Г.Е.О.Джакалья

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Излагаются методы теории возмущений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. В основном рассматриваются гамильтоновы системы уравнений, а затем все выводы обобщаются на случай негамильтоновых систем. Отражены как классические, так и новые методы теории возмущений, в том числе и методы, созданные самим автором. Проведен сравнительный анализ разных методов. Описание теоретических основ методов проиллюстрировано примерами из механики.

Глубина, подробность и ясность изложения делают книгу весьма полезной как для специалистов по качественной теории дифференциальных уравнений и по небесной механике, так и для начинающих исследователей.

Содержание

Предисловие редактора 5
Предисловие 6
Введение 7
Глава I. Теория канонических преобразований. Обобщения 14
1. Введение 14
2. Канонические преобразования 19
3. Уравнение Гамильтона — Якоби. Обобщения 24
4. Ряды Ли и преобразования Ли 28
5. Преобразование Ли, зависящее от параметра 34
6. Эквивалентность преобразований 39
7. Обобщенные преобразования на основе рядов Ли 42
8. Замечания 47
Литература 50
Глава II. Методы теории возмущений для гамильтоновых систем. Обобщения 53
1. Введение 53
2. Сходимость классического метода итераций 55
3. Секулярные члены. Способ Линдстедта 61
4. Метод Пуанкаре (метод Линдстедта) 66
5. Быстрые и медленные переменные 73
6. Обобщение процедуры усреднения, нормализация Биркгофа и дополнительные интегралы 78
7. Решение задачи Пуанкаре с помощью скобок Пуассона. Уничтожение секулярных членов в дополнительных интегралах 93
8. Методы теории возмущений, основанные на преобразованиях Ли 104
9. Методы теории возмущений для негамильтоновых систем, основанные на преобразованиях Ли 115
10. Замечания 126
Литература 133
Глава III. Возмущения интегрируемых систем 138
1. Движение, описываемое интегрируемой системой 138

2. Возмущения интегрируемых систем 139
3. Вырожденные системы 152
4. Возмущение линейных колебаний 155
5. Линейные периодические возмущения 163
6. Замечания 167
Литература 182
Глава IV. Возмущения отображений, сохраняющих площадь 185
1. Предварительные соображения 185
2. Области движения. Возмущения укороченной нормальной формы Биркгофа 193
3. Теоремы Мозера 196
4. Системы со многими степенями свободы 200
5. Вырожденные системы 220
6. Замечания 221
Литература 234
Глава V. Резонансы 236
1. Введение 236
2. Движение в окрестности положения равновесия 238
3. Решение с помощью формальных рядов 243
4. Эквивалентность проблеме возмущения линейных систем 249
5. Нелинейный резонанс 253
6. Асимптотические разложения до любого порядка 263
7. Общая теория и идеальная резонансная проблема 266
8. Несколько степеней свободы 275
9. Взаимодействие двух гармонических осцилляторов 282
10. Замечания 289
Литература 300
Заключение, Замечания, некоторые открытые вопросы и исследуемые задачи 304
Литература 310
Литература, добавленная при переводе 312
Именной указатель 315
Предметный указатель 317

Предметный указатель

Адиабатическая инвариантность 231
Адиабатический инвариант 228
Арнольда теорема 170
Асимптотическое разложение 263
Базисные частоты 194
Биркгофа нормализация 55, 78, 131, 174
- - связь с проблемой Пуанкаре 83
- нормальная форма 54, 190, 221
Боголюбова теорема 177
Бохлина уравнение 238
Ван дёр Поля уравнение 123, 157, 163
Вариация 9, 11, 14
- интегралов 49
Вечный инвариант 228
Возмущения 12, 138, 139
- линейные периодические 163
- линейных колебаний 155
- - задача 157
Волчок симметричный 89

Вращение 65, 254, 259
Вырождение 73, 151
- предельное 177
- собственное 174, 177
Вырожденные системы 150, 220
Гамильтона главная функция 68
- функция 24
Гамильтона — Якоби проблема 25
- - производящая функция 194
- - уравнение 24, 39, 128
Гамильтонова система 11
Гармонический осциллятор 47, 126, 282
Генератор 39
Гиперболического типа точки !, 19'
Группа симплектическая 22
Даламбера характеристики 242
Движение астероидов 236
- на торах 170
- условно-периодическое 194
Дирака пространство 66
Диффузия Арнольда 306
Долгопериодическая функция 76
Дополнительная система 106, 113
Дополнительные интегралы 84, 104
Дюффинга уравнение 112, 181
Задача классическая о магнитных ловушках 231
- Мозера 197
- о возмущениях линейных колебаний 157
- о движении маятника 237
- трех тел ограниченная 48
Задач классические динамики 168
Закон количества движения и импульса 11
- энергии и работы 10
Захват в резонанс 237, 289, 309
Идеальная резонансная проблема 267
Инвариант адиабатический 228
- вечный 228
Инвариантная поверхность возмущённой системы 233
Инвариантность адиабатическая 231
Инвариантные кривые 197, 199
Интеграл Ковалевской 93
- третий 232, 283, 300
- энергии 10, 267
Интегралы дополнительные 55, 78, 84, 93, 104
- формальные 222, 229
Интегрируемость 53, 54, 126
- Лиувилля 69
Иррациональность 167
- обобщенное условие Зигеля 219
Исключение переменных 77
Искусственные спутники 49, 181
Каноническое возмущение 26
- отображение 33
- преобразование 14, 19
Каноничность полная 23, 24
Ковалевской интеграл 93
Колебания 61, 254, 259
Короткопериодическая функция 76
Кручения коэффициент 203
- отображение 127, 224
- условие 225
Лагранжа матрица 14, 16
- скобки 15
- уравнения 16
Ли алгебра 309
- генератор 30, 109, 113
- каноническое отображение 49
- преобразование 28, 34, 38, 104, 109, 115, 309
- - зависящее от параметра 34
- производная 31
- ряды 28, 34, 36, 40, 49
- теорема 29, 32, 41
Линейные колебания 155, 157
Линдстедта метод 66, 286
Лиувилля теорема 18
Магнитные ловушки 231
Малые знаменатели 139
Манипулятор алгебраический символьный 305
Матрица Лагранжа 14
- Пуассона 14, 15, 17, 21

- симплектическая 187
- Якоби 11, 216
Маятник 268
- простой 61, 228, 237, 278
Метод итераций классический, сходимость 55
- КВМ 73, 129
- Линдстедта 68, 128
Метод Пикара 60
- Пуанкаре 39, 41, 66, 80, 128
- усреднения 27, 53, 78, 250, 304
- - Крылова — Боголюбова 8
- - Линдстедта — Пуанкаре 56
- Цейпеля 41, 109, 128, 242, 243, 268
- Эйткена 304
Методы теории возмущений 53, 115
Многообразия инвариантные 140, 233
Момент кинетический 10
Неинтегрируемость 54
Нелинейный характер движения 231
Неподвижная точка 185, 189
- - неособая 186
- - особая 186
Неустойчивость топологическая 306
Нормализация 28, 79, 248, 256
Нормальные колебания 221
- координаты 306
Ньютоновское приближение 141, 304
Область колебаний 257
Обычная точка 186
Ограниченная задача трех тел 48
Операция сглаживания 207
Опорное решение 12, 63, 88
Особая точка 186
Осциллятор 236
- захват в резонанс 237
- нелинейный 254
Осцилляторное решение 290
Осцилляторы гармонические 282
Отделимость 54
Отображение кручения 197, 224
- неподвижная точка 185, 186, 189
Отображения, сохраняющие меру 223
- - площадь 185, 189, 197
- - задача Мозера 197
Первые интегралы движения 106
Переменные быстрые 73, 76, 129
- действие — угол 53, 69, 71, 230
- медленные 73, 76, 129
Периодические возмущения 163
- поверхности 27
Пикара метод 60
Планетное движение 175
Поверхности периодические 126
- сечения 55
Полное решение 26
Положение равновесия 238
- эллиптического типа 156
Порядок члена 243
Предельный цикл 125
Преобразование векторное 46
- каноническое 24
- - свободное 24
- кручения 78, 224
- обратное к каноническому 34
- обращения 130
- однородное 23
- полностью каноническое 23, 29
- сохраняющее площадь 186
- точечное каноническое 23
Преобразования обобщенные 42
- эквивалентность 39
Приводимость 308
Принцип минимума энергии 238
Производящая функция 26
- - тождественного преобразования 69
Произвольные постоянные 16
Пространство нотангенциальное 53
Процедура усреднения 71
Пуанкаре метод 39, 41, 66, 89, 128, 130
Пуассона матрица 14, 15, 17, 21
- скобки 15
- уравнение 10
Разложение по двум переменным 119, 278

Резонанс 8, 58, 236, 289
- асимптотическое разложение 263
- идеальный 266, 270, 288
- кратность 294
- нелинейный 253, 289
- общая проблема 73
- простой 294
Резонансная кривая 292
Резонансные области 167
Рекуррентный алгоритм 45
Решение опорное 88
- периодическое неособое 186
- - особое 186
- - существование 130
- - устойчивость 130
- почти-периодическое, существование 253
Ряды формальные 12, 243
Сглаживание 207
Седло 254, 259, 292
Секулярный член 7, 11, 47, 61, 93
Сепаратриса 254, 259
Симплектическая группа 22
Система возмущенная 16
- - инвариантная поверхность 233
- гамильтонова 11
- дополнительная 106, 123
- "слабо завязанная" 280
Системы вырожденные 152, 220
- интегрируемые 138, 139, 233
- линейные 249
- негамильтоновм 115
Смешанные секулярные члены 7, 11, 47, 63
Сохранение объема 23
Среднее значение 70
Степени дробные 58
Сходимость 55
- ускоренная 304
Теорема Арнольда 153, 179
- Боголюбова 177
- Колмогорова 140, 145, 148, 151, 171, 181, 202
- Лиувилля 18
- Ляпунова 297
- Мозера 196, 203, 218, 220, 224
- Раусса, обращение 276
- Якоби 11, 68
- - Пуанкаре 22
Теория Луны 47, 304
- Флоке — Ляпунова 306
- Хори 41
Топологическая неустойчивость 308
Точки гиперболического типа 196
- эллиптического типа 196
Третий интеграл 232, 285, 287
Уравнение Ван дёр Поля 123
- простого маятника 278
- Пуассона 10
- разностное 205
- Хилла 179
- Условие кручения 225
- обобщенное иррациональност.и Зигеля 219
Условно-периодические движения 138, 194
Условно-периодическая функция 70
Условно-периодическое решение 178, 195, 307
Усреднение 11, 27, 48, 53, 55, 78, 107, 250, 304
- метод Крылова — Боголюбова 8
- обобщение процедуры 78
- процедура 71
Устойчивость по Арнольду 308
- - мере 305
- точки эллиптического типа 169
Фокус 125
Функция долгопериодическая 76, 153
- короткопериодическая 76, 153
- производящая Гамильтона — Якоби 194
- свободная от секулярвых членов 70
- условно-периодическая 70, 193
- - среднее значение 70
- чисто условно-периодическая 70
- эллиптическая Якоби 260
Хаотическое движение 306

Характеристики Даламбера 242
Характеристические показатели 8, 163, 307
- числа 308
Хилла уравнение 165, 179
Хори теория 41
Центр 254, 259, 292
Частоты базисные 194
Эйлера — Лагранжа метод 9
- углы 89
Эквивалентность методов Ли в Цейпеля 109
- преобразований 39, 40
Эллиптического типа точки 196
Якоби матрица 14, 216
- - симплектическая 11
- теорема 11
- функция эллиптическая 260

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Книга Георгия Евгенио Оскара Джакальи посвящена методам теории возмущений гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти методы являются важнейшими при исследовании движения в задачах небесной механики и космодинамики. Их роль и возможности особенно возросли в связи с широким использованием ЭВМ для качественного и количественного исследования поведения механических систем. В последние два десятилетия методы теории возмущений получили значительное развитие и нашли новые применения при решении актуальных задач механики.

Нельзя не согласиться с утверждением автора о том, что его книга является единственной в своем роде. Она представляет собой интересную и на наш взгляд успешную попытку систематического изложения различных методов теории возмущений гамильтоновых систем. Достаточно сказать, что в книге Г. Е. О. Джакальи с единой точки зрения и на языке, доступном для весьма широкого круга читателей, рассмотрены классические методы Линдстедта, Пуанкаре, Цейпеля, Биркгофа, тщательно и с разных точек зрения рассмотрены результаты Колмогорова, Арнольда и Мозера о поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, описаны разработанные совсем недавно методы Хори и Депри, много внимания уделено анализу различных резонансных случаев в теории возмущений. В книге также нашли отражение собственные результаты автора — известного специалиста в области методов возмущений и их приложений.

В заключении к книге подводятся итоги развития теории возмущений от времен Лагранжа и Эйлера до наших дней и обсуждаются не решенные еще и сегодня важные вопросы. Важным достоинством книги Г. Е. О. Джакальи является обширная библиография и ее критический анализ, проведенный автором. Переводчик пополнил ее некоторыми работами советских авторов за последние 10—15 лет.

Книга Г. Е. О. Джакальи является весьма полезным пособием по изучению и практическому применению методов теории возмущений гамильтоновых систем.

А. П. Маркеев

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге предполагается возможно более полно изложить новые достижения в развитии методов теории возмущений для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом отношении настоящая книга является единственной в своем роде.

Основной целью является описание методов теории возмущений, обсуждение их достоинств и пределов применимости, а также рассмотрение некоторых примеров. Изложение основывается на аналитических и численных методах нелинейной механики. Большое внимание обращается на создание методов, учитывающих приближения высоких порядков, которые теперь стали необходимы в связи с увеличением точности измерений во всех областях науки и техники. Излагаются основные теоремы, используемые в методах теории возмущений, но они являются лишь необходимой основой этих методов, а не главной частью настоящей книги. Каждая глава завершается детальным обзором соответствующей литературы; приводятся также некоторые добавочные сведения и много примеров, дополняющих и разъясняющих основной текст. Литературные ссылки даны для указания источников излагаемых сведений и предназначены для тех читателей, которые захотят более подробно разобраться в некоторых вопросах. Основные упоминаемые работы принадлежат к области теории дифференциальных уравнений, нелинейных колебаний и небесной механики.

Автор благодарен Катрин Мак Дьюгал и Сандре Спинасси за помощь при оформлении данной работы. Автор также благодарен за большую помощь руководителей Математической Программы Организации Морских Исследований.

Остин, Техас
апрель 1972

Г. Е. О. Джакалья

ВВЕДЕНИЕ

В этом введении кратко описывается последовательность, в которой мы собираемся излагать основные проблемы теории возмущений. Здесь мы хотим привести некоторые простые утверждения, не вдаваясь в математические подробности относительно рассматриваемых функций. Все необходимые предположения будут сделаны в последующих главах книги.

Следуя историческому пути развития, мы сначала рассмотрим проблему Линдстедта [46.1] [1]), которая заключается в получении решения такого уравнения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t),$$

где $0 < \varepsilon < 1$ — параметр. Решение ищется в виде рядов, не содержащих секулярных и (или) смешанных секулярных членов. Как было обнаружено, возможность получения решения

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{x}_2(t) + \ldots$$

приведенного выше уравнения, где $x_j(t)$, $\dot{x}_j(t)$ — ограниченные функции при всех $t \in R$, существенно зависит от природы функции f и ее производных до некоторого порядка. Как было найдено Линдстедтом, опорное решение $x_0(t)$, $\dot{x}_0(t)$ дается формулами

$$x_0 = a \cos(\omega t + \sigma),$$
$$\dot{x}_0 = -a\,\omega \sin(\omega t + \sigma).$$

Здесь ω — вначале неизвестная величина, по предположению

---

[1]) В дальнейшем при ссылках на литературу первое число означает порядковый номер цитируемой работы в списке литературы к главам I—V соответственно. Второе число — номер главы, данный арабской цифрой,— может отсутствовать, если источник приводится в конце этой же главы. Номера статей и монографий из списка литературы, добавленной при переводе, даются в подстрочных примечаниях и отмечены звездочкой (*прим. перев.*).

представимая в виде степенного ряда

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \ldots,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — константы, зависящие от ω_0, a и f. Строго говоря, самые первые попытки исследования возмущенных колебательных систем были сделаны еще Эйлером [23.1] при рассмотрении движения Луны. Делоне [16.1] был вторым исследователем, обнаружившим, что при уничтожении неограниченных членов в рядах решения для таких систем большую трудность представляет выбор опорной частоты — факт, который привел его, возможно впервые, к систематической процедуре определения рядов, которые сегодня называются *характеристическими показателями* Флоке — Ляпунова. Переход от метода последовательных канонических преобразований Делоне к методу, использующему производящую функцию, впервые был предложен Тиссераном [68.1]. Через некоторое время была опубликована работа Линдстедта [46.1], результаты которой сразу же были применены Пуанкаре [57.1] к систематической процедуре усреднения для гамильтоновых систем (не обязательно автономных). По существу весь второй том его «Небесной механики» посвящен этому методу и связанным с ним вопросам, среди которых важнейшим является проблема резонансов (причем в нелинейном смысле). Пуанкаре достиг больших успехов в обобщении всех предшествующих работ, включая и фундаментальные работы Бохлина и Гильдена. В хронологическом отношении дальнейшие успехи в рассматриваемой проблеме были достигнуты опять же в небесной механике Цейпелем [105.2], обобщившим идеи Пуанкаре. Здесь мы не будем вдаваться в детальное обсуждение всех этих работ, а укажем только на различные обзоры рассматриваемого вопроса (Чезари [13.1]; Джакалья [29.1]; Кинер [43.1]). После этого прошло более десяти лет, прежде чем похожие проблемы и задачи возникли в нелинейной теории цепей; они привели затем к появлению метода усреднения Крылова — Боголюбова [39.1], [40.1], который стал доступным для западных математиков благодаря усилениям Лефшеца [67.2]. Работа Брауна [8.1] по нелинейным резонансам была хорошо воспринята после работ Пуанкаре, занимавшегося этой проблемой; в действительности она основана на примерах, которые Браун привел для иллюстрации метода Бохлина. Начиная примерно с 1950 года появилась обширная литература по методам теории возмущений и процедурам усреднения, и специальные ссылки на эти работы будут даваться в соответствующих местах настоящей книги. Что касается чисто аналитических работ, направленных на исследование качественных закономерностей, то для последнего столетия типичными являются работы, посвященные классическому анализу явно зависящих от времени решений систем дифференциальных уравнений.

Если даже исходить из различных точек зрения, то первым, кто пытался понять геометрические аспекты дифференциальных систем, был Пуанкаре [60.1]. Его предположение о существовании неподвижных точек у сохраняющих площадь отображений, связанное с решением автономных систем, было доказано Биркгофом [3.1], чья работа должна рассматриваться как работа, оказавшая наиболее глубокое влияние на развитие понятия решения дифференциальных систем. Будучи без сомнения родоначальником топологии, он ввел такие важные понятия, как инвариантные множества, блуждающие точки и т. д.— все они связаны с геометрическим поведением интегральных кривых систем дифференциальных уравнений. По-видимому, основные проблемы в этой области были решены в знаменитой работе Мозера [55.1] о сохраняющем площадь отображении кольца на себя, в работе Хейла [33.1] об интегральных многообразиях возмущенных систем и в работе Крылова и Боголюбова [39.1]. Более подробные ссылки на литературу будут даны в соответствующих местах при изучении инвариантных множеств.

Классическими (и вероятно старейшими) методами теории возмущений являются методы типа метода Эйлера — Лагранжа, обобщенного Пуассоном. Основной частью их консервативных аналогов является теорема Якоби о вариации канонических переменных. Так как метод Пуассона является наиболее общим, то он заслуживает здесь особого упоминания, что и будет сделано по мере исторического изложения результатов.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1}$$

где x и f— n-мерные векторы. Для простоты будем считать, что функция f аналитична в некоторой области D n-мерного векторного пространства и $t \in R$. Пусть в D величина

$$\sigma = \sigma(x, t) \tag{2}$$

будет первым интегралом системы уравнений (1). Отсюда следует, что вдоль любого решения системы (1) в области D мы имеем

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

где σ — m-мерный вектор $(m \leqslant n)$, так что $\partial\sigma/\partial x$ —прямоугольная матрица Якоби размерности $m \times n$. Тогда для любого $x \in D$ имеем тождество

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t), \tag{4}$$

где опять функция $g(x, t)$ предполагается аналитической в области $D \times R$. Рассмотрим вариацию интеграла (2) вдоль решения системы (4), т. е.

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}[f(x, t) + g(x, t)] + \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

или, учитывая (3),

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x, t). \tag{5}$$

Уравнение (5) было в общем виде получено Пуассоном и как частный случай содержит уравнения Лагранжа для вариации произвольных постоянных и теорему Якоби. В частном случае динамической системы

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + g(x, \dot{x}, t)$$

уравнение Пуассона принимает вид

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{x}} g(x, \dot{x}, t), \tag{6}$$

где σ — интеграл при $g \equiv 0$. Весьма интересно, что все основные теоремы классической механики сразу же выводятся из (6). Например, если σ является интегралом энергии

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x, t),$$

то отсюда следует $E_{\dot{x}} = \dot{x}$, и справедливо соотношение

$$\dot{E} = \dot{x}^{\mathrm{T}} g(x, \dot{x}, t),$$

являющееся основным законом энергии и работы. Если σ — интеграл количества движения

$$L = x \times \dot{x},$$

то, записав выражение для $L_{\dot{x}}$ и подставив его в (6), получим соотношение

$$\dot{L} = x \times g(x, \dot{x}, t),$$

которое является основным законом количества движения и импульса.

Пусть система уравнений (1) является гамильтоновой (x — $2n$-мерный вектор), так что

$$\dot{x} = MH_x^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

где $H = H(x, t)$, M — каноническая матрица размерности $2n \times \times 2n$:

$$M = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix},$$

а I и O — единичная и нулевая матрицы размерности $n \times n$.

Положим

$$H = H_0 + H_1.$$

Если σ — первый интеграл системы (7) при $H = H_0$, т. е. σ находится в инволюции с H_0, то

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} M \left(\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

Если, кроме того, матрица Якоби $J = \partial\sigma/\partial x$ является симплектической (т. е. преобразование $x \to \sigma$ каноническое), то отсюда следует соотношение

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} M \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \sigma}\right)^{\mathrm{T}} = M \left(\frac{\partial H_1}{\partial \sigma}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

являюшееся утверждением теоремы:

Теорема Якоби. *Если σ является $2n$-мерным вектором, то уравнения* (8) *являются уравнениями Лагранжа для вариаций произвольных постоянных в случае не зависящих от времени сил.*

Классическим подходом к решению уравнений (9) является попытка искать σ в виде степенных рядов по некоторому малому параметру и таким образом сводить задачу к методу последовательных приближений. В большинстве случаев эта процедура приводит к появлению секулярных и смешанных секулярных членов, и, следовательно, эти ряды не будут сходящимися для всех моментов времени. Если рассматривать только ограниченные промежутки времени, то в конце концов сходимости можно добиться; по-видимому, самой ранней работой, посвященной этому вопросу, является работа Макмиллана [71.2]. Мы ссылаемся на эту работу, так как она простая и довольно строгая.

В большинстве достаточно сложных методов усреднения (для гамильтоновых систем) предполагается, что функция Гамильтона

2π-периодична по каждой из угловых переменных $y_1, \ldots, y_n$ и представляется сходящимся рядом Фурье

$$H = \sum_j A_j(x) \exp(j^{\mathrm{T}} y), \tag{10}$$

где $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)^{\mathrm{T}}$ — целочисленный вектор.

Уравнения, соответствующие функции Гамильтона (10), имеют вид

$$\dot{x} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \dot{y} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Если рассматривать только часть функции H, соответствующую $j = 0$, т. е.

$$H_0 = A_0(x),$$

то система уравнений (11), очевидно, является интегрируемой, и

$$x = x_0, \qquad y = \omega(x_0)\, t + y_0, \tag{12}$$

где

$$\omega_i(x_0) = \partial H_0 / \partial x_i \,|_{x=x_0}.$$

Если в некоторой области величины $A_j(x)$ при $j \neq 0$ таковы, что их производные малы (в некотором смысле) по отношению к $\omega_i(x)$, то величину $H - H_0$ можно рассматривать как возмущение. При классическом подходе говорят, что если эта ситуация имеет место, то решение уравнений (11) никогда не уходит слишком далеко от решения (12). Такое предположение в данном случае, очевидно, неверно и редко подтверждается, даже если рассматривать только «орбитальную близость», не обращая внимания на время. В действительности «временна́я близость» соответствующих точек чаще всего разрушается возмущениями. По аналогии с понятием устойчивости здесь можно сказать, что более распространенной является орбитальная, а не ляпуновская устойчивость.

В любом случае, используя (12) в качестве опорного решения с модифицированным вектором частот $\nu(x_0)$ и используя метод итераций, мы получаем формальные ряды

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sum_j \frac{C_j(x_0)}{j^{\mathrm{T}}\nu(x_0)} \exp[i(j^{\mathrm{T}}\nu)\, t], \\ y &= \nu(x_0)\, t + y_0 + \sum_j \frac{D_j(x_0)}{j^{\mathrm{T}}\nu(x_0)} \exp[i(j^{\mathrm{T}}\nu)\, t], \end{aligned} \tag{13}$$

где $\nu = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$ Ясно, что произведения $j^{\mathrm{T}}\nu = j_1\nu_1 + j_2\nu_2 + \ldots + j_n\nu_n$, стоящие в знаменателях, могут стать сколь

угодно малыми при $j_1, j_2, \ldots, j_n$, принимающих все возможные целочисленные значения. Для таких рядов Пуанкаре пришел к выводу, что они будут расходящимися для всюду плотного множества частот, что, вообще говоря, есть явление случайное. Колмогоров [38.1] показал, что существует множество частот с ненулевой мерой (тем большей, чем меньше ε), на котором рассматриваемые ряды сходятся. Главным образом это следует из того, что для всех целых чисел $j_1, j_2, \ldots, j_n$ возможно указать нижнюю границу чисел $j_1\nu_1 + j_2\nu_2 + \ldots + j_n\nu_n$, как это делается в теории диофантовых приближений. Способ, которым этого можно достичь в рядах, будет описан в главе II чисто формальным образом; последующие главы будут посвящены проблеме сходимости введенных методов. Глава I посвящена объяснению обозначений и терминологии, используемых во всей книге. Последняя глава книги посвящена вопросу о нелинейных резонансах.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ОБОБЩЕНИЯ

1. Введение

В этой главе мы будем иметь дело с терминологией и хорошо известными утверждениями, которые необходимы для изложения результатов в остальных главах. В задачу этой главы не входит описание гамильтоновых систем и их общих свойств. Такое описание можно найти в различных книгах и монографиях, среди которых мы хотим упомянуть ставшие классическими работы Биркгофа [5], Зигеля [65], Уинтнера [69], Абрахама [1], Мозера [56]. Мы постараемся избежать каких-либо усложнений и не будем давать определения гамильтоновых систем на многообразиях и какие-то существенные представления о них не потому, что это не важно, а потому что это не является необходимым для последующего изложения.

Сначала вспомним определения матриц Лагранжа и Пуассона. Они естественным образом возникают в методе вариаций произвольных постоянных. Пусть преобразование $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$ принадлежит классу C^2 и является обратимым в некоторой области $2n$-мерного пространства. Векторы $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$, так же как и векторы $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$, имеют размерность n. Пусть также $\boldsymbol{z} = \operatorname{col}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{\zeta} = \operatorname{col}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ [1]) — $2n$-мерные векторы. Матрица Лагранжа $\mathscr{L}(\boldsymbol{\zeta})$ определяется как матрица

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\zeta}) = J^{\mathrm{T}} M J, \tag{1.1.1}$$

где M — единичная симплектическая (т. е. каноническая) матрица размерности $2n \times 2n$, имеющая вид

$$M = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix},$$

а J — матрица Якоби преобразования $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{\zeta}$, такая, что

$$J = \partial \boldsymbol{z} / \partial \boldsymbol{\zeta}. \tag{1.1.2}$$

---

[1]) $\operatorname{col}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ — вектор-столбец (*прим. перев.*).

Легко проверить, что

$$\mathscr{L}(\zeta) = \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right), \tag{1.1.3}$$

и, следовательно,

$$\mathscr{L}_{ij}(\zeta) = [\zeta_i, \zeta_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial y_k}{\partial \zeta_i}\frac{\partial x_k}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_i}\frac{\partial y_k}{\partial \zeta_j}\right). \tag{1.1.4}$$

Очевидны следующие свойства матрицы Лагранжа:

$$\mathscr{L}^{\mathrm{T}} = J^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} J = -J^{\mathrm{T}} M J = -\mathscr{L},$$
$$|\mathscr{L}| = |J|^2,$$

($|A| = \det A$ для любой квадратной матрицы A).

Матрица Пуассона $P(z)$ определяется формулой

$$P(z) = J M J^{\mathrm{T}}, \tag{1.1.5}$$

и легко проверить, что

$$P(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^{T} - \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^{T}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \tag{1.1.6}$$

так что

$$P_{ij}(z) = (z_i, z_j) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial z_i}{\partial \eta_k}\frac{\partial z_j}{\partial \xi_k} - \frac{\partial z_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial z_j}{\partial \eta_k}\right). \tag{1.1.7}$$

Легко установить свойства матрицы Пуассона:

$$P^{\mathrm{T}} = -P,$$
$$|P| = |J^{-1}|^2 = 1/|J|^2,$$
$$\mathscr{L}^{-1}(\zeta) = J^{-1} M^{-1} (J^{\mathrm{T}})^{-1} = J^{-1} M (J^{-1})^{\mathrm{T}} = -P(\zeta).$$

Выражения (1.1.4) и (1.1.7) называются *скобками Лагранжа* и *скобками Пуассона* соответственно.

