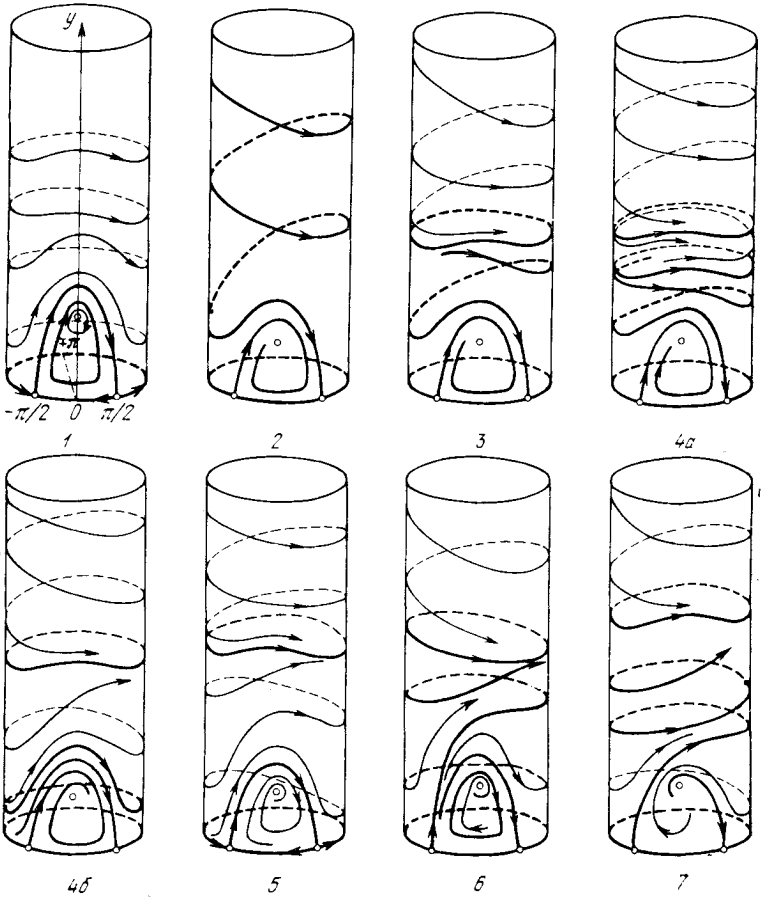


Рис. 154

∞ (рис. *4а* и *4б* топологически эквивалентны; рис. *4б* иллюстрирует превращение рис. *4а* в рис. *5*), т. е. при различных соотношениях между величиной силы тяги пропеллера и лобового сопротивления. Заметим еще, что все рисунки для наглядности даны со значительным количественным искажением масштаба. Точки $+\pi/2$ и $-\pi/2$ нарисованы схематично.

ГЛАВА 16

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИЕМОВ, ОПИРАЮЩИХСЯ НА ТЕОРИЮ БИФУРКАЦИЙ

§ 1. Квадратичное дифференциальное уравнение.

1. Оценки сверху числа предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра. Квадратичная система общего вида при наличии в начале координат фокуса или центра всегда может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \lambda_1 x - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5) xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} &= x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4) xy - \lambda_2 y^2. \end{aligned} \tag{A}$$

Решение вопроса о числе предельных циклов, появляющихся из состояния равновесия в системе (A), зависит от структуры коэффициентов функции последования в окрестности состояния равновесия и требует знания всех условий центра.

Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, переходим в системе (A) к полярным координатам и ищем решение системы в виде ряда по степеням начального значения ρ_0. Отрезок прямой $\varphi = 0$ для всех достаточно малых ρ будет отрезком без контакта для траекторий системы. Полагая в найденном решении $\varphi = 2\pi$, получим на некотором достаточно малом отрезке $\varphi = 0$, $0 \leqslant \rho_0 \leqslant z$ функцию последования

$$\rho = \rho_0 u_1(2\pi, \lambda_i) + \rho_0^2 u_2(2\pi, \lambda_i) + \ldots + \rho_0^k u_k(2\pi, \lambda_i) + \ldots \tag{1}$$

Коэффициенты функции последования, как следует из их построения, есть целые функции параметров λ_i, обращающиеся в однородные многочлены при $\lambda_1 = 0$. Для систем (A) известны все случаи центра (см. [147, 68*, 67*, 14*]), и они могут быть получены из условий обращения в нуль первых семи коэффициентов функции последования (трех последовательных ляпуновских величин):

$$\alpha_3 = -\frac{\pi}{4} \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6),$$

$$\alpha_5 = \frac{\pi}{24} \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6),$$

$$\alpha_7 = -\frac{5\pi}{32} (\lambda_3 - \lambda_6)^2 (\lambda_3 \lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2).$$

Так как значения λ_i, удовлетворяющие условиям $\lambda_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = 0$, должны обращать в нуль и функции $u_k(2\pi, \lambda_i)$ при $k > 7$, то u_k можно представить в виде

$$u_k(2\pi, \lambda_i) = \lambda_1\theta_k^{(1)} + \alpha_3\theta_k^{(3)} + \alpha_5\theta_k^{(5)} + \\ + \lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2)\theta_k.$$

Отметим, что в выражение для α_7 множитель $(\lambda_3 - \lambda_6)$ входит в квадрате. Можно показать, что θ_k для любого $k > 7$ содержит множитель $(\lambda_3 - \lambda_6)$ [...]. Это позволяет ввести в выражение для $u_k(2\pi, \lambda_i)$ третью ляпуновскую величину α_7 и представить функцию последования (1) в виде

$$\rho - \rho_0 = \rho_0(2\pi\lambda_1\psi_1 + \alpha_3\psi_3\rho_0^2 + \alpha_5\psi_5\rho_0^4 + \alpha_7\psi_7\rho_0^6), \qquad (2)$$

где ψ_j — ряды по степеням ρ_0 с коэффициентами в виде целых функций параметров λ_i и такие, что

$$\psi_1(\lambda_{i,0}) = 1 + \lambda_1\varphi(\lambda_1), \quad \psi_j(\lambda_i, 0) = 1, \quad j \neq 1.$$

В достаточно малой окрестности начала координат положительные простые корни уравнения

$$2\pi\lambda_1 + \alpha_3\rho^2 + \alpha_5\rho^4 + \alpha_7\rho^6 = 0 \qquad (3)$$

с любой точностью аппроксимируют корни (2) при $\rho = \rho_0$.

Рассматривая (2) и (3), нетрудно увидеть, что в окрестности состояния равновесия (вблизи границы области устойчивости) в зависимости от знаков ляпуновских величин может быть не более трех предельных циклов [14, 69]. Особенности в поведении системы (A) вблизи тех точек границы области устойчивости, где обращаются в нуль первая и вторая ляпуновские величины, определяются знаком третьей ляпуновской величины α_7. В возможностях, которые здесь возникают, можно ориентироваться, рассматривая функцию последования (2) и уравнение (3).

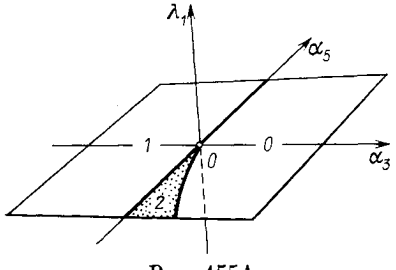


Рис. 155А

На рис. 155А для $\alpha_7 > 0$ представлена окрестность точки пространства параметров, в которой выполняются условия $\lambda_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$. Область устойчивости состояния равновесия в начале координат располагается снизу от плоскости $\lambda_1 = 0$. Граница области устойчивости $\lambda_1 = 0$ разбивается на куски, помеченные на рисунке цифрами *0*, *1*, *2*, соответственно числу предельных циклов в окрестности состояния равновесия при значениях

параметров на границе области устойчивости. Эти куски выделяются условиями:

0) $\alpha_5 \geqslant 0$ или $\alpha_5 < 0$, $\alpha_3 > f(\alpha_5, \alpha_7)$;

1) $\alpha_3 < 0$ или $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 < 0$;

2) $\alpha_5 < 0$, $0 < \alpha_3 < f(\alpha_5, \alpha_7)$.

Функция $f(\alpha_5, \alpha_7)$ в окрестности значения $\alpha_5 = 0$ имеет асимптотическое представление

$$[4\psi_7(0, \alpha_7)]^{-1}\alpha_5^2 \equiv [4\alpha_7]^{-1}\alpha_5^2. \qquad (4)$$

В кусках *0* и *2* состояние равновесия неустойчиво, на куске *1* устойчиво.

При изменении λ_1 от значения $\lambda_1 = 0$ может появиться из состояния равновесия еще один предельный цикл: при возрастании λ_1 от значения λ_1, взятого на куске *1*, появляется устойчивый предельный цикл, при убывании λ_1 от значения $\lambda_1 = 0$, взя-

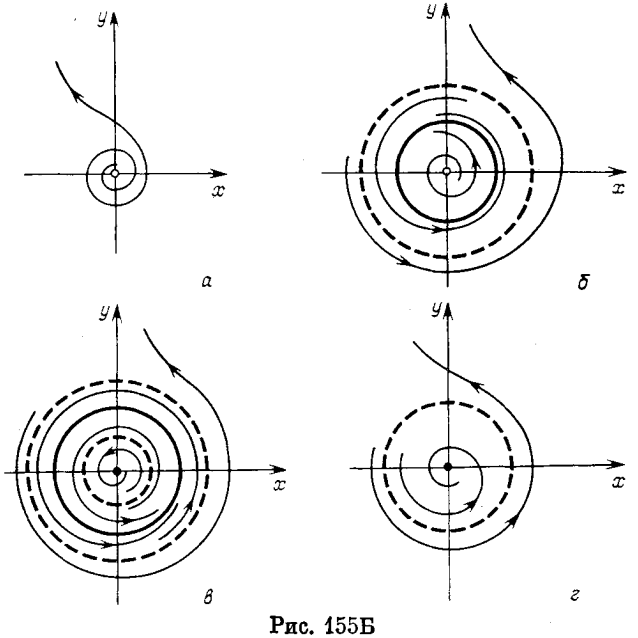


Рис. 155Б

того на кусках *0* или *2*,— неустойчивый. Возможные качественные структуры в окрестности состояния равновесия для случая $\alpha_7 > 0$ представлены на рис. 155Б.

На рис. 155В представлено для $\alpha_7 < 0$ разбиение границы области устойчивости $\lambda_1 = 0$ в окрестности точки $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$. Граница области устойчивости $\lambda_1 = 0$ разбивается на куски *0*, *1*, *2* соответственно числу предельных циклов в окрестности состояния равновесия, выделяемых условиями:

0) $\alpha_5 \leqslant 0$ или $\alpha_5 > 0$, $\alpha_3 < f(\alpha_5, \alpha_7)$;
1) $\alpha_3 > 0$ или $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 > 0$;
2) $\alpha_5 > 0$, $f(\alpha_5, \alpha_7) < \alpha_3 < 0$.

Функция $f(\alpha_5, \alpha_7)$ в окрестности значения $\alpha_5 = 0$ имеет асимптотическое представление (4). На кусках *0* и *2* состояние равновесия устойчиво, на куске *1* неустойчиво.

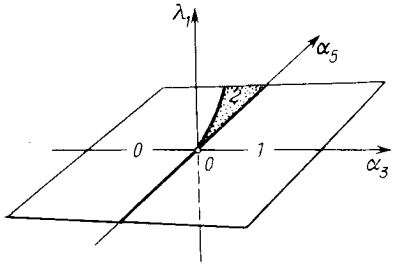


Рис. 155В

При убывании λ_1 от значения $\lambda_1 = 0$, взятого на куске *1*, появляется из состояния равновесия неустойчивый предельный цикл, при возрастании λ_1 от значения $\lambda_1 = 0$, взятого на кусках *0* или *2*, появляется цикл устойчивый. Возможные качественные структуры в окрестности состояния равновесия для случая $\alpha_7 < 0$ представлены на рис. 155Г.

2. Квадратичные системы с четырьмя предельными циклами. Примеры квадратичных систем с четырьмя предельными циклами

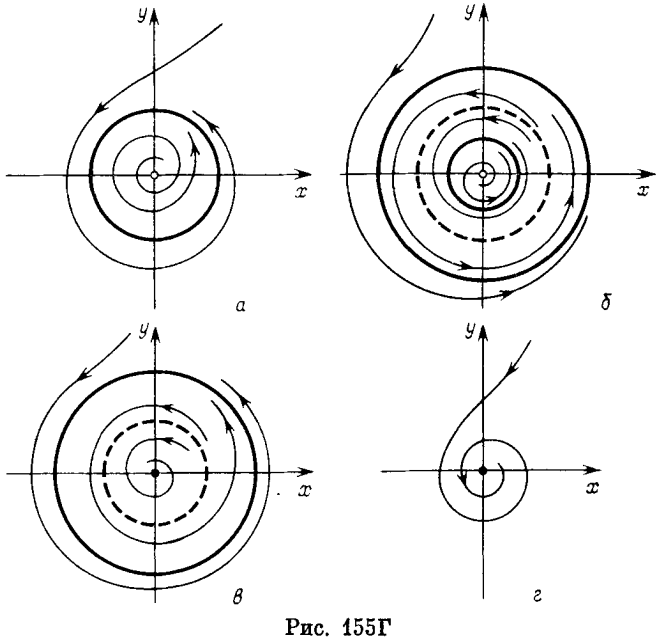


Рис. 155Г

были даны в работах [62, 66]. Топология этих систем одинакова: седло на экваторе сферы Пуанкаре и два простых фокуса на плоскости с распределением предельных циклов вокруг фокусов

3 и *1*. В подпространстве параметров системы, имеющей особую точку типа центр, могут быть выделены области, вблизи которых существуют квадратичные системы с четырьмя предельными циклами как с вышеописанной, так и с другой топологической структурой, содержащей два седла и узел на экваторе. Сепаратрисы одного из седел идут к предельным циклам с распределением *3* и *1* вокруг фокусов, сепаратриса другого седла идет к узлу на экваторе.

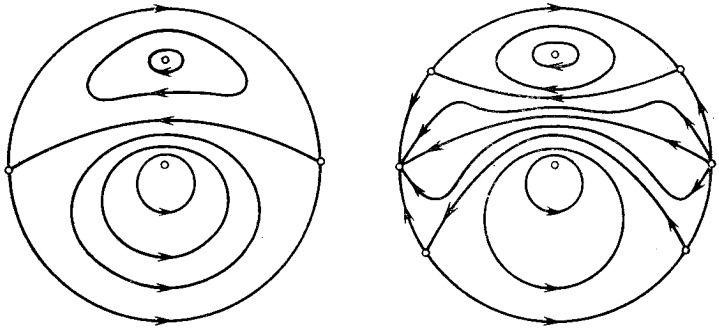
Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \lambda x + kx^2 + mxy + ny^2, \quad \dot{y} = x + ax^2 + bxy. \tag{5}$$

Пусть $\lambda = a = m = 0$; тогда система (5) в D_0, определяемом условиями

$$k(n+b) \geqslant 0, \quad n(n+b) < 0, \quad n(b-k) \leqslant 0, \tag{D_0}$$

имеет топологическую структуру с двумя состояниями равновесия на плоскости (x, y) (типа центр) в точках $(0, 0)$; $(0, 1/n)$ и одним седлом на экваторе сферы Пуанкаре (рис. 156А, *а*), сепаратрисой которого является интегральная прямая $by + 1 = 0$, от-



а $(b,k,n)\in D_0$ *б* $(b,k,n)\in D_1$

Рис. 156А

деляющая части полуплоскости (полусферы), заполненные замкнутыми кривыми.

В D_1, определяемом условиями

$$k(n+b) > 0, \quad n(n+b) < 0, \quad n(b-k) > 0, \tag{D_1}$$

топологическая структура отличается от структуры в D_0 состояниями равновесия на экваторе. В D_1 на экваторе два седла и узел (рис. 156А, *б*). Части полусферы, заполненные замкнутыми кривыми, отделяются в этом случае сепаратрисами, идущими из

седла в седло:

$$F(x, y) = \frac{n}{b-k}\left[y - \frac{b-k+n}{n(b-2k)}\right]^2 - x^2 = \frac{(k+n)(b-k+n)}{kn(b-2k)^2} = C_0. \tag{6}$$

Будем рассматривать систему (5) при условиях А:

$$\lambda = 0, \quad m(k+n) - a(2k+b) = 0, \quad a \neq 0, \quad m \neq 0$$

(в точке (0, 0) первая ляпуновская величина равна нулю).

Лемма 1. *Существует множество* $G \subset D_1$, *в каждой точке которого сепаратриса* (6) *является кривой без контакта для траекторий системы* (5) *при условиях* А.

Доказательство. Производная от $F(x, y)$ по t, взятая в силу уравнений (5) при условиях А, обращается в нуль на сепаратрисах (6) лишь в точках их пересечения с кривой

$$x^2\{(b-2k)[(n(k+n)-(2k+b)(b-k)]y + (k+n)(b-k+n)\} \equiv$$
$$\equiv x^2 l(y) = 0.$$

Гипербола (6) будет кривой без контакта, если прямая $l(y) = 0$ ее не пересекает (на $x^2 = 0$ контакт ложный). Это выполняется

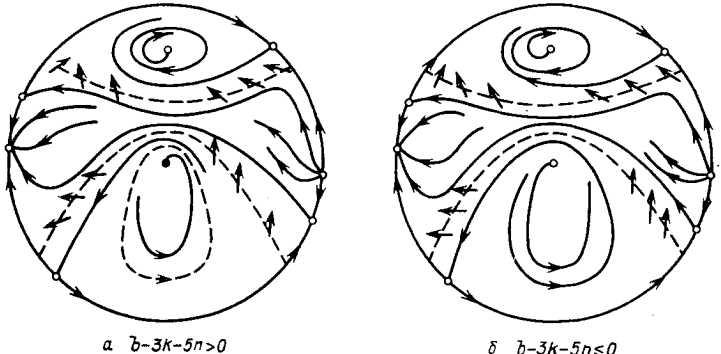


Рис. 156Б

при условиях $y_1(0) \leqslant y \leqslant y_2(0)$, где $l(y) = 0$, а $y_1(0)$, $y_2(0)$ — координаты вершин гиперболы. Одно из этих неравенств всегда выполняется, другое сводится к

$$(2k+b)(b-k)(6k^2+2n^2+4kn-b^2) - (k+n)^3 n \geqslant 0. \tag{7}$$

Множество G выделяется условиями (7) и $G \subset D_1$ (рис. 156В).

Лемма 2. *При условиях* А *существует положительная величина* $a_0(b, k, n)$ *такая, что при* $(b, k, n) \subset G$, $|a| < a_0$ *система* (5) *имеет хотя бы один предельный цикл вокруг точки* (0, 1/n), *а при*

дополнительном условии $n(b-3k-5n)>0$ — *еще хотя бы один цикл вокруг точки* (0, 0) *при наличии в обоих случаях на экваторе сферы Пуанкаре двух седел и узла.*

Доказательство вытекает из леммы 1 и теоремы Бенедиксона о существовании замкнутых траекторий, если учесть, что можно так выбирать a и n, что в область, содержащую простой неустойчивый фокус в точке $(0, 1/n)$, траектории системы только входят, а из области, содержащей устойчивый фокус второго порядка в точке (0, 0) при $(b-3k-5n)n\neq 0$, только выходят (рис. 156Б, *а*)).

При $b-3k-5n\to 0$ цикл, существующий вокруг точки (0, 0), стягивается к фокусу и состояние равновесия меняет устойчивость (рис. 156Б, *б*)).

Поведение сепаратрис, попавших в области, ограниченные дугами и ветвями гиперболы (6), определяется однозначно. Предельные циклы, окружающие фокусы, являются для этих сепаратрис соответственно ω- и α-предельными множествами. Для сепаратрис, не попавших в указанные области, существует несколько логических возможностей: они могут стремиться к узлу или седлу на экваторе, к фокусу или предельному циклу на плоскости. Однако при $|a|<a_0$ в силу близости к системе с особой точкой типа центр их предельным множеством может быть только узел на экваторе сферы Пуанкаре. При $|a|<a_0$ сохраняется топологическая структура, имеющая место при сколь угодно малых a.

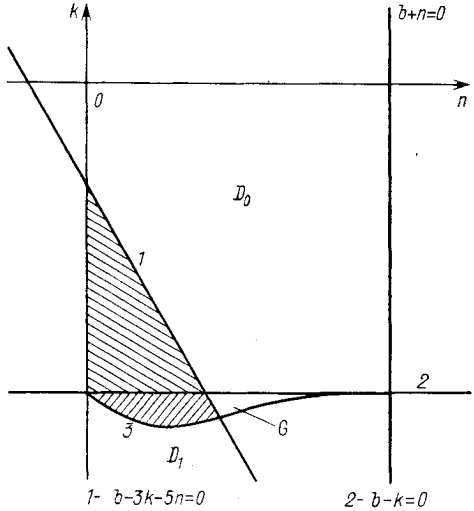


Рис. 156В

Теорема 1. *Если для системы* (5) *выполняются условия леммы* 2, *то существуют такие малые добавки к коэффициентам системы, разрушающие условия* A, *при которых измененная система имеет четыре предельных цикла при наличии на экваторе сферы Пуанкаре двух седел и узла.*

Доказательство. Так как в точке (0, 0) при условиях A у системы (5) будет сложный фокус третьего порядка при $b-3k-5n=0$, то можно найти такие малые добавки, разрушающие условия A, что в малой окрестности точки (0, 0) будет су-

ществовать еще 3 предельных цикла. В итоге около точек (0, 0) и (0, $1/n$) будет существовать $3+1$ предельных циклов при наличии на экваторе сферы Пуанкаре двух седел и узла.

При $b \to k$ гипербола (6) вырождается в прямую без контакта $by+1=0$. Для $(b, k, n) \subset D_0$ система (5) также может иметь четыре предельных цикла с распределением предельных циклов

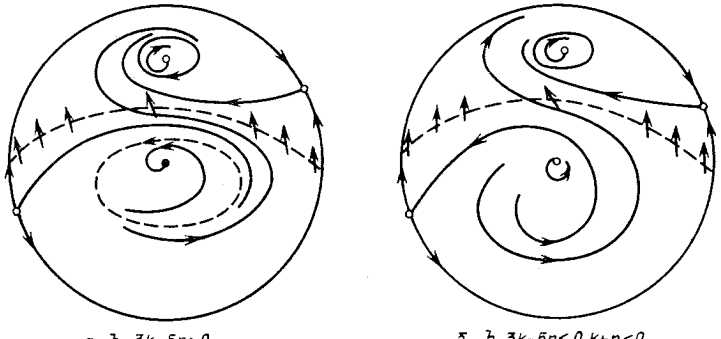


Рис. 156Г

вокруг фокусов *3* и *1*. При этом топологическая структура рисунка 156Б, *а* переходит в структуру, изображенную на рис. 156Г, *а*, структура рис. 156Б, *б* — в структуру рис. 156Г, *б*.

Теорема 2. *Если для системы* (5) *выполняются условия* А *и* $|a|<a_0$, *то при* $(b, k, n) \in D_0$, $n(b-3k-5n) \geqslant 0$ *существуют такие малые добавки, разрушающие условия* А, *что измененная система имеет четыре предельных цикла* (*три вокруг начала координат*) *при наличии на экваторе сферы Пуанкаре только одной особой точки типа «седло»*.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

На рис. 156В отмечены штриховкой области, вблизи которых существуют квадратичные системы с четырьмя предельными циклами.

§ 2. Электрическая цепь с туннельным диодом. Рассматривается система [29]

$$\dot{x} = y - \varphi(x) \equiv P, \quad \dot{y} = \sigma - \lambda x - y \equiv Q, \quad \sigma > 0, \ \lambda > 0, \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ имеет падающий участок при аппроксимации $\varphi(x)$ кубическим полиномом

$$\varphi(x) = ax^3 - bx^2 + cx$$

и условиях

$$a > 0, \ b > 0, \ c > 0, \ b^2 - 3ac > 3a. \qquad (2)$$

Последнее эквивалентно условию $\min \varphi'(x) < -1$, при котором в системе возможны разнообразные бифуркации. В случае $\min \varphi'(x) > -1$ возможными бифуркациями являются только появление и исчезновение состояний равновесия, так как на всей плоскости $P'_x + Q'_y \neq 0$.

1. Состояния равновесия и их бифуркации. Возможны одно или три грубых состояния равновесия. В случае одного состояния равновесия имеем фокус (узел), устойчивый, если в точке пересечения изоклин выполняется условие $\varphi'(x) > -1$, и неустойчивый в противоположном случае. В случае трех состояний равновесия между фокусами (узлами) лежит седло.

Дискриминантная кривая в плоскости (λ, σ), отделяющая область трех состояний равновесия от области одного состояния равновесия, получается из условия соприкосновения прямой $y = \sigma - \lambda x$ и кривой $y = \varphi(x)$, и в параметрическом виде дается уравнениями

$$\sigma = \varphi(x_0) - x_0\varphi'(x_0) = -2ax_0^3 + bx_0^2,$$
$$\lambda = -\varphi'(x_0) = -3ax_0^2 + 2bx_0 - c, \qquad (3)$$

где x_0 — координата точки касания.

Значению $x_0 = b/(3a)$, определяемому из условия $\varphi''(x_0) = 0$, соответствует точка возврата дискриминантной кривой. Дискриминантная кривая располагается слева от точки возврата и обращена выпуклостью в сторону области трех состояний равновесия (вторая производная имеет значение $d^2\sigma/d\lambda^2 = [6a(b/(3a) - x_0)]^{-1}$ и меняет знак, когда параметр x_0 переходит через значение, соответствующее точке возврата).

Исключая из (3) параметр x_0, уравнение дискриминантной кривой получим в виде

$$\Delta \equiv 27a^2\sigma^2 - 18ab(\lambda + c)\sigma + 4b^3\sigma + 4a(\lambda + c)^3 + b^2(\lambda + c) = 0.$$

Координаты точки возврата будут

$$\lambda_2 = (b^2 - 3ac)/(3a), \quad \sigma_2 = b^3/(27a^2). \qquad (4)$$

Точкам дискриминантной кривой соответствуют два состояния равновесия системы (1): фокус (узел) и сложное состояние равновесия седло-узел. Точке возврата соответствует слияние трех состояний равновесия.

Система (1) будет иметь сложный фокус $(P'_x + Q'_y = 0)$ на прямых, выходящих по касательной из точек дискриминантной кривой при $\lambda = 1$ в область $\lambda > 1$.

Для координат состояний равновесия имеем уравнение

$$ax^3 - bx^2 + (c + \lambda)x - \sigma = 0. \qquad (5)$$

Условие $P'_x + Q'_y = 0$ дает

$$3ax^2 - 2bx + c + 1 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 3a(c+1)}}{3a}, \qquad x_1 < x_2. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), находим для состояния равновесия $x = x_1$

$$L_1 \equiv 9abc + 9ab\lambda - 2b^3 - 27a^2\sigma - (b^2 - 3ac - 3a)^{1/2}(6ac - 2b^2 - 3a + 9a\lambda) = 0, \tag{7}$$

для состояния равновесия $x = x_2$

$$L_2 \equiv 9abc + 9ab\lambda - 2b^3 - 27a^2\sigma + (b^2 - 3ac - 3a)^{1/2}(6ac - 2b^2 - 3a + 9a\lambda) = 0. \tag{8}$$

В плоскости параметров λ, σ прямые (7) и (8) касаются верхней и нижней ветвей дискриминантной кривой при $\lambda = 1$, пересекаются в точке

$$\lambda_0 = (2b^2 + 3a - 6ac)/(9a), \quad \sigma_0 = b(c+1)/(9a)$$

и пересекают ветви дискриминантной кривой при $\lambda = \lambda_1$:

$$\lambda_1 = (b^2 - 3ac + a)/(4a). \tag{9}$$

Координаты x_1 и x_2 могут соответствовать как фокусу, так и седлу, и поэтому при переходе через прямые (7) и (8) может менять знак или фокусная, или седловая величины $P'_x + Q'_y$.

Перенесем начало координат в состояние равновесия (x_0, y_0), где x_0 — одно из чисел x_1 или x_2, определяемых выражением (6). Полагая $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, получим вместо (1) систему

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi + \eta - 3a\left(x_0 - \frac{b}{3a}\right)\xi^2 - a\xi^2 \equiv P_1(\xi, \eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\lambda\xi - \eta \equiv Q_1(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{10}$$

Для системы (10) будет

$$P'_{1\xi}(0,0) + Q'_{1\eta}(0,0) \equiv 0, \qquad \begin{vmatrix} P'_{1\xi}(0,0) & P'_{1\eta}(0,0) \\ Q'_{1\xi}(0,0) & Q'_{1\eta}(0,0) \end{vmatrix} \equiv \lambda - 1.$$

Состоянием равновесия в начале координат будет сложный фокус, если $\lambda > 1$, или седло, если $\lambda < 1$.

Первая ляпуновская величина для системы (10) имеет вид

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{4(\lambda - 1)^{3/2}}[3a(1 + \lambda) - 2(b^2 - 3ac)], \tag{11}$$

α_3 обращается в нуль при $\lambda = \lambda_3$,

$$\lambda_3 = \frac{2(b^2 - 3ac)}{3a} - 1. \tag{12}$$

Сложный фокус устойчив ($\alpha_3 < 0$) при $\lambda > \lambda_3$ и неустойчив ($\alpha_3 > 0$) при $\lambda < \lambda_3$. При $\lambda = \lambda_3$ ($\alpha_3 = 0$) устойчивость сложного фокуса определяется знаком второй ляпуновской величины α_5.

Для ее вычисления перейдем в уравнениях (10) к новым переменным x, y и τ по формулам

$$x = \xi, \quad y = -\frac{1}{\omega}\xi - \frac{1}{\omega}\eta, \quad \tau = \omega t, \quad \omega = \sqrt{\lambda_3 - 1}.$$

В новых переменных уравнения (10) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -y - \frac{3a}{\omega^2}\left(x_0 - \frac{b}{3a}\right)x^2 - \frac{a}{\omega}x^3, \\ \frac{dy}{d\tau} &= x + \frac{3a}{\omega^2}\left(x_0 - \frac{b}{3a}\right)x^2 + \frac{a}{\omega^2}x^3. \end{aligned} \tag{13}$$

Для уравнений (13) величина α_5 может быть подсчитана по готовой формуле (гл. 11). Получаем

$$\alpha_5 = -\frac{5\pi a^2}{8(\lambda_3 - 1)^{3/2}} < 0. \tag{14}$$

Отметим, что в выражения (11) и (14) для α_3 и α_5 не входит величина x_0 и, следовательно, полученные выражения относятся как к левому (x_1), так и к правому (x_2) сложным фокусам для значений параметров на прямых (7) и (8) при $\lambda > 1$.

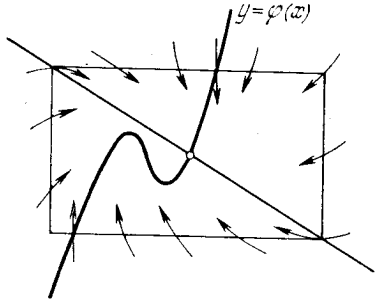


Рис. 157

2. Поведение в бесконечности. Построим на плоскости (x, y) прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, для которого изоклина $y = \sigma - \lambda x$ служит диагональю. Если такой прямоугольник взять достаточно большим, то изоклина $y = \varphi(x)$, порядок роста которой выше, чем у прямой, стороны, параллельные оси y, не будет пересекать, а каждую из других сторон пересечет в одной точке. Все траектории системы (1) будут с возрастанием t входить внутрь такого прямоугольника. Бесконечность при любых значениях параметров системы будет неустойчивой (рис. 157).

3. Качественная структура фазового пространства и пространства параметров.

3.1. *Симметрия в фазовом пространстве.* Перенесем начало координат в точку перегиба характеристики $y = \varphi(x)$. Система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{b^2 - 3ac}{3a}\xi + \eta - a\xi^3 \equiv A\xi + \eta - a\xi^3, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \sigma - \frac{9ab\lambda + 9abc - 2b^3}{27a^2} - \lambda\xi - \eta \equiv \bar{\sigma} - \lambda\xi - \eta, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\bar{\sigma} = \sigma - \frac{9ab\lambda + 9abc - 2b^3}{27a^2}.$$

Из (15) видно, что:

а) если $\bar{\sigma} = 0$, то фазовое пространство системы (15) симметрично относительно начала координат (точки перегиба характеристики);

б) если две прямые $\eta = \bar{\sigma}_1 - \lambda\xi$ и $\eta = \bar{\sigma}_2 - \lambda\xi$ располагаются симметрично относительно начала координат $(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 = 0)$, то фазовые портреты для значений $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ будут симметричны относительно точки перегиба характеристики.

При изучении пространства параметров можно поэтому ограничиться рассмотрением только части пространства параметров σ, λ — либо выше, либо ниже линии симметричных структур $\sigma = x_c\lambda + y_c$, где x_c, y_c — координаты точки перегиба характеристики. В раскрытом виде

$$\sigma = \frac{b}{3a}\lambda + \frac{9abc - 2b^3}{27a^2}, \quad \bar{\sigma} = 0.$$

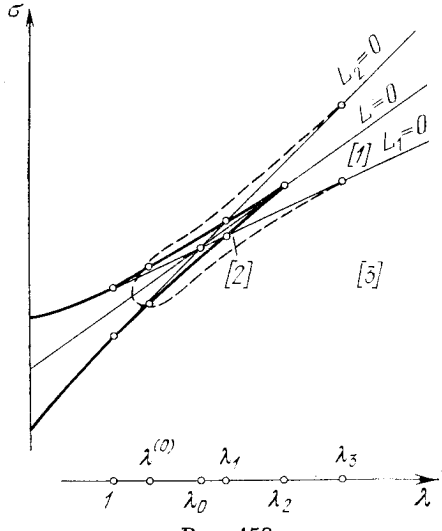


Рис. 158

На рис. 158 жирной линией изображена дискриминантная кривая, прямые смены устойчивости $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ (соответственно для фокусов x_1 и x_2) и линия симметричных структур $L = 0$, проходящая через точку пересечения $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ (штриховая кривая соответствует наличию двукратного предельного цикла, что будет доказано ниже).

Дальнейшее рассмотрение ведется для значений параметров ниже линии симметричных структур.

3.2. *Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации при изменении параметров вдоль прямой смены устойчивости фокуса* x_1. Проследим за бифуркациями и изменением качественной структуры разбиения фазового пространства при изменении параметров вдоль прямой $L_1 = 0$.

Пусть $\lambda > \lambda_3$. При этом $\alpha_3 < 0$ и сложный фокус x_1 будет устойчив. Принимая во внимание, что $b_2 - 3ac - 3a > 0$ (см. (6)), из (12) и (9) находим, что $\lambda_3 > \lambda_1$, и, следовательно, для этих

значений параметров система (1) имеет одно состояние равновесия. При уменьшении λ от значения $\lambda = \lambda_3$ меняет знак α_3, сложный фокус меняет устойчивость (оставаясь сложным) и от него рождается устойчивый предельный цикл. При дальнейшем уменьшении λ на интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ устойчивый цикл сохраняется. Значение $\lambda = \lambda_1$ соответствует касанию прямой $\sigma - \lambda x - y = 0$ и характеристики $y = \varphi(x)$. При этом на фазовой плоскости возникает седло-узел с неустойчивой узловой областью ($P'_x + Q'_y = -\varphi'(x_0) - 1$ в седло-узле) и, как можно убедиться, при любых характеристиках, соответствующих определенному выбору коэффициентов $\varphi(x)$, именно внутри предельного цикла.

Если для некоторых аппроксимаций седло-узел возникает внутри цикла, а для других вне его, то по непрерывности должна существовать и такая характеристика, для которой седло-узел возникает на предельном цикле. Но седло-узел с неустойчивой узловой областью не может возникнуть на устойчивом предельном цикле (гл. 11).

Таким образом, достаточно знать взаимное расположение цикла и седло-узла для какой-либо одной конкретной аппроксимации. Для системы (1) с аппроксимацией $\varphi(x) = x^3/3 - 3x^2 + 7x$ и параметрами $\sigma = 49/7$, $\lambda = 7/4$ (соответствующими состояниям равновесия сложный фокус и седло-узел) численным методом установлено, что цикл охватывает седло-узел. Следовательно, это имеет место для любых кубических аппроксимаций.

При дальнейшем продвижении вдоль прямой L_1 внутрь области, ограниченной дискриминантной кривой, седло-узел распадается на седло и неустойчивый узел, который затем превращается в фокус. Точке пересечения $\lambda = \lambda_0$ прямой $L_1 = 0$ с линией симметричных структур $L = 0$ соответствует фазовое пространство, содержащее два сложных фокуса, расположенных симметрично относительно седла (α-сепаратрисы седла идут к устойчивому циклу, охватывающему все три состояния равновесия, ω-сепаратрисы скручиваются с неустойчивых сложных фокусов).

Замечание. Качественная структура разбиения фазового пространства на траектории по использованной информации описывается лишь с точностью до дополнительного четного числа предельных циклов, возможно, возникших из сгущения траекторий. Такая неполнота и в дальнейшем не может быть устранена.

3.3. *Структура разбиения фазового пространства и бифуркации при изменении параметров вдоль линии симметричных структур.* Проследим за бифуркациями и изменением структуры фазового пространства вдоль линии симметричных структур $L = 0$. Пусть $\lambda > \lambda_2$ (λ_2 определяется выражением (4)). Единственное состояние равновесия системы — неустойчивый фокус (узел). Бесконечность неустойчива. Вокруг фокуса существует

устойчивый предельный цикл. Убыванию λ вдоль прямой $L=0$ соответствует поворот прямой $y=\sigma-\lambda x$ вокруг состояния равновесия в точке перегиба характеристики $y=\varphi(x)$. При $\lambda=\lambda_2$ прямая будет касаться характеристики в точке перегиба ($L=0$ пересекает дискриминантную кривую в точке возврата) и возникнет сложное состояние равновесия, распадающееся при убывании λ от значения $\lambda=\lambda_2$ на три простых: два неустойчивых узла (фокуса) и седло между ними. На интервале $\lambda_0<\lambda<\lambda_2$ бифуркаций состояния равновесия не происходит. При $\lambda=\lambda_0$ оба фокуса становятся сложными, и при убывании λ от значения $\lambda=\lambda_0$ из них рождаются неустойчивые предельные циклы (первая фокусная величина α_3 положительна). Возникает структура фазового пространства с тремя предельными циклами, α-сепаратрисы седла идут к устойчивому циклу, охватывающему все три состояния равновесия, ω-сепаратрисы скручиваются с неустойчивых циклов, охватывающих устойчивые фокусы.

При дальнейшем убывании λ на интервале $0\leqslant\lambda_0<\lambda_0$ смены устойчивости состояний равновесия не происходит, но при $\lambda=0$ циклов уже нет (при $\lambda=0$ существует интегральная прямая $y=\sigma$, проходящая через все состояния равновесия). Предельные циклы могут исчезнуть, только превратившись в петли сепаратрис или слившись с циклами, вновь возникшими из петель сепаратрис. Существенно, что циклы вокруг фокусов и цикл, охватывающий все три состояния равновесия, имеют разную устойчивость. В соответствии со знаком седловой величины (гл. 11) только неустойчивые циклы, охватывающие состояния равновесия, могут превратиться (и обязательно превратятся при некотором $\lambda=\lambda^+$) в петли сепаратрис. Эти две петли (возникающие одновременно, так как $L=0$ — линия симметричных структур) можно рассматривать как одну вырожденную большую петлю, от которой при ее разрушении с убыванием λ возникает неустойчивый же предельный цикл, охватывающий три состояния равновесия. При некотором $\lambda=\lambda^*<\lambda^+$ предельные циклы, охватывающие три состояния равновесия, сливаются и при убывании λ исчезают.

3.4. *Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации при изменении параметров вдоль дискриминантной кривой.* Проследим за бифуркациями и изменением структуры фазового пространства вдоль нижней ветви дискриминантной кривой, начиная от точки возврата ($\lambda=\lambda_2$). На интервале $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ будет существовать структура с неустойчивым фокусом и седло-узлом с неустойчивой узловой областью внутри устойчивого предельного цикла (рис. 159, *10*). При убывании λ от значения $\lambda=\lambda_1$ фокус x_1 меняет устойчивость и, так как $\alpha_3>0$, из него рождается неустойчивый предельный цикл (рис. 159, *9*). Чтобы проследить за дальнейшими бифуркациями при убывании λ до нуля, следует прежде всего выяснить структуру при $\lambda=0$. Она легко определяется, так как при $\lambda=0$ существует интегральная пря-

мая $y = \sigma$, проходящая через оба состояния равновесия (устойчивый узел и седло-узел с устойчивой узловой областью). Предельных циклов нет. Качественная структура эквивалентна изображенной на рис. 159, *1* (узловая область покрыта штриховкой).

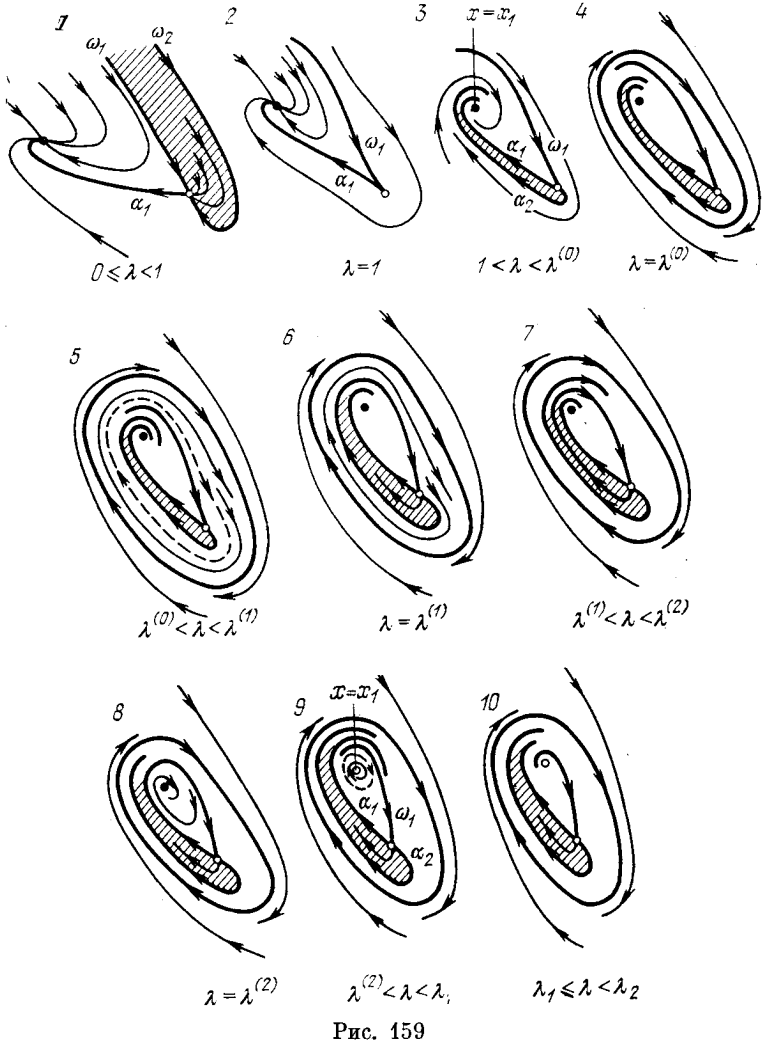


Рис. 159

Для седло-узла значение $\lambda = 1$ является бифуркационным. При $\lambda < 1$ узловая область устойчива (седло-узел имеет две ω-сепаратрисы ω_1 и ω_2), при $\lambda > 1$ неустойчива (седло-узел имеет две α-сепаратрисы α_1 и α_2), при $\lambda = 1$ седло-узел вырождается (характеристическое уравнение имеет два нулевых корня)

и узловая область исчезает (состояние равновесия имеет одну α- и одну ω-сепаратрису). Структура с сохранением типа состояний равновесия, как на рис. 159, *1*, осуществляется на интервале $0 \leqslant \lambda < 1$.

Для прослеживания бифуркаций вдоль дискриминантной кривой существенным является установление качественной структуры при $\lambda = 1$. Как будет видно из дальнейшего, при возрастании λ от нуля необходимо возникает из сгущения траекторий двойной предельный цикл, охватывающий состояния равновесия, однако не существует способов обнаружить точные значения параметров, при которых он возникает. В дальнейшем будем предполагать, что при $\lambda = 1$ предельных циклов еще нет и осуществляется структура рис. 159, *2* (изменения в результатах, отвечающие предположению о существовании предельных циклов уже при $\lambda = 1$, будут в дальнейшем указаны)[1]).

При возрастании λ от значения $\lambda = 1$ возникает структура, качественно эквивалентная представленной на рис. 159, *3*. Возникает неустойчивая узловая область седло-узла (обе α-сепаратрисы выходят по направлению $\varkappa = -1$, ω-сепаратриса входит по направлению $\varkappa = -\lambda$). Узел становится фокусом при $[1 - \varphi'(x_1)]^2 - 4\lambda < 0$, где $\varphi'(x_1) = (1/a)(b^2 - 3ac - 4a\lambda)$.

Сопоставим теперь расположение α- и ω-сепаратрис для структур на рис. 159, *9* и 159, *3*. Отметим точки пересечения с α- и ω-сепаратрисами на отрезке прямой $x = x_1$ выше фокуса (ближайшие по ходу сепаратрис от седло-узла). Для структуры на рис. 159,*9* след ω-сепаратрисы на прямой $x = x_1$ расположен ниже следов α-сепаратрис. Для структуры на рис. 159,*3*, наоборот — выше. При убывании λ последовательно должны осуществиться бифуркации, соответствующие совпадению на прямой $x = x_1$ следа ω-сепаратрисы со следом α_1-сепаратрисы (выходящей из седло-узла вверх) и со следом α_2-сепаратрисы (выходящей вниз). Так как седловая величина $(P'_x + Q'_y)_2 \equiv \lambda - 1$ при $\lambda > 1$ положительна, то при образовании первой петли (при $\lambda = \lambda^{(2)}$) к ней стягивается неустойчивый предельный цикл (см. гл. 11) (рис. 159, *8*). При расположении следа ω-сепаратрисы между следами α_1- и α_2-сепаратрис будет существовать замкнутый контур, образованный ω-сепаратрисой седло-узла (рис. 159,*7*). При совпадении следов ω- и α_2-сепаратрис при $\lambda = \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)}$ возникает петля сепаратрисы (рис. 159, *6*), от которой при ее разрушении с уменьшением λ рождается неустойчивый предельный цикл, охватывающий оба состояния равновесия, и возникает

---

[1]) Проверка наличия или отсутствия предельных циклов для конкретной характеристики при $\lambda = 1$ может быть проведена численным счетом, например, траектории, проходящей через точку $(x_0, \varphi(x_0))$ $(\varphi'(x_0) = -1)$. Предельный цикл, если он существует, находится в пределах прямоугольника с указанными в п. 3.2 свойствами.

структура рис. 159,*5* с двумя предельными циклами, между которыми нет состояний равновесия. На интервале $1<\lambda<\lambda^{(1)}$ при некотором $\lambda=\lambda^{(0)}$ предельные циклы сливаются в двойной полуустойчивый предельный цикл (рис. 159,*4*) и затем исчезают. Последовательность структур вдоль нижней ветви дискриминантной кривой представлена на рис. 159,*1—10*.

3.5. *Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации внутри дискриминантной кривой в области трех состояний равновесия.* Дискриминантная кривая, представленная в параметрическом виде уравнениями (3), может рассматриваться как огибающая семейства прямых $\sigma-\lambda x_0-\varphi(x_0)=0$ в плоскости (λ, σ). Полупрямые

$$\sigma-\lambda x_0-\varphi(x_0)=0, \quad \lambda\leqslant-\varphi'(x_0), \tag{16}$$

касающиеся в точке $\lambda=-\varphi'(x_0)$ дискриминантной кривой, однократно покрывают область, ограниченную линией симметричных структур и нижней ветвью дискриминантной кривой, при x_0, изменяющемся от точки перегиба до минимума характеристики $\varphi(x)$ (при $b\leqslant 3ax_0\leqslant b+\sqrt{b^2-3ac}$). Движение в пространстве параметров λ, σ вдоль полупрямых (16) от точки касания соответствует для системы (1) повороту против часовой стрелки изоклины $\sigma-\lambda x-y=0$ вокруг седла, возникшего в точке $x=x_0$ при разделении седло-узла на седло и узел.

Рассмотрим бифуркации, осуществляющиеся при движении по полупрямым (16), касающимся дискриминантной кривой на интервале $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$. Здесь возникнут как бифуркации состояний равновесия, так и бифуркации сепаратрис и предельных циклов.

При уменьшении λ состояние равновесия седло-узел внутри устойчивого предельного цикла разделяется на седло и неустойчивый узел, который при дальнейшем уменьшении λ превращается в фокус (рис. 160,*11*).

В точках пересечения рассматриваемой полупрямой (16) с прямыми $L_1=0$ и $L_2=0$ происходят бифуркации состояний равновесия: при уменьшении λ сначала из фокуса x_1 (рис. 160,*10*) и затем из фокуса x_2 рождаются неустойчивые предельные циклы (фокусы становятся устойчивыми) и возникает структура с тремя предельными циклами (рис. 160,*9*). Так как при $\lambda=0$ предельных циклов нет ($y=\sigma$ — интегральная прямая, качественная структура эквивалентна структуре рис. 160,*1*), то рассуждениями, аналогичными проведенным в п. 3.4, находим, что при убывании λ до нуля должны осуществиться следующие бифуркации сепаратрис: возникновение петли сепаратрисы вокруг верхнего фокуса, вокруг нижнего фокуса, возникновение большой петли, содержащей внутри два состояния равновесия. Так как седловая величина положительна $(P'_x+Q'_y=-\varphi'(x_0)-1=\lambda-1$, где λ — координата

точки касания полупрямой (16) с дискриминантной кривой), то петли сепаратрис могут быть только неустойчивыми, и их образование сопровождается влипанием в них (или, наоборот, рождением от них) неустойчивых предельных циклов. Петли сепа-

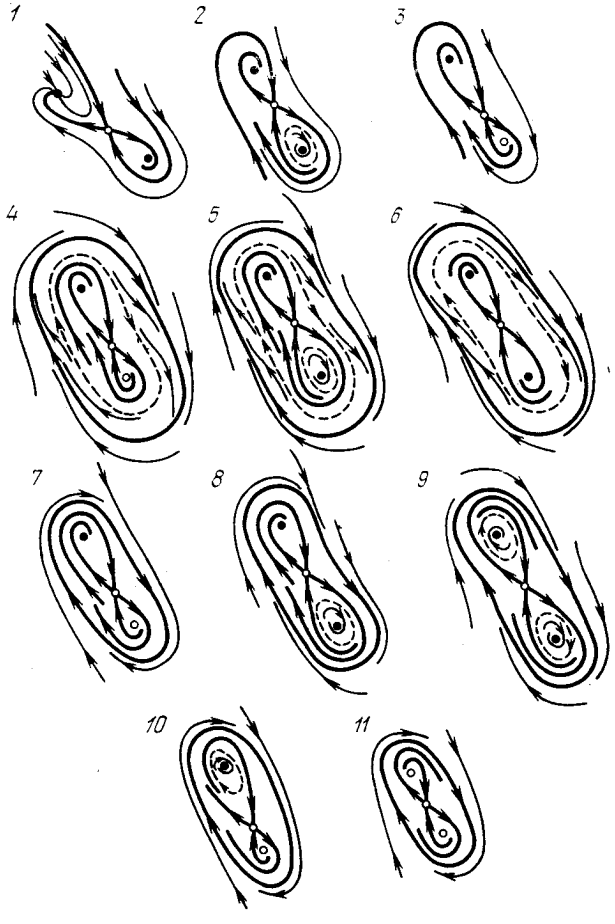


Рис. 160

ратрис вокруг фокусов возникают при влипании в них неустойчивых предельных циклов, появляющихся из фокусов. Разрушение большой петли, образованной α_2- и ω_1-сепаратрисами седла, сопровождается появлением неустойчивого предельного цикла, охватывающего все состояния равновесия (большая петля не может возникнуть за счет стягивания к ней устойчивого предель-

ного цикла, так как это запрещает знак седловой величины (см. гл. 11)). Так как при $\lambda = 0$ циклов нет, то при дальнейшем уменьшении λ из слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов должен возникнуть двойной предельный цикл и затем исчезнуть. Точки бифуркаций на полупрямых (16), соответствующие петлям сепаратрис вокруг верхнего и нижнего фокусов, либо могут совпадать, либо должны разделяться точкой бифуркации, соответствующей большой петле.

Для полупрямых (16), касающихся нижней границы дискриминантной кривой на интервалах $(1, \lambda^{(0)})$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$, $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $(\lambda^{(2)}, \lambda_1)$, бифуркации будут аналогичными, но число их от интервала к интервалу будет уменьшаться за счет того, что некоторые бифуркации уже произошли при движении вдоль дискриминантной кривой.

Так как указанные бифуркации имеют место на прямых, целиком заполняющих рассматриваемую область внутри дискриминантной кривой, то существуют непрерывные кривые, на которых осуществляются бифуркации. Их начальные и конечные точки располагаются на линии симметричных структур и на дискриминантной кривой. Все три бифуркационные кривые, соответствующие трем типам петель сепаратрис, пересекаются в точке $\lambda = \lambda^+$ на линии симметричных структур (рис. 161). Они заканчиваются в точках $\lambda = \lambda^{(2)}$, $\lambda = \lambda^{(1)}$ и $\lambda = 1$ на дискриминантной кривой. В точках $\lambda = \lambda^{(2)}$ и $\lambda = \lambda^{(1)}$ осуществляются структуры с петлями сепаратрис. В точке $\lambda = 1$ сепаратрисы вырожденного седло-узла (см. гл. 4) нужно рассматривать как вырождение петли сепаратрисы вокруг верхнего фокуса, стягивающейся вместе с фокусом в одну точку. Кривая двойных циклов проходит между точкой $\lambda = \lambda^*$ на линии симметричных структур и точкой $\lambda = \lambda^{(0)}$ на дискриминантной кривой слева от кривой, на которой осуществляется большая петля.

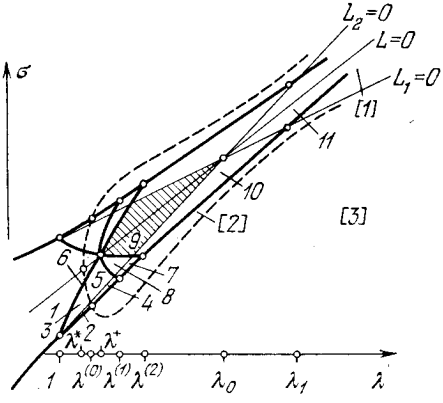


Рис. 161

Некоторые из бифуркационных кривых могут пересекаться, и поэтому последовательность качественных структур и бифуркаций при изменении параметра λ вдоль отрезков касательных внутри дискриминантной крривой может быть различной.

3.6. *Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации вне дискриминантной кривой* (*в области одного состояния*

равновесия). Здесь возможны три структуры: неустойчивый фокус внутри устойчивого предельного цикла, устойчивый фокус, окруженный двумя предельными циклами, и устойчивый фокус (узел), к которому траектории идут из бесконечности. Первая из перечисленных структур существует для точек вне дискриминантной кривой в области между прямыми $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ ($L_1 L_2 < 0$, область [*1*] на рис. 158, 161). Область существования двух предельных циклов примыкает на интервале $\lambda^{(0)} < \lambda < \lambda_3$ к куску дискриминантной кривой и к прямой $L_1 = 0$. На интервале $\lambda^{(0)} < \lambda < \lambda_1$ при смещении с дискриминантной кривой в область одного состояния равновесия (см. рис. 159, *5—9*) исчезает состояние равновесия седло-узел и остаются два предельных цикла вокруг устойчивого фокуса (на рис. 159, *6—8* неустойчивый предельный цикл при исчезновении седло-узла возникает из замкнутой траектории, образованной ω-сепаратрисой седло-узла). На интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ при переходе из области $L_1 < 0$ в область $L_1 > 0$ (с убыванием σ) из фокуса появляется второй неустойчивый предельный цикл ($\alpha_3 > 0$ при $\lambda < \lambda_3$). Бифуркационная кривая (штриховая на рис. 158, 161), соответствующая слиянию устойчивого и неустойчивого предельных циклов, начинается в точке $\lambda = \lambda_3$ на прямой $L_1 = 0$ (здесь $\alpha_3 = 0$) и пересекает дискриминантную кривую при $\lambda = \lambda^{(0)}$, выделяя некоторую окрестность дискриминантной кривой и прямой $L_1 = 0$, для точек которой есть одно устойчивое состояние равновесия и два предельных цикла (область [*2*] на рис. 158, 161). При переходе из области $L_1 < 0$ в область $L_1 > 0$ при $\lambda > \lambda_3$ устойчивый цикл стягивается к фокусу ($\alpha_3 < 0$) и возникает структура без предельных циклов (область [*3*] на рис. 158, 161). Границами области без предельных циклов служат кусок дискриминантной кривой (для $0 \leqslant \lambda < \lambda^{(0)}$), кривая двойных циклов (для $\lambda^{(0)} \leqslant \lambda < \lambda_3$) и прямая $L_1 = 0$ (для $\lambda \geqslant \lambda_3$).

3.7. *Разбиение пространства параметров.* Разбиение пространства параметров на области различной качественной структуры по обе стороны линии симметричных структур $L = 0$ приведено на рис. 161. Соответствующие различным областям грубые структуры разбиения фазового пространства (обозначенные теми же номерами) представлены на рис. 160. Жирными линиями изображены сепаратрисы и предельные циклы, штриховой — неустойчивые предельные циклы. Устойчивые состояния равновесия — черные точки, неустойчивые — светлые.

Разбиение на рис. 161 соответствует предположению, сделанному в п. 3.4, об отсутствии предельных циклов для структур в точке $\lambda = 1$ дискриминантной кривой. Если предположение не выполняется, то кривая двойных циклов (штриховая на рис. 161) будет проходить не через точку $\lambda = \lambda^{(0)} > 1$, а через точку $\lambda = \lambda^{(0)} < 1$, и тогда исчезнут области [*2*] и [*3*], а на рис. 160 — соответственно структуры *2* и *3*.

§ 3. Двумерная модель динамики твердотельного лазера [119]. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dm}{dt} = G\left(n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1\right) m = P(m, n),$$
$$\frac{dn}{dt} = n_{01} - (m + 1)\, n = Q(m, n) \tag{1}$$

при некоторой идеализации описывает динамику оптического квантового генератора с управляемой добротностью резонатора.

По физическому смыслу задачи рассматриваются область фазового пространства $m \geqslant 0$ и параметры, удовлетворяющие условиям $\rho > 0$ и $G > 1$: $n_{01} > 0$, $n_{02} > 0$.

Координаты состояний равновесия находим, приравнивая нулю правые части системы (1):

$$\left(n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1\right) m = 0,$$
$$n_{01} - (m + 1)\, n = 0. \tag{2}$$

Исключая из этих уравнений n, для абсцисс состояний равновесия получаем

$$m\left[m^2 - \left(n_{01} - \frac{1}{\rho}\, n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho}\right) m - \frac{1}{\rho}\,(n_{01} - n_{02} - 1)\right] = 0. \tag{3}$$

Ординаты же состояний равновесия однозначно определяются абсциссами:

$$n = n_{01}/(m + 1). \tag{4}$$

Из (3) следует, что система (1) при всех рассматриваемых значениях параметров всегда имеет одно состояние равновесия O_1 с координатами

$$m_1 = 0,\ n_1 = n_{01} \tag{5}$$

и не может иметь более трех состояний равновесия. Кроме $m = 0$, уравнение (3) имеет еще два корня

$$m_{23} = \frac{1}{2}\left(n_{01} - \frac{1}{\rho}\, n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho}\right) \pm$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(n_{01} - \frac{1}{\rho}\, n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\,(n_{01} - n_{02} - 1)} \tag{6}$$

(первый индекс 2 соответствует знаку плюс перед радикалом, второй — 3 — знаку минус), являющихся в случае, когда они действительны, абсциссами двух других состояний равновесия системы (1): O_2 и O_3. В дальнейшем, изучая разбиение пространства параметров на области с различной качественной структурой, естественно рассматривать характер разбиения квадранта плоскости (n_{01}, n_{02}), соответствующего $n_{01} > 0$, $n_{02} > 0$, при различных зна-

чениях ρ и G. На плоскости (n_{01}, n_{02}) точкам прямой

$$n_{01} - n_{02} - 1 = 0, \tag{7}$$

очевидно, соответствуют системы (1), имеющие двукратное состояние равновесия с равной нулю координатой m, а точкам кривой (параболы)

$$\Delta_{23} = \frac{1}{4}\left(n_{01} - \frac{1}{\rho}\, n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}(n_{01} - n_{02} - 1) = 0 \tag{8}$$

— системы, имеющие двукратное состояние равновесия, получающееся от слияния состояний равновесия O_2 и O_3. Исследуя уравнение параболы обычными методами, нетрудно видеть, что при $\rho < 1$ она расположена вне рассматриваемого квадранта плоскости (n_{01}, n_{02}), а при $\rho > 1$ — в этом квадранте.

Кроме того, как нетрудно видеть, при $\rho < 1$ корень m_3 отрицателен, и, следовательно, у системы (1) при $\rho < 1$, при значениях n_{01}, n_{02} выше прямой (7) — два состояния равновесия, а ниже — одно — O_1 [2]).

В случае $\rho > 1$ для области значений n_{01}, n_{02}, $\Delta_{23} < 0$ система (1) имеет одно состояние равновесия — O_1, а для области значений, где $\Delta_{23} > 0$ (ниже прямой (6)) — три состояния равновесия O_1, O_2, O_3. Прямая (7) в этом случае, очевидно, также соответствует системам с кратными состояниями равновесия. Общая точка N параболы (8) с прямой соответствует динамической системе с трехкратным состоянием равновесия и делит прямую (7) на две части Δ_{12} и Δ_{13} (Δ_{12} соответствует слиянию O_1 и O_2, а Δ_{13} — слиянию O_1 и O_3). На рис. 162—164 цифрами *I*, *II*, *III* указаны соответственно области плоскости параметров, при которых система имеет одно, два и три состояния равновесия с координатой $m \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о характере состояния равновесия системы (1). Если не учитывать различия между узлами и фокусами, то границами в пространстве параметров, определяющими области различного характера состояний равновесия и различной устойчивости узлов и фокусов, являются

$$\Delta = P'_m Q'_n - P'_n Q'_m =$$

$$= G\left[mn - \left(\frac{\rho n_{02} m}{(\rho m + 1)^2} + n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1\right)(m + 1)\right] = 0, \tag{9}$$

$$\sigma = P'_m + Q'_n = -(m + 1) + G\left[\frac{\rho n_{02} m}{(\rho m + 1)^2} + n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1\right] = 0, \tag{10}$$

[2]) При переходе через прямую (6), для точек которой система имеет двукратное состояние равновесия, двойное состояние равновесия не исчезает (как в общем случае), а опять разделяется на два, но у одного из них координата m делается отрицательной.

где вместо m и n подставляются координаты соответствующих состояний равновесия. Из (9) мы, очевидно, получим (после некоторых преобразований) те же условия (7) и (8), соответствующие наличию у системы кратного состояния равновесия.

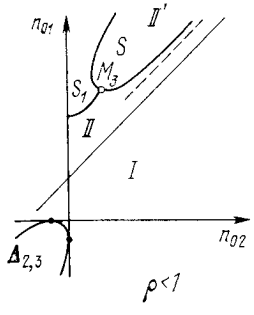


Рис. 162

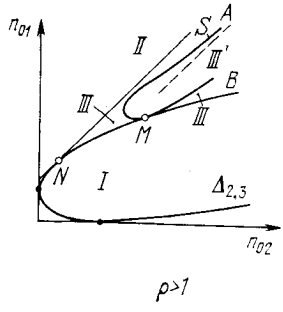


Рис. 163

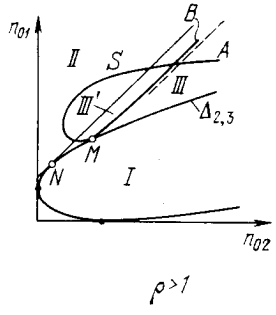


Рис. 164

Для того чтобы получить на плоскости (n_{01}, n_{02}) кривую, соответствующую $\sigma = 0$ (смене устойчивости), нужно исключить m и n из уравнений

$$\sigma(m, n) = 0, \quad P(m, n) = 0, \quad Q(m, n) = 0. \tag{11}$$

Однако такое исключение весьма сложно, и проще получить параметрические уравнения этой кривой. Исключая n из

$$P(m, n) = 0, \quad Q(m, n) = 0,$$

получаем

$$n_{01}(\rho m + 1) - n_{02}(m + 1) - (\rho m + 1)(m + 1) = 0 \tag{12}$$

и, полагая в (10) $n = n_{01}/(m + 1)$, с помощью (10) и (12) выражаем n_{01} и n_{02} через m (m — параметр):

$$n_{01} = \frac{(m+1)^2(\rho m + 1)}{G\rho m} + m + 1, \qquad n_{02} = \frac{(m+1)(\rho m + 1)^2}{G\rho m}. \tag{13}$$

Кривую на плоскости (n_{01}, n_{02}), определенную равенствами (13), или, что то же, уравнениями (11), будем обозначать через S. Исследование характера этой кривой при различных ρ и G даны в приложении I. Некоторые основные случаи ее характера и расположения относительно кривой Δ_{23} даны на рис. 162—164. Из исследования в приложении I следует, что: 1) кривая S имеет ветви, уходящие в бесконечность при $m \to 0$ и $m \to \infty$, и при $m \to 0$ имеет асимптоту (штриховая прямая на рис. 164); 2) при $\rho > 1$ кривая S имеет одну общую точку M с кривой Δ_{23}, соответ-

ствующую значению $m = \bar{m}$. Нетрудно убедиться на основании выражений (9) и (10), что:

А) Состояние равновесия O_1 — седло, когда $n_{01} - n_{02} - 1 > 0$, и устойчивый узел, когда $n_{01} - n_{02} - 1 < 0$.

Б) В случае $\rho < 1$ состояние равновесия O_2, для которого $\sigma = 0$, всегда сложный фокус. В случае $\rho > 1$ состояние равновесия, в котором $\sigma = 0$, есть сложный фокус O_2 для $m < \bar{m}$ (т. е. для ветви AM кривой S) и седло O_3 для $m > \bar{m}$ (т. е. для ветви MB кривой S).

В) При $\rho > 1$ для значений параметров, соответствующих точке M, система имеет двукратное состояние равновесия, для которого $\sigma = 0$. Это состояние равновесия рассмотрено в § 4 гл. 10. В точке M кривая S касается кривой Δ_{23} (это вытекает из сказанного в § 3 гл. 11 и может быть также получено непосредственно, если для параболы, как и для кривой S, найти параметрические уравнения). Точкой M кривая (Δ_{23}) разделяется на две части. Точки одной соответствуют системе (1), имеющей седло-узел с устойчивой узловой областью, а точки другой части — с неустойчивой узловой областью. На рис. 162—164 штрихами указаны области, где состояние равновесия O_2 соответственно устойчиво ($\sigma < 0$) и неустойчиво ($\sigma > 0$). Очевидно, при переходе в плоскости (n_{01}, n_{02}) через кривую S у системы (1) возможно рождение предельных циклов, на котором мы остановимся ниже.

Предельные циклы. Покажем сначала, что существует замкнутая область в фазовом пространстве, содержащая все состояния равновесия, внутрь которой входят траектории системы. Действительно, рассматривая прямые Γ_1: $n = 0$, Γ_2: $n = n_{01}$, можно показать, что все траектории входят внутрь полосы, ограниченной этими прямыми.

Рассматривая поле направлений на прямой Γ_3: $m = C_1$, где C_1 — некоторая положительная постоянная, для $n_{01} \leqslant 1$ получаем, что траектории пересекают эту прямую сверху вниз. Таким образом, для $n_{01} \leqslant 1$ существование замкнутой области показано, а для $n_{01} \leqslant 1$ необходимо еще рассмотреть поле направлений на прямой Γ_4: $m = -G(n_{01} - 1)n + C_2$. Выбирая C_2 достаточно большим, можно убедиться, что на интервале $1 < n_1 \leqslant n_{01}$ траектории пересекают эту прямую справа налево, т. е. по-прежнему существует область, внутрь которой входят все траектории системы (1).

Принимая во внимание тот факт, что существуют значения параметров, при которых система имеет одно состояние равновесия, лежащее на интегральной прямой $m = 0$, а также принимая во внимание, что состояние равновесия O_3 — седло, можно утверждать:

а) если предельные циклы существуют, то они обязательно охватывают состояние равновесия O_2;

б) предельных циклов в области значений параметров I, включая границы — прямую (7) и кривую (8), быть не может;

в) так как существует область фазового пространства, внутрь которой входят все траектории системы и, кроме того, при переходе из области значений параметров II в область II' состояние равновесия O_2 (лежащее выше интегральной прямой $m=0$) меняет устойчивость, то должен существовать по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Мы покажем, что в некоторых случаях у системы может существовать два предельных цикла. Рассмотрим выражение для первой ляпуновской величины (полученное в приложении II)

$$L(m)=\frac{\pi(m+1)}{4\Delta\sqrt{\Delta}}\,\frac{f(m)}{m(\rho m+1)^2},$$

где $f(m)=\rho(\rho+G\rho-1)m^2+2(\rho-1-G\rho)m+\rho+1$.

1) $\rho<1$. В этом случае, очевидно, существует не более двух состояний равновесия, седло лежит на прямой $m=0$, и, очевидно, его сепаратрисы не могут образовать петлю (рис. 165).

Возможны два случая:

а) $\rho-1+G\rho<0$. Уравнение $f(m)=0$ не имеет положительных корней, $L(m)<0$ при всех m.

б) $\rho-1+G\rho>0$. Граница области устойчивости S состоит из двух участков, на одном из которых $L<0$, на другом $L>0$;

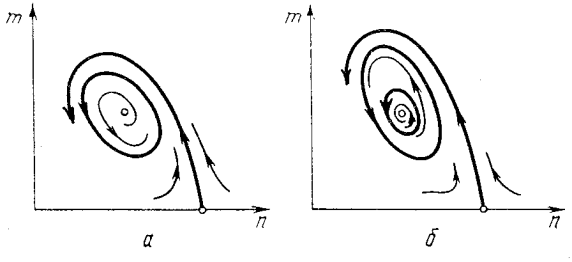


Рис. 165

в точке M_3, граничной для этих участков, $L=0$. В точках, где $L<0$, при переходе из области, где $\sigma<0$, в область, где $\sigma>0$, у системы из фокуса рождается устойчивый предельный цикл, а в точках, где $L>0$, при обратном переходе из области, где $\sigma>0$, в области, где $\sigma<0$, рождается неустойчивый предельный цикл.