Если рассмотреть систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}, t) \tag{1.1.8}$$

и ее решение

$$y = y^0(t, \alpha, \beta), \qquad \dot{y} = x^0(t, \alpha, \beta) = \frac{\partial y^0}{\partial t}, \tag{1.1.9}$$

соответствующее начальным условиям

$$y^0(0, \alpha, \beta) = y_0, \quad x^0(0, \alpha, \beta) = \dot{y}_0, \tag{1.1.10}$$

то легко проверить, что

$$\frac{\partial x^0}{\partial t} = f(y, \dot{y}, t).$$

Для возмущенной системы (1.1.8) имеем выражение

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}, t) + g(y, \dot{y}, t) \tag{1.1.11}$$

и положим, что ее решение имеет вид (1.1.9), где, разумеется, α и β теперь зависят от времени. Отсюда следует, что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y^0}{\partial t} + \frac{\partial y^0}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial y^0}{\partial \beta}\dot{\beta} = x^0(t, \alpha, \beta),$$

т. е.

$$\frac{\partial y^0}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial y^0}{\partial \beta}\dot{\beta} = 0, \tag{1.1.12}$$

где α, β — векторы размерности n. Далее имеем

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\partial x^0}{\partial t} + \frac{\partial x^0}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial x^0}{\partial \beta}\dot{\beta} = f(y, \dot{y}, t) + g(y, \dot{y}, t),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial x^0}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial x^0}{\partial \beta}\dot{\beta} = g(y^0(t, \alpha, \beta),\ x^0(t, \alpha, \beta), t). \tag{1.1.13}$$

Система $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1.1.12) и (1.1.13) образует систему уравнений Лагранжа для вариаций произвольных постоянных. Эти уравнения можно записать в виде одной системы, используя, например, матрицу Лагранжа $\mathscr{L}(\gamma)$, где $\gamma = \mathrm{col}(\alpha, \beta)$. Тогда получим

$$\mathscr{L}(\gamma)\cdot\dot{\gamma} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial \gamma}\right)^{\mathrm{T}} g(y^0(t, \gamma), x^0(t, \gamma), t). \tag{1.1.14}$$

Ясно, что из уравнений (1.1.14) можно найти γ при выполнении обычного условия

$$|\mathscr{L}(\gamma)| \neq 0,$$

означающего, что выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial(y^0, x^0)}{\partial(\alpha, \beta)}\right| \neq 0.$$

которое будет удовлетворено, если считать y^0, x^0 общим решением уравнений (1.1.8) с произвольными начальными условиями y_0, x_0 или с постоянными интегрирования α, β. Более того, мы потребуем, чтобы матрица

$$P(\gamma)\left(\frac{\partial y^0}{\partial \gamma}\right)^{\mathrm{T}} g(y^0, x^0, t)$$

удовлетворяла условиям Липшица в некоторой области γ-пространства. Строго говоря, все вышеперечисленные утверждения носят локальный характер, однако, и это становится важным при рассмотрении каких-нибудь приложений, эти утверждения можно распространить на некоторую область изменения переменных. Аналогичным образом функции, которые мы будем рассматривать, считаются непрерывно дифференцируемыми по t, вообще говоря, при всех вещественных t.

Матрицы Лагранжа и Пуассона удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающей некоторыми замечательными свойствами. Действительно, рассмотрим систему $2n$ дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = \varphi(z, t)$$

и ее решение $z(\gamma, t) \in C^2$, зависящее от $2n$ постоянных интегрирования γ и времени t, в некоторой области γ-пространства для всех $|t| < T$. Пусть $J = \partial z/\partial\gamma$ — неособенная матрица Якоби преобразования $\gamma \to z$, которая по предположению также есть матрица класса C^2. Тогда получим

$$\dot{J} = \frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial \gamma}(\gamma, t) = \frac{\partial}{\partial \gamma}\dot{z}(\gamma, t) = \frac{\partial}{\partial \gamma}\varphi(z(\gamma, t), t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} J$$

или

$$\dot{J} = GJ, \tag{1.1.15}$$

где $G = \partial\varphi/\partial z$ — неособенная матрица размерности $2n \times 2n$. Теперь будем считать

$$\mathscr{L}(\gamma, t) = J^{\mathrm{T}} M J,$$

так что, используя (1.1.15), находим

$$\dot{\mathscr{L}} = J^{\mathrm{T}}(G^{\mathrm{T}}M + MG)J. \tag{1.1.16}$$

Лемма. *Матрица Лагранжа $\mathscr{L}(\gamma, t)$ преобразования $\gamma \to z$ является постоянной тогда и только тогда, когда матрица MG симметрична.*

Действительно, пусть матрица MG симметрична, т. е.

$$MG = (MG)^{\mathrm{T}} = -G^{\mathrm{T}}M.$$

Тогда $G^{\mathrm{T}}M + MG = 0$ и $\dot{\mathscr{L}} = 0$. Обратно, пусть $\dot{\mathscr{L}} = 0$. При описанных выше предположениях отсюда следует, что

$$G^{\mathrm{T}}M + MG = 0$$

или

$$G^{\mathrm{T}}M = -MG = M^{\mathrm{T}}G = (G^{\mathrm{T}}M)^{\mathrm{T}},$$

что и завершает доказательство.

Из (1.1.16) и доказанной леммы следует, что *поток гамильтоновой системы сохраняется* (теорема Лиувилля).

Действительно, в случае если $H = H(z)$ является гамильтонианом, имеем

$$\dot{z} = MH_z^{\mathrm{T}},$$

так что

$$G = \frac{\partial}{\partial z}(MH_z^{\mathrm{T}}) = MH_{zz}$$

и матрица $MG = -H_{zz}$, следовательно, симметрическая. Отсюда получаем $\dot{\mathscr{L}} = 0$ или

$$\frac{d}{dt}(J^{\mathrm{T}}MJ) = 0,$$

т. е. $J^{\mathrm{T}}MJ = \mathrm{const}$. Пусть γ — вектор начальных условий z_0, а $J_0 = I$ (единичная матрица), и, следовательно,

$$J^{\mathrm{T}}MJ = M, \tag{1.1.17}$$

а также, в частности,

$$|J| = \mathrm{const} = 1,$$

что и доказывает теорему (случай $|J| = -1$ отбрасывается по непрерывности).

Если $2n$-мерный вектор z состоит из n-мерных векторов y и x (координаты и импульсы), то более точно можно записать

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial y_0} & \dfrac{\partial y}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y_0} & \dfrac{\partial x}{\partial x_0} \end{pmatrix}$$

и при $t = 0$

$$J_0 = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

Отсюда следует, что отображение $z_0 \to z$ можно представить в виде

$$y = y_0 + \widetilde{Y}(x_0, y_0, t), \qquad x = x_0 + \widetilde{X}(x_0, y_0, t), \qquad (1.1.18)$$

где $\widetilde{Y}(x_0, y_0, 0) = \widetilde{X}(x_0, y_0, 0) = 0$, так что для достаточно малых t имеем

$$\widetilde{Y}(x_0, y_0, t) = tY(x_0, y_0, t), \qquad \widetilde{X}(x_0, y_0, t) = tX(x_0, y_0, t).$$

Эту ситуацию можно также рассмотреть с другой точки зрения. Так как при $t = 0$ отображение $z_0 \to z$ является тождественным, то существует такая производящая функция

$$S = x_0^{\mathrm{T}} y + tW(x_0, y, t), \qquad (1.1.19)$$

что выполняются равенства

$$x = S_y^{\mathrm{T}} = x_0 + tW_{y_0}^{\mathrm{T}}, \qquad y_0 = S_{x_0}^{\mathrm{T}} = y + tW_{x_0}^{\mathrm{T}}, \qquad (1.1.20)$$

а это эквивалентно соотношениям (1.1.18).

2. Канонические преобразования

Неособенное преобразование $z \to \zeta$, принадлежащее классу C^2, называется каноническим, если оно переводит каждую гамильтонову систему $\dot{z} = MH_z^{\mathrm{T}}$ в гамильтонову систему $\dot{\zeta} = MK_\zeta^{\mathrm{T}}$.

Это свойство является чисто локальным, однако опять можно быть уверенным в полезности возможного глобального распространения такого определения и его следствий на некоторую область фазового пространства. Пусть $z = \mathrm{col}(y, x)$, $\zeta = \mathrm{col}(\eta, \xi)$ — векторы размерности $2n$. Инвариантность гамильтоновой формы уравнений подразумевает, что преобразование будет каноническим тогда и только тогда, когда форма

$$\Phi(H) = \sum_{k=1}^{n} (\dot{\eta}_k \delta\xi_k - \dot{\xi}_k \delta\eta_k) \qquad (1.2.1)$$

будет полным дифференциалом для всех H.

Из (1.2.1) мы выведем необходимое и достаточное условие каноничности преобразования (см. [6]). Заметим, что (1.2.1)

можно переписать в виде

$$\Phi(H) = \dot{\zeta}^{\mathrm{T}} M \delta\zeta. \tag{1.2.2}$$

Более того, для данного преобразования

$$\zeta = \zeta(z, t) \tag{1.2.3}$$

мы имеем

$$\dot{\zeta} = J\dot{z} + \zeta_t, \tag{1.2.4}$$

где J — матрица Якоби $J = \partial\zeta/\partial z$. Отсюда следует, что

$$\dot{\zeta} = JMH_z^{\mathrm{T}} + \zeta_t,$$

а из (1.2.2) получаем

$$\Phi(H) = (-H_z M J^{\mathrm{T}} + \zeta_t^{\mathrm{T}}) M\, \delta\zeta,$$

или, учитывая равенство $\delta\zeta = J\delta z$, имеем

$$\Phi(H) = -H_z M \mathscr{L}(z)\, \delta z + \zeta_t^{\mathrm{T}} M J\, \delta z,$$

или

$$\Phi(H) = -H_z' M \mathscr{L}(z)\, \delta z + \mathscr{L}^*(t, z)\, \delta z, \tag{1.2.5}$$

где

$$\mathscr{L}(z) = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}} M \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right), \qquad \mathscr{L}^*(t, z) = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^{\mathrm{T}} M \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).$$

Величина $\mathscr{L}^*(t, z)$, очевидно, является вектор-строкой, элементы которой равны скобкам Лагранжа $[t, z_k]$.

Условие интегрируемости формы $\Phi(H)$ для всех H можно свести к условиям интегрируемости таких величин

$$\Phi(0) = \mathscr{L}^*(t, z)\, \delta z = \sum_k [t, z_k]\, \delta z_k,$$

$$\Phi(y_k) = -\sum_l [x_k, z_l]\, \delta z_l + \Phi(0),$$

$$\Phi(x_k) = \sum_l [y_k, z_l]\, \delta z_l + \Phi(0),$$

$$\Phi(y_k x_j) = \sum_l \{[y_j, z_l]\, y_k - [x_k, z_l,]\, x_j\}\, \delta z_l + \Phi(0).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial z_j}[t,\ z_k] = \frac{\partial}{\partial z_k}[t,\ z_j],$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j}[x_k,\ z_l] = \frac{\partial}{\partial z_l}[x_k,\ z_j],$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j}[y_k,\ z_l] = \frac{\partial}{\partial z_l}[y_k,\ z_j].$$

В итоге получаем

$$[y_j,\ z_l] = 0 \quad \text{для} \quad z_l \neq x_j,$$

$$[x_k,\ z_l] = 0 \quad \text{для} \quad z_l \neq y_k,$$

а также

$$[y_k,\ x_k] = -[x_l,\ y_l] = \text{const} = \lambda. \tag{1.2.6}$$

Последнее соотношение получено с использованием первых трех выражений, откуда, применив тождество Якоби, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}[z_k,\ z_j] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z_l}[z_k,\ z_j] = 0.$$

В матричных обозначениях условия (1.2.6) можно переписать в виде

$$\mathscr{L}(z) = J^{\mathrm{T}}MJ = \lambda M. \tag{1.2.7}$$

Так как по предположению $|J| \neq 0$, то константа λ не может быть равной нулю. Соотношение (1.2.7) выражает необходимое и достаточное условие каноничности преобразования. С другой стороны, так как $P(z) = -\mathscr{L}(z)$, то это условие может быть записано также с помощью матрицы Пуассона в виде

$$P(z) = JMJ^{\mathrm{T}} = \lambda M. \tag{1.2.8}$$

Достаточность условия сразу же следует при подстановке (1.2.7) в (1.2.5), что дает

$$\Phi(H) = \lambda H_z \delta z + \mathscr{L}^*(t,\ z)\,\delta z = \delta(\lambda H + W), \tag{1.2.9}$$

где $W(z,\ t)$ — функция, удовлетворяющая равенству

$$W_z \delta z = \mathscr{L}^*(t,\ z)\,\delta z = \Phi(0) \tag{1.2.10}$$

и являющаяся полным дифференциалом. При этих предположениях легко сделать следующее заключение.

Теорема (Якоби—Пуанкаре). *Необходимым и достаточным условием каноничности неособенного преобразования* $z \to \xi$, *принадлежащего классу* C^2, *и того, что новый гамильтониан имеет вид*

$$K = \lambda H + W, \tag{1.2.11}$$

является условие: форма

$$\psi = \lambda x^{\mathrm{T}} dy - \xi^{\mathrm{T}} d\eta + W dt \tag{1.2.12}$$

есть полный дифференциал.

Действительно,

$$\psi = \left(\lambda x^{\mathrm{T}} - \xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dy - \xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \left(W - \xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) dt$$

и условия интегрируемости для ψ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda x^{\mathrm{T}} - \xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda x^{\mathrm{T}} - \xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(W - \xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(W - \xi^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta}{\partial t}\right),$$

или в покомпонентной форме

$$[z_k, z_l] = 0 \qquad (z_k \neq x_l, \qquad z_k \neq x_k),$$

$$[y_k, x_k] = \lambda, \qquad [t, z_k] = \partial W / \partial z_k,$$

что и завершает доказательство.

В заключение получим соотношение Якоби — Пуанкаре. Из (1.2.12) находим

$$\psi = \lambda x^{\mathrm{T}} dy - \xi^{\mathrm{T}} d\eta + (K - \lambda H)\, dt,$$

и, следовательно, *для каноничности преобразования необходимо и достаточно, чтобы функция* ψ *являлась полным дифференциалом*, т. е.

$$\lambda x^{\mathrm{T}} dy - \xi^{\mathrm{T}} d\eta + (K - \lambda H)\, dt = dF, \tag{1.2.13}$$

где все функции считаются зависящими от переменных η, ξ.

Множество всех матриц A, удовлетворяющих условию

$$A^{\mathrm{T}} M A = M,$$

образует группу (по отношению к умножению матриц), которая называется *симплектической группой.*

Случай $\lambda \neq 1$ обычно исключают из рассмотрения. Канонические (и, следовательно, симплектические) преобразования с $\lambda \neq 1$ еще и потому обычно не рассматривают, что они могут быть получены в виде произведения обычного канонического преобразования ($\lambda = 1$) и очень простого канонического преобразования ($\lambda \neq 1$)

$$\xi = -\lambda x, \qquad \eta = y,$$

для которого в этом случае

$$J_0 = \frac{\partial(\eta, \xi)}{\partial(y, x)} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -\lambda I \end{pmatrix};$$

легко видеть, что

$$J_0^{\mathrm{T}} M J_0 = \lambda M.$$

Этот простой прием описан в книге Зигеля [65].

Исключая в дальнейшем случай $\lambda \neq 1$, необходимые и достаточные условия каноничности запишем в одном из двух видов:

$$\mathscr{L}(z) = J^{\mathrm{T}} M J = M, \qquad P(z) = J M J^{\mathrm{T}} = M, \tag{1.2.14}$$

где

$$J = \frac{\partial \xi(z, t)}{\partial z}.$$

Условие Якоби—Пуанкаре запишется тогда так:

$$x^{\mathrm{T}} dy - \xi^{\mathrm{T}} d\eta + (K - H)\, dt = dF. \tag{1.2.15}$$

Если преобразование не зависит явно от времени t, то оно называется *полностью каноническим*, а если $dF = 0$, то *однородным*[1]).

Из результатов, полученных в § 1, мы также можем заключить, что преобразование, определяемое решением гамильтоновой системы уравнений и отображающее фазовое пространство на себя, является каноническим. Свойство сохранения объема было уже установлено выше. Тогда в более строгом виде эти утверждения можно сформулировать так.

Пусть $\dot{z} = M H_z^{\mathrm{T}}$ — *гамильтонова система уравнений, и пусть существует единственное решение* $z = z(\zeta, t)$, *проходящее через*

---

[1]) Под однородным автор, по-видимому, понимает такое каноническое преобразование, при котором координаты и импульсы не «перепутываются», т. е. координаты переходят в координаты, импульсы — в импульсы: $x = x(\xi, t)$, $y = y(\eta, t)$. Иногда такие преобразования называют еще *точечными каноническими преобразованиями*. См., например, [44.2], [1*], [2*] (*прим. перев.*).

точку $z = \zeta$ при $t = t_0$. Предположим, что вектор-функция $z(\zeta, t)$ принадлежит классу C^2 относительно $2n+1$ переменных z, t в окрестности точки $z=\zeta$ и при достаточно малых $|t-t_0|$. Тогда отображение $\zeta \to z$, определяемое решением $z = z(\zeta, t)$, будет сохранять объем и будет каноническим.

3. Уравнение Гамильтона — Якоби. Обобщения

Рассмотрим неособенное, принадлежащее классу C^2, преобразование

$$y = y(\eta, \xi, t), \qquad x = x(\eta, \xi, t), \tag{1.3.1}$$

и пусть в частном случае[1])

$$\left|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right| \neq 0, \qquad \|\eta - \eta_0\| < \delta, \tag{1.3.2}$$

т. е. локально можно разрешить первую систему уравнений относительно η и получить

$$\eta = \eta(y, \xi, t),$$

и, следовательно,

$$x = x(y, \xi, t).$$

Если существует функция $S(y, \xi, t)$, такая, что

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \xi}\right| \neq 0$$

и $S \in C^2$, то преобразование, определяемое формулами

$$x = S_y^{\mathrm{T}}, \qquad \eta = S_\xi^{\mathrm{T}},$$

является каноническим, а новая функция Гамильтона имеет вид

$$K(\eta, \xi, t) = H(y(\eta, \xi, t), x(\eta, \xi, t), t) + \frac{\partial S}{\partial t}(y(\eta, \xi, t), \xi, t).$$

Действительно, подставляя в (1.2.15) дифференциальное тождество

$$\xi^{\mathrm{T}} d\eta = d(\xi^{\mathrm{T}}\eta) - \eta^{\mathrm{T}} d\xi,$$

---

[1]) Такое каноническое преобразование называется *свободным* (*прим. перев.*).

получим

$$x^{\mathrm{T}}dy + \eta^{\mathrm{T}}d\xi + (K - H)\,dt = d\,(F + \xi^{\mathrm{T}}\eta). \qquad (1.3.3)$$

Если положить

$$S = F + \xi^{\mathrm{T}}\eta = S\,(y,\ \xi,\ t),$$

то из

$$dS = \frac{\partial S}{\partial y}\,dy + \frac{\partial S}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial S}{\partial t}\,dt,$$

и из (1.3.3) находим

$$x^{\mathrm{T}} = \frac{\partial S}{\partial y} = x^{\mathrm{T}}\,(y,\ \xi,\ t), \qquad \eta^{\mathrm{T}} = \frac{\partial S}{\partial \xi} = \eta^{\mathrm{T}}\,(y,\ \xi,\ t), \qquad (1.3.4)$$

$$K = H + S_t.$$

Для того чтобы записать преобразование в явном виде, потребуем, чтобы

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \xi}\right| \neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\xi = \xi\,(y,\ x,\ t),$$

и, следовательно,

$$\eta = \eta\,(y,\ x,\ t)$$

при выполнении очевидного условия $|\partial\eta/\partial y| \neq 0$. Так как предполагалось, что $S \in C^2$, то отсюда $|\partial y/\partial\eta| \neq 0$, и, следовательно, используя (1.3.2), возвращаемся к (1.3.1).

Для наших целей весьма важным результатом является последнее из уравнений (1.3.4), которое мы перепишем явным образом так:

$$K(\eta(y,\ \xi,\ t),\ \xi,\ t) = H\,(y,\ x\,(y,\ \xi,\ t),\ t) + \frac{\partial S}{\partial t}\,(y,\ \xi,\ t). \qquad (1.3.5)$$

Если преобразование не зависит от времени явно, т. е. $S_t \neq 0$, то новый гамильтониан является просто образом старого гамильтониана при отображении $z \to \zeta$.

Основная проблема Гамильтона—Якоби заключается в вопросе о существовании преобразования, генерируемого функцией S и такого, что новый гамильтониан сводится к некоторой абсолютной константе или, что эквивалентно, к функции, тождественно

равной нулю. Другими словами, мы ищем решение такого дифференциального уравнения в частных производных:

$$H(y, S_y, t) + S_t = 0, \tag{1.3.6}$$

где $S = S(y, \xi, t)$. Как хорошо известно, Якоби показал, что общее решение этого уравнения находить не нужно, а надо только найти его полный интеграл, т. е. функцию $S(y, \xi, t)$, зависящую от n произвольных постоянных ξ и такую, что $|\partial S/\partial \xi| \neq 0$. В этом случае новые переменные η, ξ являются константами, и соотношения

$$\eta = \eta(y, x, t), \qquad \xi = \xi(y, x, t),$$

которые получаются из (1.3.4), соответствуют $2n$ интегралам движения. Ясно, что если исходная гамильтонова система интегрируема в смысле существования и единственности решения уравнений

$$\dot{z} = MH_z^{\mathrm{T}},$$

то производящая функция $S(y, \xi, t)$ должна существовать (при этом она может и не выражаться через элементарные функции). Действительно, так как решение определяет каноническое отображение $z = z(\zeta, t)$, где ζ — вектор начальных условий, и так как для $t = t_0$ $\partial y/\partial \eta = I$ (единичная матрица), то при достаточно малых $|t - t_0|$ имеем $|\partial y/\partial \eta| \neq 0$, и, следовательно,

$$S = \xi^{\mathrm{T}} y + (t - t_0) F(y, \xi, t) \tag{1.3.7}$$

при достаточно малых $|t - t_0|$ в полном соответствии с соотношением (1.1.19).

Проблему Гамильтона—Якоби можно обобщить, ослабив условие того, что новый гамильтониан должен быть абсолютной константой. С точки зрения методов канонической теории возмущений эту обобщенную проблему уместно рассмотреть более подробно.

Мы хотим узнать, существует ли каноническое преобразование, генерируемое функцией $S(y, \xi, t)$, такое, что новый гамильтониан соответствует системе с меньшим числом степеней свободы, чем число степеней свободы системы, которой соответствует старый гамильтониан.

Один из способов решения этого вопроса состоит в приведении гамильтониана к виду

$$K(\eta, \xi, t) = H(y, x, t) + S_t(y, \xi, t),$$

для которого

$$\partial K/\partial \eta_k = 0 \tag{1.3.8}$$

при $k = 1, 2, \ldots, p \leqslant n$. Получившаяся система, очевидно, сводится к квадратурам, если $p = n$ или $p = n - 1$[1]). Это — самое меньшее, что надо потребовать от преобразования, но такое требование намного менее жесткое, чем предлагаемое в методе Якоби. Можно также потребовать, чтобы новый гамильтониан не содержал явно времени. Такая процедура в общем случае называется *методом усреднения* (см. [9]) и она обычно используется, если H является периодической функцией времени t. Можно также легко обобщить это понятие на случай условно-периодических функций времени. Если H зависит от некоторого малого параметра ε и допускает тейлоровское разложение вблизи $\varepsilon = 0$, то можно показать, что существуют формальные ряды относительно ε, которые дают решение для S до любой желаемой степени параметра ε. Свойства сходимости таких рядов в общем случае неизвестны. Задача существования таких рядов и их сходимости, строго говоря, относится к теории периодических поверхностей (см. [19], [20]) и к теории Мозера [55] инвариантных кривых при сохраняющих площадь отображениях. Последний из упомянутых вопросов будет подробно рассмотрен в главе IV настоящей книги. Качественное описание этих проблем можно найти в работе Кинера [42], посвященной исследованию движения спутника в гравитационном поле сжатой планеты. Теория Дилиберто в настоящей книге подробно не рассматривается. Этот подход на самом деле имеет отношение к изучаемым здесь вопросам, но его описание можно найти во многих книгах (см., например, [19], [33]).

Новый подход к изучению канонических преобразований был предложен в теории Ли [45]. В задачах динамики ряды Ли были использованы в различных случаях, и их хорошее описание, как основы исследования, можно найти в работе Лейманиса [44]. Совсем недавно эти ряды были введены в методы теории возмущений для нелинейных гамильтоновых систем, а затем также распространены на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих некоторым незначительным ограничениям, причем эти уравнения не обязательно должны иметь гамильтонову форму. Такие примеры применения рядов Ли будут обсуждены в главах II и V. Здесь мы только хотим описать то, что необходимо для понимания такого применения. Мотивом для введения рядов Ли служит такой простой факт, что если данная система зависит от некоторого параметра, то обычно бывает известно ее решение при нулевом значении этого параметра. Затем строится решение в виде ряда по степеням параметра, или в случае автономной системы решение может быть получено

---

[1]) По-видимому, для случая $p = n - 1$ автор предполагает, что функция K не зависит от времени (*прим. перев.*).

с помощью канонических преобразований, которые аналогичным образом выражаются через степенные ряды по параметру. Вообще говоря, о сходимости этих рядов известно очень мало, однако во многих прикладных задачах они оказываются неоценимо важными. В таких задачах сходимость проверяется с помощью точного численного интегрирования или с помощью наблюдений системы. Здесь, по-видимому, будет уместно повторить некоторые слова профессора Зигеля [64] о нормализации функций Гамильтона: «Возможно, что из-за наличия малых знаменателей в коэффициентах преобразования ряды в общем случае будут расходиться, однако до сих пор ни одного примера такого рода не найдено. Из хорошо известной теоремы Пуанкаре об аналитических интегралах канонических дифференциальных уравнений мы можем только заключить, что эти ряды не являются всегда сходящимися..., тогда как эта теорема не может быть применена к фиксированной функции H». Позднее о некоторой специальной проблеме он сказал: «В частности, интересно решить, является ли функция H регулярной или сингулярной (т. е. приводится ли она к нормальной форме сходящимися рядами) в этом специальном случае..., однако, по-видимому, этот вопрос не поддается решению известными методами анализа». Мозер [54] исследовал аналогичные вопросы, но, в сущности, не смог доказать ни одной новой теоремы о степени частоты встречающихся случаев регулярных гамильтонианов, а только повторил результаты Зигеля (см. [65] и § 6 гл. IV).

4. Ряды Ли и преобразования Ли

То, о чем пойдет речь в этом параграфе, относится к следующему факту (доказательство приводится к тексте).

Пусть $S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \varepsilon)$ и $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \varepsilon)$ — функции, зависящие от n-мерных векторов $\boldsymbol{y}$ (координаты) и $\boldsymbol{x}$ (канонически сопряженные импульсы) и от безразмерного параметра ε. Предполагается, что S и f — действительные аналитические функции $2n+1$ переменной. Определим такой оператор

$$\Delta_W f = (f, W) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}, \tag{1.4.1}$$

где (f, W) — скобки Пуассона. Наконец, рассмотрим оператор

$$E_W f = \sum_{n \geqslant 0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\Delta_W^n f)_{\varepsilon=0}, \tag{1.4.2}$$

где

$$\Delta_W^0 f = f,$$
$$\Delta_W^1 f = \Delta_W f,$$
$$\Delta_W^n f = \Delta_W \Delta_W^{n-1} f \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Тогда основной результат при сделанных предположениях заключается в том, что если ряды (1.4.2) сходятся, то преобразование

$$\eta_k = E_W y_k, \qquad \xi_k = E_W x_k \tag{1.4.3}$$

является полностью каноническим. Более того, произвольная вещественная аналитическая функция $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ выражается через новые переменные $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ по формуле

$$g(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \varepsilon), \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \varepsilon)) = E_W g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}). \tag{1.4.4}$$

Теорема Ли ([45]). Впервые ряды Ли к методам теории возмущений применил Хори [34]. Он рассматривал операторы $D_S^n f$, определяемые формулами

$$D_S^0 f = f, \qquad D_S^1 f = (f, S), \qquad D_S^n f = D_S^1 D_S^{n-1} f, \tag{1.4.5}$$

где f, S — вещественные аналитические функции $2n$ канонически сопряженных переменных $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$: $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Теорему Ли Хори записал в следующем виде:

Теорема Ли. *Набор $2n$ переменных $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$, определяемых уравнениями*

$$f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_S^n f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \tag{1.4.6}$$

будет каноническим, если ряды сходятся для достаточно малых ε независимо от значений $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$.

Доказательство такой теоремы весьма просто. Введем каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\eta_j}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \xi_j}, \qquad \frac{d\xi_j}{d\tau} = -\frac{\partial S}{\partial \eta_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.4.7}$$

где τ — произвольный параметр, и пусть функции $\eta_j(\tau)$, $\xi_j(\tau)$ будут единственным решением этой системы уравнений в области, в которой S — вещественная аналитическая функция. Тогда из (1.4.6) следует, что

$$f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n f}{d\tau^n}\bigg|_{\varepsilon=0} = f(\boldsymbol{\eta}(\tau + \varepsilon), \boldsymbol{\xi}(\tau + \varepsilon)),$$

а в силу аналитичности $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ имеем

$$y_j = \eta_j(\tau + \varepsilon), \qquad x_j = \xi_j(\tau + \varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.4.8}$$

для достаточно малых ε. Так как величины (1.4.8) являются решением гамильтоновой системы (1.4.7), а отображение (1.4.8) — каноническое, то из этого следует, что переменные $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ будут каноническими.

Если задан «генератор S», то, как следует из (1.4.6), преобразование будет иметь такой явный вид:

$$y_j = \eta_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_S^{n-1} \frac{\partial S}{\partial \xi_j}, \qquad x_j = \xi_j - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_S^{n-1} \frac{\partial S}{\partial \eta_j}. \quad (1.4.9)$$

Кажущимся неудобством такой теории для приложений в методах теории возмущений является то, что функции f и S, как правило, должны быть представлены в виде степенных рядов по ε, а такая зависимость не учитывается в вышеприведенных формулах. Модифицированный подход к этому вопросу был предложен Депри [17]; позже различными авторами (см., например, [49]) была показана эквивалентность этого подхода и теории Хори. Эквивалентность обобщенной теории преобразований Гамильтона—Якоби и преобразований Ли, использовавшихся в работах Пуанкаре, Хори и Депри соответственно, будет показана в конце главы II. Здесь мы ограничимся изложением основных теорем преобразований Ли для случая, когда функции f и S зависят от ε. Основной целью является получение соотношений (1.4.3) и (1.4.4). Изложение проводится так же, как и в работе Депри [17].

Рассмотрим вещественные аналитические функции f и S, зависящие от $2n$ канонически сопряженных переменных. Скобки Пуассона (f, S) можно записать в виде

$$(f, S) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} \left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{\mathrm{T}}, \quad (1.4.10)$$

где, как обычно, производная скалярной функции по вектору предполагается строчной матрицей. Можно определить $2n$-мерный вектор $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ и двумерный вектор (f, S) и записать матрицу Пуассона размерности 2×2

$$P_z(f, S) = J_z M J_z^{\mathrm{T}}, \quad (1.4.11)$$

где $J_z = \partial(f, S)/\partial \boldsymbol{z}$ — матрица размерности $2 \times 2n$ а M — единичная симплектическая матрица размерности $2n \times 2n$. Тогда

$$P_z(f, S) = (f, S)_z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нетривиального канонического преобразования $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{\zeta})$ имеем

$$J^{\mathrm{T}} M J = M,$$

где $J = \partial z/\partial \zeta$. Тогда

$$J_\zeta = J_z J. \tag{1.4.12}$$

Теперь получаем

$$P_\zeta(f, S) = J_\zeta M J_\zeta^{\mathrm{T}} = J_z J M J^{\mathrm{T}} J_z^{\mathrm{T}} = J_z M J_z^{\mathrm{T}} = P_z(f, S),$$

что показывает инвариантность матрицы P относительно канонических преобразований.

Производная Ли функции f, генерируемая функцией S, имеет вид

$$L_S f = (f, S). \tag{1.4.13}$$

Так как $L_S f$ является билинейной формой относительно f, S, то отсюда вытекают следующие свойства (α, β — постоянные числа):

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad L_S(\alpha f + \beta g) = \alpha L_S f + \beta L_S g, \\ &\text{b)} \quad L_S(f \cdot g) = f \cdot L_S g + g \cdot L_S f, \\ &\text{c)} \quad L_S(f, g) = (f, L_S g) + (L_S f, g), \\ &\text{d)} \quad L_S L_{S'} f = L_{S'} L_S f + L_{(S,S')} f. \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Если ввести определение $L_S^0 f = f$, то n-я производная Ли будет иметь вид

$$L_S^n f = L_S L_S^{n-1} f.$$

Для этой производной легко проверить следующие свойства:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad L_S^n(\alpha f + \beta g) = \alpha L_S^n f + \beta L_S^n g, \\ &\text{b)} \quad L_S^n(f \cdot g) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_S^m f \cdot L_S^{n-m} g, \\ &\text{c)} \quad L_S^n(f, g) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(L_S^m f, L_S^{n-m} g\right). \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

Если S — вещественная аналитическая функция, то можно выбрать такое достаточно малое число ε, что ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_S^n f = \exp(\varepsilon L_S) f \tag{1.4.16}$$

будут сходящимися для аналитических функций f.

Опять нетрудно проверить следующие свойства:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \exp(\varepsilon L_S)(\alpha f+\beta g)=\alpha\exp(\varepsilon L_S)f+\beta\exp(\varepsilon L_S)g,\\ &\text{b)}\quad \exp(\varepsilon L_S)(f\cdot g)=\exp(\varepsilon L_S)f\cdot\exp(\varepsilon L_S)g,\\ &\text{c)}\quad \exp(\varepsilon L_S)(f,S)=(\exp(\varepsilon L_S)f,\ \exp(\varepsilon L_S)g). \end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Из последнего свойства вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Пусть ε — постоянный параметр. Рассмотрим преобразование $z=z(\zeta)$ $2n$-мерного вектора $z=(y,x)$, где y, x — канонически сопряженные переменные, в $2n$-мерный вектор $\zeta=(\eta,\xi)$. Если существует такая вещественная аналитическая функция $S(z)$, что ряды*

$$\zeta=\exp(\varepsilon L_S)z \tag{1.4.18}$$

сходятся в некоторой области z-пространства, то преобразование будет каноническим.

Заметим, что по существу эта теорема совпадает с теоремой Ли, сформулированной выше. Доказательство рассматриваемой теоремы немедленно следует из таких соотношений:

$$\zeta_i=\exp(\varepsilon L_S)z_i$$

и из формулы (1.4.17), примененной к выражению

$$(\zeta_i,\zeta_j)=(\exp(\varepsilon L_S)z_i,\ \exp(\varepsilon L_S)z_j)=\exp(\varepsilon L_S)(z_i,z_j)$$

или

$$P(\zeta)=\exp(\varepsilon L_S)P(z).$$

Так как z — канонический набор переменных, то $P(z)=M$ и, следовательно,

$$P(\zeta)=M,$$

т. е. ζ — также канонический набор переменных.

Другим важным результатом является закон преобразования произвольной функции переменных z в функцию переменных ζ.

Теорема. *Образ каждой вещественной аналитической функции $f(z)$ при преобразовании*

$$z=\exp(\varepsilon L_S)\zeta \tag{1.4.19}$$

есть функция

$$\tilde f(\zeta,\varepsilon)=f(\exp(\varepsilon L_S)\zeta)=\exp(\varepsilon L_S)f(\zeta). \tag{1.4.20}$$

Действительно,

$$L_S\tilde{f}(\zeta, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial z} L_S z, \tag{1.4.21}$$

где $\partial f/\partial z$ — строчная матрица $\|\partial f/\partial z_k\|$, а $L_S z$ — матрица-столбец $\|(z_k, S)\|$.

Дифференцируя (1.4.19) по ε, находим

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} L_S^{m+1}\zeta = L_S z$$

и, следовательно, получаем

$$L_S\tilde{f}(\zeta, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}.$$

Повторяя эту процедуру n раз, находим

$$L_S^n\tilde{f} = \frac{\partial^n \tilde{f}}{\partial \varepsilon^n}$$

или из (1.4.20)

$$\left.\frac{\partial^n \tilde{f}}{\partial \varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0} = L_S^n\tilde{f}(\zeta, 0) = f(\zeta). \tag{1.4.22}$$

Следовательно, тейлоровское разложение функции $\tilde{f}(\zeta, \varepsilon)$ имеет вид

$$\tilde{f}(\zeta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left.\frac{\partial^n \tilde{f}}{\partial \varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_S^n\tilde{f}(\zeta) = \exp(\varepsilon L_S) f(\zeta),$$

что и завершает доказательство.

Из этой последней теоремы можно получить следствие, которое в конечном счете устанавливает справедливость подхода Хори, рассматривавшего S как функцию ε.

Следствие. *Если функция $f(z, \varepsilon)$ допускает разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon = 0$, т. е.*

$$f(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(z), \tag{1.4.23}$$

то после применения канонического преобразования (1.4.19) *получим*

$$f(z(\zeta, \varepsilon), \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m L_S^m f_{n-m}(\zeta). \tag{1.4.24}$$

Действительно, из (1.4.20) получаем соотношение

$$f_n(z(\zeta, \varepsilon)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} L_S^m f_n(\zeta),$$

после подстановки которого в (1.4.23) и после собирания членов одинакового порядка по ε приходим к желаемому результату.

Наконец, докажем следующую теорему о преобразовании, обратном к каноническому преобразованию, определяемому рядами Ли.

Теорема. *Преобразование, обратное к преобразованию*

$$z = \exp(\varepsilon L_S)\zeta,$$

имеет вид

$$\zeta = \exp(\varepsilon L_{-S}) z. \tag{1.4.25}$$

Действительно,

$$\zeta = \exp(\varepsilon L_{S'}) z = \exp(\varepsilon L_{S'})(\exp(\varepsilon L_S)\zeta) = \exp(\varepsilon(L_{S'} + L_S))\zeta.$$

Оператор $\exp(\varepsilon(L_{S'} + L_S))$ должен соответствовать тождественному преобразованию, для которого $L_{S'} + L_S = 0$. Следовательно, $S' = -S$, что и требовалось доказать.

5. Преобразование Ли, зависящее от параметра

Как уже раньше говорилось, канонические преобразования, связанные с методами теории возмущений, обязательно зависят от параметра, вообще говоря, малого; при этом решение бывает известно, когда этот параметр равен нулю (или любому другому фиксированному числовому значению). В терминах описанной в предыдущем параграфе теории преобразований Ли это означает, что генератор преобразования может явно зависеть от параметра ε. Такую зависимость можно учесть введением оператора [17]

$$\Delta_S = L_S + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tag{1.5.1}$$

со следующими очевидными свойствами:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \Delta_S(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta_S f + \beta \Delta_S g,\\
&\text{b)} \quad \Delta_S(f \cdot g) = f \cdot \Delta_S g + g \cdot \Delta_S f,\\
&\text{c)} \quad \Delta_S(f, g) = (\Delta_S f, g) + (f, \Delta_S g),\\
&\text{d)} \quad \Delta_S \Delta_{S'} f = \Delta_{S'} \Delta_S f + L_{(S', S)} f + L_{S_\varepsilon' - S_\varepsilon} f,
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

где

$$S = S(z, \varepsilon), \qquad S_\varepsilon = \partial S / \partial \varepsilon.$$

Также разумно определить n-ю итерацию оператора $\Delta_S f$ с помощью формул

$$\Delta_S^n f = \Delta_S \left(\Delta_S^{n-1} f\right),$$
$$\Delta_S^0 f = f.$$

Легко получить соотношения, соответствующие свойствам (1.5.2).

Введем такие определения:

$$f_n(\zeta, 0) = \left[\Delta^n_{S(\zeta,\varepsilon)} f(\zeta, \varepsilon)\right]_{\varepsilon=0} \tag{1.5.3}$$

и новый оператор

$$E_S f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\zeta, 0). \tag{1.5.4}$$

Очевидно, что если существует конечная величина A, такая, что

$$f_n(\zeta, 0) < A^n$$

для ζ из некоторой окрестности точки ζ_0, то ряд (1.5.4) сходится.

Следующие соотношения легко проверить:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad E_S(\alpha f + \beta g) = \alpha E_S f + \beta E_S g, \\ &\text{b)} \quad E_S(f \cdot g) = E_S f \cdot E_S g, \\ &\text{c)} \quad E_S(f, g) = (E_S f, E_S g). \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Так же, как ранее это было сделано для оператора L_S, можно теперь показать, что преобразование $\zeta, \varepsilon \to z$, определяемое формулами

$$z = E_S(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} z_n(\zeta, 0), \tag{1.5.6}$$

является каноническим и описывается сходящимися рядами. Для определения генератора приведенного выше преобразования докажем следующую теорему.

Теорема. *Преобразование $z = E_S(\zeta)$ является решением гамильтоновой системы уравнений*

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = M \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^T, \tag{1.5.7}$$

соответствующим начальным условиям $z = \zeta$ *при* $\varepsilon = 0$. *При этом функция* $S(z, \varepsilon)$ *связана с* $E_S(\zeta)$ *формулами* (1.5.4) *и* (1.5.3).

Действительно, рассматривая (1.5.1), имеем

$$\Delta_S z(\zeta, \varepsilon) = L_S z(\zeta, \varepsilon) + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon},$$

где $z = \mathrm{col}(y, x)$. Из (1.5.7), где $S = S(\zeta, \varepsilon)$, находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{dy}{d\varepsilon}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} = -\frac{dx}{d\varepsilon},$$

так что

$$\Delta_S z(\zeta, \varepsilon) = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{dz}{d\varepsilon}. \tag{1.5.8}$$

Предполагая преобразование $z(\zeta, \varepsilon)$ вещественным и аналитическим, получаем

$$\Delta_S^n z(\zeta, \varepsilon) = \frac{d^n z}{d\varepsilon^n}, \tag{1.5.9}$$

а при $\varepsilon = 0$ это дает такие соотношения:

$$\Delta_S^n z(\zeta, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d^n z}{d\varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0} = z_n(\zeta, 0), \tag{1.5.10}$$

так что, используя (1.5.6), находим

$$z = E_S(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{d^n z}{d\varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0} = z(\zeta, \varepsilon).$$

Это и завершает доказательство теоремы.

Преобразование вещественной аналитической функции $f(z, \varepsilon)$ при каноническом преобразовании $z = z(\zeta, \varepsilon) = E_S(\zeta)$, определяемом формулами (1.5.6), записывается с помощью такого простого соотношения:

$$f(E_S(\zeta), \varepsilon) = E_S f(\zeta, \varepsilon). \tag{1.5.11}$$

Действительно, вдоль решения $z = z(\zeta, \varepsilon)$ системы (1.5.7), проходящего через точку $z = \zeta$ при $\varepsilon = 0$, как следует из (1.5.10), имеем

$$f(z(\zeta, \varepsilon), \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\left(\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(\Delta_S^n f)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Следовательно, из определения E_S получаем соотношение

$$f(z(\zeta, \varepsilon), \varepsilon) = E_S f(\zeta, \varepsilon),$$

которое совпадает с (1.5.11).

Интересным частным случаем правила преобразования (1.5.11) является случай, когда $S(\zeta, \varepsilon)$ и $f(\zeta, \varepsilon)$ представляются степенными рядами по ε, т. е.

$$S(\zeta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} S_{n+1}(\zeta), \tag{1.5.12}$$

$$f(\zeta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\zeta). \tag{1.5.13}$$

В этом случае введем определение

$$L_{S_p} = L_p \qquad (p \geqslant 1),$$

так что с помощью результатов предыдущего параграфа найдем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\zeta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_{n+1}(\zeta)$$

и

$$L_S f(\zeta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_{m+1} f_{n-m}(\zeta).$$

Тогда, представляя $\Delta_S f$ в виде ряда

$$\Delta_S f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n^{(1)}(\zeta),$$

находим

$$f_n^{(1)}(\zeta) = f_{n+1}(\zeta) + \sum_{m=0} C_n^m L_{m+1} f_{n-m}(\zeta)$$

и, следовательно,

$$f_0^{(1)}(\zeta) = f_1 + L_1 f_0 = f_1 + (f_0, S_1).$$

Вводя аналогичным образом ряды

$$\Delta_S^2 f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n^{(2)}(\zeta),$$

находим

$$f_n^{(2)}(\zeta) = f_{n+1}^{(1)}(\zeta) + \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_{m+1} f_{n-m}^{(1)}(\zeta)$$

и, следовательно,

$$f_0^{(2)}(\zeta) = f_1^{(1)} + L_1 f_0^{(1)}$$

или, используя выражения для $f_0^{(1)}, f_1^{(1)}$, получаем

$$f_0^{(2)}(\zeta) = f_2 + 2(f_1, S_1) + (f_0, S_2) + ((f_0, S_1), S_1).$$

Таким образом, получаются общие рекуррентные формулы преобразования функции $f(z, \varepsilon)$ при преобразовании, задаваемом рядами Ли с генератором $S(z, \varepsilon)$ в случае, когда обе эти функции являются вещественными аналитическими функциями всех переменных, а ε берется из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$:

$$f_n^{(k)}(\zeta) = f_{n+1}^{(k-1)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}. \tag{1.5.14}$$

Эту формулу можно проиллюстрировать следующим символьным треугольником

$$\begin{array}{ccccccc}
f_0 & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
f_1 & \to & f_0^{(1)} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
f_2 & \to & f_1^{(1)} & \to & f_0^{(2)} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
f_3 & \to & f_2^{(1)} & \to & f_1^{(2)} & \to & f_0^{(3)} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
f_4 & \to & & & & & \\
\downarrow & & & & & &
\end{array}$$

Интересным частным случаем является закон преобразования вектора $z = \mathrm{col}(y, x)$. Каноническое преобразование задается формулами

$$\begin{aligned}
y &= E_S(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \eta_0^{(n)}(\zeta, 0), \\
x &= E_S(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \xi_0^{(n)}(\zeta, 0),
\end{aligned} \tag{1.5.15}$$

где коэффициенты $\eta_0^{(n)} = \eta_0^{(n)}(\zeta, 0)$ и $\xi_0^{(n)} = \xi_0^{(n)}(\zeta, 0)$ определяются в результате описанной выше рекуррентной процедуры. В (1.5.15) очевидно $\eta_0^{(0)} = \eta$ и $\xi_0^{(0)} = \xi$.

Все описанные выше процедуры можно обобщить на случай явной зависимости канонического преобразования от времени. Один из способов получить этот результат заключается в том, чтобы принять время за добавочную каноническую координату, тогда сопряженным импульсом будет сам гамильтониан[1]). Такой путь сразу же приводит к алгоритму, описанному детально в работе Депри [17].

6. Эквивалентность преобразований

В предыдущих параграфах мы описали несколько способов получения канонического преобразования в виде ряда по степеням параметра ε. Такие преобразования можно записать в виде

$$y = y(\eta, \xi, \varepsilon), \qquad x = x(\eta, \xi, \varepsilon) \tag{1.6.1}$$

или

$$z = z(\zeta, \varepsilon), \tag{1.6.2}$$

где x, y, η, ξ — n-мерные векторы, а z, ζ — $2n$-мерные векторы. С помощью генератора, удовлетворяющего уравнению Гамильтона—Якоби, т. е. с помощью генератора, который требуется в методе теории возмущений Пуанкаре, преобразование (1.6.1) можно записать так:

$$y = \eta + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = y(\eta, x, \varepsilon), \qquad \xi = x + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^{\mathrm{T}} = \xi(\eta, x, \varepsilon), \tag{1.6.3}$$

где $W = W(\eta, x, \varepsilon)$ — производящая функция. Условие

$$W(\eta, x, 0) = 0 \tag{1.6.4}$$

указывает на то, что преобразование (1.6.1) является преобразованием, близким к тождественному при достаточно малых ε.

Преобразование аналогичного типа, как было видно, осуществляется с помощью генератора $S = S(y, x, \varepsilon)$, которому соответствует решение такой гамильтоновой системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \frac{dx}{d\varepsilon} = -\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1.6.5}$$

---

[1]) Гамильтониан со знаком минус (*прим. перев.*).

с начальными условиями $y = \eta$, $x = \xi$ при $\varepsilon = 0$. Справедливо следующее основное утверждение об эквивалентности преобразований.

Теорема (Шнайад [63]). *Генераторы W и S, удовлетворяющие описанным выше условиям, удовлетворяют также соотношению*

$$S(y, x, \varepsilon) = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\eta, x, \varepsilon), \tag{1.6.6}$$

где

$$y = \eta + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = y(\eta, x, \varepsilon). \tag{1.6.7}$$

В самом деле, после применения преобразования (1.6.3) к системе (1.6.5) новый гамильтониан $S'(\eta, \xi, \varepsilon)$ в соответствии с теорией Гамильтона—Якоби определяется формулой

$$S'(\eta, \xi(\eta, x, \varepsilon), \varepsilon) = S(y(\eta, x, \varepsilon), x, \varepsilon) - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\eta, x, \varepsilon). \tag{1.6.8}$$

С другой стороны, величины η и ξ по определению должны быть постоянными, и, следовательно, гамильтониан $S'(\eta, \xi, \varepsilon)$ должен быть тождественно равен нулю, что и доказывает теорему.

Теперь, вспомнив, что в общем случае функции W и S представляются степенными рядами по ε, найдем связь между коэффициентами этих двух рядов. Действительно, так как функция S' тождественно равна нулю, то соотношение

$$S\left(\eta + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}, \ x, \ \varepsilon\right) - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\eta, x, \varepsilon) = 0 \tag{1.6.9}$$

должно удовлетворяться тождественно при любых значениях $2n + 1$ независимых переменных η, x, ε.

Запишем S и W в виде рядов

$$\begin{aligned} S(y, x, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(y, x)\,\varepsilon^n, \\ W(\eta, x, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\eta, x)\,\varepsilon^n, \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

где переменные y определяются формулами (1.6.7).

Подстановка рядов (1.6.10) и (1.6.7) в (1.6.9) приводит к рекуррентным соотношениям

$$W_1 = S_1,$$

$$2W_2 = S_2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$3W_3 = S_3 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial W_2}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\frac{\partial W_1}{\partial x}\frac{\partial^2 S_1}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}},$$

и т. д. Здесь $\partial S_n/\partial\eta$ и производные высших порядков вычисляются по формуле $\partial S_n/\partial\eta|_{y=\eta}$. В общем случае в работе Мерсмана [51] найдено, что

$$W_1 = S_1,$$

$$(n+1)W_{n+1} = S_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{p} \frac{\partial^k S_{p_0}}{\partial\eta_{i_1} \ldots \partial\eta_{i_k}} \cdot \frac{\partial W_{p_1}}{\partial x_{i_1}} \ldots \frac{\partial W_{p_k}}{\partial x_{i_k}}, \quad (1.6.11)$$

где второе суммирование осуществляется по всем наборам из $k+1$ целых положительных чисел $p_0, p_1, \ldots, p_k$, таких, что $p_0 + p_1 + \ldots + p_k = n+1$. Соотношения (1.6.11) полностью эквивалентны соотношениям, первоначально полученным в работе [28] при нахождении явных формул для метода Цейпеля (Пуанкаре). Рекуррентные формулы (1.6.11) теперь можно использовать для установления явной связи между генераторами, определяемыми методом Пуанкаре и методом Хори и Депри с помощью рядов Ли. Эти соотношения детально исследованы в работе [51]. Эквивалентность формул Хори и Депри устанавливается косвенным образом при внимательном изучении того факта, что при оригинальном подходе Хори генератор S может на самом деле считаться функцией ε, хотя в этом случае приведенное доказательство теоремы Ли не годится. Впервые дискуссия по этому вопросу была открыта в работе [10] в связи с обсуждением некоторых отрицательных замечаний Депри [17] о теории Хори. Аргументация авторов этой работы по существу сводится к тому, что они считают генератор S принадлежащим некоторому однопараметрическому семейству (параметр семейства ε_0), затем строится преобразование при фиксированном значении параметра и показывается справедливость построений для любого значения ε параметра ε_0. Аналогичный прием весьма успешно применял Пуанкаре [58] в задаче, в которой одному и тому же параметру фиктивно присваивалось два разных наименования; Пуанкаре проводил разложение по двум параметрам, а на последнем этапе опять употреблял одно наименование параметра.

Для примера вслед за Пуанкаре рассмотрим функцию

$$f(\varepsilon) = \sin\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

и ее разложение в ряд Тейлора вблизи $\varepsilon = 0$. Можно провести это разложение следующим образом. Пусть

$$\sin\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \sin\frac{\varepsilon}{1-\mu}.$$

Тогда разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\sin\frac{\varepsilon}{1-\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{2n!}\frac{1}{(1-\mu)^n}[1-(-1)^n]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{2n!}[1-(-1)^n]\sum_{m=0}^{\infty}C_{-n}^{m}(-1)^m\mu^m.$$

Вспоминая, что μ равно ε, получим выражение

$$\sin\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}=\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2n!}C_{-n}^{p-n}(-1)^{p-n}[1-(-1)^n]\right\}\varepsilon^p,$$

которое, как нетрудно проверить, по существу является точным разложением функции $f(\varepsilon)$ в ряд Тейлора.

В рассматриваемом случае, возвращаясь к оператору

$$\exp(\varepsilon L_S)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L_S^n,$$

находим, что свойство

$$\exp(\varepsilon L_S)(f,\ g)=(\exp(\varepsilon L_S)f,\ \exp(\varepsilon L_S)g)$$

не зависит от того, будет ли функция S зависеть от ε или нет. Следовательно, в силу того, что вышеприведенное свойство является основой доказательства каноничности преобразования

$$z=\exp(\varepsilon L_S)\zeta,$$

находим, что его можно применить и при доказательстве в случае Хори.

7. Обобщенные преобразования на основе рядов Ли

Рассмотрим n-мерное векторное пространство и неособенное вещественное аналитическое преобразование точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{y}$ этого пространства, определяемое формулами

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^m}{m!}\boldsymbol{y}_m(\boldsymbol{x}),\tag{1.7.1}$$

где $\boldsymbol{y}_m$ — n-мерные векторы, а ε — параметр, не зависящий от $\boldsymbol{x}$. При $\varepsilon=0$ преобразование (1.7.1) будет тождественным, а при достаточно малых ε и при условии сходимости рядов (1.7.1) это

преобразование будет близко к тождественному. Однако мы будем считать выражения вида (1.7.1) лишь формальными рядами и применять к ним все правила операций со сходящимися рядами (см., например, [11]).

Одной из целей всех последующих выкладок является создание простого алгоритма преобразования произвольной векторной функции $F(y, \varepsilon)$ после применения преобразования фазовых переменных по формулам (1.7.1). Результат мы хотим получить в виде степенного ряда по ε, т. е. хотим найти коэффициенты в разложении

$$F(y(x, \varepsilon), \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n(x). \tag{1.7.2}$$

Ясно, что для того, чтобы ряды (1.7.2) существовали, векторная функция F должна быть вещественной и аналитической по ε при $\varepsilon = 0$. Предположим также, что она является вещественной аналитической функцией по y. Хори [35, 36] и Кэмел [37] независимо развили два разных алгоритма, главная цель которых состоит в решении при помощи формальных рядов задач нелинейных колебаний. Описание применений этих алгоритмов будет приведено в следующей главе. Здесь мы ограничимся описанием упомянутых выше формальных разложений.

По предположению функцию $F(x, \varepsilon)$ можно разложить в ряд

$$F(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n} \right) \Bigg|_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n(x), \tag{1.7.3}$$

а также в ряд

$$F(x(y, \varepsilon), \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F^{(n)}(y), \tag{1.7.4}$$

где

$$F^{(n)} = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} F(x, \varepsilon) \Bigg|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \right)^n F(x(y, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg|_{\varepsilon=0},$$

а преобразование $x = x(y, \varepsilon)$ является обратным к преобразованию (1.7.1) и оно предполагается существующим.

Обращая (1.7.1), мы можем также записать

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} X^{(n)}(y), \tag{1.7.5}$$

так что

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} X^{(n+1)}(y). \tag{1.7.6}$$

Выражение для $\partial x/\partial \varepsilon$ ясно указывает, что переменные y при этом считаются постоянными. Выражение (1.7.6) можно записать так:

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = T(x, \varepsilon), \tag{1.7.7}$$

где

$$T(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} X^{(n+1)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} T_{n+1}(x). \tag{1.7.8}$$

Тогда имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + T(x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + L_T, \tag{1.7.9}$$

где оператор L_T, определяемый выражением

$$L_T = T(x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.7.10}$$

действует на произвольную вещественную аналитическую функцию $f(x, \varepsilon)$. В последнем выражении $T(x, \varepsilon)$ считается n-мерной вектор-строкой, а $\partial/\partial x$ — n-мерными вектор-столбцами. Теперь мы получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(x, \varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} T_{n+1} \frac{\partial F_n(x)}{\partial x} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n^{(1)}(x), \tag{1.7.11}$$

где

$$F_n^{(1)}(x) = F_{n+1}(x) + \sum_{m=0}^{n} C_n^m T_{n-m+1}(x) \frac{\partial F_m}{\partial x} =$$

$$= F_{n+1}(x) + \sum_{p=0}^{n} C_n^p T_{p+1}(x) \frac{\partial F_{n-p}}{\partial x}. \tag{1.7.12}$$

В общем случае мы получаем

$$\frac{d^k}{d\varepsilon^k} F(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_n^{(k)}(x), \tag{1.7.13}$$

где

$$F_n^{(k)}(x) = F_{n+1}^{(k-1)}(x) + \sum_{m=0}^{n} C_n^m T_{m+1}(x) \frac{\partial F_{n-m}^{(k-1)}}{\partial x} \tag{1.7.14}$$

при $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$, а

$$F_n^{(0)}(x) = F_n(x), \qquad F_0^{(k)}(x) = F^{(k)}(x) = F^{(k)}(y)\big|_{y=x}. \tag{1.7.15}$$

Уравнение (1.7.14) является основой рекуррентного алгоритма получения коэффициентов $F^{(n)}(x)$ по $F_n(x)$ в рядах (1.7.4) и (1.7.3). Наименование переменных, разумеется, является условным. Соответствующие формулы получения коэффициентов $F_n(x)$ по коэффициентам $F^{(n)}(x)$ имеют вид

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k+1)} - \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m T_{m+1}(x) \frac{\partial F_{n-m-1}^{(k)}}{\partial x}, \tag{1.7.16}$$

где $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$.

Последовательная подстановка формул (1.7.16) друг в друга, начиная с $n = 1$, дает

$$F_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j N_j \left(F^{(k+n-j)}\right), \tag{1.7.17}$$

где $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, а линейные операторы N_j $(j \geqslant 0)$ определяются формулами

$$N_0 = 1,$$
$$N_j = -\sum_{m=1}^{j} C_{j-1}^{m-1} N_{j-m}\left\{T_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\right\} = -\sum_{m=1}^{j} C_{j-1}^{m-1} N_{j-m} L_m \tag{1.7.18}$$

при $j \geqslant 1$ и

$$L_m = T_m(x)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{1.7.19}$$

Например, первые несколько операторов N_j имеют вид

$$N_0 = 1,$$
$$N_1 = -L_1,$$
$$N_2 = -N_1 L_1 - L_2,$$
$$N_3 = -N_2 L_1 - 2N_1 L_2 - L_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В частности, при $k = 0$ уравнения (1.7.17) дают

$$F_n^0 = \sum_{j=0}^{n} C_n^j N_j \left(F^{(n-j)}\right),$$

что можно переписать так

$$F_n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j F_{j,n-j}, \tag{1.7.20}$$

где

$$F_{j,k} = -\sum_{m=1}^{j} C_{j-1}^{m-1} L_m F_{j-m,k}. \tag{1.7.21}$$

Здесь по определению

$$F_{0,k} = F^{(k)}.$$

Формулы (1.7.20) дают возможность рекуррентного получения величин $F^{(n)}$ через F_n или величин F_n через $F^{(n)}$. Как было обнаружено Кэмелом, они являются наиболее простыми из всех возможных формул.

Векторное преобразование. Коэффициенты $y_n(x)$ в (1.7.1) теперь можно легко получить по формулам (1.7.16), примененным в специальном случае (1.7.3). Тогда получаем

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= F = y, \\ F^{(k)} &= 0, \quad k > 0, \\ F_0 &= y_0(x) = x, \\ F_n^{(0)} &= F_n = y_n(x). \end{aligned}$$

Действительно, формулы (1.7.16) в этом случае дают

$$y_n(x) = -\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m T_{m+1}(x) \frac{\partial y_{n-m-1}(x)}{\partial x}$$

или, считая $p = m + 1$,

$$y_n(x) = -\sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} T_p(x) \frac{\partial y_{n-p}(x)}{\partial x}$$

или

$$y_n(x) = -T_n(x) - \sum_{p=1}^{n-1} C_{n-1}^{p-1} T_p(x) \frac{\partial y_{n-p}(x)}{\partial x}. \tag{1.7.22}$$

Обратное преобразование получается из (1.7.14) или непосредственно из (1.7.21).