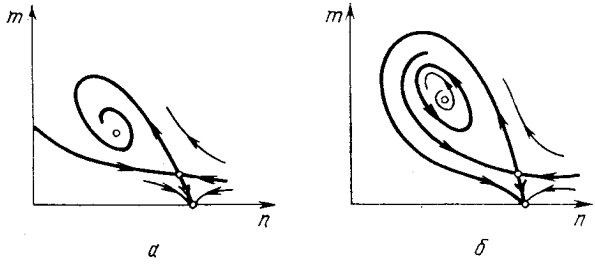
Особенности в поведении системы в окрестности тех значений, при которых $L=0$, можно выяснить, устанавливая знак второй ляпуновской величины L_2. Однако мы можем рассмотреть возможности, которые здесь могут иметь место и без вычисления этой величины.

Если, выйдя из достаточно близкой к прямой (7) точки, в которой, как мы уже говорили выше (см. п. б)), нет предельных циклов, мы перейдем из области $\sigma < 0$ в область $\sigma > 0$ через участок кривой S, где $L < 0$, то при этом у системы рождается устойчивый предельный цикл. Пока мы не пересечем вновь кривую S, этот устойчивый предельный цикл сохранится — ему некуда деться (если в области $\sigma > 0$ есть точки, соответствующие двукратным циклам, то тогда во всяком случае число устойчивых циклов все время будет на единицу больше, чем неустойчивых). Если затем мы пересечем границу S на части ее, где $L > 0$, переходя из области $\sigma > 0$ в область $\sigma < 0$, то при этом у системы из фокуса рождается неустойчивый предельный цикл, устойчивый же сохраняется, и таким образом теперь у системы есть устойчивый и неустойчивый предельные циклы (или одинаковое число и тех и других).

Если, не пересекая кривую S, мы вернемся в область вблизи прямой (7), где нет предельных циклов, то мы непременно должны пройти через значения параметров, при которых эти предельные циклы исчезают. Следовательно, должна быть бифуркация, при которой устойчивый и неустойчивый циклы сливаются, образуя четнократный цикл, который затем исчезает. Непременно существует, следовательно, в области параметров, где $\sigma > 0$, бифуркационная кривая S_1, упирающаяся в точку M_3, соответствующая четнократному циклу (см. рис. 162).

Возможные качественные структуры на фазовой плоскости представлены на рис. 165.

2) $\rho > 1$. В этом случае у кривых Δ_{23} и S есть общая точка $\bar{M}$ (предположим, что она лежит на части S, где $L < 0$). При



а *б*

Рис. 166

значениях n_{01} и n_{02}, соответствующих этой точке, у системы есть двукратное состояние равновесия, для которого $\sigma = 0$.

Бифуркации такой точки описаны в гл. 10. В частности, при бифуркациях такой точки (при наличии двух независимых параметров) всегда появляется петля сепаратрисы, а также предельный цикл (см. рис. 105 гл. 10).

На плоскости (n_{01}, n_{02}) существует упирающаяся в точку M бифуркационная кривая S_1, соответствующая петле сепаратрисы (см. рис. 108 гл. 11).

Существование такой кривой, т. е. существование петли сепаратрисы у системы (1) при некоторых значениях n_{01} и n_{02} можно также установить, не опираясь на рассмотрение § 4 гл. 10, рассматривая возможное поведение двух сепаратрис седла O_3 (по расположению изоклин, а также по характеру состояний равновесия вблизи участка кривой Δ_{23}) и переходя при непрерывном изменении параметров от расположения, представленного на рис. 166, *а*, к расположению, представленному на рис. 166, *б*. Здесь также можно установить существование двух предельных циклов, однако соответствующее рассмотрение (более сложное, чем в случае $\rho < 1$) мы здесь не приводим. На рис. 166 представлены некоторые разбиения фазовой плоскости.

Приложение I. Установим возможный характер кривой S, пользуясь ее параметрическими уравнениями (13): $n_{01} = \varphi(m)$, $n_{02} = \psi(m)$.

1. При $m \to 0$ и $m \to +\infty$ обе функции $\varphi(m)$ и $\psi(m)$ стремятся к бесконечности. Нетрудно видеть, что производные

$$\varphi'_m = \frac{1}{G\rho}\,\frac{2\rho m^3 + (2\rho + 1 + G\rho)\,m^2 - 1}{m^2}, \quad \psi'_m = \frac{1}{G\rho}\,\frac{(\rho m + 1)\,(2\rho m^2 + \rho m - 1)}{m^2}$$

обращаются в нуль не более чем при одном значении m, $0 < m < +\infty$. (Среди коэффициентов полиномов, стоящих в числителе, только одна перемена знака, а при $m = 0$ и $m = \infty$ эти полиномы имеют разные знаки. Следовательно, у кривой S только по одной точке, в которых касательная к S соответственно горизонтальна и вертикальна. Соответствующие значения m мы будем обозначать $m_{\min\varphi}$ и $m_{\min\psi}$.)

Вид кривой зависит от соотношения между $m_{\min\varphi}$ и $m_{\min\psi}$. Вычисляя производную $\varphi'(m)$ в точке $S_{m_{\min\psi}}$, получим (используя условие $\psi'(m_{\min\psi}) = 0$)

$$\varphi'_m(m_{\min\psi}) = \frac{1 - \rho + (1 - \rho + G\rho)\,m_{\min\psi}}{G\rho m_{\min\psi}}. \tag{14}$$

Знак этого выражения позволяет судить о соотношении между $m_{\min\psi}$ и $m_{\min\varphi}$. Если $\varphi'(m_{\min\psi}) < 0$, то $m_{\min\psi} < m_{\min\varphi}$ и наоборот, если $\varphi'(m_{\min\psi}) > 0$. Знак выражения (14) в свою очередь определяется соотношением между $m_{\min\psi}$ и значением $\bar{m} = \dfrac{\rho - 1}{1 - \rho + G\rho}$, при котором числитель выражения обращается в нуль, а соотношение между $m_{\min\psi}$ и $\bar{m}$ определяется знаком $\psi'(\bar{m})$. (Отметим, что в случае $\bar{m} > 0$ $\bar{m}$ — это значение, при котором кривые S и Δ_{23} имеют общую точку.)

2. Ветвь кривой S, уходящая в бесконечность при $m \to 0$, имеет асимптоту (которую просто найти обычным образом) [3])

$$n_{01} - n_{02} - \frac{(1 - \rho + G\rho)}{G\rho} = 0. \tag{15}$$

Значение m, соответствующее точке пересечения кривой S с асимптотой

[3]) При $m \to \infty$ у кривой S асимптота не существует.

(оно находится из (9) и (15)), есть

$$m = -\frac{1-\rho^2+G}{\rho(1-\rho)}. \tag{16}$$

На основании изложенного можно установить характер кривой S и ее расположение относительно кривой Δ_{23}. Рассмотрим некоторые основные случаи.

1) $\rho < 1$. В этом случае асимптота кривой S лежит выше прямой $n_{01} - n_{02} - 1 = 0$ $\left(\text{так как } \frac{1-\rho+G\rho}{G\rho} > 1\right)$, а кривая S целиком расположена выше асимптоты (так как выражение (16) для m отрицательно). Кроме того, $m_{\min\psi} > \bar{m}$ $(\bar{m} < 0)$, откуда $\varphi'(m_{\min\psi}) = 1-\rho+(1-\rho+G\rho)m_{\min\psi} > 0$, и, следовательно,

$$m_{\min\psi} > m_{\min\varphi}.$$

Мы имеем случай, представленный на рис. 162.

2) $\rho > 1$. В этом случае кривые Δ_{23} и S всегда имеют общую точку M, а асимптота кривой S лежит ниже прямой $n_{01} - n_{02} - 1 = 0$.

А) Пусть $1-\rho^2+G\rho > 0$, т. е. кривая S имеет общую точку с асимптотой:

а) $\psi'(\bar{m}) > 0$, $\bar{m} > 0$. Отсюда $\bar{m} > m_{\min\psi}$ и

$$\varphi'(m_{\min\psi}) = 1-\rho+(1-\rho+G\rho)m_{\min\psi} < 0.$$

Следовательно, $m_{\min\psi} < m_{\min\varphi}$, а также $\bar{m} > m_{\min\psi}$. Мы получаем расположение, представленное на рис. 163.

б) $\psi'(\bar{m}) < 0$. Тогда $m_{\min\psi} > \bar{m}$ и

$$\varphi'(m_{\min\psi}) = 1-\rho+(1-\rho+G\rho)m_{\min\psi} > 0,$$

т. е.

$$m_{\min\psi} > m_{\min\varphi} > \bar{m}. \tag{17}$$

В силу (16) у кривой S существует единственная общая точка с асимптотой, и при $m \to 0$ точки кривой S лежат выше асимптоты, а при $m \to -\infty$ — ниже. Но тогда, принимая во внимание (17), нетрудно видеть, что кривая S непременно должна иметь не менее одной точки самопересечения. Можно показать, что эта точка единственная. Действительно, для значений m' и m'', соответствующих точке самопересечения $(m' \neq m'')$,

$$\varphi(m') = \varphi(m''), \quad \psi(m') = \psi(m'').$$

Подставляя сюда выражения для $\varphi(m)$ и $\psi(m)$, после элементарных преобразований и сокращения на $m' - m''$ $(m' \neq m'')$ получаем

$$\rho m'm''(m'+m'') + (2\rho+1+G\rho)m'm'' + 1 = 0, \tag{18}$$

$$\rho^2 m'm''(m'+m'') + (2\rho+\rho^2)m'm'' + 1 = 0. \tag{19}$$

Вычитая из (19) домноженное на ρ (18) и находя из получившегося выражения и из (18) $m'm''$ и $m'+m''$, получаем

$$m'm'' = -\frac{1-\rho}{\rho(1-\rho-G\rho)}, \quad m'+m'' = \frac{\rho^2-G\rho-1}{\rho(1-\rho)}.$$

Отсюда следует, что для существования точки самопересечения необходимо, чтобы m' и m'' были положительными корнями квадратного уравнения

$$m^2 + \frac{(1-\rho^2+G\rho)}{\rho(1-\rho)}m - \frac{1-\rho}{\rho(1-\rho+G\rho)} = 0. \tag{20}$$

Очевидно, не может существовать более двух значений, удовлетворяющих (20), и следовательно, более одной точки самопересечения (см. рис. 164).

Б) Пусть выполняется условие

$$1-\rho^2+G\rho<0.$$

Можно показать, что кривая S расположена целиком ниже асимптоты и не самопересекается.

Приложение II. Для вычисления ляпуновской величины в случае, когда O_2 — сложный фокус, приведем систему (1) в окрестности O_2 к стандартной форме. Пусть m_2, n_2 — координаты состояния равновесия O_2. Полагая $m-m_2=u$ и $n-n_2=v$, запишем систему (1) в новых переменных:

$$du/d\tau = au+bv+a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2+a_{30}u^3+a_{21}u^2v+a_{12}uv^2+a_{03}v^3,$$

$$dv/d\tau = cu+dv+b_{20}v^2+b_{11}uv+b_{02}u^2+b_{30}u^3+b_{21}u^2v+b_{12}uv^2+b_{03}v^3$$

(τ — новый параметр).

Путем элементарных вычислений получаем

$$a=\frac{G\rho n_{02}m_2}{(\rho m_2+1)^2},\quad b=Gm_2,\quad a_{20}=\frac{G\rho n_{02}}{(\rho m_2+1)^3},\quad a_{11}=G,$$

$$a_{30}=\frac{G\rho^2 n_{02}}{(\rho m_2+1)^4},\quad c=\frac{-n_{01}}{m_2+1},\quad d=-m_2-1,\quad b_{11}=-1,$$

$$a_{02}=a_{21}=a_{12}=a_{03}=b_{20}=b_{02}=b_{30}=b_{21}=b_{12}=b_{03}=0.$$

Подставляя значения коэффициентов в формулу для первой ляпуновской величины L_1, воспользуемся очевидными соотношениями

$$a=-d=m_2+1,\quad a_{20}=\frac{a}{m_2(\rho m_2+1)},$$

$$a_{30}=\frac{\rho a}{m_2(\rho m_2+1)^2},\quad n_{01}=\frac{(m_2+1)^2(\rho m_2+1)}{G\rho m_2}+m_2+1.$$

Учитывая условия $\sigma=0$, $\Delta>0$, получаем после элементарных вычислений по формуле для L гл. 11 и отбрасывания индекса у m

$$L(m)=\frac{\pi(m+1)}{4\Delta\sqrt{\Delta}}\frac{f(m)}{m(\rho m+1)^2},$$

где

$$f(m)=\rho(\rho+G\rho-1)m^2+2(\rho-1-G\rho)m+\rho-1.$$

§ 4. Симметричный полет самолета в вертикальной плоскости (задача Н. Е. Жуковского). Будем рассматривать систему [148, 42, 45]

$$d\varphi/dt=\rho-\cos\varphi=P,\quad d\rho/dt=2\rho(\lambda-\mu\rho-\sin\varphi)=Q \qquad (1)$$

для значений параметров $\mu\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 1$.

В цилиндрическом фазовом пространстве (на полосе $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $\rho\geqslant 1$ с отождествленными краями) состояния равновесия будут

$$O_1(-\pi/2,\ 0),\ O_2(\pi/2,\ 0),\ O_3(\varphi_3,\ \rho_3),\ O_4(\varphi_4,\ \rho_4),$$

где

$$\rho_{3,4}=\cos\varphi_{3,4}=\frac{\lambda\mu\pm\sqrt{1+\mu^2-\lambda^2}}{1+\mu^2}$$

и знак плюс перед корнем соответствует точке O_3.

В пространстве параметров на кривой $1+\mu^2-\lambda^2=0$ сливаются точки O_3 и O_4, а на прямой $\lambda=1$ — точки O_4 и O_2. Выше кривой $1+\mu^2-\lambda^2=0$ система (1) имеет два состояния равновесия: O_1 — седло и O_2 — неустойчивый узел. Ниже кривой — четыре особых точки: O_1, O_2, O_3 — узел или фокус, O_4 — седло.

Слияние особых точек — простейшая бифуркация системы (1). Другие возможные бифуркации связаны со сменой устойчивости состояния равновесия O_3, с бифуркациями сепаратрис (сепаратрисы, идущие из седла в седло) и появлением предельных циклов из бесконечности, из петли сепаратрисы, из сгущения траекторий и из сепаратрисы особой точки седло-узел. Все эти бифуркации могут быть прослежены для системы (1).

1. Состояние равновесия O_3 будет иметь чисто мнимые корни характеристического уравнения для точек кривой $\sigma_3 \equiv (P'_\varphi + Q'_\rho)_3 = 0$, $P'_\varphi Q'_\rho - P'_\rho Q'_\varphi > 0$, где вместо ρ и φ должны быть подставлены координаты точки O_3. Кривая $\sigma_3 = 0$ представляется уравнением

$$\lambda(1-2\mu^2) = 3\mu\sqrt{1+\mu^2-\lambda^2}.$$

Она начинается в точке $(\mu=\sqrt{1/5},\ \lambda=1)$ и заканчивается на кривой $1+\mu^2-\lambda^2=0$, которой она касается в точке $B(\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2})$. При переходе через кривую $\sigma_3=0$ в направлении возрастания μ фокус из неустойчивого становится устойчивым, и из него появляется неустойчивый предельный цикл. Первая ляпуновская величина для точек кривой $\sigma_3=0$ имеет значение

$$\alpha_3 = \frac{\pi\lambda^2(1+4\mu^2)}{3\mu\sqrt{2(1-2\mu^2)}} > 0.$$

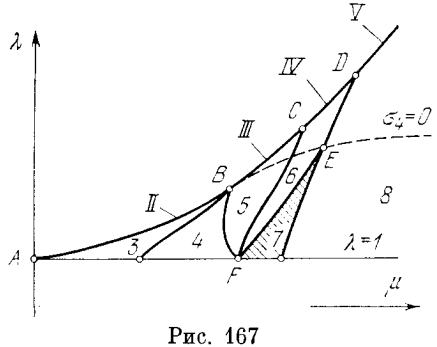


Рис. 167

2. Проследим за изменением качественной структуры и бифуркациями при движении точки в пространстве параметров вдоль кривой $1+\mu^2-\lambda^2=0$. Точкам на этой кривой соответствует сложная особая точка, возникшая в результате слияния O_3 и O_4. Это будет особая точка типа седло-узел для всех точек кривой, за исключением двух: точки $(\mu=0,\ \lambda=1)$, для которой в фазовом пространстве сливаются три особые точки, и точки B (рис. 167) — вырожденного седло-узла. Качественная картина разбиения фазового пространства на траектории будет определяться наличием или отсутствием предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр, и расположением сепаратрис, ограничивающих узловую область особой точки седло-узел. На рис. 168 изображе-

ны структуры, осуществляющиеся вдоль кривой при возрастании параметра μ.

Для точки $A(0, 1)$ пространства параметров λ, μ (см. рис. 167) картина разбиения фазового цилиндра на траектории представлена на рис. 168, *I* (см. пример 1 § 3 гл. 14). Предельных циклов нет (это вытекает из расположения контактной кривой рассматриваемой системы и консервативной системы $\mu = \lambda = 0$) (см. гл. 6, § 5). Есть только две особые точки: седло O_1 и сложная особая точка O_{234} $(\pi/2, 0)$. На куске AB кривой будет осуществляться структура разбиения, представленная на рис. 168, *II*. При переходе от точки A к точкам куска AB осуществляются две бифуркации: 1) от сложной особой точки отделяется особая точка типа седло-узла с неустойчивой узловой областью, так как на куске AB будет $\sigma_{34} \equiv (P'_\varphi + Q'_\rho)_{34} = (1 - 2\mu^2)/\lambda > 0$; 2) из бесконечности появляется устойчивый предельный цикл, так как в уравнении появляется член $-\mu\rho$, и бесконечность становится неустойчивой. В точке B происходит бифуркация: точка становится вырожденной, и исчезает узловая область. Внешним признаком этого служит обращение в нуль величины σ_{34}. При переходе через точку B вдоль кривой в направлении возрастающих μ особая точка седло-узел с неустойчивой узловой областью превращается в седло-узел с устойчивой узловой областью, так как величина σ_{34} меняет знак и становится отрицательной. Качественная структура фазового пространства, представленная на рис. 168, *III*, будет существовать на некотором куске кривой, примыкающем к точке B справа.

Для прослеживания дальнейших бифуркаций вдоль кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ существенным является выяснение качественной структуры разбиения на траектории при больших μ и λ. Можно показать, что для больших μ и λ качественная структура будет такая, как на рис. 168, *V*. ω-сепаратриса седло-узла имеет всюду отрицательный наклон. Предельных циклов нет (см. приложение I). На рис. 168 представлены качественные структуры, последовательно переходящие одна в другую при возрастании параметров вдоль рассматриваемой кривой. Сепаратриса седло-узла при этом проходит через негрубые расположения, представленные на рис. 168. На рис. 168, *III—IV* ω-сепаратриса седло-узла идет в седло O_1. На рис. 168, *IV—V* совпадают α- и ω-сепаратрисы седло-узла, образуя замкнутый контур, охватывающий цилиндр. При возникновении петли к ней стягивается устойчивый предельный цикл (так как для седло-узла на куске кривой справа от точки B будет $\sigma_{34} < 0$ (см. гл. 10)).

3. Проследим за сменой качественных структур и бифуркациями при возрастании μ вдоль прямой, соответствующей некоторому фиксированному значению λ из интервала $1 < \lambda < \sqrt{3/2}$ (прямая располагается ниже точки B). Последовательность структур

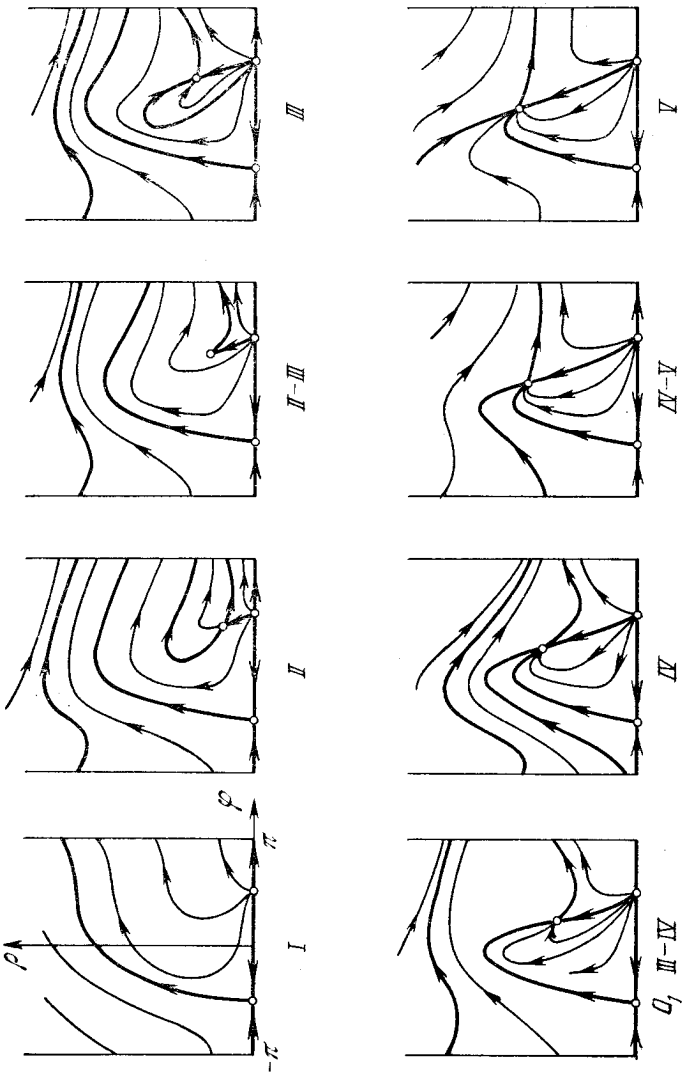


Рис. 168

при возрастании μ представлена на рис. 169. Для $\mu = 0$ картина разбиения фазового пространства на траектории представлена на рис. 169, *1*.

1) Предельных циклов нет, есть только две особые точки: O_1 — седло, O_2 — неустойчивый узел. При достаточно малом изменении μ число и характер особых точек не изменяются, но структура фазового пространства в целом изменится. В уравнении появится член $-\mu\rho$, и бесконечность станет неустойчивой. Из бесконечности появится устойчивый предельный цикл. Эта структура изображена на рис. 169, *2*.

2) При возрастании параметра μ точка в пространстве параметров попадает на кривую $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$, и из сгущения траекторий возникает сложная особая точка седло-узел с неустойчивой узловой областью, изображенная на рис. 169, *2—3*. При дальнейшем возрастании μ сложная особая точка распадается на две простые: седло и неустойчивый узел (рис. 169, *3*).

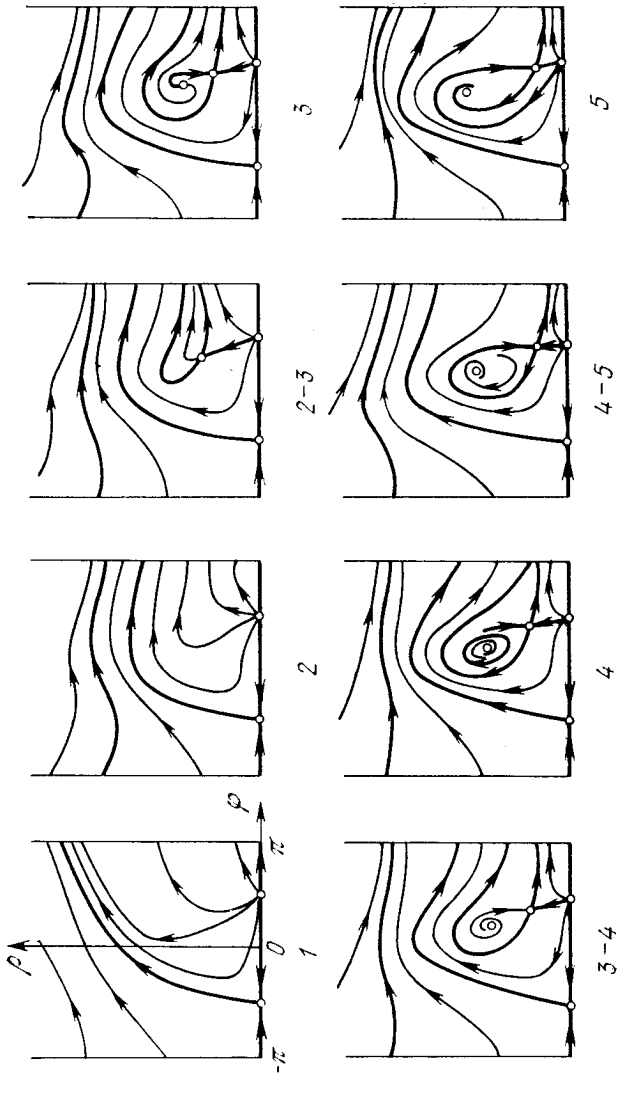
Следующая бифуркация прослеживается при переходе точки через кривую $\sigma_3 = 0$; при этом из состояния равновесия при возрастании μ появляется неустойчивый предельный цикл. Бифуркационному значению параметра μ соответствует разбиение на траектории, представленное на рис. 169,*3—4* (с особой точкой — сложным фокусом), а значениям справа от кривой $\sigma_3 = 0$ (не слишком далеко от кривой) — картина, изображенная на рис.169, *4*. Вокруг устойчивого фокуса появился предельный цикл.

Дальнейшие бифуркации при возрастании μ будут бифуркациями сепаратрис. Проследим эти бифуркации.

На прямой $\varphi = \arcsin \lambda^{-1}$, расположенной на полосе $(-\pi, \pi)$ между точками O_3 и O_4 (на этой прямой сливаются точки O_3 и O_4, если $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$), отметим выше изоклины вертикальных наклонов точки пересечения прямой с тремя сепаратрисами седла O_4 и α-сепаратрисой седла O_1. Если параметр μ взят достаточно близко к кривой $\sigma_3 = 0$, то в порядке возрастания координаты ρ точки будут расположены в следующем порядке: P_1 — на ω-сепаратрисе седла, P_2 — на α-сепаратрисе седла, выходящей из седла влево, P_3 — на α-сепаратрисе седла O_1 и P_4 — на α-сепаратрисе седла, выходящей из седла вправо. При возрастании параметра μ состояния равновесия O_3 и O_4 монотонно расходятся по неподвижной изоклине вертикальных наклонов:

$$\partial\varphi_3/\partial\mu = -\rho_3(1 + \mu^2 - \lambda^2)^{-1/2} < 0,$$
$$\partial\varphi_4/\partial\mu = \rho_4(1 + \mu^2 - \lambda^2)^{-1/2} > 0,$$

а векторное поле по обе стороны изоклины поворачивается в противоположных направлениях: сверху — по часовой стрелке, снизу — против. Точки P_1, P_3 и P_4 лежат на сепаратрисах, не пересекающих изоклину вертикальных наклонов, и поэтому на прямой


p
φ
π
0
-π
1
2
2-3
3
3-4
4
4-5
5

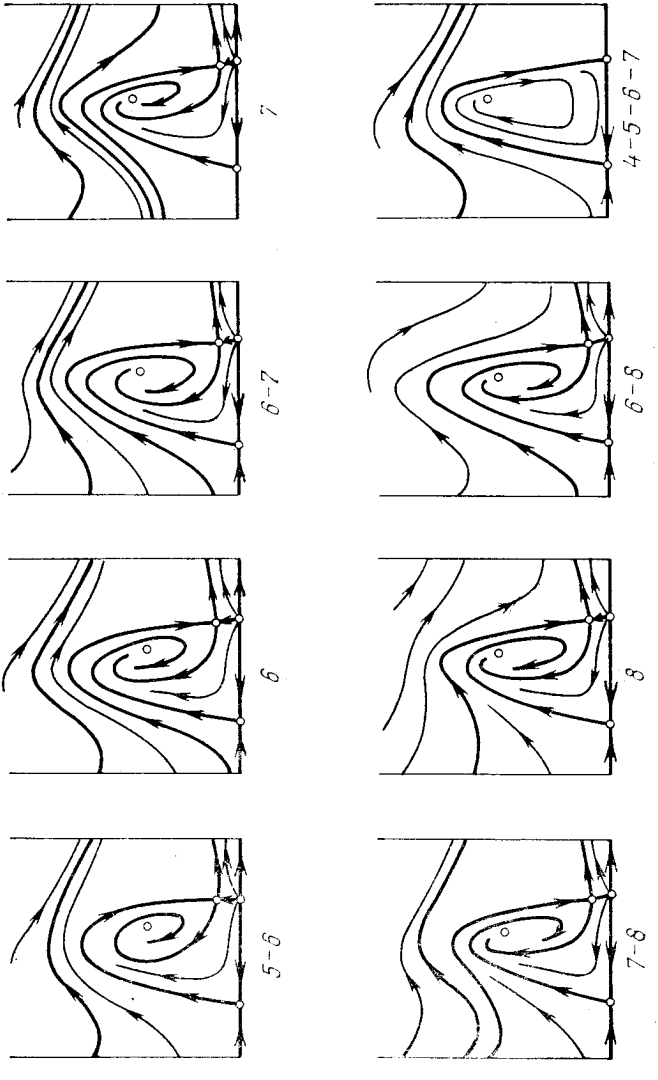


Рис. 169

$\varphi = \arcsin \lambda^{-1}$ с возрастанием μ точка P_1 будет монотонно подниматься, а точки P_3 и P_4 — монотонно опускаться.

Единственно возможная последовательность бифуркаций при возрастании μ такая, при которой слияние точек P_1 и P_2 предшествует слиянию P_1, P_3 и P_1, P_4. Очевидно также, что если последняя из перечисленных бифуркаций осуществляется, то осуществляются и остальные. Осуществимость последней бифуркации следует из того, что при достаточно больших μ (когда максимум изоклины горизонтальных наклонов, равный $(\lambda+1)/\mu$, будет меньше максимума изоклины вертикальных наклонов, равного единице) ω-сепаратриса седла будет иметь всюду отрицательный наклон, и, следовательно, точка P_1 будет лежать заведомо выше точки P_4. Очевидно, что в этом случае и предельные циклы, охватывающие фазовый цилиндр, не могут существовать. Осуществляется структура разбиения фазового цилиндра на траектории, представленная на рис. 169, *8*. Слиянию точек P_1, P_3 и P_1, P_4 соответствуют расположения сепаратрис, представленные на рис. 169, *5—6* и 169, *6—7*. Поведение сепаратрис с точностью до четного числа предельных циклов определяет здесь качественную структуру. Значения параметра μ, соответствующие разбиениям рис. 169, *5—6* и рис. 169, *6—7*, будут бифуркационными. При изменении μ от этих бифуркационных значений в направлении возрастания или убывания векторное поле на сепаратрисах поворачивается соответственно по или против часовой стрелки, и сепаратрисы, идущие из седла в седло, разрушаются. Соответствующие грубые структуры изображены на рис. 169, *5*—169, *7*.

Заметим, что хотя расположение сепаратрис на рис. 169, *7* и определяет качественную структуру лишь с точностью до четного числа предельных циклов, можно утверждать, что здесь одновременно должны существовать и устойчивый, и неустойчивый предельные циклы, охватывающие цилиндр. Неустойчивый предельный цикл появляется из петли сепаратрисы, охватывающей цилиндр, так как седловая величина $\sigma_4 = P'_\varphi + Q'_\rho$ положительна, и при разрушении петли к ней может стянуться или из нее появиться только неустойчивый предельный цикл (кривая $\sigma_4 = 0$ представляется уравнением $\lambda(1-2\mu^2) = -3\mu\sqrt{1+\mu^2-\lambda^2}$; она целиком расположена в полосе $\sqrt{3/2} < \lambda < 3/2$, т. е. вне рассматриваемого интервала изменения λ).

При дальнейшем увеличении параметра μ векторное поле на каждом из предельных циклов поворачивается по часовой стрелке; при этом устойчивый предельный цикл опускается, неустойчивый — поднимается. При любом фиксированном λ в рассматриваемом интервале существует единственное бифуркационное значение μ^*, при котором устойчивый и неустойчивый предельные циклы сливаются, образуя двойной полуустойчивый цикл. Это — последняя бифуркация, возможная при возрастании параметра μ.

При дальнейшем возрастании μ векторное поле на двойном цикле поворачивается по часовой стрелке и двойной предельный цикл исчезает. Негрубая структура разбиения на траектории, соответствующая значению $\mu = \mu^*$, изображена на рис. 169, *7—8*. Для всех $\mu > \mu^*$ осуществляется разбиение на траектории, представленное на рис. 169, *8*.

4. Таким же образом прослеживаются бифуркации в зависимости от μ при любых фиксированных $\lambda > \sqrt{3/2}$. Число возможных бифуркаций здесь уменьшается, но появляются две новые.

1) При убывании μ от значений, соответствующих разбиению, представленному на рис. 168, *V* (для участка граничной кривой выше точки *D* на рис. 167), исчезает особая точка седло-узел и из α-сепаратрисы седло-узла появляется устойчивый предельный цикл (при обратном изменении μ устойчивый предельный цикл превращается в α-сепаратрису седло-узла).

2) Так как кривая $\sigma_4 = 0$ располагается выше прямой $\lambda > \sqrt{3/2}$ и образование петли сепаратрисы для некоторых значений λ может осуществиться при $\sigma_4 < 0$, то для этих значений λ переход от разбиения типа 169, *6* к типу 169, *8* при возрастании μ будет происходить путем стягивания устойчивого предельного цикла к петле сепаратрисы, охватывающей цилиндр. При этом возникает новая негрубая структура, разделяющая структуры 169, *6* и 169, *8*, представленная на рис. 169, *6—8*. Для структуры 169, *6—8*, как и для структуры 169, *6—7*, и α- и ω-сепаратрисы седла O_4 образуют петлю, охватывающую цилиндр, но нет устойчивого предельного цикла.

В области $1 + \mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\mu \geqslant 0$ при любых λ будут осуществляться структуры *1* и *2* рис. 169. В области $(1 + \lambda)/\mu < 1$ — структура *8* рис. 169. Смена структур будет происходить при изменении μ в интервале между кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ и прямой $1 + \lambda - \mu = 0$ $(\sqrt{\lambda^2 - 1} < \mu < \lambda + 1)$.

Множество точек, соответствующее негрубым бифуркационным картинам *4—5*, *5—6*, *6—7* и *6—8* на рис. 169, образует негрубые кривые {*4.5*}, {*5.6*}, {*6.7*} и {*6.8*} [4]) в плоскости (μ, λ) (см. рис. 167). Эти кривые имеют положительный наклон. Последнее следует из того, что при возрастании параметров μ и λ в отдельности векторное поле на сепаратрисах, идущих из седла в седло и не пересекающих контактную кривую (изоклину вертикальных наклонов), поворачивается в противоположных направлениях. Только при одновременном возрастании или убывании μ и λ поворот векторного поля вдоль сепаратрис, идущих из седла в седло, может быть не монотонным и не разрушающим сепаратрисы.

[4]) Где символ $\{k.l\}$ означает кривую, разделяющую области, обозначенные соответственно числам k и l.

Бифуркационные кривые {*4.5*} и {*5.6*} начинаются и заканчиваются на линиях $\lambda = 1$ и $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$.

Кривая {*4.5*} не выходит из полосы $1 < \lambda < \sqrt{3/2}$ и заканчивается в точке *B*. Сепаратрису сложной особой точки на рис. 168, *II—III* можно рассматривать как вырождение сепаратрисы точки O_4 на рис. 169,*4—5* при предельном переходе, сохраняющем при сближении точек O_3 и O_4 петлю сепаратрисы. Кривая {*5.6*} заканчивается в точке *C* (см. рис. 167). В точке *C*, как и на кривой {*5.6*}, сепаратриса седла O_1 идет в седло O_4 (см. рис. 168, *III—IV*, 169, *5—6*). Ни для одной точки любой прямой $\lambda = \text{const}$, проходящей выше точки *C*, это уже невозможно.

Кривая {*6.7*} начинается на прямой $\lambda = 1$ и заканчивается на кривой $\sigma = 0$. Дальше она превращается в кривую {*6.8*}, заканчивающуюся в точке *D* кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$. В точке *D*, как и на кривых {*6.7*} и {*6.8*}, α- и ω-сепаратрисы седла O_4 образуют петлю. Ни для одной точки любой прямой $\lambda = \text{const}$, проходящей выше точки *D*, это невозможно.

Кривые {*4.5*}, {*5.6*} и {*6.7*} на прямой $\lambda = 1$ пересекаются в одной точке *F*. В этой точке осуществляется структура разбиения на траектории высокой степени негрубости, представленная на рис. 169, *4—5—6—7*. Точка $(\pi/2, 0)$ — сложная особая точка. Только от структуры *4—5—6—7* с петлей сепаратрисы можно сколь угодно малым изменением параметров перейти к негрубым структурам *4—5*, *5—6* или *6—7*, но, так как изменение μ разрушает петлю, на прямой $\lambda = 1$ может существовать лишь единственная точка со структурой, содержащей петлю сепаратрисы,— точка пересечения кривых {*4.5*}, {*5.6*} и {*6.7*}.

Множество точек, соответствующих бифуркационной картине 169,*7—8* с двойным полуустойчивым предельным циклом, на рис. 167 образует непрерывную кривую {*7.8*} с положительным наклоном. Кривая {*7.8*} начинается на прямой $\lambda = 1$ и заканчивается в точке пересечения кривых {*6.7*} и {*6.8*}, служащих продолжением одна другой, с кривой $\sigma_4 = 0$ (точка *E* на рис. 167).

На рис. 167 представлена (без соблюдения масштаба) схема расположения бифуркационных кривых в плоскости (μ, λ) для рассматриваемого случая $\mu \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 1$.

Для качественных картин в различных областях на рис. 167 остается неустраненной логическая возможность того, что число предельных циклов в действительности окажется бóльшим на четное число циклов. Используя конкретные особенности уравнения (1), для некоторых кусков плоскости параметров возможно устранить эту неопределенность.

а) *Если* $\lambda > 3\mu$, *то система* (1) *имеет единственный предельный цикл, охватывающий цилиндр.*

Введем в правые части системы (1) множитель $\rho^{-1/2}$ (этим лишь вводится вместо t другой параметр, другое «время»). Ха-

рактеристический показатель предельного цикла, охватывающего цилиндр (если один или несколько таких циклов существуют), можно представить в виде

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T [(\rho^{-1/2}P)'_\varphi + (\rho^{-1/2}Q)'_\rho]\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \rho^{-1/2}(\lambda - 3\mu\rho)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda - 3\mu\rho}{\rho - \cos\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} F(\rho, \varphi)\,d\varphi.$$

Легко проверить, что $\partial F/\partial\rho \leqslant 0$ при $\lambda \geqslant 3\mu$, и, следовательно, характеристический показатель с возрастанием ρ может изменить знак не более одного раза. Так как в рассматриваемой области число предельных циклов может быть только нечетным, то, следовательно, цикл один.

б) *Если* $\lambda \geqslant 3\mu/\sqrt{1+4\mu^2}$, $\mu > 1/\sqrt{2}$, $1 + \mu^2 - \lambda^2 > 0$, *то система* (1) *не имеет предельных циклов, охватывающих состояние равновесия.*

Если прямая $\rho = \lambda/(3\mu)$, на которой обращается в нуль выражение

$$\sigma \equiv (\rho^{-1/2}P)'_\varphi + (\rho^{-1/2}Q)'_\rho \equiv \rho^{-1/2}(\lambda - 3\mu\rho),$$

проходит ниже седла O_4 (и ниже левой α-сепаратрисы седла O_4, ограничивающей снизу область возможного расположения предельного цикла, охватывающего точку O_3), то в силу критерия Дюлака предельный цикл вокруг точки O_3 не может существовать. Условие $\lambda/(3\mu) \leqslant \rho_4$ в раскрытом виде дает первые два из написанных выше неравенств. Последнее неравенство есть условие существования точек O_3 и O_4.

в) *Если* $\lambda \geqslant 3/2$, *то система* (1) *не имеет предельных циклов, охватывающих состояние равновесия и не может иметь более одного цикла, охватывающего цилиндр.*

Если прямая $\rho = \lambda/(3\mu)$ проходит ниже минимума изоклины горизонтальных наклонов, то из критерия Дюлака следует не только отсутствие предельных циклов, охватывающих состояние равновесия ($\rho_{\min} = (\lambda - 1)/\mu$ лежит ниже точки O_4), но также и единственность предельного цикла, охватывающего цилиндр, так как в этом случае этот цикл не может пересекать прямую $\rho = \lambda/(3\mu)$. Условие $\lambda/(3\mu) \leqslant (\lambda - 1)/\mu$ эквивалентно условию $\lambda \geqslant 3/2$.

Приложение I. По направлению

$$\varkappa_2 = -2\mu^2/\lambda = 2(1 - \lambda^2)/\lambda$$

входит в особую точку ω-сепаратриса седло-узла. Касательная к ней в особой точке (φ_0, ρ) будет иметь уравнение

$$\rho - \rho_0 = \varkappa_2(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi_0 = \arcsin\lambda^{-1}, \quad \rho_0 = \mu/\lambda.$$

Касательная пересекает ось ρ в точке с ординатой

$$\rho_1 = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{2(\lambda^2-1)}{\lambda}\arcsin\frac{1}{\lambda}.$$

Если ω-сепаратриса седло-узла попадает в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов $(\mu+1)/\mu$, то, очевидно, предельные циклы, охватывающие цилиндр, не могут существовать. Это заведомо осуществляется для значений параметров, при которых выполняется неравенство $(1+\mu)/\mu < \rho_1$ и для которых ω-сепаратриса на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ лежит выше касательной. При $\lambda \to \infty$ будет $(1+\mu)/\mu \to 1$ и $\rho_1 \to 3$, и, следовательно, указанное неравенство выполняется для достаточно больших λ.

Покажем, что ω-сепаратриса для достаточно больших λ лежит выше касательной. Рассмотрим точки пересечения изоклины направления $\varkappa_2$ и касательной. Исключая ρ и заменяя ρ_0 и $\varkappa_2$ их значениями, приходим к уравнению

$$[1-2\mu(\varphi-\varphi_0)][1+2\mu^3(\varphi-\varphi_0)-\lambda\sin\varphi] = \mu[\lambda\cos\varphi-\mu+2\mu^2(\varphi-\varphi_0)].$$

Левая и правая части этого уравнения, рассматриваемые как функции φ, в точке $\varphi=\varphi_0$ обращаются в нуль и имеют совпадающие первые производные. Разность значений вторых производных сохраняет знак при достаточно больших λ на всем интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, т. е. изоклина и касательная не пересекаются. Изоклина лежит ниже касательной (величина ρ_* — корень уравнения, определяющего ординату точки пересечения изоклины $\varkappa_2$ с осью ρ, стремится к единице при $\lambda \to \infty$, и, следовательно, при больших λ будет $\rho_* < \rho_1$).

Так как ω-сепаратриса вблизи точки $\varphi=\varphi_0$ при больших λ лежит выше касательной (это будет показано), а изоклина направления $\varkappa_2$ — ниже касательной и так как изоклина и касательная на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ не пересекаются, то, очевидно, ω-сепаратриса также не может пересекаться с касательной и располагается выше касательной на всем интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$.

Указанное расположение сепаратрисы и касательной вблизи точки следует из того, что

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0}\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{\mu(8\mu^4-5\mu^2-1)}{\lambda(2\mu^2-1)}, \qquad \lim_{\varphi\to\varphi_0}\frac{d\rho}{d\varphi} = \varkappa_2,$$

и, следовательно, при больших λ на ω-сепаратрисе $d^2\rho/d\varphi^2 > 0$ вблизи точки $\varphi=\varphi_0$.

§ 5. Система, описывающая динамику проточного химического реактора. Система [125, 129]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x^n e^{-1/y} + (1-x) = P(x, y), \\ \dot{y} &= \lambda x_0 \mu x^n e^{-1/y} - \mu(y-y_0) = Q(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

описывает динамику химического реактора полного перемешивания.

По смыслу задачи $x > 0$, $y > 0$, $\mu > 1$ и все остальные параметры n, λ, x_0, y_0 — положительные (не обязательно целые).

1. Число и характер состояний равновесия. В рассматриваемой задаче $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — трансцендентные функции, поэто-

му решение вопроса о возможном числе состояний равновесия требует специального рассмотрения.

Найдя из соотношения $P(x, y) = -\lambda x^n e^{-1/y} + (1-x) = 0$ величину

$$y = \frac{1}{\ln \frac{\lambda x^n}{1-x}} = \frac{1}{\varphi(x)}$$

и подставляя это выражение в $Q(x, y) = 0$, находим, что абсциссы состояний равновесия удовлетворяют соотношению

$$Q\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right) = \mu\left[y_0 - \left(\frac{1}{\varphi(x)} - x_0(1-x)\right)\right] = 0. \qquad (2)$$

Решить это трансцендентное уравнение относительно x сложно. Мы поступим иначе: именно, рассмотрим вспомогательную плоскость (x, y_0)[5]). На этой плоскости соотношение (2) определяет семейство кривых, зависящих от параметра x_0,

$$y_0 = F(x, x_0) = \left(\frac{1}{\varphi(x)} - x_0(1-x)\right). \qquad (3)$$

Кривые (3), соответствующие различным x_0, как нетрудно видеть, не имеют общих точек. При каждом фиксированном x_0 абсциссы точек пересечения соответствующей кривой (3) с некоторой данной прямой $y_0 = C$ являются абсциссами состояний равновесия системы (1). В рассматриваемой задаче имеет смысл лишь значение x, $a < x < 1$, где a — корень уравнения

$$\lambda x^n + x - 1 = 0. \qquad (4)$$

Это вытекает из того, что при $y \to +\infty$

$$P(x, y) = -\lambda x^n e^{-1/y} + 1 - x = 0$$

обращается в (4). Значения $x > 1$ также не имеют смысла, так как из $P(x, y) = 0$ при значениях $x > 1$ мы получаем

$$e^{-1/y} = \frac{1-x}{\lambda x^n} < 0,$$

что, очевидно, невозможно ($e^{-1/y} > 0$ всегда). (Отсюда следует, что изоклина $P(x, y) = 0$ целиком лежит в полосе $a \leqslant x \leqslant 1$.)

Из выражения для $F(x, x_0)$ следует, что для каждой из кривых (3) $y_0(a) = +\infty$, $y_0(1) = 0$.

Далее, можно показать, проводя элементарные вычисления, что вторая производная от функции $F(x, x_0)$ обращается в нуль

---

[5]) Использование такой вспомогательной плоскости (один параметр и одна координата) не является частным приемом, и, как правило, естественным образом используется в разных задачах.

только один раз при значении x, являющемся корнем уравнения

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{-n+2nx-(n-1)x^2}{2[n(1-x)+x]^2}.$$

Отсюда следует, что каждая из кривых (3) имеет не более двух экстремумов и пересекается с любой из прямых $y_0 = C$ не более чем в трех точках. Система имеет, следовательно, не более трех состояний равновесия. Рассмотрим, какие из состояний равновесия — узлы и фокусы и какие — седла. Дифференцируя по x выражение (2), где $y = 1/\varphi(x)$ есть решение уравнения $P(x, y) = 0$, и принимая во внимание, что $\frac{d}{dx}\frac{1}{\varphi(x)} = -\frac{P'_x}{P'_y}$, получаем

$$-\mu F'_x = Q'_x\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right) - Q'_y\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)\frac{d}{dx}\frac{1}{\varphi(x)} =$$

$$= \frac{P'_y\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)Q'_x\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right) - Q'_y\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)P'_x\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)}{P'_y\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)} =$$

$$= \frac{-\Delta\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)}{P'_y\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)}, \qquad (5)$$

где $P'_y\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right) < 0$ и $\Delta(x, y) = P'_x Q'_y - Q'_x P'_y$.

Таким образом, знак $\Delta(x, y)$ при заданных x_0 и y_0 в состоянии равновесия, имеющем абсциссу x, противоположен знаку производной в точке кривой (3) с тем же x и y_0. Рассмотрим на плоскости (x, y_0) кривую, являющуюся геометрическим местом экстремумов кривых (3).

Эта кривая очевидно получается, если мы исключим x_0 из уравнений

$$y_0 = F(x, x_0) \text{ и } F'_x(x, x_0) = 0. \qquad (6)$$

Уравнение этой кривой будет

$$y_0 = \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{n(1-x)+x}{x\varphi^2(x)} = \Psi(x). \qquad (7)$$

Ее вид установлен в приложении I. Она пересекает ось x при некотором значении $x_1 > a > 0$. Будем обозначать через Δ^* часть кривой (7), лежащую над осью x (только эта часть рассматривается при сделанных предположениях относительно возможных значений переменных и параметров). На рис. 170 изображено семейство кривых (3) (тонкими линиями) и кривая Δ^*

(сплошной толстой линией). Из выражения для $F(x, x_0)$ следует, что большему значению x_0 соответствует ниже находящаяся кривая (3). Если x_0 мало, то кривая (3) расположена высоко, не пересекает кривую Δ^* и не имеет экстремумов. При больших x_0 кривая (3) пересекает линию Δ^* и имеет в точках пересечения максимум и минимум. Нетрудно видеть, что для точек под

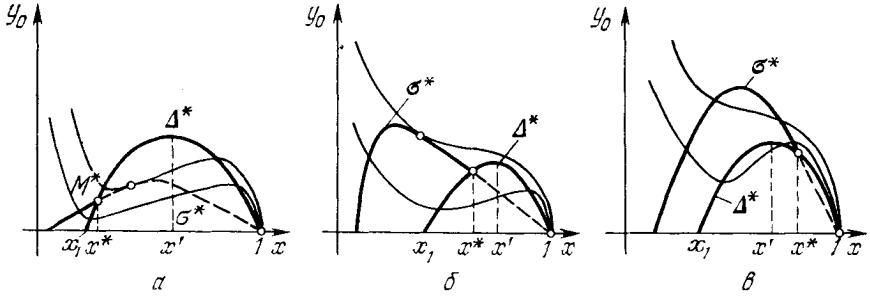


Рис. 170

линией Δ^* знак $F'_x(x, x_0)$ положителен (см. формулу (5)), состояния равновесия — седла, а для точек над линией Δ^* знак $F'_x(x, x_0)$ отрицателен, состояния равновесия — узлы или фокусы.

В точках линии Δ^*, в которых $F'_x(x, x_0) = 0$, соответствующие состояния равновесия кратные, причем в точках линии Δ^*, не являющихся максимумом этой линии,— двукратные, а в точке, являющейся максимумом,— трехкратное.

Перейдем к выяснению устойчивости узлов и фокусов и установлению знака седловой величины в седле. Для этого выразим для каждого состояния равновесия

$$\sigma = -P'_x - Q'_y \tag{8}$$

через координаты этого состояния равновесия. Для этого из выражений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

выразим y и x_0 через x и остальные параметры. Мы получим

$$\sigma = \mu y_0 \varphi^2(x) - \mu\varphi(x) + \frac{n(1-x) + (1+\mu)x}{x}.$$

Рассмотрим на плоскости (x, y_0) кривую $\sigma = 0$, т. е. кривую

$$y_0 = \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{n(1-x) + (1+\mu)x}{\mu x \varphi^2(x)} = f(x). \tag{9}$$

Нетрудно установить, что эта кривая на плоскости (x, y_0) имеет вид, представленный на рис. 170 (см. приложение II). Часть кривой, лежащей над осью x, будем обозначать через σ^*.

Очевидно, если точка, соответствующая состоянию равновесия, расположена под кривой σ^*, то для этого состояния равновесия $\sigma<0$ (и значит, узлы и фокусы неустойчивы), если над кривой σ^*, то $\sigma>0$ (и значит, узлы и фокусы устойчивы).

Если точка, соответствующая состоянию равновесия, лежит на кривой σ^*, то для нее $\sigma=0$, и если при этом для нее $\Delta>0$, то это состояние равновесия — сложный фокус. Так как кривая Δ^* зависит только от параметров λ и n, а кривая σ^* — еще и от параметра μ, то взаимное расположение этих кривых может быть различным.

На рис. 170 представлены различные возможные случаи, которые мы обсудим ниже.

До сих пор мы имели дело с вспомогательной плоскостью (x, y_0). Однако нашей задачей является также установление разбиения пространства параметров на области с различной качественной структурой. В рассматриваемой задаче естественно рассматривать плоскость параметров (x_0, y_0) и ее разбиение при различных значениях параметров μ и λ.

Рассмотрим на плоскости (x_0, y_0) бифуркационную границу, соответствующую кратным состояниям равновесия. Для этого нужно, исключая x и y из соотношений

$$P(x, y)=0, \quad Q(x, y)=0, \quad \Delta(x, y)=P'_xQ'_y-Q'_xP'_y=0, \qquad (10)$$

получить соотношения между параметрами x_0, y_0. Однако в рассматриваемой задаче это сложно, а между тем параметрические уравнения этой границы могут быть получены просто.

Выражение для y_0 нами уже найдено (см. (7)), выражение для x_0 мы получим, находя x_0 из соотношения

$$F'_x(x, x_0)=\Delta\left(x, \frac{1}{\varphi(x)}\right)=0.$$

Таким образом, параметрические уравнения границы между областью одного и трех состояний равновесия даются уравнениями

$$\begin{aligned} y_0&=\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{n(1-x)+x}{x\varphi^2(x)}=\Psi(x),\\ x_0&=\frac{n(1-x)+x}{x(1-x)\varphi^2(x)}=\Phi(x). \end{aligned} \qquad (11)$$

Для $\Phi(x)$ имеем $\Phi(a)=\Phi(1)=+\infty$. Вычисляя $\Phi'(x)$, нетрудно установить, что $\Phi'(x)$ обращается в нуль только один раз одновременно с $\Psi'(x)$ при некотором значении $x=x'$. Это означает, что кривая (11) имеет точку возврата. Кроме того,

$$dy_0/dx_0=-(1-x)$$

есть возрастающая функция x; поэтому касательная вдоль линии (11) вращается монотонно.

Построенную по этим сведениям кривую на плоскости (x_0, y_0) будем обозначать через Δ (рис. 171). Она не меняется при изменении μ (этот параметр в уравнения (11) не входит). Точка возврата M соответствует наличию у системы (1) тройного состояния равновесия; все остальные точки кривой Δ — наличию

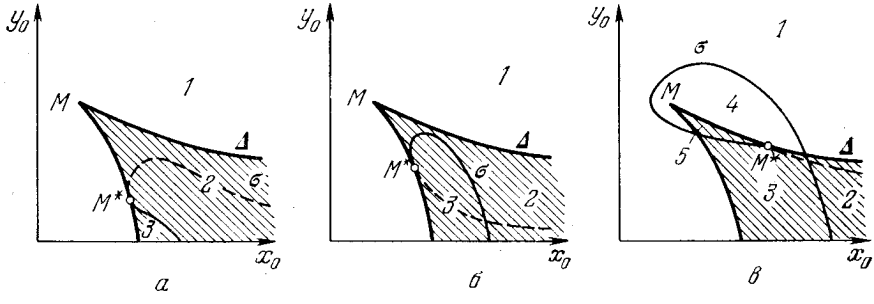


Рис. 171

двукратного состояния равновесия типа седло-узла (за исключением одной точки, о которой будет сказано ниже). В заштрихованной области система имеет три состояния равновесия, в незаштрихованной — одно.

Найдем теперь на плоскости (x_0, y_0) бифуркационную границу, соответствующую наличию состояния равновесия, для которого $\sigma = 0$. Для этого нужно исключить x и y из уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \quad \sigma = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) = 0.$$

Так же, как и в случае кривой Δ^*, здесь проще найти из этих уравнений параметрическое уравнение линии, которую будем обозначать через σ. Мы получаем

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{n(1-x) + (1+\mu)x}{\mu x \varphi^2(x)} = f(x), \\ x_0 &= \frac{n(1-x) + (1+\mu)x}{\mu x (1-x)\varphi^2(x)} = g(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Первое из этих выражений, очевидно, есть уравнение кривой σ^* (на плоскости (x, y_0)). Функция $g(x)$ имеет, как нетрудно показать, только один экстремум — минимум (см. приложение III).

В дальнейшем мы будем сопоставлять поведение кривых Δ^* и σ^* на плоскости (x, y_0) с поведением кривых Δ и σ на плоскости (x_0, y_0).

Нетрудно видеть, что кривые Δ^* и σ^* имеют общую точку при $x = 1$. Кроме того, мы получаем в уравнениях (7) и (9) одинаковые значения для x и y_0 при значении

$$x^* = \frac{n(\mu - 1)}{n(\mu - 1) + 1}.$$

Так как μ меняется от 1 до ∞, то, очевидно, значение x^* будет меняться от 0 до 1; при этом, однако, это значение будет соответствовать общей точке кривых Δ^* и σ^*, когда $x^* > x_1$ (Δ^* и σ^* лежат над осью x, а x_1 — общая левая точка кривой Δ^* с осью x).

При возрастании μ до ∞ общая точка кривых σ^* и Δ^* будет двигаться по кривой Δ^* вплоть до точки (1, 0). Считая n и λ фиксированными, укажем некоторые случаи расположения кривых Δ^* и σ^* на плоскости $(\bar{x}, y_0)$ и соответствующее им расположение кривых Δ и σ на плоскости $(\bar{x}_0, y_0)$ (кривые семейства (3) и кривая (11) при этом остаются неизменными, меняется только кривая σ^*).

1) При μ, близком к 1, кривая σ^* целиком лежит под кривой Δ^*; $\sigma = 0$ только в седле. Узлы и фокусы (им соответствуют на плоскости (x, y_0) точки над кривой Δ^*, а значит, в рассматриваемом случае и над кривой σ^*) устойчивы.

2) Пусть рассматриваются такие μ, при которых у кривых Δ^* и σ^* общая точка M^* существует, но максимумы кривых Δ^* и σ^* лежат справа от этой точки (штриховая часть линии σ^*, лежащая под Δ^*, очевидно, соответствует седлам с $\sigma = 0$; см. рис. 170, *а*). Для линии σ на плоскости (x_0, y_0) самопересечение отсутствует (см. приложение IV). При $x = x^*$ у кривых σ и Δ есть общая точка M^*, в которой эти кривые касаются (это можно проверить непосредственно по уравнениям этих кривых, а также вытекает из общей теории, см. гл. 11). Этой точке соответствует двукратная точка с $\sigma = 0$. Точкам кривой Δ по одну сторону от точки M^* соответствуют системы, имеющие седло-узел с устойчивой узловой областью, по другую сторону от точки M^* — с неустойчивой узловой областью. Сплошной части кривой σ соответствует наличие у системы сложного фокуса, штриховой — седла $\sigma = 0$ (см. рис. 171, *а*).

3) Абсцисса общей точки Δ^* и σ^* $x^* < x'$ (x' — абсцисса максимума Δ^*), но максимум σ^* лежит снаружи от кривой Δ^* (см. рис. 170, *б*). На плоскости (x_0, y_0) кривая σ имеет, как нетрудно видеть, самопересечение и общую точку M^* с кривой Δ [6]) (рис. 171, *б*). Отметим при этом, что, опираясь на монотонность поворота касательной вдоль кривой Δ и кривой σ, можно показать, что кривая σ может иметь с верхней частью кривой Δ не более двух общих точек пересечения. При этом эти точки не соответствуют системам, имеющим двукратное состояние равновесия с $\sigma = 0$, а соответствуют наличию у системы седло-узла и фокуса с $\sigma = 0$. (Эти общие точки Δ и σ соответствуют на кривых Δ и σ различным значениям x.)

---

[6]) При переходе (с изменением μ) от случая с отсутствием самопересечения к случаю с наличием самопересечения существует значение μ, при котором у кривой σ есть точка заострения, лежащая на кривой Δ.

4) Абсцисса общей точки Δ^* и σ^*, т. е. x^*, больше абсциссы максимума кривой Δ^*. Расположение линий Δ^* и σ^* на плоскости (x, y_0) показано на рис. 170, *в*, а соответствующее расположение на плоскости (x_0, y_0) — на рис. 171, *в*. При дальнейшем увеличении μ может быть еще одна возможность, при которой состояние равновесия с меньшей абсциссой устойчиво, а с большей — неустойчиво. Мы предоставляем читателю проследить возникновение такой возможности на плоскости (x, y_0) и соответствующую картину на плоскости (x_0, y_0). На рис. 171 в области *1* у системы (1) — единственное состояние равновесия, узел или фокус, в области *2* — три состояния равновесия, оба узла или фокуса устойчивы, в области *3* — фокус или узел с меньшей абсциссой неустойчив, фокус или узел с большей абсциссой устойчив, в области *4* — единственное состояние равновесия неустойчиво, в области *5* — три состояния равновесия, два неустойчивых узла или фокуса. Как уже указывалось, возможен еще случай, когда левое состояние равновесия — устойчивый фокус или узел, правое — неустойчивый.

2. Предельные циклы и петли сепаратрисы. Значениям x_0, y_0, лежащим на сплошной части линии σ (см. рис. 171), соответствует наличие сложного фокуса. При изменении x_0, y_0, при которых точка пересекает сплошную часть линии σ, фокус меняет устойчивость, при этом могут рождаться (или стягиваться) предельные циклы. Решение вопроса о числе и характере этих предельных циклов требует вычисления ляпуновской величины, что в рассматриваемой задаче весьма затруднительно.

Рассмотрим возможность существования предельного цикла, окружающего все три состояния равновесия. Непосредственно по правым частям системы (1) видно, что при малых y $dy/dt > 0$ (траектории направлены вверх), а при больших y $dy/dt < 0$. Следовательно, все траектории входят в прямоугольник, ограниченный прямыми $y = 0$, $y = y^*$, где y^* достаточно велико, $a \leqslant x \leqslant 1$ (a — величина, удовлетворяющая уравнению (4)). Поэтому при значениях параметров, при которых у системы существует единственный неустойчивый узел или фокус (это будет иметь место для значений параметров из области *1*) заведомо должен существовать по крайней мере один устойчивый предельный цикл или нечетное число циклов — устойчивых на единицу больше, чем неустойчивых.

Будем предполагать, что цикл один.

Кривая σ проходит через точку заострения кривой Δ лишь при специальных значениях параметров, при которых одновременно выполняются равенства

$$f(x) = \Psi(x'), \quad g(x) = \Phi(x').$$

Если этих соотношений нет, то кривая σ не проходит через точку заострения кривой Δ, и, следовательно, трехкратное со-

стояние равновесия системы, соответствующее точке заострения кривой Δ, имеет характер узла с $\sigma \neq 0$ (сложный узел) (см. гл. 4). Поэтому, когда мы на плоскости (x_0, y_0) входим в область трех состояний равновесия через точку заострения, устойчивый предельный цикл будет окружать три состояния равновесия (он не может исчезнуть в сложном узле с $\sigma \neq 0$). Мы уже говорили о возможном рождении предельных циклов из сложных фокусов. При изменении параметров такие предельные циклы могут исчезать в петле сепаратрисы (или появляться из петли).

Полных сведений об образовании петель сепаратрис и о расположении соответствующих бифуркационных кривых в пространстве параметров получить не удается, но все же некоторую информацию об этом можно получить с помощью систем, соответствующих общей точке кривых Δ и σ — точке M^*. В этом случае система имеет двукратное состояние равновесия, для которого $\sigma = 0$.

Как указано в § 4 гл. 10, при бифуркациях такого состояния равновесия возникает петля сепаратрисы. При значениях параметров, при которых точка M^* лежит на нижней ветви кривой Δ (см. рис. 171, *а*, *б*), нетрудно видеть, опираясь на проведенное исследование характера состояний равновесия, что эта петля окружает левое состояние равновесия — узел или фокус. При значениях же параметров, при которых точка M^* лежит на верхней части кривой Δ — при бифуркациях точки M^*, появляется петля вокруг правого узла или фокуса. Пусть параметры изменяются так, что от первого из указанных расположений

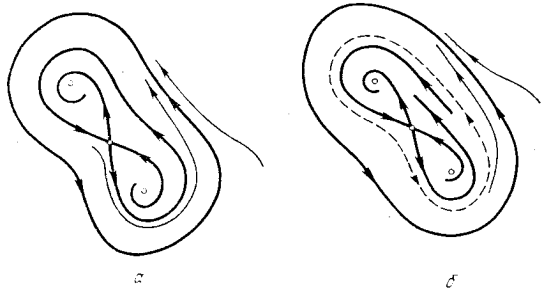


Рис. 172

сепаратрис мы переходим ко второму, не проходя при этом через кратные состояния равновесия (можно показать, что это всегда возможно). Тогда можно показать, что мы непременно должны пройти через расположение, представленное на рис. 172, *а*, когда петля сепаратрисы охватывает оба состояния равновесия, образует большую петлю. Можно показать, что при этом существует случай, когда седловая величина отрицательна. Тогда

при разрушении большой петли появляется предельный цикл, охватывающий три состояния равновесия, и тогда мы будем иметь случай, когда существует два предельных цикла, охватывающих все три состояния равновесия (устойчивый предельный цикл не мог исчезнуть) (рис. 172, *б*).

Приложение I. Для кривой (7) имеем

$$\Psi(0) = -\infty, \quad \Psi(1) = +0,$$

т. е. кривая (7) имеет хотя бы один экстремум. Покажем, что только один.

Для значений x, соответствующих экстремуму, получаем уравнение

$$\Psi'(x) = \frac{[n - 2nx + (n-1)x^2]\,\varphi(x) + 2[n(1-x)+x]^2}{x^3(1-x)\,\varphi^3(x)} = 0,$$

или, что то же, уравнение

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{-n + 2nx - (n-1)x^2}{2[n(1-x)+x]^2}. \tag{13}$$

Абсциссу максимума кривой (7) будем обозначать через x'. Для того чтобы доказать, что это уравнение имеет только один корень, найдем производные от его левой и правой частей. Элементарные (но несколько длинные) вычисления показывают, что производные

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\varphi(x)} = -\frac{n(1-x)+x}{\varphi^2(x)(1-x)x} < 0,$$

а производная от правой части есть

$$\frac{n}{[n(1-x)+x]^3} > 0.$$

Следовательно, уравнение (13) имеет единственный корень.

Приложение II. Мы имеем для кривой $y = f(x)$, $f(0) = -\infty$, $f(1) = 0$, и, следовательно, кривая имеет хотя бы один экстремум. Покажем, что только один.

Уравнение для определения корней производной $f(x)$, как нетрудно видеть, есть

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{-n + n(1+\mu)x - (n-1)\mu x^2}{2[n(1-x)+(1+\mu)x][n(1-x)+x]}. \tag{14}$$

В левой части стоит убывающая функция, производная правой части

$$n\left[\frac{n(n\mu - n + \mu + 2) - 2(n-1)(n\mu - n + \mu + 1)x}{2[n(1-x)+(1+\mu)x]^2[n(1-x)+x]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n\mu - n + 1)x^2}{2[n(1-x)+(1+\mu)x]^2[n(1-x)+x]^2}\right].$$

Выражение в числителе — квадратный трехчлен. Абсцисса его экстремума

$$\frac{n\mu - n + \mu + 1}{n\mu - n + 1} = 1 + \frac{\mu}{n\mu - n + 1} > 1,$$

т. е. находится вне интервала $0 < x < 1$.

Далее, нетрудно видеть, находя величину трехчлена при $x = 0$ или $x = 1$, что при $0 < x < 1$ этот трехчлен положителен. Следовательно, функция,

стоящая в правой части уравнения (14), возрастает и уравнение (14) имеет единственный корень.

Приложение III. Характер функции $x_0 = g(x)$ дополняет сведения о поведении кривой σ^* на плоскости (x, y_0). Именно, из характера функции $g(x)$ следует, что сначала при возрастании x кривая σ^* пересекает кривые семейства (3) в направлении уменьшения x_0 (от нижних к верхним) при значении x, соответствующем минимуму функции $x_0 = g(x)$, кривая σ^* касается кривой семейства (3), а затем σ^* начинает пересекать кривые (3) в направлении возрастания x_0.

Приложение IV. Форма кривой σ на плоскости (x_0, y_0) зависит от того, какая из абсцисс экстремумов: $y_0 = f(x)$ или $x_0 = g(x)$ больше, т. е. какая из абсцисс: максимума функции $y_0 = f(x)$ или точки касания этой кривой с кривыми семейства (3) — больше. Если абсцисса минимума $x_0 = g(x)$ меньше абсциссы максимума $y_0 = f(x)$, то на плоскости (x_0, y_0) кривая σ не имеет самопересечения, в противном случае она имеет самопересечение.

§ 6. Фазовая автоподстройка частоты. Рассматривается система [43]

$$\frac{d\varphi}{dt} = y = P, \quad \frac{dy}{dt} = \beta - \sin\varphi - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2} = Q \qquad (1)$$

при положительных α, β и s.

1. Поворот поля. Разность полей направления системы (1) с параметрами β, α_0, s_0 и измененной системы с параметрами β, α_1, s_1 для $y \neq 0$ будет

$$2\left[s_0 s_1 (\alpha_1 s_0 - \alpha_0 s_1) + (\alpha_1 s_1 - \alpha_0 s_0) y^2\right] \left[\left(s_0^2 + y^2\right)\left(s_1^2 + y^2\right)\right]^{-1}.$$

При фиксированном β монотонный поворот будет осуществляться, если измененные значения параметров α_1 и s_1 выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$(\alpha_1 s_0 - \alpha_0 s_1)(\alpha_1 s_1 - \alpha_0 s_0) \geqslant 0.$$

В частности, монотонный поворот осуществляется при изменении α и s вдоль k-кривых ($\alpha s = k$, $0 < k < \infty$) или $\varkappa$-кривых ($\alpha/s = \varkappa$, $0 < \varkappa < \infty$). Семейства k- и $\varkappa$-кривых, каждое в отдельности, покрывают всю рассматриваемую часть плоскости (α, s). Кривые измененной и исходной систем на прямой $y = 0$ пересекаются с касанием по оси φ. При изменении β поле направлений на нижнем и верхнем полуцилиндрах поворачивается в противоположных направлениях. Прямая $y = 0$ в этом случае будет контактной кривой.

2. Качественные структуры на концах k-кривых. Чтобы проследить за изменением качественной структуры фазового пространства при монотонном повороте поля направлений с изменением параметров вдоль k-кривых, нужно знать структуру разбиения фазового пространства на концах k-кривых для малых и для больших s (и соответственно для больших и малых α).

В цилиндрическом фазовом пространстве (на полосе $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ с отождествленными краями) состояния равновесия

будут $O_1(\arcsin\beta, 0)$ — устойчивый фокус или узел, $O_2(\pi - \arcsin\beta, 0)$ — седло.

Направления ζ, по которым траектории системы (1) входят в седло, определяются уравнением

$$\zeta^2 + \frac{2\alpha}{s}\zeta - \sqrt{1-\beta^2} = 0.$$

Для $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ один корень всегда отрицателен и соответствует направлению, по которому ω-сепаратриса входит в седло. Пусть на некоторой прямой $\varphi = \varphi_0$ в интервале $(\arcsin\beta, \pi - \arcsin\beta)$ между особыми точками отмечена координата η_0 точки пересечения прямой с ω-сепаратрисой седла. Если с убыванием s двигаться в пространстве параметров вдоль k-кривых, то векторное поле будет монотонно поворачиваться по часовой стрелке и η_0 будет расти. В то же время на нижней ветви изоклины горизонтальных наклонов на верхнем полуцилиндре (имеющей положительные значения ординаты лишь вне интервала $(\arcsin\beta, \pi - \arcsin\beta)$) максимум, равный

$$y_1 = [k - \sqrt{k^2 - s^2(\beta+1)^2}]\,(\beta+1)^{-1}$$

при $\varphi = -\pi/2$, будет неограниченно убывать. Поэтому для любого k можно выбрать s так, чтобы неравенство $y_1 < \eta_0$ выполнялось, и тогда ω-сепаратриса будет идти в седло, скручиваясь с верхнего полуцилиндра. На верхнем полуцилиндре при $\beta > 0$ бесконечность устойчива. Действительно, если при больших $y > 0$ положим $y = 1/\rho$ и построим обычным образом функцию последования в окрестности малого $\rho = \rho_0$, получим

$$\rho_1(2\pi) - \rho_0(0) = -2\pi\beta\rho_0^3 + 4\pi\alpha s\rho_0^4 + \ldots$$

Отсюда следует существование по крайней мере одного неустойчивого предельного цикла, расположенного выше минимума верхней ветви изоклины горизонтальных наклонов, т. е. для

$$y > y_2 = [k + \sqrt{k^2 - s^2(\beta+1)^2}]\,(\beta+1)^{-1}.$$

Так как кривая $P'_\varphi + Q'_y = -2k(s^2 - y^2)(y^2 + s^2)^{-2} = 0$ не пересекает для малых s верхнюю ветвь изоклины горизонтальных наклонов (для малых s всегда $y_2 > s$), то этот цикл единственный.

Для малых s кривая $P'_\varphi + Q'_y = 0$ не пересекает также и нижнюю ветвь изоклины горизонтальных наклонов, поэтому предельные циклы вокруг точки O_1 не могут существовать.

Предельные циклы на нижнем полуцилиндре также не могут существовать. Система (1) эквивалентна уравнению

$$y\,dy + \sin\varphi\,d\varphi = \left(\beta - 2\alpha s\frac{y}{s^2+y^2}\right)d\varphi.$$

Поэтому для замкнутого контура, охватывающего цилиндр и составленного из траекторий системы (1), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\beta - 2\alpha s\frac{y}{s^2+y^2}\right)d\varphi = 0,$$

но это невозможно при $y<0$ и положительных β, α и s.

Качественная картина фазового пространства для достаточно малых s на любой кривой $\alpha s = k$ представлена на рис. 173, *1*.

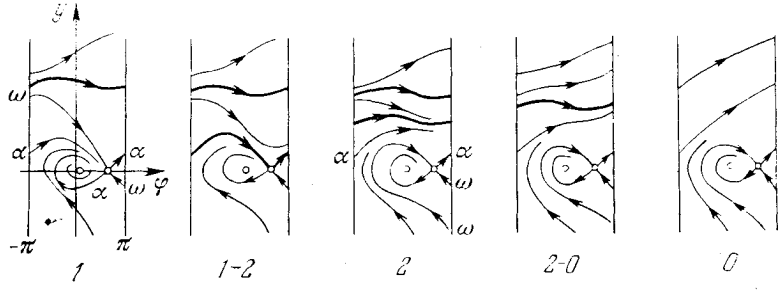


Рис. 173

Проследим за поведением α-сепаратрис седла при больших s. Рассмотрим две консервативные системы сравнения:

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = \beta - \sin\varphi, \tag{2}$$

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = \beta - \sin\varphi - k/s \tag{3}$$

(условие $0<\beta - k/s<1$ для любых k при больших s выполняется).

Точка $O_1(\arcsin\beta, 0)$ для системы (2) — состояние равновесия типа центр, и сепаратрисы седла $O_2(\pi - \arcsin\beta, 0)$ образуют петлю вокруг O_1. Поле направлений системы (1) повернуто по отношению к системе (2) по часовой стрелке. Поэтому α-сепаратриса седла системы (1), выходящая на нижний полуцилиндр, идет в точку O_1.

Траектории системы (3) на верхнем полуцилиндре представляют спирали, накручивающиеся на цилиндр и уходящие в бесконечность. Поле направлений системы (1) на верхнем полуцилиндре повернуто по отношению к системе (3) против часовой стрелки повсюду, за исключением прямой $y=s$ (на прямой $y=s$ будет касание с пересечением). Поэтому α-сепаратриса седла системы (1), выходящая на верхний полуцилиндр, не может пересечь α-сепаратрису седла системы (3), выходящую из седла $O(\pi - \arcsin(\beta - k/s), 0)$, расположенного справа от седла $O_2(\pi - \arcsin\beta, 0)$, и должна уходить в бесконечность. Предельных циклов нет. Поведение α-сепаратрис полностью опре-

деляет качественную картину разбиения фазового пространства. Качественная картина на любой кривой $\alpha s = k$ для достаточно больших s представлена на рис. 173, *0*.

3. Качественные картины фазового пространства и возможные бифуркации при $0 < \beta < 1$. Кривые k соединяют области пространства параметров, соответствующие структурам, представленным на рис. 173, *1* и 173, *0*. При возрастании s вдоль k-кривых точки P_1 и P_2 на пересечении прямой $\varphi = \arcsin\beta$ с α- и ω-сепаратрисами седла на верхнем полуцилиндре монотонно сближаются, совпадают при некотором значении $s = s_0(k)$ (соответственно $\alpha = \alpha_0(k)$) (рис. 173, *1—2*) и затем монотонно расходятся. Множества точек $s_0(k)$, $\alpha_0(k)$, соответствующие негрубой бифуркационной структуре, для которой α- и ω-сепаратрисы седла образуют петлю на верхнем полуцилиндре (P_1 и P_2 совпадают), образуют в пространстве параметров непрерывную кривую L. Каждая k-кривая пересекает в одной точке кривую L.

При переходе через значение s, соответствующее пересечению кривых L и k, возникает и затем разрушается петля сепаратрисы на верхнем полуцилиндре, и при этом из петли сепаратрисы появляется устойчивый предельный цикл, так как седловая величина $(P'_\varphi + Q'_y)_2 = -2\alpha/s$ отрицательна (см. рис. 173, *2*). При дальнейшем возрастании параметра s вдоль k-кривых предельные циклы монотонно сближаются. Так как предельных циклов для структуры на рис. 173, *0* нет, то существует на каждой k-кривой точка с координатами $s^+(k)$, $\alpha^+(k)$, для которой устойчивый и неустойчивый предельные циклы сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл.

Соответствующая негрубая бифуркационная структура представлена на рис. 173, *2—0*. Множество точек $s^+(k)$, $\alpha^+(k)$ образует непрерывную L^+-кривую в пространстве параметров, пересекающуюся с каждой из k-кривых в одной точке. Последовательность качественных структур при возрастании s вдоль k-кривых представлена на рис. 173 последовательностью грубых структур *1*, *2*, *0*. Негрубые структуры, соответствующие бифуркационным значениям параметров, обозначены двумя цифрами, указывающими на грубые структуры, которые они разделяют.

Замечание. Качественные структуры, промежуточные между структурами 173, *1* и 173, *0*, определяются лишь с точностью до дополнительного четного числа предельных циклов, охватывающих цилиндр, так как при повороте поля предельные циклы могут возникать из сгущения траекторий, пересекающих кривую $P'_\varphi + Q'_y = 0$, разделяться и затем опять попарно в других сочетаниях сливаться и исчезать. Логическая возможность такого поведения остается неустраненной. Вокруг точки O_1 подобное произойти не может. Раз возникнув, предельные циклы не мог-

ли бы исчезнуть, так как при дальнейшем повороте поля петли сепаратрисы вокруг точки O_1 не возникают и O_1 не меняет устойчивости.

4. Расположение бифуркационных кривых. Отметим, что k-кривые пересекают L и L^+ в определенной последовательности, и поэтому L и L^+ не пересекаются. Покажем, что кривая L^+ целиком лежит в полосе $\beta < \alpha < \beta + 1$.

Используем систему сравнения

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = \beta - \sin\varphi - \alpha, \quad 0 < \beta - \alpha < 1. \tag{4}$$

Повторяя рассуждения, проведенные в п. 2 по отношению к системе сравнения (3), находим, что для значений параметров $0 < \alpha < \beta$ система (1) не имеет предельных циклов.

Величина $P'_\varphi + Q'_y$ обращается в нуль на верхнем полуцилиндре только на прямой $y = s$. Если эта прямая будет на цилиндре циклом без контакта, то двойные предельные циклы не могут существовать (гл. 6). Прямая $y = s$ будет циклом без контакта, если

$$\beta - \sin\varphi - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2} = \beta - \sin\varphi - \alpha < 0$$

для всех φ, т. е. если $\alpha > \beta + 1$.

Кривая L^+ в полосе $\beta < \alpha < \beta + 1$ пересекается с каждой из k-кривых и идет при убывании s из бесконечности в точку на оси α.

Проследим за расположением кривой L. Качественная картина фазового пространства на любой $\varkappa$-кривой для малых s (для $\alpha = \varkappa s < \beta$) представлена на рис. 173, *0*. При возрастании s вдоль $\varkappa$-кривых происходит монотонный поворот поля направлений, и поэтому каждая $\varkappa$-кривая может пересекать L не более одного раза. Рассмотрим систему сравнения

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = \beta - \sin\varphi - 2\varkappa y. \tag{5}$$

Как известно (гл. 20, § 4), для каждого β $(0 < \beta < 1)$ существует такое $\varkappa^*(\beta)$, что при $\varkappa = \varkappa_1 < \varkappa^*(\beta)$ ω-сепаратриса седла $O_2(\pi - \arcsin\beta, 0)$ системы (5), выходящая на верхний полуцилиндр, пересекает ось $y = 0$ и уходит на нижний полуцилиндр.

Запишем систему (1) в виде

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = \beta - \sin\varphi - 2\varkappa y s^2 (s^2 + y^2)^{-1}. \tag{6}$$

Поле направлений системы (6) повернуто по отношению к полю направлений системы (5) против часовой стрелки, и поэтому ω-сепаратриса системы (6) должна идти на нижний полуцилиндр при сколь угодно больших s, если $\varkappa < \varkappa^*(\beta)$. На верхнем полуцилиндре для (6) при достаточно больших s и $\varkappa < \varkappa^*(\beta)$ существуют неустойчивый и устойчивый предельные

циклы. Для любого $\varkappa$ можно выбрать такое y_1, чтобы выражение $\beta - \sin\varphi - 2\varkappa y_1$ сохраняло знак при всех φ. Поэтому при больших s и для (6) на прямой $y = y_1$ выполняется $dy/dt < 0$. Но так как на верхнем полуцилиндре бесконечность устойчива (см. п. 2), то вытекает существование для любого $\varkappa$ неустойчивого предельного цикла выше прямой $y = y_1$. Существование траекторий, накручивающихся на верхний полуцилиндр снизу вверх, и, следовательно, существование устойчивого предельного цикла следуют из указанного выше расположения ω-сепаратрисы седла для $\varkappa = \varkappa_1 < \varkappa^*(\beta)$. Заметим, что $0 < 2\varkappa^* < 1{,}19$ при $0 < \beta < 1$ и $\varkappa^* \to 0$ при $\beta \to 0$ [149].

Качественная картина фазового пространства для достаточно больших s на любой полупрямой $\alpha = \varkappa_1 s$ представлена на рис. 173, *2*. Отметим, что $\varkappa_1$-кривые не пересекают L. Так как существуют $\varkappa$-кривые, пересекающие L, и L уходит в бесконечность (L пересекается с каждой из k-кривых, $0 < k < \infty$), то L должна иметь одну из $\varkappa$-кривых асимптотой. Она не может иметь второй асимптотой другую $\varkappa$-кривую или какую-либо прямую, параллельную оси $s = 0$, так как не может пересекаться с k-кривыми дважды. Кривая L при убывании s либо идет к некоторой точке оси $s = 0$, либо имеет эту ось своей асимптотой. Покажем, что осуществляется первая из этих возможностей.

Для двух систем вида (1), соответствующих значениям параметров s_0 и $s_1 < s_0$, контактной кривой на верхнем полуцилиндре будет $y = \sqrt{s_0 s_1}$. Если $\alpha > \beta + 1$, то контактная кривая располагается выше максимума $y_{\max} = s_1(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (\beta+1)^2}) \times (\beta+1)^{-1}$ нижней ветви изоклины горизонтальных наклонов.

Пусть на некоторой прямой $\varphi = \varphi_0$ слева от седла O_2 отмечены ординаты η_0 и η_1 точек пересечения прямой с ω-сепаратрисами для системы (1) при $s = s_0$ и $s = s_1$ соответственно. Векторное поле системы (1) при $s = s_1$ в полосе $0 < y < \sqrt{s_0 s_1}$ повернуто по отношению к векторному полю системы при $s = s_0$ по часовой стрелке, и поэтому для всех $s_1 < s_0$ будет $\eta_1 > \eta_0$. Так как при убывании s_1 максимум y_m неограниченно убывает, то для всех достаточно малых s_1 будет $y_m < \eta_1$ и ω-сепаратриса системы (1) при $s = s_1$ попадает в область выше максимума изоклины и должна накручиваться на верхний полуцилиндр.

Качественная структура фазового пространства представлена на рис. 173, *1*. На верхнем полуцилиндре существует один неустойчивый предельный цикл. Такая структура будет осуществляться для любых достаточно малых s при любых $\alpha \geqslant \beta + 1$, следовательно, кривые L не могут иметь ось $s = 0$ своей асимптотой.

Разбиение пространства параметров α, s для $\beta = \text{const}$ $(0 < \beta < 1)$ представлено на рис. 174. Цифрами *0—2* отмечены области в пространстве параметров, соответствующие грубым структурам на рис. 173, отмеченным теми же цифрами. Негру-

бым системам на рис. 173, помеченным двумя цифрами, соответствуют бифуркационные кривые рис. 174, разделяющие соответствующие области.

5. Качественные картины и возможные бифуркации при $\beta = 1$ и $\beta > 1$. При возрастании β до значения $\beta = 1$ состояния равновесия сливаются. Структура разбиения пространства параметров для $\beta = 1$ будет такая же, как на рис. 174. Соответствующие структуры разбиения фазового пространства будут отличаться от структур для случая $0 < \beta < 1$ лишь тем, что на оси φ будет одно состояние равновесия типа седло-узла.

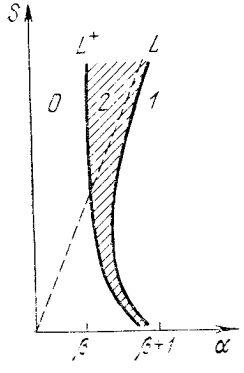


Рис. 174

При возрастании β от значения $\beta = 1$ при α и s, взятых из области *2* рис. 174, исчезает состояние равновесия седло-узел. При значениях α и s, взятых из области *1*, происходит появление устойчивого предельного цикла из α-сепаратрисы седло-узла. На плоскости параметров при этом исчезает бифуркационная кривая L.

§ 7. Частотно-фазовая автоподстройка частоты (случай существования трех предельных циклов). Рассмотрим систему рассматривавшуюся в гл. 15 методом малого параметра (фазовое пространство — цилиндр) [44]:

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \beta - \sin\varphi - \lambda y - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2}. \tag{1}$$

Известными методами качественной теории обнаруживается, что для всех значений параметров $\alpha > 0$, $s > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \beta < 1$ на оси $y = 0$ есть два состояния равновесия: $O_1(\arcsin\beta, 0)$ — устойчивый узел или фокус, $O_2(\pi - \arcsin\beta, 0)$ — седло. Траектории на нижнем полуцилиндре идут из бесконечности на верхний полуцилиндр. На нижнем полуцилиндре и вокруг точки O_1 циклов нет (см. § 6). Все бифуркации могут происходить только на верхнем полуцилиндре.

Для больших λ структура разбиения фазового пространства однозначно определяется сравнением с системой

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \beta - \sin\varphi - 2\varkappa y. \tag{2}$$

Как известно (гл. 20, § 4), для каждого β $(0 < \beta < 1)$ существует такое $\varkappa^*(\beta)$, что при $\varkappa > \varkappa^*$ ω-сепаратриса седла системы (2), выходящая на верхний полуцилиндр, не пересекает $y = 0$ и уходит в бесконечность на верхнем полуцилиндре. Если $\lambda > 2\varkappa$, то поле направлений (1) повернуто относительно поля направлений (2) по часовой стрелке. Поэтому, если $\varkappa > \varkappa^*$ и $\lambda > 2\varkappa$, то ω-сепаратриса седла системы (1) также должна идти

в бесконечность. Циклов нет. Структура разбиения фазового пространства эквивалентна представленной на рис. 175, *0*.

Проследим за изменением качественной структуры и возможными бифуркациями при фиксированных β $(0<\beta<1)$ и $s>0$ в плоскости параметров (α, λ). Качественная структура не будет зависеть от выбранных β и s. Качественные структуры, осуществляющиеся вдоль прямой $\lambda=0$, известны (см. § 6). Существуют такие α_1 и α_2, что на куске $0<\alpha<\alpha_1(\beta, s)$ оси α будет осуществляться структура разбиения без предельных циклов.

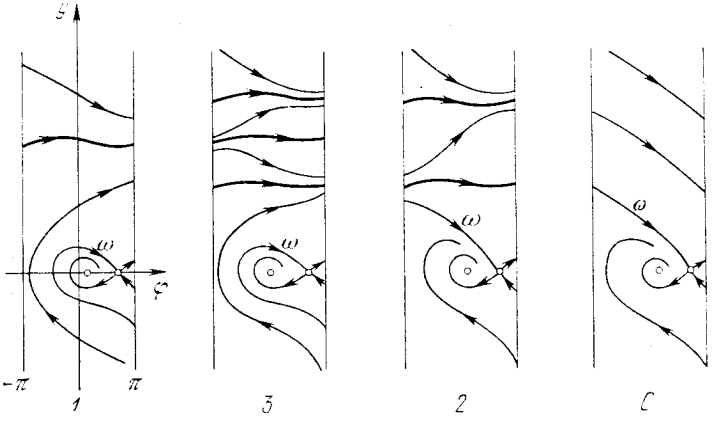


Рис. 175

На куске $\alpha_1(\beta, s)<\alpha<\alpha_2(\beta, s)$ — структура с двумя предельными циклами на верхнем полуцилиндре (нижний — устойчивый, верхний — неустойчивый). На куске $\alpha_2(\beta, s)<\alpha<\infty$ — структура с одним неустойчивым предельным циклом. Точке $\alpha=\alpha_1(\beta, s)$ соответствует структура с двойным предельным циклом, возникшим из сгущения траекторий. Точке $\alpha=\alpha_2(\beta, s)$ — структура с петлей сепаратрисы, охватывающей верхний полуцилиндр. Проследим за сменой качественных структур и возможными бифуркациями при возрастании λ вдоль прямых $\alpha=\alpha_0$. Рассмотрим три случая.

1. $\alpha_0>\alpha_2$. При возрастании λ от значения $\lambda=0$ в уравнении появляется член $-\lambda y$ и бесконечность становится неустойчивой. Из бесконечности появляется устойчивый предельный цикл. Эта структура изображена на рис. 175, *2*. На верхнем полуцилиндре два предельных цикла. При возрастании λ поле направлений поворачивается по часовой стрелке и предельные циклы монотонно сближаются (устойчивый опускается, неустойчивый поднимается). Так как при $\lambda>\varkappa^*$ заведомо осуществляется структура разбиения, представленная на рис. 175, *0* (циклов уже нет), то существует такое $\lambda=\lambda^{++}(\alpha; \beta, s)$, для которого

предельные циклы сливаются, образуя двойной полуустойчивый предельный цикл. При возрастании λ от бифуркационного значения λ^{++} двойной предельный цикл исчезает.

2. $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$. При возрастании λ от значения $\lambda = 0$ из бесконечности появляется третий предельный цикл (устойчивый). Эта структура изображена на рис. 175, *3*. При возрастании λ верхний и нижний устойчивые предельные циклы монотонно опускаются, а расположенный между ними неустойчивый — монотонно поднимается. Так как при $\lambda > \varkappa^*$ циклов нет, а поле поворачивается с возрастанием λ монотонно, то существуют $\lambda = \lambda^{++}(\alpha;\ \beta,\ s)$, соответствующее слиянию неустойчивого предельного цикла с верхним устойчивым, и $\lambda = \lambda_0(\alpha;\ \beta,\ s)$, соответствующее влипанию нижнего устойчивого цикла в петлю сепаратрисы на верхнем полуцилиндре (петля может возникнуть только при стягивании к петле устойчивого предельного цикла, так как седловая величина $P'_\varphi + Q'_y = -(2\alpha/s + \lambda)$ отрицательна).

3. $0 < \alpha_0 < \alpha_1$. При возрастании λ от значения $\lambda = 0$ из бесконечности появляется устойчивый предельный цикл, который с возрастанием λ монотонно опускается. Так как при $\lambda > \varkappa^*$ циклов нет и седловая величина отрицательна, то существует $\lambda = \lambda_0(\alpha;\ \beta,\ s)$, соответствующее петле сепаратрисы седла на верхнем полуцилиндре. При $\lambda = \lambda_0$ устойчивый предельный цикл влипает в петлю сепаратрисы.

Если монотонный поворот поля не повсюду увеличивает шаг спиралей, охватывающих цилиндр (расстояние между витками), то остается еще возможность возникновения двойного предельного цикла из сгущения траекторий с последующим разделением двойного цикла на простые — устойчивый и неустойчивый. Такая возможность действительно реализуется при возрастании λ вдоль прямой $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1$, если α_0 достаточно близко к α_1.

Точке $(\lambda = 0,\ \alpha = \alpha_1)$ соответствует структура разбиения фазового пространства с двойным полуустойчивым предельным циклом на верхнем полуцилиндре. Так как поле направлений поворачивается в противоположных направлениях при возрастании λ и при убывании α (соответственно по и против часовой стрелки), то предельный цикл при возрастании λ разделяется на два, а при убывании α исчезает. Из соображений непрерывности следует, что на плоскости $(\alpha,\ \lambda)$ существует бифуркационная кривая $\lambda = \lambda^+(\alpha;\ \beta,\ s)$, выходящая из точки $(\lambda = 0,\ \alpha = \alpha_1)$ с отрицательным наклоном, для которой двойной цикл не разрушается. Прямая $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1$ эту кривую пересекает, если α_0 достаточно близко к α_1.

Проследим за изменением качественных структур при возрастании λ вдоль прямой $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1$ при α_0, достаточно близком к α_1. При $\lambda = 0$ будет осуществляться структура рис. 175, *0*. Циклов нет. При переходе к положительным λ появляется устой-

чивый предельный цикл из бесконечности, который будет опускаться с возрастанием λ. Для значения $\lambda=\lambda^{+}(\alpha_0;\ \beta,\ s)$ появляется двойной предельный цикл ниже устойчивого предельного цикла (двойной цикл не может возникнуть выше устойчивого предельного цикла, появившегося из бесконечности, так как выше цикла при повороте поля по часовой стрелке с возрастанием λ шаг спирали, накручивающейся на устойчивый цикл сверху, может только увеличиваться). С дальнейшим возрастанием λ двойной предельный цикл разделяется на нижний устойчивый и верхний неустойчивый и осуществляется структура разбиения рис. 175, *3*. При дальнейшем возрастании λ устойчивый цикл опускается, неустойчивый поднимается. Так как для $\lambda>\varkappa^*$ циклов уже нет, то в интервале $\lambda^{+}<\lambda<\varkappa^*$ необходимо осуществляются еще две бифуркации: слияние устойчивого и неустойчивого предельных циклов на бифуркационной кривой $\lambda=\lambda^{++}(\alpha_0;\ \beta,\ s)$ и возникновение на бифуркационной кривой $\lambda=\lambda_0(\alpha_0;\ \beta,\ s)$ петли сепаратрисы при стягивании к ней с возрастанием λ устойчивого (так как седловая величина отрицательна) предельного цикла.

Проследим расположение бифуркационных кривых в плоскости $(\alpha,\ \lambda)$. Бифуркационная кривая $\lambda=\lambda^{++}(\alpha_0;\ \beta,\ s)$ существует для всех значений $\alpha>\alpha_1$ и для значений $\alpha<\alpha_1$, достаточно близких к α_1. Кривая $\lambda=\lambda^{++}(\alpha;\ \beta,\ s)$ имеет отрицательный наклон. Последнее следует из того, что на кривой с положительным наклоном при одновременном возрастании или убывании параметров α и λ векторное поле поворачивается монотонно и при этом двойной предельный цикл не мог бы существовать. Бифуркационная кривая $\lambda=\lambda^{+}(\alpha;\ \beta,\ s)$ начинается в точке $\lambda=0$, $\alpha=\alpha_1$, существует в некоторой окрестности этой точки слева и по тем же причинам, что и кривая λ^{++}, имеет отрицательный наклон.

Кривая $P'_{\varphi}+Q'_{y}=0$ не имеет в фазовом пространстве действительных ветвей, если $\alpha<4s\lambda$. Поэтому при условии $\alpha<4s\lambda$ не может быть более одного цикла, охватывающего фазовый цилиндр (гл. 6). Это обстоятельство помогает проследить поведение кривых λ^{+} и λ^{++}.

Кривые λ^{+} и λ^{++} при убывании α не могут идти ни в бесконечность (так как не могут пересекать прямую $\lambda=\varkappa^*$), ни к оси λ (так как не могут пересекать прямую $\alpha=4s\lambda$), ни к оси α (так как имеют отрицательный наклон). Кривые λ^{+} и λ^{++} могут при убывании α прекратиться лишь в угловой точке, соответствующей смыканию бифуркационных кривых λ^{+} и λ^{++}. Для значений параметров, соответствующих этой угловой точке, система будет иметь тройной предельный цикл.

Бифуркационная кривая $\lambda=\lambda_0(\alpha;\ \beta,\ s)$ существует на интервале $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$. Любая прямая $\alpha=\alpha_0$ $(0\leqslant\alpha_0<\alpha_2)$ или $\lambda=\lambda_1$ $(0\leqslant\lambda_1\leqslant\varkappa^*)$ пересекает ее только один раз, так как поле

направлений при возрастании α или λ поворачивается монотонно. Она проходит через точку $\alpha=0$, $\lambda=\varkappa^*$ (по определению $\varkappa^*$) и точку $\alpha=\alpha_2$, $\lambda=0$ (по определению α_2 (см. § 6)). Кривая λ_0 по тем же причинам, что и кривые λ^+ и λ^{++}, имеет отрицательный наклон.

Замечание. Структуры на прямой $\lambda=0$ известны лишь с точностью до дополнительного четного числа циклов, охватывающих цилиндр (см. гл. 14), поэтому остается неустраненной логическая возможность существования «двойников» бифуркационных кривых λ^+ и λ^{++}.

Выясним расположение кривой λ_0 относительно кривых λ^+ и λ^{++} в предположении отсутствия «двойников». Если при возрастании λ петля сепаратрисы вокруг цилиндра возникает и затем разрушается прежде, чем появляется двойной предельный цикл, то возникает разбиение фазового пространства на траектории без предельных циклов; ω-сепаратриса седла, выходящая на верхний полуцилиндр, накручивается на цилиндр, уходя в бесконечность. При дальнейшем возрастании λ предельные циклы возникнуть уже не могут, так как с возрастанием λ поле поворачивается по часовой стрелке и шаг спиралей на верхнем полуцилиндре при этом только увеличивается. Никакая часть кривой λ_0 не может располагаться ниже кривой λ^+. Поэтому кривые λ_0 и λ^+ не могут пересекаться.

Кривая λ_0 не может проходить и через угловую точку смыкания кривых λ^+ и λ^{++}. Такой точке должна соответствовать структура разбиения фазового пространства с тройным устойчивым предельным циклом и простой устойчивой петлей сепаратрисы на верхнем полуцилиндре (седловая величина не равна нулю и отрицательна). Наличие этих элементов в структуре разбиения фазового пространства возможно лишь при существовании разделяющего их неустойчивого предельного цикла. Предположение о возможности такой структуры в угловой точке приводит к противоречию с предположением, что эта точка угловая (поворот поля при убывании α может перевести такую структуру в структуру с одним предельным циклом, осуществляющуюся слева от прямой $\alpha=4s\lambda$, лишь с переходом через бифуркационную кривую λ^+, а это невозможно, если начальная точка угловая).

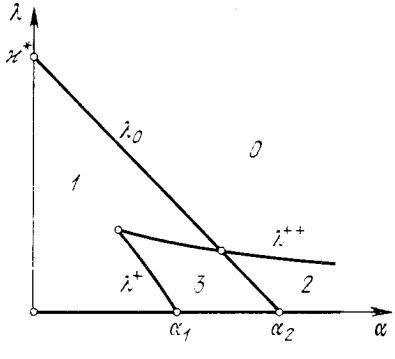


Рис. 176

Кривая λ_0 пересекает λ^{++} справа от угловой точки. Разбиение пространства α, λ для $\beta=\text{const}$ $(0<\beta<1)$ и $s=\text{const}$

представлено на рис. 176. Цифрами *0—3* отмечены области в пространстве параметров, соответствующие грубым структурам на рис. 175, отмеченным теми же цифрами. Цифры указывают на число циклов. Негрубым структурам на рис. 177, помеченным двумя или четырьмя цифрами, соответствуют бифуркационные кривые на рис. 176, разделяющие соответствующие области. Значки $^{+}$ и $^{++}$ на рис. 177 соответственно указывают на

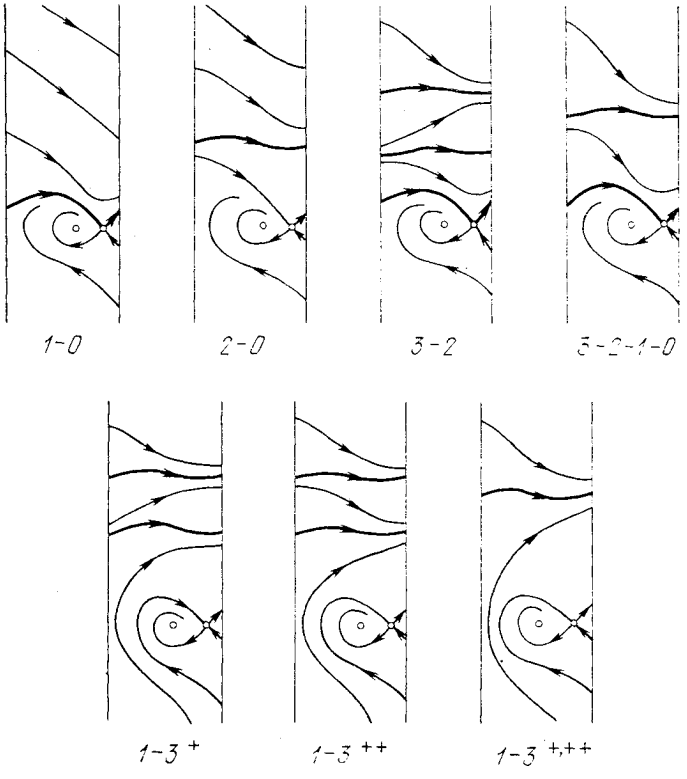


Рис. 177

принадлежность к бифуркационным кривым λ^{+} и λ^{++}. Предельный цикл на рис. 177, *1—3*$^{+}$, $^{++}$ трехкратный.

§ 8. Синхронный генератор с асинхронной характеристикой. Рассматривается система [40]

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = \gamma - \sin\varphi - \lambda(1 - d\cos\varphi)\,y. \qquad (1)$$

Будем предполагать $\gamma \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$ (другие возможные случаи сводятся к рассматриваемому заменой переменных).

В цилиндрическом фазовом пространстве (на полосе $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ с отождествленными краями) состояния равновесия будут $O_1(\arcsin\gamma, 0)$ — фокус или узел, $O_2(\pi - \arcsin\gamma, 0)$ — седло. Слияние и исчезновение особых точек — простейшая бифуркация, возможная в системе (1). Другие возможные бифуркации связаны со сменой устойчивости состояния равновесия O_1, с бифуркациями сепаратрис, идущих из седла в седло (при этом появляются или исчезают предельные циклы) и появлением предельных циклов из сгущения траекторий, из сепаратрисы особой точки седло-узел и из бесконечности. Все эти бифуркации могут быть прослежены для системы (1). Знание всех бифуркаций позволяет дать разбиение пространства параметров $\gamma > 0$, $\lambda > 0$, d на области с различной структурой разбиения фазового пространства на траектории.

1. Поворот поля. Плоскость параметров (λ, d) можно покрыть такой сеткой кривых, изменение параметров вдоль которых осуществляет монотонный поворот поля системы (1). Разность полей направления системы (1) с параметрами λ_0 и d_0 и измененной системы с параметрами λ_1 и d_1 для $y \neq 0$ будет

$$\lambda_1 - d_0 + (\lambda_0 d_0 - \lambda_1 d_1)\cos\varphi.$$

Монотонный поворот будет осуществляться, если измененные значения параметров λ_1 и d_1 выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_0 d_0 - \lambda_1 d_1 = 0.$$

Это условие будет выполнено, если λ и d изменять вдоль k-кривых:

$$\lambda d = k, \quad k = \text{const}, \quad -\infty < k < +\infty.$$

Семейство k-кривых покрывает всю плоскость (λ, d), за исключением самих осей λ и d. На прямой $y = 0$ контакт ложный. Кривые исходной и измененной систем пересекаются с касанием по оси φ. Разность полей направлений при изменении параметра γ будет $(\gamma_1 - \gamma_0)/y$. При изменении γ поле направлений на нижнем и верхнем полуцилиндрах поворачивается в противоположных направлениях. Прямая $y = 0$ в этом случае будет контактной кривой.

2. Рождение цикла из фокуса. Состояние равновесия Q_1 будет сложным фокусом для поверхности

$$\sigma_1 = (P'_\varphi + Q'_y)_1 = \lambda\left(d\sqrt{1-\gamma^2} - 1\right) = 0.$$

При переходе через поверхность $\sigma_1 = 0$ в направлении возрастающих σ_1 фокус из устойчивого становится неустойчивым и из него появляется единственный устойчивый предельный цикл (первая ляпуновская величина для точек поверхности $\sigma_1 = 0$ имеет значение $\alpha_3 = -[\pi\lambda(1-\gamma^2)^{-1/4}]/8 < 0$).

3. Качественные структуры на «концах» k-кривых. Чтобы проследить за изменением качественной структуры фазового пространства и возможными бифуркациями при монотонном повороте поля с изменением параметров вдоль k-кривых, нужно знать структуры разбиения фазового пространства на концах k-кривых для малых и для больших λ (и соответственно для больших и малых d). Представим (1) в виде

$$y\,dy + \sin\varphi\,d\varphi = [\gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)\,y]\,d\varphi. \tag{2}$$

Из (2) будет следовать

$$\int_c [\gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)\,y]\,d\varphi = 0,$$

если c — предельный цикл (2). При малых γ и λ предельный цикл, охватывающий цилиндр, будет близок к одной из кривых

$$y_0 = \pm\sqrt{2(\cos\varphi + h)}, \quad 1 < h < \infty,$$

являющихся решением уравнения (2) при $\gamma = \lambda = 0$ (см. гл. 15). Значению $h = 1$ соответствует сепаратриса, идущая из седла в седло. Значения константы h, выделяющей кривые консервативной системы, вблизи которых для малых γ и λ на верхнем и нижнем полуцилиндрах будут существовать предельные циклы системы (1), определяются соответственно как корни уравнений

$$\psi_1(h) = 0, \quad \psi_2(h) = 0,$$

$$\psi_{1,2}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} [\gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)\,y_0]\,d\varphi = \tag{3}$$

$$= 2\pi\gamma \mp \lambda\left\{\frac{8E}{\varkappa} - \frac{8d}{3\varkappa^3}[2(\varkappa^2 - 1)F + (2 - \varkappa^2)E]\right\} \equiv \psi_{1,2}(\varkappa),$$

$$h > 1, \quad \varkappa^2 = \frac{2}{h+1}.$$

Здесь F и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $\varkappa$; верхний знак для $\psi_1(\varkappa)$, нижний знак для $\psi_2(\varkappa)$. Предельный цикл, соответствующий корню $\varkappa = \varkappa_0$, будет устойчив, если $y_0\psi'_{1,2}(\varkappa_0) > 0$.

Функции $\psi_{1,2}$ доопределяются для $\varkappa = 1$ их предельными значениями $\psi_1(1) = 2\pi\gamma + \frac{8}{3}\lambda(d - 3)$ и $\psi_2(1) = 2\pi\gamma - \frac{8}{3}\lambda(d - 3)$. Из (3) следует, что для любых d будет $\psi_1(0) = -\infty$, $\psi_2(0) = +\infty$, а также что при $d \geqslant 0$ производная $\psi'_{1,2}$ не меняет знака в интервале $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ [7]). Отсюда сразу следует, что если для $d \geqslant 0$

[7]) См. § 2 гл. 15, пример 3, где проведено подробное исследование системы (1) методом Понтрягина.

выполняется условие

$$\psi_1(1) = 2\pi\gamma + \frac{8}{3}\lambda(d-3) > 0, \tag{4}$$

то на верхнем полуцилиндре есть единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, а если выполняется условие

$$\psi_2(1) = 2\pi\gamma - \frac{8}{3}\lambda(d-3) < 0, \tag{5}$$

то на нижнем полуцилиндре есть единственный устойчивый предельный цикл. Если выполняется условие (5), то заведомо выполняется и условие (4). Требование малости правой части (2) ($\gamma < \varepsilon$, $\lambda < \varepsilon$, $\lambda|d| < \varepsilon$) выделяет на плоскости (λ, d) неограниченную по d область, примыкающую к оси $\lambda = 0$ и содержащую кривые $\psi_1(1) = 0$ и $\psi_2(1) = 0$. Уравнение $\psi_2(1) = 0$ при малом γ в плоскости параметров λ, d (не малых) дает при $\lambda \to 0$ асимптотическое представление кривой, выделяющей область плоскости параметров, для точек которой в фазовом пространстве системы (1) есть устойчивый предельный цикл как на нижнем, так и на верхнем полуцилиндрах. При этом $d > 0$ и состояние равновесия O_1 будет неустойчивым. Качественная структура фазового пространства в этой области представлена на рис. 178, *1*.

Проследим за поведением α- и ω-сепаратрис седла на верхнем полуцилиндре при больших λ, $0 < |d| < 1$ и $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Если ω-сепаратриса седла попадает в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов $y_{\max} < (1+\gamma)/[(1-|d|)\lambda]$, то, очевидно, предельные циклы, охватывающие цилиндр, не могут существовать. Такие значения параметров можно выбрать при больших λ. Направления, по которым траектории системы (1) входят в седло O_2, определяются уравнением

$$\zeta^2 + \lambda(1 + d\sqrt{1-\gamma^2})\zeta - \sqrt{1-\gamma^2} = 0.$$

Для $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ один корень всегда отрицателен и соответствует направлению, по которому ω-сепаратриса входит в седло. Пусть на некоторой прямой $\varphi = \varphi_0$ отмечена координата η_0 точки пересечения прямой с ω-сепаратрисой седла. Если с возрастанием λ двигаться в пространстве параметров вдоль k-кривых, то векторное поле будет монотонно поворачиваться по часовой стрелке и координата η_0 на прямой $\varphi = \varphi_0$ будет расти, а максимум изоклины убывать. Поэтому всегда можно выбрать λ и d так, чтобы неравенство $(1+\gamma)/\lambda(1-|d|) < \eta_0$ выполнялось.

Для указанных значений параметров предельные циклы не могут существовать также и на нижнем полуцилиндре, так как если там существует замкнутый контур, составленный из траек-

торий системы (1), то должно быть

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\gamma - \lambda (1 - d \cos \varphi)\, y]\, d\varphi = 0.$$

Но это невозможно при $y(\varphi) < 0$, $|d| < 1$ и положительных λ и γ. При $|d| < 1$ состояние равновесия O_1 — устойчивый фокус

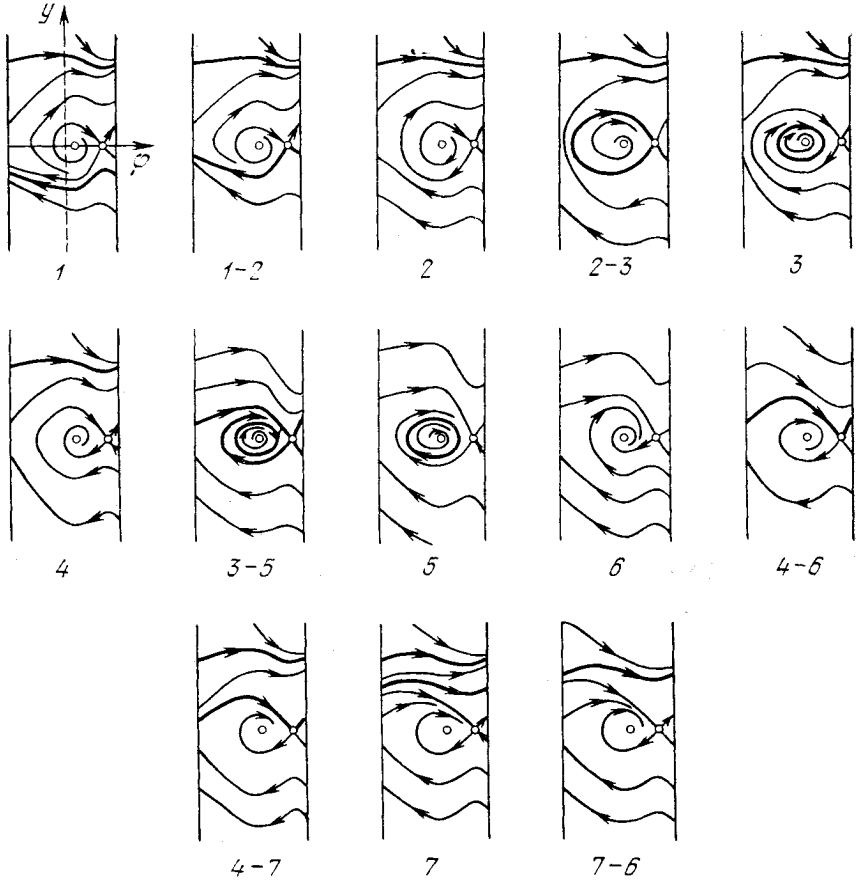


Рис. 178

или узел. Предельные циклы вокруг состояния равновесия не могут существовать при $|d| < 1$, так как здесь $P'_\varphi + Q'_y = -\lambda (1 - d \cos \varphi) \neq 0$. Качественная картина фазового пространства для достаточно больших λ на любой кривой $\lambda d = k$ представлена на рис. 178, *6*.

4. Качественные картины фазового пространства и возможные бифуркации при малых γ. Рассмотрим случай $d > 0$. Условие $\psi_2(1) \equiv 2\pi\gamma - \frac{8}{3}\lambda(d-3) = 0$ при малых γ и λ дает в плоскости (λ, d) асимптотическое представление кривой, выделяющей область плоскости параметров, соответствующую качественной структуре, представленной на рис. 178, *1*. Для $k < (3/4)\pi\gamma$ кривые не входят в область, выделяемую условием (5). Для $k > (3/4)\pi\gamma$ существуют k-кривые, принадлежащие своей частью к области, выделяемой требованием малости величин γ, λ и λd и соединяющие области пространства параметров, соответствующие структурам разбиения, представленным на рис. 178, *1* и 178, *6*.

Нетрудно обнаружить, проследив за появлением предельных циклов из бесконечности при малых γ и λ, что любая k-кривая, не принадлежащая к области $\lambda d < \varepsilon$, также соединяет области пространства параметров, соответствующие структурам фазового пространства на рис. 178, *1*, *6* (приложение I). Изменение параметров λ и d вдоль k-кривых осуществляет монотонный поворот векторного поля.

Проследим за поведением при этом сепаратрис седла. Для структуры разбиения фазового пространства, представленной на рис. 178, *1*, на прямой $\varphi = \varphi_0$, проходящей через точку O_1, отметим ближайшие к седлу точки пересечения с α- и ω-сепаратрисами: P_1 на α-сепаратрисе на нижнем полуцилиндре, P_2 на ω-сепаратрисе на нижнем полуцилиндре, P_5 на α-сепаратрисе на верхнем полуцилиндре, P_4 на ω-сепаратрисе на верхнем полуцилиндре и P_3 — вторую точку пересечения на ω-сепаратрисе, идущей к состоянию равновесия O_1 (рис. 179). При возрастании λ вдоль k-кривых поле направлений поворачивается по часовой стрелке и точки P_1 и P_4 монотонно поднимаются, а точки P_2, P_3 и P_5 монотонно опускаются. Возможные бифуркации соответствуют совпадению сначала точек P_2 и P_1, после этого точек P_3 и P_1, а также точек P_4 и P_5. Эти бифуркации действительно осуществляются, так как при возрастании λ вдоль k-кривых происходит переход от структуры, представленной на рис. 178, *1*, к структуре, представленной на рис. 178, *6*, и при этом разности координат $y_3 - y_1$ и $y_5 - y_4$ меняют знак (индексы при координатах соответствуют индексам точек).

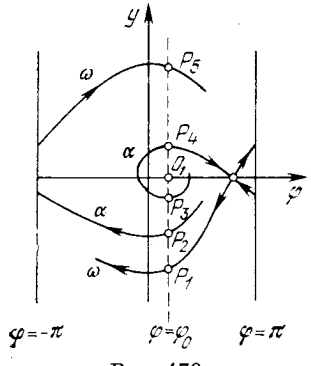


Рис. 179

Множества точек на плоскости (λ, d), для которых осуществляются совпадения точек P_2 и P_1 (существует петля сепаратрисы снизу), P_3 и P_1 (существует петля вокруг точки O_1) или P_4

и P_5 (существует петля сверху), образуют бифуркационные кривые L^-, L^0 и L^+, разделяющие плоскость (λ, d) на области, для которых качественные структуры различаются поведением сепаратрис седла. Поведение сепаратрис с точностью до четного числа предельных циклов определяет структуру разбиения фазового пространства на траектории.

Уравнение $\psi_2(1)=0$ дает для малых γ и λ асимптотическое представление L^--кривой; L^+-кривая (та ее часть, которая соответствует $d\geqslant 0$) начинается на оси $d=0$ (при $d=0$ для малых и для больших λ будут соответственно существовать структуры рис. 178, *4*, *6*; при возрастании λ поле монотонно поворачивается и, следовательно, существует единственное бифуркационное значение, соответствующее точке L^+-кривой).

Кривая L^0 располагается между L^- и L^+. Для малых γ и λ кривая L^0 представляется уравнением $d=3$ (см. гл. 15, § 2). Кривые L^-, L^0 и L^+ с каждой из k-кривых пересекаются в одной точке и уходят в бесконечность. Они не могут пересекаться, так как при $\gamma>0$ и любых λ и d не может осуществляться структура разбиения на траектории, при которой сепаратрисы седла образуют две петли на нижнем и верхнем полуцилиндрах (такой структуре соответствовала бы точка, в которой пересекаются три кривые L^-, L^0 и L^+).

Если предположить, что такая структура при некотором $\gamma>0$ осуществляется, то при убывании γ в силу монотонности поворота векторного поля на верхнем и нижнем полуцилиндрах (соответственно по и против часовой стрелки) обе петли разрушаются и возникает структура, в которой и на нижнем, и на верхнем полуцилиндрах α-сепаратриса располагается ниже ω-сепаратрисы. Только от такого расположения сепаратрис может появиться при возрастании γ двойная петля, образованная сепаратрисами седел. При $\gamma=0$ и любых λ и d такого расположения сепаратрис не может быть из-за симметрии поля направлений относительно начала координат; и при возрастании γ оно не может возникнуть, так как из-за различного направления поворота поля на нижнем и верхнем полуцилиндрах при возрастании γ точки α-сепаратрис на каждом полуцилиндре могут только подниматься, а точки ω-сепаратрис — только опускаться.

Из сказанного следует, что при возрастании λ вдоль k-кривых, соединяющих структуры, представленные на рис. 178, *1*, *6* ($k>(3/4)\pi\gamma$), осуществляется такая последовательность бифуркаций, при которой сначала сливаются точки P_2 и P_1, затем точки P_3 и P_1 и, наконец, точки P_4 и P_5. Кривые L^+ и $\sigma_1=0$ пересекаются (это следует из асимптотического представления L^+ — кривой уравнением $\psi(1)=0$), и поэтому при движении вдоль k-кривых стягивание предельного цикла к точке (при пересечении линии $\sigma_1=0$) может как предшествовать стягиванию предельного цикла к петле сепаратрисы (при пересечении кривой L^+),

так и происходить после него. Кривая L^0 не пересекает прямую $\sigma_1 = 0$, на которой фокус меняет устойчивость, на отрезке между осью d и L^+-кривой (пересечение невозможно при $\gamma = 0$, так как $P'_\varphi + Q'_y$ не меняет знак на $\sigma_1 = 0$ и, следовательно, невозможно и при малых γ).

Последовательность качественных структур, переходящих одна в другую при описанном изменении параметров, представлена на рис. 178 двумя возможными последовательностями грубых структур: *1—4, 6* или *1—3, 5, 6*. Негрубые структуры, соответствующие бифуркационным значениям параметра, обозначены двумя цифрами, указывающими на грубые структуры, которые они разделяют. При движении вдоль k_1-кривых $(0 < k_1 < (3/4)\pi\gamma)$ структура *1* выпадает из последовательности (k_1-кривые не пересекают кривую $\psi_2(1) = 0$).

Обратимся к случаю $d < 0$. Условие (4) выделяет на плоскости (λ, d) область, для точек которой в фазовом пространстве системы (1) есть устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре. При $d < 0$ состояние равновесия O_1 устойчивое. Качественная структура фазового пространства в этой области будет такой, как на рис. 178, *4*. Кривые k (для $-(3/4)\pi\gamma < k < 0$) соединяют области пространства параметров, соответствующие структурам, представленным на рис. 178, *4, 6*. При возрастании λ вдоль k-кривых точки P_4 и P_5 на ω- и α-сепаратрисах седла на верхнем полуцилиндре (см. рис. 179) монотонно сближаются, сливаются при некотором значении $\lambda = \lambda_0(k)$ (соответственно $d = d_0(k)$) и затем монотонно расходятся. Множество точек $(\lambda_0(k), d_0(k))$, соответствующее негрубой бифуркационной структуре, для которой α- и ω-сепаратрисы седла образуют петлю на верхнем полуцилиндре, образует непрерывную кривую — продолжение L^+-кривой в область $d < 0$. Через любую точку L^+ проходит одна из k-кривых $(-(3/4)\pi\gamma < k < 0)$.

Седловая величина $\sigma_2 = (P'_\varphi + Q'_y)_2 = -\lambda(1 + d\sqrt{1-\gamma^2})$ меняет знак в плоскости (λ, d) на прямой $1 + d\sqrt{1-\gamma^2} = 0$. Эта прямая имеет лишь одну точку пересечения с L^+-кривой (так как L^+ не может иметь с k-кривыми более одной точки пересечения).

Существует единственное значение $k = k_0$, разделяющее k-кривые на два класса: k_1-кривые $(k_0 < k_1 < 0)$, пересекающие L^+ при $\sigma_2 < 0$ и k_2-кривые $(-(3/4)\pi\gamma < k_2 < k_0)$, пересекающие L^+ при $\sigma_2 > 0$. При малых λ осуществляется структура, представленная на рис. 178, *4*. При возрастании λ вдоль k_1-кривых предельный цикл опускается, а сепаратрисы на верхнем полуцилиндре сближаются.

При переходе через значение λ, соответствующее пересечению кривых k_1 и L^+, возникает и затем разрушается петля сепаратрисы на верхнем полуцилиндре, к которой стягивается устойчивый

предельный цикл (так как седловая величина $\sigma_2 < 0$). При дальнейшем изменении параметров вдоль k_1-кривых изменения качественной структуры не происходит. Последовательность качественных структур при возрастании λ вдоль k_1-кривых представлена на рис. 178, *4*, 178, *4—6*, 178, *6*.

При возрастании λ вдоль k_2-кривых предельный цикл опускается и сепаратрисы на верхнем полуцилиндре сближаются, но при переходе через значение λ, соответствующее пересечению кривых k_2 и L^+, при разрушении петли сепаратрисы появляется неустойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре (устойчивый предельный цикл не может стянуться к петле сепаратрисы, так как седловая величина $\sigma_2 > 0$) и возникает структура, представленная на рис. 178, *7*, с двумя предельными циклами, охватывающими верхний полуцилиндр.

При дальнейшем возрастании параметра λ вдоль k_2-кривых предельные циклы монотонно сближаются. Так как для структуры на рис. 178, *6* предельных циклов нет, то существует на каждой k_2-кривой точка с координатами $\lambda^{++}(k)$, $d^{++}(k)$, для которой устойчивый и неустойчивый предельные циклы сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл. Соответствующая негрубая бифуркационная структура представлена на рис. 178, *7—6*. Множество точек $(\lambda^{++}(k), d^{++}(k))$ образует непрерывную L^{++} кривую, пересекающуюся с каждой из k_2-кривых в одной точке справа от L^+-кривой и начинающуюся в точке пересечения L^+-кривой с прямой $\sigma_2 = 0$ (рис. 180).

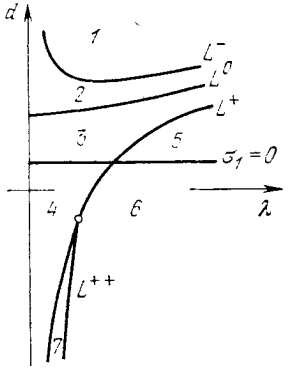


Рис. 180

Последовательность качественных структур при возрастании λ вдоль k_2-кривых представлена на рис. 178, *4*; 178, *4—7*; 178, *7*; 178, *7—6* и 178, *6*.

Разбиение пространства параметров λ, d при малых γ представлено на рис. 180 цифрами *1—7* отмечены области в пространстве параметров, соответствующие грубым структурам в фазовом пространстве, помеченным теми же цифрами на рис. 178. Негрубые структуры на рис. 178, помеченные двумя цифрами, соответствуют бифуркационным кривым рис. 180, разделяющим соответствующие области.

Замечание. Определение L^{++}-кривой опирается на существование L^+-кривой, доказанное с привлечением метода малого параметра и, следовательно, для области фазового пространства, ограниченной по координате y. Для двойных циклов, расположенных в далеких частях фазового цилиндра, нужно рассматривать продолжение L^{++}-кривой. Асимптотическое поведение продолжения L^{++}-кривой дано в приложении II.

5. Поведение бифуркационных кривых в зависимости от γ. Другие возможные бифуркации. Проследим за изменениями в фазовом пространстве и поведением бифуркационных кривых при переходе от малых положительных значений γ к немалым в интервале $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. При возрастании γ состояния равновесия O_1 и O_2 сближаются. Поле направлений на нижнем и верхнем полуцилиндрах монотонно поворачивается соответственно по и против часовой стрелки, и при этом устойчивые предельные циклы на верхнем и нижнем полуцилиндрах поднимаются. Если устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре существует для некоторого γ_0, то он будет существовать и для всех $\gamma > \gamma_0$. Если для некоторого γ_0 существует петля на нижнем или верхнем полуцилиндрах, то при возрастании γ петля снизу разрушается без возникновения предельного цикла, а петля сверху — с возникновением устойчивого предельного цикла. Точки L^--кривой, разделяющей области *1* и *2* на рис. 180, при возрастании γ становятся внутренними точками области *2*. При возрастании γ точки L^+-кривой становятся внутренними точками областей *3* и *4*, а точки L^{++}-кривой — внутренними точками областей *4* и *7* (либо принадлежат их границе). Кривая L^{++}, начинающаяся в точке пересечения L^+ с прямой $1 + d\sqrt{1-\gamma^2} = 0$, не существует выше прямой (предположение о существовании таких точек приводит к необходимости существования для двух значений γ_1 и γ_0 точек пересечения кривых $L^{++}(\gamma_1)$ и $L^{++}(\gamma_0)$, что невозможно из-за монотонности поворота поля на полуцилиндре при монотонном изменении γ), и поэтому условие $1 + d\sqrt{1-\gamma^2} < 0$, может служить оценкой области существования структуры разбиения фазового цилиндра с двумя предельными циклами на верхнем полуцилиндре, представленной на рис. 178, *7*. Область *7* пространства параметров, соответствующая структуре на рис. 178, *7*, с возрастанием γ опускается.

При возрастании γ до значения $\gamma = 1$ состояния равновесия O_1 и O_2 сливаются, образуя сложную особую точку седло-узел, а области *1—3*, *5* и *7* рис. 180 уходят в бесконечность. На плоскости единственной бифуркационной кривой будет L^+-кривая (ее существование следует из рассуждений, аналогичных рассуждениям для случая малых γ, опирающихся на существование при $\gamma = 1$ некоторой окрестности оси d, для точек которой есть устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре). Пространство параметров и структуры разбиения фазового пространства изображены на рис. 181.

При $\gamma > 1$ существует единственная структура разбиения фазового пространства на траектории. Все траектории накручиваются на устойчивый предельный цикл на верхнем полуцилиндре (рис. 182). При возрастании γ от значения $\gamma = 1$ при λ и d, взятых из области *1* рис. 181, исчезает состояние равновесия седло-

узел. При значениях λ и d, взятых из области 2, происходит появление устойчивого предельного цикла из α-сепаратрисы седло-узла.

При $\gamma = 0$ фазовое пространство симметрично относительно начала координат (рис. 183). Состояния равновесия будут $O_1(0, 0)$

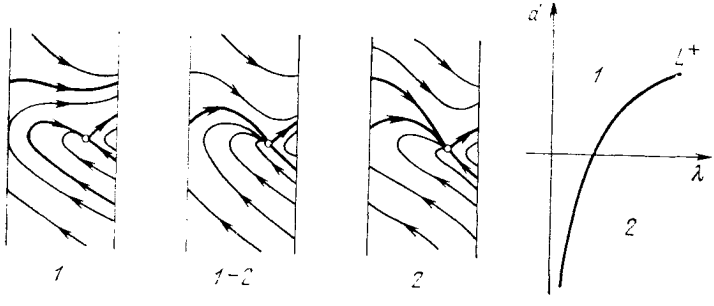


Рис. 181

и $O_2(0, \pm\pi)$. Если существует петля сепаратрисы на верхнем полуцилиндре, то существует и петля снизу. Такая двойная петля образует также замкнутый контур вокруг состояния равновесия O_1. Это значит, что кривые L^-, L^0 и L^+ совпадают. При $\gamma \to 0$ кривые L^- и L^+ сближаются и сливаются при $\gamma = 0$ с осью d и L^0-кривой. Точки L^{++}-кривой при убывании γ становятся внутренними точками области 6 (см. рис. 180). Область 7 не может сохраниться при $\gamma = 0$, так как это означало бы, что и при достаточно малых γ будет существовать четыре цикла. При $\gamma \to 0$ кривая L^{++} влипает в полупрямую $\lambda = 0$, $d < -1$. При $\gamma = 0$ на плоскости параметров (λ, d) будет единственная бифуркационная L-кривая, возникающая из слияния кривых L^-, L^0 и L^+. Кривая L начинается в точке $(\lambda = 0, d = 3)$ и уходит в бесконечность. Она не может пересечь ни прямую $d = 1$ (так как $P'_\varphi + Q'_y = -\lambda(1 - d\cos\varphi)$ не меняет знак при $|d| \leqslant 1$), ни прямую $\lambda = 0$ (так как с k-кривыми не может быть более одной точки пересечения). При переходе через L-кривую вдоль k-кривых при возрастании λ и возникновении двойной петли к каждой полупетле стягивается устойчивый предельный цикл (так как седловая величина $(P'_\varphi + Q'_y)_2 = -\lambda(1 + d)$ отрицательна, а векторное поле поворачивается по часовой стрелке). При дальнейшем изменении λ и разрушении петли от двойной петли, рассматриваемой как замкнутый контур, охватывающий состояние равновесия O_1, появляется устойчивый предельный цикл, охватывающий это состояние равновесия. Предельный цикл стягива-

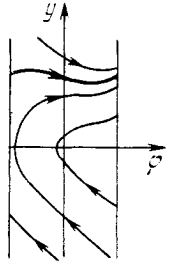


Рис. 182

ется в точку при $d=1$, и фокус становится устойчивым. Пространство параметров и структуры разбиения фазового пространства для $\gamma=0$ изображены на рис. 183.

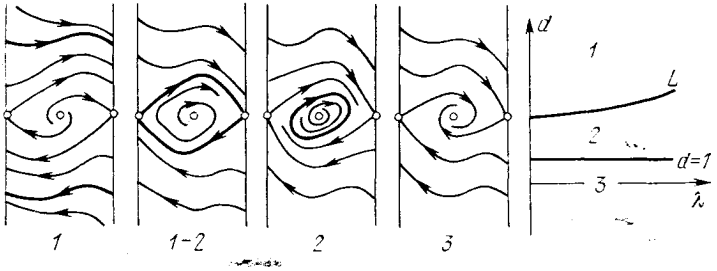


Рис. 183

Приложение I. Для исследования поведения траекторий при больших $y>0$ полагаем $y=1/\rho$. Система (1) переходит в систему

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{\rho},\quad \frac{d\rho}{dt}=\rho(\lambda-k\cos\varphi)+\rho^2(\sin\varphi-\gamma)$$

или в уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho^2(\lambda-k\cos\varphi)+\rho^3(\sin\varphi-\gamma), \qquad (A)$$

где ρ и φ можно рассматривать как обычные полярные координаты на плоскости, перпендикулярной оси фазового цилиндра. Преобразование $y=1/\rho$ переводит спирали, охватывающие цилиндр, в спирали, охватывающие состояние равновесия в точке $\rho=0$. Решение уравнения (A), определяемое начальным условием $\rho=\rho_0>0$ при $\varphi=0$, можно искать в виде ряда

$$\rho=\rho_0u_1(\varphi)+\rho_0^2u_2(\varphi)+\rho_0^3u_3(\varphi)+\rho_0^4u_4(\varphi)+\ldots,$$

сходящегося для всех φ в интервале $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$ и для всех достаточно малых значений ρ_0. Последовательно определяя обычным путем из рекуррентных уравнений функции $u_1(\varphi)\equiv 1$, $u_2(\varphi)$, ... и полагая затем $\varphi=2\pi$, получаем на отрезке $\varphi=0$ функцию последования. Уравнение

$$\rho_1-\rho_0=\rho_0^2u_2(2\pi)+\rho_0^3u_3(2\pi)+\rho_0^4u_4(2\pi)+\ldots\equiv$$
$$\equiv\rho_0^2\{2\pi\lambda+[(2\pi\lambda)^2-2\pi\gamma]\rho_0+[(2\pi\lambda)^3-2\pi\lambda(5\pi\gamma+1)-k\pi]\rho_0^2+\ldots\}=0 \qquad (B)$$

при $\gamma=0$ и малых λ (для любого $k>0$) имеет положительный корень, соответствующий устойчивому предельному циклу на верхнем фазовом полуцилиндре. При $\gamma=0$ в силу симметрии траекторий фазового пространства (полосы $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$) относительно начала координат будет существовать и симметрично расположенный устойчивый предельный цикл на нижнем полуцилиндре. Оба предельных цикла сохранятся и при малых γ. При малых γ и λ и любых $k>\frac{3}{4}\pi\gamma$ будет осуществляться структура разбиения фазового цилиндра, представленная на рис. 183, *1*.

Приложение II. Уравнение (B) в приложении I будет иметь при малых γ и малых $\rho_0=1/y$ двойной положительный корень, соответствующий двойному предельному циклу на верхнем фазовом полуцилиндре, если

$$\lambda=-\gamma^2/(2k)+\ldots,\quad \gamma\neq 0,\quad \lambda\neq 0,\quad k<0.$$

ЧАСТЬ IV

КУСОЧНО-СШИТЫЕ СИСТЕМЫ

ГЛАВА 17

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КУСОЧНО-СШИТЫХ СИСТЕМАХ

Введение. В последующих главах настоящей книги рассматриваются так называемые «сшитые» и «склеенные» динамические системы.

Так называются системы, область определения которых G (могущая совпадать со всей плоскостью (x, y)) разделяется на подобласти G_i, в которых определены различные аналитические системы. Траектории этих частичных систем сшиваются тем или другим образом (в зависимости от задачи) на границах G_i.

К рассмотрению таких сшитых динамических систем естественно приводят многие задачи из приложений, например, осциллятор с сухим трением, системы с «ударами» (простейшие модели часов), простейшие задачи регулирования (двухпозиционный авторулевой) и др. (см. [2, 3]).

Такие системы имеют некоторые типичные черты, именно:

1. «Сшитость» системы (а также «условия сшивания») непосредственно вытекает из физического смысла рассматриваемой задачи.

2. Система является кусочно-линейной, т. е. те частичные системы, из которых она склеивается, являются линейными.

3. На линии склейки может быть определено точечное отображение (функция последования), которое позволяет определить характер рассматриваемой системы.

В частности, в [3] приведено большое число примеров таких систем и дано рассмотрение их методом точечных отображений. При этом в большинстве из этих задач точечное отображение рассматривается записанным в параметрической форме, т. е. не в виде $\bar{y} = f(y)$, а в виде $\bar{y} = f_1(\rho)$, $y = f_2(\rho)$, где ρ — параметр. Такая параметрическая форма в некоторых случаях существенно упрощает рассмотрение. Во многих случаях полученное упрощение, приводящее к рассмотрению сшитой системы, позволяет рассматривать значительно более сложные фазовые пространства, чем плоскость. Однако в настоящей книге такие задачи не рассматриваются.

В случае, когда сшитая система хорошо отображает черты реальной системы, рассмотрение ее методом точечных отображений позволяет, вообще говоря, не только устанавливать качест-

венную структуру, но и получить также некоторые количественные характеристики.

Следует, однако, заметить, что полное рассмотрение кусочно-сшитых систем методом точечных преобразований, как правило, в основном возможно лишь в случае, когда частные системы, из которых система склеена, являются линейными (т. е. именно в случае, когда система кусочно-линейная). Между тем далеко не всегда, исходя из условий реальной задачи, естественно рассматривать кусочно-линейную систему; для некоторых задач естественно рассматривать системы, склеенные из нелинейных и неинтегрируемых динамических систем. В этом случае исследование системы методом точечных преобразований не может быть проведено.

Кроме того, следует принять во внимание также следующее: целесообразность введения и рассмотрения кусочно-склеенных систем может быть вызвана не только — если так можно выразиться — физическими причинами, т. е. тем, что физические свойства рассматриваемой системы хорошо описываются склеенными системами (например, как в указанных выше простейших примерах), но также и математическими причинами. Именно, иногда для упрощения математического исследования некоторые функции, характеризующие рассматриваемую реальную систему, заменяются кусочно-сшитыми функциями (до написания системы дифференциальных уравнений или после ее написания).

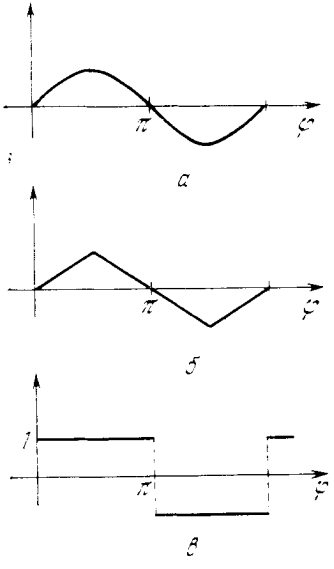


Рис. 184

Так, например, в некоторых случаях функция $y = \sin\varphi$ (см. рис. 184, *а*) заменяется либо непрерывной кусочно-склеенной функцией, представленной на рис. 184, *б*, либо даже разрывной функцией, представленной на рис. 184, *в*.

Теоретически всякая система может быть приближенно представлена как склеенная из достаточно большого числа линейных систем, так как в достаточно малой области всякая система может быть приближенно представлена как линейная. Однако использование этого весьма общего утверждения при рассмотрении конкретных задач, вообще говоря, не представляется возможным из-за его полной неэффективности.

Если при рассмотрении конкретной задачи делается такая замена аналитических функций кусочно-сшитыми (или даже

разрывными), то, очевидно, сразу же встает вопрос, будет ли полученная кусочно-сшитая система (введенная из математических соображений) правильно отражать те черты реальной системы, которые должны описываться не склеенной аналитической системой.

Этот вопрос подлежит детальному обсуждению, и ему посвящена гл. 20 настоящей книги.

Так или иначе, в силу ли физических или математических причин возникает целесообразность рассмотрения кусочно-сшитых, но не обязательно кусочно-линейных (и даже не обязательно кусочно-интегрируемых) динамических систем и их качественного исследования. Но в случае, когда сшитая система не является кусочно-линейной, полное сведéние исследования ее качественной структуры к исследованию некоторого точечного отображения, как правило, делается невозможным. Тогда естественно попытаться распространить теорию бифуркаций и методы качественного исследования, на нее опирающиеся, на кусочно-сшитые системы, конечно, с той спецификой, которая при этом возникает. Это тем более естественно, что в случае кусочно-сшитых систем, так же как и в случае аналитических систем, фактами теории бифуркаций объясняются некоторые черты поведения реальных систем (мягкое и жесткое возникновение колебаний, срыв колебаний и др.).

В настоящей книге при качественном рассмотрении сшитых систем используется не только построение функции последования (точечного отображения) и его исследование, но также и приемы, опирающиеся на перенесенную на сшитые системы теорию бифуркаций.

§ 1. Сшитые системы. Доопределение на линиях сшивания. В настоящей главе мы дадим определение кусочно-сшитых систем и укажем некоторые их основные свойства.