Действительно, в обозначениях выражений (1.7.4) получаем

$$F(x(y, \varepsilon), \varepsilon) = x,$$

$$F^{(0)} = y, \quad F^{(n)}(y) = X^{(n)}(y),$$

и

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} X^{(n)}(y).$$

Рекуррентные соотношения (1.7.21) с учетом (1.7.8) дают

$$\begin{aligned} X_{j,k}(y) &= -\sum_{m=1}^{j} C_{j-1}^{m-1} T_m(y) \frac{\partial}{\partial y} X_{j-m,k}(y), \\ X^{(n)}(y) &= T_n(y) - \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^{j} X_{j,n-j}(y), \end{aligned} \tag{1.7.23}$$

где

$$X_{0,k} = X^{(k)}(y).$$

Применения полученных выше результатов будут описаны в следующей главе, где мы будем иметь дело с проблемой интегрирования нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

8. Замечания

Линдстедт [46] показал значение развития метода теории возмущений, который дает возможность исключить секулярные и смешанные секулярные члены при исследовании возмущенных гармонических осцилляторов. Этот метод он описал различными способами, но всегда подразумевалось, что возмущающие силы должны быть четными или нечетными функциями входящих в них угловых переменных. Вскоре это ограничение было снято Пуанкаре [57—60]. В своих прославленных «Новых методах» (т. 2) [58] он развил канонический аналог метода Линдстедта, который даже на сегодняшний взгляд кажется очень общим и детально разработанным. Однако ясно, что основная идея метода Пуанкаре восходит к работам Делоне [16] и некоторым дополнениям Тиссерана [68] к теории движения Луны, развитой Делоне. В действительности можно даже вернуться ко второй теории движения Луны, разработанной Эйлером [23]. Последний, очевидно, отдавал себе отчет (и это видно при сравнении двух

его лунных теорий между собой) о значении разложений частот возмущенных систем в степенные ряды по малому параметру задачи. Эти теории оказали большое влияние на работу Пуанкаре [58]. Заслуга Цейпеля состоит, главным образом, в применении метода Пуанкаре к теории движения хорошо определенных систем, хотя систематическое выделение членов разного периода при разложениях возмущений безусловно является важным вкладом в теорию возмущений, особенно если учесть тот факт, что различные короткопериодические колебания малоинтересны, а наибольшее значение имеют долгопериодические или секулярные члены. Вообще методы усреднения (в том смысле, в котором они употребляются в книге Чезари [12], [13]) были весьма популярны в небесной механике, хотя и без изучения проблемы их сходимости. Возможно, это произошло из-за вполне определенных утверждений Пуанкаре о расходимости рядов Линдстедта. Такие ряды использовались и продолжают использоваться для достаточно точного прогноза положения различных небесных тел. Крылов и Боголюбов [39], [40] дали некоторые оценки ошибок, получающихся при отбрасывании членов выше некоторого порядка, а как следствие новых успехов в небесной механике в 60-х годах эти оценки были улучшены Кинером [42], [43]. До некоторой степени удивительно, что в западной литературе существует огромный пробел в описании проблем, связанных с линейными и нелинейными колебаниями,— область, весьма хорошо представленная в советской литературе, особенно начиная от работ Ляпунова и до 1950-х годов. Вся небесная механика развивалась в результате использования имевшихся к концу прошлого века достижений классического анализа, а также результатов из нелинейной теории цепей, и похоже, что механические системы для западных математиков не являются чем-то очень привлекательным. Выдающаяся работа Чезари [12] в 1940 году не сразу получила законное признание, в то время как в ней впервые содержалось доказательство сходимости метода усреднения для широкого класса задач. Интересные работы Гэмбилла [24] — [27] и Хейла [30] — [33] появились более чем через десять лет[1]). Работы Биркгофа [3]—[5], Зигеля [64], [65] и Уинтнера [69] были больше направлены на математические аспекты качественных свойств динамических систем. Одновременное изучение Биркгофом пространственного движения в ограниченной задаче трех тел и численные эксперименты Стремгрена [66] были оценены совсем недавно и обобщены в ценной работе Себехея [67].

---

[1]) Заметим, что основные теоремы работ [12, 24 — 27, 30], доказанные при помощи метода сжимающих отображений, позднее были естественным путем получены В. А. Якубовичем (см., например, [22*]) только на основании теорем Ляпунова (*прим. перев.*).

Мультон [53] и Макмиллан [47] также должны фигурировать в списке ученых, которые получали одновременно и теоретические, и численные результаты. Аналогично Адамс и Дарвин [15]. Метод Пуассона [61] вариации интегралов движения является одним из немногих методов, использовавшихся в течение долгого времени. В современной литературе он был возрожден Кирхом [41] и в связи с разными проблемами и под разными названиями упоминается в работах Дэнби [14], а также Брауэра и Клеменса [7]. Недавно во многих работах он появился под названием Универсальных Переменных в ньютоновской задаче двух тел[1]). Использование векторного и матричного исчисления также еще встречается редко в книгах, написанных более чем через сто лет после окончательной разработки этого аппарата. Книги Зигеля [65] и Абрахама [1] показывают эволюцию классических математических представлений одних и тех же проблем в наши дни. Определение матриц Лагранжа и Пуассона вообще трудно найти где-нибудь, и приходится ссылаться на работы по квантовой механике и теории поля. Доказательство условий симплектичности для канонических преобразований весьма упрощается при использовании матричных обозначений. Связь между анализом нелинейных цепей, методами нелинейной механики и классическими методами усреднения в небесной механике вполне отчетливо показана в работе Чезари [13]. Эквивалентность метода Крылова — Боголюбова — Митропольского и метода Цейпеля впервые показана в работе Бурштейна и Соловьева [9]. Усилия по созданию наилучшей теории движения искусственных спутников до некоторой степени инициировали появление новых исследований по аналитической и геометрической теориям. После 1960 года стало ясно, что появились два встречных потока исследований в теории нелинейных колебаний и в небесной механике. Ключевые работы в этой области выполнили Мозер [54] — [56], Хейл [30] — [33] и Дилиберто [18] — [21], а в Советском Союзе — Колмогоров [38], Арнольд [2] и Мерман [48]. Важный шаг в сторону (и вперед) от работ Пуанкаре и Биркгофа был сделан Хори [34], который использовал канонические отображения Ли. Всего за год до этого ряды Ли использовались в работе Лейманиса [44], посвященной изучению движения твердого тела, однако без попыток применения методов теории возмущений. Распространение этих результатов на неканонические системы было осуществлено в докладе Хори [35] и независимо в работе Кэмела [37]. Однако такое обобщение является несущественным, так как любую систему можно записать в гамильтоновой форме, на что впервые указал Дирак [22]. Этот факт был хорошо известен исследователям по теории оптимизации и теории управления, хо-

[1]) Об Универсальных Переменных см., например, [3*] (*прим. перев.*).

тя большинство прикладных математиков, работавших в затронутых в настоящей книге областях, ничего об этом не знали. Ранними работами в этой области, насколько нам известно, являются работы Минера, Тэпли и Пауэрса [52]. Наконец, операции с формальными рядами, как с обычными сходящимися, обосновываются, например, в работе Картана [11]. По-видимому, это не первая работа, но одна из лучших.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abraham R. Foundations of Mechanics.— Philadelphia: W. A. Benjamin Inc., 1967.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— УМН, 1963, т. 18, №·6, стр. 91—192.
3. Birkhoff G. D. Proof of Poincare's geometric theorem.— Trans. Amer. Math. Soc., 1915, vol. 14, N 1, p. 14—22.
4. Birkhoff G. D. The restricted problem of three bodies.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915, vol. 39, p. 1—115.
5. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.— М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
6. Breves J. A. A new proof of the conditions for a canonical transformation. Seminars Univ. of São Paulo, 1968.— In: Celest. Mech., 1972, vol. 6, No. 1.
7. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.
8. Brown E. W. Elements of theory of resonance.— Houston: Rice Inst. Publ., 1931, N 19.
9. Бурштейн Э. Л., Соловьев Л. С. Гамильтониан усредненного движения.—ДАН СССР, 1961, т. 139, № 4, стр. 855—858.
10. Campbell J. A., Jefferys W. H. Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit.— Celest. Mech., 1970, vol. 2, N 4, p. 467—473.
11. Cartan E. Elementary theory of analytic Functions of one or several complex variables.— Massachusetts: Addison-Wesley Reading, 1963.
12. Cesari L. Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Atti Accad. Ital. Mem. Clas. Fis. Mat. e Nat., 1940, t. 11, p. 633—692.
13. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1964.
14. Danby J. M. A. Fundamentals of celestial mechanics.— New York: MacMillan, 1962.
15. Darwin G. H. Scientific papers.— London. Cambridge Univ. Press, 1911.
16. Delaunay C. E. Paris: Mem. Acad. Sci., 28, 29 (entire volumes), 1860—1867.
17. Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter.— Celest. Mech., 1969, vol. 1, № 1, p. 12—30.
18. Diliberto S. P., Hufford G. Perturbation theorems for nonlinear ordinary differential equations.— Ann. Math. Studies, 1956, vol. 36, p. 207—236.
19. Diliberto S. P. Perturbation theorems for periodic surfaces, I and II.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1960, vol. 9, p. 265—299: 1961, vol. 10, p. 111.
20. Diliberto S. P., Kyner W. T., Freund R. F. The application of periodic surface theory to the study of satellite orbits.— Astron. J., 1961, vol. 66, N 3, p. 118—128.

21. Diliberto S. P. New results on periodic surfaces and the averaging principle. US-Japanese Semin. on Diff. Func. Equas.— Philadelphia. W. A. Benjamin Inc., 1967, p. 49—87.
22. Dirac P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics. London, Proceed. Roy. Soc., 1958, vol. A 246, p. 326—332.
23. Euler L. Theoria motus Lunae, novo methodo. Petrop., 1772.— In: Brown E. W. Lunar theory.— New York: Dover Public., 1960.
24. Gambill R. A. Criteria for parametric instability for linear differential systems with periodic coefficients.— Riv. Mat. Univ. Parma, 1954, vol. 5, p. 169—181.
25. Gambill R. A. Ibidem, 1955, vol. 6, p. 37—43.
26. Gambill R. A. Ibidem, 1955, vol. 6, p. 311—319.
27. Gambill R. A., Hale J. K. Subharmonics and ultraharmonics solutions of weakly nonlinear systems.— J. RAT. Mech. Anal., 1956, vol. 5, p. 353—398.
28. Giacaglia G. E. O. Notes on von Zeipel's method. GSFC-NASA Publ. X-547-64-161, Greenbelt, 1964.
29. Giacaglia G. E. O. Evaluation of methods of integration by series in celestial mechanics. Ph. D. Dissertation, Yale University, New Haven, 1965.
30. Hale J. K. On the boundedness of the solution of linear differential systems with periodic coefficients.— Riv. Mat. Univ. Parma, 1954, vol. 5, p. 137—167.
31. Hale J. K. Periodic solutions of nonlinear systems of differential equations.— Riv. Mat. Univ. Parma, 1954, vol. 5, p. 281—311.
32. Hale J. K. Sufficient conditions for the existence of periodic solutions of first and second order differential equations.— J. Math. Mech., 1958, vol. 7, N 2, p. 163—172.
33. Hale J. K. Integral manifolds of perturbed differential equations.— Ann. Math., 1961, vol. 73, N 3, p. 496—531.
34. Hori G. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables.— J. Japan. Astron. Soc., 1966, vol. 18, N 4, p. 287—296.
35. Hori G. Lie transformations in nonhamiltonian systems. Lecture Notes, Summer Institute in Orbital Mechanics, The Univ. of Texas at Austin, May 1970.
36. Hori G. Theory of general perturbations for noncanonical systems.— J. Japan. Astron. Soc., 1971, vol. 23, p. 567—587.
37. Kamel A. A Perturbations methods in the theory of nonlinear oscillations.— Celest. Mech., 1970, vol. 3, N 1, p. 90—106.
38. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. Международный математический конгресс в Амстердаме.—М.: Физматгиз, 1961, стр. 187—208.
39. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.— Киев: Изд-во АН УССР, 1934.
40. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.—Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
41. Kurth R. Introduction to the mechanics of the Solar system. (Chapt. III, Section 3).— New York: Pergamon Press, 1959.
42. Kyner W. T. Qualitative properties of orbits about an oblate planet.— Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, N 2, p. 227—231.
43. Kyner W. T. Averaging methods in celestial mechanics. Proc. Intern. Astron. Union Symp., No. 25, Saloniki, Greece, 1964. New York, Acad. Press, 1967.
44. Leimanis E. The general problem of motion of coupled regid bodies about a fixed point.— New York, Springer-Verlag, 1965, p. 121—128.
45. Lie M. S. Theorie der transformationgruppen. (vol. 1, I) Leipzig, Teubner, 1888.

46. Lindstedt A. Beitrag zur integration der differentialgleichungen der storugtheorie. Abh. K. Akad. Wiss., St. Petersburg, 1882, b. 31, No. 4 (см. также: Comptes Rendus Acad. Sci., Paris. 1883, t. 3; Bull. Astron., 1884, vol. 1, p. 302).
47. MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies.— New York, Dover Publications, 1920, p. 403—413.
48. Мерман Г. А. Почти-периодические решения и расходимость рядов Линдстедта в плоской ограниченной задаче трех тел.—Бюл. Ин-та теорет. астрон., 1961, т. 8, стр. 5—133.
49. Mersman W. A. A new algorithm for the Lie transformation.— Celest. Mech., 1970, vol. 3, N 1, p. 81—89.
50. Mersman W. A. A unified treatment of Lunar theory and artificial satellite theory.— В кн.: Periodic Orbits, Stability and Resonances /Ed. G. E. O. Giacaglia.— Dordrecht, Holland: Reidel Pub. Co., 1970.
51. Mersman W. A. Explicit recursive algorithm for the construction of equivalent canonical transformations.— Celest. Mesh., 1971, vol. 3, N 3. p. 384—389.
52. Miners W. E., Tapley B. D., Powers W. F. The Hamilton — Jacobi Method applied to the low-thrust trajectory problem. Proc. 18-th Cong. Intern. Astronaut. Fed., Belgrade, Yugoslavia, 1967.
53. Moulton F. R. et al. Periodic Orbits. Washington, Carnegie Inst. Wash. Publ., No. 161, 1920.
54. Moser J. Nonexistence of integrals for canonical systems of differential equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 409—436.
55. Мозер Ю. К. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.—Математика, 1962, т. 6, № 5, стр. 51—67.
56. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.—М.: Мир, 1973.
57. Poincaré H. Sur la méthode de M. Lindstedt.— Bull. Astron., 1886, t. 3, p. 57.
58. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. т. 1,2. Избр. тр., М.: Наука, 1971—1972.
59. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике.—М.: Наука, 1965.
60. Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме. Избр. тр.—М.: Наука, 1972, т. 2.
61. Poisson S. D. Mémoire sur la variation des constantes arbitraires.— J. École Polyt., 1834, t. 3, p. 266—344.
62. Powers W. F., Tapley B. D. Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis.— AIAA J., 1969, vol. 7, N 3, p. 394—399.
63. Shniad H. The equivalence of von Zeipel mappings and Lie transforms.— Celest. Mech., 1969, vol. 2, N 1, p. 114—120.
64. Зигель К. Л. Об интегралах канонических систем.—Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 103—117.
65. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.—М.: ИЛ, 1959.
66. Stromgren E. см. стр. 551—553 в [67].
67. Szebehely V. Theory of orbits — the restricted problem of three bodies.— New York: Acad. Press, 1967.
68. Tisserand F. Traité de mécanique céleste.— Paris: Gauthier-Villars, 1896, 4 vols.
69. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.

ГЛАВА II

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ. ОБОБЩЕНИЯ

1. Введение

Эта глава имеет две главные цели. Во-первых, описываются известные методы канонической теории возмущений и приводятся некоторые примеры, на которых основываются теоремы в главах III и IV. Во-вторых, описываются некоторые основные результаты, касающиеся итеративных процедур, которые играют очень важную роль в методах усреднения. Важнейшие, часто пересекающиеся друг с другом, результаты в этих областях получили Линдстедт [70], Пуанкаре [91], Уиттекер [102], Зигель [96], Крылов [61], Боголюбов [7], Колмогоров [59], Арнольд [3, 4], Дилиберто [32], Плисс [89], Кинер [63], Мозер [78], Хейл [47]. Многие из этих результатов сообщили и подробно описали в своих ценных книгах Зигель [98], Уинтнер [104], Немыцкий и Степанов [88], Чезари [15], Хейл [50], Абрахам [1], Биркгоф [6], Боголюбов и Митропольский [8], Лефшец [67], Минорский [74], Сансоне и Конти [95], Стернберг [99].

Общепринятым, хотя и долгое время не упоминавшимся, фактом является то, что методы усреднения были введены впервые Линдстедтом [70]. Вполне возможно, что идеи Линдстедта появились в результате усилий Эйлера [34], предпринятых им для решения проблемы движения Луны.

В линейных периодических системах метод усреднения сразу же приводит к определению характеристических показателей Флоке — Ляпунова, а в нелинейных гамильтоновых системах — к разделению «завязанного» уравнения Гамильтона — Якоби и, следовательно, к определению переменных действие — угол [1]). В общих нелинейных системах (т. е. не обязательно в гамильтоновых) метод усреднения приводит к разделению движения в расширенном фазовом пространстве, которое можно назвать *котангенциальным пространством* исходного пространства системы.

Относительно гамильтоновых систем общеизвестен и общепризнан тот факт, что, вообще говоря, они являются неинтегрируемыми. Тем не менее, такое утверждение надо рассматривать

[1]) По-видимому, автор имеет в виду применение метода усреднения только к устойчивым системам. Для неустойчивых систем это утверждение ошибочно (*прим. перев.*).

с осторожностью и в зависимости от определения самого понятия интегрируемости. Действительно, если гамильтониан принадлежит по крайней мере классу C^2 в некоторой области D фазового пространства, то существует, и притом единственное, решение, соответствующее любой начальной точке из области D. В этом смысле система является, разумеется, интегрируемой. С другой стороны, слово «интегрируемость» в гамильтоновых системах часто связывается с идеей разделимости движения, т. е. с так называемыми системами Штеккеля (или, в частности, с системами Лиувилля). Связь между двумя этими понятиями можно проследить, если вспомнить, что при существовании и единственности решения для моментов времени из интервала $0 \leqslant t < T$ движение в фазовом пространстве есть отображение, сохраняющее площадь (или, по-другому, дивергенция потока гамильтоновой системы равна нулю). Верно также то, что такой поток является каноническим, т. е. любая точка решения $P(t)$ (при $0 \leqslant t < T$) получается из начальной точки $P(0)$ каноническим преобразованием, которое при достаточно малых t принадлежит классу C^2 и, кроме того, обратимо. Отсюда следует, что в терминах начальных условий, взятых в качестве частного набора канонических переменных, система с необходимостью будет разделимой с гамильтонианом, сводящимся к константе. Разумеется, такого рода разделимости можно достичь только после того, как решение известным образом явно записано в виде функции времени и начальных условий, так что никакой пользы от такого результата нет. Однако он служит для указания связи между двумя вышеупомянутыми понятиями интегрируемости.

Что касается периодических линейных систем, то нам известно, что при некоторых достаточно общих условиях решение всегда существует и, согласно теории Флоке — Ляпунова, имеет вполне определенный вид.

Для общих нелинейных систем интегрируемость можно понимать только как существование и единственность решения. Однако связь с идеей разделимости можно установить «гамильтонизацией» системы в котангенциальном пространстве, о чем подробно будет рассказано ниже.

Большинство результатов, касающихся неинтегрируемости, основано на исследовании существования интегралов в окрестности особой точки (см. [96]), на приводимости к нормальной форме Биркгофа с помощью степенных рядов или на сходимости итеративных процедур. Не очевидно, что отрицание вышеперечисленных утверждений подразумевает неинтегрируемость. Биркгофом было доказано, что в общем случае нормальная форма для гамильтоновых систем не может быть получена с помощью сходящихся рядов. Хотя методы усреднения, по существу, являются переведенной на некоторый другой язык нормализацией Биркго-

фа, мы, тем не менее, не можем сделать вывода об их расходимости, так как известно, что операции с рядами могут изменить свойство сходимости или расходимости метода. В самом деле, как будет показано на примерах, метод усреднения эквивалентен нормализации, и, следовательно, в общем случае мы вправе ожидать его расходимости. С другой стороны, методы усреднения можно так обобщить, переопределить, дополнить и подчинить возмущения таким условиям, что эти методы будут сходиться по крайней мере для некоторого набора начальных условий.

Как было показано для некоторых специальных примеров, дополнительные интегралы, определяемые формальными рядами (см. [24]), имеют почти тот же смысл, что и истинные интегралы движения, и это было проверено численно для очень больших интервалов времени. Метод поверхностей сечения (см. [91]) оказал неоценимую помощь при поисках возможных интегралов, и было показано, что интегралы (не обязательно общие или допускаемые глобально) могут существовать и для систем, определяемых вначале как неинтегрируемые (см. [9]).

2. Сходимость классического метода итераций

Если соответствующим образом подобрать значения границ временнóго интервала, то можно показать, что при достаточно общих условиях простейший метод последовательных преближений решения рядами является сходящимся. В действительности известен следующий результат (см. [71]).

Рассмотрим сначала систему n уравнений относительно $x_1, \ldots, x_n$, зависящую от параметра ε:

$$F_i(x, \varepsilon) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.2.1}$$

где $\boldsymbol{x}$ — набор переменных $x_1, \ldots, x_n$. Далее предположим, что

а) $$F_i(0, 0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

б) $$J = \det \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \text{ при } \boldsymbol{x} = 0, \quad \varepsilon = 0.$$

в) $$\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} \neq 0 \text{ для всех } i \text{ при } \boldsymbol{x} = 0.$$

Отсюда следует, что функции F_i можно разложить в степенные ряды по $\boldsymbol{x}$ и ε вблизи точки $\boldsymbol{x} = 0, \varepsilon = 0$. Тогда, как легко доказать, при условии аналитичности функций F_i по всем аргументам в некоторой области переменных $\boldsymbol{x}$, ε ряды

$$x_j = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s a_{js}, \tag{2.2.2}$$

полученные методом последовательных приближений, равномерно сходятся по ε. Величины a_{js} получаются подстановкой выражений для x_j в разложения функций F_i и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε. Доказательство этого утверждения можно провести, взяв за основу любую стандартную книгу по математическому анализу (см., например, [45]). Для дальнейшего рассмотрим подробнее некоторые детали. Разложение функций $F_i(x, \varepsilon)$ имеет вид

$$F_i(x, \varepsilon) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right)_0 \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)_0 x_j x_k + \ldots = 0.$$

Для стандартизации записей введем обозначение $x_0 \equiv \varepsilon$. Тогда приведенное разложение можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 x_j \equiv b_0^{(i)} x_0 + \sum_{k,j=0}^{n} b_{jk}^{(i)} x_j x_k + \sum_{l,k,j=0}^{n} b_{lkj}^{(i)} x_j x_k x_l + \ldots \tag{2.2.3}$$

При подстановке рядов (2.2.2) в ряды (2.2.3) сравнение коэффициентов при одинаковых степенях ε (или x_0) дает

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 a_{j1} = b_0^{(i)}, \tag{2.2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 a_{j2} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} b_{jk}^{(i)} a_{j1} a_{k1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 a_{jp} = \Phi_{ip}(b_{j_0 j_1 \ldots j_k}, a_{rs}) \tag{2.2.5}$$

$$(r, s = 1, \ldots n).$$

Следовательно, на каждом шаге коэффициенты a_{jp} вычисляются по данной системе n уравнений, правые части которых известны, если найдены все предыдущие приближения $a_{j1}, \ldots, a_{jp}$. Определитель этой системы не равен нулю по предположению б). С формальной точки зрения уравнения (2.2.4) полностью аналогичны набору линейных неоднородных уравнений в частных производных, которые встречаются в методе усреднения Линдстед-

та — Пуанкаре, а также при асимптотическом решении с помощью рядов Ли.

Теперь рассмотрим случай $J = 0$ и предположим, что по крайней мере один из первых миноров этого определителя не равен нулю. Далее положим, например, $\partial F_i/\partial x_1 = 0$. Тогда $(n-1)$-е уравнение (2.2.1) может быть решено относительно $x_2, \ldots, x_n$ в виде степенных рядов по x_0 и x_1. Если результат подставить в n-е уравнение (2.2.1), то получится уравнение относительно x_0 и x_1. Так как коэффициент при первой степени x_1 будет равен нулю, то решение для x_1 в виде степенных рядов по x_0 должно содержать дробные степени этого параметра. Это является прямым следствием теоремы Вейерштрасса об умножении степенных рядов. Использование уничтожающихся определителей, согласно работе [13], позволяет найти решение в случае обращения в нуль всех первых миноров порядка $n-1$. Макмиллан [71] развил этот метод дальше. Появление дробных степеней в этих случаях непосредственно приводит к появлению дробных степеней в рядах асимптотического решения, что, как будет видно ниже, связано с проблемами резонансов.

Далее, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \varepsilon f_i(x, \varepsilon, t), \tag{2.2.6}$$

где $i = 1, \ldots, n$, а функции f_i аналитичны по x, ε, t при $x \in D$ (D — заданная открытая область пространства R^n), $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $t \in R$, и регулярны при $x_i = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Пусть функции f_i можно разложить в степенные ряды по $\xi_i = x_i - \alpha_i$ и ε. При $t \in [0, T]$, $|x_i - \alpha_i| \leqslant m_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0 \leqslant 1$ эти ряды являются сходящимися. Представление уравнений (2.2.6) в виде рядов приводит к уравнениям

$$\dot{\xi}_i = \varepsilon \left[f_i(\alpha, 0, t) + \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)_0 \xi_j \xi_k + \ldots \right]$$

где $\xi_0 = x_0 = \varepsilon$, $\alpha_0 = 0$, а нижний индекс нуль означает, что величины x_i заменены на α_i. Эти уравнения можно записать в виде

$$\dot{\xi}_i = \varepsilon \left[\varphi_0^{(i)} + \sum_{j=0}^{n} \varphi_j^{(i)} \xi_j + \sum_{j,k=0}^{n} \varphi_{jk}^{(i)} \xi_j \xi_k + \ldots \right], \tag{2.2.7}$$

где функции φ зависят от α и t.

Наша цель заключается в получении величин ξ_i в виде степенных рядов по ε, коэффициенты которых являются функциями

времени и постоянных α, т. е.

$$\xi_i = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(i)} \varepsilon^k, \tag{2.2.8}$$

где

$$\xi_k^{(i)} = \xi_k^{(i)}(\alpha, t) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Если (2.2.8) подставить в (2.2.7) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях уравнений, то в результате придем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_1^{(i)} = \varphi_0^{(i)},\\
&\dot{\xi}_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(i)} \xi_1^{(j)},\\
&\dot{\xi}_3^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(i)} \xi_2^{(j)} + \sum_{j,k=1}^{n} \varphi_{jk}^{(i)} \xi_1^{(j)} \xi_1^{(k)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{\xi}_p^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(i)} \xi_{p-1}^{(j)} + F_p^{(i)},
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

где $p = 1, 2, 3, \ldots$ Функции $F_p^{(i)}$ зависят от решения для всех предыдущих приближений до порядка $p - 1$, так что на каждом шаге имеется такой набор приближений:

$$\dot{\xi}_p^{(i)} = \Phi_p^{(i)}\left(\xi_k^{(j)}, t, \beta_l\right)$$

при $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, p - 1$; $l = 1, \ldots$ $\ldots, n(p - 1)$.

В результате функции $\xi_p^{(i)}$ находятся в квадратурах. Постоянные интегрирования β не являются произвольными. Действительно, если остановиться на p-м шаге решения, то решения будут зависеть от исходных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и от np постоянных β. Можно предпочесть выбор β в виде нулей или определить их каким-нибудь другим подходящим образом. Во втором случае они будут функциями величин α. Если постоянные α_k являются начальными условиями, т. е. $x_i(0) = \alpha_i$, то постоянные β должны быть выбраны так, чтобы все $\xi_p^{(i)}$ уничтожались при $t = 0$. Теперь покажем, что ряды для ξ_i, получаемые описанным выше способом, будут сходящимися при $t \in [0, T]$ и достаточно малом ε.

Без потери общности можно предположить, что правые части уравнений (2.2.7) являются сходящимися рядами при $|\xi_i| \leqslant 1$,

$\varepsilon \leqslant 1$, $t \in [0, T]$. Если это условие не выполняется сначала, то ему всегда можно удовлетворить изменением скалярных множителей при ξ_i и ε. Отсюда следует, что все коэффициенты φ, стоящие в правых частях уравнений (2.2.7), ограничены и меньше некоторого положительного M, т. е.

$$\left|\varphi^{(i)}_{j_1 j_2 \ldots j_k}\right| \leqslant M$$

при $i = 1, \ldots, n$ и $k = 1, 2, 3, \ldots$ Теперь можно использовать понятие мажорирующих рядов. Действительно, рассмотрим уравнения

$$\dot{\eta}_i = \frac{M\varepsilon}{(1-\varepsilon)\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j\right)} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.2.10}$$

Правые части этих уравнений можно разложить в степенные ряды по ε и η_j при $|\varepsilon| < 1$ и $|\Sigma\eta_j| < 1$. Учитывая описанные выше предположения, получаем, что каждый коэффициент таких рядов будет положителен и больше соответствующего коэффициента в рядах (2.2.7). Уравнения (2.2.10) можно решить только что описанным методом последовательных приближений. Отсюда следует, что правые части уравнений (2.2.9) будут меньше соответствующих правых частей уравнений (2.2.10). Таким образом, если решение уравнений (2.2.10) сходится, то и решение уравнений (2.2.9) также сходится. Но уравнения (2.2.10) можно проинтегрировать в явном виде. Если начальные условия принять равными нулю (т. е. $\xi_i = 0$, если α_i являются начальными условиями исходной задачи), то в результате получаем

$$\eta_1 = \ldots = \eta_n = \eta$$

или

$$\dot{\eta} = \frac{M\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-n\eta)}$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{1}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{2Mn\varepsilon t}{1-\varepsilon}\right)^{1/2}\right], \tag{2.2.11}$$

что удовлетворяет начальным условиям $\eta = 0$ при $t = 0$ и $\varepsilon = 0$. Разложение (2.2.11) в степенной ряд по ε будет сходящимся при условии

$$\left|\frac{2Mn\varepsilon t}{1-\varepsilon}\right| < 1$$

для всех t из $[0, T]$, т. е. при условии

$$|\varepsilon| < \varepsilon_0 = \frac{1}{1 + 2nMT}. \tag{2.2.12}$$

Так как метод последовательных приближений дает единственный результат, то он должен совпасть с разложением величины (2.2.11). Таким образом, ряды для ξ_i являются сходящимися при $t \in [0, T]$ и $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, где M — верхняя оценка всех коэффициентов в (2.2.7). Видно, что при достаточно большом T ряды будут сходиться, вообще говоря, при $\varepsilon \to 0$. Описанная выше оценка не является наилучшей, поэтому слова «вообще говоря» допускают ситуацию, когда описанный метод сходится при достаточно малых ε (но ненулевых) при $T \to \infty$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = g_i(x, t) + \varepsilon f_i(x, \varepsilon, t) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.2.13}$$

Заменяя величины α_i в описанном выше методе на решения $x_{i0}(t)$ системы (2.2.13) при $\varepsilon = 0$ и определяя

$$\xi_i = x_i - x_{i0},$$

аналогичным образом можно найти, что коэффициенты $\xi_p^{(i)}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\dot{\xi}_p^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(i)} \xi_p^{(j)} + F_p^{(i)}\left(\xi_k^{(l)}, t\right), \tag{2.2.14}$$

где $i = 1, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, p-1$; $p = 1, 2, 3, \ldots$ Весьма замечательным свойством этих уравнений является то, что, как и раньше, функции $\varphi_j^{(i)}$ не зависят от номера p, т. е. решения однородных уравнений, соответствующих (2.2.14), одинаковы при всех p. Они являются явными функциями времени и величин $x_{i0}(t)$, которые зависят от набора n постоянных интегрирования. Что касается постоянных интегрирования для (2.2.14), то их можно выбрать так, чтобы $\xi_{(p)}^i = 0$ при $t = 0$, или, используя терминологию небесной механики, в этом случае решения ξ_i и x_{i0} будут оскулирующими. Существуют другие способы выбора постоянных интегрирования, но они потребуют некоторых дополнительных модификаций, обусловленных тем, что в них разложения ведутся не в окрестности точки $\xi_i = 0$ (при $t = 0$).