При этом мы ни в какой мере не претендуем на полное описание всех возможных типов кусочно-сшитых систем и их свойств (что и вообще вряд ли имеет смысл), а выделяем лишь некоторые, наиболее часто встречающиеся в прикладных задачах.

Система

$$\dot{x} = P(x, y), \ \dot{y} = Q(x, y), \qquad \text{(A)}$$

определенная в некоторой области G плоскости (x, y) (область может, в частности, совпадать со всей плоскостью (x, y)), называется *сшитой системой* (или *кусочно-сшитой*, или *кусочно-склеенной системой*), если:

1. Задано разделение области G на конечное число подобластей $G_1, G_2, \ldots, G_n$ $(n \geqslant 2)$, границы которых состоят из конечного числа:

а) линий, уходящих в бесконечность (в частности прямых);

б) простых замкнутых кривых;

в) простых дуг $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

При этом подразумевается, что линии и простые замкнутые кривые не имеют общих точек, а простые дуги могут иметь общими с линиями, простыми замкнутыми кривыми и друг с другом только свои концы.

Линии, замкнутые кривые и простые дуги предполагаются аналитическими, т. е. если $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ — параметрические уравнения линии, замкнутой кривой, дуги l, то функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ являются аналитическими функциями s.

Границы областей G_j $(j = 1, \ldots, n)$ называются *линиями сшивания* (или *линиями склейки*).

2. В каждой частичной области G_j вместе с ее границей (т. е. в замкнутой области G_j) определена частичная аналитическая динамическая система

$$dx/dt = P_j(x, y), \quad dy/dt = Q_j(x, y). \qquad (A_j)$$

Точнее, система (A_j) задана, и правые части ее являются однозначными аналитическими функциями в некоторой области H, целиком содержащей G_j; система (A_j) как бы «отрезана» вдоль границы G_j.

Таким образом, на всякой линии сшивания, общей для двух областей G_i и G_k, определена как система (A_i), так и система (A_k). Однако данная сшитая система может быть определена на линии сшивания совсем особым образом (она может быть отлична и от системы (A_i), и от системы (A_k)). В каждой внутренней точке любой области G_j склеенная система (A) совпадает с системой (A_j).

3. На границах областей G_j, т. е. на линиях сшивания, система (A) специально доопределяется (в зависимости от условий той реальной задачи, которая описывается рассматриваемой сшитой системой).

При сделанных нами предположениях относительно аналитичности частичных систем (A_j) и аналитичности линий, входящих в границы областей (G_j), очевидно, справедливы следующие утверждения.

Всякая простая дуга l, входящая в границу какой-либо области G_j (которая может быть либо частью уходящей в бесконечность граничной линии, либо дугой граничной замкнутой кривой):

1) может быть дугой без контакта для траекторий системы (A_i), определенной в области G_i (для которой она является граничной), но может не быть дугой без контакта для траекторий системы (A_k), определенной в отличной от G_i области G_k (для которой l также является граничной дугой);

2) может иметь конечное число точек касания с траекториями системы (A_i);

3) может совпадать с траекторией (полутраекторией, дугой траектории) системы (A).

Такой участок траектории называют *отрезком скользящего движения.*

§ 2. Возможные типы полутраекторий сшитых систем. При дальнейшем описании свойств сшитых систем рассмотрим в первую очередь, так же как и в случае систем с аналитическими правыми частями, каков возможный характер отдельной траектории или полутраектории такой системы.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка, принадлежащая области G_i и L_i^+ — положительная полутраектория системы (A_i), проходящая при $t = t_0$ через эту точку. Рассмотрим возможное поведение L^+ при $t > t_0$. Возможны следующие случаи.

1) При всех $t > t_0$ полутраектория L_i^+ остается в области G_i, которой принадлежит конец L_i^+ — точка M_0. Тогда L_i^+ определена для всех $t > t_0$, и ее возможный характер такой же, как и у аналитической динамической системы. (В частности, если полутраектория L_i^+ стремится к состоянию равновесия, то это состояние равновесия может лежать как внутри G_i, так и на границе G_i (на линии сшивания).)

2) При t, стремящемся к некоторому конечному значению $t_1 > t_0$, полутраектория L_i^+ приходит в некоторую точку M на

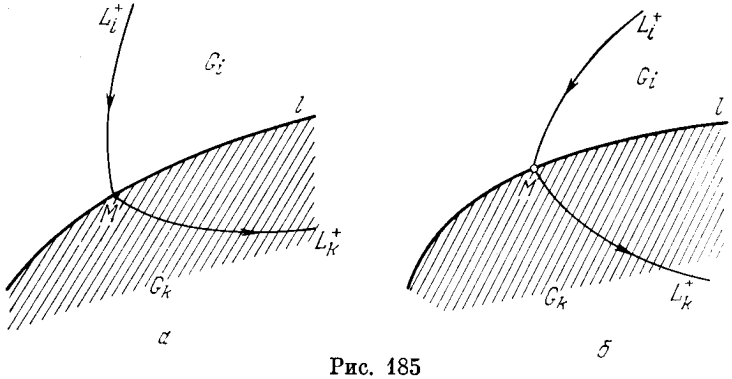


Рис. 185

линии сшивания l, являющуюся граничной для еще одной частичной области G_k $(k \neq i)$.

Рассмотрим случай, когда полутраектория L_i^+ не касается линии l в точке M. Могут представиться следующие возможности:

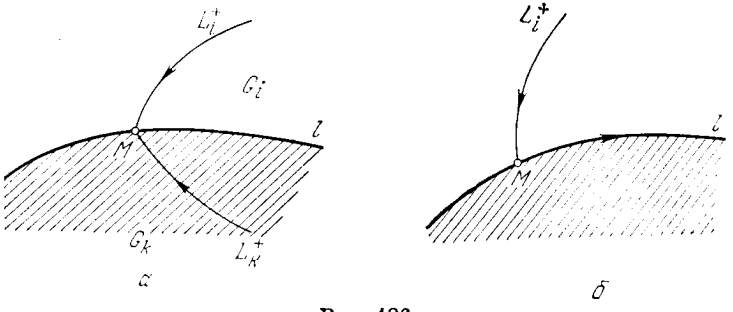
а) траектория L_k системы (A_k), проходящая через точку M, не касается дуги l, и при возрастании t уходит от граничной дуги l внутрь области G_k. Тогда могут быть следующие случаи:

$а_1$) положительная полутраектория L_k^+ системы (A_k) (с концом в точке M) считается непосредственным продолжением траектории L_i^+ (так что в этом случае L_i^+ непрерывно продолжается через линию сшивания) (рис. 185, *а*);

$а_2$) полутраектория L_i^+ кончается в точке M, так что точка M аналогична полуустойчивому состоянию равновесия (рис. 185, *б*);

б) траектория системы (A_k) «втыкается» при возрастании t в точку M. Тогда:

$б_1$) точка M считается аналогичной состоянию равновесия (рис. 186, *а*);



а *б*

Рис. 186

$б_2$) точка M считается точкой траектории, совпадающей с граничной кривой l (рис. 186, *б*);

в) из точки M изображающая точка, двигавшаяся по L_i^+, перескакивает в некоторую другую точку N дуги l, а траектория L_k^+ системы (A_k), которая из точки N при возрастании t входит в область G_k, считается продолжением L_i^+. Возможно также, что часть дуги l между точками M и N является продолжением L_i^+, а дальнейшим продолжением L_i^+ является полутраектория L_k^+ системы (A_k), выходящая из точки N (рис. 187).

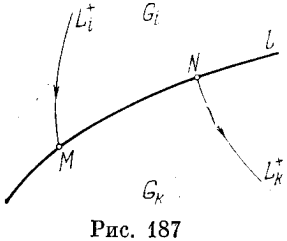


Рис. 187

Мы не будем здесь рассматривать случай, когда траектория касается в точке M дуги l (в этом случае иногда возможны те же условия продолжения или остановки, что и рассмотренные выше), а также не будем обсуждать другие возможные случаи доопределения на линии сшивания и будем обращаться к ним, если они будут встречаться в рассматриваемых далее конкретных задачах.

Отметим некоторую существенную особенность, указанную доопределениями траекторий в сшитых системах, соответствую-

щих реальным задачам: полутраектория доопределяется всегда однозначно при возрастании t. Однако в сторону убывания t траектория, вообще говоря, не определяется (и однозначность доопределения при убывании теряется).

§ 3. Особые траектории сшитых систем. Рассмотрим теперь вопрос об особых траекториях сшитых динамических систем. Очевидно, все особые траектории каждой из частичных систем (A_i), целиком лежащие в этих областях (состояние равновесия, предельные циклы сепаратрисы состояний равновесия, лежащие в G_i), являются особыми траекториями сшитой динамической системы. Кроме того, рассмотрим другие особые траектории склеенной системы.

а) Состояния равновесия O какой-либо из систем (A_i), определенной в области G_i, лежащие на линии склейки l, граничной для G_i. При этом здесь возможны следующие два случая:

a_1) точка O является состоянием равновесия как для системы (A_i) так и для системы (A_k) (l является общей границей для областей G_i и G_k, в которых соответственно определены системы (A_i) и (A_k)); в этом случае мы получаем склеенное состояние равновесия; простейшие примеры — склеенный фокус (рис. 188)

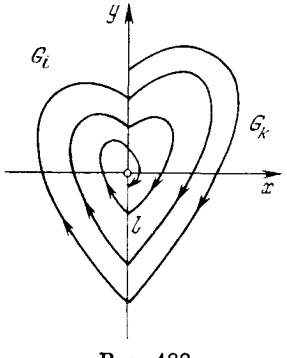


Рис. 188

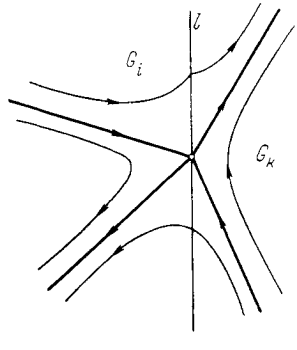


Рис. 189

и склеенное седло рис. 189 (в обоих случаях траектории, стремящиеся к O и в области G_i и в области G_k стремятся к O при $t \to \pm\infty$);

a_2) точка O является состоянием равновесия только для одной из систем (A_i) и (A_k), например для системы (A_i); тогда к такому состоянию равновесия траектории в области G_k, для которой дуга l также является граничной, могут стремиться («втыкаться») при конечных значениях t.

б) Точки дуги сшивания l, являющиеся точками стыка траекторий двух систем $(A_i$ и (A_k) (определенных в областях G_i

и G_k, для которых l является общей граничной дугой). В том случае, когда в силу заданного доопределения эти точки рассматриваются как неподвижные точки (точки покоя), они, очевидно, заполняют целую дугу (рис. 190). При сделанных предположениях относительно частных систем (A_j) и линий сшивания (системы предполагаются аналитическими и линии сшивания — также аналитическими) таких дуг неподвижных точек может существовать только конечное число.

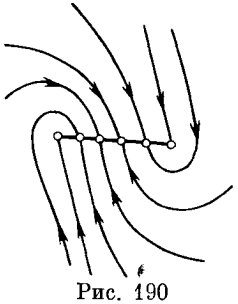
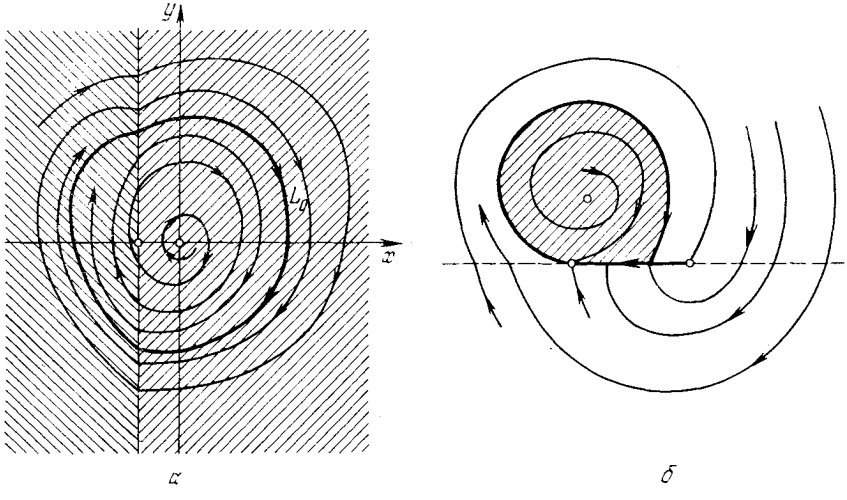


Рис. 190

в) В случае сшитого предельного цикла некоторые из траекторий, продолженные в силу заданного закона сшивания, могут после одной или нескольких прохождений через линии сшивания прийти в исходную точку, т. е. замкнуться.

Пусть L_0 — такая сшитая замкнутая траектория (рис. 191, *а*). Если все траектории, проходящие через некоторую достаточно малую окрестность L_0, стремятся к L_0 (т. е. при возрастании t входят и уже больше не выходят из ε-окрестности L_0, сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$), то естественно считать L_0 устойчивым пре-



а *б*

Рис. 191

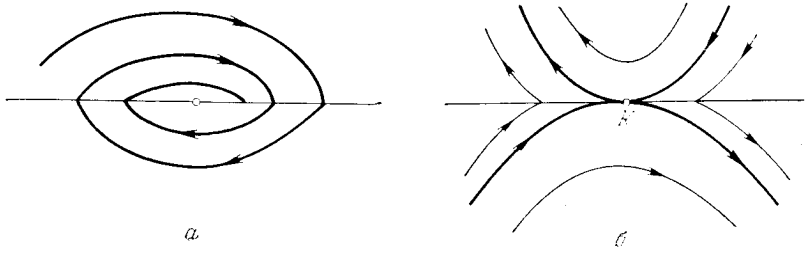
дельным циклом. Очевидно, естественно может возникнуть *сложный сшитый предельный цикл*, в частности двукратный.

В случае, когда имеет место доопределение на линии сшивания со скачками, также, очевидно, возможен сшитый предельный цикл со скачками.

В некоторых задачах возможны предельные циклы, содержащие отрезок скользящих движений (см. рис. 191, *б*). В [2, 3] рассмотрен ряд задач, в которых есть сшитые предельные циклы указанных типов. Эти задачи рассмотрены путем построения точечных отображений и при этом в параметрической форме. Отметим, что рассматриваемые при этом диаграммы Ламерея состоят из двух функций соответствия.

г) Если сепаратриса состояния равновесия O пересекает линию сшивания и имеет продолжение (в силу данного доопределения на линии сшивания), то эту сепаратрису (и все ее возможные продолжения) будем называть *сшитой сепаратрисой* (или просто *сепаратрисой*) рассматриваемой сшитой системы. Сепаратриса, очевидно, является особой траекторией.

д) Пусть траектории систем (A_i) и (A_k), определенные в областях G_i и G_k, имеющих общую дугу сшивания l, касаются этой дуги в некоторой точке R (в силу сделанного соглашения системы (A_i) и (A_k) определены в областях, содержащих замыкание G_i и G_k, и, следовательно, в некоторой окрестности дуги l)



а *б*

Рис. 192

и в силу доопределения на линии сшивания l эта точка считается неподвижной. Тогда мы можем получить, например, неподвижные точки типа:

1) сшитый фокус — *квазифокус* (рис. 192, *а*);

2) сшитое седло — *квазиседло* (рис. 192, *б*).

В случае 2) части траекторий, касающихся дуги l, аналогичны сепаратрисам.

В окрестности этих сшитых неподвижных точек качественная структура фазового пространства будет тождественна (в обычном смысле) разбиению в окрестности обычного фокуса и соответственно обычного седла. Однако поведение траекторий в зависимости от t, очевидно, другое (траектории стремятся к неподвижной точке O в конечное время).

е) Особой траекторией иногда естественно также считать траекторию, совпадающую целиком (или частично) с линией

склейки. Такой траекторией, в частности, является траектория скользящих движений.

Не ставя своей целью (такая цель вообще вряд ли достижима и имеет смысл) перечислить все возможные случаи доопределения, и в соответствии с этим — все возможные типы особых траекторий, приведем все же чисто геометрические примеры, когда у сшитой системы роль особой траектории играет континуум траекторий.

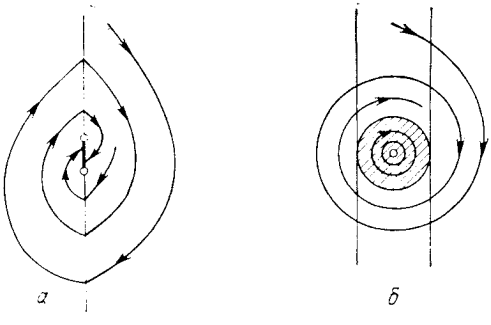


Рис. 193

Так, например, отрезок особых точек (рис. 193, *а*) (граничные для отрезка точки — состояния равновесия одной из систем) играет роль, аналогичную фокусу. На рис. 193, *б* представлен случай, когда область, заполненная замкнутыми траекториями, играет роль элемента притяжения (очевидно, такая область может также играть роль элемента отталкивания) для других траекторий. На рис. 194 представлены некоторые возможные случаи, когда континуум траекторий, лежащий между сшитыми сепаратрисами, вместе с этими граничными сепаратрисами аналогичен сепаратрисам аналитического седла. На рис. 194, *а—б*

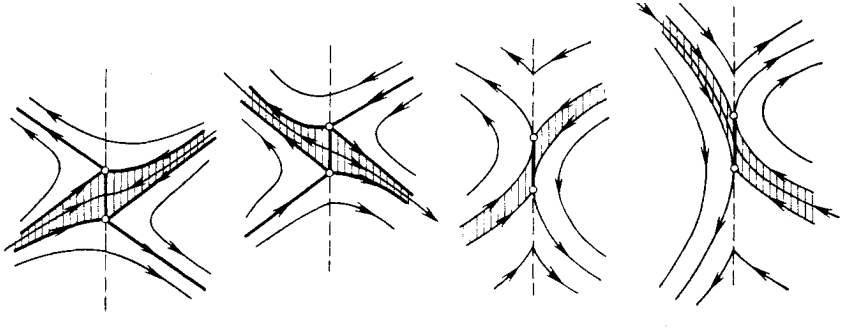


Рис. 194

представлено образование, аналогичное седлу, сшитое из двух сдвинутых аналитических седел с отрезком притяжения (соответственно отталкивания) для континуума траекторий (в обоих случаях концы отрезка притяжения (соответственно отталкивания) являются состояниями равновесия одной из сшиваемых

систем). На рис. 194, *в*—*г* — образование, аналогичное седлу, сшитое из обыкновенных траекторий с отрезком неподвижных точек (на концах этого отрезка нет состояний равновесия). На рис. 195 отрезок неподвижных точек вместе с некоторой окрестностью аналогичен седло-узлу. На рис. 196, *а* — аналог двукратной точки, для которой $\sigma = 0$ (см. гл. 4); на рис. 196, *б* — аналог седло-узла.

Этими примерами мы здесь ограничиваемся.

Если в рассматриваемых дальнейших конкретных примерах сшитых систем встретятся еще другие случаи доопределения

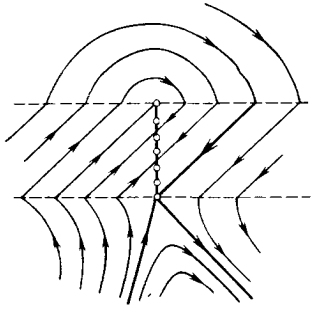


Рис. 195

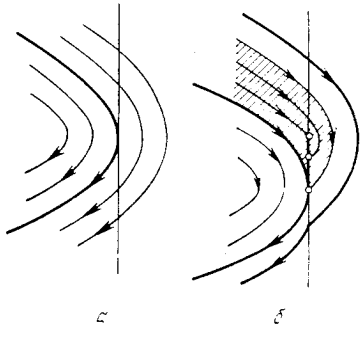


Рис. 196

или другие возникающие при сшивании особенности, то мы обсудим их также при рассмотрении соответствующей конкретной сшитой задачи.

§ 4. Бифуркации в сшитых системах. Метод Понтрягина для сшитых систем. Сшитые динамические системы, возникающие из приложений, всегда содержат параметры, и при изменении параметров качественная структура рассматриваемой системы может, очевидно, изменяться.

Мы рассмотрим простейшие возможные в сшитых системах бифуркации (изменения качественной структуры) при естественном предположении, что при всех рассматриваемых значениях параметров линии сшивания остаются неизменными.

При этом, очевидно, нам достаточно рассмотреть только бифуркации сшитых особых траекторий, так как бифуркации траекторий, целиком лежащих в какой-либо из частных областей G_i — те же, что и описанные в гл. 10, 11.

Естественно выделить и рассмотреть следующие простейшие бифуркации, аналогичные простейшим бифуркациям аналитических динамических систем:

a_1) бифуркации сшитого состояния равновесия типа фокус (см. рис. 188);

$а_2$) бифуркации неподвижной точки типа фокус — квазифокуса (см. рис. 192, *а*);

$б_1$) бифуракции сшитых предельных циклов;

$в_1$) бифуркации сшитых сепаратрис, идущих из седла в седло (седла могут быть как сшитыми, так и несшитыми);

$в_2$) бифуркации сепаратрис седлообразных точек покоя (сшитых или несшитых), идущих из седлообразной точки покоя в такую же точку покоя или седло (сшитое или несшитое);

$г_1$) бифуркации сшитого седло-узла;

$г_2$) бифуркации сшитых сепаратрис седло-узла (сшитого или несшитого), выходящих из седло-узла и возвращающихся в него же.

Кроме указанных бифуркаций, в сшитых системах могут быть также некоторые специфические для таких систем бифуркации. В силу того, что в сшитых системах аналогами состояний равновесия могут быть дуги притяжения или отталкивания (см. рис. 193, *а*), состоящие из неподвижных точек, или область, заполненная замкнутыми траекториями, и т. п., то, естественно, встречаются также бифуркации таких образований, аналогичные рождению предельного цикла из фокуса. Однако мы не будем их здесь рассматривать особо, а рассмотрим их, если они встретятся в конкретных примерах. Ниже мы приведем рассмотрение некоторых из перечисленных выше простейших бифуркаций.

1. Сложный сшитый фокус и рождение из него предельного цикла [22]. Пусть дана сшитая система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + P(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + Q(x, y), \end{aligned} \qquad x < 0; \tag{I}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a^*x + b^*y + P^*(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + Q(x, y), \end{aligned} \qquad x > 0. \tag{II}$$

Приведенная система имеет частный вид, ввиду того, что у обеих систем (I) и (II) второе уравнение одно и то же. Однако такого вида сшитые системы часто встречаются. Так, например, если рассматривается уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + G(x, \dot{x}) = 0,$$

в котором $f(x, \dot{x})$ и $G(x, \dot{x})$ кусочно-непрерывны, то оно приводится к системе вида (I)—(II); одно из уравнений будет одним и тем же во всех областях сшивания. Отметим, что сшивание вдоль отрезка прямой $x = 0$ не носит частного характера, т. е. к этому случаю мы всегда можем прийти, делая надлежащую замену переменных. Если уравнение дуги сшивания, являющейся аналитической дугой, есть

$$f(x, y) = 0,$$

то нужно ввести новое переменное

$$f(x, y) = u.$$

Сшитая система, заданная с помощью (I)—(II), имеет точку $O(0, 0)$ сшитым состоянием равновесия. Функции $P(x, y)$, $P^*(x, y)$, $Q(x, y)$— степенные ряды, начинающиеся с квадратичных членов:

$$P(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots,$$
$$P^*(x, y) = a^*_{20}x^2 + a^*_{11}xy + a^*_{02}y^2 + \ldots,$$
$$Q(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \ldots$$

Предположим, что для системы (I) (продолженной на линию сшивания $x = 0$) состояние равновесия $O(0, 0)$ является фокусом, т. е. корни соответствующего системе (I) характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

— комплексные сопряженные:

$$\lambda_1 = \sigma + i\omega, \quad \lambda_2 = \sigma - i\omega.$$

Линейным преобразованием

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{d - \alpha}{2\omega}x - \frac{b}{\omega}y \tag{1}$$

приводим систему (I) (рассматриваемую в некоторой окрестности начала) к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \sigma\xi - \omega\eta + \overline{P}(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= \omega\xi + \sigma\eta + \overline{Q}(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{B$_1$}$$

Предположим, что и для системы (II), продолженной за линию сшивания $x = 0$, начало O также является фокусом, т. е. соответствующее системе (II) характеристическое уравнение

$$\lambda^{*2} - (a^* + d)\lambda^* + a^*d - b^*c = 0$$

имеет комплексные сопряженные корни

$$\lambda^*_1 = \sigma^* + i\omega^*, \quad \lambda^*_2 = \sigma^* - i\omega^*.$$

Линейным преобразованием

$$\xi^* = x, \quad \eta^* = \frac{d - a^*}{2\omega^*}x - \frac{b^*}{\omega^*}y \tag{2}$$

приводим систему (II) к виду каноническому:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^* &= \sigma^*\xi^* - \omega^*\eta^* + \overline{P}^*(\xi^*, \eta^*), \\ \dot{\eta}^* &= \omega^*\xi^* + \sigma^*\eta^* + \overline{Q}^*(\xi^*, \eta^*). \end{aligned} \tag{B$_2$}$$

Очевидно, принимая во внимание замены переменных, с помощью которых мы пришли к системам (B_1) и (B_2) соответственно, система (B_1) рассматривается при $\xi < 0$, а система (B_2) — при $\xi > 0$. При этом

$$\overline{P}(\xi, \eta) = A_{20}\xi^2 + A_{11}\xi\eta + A_{02}\eta^2 + \ldots,$$
$$\overline{Q}(\xi, \eta) = B_{20}\xi^2 + B_{11}\xi\eta + B_{02}\eta^2 + \ldots,$$
$$\overline{P}^*(\xi^*, \eta^*) = A^*_{20}\xi^{*2} + A^*_{11}\xi^*\eta^* + A^*_{02}\eta^{*2} + \ldots,$$
$$\overline{Q}^*(\xi^*, \eta^*) = B^*_{20}\xi^{*2} + B^*_{11}\xi^*\eta^* + B^*_{02}\eta^{*2} + \ldots,$$

где

$$A_{20} = a_{20} + a_{11}\frac{d-a}{2b} + a_{02}\left(\frac{d-a}{2b}\right)^2,$$
$$A_{11} = -\left(a_{11}\frac{\omega}{b} + 2a_{02}\frac{d-a}{2b^2}\omega\right), \quad A_{02} = a_{02}\left(\frac{\omega}{b}\right)^2,$$
$$B_{20} = \frac{d-a}{2\omega}A_{20} - \left[b_{20}\frac{b}{\omega} + b_{11}\frac{d-a}{2\omega} + b_{02}\left(\frac{d-a}{2b}\right)^2\frac{b}{\omega}\right],$$
$$B_{11} = \frac{d-a}{2\omega}A_{11} + b_{11} + 2b_{02}\frac{d-a}{2b}, \quad B_{02} = \frac{d-a}{2\omega}A_{02} - b_{02}\frac{\omega}{b}.$$

Выражения для A^*_{20}, A^*_{02}, A^*_{11} и B^*_{20}, B^*_{02} и B^*_{11} могут быть получены из выражений для A_{02}, A_{11}, A_{20} и B_{20}, B_{02} и B_{11} соответственно заменой a_{20}, a_{11}, a_{02}, a, b и ω через a^*_{20}, a^*_{11}, a^*_{02}, a^*, b^*, ω^*. Переходя к полярным координатам соответственно как в системе (B_1), так и в системе (B_2), полагая

$$\xi = \rho\cos\varphi, \quad \eta = \rho\sin\varphi$$

и соответственно

$$\xi^* = \rho^*\cos\varphi, \quad \eta^* = \rho^*\sin\varphi,$$

мы получим два уравнения в полярных координатах: одно — для системы (B_1):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho R_1(\varphi) + \rho^2 R_2(\varphi) + \ldots, \qquad (R_1)$$

определенной при значениях $\pi/2 < \varphi \leqslant (3/2)\pi$, и другое — для системы (B_2):

$$d\rho^*/d\varphi = \rho^* R^*_1(\varphi) + \rho^{*2} R^*_2(\varphi) + \ldots, \qquad (R_2)$$

определенной при значениях $(3/2)\pi < \varphi \leqslant (3/2)\pi + \pi$. Здесь

$$R_1(\varphi) = \sigma/\omega = b_1, \quad R^*_1(\varphi) = \sigma^*/\omega^* = b^*_1,$$
$$R_2(\varphi) = A_1\cos^3\varphi + A_2\cos^2\varphi\sin\varphi + A_3\cos\varphi\sin^2\varphi + A_4\sin^3\varphi,$$
$$R^*_2(\varphi) = A^*_1\cos^3\varphi + A^*_2\cos^2\varphi\sin\varphi + A^*_3\cos\varphi\sin^2\varphi + A^*_4\sin^3\varphi,$$

где

$$A_1=\frac{1}{\omega}\left(A_{20}-B_{20}\frac{\sigma}{\omega}\right),\quad A_2=\frac{1}{\omega}\left[A_{11}+B_{20}+\frac{\sigma}{\omega}(A_{20}-B_{11})\right],$$

$$A_3=\frac{1}{\omega}\left[A_{02}+B_{11}+\frac{\sigma}{\omega}(A_{11}-B_{02})\right],\quad A_4=\frac{1}{\omega}\left(A_{02}\frac{\sigma}{\omega}+B_{02}\right),$$

$$A_1^*=\frac{1}{\omega^*}\left(A_{20}^*-B_{20}^*\frac{\sigma^*}{\omega^*}\right),\quad A_2^*=\frac{1}{\omega^*}\left[A_{11}^*+B_{20}^*+\frac{\sigma^*}{\omega^*}(A_{20}^*-B_{11}^*)\right],$$

$$A_3^*=\frac{1}{\omega^*}\left[A_{02}^*+B_{11}^*+\frac{\sigma^*}{\omega^*}(A_{11}^*-B_{02}^*)\right],\quad A_4^*=\frac{1}{\omega^*}\left(A_{02}^*\frac{\sigma^*}{\omega^*}+B_{02}^*\right).$$

Решение уравнения (R_1), определяемое начальными условиями $\rho=\rho_0$ при $\varphi=\pi/2$, может быть записано в виде ряда по степеням ρ_0, сходящегося при всех $\pi/2\leqslant\varphi\leqslant(3/2)\pi$:

$$\rho=u_1(\varphi)\rho_0+u_2(\varphi)\rho_0^2+\ldots \tag{3}$$

Подставляя правую часть (3) в уравнение (R_1), мы для определения $u_i(\varphi)$ получим рекуррентные дифференциальные уравнения

$$du_1/d\varphi=u_1R_1,\quad du_2/d\varphi=u_2R_1+u_1^2R_2,\ \ldots \tag{4}$$

с начальными условиями (см. гл. 3 § 5)

$$u_1(\pi/2)=1,\quad u_i(\pi/2)=0,\quad i>1.$$

В частности,

$$u_1(\varphi)=\exp\left\{\frac{\sigma}{\omega}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Полагая в решении (3) $\varphi=(3/2)\pi$, получим функцию соответствия между отрезками полупрямых (с концом в начале O) $\eta>0$ $(\varphi=\pi/2)$ и $\eta<0$ $(\varphi=(3/2)\pi)$:

$$\rho_1=\alpha_1\rho_0+\alpha_2\rho_0^2+\ldots \tag{5}$$

Решение уравнения (R_2) с начальными условиями $\rho^*=\rho_1^*$ при $\varphi=(3/2)\pi$ также ищем в виде ряда

$$\rho_2^*=u_1^*(\varphi)\rho_1^*+u_2^*(\varphi)\rho_1^{*2}+\ldots,\quad (3/2)\pi\leqslant\varphi\leqslant(3/2)\pi+\pi,$$

где $u_i^*(\varphi)$ находятся из рекуррентных уравнений, полностью аналогичных уравнениям (4). Подставляя $\varphi=(3/2)\pi+\pi$ в $u_i^*(\varphi)$, получим функцию соответствия между отрезками полупрямых $\eta<0$ $(\varphi=(3/2)\pi)$ и $\eta>0$ $(\varphi=(3/2)\pi+\pi)$:

$$\rho_2^*=\alpha_1^*\rho_1^*+\alpha_2^*\rho_1^{*2}+\ldots \tag{6}$$

Из формул линейных преобразований (1) и (2) очевидно, что при $\varphi=\pi/2$ и $\varphi=(3/2)\pi$ $\xi=0$, а $\eta=\rho$ и $\eta^*=\rho^*$. Отсюда

нетрудно видеть, что

$$\rho_1^* = \frac{b^*}{b}\frac{\omega}{\omega^*}\rho_1, \quad \rho_2^* = \frac{b^*}{b}\frac{\omega}{\omega^*}\rho_2. \tag{7}$$

Подставляя в (6) с учетом формул (7) выражение (5), мы получим, как нетрудно видеть, функцию последования на отрезке прямой $\eta > 0$ (с концом в начале) для сшитой системы в окрестности сшитого фокуса:

$$\rho_2 = \alpha_1\alpha_1^*\rho_0 + \left(\alpha_1^*\alpha_2 + \frac{b^*}{b}\frac{\omega}{\omega^*}\alpha_1^2\alpha_2^*\right)\rho_0^2 + \ldots = \bar{\alpha}_1\rho_0 + \bar{\alpha}_2\rho_0^2 + \ldots$$

Вычисления дают

$$\bar{\alpha}_1 = e^{\left(b_1 + b_1^*\right)\pi}.$$

Очевидно, сшитое состояние равновесия O будет негрубым, сложным сшитым фокусом, если

$$\bar{\alpha}_1 = 1, \quad \text{т. е.} \quad b_1 + b_1^* = 0,$$

и существует хотя бы один коэффициент функции последования $\alpha_k \neq 0$. Характер устойчивости сшитого фокуса при этом определяется первым не равны нулю коэффициентом $\bar{\alpha}_k$ $(k \geqslant 2)$. Отметим, что, в то время как в силу теоремы Ляпунова для аналитических систем в случае, когда фокус сложный, т. е. первый коэффициент функции последования $(\bar{\alpha}_1)$ равен единице, одновременно обращается в нуль и второй $(\bar{\alpha}_2)$ (так что ляпуновская величина, которая определяет устойчивость и неустойчивость сложного фокуса, может быть только $\bar{\alpha}_3$), в случае сшитого фокуса из обращения $\bar{\alpha}_1$ в единицу не следует одновременное обращение в нуль $\bar{\alpha}_2$: при $\bar{\alpha}_1 = 1$ $\bar{\alpha}_2$ может быть как не равным нулю, так и равным нулю. Отметим также, что сложный сшитый фокус может сшиваться как из двух сложных (аналитических) фокусов, так и из двух грубых фокусов, для которых

$$b_1 + b_1^* = 0, \quad b_1 = \sigma/\omega, \quad b_1^* = \sigma^*/\omega^*.$$

Приведем выражение для $\bar{\alpha}_2$ через коэффициенты частичных систем (I) и (II):

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_2 = e^{\left(b_1 + b_1^*\right)\pi}\frac{1 + e^{b_1\pi}}{\left(1 + b_1^2\right)\left(9 + b_1^2\right)} \times \\ \times \left[-6A_1 - 2A_2b_1 - A_3\left(3 + b_1^2\right) - A_4\left(b_1^3 + 7b_1\right)\right] + \\ + \frac{b^*}{b}\frac{\omega}{\omega^*}e^{\left(2b_1 + b_1^*\right)\pi}\frac{1 + e^{b_1^*\pi}}{\left(1 + b_1^{*2}\right)\left(9 + b_1^{*2}\right)} \times \\ \times \left[6A_1^* + 2A_2^*b_1^* + A_3^*\left(3 + b_1^{*2}\right) + A_4^*\left(b_1^{*3} + 7b_1^*\right)\right].\end{aligned}$$

Используя построенную вокруг сшитого фокуса функцию последования, нетрудно видеть, что, когда

$$b_1 + b_1^* = 0, \quad \bar{\alpha}_2 \neq 0$$

(т. е. когда мы имеем простейший сложный фокус), при изменении коэффициентов b_1 и b_1^* (так, чтобы выражение $\bar{\alpha}_1$ сделалось не равным нулю и надлежащего знака) из сложного сшитого фокуса рождается сшитый предельный цикл (и только один) той же устойчивости, что и сложный сшитый фокус.

Если при изменении коэффициентов b_1 и b_1^* сшитый фокус из устойчивого делается неустойчивым, то здесь возможна та же смена качественных структур, что и рассмотренная в гл. 11, 13 при смене устойчивости фокуса аналитической системы.

Пусть теперь у рассматриваемого сложного (сшитого) фокуса первый не равный нулю коэффициент — $\bar{\alpha}_k \neq 0$, где $k > 2$.

Тогда без труда можно установить, что в случае, когда коэффициенты $\bar{\alpha}_i$ аналитически зависят от параметров (это, очевидно, будет всегда, когда правые части сшиваемых динамических систем — аналитические функции параметров), то из такого фокуса может при сколь угодно малых изменениях параметров родиться не более k предельных циклов. То или другое число $m \leqslant k$ предельных циклов рождается при том или другом характере зависимости коэффициентов $\bar{\alpha}_i$ $(i \leqslant k)$ от параметров.

2. Сшитый из обыкновенных траекторий «квазифокус» и рождение предельных циклов из такого фокуса [72]. Пусть линия сшивания есть $x = 0$ и в некоторой окрестности точки $O(0, 0)$ определена сшитая система

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= P_1(x, y), \\ dy/dt &= Q_1(x, y), \end{aligned}\right\} \quad x < 0; \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= P_2(x, y), \\ dy/dt &= Q_2(x, y), \end{aligned}\right\} \quad x > 0. \tag{9}$$

Тогда $O(0, 0)$ не является состоянием равновесия ни для одной из систем (8) и (9).

Нетрудно показать, что расположение траекторий в окрестности начала координат будет таким, как представлено на рис. 197 (если $Q_1(0, 0) > 0$), или таким, как представлено на рис. 198 ($Q_1(0, 0) < 0$), если выполнены следующие условия:

$$P_1(0, 0) = P_2(0, 0) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{P'_{2y}(0, 0)}{Q_1(0, 0)} > 0, \quad \frac{P'_{2y}(0, 0)}{Q_2(0, 0)} < 0, \quad Q_1(0, 0)\, Q_2(0, 0) < 0. \tag{11}$$

Условие $P_1(0, 0) = P_2(0, 0) = 0$ есть условие касания траекторий соответственно систем (8) и (9) оси $x = 0$. Условие (11) может

быть получено, если для определения вогнутости интегральной кривой, предполагая ее заданной в виде $x=f(y)$, подсчитать $f''(y)$, пользуясь системой (8) или соответственно (9), записанными в виде одного уравнения $dx/dy=P_1(x, y)/Q_1(x, y)$, соответственно $dx/dy=P_2(x, y)/Q_2(x, y)$. Неподвижная точка

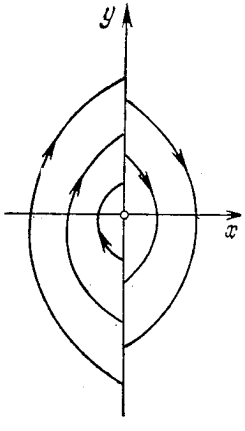


Рис. 197

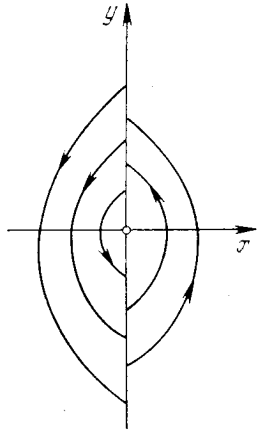


Рис. 198

$O(0, 0)$ (квазифокус) обладает свойствами, аналогичными фокусу.

Для исследования свойств и бифуркаций такого квазифокуса построим в его окрестности на линии сшивания $x=0$ функцию последования (точечное отображение), как и в случае настоящего сшитого фокуса (см. § 4, п. 1). Будем строить эту функцию последования из двух функций соответствия между положительной и отрицательной полуосью y: одной — по траекториям системы (8) и другой — по траекториям системы (9). Будем строить эти функции соответствия, используя общие интегралы систем (8) и (9), в окрестности точки $O(0, 0)$. Так как точка $O(0, 0)$ является неособой точкой для систем (8) и (9), и (по условию) каждая из этих систем определена в некоторой полной окрестности точки $O(0, 0)$, то в силу общих теорем (см. гл. 1) в окрестности этой точки (локально) существуют интегралы этих систем вида

$$F_1(x, y)=C, \quad F_2(x, y)=C,$$

где $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ — аналитические функции.

Установим прежде всего некоторые элементарные свойства этих интегралов в рассматриваемом нами случае. Так как мы имеем

$$F'_{ix}(x, y)P_i(x, y)+F'_{iy}(x, y)Q_i(x, y)\equiv 0, \quad i=1, 2, \qquad (12)$$

то, в частности,

$$F'_{ix}(0, 0)\,P_i(0, 0) + F'_{iy}(0, 0)\,Q_i(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

Но в силу предположения $P_i(0, 0) = 0$, $Q_i(0, 0) \neq 0$ мы должны иметь

$$F'_{iy}(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

А тогда, очевидно, что $F'_{ix}(0, 0) \neq 0$ (так как точка $O(0, 0)$ не является особой точкой систем (8) и (9) и не может, следовательно, быть особой точкой интегральных кривых, проходящих через эти точки). Так как (12) выполняется тождественно, то, продифференцировав его по t, мы также получим тождество

$$\left(F''_{ix^2}P_i + F''_{ixy}Q_i\right)P_i + F'_{ix}\left(P'_{ix}P_i + P'_{iy}Q_i\right) +$$
$$+ \left(F''_{ixy}P_i + F''_{iy^2}Q_i\right)Q_i + F'_{iy}\left(Q'_{ix}P_i + Q'_{iy}Q_i\right) \equiv 0, \quad i = 1, 2.$$

В частности, при $x = y = 0$ мы получаем в силу того, что $P_i(0, 0) = 0$ и $F'_{iy}(0, 0) = 0$, следующее выражение:

$$F'_{ix}(0, 0)\,P'_{iy}(0, 0)\,Q_i(0, 0) + F''_{iy^2}(0, 0)\,Q_i^2(0, 0) = 0.$$

Но так как $F'_{ix}(0, 0) \neq 0$, $P'_{iy}(0, 0) \neq 0$ и $Q_i(0, 0) \neq 0$, то очевидно, что

$$F''_{iy^2}(0, 0) \neq 0.$$

Таким образом, из сделанных нами предположений (10) и (11) вытекает условие на функции $F_i(x, y)$:

$$F'_{iy}(0, 0) = 0, \quad F''_{iy^2}(0, 0) \neq 0. \tag{14}$$

При этих условиях мы будем строить функцию последования.

Для построения функции соответствия (согласно § 3 гл. 5) между положительной и отрицательной полуосью y введем на них параметры так, чтобы углы между траекторией и соответствующей той и другой полуосью, на которых положительное направление есть направление возрастания параметра, были одного знака.

Такими параметрами, очевидно, будут $y = u$ на положительной и $y = -v$ на отрицательной полуосях. Функции соответствия по траекториям систем (8) и (9) могут быть заданы следующими неявными уравнениями:

$$F_1(0, -v_1) = F_1(0, u), \tag{15}$$

$$F_2(0, -v_2) = F_2(0, u). \tag{16}$$

Как мы видели (см. § 1 гл. 5), производная от функции соответствия всегда положительна. Но неявные уравнения (15), (16)

всегда, очевидно, имеют решение

$$v = -u,$$

которое является «паразитным». Однако кроме этого решения, это неявное уравнение имеет еще одно решение. Действительно, кривая

$$\Phi_i(u, v) = F_i(0, -v) - F_i(0, u)$$

в силу условия $F'_{iy}(0, 0) = 0$, очевидно, имеет в точке $O(0, 0)$ особую точку (речь идет об особой точке кривой, а не динамической системы):

$$\Phi'_{iu}(0, 0) = \Phi'_{iv}(0, 0) \equiv -F'_{iy}(0, 0) = 0.$$

Эта особая точка есть узел кривой, так как в окрестности точки $O(0, 0)$, принимая во внимание условия (14), мы можем записать

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} F''_{iy^2}(0, 0)(v^2 - u^2) + \ldots$$

Следовательно, для второй ветви кривой $\Phi(u, v)$, проходящей через начало координат, $v = \varphi_i(u)$ (это и дает нам искомую функцию соответствия):

$$\varphi'_i(0) = 1.$$

Таким образом, из двух неявных уравнений (15) и (16) мы получаем две функции соответствия

$$v = \varphi_1(u), \quad v = \varphi_2(u).$$

Будем рассматривать также функцию

$$z(u) = \varphi_1(u) - \varphi_2(u).$$

Очевидно, что отличным от $u = 0$ нулям этой функции соответствуют предельные циклы сшитой системы.

Перечислим некоторые свойства функций $\varphi_i(u)$ и функции $z(u)$.

1) Последовательные производные от функций $\varphi_i(u)$ при $u = 0$, очевидно, находятся следующим образом.

В разложение функции

$$\Phi_i(u, v) = F_i(0, -v) - F_i(0, u) =$$

$$= \frac{1}{2} F''_{iy^2}(0, 0)(v^2 - u^2) + \frac{1}{3!}\left[-F'''_{iy^3}(0, 0) v^3 - F'''_{iy^3}(0, 0) u^3\right] + \ldots$$

подставляем разложение для функции $\varphi_i(u)$ по степеням u:

$$\varphi_i(u) = u + \alpha_2^i u^2 + \alpha_3^i u^3 + \ldots$$

В результате несложных вычислений получим

$$\frac{1}{2!}\varphi_i''(0) = \alpha_2^i = \frac{2}{3}\frac{F'''_{iy^3}(0,0)}{F''_{iy^2}(0,0)}, \quad \frac{1}{3!}\varphi_i'''(0) = \alpha_3^i = \frac{3}{2}[\varphi_i''(0)]^2,$$

$$\frac{1}{4!}\varphi_i^{(4)}(0) = \alpha_4^i =$$

$$= -\frac{3}{5}\frac{F^{(5)}_{iy^5}(0,0)}{F'''_{iy^3}(0,0)}\varphi_i''(0) - 3\frac{F^{(4)}_{iy^4}(0,0)}{F'''_{iy^3}(0,0)}(\varphi_i''(0))^2 - 6(\varphi_i''(0))^3.$$

Можно показать, что при $u = 0$ производные нечетного порядка от функций $\varphi_i(u)$ выражаются через производные предшествующих порядков, и поэтому первая не равная нулю производная — четного порядка.

2) Функция $z(u)$ в точке $u = 0$ имеет нуль четной кратности. При рассмотрении функций соответствия $v_1 = \varphi_1(u)$ и $v_2 = \varphi_2(u)$ и функции $z(u)$ по смыслу этих функций мы можем ограничиться рассмотрением только значений $u \geqslant 0$. Если же рассматривать как $u > 0$, так и $u < 0$, то можно сформулировать еще следующее свойство функции $z(u)$.

3) Функция $z(u)$ всегда имеет одинаковое число корней, меньших нуля и больших нуля. Очевидно, каждой сшитой замкнутой траектории в окрестности сшитого фокуса соответствуют два корня: один — больший нуля, другой — меньший нуля.

Разложение функции $z(u)$ по степеням u имеет вид

$$z(u) = \beta_{2k}u^{2k} + \ldots$$

Знак коэффициента β_{2k} вместе со знаком величины $Q_1(0,0)$ определяет устойчивость или неустойчивость сшитого фокуса [1]), именно:

а) если β_{2k} и $Q_1(0,0)$ имеют разные знаки, то сшитый фокус устойчив;

б) если β_{2k} и $Q_1(0,0)$ имеют одинаковые знаки, то сшитый фокус неустойчив. В случае, когда $\beta_2 \neq 0$, сшитый фокус аналогичен грубому;

в) коэффициенты β_{2k} при $k > 1$ играют роль ляпуновских величин: если первый не равный нулю коэффициент есть β_{2k}, то мы будем говорить: сшитый фокус является *сложным k-кратным.*

Предположим теперь, что правые части динамических систем (8) и (9) зависят от параметров $\mu_1, \ldots, \mu_n$, и при всех рассматриваемых значениях этих параметров линией сшивания остается $x = 0$. Предположим, что при значениях параметров $\mu_1^0, \ldots, \mu_n^0$ сшитый фокус является k-кратным. Тогда справедливы также утверждения, полностью аналогичные утверждени-

[1]) Отметим, что величина β_{2k} может быть выражена через производные от функций $P_i(x, y)$ и $Q_i(x, y)$ в точке (0, 0).

ям, касающимся фокуса аналитической системы, а также сшитых «истинных» фокусов, рассмотренных в § 4.

Пусть при $\mu_i = \mu_i^0$ сшитый квазифокус O является k-кратным. Тогда при всех близких к μ_i^0 значениях μ из квазифокуса может родиться не более k сшитых предельных циклов, и при надлежащем характере зависимости коэффициентов β_{2i} $(i \leqslant k)$ от параметров μ_i может родиться k предельных циклов.

Рассмотрим простейший сложный квазифокус, именно такой, для которого

$$\beta_2(\mu_1^0, \ldots, \mu_n^0) = 0, \quad \beta_4(\mu_1^0, \ldots, \mu_n^0) \neq 0.$$

Из такого квазифокуса при изменении параметров μ может появиться один и только один сшитый предельный цикл, и притом той же устойчивости, что и фокус. Предположим, в частности, что в правые части входит только один параметр μ. Нетрудно рассмотреть разные случаи, которые при этом могут представиться, и указать возможную смену качественных структур (см. гл. 11) полностью аналогично тому, как это было сделано для случая аналитических систем, именно: пусть

$$Q_1(0, 0) > 0, \quad \beta_2(\mu_0) = 0, \quad \beta_4(\mu_0) > 0, \quad \beta_2'(\mu_0) > 0;$$

тогда при возрастании μ к устойчивому сложному квазифокусу стягивается неустойчивый предельный цикл, и квазифокус делается простым неустойчивым (о п а с н а я граница области устойчивости).

Пусть

$$Q_1(0, 0) > 0, \quad \beta_2(\mu_0) = 0, \quad \beta_4(\mu_0) < 0, \quad \beta_2'(\mu_0) > 0.$$

Тогда при возрастании μ из устойчивого сложного квазифокуса рождается устойчивый предельный цикл и квазифокус делается простым неустойчивым (б е з о п а с н а я граница области устойчивости). Отметим, кроме того, что величины $\beta_2(\mu_0)$ и $\beta_4(\mu_0)$, $\beta_2'(\mu_0)$ могут быть выражены через значения $P_i(x, y, \mu)$, $Q_i(x, y, \mu)$ и их производных при $x = y = 0$, $\mu = \mu_0$.

3. Сложный предельный цикл (сшитый) и рождение из него предельного цикла (сшитого). Пусть рассматриваемая сшитая система имеет сшитый предельный цикл. Рассмотрим простейший случай, когда дуги траекторий частичных систем, из которых сшит предельный цикл, пересекают линии сшивания на участках, являющихся дугами без контакта для траекторий частичных систем, и через линию сшивания продолжаются по непрерывности (пример такого сшивания предельного цикла представлен на рис. 212, *в*).

В этом случае, очевидно, в окрестности предельного цикла на одной из линий сшивания (безразлично какой), часть которой в окрестности точки пересечения со сшитым циклом являет-

ся дугой без контакта, может быть определена функция последования (точечное отображение). Эта функция последования, очевидно, может быть составлена из нескольких функций соответствия между дугами линий сшивания, которые последовательно пересекает рассматриваемый сшитый предельный цикл. Пусть u — параметр, на одной из этих дуг линии сшивания строится функция последования и

$$\bar{u} = d(u);$$

эта функция последования в окрестности предельного цикла при сделанных нами предположениях является аналитической функцией.

Пусть предельному циклу соответствует значение $u = u_0$:

$$u_0 = d(u_0).$$

Так же, как и в случае предельного цикла аналитической системы (см. гл. 5), сшитый предельный цикл является грубым, если $d'(u_0) \neq 1$. Сшитый грубый цикл устойчив, если $d'(u_0) < 0$, и неустойчив, если $d'(u_0) > 0$. Если $d'(u_0) = 1$, то сшитый предельный цикл является сложным, и так же, как и в случае аналитической системы, мы можем говорить о кратности сшитого предельного цикла. Именно, если

$$d'(u_0) = 1,$$

а среди следующих производных от функции последования первая, не равная нулю производная есть

$$d^{(k)}(u_0) \neq 0,$$

то будем говорить, что рассматриваемый сложный цикл является *k-кратным.*

Пусть сшитая динамическая система зависит от параметров $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Как и выше, мы будем предполагать, что правые части частичных динамических систем (A_j) зависят от параметров μ_i аналитически, и линии сшивания не зависят от параметров.

Пусть при значениях $\mu_1^0, \ldots, \mu_n^0$ параметров у рассматриваемой системы существует сшитый предельный цикл, и пусть

$$u = d(u, \mu_1^0, \ldots, \mu_n^0)$$

— функция последования в его окрестности, определенная на некоторой линии сшивания при значениях $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, причем предельный цикл соответствует значению $u = u_0$. Тогда на той же линии сшивания при тех же значениях $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ и всех достаточно близких к μ_i^0 значениях μ_i также существует функция последования, и эта функция является аналитической функцией u и μ_i. В отношении сшитого k-кратного предельного цикла

справедливы утверждения, полностью аналогичные утверждениям, сделанным по поводу кратного цикла аналитической системы.

Именно, из такого цикла при изменении μ_i может рождаться не более k предельных циклов, и при некотором вхождении параметров в правые части может рождаться k предельных циклов.

Если рассматриваемый сложный цикл L_0 четнократный ($k = 2\varkappa$), в частности, двукратный ($\varkappa = 1$), то, так же как и в случае аналитической системы, при изменении μ_i от него может либо родиться два предельных цикла, либо он остается двукратным, либо в окрестности L_0 не будет ни одного цикла — двукратный цикл исчезает. Очевидно, таким образом, что сшитый двукратный цикл, так же как и аналитический, может возникнуть из уплотнения траекторий [2]).

4. Сепаратриса, идущая из седла в то же седло (образующая петлю сшитой системы) и ее бифуркации. Предположим, как и в предыдущем случае, что при неизменных линиях сшивания частные системы зависят от параметров μ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$). Пусть при значениях $\mu_i = \mu_i^0$ у рассматриваемой сшитой системы существует сшитая сепаратриса, идущая из седла O в седло O'. Тогда по поводу возможных бифуркаций при изменении параметра такой сепаратрисы можно повторить все сказанное относительно аналогичной сепаратрисы аналитической системы.

Пусть теперь при значениях $\mu_i = \mu_i^0$ у рассматриваемой сшитой системы существует сепаратриса (сшитая), идущая из седла O и возвращающаяся в то же седло O, т. е. сепаратриса, образующая петлю.

Мы предположим, кроме того, что седло O либо лежит целиком в одной из областей G_i, либо лежит на границе G_i, но седловая область, принадлежащая внутренности петли, является сшитой.

Пусть седло O, входящее в рассматриваемую сшитую петлю сепаратрисы, принадлежит системе

$$\dot{x} = P_i(x, y, \mu_1^0, \ldots, \mu_k^0),$$
$$\dot{y} = Q_i(x, y, \mu_1^0, \ldots, \mu_k^0);$$

пусть x_0, y_0 — его координаты.

Рассмотрим седловую величину седла $O(0, 0)$:

$$\sigma_c = P'_{ix}(x_0, y_0, \mu_1^0, \ldots, \mu_k^0) + Q'_{iy}(x_0, y_0, \mu_1^0, \ldots, \mu_k^0)$$

---

[2]) Пример сшитой системы, у которой появляется двукратный сшитый предельный цикл, который затем разделяется, см. [3, § 4 гл. 8] (а также гл. 18—20 настоящей книги).

и предположим, что

$$\sigma_c \neq 0.$$

Тогда относительно рассматриваемой сшитой сепаратрисы, образующей петлю, могут быть сделаны те же утверждения, что и относительно петли сепаратрисы аналитической системы. (Доказательство этих утверждений может быть проведено совершенно так же, как и в случае аналитической системы, на основании рассмотрения функции последования, построенной в окрестности петли из нескольких функций соответствия.) Именно, имеют место такие утверждения:

1) Сшитая сепаратриса, образующая петлю, устойчива, если седловая величина $\sigma_c < 0$, и неустойчива, если $\sigma_c > 0$.

2) Если $\sigma_0 \neq 0$, то при изменении μ_i из петли сепаратрисы может рождаться не более одного предельного цикла: устойчивого, если $\sigma_c < 0$, и неустойчивого, если $\sigma_c > 0$. При одном характере разделения сепаратрисы рождается предельный цикл, при другом — нет. Соответственно при $\mu_i \to \mu_i^0$ в петлю сепаратрисы может «влипнуть» только устойчивый предельный цикл, если $\sigma_c < 0$, и только неустойчивый, если $\sigma_c > 0$.

5. Метод Понтрягина для сшитых систем[3]). Пусть $H(x, y) = h$ — семейство замкнутых кривых C_h, зависящих от параметра h, сшитых из кусков $H_i(x, y) = h$ на интервалах $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Функции $H_i(x, y)$ аналитические по каждому из аргументов.

Тогда система

$$\dot{x} = H_y'(x, y) + \mu p(x, y), \quad \dot{y} = -H_x'(x, y) + \mu q(x, y) \qquad (10)$$

имеет при $\mu \neq 0$ единственный предельный цикл в окрестности замкнутой кривой $C_{h_0^0}$, если $\partial H/\partial y$ непрерывна в точках сшивания $x = x_i$.

Здесь $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — аналитические функции в каждом из интервалов $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, а h_0^0 — корень уравнения

$$\psi(h_0^0) \equiv \int\limits_{C_{h_0^0}} (q(x, y)\,dx - p(x, y)\,dy) = 0, \quad \psi'(h_0^0) \neq 0.$$

Предельный цикл будет устойчивым, если $\mu\psi'(h_0^0) < 0$, и неустойчивым, если $\mu\psi'(h_0^0) > 0$. Фазовое пространство может быть как плоским, так и цилиндрическим.

---

[3]) См. [106, 107, 124].

ГЛАВА 18

ИССЛЕДОВАНИЕ КУСОЧНО-СШИТЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПОНТРЯГИНА

§ 1. Уравнение из теории электрических машин. Рассмотрим уравнение [123]

$$\ddot{\varphi} + \lambda[1 - \beta\theta'(\varphi)]\dot{\varphi} + \theta(\varphi) = \gamma, \quad \lambda > 0, \ \gamma > 0,$$

где функция $\theta(\varphi)$ периодическая с периодом 2π, при кусочно-линейной аппроксимации

$$\theta(\varphi) = \theta_1(\varphi) \equiv (-1)^k(2/\pi)\varphi + (-1)^{k-1}2k,$$
$$(2k-1)\pi/2 < \varphi < (2k+1)\pi/2, \quad k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$$

В качестве фазового пространства будем рассматривать полосу, заключенную между прямыми $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$. Точки этих прямых, имеющие одинаковые ординаты, отождествляем. Введем малый положительный параметр, полагая $\lambda = \mu\lambda_0$; $\gamma = \mu\gamma_0$, и перейдем к системе, близкой к кусочно-линейной:

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = -\theta_1(\varphi) + \mu\{\gamma_0 - \lambda_0[1 - \beta\theta_1'(\varphi)]y\}. \quad (1)$$

Изучение периодических решений системы (1) позволяет строго установить качественную картину разбиения фазового пространства на траектории для малых λ и γ и выяснить, как изменяется эта картина при изменении параметров.

Траектории системы при $\mu = 0$ имеют либо вид замкнутых кривых, охватывающих состояние равновесия (типа центра) в точке $\varphi = 0$, $y = 0$, либо замкнутых кривых, сшитых из кусков эллипсов и гипербол, охватывающих пространство (цилиндр). Эти две области разделяются сепаратрисами, составленными из кусков прямых и эллипсов, идущими из седла в седло (в точках $(-\pi, 0)$ $(\pi, 0)$ система (1) при $\mu = 0$ имеет простые седла).

При $\mu \neq 0$, но сколь угодно малом, замкнутые кривые, охватывающие состояние равновесия или фазовый цилиндр, превращаются в спирали, и только некоторые из интегральных кривых остаются замкнутыми, т. е. превращаются в предельные циклы. Сепаратрисы, образующие вместе с состояниями равновесия при $\mu = 0$ замкнутый контур, для $\mu \neq 0$ вообще не будут образовывать такой контур, также превращаясь в спирали, накручиваю-

щиеся на предельный цикл или состояние равновесия или уходящие в бесконечность. Знание характера и расположения предельных циклов позволяет однозначно определить качественную структуру разбиения фазового пространства на траектории.

Система (1) может иметь как циклы, охватывающие цилиндр, так и циклы, охватывающие состояние равновесия $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$. Будем отыскивать циклы, охватывающие цилиндр. Тогда, применяя теорему 1 § 5 гл. 12 и учитывая п. 5 § 4 гл. 17, будем иметь

$$F_1(y_0^0) = \frac{1}{y_0^0}\left\{2\int\limits_{L_1}\left[\gamma_0 - \lambda_0\left(1+\beta\frac{2}{\pi}\right)y\right]d\varphi + \right.$$

$$\left. + 2\int\limits_{L_2}\left[\gamma_0 - \lambda_0\left(1-\frac{2}{\pi}\beta\right)y\right]d\varphi\right\}. \quad (2)$$

Здесь L_1 и L_2 — части интегральной кривой системы (1), при $\mu = 0$ проходящей через точку $P(-\pi, y_0^0)$, расположенные соответственно в интервалах $-\pi \leqslant \varphi \leqslant -\pi/2$ и $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0$. Уравнения кривых L_1 и L_2 соответственно будут

$$\frac{y^2}{2} - \frac{(\varphi+\pi)^2}{\pi} = \frac{(y_0^0)^2}{2}, \quad (L_1)$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\varphi^2}{\pi} = \frac{(y_0^0)^2}{2} + \frac{\pi}{2}. \quad (L_2)$$

Интегрирование ведется в направлении движения по траекториям. Если $y_0^0 > 0$, то, вычисляя интеграл в правой части равенства (2), получим

$$F_1(y_0^0) = \frac{1}{y_0^0}\left\{2\pi\gamma_0 - \lambda_0\sqrt{\pi/2}\left[2\sqrt{\pi/2}\sqrt{\pi/2+2h} + \right.\right.$$

$$+ h\left(1+\frac{2}{\pi}\beta\right)\ln\left[\left(\sqrt{\pi/2}+\sqrt{\pi/2+2h}\right)^2\frac{1}{|2h|}\right] +$$

$$\left.\left. + \left(1-\beta\frac{2}{\pi}\right)(2h+\pi)\arcsin\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2h+\pi}}\right]\right\} \equiv \frac{1}{y_0^0}\psi_1(h),$$

$$h = (y_0^0)^2/2.$$

Для выяснения числа корней уравнения

$$\psi_1(h) = 0 \quad (3)$$

находим

$$\psi_1'(h) = -\lambda_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{2}{\pi}\beta\right)\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}+2h}\right)^2\frac{1}{|2h|} + \right.$$

$$\left. + 2\left(1-\frac{2}{\pi}\beta\right)\arcsin\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2h+\pi}}\right],$$

$$\psi_1''(h) = \frac{\sqrt{2}\,\pi\lambda_0}{\sqrt{\pi+4h}}\,\frac{4h+\pi+2\beta}{2h\,(2h+\pi)},$$

$$\lim_{h\to 0}\psi_1(h) = 2\pi\gamma_0 + \lambda_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\pi}{2}\left(\beta - 2 - \frac{\pi}{2}\right),\quad \lim_{h\to\infty}\psi_1(h) = -\infty.$$

Исследуя поведение функции $\psi_1(h)$ в интервале $0<h<\infty$, заключаем, что при $0<h<\infty$ функция $\psi_1(h)$ монотонно убывает, если $\beta\geqslant -\pi/2$, и имеет один максимум, если $\beta<-\pi/2$. Отсюда легко видеть, что при

$$4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}\,(\beta-2-\pi/2)>0$$

уравнение (3) имеет один положительный корень. Система (1) имеет устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, в верхнем фазовом полупространстве.

В области пространства параметров λ_0, γ_0 и β, определяемой соотношениями

$$\psi_1'(h)=0,\quad \psi_1(h)>0,$$

$$4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}\,(\beta-2-\pi/2)<0,$$

уравнение (3) имеет два положительных корня. Система (1) при этом имеет два предельных цикла в верхнем фазовом полупространстве. При этом большему корню уравнения (3) соответствует устойчивый, а меньшему — неустойчивый предельный цикл.

Отыскиваем далее предельные циклы, охватывающие цилиндр и расположенные в нижнем фазовом полупространстве $(y_0^0<0)$.

Интегрируя выражение (2) и полагая $(y_0^0)^2/2=h$, будем иметь

$$F_2(y_0^0) = \frac{1}{y_0^0}\left\{-2\pi\gamma_0 - \lambda_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}+2h}+\right.\right.$$

$$+h\left(1+\frac{2}{\pi}\beta\right)\ln\left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}+2h}\right)^2\frac{1}{|2h|}\right]+$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{2}{\pi}\beta\right)(2h+\pi)\arcsin\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2h+\pi}}\right]\right\}\equiv\frac{\psi_2(h)}{y_0^0}.$$

Аналогично предыдущему можно показать, что при $\gamma_0>0$, $\lambda_0>0$ система (1) не может иметь более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр в нижнем фазовом полупространстве. Если

$$\lim_{h\to 0}\psi_2(h) = -2\pi\gamma_0+\lambda_0\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\beta-2-\frac{\pi}{2}\right)>0,$$

то система (1) в нижнем фазовом полупространстве имеет устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр.

Находим, наконец, предельные циклы, охватывающие состояние равновесия.

Тогда, применяя теорему 1 § 5 гл. 12, будем иметь

$$F_3(y_1^0) = -\frac{4\lambda_0}{y_1^0}\left[\left(1+\frac{2}{\pi}\beta\right)\int\limits_{L_1} y\,d\varphi + \left(1-\frac{2}{\pi}\beta\right)\int\limits_{L_2} y\,d\varphi\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{y_1^0}\psi_3(h_1). \quad (4)$$

Здесь L_1 и L_2 — части интегральной кривой системы (1), при $\mu = 0$ проходящей через точку $P'\left(-\pi/2, y_1^0\right)\left(0 < y_1^0 < \sqrt{\pi/2}\right)$, расположенные соответственно в интервалах $-\pi \leqslant \varphi \leqslant -\pi/2$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0$.

Уравнения кривых L_1 и L_2 имеют вид

$$\frac{y^2}{2} - \frac{(\varphi+\pi)^2}{\pi} = h_1, \quad (L_1)$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\varphi^2}{\pi} = h_1 + \frac{\pi}{2}, \quad (L_2)$$

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant h_1 = \frac{(y_1^0)^2}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant 0. \quad (5)$$

Из выражения (4) следует, что при $(1-2\beta/\pi)(1+2\beta/\pi) > 0$ уравнение $F\left(y_1^0\right) = 0$ не имеет действительных корней.

Пусть $1 - 2\beta/\pi < 0$. Легко видеть, что

$$\psi_3(h_1) = 2\psi_1(h_1) - 4\pi\gamma_0, \quad \psi_3'(h_1) = 2\psi_1'(h_1), \quad \psi_3''(h_1) = 2\psi_1''(h_1).$$

При значениях h_1, удовлетворяющих условию (5), имеем

$$\psi_3''(h_1) < 0, \quad \psi_3'(-\pi/4) > 0, \quad \lim_{h_1 \to 0} \psi_3'(h_1) = -\infty,$$

$$\psi_3(-\pi/4) = -2\lambda_0\sqrt{\pi/2}\,(1-2\beta/\pi)\,\pi^2/4 > 0,$$

$$\lim_{h_1 \to 0} \psi_3(h_1) = \lambda_0\sqrt{\pi/2}\,\pi(\beta - 2 - \pi/2).$$

Отсюда находим, что при $1 - 2\beta/\pi < 0$, $\beta - 2 - \pi/2 < 0$ существует единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия. Аналогично можно показать, что при $1 - 2\beta/\pi > 0$ система (1) не имеет циклов, охватывающих состояние равновесия.

Для выяснения качественной картины фазовых траекторий заметим, что состояние равновесия $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$ будет устойчивым фокусом при $\mu\lambda_0(1-2\beta/\pi) > 0$ и неустойчивым фокусом при $\mu\lambda_0(1-2\beta/\pi) < 0$.

На рис. 199 приведено разбиение пространства параметров γ_0, λ_0 и β на области, точкам которых соответствует определенная качественная картина фазовых траекторий.

В области *1*:

$$4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta-2-\pi/2)<0,\quad 1+2\beta/\pi<0,$$
$$\psi_1'(h)=0,\quad \psi_1(h)>0,$$

система (1) имеет два предельных цикла, охватывающих цилиндр в верхнем фазовом полупространстве. Верхний цикл устойчивый, нижний неустойчивый.

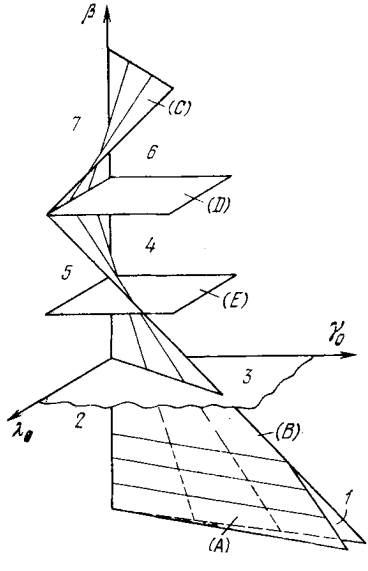


Рис. 199

В области *2*:

$$\gamma_0>0,\quad 4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta-2-$$
$$-\pi/2)<0,\quad 1-2\beta/\pi>0,$$
$$\psi_1'(h)=0,\quad \psi_1(h)<0,$$

система (1) не имеет предельных циклов.

В области *3*:

$$\lambda_0>0,\quad 4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta-2-$$
$$-\pi/2>0,\quad 1-2\beta/\pi>0,$$

система (1) имеет один устойчивый цикл, охватывающий цилиндр в верхнем фазовом полупространстве.

В области *4*:

$$\lambda_0>0,\quad 4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta-2-\pi/2)>0,$$
$$1-2\beta/\pi<0,\quad \beta-2-\pi/2<0,$$

система (1) имеет один устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия, и один устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр в верхнем фазовом полупространстве.