Классический метод приближений Пикара позволяет показать, что решение системы уравнений

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t)\, \xi_j + k_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

мажорируется в интервале $[0, T]$ решением системы

$$\dot{\eta}_i = M \sum_{j=1}^{n} \eta_j + M \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где M — верхняя оценка функций $\varphi_{ij}(t)$ и $k_i(t)$ в интервале $[0, T]$. Затем так же, как это было сделано выше, можно показать, использовав мажорирующие функции, определяемые решением уравнений

$$\dot{\eta}_i = M \frac{\varepsilon + \eta_1 + \ldots + \eta_n}{1 - (\varepsilon + \eta_1 + \ldots + \eta_n)},$$

что ряды для ξ_i являются сходящимися в интервале $[0, T]$ при

$$|\varepsilon| < \exp(-MnT), \tag{2.2.15}$$

где M — верхняя оценка коэффициентов уравнений (2.2.13), если представить ξ_j в виде рядов по ε. Полученная оценка в этом случае является более строгой, поэтому T может быть больше, чем в предыдущем случае. Эти случаи подробно разобраны в работе Мультона [86]. Однако, как мы увидим ниже, оценка (2.2.15) может и не быть в этом случае наилучшей.

3. Секулярные члены. Способ Линдстедта

В классической ситуации описанные выше методы приводят к появлению секулярных членов, т. е. в рядах, описывающих решение (или в $\xi_p^{(i)}$), содержатся члены, линейные (по крайней мере) по t. Если такого явления можно избежать и, более того, если можно сделать функции $\xi_p^{(i)}(t)$ ограниченными при всех t (скажем, условно-периодическими или просто периодическими), то скорость сходимости может быть улучшена, и в некоторых специальных случаях (как будет видно в следующей главе) для всех t будет иметь место действительная сходимость при достаточно малых ε.

Сейчас мы применим описанный в предыдущем параграфе метод к уравнению простого маятника и убедимся в появлении секулярных членов, а также опишем способ Линдстедта в приложении к этому частному случаю.

Для простоты предположим, что начальные условия соответствуют колебательному случаю в движении маятника, т. е. колебаниям конечной амплитуды около устойчивого положения равновесия. Уравнение движения можно записать следующим образом:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta, \tag{2.3.1}$$

где $\omega_0^2 = g/l$[1]). Рассмотрим сходящееся разложение $\sin\theta$ в ряд по θ и введем новую переменную по формуле $\theta = \sqrt{\varepsilon}x$, так что уравнение (2.3.1) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\varepsilon^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2.3.2}$$

При $\varepsilon = 0$ (бесконечно малые колебания) решение этого уравнения можно записать так:

$$x_0(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{2.3.3}$$

Рассмотрим ряды

$$\xi = x - x_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi_m(t);$$

это означает, что решение в окрестности опорного решения $x_0(t)$ ищется в виде

$$x = x_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi_m(t). \tag{2.3.4}$$

Согласно только что описанному методу надо подставить ряд (2.3.4) вместо x в (2.3.2) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. Первые несколько приближений определяются уравнениями

$$\begin{aligned}
&\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2\xi_1 = \frac{1}{3!}\omega_0^2 x_0^3,\\
&\ddot{\xi}_2 + \omega_0^2\xi_2 = \frac{1}{2!}\omega_0^2 x_0^2\xi_1 - \frac{1}{5!}\omega_0^2 x_0^5,\\
&\ddot{\xi}_3 + \omega_0^2\xi_3 = \frac{1}{2!}\omega_0^2\left(x_0^2\xi_2 + x_0\xi_1^2\right) - \frac{1}{4!}\omega_0^2 x_0^4\xi_1 + \frac{1}{7!}\omega_0^2 x_0^7,\\
&\ddot{\xi}_4 + \omega_0^2\xi_4 = \frac{1}{3!}\omega_0^2\left(3x_0^2\xi_3 + 6x_0\xi_1\xi_2 + \xi_1^3\right) -\\
&\qquad - \frac{1}{4!}\omega_0^2\left(x_0^4\xi_2 + 2x_0^3\xi_1^2\right) + \frac{1}{6!}\omega_0^2 x_0^6\xi_1 - \frac{1}{9!}\omega_0^2 x_0^9.
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Исследуем решение для ξ_1, соответствующее начальным условиям $\xi_1 = \dot{\xi}_1 = 0$ при $t = 0$. Без потери общности будем считать $\omega_0 = 1$. Этого всегда можно добиться соответствующим выбором

---

[1]) Здесь g — ускорение свободного падения, l — длина нити маятника (*прим. перев.*).

единицы времени. Как известно, частное решение уравнения

$$\ddot{z} + z = a \sin p(t + \alpha)$$

имеет вид

$$z = \frac{a}{1 - p^2} \sin p\,(t + \alpha) \quad \text{при} \quad p \neq 1,$$

$$z = -\frac{1}{2} at \cos (t + \alpha) \quad \text{при} \quad p = 1.$$

Решение уравнения

$$\ddot{z} + z = a \cos p(t + \alpha)$$

имеет вид

$$z = \frac{a}{1 - p^2} \cos p\,(t + \alpha) \quad \text{при} \quad p \neq 1,$$

$$z = \frac{1}{2} at \sin (t + \alpha) \quad \text{при} \quad p = 1.$$

Отсюда легко получить, что

$$\xi_1 = B \sin (t + \beta) - \frac{1}{16} A^3 t \sin (t + \alpha) + \frac{1}{192} A^3 \sin 3 (t + \alpha), \qquad (2.3.6)$$

где B, β определяются формулами

$$B \sin \beta = -\frac{A^3}{192} \sin 3\alpha, \qquad B \cos \beta = -\frac{A^3}{64} \cos 3\alpha + \frac{A^3}{16} \sin \alpha.$$

Видно, что в рассматриваемом частном случае секулярные члены появились в (2.3.6), т. е. уже в первом приближении (в действительности эти члены чаще называют *смешанными секулярными членами*). Ясно, что появление t вне тригонометрических функций крайне затрудняет получение случая сходимости описанного выше процесса при $t \to \infty$. Постоянными интегрирования B и β никак нельзя распорядиться для уничтожения секулярных членов.

Способ, предложенный Линдстедтом [70], заключается в том, что в *опорном решении*, т. е. *в* $x_0(t)$, *изменяется частота*. Действительно, рассмотрим выражение

$$x_0(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \qquad (2.3.7)$$

где мы положим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots,$$

или, как и раньше, считая $\omega_0 = 1$, имеем

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots, \tag{2.3.8}$$

где ω_1, ω_2, ..., — постоянные (зависящие от A, α), которые надо выбрать соответствующим образом. Переписывая уравнение (2.3.2) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon\omega_1 x - \varepsilon^2\omega_2 x - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и используя решение нулевого порядка

$$x_0(t) = A\sin(\omega t + \alpha),$$

где частота ω определяется формулой (2.3.8) и заранее неизвестна, аналогично предыдущему случаю мы получим такие уравнения:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2\xi_1 = \omega_1 x_0 + \frac{1}{3!}x_0^3,$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega^2\xi_2 = \omega_1\xi_1 + \omega_2 x_0 + \frac{1}{2!}x_0^2\xi_1 - \frac{1}{5!}x_0^5.$$

Правые части последних уравнений, очевидно, являются нечетными функциями $\omega t + \alpha$, т. е. набором синусов величины $\omega t + \alpha$. В уравнениях для ξ_p соответствующие неизвестные приближения ω_p надо определить так, чтобы отсутствовали секулярные (или в этом случае смешанные секулярные) члены. Уравнение для членов первого порядка имеет вид

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2\xi_1 = \omega_1 A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{1}{8}A^3\sin(\omega t + \alpha) - \\ - \frac{1}{24}A^3\sin(3\omega t + 3\alpha),$$

так что, если положить

$$\omega_1 = -\frac{1}{8}A^2,$$

то вынуждающий резонансный член уничтожается, и решение принимает вид

$$\xi_1 = B\sin(\omega t + \beta) + \frac{1}{192}A^3\sin(3\omega t + 3\alpha),$$

где B, β можно определить следующим образом:

$$B\sin\beta = -\frac{1}{192}A^3\sin 3\alpha, \qquad B\cos\beta = -\frac{1}{64}A^3\cos 3\alpha,$$

т. е. $\xi_1 = \dot{\xi}_1 = 0$ при $t = 0$. Легко видеть, что уравнение, которое надо проинтегрировать для нахождения приближения любого порядка, имеет вид

$$\ddot{\xi}_p + \omega^2\xi_p = \omega_p x_0 + A_1^p(A, \omega_1, \ldots, \omega_{p-1}) \sin(\omega t + \alpha) + \\ + \sum_{j=1}^{n_p} A_{2j+1}^p(A, \omega_1, \ldots, \omega_{p-1}) \sin[(2j+1)(\omega t + \alpha)],$$

и его решение таково:

$$\omega_p = -\frac{1}{A} A_1^p(A, \omega_1, \ldots, \omega_{p-1}),$$

$$\xi_p = \sum_{j=1}^{n_p} \frac{A_{2j+1}^p}{\omega^2[1-(2j+1)^2]} \sin[(2j+1)(\omega t + \alpha)].$$

Отсюда следует, что частота ω определяется последовательно шаг за шагом, а все решение выражается в виде периодической функции t, т. е.

$$x = x_0(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p \sum_{j=1}^{n_p} \frac{A_{2j+1}^p}{\omega^2[1-(2j+1)^2]} \sin[(2j+1)(\omega t + \alpha)].$$

В этом частном случае из-за того, что исходное уравнение можно точно проинтегрировать, сходимость вышеописанной процедуры можно доказать непосредственно, если только начальные условия соответствуют колебательному движению. Вышеприведенные ряды расходятся в случае вращательного движения. Насколько нам известно, случай асимптотического движения маятника не может быть вообще рассмотрен с помощью рядов. В случае вращательного движения также можно получить сходимость, если по-другому ввести переменную. Действительно, в этом случае угол θ непрерывно увеличивается со временем, если исключить незначительные флуктуации. Такое увеличение со временем можно учесть, если считать

$$\theta = \alpha t + \sqrt{\varepsilon} x,$$

где

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots,$$

$$x = x_0(t) + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots,$$

$$x_0 = A \sin(\omega t + \beta),$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$$

При изучении аналога метода Линдстедта для канонических систем мы укажем способ, которым можно рассмотреть единым образом сразу оба случая (колебания и вращения). Это возможно сделать введением эллиптических функций с модулем, принимающим любые значения. Тогда асимптотический случай движения маятника будет фигурировать в качестве предельного случая общего решения. Возможность такого глобального рассмотрения детально изучалась в работе Гарфинкеля и др. [29.5].

4. Метод Пуанкаре (метод Линдстедта)

Метод последовательного подбора частот системы, который был изложен в примере предыдущего параграфа, применим к любой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть записана в нормальной форме и удовлетворяет некоторым условиям регулярности, по крайней мере локально. Однако желательно, чтобы такая регулярность распространялась на некоторую область. В этом случае мы можем считать, что система имеет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x, t, \varepsilon) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

или в векторной форме —

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon). \tag{2.4.1}$$

При помощи перехода в котангенциальное пространство Дирака система (2.4.1) может быть приведена к каноническому виду, если определить вектор канонически сопряженных обобщенных импульсов y (y_i; $i = 1, \ldots, n$) и гамильтониан

$$H = f^{\mathrm{T}}(x, t, \varepsilon)\, y. \tag{2.4.2}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = H_y^{\mathrm{T}} = f(x, \varepsilon, t),$$
$$\dot{y} = -H_x^{\mathrm{T}} = -f_x(x, \varepsilon, t)\, y,$$

и предположим, что система уравнений

$$\dot{\xi} = f(\xi, t, 0), \qquad \dot{\eta} = -f_\xi(\xi, t, 0)\,\eta$$

интегрируема в некоторой области D $2n$-мерного фазового пространства (ξ, η) при $0 \leqslant t \leqslant T$. Предположим, что функции $f(x, t, \varepsilon)$ принадлежат по крайней мере классу C^2 в D, непре-

рывны по t при $t \in [0, T]$ и аналитичны по ε при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Этими же свойствами, следовательно, обладает функция H.

Таким образом, ограничение, заключающееся в предположении о гамильтоновости исходной системы уравнений, весьма несущественно и, следовательно, особую важность приобретают методы теории возмущений для гамильтоновых систем[1]).

С точки зрения предыдущих рассмотрений логичным является вопрос о получении оценки лучшей, чем оценка (2.2.15). Гамильтониан рассматриваемой системы (2.2.13) имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{n} y_i g_i(x, t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} y_i f_i(x, \varepsilon, t) = H_0 + \varepsilon H_1, \qquad (2.4.3)$$

и соответствующая каноническая система уравнений записывается так:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} = g_i + \varepsilon f_i,$$

$$\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_j y_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \varepsilon \sum_j y_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ система

$$\dot{x}_i = g_i(x, t), \qquad \dot{y}_i = -\sum_j y_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \qquad (2.4.5)$$

интегрируема. Действительно, первая группа уравнений (2.4.5) интегрируема по введенному ранее предположению и имеет решение $x_i = x_{i0}(t)$. Подстановка этих выражений во вторую часть уравнений приводит к системе линейных уравнений

$$\dot{y}_i = \sum_j a_{ij}(t) y_j,$$

которая, очевидно, интегрируема при t из интервала определения решения $x_{i0}(t)$. Запишем решение системы (2.4.5) в виде

$$x_i = x_{i0}(\alpha, \beta, t), \qquad y_i = y_{i0}(\alpha, \beta, t),$$

[1]) Это утверждение автора нуждается в пояснении. При исследовании конкретных систем небольшого числа дифференциальных уравнений методами теории возмущений предлагаемую гамильтонизацию по-видимому проводить нерационально. Этот прием обретает смысл или при исследовании систем высокого порядка или при получении большого числа приближений. В этих случаях действительно оказывается проще оперировать с одной функцией (гамильтониан), пусть и зависящей от вдвое большего числа переменных, чем с n функциями правых частей уравнений. Особенно эффективна гамильтонизация системы нелинейных дифференциальных уравнений при использовании современных ЭВМ, снабженных развитыми комплексами программ буквенных выкладок (*прим. перев.*).

где при $i = 1, \ldots, n$

$$x_{i0}(\alpha, \beta, 0) = \alpha_i, \qquad y_{i0}(\alpha, \beta, 0) = \beta_i.$$

Из теоремы Якоби следует, что решение системы (2.4.4) может быть записано в виде

$$x_i = x_{i0}(\alpha, \beta, t), \qquad y_i = y_{i0}(\alpha, \beta, t),$$

если α, β — функции времени, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\alpha}_i = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \qquad \dot{\beta}_i = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}, \tag{2.4.6}$$

где $i = 1, \ldots, n$. Но система (2.4.6) является системой изученного ранее типа (уравнение (2.2.6)), и к ней применим метод последовательных приближений, дающий такой критерий сходимости

$$|\varepsilon| < \frac{1}{1 + 4nM'T},$$

который при $M' \approx M$ является лучшей оценкой, чем оценка (2.2.15) для системы (2.2.13).

Теперь вернемся к главной цели настоящего параграфа и опишем основные идеи и основные этапы осуществления метода Линдстедта, изложенного Пуанкаре на языке канонических систем. Рассмотрим автономную динамическую систему с гамильтонианом

$$H = H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \varepsilon), \tag{2.4.7}$$

где $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$ — $2n$-мерные векторы, определенные в фазовом пространстве размерности $2n$, ε — безразмерный постоянный параметр, а функция H — вещественная и аналитическая в некоторой области D фазового пространства и ε из $[0, 1]$. Мы еще раз подчеркнем тот факт, что любая аналитическая система уравнений $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, \varepsilon)$ может быть сведена к гамильтоновой форме введением котангенциального фазового пространства.

Главная функция Гамильтона $W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon)$ определяется решением уравнения в частных производных

$$H\left(\boldsymbol{y}, \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{y}}, \varepsilon\right) = K(\boldsymbol{X}, \varepsilon), \tag{2.4.8}$$

где $K(\boldsymbol{X}, \varepsilon)$ — гамильтониан системы, записанной через новые переменные $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}$, которые определяются уравнениями

$$Y_k = \frac{\partial W}{\partial X_k} = Y_k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon), \qquad x_k = \frac{\partial W}{\partial y_k} = x_k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon). \tag{2.4.9}$$

При выполнении вышеперечисленных условий относительно функции H функция W, удовлетворяющая уравнению (2.4.8), безусловно существует (в смысле Якоби), так как система дифференциальных уравнений, соответствующая функции Гамильтона (2.4.7), имеет единственное решение в D. Решение очевидно будет аналитической функцией ε и n постоянных интегрирования $X_1, \ldots, X_n$ из D. Мы предположим, что система дифференциальных уравнений, соответствующих функции $H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, 0) = H_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, интегрируема в смысле Лиувилля, т. е. в D существует n независимых первых общих интегралов движения. Если $x_1', \ldots, x_n'$ — такие интегралы, т. е. $x_k'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \alpha_k$ вдоль решений системы с гамильтонианом (2.4.7) при $\varepsilon = 0$ и в области D, то, вообще говоря, угловые переменные y_k', канонически сопряженные переменным действие x_k', имеют частоты (по времени), которые являются линейно независимыми на множестве целых чисел, и, следовательно, движение будет условно-периодическим (почти-периодическое движение будет в случае, соответствующем системе с бесконечным набором базисных частот). Через эти переменные, называемые *переменными действие — угол*, гамильтониан (2.4.7) можно записать в виде $H'(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}', \varepsilon)$ с очевидным условием $H'(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}', 0) = H_0'(\boldsymbol{x}')$. Следовательно, при предположении об интегрируемости (в упомянутом специальном смысле) системы с гамильтонианом $H_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, не теряя общности, можно считать, что гамильтониан зависит только от импульсов $\boldsymbol{x}$. Также логично ожидать, что почти во всей области D частоты $\omega_k^0 = \partial H_0/\partial x_k$ являются линейно независимыми на множестве целых чисел. В частности, из этого следует, что в D ни одна из частот не равна нулю или, более точно, все импульсы присутствуют в гамильтониане. Теперь задача сводится к такой, при которой функция $H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, 0)$ не зависит от $\boldsymbol{y}$ и, следовательно, главная функция Гамильтона $W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, 0)$ является производящей функцией тождественного преобразования, т. е.

$$W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, 0) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}.$$

Мы будем предполагать, что функция W является аналитической по ε при $\varepsilon = 0$, и, следовательно, при достаточно малых ε можно считать

$$W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \varepsilon S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon), \tag{2.4.10}$$

где

$$S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon) = S_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) + \varepsilon S_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) + \ldots \tag{2.4.11}$$

— сходящийся степенной ряд по ε.

Отсюда следует, что (2.4.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Y_k &= y_k + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial X_k} = y_k + \varepsilon F_k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon), \\ x_k &= X_k + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial y_k} = X_k + \varepsilon G_k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

при $k = 1, \ldots, n$ и достаточно малом ε. Отображения типа (2.4.12) широко изучались главным образом в работах Мозера [75, 77, 78, 83].

При сделанных предположениях можно показать, что существуют формальные ряды (2.4.11), являющиеся решением уравнения (2.4.8) до любого порядка (степени) по ε.

Введем понятие *среднего значения* $\langle f \rangle$ условно-периодической функции $f(y_1, \ldots, y_n)$ переменных $y_k = \omega_k t + y_k^0$ (ω_k — постоянные величины, линейно независимые на множестве целых чисел) с помощью выражения

$$\langle f \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f dt. \tag{2.4.13}$$

В обобщенном смысле условно-периодическая функция f при $\langle f \rangle = 0$ будет называться *чисто условно-периодической*. Очевидно, что если f представить в виде ряда Фурье по n угловым переменных $y_1, \ldots, y_n$, то $\langle f \rangle$ будет равно постоянному члену в ряде Фурье. С другой стороны, в общем случае, если $\langle f \rangle = 0$, то

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T f\, dt < \infty, \tag{2.4.14}$$

что является очевидным следствием определения (2.4.13) для условно-периодической функции f, принадлежащей классу L_2 и $t \in R$. Функция $F(t)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t \to \infty} F(t) < \infty, \tag{2.4.15}$$

называется функцией, *свободной от секулярных членов*. Любая условно-периодическая функция из класса L_2 удовлетворяет этому условию. Из предположения об интегрируемости системы с функцией Гамильтона H_0 следует, что записанный через переменные действие — угол $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$, гамильтониан $H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \varepsilon)$ является условно-периодической функцией, если, например, он имеет сходящиеся многомерные ряды Фурье относительно $y_1, \ldots, y_n$ при $\varepsilon \in [0, 1]$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.

Формальные ряды для S и K теперь получаются прямой подстановкой (2.4.10) и (2.4.11) в (2.4.8), т. е.

$$H\left(y, \frac{\partial W}{\partial y}, \varepsilon\right) = H\left(y, X + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial y} + \ldots, \varepsilon\right),$$

$$K(X, \varepsilon) = K_0(X) + \varepsilon K_1(X) + \varepsilon^2 K_2(X) + \ldots$$

Разложение первого из этих выражений в ряд Тейлора (который по предположению сходится) дает в символической записи

$$H\left(y, \frac{\partial W}{\partial y}, \varepsilon\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k H}{\partial x^k}\bigg|_{x=X} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial y} + \ldots\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \frac{\partial^k H_p}{\partial x^k}\bigg|_{x=X} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial y} + \ldots\right)^k =$$

$$= H_0(X) + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial X}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 H_0}{\partial X^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^2 \frac{\partial H_0}{\partial X}\left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} + \ldots + \varepsilon H_1(y, X) + \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, X)}{\partial X}\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^2 H_2(y, X) + \ldots, \qquad (2.4.16)$$

где запись $\partial H_k/\partial X_l$ означает $\partial H_k/\partial x_l\,|_{x=X}$.

Выражения до любого порядка приближений впервые были получены в работе Джакальи [36]. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, в любом порядке приближения получаем уравнения типа

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_0}{\partial X_k} \frac{\partial S_p}{\partial y_k} + \Phi_p(y, X) + H_p(y, X) = K_p(X). \qquad (2.4.17)$$

В этих уравнениях, например,

$$\Phi_1(y, X) = 0,$$

$$\Phi_2(y, X) = \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 H_0}{\partial X_k \partial X_l} \frac{\partial S_1}{\partial y_k} \frac{\partial S_1}{\partial y_l} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial X_k} \frac{\partial S_1}{\partial y_k}.$$

Вообще, $\Phi_p(y, X)$ является функцией от $S_1, \ldots, S_{p-1}, K_1, \ldots$ $\ldots, K_{p-1}$, так что решения уравнений (2.4.17) можно получать только последовательно.

Один из способов получения $K_p(X)$ заключается в использовании *процедуры усреднения*

$$K_p(X) = \langle \Phi_p(y, X) + H_p(y, X) \rangle, \qquad (2.4.18)$$

где предполагается, что все y_k представляются линейными функциями времени $y_k = \omega_k^0 t + y_k^0$, а все ω_k^0 линейно независимы на множестве целых чисел (т. е. рационально независимы). Получающаяся функция $K_p(X)$, разумеется, от времени t не зависит. Отсюда следует, что функция

$$F_p = \Phi_p + H_p - K_p = F_p(y, X) \tag{2.4.19}$$

является чисто условно-периодической при учете предположений относительно функции $H(y, x, \varepsilon)$. Приближение p-го порядка для производящей функции S_p получается из линейного уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_k} + F_p(y, X) = 0,$$

где $\omega_k^0 = \partial H_0 / \partial X_k$. Теперь становится очевидным, что если все $\omega_k^0 \neq 0$, то функция S_p будет условно-периодической функцией переменных $y_1, \ldots, y_n$ $(y_k = \omega_k^0 t + y_k^0)$, причем свободной от секулярных членов, т. е. для линейно независимых на множестве целых чисел ω_k^0 имеем

$$S_p(y, X) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k^0} \int F_p(y, X)\, dy_k + G_p(X), \tag{2.4.20}$$

где функция $G_p(X)$ произвольна. Разумеется, если одна из частот ω_k^0 равна нулю, то эту процедуру использовать нельзя, по крайней мере до тех пор, пока для функции $F_p(y, X)$ не будет выполнено условие

$$\frac{\partial F_p}{\partial y_k} = 0 \tag{2.4.21}$$

для этого y_k. Легко показать, что

$$\lim_{t \to \infty} S_p(y, X) < \infty \tag{2.4.22}$$

для $y_k = \omega_k^0 t + y_k^0$. Все эти соотношения справедливы для любого порядка p и, следовательно, можно определить формальные ряды

$$y \cdot X + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots,$$
$$K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \ldots,$$

такие, что функция $\varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots$ будет условно-периодической и свободной от секулярных членов. Случаи, когда некоторая частота ω_k^0 равна нулю или мала в некотором смысле, будут изуче-

ны в главе V в связи с общей проблемой резонанса. Формально система решается в любом желаемом приближении, и «решение» в новых переменных $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ имеет вид

$$Y_k = \omega_k t + Y_k^0, \qquad X_k = X_k^0, \tag{2.4.23}$$

где

$$Y_k^0 = \text{const}, \qquad X_k^0 = \text{const} + O(\varepsilon^{p+1}), \tag{2.4.24}$$
$$\omega_k = \frac{\partial K_0}{\partial X_k} + \varepsilon \frac{\partial K_1}{\partial X_k} + \ldots + \varepsilon^p \frac{\partial K_p}{\partial X_k} = \text{const} + O(\varepsilon^{p+1}).$$

Здесь $O(\varepsilon^{p+1})$ — члены такого наинизшего порядка, которыми пренебрегают после получения последних приближений S_p и K_p. Их также можно интерпретировать как ошибку или как оценку ошибки в решении. Разумеется это можно сделать только в случае сходимости метода. С этой проблемой мы будем иметь дело в следующих двух главах настоящей книги. Грубая оценка, проведенная в работе Кинера [64], показывает, что верхняя ошибка эквивалентна ошибке, полученной Боголюбовым и Митропольским [8] для канонического метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского и в действительности, как было показано в работе Бурштейна и Соловьева [9.1], эквивалентна ошибке метода Пуанкаре. Эта ошибка пропорциональна ε при $t \sim 1/\varepsilon^p$ (по крайней мере). Сходимость рассматриваемого здесь метода в некоторых частных случаях будет изучена в главе III.

С чисто формальной точки зрения из (2.4.21) получаем

$$\begin{aligned} y_k &= \omega_k t + Y_k^0 + \varepsilon N_k(Y_1, \ldots, Y_n, X_1^0, \ldots, X_n^0, \varepsilon), \\ x_k &= X_k^0 + \varepsilon W_k(Y_1, \ldots, Y_n, X_1^0, \ldots, X_n^0, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

где N_k, W_k — условно-периодические и свободные от секулярных членов функции переменных $Y_1, \ldots, Y_n$. Ясно, что в большинстве случаев основная ошибка будет заключаться в частоте ω_k, так как любая такая ошибка линейно умножается на время. При практическом применении лучшим способом избежать потери точности является численное получение значений ω_k при усреднении $\langle y_k \rangle$ по времени t. Такое усреднение, если выполнены соотношения (2.4.25), очевидно, даст значения ω_k. Подобное использование «наблюдаемости» уничтожит методические ошибки, вызванные неточностью вычисления частот ω_k.

5. Быстрые и медленные переменные

Случай собственного вырождения [4] является весьма общим в теории возмущений. Строго говоря, в этом случае движение определяется не независимыми частотами невозмущенной системы.

Это означает, что для данного гамильтониана $H_0 = H_0(x)$ и частот

$$\omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

имеет место собственное вырождение, если матрица

$$\left\{\frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}\right\} \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{2.5.1}$$

является особенной. Это определение включает в себя и случай рациональной зависимости частот, и случай, когда некоторые из переменных действие не входят в гамильтониан $H_0(x)$, т. е. по крайней мере одна из частот ω_j тождественно равна нулю. Оно также включает в себя и линейные системы, т. е. случаи, когда

$$H_0 = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n. \tag{2.5.2}$$

Теперь рассмотрим случай, когда матрица (2.5.1) имеет по крайней мере один минор порядка m $(0 < m \leqslant n)$, отличный от нуля. Невозмущенная система является нелинейной, интегрируемой и определяется m независимыми частотами, соответствующими независимым угловым переменным $y_k = \omega_k(x)\,t + y_k^0$, где $k = 1, \ldots, m$. В этом случае существует каноническое преобразование $(x, y) \to (x', y')$, такое, что, по крайней мере локально, гамильтониан H_0 зависит только от m импульсов x', а соответствующая ему матрица (2.5.1) — неособенная.

Однако, может быть, стоит заметить, что если все импульсы x входят в H_0, то иногда можно найти преобразование, после применения которого гессиан (2.5.1) нового гамильтониана будет неособенной матрицей. Действительно, рассмотрим гамильтониан в самом общем виде

$$H = H(y, x, \varepsilon) = H_0(x) + \varepsilon H_1(y, x) + \ldots$$

и предположим, что $\omega_j = \partial H_0/\partial x_j \neq 0$, где $j = 1, \ldots, n$. Если может быть найдена такая функция $F = \Phi(H)$, что

$$F = F_0(x) + \varepsilon F_1(y, x) + \ldots,$$

и такая, что для $\Omega_j = \partial F_0/\partial x_j$ матрица

$$\left\{\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k}\right\}$$

является неособенной, то кажущееся вырождение исчезает.

Уравнения движения теперь принимают вид

$$\dot{y}_j = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_j}, \qquad \dot{x}_j = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial y_j},$$

где α — постоянная, определяемая через начальные условия формулой

$$\dot{\Phi}(H) = \dot{\Phi}(H(y_0, x_0, \varepsilon)) = \dot{\Phi}(h) = \alpha,$$

а h — значение интеграла энергии, соответствующее начальным условиям y_0, x_0. Очевидно, α можно представить в виде степенного ряда по ε (предполагается, что H — вещественная аналитическая функция по всем переменным), и если Φ — аналитическая функция, то степенной ряд

$$\Phi(H) = F_0(x) + \varepsilon F_1(y, x) + \varepsilon^2 F_2(y, x) + \ldots$$

сходится. Эту процедуру нельзя применить к линейному случаю (2.5.2), так как независимо от вида $\Phi(H)$ гессиан функции $F_0(x)$ равен нулю. Однако эту процедуру можно применить в остальных случаях. Например, это можно сделать в важном случае

$$H_0 = \frac{1}{x_1^2} + x_2,$$

встречающемся во многих задачах небесной механики (задача двух тел во вращающейся системе координат, ограниченная задача трех тел во вращающейся системе координат и т. д.). Хотя гессиан функции H_0 равен нулю (H_0 линейно зависит от x_2), видно, что существует несколько функций, зависящих от H_0, которые приводят к функции F_0 с не равным нулю гессианом (см., например, [91])[1]).