В области *5*:

$$\gamma_0>0,\quad \lambda_0>0,\quad 4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta-2-\pi/2)<0,\quad 1-2\beta/\pi<0,$$

система (1) имеет один устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.

В области *6*:

$$\beta-2-\pi/2>0,\quad \lambda_0>0,\quad \gamma_0>0,$$
$$-4\gamma_0+\lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta-2-\pi/2)<0;$$

система имеет один устойчивый предельный цикл в верхнем полупространстве.

В области 7:

$$\gamma_0 > 0, \quad \lambda_0 > 0, \quad -4\gamma_0 + \lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta - 2 - \pi/2) > 0,$$

система (1) имеет два устойчивых цикла, охватывающих цилиндр. Один из них расположен в нижнем, а другой в верхнем фазовом полупространстве.

Качественные картины фазовых траекторий для перечисленных областей изображены на рис. 200.

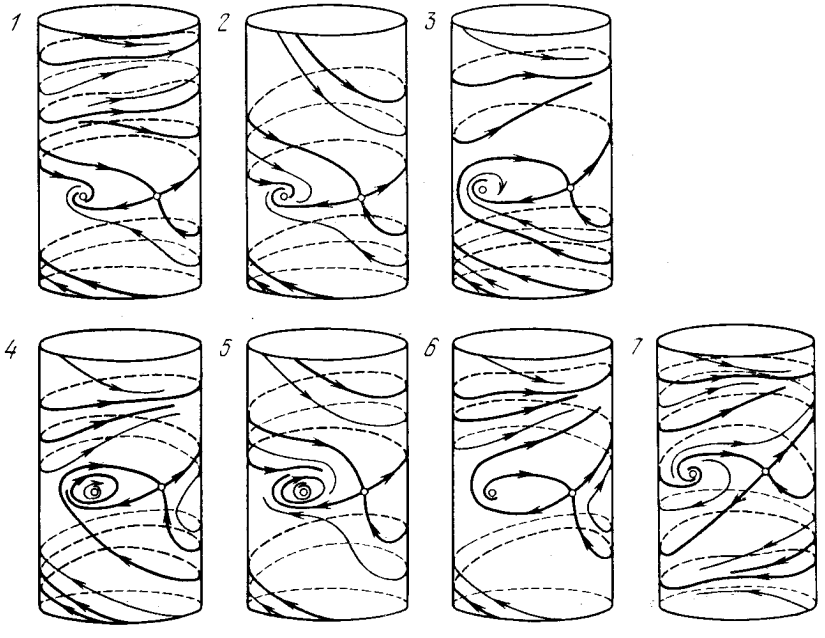


Рис. 200

Рассмотрим качественные картины фазовых траекторий на бифуркационных поверхностях.

На поверхности (A), определяемой соотношениями

$$\psi_1(h) = 0, \qquad \psi_1'(h) = 0,$$

система имеет полуустойчивый и предельный цикл, охватывающий цилиндр в верхнем фазовом полупространстве (рис. 201, *1.2*).

На поверхностях (B) и (C) соответственно (рис. 201, *1.3* и 201, *6.7*)

$$4\gamma_0 + \lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta - 2 - \pi/2) = 0,$$

$$4\gamma_0 - \lambda_0\sqrt{\pi/2}(\beta - 2 - \pi/2) = 0,$$

предельные циклы, схватывающие цилиндр соответственно в верхнем и нижнем фазовых полупространствах, будут «влипать» в сепаратрисы, идущие из седла в седло.

На плоскости (D) $(\beta - 2 - \pi/2 = 0)$ предельный цикл, охватывающий состояние равновесия $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$, «влипает» в сепаратрису, идущую из седла в то же седло (рис. 201, *4.6*). На поверхности (E) $(1 - 2\beta/\pi = 0)$ в точке $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$ система имеет состояние равновесия типа центра (рисунок не приводится).

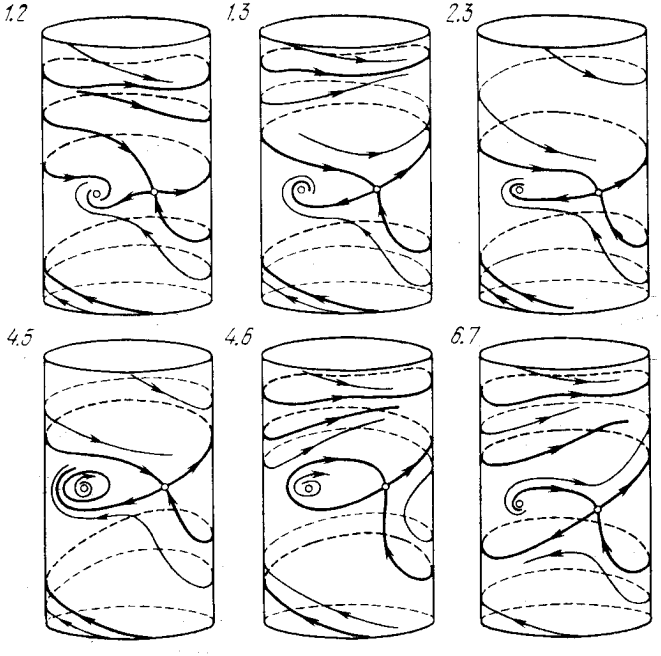


Рис. 201

На рис. 201 изображены качественные картины фазовых траекторий, соответствующих бифуркационным значениям параметров; указываются номера тех областей, на границе между которыми система (1) имеет указанную качественную картину фазовых траекторий.

§ 2. Автоподстройка при кусочно-постоянной аппроксимации характеристики.

1. Рассматривается система на цилиндре

$$\frac{dy}{dt} = \gamma - F(\varphi) - 2\alpha\beta\frac{y}{y^2 + \beta^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \qquad F(\varphi) = F(\varphi + 2\pi),$$

при аппроксимации $F(\varphi)$ кусочно-постоянной функцией

$$F(\varphi) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -\pi < \varphi < 0, \\ +1 & \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi. \end{cases}$$

По физическому смыслу параметров: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Система не определена при $y = 0$, $\beta = 0$.

Введем малый положительный параметр μ, полагая $\alpha = \mu\alpha_0$, $\gamma = \mu\gamma_0$, и перейдем к системе

$$\begin{aligned} dy/dt &= -F(\varphi) + \mu(\gamma_0 - 2\alpha_0\beta y/y^2 + \beta^2), \\ d\varphi/dt &= y. \end{aligned} \tag{1}$$

При $\mu = 0$ система имеет интеграл

$$H(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} - \pi + \begin{cases} -\varphi \\ +\varphi \end{cases} = h, \qquad \begin{matrix} -\pi < \varphi < 0, \\ 0 < \varphi < \pi. \end{matrix}$$

Будем искать предельные циклы, охватывающие цилиндр в верхнем фазовом полупространстве. Замкнутые кривые семейства $H(\varphi, y) = h$ при $0 < h < \infty$ охватывают фазовый цилиндр. Вблизи интегральной кривой C_{h_0} консервативной системы (при $\mu = 0$) имеется предельный цикл системы (1), если h_0 будет корнем уравнения

$$\psi_1(h_0) \equiv \int_{C_{h_0}} \left(\gamma_0 - 2\alpha_0\beta \frac{y}{y^2 + \beta^2}\right) d\varphi = 0.$$

Интегральная кривая C_{h_0}, проходящая через точку $M(-\pi, y_0)$, состоит из двух кусков C_- и C_+:

$$\frac{y^2}{2} - \varphi - \pi = \frac{y_0^2}{2} \equiv h, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant 0, \tag{C_-}$$

$$\frac{y^2}{2} + \varphi - \pi = \frac{y_0^2}{2} \equiv h, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{C_+}$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\psi_1(h) = 2\pi\gamma_0 - 4\alpha_0\beta^2\left[\frac{\sqrt{2\pi + 2h}}{\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\pi + 2h}}{\beta} - \left(\frac{\sqrt{2h}}{\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2h}}{\beta}\right)\right] < 2\pi\gamma_0 \tag{2}$$

(выражение в квадратных скобках всегда положительно, так как $f(x) \equiv x - \operatorname{arctg} x > 0$, если $x > 0$, и $f(x_1) > f(x_0)$, если $x_1 > x_0$),

$$\begin{aligned} \psi_1'(h) &= -4\alpha_0\beta\left[\frac{\sqrt{2\pi + 2h}}{\beta^2 + 2\pi + 2h} - \frac{\sqrt{2h}}{\beta^2 + 2h}\right] = \\ &= -4\sqrt{2\pi}\alpha_0\beta\,\frac{\beta^2 - 2\sqrt{h(\pi + h)}}{(\beta^2 + 2h)(\beta^2 + 2\pi + 2h)(\sqrt{\pi + h} + \sqrt{h})}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из (2) и (3) находим

$$\psi_1(0) = 2\pi\gamma_0 - 4\alpha_0\beta^2\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}\right) < 2\pi\gamma_0,$$
$$\psi_1(\infty) = \lim_{h\to\infty}\psi_1(h) = 2\pi\gamma_0, \tag{4}$$
$$\psi_1'(0) = -\frac{4\sqrt{2\pi}\alpha_0\beta}{\beta^2 + 2\pi} < 0,$$
$$\psi_1'(\infty) = \lim_{h\to\infty}\psi_1'(h) = 0.$$

Производная $\psi_1'(h)$ обращается в нуль при условии

$$\beta^2 = 2\sqrt{h(\pi + h)}.$$

Функция $\psi_1(h)$ имеет единственный минимум

$$\psi_{1,\min} = 2\pi\gamma_0 - 4\alpha_0\beta^2\left[\Phi\left(\frac{\pi + h}{h}\right) - \Phi\left(\frac{h}{\pi + h}\right)\right] = \delta, \tag{5}$$

где

$$\Phi(z) = z^{1/4} - \operatorname{arctg} z^{1/4} > 0,$$

и единственную точку перегиба, соответствующую обращению в нуль второй производной:

$$\psi_1''(h) = -4\alpha_0\beta\left(\frac{\beta^2 - 2\pi - 2h}{\sqrt{2\pi + 2h}(\beta^2 + 2\pi + 2h)^2} - \frac{\beta^2 - 2h}{\sqrt{2h}(\beta^2 + 2h)^2}\right) \equiv$$
$$\equiv -4\alpha_0\beta\,[\zeta_1(h) - \zeta_2(h)].$$

Функции ζ_1 и ζ_2, как легко проверить, состоят из двух монотонных ветвей (имеют единственный минимум) и получаются одна из другой сдвигом на 2π по оси h. Их точка пересечения (очевидно, единственная) соответствует корню уравнения $\psi_1''(h) = 0$.

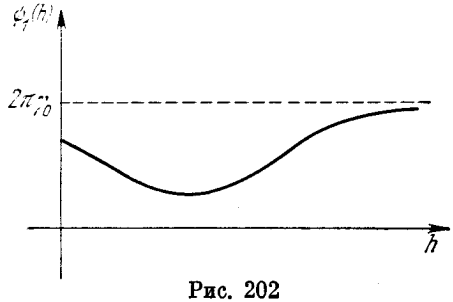


Рис. 202

График функции $\psi_1(h)$ имеет вид, представленный на рис. 202.

Из (5) очевидно, что, распоряжаясь величиной положительного параметра α_0, можно реализовать случаи, когда кривая $\psi_1(h)$ целиком расположена выше оси h, когда она касается оси h и когда пересекает ось h.

Касанию ($\psi_{1,\min}(h_0) = 0$) соответствует рождение полуустойчивого предельного цикла из сгущения траекторий. Бифуркационная кривая (поверхность) для этого случая дается уравнения-

ми $\psi'(h)=0$, $\psi_{1,\min}(h)=0$, т. е.

$$\beta^2 = 2\sqrt{h_0(\pi+h_0)},$$
$$\gamma_0 = \frac{2\alpha_0\beta^2}{\pi}\left(\Phi\left(\frac{\pi+h_0}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{h_0}{\pi+h_0}\right)\right), \tag{6}$$

и Φ имеет указанное выше значение.

Условие $\psi_1(0)=0$ дает бифуркационную кривую, соответствующую возникновению петли сепаратрисы сшитого седла:

$$\gamma_0 = \frac{2\alpha_0\beta^2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}\right). \tag{7}$$

При убывании α_0 (или возрастании γ_0) от значения, определяемого (7), величина $\psi_1(0)$ становится положительной, и из петли сепаратрисы сшитого седла рождается неустойчивый предельный цикл.

Из выражений (6) и (7) видно, что при фиксированном β обе бифуркационные кривые будут прямыми, проходящими через начало координат плоскости (α_0, γ_0). Между ними расположена область, для точек которой система (1) имеет два предельных цикла, охватывающих фазовый цилиндр.

2. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = \gamma - F(\varphi) - \lambda y - 2\alpha\beta\frac{y}{y^2+\beta^2},$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \qquad F(\varphi) = F(\varphi+2\pi), \tag{8}$$

отличающуюся от рассмотренной выше наличием члена $-\lambda y$ в первом уравнении $(\lambda>0)$.

Сохраняя принятую аппроксимацию $F(\varphi)$ кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1, и вводя малый параметр μ: $\alpha=\mu\alpha_0$, $\gamma=\mu\gamma_0$, $\lambda=\mu\lambda_0$, для функции $\psi(h,\lambda_0)$, корни которой соответствуют предельным циклам, охватывающим цилиндр, получим выражение

$$\psi(h,\lambda_0) = \int_{C_{h_0}}\left(\gamma_0 - \lambda_0 y - 2\alpha_0\beta\frac{y}{y^2+\beta^2}\right)d\varphi \equiv \psi_1(h) + \psi_2(h,\lambda_0).$$

Здесь $\psi_1(h)$ то же, что и в предыдущем примере, а $\psi_2(h,\lambda_0)$ дается выражением

$$\psi_2(h,\lambda_0) = \frac{2\lambda_0}{3}\left[(2h)^{3/2} - (2\pi+2h)^{3/2}\right] < 0.$$

Имеем также

$$\psi'_{2h}(h,\lambda_0) = \frac{-4\pi\lambda_0}{\sqrt{2h}+\sqrt{2\pi+2h}} < 0,$$

$$\psi_2(0,\lambda_0) = -\frac{2\lambda_0(2\pi)^{3/2}}{3} < 0, \qquad \psi_2(\infty,\lambda_0) = \lim_{h\to\infty}\psi_2(h,\lambda_0) = -\infty.$$

Кривая $\psi_2 = \psi_2(h, \lambda_0)$ для любых λ_0, отличных от нуля, уходит в бесконечность при $h \to \infty$, но будет лежать внутри полосы сколь угодно малой ширины ε на любом заданном интервале изменения h, если выбрать λ_0 достаточно малым.

Проследим за изменением числа нулей функции $\psi_1(h) + \psi_2(h, \lambda_0) \equiv \psi(h, \lambda_0)$ на интервале $0 < h < \infty$ при возрастании параметра λ_0 от нуля.

Пусть $\varepsilon < |\psi_1(0)|$, $\varepsilon < |\psi_{1\min}(h^*)|$. Если λ_0 выбрано так, что на интервале $0 < h < h^*$ кривая $\psi_2(h, \lambda_0)$ лежит внутри полоски шириной ε $(-\varepsilon < \psi_2 < 0)$, то число нулей функции $\psi_1 + \psi_2$ по сравнению с ψ_1 не может измениться ни за счет изменения знака $\psi_{\min}$ в точке минимума, ни за счет изменения знака $\psi_1(0)$. С другой стороны, как бы ни было мало λ_0, функции $\psi_1 + \psi_2$ и ψ_1 имеют при достаточно большом h разные знаки $\left(\lim\limits_{h\to\infty} \psi_1 = 2\pi\gamma_0, \lim\limits_{h\to\infty} (\psi_1 + \psi_2) = -\infty\right)$. Очевидно поэтому, что при возрастании λ_0 от нуля из бесконечности появляется нуль функции $\psi_1 + \psi_2$. Так как в нуле, очевидно, будет $\psi_1' + \psi_2' < 0$, то при этом у системы (8) из бесконечности появляется устойчивый предельный цикл.

Если α_0 и β выбраны так, что $\psi_{1,\min} < 0$, $\psi_1(0) > 0$ и $\lambda_0 > 0$ и мало, то система (8) будет иметь три предельных цикла (два устойчивых и один неустойчивый).

§ 3. Автоколебания синхронного мотора. Рассмотрим систему

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = T - \sin\varphi - \mu(\alpha + \beta\cos 2\varphi - \gamma\sin\varphi)\, y,$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ T > 0,$$

где μ — малый параметр [59, 60, 67].

В качестве фазового пространства будем рассматривать полосу, заключенную между прямыми $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$; точки этих прямых, имеющие одинаковые координаты y, отождествляем.

Полагая (рис. 203)

$$\sin\varphi \approx s(\varphi) = \begin{cases} -2\pi^{-1}\varphi - 2, & -\pi \leqslant \varphi \leqslant -\pi/2, \\ 2\pi^{-1}\varphi, & -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, \\ -2\pi^{-1}\varphi + 2, & \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi; \end{cases}$$

$$\cos\varphi \approx c(2\varphi) = \begin{cases} -4\pi^{-1}\varphi - 3, & -\pi \leqslant \varphi \leqslant -\pi/2, \\ 4\pi^{-1}\varphi + 1, & -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0, \\ -4\pi^{-1}\varphi + 1, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2/\pi, \\ 4\pi^{-1}\varphi - 3, & \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \end{cases}$$

получим систему, близкую к кусочно-линейной консервативной системе

$$d\varphi/dt = y \equiv P, \quad dy/dt = T - s(\varphi) - \mu[\alpha + \beta c(2\varphi) - \gamma s(\varphi)]\, y \equiv Q \quad (1)$$

(μ — положительный параметр).

1. Консервативная система.

$$d\varphi/dt = y, \quad dy/dt = T - s(\varphi). \tag{2}$$

Система (2) имеет замкнутые фазовые траектории при $T < 1$. Замкнутые фазовые траектории системы (2) охватывают состояние равновесия. Другие траектории представляют собой спирали, накручивающиеся на фазовый цилиндр (рис. 204).

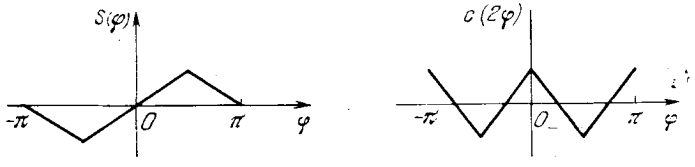


Рис. 203

Сшивание траекторий консервативной системы внутри полосы $(-\pi, \pi)$ (кусков эллипсов и гипербол) осуществляется на прямых $\varphi = \pm\pi/2$. Сшивание траекторий системы (1) происходит также и на прямой $\varphi = 0$.

Консервативная система (2) имеет интеграл

$$H(\varphi, y) \equiv \frac{y^2}{2} + \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\left(\varphi + \pi + \frac{T\pi}{2}\right)^2 + 2\pi T & -\pi \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\pi}\left(\varphi - \frac{T\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}(1-T)^2 & -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{\pi}\left(\varphi - \pi + \frac{T\pi}{2}\right)^2 & \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{cases} = h,$$

Замкнутым кривым соответствует интервал изменения h от $h = -\frac{1}{2}\pi(1-T)^2$ (состояние равновесия типа центр) до $h = 0$ (петля сепаратрисы седла). Точка пересечения петли сепаратрисы с осью φ лежит в полосе $(0, \pi/2)$, если $2 - \sqrt{2} < T < 1$; в полосе $(-\pi/2, 0)$, если $3 - 2\sqrt{2} < T < 2 - \sqrt{2}$; в полосе $(-\pi, -\pi/2)$, если $0 < T < 3 - 2\sqrt{2}$. В зависимости от T изменяется число сшиваний для периодического движения. В дальнейшем ограничимся случаем, когда периодическое движение сшивается из траекторий не более чем трех полос $(T > 3 - 2\sqrt{2})$. При этом будут исчерпаны все возможные случаи разбиения фазового пространства на траектории.

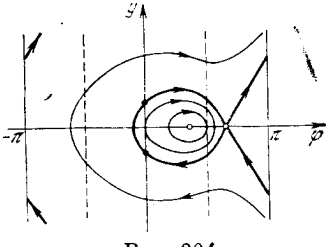


Рис. 204

2. Состояния равновесия. Седловая величина. Система (1) имеет при $T<1$ два состояния равновесия: $O_1(\pi T/2, 0)$ и $O_2(\pi - \pi T/2, 0)$. Состояние равновесия O_1 будет неустойчивым фокусом, если для точки O_1 будет

$$(P'_\varphi + Q'_y)_1 = -\mu(\alpha + \beta - 2\beta T - \gamma T) \equiv -\mu\sigma > 0, \qquad \sigma < 0,$$

устойчивым фокусом, если $\sigma > 0$, и центром, если $\sigma = 0$. В последнем легко убедиться: при условии $\sigma \equiv \alpha + \beta - 2\beta T - \gamma T = 0$ система (1) на полосе $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ может быть представлена в виде

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\left(T - \frac{2}{\pi}\varphi\right)[1 - \mu(2\beta + \gamma)\, y]}{y}$$

и проинтегрирована.

Состояние равновесия O_2 — всегда седло. Седловая величина будет иметь значение

$$(P'_\varphi + Q'_y)_2 = -\mu\sigma. \tag{3}$$

Существенно, что выражения $P'_\varphi + Q'_y$ для фокуса и для седла имеют одинаковое значение. Как будет показано, это определяет существенные особенности структуры разбиения фазового пространства и пространства параметров.

3. Предельные циклы. Если систему (1) записать в виде

$$d\varphi/dt = H'_y, \qquad dy/dt = -H'_\varphi + \mu q(\varphi, y), \tag{4}$$

где $q(\varphi, y) = [-\alpha - \beta c(2\varphi) + \gamma s(\varphi)]\, y$, то значения константы h_0, выделяющие кривые C_{h_0} консервативной системы, вблизи которых при малом μ будут предельные циклы системы (4), определяются как корни уравнения $\psi(h) = 0$, где

$$\psi(h) = \int\limits_{C_h}\int q'_y\, d\varphi\, dy = -\int\limits_{C_h}\int [\alpha + \beta c(2\varphi) - \gamma s(\varphi)]\, d\varphi\, dy =$$

$$= -\int\limits_{C_h} [\alpha + \beta c(2\varphi) - \gamma s(\varphi)]\, y\, d\varphi. \tag{5}$$

Чтобы выполнить интегрирование, нужно сделать определенные предположения о расположении петли сепаратрисы консервативной системы на плоскости и тем самым о числе кусков, из которых сшивается кривая C_{h_0}.

а) Пусть $2 - \sqrt{2} \leqslant T < 1$. При изменении h в интервале $-\pi(1-T)^2/2 < h < -\pi(1-T)^2/4$ кривые C_h будут эллипсами, целиком расположенными в полосе $(0, \pi/2)$, а интервалу $(-\pi/4)(1-T)^2 < h < 0$ будут соответствовать замкнутые кривые, сшитые из кусков эллипса и гиперболы, расположенных соответственно на полосах $(0, \pi/2)$ и $(\pi/2, \pi)$.

Выполняя интегрирование, получим

$$\psi(h) = \begin{cases} -\sigma F_0(h), & -a^2 < h < -a^2/2, \\ -\sigma F_1(h), & -a^2/2 < h < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь

$$a^2 = \frac{1}{2}(1-T)^2, \qquad F_0(h) = \sqrt{2}\pi^{3/2}(a^2+h),$$

$$F_1(h) = \sqrt{2\pi}\left[a\sqrt{2h+a^2} + (h+a^2)\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{a}{\sqrt{2(h+a^2)}}\right) + h\ln\frac{\sqrt{2h+a^2}+a}{\sqrt{-2h}}\right].$$

Имеем также

$$F_1'(h) = \sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{a}{\sqrt{2(h+a^2)}} + \ln\frac{\sqrt{2h+a^2}+a}{\sqrt{-2h}}\right],$$

$$F_1''(h) = -\frac{\sqrt{\pi/2}a\sqrt{2h+a^2}}{h(h+a^2)},$$

$$F_1(-a^2/2) = \sqrt{\pi/2}a^2\pi, \qquad F_1'(-a^2/2) = \sqrt{2}\pi^{3/2},$$

$$F_1''(-a^2/2) = 0.$$

Таким образом, функция $\psi(h)$ сшивается из линейной функции $-\sigma F_0$ на интервале $-a^2 < h < -a^2/2$ и монотонной на интервале $-a^2/2 < h < 0$, имеющей с функцией $-\sigma F_0$ одинаковый знак производной. Функция $\psi(h)$ будет убывающей при $\sigma > 0$, возрастающей при $\sigma < 0$ и будет тождественно обращаться в нуль при $\sigma = 0$.

Предельных циклов в рассматриваемом случае $2 - \sqrt{2} \leqslant T < 1$ нет. При $\sigma = 0$ существует внутри петли сепаратрисы континуум замкнутых кривых. При $\sigma \neq 0$ характер устойчивости фокуса однозначно определяет структуру разбиения фазового цилиндра на траектории. На рис. 205, *1*, *1—4*, *4* изображены структуры разбиения фазового пространства соответственно для случаев $\sigma < 0$, $\sigma = 0$ и $\sigma > 0$.

б) Пусть $3 - 2\sqrt{2} \leqslant T \leqslant 2 - \sqrt{2}$. Фазовые траектории консервативной системы располагаются при этом не более чем на трех полосках (не выходят на полосу $(-\pi, -\pi/2)$). Положим также для определенности, что $T > 0{,}5$ (случай $T < 0{,}5$ аналогичен случаю $T > 0{,}5$, но отвечает другой последовательности интервалов изменения h, соответствующих определенному числу сшиваний); для $T < 0{,}5$ будет

$$-\frac{\pi}{2}(1-T)^2 < -\frac{\pi}{4}(T^2 - 4T + 2) < -\frac{\pi}{4}(1-T)^2 < 0;$$

для $T > 0{,}5$ будет

$$-\frac{\pi}{2}(1-T)^2 < -\frac{\pi}{4}(1-T)^2 < -\frac{\pi}{4}(T^2-4T+2) < 0.$$

Выполняя интегрирование в формуле (5) для случая $0{,}5 < T < 2-\sqrt{2}$, получим

$$\psi(h) = \begin{cases} -\sigma F_0(h), & -a^2 \leqslant h \leqslant -a^2/2, \\ -\sigma F_1(h), & -a^2/2 \leqslant h \leqslant -b^2/2, \\ F_2(h) - \sigma F_1(h), & -b^2/2 \leqslant h \leqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $b^2 = \frac{1}{2}\pi(T^2-4T+2)$, $F_0(h)$ и $F_1(h)$ имеют значение, указанное в (6), и $F_2(h)$ будет

$$F_2(h) = 2(2a^2-b^2)\sqrt{2h+b^2} + \frac{4}{3}(2h+b^2)^{3/2} -$$

$$-2(h+a^2)\sqrt{2a^2-b^2}\left(\pi - 2\arcsin\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{\sqrt{2(h+a^2)}}\right).$$

Имеем также

$$F_2'(h) = 4(2h+b^2)^{1/2} - 2\sqrt{2a^2-b^2}\left(\pi - 2\arcsin\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{\sqrt{2(h+a^2)}}\right),$$

$$F_2''(h) = \frac{2\sqrt{2h+b^2}}{h+a^2} > 0,$$

$$F_2(-b^2/2) = F_2'(-b^2/2) = F_2''(-b^2/2) = 0, \qquad F_2'''(-b^2/2) > 0.$$

Из последнего следует, что $F_2(h)$ на интервале $-b^2/2 < h \leqslant 0$ есть функция, принимающая положительные значения, монотонно возрастающая и обращающаяся в нуль в единственной точке $h = -b^2/2$.

Выражения (7) определяют $\psi(h)$ как непрерывную функцию, сшитую из трех кусков с различными аналитическими представлениями на интервалах $(-a^2, -a^2/2)$, $(-a^2/2, -b^2/2)$ и $(-b^2/2, 0)$. Функция $\psi(h)$ на интервале $(-a^2, -b^2/2)$ имеет знак, противоположный знаку σ, обращаясь при $\sigma = 0$ в нуль тождественно. На интервале $(-b^2/2, 0)$ функция $\psi(h)$ состоит из двух слагаемых, одно из которых положительно, а другое имеет знак, противоположный знаку σ. Выбором σ значение $\psi(h)$ на всем интервале $(-b^2/2, 0)$ может быть сделано как положительным, так и отрицательным.

Проследим за корнями функции $\psi(h)$ и изменением качественной структуры разбиения фазового пространства на траектории при возрастании σ от отрицательных значений. При $\sigma < 0$ функция $\psi(h)$ на всем интервале $(-a^2, 0)$ будет положительной.

Предельных циклов нет. Фокус неустойчивый. Структура разбиения фазового пространства изображена на рис. 205, *1*.

При $\sigma = 0$ функция $\psi(h)$ тождественно обращается в нуль на интервале $(-a^2, -b^2/2)$ и сохраняет положительное значение

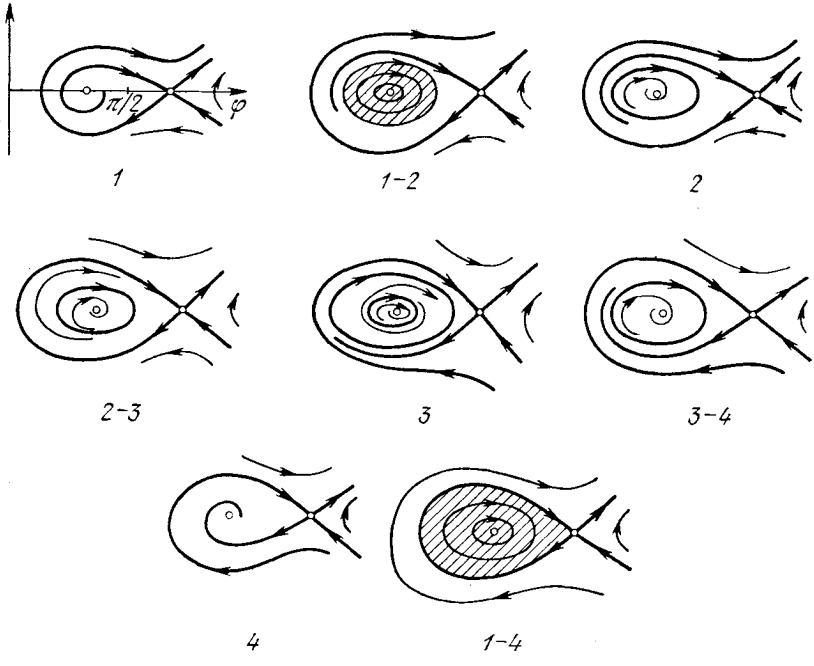


Рис. 205

на интервале $(-b^2/2, 0)$. Существует континуум замкнутых кривых, окружающих состояние равновесия типа центр. Петля сепаратрисы не может существовать, так как $\psi(0) \neq 0$; ω-сепаратриса седла скручивается с границы области, заполненной замкнутыми кривыми; α-сепаратриса седла уходит в бесконечность по верхнему полуцилиндру (рис. 205, *1—2*).

При $\sigma > 0$ фокус становится устойчивым. Если σ достаточно мало, то на интервале $(-a^2, -b^2/2)$ будет $\psi(h) < 0$, но сохранится $\psi(0) > 0$. На интервале $(-b^2/2, 0)$ будет существовать $h = h_1$ — корень функции $\psi(h)$, соответствующий неустойчивому $(\psi'(h_1) > 0)$ предельному циклу, возникшему из границы области, заполненной замкнутыми кривыми (рис. 205, *2*).

При возрастании σ кривая $\psi(h)$ будет опускаться — при этом корень $\psi(h)$ будет возрастать — и для достаточно больших h функция $\psi(h)$ становится отрицательной на всем интервале $(-a^2, 0)$. Предельных циклов нет. Фокус устойчив. Структура

разбиения фазового пространства однозначно определяется (рис. 205, *4*).

Исчезновение корня $h = h_1$ при переходе от структуры рис. 205, *2* к структуре рис. 205, *4* может происходить либо при возрастании h_0 до нуля (этому соответствовало бы влипание неустойчивого предельного цикла в петлю сепаратрисы седла), либо при слиянии его с другим корнем функции $\psi(h)$. Не проводя подробного исследования поведения функции $\psi(h)$ при разных σ, можно по знаку седловой величины заключить, что при возрастании σ реализуется именно последний случай.

Седловая величина, определяемая выражением (3), имеет при $\sigma > 0$ отрицательное значение и, следовательно, к петле сепаратрисы может стянуться или из нее появиться лишь устойчивый предельный цикл. Отсюда следует, что обращение в нуль величины $\psi(0)$, соответствующее возникновению петли сепаратрисы, должно предшествовать исчезновению корня $h = h_1$. При перемене знака $\psi(0)$ (когда $\psi(0)$ становится отрицательным) появляется второй корень $h = h_2$ функции $\psi(h)$, убывающий с возрастанием σ и соответствующий устойчивому ($\psi'(h_2) < 0$) предельному циклу. При дальнейшем возрастании σ корни h_1 и h_2 сближаются, сливаются и исчезают. Описанному процессу соответствует на фазовой плоскости смена структур, представленных на рис. 205: рис. 205, *2—3* ($\psi(0) = 0$) — возникла петля сепаратрисы; рис. 205, *3* ($h_1 < h_2 < 0$) — из петли сепаратрисы возник устойчивый предельный цикл; рис. 205, *3—4* ($h_1 = h_2$) — возник двойной полуустойчивый предельный цикл; рис. 205, *4* ($\psi(h) < 0$) — циклов нет.

Приведенные простые рассуждения дают строгое доказательство существования области пространства параметров, для точек которой система (1) имеет по крайней мере два предельных цикла. Непосредственное исследование функции $\psi(h)$ позволяет убедиться, что $\psi(h)$ не может иметь более двух корней. Это исследование, однако, довольно громоздко [67].

ГЛАВА 19

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СШИТЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ

§ 1. Кусочно-линейная система с тремя параметрами. Рассмотрим дифференциальное уравнение [71]

$$\ddot{x} + \alpha[1 - \beta F'(x)]\dot{x} + F(x) = \gamma.$$

Полагая

$$F(x) = \frac{2}{\pi}x \qquad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$F(x) = -\frac{2}{\pi}x + 2 \qquad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$$

и вводя новые переменные и параметры, приходим к системе вида

$$\begin{aligned} &dx/dt = y, \\ &dy/dt = -x - 2h_1 y + a \end{aligned} \qquad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} &dx/dt = y, \\ &dy/dt = x - 2h_2 y + a - \pi \end{aligned} \qquad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi. \tag{1}$$

Будем рассматривать фазовую цилиндрическую поверхность склеенной системы, развернутую на часть плоскости, соответствующей неравенствам $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ (рис. 206). Прямая $x = \pi/2$ разбивает рассматриваемую часть плоскости на области *1* и *2*, в каждой из которых фазовые траектории определяются соответственно линейными системами. Прямые $x = -\pi/2$ и $x = 3\pi/2$ отождествляются. Склеенная система имеет два состояния равновесия: $O_1(a, 0)$ и $O_2(\pi - a, 0)$. Точка O_1 — устойчивый фокус при $0 < h < 1$, устойчивый узел при $h \geqslant 1$. Точка O_2 — всегда седло, сепаратрисы которого определяются уравнениями

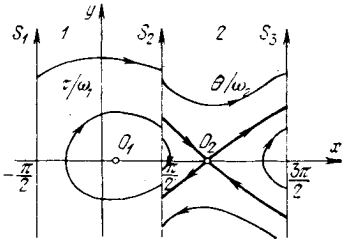


Рис. 206

$$y = \left(-h_2 \pm \sqrt{h_2^2 + 1}\right)[x - (\pi - a)].$$

Обозначим через S_1, S_2 и S_3 полупрямые $x=-\pi/2$, $x=\pi/2$ и $x=3\pi/2$, соответствующие значениям $y>0$.

Фазовые траектории системы осуществляют точечные преобразования полупрямой S_1 в S_2 (преобразование L_1) и полупрямой S_2 в S_3 (преобразование L_2). Пусть S_1, S_2 и S_3 — ординаты точек соответствующих полупрямых; τ/ω_1, θ/ω_2 — времена пробега изображающей точки (см. рис. 206) через области *1*, *2*, соответствующие преобразованиям L_1 и L_2.

Величины S_1, S_2, τ, θ принимают положительные или нулевые значения. Интегрируя линейные уравнения (1) в областях *1* и *2*, обычным образом получаем параметрические уравнения для функций соответствия.

Для области *1* получаем

$$S_1(\tau, h_1, a)=\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\frac{\omega_1}{\sin\tau}\,e^{k_1\tau}+\left(\frac{\pi}{2}+a\right)(\omega_1\operatorname{ctg}\tau+h_1),$$
$$S_2(\tau, h_1, a)=S_1(\tau, -h_1, -a). \qquad (L_1)$$

Здесь $\omega_1=\sqrt{1-h_1^2}$, $k_1=h_1/\omega_1$ и $0<h<1$. Выражения для производных могут быть представлены в виде

$$\frac{dS_1}{dS_2}=e^{2k_1\tau}\frac{S_2}{S_1},$$
$$\frac{d^2S_1}{dS_2^2}=\frac{\sin\tau}{\omega_1 S_1^3}e^{3k_1\tau}\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)S_1-\left(\frac{\pi}{2}+a\right)S_2\right].$$

В случае $h>1$ выражения для $S_1(\tau, h_1, a)$ и $S_2(\tau, h_1, a)$ и производных получим, если в правых частях полученных выражений заменим $\sin\tau$ и $\operatorname{ctg}\tau$ соответственно через $\operatorname{sh}\tau$ и $\operatorname{cth}\tau$.

Параметр τ меняется в пределах от $\tau=0$ ($S_2(0)=S_1(0)=\infty$) до значения $\tau=\tau^*$, при котором S_1 или S_2 обращаются в нуль. Тот или иной случай при $0<h<1$ реализуется в зависимости от знака выражения

$$(\pi/2-a)\,e^{k_1\pi}-(\pi/2+a). \qquad (2)$$

При $h>1$ всегда реализуется случай $S_2(\tau^*)=0$, $S_1(\tau^*)>0$. Кривая $S_1=S_1(S_2)$ имеет асимптоту $S_1=S_2+2\pi h_1$. Некоторые возможные виды кривой, соответствующие преобразованию L_1, изображены на рис. 207.

Рис. 207, *а* соответствует случаю $(\pi/2-a)\,e^{k_1\pi}-(\pi/2+a)<0$ и, в частности, всегда реализуется при малых h_1. Промежуточный между изображенными случай, когда кривая проходит через начало координат, соответствует $\tau^*=\pi$ и обращению в нуль выражения (2).

Для области 2 получаем

$$S_3(\theta, h_2, a) = \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\frac{\omega_2}{\operatorname{sh}\theta}e^{-k_2\theta} + \left(\frac{\pi}{2} + a\right)(\omega_2 \operatorname{cth}\theta - h_2), \qquad (L_2)$$

$$S_2(\theta, h_2, a) = S_3(\theta, -h_2, -a).$$

Здесь $\omega_2 = \sqrt{h_2^2 + 1}$, $k_2 = h_2/\omega_2$.

Выражения для производных могут быть представлены в виде

$$\frac{dS_3}{dS_2} = e^{-2k_2\theta}\frac{S_2}{S_3},$$

$$\frac{d^2S_3}{dS_2^2} = -\frac{\operatorname{sh}\theta}{\omega_2 S_3^3}e^{-3k_2\theta}\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right)S_3 - \left(\frac{\pi}{2} + a\right)S_2\right].$$

Параметр θ меняется в пределах от $\theta = 0$ ($S_2(0) = S_3(0) = \infty$) до значения $\theta = \infty$. При этом оба предельных значения отличны от нуля:

$$S_3(\infty) = (\pi/2 + a)(\omega_2 - h_2) > 0, \qquad S_2(\infty) = (\pi/2 - a)(\omega_2 + h_2) > 0.$$

Кривая $S_3 = S_3(S_2)$ имеет асимптоту $S_3 = S_2 - 2\pi h_2$.

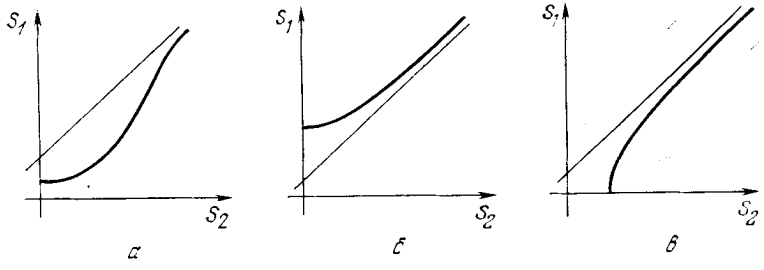


Рис. 207

Вид кривой для $h_2 < 0$ (только этот случай и будет рассматриваться) представлен на рис. 208. Конечная точка кривой S_3: $A[(\omega_2 + h_2)(\pi/2 - a), (\omega_2 - h_2)(\pi/2 + a)]$ для малых $h_2 (-h_2 < a[(\pi/2 + a)(\pi/2 - a)]^{-1/2})$ лежит выше асимптоты.

Для разыскания предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр, нужно рассмотреть преобразование $L = I_1L_2$, отображающее полупрямую S_1 в S_3 (S_3 отождествляется с S_1) по траекториям системы. Неподвижным точкам этого преобразования соответствуют предельные циклы, охватывающие цилиндр и расположенные в верхней части фазового цилиндра $y > 0$. Для отыскания этих неподвижных точек надо найти точки пересечения кривых $S_1 = S_1(S_2)$ и $S_3 = S_3(S_2)$, рассматривая кривые на совмещенных плоскостях (S_2, S_1) и (S_2, S_3) (рис. 209).

Нетрудно видеть, что бифуркации, при которых появляются или исчезают точки пересечения кривых $S_1 = S_1(S_2)$ и $S_3 = S_3(S_2)$, имеют место:

а) если точка A кривой $S_3 = S_3(S_2)$ лежит на кривой $S_1 = S_1(S_2)$;

б) если асимптоты рассматриваемых кривых совпадают;

в) если рассматриваемые кривые касаются.

По аналитическим выражениям для кривых $S_1(S_2)$ и $S_3(S_2)$ легко прослеживается только вторая из перечисленных бифуркаций (совпадение асимптот). Для бифуркаций а) и в) аналитические условия их осуществления приводят к громоздким со-

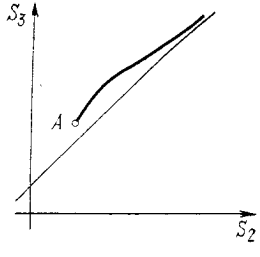


Рис. 208

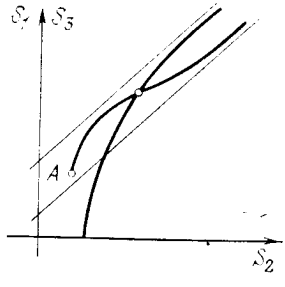


Рис. 209

отношениям (особенно условия соприкосновения кривых). Дополнительное привлечение качественных методов позволяет существенно упростить прослеживание бифуркаций. Покажем, что могут существовать два цикла, охватывающих цилиндр.

Так как для положительных k_1 и k_2 (для положительных h_1 и h_2) во всех точках пересечения кривых $S_1(S_2)$ и $S_3(S_2)$ выполняется неравенство

$$\frac{d(S_1 - S_3)}{dS_2} = e^{2k_1\tau}\frac{S_2}{S_1} - e^{-2k_2\theta}\frac{S_2}{S_3} = \frac{S_2}{S_1}\left(e^{2k_1\tau} - e^{-2k_2\theta}\right) > 0,$$

то в этом случае может быть не более одной точки пересечения и эта точка соответствует устойчивому предельному циклу. Два предельных цикла не могут существовать при h_1 и h_2 одинаковых знаков.

Проследим за последовательностью бифуркаций при некотором фиксированном $h_2 < 0$ с возрастанием h_1. Пусть асимптоты совпадают, т. е. $h_1 + h_2 = 0$.

Так как для больших S_2 будет $d^2S_1/dS_2^2 < 0$, $d^2S_3/dS_2^2 > 0$ и при расхождении асимптот с возрастанием h_1 асимптота для кривой $S_1(S_2)$ поднимается и располагается выше асимптоты для кривой $S_3(S_2)$, то при этом возникает точка пересечения кривых $S_1(S_2)$ и $S_3(S_2)$ (рис. 209), соответствующая устойчивому пре-

дельному циклу, охватывающему цилиндр (рисунок соответствует случаю малых h_1 и h_2).

При дальнейшем возрастании h_1 асимптота кривой S_1 поднимается, сама кривая s_1 деформируется, а точка пересечения кривых s_1 и s_3 перемещается вдоль кривой S_3. Покажем, что при этом неизбежно возникает соприкосновение кривых, соответствующее слиянию устойчивого и неустойчивого предельных циклов, охватывающих цилиндр.

Покажем сначала, что кривые $S_1(S_2)$ и $S_3(S_2)$ для больших h_1 расходятся и не имеют точек пересечения.

Систему в области *2* можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+a-\pi}{y} - 2h_2 \equiv \varepsilon(x, y) - 2h_2.$$

В полосе $+\pi/2 < x < 3\pi/2$, $y > (a-\pi/2)/(2h_2)$ (выше изоклины горизонтальных наклонов) интегральные кривые будут иметь положительный наклон. Пусть ε^+ и ε_- соответственно наибольшее и наименьшее значение $\varepsilon(x, y)$ в полосе, ограниченной снизу значением $y = y^*$. Легко проверить, что для любой траектории в полосе будет

$$\pi\varepsilon_- - 2h_2\pi < y\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) < \pi\varepsilon^+ - 2h_2\pi, \qquad h_2 < 0,$$

и ε^+, $\varepsilon_- \to 0$ при $y^* \to \infty$. Смещение по координате y при движении по траекториям в области *2* (от $y(\pi/2)$ до $y(3\pi/2)$ или в обратном направлении) при фиксированном h_2 будет величина, ограниченная, стремящаяся к $|2\pi h_2|$ при $y(\pi/2) \to \infty$.

Систему в области *1* можно записать в аналогичном виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y} - 2h_1.$$

В полосе $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > (a+\pi/2)/(2h_1)$ (выше изоклины горизонтальных наклонов) интегральные кривые будут иметь отрицательный наклон. Легко убедиться, повторяя приведенные рассуждения, что смещение по координате y при движении по любой траектории в области *1* в рассматриваемой полосе может быть сделано за счет выбора h_1 сколь угодно большим и, в частности, превосходящим наибольшее смещение, возможное при движении по траекториям в области *2*.

Очевидно, что при выполнении этого условия, траектория, проходящая через точку $[\pi/2, (\pi/2+a)(\omega_2 - h_2)]$ (продолжающая в область *1* при убывании t ω-сепаратрису седла), должна уходить в бесконечность, и предельных циклов на верхнем полуцилиндре в этом случае заведомо нет, т. е. кривые $S_3(S_2)$ и $S_2(S_2)$ не имеют общих точек.

С учетом знаков второй производной для $S_1(S_2)$ и $S_3(S_2)$ есть лишь две логические возможности для расхождения кривых:

а) точка пересечения кривых $S_1(S_2)$ и $S_3(S_2)$ с возрастанием h_1 перемещается вдоль кривой S_3, совпадает с точкой A на конце кривой S_3 и соскальзывает с конца кривой;

б) точка A попадает на кривую $S_1(S_2)$ до того, как точка пересечения совпадает с точкой A. При этом с дальнейшим возрастанием h_1 возникает две точки пересечения кривых $S_1(S_2)$ и $S_3(S_2)$. Из точки A возникают точка пересечения, соответствующая неустойчивому предельному циклу (характер устойчивости определяется взаиморасположением кривых). С возрастанием h_1 точки сближаются, сливаются в момент соприкосновения кривых (этому моменту соответствует возникновение полуустойчивого предельного цикла) и затем исчезают.

Какая из этих возможностей реализуется, можно определить по знаку седловой величины. Так как величина $P'_x + Q'_y$ в седле O_2 имеет значение $-2h_2 > 0$, то из петли сепаратрисы седла может появиться или к ней стянуться только неустойчивый предельный цикл. Так как, с другой стороны, попадание точки A на кривую $S_1(S_2)$ соответствует появлению петли сепаратрисы седла O_2, то, следовательно, при возрастании h_1 реализуется вторая возможность. При возрастании h_1 от значения $h_1 = -h_2$ последовательно осуществляются бифуркации:

а) появление устойчивого предельного цикла из бесконечности;

б) появление неустойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы седла;

в) слияние устойчивого и неустойчивого предельных циклов с последующим их исчезновением.

§ 2. Следящая система с люфтом. Рассмотрим простейшую следящую систему с люфтом в контактном устройстве и в зубчатом зацеплении, описываемую безразмерным уравнением [152]

$$\ddot{x} + \dot{x} = S(x, \dot{x}), \qquad (1)$$

где x — координата сервомотора и $S(x, \dot{x})$ — кусочно-постоянная (характеризующая безразмерную э. д. с. и сухое трение в системе). Общеизвестным приемом при исследовании точечных преобразований является представление и исследование точечного преобразования в параметрической форме, где в качестве параметра вводится время пробега изображающей точки по траекториям системы между точками сшивания.

Особенностью рассматриваемой задачи является возможность другого эффективного параметрического представления точечного преобразования с введением в качестве параметров некоторых отрезков в фазовом пространстве. Этот прием имеет значение, выходящее за рамки рассматриваемой задачи.

Разбиение плоскости $(x, \dot{x})$ на области, где $C(x, \dot{x})$ сохраняет постоянное значение, производится в зависимости от двух пара-

метров k и z, характеризующих соответственно люфт в контактном устройстве и люфт в зацеплении.

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = S(x, y) - y \tag{2}$$

и будем рассматривать фазовые траектории на плоскости (x, y). Разбиение фазовой плоскости на траектории будет симметрично относительно начала координат, если за начало отсчета принять середину максимального интервала длиной $z + k$, который сервомотор может пройти по инерции. На рис. 210 изображено разбиение плоскости (x, y) на десять областей, где $S(x, y)$ сохраняет постоянные значения, указанные на рисунке. Полосы шириной y_0, примыкающие к оси x сверху или снизу, соответствуют выбиранию сервомотором люфта в зубчатом зацеплении, и для них соответственно $S(x, y) = 1$ или $S(x, y) = -1$ (сухим трением при свободном движении сервомотора пренебрегаем). Полосе шириной k, содержащей внутри ось y, соответствует выбирание сервомотором совместно со следящей осью люфта в контактном устройстве при движении по инерции. Здесь $S(x, y) = -r$ или $S(x, y) = r$ характеризует твердое трение в системе. На других участках фазовой плоскости величина $S(x, y)$ имеет значение $\pm 1 \pm r$, где знаки выбираются в зависимости от знака скорости и знака включенной э. д. с., или 0, если люфт в зацеплении проходится по инерции. Величина y_0 — максимальная скорость, до которой разгоняется сервомотор, выбирая люфт в зацеплении,— есть однозначная функция параметра z и определяется уравнением

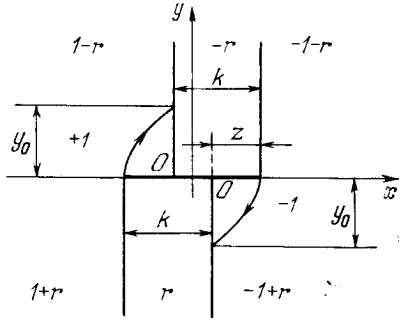


Рис. 210

$$z + y_0 + \ln(1 - y_0) = 0. \tag{3}$$

Это уравнение получается, если в (2) положить $S(x, y) = 1$ и потребовать для решения системы (2) выполнения условий $x = -x_0$, $y = 0$; $x = -x_0 + z$, $y = y_0$.

Построим точечное преобразование в себя полупрямой L: $y = 0$, $x \leqslant -(z + k)/2$, примыкающей слева к отрезку покоя: $y = 0$, $-(z + k)/2 < x < (z + k)/2$. Так как фазовое пространство симметрично относительно начала координат, то задача сводится к построению точечного отображения полупрямой L в симметричную полупрямую L', примыкающую к отрезку покоя справа.

Рассмотрим траекторию в верхней полуплоскости, сшитую из четырех кусков, начинающуюся в точке $(-u, 0)$ и заканчиваю-

щуюся в точке $(v, 0)$. «Сшивание» траекторий в точках разрыва правых частей системы совершается элементарно, если знак правой части второго из уравнений (2) не изменяется при переходе через линию сшивания. Так будет, если $y_0 \leqslant 1-r$, т. е. если r «не слишком велико». Точки пересечения этой траектории с полосой ширины k будут $x=\frac{z-k}{2}$, $y=\eta$ и $x=\frac{z+k}{2}$, $y=\zeta$. Как оказывается, величины η и ζ целесообразно рассматривать как параметры точечного преобразования.

Из уравнения (2), полагая $S(x, y)=1$ для первого куска траектории и $S(x, y)=1-r$ для второго и используя условия для концов кусков траекторий: $x=-u$, $y=0$; $x=-u+z$, $y=y_0$; $x=\frac{z-k}{2}$ $y=\eta$, получим

$$u=\frac{z+k}{2}+(1-r)\ln\frac{1-r-y_0}{1-r-\eta}+y_0-\eta, \qquad y_0\leqslant\eta<1-r. \quad (4)$$

Полагая далее $S(x, y)=-r$ для третьего куска траектории и $S(x, y)=-1-r$ для четвертого и используя условия для концов кусков траекторий

$$x=\frac{z-k}{2}, \quad y=\eta; \quad x=\frac{z+k}{2}, \quad y=\zeta; \quad x=v, \quad y=0,$$

получим

$$r\ln(\zeta+r)-r\ln(\eta+r)+\eta-\zeta-k=0, \quad (5)$$

$$v=\frac{z+k}{2}+\zeta+(1+r)\ln\frac{1+r}{\zeta+1+r}, \qquad 0\leqslant\zeta<\infty. \quad (6)$$

Уравнения (4)—(6) определяют требуемое точечное преобразование в параметрической форме с двумя параметрами η и ζ. Разбиение фазового пространства (x, y) на трехтории определяется взаиморасположением кривых $u=u(\eta)$ и $v=v(\eta)$ на совмещенных плоскостях (η, u) и (η, v). Исследование взаиморасположения кривых проводится элементарно при использовании η и ζ как параметров.

Из (5) и (6) находим

$$\frac{d\eta}{d\zeta}=\frac{\zeta(\eta+r)}{\eta(\zeta+r)}>0, \qquad \frac{dv}{d\zeta}=\frac{\zeta}{\zeta+1+r}>0.$$

Откуда

$$\frac{dv}{d\eta}=\frac{\eta}{1+r+\zeta}\frac{\zeta+r}{\eta+r}>0. \quad (7)$$

Из (4) имеем

$$\frac{du}{d\eta}=\frac{\eta}{1-r-\zeta}. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), непосредственно обнаруживаем, что для любого η будет

$$du/d\eta>dv/d\eta,$$

и, следовательно, если существует точка пересечения кривых $u=u(\eta)$ и $v=v(\eta)$, то она единственная и соответствует устойчивой, неподвижной точке преобразования.

Граничные значения кривых $u=u(\eta)$ и $v=v(\eta)$ будут

$$u=(z+k)/2, \quad v=(z+k)/2$$

соответственно при значениях параметров $\eta=y_0$ и $\eta=y_1$ (y_1 определяется как корень уравнения (5) при $\zeta=0$).

Для значений η, близких к $1-r$ ($\eta=1-r$ — асимптота для $u=u(\eta)$), будет $u>v$. Точка пересечения кривых $u=u(\eta)$ и $v=v(\eta)$ будет поэтому существовать, если $y_1<y_0$. Граница области существования неподвижной точки преобразования и соответствующего ей устойчивого предельного цикла определяется условием $y_1=y_0$.

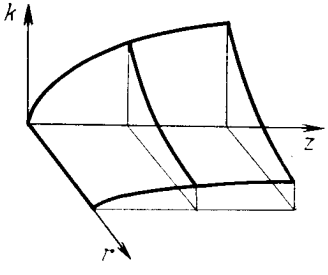
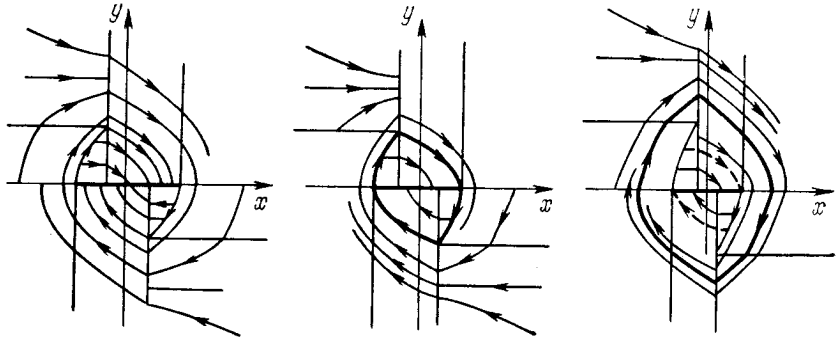


Рис. 211

Уравнение (3) совместно с уравнением

$$r\ln r - r\ln(y_0+r)+y_0-k=0, \quad (9)$$

полученным из (5) при $\zeta=0$ и $\eta=y_0$, дает в параметрической форме уравнение поверхности (рис. 211), отделяющей в пространстве параметров область автоколебаний от области абсолютной устойчивости. Точкам ниже поверхности соответствует область автоколебаний. Точкам выше поверхности — устойчивость в большом (рис. 212, *а*). Точкам по поверхности — вырожденный



а *б* *в*

Рис. 212

двойной цикл, проходящий через концы отрезка покоя (рис. 212, *б*). На рис. 212, *в* изображены два склеенных предельных цикла — устойчивый и неустойчивый (неустойчивый обозначен штриховой линией).

Если r «велико» ($y_0 > 1 - r$), фазовые траектории подходят с обеих сторон к линиям сшивания $y = \pm y_0$ и система (2) должна быть из физических соображений доопределена условием

$$\dot{x} = y, \quad y = \begin{cases} y_0 & \text{при } x \leqslant -(z-k)/2, \\ -y_0 & \text{при } x \geqslant (z-k)/2, \end{cases}$$

требующим, чтобы движение продолжалось по линии стыков траекторий (скользящий режим). Уравнение (4) теряет смысл. Любая траектория, сшитая из четырех кусков в верхней полуплоскости, начинающаяся в точке $(-u, 0)$ и заканчивающаяся в точке $(v, 0)$, содержит кусок прямой $y = y_0$, принадлежащий линии сшивания. В уравнении (5) параметр η принимает фиксированное значение y_0. Уравнения (5) и (6) будут в параметрическом виде (с параметром ζ) связывать v и k. Уравнение (9) сохраняет

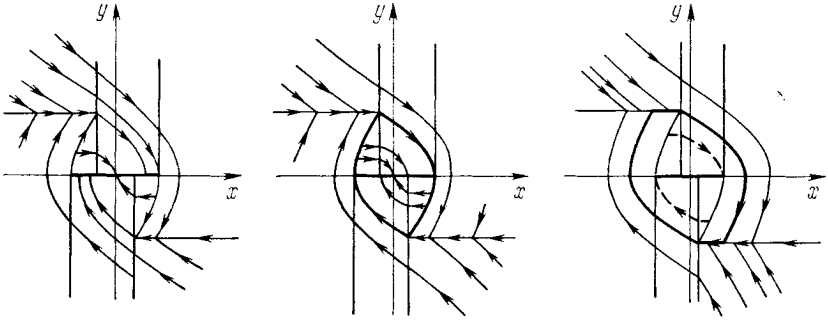


Рис. 213

смысл и для случая сколь угодно больших r. На рис. 213 изображены различные возможные типы разбиения фазовой плоскости для этого случая. В отличие от случая «малых r», здесь устойчивый предельный цикл будет вырожденным (на него переходят точки с континуума траекторий).

§ 3. Электрическая цепь с туннельным диодом. Рассматривается система [28]

$$\dot{x} = y - \varphi(x), \quad \dot{y} = \sigma - \lambda x - y, \quad \sigma > 0, \quad \lambda > 0, \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ — нелинейная функция, содержащая «падающий» участок. Система такого вида встречается при рассмотрении схем на туннельных диодах, а также в ряде других вопросов. Аппроксимируем $\varphi(x)$ кусочно-линейной функцией, состоящей из трех линейных кусков. Наклоны k будем считать: падающего участка $k = -\alpha_2 < 0$, восходящих $k = \alpha_1 > 0$. Фазовое пространство при такой аппроксимации разбивается на три части, в каждой из которых система линейна. В областях I и III лежат восходящие

ветви характеристики, в области *II* — падающий участок (рис. 214).

1. Состояния равновесия. Разбиение пространства параметров по числу и характеру состояний равновесия. Возможны одно или три грубых состояния равновесия. В случае одного состояния равновесия имеем фокус (узел), всегда устойчивый в областях *I* или *III* и неустойчивый в области *II*, если $\alpha_2 > 1$. В случае трех состояний равновесия имеем всегда устойчивые фокусы (узлы) в областях *I* и *III* и седло в области *II*. Куски прямых $\sigma = x_1\lambda + y_1$ и $\sigma = x_2\lambda + y_2$ (x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты угловых точек характеристики) при $\lambda \leqslant \alpha_2$ образуют в плоскости (λ, σ) дискриминантную кривую, отделяющую область трех состояний равновесия от области одного состояния равновесия. Точкам дискриминантной кривой соответствует сшитое состояние равновесия типа седло-фокуса или седло-узла, и угловой точке ($\lambda = \alpha_2$) — неустойчивый отрезок покоя, совпадающий с падающим участком характеристики.

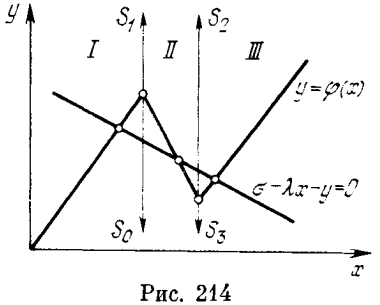


Рис. 214

В случае $\alpha_2 < 1$ невозможны замкнутые траектории и возможными бифуркациями являются только появление и исчезновение состояний равновесия. Все нижеследующие рассмотрения ведутся для случая $\alpha_2 > 1$ и $(\alpha_1 - 1)^2 < 4\alpha_2$, допускающего разнообразные бифуркации.

2. Бифуркации состояний равновесия.

2.1. *Устойчивость состояния равновесия на линии сшивания.* Пусть прямая $\sigma - \lambda x - y = 0$ проходит через угловую точку (x_1, y_1) характеристики на границе *I* и *II* областей и пусть $\lambda > (\alpha_2 + 1)^2/4 > \alpha_2$. Тогда область *I* заполнена кусками траекторий устойчивого фокуса, а область *II* — неустойчивого. Вводим на линии сшивания областей *I* и *II* положительные координаты S_0 и S_1 (а на линии сшивания областей *II* и *III* — координаты S_2 и S_3) (см. рис. 214). Преобразования $S_0 \to S_1$ по траекториям области *I* и $S_1 \to \bar{S}_0$ по траекториям области *II* запишутся так:

$$S_1 = S_0 \exp\{-h_1\pi/\omega_1\}, \quad \bar{S}_0 = S_1 \exp\{-h_2\pi/\omega_2\}, \qquad (2)$$

где ω_i, $-h_i$ $(i = 1, 2)$ — мнимая и действительная части корней характеристического уравнения соответственно для областей *I* и *II*.

Состоянием равновесия будет сшитый центр ($\bar{S}_0 \equiv S_0$), если $h_1\omega^{-} + {}^{\prime}{}_2\omega_2^{-1} = 0$, или, в раскрытом виде,

$$\lambda = \lambda^{+} \equiv (\alpha_1\alpha_2 + 1)(\alpha_1 - \alpha_2 + 2)^{-1}.$$

Фокус на склейке будет устойчив ($\bar{S}_0 < S_0$) при $\lambda > \lambda^+$ и неустойчив ($\bar{S}_0 > S_0$) при $\lambda < \lambda^+$.

2.2 *Рождение предельного цикла из состояния равновесия типа фокус при перемещении состояния равновесия через линию сшивания.* Докажем, что в областях *I* и *II* может существовать не более одного предельного цикла. Рассмотрим преобразование $S_0 \to \bar{S}_0$ по траекториям областей *I* и *II*. Для области *I* будет

$$S_0 = \frac{\delta_0}{\sin \omega_1 \tau_1} \left[\omega_1 \cos \omega_1 \tau_1 + h_1 \sin \omega_1 \tau_1 - \omega_1 e^{h_1 \tau_1}\right] = \delta_0 \zeta(\tau_1),$$

$$S_1 = \frac{\delta_0}{\sin \omega_1 \tau_1} \left[\omega_1 \cos \omega_1 \tau_1 - h_1 \sin \omega_1 \tau_1 - \omega_1 e^{-h_1 \tau_1}\right] = \delta_0 \chi(\tau_1), \qquad (3)$$

где δ_0 — расстояние от границы раздела областей *I* и *II* до состояния равновесия; χ и ζ — монотонные функции (возрастающие или убывающие в зависимости от знака δ_0). Преобразование по траекториям области *II* записывается аналогично.

Вычисление производной функции последования дает

$$d\bar{S}_0/dS_0 = S_0 \bar{S}_0^{-1} \exp\{-2(h_1\tau_1 + h_2\theta)\}. \qquad (4)$$

Здесь τ и θ — время движения соответственно по траекториям областей *I* и *II*, $h_1 = (1+\alpha_1)/2 > 0$, $h_2 = (1-\alpha_2)/2 < 0$.

Пусть состояние равновесия лежит в области *I*. Тогда для периодического решения ($\bar{S} = S_0$) с увеличением S_0 время τ_1 убывает (до значения π/ω_1), время θ возрастает (до значения π/ω_2) и производная (4) растет. Поэтому может существовать не более двух точек пересечения функции последования с биссектрисой, причем неподвижная точка с меньшей координатой должна быть устойчива, а с большей — неустойчива. Так как, по предположению, состояние равновесия лежит в области *I* и является устойчивым фокусом, который не может охватываться устойчивым же циклом, то в областях *I* и *II* может существовать не более одного, причем неустойчивого цикла.

Пусть состояние равновесия лежит в области *II*. Тогда с ростом S_0 время τ_1 растет, а θ убывает. Аналогично находим, что в этом случае может существовать не более одного устойчивого предельного цикла.

Пусть $\sigma - \lambda x - y = 0$ проходит через верхнюю угловую точку характеристики. Рассмотрим два случая.

1. $\lambda > \lambda^+$. Сшитый фокус устойчив. Траектория, проходящая через нижнюю угловую точку, в силу (2) при $t \to \infty$ накручивается к состоянию равновесия. Эта траектория остается спиралью и при малых смещениях прямой $\sigma - \lambda x - y = 0$. Если при малом смещении состояние равновесия попадает в область *II*, то оно становится неустойчивым и, следовательно, появляется хотя бы один устойчивый предельный цикл. По сказанному выше этот цикл единственный. Пусть после смещения состояние равновесия

попадает в область I. Так как в объединении областей I и II возможно существование не более одного цикла и фокус сохраняет устойчивость, то, следовательно, циклы не возникают.

2. $\lambda < \lambda^+$. Аналогично находим, что если при малом смещении состояние равновесия попадает в область II, то циклы не возникают, а если в область I, то появляется неустойчивый цикл.

2.3. *Рождение предельных циклов (простого или двойного) из границы области, заполненной замкнутыми траекториями.* Рассмотрим преобразования $\bar{S}_0 = f(S_0)$, склеенные из двух кусков: $\bar{S}_0 = \varphi(S_0)$ — по траекториям областей I и II и $\bar{S}_0 = \psi(S_0)$ — по всем областям. Покажем, что $f(S_0)$ дифференцируема в точке склейки. Преобразование $S_0 \to S_1$ по траекториям области I дано в (3). Преобразования $S_1 \to S_2$, $S_2 \to S_3$ и $S_3 \to S_0$ записываются аналогично. Значение $d\bar{S}_0/dS_0$ для функции $\varphi(S_0)$ дано в (4), а для функции $\psi(S_0)$ будет

$$d\bar{S}_0/dS_0 = S_0\bar{S}_0^{-1} \exp\{-2h_1(\tau_1 + \tau_3) - 2h_2(\tau_2 + \tau_4)\}. \qquad (5)$$

Здесь τ_1 и τ_3 — время движения по областям I и III, τ_2 и τ_4 — время движения по верху и низу области II.

Пусть $S_0 = S_0^*$ — граничное значение, разделяющее интервалы определения преобразований $\varphi(S_0)$ и $\psi(S_0)$. Производные для φ и ψ в точке склейки совпадают: при $S = S_0^*$ будет $\tau_3 = 0$, $\theta = \theta^*$, $\tau_2 + \tau_4 = \theta^*$.

Пусть теперь прямая $\sigma - \lambda x - y = 0$ проходит через угловую точку характеристики x_1, y_1 и $\lambda = \lambda^+$. Покажем, что предельных циклов нет.

Функция последования на плоскости $(S_0, \bar{S}_0)$ склеена из отрезка биссектрисы $\bar{S}_0 = S_0 < S_0^*$ и кривой $\bar{S}_0 = \psi(S_0)$. Функция $\bar{S}_0 = f(S_0)$ дифференцируема в точке склейки и, следовательно, при $\lambda = \lambda^+$ будет $d\bar{S}_0/dS_0 = 1$ (из (5) находим также, что $d^2\bar{S}_0/dS_0^2 < 0$). При возрастании S_0 от значения S_0^* показатель экспоненты в (5) монотонно убывает от нулевого значения в точке склейки ($\tau_1 = \text{const}$, τ_3 растет и $h_1 > 0$; τ_2 и τ_4 убывают и $h_2 < 0$). Других точек пересечения (или касания) с биссектрисой, кроме $S = S_0^*$, у кривой $\bar{S}_0 = \psi(S_0)$ быть не может. Кривая для $S_0 > S_0^*$ располагается ниже биссектрисы. Спирали, сшитые из траекторий в областях I, II и III, накручиваются на границу области, заполненной замкнутыми кривыми, сшитыми из траекторий в областях I и II.

При малом изменении параметров σ и λ функция последования измененной системы лежит в малой окрестности функции последования исходной системы. Если сдвигаться по полупрямой $L_1 = 0$ ($L_1 \equiv \sigma - \lambda x_1 - y_1$, $\lambda > \alpha_2$) от значения $\lambda = \lambda^+$ в сторону уменьшения λ, то функцией последования для $S_0 < S_0^*$ будет прямая, проходящая через начало координат выше биссектрисы,

и для $S_0 > S_0^*$ — кривая $\bar{S}_0 = \psi(S_0)$, пересекающая биссектрису один раз (в точке склейки $d^2\bar{S}_0/dS_0^2 \neq 0$ при $\lambda = \lambda^+$, $\sigma = \sigma^+$). Из границы области, заполненной замкнутыми кривыми, появляется единственный устойчивый предельный цикл. При последующем уменьшении σ начальная точка функции последования перемещается из начала координат по оси S_0 (наименьшее S_0 соответствует траектории, идущей в устойчивый фокус и касающейся линии сшивания при $\bar{S}_0 = 0$), и функция последования $\bar{S}_0 = f(S_0)$ будет пересекать биссектрису дважды (из фокуса при перемещении его с линии склейки появляется единственный неустойчивый предельный цикл). Если сдвинуться по полупрямой в сторону увеличения λ от значения $\lambda = \lambda^+$ и затем уменьшить σ, то функция последования будет целиком лежать ниже биссектрисы. Из непрерывности и дифференцируемости функции последования следует, что в любой малой полуокрестности точки (λ^+, σ^+) (ниже полупрямой) существуют λ и σ, для которых функция последования касается биссектрисы. На фазовой плоскости этому соответствует появление двойного цикла. Такие точки образуют бифуркационную кривую, выходящую из точки (λ^+, σ^+) на полупрямой $L_1 = 0$.

Касание невозможно при $S_0 < S_0^*$, так как в объединении областей *I* и *II* может быть не более одного цикла, и поэтому рождение двойного цикла при изменении параметров происходит при $S_0 = S_0^*$ от границы области, заполненной замкнутыми траекториями.

2.4. *Рождение предельных циклов из концов отрезка покоя.* Пусть прямая $\sigma - \lambda x - y = 0$ и падающий участок характеристики совпадают ($\lambda = \alpha_2$). Падающий участок характеристики будет неустойчивым отрезком покоя, а области *I* и *II* в силу условия $(\alpha_1 - 1)^2 < 4\alpha_2$ (см. п. 1) будут заполнены траекториями устойчивых фокусов. Легко получить явное выражение для преобразования в себя полупрямой S_0:

$$\bar{S}_0 = S_0 \exp\{-2h_1\pi/\omega_1\} + \delta(\alpha_2 - 1)(1 + \exp\{-h_1\pi/\omega_1\}).$$

Здесь δ — ширина области *II*. Преобразование имеет одну устойчивую неподвижную точку.

Повернем теперь прямую $\sigma - \lambda x - y = 0$ вокруг какой-либо точки на падающем участке против часовой стрелки. Отрезок покоя при этом разрушается и возникают седло в области *II* и устойчивые фокусы в областях *I* и *III*. Пусть будет $\lambda = \alpha_2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и мало. Ограничиваясь степенями ε не выше первой, получим угловые коэффициенты сепаратрис: $[-1 + \varepsilon/(\alpha_2 - 1)]$ (для α-сепаратрис), $[-\alpha_2 - \varepsilon/(\alpha_2 - 1)]$ (для ω-сепаратрис).

При $\lambda = \alpha_2$ траектории, выходящие из точки, в которой при $\varepsilon \neq 0$ возникает седло, накручиваются на предельный цикл, α-сепаратрисы седла в области *II* при малых $\varepsilon > 0$ лежат в малой

окрестности траекторий, выходящих из той же точки при $\varepsilon = 0$, и, следовательно, α-сепаратрисы также накручиваются на устойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия. Поэтому ω-сепаратрисы могут лишь скручиваться с неустойчивых циклов, лежащих в областях *I—II* и *II—III*, охватывающих устойчивые фокусы, возникающие при повороте прямой соответственно в областях *I* и *III*. Таким образом, при повороте прямой $\sigma - \lambda x - y = 0$ из концов отрезка покоя появляются устойчивые фокусы в сопровождении охватывающих их неустойчивых циклов (фокусы и циклы возникают одновременно). В окрестности каждого фокуса лежит единственный предельный цикл. Последнее следует из того, что производная функции последования, построенная с использованием траекторий седла в области *II*, будет также даваться выражением (4), с тем лишь отличием, что с возрастанием S_0 будет $\theta \to \infty$.

3. Бифуркации сепаратрис.

3.1. *Расположение бифуркационной кривой для петли сепаратрисы.* Пусть при $\sigma = \sigma_0$ и фиксированном $\lambda = \lambda^*$ прямая $\sigma - \lambda x - y = 0$ проходит через верхнюю угловую точку характеристики. Изменим σ на величину $\varkappa$ ($\varkappa = \sigma_0 - \sigma$) и покажем, что петля сепаратрисы за счет изменения σ возникнуть не может. Пусть S_0' и S_1' — отрезки, отсекаемые α- и ω-сепаратрисами линейного седла в области *II* на границе областей *I* и *II*, а S_0 и S_1 — координаты по преобразованию (3) на той же границе. Из (3) следует

$$S_1 = \delta_0 \chi [\zeta^{-1}(S_0/\delta_0)], \tag{6}$$

где ζ^{-1} — функция, обратная ζ. Величины h_1 и ω_1, а следовательно, и функции χ и ζ от σ не зависят.

Так как характеристика есть функция кусочно-линейная, то при изменении σ величины S_0', S_1' и δ_0 будут пропорциональны $\varkappa$:

$$S_0' = \gamma_0 \varkappa, \qquad \delta_0 = \gamma_1 \varkappa, \tag{7}$$

$$S_1' = \gamma_2 \varkappa. \tag{8}$$

Сшивая траектории на границе областей *I* и *II* (полагая $S_0' = S_0$), из (6) и (7) находим

$$S_1 = \gamma_1 \varkappa \chi [\zeta^{-1}(\gamma_0/\gamma_1)] \equiv \gamma_3 \varkappa, \tag{9}$$

а из (8) и (9) —

$$S_1/S_1' = \gamma_3/\gamma_2 = \text{const}.$$

Таким образом, при фиксированном λ величины S_1 и S_1' находятся в постоянном отношении и петля сепаратрисы ($S_1 = S_1'$) за счет изменения σ возникнуть не может.

Если прямая $\sigma - \lambda x - y = 0$ проходит через середину падающего участка и $\lambda = \lambda_1$ таково, что существует петля сепаратрисы

сверху, то в силу симметрии фазового пространства одновременно должна существовать и петля сепаратрисы снизу. При этом осуществляется условие $\gamma_3/\gamma_2 = 1$. Так как γ_3 и γ_2 от σ не зависят, то это условие и, следовательно, обе петли сохраняются при $\lambda = \lambda_1$ для всех значений σ внутри дискриминантной кривой.

3.2. *Устойчивость петель сепаратрис.* Устойчивость петель сепаратрис будет определяться знаком седловой величины, если седло располагается внутри или на границе области *II* (теоремы 44 и 47 в [13] переносятся на случай, когда сшитая петля содержит аналитическое седло). В рассматриваемом случае $\alpha_2 > 1$ седловая величина положительна $(P'_x + Q'_y = \alpha_2 - 1)$ и петли сепаратрис изнутри и снаружи неустойчивы. При изменении параметров к петле стягивается или от нее рождается единственный неустойчивый предельный цикл (см. гл. 10, § 2, IV, и гл. 17, § 4, п. 4).

4. Качественные структуры разбиения фазового пространства.

4.1. Фазовые портреты, соответствующие значениям параметров σ', λ и σ'', λ таким, что прямые $\sigma' - \lambda x - y = 0$ и $\sigma'' - \lambda x - y = 0$ располагаются симметрично относительно середины падающего участка характеристики, будут симметричны относительно последней. При изучении разбиения пространства параметров поэтому можно рассматривать только часть пространства (λ, σ) выше либо ниже линии симметрии $\sigma - \lambda x_0 - y_0 = 0$, где x_0, y_0 — координаты середины падающего участка.

4.2. Рассмотрим структуры разбиения фазового пространства и последовательность бифуркаций, переводящих одну структуру в другую для значений параметров вдоль бифуркационной прямой $\sigma - \lambda x_1 - y_1 = 0$ (x_1, y_1 — координаты верхней угловой точки характеристики).

Пусть $\lambda > \lambda^+$ (рис. 215, *а*). Состояние равновесия — устойчивый фокус на склейке, и все траектории идут к нему. При $\lambda = \lambda^+$ (рис. 215, *б*) возникает область, заполненная замкнутыми траекториями. Все сшитые по областям *I*—*III* траектории накручиваются на границу этой области. При $\alpha_2 < \lambda < \lambda^+$ (рис. 215, *в*) фокус на склейке неустойчив и при уменьшении λ от значения $\lambda = \lambda^+$ от границы области, заполненной замкнутыми траекториями, рождается устойчивый предельный цикл. При $\lambda = \alpha_2$ (рис. 215, *г*) (острие дискриминантной кривой) падающий участок характеристики и прямая $\sigma - \lambda x - y = 0$ совпадают. Возникает неустойчивый отрезок покоя внутри устойчивого предельного цикла. При дальнейшем уменьшении λ вдоль дискриминантной кривой появляются два состояния равновесия: склеенный вырожденный седло-узел (см. гл. 4, § 2) и устойчивый фокус в области *III*. От конца отрезка покоя вместе с фокусом рождается неустойчивый предельный цикл (α-сепаратриса вырожденного состояния равновесия идет к устойчивому циклу, охватывающему все состояния равновесия, ω-сепаратриса скручивается с неустой-

чивого цикла, охватывающего устойчивый фокус (рис. 215, *д*)). Так как α-сепаратриса при $\lambda = 0$ (прямая $y = \sigma$) идет в устойчивый узел в области *III*, состояние равновесия в области *III* при

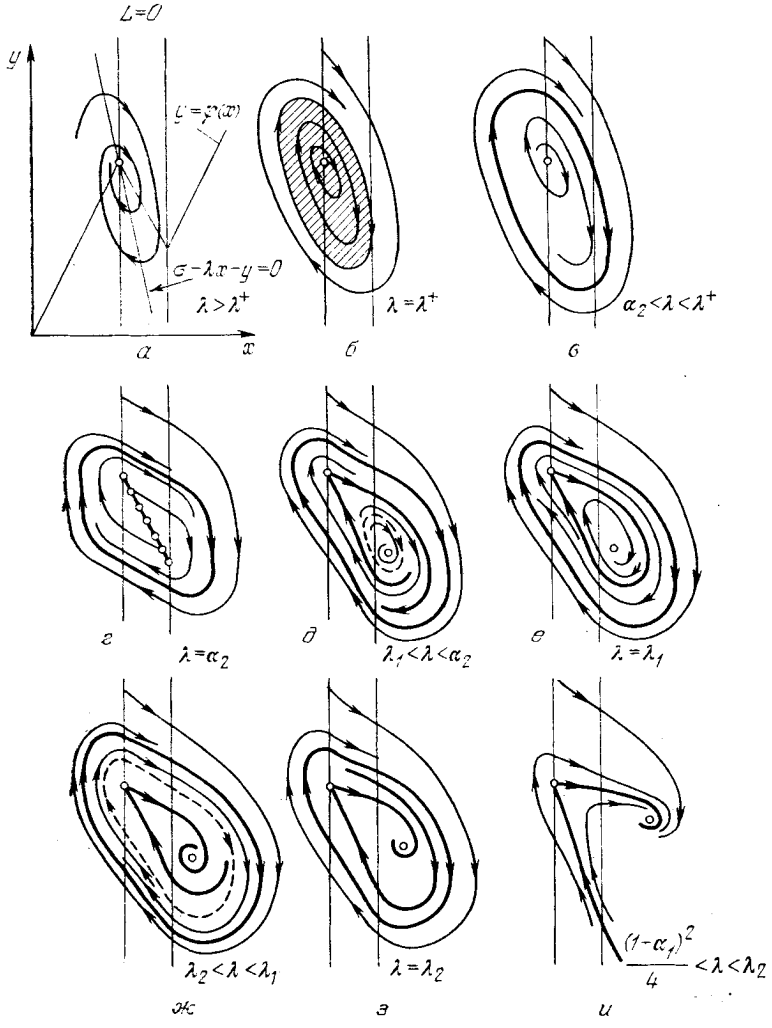


Рис. 215

изменении параметров вдоль дискриминантной кривой устойчивости не меняет и бесконечность остается неустойчивой, то исчезновение предельных циклов на интервале $0 < \lambda < \alpha_2$ может произойти только за счет слияния предельных циклов с последующим уничтожением двойного цикла. Это может осуществить-

ся лишь при посредстве промежуточной бифуркации — появлении при $\lambda = \lambda_1 < \alpha_2$ (рис. 215, *е*) петли сепаратрисы, возникшей из α- и ω-сепаратрис сшитого вырожденного состояния равновесия.

Петля сепаратрисы как снаружи, так и изнутри неустойчива. Такую петлю можно рассматривать как особый предельный цикл с состоянием равновесия на нем, отделяющий структуры с неустойчивым предельным циклом, охватывающим состояние равновесия в области *III*, от структур с неустойчивым циклом, охватывающим все состояния равновесия.

При убывании λ до значения $\lambda = \lambda_1$ в петлю «влипает» изнутри неусточивый предельный цикл (рис. 215, *е*), а при дальнейшем убывании λ и разрушении петли от нее рождается неустойчивый предельный цикл (рис. 215, *ж*), охватывающий все состояния равновесия (α-сепаратриса идет в устойчивый фокус в области *III*, ω-сепаратриса скручивается с неустойчивого предельного цикла, который охватывает оба состояния равновесия, и между циклами нет состояний равновесия). При некотором $\lambda = \lambda_2 < \lambda_1$ (рис. 215, *з*) необходимо возникает полуустойчивый двойной предельный цикл, исчезающий при убывании λ. При дальнейшем убывании λ фокусы превратятся в узлы и возникнет структура, качественно эквивалентная структуре при $\lambda = 0$ (рис. 215, *и*). (При убывании λ до значения $(1-\alpha_1)^2/4$ сохраняется фокус, при дальнейшем убывании λ фокус превращается в узел.)

4.3. Рассмотрим структуры внутри дискриминантной кривой при $\lambda_1 < \lambda < \alpha_2$. Для значений параметров, принадлежащих самой дискриминантной кривой, для отрезков, отсекаемых α- и ω-сепаратрисами на линии сшивания, выполняется условие $(S_3)_\alpha > (S_3)_\omega$ (вокруг фокуса есть неустойчивый предельный цикл), и это неравенство не может нарушиться при $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ за счет изменения σ. Оно сохраняется, в частности, и для структуры в точке пересечения $\lambda = \lambda_0$ с линией симметрии $\sigma - \lambda x_0 - y_0 = 0$ (x_0, y_0 — координаты середины падающего участка характеристики). В этой точке фазовый портрет симметричен относительно точки (x_0, y_0) и, следовательно, вокруг устойчивого фокуса в области *I* также есть неустойчивый предельный цикл. За счет изменения σ эта качественная картина внутри области, ограниченной дискриминантной кривой, не может измениться. Отсюда следует, что при смещении с дискриминантной кривой внутрь области при разрушении сшитого вырожденного состояния равновесия появляются седло в области *II* и устойчивый фокус в области *I* в сопровождении неустойчивого предельного цикла.

Структура разбиения фазового пространства при $\lambda_1 < \lambda < \alpha_2$ будет содержать три предельных цикла; α-сепаратрисы седла идут к устойчивому циклу, охватывающему все три состояния равновесия; ω-сепаратрисы скручиваются с неустойчивых циклов, охватывающих фокусы в областях *I* и *III*. При $\lambda = \lambda_1$ одновременно возникают верхняя и нижняя петли сепаратрис. В них влипают

неустойчивые предельные циклы. При убывании λ от значения $\lambda=\lambda_1$ из двойной петли появляется неустойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия.

Так как при $\lambda<(\alpha_1-1)^2/4$ система предельных циклов не имеет (области *I* и *III* «перечеркнуты» интегральными прямыми линейных узлов), то устойчивый и неустойчивый циклы на интервале $(\alpha_1-1)^2/4<\lambda<\lambda_1$ должны уничтожиться. Внутри дискриминантной кривой левее отрезка петель сепаратрис должна существовать бифуркационная кривая двойных циклов. В силу упомянутой ранее симметрии кривая двойных циклов пересекает стороны дискриминантной кривой при одном и том же $\lambda=\lambda_2$.

4.4. Бифуркационная кривая, соответствующая слиянию устойчивого и неустойчивого циклов (кривая двойных циклов), начинается в точках, где $\lambda=\lambda^+$ на прямых $L_1\equiv\sigma-\lambda x_1-y_1=0$ и $L_2\equiv\sigma-\lambda x_2-y_2=0$ и располагается для случая одного состояния равновесия соответственно снизу и сверху обеих прямых $L_1=0$ и $L_2=0$ (в области $L_1L_2>0$). При $\lambda=\lambda_2$ обе ветви кривой двойных циклов пересекают (снизу и сверху) дискриминантную кривую и переходят одна в другую внутри дискриминантной кривой.

Кривая двойных циклов выделяет на интервале $\lambda_2<\lambda<\lambda^+$ в области $L_1L_2>0$ некоторую окрестность $L_1=0$ и $L_2=0$, для точек которой в фазовом пространстве есть одно устойчивое состояние равновесия и два предельных цикла.

4.5. Если состояние равновесия типа фокус лежит на падающем участке характеристики (область $L_1L_2<0$, $\lambda>\alpha_2$ на плоскости параметров), то существует единственный устойчивый предельный цикл. Существование хотя бы одного цикла очевидно (состояние равновесия и бесконечность неустойчивы). Единственность вытекает из монотонности изменения показателя экспоненты в (4) и (5), порождаемой расположением фокуса на падающем участке характеристики (с возрастанием S_0 параметры τ_1 и τ_3 растут, а τ_2, τ_4 и θ убывают), и дифференцируемости функции последования в точке сшивания.

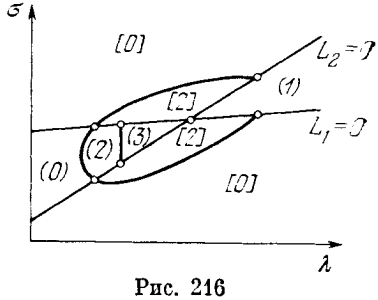


Рис. 216

4.6. Структура разбиения пространства параметров λ, σ на области с различной качественной структурой фазового пространства изображена на рис. 216. Цифрами в круглых и квадратных скобках (цифры указывают на число предельных циклов) отмечены различные области. Последовательность качественных структур вдоль бифуркационной прямой $L_1=0$ представлена на

рис. 215. На рис. 217 теми же цифрами, что и на рис. 216, отмечены грубые качественные структуры, соответствующие различным областям фазового пространства. Негрубым структурам на

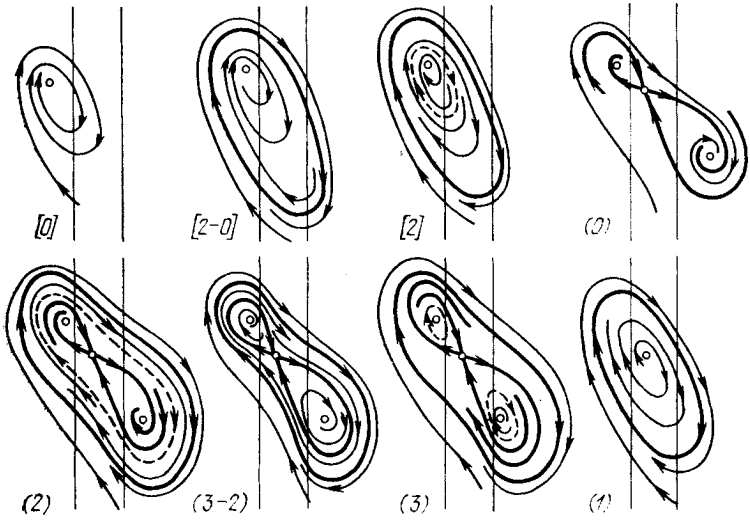


Рис. 217

рис. 217, помеченным двумя цифрами, соответствуют бифуркационные кривые рис. 216, разделяющие соответствующие области (и соответствующие двойным циклам).

§ 4. Система со скачками на линии сшивания. Рассмотрим уравнение [126—128]

$$\ddot{\varphi} + 2h[1 - bF'(\varphi)]\dot{\varphi} + F(\varphi) = \Omega, \quad F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi), \qquad (1)$$

в предположении, что характеристика $F(\varphi)$ имеет разрывы типа конечного скачка.

Пусть $\varphi = \varphi_0$ — одна из точек разрыва. Эквивалентная уравнению (1) система

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \Omega - F(\varphi) - 2h[1 - bF'(\varphi)]y \qquad (2)$$

не определена на прямой $\varphi = \varphi_0$. Поэтому движение изображающей точки системы при попадании ее на эту прямую нуждается в доопределении. Естественно получить его следующим образом. В интервале $(\varphi_0 - \mu, \varphi_0 + \mu)$ заменим характеристику $F(\varphi)$ прямой, соединяющей точки $[\varphi_0 - \mu, F(\varphi_0 - 0)]$ и $[\varphi_0 + \mu, F(\varphi_0 + 0)]$. Тогда на фазовой плоскости в полосе $\varphi_0 - \mu < \varphi < \varphi_0 + \mu$ вместо

системы (2) будем иметь систему

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \frac{\beta - \gamma}{2\mu} x - 2\alpha y - \frac{\beta + \gamma}{2}, \tag{3}$$

где

$$x = \varphi - \varphi_0, \quad \beta = F(\varphi_0 - 0) - \Omega, \quad \gamma = F(\varphi_0 + 0) - \Omega,$$
$$\alpha = h\left(1 + b\frac{\beta - \gamma}{2\mu}\right).$$

На одной из прямых $x = \pm\mu$ зафиксируем какую-нибудь точку с ординатой y_0. Может оказаться, что полутраектория $x = x(t, \mu)$, $y = y(t, \mu)$ системы (3), начинающаяся при $t = 0$ в этой точке и проходящая внутри полосы, при всех достаточно малых μ вновь выходит из полосы при некотором $t = t(\mu)$ в некоторой точке с координатами $x = \mu$, $y = y(\mu)$ (или $x = -\mu$, $y = y(\mu)$). В этом случае примем такое доопределение: изображающая точка системы (2), попав в точку ($\varphi = \varphi_0$, $y = y_0$), находится на прямой $\varphi = \varphi_0$ в течение времени t, равного пределу $t(\mu)$ при $\mu \to 0$, после чего продолжает движение при $\varphi > \varphi_0$ (или $\varphi < \varphi_0$) в соответствии с системой (2) при начальных условиях $\varphi = \varphi_0$, $y = \lim y(\mu)$ при $\mu \to 0$. Если же рассматриваемая полутраектория системы (3) при всех достаточно малых μ целиком лежит в полосе, то примем такое доопределение: изображающая точка системы (2), попав в точку ($\varphi = \varphi_0$, $y = y_0$), остается на прямой неограниченно долго. Ситуации, которые представятся

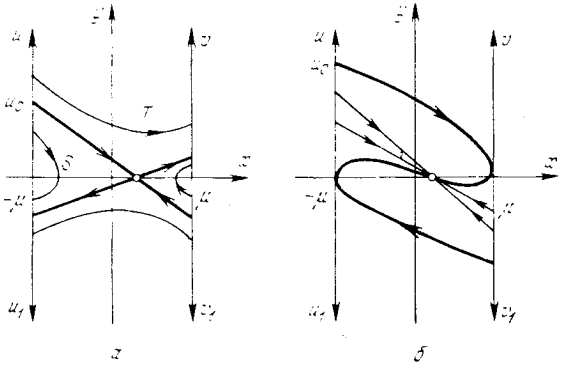


Рис. 218

при вычислениях, исчерпываются двумя указанными. Уравнение движения изображающей точки по прямой $\varphi = \varphi_0$ в обоих случаях получим предельным переходом в уравнениях рассматриваемой полутраектории системы (3): $y = Y(t) = \lim y(t, \mu)$ при $\mu \to 0$.

Перейдем к вычислениям. Выделим на прямой $x = -\mu$ полупрямые (рис. 218)

$$U\{x = -\mu,\ y = u > 0\}, \qquad U_1\{x = -\mu,\ y = -u_1 < 0\}$$

и на прямой $x=\mu$ полупрямые

$$V\{x=\mu,\ y=v>0\},\qquad V_1\{x=\mu,\ y=-v_1<0\}.$$

Траектории системы (3) осуществляют точечные преобразования полупрямой U в полупрямые V и U_1. Назовем их соответственно преобразованием T и преобразованием S. Параметрические уравнения функции соответствия будут для преобразования T

$$u=\frac{2\omega\mu}{\beta-\gamma}\left[\beta\left(\operatorname{cth}\omega\tau+\frac{\alpha}{\omega}\right)-\gamma\frac{\exp\{\alpha\tau\}}{\operatorname{sh}\omega\tau}\right],$$
$$v=\frac{2\omega\mu}{\beta-\gamma}\left[\beta\frac{\exp\{-\alpha\tau\}}{\operatorname{sh}\omega\tau}-\gamma\left(\operatorname{cth}\omega\tau-\frac{\alpha}{\omega}\right)\right]; \tag{4}$$

для преобразования S

$$u=\frac{2\omega\mu\beta}{\beta-\gamma}\left[\operatorname{cth}\omega\theta+\frac{\alpha}{\omega}-\frac{\exp\{\alpha\theta\}}{\operatorname{sh}\omega\theta}\right],$$
$$u_1=\frac{2\omega\beta\mu}{\beta-\gamma}\left[\operatorname{cth}\omega\theta-\frac{\alpha}{\omega}-\frac{\exp\{-\alpha\theta\}}{\operatorname{sh}\omega\theta}\right], \tag{5}$$
$$\omega=\sqrt{\alpha^2+(\beta-\gamma)/(2\mu)}.$$

Здесь τ и θ — параметры (время перехода изображающей точки системы (3) с полупрямой U соответственно на полупрямую V или U_1).

Рассмотрим случаи.

I. $\gamma<0<\beta$, $r\equiv 2bh>0$. Состояние равновесия (3) есть седло, расположенное внутри полосы $-\mu<x<\mu$. Соответствующая картина фазовых траекторий приведена на рис. 218, *а*.

Пусть u_0 — отрезок, отсекаемый на полупрямой U сепаратрисой, имеющий отрицательный наклон. Величина $u_0\to r\beta$ при $\mu\to 0$. Поэтому, какую бы точку u на интервале $u>r\beta$ ни фиксировать, при достаточно малых μ она участвует в преобразовании T. При этом первое из равенств (4) неявно определяет функцию $\tau=\tau(\mu)$ — время перехода из фиксированного u на полупрямую V. Ее предельное значение при $\mu\to 0$ (приложение I) есть

$$\tau=\begin{cases} r\ln[r\gamma/(r\beta-u)], & r\beta<u<r(\beta-\gamma),\\ 0, & u\geqslant r(\beta-\gamma).\end{cases} \tag{6}$$

Во втором из равенств (4) положим $\tau=\tau(\mu)$ и найдем $\lim v[\tau(\mu),\mu]$ при $\mu\to 0$. Это предельное значение (приложение II) есть

$$v=\begin{cases} 0, & r\beta<u<r(\beta-\gamma),\\ u-r(\beta-\gamma), & u\geqslant r(\beta-\gamma).\end{cases} \tag{7}$$

Фиксируем теперь какую-нибудь точку на интервале $u<r\beta$. При малых μ она участвует в преобразовании S. При этом пер-

вое из равенств (5) неявно определяет функцию $\theta = \theta(\mu)$ — время перехода из фиксированного u на полупрямую U_1. Ее предельное значение при $\mu \to 0$ (доказательство аналогично доказательству в приложении I) есть

$$\theta = r \ln [r\beta/(r\beta - u)]. \tag{8}$$

Во втором из равенств (5) положим $\theta = \theta(\mu)$ и найдем $\lim u_1 [\theta(\mu), \mu]$ при $\mu \to 0$. Это предельное значение есть

$$u_1 = 0. \tag{9}$$

Фиксируем теперь $u = r\beta$. Рассмотрим изменение отрезка $u_0 = u_0(\mu)$ с уменьшением μ. Для этого вычислим

$$u_0'(0) = 2\beta(4h^2b + 1)/[r(\beta - \gamma)].$$

Если $b > -1/(4h^2)$, то при малых μ величина u_0 убывает вместе с μ и точка $u = r\beta$ участвует в преобразовании S. Первое из равенств (5) определяет функцию $\theta = \theta(\mu)$ — время перехода из $u = r\beta$ на полупрямую U_1. Ее предельное значение при $\mu \to 0$ есть $\theta = \infty$ (это следует из того, что θ в равенстве (8) можно сделать как угодно большим, если взять u достаточно близким к $r\beta$, и из того, что в S производная $\partial u/\partial\theta > 0$).

Случай $b < -1/(4h^2)$ рассматривается аналогично. Величина u_0 возрастает с уменьшением μ, и точка $u = r\beta$ участвует в преобразовании T. Предельное время есть $\tau = \infty$.

При $b = -1/(4h^2)$ имеем $r\beta = u_0$. В этом случае точка $u = r\beta$ при любом μ лежит на сепаратрисе. Время доопределенного движения есть ∞.

Для $u < r(\beta - \gamma)$ нужно еще получить уравнения движения изображающей точки по прямой $\varphi = \varphi_0$. Для любого u это будет

$$y = Y(t) \equiv 0. \tag{10}$$

Полученная схема доопределяемых движений по верхней части прямой $\varphi = \varphi_0$ приведена на рис. 219, *а*. Здесь для наглядности налегающие одна на другую траектории раздвинуты в горизонтальном направлении. Изображающая точка системы (2), попавшая в точку $(\varphi = \varphi_0, y = u)$, $u \geqslant r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок в соответствии с формулой (7) и продолжает движение при $\varphi > \varphi_0$ в соответствии с системой (2).

Если $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$, то изображающая точка перескакивает в точку $v = 0$, находится здесь в течение времени (6) и затем двигается при $\varphi > \varphi_0$. При $u = r\beta$ изображающая точка перескакивает в точку $(\varphi = \varphi_0, y = 0)$ и остается там неограниченно долго. Это движение является вырождением при $\mu \to 0$ движения по сепаратрисе седла системы (3).

Если $u < r\beta$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $u_1 = 0$ и находится здесь в течение времени, опреде-

ляемого формулой (8), после чего продолжает движение при $\varphi < \varphi_0$.

Из соображений симметрии следует, что если в описанной схеме поменять u на v_1, v на u_1, β на $-\gamma$ и наоборот, то получим схему доопределенных движений по нижней части прямой $\varphi = \varphi_0$.

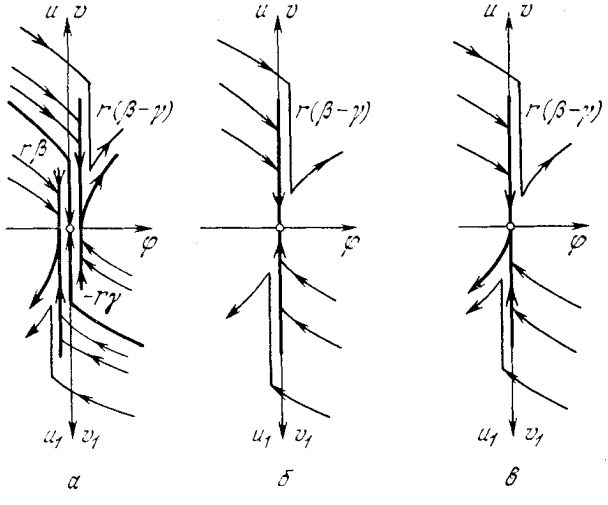


Рис. 219

II. $\beta < 0 < \gamma$, $r \equiv 2bh < 0$. Состояние равновесия системы (3) при малых μ — устойчивый узел, лежащий в полосе $-\mu < x < \mu$. Соответствующая картина фазовых траекторий приведена на рис. 218, *б*.

Пусть $u_0 = u_0(\mu)$ — отрезок, отсекаемый на полупрямой U траекторией, проходящей через точку $(x = \mu, y = 0)$. При $\mu \to 0$ имеем $u_0(\mu) \to r(\beta - \gamma)$, $u_0'(\mu) \to +\infty$. Поэтому для $u > r(\beta - \gamma)$ вычисления совпадают с соответствующими вычислениями п. 1. Если же полутраектория системы (3) начинается на отрезке $u \leqslant r\beta(\beta - \gamma)$, то при малых μ она целиком лежит внутри полосы $-\mu < x < \mu$, и время соответствующих доопределенных движений есть ∞. Уравнением движения по прямой $\varphi = \varphi_0$, как и в случае I, будет уравнение (10).

Полученная схема доопределяемых движений по верхней части прямой $\varphi = \varphi_0$ приведена на рис. 219, *б*. Изображающая точка системы (2), попавшая в точку $(\varphi = \varphi_0, y = u)$, $u > r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок в соответствии с формулой (7) и продолжает движение при $\varphi > \varphi_0$ в соответствии с системой (2).

При $u \leqslant r(\beta - \gamma)$ изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $(\varphi = \varphi_0, y = 0)$ и остается там неограниченно дол-

го. Будем говорить, что эти движения ведут в состояние равновесия ($\varphi = \varphi_0$, $y = 0$), являющееся вырождением при $\mu \to 0$ узла системы (3).

Из соображений симметрии следует, что если в описанной схеме поменять u на v_1, v на u_1, то получим схему доопределенных движений по нижней части прямой $\varphi = \varphi_0$.

III. $0 < \gamma < \beta$, $r \equiv 2bh > 0$. Состояние равновесия системы (3) есть седло, расположенное правее полосы $-\mu < x < \mu$.

Не приводя вычислений, опишем получающуюся в этом случае схему доопределенных движений (рис. 219, *в*). Изображающая точка системы (2), попавшая в точку ($\varphi = \varphi_0$, $y = u$), $u > r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок в соответствии с формулой (7) и продолжает движение при $\varphi > \varphi_0$ в соответствии с системой (2).

Если $u \leqslant r(\beta - \gamma)$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $u_1 = 0$ и находится здесь в течение времени, определяемого формулой (8), после чего продолжает движение при $\varphi < \varphi_0$. Изображающая точка системы (2), попавшая в точку ($\varphi = \varphi_0$, $y = v_1$), $v_1 \geqslant r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок вверх в соответствии с равенством $u_1 = v_1 - r(\beta - \gamma)$ и продолжает движение при $\varphi < \varphi_0$ в соответствии с системой (2). Если $v_1 < r(\beta - \gamma)$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $u_1 = 0$ и остается здесь в течение времени $\tau = r \times \ln[r\beta/(r\gamma + v_1)]$, после чего продолжает движение при $\varphi < \varphi_0$.

IV. $0 < \beta < \gamma$, $r \equiv 2bh < 0$. Состояние равновесия системы (3) при малых μ — устойчивый узел, лежащий левее полосы $-\mu < x < \mu$. Схема доопределенных движений та же, что и в п. III.

Случай V: $\beta < \gamma < 0$, $r < 0$, и случай VI: $\gamma < \beta < 0$, $r > 0$, получаются соответственно из случаев IV и III заменами: β на $-\gamma$, u на v_1, v на u_1 и наоборот.

Из имеющихся шести случаев получим еще шесть, соответствующих изменению знака r, заменами: β на $-\gamma$, r на $-r$, u на v, u_1 на v_1 и наоборот.

Рассматривая точечные преобразования прямых $\varphi = \varphi_0$ самих в себя, осуществляемые доопределенными движениями, совместно с точечными преобразованиями прямых $\varphi = \varphi_0$ самих в себя и одной в другую, осуществляемыми траекториями системы (2), можно провести качественное исследование системы для конкретной характеристики $F(\varphi)$, имеющей разрывы.

Пример 1. Пусть $F(\varphi)$ — функция периода 2π такая, что $F(\varphi) = \varphi/\pi$ при $-\pi < \varphi < \pi$, и пусть $0 < \Omega < 1$. Этот пример иллюстрирует первый случай доопределения.

В качестве фазового пространства будем рассматривать полосу, заключенную между прямыми $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$. Точки этих прямых, имеющие одинаковые ординаты, отождествляем. Таким образом, точки разрыва характеристики находятся на линии склейки цилиндрического фазового пространства.

Рассмотрим точечное преобразование полупрямой $V\{\varphi = -\pi,\ y = v > 0\}$ в полупрямую $U\{\varphi = \pi,\ y = u > 0\}$, осуществляемое траекториями системы (2). Если обозначить

$$h_1 = h(\pi - b)v/\sqrt{\pi}, \quad \omega_1 = \sqrt{1 - h_1^2}, \quad k_1 = h_1/\omega_1,$$

то при $0 < h_1 < 1$ параметрические уравнения функции соответствия этого преобразования запишутся в виде

$$v = \omega_1\sqrt{\pi}\,\frac{(1-\Omega)\,e^{k_1\eta} + (1+\Omega)\left(\cos\eta + \dfrac{h_1}{\omega_1}\sin\eta\right)}{\sin\eta},$$

$$u = \omega_1\sqrt{\pi}\,\frac{(1+\Omega)\,e^{-k_1\eta} + (1-\Omega)\left(\cos\eta - \dfrac{h_1}{\omega_1}\sin\eta\right)}{\sin\eta}.$$

Ее производные —

$$\frac{dv}{du} = e^{2k_1\eta}\,\frac{u}{v},$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \sqrt{\pi}\sin\eta e^{4k_1\eta}\,\frac{(1-\Omega)\,v - (1+\Omega)\,u}{\omega_1 v^3}.$$

Асимптота —

$$v = u + 4\sqrt{\pi}h_1.$$

Введем параметр $a = \ln[(1+\Omega)/(1-\Omega)]$. Для $a > k_1\pi$ кривая $u = u(v)$ изображена на рис. 220 вместе с ломаной

$$v = v(u) = \begin{cases} u - 2r & \text{при } u \geqslant 2r, \\ 0 & \text{при } r(1-\Omega) < u < 2r, \end{cases}$$

являющейся графиком функции соответствия преобразования полупрямой $\varphi = \pi$, $y > 0$ в себя, осуществляемого доопределенными движениями, и построенной по формуле (7). На рис. 220 изображен случай, когда кривая и ломаная имеют общую точку на горизонтальном участке ломаной. Это означает, что на фазовом цилиндре имеется предельный цикл, при движении по которому изображающая точка имеет остановку в точке ($\varphi = \pi$, $y = 0$) на время, определяемое первой строкой формулы (6). Легко видеть, что цикл устойчив и что более одного цикла быть не может. При увеличении r точка пересечения кривой и ломаной попадает в начальную точку ломаной, что соответствует влипанию цикла в сепаратрису, образующую петлю (сепаратрису, идущую из состояния равновесия $(\pi, 0)$ в то же самое состояние равновесия). Соответствующая бифуркационная поверхность в пространстве параметров r, h_1, a имеет уравнения $u(\eta) = r(1-\Omega)$,

$v(\eta)=0$. Исключив η, получим

$$a = k_1\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\omega_1 r}{\sqrt{\pi}+h_1 r}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{r^2+2\sqrt{\pi}h_1 r+\pi}{\pi}.$$

При уменьшении r точка пересечения кривой и ломаной переходит на наклонный участок ломаной, чему соответствует превращение «цикла с остановкой» в точке $(\pi, 0)$ в «цикл без останов-

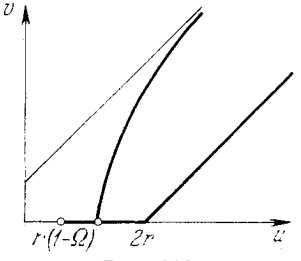


Рис. 220

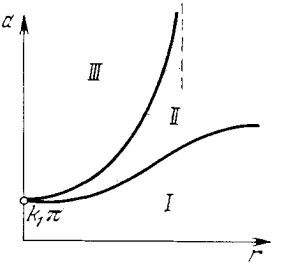


Рис. 221

ки». Поверхность, разделяющая в пространстве параметров области существования цикла с остановкой и цикла без остановки, имеет уравнение $u(\eta)=2r$, $v(\eta)=0$. Их можно переписать так:

$$r = \frac{\sqrt{\pi}\sin\eta}{\omega_1 e^{k_1\eta} - \omega_1\cos\eta - h_1},$$

$$a = k_1\eta - \ln(-\cos\eta - k_1\sin\eta)$$

и рассматривать как параметрические уравнения сечения поверхности плоскостью $h_1 = \text{const}$.

На рис. 221 приведено сечение пространства параметров плоскостью $h_1 = \text{const}$. В области I нет циклов. В области II система имеет цикл с остановкой. В области III система имеет цикл без остановки. Качественная картина фазовых траекторий системы для случая цикла с остановкой приведена на рис. 222.

Пример 2. Этот пример отличается от примера 1 знаками $F(\varphi)$ и r и иллюстрирует второй случай доопределения.

Уравнения функции соответствия $u=u(v)$, ее производных и асимптоты получаются из соответствующих уравнений примера 1, если считать $h_1 = h(\pi+b)/\sqrt{\pi}$, $\omega_1 = \sqrt{1+h_1^2}$, заменить Ω на $-\Omega$, тригонометрические функции на гиперболические со сходным названием и поставить минус перед второй производной.

Для получения всех значений v и u нужно менять η от 0 до ∞, при этом v меняется от $-\infty$ до $v_* = \sqrt{\pi}(1-\Omega)(\omega_1+h_1)$, а u меняется от ∞ до $u_* = \sqrt{\pi}(1+\Omega)(\omega_1-h_1)$, где v_* и u_* —

отрезки, отсекаемые сепаратрисами седла $(-\pi\Omega, 0)$, соответственно от полупрямых V и U. Кривая $u = u(v)$ изображена на рис. 223 вместе с прямой $v = u + 2r$, являющейся графиком функции соответствия при преобразовании полупрямой $\varphi = \pi$, $y > 0$ в себя, осуществляемом доопределенными движениями.

На рис. 223 изображен случай, когда кривая и прямая имеют точку пересечения. Это означает, что на фазовом цилиндре имеется предельный цикл. Легко видеть, что он устойчив и что более одного цикла быть не может. При уменьшении r прямая передвигается слева направо, и при некотором r точка пересечения

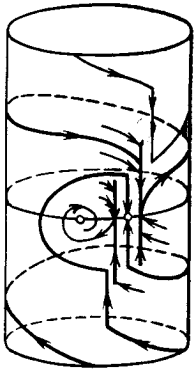


Рис. 222

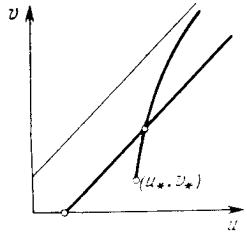


Рис. 223

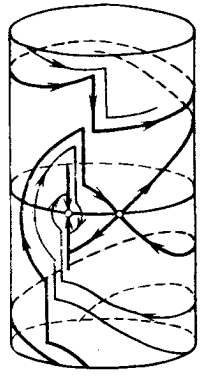


Рис. 224

попадает в точку (u_*, v_*). При этом предельный цикл влипает в сепаратрису седла $(-\pi\Omega, 0)$, образующую петлю. Соответствующая бифуркационная поверхность в пространстве параметров r, h_1, Ω имеет уравнение

$$v_* = u_* + 2r \text{ или } \Omega = -r/(\sqrt{\pi}\omega_1) + h_1/\omega_1.$$

Качественная картина фазовых траекторий системы для случая, когда имеется предельный цикл, приведена на рис. 224.

Приложение I. Пусть $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$. Функцию $u = (\tau, \mu)$, определяемую первым из равенств (4), не существующую при $\mu = 0$, доопределим ее пределом при $\mu \to 0$. Получившаяся при этом функция

$$f(\tau, \mu) = \begin{cases} u(\tau, \mu) & \text{при } \mu > 0, \\ r[\beta - \gamma \exp\{-\tau/r\}] & \text{при } \mu = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет следующим условиям: 1) непрерывна, 2) если $\tau_0 = r \times \times \ln[r\gamma/(r\beta - u)]$, то $f(\tau_0, 0) = u$, 3) производная $\partial f/\partial\tau < 0$.

Следовательно, при зафиксированном на рассмотренном интервале u равенство $u = f(\tau, \mu)$ определяет в некоторой окрестности точки $(\tau_0, 0)$ однозначную непрерывную функцию $\tau = \tau_*(\mu)$ такую, что $\tau_*(0) = \tau_0$. А так как $\tau(\mu) = \tau_*(\mu)$ при $\mu \neq 0$, то $\lim \tau(\mu) = \tau_0$ при $\mu \to 0$.

Пусть теперь $u \geqslant r(\beta - \gamma)$. Так как $\partial u/\partial\tau < 0$, то функция $\tau = \tau(\mu)$, соответствующая фиксированному на рассматриваемом интервале u, огра-

ничена сверху функцией $\tau = \tau(\mu)$, соответствующей любому u, фиксированному на интервале $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$, а предел этой ограничивающей функции при $\mu \to 0$ может быть сделан как угодно близким к нулю, если взять u достаточно близким к $r(\beta - \gamma)$.

Приложение II. При $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$. Это предельное значение находится непосредственной подстановкой предельного значения $\tau(\mu)$. Если $u \geqslant r(\beta - \gamma)$, то положим в равенствах (4) $\varkappa = \omega\tau$. Первое из них при фиксированном u и малых μ определяет функцию $\varkappa = \varkappa(\mu)$ такую, что

$$\lim_{\mu \to 0} \varkappa(\mu) = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{u - r(\beta - \gamma)}.$$

(Доказательство аналогично доказательству в приложении I.) Положим теперь во втором из равенств (4) $\varkappa = \varkappa(\mu)$ и найдем, что при $\mu \to 0$ будет $\lim v[\varkappa(\mu), \mu] = u - r(\beta - \gamma)$.

Пример 3. Пусть $F(\varphi)$ — функция периода 2π такая, что

$$F(\varphi) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < \varphi < 0, \\ +1 & \text{при } 0 < \varphi < \pi. \end{cases}$$

Схема доопределенных движений по прямой $\varphi = \pi$ приведена на рис. 225, *а* (здесь масштаб по оси y уменьшен в $2h$ раз). Изображающая точка, попавшая в точку (π, y), где $y \geqslant 2b$, совершает скачок величиной $2b$ вниз по прямой $\varphi = \pi$, после чего продолжает движение при $\varphi > \pi$ в соответствии с системой (2). Если $b(1 - \Omega) < y < 2b$, то изображающая точка перескакивает в точку $(\pi, 0)$ и находится в ней в течение времени

$$2bh \ln \frac{b(1 + \Omega)}{y - b(1 - \Omega)},$$

после чего продолжает движение при $\varphi > \pi$ в соответствии с системой (2). Если $y = b(1 - \Omega)$, то изображающая точка перескакивает и точку $(\pi, 0)$ и остается там неограниченно долго. Если $0 \leqslant y < b(1 - \Omega)$, то изображающая точка перескакивает в точку $(\pi, 0)$ и находится в ней в течение времени

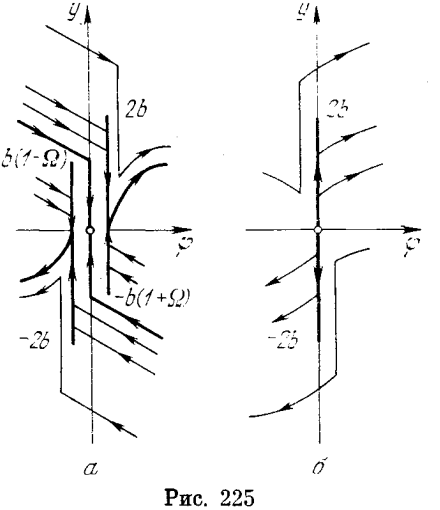


Рис. 225

$$2bh \ln \frac{b(1 - \Omega)}{b(1 - \Omega) - y},$$

после чего продолжает движение при $\varphi < \pi$. Поведение изображающей точки, попавшей на прямую $\varphi = \pi$ в нижнем полуцилиндре, аналогично (нужно поменять y на $-y$ и Ω на $-\Omega$).

Точка $(\pi, 0)$ будет состоянием равновесия, аналогичным седлу, а траектории, проходящие через точки $[\pi, b(1-\Omega)]$ и $[\pi, -b(1+\Omega)]$ — его сепаратрисами. Роль двух других сепаратрис выполняют траектории, выходящие из точки $(\pi, 0)$.

Схема доопределенных движений по прямой $\varphi = 0$ приведена на рис. 225, *б*. Изображающая точка, попавшая в точку $(0, y)$, где $y > 0$, совершает скачок величиной $2b$ вверх по прямой $\varphi = 0$, после чего продолжает движение при $\varphi > 0$ в соответствии с системой (2). Если $y < 0$, то изображающая точка совершает скачок величиной $2b$ вниз по прямой $\varphi = 0$, после чего продолжает движение при $\varphi < 0$ в соответствии с системой (2). Точка $(0, 0)$

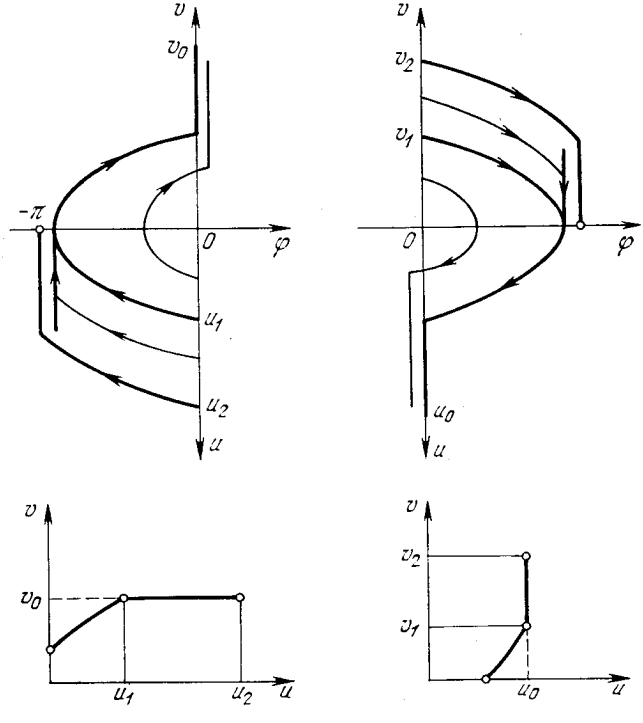


Рис. 226

будет состоянием равновесия, аналогичным неустойчивому узлу. Из него выходят траектории, проходящие через точки $(0, y)$, где $0 < y \leqslant 2b$ или $-2b \leqslant y < 0$. (Вертикальный участок такой траектории от точки $(0, 0)$ до точки $(0, y)$ изображающая точка проходит скачком.)

Когда система доопределена на прямых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, можно проследить любое ее частное решение на любом отрезке времени

и провести ее качественное исследование. Исследование сходно с исследованием в примере 1, поэтому ограничимся лишь изложением результатов, относящихся к предельным циклам, охватывающим состояние равновесия.

Возьмем на прямой $\varphi = 0$ две полуоси: полуось u — вниз от начала координат и полуось v — вверх от начала координат. На рис. 226 сверху изображены траектории, осуществляющие отображение $v(u)$ части полуоси u в полуось v (слева), и траектории, осуществляющие отображение $u(v)$ части полуоси v в полуось u (справа). Графики функций $v(u)$ и $u(v)$ приведены на том же рис. 226 внизу. Для $u < u_1$ функция $v(u)$ находится обычным способом, только с учетом того, что все v нужно сделать больше на величину скачка. Участок $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ весь переходит в одну точку v_0. Для этих u имеем $v(u) = \text{const} = v_0$. Аналогичные соображения можно высказать о функции $u(v)$.

Цикл соответствует точке пересечения линий $v(u)$ и $u(v)$. На рис. 227 показано изменение взаимного положения линий при изменении параметров. На рис. 228 — соответствующие превращения предельного цикла (соответствующие одна другой картинки на рис. 227 и 228 обозначены одинаковыми буквами). Очевидно, так же, как и в примере 1, расположение траекторий рис. 228 может быть изображено на цилиндре.

Для некоторой области в пространстве параметров линии имеют точку пересечения на кривых участках (рис. 228, *а*). Цикл не имеет кусков на прямых $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$. При соответствующем изменении параметров точка пересечения передвинется в точку

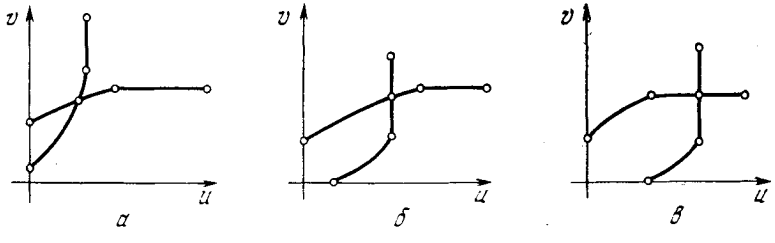


Рис. 227

излома линии $u(v)$. При этом цикл коснется прямой $\varphi = \pi$. При дальнейшем изменении параметров точка пересечения переходит на вертикальный участок линии (рис. 228, *б*). При этом на цикле появляется вертикальный участок на прямой $\varphi = \pi$, который изображающая точка проходит скачком, после чего некоторое время стоит в точке $(\pi, 0)$, прежде чем продолжит движение по циклу. В зависимости от дальнейшего изменения параметров возможны превращения двух типов: 1) концевая точка линии $u(v)$ попадает на кривой участок линии $v(u)$. При этом цикл влипает

в сепаратрису состояния равновесия $(\pi, 0)$, образующую петлю, и исчезает. 2) Точка пересечения переходит на горизонтальный участок линии $v(u)$ (рис. 228, *в*). На цикле при этом появляется

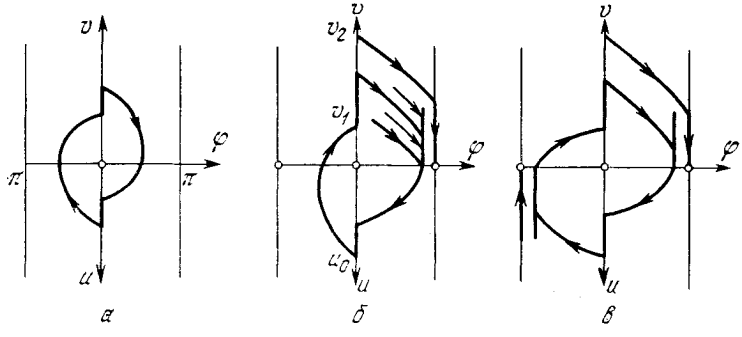


Рис. 228

вертикальный участок и на прямой $\varphi = -\pi$. При дальнейшем изменении параметров концевая точка линии $u(v)$ попадает на горизонтальный участок линии $v(u)$. Цикл влипает в сепаратрису состояния равновесия $(\pi, 0)$, образующую петлю, и исчезает.

ГЛАВА 20

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ И ГРУБОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ [39, 41, 42]

Введение. В уравнениях движения динамических систем, моделирующих поведение технических устройств, обычно бывает возможно наряду с параметрами системы выделить не содержащие параметры нормированные характеристики (синусоидальные, полигональные, релейные и т. д.), описывающие поведение отдельных элементов этого устройства. Выбор таких характеристик всегда в какой-то мере произволен и диктуется, с одной стороны, соответствием поведения характеристики модели поведению реальной характеристики изучаемого устройства, а с другой стороны, ограничен требованием получения такой системы уравнений, исследование которой может быть проведено с необходимой полнотой.

Удачный выбор характеристики (удачная аппроксимация) весьма важен для создания модели, пригодной для исследования.

При качественном исследовании динамических систем можно использовать переход от исходной модели к упрощенной или кусочно-интегрируемой, аппроксимируя характеристики в уравнениях движения. При этом возникает важный вопрос о допустимых отклонениях аппроксимирующих функций от реальных характеристик при сохранении необходимой близости между исходной и аппроксимирующей системой. Понятие необходимой близости не однозначно и определяется целями исследования. Естественным требованием при создании удобной модели за счет изменения аппроксимации будет при этом требование сохранения при изменении характеристик качественной структуры разбиения пространства параметров и фазового пространства исследуемой системы. Таким образом, возникает задача выяснить, в какой мере возможно изменять характеристики системы, не изменяя существенно общую картину зависимости поведения траекторий от параметров, и выяснить, что может происходить с пространством параметров системы при изменении характеристик. В общей постановке задача сводится к вопросу о сохранении или потере бифуркаций при переходе к аппроксимирующей системе. Возникающие здесь трудности связаны с тем, что не все бифуркации могут быть прослежены регулярными методами, и, кроме

того, для сшитых аппроксимирующих систем (кусочно-аналитических) могут возникать новые типы бифуркации, для которых еще нет полной классификации. Поэтому представляет интерес сравнительное рассмотрение конкретных динамических систем при разных аппроксимациях.

Дадим сначала общее определение. Будем рассматривать уравнения вида

$$\dot{x} = P[x, y, F_i(x), \lambda_k], \quad \dot{y} = Q[x, y, \psi_j(x), \lambda_k], \qquad (1)$$

где $F_i(x)$ и $\psi_j(x)$ — кусочно-непрерывные (в частном случае аналитические) характеристики системы и λ_k-параметры.

Определение. Пространство параметров λ_k системы (1) будем называть *грубым по отношению к классу характеристик* $F_i(x)$ и $\psi_j(x)$, если для всех характеристик этого класса остается неизменной качественная структура разбиения пространства параметров λ_k на области одинаковой (или сходной в некотором смысле) (см. гл. 17 и 18) структуры разбиения фазового пространства на траектории.

Задача выделения классов характеристик, по отношению к которым пространство параметров λ_k системы (1) будет грубым, сводится к задаче изучения бифуркаций, возможных в системе при изменении характеристик. Если при замене одной характеристики другой не исчезают какие-либо возможные бифуркации и не появляются новые, то система будет грубой в указанном выше смысле по отношению к этим характеристикам. В общем случае эта задача очень трудна и не существует регулярных методов для ее решения. Бифуркации, возможные в системе, в неодинаковой степени доступны для исследования. Простейшие из них характеризуются значениями некоторых величин, отнесенных к точке фазового пространства (таковы бифуркации сложных состояний равновесия или бифуркации, связанные с оценкой числа предельных циклов, появляющихся из состояния равновесия типа фокус или от петли сепаратрисы), другие требуют сведений о глобальном поведении траекторий и не могут быть получены регулярными методами (сюда относятся весьма сложные вопросы о существовании сепаратрис, идущих из седла в седло, и рождении двойных предельных циклов из сгущения траекторий).

Однако в некоторых случаях такие глобальные оценки могут быть получены при использовании специфики исследуемых уравнений или при использовании специально подобранных систем сравнения, и тогда поставленная задача допускает полное решение. Чаще, однако, оказывается возможным выделение таких классов характеристик, при которых можно обеспечить неизменность разбиения пространства параметров на области не тождественной, но лишь сходной в некотором смысле структуры.

Например, можно условиться не различать области пространства параметров, которым соответствуют разбиения фазового про-

странства, возможно, различающиеся лишь четным числом предельных циклов. Такая постановка задачи нередко бывает полезной, так как позволяет расширить класс характеристик, расширяет возможности разумного выбора аппроксимации и тем самым иногда возможности получения практически полного знания всех важнейших особенностей в работе устройства в зависимости от параметров. В то же время такой подход оставляет в стороне часто неразрешимую задачу прослеживания бифуркаций, связанных с двойным циклом. Мы проведем сравнительное рассмотрение качественной структуры при разных аппроксимациях на ряде задач. В качестве первой из этих задач возьмем классическую задачу динамики полета, которая в случае аналитической характеристики была рассмотрена в гл. 16. Именно, рассматривалась система

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= \rho - \cos\varphi = P, \\ d\rho/dt &= 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin\varphi) = Q. \end{aligned} \tag{2}$$

Выбор этой задачи обусловился тем, что в исходной системе возможен широкий набор бифуркаций (осуществляются все типы бифуркаций первой степени негрубости) и удалось строго установить структуру разбиения пространства параметров как для исходной системы (что до сих пор не было сделано), так и для аппроксимирующих систем. Здесь возникают различия в структуре разбиения пространства параметров и фазового пространства, позволяющие оценить влияние аппроксимаций на структуры разбиения и обнаружить, в частности, важную роль, которую играет «седловая величина» (см. гл. 9). Сохранение количественной близости характеристик не оказалось обязательным для сохранения качественной структуры разбиения фазового пространства и пространства параметров системы. Использование седловой величины при качественном исследовании сшитых систем опирается на возможность перенесения утверждений, касающихся условий устойчивости петли сепаратрисы (см. гл. 9) и рождения от нее предельных циклов, на неаналитические системы (см. гл. 17), содержащие петлю, в состав которой входит аналитическое седло.

§ 1. Рассмотрение системы (2) при аппроксимациях пилообразными функциями. Примем такую аппроксимацию (рис. 229):

$$\begin{aligned} \sin\varphi \sim s_2 &= \begin{cases} (-2/\pi)\varphi - 2, & [-\pi, -\pi/2], \\ (2/\pi)\varphi, & (-\pi/2, \pi/2], \\ (-2/\pi)\varphi + 2, & [\pi/2, \pi]; \end{cases} \\ \cos\varphi \sim c_2 &= \begin{cases} (2/\pi)\varphi + 1, & [-\pi, 0], \\ (-2/\pi)\varphi + 1, & [0, \pi]. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Состояния равновесия на полосе $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ будут $O_1(-\pi/2, 0)$, $O_2(\pi/2, 0)$, $O_3(\varphi_3, \rho_3)$, $O_4(\varphi_4, \rho_4)$, где

$$\varphi_3 = \frac{\pi(\lambda-\mu)}{2(1+\mu)}, \quad \rho_3 = \frac{1+\lambda}{1+\mu}, \quad \varphi_4 = \frac{\pi(\lambda-\mu)}{2(1-\mu)}, \quad \rho_4 = \frac{1-\lambda}{1-\mu},$$

O_1 — сшитое седло, O_2 — сшитый неустойчивый узел, O_3 — узел или фокус, O_4 — седло. В пространстве параметров на прямой $\lambda - \mu = 0$ сливаются точки O_3 и O_4, на прямой $\lambda = 1$ — точки O_4 и O_2.

1. Структура разбиения фазового пространства для точки $\lambda = \mu = 1$. При $\lambda = \mu = 1$ на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ совпадают

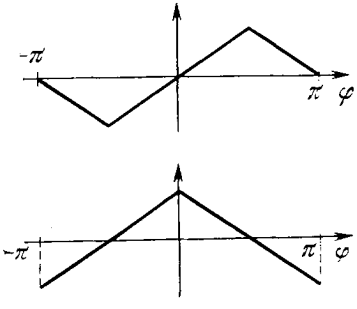


Рис. 229

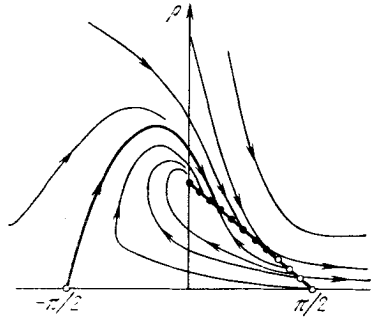


Рис. 230

изоклины вертикальных и горизонтальных наклонов, и возникает структура разбиения фазового пространства с отрезком покоя на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Интегральными кривыми, по которым движутся изображающие точки на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, будут экспоненты; $\rho = 1 - 2\pi^{-1}\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$ — отрезок покоя, устойчивый на интервале $0 < \varphi < (\pi - 1)/2$ и неустойчивый на интервале $(\pi - 1)/2 < \varphi < \pi/2$. В точке $((\pi - 1)/2, \pi^{-1})$ интегральная кривая $\rho = \pi^{-1}e^{\pi-1-2\varphi}$ касается отрезка покоя и при $\varphi = 0$ попадает в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов $(\pi^{-1}e^{\pi-1} > 2)$ и уходит в бесконечность. Предельных циклов нет. Все траектории при $t \to +\infty$ идут к устойчивой части отрезка покоя. Структура разбиения фазового пространства в окрестности отрезка покоя представлена на рис. 230.

2. Структура разбиения на прямой $\lambda = \mu$. При возрастании λ и μ от значения $\lambda = \mu = 1$ вдоль прямой отрезок покоя распадается, и на его концах возникают особые точки: $O_{34}(0, 1)$ — сшитая из фокуса и седла и $O_2(\pi/2, 0)$ — сшитый узел (неустойчивый). Изоклина горизонтальных наклонов располагается на интервале $0 < \varphi < \pi/2$ выше изоклины вертикальных наклонов, и сепаратриса седла O_1, заканчивавшаяся при $\lambda = \mu = 1$ на устойчивом куске отрезка покоя, превращается в траекторию, накручивающуюся на предельный цикл, охватывающий цилиндр (бес-

конечность неустойчива). Устойчивый предельный цикл появляется из траектории, примыкающей к отрезку покоя, и куска отрезка покоя.

При возрастании λ и μ вдоль прямой седло-фокус O_{34} превращается при $\mu=(1+2\sqrt{\pi})/\pi=\mu^*$ в седло-узел с устойчивой узловой областью. Обе ω-сепаратрисы сшитого седло-узла для μ, близких к μ^*, должны выходить из узла O_2. Для больших λ и μ предельных циклов нет, так как ω-сепаратриса, входящая в седло-узел, имеет всюду отрицательный наклон. Справедливость этого следует из того, что если взять точку $(\varphi_0, \eta_0>1)$ на ω-сепаратрисе, то при достаточно больших μ координата η_0 на прямой $\varphi=\varphi_0$ будет больше максимума изоклины горизонтальных наклонов $(\lambda+1)/\mu$, так как в области $\rho>1$ векторное поле поворачивается по часовой стрелке при возрастании μ вдоль прямой и при этом η_0 растет, а $(\lambda+1)/\mu\to 1$.

Качественные структуры, последовательно переходящие одна в другую при возрастании μ и λ вдоль прямой $\lambda=\mu$, будут эквивалентны некоторым представленным на рис. 168 гл. 16, § 4. Для любого μ из интервала $0<\mu<\mu^*$ структура разбиения фазового пространства эквивалентна изображенной на рис. 168, *II—III*, для $\mu^*<\mu<\mu_1$ — на рис. 168, *III*, для $\mu_1<\mu<\mu_2$ — на рис. 168, *IV*. Для $\mu_2<\mu<\infty$ расположение сепаратрис будет таким, как на рис. 168, *V*.

3. Структура разбиения на полупрямой $\mu=\pi(\lambda-1)+1>1$. При возрастании λ и μ от значений $\lambda=\mu=1$ вдоль полупрямой кусок изоклины на интервале $0<\varphi<\pi/2$ поворачивается вокруг точки $((\pi-1)/2, \pi^{-1})$, и отрезок покоя распадается с возникновением трех особых точек: $O_3(\varphi_3, \rho_3)$ — устойчивый фокус или узел, $O_4((\pi-1)/2, \pi^{-1})$ — седло с направлениями для сепаратрис, определяемыми уравнением $\pi^2k^2+2\pi(1+\mu)k+4=0$, и $O_2(\pi/2, 0)$ — сшитый узел (неустойчивый). Контактная кривая с кривыми вырожденной системы ($\mu=\lambda=1$) при изменении параметров вдоль прямой будет $\rho=\pi^{-1}$ и, следовательно, всегда проходит через седло. Векторное поле в области $\rho>1$ поворачивается при возрастании μ по часовой стрелке, и поэтому ω-сепаратриса, идущая в седло по направлению $k<-2\pi^{-1}$, не может пересекать интегральную кривую $\rho=\pi^{-1}e^{\pi-1-2\varphi}$ вырожденной системы, касающуюся отрезка покоя как раз в той точке, в которой при $\mu>1$ возникает седло, и входящую в седло по направлению $k=-2\pi^{-1}$. Сепаратриса пересекает ось $\varphi=0$ в точке $\rho^*>\pi^{-1}e^{\pi-1}>2$ и входит в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов. Предельных циклов, охватывающих цилиндр, нет при любых значениях λ и μ на рассматриваемой полупрямой. Структура разбиения фазового пространства для всех точек этой полупрямой будет одинакова и эквивалентна изображенной на рис. 169, *8* (§ 4 гл. 16).

4. Разбиение пространства параметров на области с различными качественными структурами фазового пространства. Проследим за сменой структур и бифуркациями при изменении μ для фиксированного $\lambda = \lambda_0$ из интервала $1 < \lambda < \mu_1$. При $\mu = 0$ качественная картина разбиения фазового пространства эквивалентна представленной на рис. 169, *1*. Бесконечность устойчива. Для μ из интервала $0 < \mu < \lambda_0$ качественная картина будет эквивалентна представленной на рис. 169, *2*. Бесконечность неустойчива. Из нее появился устойчивый предельный цикл. При $\mu = \lambda_0$ в точке (0, 1) появляется сшитое вырожденное состояние равновесия (если $\mu < \mu^*$) или сшитый седло-узел с устойчивой узловой областью (если $\mu > \mu^*$). Качественная картина эквивалентна представленной на рис. 168, *II—III* или 168, *III* соответственно. При дальнейшем возрастании μ сложная сшитая особая точка разделяется на две простые: седло $O_4(\varphi_4, \rho_4)$ и устойчивый фокус (узел) $O_3(\varphi_3, \rho_3)$. Качественная картина эквивалентна представленной на рис. 169, *5*. Обе ω-сепаратрисы седла O_4 идут в точку O_2 (неустойчивый узел).

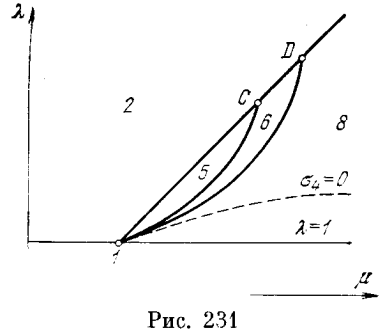


Рис. 231

При $\mu \geqslant \pi(\lambda - 1) + 1$ одна из ω-сепаратрис седла O_4 уходит в бесконечность. Качественная картина эквивалентна представленной на рис. 169, *8*. Между линиями $\lambda = \mu$ и $\mu = \pi(\lambda - 1) + 1$ при возрастании μ осуществляются две бифуркации сепаратрис: при некотором $\mu = \mu^{(1)}(\lambda_0)$ возникает сепаратриса, идущая из седла O_4 в седло O_1, и при $\mu = \mu^{(2)}(\lambda_0) > \mu^{(1)}(\lambda_0)$ возникает петля сепаратрисы вокруг цилиндра.