Исключив пока из рассмотрения линейный случай, мы теперь исследуем случай, при котором в H_0 отсутствуют некоторые импульсы. Пусть $x_{p+1}, \ldots, x_n$ — импульсы, не входящие в H_0, и рассмотрим теперь уравнения, соответствующие гамильтониану

$$H = H_0(x_1, \ldots, x_p) + \varepsilon H_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + \ldots,$$

т. е.

$$\dot{y}_k = \frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad \dot{x}_k = -\frac{\partial H}{\partial y_k} = -\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial y_k} + \ldots$$

---

[1]) Более подробное изложение этого приема уничтожения кажущегося вырождения см. в книге [4*] (*прим. перев.*).

Отсюда следует, что в нулевом приближении переменные x_k — константы, а y_k — линейные функции времени ($k = 1, \ldots, p$) или также константы ($k = p + 1, \ldots, n$). Если этот результат подставить в уравнения движения и усреднить их по $y_1, \ldots, y_p$, то в первом приближении получим

$$y_k = \omega_k(x)\, t + y_k^0, \qquad x_k = x_k^0,$$

где

$$\omega_k = \omega_k^0 + \varepsilon\omega_k^1 \qquad (k = 1, \ldots, p),$$
$$\omega_k = \varepsilon\omega_k^1 \qquad (k = p + 1, \ldots, n).$$

Это простое описание служит основанием к тому, чтобы назвать угловые переменные $y_1, \ldots, y_p$ (которые являются сопряженными к импульсам $x_1, \ldots, x_p$, входящим в H_0) *быстрыми*, а угловые переменные $y_{p+1}, \ldots, y_n$ (которые являются сопряженными к импульсам, отсутствующим в гамильтониане H_0) — *медленными переменными*. Вследствие этого также говорят, что любая функция, содержащая хотя бы одну быструю переменную, является *короткопериодической*, а любая функция, не содержащая ни одной быстрой переменной — *долгопериодической функцией*. Разумеется, мы не хотим здесь дать точных определений, а только приводим традиционное объяснение терминологии.

Для этого случая теперь рассмотрим проблему существования формальных рядов, представляющих производящую функцию метода Пуанкаре. Вообще говоря, ответ на вопрос о существовании является отрицательным, за исключением только некоторых исключительных ситуаций, которые мы и обсудим в настоящем параграфе.

Исключение быстрых переменных достигается таким обобщением проблемы Гамильтона, при котором мы требуем, чтобы новый гамильтониан содержал только медленные переменные. Более точно, мы строим производящую функцию в виде формального ряда

$$W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \varepsilon) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \varepsilon S_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) + \ldots,$$

аналогичного (2.4.10), (2.4.11) и (2.4.12), и требуем выполнения закона сохранения энергии в виде

$$H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \varepsilon) = K(Y_{p+1}, \ldots, Y_n, \boldsymbol{X}, \varepsilon), \tag{2.5.3}$$

так что исходная система сводится к системе с числом степеней свободы, равным $n - p$. Это всегда возможно, так как при определении m-го приближения уравнение, которое надо

проинтегрировать, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_k(X) \frac{\partial S_m}{\partial y_k} + F_m(y, X) + H_m(y, X) = K_m(y_{p+1}, \ldots, y_n, X, \varepsilon),$$

а K_m определяется усреднением функции $F_m + H_m$ по быстрым переменным. Новый гамильтониан получается в виде формального ряда. Если допустить, что такие ряды являются сходящимися (по крайней мере на конечном интервале времени), то теперь задача сводится к исследованию уравнений движения, соответствующих гамильтониану

$$K = K_0(X) + \varepsilon K_1(Y_{p+1}, \ldots, Y_n X) + \ldots = K(Y_{p+1}, \ldots, Y_n, X, \varepsilon), \tag{2.5.4}$$

в то время как постоянные импульсы $X_1, \ldots, X_p$ играют роль параметров. В случае сходящихся рядов выражения

$$x_k = X_k + \varepsilon \frac{\partial S(y, X, \varepsilon)}{\partial y_k} \tag{2.5.5}$$

при $k = 1, \ldots, p$ представляют собой первые интегралы исходной системы, зависящие от p параметров $X_1, \ldots, X_p$, для которых могут быть взяты произвольные значения.

Теперь при выполнении простых условий можно исключить медленные переменные. Действительно, в (2.5.4) функция $K_0(X)$ зависит только от $X_1, \ldots, X_p$ и, следовательно, является константой движения. Гамильтониан теперь может быть записан в виде

$$\varepsilon F = \varepsilon F_1(q, p) + \varepsilon^2 F_2(q, p) + \ldots = \varepsilon F(q, p, \varepsilon), \tag{2.5.6}$$

где $q = (Y_{p+1}, \ldots, Y_n)$, $p = (X_{p+1}, \ldots, X_n)$, а параметры $X_1, \ldots$ $\ldots, X_p$ можно дальше не рассматривать. Уравнения движения имеют простой вид ($k = 1, \ldots, n-p$)

$$\dot{q}_k = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_k}. \tag{2.5.7}$$

Если $n - p = 1$, то система имеет одну степень свободы и задача теоретически разрешима. Если $n - p \geqslant 2$, то, очевидно, интегрирование можно осуществить методом последовательных приближений, который уже был изложен, при условии, что главная часть функции εF, т. е. функция $\varepsilon F_1(q, p)$, соответствует интегрируемой системе. Начиная с этого места, можно повторить всю процедуру Пуанкаре, описанную в предыдущем параграфе. По-видимому, будет полезно сказать, что формально задачу можно решить до конца, если функция $F_1(q, p)$ не зависит ни от одной пере-

менной q и содержит все переменные p, т. е. переменные $X_{p+1}, \ldots$ $\ldots, X_n$. Существенным достижением Цейпеля [105] в решении рассматриваемой задачи явилось понимание того факта, что хотя полная редукция системы может быть невозможна, тем не менее частичная редукция является существенным шагом вперед в решении задачи.

Оценки ошибок метода были получены в работе Кинера [63], а в случае сходимости в работе Мозера [81] была использована процедура ускорения сходимости, основанная на применении итераций ньютоновского типа. Впервые аналогичная процедура была предложена Колмогоровым [59], а затем она широко использовалась в различных работах Арнольда [3, 4]. В следующей главе об этом будет сказано более подробно. Очевидно, что в некоторых случаях оценка ошибки $O(\varepsilon^2)$, полученная Кинером, может быть значительно улучшена. Например, при доказательстве Мозером [78] сходимости закручивающих отображений может быть получена сходимость лучше, чем квадратичная, так что ошибка уменьшается по мере увеличения степени ε в процессе вычисления итераций. Для того, чтобы это утверждение было верным, не требуется даже аналитичности рассматриваемого отображения, а лишь существование конечного числа производных.

6. Обобщение процедуры усреднения, нормализация Биркгофа и дополнительные интегралы

В большинстве случаев, когда применяется метод усреднения, основное предположение заключается в том, что гамильтониан является периодической функцией по каждой из угловых переменных $y_1, \ldots, y_n$. Как было видно из § 4 настоящей главы, понятие условно-периодических функций было некоторым небольшим обобщением понятия периодичности по каждой из переменных, применявшихся в соответствующих определениях понятия усреднения. Такие предположения напоминают о тех специальных областях, для которых были развиты эти методы: небесная механика и теория колебаний в механических и электрических системах.

Для того чтобы найти более общий подход к решению нужных задач, подход, при котором не надо проверять перечисленные выше гипотезы (предположения), рассмотрим сначала простой пример. Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$H(y_1, y_2, x_1, x_2) = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots,$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} A_{11}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2} A_{22}(x_2^2 + y_2^2) + A_{12}(x_1 x_2 + y_1 y_2),$$

$$H_p = H_p(y_1, y_2, x_1, x_2) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Здесь H_p — однородные полиномы степени $p+2$. Решение «главной» части задачи получается сразу же, если можно уничтожить члены $x_1x_2+y_1y_2$. Вообще говоря, это весьма легко можно сделать с помощью линейного канонического преобразования $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \to (\eta, \xi)$:

$$x_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}\xi_k, \qquad \eta_j = \sum_{k=1}^{2} a_{kj}y_k,$$

где, например, можно положить

$$a_{12} = A_{12},\ a_{22} = A_{22} - A_{11},\ a_{11} = (1 + a_{12}a_{21})/a_{22},$$
$$a_{21} = (A_{12}a_{22} - A_{22}a_{12})/(A_{22}a_{12}^2 + A_{11}a_{22}^2 - 2A_{12}a_{12}a_{22}),$$

если исключить случай $A_{11} = A_{22}$, когда выписанное преобразование становится особенным. Разумеется, этот один особый случай много легче исследовать отдельно. В общем случае гамильтониан принимает вид

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots,$$

где $H_0 = A_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + A_2(\xi_2^2 + \eta_2^2)$, а H_1, H_2, ... опять являются однородными полиномами степени 3, 4, ... относительно ξ_1, ξ_2, η_1, η_2. Также можно написать

$$A_1 = \frac{1}{2}(A_{11}a_{11}^2 + A_{22}a_{21}^2 + 2a_{11}a_{21}A_{12}),$$
$$A_2 = \frac{1}{2}(A_{11}a_{12}^2 + A_{22}a_{22}^2 + 2a_{12}a_{22}A_{12}).$$

Решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$A_1\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}\right)^2 + \eta_1^2\right] + A_2\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_2}\right)^2 + \eta_2^2\right] = F_0(\alpha_1, \alpha_2)$$

получается сразу же. Естественным образом выбирая

$$F_0 = A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2,$$

находим $S = S_1 + S_2$, где

$$\left(\frac{\partial S_k}{\partial \eta_k}\right)^2 + \eta_k^2 = \alpha_k^2 \qquad (k = 1, 2),$$

и, следовательно,

$$\alpha_k^2 = \xi_k^2 + \eta_k^2, \qquad \beta_k = (\xi_k^2 + \eta_k^2)^{1/2} \arcsin(\eta_k/\alpha_k).$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\eta_k = \alpha_k \sin\frac{\beta_k}{\alpha_k}, \qquad \xi_k = \alpha_k \cos\frac{\beta_k}{\alpha_k} \qquad (k = 1, 2).$$

Главная часть функции Гамильтона запишется так:

$$H_0 = F_0 = A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2,$$

а вся функция Гамильтона может быть в общем виде представлена как сумма членов

$$\alpha_1^p\alpha_2^q \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(m\frac{\beta_1}{\alpha_1} + n\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right). \tag{2.6.1}$$

Решение нулевого порядка

$$\alpha_k = \text{const}, \qquad \beta_k = 2A_k\alpha_k t + \beta_k^0 \qquad (k = 1, 2)$$

показывает, что применение метода Пуанкаре обязательно приведет к появлению смешанных секулярных членов, обусловленных дифференцированием по α_1 или α_2 в производящей функции метода (функция обязательно содержит члены вида (2.6.1))[1]).

В действительности вопрос решается проще, по крайней мере в формальном смысле. В самом деле, пусть функция Гамильтона содержит переменные x, y только в виде комбинаций $x_1^2+y_1^2$ и x_2^2+ $+ y_2^2$, т. е.

$$H = H\left(x_1^2 + y_1^2,\ x_2^2 + y_2^2\right).$$

В этом случае в силу уравнений движения

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial\left(x_j^2 + y_j^2\right)} 2y_j, \qquad \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^2 + y_j^2\right)} 2x_j$$

получаем, что

$$x_j^2 + y_j^2 = c_j^2 = \text{const},$$

---

[1]) Отметим, что указанное автором появление секулярных членов обусловлено не существом задачи, а неудачной заменой переменных η_k, $\xi_k \to \alpha_k$, β_k. Если ввести каноническую унивалентную замену по формулам

$$\eta_k = \sqrt{2\alpha_k}\sin\beta_k, \qquad \xi_k = \sqrt{2\alpha_k}\cos\beta_k,$$

то секулярные члены не появятся, и решение может быть записано в виде формальных рядов при некоторых дополнительных ограничениях на линейные члены (*прим. перев.*).

и, следовательно,

$$x_j = c_j \cos(\omega_j t + \sigma_j), \qquad y_j = c_j \sin(\omega_j t + \sigma_j),$$

где

$$\omega_j = -2\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^2 + y_j^2\right)} = \text{const},$$

а c_j, σ_j — произвольные постоянные. Ситуация здесь аналогична случаю, рассмотренному в книге Уиттекера [103], когда гамильтониан является только функцией переменных $\omega_j = x_j y_j$, а ω_j тогда — постоянные. Разумеется, такая ситуация будет иметь место и для случая любых других комбинаций координат и импульсов. Такие рассмотрения приводят нас к естественному вопросу: возможно ли привести весь гамильтониан к такому виду, когда он зависит только от комбинаций $x_1^2 + y_1^2$ и $x_2^2 + y_2^2$, если H_0 имеет вид

$$H_0 = A_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + A_2\left(x_2^2 + y_2^2\right).$$

Ответ на этот вопрос будет утвердительным в том смысле, что по крайней мере формально такую редукцию в общем случае можно произвести рядами, состоящими из зависящих от всех переменных полиномов, хотя вопрос о сходимости этих рядов как таковых никогда не исследовался. Тем не менее, эквивалентность упомянутого здесь преобразования проблеме нормализации Биркгофа очевидна.

Пусть теперь главная часть H_0 функции Гамильтона будет функцией только выражений $x_1^2 + y_1^2$ и $x_2^2 + y_2^2$, а члены высших порядков в функции Гамильтона являются функциями переменных $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, которые входят, скажем, только в комбинациях

$$w_1^p w_2^q u_1^m u_2^n,$$

где

$$w_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2, \qquad w_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$
$$u_1 = x_1^2 + y_1^2, \qquad u_2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Такой случай, например, встречается в небесной механике при исследовании в переменных Пуанкаре (см., например, [12]). В общем случае можно считать, что члены высших порядков в H являются однородными полиномами увеличивающихся степеней относительно x_1, y_1, x_2, y_2. Исключение всех членов (кроме комбинаций из u_1, u_2) в H_1 можно осуществить с помощью производящей функции

$$S = x_1' y_1 + x_2' y_2 + S_1 + S_2 + \ldots,$$

так что приходим к уравнению

$$H_1(x', y) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial S_1}{\partial y_k} \frac{\partial H_0}{\partial x_k'} = H_1'(x', y) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial S_1}{\partial x_k'} \frac{\partial H_0'}{\partial y_k},$$

где штрихом отмечены новые переменные и новый гамильтониан. Далее, так как $H_0 = A_1 u_1 + A_2 u_2$, то функция H_1' определяется той частью функции H_1, которая содержит только комбинации из u_1 и u_2; обозначим эту часть через H_{1s}. Оставшаяся часть, обозначаемая как H_{1p}, будет служить для определения S_1. Так как $H_0'(x', y) = H_0(x', y)$, то отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_k'} \frac{\partial S_1}{\partial y_k} - \frac{\partial H_0}{\partial y_k} \frac{\partial S_1}{\partial x_k'} \right) = - H_{1p}(x', y),$$

где в H_{1p} любой член, в который входит u_1 и (или) u_2, в качестве множителя содержит члены, зависящие от w_1 или w_2. Далее, учитывая вид H_0, имеем

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_i'} = 2\alpha_i x_i', \qquad \frac{\partial H_0}{\partial y_i} = 2\alpha_i y_i,$$

где

$$\alpha_i = \left(\frac{\partial H_0}{\partial u_i} \right)_{x=x'}.$$

Следовательно, уравнение для S_1 принимает вид

$$2 \sum_i \alpha_i \left(x_i' \frac{\partial S_1}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial S_1}{\partial x_i'} \right) = - H_{1p}(x', y).$$

С другой стороны, из рассмотрения выражений для w_k и u_k ($k = 1, 2$) следует, что

$$x_1' \frac{\partial S_1}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial S_1}{\partial x_1'} = w_2' \frac{\partial S_1}{\partial w_1'} - w_1' \frac{\partial S_1}{\partial w_2'},$$

$$x_2' \frac{\partial S_1}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial S_1}{\partial x_2'} = w_1' \frac{\partial S_1}{\partial w_2'} - w_2' \frac{\partial S_1}{\partial w_1'},$$

где

$$w_1' = x_1' x_2' + y_1 y_2, \qquad w_2' = x_1' y_2 - x_2' y_1.$$

Уравнение для S_1 становится таким:

$$2(\alpha_1 - \alpha_2) \left(w_2' \frac{\partial S_1}{\partial w_1'} - w_1' \frac{\partial S_1}{\partial w_2'} \right) = - H_{1p}(w_1', w_2', u_1', u_2') = \Phi_{1p}(w_1', w_2'),$$

где зависимость от u_1', u_2' исчезает и не будет больше встречаться в дальнейших выкладках (до тех пор, пока не возникнет вопрос о зависимости только от величин u_1', u_2'). Решение этого последнего уравнения можно получить введением вспомогательных переменных интегрирования

$$z_1 = (w_1')^2 - (w_2')^2, \qquad z_2 = (w_1')^2 + (w_2')^2.$$

Произведя эти замены, мы находим

$$S_1 = \frac{1}{4(\alpha_1 - \alpha_2)} \int \frac{\Phi_{1p}(z_1, z_2)}{(z_1^2 - z_2^2)^{1/2}} dz_1 + \Phi_1(z_2),$$

где Φ_1 — произвольная функция z_2, u_1', u_2'. Этот метод нельзя применить, если $\alpha_1 = \alpha_2$, т. е.

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_1} = \frac{\partial H_0}{\partial u_2}.$$

Очевидно, это есть случай внутреннего резонанса в линейном приближении, который является исключительным. Аналогичные выкладки и общие рассуждения справедливы для приближения любого порядка. Гамильтониан, по крайней мере формально, приводится к виду

$$H' = H_0' + H_1' + \ldots = H'(u_1', u_2'),$$

так что

$$u_1' = (x_1')^2 + (y_1)^2 = \text{const}, \qquad u_2' = (x_2')^2 + (y_2)^2 = \text{const}.$$

Связь между переменными со штрихами и переменными без штрихов получается из соотношений

$$y_k = y_k' - \frac{\partial S_1}{\partial x_k'} - \frac{\partial S_2}{\partial x_k'} - \ldots,$$

$$x_k = x_k' + \frac{\partial S_1}{\partial y_k} + \frac{\partial S_2}{\partial y_k} + \ldots$$

Проведенные выше рассмотрения устанавливают тесную связь между проблемой Пуанкаре и нормализацией Биркгофа [6, 98]. В действительности эти задачи эквивалентны по их целям, и такая эквивалентность в некоторых специальных прикладных вопросах была недавно показана в работах Депри [28—31].

Хорошо известно, что в общем случае ряды, вводимые при нормализации Биркгофа, расходятся, хотя и существуют некото-

рые исключения. Новые результаты, касающиеся таких проблем, крайне редки[1]), и теоремы Колмогорова и Мозера можно применить только из-за нелинейности уравнений, соответствующих функции H_0.

Следующим важным понятием, введенным Уиттекером [103], является понятие *дополнительных интегралов*. Определение этих величин и их представление в виде рядов, которое получил Уиттекер, недавно было использовано в работе Контопулоса [20], где, между прочим, показано, что такие интегралы, до сих пор считавшиеся формальным результатом, на практике остаются постоянными в течение очень большого интервала времени, а именно, настолько долго, насколько ЭВМ дает возможность проводить интегрирование с разумной достоверностью в точности результата. Отсюда следует вопрос: можно ли для консервативной системы найти другой интеграл, кроме интеграла энергии? Очевидно, существуют системы, для которых это справедливо. Действительно, по определению интегрируемая система с n степенями свободы имеет n таких интегралов. Хотя хорошо известный результат Пуанкаре указывает, что динамическая система неинтегрируема, это касается только существования однозначного (относительно некоторого параметра) интеграла. Зигель [96] также показал, что в окрестности особой точки не существует дифференцируемых интегралов. Тем не менее, могут существовать интегралы для отдельных значений параметров, появляющихся в уравнениях, для отдельных значений начальных условий или, в исключительных случаях, например, даже непрерывные интегралы. В конце этого параграфа мы приведем пример такого исключительного случая.

Пусть функция $F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, t)$ будет дифференцируемым в области D интегралом консервативной системы, определяемой гамильтонианом $H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$; пусть он, кроме того, принадлежит классу C^2 в некоторой области D $2n$-мерного фазового пространства $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Хорошо известно, что для того, чтобы независимая от H функция F была первым интегралом, необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$(F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{2.6.2}$$

В явном виде скобки Пуассона здесь записываются так:

$$(F, H) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} \right).$$

---

[1]) Существенные новые результаты о сходимости рядов нормализующих преобразований получены в работах А. Д. Брюно [5* — 12*] (*прим. ред.*).

Если интеграл F не зависит явно от времени, то упомянутое условие принимает простой вид: $(F, H) = 0$.

Теперь рассмотрим случай, при котором H зависит от безразмерного параметра ε, $|\varepsilon| \in [0, 1]$, и H раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon = 0$ при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$:

$$H(y, x, \varepsilon) = H_0(x) + \varepsilon H_1(y, x) + \varepsilon^2 H_2(y, x) + \ldots \quad (2.6.3)$$

Наконец, предположим, что F не зависит от времени явно и является аналитической функцией (в вещественном смысле) параметра ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Тогда

$$F(y, x, \varepsilon) = F_0(y, x) + \varepsilon F_1(y, x) + \varepsilon^2 F_2(y, x) + \ldots, \quad (2.6.4)$$

и потребуем, чтобы функции $F_k(y, x)$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ были дифференцируемыми в области D. Если F является интегралом для всех ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, то должно быть выполнено равенство $(F_0, H_0) = 0$ или в явном виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_0}{\partial y_k} \frac{\partial H_0}{\partial x_k} = 0. \quad (2.6.5)$$

Ясно, что любая функция вида $F_0(x)$ удовлетворяет уравнению (2.6.5). Если функция $F_0^*(x, y)$ является решением уравнения (2.6.5), то функция $F_0^*(x, y) + F_0^{**}(x)$ также будет его решением независимо от вида функции $F_0^{**}(x)$. Мы будем исключать из рассмотрения случаи резонансов, т. е. случаи, когда функции $\omega_k^0 = \partial H_0/\partial x$ являются зависимыми или, в частности, линейно зависимыми на множестве целых чисел для $x \in D$. В действительности мы будем предполагать выполненными бесконечное множество условий

$$\left| \sum_{k=1}^{n} j_k \omega_k^0 \right| > K(\omega^0) \left[\sum_{k=1}^{n} |j_k| \right]^{-n-1} \quad (2.6.6)$$

для всех одновременно не обращающихся в нуль целых чисел j_k и некоторой постоянной K. Резонансные случаи или случаи, близкие к резонансным, в применении к задаче о дополнительных интегралах детально изучены в работах Контопулоса [25, 26]. Для систем с числом степеней свободы $n > 2$ в литературе не встречается даже приближенного решения рассматриваемой задачи, хотя его можно получить без особого труда. Выписанные выше условия исключают частные решения (или «почти» решения) типа

$$F_0 = \sum_{k=1}^{n} p_k y_k,$$

где p_k — такие целые числа, что

$$\sum_{k=1}^{n} j_k p_k = 0.$$

Тогда мы имеем следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция F_0 является произвольной функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$ и произвольной функцией линейной формы $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$, где вещественные, не являющиеся все одновременно рациональными числа α_k таковы, что*

$$\alpha_1 \omega_1^0 + \ldots + \alpha_n \omega_n^0 = 0.$$

Отметим, что так как решение системы уравнений, соответствующих функции Гамильтона H_0, имеет вид

$$x_k = \text{const}, \qquad y_k = \omega_k^0(x)\, t + y_k^0,$$

то любая функция от $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$ сводится к независимой постоянной. По этой причине мы будем рассматривать только $F_0 = F_0(x)$ в качестве решения уравнения (2.6.5). В действительности это очевидно, так как функция F_0 должна быть интегралом системы уравнений, соответствующих гамильтониану H_0, и, следовательно, функцией n интегралов этой системы $x_1, \ldots, x_n$.

Лемма 2. *Если $F_0 = F_0(x)$ и функция $F_1(y, x)$ является 2π-периодической относительно $y_1, \ldots, y_n$ с нулевым средним, то функция (H_1, F_1) также будет 2π-периодической относительно $y_1, \ldots, y_n$ с нулевым средним при условии, что $H_1(y, x)$ — 2π-периодическая функция относительно $y_1, \ldots, y_n$.*

Действительно, условие $(F, H) = 0$ приводит к такому набору условий при $p = 1, 2, 3, \ldots$:

$$(F_p, H_0) + (F_{p-1}, H_1) + (F_{p-2}, H_2) + \ldots + (F_0, H_p) = 0. \quad (2.6.7)$$

При $p = 1$ мы имеем

$$\begin{gathered} (F_1, H_0) + (F_0, H_1) = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \omega_j^0 \frac{\partial F_1}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) \frac{\partial H_1}{\partial y_j}, \end{gathered} \quad (2.6.8)$$

где

$$P_j(x) = \frac{\partial F_0}{\partial x_j}.$$

Правая часть уравнения (2.6.8) — 2π-периодическая по каждому y_k и имеет нулевое среднее. Аналогичное утверждение справедли-

во и относительно функции $F_1(y, x)$, в которой можно пренебречь любой произвольной функцией x; величины ω_j^0; удовлетворяют условию (2.6.6). Пусть теперь $\theta = p_1y_1 + \ldots + p_ny_n$ — произвольный аргумент в ряде Фурье функции $H_1(y, x)$, где целые числа $p_1, \ldots, p_n$ одновременно в нуль не обращаются. В силу линейности уравнения (2.6.8) можно обойтись этим единственным аргументом. Таким образом, отбросив произвольную функцию x, для этого аргумента получаем

$$F_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_jP_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j\omega_j^0}(-A\sin\theta + B\cos\theta), \tag{2.6.9}$$

где, согласно определению, $H_1 = A\cos\theta + B\sin\theta + \ldots$ Сомножитель, стоящий перед скобкой в правой части (2.6.9), является функцией x, которую обозначим через $C(x)$, и, учитывая (2.6.6), находим, что он не слишком велик (очевидно, надо, чтобы постоянная $K(\omega^0)$ в (2.6.6) была $O(1)$ по сравнению с ε).

Отсюда следует равенство

$$(F_1, H_1)_\theta = \left\{\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial C}{\partial x_j}\right\}\left\{\frac{B^2 - A^2}{2}\sin 2\theta + AB\cos 2\theta\right\},$$

которое и доказывает лемму, так как члены, не зависящие от θ, можно считать периодическими функциями этого аргумента.

Рассмотрим уравнение (2.6.7) для $p = 2$. Функция F_2 определяется формулой

$$(F_2, H_0) + (F_1, H_1) + (F_0, H_2) = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^0 \frac{\partial F_2}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\frac{\partial H_2}{\partial y_k} - (F_1, H_1),$$

откуда следует, что если пренебречь произвольной функцией переменных x, то F_2 также будет 2π-периодической функцией относительно $y_1, \ldots, y_n$.

Однако в общем случае утверждение о 2π-периодичности по угловым переменным $y_1, \ldots, y_n$ функции F_p является неверным. Оно остается справедливым только при выполнении очень специальных условий. Наиболее важный пример такого рода — это когда H представляется рядами из косинусов углов $y_1, \ldots, y_n$. В этом случае легко видеть, что F также представляется рядами из коси-

нусов. Следовательно, любая функция, получаемая при вычислении скобок Пуассона, будет выражаться через ряды из синусов и не может содержать постоянных членов. В этом легко убедиться, если написать выражение

$$(F, H) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} \right)$$

и обнаружить, что в каждом слагаемом один сомножитель есть ряд из синусов, а другой — ряд из косинусов.

Аналогичное утверждение верно, когда H представляется рядами из синусов. В задачах небесной механики, в которых рассматриваются ньютоновские силы, эти условия часто бывают выполнены.

Сходимость такого метода последовательных приближений была доказана Уиттекером [102] для некоторого специального класса задач с двумя степенями свободы, а именно: для движения в окрестности положения равновесия в общем эллиптическом случае при рационально независимых частотах нормальных колебаний ω_1, ω_2 и в достаточно малой окрестности равновесия. Хотя Уиттекер считал, что для большинства случаев имеет место сходимость, он, тем не менее, указал на факт, что такие дополнительные интегралы в общем случае не могут быть равномерно сходящимися для любого значения независимой переменной и по отношению ко всем значениям постоянных интегрирования или параметрам задачи из любого интервала. Это последнее утверждение очевидно следует из того факта, что по мере того, как отношение ω_1/ω_2 изменяется от иррационального значения к некоторому рациональному, ряды, определяющие дополнительные интегралы, принимают совершенно другой вид. Аналогичная ситуация имеет место при применении метода усреднения по отношению к типу движения, определяемого гамильтонианом H_0 (опорное решение). При нелинейных колебаниях нормальная форма зависит от начальных условий и, следовательно, кажется естественным заключить, что, насколько это касается начальных условий, сходимость в *любой* области фазового пространства невозможна. В действительности аналогичные соображения лежали в основе теоремы Пуанкаре о расходимости рядов в небесной механике [91].

Разумеется, существует один случай, при котором вопрос о сходимости даже не встает: очевидная ситуация, когда ряды обрываются. Даже если интеграл существует в виде полинома относительно ε, остается вопрос о том, каким должно быть нулевое приближение F_0. Разница между получением рядов (в конечном счете расходящихся) и полинома может зависеть от выбора функции $F_0(x)$. Если бы был найден общий принцип нахождения таких функций, то мы могли бы иметь критерий существования ин-

тегралов, являющихся полиномами относительно некоторых физических параметров. Рассмотрим, например, случай

$$H = H_0(x) + H_1(y, x),$$

достаточно общий в задачах теории возмущений. В этом случае уравнение, определяющее функции F_p, имеет вид ($p=1, 2, 3, \ldots$)

$$(F_p, H_0) + (F_{p-1}, H_1) = 0.$$

Очевидно, если F_k ($k \geqslant p$) тождественно равны нулю, то отсюда следует, что $F = F_0 + F_1 + \ldots + F_{p-1}$, где

$$\begin{aligned}
(F_0, H_0) &= 0,\\
(F_1, H_0) + (F_0, H_1) &= 0,\\
(F_2, H_0) + (F_1, H_1) &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(F_{p-1}, H_0) + (F_{p-2}, H_1) &= 0,\\
(F_{p-1}, H_1) &= 0.
\end{aligned}$$

Последнее условие подразумевает, что функция F_{p-1} является интегралом системы уравнений, соответствующей гамильтониану H_1. Это есть необходимое условие того, что интеграл F является полиномом степени $p-1$ относительно ε. Ясно, что для этого достаточно, чтобы функция F_{p-1} была равна H_1 или являлась функцией от H_1.