Характер бифуркации при возникновении и разрушении петли сепаратрисы определяется знаком седловой величины

$$\sigma_4 = (P'_\varphi + Q'_\rho)_4 = \frac{2}{\pi(\mu - 1)}(\pi\mu + \mu - \pi\mu\lambda - 1).$$

Кривая $\sigma_4 = 0$ касается прямой $\mu = \pi(\lambda - 1) + 1$ в точке $\lambda = \mu = 1$ и располагается справа от нее. Слева от прямой для бифуркационных значений параметров седловая величина имеет отрицательное значение. С возрастанием μ при возникновении петли сепаратрисы к петле стягивается устойчивый предельный цикл.

При фиксированном $\lambda = \lambda_1$ из интервала $\mu_1 < \lambda < \mu_2$ при возрастании μ на интервале $\lambda_1 < \mu < \pi(\lambda_1 - 1) + 1$ осуществляется лишь одна бифуркация: при $\mu = \mu^{(2)}(\lambda_1)$ возникает петля сепаратрисы вокруг цилиндра, к которой стягивается устойчивый предельный цикл. При фиксированном $\lambda = \lambda_2 > \mu_2$ при изменении μ

на интервале $\lambda_2 < \mu < \infty$ изменения качественных структур не происходит.

Кривые $\mu = \mu^{(1)}(\lambda)$ и $\mu = \mu^{(2)}(\lambda)$, соответствующие негрубым структурам, качественно эквивалентным изображенным на рис. 169, *5—6* и 169, *6—8*, образуют бифуркационные кривые, начинающиеся в точке $\lambda = \mu = 1$ и заканчивающиеся на прямой $\lambda = \mu$ соответственно в точках $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$.

На рис. 231 представлена без соблюдения масштабов схема разбиения пространства параметров $\mu \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 1$. Характер разбиения пространства параметров существенно отличается от разбиения для исходной системы (2) (см. рис. 167). В частности, здесь отсутствует область существования двух предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр. (Номера областей на рис. 231 соответствуют номерам качественных структур рис. 169.)

§ 2. Рассмотрение системы (2) при аппроксимации, включающей отрезок параболы. Рассмотрим систему (2) при аппроксимациях

$$\sin\varphi \sim s_3 = \begin{cases} (-2/\pi)\varphi - 2, & [-\pi, -\pi/2], \\ (2/\pi)\varphi, & [-\pi/2, \pi/2], \\ (-2/\pi)\varphi + 2, & [\pi/2, \pi]; \end{cases}$$

$$\cos\varphi \sim c_3 = \begin{cases} (2/\pi)\varphi + 1, & [-\pi, 0], \\ 1 - (4/\pi^2)\varphi^2, & [0, \pi/2], \\ (-2/\pi)\varphi + 1, & [\pi/2, \pi] \end{cases} \qquad (4)$$

(см. верхний рис. 229 и рис. 232), отличающихся от (3) тем, что при аппроксимации $\cos\varphi$ отрезок прямой на интервале $(0, \pi/2)$ заменен параболой. Такое изменение делает невозможным сложную бифуркацию с совпадением изоклин на отрезке и существенно меняет общую картину возможных бифуркаций.

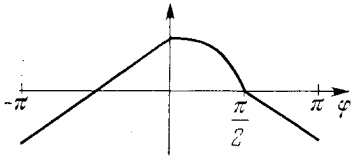


Рис. 232

Состояния равновесия на полосе $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ будут $O_1(-\pi/2, 0)$ — сшитое седло, $O_2(\pi/2, 0)$ — сшитый неустойчивый узел, $O_3(\varphi_3, \rho_3)$ — узел или фокус, $O_4(\varphi_4, \rho_4)$ — седло. Здесь φ_4 — больший корень уравнения

$$\varphi^2 - \frac{\pi}{2\mu}\varphi + \frac{\pi^2(\lambda - \mu)}{4\mu} = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,$$

а φ_3 — либо меньший его корень, если $\lambda - \mu > 0$, либо определяется по формуле, приведенной в начале § 1, если $\lambda - \mu < 0$. Величины ρ_4 и ρ_3 находятся из уравнений соответствующих изоклин.

В пространстве параметров на кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0$ $(\mu > 1/2)$ сливаются точки O_3 и O_4; на прямой $\lambda = 1$ — точки O_4

и O_2. В плоскости параметров границей области существования только двух точек (O_1 и O_2) будет отрезок прямой $\lambda = 1$, $0 < \mu < 1/2$ и ветвь кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0$, $\mu > 1/2$.

1. Рождение предельного цикла из фокуса. Фокус O_3 меняет устойчивость на кривой

$$\sigma_3 \equiv (P'_\varphi + Q'_\rho)_3 = \frac{2+\pi}{\mu\pi}\left(1 - \sqrt{1 - 4\mu\lambda + 4\mu^2}\right) - 2\lambda = 0,$$

начинающейся в точке $(\lambda = 1,\ \mu = (2+\pi)/(2+2\pi))$ и заканчивающейся на кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0$, которой она касается в точке B:

$$\mu = [(4+\pi)/4\pi]^{1/2} = \mu_0, \quad \lambda = (2+\pi)/[\pi(4+\pi)]^{1/2}.$$

При переходе через кривую $\sigma_3 = 0$ в направлении возрастающих μ фокус из неустойчивого становится устойчивым и из него появляется неустойчивый предельный цикл (первая ляпуновская величина для точек кривой $\sigma_3 = 0$ имеет значение

$$\alpha_3 = \mu\frac{2+\pi}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi\lambda}}\frac{(2+\pi)^2 + 4\pi^2\lambda\mu}{(2+\pi-2\pi\lambda\mu)^{3/2}} > 0\Big).$$

2. Структура разбиения фазового пространства на граничной кривой, разделяющей области двух и четырех точек. Точкам на кривой $4\mu^2 - 4\lambda\mu + 1 = 0$ $(\mu > 1/2)$ соответствует фазовое пространство с особой точкой седло-узел, возникшей от слияния точек O_3 и O_4. При $\mu = \mu_0$ совпадают направления, по которым траектории могут идти в особую точку, и седло-узел становится вырожденным. При переходе через значение $\mu = \mu_0$ седло-узел с неустойчивой узловой областью $(\mu < \mu_0)$ переходит в седло-узел с устойчивой узловой областью $(\mu > \mu_0)$. Для малых μ сепаратриса седла O_1 накручивается на предельный цикл, охватывающий цилиндр; ω-сепаратриса седло-узла для больших μ имеет всюду отрицательный наклон и, следовательно, предельных циклов нет. При возрастании μ вдоль кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0$, $\mu > 1/2$, последовательность качественных картин, переходящих одна в другую, будет такая же, как на рис. 168.

3. Разбиение пространства параметров на области с различной качественной структурой фазового пространства. Обращение в нуль седловой величины

$$\sigma_4 \equiv (P'_\varphi + Q'_\varphi)_4 = \frac{2+\pi}{\mu\lambda}\left(1 + \sqrt{1 - 4\lambda\mu + 4\mu^2}\right) - 2\lambda$$

происходит на кривой, касающейся граничной кривой в точке B и имеющей асимптоту $\lambda = 1 + 2/\pi$. Седловая величина отрицательна выше кривой $\sigma_4 = 0$.

Отправляясь от известных структур разбиения фазового пространства на граничной кривой, можно проследить смену качественных структур при возрастании μ, повторяя почти дословно

рассуждения, проведенные в гл. 16, § 4, так как при изменении μ осуществляется монотонный поворот поля направлений, а принятая аппроксимация (4) не изменяет существенно поведения величин σ_3, α_3 и σ_4, определяющих характер возможных бифуркаций в окрестности фокуса и петли сепаратрисы. Для аппроксимирующей системы, как и для исходной системы (2), при $(\lambda+1)/\mu<1$ предельных циклов нет и все бифуркации осуществляются на отрезке $\lambda=$ $=\text{const}$ между граничной кривой и прямой $\mu=\lambda+1$. Характер разбиений пространства параметров и фазового пространства при аппроксимациях (4) остается таким же, как и для исходной системы (2) (рис. 233). (Ср. рис. 233 и 167.)

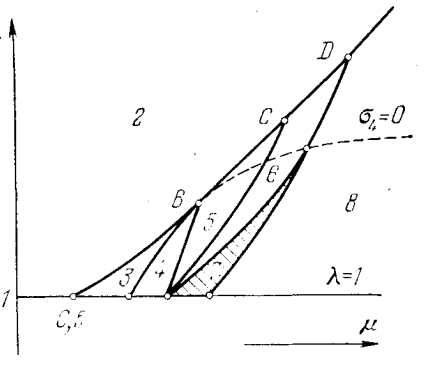


Рис. 233

§ 3. Рассмотрение системы (2) при аппроксимациях кусочно-постоянной для $\sin\varphi$ и пилообразной для $\cos\varphi$ функциями. Полагаем

$$\sin\varphi\sim s_4=\begin{cases}-1, & (-\pi,0),\\ 1, & (0,\pi),\end{cases}\qquad \cos\varphi\sim c_4=\begin{cases}2\pi^{-1}\varphi+1, & [-\pi,0],\\ -2\pi^{-1}\varphi+1, & [0,\pi]\end{cases}\tag{5}$$

(см. рис. 234 и рис. 229 нижний).

Заметим, что это — интегрируемая аппроксимация. Правая часть системы (2) при аппроксимациях (5) терпит разрыв на линиях сшивания. Кроме прямой $\rho=0$, роль изоклины горизонтальных наклонов выполняет ломаная, состоящая из кусков интегральных прямых $\rho=(\lambda+1)/\mu=\rho_3$, $(-\pi,0)$, $\rho=(\lambda-1)/\mu=\rho_4$, $(0,\pi)$ и отрезков между ними $\varphi=0$, $\pm\pi$, $(\lambda-1)/\mu<\rho<(\lambda+1)/\mu$, на которых производная меняет знак. При $(\lambda-1)/\mu>1$ на полосе $-\pi<\varphi<\pi$ будет только два состояния равновесия: $O_1(-\pi/2,0)$ — седло и $O_2(\pi/2,0)$ — неустойчивый узел. При $(\lambda-1)/\mu=1$ изоклины смыкаются и возникает сшитая сложная особая точка $(0,1)$, качественно эквивалентная вырожденному седло-узлу без узловой области (гл. 4) (рис. 235). При $(\lambda-1)/\mu<1$ сложная особая точка распадается на две: $O_3(0,1)$ — сшитый фокус и $O_4(\varphi_4,\rho_4)$ — седло. При $(\lambda+1)/\mu\leqslant 1$

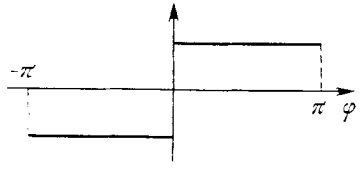


Рис. 234

фокус O_3 превращается в устойчивый узел $O_3(\varphi_3, \rho_3)$. Границей области существования двух и четырех точек будет прямая $\lambda - \mu - 1 = 0$. На прямой $\lambda = 1$ сливаются точки O_4 и O_2.

1. Рождение предельного цикла из сшитого фокуса. Сшитый фокус будет устойчив, если будут иметь разные знаки величины

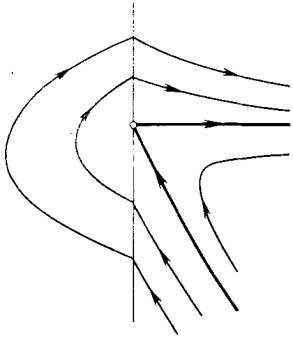


Рис. 235

$$\alpha_2 \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{F'''_{2\rho}(0,1)}{F''_{2\rho}(0,1)} - \frac{F'''_{1\rho}(0,1)}{F''_{1\rho}(0,1)}\right),$$

$$Q_1(0,1) = 2(\lambda - \mu + 1).$$

Здесь $F_1(\varphi, \rho) = C_1$ $(\varphi \leqslant 0)$ и $F_2(\varphi, \rho) = C_2$ $(\varphi \geqslant 0)$ — общие интегралы системы (см. гл. 17, § 4, п. 2).

Сшитый фокус меняет устойчивость на кривой

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3}\,\frac{(1+\pi)\mu - \lambda}{(\lambda - \mu + 1)(\lambda - \mu - 1)} = 0,$$

начинающейся в точке $(\mu = (1+\pi)^{-1}, \lambda = 1)$ и заканчивающейся на граничной прямой в точке $(\mu = \pi^{-1}, \lambda = (1+\pi)\pi^{-1})$.

При переходе через кривую $\alpha_2 = 0$ в направлении возрастающих μ сшитый фокус из неустойчивого становится устойчивым, и из него появляется неустойчивый предельный цикл (величина α_4 — аналог первой ляпуновской величины L_1 — для точек бифуркационной прямой $(1+\pi)\mu - \lambda = 0$ положительна).

2. Разбиение пространства параметров на области с различной качественной структурой фазового пространства. Вдоль всей граничной кривой характер сложной особой точки и структура разбиения фазового пространства на траектории сохраняются. Бесконечность неустойчива; α-сепаратриса седла O_1 не может идти в особую точку и накручивается на устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр. Качественная картина разбиения на траектории на всей граничной кривой эквивалентна изображенной на рис. 168, *II—III*.

При $(\lambda + 1)/\mu < 1$ ω-сепаратриса седла O_4, входящая в особую точку по направлению $k = -2\pi^{-1} - 2\mu$, попадает при $\varphi = 0$ в область отрицательных наклонов и идет в бесконечность. Предельных циклов нет. Качественная картина эквивалентна изображенной на рис. 169, *8*. Обращение в нуль седловой величины

$$\sigma_4 = (P'_\varphi + Q'_\rho)_4 = 2\pi^{-1}(1 + \pi - \lambda\pi)$$

происходит на прямой $\lambda = (1+\pi)/\pi$, смыкающейся с линией, на которой фокус O_3 меняет устойчивость, в точке пересечения с граничной прямой $\lambda - \mu - 1 = 0$. Седловая величина отрицательна выше прямой $\sigma_4 = 0$.

Отправляясь от известных структур разбиения фазового пространства на граничной прямой и в области $\lambda - \mu + 1 < 0$, опять легко проследить все бифуркации и смену качественных структур при монотонном повороте векторного поля с возрастанием параметра μ.

Последовательность качественных структур, переходящих одна в другую при возрастании μ, эквивалентна представленным на рис. 169 последовательностям грубых структур *2—8* (если $1 < \lambda < 1 + \pi^{-1}$) или структур *2, 5, 6, 8* (если $1 + \pi^{-1} < \lambda$). Негрубые структуры, разделяющие перечисленные грубые, также качественно эквивалентны негрубым, представленным на рис. 169, за исключением структур *2—3* и *2—5* (последней нет на рис. 169), которые должны быть заменены структурой *II—III* рис. 168 (вместо седло-узла с неустойчивой или устойчивой узловой областью будет вырожденный седло-узел).

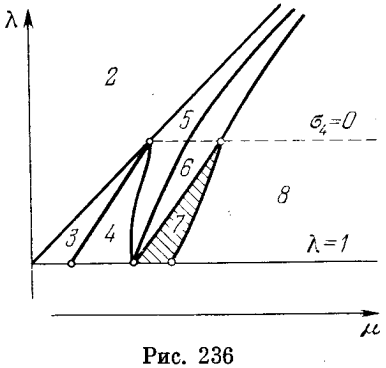


Рис. 236

Качественная структура разбиения пространства параметров отличается от структуры разбиения для исходной системы (2) лишь тем, что бифуркационные кривые *5—6* и *6—8* не пересекаются с граничной кривой *2—5* и уходят в бесконечность (рис. 236).

Малым изменением аппроксимации (5) можно получить картину разбиения пространства параметров, качественно совпадающую с разбиением для исходной системы (2). Рассмотрим систему (2) при аппроксимациях

$$\sin\varphi \sim s_5 = \begin{cases} -1, & (-\pi, -\varphi_0), \\ \dfrac{\varphi}{\varphi_0}, & [-\varphi_0, \varphi_0], \\ +1, & [\varphi_0, \pi]; \end{cases} \qquad (6)$$

$$\cos\varphi \sim c_5 = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\varphi + 1, & [-\pi, 0], \\ -\dfrac{2}{\pi}\varphi + 1, & [0, \pi] \end{cases}$$

(см. рис. 237 и 229 нижний), отличающихся от (5) аппроксимацией $\sin\varphi$ на интервале $(-\varphi_0, \varphi_0)$. При малом φ_0 аппроксимация (6) близка к (5). Точки $O_1(-\pi/2, 0)$ и $O_2(\pi/2, 0)$ будут иметь такой же характер, как и при аппроксимации (5). На прямой $\lambda = 1$ сливаются точки O_4 и O_2. Граничной кривой, на которой сливаются точки O_3 и O_4, будет ломаная, составленная из двух звеньев: отрезка прямой $\lambda = (1 - 2\pi^{-1}\varphi_0)\mu + 1$ для $0 < \mu < (\pi/2)\varphi_0^{-1}$

и полупрямой $\lambda = \mu$ для $\mu > (\pi/2)\varphi_0^{-1}$. Вдоль граничной кривой характер сшитой сложной особой точки и качественные структуры разбиения на траектории будут изменяться.

Если φ_0 невелико, то сложная особая точка $O_{34}(\varphi_0, (\lambda-1)/\mu)$ на интервале $0 < \mu < (\pi/2)\varphi_0^{-1}$ сшивается из седла O_4 и фокуса или узла O_3. Для $\mu > (\pi/2)\varphi_0^{-1}$ сложная особая точка $O_{34}(0, 1)$ будет седло-узлом. Для φ_0, удовлетворяющих условию $1 + \pi^{-1} < 1/(2\varphi_0)$, граничная точка $\lambda = \lambda^*$, разделяющая седло-узлы и седло-фокусы, лежит в интервале $1 + \pi^{-1} < \lambda^* < (\pi/2)\varphi_0^{-1}$.

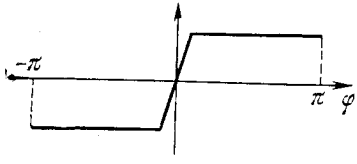


Рис. 237

Если $1 < \lambda < \lambda^*$ и, следовательно, точка $O_{34}(\varphi_0, (\lambda-1)/\mu)$ — седло-фокус, то α-сепаратриса седла O_1 не может идти в особую точку и должна накручиваться на устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр (бесконечность неустойчива). Качественная картина эквивалентна представленной на рис. 168, *II—III*. Для больших $\mu = \lambda$ ω-сепаратриса седло-узла $O_{34}(0, 1)$ имеет всюду отрицательный наклон. Предельных циклов нет. Качественная картина эквивалентна представленной на рис. 168, *V*. При возрастании параметра μ вдоль граничной кривой осуществляются все релятивно-грубые и бифуркационные структуры, представленные на рис. 168 от *II—III* до *V*.

3. Разбиение пространства параметров на области с различными качественными структурами фазового пространства. Фокус $O_3(\varphi^*, \rho^*)$ всегда устойчив, если он расположен слева от оси $\varphi = 0$ $(\lambda < \mu)$, и может менять устойчивость, если расположен справа $(\mu < \lambda < (1 - 2\pi^{-1}\varphi_0)\mu + 1)$.

Если $\varphi^* > 0$, то

$$\sigma_3 = (P'_\varphi + Q'_\rho)_3 = \frac{2}{\pi} - 2\lambda - 4\mu\rho^* = \frac{2}{\pi} - 2\mu\rho^* = \frac{2\left[2\varphi_0\pi\lambda\mu - (2\varphi_0 + \pi^2)\mu + \pi\right]}{\pi(\pi - 2\varphi_0\mu)},$$

$$\varphi^* = \frac{\pi\varphi_0(\lambda - \mu)}{\pi - 2\varphi_0\mu}, \quad \rho^* = \frac{\pi - 2\varphi_0\lambda}{\pi - 2\varphi_0\mu}.$$

Фокус меняет устойчивость на кривой, начинающейся в точке $(\lambda = 1, \mu = \pi[\pi^2 - (2\pi - 2)\varphi_0]^{-1})$, и заканчивается на граничной кривой в точке, где $\lambda = 1 + \pi^{-1}$. При переходе через кривую $\sigma_3 = 0$ в направлении возрастающих μ фокус из неустойчивого становится устойчивым.

Обращение в нуль седловой величины

$$\sigma_4 = (P'_\varphi + Q'_\rho)_4 = \frac{2}{\pi}(1 + \pi - \pi\lambda)$$

происходит на прямой $\lambda = 1 + \pi^{-1}$, смыкающейся с линией, на которой фокус O_3 меняет устойчивость, в точке пересечения с граничной кривой $\lambda = (1 - 2\pi^{-1}\varphi_0)\mu + 1$.

Отправляясь от известных структур разбиения фазового пространства на граничной кривой (структуры рис. 168 от *II—III* до *V*) и в области $\lambda - \mu + 1 < 0$ (структура рис. 169, *8*), можно проследить все бифуркации и смены структур при монотонном повороте поля с возрастанием μ.

Качественная структура разбиения пространства параметров (рис. 238) не отличается от структуры разбиения исходной системы (2) (см. рис. 167).

Структуры, соответствующие внутренним точкам областей разбиения пространства параметров, эквивалентны структурам в областях разбиения для системы (2).

Для системы с аппроксимацией (6) возникает одна особая бифуркация. Точкам кривой $\sigma_3 = 0$ на полосе $0 < \varphi < \varphi_0$ соответствует особая точка типа центр в точке O_3. При возрастании μ и

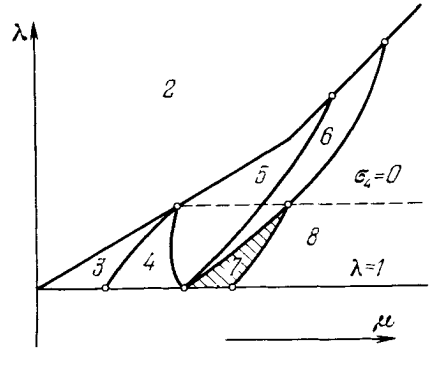


Рис. 238

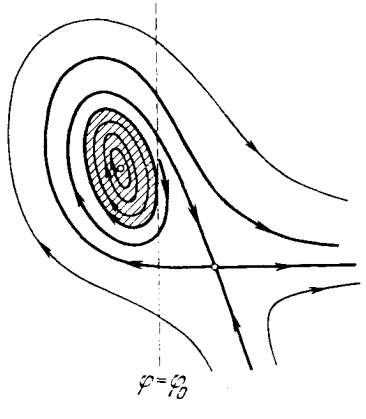


Рис. 239

перемене знака величины σ_3 неустойчивый предельный цикл появляется из границы области, заполненной замкнутыми кривыми. Точкам кривой $\sigma_3 = 0$ соответствует разбиение в окрестности состояний равновесия O_3 и O_4, представленное на рис. 239.

Замечание. Область замкнутых кривых в окрестности точки O_3 не может иметь своей границей сшитую петлю сепаратрисы седла O_4, так как седловая величина в седле отлична от нуля. В возможности осуществления структуры разбиения, представленной на рис. 239, проявляется неаналитичность правых частей системы при аппроксимации (6).

Если φ_0 не мало, то при аппроксимациях (6) изменением параметра φ_0 можно изменить поведение величин σ_3 и σ_4 таким

образом, что исчезнут условия, делавшие неизбежным появление областей существования двух предельных циклов, охватывающих цилиндр. При возрастании φ_0 до значения $\varphi_0 = \pi/2$ в пространстве $(\mu > 0,\ \lambda > 1)$ исчезает область, в которой возникновение петли сепаратрисы происходит при положительном значении седловой величины σ_4.

При $\varphi_0 > \pi^2(\pi+1)^{-1}/2$ кривая $\sigma_3 = 0$ будет состоять из куска гиперболы

$$2\varphi_0\pi\lambda\mu - (2\varphi_0 + \pi^2)\mu + \pi = 0$$

между прямой $\lambda = 1$ и точкой $\lambda = \mu = (\pi/2)\varphi_0^{-1}$ на изломе граничной кривой. Кривая $\sigma_4 = 0$ будет состоять из куска этой же гиперболы в интервале $(\pi/2)\varphi_0^{-1} < \lambda < 1 + \pi^{-1}$ (седло O_4 — в интервале $0 < \varphi < \varphi_0$) и примыкающей к нему полупрямой $\lambda = 1 + \pi^{-1}$, $\mu > (\pi - 2\varphi_0)^{-1}$ (седло — в интервале $\varphi_0 < \varphi < \pi/2$).

При $\varphi_0 \to \pi/2$ граничная кривая переходит в ломаную $\lambda = 1$ $(0 < \mu < 1)$, $\lambda = \mu$ $(\mu > 1)$; кривая $\sigma_3 = 0$ уходит за границу рассматриваемой области $\lambda > 1$, а кривая $\sigma_4 = 0$ превращается в ветвь гиперболы $\pi\lambda\mu - \pi\mu - \mu + 1 = 0$ и, следовательно, совпадает с кривой $\sigma_4 = 0$, полученной при аппроксимациях (3). Разбиение пространства параметров будет качественно эквивалентно разбиению при аппроксимациях (3) (см. рис. 231).

§ 4. Исследование роли аппроксимаций для уравнения маятникового типа. Уравнение

$$\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + F(\varphi) = \gamma \qquad (1)$$

представляет интерес для ряда задач механики, электротехники, теории фазовой автоподстройки частоты и т. д. при различных характеристиках $F(\varphi)$.

Мы покажем, что если функция $F(\varphi)$ дифференцируемая, периодическая с периодом 2π, кусочно-монотонная с двумя экстремумами на периоде ($|\operatorname{exstr} F(x)| = 1$) и такая, что

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi = 0, \qquad (2)$$

то пространство параметров $\gamma > 0$, $h > 0$ будет грубым по отношению к классу характеристик $F(\varphi)$.

Пространство параметров разбивается на три области, соответствующие трем возможным грубым разбиениям на траектории фазового пространства $(\varphi, \dot{\varphi})$. Различным $F(\varphi)$ соответствует

лишь различное расположение на плоскости параметров бифуркационных кривых на интервале $0 < \gamma < 1$ (рис. 240).

Уравнению (1) эквивалентна система

$$d\varphi/dt = y \equiv P, \quad dy/dt = \gamma - hy - F(\varphi) \equiv Q \tag{3}$$

или уравнение

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\gamma - hy - F(\varphi)}{y}. \tag{4}$$

Будем рассматривать (3) и (4) на фазовом цилиндре $-\pi \leqslant \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (прямые $\varphi = \pm\pi$ отождествляются). Два состояния равновесия (3) или две особые точки (4) располагаются на оси $y = 0$ и для любых характеристик класса $F(\varphi)$ будут фокус и

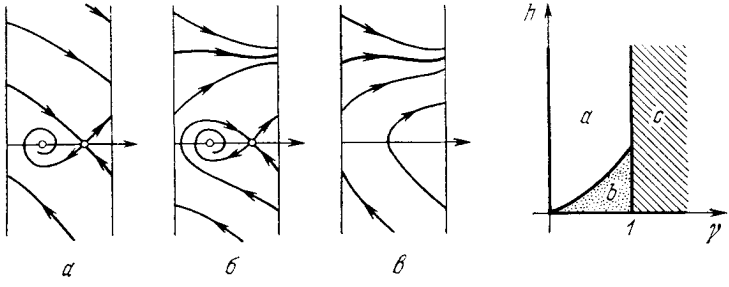


Рис. 240

седло. Характер состояний равновесия определяется по корням характеристического уравнения и будет зависеть от знака $F'(\varphi)$ в соответствующей точке. Производная $F'(\varphi)$ в двух соседних особых точках имеет разные знаки. Для $h > 0$ фокус устойчивый. При $\gamma = 1$ особые точки сливаются, образуя особую точку типа седло-узел.

Критерий Дюлака (см. гл. 6) позволяет сделать исчерпывающие высказывания о бифуркациях, связанных с предельными циклами. Так как величина $P'_\varphi + Q'_y \equiv -h$ не меняет знака в рассматриваемой области пространства параметров, то не существует предельных циклов, охватывающих состояние равновесия, и не может быть более одного предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр. Бифуркации, связанные с появлением предельного цикла из сгущения траекторий (связанные с рождением двойного предельного цикла), для рассматриваемого класса характеристик невозможны.

Условие (2) позволяет утверждать, что бифуркация, связанная с петлей сепаратрисы, возможна только в верхнем полуцилиндре ($y > 0$). В самом деле, если существует замкнутый контур, составленный из интегральных кривых уравнения (4), то

должно быть

$$\int_0^{2\pi} [\gamma - hy(\varphi) - F(\varphi)]\, d\varphi \equiv \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d[y(\varphi)]^2 = 0$$

или в силу (2)

$$\int_0^{2\pi} [\gamma - hy(\varphi)]\, d\varphi = 0,$$

но это невозможно при $y(\varphi) < 0$ и положительных h и γ. Каждая траектория системы (3) на нижнем полуцилиндре пересекает ось $y = 0$ (если только она не будет ω-сепаратрисой седла).

Теперь остается установить для характеристик рассматриваемого класса возможность бифуркаций, связанных с появлением предельного цикла из петли сепаратрисы в верхнем полуцилиндре.

Для определенности выберем так начало отсчета по координате φ, чтобы для характеристики $F(\varphi)$ выполнялись условия $F(-\pi) = 0$, $F'(-\pi) < 0$ (для системы (3) это всегда возможно). Другой корень уравнения $F(\varphi) = 0$ обозначим φ_0.

Введем систему сравнения (5)

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma - hy - \Phi(\varphi),$$
$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} -1, & -\pi < \varphi < \varphi_0, \\ 0, & \varphi_0 < \varphi < \pi. \end{cases} \tag{5}$$

Характеристика $\Phi(\varphi)$ расположена ниже характеристики $F(\varphi)$ системы (3). Векторное поле системы (5) повернуто по отношению к векторному полю системы (3) на положительный угол на верхнем полуцилиндре.

Качественная структура разбиения фазового пространства и пространства параметров системы сравнения (5) могут быть легко получены. Для системы (5) при $h > 0$ и $\gamma > 0$ существует лишь одна структура разбиения фазового пространства на траектории. Все траектории идут из бесконечности к устойчивому предельному циклу на верхнем полуцилиндре, расположенному в полосе $(\gamma + 1)/h < \varphi < \gamma/h$.

Проследим поведение траекторий системы (3) на верхнем полуцилиндре, используя сведения о поведении траекторий системы (3) при $h = 0$ и систему сравнения (5).

Рассмотрим разбиение на траектории для системы (3) при $h = 0$ $(0 < \gamma < 1)$. Уравнение (4) интегрируется. На фазовом цилиндре две особые точки: $(y = 0, \varphi = \varphi_1)$ (центр) и $(y = 0, \varphi = \varphi_2)$ (седло); φ_1, φ_2 — корни уравнения $\gamma - F(\varphi) = 0$ $(\varphi_2 >$

$> \varphi_1$). Уравнение сепаратрис, проходящих через седло, будет

$$y^2 = 2\gamma(\varphi - \varphi_2) - 2\Phi(\varphi), \quad \Phi(\varphi) = \int_{\varphi_2}^{\varphi} F(\varphi)\, d\varphi. \tag{6}$$

Функция $\Phi(\varphi)$ — периодическая с периодом 2π, кусочно-монотонная с двумя экстремумами на периоде в точках $\varphi = -\pi$ ($\varphi = \pi$) и $\varphi = \varphi_0$, обращающаяся в нуль в точках φ_2 и $\varphi_{2'}$ ($-\pi < \varphi_{2'} < \varphi_2$).

Уравнение

$$\gamma(\varphi - \varphi_2) - \Phi(\varphi) = 0,$$

кроме двойного корня $\varphi = \varphi_2$, всегда имеет при $\gamma \neq 0$ ($0 < \gamma < 1$) единственный простой корень $\varphi = \varphi^*$ ($-\pi < \varphi_{2'} < \varphi^* < \varphi_2$). Поэтому сепаратриса (6) при $0 < \gamma < 1$ образует петлю, охватывающую состояние равновесия $\varphi = \varphi_1$. Отметим, что α-сепаратриса седла на верхнем полуцилиндре не может возвратиться в то же седло и, накручиваясь на цилиндр, уходит в бесконечность (при $h = 0$ бесконечность устойчива).

Лишь при $\gamma = 0$ будет $\varphi^* = \varphi_{2'} = -\pi$ и сепаратриса образует петлю, охватывающую цилиндр. Для любого $\gamma \neq 0$ ($0 < \gamma < 1$) всегда можно выбрать столь малое h, что α-сепаратриса седла на верхнем полуцилиндре также будет накручиваться на цилиндр. Так как при $h > 0$ бесконечность для системы (3) неустойчива, то отсюда следует существование для малых h устойчивого предельного цикла, охватывающего цилиндр (единственного в силу критерия Дюлака) (рис. 240, *б*).

Для больших h структуру разбиения фазового пространства на траектории можно установить, используя систему сравнения (5). На верхнем полуцилиндре изображающая точка, двигающаяся по траектории системы (3), слева направо пересекает траектории системы (5) сверху вниз. Пусть $y = \eta$ есть точка пересечения ω-сепаратрисы седла на верхнем полуцилиндре с прямой $\varphi = \varphi_1$. Если выбрать h так, чтобы верхний край полосы, содержащий предельный цикл системы (3), лежал ниже прямой $y = \eta$ и, следовательно, выполнялось условие $(\gamma + 1)/h < \eta$, то ω-сепаратриса седла на верхнем полуцилиндре попадет в область (выше полосы, содержащей предельный цикл системы (5)), заполненную траекториями, пересекающими траектории системы (5) сверху вниз. В этом случае предельный цикл системы (3) не может существовать. Такой выбор h при $0 < \gamma < 1$ всегда возможен, так как с возрастанием h векторное поле поворачивается по часовой стрелке и, следовательно, η растет (рис. 240, *а*).

Из сравнения структур разбиения фазового пространства для малых и для больших h следует существование при $0 < \gamma < 1$ бифуркационной кривой, для точек которой α- и ω-се-

паратрисы на верхнем полуцилиндре образуют петлю, охватывающую цилиндр. Эта кривая будет однозначной по h для $0 < \gamma < 1$, так как монотонному изменению h соответствует монотонный поворот векторного поля на верхнем полуцилиндре. Бифуркационная кривая начинается в точке $h = \gamma = 0$.

При $\gamma = 1$ на оси $y = 0$ — сложная особая точка седло-узел. Существует единственное значение $h = h_0$, при котором α- и ω-сепаратрисы седло-узла образуют петлю, охватывающую цилиндр. При $0 < h < h_0$ существует устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр; при $h_0 < h < \infty$ все траектории имеют

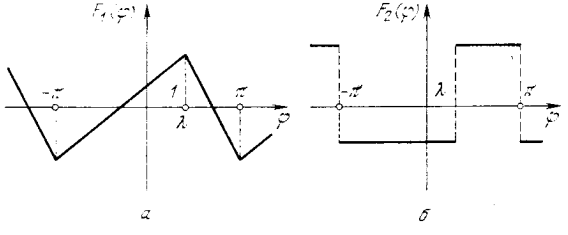


Рис. 241

предельной точкой седло-узел. Циклов нет. Для $\gamma > 1$ при любых h существует единственный устойчивый предельный цикл, так как в этом случае нет особых точек, а бесконечность неустойчива (рис. 240, *в*).

Для уравнения (1) класс $F(\varphi)$ может быть, например, расширен за счет полигональных характеристик (рис. 241, *а*)

$$F_1(\varphi) = \begin{cases} 2(\varphi + \pi)/(\pi + \lambda) - 1, & -\pi \leqslant \varphi \leqslant \lambda, \\ -2(\varphi - \lambda)/(\pi - \lambda) + 1, & \lambda \leqslant \varphi \leqslant \pi, \end{cases} \tag{7}$$

или характеристик релейного типа (рис. 241, *б*)

$$F_2(\varphi) = \begin{cases} -\pi/(\pi + \lambda), & -\pi < \varphi < \lambda, \\ \pi/(\pi - \lambda), & \lambda < \varphi < \pi. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь λ — «внутренний параметр» семейства характеристик.

Для этих характеристик легко найти уравнения кривых, на которых происходят бифуркации. Например, легко обнаружить, что при характеристике (7) бифуркационная кривая в плоскости (γ, h) проходит через начало координат и точку $(1, 2\sqrt{2}/(\pi + \lambda))$, в которой происходит смыкание с вертикальным куском границы.

Особенно простое уравнение бифуркационной кривой будет при $\lambda = \pi$ (при этом характеристика (7) становится разрывной):

$$\gamma = \frac{e^H - 1}{e^H + 1}, \quad H = \frac{\pi^{3/2} h}{\sqrt{4 - \pi h^2}}.$$

При $\lambda \neq \pi$ и $\gamma < 1$ в фазовом пространстве на линии сшивания нет особых точек. Для $\lambda = \pi$ и $\gamma < 1$ две особые точки — фокус и (на линии сшивания) седло, сшитое из обыкновенных траекторий. Для $\gamma = 1$ на линии сшивания сложная особая точка, исчезающая при $\gamma > 1$.

При характеристике (8) смыкание бифуркационной кривой с вертикальным куском границы происходит в точке ($\gamma = \pi/(\pi - \lambda)$, $h = h_0$), где h_0 — корень уравнения

$$2\pi^2\left[1 - \exp\left\{-\frac{h^2(\pi^2 - \lambda^2)}{\pi}\right\}\right] = h^2(\pi - \lambda)^2(\pi + \lambda).$$

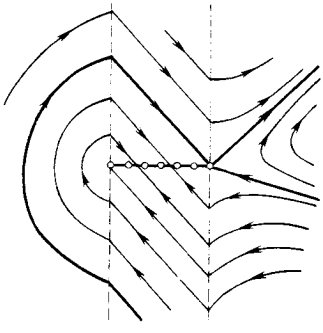


Рис. 242

При $\gamma < \pi/(\pi - \lambda)$ в фазовом пространстве на линиях сшивания две особые точки, сшитые из обыкновенных траекторий: сшитый фокус и сшитое седло. При $\gamma = \pi/(\pi - \lambda)$ возникает особое образование (рис. 242), сходное с седло-узлом, содержащее отрезок притяжения $y = 0$, $\lambda < \varphi < \pi$ и исчезающее при возрастании γ (индекс замкнутой кривой, содержащей внутри отрезок притяжения с примыкающими к нему траекториями, равен нулю).

Пространство параметров (γ, h) уравнения (1) будет грубым по отношению к классу характеристик $F(\varphi)$, $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$, если отождествить в указанном выше смысле сходные элементы притяжения или отталкивания.

§ 5. Динамическая система, описывающая автоколебания синхронного мотора. Приведем некоторые примеры систем с более сложным разбиением пространства параметров — грубым по отношению к некоторому классу характеристик. Рассмотрим систему (уравнения автоколебаний синхронного мотора) (гл. 18, § 3)

$$dy/dt = D - \Psi_1(\varphi) - [A + B\Psi_2(\varphi) - C\Psi_1(\varphi)]\,y, \quad d\varphi/dt = y, \quad (9)$$

где $\Psi_1(\varphi)$ (нечетная) и $\Psi_2(\varphi)$ (четная) — периодические с периодами соответственно 2π и π, для трех видов характеристик: аналитической $\Psi_1 = \sin\varphi$, $\Psi_2 = \cos 2\varphi$ (рис. 243, *а*), полигональной (рис. 243, *б*) и релейной (рис. 243, *в*).

Введем малый положительный параметр μ, положив $D = \mu T$, $A = \mu\alpha$, $B = \mu\beta$, $C = \mu\gamma$. Для аналитических характеристик получим уравнения

$$dy/dt = -\sin\varphi + \mu[T - (\alpha + \beta\cos 2\varphi - \gamma\sin\varphi)y], \quad d\varphi/dt = y. \quad (10)$$

Система (10) имеет два состояния равновесия: фокус и седло. При малых μ фокус будет устойчивый, если $\alpha+\beta>0$, и неустойчивый, если $\alpha+\beta<0$.

Структура разбиения фазового пространства на траектории определяется характером особых точек, характером и расположением предельных циклов и поведением сепаратрис. Мы рассмотрим эту систему методом Понтрягина (см. гл. 15).

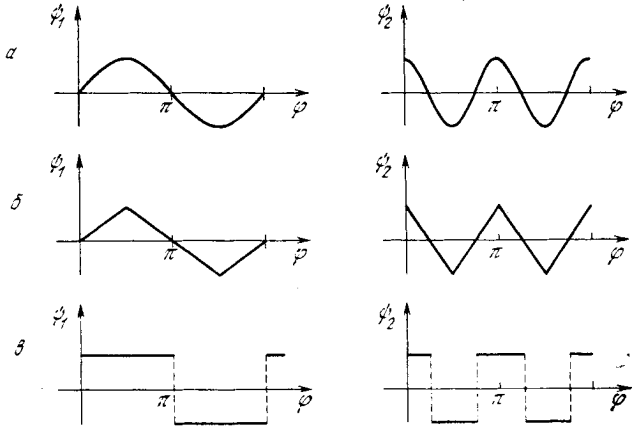


Рис. 243

При $\mu=0$ система (10) имеет интеграл $H(\varphi, y)\equiv y^2/2-\cos\varphi=h$. Значениям константы h из интервала $-1<h<1$ соответствуют замкнутые интегральные кривые, охватывающие состояние равновесия (типа центр), значениям из интервала $1<h<\infty$ — охватывающие фазовый цилиндр. При $h=1$ сепаратрисы седла образуют петлю, охватывающую цилиндр.

Если систему (10) записать в виде

$$d\varphi/dt=H'_y+\mu p(\varphi, y),\quad dy/dt=-H'_\varphi+\mu q(\varphi, y), \tag{11}$$

то значения константы h, выделяющие кривые консервативной системы, вблизи которых при малом μ на верхнем и нижнем полуцилиндрах будут предельные циклы системы (11), соответственно определяются как корни уравнений

$$\psi_1(h)=0,\quad \psi_2(h)=0,$$

где

$$\psi_1(h)=\int_0^{2\pi} q\,d\varphi-p\,dy=\int_0^{2\pi}[T-(\alpha+\beta\cos 2\varphi-\gamma\sin\varphi)\,y]\,d\varphi=$$

$$=\beta\int_0^{2\pi}\left[\nu-(\sigma-2\sin^2\varphi)\sqrt{2(\cos\varphi+h)}\right]d\varphi=$$

$$= \beta\left[2\pi\nu + \left(\frac{128}{15}\frac{k^4-k^2+1}{k^5} - \frac{8\sigma}{k}\right)E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{64}{15}\frac{3k^2-k^4-2}{k^5}F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right],$$

$$\psi_2(h) = \beta\left[2\pi\nu - \left(\frac{128}{15}\frac{k^4-k^2+1}{k^5} - \frac{8\sigma}{k}\right)E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{64}{15}\frac{3k^2-k^4-2}{k^5}F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right].$$

Здесь $F(\pi/2,\ k)$ и $E(\pi/2,\ k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода и введены обозначения

$$\nu = T/\beta,\quad \sigma = (\alpha+\beta)/\beta,\quad k^2 = 2/(h+1),\quad 1 < h < \infty.$$

Значения константы h_0, выделяющие кривые C_{h_0} консервативной системы, охватывающей состояние равновесия, определяются как корни уравнения

$$\psi_3(h) = 0,$$

где

$$\psi_3(h) = \iint\limits_{C_{h_0}} (p'_\varphi + q'_y)\,d\varphi\,dy = -\iint\limits_{C_{h_0}} (\alpha + \beta\cos 2\varphi - \gamma\sin\varphi)\,d\varphi\,dy =$$

$$= -2\sqrt{2}\beta\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0}(\sigma - 2\sin^2\varphi\sqrt{\cos\varphi + h})\,d\varphi =$$

$$= -16\beta\{[\sigma - (16/15)(\varkappa^4 - \varkappa^2 + 1)]\,E(\pi/2, \varkappa) + [\sigma(\varkappa^2 - 1) -$$

$$- (8/15)(3\varkappa^2 - \varkappa^4 - 2)]\,F(1/2, \pi\varkappa)\},$$

$$\varkappa^2 = (h+1)/2,\quad -1 < h < 1,\quad \varphi_0 = \arccos(-h).$$

Корни уравнений $\psi_1(h) = 0$, $\psi_2(h) = 0$, $\psi_3(h) = 0$ зависят от двух параметров σ и ν. В плоскости (σ, ν) можно получить разбиение на области, соответствующие различным возможным распределениям корней уравнений. Каждому распределению будет соответствовать определенная структура разбиения фазового пространства на траектории. Следующий набор условий (каждому условию соответствует некоторая кривая в плоскости (σ, ν)) определяет все возможные в системе (9) бифуркации:

1) $\psi_3(-1) = 0$, 2) $\psi_1(\infty) = 0$ или $\psi_2(\infty) = 0$,
3) $\psi_3(1) = 0$, 4) $\psi_1(1) = 0$, 5) $\psi_2(1) = 0$,
6) $\psi_1(h) = 0$ и $\psi'_1(h) = 0$,
7) $\psi_2(h) = 0$ и $\psi'_2(h) = 0$,
8) $\psi_3(h) = 0$ и $\psi'_3(h) = 0$.

Положим для определенности $\beta > 0$, $\nu > 0$ и будем рассматривать верхнюю полуплоскость (σ, ν) (при $\nu < 0$ получаем разбиение пространства параметров, симметричное области $\nu > 0$ относительно оси σ). В этом случае уравнение $\psi_1(h) = 0$ имеет не более одного корня, $\psi_2(h) = 0$ и $\psi_3(h) = 0$ — не более двух корней. Перечисленному набору условий соответствуют следующие уравнения граничных кривых и бифуркаций:

1. $\sigma = 0$ — при возрастании σ из фокуса появляется неустойчивый предельный цикл.

2. $\sigma = 1$ — при возрастании σ устойчивый предельный цикл появляется из $+\infty$, при убывании σ неустойчивый предельный цикл появляется из $-\infty$.

3. $\sigma = 16/15 = 1{,}066...$ — при возрастании σ из сепаратрисы седла появляется устойчивый (так как в седле $P'_\varphi + Q'_y \equiv \equiv -\mu\beta\sigma < 0$) предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.

4. $2\pi\nu - 8\sigma + 128/15 = 0$ — при убывании σ от петли сепаратрисы на верхнем полуцилиндре появляется устойчивый предельный цикл.

5. $2\pi\nu + 8\sigma - 128/15 = 0$ — при возрастании σ от петли сепаратрисы на нижнем полуцилиндре появляется неустойчивый (если $-\beta\mu\sigma > 0$) или при убывании σ от петли сепаратрисы появляется устойчивый (если $-\mu\beta\sigma < 0$) предельный цикл.

6. При $\nu > 0$ кривая не существует (в верхнем полуцилиндре не может быть двух предельных циклов при $\nu > 0$).

7. Если обозначить $\psi_2(h) \equiv \beta[2\pi\nu + \sigma\Phi_1(h) - \Phi_2(h)] = 0$, то параметрические уравнения кривой будут

$$\sigma = \frac{\Phi'_2(h)}{\Phi'_1(h)}, \quad \nu = \frac{\Phi_2(h)\Phi'_1(h) - \Phi'_2(h)\Phi_1(h)}{2\pi\Phi_1(h)}.$$

Кривая проходит между точками $A(0, (128/30)\pi^{-1} = 1{,}36)$ и $B(1, 0)$. При возрастании σ двойной предельный цикл, возникший на нижнем полуцилиндре из сгущения траекторий, разделяется на два (нижний — неустойчивый, верхний — устойчивый).

8. Из $\psi_3(h) \equiv -16\beta[\Psi_1(h)\sigma - \Psi_2(h)] = 0$ и $\psi'_3(h) = 0$, исключая σ, получаем уравнение для определения h. Уравнение $\Psi'_2\Psi_1 - \Psi_2\Psi'_1 = 0$ имеет единственный корень $h = 0{,}86$, соответствующий $\sigma = 1{,}09$. При возрастании σ исчезает двойной предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.

Разбиение пространства параметров σ, ν на области, которым соответствуют различные качественные структуры разбиения фазового пространства, представлено на рис. 244. Штриховкой отмечены две тонкие области, для точек которых в фазовом пространстве есть два предельных цикла.

Исследование системы (9) при полигональных и разрывных характеристиках может быть аналогично проведено методом малого параметра (см. гл. 18) [66].

Система (9) с полигональными характеристиками (см. рис. 243, *б*) и малым параметром μ имеет при $\mu = 0$ интеграл

$$H(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} + \begin{cases} -(\varphi + \pi)^2/\pi \\ \varphi^2/\pi - \pi/2 \\ -(\varphi - \pi)^2/\pi \end{cases} = h, \quad \begin{matrix} -\pi < \varphi < -\pi/2, \\ -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ \pi/2 < \varphi < \pi. \end{matrix} \qquad (12)$$

Замкнутые кривые семейства (12) при $-\pi/2 < h < 0$ охватывают особую точку, при $0 < h < \infty$ — фазовый цилиндр. Состояния равновесия при $\mu \neq 0$ смещены с линии сшивания и будут $O_1((1/2)\mu T\pi,\ 0)$ — фокус и $O_2(\pi - (1/2)\mu T\pi,\ 0)$ — седло.

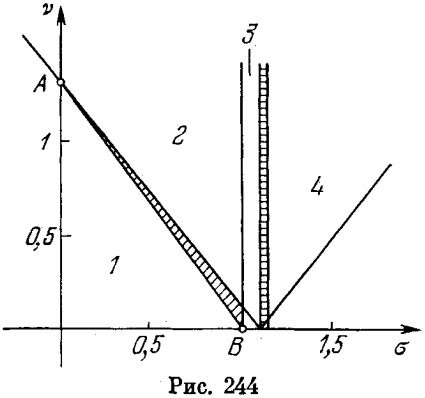


Рис. 244

Приведем (в том же порядке, что и для (10)) уравнения границ в пространстве параметров σ и ν:

1) $\sigma = 0$, 2) $\sigma = 1$,

3) $\sigma = (4\sqrt{2}/3)(1 + \pi/4)^{-1} = 1{,}056...$,

4) $2\pi\nu - (\sqrt{2}/2)\pi^{3/2}(1 + \pi/4)\sigma + (4/3)\pi^{3/2} = 0$,

5) $2\pi\nu + (\sqrt{2}/2)\pi^{3/2}(1 + \pi/4)\sigma - (4/3)\pi^{3/2} = 0$,

6) при $\nu > 0$ не существует,

7) кривая проходит между точками $A(0,\ (2/3)\sqrt{\pi} = 1{,}26...)$ и $B(1,\ 0)$,

8) $\sigma = 1{,}07...$

Разбиения фазового пространства и пространства параметров для полигональных характеристик останутся качественно тождественными разбиениям для характеристик рис. 243, *а*. Сохранятся и тонкие области, для точек которых в фазовом пространстве есть два предельных цикла. Их размеры лишь незначительно изменятся. На рис. 245, *а*, *д* представлены разбиения цилиндрического фазового пространства соответственно для областей *1* и *2* рис. 244.

Для полигональных характеристик (см. рис. 243, *б*) качественно эквивалентные рис. 245, *а*, *д* разбиения фазового пространства будут соответствовать областям пространства параметров, расположенных, как и на рис. 244, в полосе $0 < \sigma < 1$. Для обеих рассмотренных аппроксимаций уравнения (9) области *1* и *2* в пространстве параметров будут разделены узкой полосой, для точек которой в фазовом пространстве есть два предельных

цикла, не исчезающей при изменении аппроксимации, несмотря на весьма малую ее ширину (максимальная ширина порядка 0,015 для $\sigma = 1$ весьма быстро убывает при $\sigma \to 0$, так как бифуркационная кривая между точками A и B касается в точке A прямой, ограничивающей снизу область *2*). Грубость пространства параметров по отношению к изменению характеристики

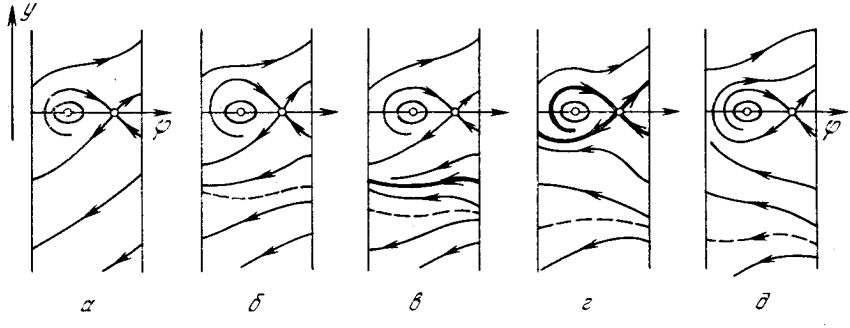


Рис. 245

с сохранением «тонких» элементов не является очевидной и связана с сохранением для различных аппроксимаций особенностей бифуркаций при возникновении и исчезновении петли сепаратрисы. Эти особенности определяются знаком величины $P'_\varphi + O'_y$ для седла (см. гл. 10).

Для фиксированного σ при возрастании параметра ν можно перейти из области *1* в область *2*. При этом разбиение фазового пространства, изображенное на рис. 245, *а*, переходит в разбиение на рис. 245, *д*. При значении $\nu = \nu_0$ (это значение единственное в силу монотонности изменения направления векторного поля при монотонном изменении ν) α- и ω-сепаратрисы седла на нижнем полуцилиндре должны образовать петлю, охватывающую цилиндр.

От петли, однако, не может появиться неустойчивый предельный цикл, изображенный на рис. 245, *д*, так как седловая величина, которая при обеих аппроксимациях (см. рис. 243, *а*, *б*) с точностью до членов порядка μ^2 дается выражением $P'_\varphi + Q'_y = -\mu\beta\sigma$, в интервале $0 < \sigma < 1$ отрицательна ($\beta > 0$), и, следовательно, при возрастании ν в петлю сепаратрисы должен превратиться устойчивый предельный цикл. Чтобы это оказалось возможным, необходимо должен возникнуть двойной предельный цикл при возрастании ν до значения $\nu = \nu_0$ (рис. 245, *б*).

Этот цикл затем разделяется на два (верхний — устойчивый, нижний — неустойчивый) (рис. 245, *в*), и устойчивый предельный цикл превращается в петлю сепаратрисы (рис. 245, *г*), исчезающую при дальнейшем возрастании и порождающую раз-

биение, представленное на рис. 245, *д* (последовательные переходы от *а* до *д* представлены на рис. 245, *а*—*д*).

Высказанные соображения позволяют выделить класс характеристик, для которых области *1* и *2* необходимо разделяются областью с двумя циклами. Все сказанное может быть почти дословно повторено по отношению к условиям существования тонкой полосы с фазовым пространством, содержащим два предельных цикла (охватывающих состояние равновесия) и разделяющей области *2* и *4*.

При изменении характеристик, вообще говоря, будут перемещаться бифуркационные кривые на плоскости параметров и их точки пересечения. Если на плоскости параметров есть точки, в которых пересекаются более двух бифуркационных кривых (и, следовательно, смыкаются более четырех областей), то окрестность таких точек при изменении характеристик может изменить качественную структуру разбиения плоскости параметров при соответствующем изменении характеристики.

Сохранение структуры разбиения плоскости параметров в этих точках требует более жестких условий для класса характеристик, не изменяющих структуру разбиения плоскости параметров. Такой точкой, например, для рассматриваемой плоскости параметров σ, ν при характеристиках рис. 243, *а*, *б* будет точка A, в которой смыкаются пять областей. Неизменность качественной структуры разбиения плоскости параметров системы (9) при характеристиках рис. 243, *а*, *б* обуславливается тем, что величина $P'_\varphi + Q'_y$ с точностью до величин порядка μ^2 для фокуса и для седла имеет одинаковое значение при обеих аппроксимациях, и при изменении знака σ не только появляется цикл из особой точки, но и происходит изменение характера бифуркаций для петли сепаратрисы. Это условие не будет соблюдено, если перейти к релейным характеристикам.

Рассмотрим [109] систему (9) с релейными характеристиками (см. рис. 243, *в*) и малым параметром μ. При $\mu = 0$ система будет иметь интеграл

$$H(\varphi, y) = \begin{cases} y^2/2 - \varphi \\ y^2/2 + \varphi \end{cases} = h, \quad \begin{matrix} -\pi < \varphi < 0, \\ 0 < \varphi < \pi. \end{matrix} \tag{13}$$

Замкнутые кривые семейства (13) при $0 < h < \pi$ охватывают особую точку, при $\pi < h < \infty$ — фазовый цилиндр. Система будет иметь особые точки на линиях сшивания: в точке $O_1(0, 0)$ — квазифокус, в точке $O_2(\pi, 0)$ — седло, сшитое из обыкновенных траекторий.

Функции $\psi_1(h)$, $\psi_2(h)$ и $\psi_3(h)$ для релейных характеристик имеют особенно простой вид. Приведем выражение для $\psi_3(h)/\beta$, имеющей некоторые интересные особенности:

$$\frac{\psi_3(h)}{\beta} = -\frac{8\sqrt{2}}{3}\left[\sigma h^{3/2} - 2m\left(h - \frac{1}{4}\pi\right)^{3/2} + 2n\left(h - \frac{3}{4}\pi\right)^{3/2}\right]. \tag{14}$$

Здесь

$$m = n = 0, \quad \text{если } 0 \leqslant h \leqslant \pi/4,$$
$$m = 1,\ n = 0, \quad \text{если } \pi/4 \leqslant h \leqslant 3\pi/4,$$
$$m = n = 1, \quad \text{если } 3\pi/4 \leqslant h \leqslant \pi.$$

На рис. 246 в плоскости $(h,\ \psi_3/\beta)$ изображены кривые (14) для различных σ. При $\sigma = 0$ функция $\psi_3(h)/\beta$ для $0 \leqslant h \leqslant \pi/4$ совпадает с отрезком оси h и, следовательно, имеет континуум корней.

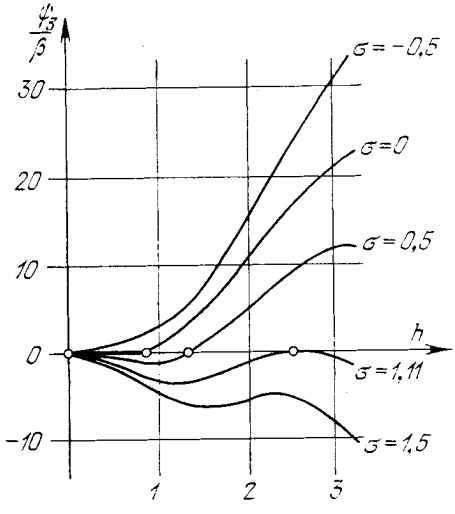


Рис. 246

Переход σ через нуль, соответствующий последовательности изменения качественных структур, представленной на рис. 247, будет аналогом бифуркации, соответствующей рождению неустойчивого предельного цикла из особой точки. Предельный цикл появляется из границы области, заполненной замкнутыми кривыми. При $\sigma = 0$ сшитое состояние равновесия на линии склейки будет «центр с точностью до величин порядка μ^2». При учете членов порядка μ^2 в полосе $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$ будут медленно закручивающиеся или медленно раскручивающиеся спирали. В этом можно убедиться, построив, например, функцию последования на полупрямой $y \geqslant 0$ на линии сшивания. Она будет иметь вид

$$y_2 = y_1 - \frac{4}{3} T\gamma y_0^2 \mu^2 + (\ldots)\mu^3 + \ldots, \quad y_0 \text{ — параметр.}$$

Функция ψ_3^*, описывающая бифуркации в окрестности особой точки с учетом членов порядка μ^2, может быть получена из так называемых вторых приближений.

Приведем уравнения границ на плоскости (σ, ν):

1) $\sigma = 0$, 2) $\sigma = 1$,

3) $\sigma = (1/4)(3\sqrt{3} - 1) = 1{,}049\ldots$,

4) $2\pi\nu - (1/3)\sqrt{2}\pi^{3/2}(4\sigma + 1 - 3\sqrt{3}) = 0$,

5) $2\pi\nu + (1/3)\sqrt{2}\,\pi^{3/2}(4\sigma + 1 - 3\sqrt{3}) = 0$,

6) при $\nu > 0$ не существует,

7) кривая проходит между точками $A(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{\pi/2}(1-\sqrt{3}/3))$ и $B(1, 0)$,

8) $\sigma=(4/13)\sqrt{13}=1{,}11\ldots$

Разбиения фазового пространства системы (9) с релейными характеристиками не будут для всех областей пространства па-

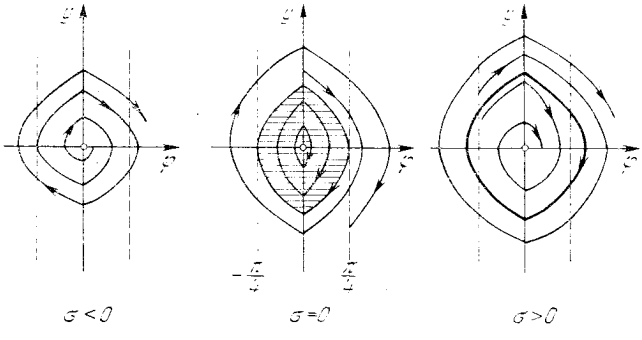


Рис. 247

раметров качественно эквивалентными соответствующим разбиениям для аналитических и полигональных характеристик, но будут в случаях различия сходными, допускающими отождествление в указанном выше смысле. Различие в бифуркациях будет на прямой $\sigma=0$ (рождение неустойчивого предельного цикла при изменении знака σ из границы некоторой области, содержащей внутри особую точку).

Разбиение пространства параметров σ, ν для системы с релейными характеристиками отличается от представленного на рис. 244 расположением кривой AB. Точка A не лежит на оси $\sigma=0$. Кривая AB касается в точке A границы области *2* при $\sigma=\sqrt{3}-1$. На интервале $0<\sigma<\sqrt{3}-1$ возможен при возрастании ν непосредственный переход, минуя область с двумя циклами от разбиения (см. рис. 245, *а*) к разбиению (см. рис. 245, *д*) через рождение неустойчивого предельного цикла от петли сепаратрисы, охватывающей цилиндр. Характер и взаиморасположение других бифуркационных кривых не изменяются при замене полигональных или аналитических характеристик релейными (рис. 248).

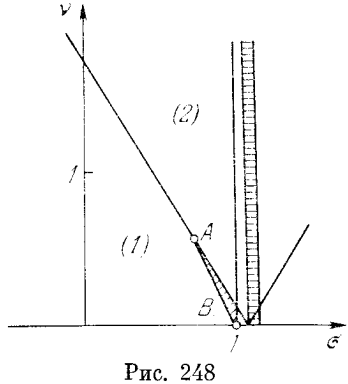


Рис. 248

§ 6. Динамическая система, описывающая симметричный полет самолета. Рассмотрим опять систему, изученную в гл. 16 § 4 и в § 1 настоящей главы:

$$d\varphi/dt = y^2 - \cos\varphi, \quad dy/dt = y(\alpha - \beta y^2 - \sin\varphi), \qquad (15)$$

и введем малый параметр $\beta = \mu$, $\alpha = k\mu$. Эта система (с малым μ) рассматривалась в § 3 гл. 15. Напомним здесь некоторые факты. При $\mu = 0$ система имеет интеграл

$$H(\varphi, y) = y^3/3 - y\cos\varphi = h. \qquad (16)$$

Замкнутые кривые семейства (16) при $-2/3 < h < 0$ охватывают состояние равновесия, при $0 < h < \infty$ — фазовый цилиндр. При малом μ система имеет три состояния равновесия: $O_1(-\pi/2, 0)$ и $O_2(\pi/2, 0)$ — седла, $O_3[(k-1)\mu, 1 + (k^2-1)\mu^2/2]$ — фокус (при $\mu = 0$ — центр). Фазовое пространство цилиндрическое. В соответствии с физическим смыслом переменных и параметров рассматриваем лишь верхний полуцилиндр ($y = 0$ — интегральная кривая) и положительные значения параметров.

Особенность разбиения фазового пространства на траектории состоит в рассматриваемой задаче в том, что для значений параметров, при которых возникает сепаратриса, идущая из седла в седло, образуются сразу два замкнутых контура, составленных из сепаратрис седла на цилиндре и отрезков оси φ: контур, охватывающий состояние равновесия, и контур, охватывающий фазовый цилиндр. От контуров, составленных из сепаратрис седла, при изменении параметра появляется либо предельный цикл, охватывающий состояние равновесия, либо предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Поэтому функция $\psi(h)$, корни которой определяют структуру разбиения на траектории, может быть записана единообразно для циклов любой природы:

$$\psi(h) = \int\int_{C_{h_0}} (k - 3y^2)\, dy\, d\varphi \quad \text{или} \quad \psi(h) = \int_{-\pi}^{\pi} y(k - y^2)\, d\varphi$$

соответственно для $-2/3 < h < 0$ или $0 < h < \infty$, что можно для обоих случаев записывать в виде

$$\psi(h) = 2\int_{e_2}^{e_1} \frac{(k - y^2)(2y^3 + 3h)}{\sqrt{9y^2 - (y^3 - 3h)^2}}\, dy. \qquad (17)$$

Здесь e_1 и $e_2 < e_1$ — положительные корни уравнения $y^3 - 3y = 3h$, если $-2/3 < h < 0$, или положительные корни соответственно уравнений $y^3 - 3y = 3h$ и $y^3 + 3y = 3h$, если $h > 0$. Функция $\psi(h)$ доопределяется для $h = -2/3$ и $h = 0$ ее предельными значениями.

Исследование обнаруживает, что $\psi(h)=0$ не может иметь более двух корней на интервале $0<h<\infty$ и более одного корня для $-2/3<h<0$.

Все возможные бифуркации в системе (15) с малым параметром соответствуют следующему набору условий (каждому отвечает определенное значение k):

1. $\psi(-2/3)=0$, $\psi'(-2/3)=0$. При убывании k из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл.

2. $\psi(0)=0$. При убывании k из петли сепаратрисы появляется неустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, а при возрастании k появляется неустойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.

3. $\psi(h^*)=0$, $\psi'(h^*)=0$ $(h^*>0)$. При убывании k исчезает двойной предельный цикл. При возрастании k двойной предельный цикл разделяется на два (верхний — устойчивый, нижний — неустойчивый).

Перечисленному набору условий соответствуют следующие значения параметра k:

1) $k=3$, 2) $k=\Gamma^4(1/4)/(8\pi^2)=2{,}188$, 3) $k=2{,}05$.

Вид функций $\psi(h)$ для различных k представлен на рис. 249. На рис. 250 в плоскости малых параметров β, α представлено

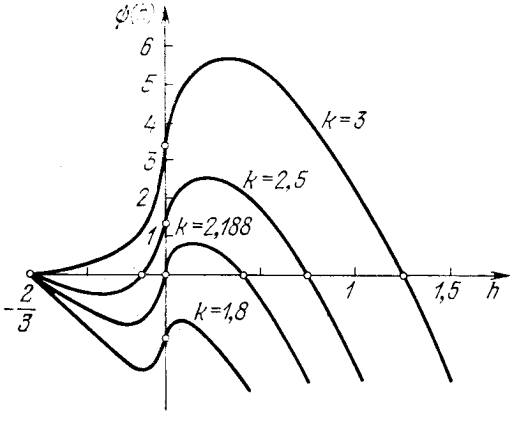


Рис. 249

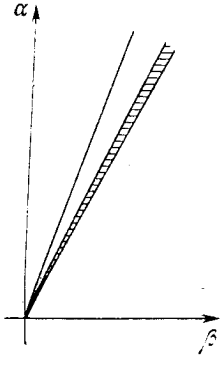


Рис. 250

разбиение на области с различной качественной структурой разбиения фазового пространства на траектории. Заштрихована узкая полоса, для точек которой в фазовом пространстве есть два предельных цикла.

Рассмотрим систему (15) с малым параметром при аппроксимациях $\cos\varphi$ пилой, $\sin\varphi$ релейной функцией.

При $\mu = 0$ система будет иметь интеграл

$$H(\varphi, y) = \frac{y^3}{3} - y + \begin{cases} 2y\varphi/\pi \\ -2y\varphi/\pi \end{cases} = h, \quad \begin{matrix} -\pi < \varphi < 0, \\ 0 < \varphi < \pi, \end{matrix} \tag{18}$$

для которого производная $\partial H/\partial y$ непрерывна на линиях сшивания $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$.

Замкнутые кривые семейства (18) при $-2/3 < h < 0$ охватывают состояние равновесия типа сшитый центр, а при $0 < h < \infty$ — фазовый цилиндр. Состояния равновесия $O_1(-\pi/2, 0)$ и $O_2(\pi/2, 0)$ будут седла. Функция $\psi(h)$ здесь будет иметь вид

$$\psi(h) = \frac{\pi}{3} \int_{e_2}^{e_1} \left(\frac{3kh}{y} + 2ky^2 - 3hy - 2y^4 \right) dy, \tag{19}$$

а e_1 и e_2 имеют те же значения, что и в предыдущем случае.

Исследование обнаруживает тождественность поведения и свойств функций $\psi(h)$ для исходной и аппроксимирующей систем по отношению к зависимости корней от параметра k. Соответствующие бифуркационные значения k для аппроксимирующей системы будут $k = 3$; 9/5; 1,65. Пространство параметров системы будет отличаться от представленного на рис. 250 лишь незначительным смещением заштрихованной полосы, соответствующей системам с двумя циклами.

Тождественность разбиения фазового пространства для исходной и аппроксимирующей систем обуславливается здесь в первую очередь сохранением особенностей бифуркаций, связанных с сепаратрисами седел, так как седловая величина не изменилась при переходе к аппроксимирующей системе (для обеих систем в седле $P'_\varphi + Q'_y = k\mu$).

Возвратимся к уравнениям (15), не предполагая более параметры α и β малыми. Изменение числа состояний равновесия системы (15) происходит при $\alpha > 1$. Будем рассматривать область $\alpha < 1$, где число состояний равновесия не изменяется по сравнению со случаем малого μ. Простейшие бифуркации, связанные с предельным циклом, могут быть найдены и сохраняют тот же характер, что и для малых значений α и β. Появление устойчивого предельного цикла из бесконечности происходит при возрастании β от нуля (это видно из уравнений (15) непосредственно, так как при изменении знака β бесконечность из устойчивой становится неустойчивой). Появление неустойчивого предельного цикла из состояния равновесия происходит из кривой

$$\alpha - 3\beta \frac{\alpha\beta + \sqrt{1 + \beta^2 - \alpha^2}}{1 + \beta^2} = 0 \tag{20}$$

(соответствующая граница на рис. 250 есть касательная к кривой (20) в начале). Величина $P'_\varphi + Q'_y = \alpha = k\mu$ для немалых

μ не изменяет знака и обуславливает неизменность характера бифуркаций, связанных с сепаратрисами седел. Только для суждений о бифуркациях, связанных с двойным предельным циклом, нет полной информации. Знание других бифуркаций позволяет сделать ограниченные высказывания об области существования систем с двумя предельными циклами.