Например, такая ситуация имела место в случае интегрируемости Ковалевской для движения симметричного волчка под действием гравитационного поля. Для изучения этого движения введем переменные Андуайе [2]

$$L = p_\varphi = G\cos b, \qquad p_\theta = G\sin b\cdot\sin(l-\psi), \qquad p_\varphi = H = G\cos I,$$

где φ, ψ, θ — углы Эйлера, определение которых можно найти, например, в книге Голдстейна [44], G — величина кинетического момента, I — наклонение плоскости p (нормальной к вектору кинетического момента) к инерциальной экваториальной плоскости, b — наклонение главной инерциальной экваториальной плоскости тела к плоскости p, а l — угол между связанной с телом осью Ox и линией пересечения плоскости Oxy, связанной с телом, с плоскостью p. Пусть h — угол между инерциальной осью OX и линией пересечения плоскостей OXY и p, а g — угол между линиями пересечения плоскости p с плоскостями OXY и Oxy. Тогда переменные L, G, H, l, g, h будут канонически сопряженными (см., например, [31]), и кинетическая энергия имеет вид

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}\sin^2 l + \frac{1}{B}\cos^2 l\right)(G^2 - L^2) + \frac{1}{2C}L^2,$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции (по осям Ox, Oy, Oz соответственно). Если положить $A = B$, то

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) L^2 + \frac{1}{2A} G^2.$$

Потенциальная энергия при сделанном выборе осей может быть записана в виде

$$w\mathscr{H}_1 = w\{x_G[\sin I \sin g \cos l + (\sin b \cos I + \cos b \sin I \cos g) \sin l] + \\ + z_G[\cos b \cos I - \sin b \sin I \cos g]\},$$

где w — вес волчка, а x_G, $y_G = 0$, z_G — координаты центра масс в системе координат, связанной с телом. Очевидно, мы имеем интегралы $\mathscr{H}_0 + w\mathscr{H}_1 = E$ (интеграл энергии) и $H = G \cos I = H_0$ (так как h — циклическая координата).

Рассмотрим интеграл системы $F(L, G, H, l, g, h)$, такой, что $F = F_0 + wF_1 + \ldots$,

$$F_0 = \psi(L, G), \qquad F_k = F_k(L, G, l, g) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где по предположению h — циклическая переменная, а $H = H_0$ — параметр, зависимость от которого явно не показана. Мы можем переписать $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_1$ в виде

$$\mathscr{H}_0 = \frac{a}{2} L^2 + \frac{b}{2} G^2,$$

$$\mathscr{H}_1 = A^0 \sin(l + g) + B^0 \sin(l - g) + C^0 \sin l + D^0 \cos g + E^0,$$

где

$$A^0 = x_G \frac{(L + G)\sqrt{G^2 - H^2}}{2G^2},$$

$$B^0 = x_G \frac{(L - G)\sqrt{G^2 - H^2}}{2G^2},$$

$$C^0 = x_G \frac{H\sqrt{G^2 - L^2}}{G^2},$$

$$D^0 = -z_G \frac{\sqrt{(G^2 - L^2)(G^2 - H^2)}}{G^2},$$

$$E^0 = z_G \frac{LH}{G^2}.$$

Условия того, что функция F — интеграл, имеют вид ($k = 1, 2, \ldots$)

$$(\mathscr{H}_0, F_k) + (\mathscr{H}_1, F_{k-1}) = 0. \tag{2.6.10}$$

Оставим пока функцию $\psi(L, G) = F_0$ неопределенной и попыта-

емся определить, при каких условиях на ψ и физические параметры ряд для F обрывается. Из (2.6.10) получаем

$$aL\frac{\partial F_k}{\partial l}+bG\frac{\partial F_k}{\partial g}=$$
$$=[A^0\cos(l+g)+B^0\cos(l-g)+C^0\cos l]\frac{\partial F_{k-1}}{\partial L}+$$
$$+[A^0\cos(l+g)-B^0\cos(l-g)-D^0\sin g]\frac{\partial F_{k-1}}{\partial G}-$$
$$-\left[A_L^0\sin(l+g)+B_L^0\sin(l-g)+C_L^0\sin l+D_L^0\cos g+E_L^0\right]\frac{\partial F_{k-1}}{\partial l}-$$
$$-\left[A_G^0\sin(l+g)+B_G^0\sin(l-g)+C_G^0\sin l+D_G^0\cos g+E_G^0\right]\frac{\partial F_{k-1}}{\partial g}. \tag{2.6.11}$$

При $k=1$ находим

$$F_1=\frac{A^0(\psi_L+\psi_G)}{aL+bG}\sin(l+g)+\frac{B^0(\psi_L-\psi_G)}{aL-bG}\sin(l-g)+$$
$$+\frac{C^0\psi_L}{aL}\sin l+\frac{D^0\psi_G}{bG}\cos g+E'=$$
$$=A'\sin(l+g)+B'\sin(l-g)+C'\sin l+D'\cos g+E', \tag{2.6.12}$$

где E' — произвольная функция, зависящая от L, G. Функция F_1 имеет тот же вид, что и $\mathscr{H}_1$. Действительно, это условие является необходимым, так как, взяв за ψ функцию $\mathscr{H}_0$ ($\psi=\mathscr{H}_0$), мы должны получить $F_1=\mathscr{H}_1+$ *произвольная функция*, зависящая от L, G. Также ясно, что не существует функции $\psi\not\equiv 0$, такой, что $F_1=0$. При $k=2$ уравнения (2.6.11) дают (см. [38])

$$F_2=A_{0,1}\cos g+A_{0,2}\cos 2g+A_{1,-1}\cos(l-g)+$$
$$+A_{1,0}\cos l+A_{1,1}\cos(l+g)+A_{1,2}\cos(l+2g)+$$
$$+A_{2,-2}\cos(2l-2g)+A_{2,-1}\cos(2l-g)+A_{2,0}\cos 2l+$$
$$+A_{2,1}\cos(2l+g)+A_{2,2}\cos(2l+2g)+B_{1,-2}\sin(l-2g)+$$
$$+B_{1,-1}\sin(l-g)+B_{1,0}\sin l+B_{1,1}\sin(l+g)+$$
$$+B_{1,2}\sin(l+2g)+E'', \tag{2.6.13}$$

где E'' — произвольная функция, зависящая от L, G, а $A_{j,k}$, $B_{j,k}$ — определенные функции, зависящие от ψ_L, ψ_G, A^0, B^0, C^0, D^0, E', L, G, a, b и их производных. Если предположить $F_2=0$, то все эти коэффициенты должны быть тождественно равны нулю, и мы находим, что

$$E''=E'_L=E'_G=0,$$

а при условии, что k — ненулевая постоянная, должно быть

$$A' = kA^0, \qquad B' = kB^0,$$
$$C' = kC^0, \qquad D' = kD^0,$$

так что $F_0 = k\mathscr{H}_0$ и $F_1 = k\mathscr{H}_1$. Отсюда видно, что любой дифференцируемый интеграл (справедливый для всех значений w), имеющий вид $F_0 + wF_1$, необходимо должен быть пропорционален функции $\mathscr{H}_0 + w\mathscr{H}_1$.

Из (2.6.11) при $k = 3$ находим

$$F_3 = \sum_{k=-3}^{3} \sum_{j=-3}^{3} \left[A'_{k,j} \cos(kl + jg) + B'_{k,g} \sin(kl + jg)\right], \quad (2.6.14)$$

где индексы k, j одновременно в нуль не обращаются, а $A'_{k,j}, B'_{k,j}$ — функции, зависящие от ψ_L, ψ_G, A^0, B^0, C^0, D^0, E', E'', L, G, a, b и их производных. Полагая равными нулю все коэффициенты этого тригонометрического полинома, находим

$$\begin{aligned}
&\text{I)}\ a = b \qquad (A = 2C),\\
&\text{II)}\ D^0 = E^0 = E' = 0 \qquad (z_G = 0),\\
&\text{III)} \qquad \psi = \frac{(G^2 - L^2)^2}{A^4},\\
&\text{IV)} \qquad E'' = 2x_G^2 \frac{G^2(L^2 + H^2) - 2L^2H^2}{A^2G^4}.
\end{aligned} \quad (2.6.15)$$

При этих условиях из (2.6.12) следует, что

$$F_1 = \frac{2x_G}{A^3}\left(1 - \frac{1}{G^2}\right)\sqrt{G^2 - H^2}\,[(G - L)\sin(l + g) -$$
$$- (G + L)\sin(l - g)] + \frac{4x_G H^2}{A^3G^2}\sqrt{(G^2 - H^2)^3}\sin l$$

или

$$F_1 = \frac{4x_G}{A^3} G^2 \sin^2 b\,[\sin I\,(\sin g \cos l - \cos b \cos g \sin l) -$$
$$- \cos I \sin b \sin l]. \quad (2.6.16)$$

Из (2.6.13) находим

$$F_2 = \frac{4x_G^2}{A^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L^2 + H^2}{G^2} - 2\frac{L^2H^2}{G^4}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H^2 + L^2}{G^2} + \frac{L^2H^2}{G^4}\right)\cos 2g +\right.$$
$$\left. + 2\frac{LH}{G^2}\sqrt{\left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right)\left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right)}\cos g\right]$$

или

$$F_2 = \frac{4x_G^2}{A}(1 - \cos^2 b \cos^2 I - \sin^2 b \sin^2 I \cos^2 g + \\ + 2 \sin b \cos b \sin I \cos I \cos g).$$

Легко видеть, что функции F_3, F_4, ... равны нулю, т. е. мы установили существование интеграла

$$F = F_0 + wF_1 + w^2F_2,$$

который является интегралом Ковалевской (см., например, [68]). Записывая F через p, q, r (компоненты вектора угловой скорости по осям Ox, Oy, Oz) и углы Эйлера, находим

$$\text{I)} \qquad F_0 = \frac{G^4}{A^4}\left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right)^2 = \frac{G^4}{A^4}\sin^4 b = (p^2 + q^2)^2,$$

$$\text{II)} \qquad F_1 = -\frac{4x_G}{A}[(p^2 - q^2)\sin\theta\sin\psi + 2pq\sin\theta\cos\psi],$$

$$\text{III)} \qquad F_2 = \frac{4x_G^2}{A^2}(1 - \cos^2\theta) = \frac{4x_G^2}{A^2}\sin^2\theta.$$

Используя обозначения Лейманиса [68]

$$\mu = wx_GA^{-1}, \qquad \xi = \sin\psi\sin\theta,$$
$$\eta = \cos\psi\sin\theta, \qquad \zeta = \cos\theta,$$

получаем

$$F = (p^2 - q^2 - 2\mu\xi)^2 + (2pq - 2\mu\eta)^2.$$

Таким образом, для любого значения w (которое здесь играет роль ε) найден интеграл, правда, при условии $A = B = 2C$. При более общих условиях Арнольд [3] показал, что эта система интегрируема для достаточно малых значений w, т. е. он показал устойчивость быстрого волчка.

7. Решение задачи Пуанкаре с помощью скобок Пуассона. Уничтожение секулярных членов в дополнительных интегралах

В этом параграфе мы хотим показать, как решить задачу Пуанкаре, используя скобки Пуассона и, в то же время, как исключить секулярные члены при построении дополнительных интегралов. Главным образом мы будем иметь дело со случаем вырождения, при котором главная часть гамильтониана зависит только от одной переменной действие, а возмущения 2π-периодичны по угловым переменным. Как мы уже видели, в этой си-

туации при введении рядов в методе Пуанкаре возникают некоторые трудности, которые привели Цейпеля к уже описанному обобщению метода. Как мы уже видели, с помощью метода Пуанкаре строятся n формальных интегралов, нулевыми приближениями которых являются переменные действие, являющиеся постоянными в невозмущенном движении. Оставшиеся n интегралов по существу являются постоянными интегрирования для угловых переменных, если все они в конце концов исключены из гамильтониана. Процесс, который мы здесь собираемся обсуждать, по существу совпадает с процессом, введенным Уиттекером, хотя исключение секулярных членов было впервые проведено в работе Джакальи [37].

В обычных обозначениях рекуррентные соотношения имеют вид

$$(H_0, F_k) = -\sum_{j=0}^{k-1} (H_{k-j}, F_j) = -\psi_k(y, x), \tag{2.7.1}$$

где функция ψ_k известна, когда все $(k-1)$ приближений известны. При $k=0$ $\psi_k = 0$. Полагая также $H_0 = H_0(x)$, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j^0 \frac{\partial F_k}{\partial y_j} = \psi_k(y, x) \tag{2.7.2}$$

с условием, что в каждой функции $F_k(y, x)$ не должно быть секулярных членов в том смысле, что замена $y_j = \omega_j^0 \tau + y_j^0$ должна давать

$$\lim_{\tau\to\infty} F_k(y(\tau), x) < \infty. \tag{2.7.3}$$

Однако функции ψ_k получаются в результате перемножения тригонометрических рядов, т. е. они должны содержать члены, которые являются функциями только x, так что при интегрировании уравнений (2.7.2) условия (2.7.3), вообще говоря, не будут выполнены. Нежелательное секулярное поведение может быть уничтожено введением описываемой ниже процедуры усреднения. Мы рассмотрим случай вырождения высокого порядка, когда функция H_0 зависит только от одного импульса, т. е. $H_0 = H_0(x_1)$. Аналогично процедуре Пуанкаре мы попытаемся получить интегралы, которые при $H = H_0$ равны импульсам, а в общем случае

$$F_j = x_j + \varepsilon \Delta F_j(y, x) \tag{2.7.4}$$

при $j = 1, 2, 3, \ldots$ При этом остается открытым вопрос о том, приведет ли такой выбор к интегралам

$$x_j' = x_j + \varepsilon W_j(y, x), \tag{2.7.5}$$

определяемым методом Пуанкаре. Так как по предположению F_j и x_j' являются интегралами, то функции

$$F_j - x_j' = \varepsilon(\Delta F_j - W_j)$$

также будут интегралами. Теперь ΔF_j и W_j не являются интегралами (так как x_j — не интегралы), так что $\Delta F_j \equiv W_j$. Отсюда следует, что, если процедура сходится для ε из некоторого интервала, то оба метода приведут к одинаковому результату, хотя использование скобок Пуассона дает явный вид решения и дает некоторую дополнительную информацию. Следовательно, мы положим

$$F = x_1 + F_1(y, x) + F_2(y, x) + \ldots, \tag{2.7.6}$$

$$H = H_0(x_1) + H_1(y, x) + H_2(y, x) + \ldots, \tag{2.7.7}$$

где H удовлетворяет упомянутым выше условиям. Уравнение для приближения первого порядка ($k = 1$), получаемое из (2.7.1), дает

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial y_1},$$

так что

$$F_1 = -\frac{1}{\omega_1^0} H_{1p}(y, x) + F_{1s}(y_2, \ldots, y_n, x), \tag{2.7.8}$$

где H_{1p} определяется операцией выделения из H_1 среднего по y_1. В общем случае

$$f_p(y, x) = f(y, x) - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y_2, \ldots, y_n, x)\, dt,$$

или для рассматриваемого случая

$$f_p(y, x) = f(y, x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)\, dy_1.$$

Индекс s указывает на отсутствие переменной y_1, а функция F_{1s}, очевидно, произвольна. Приближение второго порядка определяется из уравнения

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} = \sum_i \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_i} \frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{\partial H_1}{\partial y_i} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial y_1} = \psi_{2p} + \psi_{2s},$$

где ψ_{2p} и ψ_{2s} — известные функции, имеющие вид

$$\psi_{2p} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_i}\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_p - \left(\frac{\partial H_1}{\partial y_i}\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_p\right] - \frac{\partial H_2}{\partial y_1},$$

$$\psi_{2s} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_i}\frac{\partial F_1}{\partial y_i}\right)_s - \left(\frac{\partial H_1}{\partial y_i}\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_s\right].$$

Если функция F_2 не должна содержать секулярных членов, то ψ_{2s} должна уничтожаться, что определяется условием

$$\psi_{2s} = (H_{1s}, F_{1s}) - \frac{1}{2\left(\omega_1^0\right)^2}\frac{\partial\omega_1^0}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}H_{1p}^2\right]_s = 0,$$

а так как последний член в правой части этого условия равен нулю, то функция F_{1s} определяется уравнением

$$(H_{1s}, F_{1s}) = 0, \tag{2.7.9}$$

для которого надо найти какое-нибудь простейшее частное решение в этом случае $F_{1s} = 0$. Для простоты рассмотрим случай

$$H = H_0 + H_1, \tag{2.7.10}$$

так что приближение второго порядка определяется уравнением

$$\omega_1^0\frac{\partial F_2}{\partial y_1} = \psi_{2p} = (H_{1p}, F_{1s}) - \frac{1}{\omega_1^0}(H_{1s}, F_{1p}) - \frac{1}{2\left(\omega_1^0\right)^2}\frac{\partial\omega_1^0}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}H_{1p}^2\right]_p,$$

а так как

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_1}H_{1p}^2\right]_p = \frac{\partial}{\partial y_1}H_{1p}^2,$$

то отсюда следует

$$F_{2p} = -\frac{1}{\left(\omega_1^0\right)^2}\int(H_{1s}, H_{1p})\,dy_1 - \frac{1}{2\left(\omega_1^0\right)^3}\frac{\partial\omega_1^0}{\partial x_1}\left(H_{1p}^2\right)_p, \tag{2.7.11}$$

$$F_2 = F_{2p} + F_{2s},$$

где функция F_{2s} $(y_2, \ldots, y_n, x)$ произвольна. В случае (2.7.10) для приближения третьего порядка имеем

$$\omega_1^0\frac{\partial F_3}{\partial y_1} = (H_1, F_2) = \psi_{3p} + \psi_{3s},$$

где

$$\psi_{3s} = (H_{1s}, F_{2s}) + (H_{1s}, F_{2p})_s,$$

и учитывая условие $\psi_{3s} = 0$, определяем произвольную функцию F_{2s} из соотношения

$$(H_{1s}, F_{2s}) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (H_{1s}, F_{2p})\, dy_1 = \Phi_{3s}(y_2, \ldots, y_n, x),$$

где Φ_{3s} — известная функция.

Характеристики однородных уравнений в частных производных для $F_{1s}, \ldots, F_{ks}$ одинаковы при любом k и определяются формулами

$$\frac{dy_2}{\dfrac{\partial H_{1s}}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{dy_n}{\dfrac{\partial H_{1s}}{\partial x_n}} = \frac{dx_2}{-\dfrac{\partial H_{1s}}{\partial y_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\dfrac{\partial H_{1s}}{\partial y_n}} = d\tau,$$

где τ — вспомогательный параметр. Таким образом, решения для F_{ks} $(k = 1, 2, \ldots)$ будут зависеть от решения такой системы уравнений:

$$\frac{dy_j}{d\tau} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_j}, \qquad \frac{dx_j}{d\tau} = -\frac{\partial H_{1s}}{\partial y_j} \qquad (j = 2, \ldots, n).$$

Эти уравнения соответствуют динамической системе с $(n-1)$-й степенью свободы и гамильтонианом H_{1s}. Тем не менее, необходимо отметить, что надо найти только частное решение (в смысле Якоби) такой системы. Разумеется, если для некоторого значения (x, y) одна или более частных производных $\partial H_{1s}/\partial x_k$ равны нулю или малы (скажем, так же малы, как и ε), то решение будет содержать особенности или малые делители и метод применять нельзя. Один из способов рассмотрения такой ситуации заключается в предположении о резонансности, и он будет описан в главе V. Здесь мы ограничимся изучением частного случая, когда одна из производных, например $\partial H_{1s}/\partial x_2$, является $O(\varepsilon^{1/2})$, и рассмотрим разложение

$$F = F_0 + \varepsilon^{1/2}F_1 + \varepsilon F_2 + \varepsilon^{3/2}F_3 + \ldots$$

Из основного уравнения $(F, H) = 0$ приравниванием членов одинакового порядка по ε получаем

$$(H_0, F_0) = 0, \qquad (H_0, F_1) = 0,$$

$$(H_0, F_2) + \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_0}{\partial y_1} + \frac{\partial H_{1p}}{\partial x_2}\frac{\partial F_0}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial H_1}{\partial x_n}\frac{\partial F_0}{\partial y_n} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial H_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_0}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial y_2}\frac{\partial F_0}{\partial x_2} - \ldots - \frac{\partial H_1}{\partial y_n}\frac{\partial F_0}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$(H_0, F_3) + \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_2}\frac{\partial F_0}{\partial y_2} + \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_{1p}}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial H_1}{\partial x_n}\frac{\partial F_1}{\partial y_n} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial H_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial y_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \ldots - \frac{\partial H_1}{\partial y_n}\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right) = 0$$

и т. д. Если опять считать $H_0 = H_0(x_1)$, $F_0 = x_1$, то отсюда следует

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = 0, \quad \text{т. е.} \quad F_1 = F_{1s}(y_2, \ldots, y_n, x),$$

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial y_1} = \psi_2,$$

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_3}{\partial y_1} = (H_1, F_1) - \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial y_2} = \psi_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_k}{\partial y_1} = (H_1, F_{k-2}) + \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2}(F_{k-3} - F_{k-2}) = \psi_k$$

при $k = 4, 5, \ldots$ Теперь функция F_{1s} — произвольная и может быть взята нулевой, так что автоматически получаем $\psi_3 = 0$ и, следовательно,

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_3}{\partial y_1} = 0$$

или

$$F_3 = F_{3s}(y_2, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n).$$

С другой стороны,

$$F_2 = -\frac{1}{\omega_1^0} H_{1p} + F_{2s},$$

так что функция

$$\psi_{4s} = (H_{1s}, F_{2s}) + (H_{1p}, F_{2p})_s - \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_2}\frac{\partial F_{2s}}{\partial y_2}$$

должна быть нулевой. Так как

$$\left(H_{1p}, -\frac{1}{\omega_1^0} H_{1p}\right)_s = -\frac{1}{(\omega_1^0)^2}\frac{\partial \omega_1^0}{\partial x_1}\left(H_{1p}, \frac{\partial H_{1p}}{\partial y_1}\right)_s = 0,$$

то отсюда следует

$$\psi_{4s} = (H_{1s}, F_{2s}) - \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_2}\frac{\partial F_{2s}}{\partial y_2} = 0,$$

и, например, функция $F_{2s} = 0$ удовлетворяет этому требованию. В любом случае характеристики (для любого порядка) определяются уравнениями

$$\frac{dy_3}{\frac{\partial H_{1s}}{\partial x_3}} = \ldots = \frac{dy_n}{\frac{\partial H_{1s}}{\partial x_n}} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial H_{1s}}{\partial y_3}} = \ldots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial H_{1s}}{\partial y_n}} = d\tau$$

с исчезнувшим требованием отсутствия малого делителя $\partial H_{1s}/\partial x_2$.

Если $F_{2s} = 0$, то функция F_2 полностью определена, а F_4 имеет вид

$$F_4 = -\frac{1}{(\omega_1^0)^2}\int\left[(H_{1s}, H_{1p}) - \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_2}\frac{\partial H_{1p}}{\partial y_2}\right]dy_1 - \frac{1}{2(\omega_1^0)^3}\frac{\partial\omega_1^0}{\partial x_1}(H_{1p}^2)_p$$

и т. д. При каждом последовательном приближении характеристики остаются теми же самыми и не имеют каких-либо особенностей. Также ясно, что этот метод аналогичным образом можно применить и в случаях, когда больше чем одна производная $\partial H_{1s}/\partial x_k$ мала.

Положим теперь $F_0 = x_2$, так что функция F будет соответствовать интегралу x_2' в задаче Пуанкаре. В этом случае

$$\omega_1^0\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial y_2},$$

так что

$$F_1 = -\frac{1}{\omega_1^0}\int\frac{\partial H_1}{\partial y_2}dy_1 + \psi_1(y_2, \ldots, y_n, x).$$

Однако подынтегральная функция $\partial H_1/\partial y_2$ может содержать члены, не зависящие от y_1 и, следовательно, в F_1 будут секулярные члены, увеличивающиеся вместе с y_1. Такие секулярные члены будут иметь вид

$$F_{1s} = -\frac{1}{\omega_1^0}\int\frac{\partial H_{1s}}{\partial y_2}dy_1 + \psi_1(y_2, \ldots, y_n, x)$$

и они не будут равны нулю до тех пор, пока функция H_{1s} не станет независимой от y_2. Следовательно, приходится отказаться от предположения $F_0 = x_2$ и принять более общую форму

$$F_0 = F_0(y_2, \ldots, y_n, x).$$

Если можно выбрать функцию F_0 так, чтобы в высших приближениях отсутствовали секулярные члены, то можно получить по крайней мере формальный интеграл, а в конечном счете и сходящийся. Уравнение для функции F_1 получается из соотношения

$$(H_0, F_1) + (H_1, F_0) = 0$$

и имеет вид

$$\omega_1^0\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = (H_1, F_0).$$

Секулярная часть членов правой части уравнения должна быть равна нулю, т. е.

$$(H_{1s}, F_0) = 0, \tag{2.7.12}$$

так как F_0 по предположению не зависит от y_1. Это предположение легко оправдать условием $(H_0, F_0) = 0$ при $H_0 = H_0(x_1)$. Решение уравнения (2.7.12) получается сразу же и имеет вид: $F_0 = kH_{1s}$, где k — постоянная. С точки зрения теории Гамильтона — Якоби ясно, что такой выбор вида F_0 эквивалентен ситуации в методе Пуанкаре (см. [37]).

Интересной физической чертой этой процедуры является то, что секулярная часть функции H_1 становится приближением нулевого порядка для интеграла движения. Этот факт объясняется сохранением энергии системы при каноническом преобразовании. Кроме того, обсуждаемый вопрос тесно связан с методами теории возмущений, основанными на преобразованиях и рядах Ли, которые будут описаны ниже в этой главе.

Теперь рассмотрим исходную систему вида

$$\dot{y}_k = \frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad \dot{x}_k = -\frac{\partial H}{\partial y_k} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

где $H = H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$. Пусть $t = y_{n+1}$, так что

$$\dot{y}_\alpha = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_\alpha}, \qquad \dot{x}_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n+1), \tag{2.7.13}$$

где $\mathscr{H} = H + x_{n+1}$, $x_{n+1} = \beta = \text{const}$. Угловые переменные такой системы, в соответствии с методом Пуанкаре, имеют вид

$$y'_\alpha = \omega_\alpha t + y'_{\alpha 0},$$

где $y'_{\alpha 0}$ — независимые постоянные, а

$$\omega_\alpha = -\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x'_\alpha} = \omega_\alpha^0 + \varepsilon\omega_\alpha^1 + \varepsilon^2\omega_\alpha^2 + \ldots$$

и все ω_α^k являются функциями переменных $x'_1, \ldots, x'_n$. В частности,

$$\omega_\alpha^0 = \frac{\partial H_0}{\partial x'_\alpha},$$

так что

$$y'_\alpha = \omega_\alpha^0 t + \varepsilon\nu_\alpha(\boldsymbol{x}', \varepsilon)\, t + \beta_\alpha.$$

С другой стороны,

$$y'_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x'_\alpha} = y'_\alpha(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}, \varepsilon) = y_\alpha + \varepsilon\mu_\alpha(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}, \varepsilon).$$

Сравнение двух последних соотношений дает

$$\beta_\alpha = y_\alpha - \omega_\alpha^0 t + \varepsilon(\mu_\alpha - \nu_\alpha t).$$

Но β_α являются постоянными для системы (2.7.13) и могут быть записаны в виде

$$\beta_k = y_k - \omega_k^0 y_{n+1} + \varepsilon\theta_k(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}, t, \varepsilon), \tag{2.7.14}$$

а члены нулевого порядка в таких интегралах можно записать так:

$$F_{k0} = y_k - \omega_k^0 y_{n+1} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.7.15}$$

Теперь условие Пуассона записывается в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y_\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\right) = 0.$$

Если $H_0 = H_0(\boldsymbol{x})$, то приближение нулевого порядка должно определяться уравнением

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_0}{\partial x_k}\frac{\partial F_0}{\partial y_k} = \frac{\partial F_0}{\partial y_{n+1}},$$

частным решением которого является функция

$$F_0 = y_1 - \frac{\partial H_0}{\partial x_1} y_{n+1} = y_1 - \omega_1^0 y_{n+1},$$

что совпадает с (2.7.15) при $k = 1$.

Возникает вопрос: имеют ли какое-нибудь значение полученные таким образом формальные ряды, так как в рассматриваемом случае члены, линейные относительно времени, уничтожить нельзя? Однако тот же вопрос возникает и при использовании метода Пуанкаре, при котором частоты $\omega_k = \omega_k^0 + \varepsilon\omega_k^1 + \ldots$ в действительности на практике получаются только до некоторого приближения порядка p. Как уже говорилось, этот факт отражается тем выводом, что даже если ряды сходятся, в практических вычислениях они, тем не менее, могут быть пригодны не для любых интервалов времени, а в лучшем случае лишь при $t = O(\varepsilon^{-p})$.

Запишем условие существования интеграла F для (2.7.14) в виде

$$(F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

и формально определим эти интегралы следующим образом. Мы положим

$$F_0 = y_1 - \omega_1^0 t,$$
$$H = H_0(x_1) + H_1(y, x).$$

Рекуррентные соотношения для F_k будут иметь вид

$$(F_k, H_0) + \frac{\partial F_k}{\partial t} = -(F_{k-1}, H_1)$$

или

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_k}{\partial y_1} + \frac{\partial F_k}{\partial t} = (H_1, F_{k-1}).$$

При $k = 1$ имеем

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1^0}{\partial x_1} t \frac{\partial H_1}{\partial y_1},$$

а при $k = 2$

$$\omega_1^0 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = (H_1, F_1)$$

и т. д. Можно найти решение для F_1 в виде

$$F_1 = \frac{1}{\omega_1^0} \int \frac{\partial H_1}{\partial x_1} dy_1 + \frac{1}{(\omega_1^0)^2} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial x_1} \int \frac{\partial H_1}{\partial y_1} y_1 dy_1 -$$
$$- \frac{1}{(\omega_1^0)^2} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial x_1} y_1 \int \frac{\partial H_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{t}{\omega_1^0} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial x_1} \int \frac{\partial H_1}{\partial y_1} dy_1 + \psi(y_2, \ldots, y_n, x),$$

где ψ — произвольная функция. С другой стороны, имеем

$$\frac{\partial H_1}{\partial y_1} y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}(H_1 y_1) - H_1,$$

так что, если H_1 является 2π-периодической функцией переменных $y_1, \ldots, y_n$, то мы получаем

$$\int \frac{\partial}{\partial y_1}(H_1 y_1)\, dy_1 - \int H_1 dy_1 = -\int H_{1p} dy_1.$$

Следовательно,

$$F_1 = \frac{1}{\omega_1^0} \int \frac{\partial H_1}{\partial x_1} dy_1 - \frac{1}{(\omega_1^0)^2} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial x_1} \int H_{1p} dy_1 + \frac{t}{\omega_1^0} \frac{\partial \omega_1^0}{\partial x_1} H_{1p} + \psi_1.$$

Единственным нежелательным членом, из-за которого могут возникнуть секулярные относительно y_1 члены, является первый член в правой части уравнения. Более того, этот член в действительности имеет вид

$$\frac{1}{\omega_1^0}\int\frac{\partial H_{1s}}{\partial x_1}dy_1=\frac{1}{\omega_1^0}\frac{\partial H_{1s}}{\partial x_1}y_1.$$

Функция

$$F_1-\frac{1}{\omega_1^0}\frac{\partial H_{1s}}{\partial x_1}y_1=\frac{1}{\omega_1^0}\left(1+\frac{\partial\omega_1^0}{\partial x_1}t\right)H_{1p}-\frac{1}{(\omega_1^0)^2}\frac{\partial\omega_1^0}{\partial x_1}\int H_{1p}dy_1+\psi_1$$

является периодической по $y_1,\ldots,y_n$ и секулярной по t. Этого последнего свойства функции избежать нельзя, и оно является нежелательным.