Для больших значений параметра β расположение сепаратрис седел будет таким, как на рис. 251, *а* (это непосредственно следует из расположения главных изоклин для достаточно больших β). Не существует предельных циклов, охватывающих цилиндр. При малых β расположение сепаратрис будет, как на

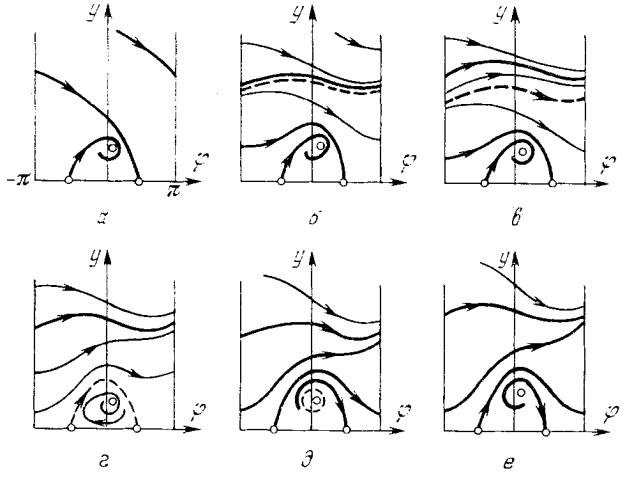


Рис. 251

рис. 251, *е* (при $\beta = 0$ α-сепаратриса седла идет в бесконечность; при малых β появляется устойчивый предельный цикл из бесконечности). При убывании β векторное поле поворачивается монотонно, поэтому существует единственное при любом фиксированном α_0 значение β_0, при котором α- и ω-сепаратрисы седел образуют петлю. Множество точек α_0, β_0 образует непрерывную кривую, пересекающую полосу $0 < \alpha < 1$.

От петли, однако, не может появиться устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, так как в седле $P'_\varphi + Q'_y = \alpha > 0$.

Из петли может появиться или к ней стянуться лишь неустойчивый предельный цикл; чтобы это оказалось возможным при убывании β до значения $\beta = \beta_0$, из сгущения траекторий необходимо должен возникнуть двойной предельный цикл, охватывающий цилиндр (рис. 251, *б*).

Этот предельный цикл затем разделяется на два (верхний — устойчивый, нижний — неустойчивый) (рис. 251, *в*), и неустойчивый предельный цикл может превратиться в петлю сепаратрисы (рис. 251, *г*), исчезающую при дальнейшем убывании β и порождающую неустойчивый предельный цикл, который охватывает состояние равновесия (рис. 251, *д*). При значении β, удовлетворяющем условию (20), неустойчивый предельный цикл стягивается к состоянию равновесия и исчезает.

Описание изменений качественной структуры разбиения фазового пространства на траектории при изменении β позволяет утверждать необходимость появления области с фазовым пространством, содержащим два предельных цикла, которые охватывают цилиндр, и позволяет проследить такую же последовательность бифуркаций в зависимости от β, как и для случая малого μ. Однако последовательность структур разбиения фазового пространства на траектории, представленная на рис. 251 и строго доказанная для случая малого μ, может быть отождествлена с соответствующими структурами, относящимися к случаю немалого μ, лишь с точностью до четного числа предельных циклов.

Логическая возможноть такого расхождения остается неустраненной, и грубость пространства параметров здесь нужно понимать в том ограниченном смысле, о котором было сказано вначале. В этом смысле приведенное описание доказывает грубость пространства параметров по отношению к переходу от малых μ к немалым в довольно широкой полосе $0 < \alpha < 1$ пространства параметров α, β.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Динамические системы на двумерных поверхностях. В настоящей книге приведен ряд сведений о двумерных динамических системах, фазовым пространством которых является плоскость или сфера. Здесь мы рассмотрим некоторые свойства динамических систем на двумерных поверхностях.

В гл. 12 уже рассматривались динамические системы на цилиндре, правые части которых являются периодическими функциями одного переменного. В целом ряде вопросов встречаются системы второго порядка, правые части которых — периодические функции двух переменных:

$$\dot{u} = \Phi(u, v), \quad \dot{v} = \psi(u, v), \tag{1}$$

где

$$\Phi(u + 2\pi, v = 2\pi) = \Phi(u, v), \quad \psi(u + 2\pi, v + 2\pi) = \psi(u, v)$$

(период мы всегда, так же как и в случае цилиндра, можем считать равным 2π). Такую систему естественно рассматривать как систему, заданную на торе [1]). При этом u, v — циклические координаты на торе (одна и та же точка тора соответствует бесчисленному множеству значений $u + 2n\pi$ и $v + 2m\pi$, n и m — целые числа). Кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ — меридианы и параллели тора.

Рассмотрим простейшую динамическую систему на торе:

$$du/dt = \lambda_1, \quad dv/dt = \lambda_2, \tag{2}$$

λ_1 и λ_2 — константы, не равные нулю.

Заменим систему одним уравнением [2]):

$$dv/du = \lambda_2/\lambda_1 = \lambda. \tag{3}$$

Уравнение его интегральных кривых —

$$v = \lambda u + c,$$

---

[1]) Тор («бублик») может быть получен от вращения окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости круга, ограниченного окружностью и не пересекающей его. При вращении окружность описывает поверхность тора. Последовательные положения окружности — меридианы тора, ортогональные к ним кривые — параллели.

[2]) Если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то траекториями системы являются меридианы тора, если наоборот, то параллели тора. У системы (2), очевидно, нет состояний равновесия.

где u может принимать всевозможные значения $-\infty < u < +\infty$ [3]). Так как все траектории могут быть получены из траектории $v = \lambda u$ (соответствующей $c = 0$) сдвигом вдоль меридиана и параллели, то для установления характера траекторий рассматриваемой динамической системы достаточно рассмотреть траекторию $v = \lambda u$, которую мы обозначили через L_0. Характер этой траектории существенно отличается в случаях, когда λ — рационально и иррационально.

I. λ — рационально.

Пусть $\lambda = m/n$. Тогда при $u = 2n\pi$ мы имеем $v = 2m\pi$. Точка с координатами $u = 2n\pi$, $v = 2m\pi$ совпадает с точкой (0, 0), и, следовательно, траектория $v = \lambda u$ замкнутая (она замыкается после n оборотов вдоль меридиана и m оборотов вдоль параллели). Все другие траектории имеют тот же характер.

II. λ — иррационально.

В этом случае траектория L_0 заведомо незамкнута. Действительно, для того чтобы она была замкнута, должны существовать такие целые n и m, чтобы имело место равенство

$$2n\pi = 2m\lambda\pi, \quad \text{или} \quad \lambda = m/n,$$

что невозможно, так как по предположению λ иррационально.

Нетрудно видеть, что через n оборотов по u в ту или другую сторону мы получаем для v_n значение $v_n = \pm 2n\pi\lambda$. Но значениям v и $v + 2n\pi$ соответствует на торе один и тот же меридиан; на этом меридиане точки со значениями v' и $v' + 2n\pi$ совпадают. Поэтому вместо $v = 2n\pi\lambda$ мы будем рассматривать значения

$$2n\lambda - 2nE(n\lambda), \quad n > 0,$$

$$-2n\pi + 2\pi E(n\lambda), \quad n > 0,$$

где $E(n\lambda)$ есть наибольшее целое число, содержащееся в иррациональном числе $n\lambda$. Справедливо утверждение: в случае, когда λ иррационально, точки пересечения траектории L_0 со всяким мериданом всюду плотны [4]) на этом меридиане.

Это утверждение опирается на следующее предложение теории чисел [5]): если λ иррационально, то при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такое целое N, чтобы всякая точка отрезка (0, 1) находилась на расстоянии, меньшем ε, от одной из точек

$$n\lambda - E(n, \lambda), \quad n > N.$$

---

[3]) Когда рассматривается изменение u на $2n\pi$, то траектория обходит тор n раз вдоль параллели, а когда v изменяется на $2m\pi$, то обходит тор m раз вдоль меридиана.

[4]) Множество точек всюду плотно на отрезке (или, как в тексте, на меридиане), если в любом сколь угодно малом интервале, являющемся частью этого отрезка (меридиана), непременно найдется хотя бы одна точка этого множества.

[5]) См., например, [108].

Из того факта, что в случае λ иррационального точки пересечения траектории L_0 всюду плотны на всяком меридиане, например на меридиане $u=0$, очевидно, следует, что каждая общая точка траектории L_0 с меридианом является и α-, и ω-предельной для самой траектории, а следовательно, все точки траектории L_0 являются и α-, и ω-предельными для самой траектории L_0. Траектория L_0 является самопредельной, незамкнутой.

В математической литературе траектория, все точки которой являются α- (ω-) предельными для нее самой, называется *устойчивой по Пуассону*. На плоскости, на сфере и на цилиндре устойчивая по Пуассону траектория может быть либо состоянием равновесия, либо замкнутой траекторией. Рассмотренная выше траектория L_0 на торе при λ иррациональном является примером невозможного на плоскости типа траектории (α- и ω-устойчивой по Пуассону незамкнутой траекторией).

К рассмотрению динамических систем на других поверхностях естественно приводят дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной.

Пусть

$$F(x,\ y,\ dy/dx)=0 \tag{4}$$

— такое уравнение, где при $dy/dx=z$ $F(x, y, z)$ — аналитическая функция своих переменных. Очевидно, решением этого уравнения называется аналитическая функция $y=\varphi(x)$ такая, что имеет место тождество $F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))=0$. Разрешая уравнение (4) относительно dy/dx, мы можем при одних значениях x, y получить несколько действительных значений для dy/dx, а при других x, y — ни одного [6]).

Предположим, что при значениях x_0, y_0 существует конечное число действительных значений z_i. Пусть z_{10}, z_{20}, ..., z_{k0} — эти значения. Если, кроме того, при любой из систем значений x_0, y_0, z_{i0} $(i=1, 2, 3, \ldots)$

$$F(x_0,\ y_0,\ z_{i0})=0,\quad \partial F(x_0,\ y_0,\ z_{i0})/\partial z\neq 0, \tag{5}$$

то уравнение (4) может быть разрешено относительно dy/dx, и в окрестности $(x_0,\ y_0)$ мы получим k различных дифференциальных уравнений первого порядка, уже разрешенных относительно производной

$$dy/dx=f_i(x,\ y),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k, \tag{6}$$

где (в силу теоремы о неявных функциях) функции $f_i(x, y)$ в окрестности значений $(x_0,\ y_0)$ — аналитические функции. Реше-

---

[6]) Если одно или несколько значений для dy/dx из уравнения (4) обращаются в бесконечность, то, меняя ролями x и y, мы можем искать значение для dx/dy из соответственно полученного из уравнения (4) уравнения вида

$$F_1(x,\ y,\ dx/dy)=0.$$

ние $\varphi_i(x)$ каждого из уравнений (6), очевидно, является решением уравнения (4). Через точку (x_0, y_0) плоскости (x, y) проходит k интегральных кривых $y=\varphi_i(x)$ с различными касательными. При некоторых значениях x_0, y_0 мы, очевидно, можем не получить ни одного действительного значения для dy/dx.

Однако при рассмотрении неявного уравнения (1) естественно пользоваться его геометрической интерпретацией как уравнения на двумерной поверхности. Именно, рассмотрим поверхность

$$F(x, y, z)=0. \tag{7}$$

Пусть, как и выше, (x_0, y_0, z_0) — точка, в которой

$$F(x_0, y_0, z_0)=0, \quad \partial F(x_0, y_0, z_0)/\partial z \neq 0, \tag{8}$$

и $dy/dx=f_i(x, y)$ — одно из дифференциальных уравнений (6), а $y=\varphi_i(x)$ — его решение, удовлетворяющее начальным значениям x_0, y_0.

Рассмотрим пространственную кривую, заданную уравнениями

$$y=\varphi_i(x), \quad z=\varphi'(x), \tag{9}$$

т. е. кривая (9) лежит на поверхности (7). Пара функций $y=\varphi(x)$, $z=\varphi'(x)$ удовлетворяет, как нетрудно видеть, следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dy}{dx}=z, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot z+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

Если ввести параметр t, полагая $dx/dt=\partial F/\partial z$, то для параметрических уравнений кривой, лежащей на поверхности (7), мы получим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{dy}{dt}=z\cdot\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot z\right). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что система (10) определяет векторное поле на поверхности (7), а решение этой системы

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

— проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) поверхности (7) целиком лежащую на ней траекторию этой системы.

Мы предполагали, что при рассматриваемых начальных значениях x_0, y_0, z_0 выполняется условие $\partial F(x_0, y_0, z_0)/\partial x \neq 0$. При значениях x_0, y_0, z_0, при которых одновременно

$$F(x_0, y_0, z_0)=0, \quad \partial F(x_0, y_0, z_0)/\partial z=0,$$

решения уравнений $dy/dx=f_i(x, y)$ с разными i могут сливаться (в этих точках касательная плоскость к поверхности параллельна оси z).

Если рассматриваемая поверхность $F(x, y, z)=0$ не имеет особых точек[7]), т. е. ни в одной точке поверхности не выполняются одновременно равенства $F'_x=0, F'_y=0, F'_z=0$, то точки, в которых одновременно

$$F(x, y, z)=0, \frac{\partial F}{\partial z}=0, \frac{\partial F}{\partial x}+z\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

являются, очевидно, состояниями равновесия системы (10). Состояния равновесия могут иметь тот же характер, что и на плоскости.

Поверхность, на которой рассматривается система (10), может быть как замкнутой, так и не замкнутой[8]). Замкнутые поверхности (без особых точек) в трехмерном пространстве полностью расклассифицированы: это поверхности типа сферы или сферы с различным числом «ручек» (двумя, тремя и т. д.).

При рассмотрении динамических систем на поверхностях часто бывает целесообразно перейти от декартовых координат x, y к «локальным» координатам на поверхности (которые на поверхностях, отличных от тора, вводятся значительно сложнее, чем на торе).

Не останавливаясь в настоящем беглом обзоре сколько-нибудь подробно на свойствах динамических систем на поверхностях, отметим все же некоторые основные факты.

Траекториями динамических систем на поверхностях кроме траекторий тех же типов, что и на плоскости, могут быть еще незамкнутые, устойчивые по Пуассону, а также незамкнутые и неустойчивые по Пуассону траектории, имеющие в качестве предельных α- и ω-устойчивые по Пуассону (незамкнутые, самопредельные). В связи с наличием у динамических систем на поверхностях новых типов траекторий вопрос о схеме динамической системы на поверхности решается только для простейших случаев. Понятие грубости динамической системы на поверхности имеет то же значение, что и в плоской области, а необходимые и достаточные условия грубости системы с небольшими модификациями те же, что и в плоской области.

Вообще же в динамических системах на поверхностях возникает целый ряд новых по сравнению с динамическими системами на плоскости вопросов. Мы отсылаем читателя к специальной литературе (см. [16, 17, 3*]).

§ 2. Динамические системы в n-мерном евклидовом пространстве. Существенные отличия от систем на плоскости и от систем на поверхностях обнаруживаются уже при $n=3$. В трехмерной

[7]) Очевидно, здесь идет речь об особых точках самой поверхности, что не следует путать с особыми точками векторного поля системы (10), заданной на поверхности.

[8]) Эта поверхность является фазовым пространством для системы (10).

системе

$$\dot{x} = P(x, y, z), \quad \dot{y} = Q(x, y, z), \quad \dot{z} = R(x, y, z)$$

наряду с состояниями равновесия и замкнутыми траекториями возможны траектории всех тех типов, что и на двумерных поверхностях и, в частности, незамкнутые устойчивые по Пуассону (незамкнутые самопредельные).

Однако установление всех возможных типов траекторий, аналогичное теории Пуанкаре — Бендиксона (гл. 2), для случая $n > 2$ значительно сложнее. У динамической системы на плоскости, если траектория L имеет незамкнутую предельную траекторию L_0, то L_0 среди своих предельных точек может иметь только состояния равновесия. В динамических системах числа измерений $n > 2$ возможна бесконечная цепочка траекторий, обладающих тем свойством, что все они отличны от состояния равновесия и каждая траектория L_{i+1} является предельной для L_i. Пример такой динамической системы с неаналитической правой частью см. [96]. Вопрос о возможности такой же ситуации в аналитической системе остается открытым.

Обратимся к вопросу о перенесении понятий, введенных для двумерных систем, на трехмерные и большего числа измерений. Рассмотрим, какой характер имеют простейшие «грубые» состояния равновесия и предельные циклы трехмерной системы. Возможны следующие случаи грубых состояний равновесия:

а) *узел* и *фокус*, устойчивый или неустойчивый, когда все траектории, достаточно близкие к состоянию равновесия, стремятся к нему при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$;

б) *седло* и *седло-фокус*; у седла и седло-фокуса есть двумерная сепаратрисная поверхность и две изолированные сепаратрисы (по разные стороны от сепаратрисной поверхности); на сепаратрисной поверхности седла есть узел, а на сепаратрисной поверхности седло-фокуса — фокус; все другие траектории, проходящие через достаточно малую окрестность седла и седло-фокуса, выходят из его окрестности и при возрастании, и при убывании t.

Качественный характер седла и седло-фокуса тождествен (в смысле, полностью аналогичном такому понятию, введенному для двумерных систем).

Характер указанных состояний равновесия наглядно и просто можно посмотреть на примере линейных систем. Для системы

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy, \quad \dot{z} = \gamma z$$

в начале координат при $(a - d)^2 + 4bc > 0$ будет седло, а при $(a - d)^2 + 4bc < 0$ — седло-фокус.

Аналогично тому, как окрестность предельного цикла двумерной динамической системы изучается с помощью функции последования, в трехмерном пространстве окрестность замкнутой траектории изучается с помощью «отображения Пуанкаре»—

отображения в себя трансверсальной к циклу площадки σ. Точка пересечения площадки с циклом есть инвариантная точка отображения.

Возможны следующие случаи грубых предельных циклов: устойчивый (неустойчивый) предельный цикл, когда все достаточно близкие к циклу траектории стремятся к нему при $t \to +\infty$ (при $t \to -\infty$), и седловой предельный цикл, который может быть двух типов. У седлового предельного цикла первого типа есть четыре двумерные сепаратрисные поверхности: две примыкающие к нему трубки и два примыкающих к нему кольца. На двух из сепаратрисных поверхностей (ω-сепаратрисах) все траектории вида спиралей стремятся к циклу при $t \to +\infty$, на двух других (α-сепаратрисах) — при $t \to -\infty$. У седлового цикла второго типа сепаратрисными поверхностями являются два листа Мёбиуса (ω- и α-сепаратрисные поверхности). Все остальные траектории из окрестности седлового предельного цикла выходят из окрестности и при возрастании, и при убывании t. На рис. 252 представлен седловой предельный цикл первого типа (сепаратрисные поверхности не показаны).

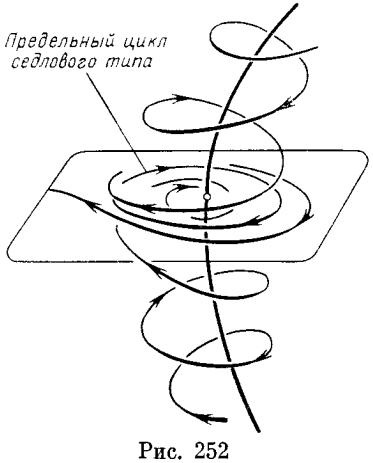


Рис. 252

Подчеркнем одно характерное для многомерных систем свойство: сепаратрисные поверхности разных седел и седловых предельных циклов могут пересекаться или касаться по общей для них траектории. Случай их трансверсального (без касания) пересечения является грубым.

Обратимся теперь к вопросу о перенесении понятий, введенных для двумерных систем, на трехмерные и большего числа измерений и в первую очередь — понятия грубости. И здесь ситуация осложняется. Надо иметь в виду, что рассмотрение вопроса о грубости трехмерных систем тесно связано с рассмотрением грубости отображения плоской области в себя или плоскости в плоскость. Полностью необходимые и достаточные условия грубости трехмерных систем еще не установлены. Выделены только классы грубых систем, удовлетворяющих некоторым достаточным условиям грубости. Это, в первую очередь, системы Морса — Смейла, удовлетворяющие условиям:

1) число состояний равновесия конечно и все состояния равновесия грубые;

2) число замкнутых траекторий конечно и все траектории грубые;

3) сепаратрисные поверхности различных седел и седловых предельных циклов пересекаются трансверсально (без касания).

Несмотря на простую и естественную формулировку этих достаточных условий, возможная качественная структура систем Морса — Смейла может быть очень сложной. У таких систем может быть счетное множество «ячеек». Существуют также примеры грубых динамических систем со счетным множеством седловых предельных циклов с неограниченно увеличивающимся периодом. Впервые такой пример был построен американским математиком Смейлом (см. список дополнительной литературы [42*]). Примеры грубых систем со счетным множеством устойчивых или неустойчивых циклов с неограниченно увеличивающимся периодом отсутствуют. Доказательство того, что в грубых многомерных системах не может существовать счетного множества предельных циклов с ограниченными периодами, не представляет затруднений.

Понятие грубости динамической системы в многомерных системах не играет той роли, которую оно играет для двумерных динамических систем. Именно, метеорологом Лоренцем для целей предсказания погоды была выведена очень простая система трех дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \sigma(x - y), \quad \dot{y} = xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz \qquad (1)$$

с постоянными параметрами σ, r и b (см. [36*]). Оказалось, что при некоторых значениях параметров при отсутствии каких-либо устойчивых состояний равновесия или устойчивых предельных циклов у этой системы существует двумерное притягивающее множество «аттрактор» — множество чрезвычайно сложной структуры, к которому все траектории из некоторой его окрестности стремятся при $t \to +\infty$.

В системе (1) есть седло, и это седло принадлежит аттрактору вместе со своими двумя изолированными сепаратрисами Γ_1 и Γ_2. Аттрактору же принадлежит и счетное всюду плотное множество седловых предельных циклов с неограниченно увеличивающимся периодом и всюду плотное множество устойчивых по Пуассону траекторий. А главное, этот аттрактор негрубый: при сколь угодно малых изменениях параметра сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 входящего в него седла меняют свое расположение — они то включаются в сепаратрисные поверхности одного из седловых циклов, входящих в аттрактор, то отделяются от нее. Так как седловые циклы всюду плотны в аттракторе, то при непрерывном изменении параметров аттрактор сохраняется, но его структура в силу описанного поведения сепаратрис Γ_1 и Γ_2 — непрерывно меняется. Таким образом, аттрактор Лоренца негрубый. Сложные режимы были обнаружены Лоренцем счетом на ЭВМ. Впоследствии структура аттрактора Лоренца была рассмотрена в ряде работ, например в [25*]. Полное рассмотрение см. [9*, 10*].

Аттрактор Лоренца и его негрубость сохраняются и вообще при всех достаточно малых изменениях правых частей уравнения (1). А отсюда, очевидно, следует, что не существует сколь угодно близкой к системе (1) грубой системы и, следовательно, грубые системы не всюду плотны в пространстве трехмерных систем. Так как для двумерных систем всюду плотность грубых систем в пространстве динамических систем была чрезвычайно важным свойством, то в этом кардинальном вопросе разница между двумерными и многомерными динамическими системами очень существенна[9]). Тем не менее понятие грубости динамических систем трех и большего числа измерений — в простейшем случае систем Морса — Смейла или даже в еще более упрощенной ситуации, например, в случае систем Морса — Смейла с конечным числом ячеек, все же сохраняет свое значение. Большое значение (как математическое, так и для приложений) имеет также рассмотрение бифуркаций многомерных динамических систем через негрубые системы. Мы сделаем по этому поводу некоторые краткие замечания.

Естественно рассмотреть в первую очередь бифуркации простейших негрубых элементов и, прежде всего, простейших негрубых состояний равновесия. В трехмерных системах, так же как и в двумерных, простейшими негрубыми являются состояния равновесия с двумя чисто мнимыми характеристическими корнями. Для них Ляпуновым аналогично двумерным системам введены «ляпуновские величины». В простейших из этих состояний равновесия первая ляпуновская величина отлична от нуля. В этом простейшем случае в трехмерных системах состояния равновесия могут быть двух типов: сложным фокусом (устойчивым или неустойчивым) и сложным седло-фокусом[10]). Далее, простейшими негрубыми состояниями равновесия в трехмерных системах могут быть двукратные состояния равновесия, возникшие в результате слияния двух простых. На рис. 253 показано образование двукратного состояния равновесия *седло-фокус — фокус* в результате слияния двух простых — седло-фокуса и устойчивого фокуса. При надлежащих изменениях правых частей системы двукратные состояния равновесия либо опять разделяются на простые, либо исчезают (см. [38*]). На рис. 254

---

[9]) Возможность существования такого сложного негрубого притягивающего множества, как аттрактор Лоренца, вызвала огромный резонанс как в математике, так и в приложениях. Еще до появления уравнений Лоренца были известны «хаотические», «стохастические» колебания в системах, описываемых точными уравнениями без всякого присутствия вероятностных добавлений. Впервые такие движения были обнаружены в точно математически описанной модели часов, данной Н. Н. Баутиным ([12*, 35*]). Как оказалось, так называемый «пичковый режим» в лазере описывается теми же уравнениями Лоренца ([58*]).

[10]) В многомерных системах число типов простых и сложных состояний равновесия увеличивается с увеличением числа измерений.

показано исчезновение двукратного состояния равновесия седло-узел, возникшего в результате слияния двух простых — седла и устойчивого узла. В двумерных системах два седла не могут слиться, образуя двукратное состояние равновесия, но такая возможность появляется в системах с числом измерений, большим двух.

Возможные бифуркации простейшего сложного фокуса с отличной от нуля первой ляпуновской величиной: либо фокус становится грубым той же устойчивости, что и сложный фокус, либо из сложного фокуса рождается предельный цикл, а сложный фокус превращается в седло-фокус (см. [37*]).

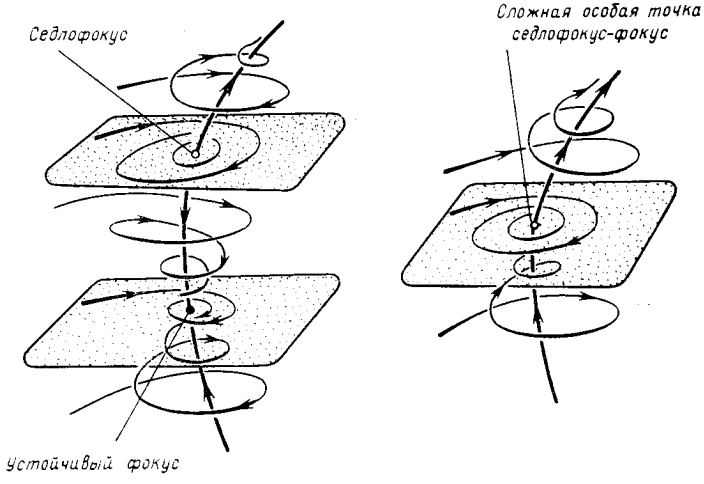


Рис. 253

Аналогичны бифуркации для сложного седло-фокуса: либо он делается грубым, либо из него рождается седловой предельный цикл, а седло-фокус становится грубым фокусом, устойчивым или неустойчивым (см. [37*]).

Возможны бифуркации, полностью аналогичные бифуркациям седло-узла на плоскости. Если сепаратриса седло-узла или седло-фокуса-фокуса идет в него же и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$, то при исчезновении состояния равновесия появляется единственный предельный цикл, устойчивый или неустойчивый в зависимости от того, был ли неустойчив или устойчив узел или соответственно фокус, от слияния с которым был получен седло-узел или седло-фокус-фокус.

Если одна из сепаратрис седло-седла возвращается в него же, то при исчезновении седло-седла появляется единственный седловой предельный цикл [137, 47*].

Рассмотрим бифуркации предельных циклов трехмерных динамических систем. Для таких предельных циклов Ляпуновым были введены величины, полностью аналогичные первому, неравному нулю коэффициенту в функции последования в окрестности замкнутой траектории на плоскости. Простейшими негрубыми предельными циклами являются циклы с первой ляпуновской величиной, не равной нулю. Таких предельных циклов в

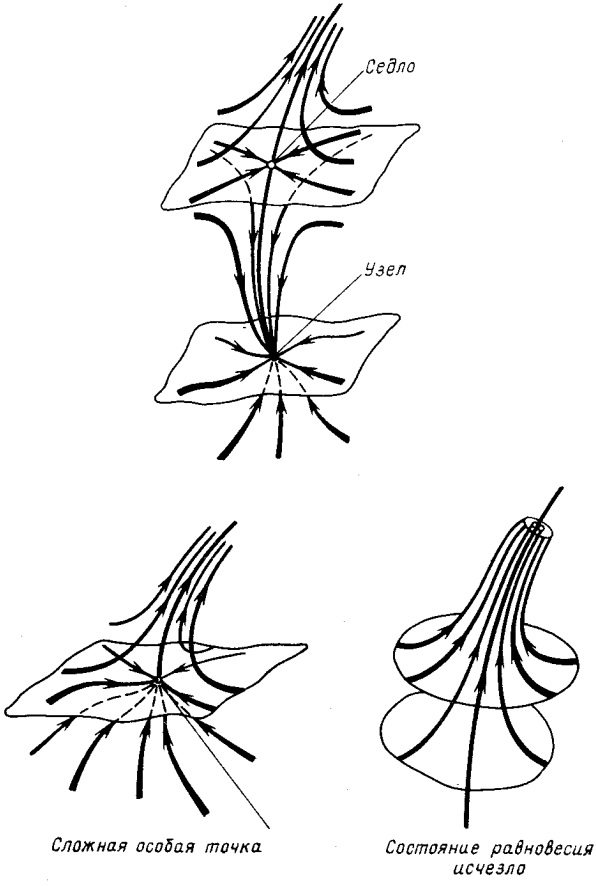


Рис. 254

трехмерном пространстве три типа. Предельный цикл первого типа аналогичен двукратному предельному циклу на плоскости. При малых изменениях правых частей динамической системы он или разделяется на два грубых предельных цикла — устойчивый (соответственно неустойчивый) и седловой, или исчезает. Цикл

второго типа может быть либо простым негрубым — устойчивым или неустойчивым, либо негрубым седловым. В первом случае от него при малых изменениях параметров либо отделяется двухоборотный с периодом, близким к удвоенному периоду однооборотного цикла (рис. 255), а однооборотный цикл делается седловым, либо он становится грубым устойчивым. Соответственно во втором случае от него либо отделяется двухоборотный седловой цикл, а остающийся однооборотный становится простым циклом, либо он делается грубым седловым. От цикла третьего типа — однооборотного, устойчивого — рождается устойчивый двумерный тор (рис. 256), а однооборотный предельный цикл делается неустойчивым. Разбиение на траектории самого тора может быть очень сложным. Оно может включать незамкнутые траектории, устойчивые по Пуассону (незамкнутые самопредельные), или пары устойчивых и неустойчивых замкнутых траекторий, являющихся предельными для других траекторий на торе (см. [13*, дополнение]). В трехмерной системе аналогом сепаратрисы двумерной системы, идущей из седла в другое седло, является либо касание сепаратрисных поверхностей разных седел, либо «включение» сепаратрисы одного седла в сепаратрисную поверхность другого, либо совпадение изолированных сепаратрис двух седел; α- и ω-сепаратрисные поверхности седловых предельных циклов могут касаться вдоль общей траектории, а также пересекаться. Общая траектория α- и ω-сепаратрисных поверхностей седлового предельного цикла называется *гомоклинической траекторией*. Структура окрестности гомоклинической траектории чрезвычайно сложна и исследовалась многими авторами, начиная с Пуанкаре и Биркгофа. Наиболее полное рассмотрение в [138].

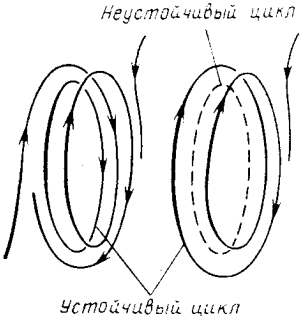


Рис. 255

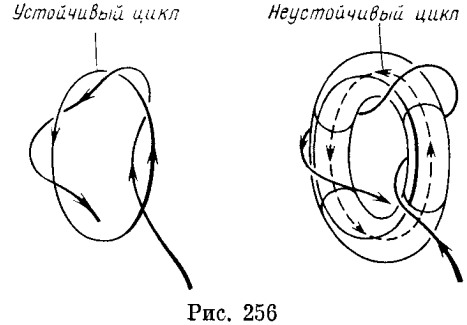


Рис. 256

Аналогом сепаратрисы, образующей «петлю», является в трехмерной системе случай, когда изолированная сепаратриса седла включается в сепаратрисную поверхность того же седла. Целый ряд основных случаев бифуркации такой сепаратрисы,

«образующей петлю», исследован в работе [139]. Для трехмерных систем введено понятие «седловой величины σ», полностью аналогичное седловой величине двумерной системы. Некоторые случаи рождения предельных циклов из петли сепаратрисы трехмерной системы аналогичны рождению цикла из петли двумерной системы. Так, если седловая величина $\sigma < 0$ и выполняется еще одно требование типа неравенства, то из петли сепаратрисы трехмерной системы при изменении параметров может родиться единственный устойчивый предельный цикл. При некоторых дополнительных условиях (типа неравенств) из петли сепаратрисы рождается единственный седловой предельный цикл. Однако если $\sigma > 0$, то ситуация становится неизмеримо более сложной: в окрестности петли существует счетное множество седловых предельных циклов с неограниченно возрастающим периодом ([46*]). (Более подробные сведения о многомерных системах и их бифуркациях см., например, [111, 140, 16*—19*, 24*, 38*, 46*, 48*].)

В заключение скажем еще несколько слов о фундаментальном понятии, лежащем в основе качественного рассмотрения двумерных систем,— о классификации с точки зрения топологической тождественности разбиения на траектории: в случае многомерных систем этот подход также требует пересмотра и модификации. Однако на этих важных и тонких вопросах мы здесь не имеем возможности останавливаться и отсылаем читателя к специальной литературе (см. [63*]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ [1])

1. Андреев А. Ф. Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Вестник ЛГУ.— 1955.— Т. 8.
2. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.; Л.: Научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
4. Андронов А. А. Собрание трудов.— М.: АН СССР, 1956.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Ученые записки ГГУ.— 1937.— Вып. 6.
6. Андронов А. А., Леонтович Е. А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории // ДАН СССР.— 1938.— Т. 21.— Вып. 9.
7. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Мат. сб.— 1956.— Т. 40, вып. 2.
8. Андронов А. А., Леонтович Е. А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел // Мат. сб.— 1959.— Т. 48, вып. 3.
9. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Мат. сб.— 1965.— Т. 68, вып. 3.
10. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференц. уравнения.— 1970.— Т. 6, № 12.
11. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // ДАН СССР.— 1937.— Т. 14, № 5.
12. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка.— М.: Наука, 1966.
13. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.
14. Арансон С. Х. Поворот поля в одной теореме теории грубых динамических систем на торе // ДАН СССР.— 1964.— Т. 156, № 5.
15. Арансон С. Х. Системы первой степени негрубости на торе // ДАН СССР.— 1965.— Т. 164, № 5.
16. Арансон С. Х. Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий и полутраекторий двоякоасимптотических к двойному предельному циклу у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях // Мат. сб.— 1962.— Т. 76, вып. 2.

---

[1]) Список не претендует на полноту и включает лишь использованную литературу и литературу, близкую по содержанию к материалу книги. Дополнительная библиография содержится в перечисленных монографиях и статьях.

17. Арансон С. Х. Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях // Мат. сб.— 1969.— Т. 80, вып. 3.
18. Арансон С. Х. Динамические системы на двумерных многообразиях // Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.
19. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1971.
20. Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах // УМН.— 1972.— Т. 27, вып. 5(167).
21. Аронович Г. В. Определение опасных и безопасных границ области устойчивости динамической системы в случае фокуса, лежащего на линии склейки // Изв. вузов. Радиофизика.— 1958.— Т. 1, № 2.
22. Аронович Г. В., Долинина Э. Н., Мотова М. И. Определение опасных и безопасных границ области устойчивости в случае состояния равновесия типа склеенного фокуса // Изв. вузов. Радиофизика.— 1965.— Т. 8, № 5.
23. Аронович Г. В., Картвелишвили Н. А., Любимцев Я. К. Гидравлический удар и уравнительные резервуары.— М.: Наука, 1968.
24. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О достижимых переходах от систем Морса — Смейла к системам со многими периодическими движениями // Изв. АН СССР. Математика.— 1974.— Т. 38, № 6.
25. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа «седло-узел» // ДАН СССР.— 1974.— Т. 210, № 6.
26. Баггис Г. Ф. Грубые системы двух дифференциальных уравнений // УМН.— 1955.— Т. 10, вып. 4.
27. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством.— М.: Наука, 1969.
28. Баутин А. Н. Качественное исследование одной кусочно-линейной системы // ПММ.— 1974.— Т. 38, вып. 4.
29. Баутин А. Н. Качественное исследование одной нелинейной системы // ПММ.— 1975.— Т. 39, вып. 4.
30. Баутин Н. Н. К теории синхронизации // ЖТФ.— 1939.— Т. 9, вып. 6.
31. Баутин Н. Н. Об одном случае негармонических колебаний // Ученые записки ГГУ.— 1939.— Вып. 12.
32. Баутин Н. Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл // ЖТФ.— 1939.— Т. 9, вып. 7.
33. Баутин Н. Н. О продольных движениях самолета, близких к фугоидным движениям // Ученые записки ГГУ.— 1947.— Вып. 13.
34. Баутин Н. Н. О поведении динамических систем при малых нарушениях условий устойчивости Рауса — Гурвица // ПММ.— 1948.— Т. 12, № 5.
35. Баутин Н. Н. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости // ПММ.— 1948.— Т. 12, № 6.
36. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Сер. «Современные проблемы механики».— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
37. Баутин Н. Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений // ПММ.— 1954.— Т. 18, № 1.
38. Баутин Н. Н. К теории выпрямителя с индуктивностью и сопротивлением в цепи нагрузки // Вторая всесоюзная конф. по теории и методам расчета нелин. электр. цепей. Сб. докл.— Ташкент, 1963.
39. Баутин Н. Н. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы // ПММ.— 1969.— Т. 33, вып. 6.
40. Баутин Н. Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты // ПММ.— 1970.— Т. 34, вып. 5.

41. Баутин Н. Н. Об аппроксимации и грубости пространства параметров динамической системы // Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям.— Киев, 1970.
42. Баутин Н. Н. Об аппроксимациях и бифуркациях в одной динамической системе // ПММ.— 1971.— Т. 35, вып. 5.
43. Баутин Н. Н. Качественное исследование одной динамической системы // ПММ.— 1972.— Т. 36, вып. 3.
44. Баутин Н. Н. Некоторые методы качественного исследования динамических систем, связанные с поворотом поля // ПММ.— 1973.— Т. 37, вып. 6.
45. Белюстина Л. Н. К динамике симметричного полета // Изв. АН СССР. ОТН.— 1956.— Т. 11.
46. Белюстина Л. Н. О разбиении на траектории цилиндрической фазовой поверхности // Изв. вузов. Радиофизика.— 1958.— Т. 1, № 2.
47. Белюстина Л. Н., Чеснокова Р. А. Качественное исследование нелинейного уравнения синхронного генератора с асинхронной характеристикой // Ученые записки ГГУ — НИИ ПМК. Прикладная математика и кибернетика.— Горький, 1967.
48. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // УМН.— 1941.— Т. 9.
49. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 1.— Киев: Наукова думка, 1969.
50. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 1.— Киев, 1963.
51. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1974.
52. Бутенин Н. К. К теории принудительной синхронизации // Сб. «Памяти А. А. Андронова».— М.: АН СССР, 1955.
53. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний.— Л.: Судпромгиз, 1962.
54. Бутенина Н. Н. Бифуркации сепаратрис и предельных циклов двумерной динамической системы при повороте поля // Дифференц. уравнения.— 1973.— Т. 9, № 8.
55. Бутенина Н. Н. Бифуркации сепаратрис двумерной динамической системы при повороте поля. Качественные методы теории дифференциальных уравнений и их приложения // Ученые записки ГГУ.— 1973.— Вып. 187.
56. Бутенина Н. Н. О многократном слиянии сепаратрис // Ученые записки ГГУ.— 1973.— Вып. 187.
57. Бутенина Н. Н. К теории бифуркаций динамических систем при повороте поля // Дифференц. уравнения.— 1974.— Т. 10, № 7.
58. Бутенина Н. Н. О возможности поворота векторного поля динамической системы на угол π с переходом лишь через системы первой степени негрубости // Межвузовский сб. «Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика».— Горький, 1974.
59. Власов Н. П. Автоколебания синхронного мотора // ЖТФ.— 1938.— Т. 9, вып. 10.
60. Власов Н. П. Автоколебания синхронного мотора // Ученые записки ГГУ.— 1939.— Вып. 12.
61. Вольтер Г. В., Сальников И. Е., Скрябин Б. Н. Автоколебательные процессы в открытых химических системах полного перемешивания // Сб. «Колебательные процессы в биологических и химических системах».— М.: Наука, 1967.
62. Вольтер Г. В., Сальников И. Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов.— М.: Химия, 1972.
63. Врублевская И. Н. О геометрической эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем // Матем. сб.— 1947.— Т. 42.

64. Врублевская И. Н. Некоторые критерии эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем.— ДАН СССР.— 1954.— Т. 97, № 2.
65. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // Матем. сб.— 1972.— Т. 88(130), № 4; 1973.— Т. 90(132), № 1.
66. Гершт Е. Н. Качественное исследование одного дифференциального уравнения теории электрических машин // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение.— 1964.— № 1.
67. Гершт Е. Н. Качественное исследование одного дифференциального уравнения теории электрических устройств // Механика твердого тела.— 1966.— № 1.
68. Горушкин В. И. Условия синхронизации генератора с нелинейной асинхронной характеристикой // Изв. АН СССР ОТН. Энергетика и автоматика.— 1959.— № 2.
69. Губарь Н. А. Характеристика сложных особых точек системы двух дифференциальных уравнений при помощи грубых особых точек близких систем // Матем. сб.— 1956.— Т. 40, вып. 1.
70. Губарь Н. А. Исследование методом Бендиксона топологической структуры расположения траекторий в окрестности особой точки одной динамической системы // Изв. вузов. Радиофизика.— 1959.— Т. 2, № 6.
71. Губарь Н. А. Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами // ПММ.— 1961.— Т. 25, № 6.
72. Губарь Н. А. О бифуркациях в окрестности «сшитого фокуса» // ПММ.— 1971.— Т. 35, вып. 5.
73. Гудков Д. А. О понятии грубости и степеней негрубости для плоских алгебраических кривых // Матем. сб.— 1965.— Т. 67, № 4.
74. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания.— М.: Наука, 1974.
75. Жуковский Н. Е. О парении птиц. Собр. соч. Т. 4.— М.: Гостехиздат, 1949.
76. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.
77. Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости.— М.: Физматгиз, 1963.
78. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики.— М.; Л.: ОНТИ, 1934.
79. Латипов Х. Р. Качественное исследование характеристик одного дифференциального уравнения в целом на плоскости // Nonlinear vibration problems, second conference on nonlinear vibrations.— Warsaw, 1964.
80. Латипов Х. Р. О распределении особых точек уравнения Фроммера на всей плоскости // Изв. вузов. Математика.— 1965.— Т. 1.
81. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // ДАН СССР.— 1937.— Т. 14, № 5.
82. Леонтович Е. А., Майер А. Г. Общая качественная теория. Дополнение к главам 5 и 6 // А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М.: Гостехиздат, 1947.
83. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // ДАН СССР.— 1955.— Т. 103, № 4.
84. Леонтович Е. А. О рождении предельных циклов от сепаратрисы // ДАН СССР.— 1951.— Т. 28, № 4.
85. Леонтович Е. А. Некоторые математические работы Горьковской школы А. А. Андронова // Тр. 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 3.— М.: АН СССР, 1958.

86. Леонтович Е. А. О некоторых аналогиях между плоскими алгебраическими кривыми и алгебраическими системами на плоскости // ДАН СССР.— 1959.— Т. 129, № 3.
87. Леонтович Е. А. К вопросу определения грубой динамической системы // Nonlinear vibration problems, second conference on nonlinear vibrations.— Warsaw, 1964.
86. Леонтович Е. А., Шильников Л. П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Т. 2.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.
89. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.— М.: Мир, 1964.
90. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1960.
91. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Современные проблемы механики.— М.: Гостехиздат, 1951.
92. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.: Гостехиздат, 1950.
93. Майер А. Г. Доказательство существования предельных циклов у уравнений Рэлея и Ван дер Поля // Ученые записки ГГУ.— 1935.— Вып. 2.
94. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки ГГУ.— 1939.— Вып. 12.
95. Майер А. Г. О траекториях на ориентируемых поверхностях // Матем. сб.— 1943.— Т. 12, вып. 1.
96. Майер А. Г. О центральных траекториях и проблеме Биркгофа // Матем. сб.— 1943.— Т. 12, вып. 1.
97. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.— М.; Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1949.
98. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.
99. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е.— М.: Гостехиздат, 1966.
100. Мандельштам Л. И. Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники // Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям». Т. 1.— М.: ГТТИ, 1933.
101. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э. Новые исследования нелинейных колебаний.— М.: Гос. изд-во по вопросам радио, 1936.
102. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.
103. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М.: Наука, 1973.
104. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний // Изв. вузов. Радиофизика.— 1958.— Т. 1, № 1, 2.
105. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1972.
106. Неймарк Ю. И., Шильников Л. П. О применении метода малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1959.— Т. 6.
107. Неймарк Ю. И., Шильников Л. П. Исследование динамических систем, близких к кусочно-линейным // Изв. вузов. Радиофизика.— 1960.— Т. 3, № 3.
108. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
109. Непомнящая И. А. Качественное исследование одной неаналитической системы с цилиндрическим фазовым пространством. Качествен-

ные методы теории дифференциальных уравнений // Ученые записки ГГУ.— 1973.— Вып. 187.
110. Николаев Я. Н. Автоколебания маятника при больших размахах // Ученые записки ГГУ.— 1939.— Вып. 12.
111. Нитецкий Э. Введение в дифференциальную динамику.— М.: Мир, 1975.
112. Петровский И. Г. О поведении интегральных кривых систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Матем. сб.— 1934.— Т. 41, № 1.
113. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 4-е.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
114. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний.— М.: Наука, 1964.
115. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ.— 1934.— Т. 4, вып. 8.
116. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е.— М.: Наука, 1965.
117. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
118. Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1974.
119. Рощин Н. В. К динамике оптического квантового генератора с управляемой добротностью резонатора // Изв. вузов. Радиофизика.— 1973.— Т. 16, № 7.
120. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: ИЛ, 1954.
121. Серебрякова Н. Н. О поведении динамической системы с одной степенью свободы вблизи тех точек границы области устойчивости, где безопасная граница переходит в опасную // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1959.— Т. 2.
122. Серебрякова Н. Н. Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений теории колебаний // ПММ.— 1963.— Т. 27, вып. 1.
123. Серебрякова Н. Н. О периодических решениях динамических систем второго порядка, близких к кусочно-линейным // ПММ.— 1963.— Т. 27, вып. 2.
124. Серебрякова Н. Н. О периодических решениях динамических систем второго порядка, близких к кусочно-гамильтоновым // ПММ.— 1969.— Т. 33, вып. 5.
125. Скрябин Б. Н. О режимах проточного химического реактора при осуществлении экзотермической реакции произвольного порядка // ДАН СССР.— 1968.— Т. 179, № 2.
126. Скрябин Б. Н. Об одной динамической системе с разрывной характеристикой // ПММ.— 1968.— Т. 32, вып. 4.
127. Скрябин Б. Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты // ПММ.— 1969.— Т. 33, вып. 2.
128. Скрябин Б. Н. Об уравнении фазовой автоподстройки частоты с запаздыванием и прямоугольной характеристикой фазового детектора // ПММ.— 1972.— Т. 36, вып. 3.
129. Скрябин Б. Н. Качественное исследование уравнений, описывающих динамику проточного химического реактора (экзотермическая реакция произвольного порядка) // Ученые записки ГГУ.— 1973, вып. 187.
130. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1959.
131. Флюгге-Лотц И. Метод фазовой плоскости в теории релейных систем.— М.: Физматгиз, 1959.
132. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // УМН.— 1941.— Вып. 9.

133. Хаимов Н. В. Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные части // Ученые записки физ.-мат. ф-та Сталинабадского педагогического и учительского института.— 1952.— Т. 2, № 3.
134. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.
135. Четаев Н. Г. Устойчивость движения.— М.: Наука, 1965.
136. Шалфеев В. Д. К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Изв. вузов. Радиофизика.— 1969.— Т. 12, № 7.
137. Шильников Л. П. Некоторые случаи рождения периодических движений из особых траекторий // Мат. сб.— 1963.— Т. 61(104).
138. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре — Биркгофа // Мат. сб.— 1967.— Т. 74(116), № 3.
139. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло // Мат. сб.— 1968.— Т. 77(119), № 3.
140. Шильников Л. П. Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем // ДАН СССР.— 1969.— Т. 189, № 1.
141. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы // ДАН СССР.— 1975.— Т. 224, № 5.
142. Bautin N. N. On a Certain Differential Equation having a Limiting Cycle // Technical Physics of the USSR.— 1938.— V. 5, № 3.
143. Bendixon I. Sur les courbes definies par des equations differentielles // Acta Math.— 1901.— V. 24, № 1.
144. De Baggis H. F. Dynamical systems with stable structure. Contributions of the theory of nonlinear oscillations.— Prinston, 1952.
145. Duff G. F. D. Limit-cycles and rotated vektor fields // Ann. of Math.— 1953.— T. 57, № 1.
146. Dulac H. Recherche des cycles limites // C. r. Acad. sci.— 1937.— V. 204, № 23.
147. Frommer M. Ueber das Auftreten von Wirbeln und Strudeln // Math. Ann.— 1934.— Bd. 109.— S. 395.
148. Fuchs-Hopf-Seewald. Aerodynamik.— Berlin: Springer, 1934.
149. Giger A. Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichungen // Z. angew. Math. und Phys.— 1956.— Bd 7.— H. 2.
150. Ikonnikov E. A. On the Dynamics of symmetrical flight of an aeroplane // Techn. Phys. of the USSR.— 1937.— V. 4, № 6.
151. Kamke E. Differentialgleichungen reeler Funktionen.— Leipzig, 1930.
152. Krautwig F. Stabilitätsuntersuchungen an unstetigen Reglern, dargestellt an Hand einer Kontaktnachlaufsteueurung // Archiv für Elektrotechnik.— 1941.— T. 35.— H. 2.
153. Ku Y. H. Nonlinear Analysis of Electromechanical Problems // J. Franclin Institute.— 1953.— V. 255.
154. Markus L. Global structure of ordinary differential equations in the plane // Trans. Am. Math. Soc.— 1954.— V. 76, № 1.
155. Peixoto M. C., Peixoto M. M. Structural stability in the plane with enlaged boundary conditions // Anals. Acad. brasil cienc.— 1959.— V. 31, № 2.
156. Peixoto M. M. On structural stability // Ann. Math.— 1959.— V. 69, № 1.
157. Peixoto M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology.— 1962.— V. 1.
158. Perron O. Ueber Stabilität und asymptotische Verhalten der integrale von Differentialgleichungssystem // Math. Zeitschr.— 1928.— T. 29.
159. Pontrjagin L. S. Über Autoschwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahe liegen // Phys. Zeitschrift der Sowjetunion.— 1934.— T. 6.— H. 1—2.

160. Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. T. 3.— Paris, 1899.
161. Sansone G., Conti R. Non-Linear Differential Equation.— Pergamon Press, 1964.
162. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentatasi in electrotechnica // Ann. Scuola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat.— 1933.— T. 2.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ *)

1. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка.— Минск: БГУ, 1982.
2. Андронова Е. А. К топологии квадратичных систем с четырьмя предельными циклами // УМН.— 1986.— Т. 41, вып. 2.
3. Арансон С. Х., Гринес В. З. Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // УМН.— 1986.— Т. 41, вып. 1.
4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
5. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
6. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1984.
7. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Об особых множествах систем Морса — Смейла // Тр. Московского матем. об-ва.— 1973.— Т. 28.
8. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем // ПММ.— 1977.— Т. 41.
9. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР.— 1977.— Т. 234, № 2.
10. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. Московского математического об-ва.—1982.— Т. 44.
11. Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И. Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости. Информационный материал.— Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.
12. Баутин Н. Н. Динамическая модель электромеханических часов с ходом Гиппа // Известия АН СССР ОТН.— 1957.— № 11.
13. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Изд. 2-е.— М.: Наука, 1984.
14. Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр // Мат. сб.— 1952.— Т. 30(72), вып. 1.
15. Березовская Ф. С., Крейцер Г. П. Степенные асимптотики систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки: Препр./ОНТИ НЦБИ АН СССР.— Пущино, 1976.
16. Березовская Ф. С. Сложная стационарная точка системы на плоскости: структура окрестности и индекс: Препр./НИВЦ АН СССР.— Пущино, 1978.
17. Беляков Л. А. Об одном случае рождения периодического движения с двумя гомоклиническими кривыми // Мат. заметки.— 1974.— Т. 15, вып. 4.
18. Беляков Л. А. О бифуркационном множестве в системах с гомоклинической кривой седла // Мат. заметки.— 1980.— Т. 28, вып. 6.

*) В тексте ссылки на дополнительную литературу даются в виде номеров со звездочками.

19. Беляков Л. А. Бифуркации систем с гомоклинической кривой седло-фокуса с нулевой седловой величиной // Мат. заметки.— 1984.— Т. 36, вып. 5.
20. Богданов Р. И. Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1976.— Вып. 2.
21. Богданов Р. И. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел. Там же.
22. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1979.
23. Быков В. В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом // Межвузовский сб. «Методы качественной теории диф. уравнений».— Горький, 1978.
24. Варченко А. Н. Оценка числа нулей вещественного абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— Вып. 2.
25. Вильямс Р. Структура аттракторов Лоренца // Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981.
26. Воронин С. М. Аналитическая классификация ростков конформных отображений с тождественной линейной частью // Функцион. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, вып. 1.
27. Гольдбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.— М.: Мир, 1973.
28. Динамические системы. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления».— М.: ВИНИТИ, 1985.
29. Дюлак Г. О предельных циклах.— М.: Наука, 1980.
30. Жолондек Х. Версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Мат. сб.— 1983.— Т. 120.
31. Ильяшенко Ю. С. Особые точки и предельные циклы дифференциальных уравнений на вещественной и комплексной плоскости: Препр./ ОНТИ НЦБИ АН СССР.— Пущино, 1982.
32. Ильяшенко Ю. С. Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений // УМН.— Т. 40, № 6.
33. Ильяшенко Ю. С. Возникновение предельных циклов при возмущении уровнения $\frac{dw}{dz} = \frac{R_z}{R_w}$, где $R(z, w)$ — многочлен // Мат. сб.— 1969.— Т. 78, № 3.
34. Ильяшенко Ю. С. Кратность предельных циклов, возникающих при возмущении гамильтонова уравнения класса $w' = P_2/Q_1$ в вещественной и комплексной области // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1978.— Вып. 3.
35. Комраз Л. А. Динамические модели маятникового регулятора Гиппа // ПММ.— 1971.— Т. 35, вып. 1.
36. Лоренц Э. М. Детерминированное непериодическое движение // Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981.
37. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
38. Минц Р. М. Исследование некоторых основных типов сложных состояний равновесия // Матем. сб.— 1964.— Т. 63.
39. Палис Ж. ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем.— М.: Мир, 1986.
40. Петров Г. С. Эллиптические интегралы и их неколеблемость // Функцион. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, № 1.
41. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.
42. Смейл С. Структурно-устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1961.

43. Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость положений равновесия.— Пущино: НЦВИ АН СССР, 1985.
44. Хорозов Е. И. Версальные деформации эквивариантных векторных полей для случаев симметрии порядка 2 и 3 // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1979.— Вып. 5.
45. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1986.
46. Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // ДАН СССР.— 1965.— Т. 160, № 3.
47. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же // ДАН СССР.— 1986.— Т. 170, № 1.
48. Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Мат. сб.— 1970.— Т. 81, № 1.
49. Bamon R. Solution of Dulac's problem for quadratic vector fields. Preprint. Santiago.— Univ. de Chile, 1986.
50. Conley Ch. Isolated invariant sets and the Morse index // Conf. board math., reg conf. ser. in math.— Providence: AMS, 1978.
51. Dumortier F. Singularities of vector fields on the plane // J. Different., Equat.— 1977.— V. 23, № 1.
52. Dumortier F. Singularites of vector fields. IMPA.— Rio de Janeiro, 1978.
53. Dumortier F., Rodrigues P. R., Roussarie R. Germs diffeomorphismus in the plane // Lect. Notes Math.— Springer Verlag, 1981.
54. Dumortier F., Roussarie R. Germes de diffeomorphismes et de champs de vecteurs en classe de differentiabilite finie.— Grenoble: Ann. Inst. Fourier, 1983.
55. Dynamical system and turbulence, Warwick, 1980, Proceedings // Lect. notes in wath. N. 898.— Berl.; Hdlb. N. Y.: Springer, 1981.
56. Fiedler B. Global Hopf bifurcatien of two parameter flows. Preprint N. 293. Hdlb // Inst. fur angew. Math. Univ. Heidelberg.— 1984.
57. Guckenheimer J., Holmes P. H. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.— Springer, 1983.
58. Haken H. Analogy between higher unstabilities an fluid and lasers // Phys. letters.— 1975.— V. 53A, N 1.
59. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journ. of the Atmospheric Sciences.— 1963.— V. 20.
60. Malta I. P., Palis J. Families of vector fields with finite modulus of stability — in 51.
61. Medved M. The infoldings of a germ of vector field in the plane with a singularity of codimension 3 // Czechoslovak math. J.— 1985.— V. 35.
62. Lansun Ch., Mingshu W. The relative position and number of limit cycles of the quadratic differwntial system // Acta Math. Sinica.— 1979.— V. 22, № 6.
63. Newhouse S., Palis Y., Takens F. Bifurcation and stabilit. of diffeomorphisms // Publs math. Inst. hautws etud. sci.— 1983.— V. 57.
64. Roussorie R. On the number of limit cycles whith appear by perturbation of separatrix of planar vector fields. Preprint.— Universite de Bourgogne.
65. Smoller J. Shock waves and reaction — diffusion eqations.— N. Y.; Hdlb; London; Springer, 1983.
66. Songling Sh. A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems // Scientia Sinica.— 1980.— V. 23, № 2.

67. H. Dulac, Determination et integration d'une certaine classe d'equations differentielles ayant pour point singulier un centre // Bull. Sc. Math. (2).— 1908.— № 32.
68. W. Kapteyn. Nieuw onderzoek omtrent de middelpunten der integralen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en den eersten graad // Koninkl. Nederland. Akad.— 1911—1912.— Bd XIX—XXI.
69. Bautin N. N. On the number of Limit Cyctes which Appear with the Variation of Coefficients from an Equilibrium Position of Focus or Center Type // American mathematical society.— 1954.— № 100.

Справочное издание

БАУТИН Николай Николаевич,
ЛЕОНТОВИЧ Евгения Александровна

МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ
КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
НА ПЛОСКОСТИ

Серия «Справочная математическая библиотека»,
выпуск 11

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*
Редакторы: *И. М. Бокова, И. В. Викторенкова, Е. Н. Волкова*
Технические редакторы: *А. И. Колесникова, Е. В. Морозова*
Корректоры: *М. А. Смирнов, Л. С. Сомова*

ИБ № 41021

Сдано в набор 15.09.89. Подписано к печати 23.11.90. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 30,5. Усл. кр.-отт. 30,5. Уч.-изд. л. 31,69. Тираж 6900 экз. Заказ № 856. Цена 3 р. 20 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 8
Предисловие к первому изданию 9

Часть I

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Глава 1. Общие сведения о динамической системе на плоскости. Основные теоремы 11
§ 1. Автономная динамическая система на плоскости . . 11
§ 2. Теорема существования и единственности решения . . 12
§ 3. Простейшие свойства решений системы (A) 13
§ 4. Геометрическая интерпретация системы (A) на фазовой плоскости (x, y) 15
§ 5. Сопоставление геометрической интерпретации системы (A) в пространстве (x, y, t) с интерпретацией на фазовой плоскости 17
§ 6. Некоторые термины 18
§ 7. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий 19
§ 8. Направление на траекториях. Изменение параметризации 19
§ 9. Дифференциальное уравнение, соответствующее динамической системе 22
§ 10. Понятие интегральной кривой и интеграла в случае аналитических правых частей $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ системы (A) . 23
§ 11. Что значит «найти решение динамической системы»? . . 25
§ 12. Примеры 26
§ 13. Замечания по поводу примеров § 12 35
§ 14. Математическое определение качественной (топологической) структуры разбиения на траектории и качественного исследования динамической системы 37

Глава 2. Возможный характер отдельной траектории. Теория Пуанкаре — Бендиксона. Особые траектории 40
Введение 40
§ 1. Дуга без контакта 40
§ 2. Цикл без контакта 42
§ 3. Предельная точка полутраектории и траектории. Предельная траектория 43
§ 4. Основная теорема 46
§ 5. Возможные типы полутраекторий и их предельных множеств 48
§ 6. Особые и неособые полутраектории и траектории . . . 50
§ 7. Возможные типы особых и неособых траекторий . . . 52

§ 8. Случай конечного числа особых траекторий. Элементарные ячейки 53
§ 9. Возможные типы ячеек. Односвязные и двусвязные ячейки 55
§ 10. Два подхода к описанию качественной структуры . . . 56
§ 11. Качественная (топологическая) структура состояния равновесия в случае конечного числа особых траекторий. Схема динамической системы 57
§ 12. Устойчивость по Ляпунову 63

Глава 3. **Исследование качественной структуры окрестности состояния равновесия (особой точки)** 65

Введение 65
§ 1. Простые состояния равновесия (особые точки) 65
§ 2. Приведение динамической системы к каноническому виду . 66
§ 3. Возможный характер простых состояний равновесия. Грубые состояния равновесия 68
§ 4. Замечания о методах установления характера грубых состояний равновесия 69
§ 5. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями 70
§ 6. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия 75
§ 7. Угловой коэффициент направления, в котором траектория может стремиться к простому состоянию равновесия . . 77
§ 8. Сводка сведений о грубых состояниях равновесия . . . 80

Глава 4. **Качественная структура окрестностей некоторых сложных состояний равновесия** 84

§ 1. Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия 84
§ 2. Сложное состояние равновесия (особая точка) с нулевыми характеристическими корнями 86
§ 3. Примеры 91
§ 4. Нормальные формы 94

Глава 5. **Функция последования. Простые и сложные предельные циклы** 95

§ 1. Функция последования 95
§ 2. Условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки точечного отображения 97
§ 3. Функция соответствия 98
§ 4. Изучение окрестности замкнутой траектории. Простые и сложные предельные циклы 99
§ 5. Аналитические выражения для коэффициентов функции последования. Характеристический показатель замкнутой траектории 103

Глава 6. **Некоторые приемы качественного исследования** . . . 106

§ 1. Некоторые признаки существования и отсутствия предельных циклов 106
§ 2. Изучение поведения интегральных кривых в бесконечности. Сфера Пуанкаре 107
§ 3. Примеры исследования в бесконечности 109
§ 4. Критерии Бендиксона и Дюлака отсутствия предельных циклов 113
§ 5. Топографическая система Пуанкаре. Функция Ляпунова. Кривые контактов 118

Часть II
ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ

Глава 7. **Двумерные консервативные системы. Неконсервативные динамические системы теории колебаний. Общие теоремы** . . 128
Введение 128
§ 1. Свойства консервативных систем на плоскости 128
§ 2. Динамические системы, характерные для теории колебаний 130
§ 3. Измененные системы. Системы, правые части которых зависят от параметра 131
§ 4. Основные теоремы о зависимости решения от изменения правых частей динамической системы 133
§ 5. Грубость динамической системы и теорема о непрерывной зависимости решения от изменения правых частей . . . 136

Глава 8. **Грубые динамические системы** 138
§ 1. Определение грубой динамической системы 138
§ 2. Состояния равновесия, возможные в грубой динамической системе 141
§ 3. Состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями 142
§ 4. Замкнутые траектории, возможные в грубой системе . . 143
§ 5. Поведение сепаратрис седел в грубых системах . . . 145
§ 6. Необходимые условия грубости. Достаточность этих условий для грубости системы 145
§ 7. Пространство динамических систем. Всюду плотность грубых (двумерных) динамических систем 147
§ 8. Понятие грубости при более общих предположениях относительно правых частей динамической системы 148
§ 9. Типы особых траекторий и ячеек в грубых системах . . 151
§ 10. Замечания по поводу определения грубой системы . . . 153

Глава 9. **Простейшие негрубые динамические системы — системы первой степени негрубости** 155
§ 1. Общие замечания 155
§ 2. Системы первой степени негрубости 155
§ 3. Состояния равновесия, возможные в системе первой степени негрубости 157
§ 4. Замкнутые траектории, возможные в системе первой степени негрубости 158
§ 5. Условия на сепаратрисы седел и седло-узлов в системе первой степени негрубости 158
§ 6. Необходимые и достаточные условия первой степени негрубости 159
§ 7. Динамические системы более высокой степени негрубости 160

Глава 10. **Бифуркации при изменении правых частей динамической системы** 163
§ 1. Определение бифуркации 163
§ 2. Бифуркации систем первой степени негрубости 164
§ 3. Бифуркации некоторых типов сложных особых точек . . 171
§ 4. Бифуркации двукратной точки, для которой $\Delta = 0$ и $\sigma = 0$ 174
§ 5. Рождение предельных циклов из особых траекторий степени негрубости выше первой 178

Глава 11. **Динамические системы, правые части которых содержат параметры** 180
§ 1. Возможный характер зависимости правых частей динамической системы от параметров 180

§ 2. Смена качественных структур при изменении параметров . 184
§ 3. Случай, когда правые части зависят более чем от одного параметра 190
§ 4. Бифуркации «от бесконечности» 194
§ 5. Условия существования седло-узла и сложного фокуса первого порядка 196
§ 6. Поворот векторного поля 200
§ 7. Метод малого параметра. Метод Понтрягина 203

Глава 12. Динамические системы с цилиндрической фазовой поверхностью 208
§ 1. Цилиндрическая фазовая поверхность и характер траекторий, возможных на цилиндрической фазовой поверхности . . . 208
§ 2. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр 209
§ 3. Приемы исследования качественной структуры динамической системы на цилиндре 212
§ 4. Понятие грубости и степени негрубости для динамических систем на цилиндре. Бифуркации на цилиндре. Поворот поля 212
§ 5. Динамические системы на цилиндре, близкие к гамильтоновым (метод Понтрягина) 215

Глава 13. Адекватное истолкование нелинейных физических явлений фактами качественной теории и теории бифуркаций динамических систем 217
Введение 217
§ 1. Мягкий и жесткий режимы 219
§ 2. Замечания о границах области устойчивости различных стационарных режимов 220
§ 3. Мягкое и жесткое возникновение колебаний 222
§ 4. «Безопасные» и «опасные» границы области устойчивости состояний равновесия 225
§ 5. Замечания по поводу других границ области устойчивости 234

Часть III

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Глава 14. Общие замечания о приемах качественного исследования 237
Введение 237
§ 1. Некоторые рецептурные указания 241
§ 2. Некоторые простые примеры качественного исследования динамических систем на плоскости 243
§ 3. Некоторые простые примеры динамических систем на цилиндре 252

Глава 15. Исследование методом малого параметра (методом Понтрягина) 258
§ 1. Общие замечания 258
§ 2. Примеры рассмотрения методом Понтрягина (полное исследование) 260
§ 3. Исследование методом Понтрягина с привлечением вычислительных методов 272

Глава 16. Качественное исследование динамических систем с использованием приемов, опирающихся на теорию бифуркаций . 285
§ 1. Квадратичное дифференциальное уравнение 285
§ 2. Электрическая цепь с туннельным диодом 292
§ 3. Двумерная модель динамики твердотельного лазера . . 305

§ 4. Симметричный полет самолета в вертикальной плоскости (задача Н. Е. Жуковского) 313
§ 5. Система, описывающая динамику проточного химического реактора 324
§ 6. Фазовая автоподстройка частоты 334
§ 7. Частотно-фазовая автоподстройка частоты (случай существования трех предельных циклов) 340
§ 8. Синхронный генератор с асинхронной характеристикой . 345

Часть IV
КУСОЧНО-СШИТЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 17. Общие сведения о кусочно-сшитых системах . . . 357
Введение 357
§ 1. Сшитые системы. Доопределение на линиях сшивания . . 359
§ 2. Возможные типы полутраекторий сшитых систем . . . 361
§ 3. Особые траектории сшитых систем 363
§ 4. Бифуркации в сшитых системах. Метод Понтрягина для сшитых систем 367

Глава 18. Исследование кусочно-сшитых систем методом Понтрягина 382
§ 1. Уравнение из теории электрических машин 382
§ 2. Автоподстройка при кусочно-постоянной аппроксимации характеристики 388
§ 3. Автоколебания синхронного мотора 392

Глава 19. Качественное исследование сшитых систем методами теории бифуркаций 399
§ 1. Кусочно-линейная система с тремя параметрами . . . 399
§ 2. Следящая система с люфтом 404
§ 3. Электрическая цепь с туннельным диодом 408
§ 4. Система со скачками на линии сшивания 418

Глава 20. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров 431
Введение 431
§ 1. Рассмотрение системы (2) при аппроксимациях пилообразными функциями 433
§ 2. Рассмотрение системы (2) при аппроксимации, включающей отрезок параболы 437
§ 3. Рассмотрение системы (2) при аппроксимациях кусочно-постоянной для $\sin\varphi$ и пилообразной для $\cos\varphi$ функциями. . 439
§ 4. Исследование роли аппроксимаций для уравнения маятникова типа 444
§ 5. Динамическая система, описывающая автоколебания синхронного мотора 449
§ 6. Динамическая система, описывающая симметричный полет самолета 458

Дополнение 463
§ 1. Динамические системы на двумерных поверхностях . . . 463
§ 2. Динамические системы в n-мерном евклидовом пространстве 467

Список литературы 476
Список дополнительной литературы 483