Предлагаемый здесь выход из создавшейся ситуации заключается в следующем. Определим функцию F_0 так:

$$F_0=y_1-\omega_1^0t+\psi_0(y_2,\ldots,y_n,x).$$

Очевидно, эта функция является решением уравнения

$$(F_0,H_0)+\frac{\partial F_0}{\partial t}=0.$$

Тогда уравнение для F_1 принимает вид

$$\omega_1^0-\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\frac{\partial F_1}{\partial t}=\frac{\partial H_1}{\partial x_1}+t\frac{\partial\omega_1^0}{\partial x_1}\frac{\partial H_1}{\partial y_1}+(H_1,\psi_0),$$

и его решение совпадает с решеним предыдущего уравнения; добавляется только член

$$\frac{1}{\omega_1^0}\int(H_1,\psi_0)\,dy_1.$$

Часть этого интеграла, содержащая секулярные члены относительно y_1, будет равна нулю тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\partial H_{1s}}{\partial x_1}+(H_{1s},\psi_0)=0.$$

Последнее уравнение подсказывает способ, согласно которому надо выбирать произвольную функцию ψ_0. Решение этого уравне-

ния в частных производных эквивалентно интегрированию характеристик

$$\frac{dy_k}{d\tau} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_k}, \qquad \frac{dx_k}{d\tau} = -\frac{\partial H_{1s}}{\partial y_k}, \tag{2.7.16}$$

где τ — произвольный параметр, $k = 2, \ldots, n$, а x_1 надо считать постоянным параметром. Если y_k, x_k найдены из этого уравнения в виде функций величины τ, то функция H_{1s} затем выражается через τ, а ψ_0 получается в виде

$$\psi_0 = -\int \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_1} d\tau.$$

После того как интегрирование закончено, функция ψ_0 опять записывается через переменные $y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Добавление ψ_0 к функции F_0 приводит к изменению опорной частоты ω_1^0, что. другими словами, и предполагается в методе Линдстедта.

Таким образом, мы установили тесную связь между процедурой определения дополнительных интегралов и интегрированием гамильтоновой системы методом Пуанкаре. Такая же связь, как мы увидим ниже, устанавливает фундаментальное соотношение между методом, использующим ряды и преобразования Ли, и методом, использующим дополнительную систему для характеристик.

8. Методы теории возмущений, основанные на преобразованиях Ли

Этот параграф посвящен описанию (настолько короткому, насколько это возможно) методов теории возмущений, введенных впервые Хори [54]. Как мы уже видели в главе I, вполне естественно генератор S, введенный Хори, считать зависящим от параметра ε и, следовательно, определить каноническое преобразование формулами

$$\begin{aligned} y_j &= \eta_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} D_S^{m-1} \frac{\partial S}{\partial \xi_j}, \\ x_j &= \xi_j - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} D_S^{m-1} \frac{\partial S}{\partial \eta_j} \qquad (j = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

где y_j — координаты, x_j — импульсы, η_j, ξ_j — соответствующие новые переменные, а $S = S(\eta, \xi, \varepsilon)$. Образ любой функции $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \varepsilon)$ в новом фазовом пространстве $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ с помощью

генератора S определяется формулой

$$f(y, x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} D_S^m f(\eta, \xi, \varepsilon), \tag{2.8.2}$$

где по определению

$$D_S^0 f = f,$$

$$D_S^1 f = (f, S) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta_k} \frac{\partial S}{\partial \xi_k} - \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial S}{\partial \eta_k} \right),$$

$$D_S^m f = D_S^1 (D_S^{m-1} f) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, все функции, включая и f, S, должны быть по крайней мере бесконечно дифференцируемыми, а приведенные выше ряды должны быть сходящимися при достаточно малых ε.

Теперь рассмотрим исходную систему дифференциальных уравнений, определяемую гамильтонианом

$$H = H(y, x, \varepsilon),$$

который для простоты положим аналитическим относительно $(2n+1)$ аргумента при $(y, x) \in D$ и $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{y} = H_x, \qquad \dot{x} = -H_y. \tag{2.8.3}$$

Предположим, что степенной ряд

$$H(y, x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_k(y, x) \tag{2.8.4}$$

является таким, что система с гамильтонианом $H_0(y, x)$ интегрируема в смысле Лиувилля, т. е. система дифференциальных уравнений ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$\frac{d\eta_k}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial \xi_k}(\eta, \xi), \qquad \frac{d\xi_k}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial \eta_k}(\eta, \xi) \tag{2.8.5}$$

имеет явное решение

$$\begin{aligned} \eta_k &= \overset{*}{\eta}_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1 + \omega_1\tau, \beta_2, \ldots, \beta_n), \\ \xi_k &= \overset{*}{\xi}_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1 + \omega_1\tau, \beta_2, \ldots, \beta_n), \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

где α, β — постоянные интегрирования, а величина $\omega_1 = \omega_1(\alpha_1)$ с помощью специального, но довольно обычного выбора вида инте-

грала энергии зависит только от одной из координат вектора α, например от α_1. Требование неособенности якобиана

$$\frac{\partial(\eta^*, \xi^*)}{\partial(\beta, \alpha)}$$

при достаточно малых τ позволяет обратить выписанные выше соотношения и записать их в виде

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_k(\eta, \xi) \qquad (k = 1, \ldots, n), \\ \beta_1 + \omega_1\tau &= \beta_1^*(\eta, \xi), \\ \beta_k &= \beta_k(\eta, \xi) \qquad (k = 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.8.7}$$

Следуя определению Хори, мы будем называть уравнения (2.8.5) *дополнительной системой*. Нетрудно понять (и это следует запомнить), что, так как система с гамильтонианом H_0 предполагается интегрируемой в смысле Лиувилля, то существует каноническое преобразование (в частности, преобразование (2.8.6), если α, β — переменные действие — угол), которое приводит H_0 к такому виду, что эта функция зависит только от новых импульсов, а в данном сучае только от α_1.

Теперь рассмотрим задачу построения не зависящих от H первых интегралов движения для системы (2.8.3). Для этого рассмотрим полностью каноническое преобразование (2.8.1) с генератором

$$\varepsilon S(\eta, \xi, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k S_k(\eta, \xi). \tag{2.8.8}$$

Если $K(\eta, \xi, \varepsilon)$ — новый гамильтониан, и преобразование не зависит от времени, то отсюда следует равенство

$$H(y, x, \varepsilon) = K(\eta, \xi, \varepsilon), \tag{2.8.9}$$

где в левой части этого соотношения координаты и импульсы (y, x) предполагаются функциями от η, ξ, ε вида (2.8.1). В соответствии с (2.8.2) такое преобразование получается непосредственным использованием генератора S, если только он является уже известной функцией, т. е.

$$K(\eta, \xi, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} D_S^m H(\eta, \xi, \varepsilon). \tag{2.8.10}$$

Если стоящий справа степенной ряд относительно ε является сходящимся, то мы должны считать, что существует аналогичный

сходящийся ряд и для K, т. е.

$$K(\eta, \xi, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m K_m(\eta, \xi). \tag{2.8.11}$$

Подставляя в правую часть уравнения (2.8.10) ряды (2.8.4), (2.8.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\begin{aligned} K_0(\eta, \xi) &= H_0(\eta, \xi), \\ K_p(\eta, \xi) &= (H_0, S_p) + F_p \quad , \ (p = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{2.8.12}$$

где F_p являются функциями от $H_0, H_1, \ldots, H_{p-1}, S_1, \ldots, S_{p-1}$ и могут быть определены или непосредственным образом, или рекуррентно. Определение функций F_p и тот или иной способ их определения, так же как и их сравнительные достоинства и недостатки, детальное обсуждение которых проводится при изучении того или иного метода, с точки зрения рассматриваемого сейчас вопроса неважны. При $p \geqslant 1$ дифференциальные уравнения в частных производных (2.8.12) представляют собой уравнения относительно S_p с типичными для методов усреднения характеристиками, причем функции K_p также неизвестны. Это уравнение можно переписать при фиксированном p в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H_0}{\partial \eta_k} \frac{\partial S_p}{\partial \xi_k} - \frac{\partial H_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial S_p}{\partial \eta_k} \right) + F_p(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\ = K_p(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{2.8.13}$$

или, используя дополнительную систему, в виде

$$-\frac{dS_p}{d\tau} + F_p'(\alpha, \beta_1 + \tau, \beta_2, \ldots, \beta_n) = K_p'(\alpha, \beta_1 + \tau, \beta_2, \ldots, \beta_n). \tag{2.8.14}$$

Принцип усреднения в данном методе может быть сформулирован как условие независимости функций K_p от τ. Если, как обычно, предположить, что гамильтониан $H(y, x, \varepsilon)$ является 2π-периодической функцией относительно каждой из переменных y, и учесть, что система с гамильтонианом H_0 интегрируема в смысле Лиувилля, то переменные y^* и x^* будут условно-периодическими (или периодическими) функциями τ,— классический результат, следующий из общей теории переменных действие — угол. Мы обобщим введенное ранее понятие среднего условно-

периодической функции, определив[1])

$$K'_p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F'_p(\alpha, \beta_1 + \tau, \beta_2, \ldots, \beta_n)\, d\tau =$$

$$= K'_p(\alpha, -, \beta_2, \ldots, \beta_n) = K_p(\eta, \xi). \quad (2.8.15)$$

где последнее преобразование в (2.8.15) осуществлено с помощью (2.8.7). Отсюда следует, что

$$\frac{dS_p}{d\tau} = F'_p(\alpha, \beta_1 + \tau, \beta_2, \ldots, \beta_n) - K'_p(\alpha, -, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

или

$$S_p = \int (F'_p - K'_p)\, d\tau = S'_p(\alpha, \beta_1 + \tau, \beta_2, \ldots, \beta_n) = S_p(\eta, \xi), \quad (2.8.16)$$

где опять для преобразования использовано соотношение (2.8.7). Из определения K'_p также ясно, что предел

$$\lim_{\tau\to\infty} S'_p(\alpha, \beta_1 + \tau, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

конечен, и в силу упомянутого выше предположения функция S'_p — условно-периодическая (или периодическая) по отношению к τ и не имеет постоянного члена. По индукции (или каким-нибудь иным способом) можно показать, что эта процедура пригодна для любого значения $p = 1, 2, \ldots$ Это и доказывает существование формальных рядов

$$S = S_0(\eta, \xi) + \varepsilon S_1(\eta, \xi) + \ldots, \quad (2.8.17)$$

с помощью которых гамильтониан приводится к виду

$$K = K_0(\eta, \xi) + \varepsilon K_1(\eta, \xi) + \ldots, \quad (2.8.18)$$

где новый гамильтониан обладает тем свойством, что если η, ξ заменить на решение дополнительной системы, то K не будет явно зависеть от τ и, следовательно,

$$\frac{\partial K'}{\partial \tau} = \frac{dK'}{d\tau} = 0, \quad (2.8.19)$$

где K' определяется формальным рядом

$$K' = K'_0(\alpha, -, \beta_2, \ldots, \beta_n) + \varepsilon K'_1(\alpha, -, \beta_2, \ldots, \beta_n) + \ldots$$

[1]) Далее «—» означает, что функция не зависит явно от соответствующего аргумента. (*Прим. перев.*).

Очевидно, можно написать

$$\frac{dK'}{d\tau}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial K}{\partial\eta_k}\frac{d\eta_k}{d\tau}+\frac{\partial K}{\partial\xi_k}\frac{d\xi_k}{d\tau}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-\dot{\xi}_k\frac{d\eta_k}{d\tau}+\dot{\eta}_k\frac{d\dot{\xi}_k}{d\tau}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\partial K_0}{\partial\xi_k}\dot{\xi}_k-\frac{\partial K_0}{\partial\eta_k}\dot{\eta}_k\right)=-\frac{dK_0}{dt}$$

и, учитывая (2.8.19), имеем $dK_0/dt=0$, так что

$$K_0(\eta,\ \xi)=J_0=\text{const}. \tag{2.8.20}$$

Итак, в итоге применения преобразования Ли мы получили следующий результат: *новый гамильтониан не зависит от дополнительного времени* τ *и, следовательно, найден новый (формальный) интеграл движения, имеющий вид* (2.8.20). Справедливость этого формального результата в неформальном смысле может быть проверена только анализом сходимости метода. Так как была показана эквивалентность метода Ли и метода Цейпеля (см. [63.1]) и так как при условии сходимости метода Колмогорова (при переменных частотах) сходится метод Цейпеля (см. [81]), то сходимость метода преобразований Ли при достаточно малых и несколько раз дифференцируемых возмущениях может быть отсюда получена косвенным образом. Как и раньше, такая сходимость не может быть равномерной по отношению к ε и к начальным условиям. Преимущество излагаемого здесь метода заключается в том, что в него входят только квадратуры, а в методе Пуанкаре, в противоположность этому, мы имеем дело, вообще говоря, с уравнениями в частных производных. Не менее важным преимуществом является то, что мы *получили преобразование в явном виде* (см. (2.8.1)), *можем записать любую функцию переменных* $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ *через переменные* $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ *непосредственным использованием генератора* S (см. (2.8.2)), *а сам метод и получающиеся в результате его применения величины инвариантны относительно канонических преобразований*, что непосредственно следует из инвариантности скобок Пуассона относительно таких преобразований.

Напомним, что каноническое преобразование

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\tau),\qquad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\tau), \tag{2.8.21}$$

получаемое с помощью генератора Ли $S(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},\tau)$, может быть определено как решение системы уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\tau}=\left(\frac{\partial S}{\partial\boldsymbol{P}}\right)^{\mathrm{T}},\qquad \frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}=-\left(\frac{\partial S}{\partial\boldsymbol{Q}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.8.22}$$

с начальными условиями (при $\tau = 0$)

$$Q(q, p, 0) = q, \qquad P(q, p, 0) = p, \tag{2.8.23}$$

где τ — некоторый параметр. Предполагается, что правые части соотношений (2.8.21) принадлежат классу C^2 относительно всех $2n+1$ переменных в некоторой области фазового пространства и при τ, ограниченном некоторым интервалом, скажем, $|\tau| \leqslant \tau_0$.

Для генератора $W(q, P, \tau)$ из метода Пуанкаре это же каноническое преобразование определяется формулами

$$Q = q + \left(\frac{\partial W}{\partial P}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad p = P + \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.8.24}$$

при условии

$$W(q, P, 0) \equiv 0,$$

которое эквивалентно начальным условиям (2.8.23). Как уже было установлено,

$$S(Q, P, \tau) = \frac{\partial W(q, P, \tau)}{\partial \tau}, \tag{2.8.25}$$

где Q определяется первой из формул (2.8.24). Вводя разложения

$$\begin{aligned} W(q, P, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(Q, P)\,\tau^n, \\ S(Q, P, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(Q, P)\,\tau^n \end{aligned} \tag{2.8.26}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ в (2.8.25), получаем связь между функциями W_k и S_j, которая и была установлена выше.

В работе Мерсмана [73] алгоритм Депри получен формальным предположением $\tau = \varepsilon$. Если считать, что теперь обозначение S соответствует генератору Ли из уравнения (1.5.7), то для сохранения используемых там обозначений в уравнении (2.8.25) S_n надо заменить на $S_{n+1}/n!$ и тогда можно получить

$$\begin{aligned} S_1 &= W_1, \\ S_2 &= 2W_2 - \sum_i \frac{\partial W_1}{\partial Q_i}\frac{\partial W_1}{\partial P_i}, \\ S_3 &= 6W_3 - 2\sum_i \left[\frac{\partial W_1}{\partial Q_i}\frac{\partial W_2}{\partial P_i} + \frac{\partial W_2}{\partial Q_i}\frac{\partial W_1}{\partial P_i}\right] + \\ &\quad + \sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial Q_i \partial Q_j}\frac{\partial W_1}{\partial P_i}\frac{\partial W_1}{\partial P_j} + 2\frac{\partial^2 W_1}{\partial Q_i \partial P_j}\frac{\partial W_1}{\partial P_i}\frac{\partial W_1}{\partial Q_j}\right] \end{aligned}$$

и т. д. Алгоритм Хори также получается из (2.8.25), если заменить $S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, \tau)$ на $S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ и затем положить $\tau = 1$, т. е. разложения из уравнения (2.8.25), соответствующие разложениям (2.8.26), имеют вид

$$W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}),$$
$$S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) = S_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}).$$

Их подстановка в (2.8.25) (или сразу же в получающиеся из (1.6.10) разложения) дает

$$W = S_1 + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial S_1}{\partial Q_i}\frac{\partial S_1}{\partial P_i} +$$
$$+ \frac{1}{6}\sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_i \partial Q_j}\frac{\partial S_1}{\partial P_i}\frac{\partial S_1}{\partial P_j} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_i \partial P_j}\frac{\partial S_1}{\partial P_i}\frac{\partial S_1}{\partial Q_j} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial P_i \partial Q_j}\frac{\partial S_1}{\partial Q_i}\frac{\partial S_1}{\partial P_j}\right] + \ldots \tag{2.8.27}$$

Затем в функциях W и S вводится параметр ε, так что

$$W = W(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, \varepsilon), \qquad S_1 = U(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, \varepsilon),$$

и рассматриваются формальные ряды

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})\,\varepsilon^n, \qquad U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})\,\varepsilon^n. \tag{2.8.28}$$

Тем или иным образом обращая соотношения (2.8.27), находим

$$S_1 = W - \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial W}{\partial Q_i}\frac{\partial W}{\partial P_i} +$$
$$+ \frac{1}{12}\sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \partial Q_j}\frac{\partial W}{\partial P_i}\frac{\partial W}{\partial P_j} + 4\frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \partial P_j}\frac{\partial W}{\partial P_i}\frac{\partial W}{\partial Q_j} + \frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial P_j}\frac{\partial W}{\partial Q_i}\frac{\partial W}{\partial Q_j}\right] + \ldots \tag{2.8.29}$$

Подставляя разложения (2.8.28) и приравнивая члены одинакового порядка по ε, из (2.8.27) находим

$$W_1 = U_1,$$
$$W_2 = U_2 + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial U_1}{\partial Q_i}\frac{\partial U_1}{\partial P_i}, \tag{2.8.30}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

а из (2.8.29)

$$U_1 = W_1,$$
$$U_2 = W_2 - \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial W_1}{\partial Q_i}\frac{\partial W_1}{\partial P_i} \tag{2.8.31}$$

и т. д. Выписанные соотношения позволяют перевести описанный в начале параграфа метод теории возмущений Хори [54] в метод, введенный Депри.

В качестве примера рассмотрим уравнение Дюффинга без демпфирования, т. е. уравнение

$$\ddot{u} + u + \varepsilon\gamma u^3 = \varepsilon B \cos \omega t, \tag{2.8.32}$$

где $\varepsilon \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, B и $\omega \neq 0$ — постоянные параметры. Рассмотрим случай, когда ω не является рациональным и, более того, когда для любых целых чисел $p \neq 0$, q соотношение

$$|p\omega - q| \geqslant K(p)\varepsilon^{1/2} \tag{2.8.33}$$

удовлетворяется для выбранной некоторым образом функции $K(p)$, скажем, для $K(p) = p^{5/2-\sigma}$, где целое число $\sigma \geqslant 4$. Если соотношение (2.8.33) не выполнено, то мы будем иметь дело с резонансным случаем, который рассматривается в последней главе книги.

Введя каноническое преобразование

$$u = \sqrt{2p_1}\sin q_1, \qquad \dot{u} = \sqrt{2p_1}\cos q_1,$$

уравнение (2.8.32) можно записать в виде

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \tag{2.8.34}$$

где

$$H = p_1 + \varepsilon\gamma p_1^2 \sin 4q_1 - \varepsilon B\sqrt{2p_1}\sin q_1 \cos \omega t.$$

Введя далее координату $q_2 = \omega t$ и сопряженный ей импульс p_2, систему можно привести к виду ($j = 1, 2$)

$$\dot{q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial K}{\partial q_j},$$
$$K = p_1 + \omega p_2 + \varepsilon\left(\gamma p_1^2 \sin 4q_1 - B\sqrt{2p_1}\sin q_1 \cos q_2\right) = \tag{2.8.35}$$
$$= K_0(p_1, p_2) + \varepsilon K_1(q_1, q_2, p_1, -).$$

Дополнительная система определяется гамильтонианом K_0, и ее решение имеет вид

$$q_1^0 = \tau + \beta_1, \qquad q_2^0 = \omega\tau + \beta_2, \qquad p_1^0 = \alpha_1, \qquad p_2^0 = \alpha_2,$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — постоянные. Пусть новый гамильтониан имеет вид

$$K^* = K_0^* + \varepsilon K_1^* + \varepsilon^2 K_2^* + \ldots,$$

а генератор Ли —

$$\varepsilon S = \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots,$$

с условием, что функция K^* не должна зависеть от τ и, следовательно, K_0^* — интеграл движения. Обозначим новые координаты и импульсы через q_1^*, q_2^*, p_1^*, p_2^*.

Из уравнения

$$-\frac{dS_1}{d\tau} + K_1(q_1^0,\ q_2^0,\ p_1^0,\ -) = K_1^*$$

при условии, что ω не является целым, получаем

$$K_1^* = \frac{3}{8}\gamma p_1^{*2},$$

$$S_1 = -\frac{1}{4}\gamma p_1^{*2}\sin 2q_1^* + \frac{1}{32}p_1^{*2}\sin 4q_1^* +$$
$$+\frac{B\sqrt{2p_1^*}}{2(1+\omega)}\cos(q_1^* + q_2^*) + \frac{B\sqrt{2p_1^*}}{2(1-\omega)}\cos(q_1^* - q_2^*).$$

Используя уравнение

$$-\frac{dS_2}{d\tau} + \frac{1}{2}(K_1 + K_1^*,\ S_1) + K_2 = K_2^*$$

и то, что в нашем случае $K_2 = 0$, второе приближение получаем в виде

$$K_2^* = \frac{17}{64}\gamma^2 p_1^{*3} + \frac{B^2}{8(1-\omega^2)},$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{21}{32}\gamma^2 p_1^{*3} + \frac{B^2}{4(1-\omega^2)}\right]\sin 2q_1^* - \frac{3}{128}\gamma^2 p_1^{*3}\sin 4q_1^* -$$
$$-\frac{7}{192}\gamma^2 p_1^{*3}\sin 6q_1^* - \frac{B^2}{8\omega(1-\omega^2)}\sin 2q_2^* +$$
$$+\frac{B\gamma(13-\omega^2)}{32(1-\omega^2)(1+\omega)}(2p_1^*)^{3/2}\sin(q_1^* + q_2^*) +$$

$$+\frac{B\gamma(13-\omega^2)}{32(1-\omega^2)(1-\omega)}(2p_1^*)^{3/2}\sin(q_1^*-q_2^*)-$$
$$-\frac{B\gamma(21-5\omega^2)}{128(1-\omega^2)(3+\omega)}(2p_1^*)^{3/2}\cos(3q_1^*+q_2^*)-$$
$$-\frac{B\gamma(21-5\omega^2)}{128(1-\omega^2)(3-\omega)}(2p_1^*)^{3/2}\cos(3q_1^*-q_2^*)+$$
$$+\frac{B\gamma(2p_1^*)^{3/2}}{128(5+\omega)}\cos(5q_1^*+q_2^*)+\frac{B\gamma(2p_1^*)^{3/2}}{128(5-\omega)}\cos(5q_1^*-q_2^*)-$$
$$-\frac{B^2}{16(1+\omega)^2}\sin(2q_1^*+2q_2^*)-\frac{B^2}{16(1-\omega)^2}\sin(2q_1^*-2q_2^*).$$

Таким образом, в найденном приближении новый гамильтониан имеет вид

$$K^*=p_1^*+\omega p_2^*+\frac{3}{8}\varepsilon\gamma p_1^{*2}+\frac{17}{64}\varepsilon^2\gamma p_1^{*3}+O(\varepsilon^3),$$

где отброшена аддитивная постоянная. С другой стороны, K_0^* является интегралом движения, т. е.

$$p_1^*+\omega p_2^*=\text{const},$$

так что функция

$$K^*-p_1^*-\omega p_2^*=\frac{3}{8}\varepsilon\gamma p_1^{*2}+\frac{17}{64}\varepsilon^2\gamma p_1^{*3}+O(\varepsilon^3)$$

также является интегралом, т. е. в главной своей части задача сведена к квадратурам, и за исключением только рациональных или «близких» к рациональным значений ω может быть найдено общее решение. Связь между двумя наборами переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}^*$, $\boldsymbol{p}^*$ определяется формулами (2.8.1) или в используемых сейчас обозначениях формулами

$$\begin{aligned} q_j&=q_j^*+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}D_S^{n-1}\frac{\partial S}{\partial p_j^*},\\ p_j&=p_j^*-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}D_S^{n-1}\frac{\partial S}{\partial q_j^*},\end{aligned}\tag{2.8.36}$$

где $j=1,2$. Ясно, что так как функция S не зависит от p_2^*, то $q_2=q_2^*$, т. е. преобразование не изменяет времени $(q_2^*=\omega t)$. Так как мы определили

$$\varepsilon S=\varepsilon S_1+\varepsilon^2S_2+\ldots,$$

то, если положить

$$W = \varepsilon S, \tag{2.8.37}$$

преобразование можно записать так:

$$\begin{aligned} q_j &= \overset{*}{q}_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} D_W^{n-1} \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{p}_j}, \\ p_j &= \overset{*}{p}_j - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} D_W^{n-1} \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{q}_j}, \end{aligned} \tag{2.8.38}$$

или с точностью до членов второго порядка по ε

$$q_j = \overset{*}{q}_j + \frac{\partial W_1}{\partial \overset{*}{p}_j} + \frac{\partial W_2}{\partial \overset{*}{p}_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \overset{*}{p}_j}, W_1\right),$$

$$p_j = \overset{*}{p}_j - \frac{\partial W_1}{\partial \overset{*}{q}_j} - \frac{\partial W_2}{\partial \overset{*}{q}_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \overset{*}{q}_j}, W_1\right),$$

где

$$W_1 = \varepsilon S_1, \qquad W_2 = \varepsilon S_2.$$

Очевидно, что если предположить сходимость метода, то все $\overset{*}{p}_j$ сведутся к константам, а $\overset{*}{q}_j$ — к линейным функциям времени (при этом $\overset{*}{q}_2 = \omega t$). Частота угловой переменной $\overset{*}{q}_1$ является степенным рядом относительно ε. С точностью до членов второго порядка имеем

$$\overset{*}{q}_j = \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma \overset{*}{p}_1 + \frac{51}{64}\varepsilon^2\gamma \overset{*}{p}_1^2 + \ldots\right)t + \overset{*}{\beta}_1,$$

где $\overset{*}{p}_1$, $\overset{*}{\beta}_1$ — константы.

9. Методы теории возмущений для негамильтоновых систем, основанные на преобразованиях Ли

Хори [55] и Кэмел [57] независимо друг от друга развили методы теории возмущений для общих негамильтоновых систем, обобщив соответствующий метод, пригодный только для гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. Ясно, что такое обобщение не является таким уж необходимым, ибо, как уже говорилось, любую систему можно свести к гамильтоновой увеличением ее порядка вдвое и введением котангенциального пространства Дирака. Увеличение вдвое числа рассматриваемых уравнений окупается тем, что необходимо найти только две функции: новый гамильтониан и генератор преобразования. При

непосредственном подходе приходится иметь дело со столькими неизвестными функциями, сколько есть переменных; действительно, при использовании результатов § 7 главы I это становится ясно сразу же. Здесь мы опишем такой способ наиболее близким к работе Кэмела [57] образом.

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon) \tag{2.9.1}$$

и предположим, что $f(x\ \varepsilon)$ — вещественная аналитическая по каждой из $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, ε вектор-функция в некоторой области $\Omega\{x \in D \subset R^n, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$. Правая часть уравнения (2.9.1) может быть разложена при достаточно малых ε в сходящийся степенной ряд

$$\dot{x} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\varepsilon^k}{k!} f^{(k)}(x), \tag{2.9.2}$$

где

$$f^{(k)}(x) = \left.\frac{\partial^k f}{\partial \varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Очевидно, функции $f^{(k)}(x)$ в области D будут вещественными аналитическими функциями. В конечном счете это требование аналитичности может быть ослаблено, если на каждом шаге вычисления приближений воспользоваться операцией сглаживания, однако для общего понимания метода это не имеет значения. Мы не будем рассматривать неавтономных систем, хотя и есть такие случаи, когда t не может рассматриваться в качестве дополнительной x-переменной. Таковы, например, случаи, когда исследуется асимптотическое поведение, устойчивость или периодические решения.

Если уравнения (2.9.1) или (2.9.2) нельзя проинтегрировать в общем виде, то можно искать такое преобразование к новым n переменным ξ, скажем,

$$x = x(\xi, \varepsilon), \tag{2.9.3}$$

что дифференциальные уравнения относительно ξ

$$\dot{\xi} = g(\xi, \varepsilon), \tag{2.9.4}$$

получающиеся из (2.9.3) и (2.9.1), поддаются более простому изучению. Ясно, что сформулированная так проблема слишком обща, чтобы определить, какими свойствами должны обладать эти преобразования переменных. Один из способов убедиться в

этом, разумеется, состоит в предположении о том, что при $\varepsilon = 0$ общее решение уравнения (2.9.1) известно, т. е. уравнение

$$\dot{y} = f(y, 0) = f^{(0)}(y) \tag{2.9.5}$$

интегрируемо. Затем можно заинтересоваться вопросом о существовании преобразования (2.9.3), которое переводит уравнение (2.9.1) в уравнение (2.9.5), точнее, в уравнение

$$\dot{\xi} = f^{(0)}(\xi). \tag{2.9.6}$$

Так как при $\varepsilon = 0$ преобразование (2.9.3), очевидно, будет тождественным, то мы приходим к задаче нахождения преобразования, близкого к тождественному, т. е.

$$x = \xi + \varepsilon h(\xi, \varepsilon), \tag{2.9.7}$$

а функция $h(\xi, \varepsilon)$ предполагается аналитической в некоторой области по каждой из $n+1$ переменных ξ, ε, причем эта область содержит точку $\varepsilon = 0$. Очевидно, что при достаточно малых ε вблизи $\varepsilon = 0$ преобразование будет обратимым. Можно записать

$$x = \xi + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon^k}{k!} E_k(\xi), \tag{2.9.8}$$

и преобразованная система дифференциальных уравнений в общем случае будет иметь вид

$$\dot{\xi} = \varphi(\xi, \varepsilon) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\varepsilon^k}{k!} \varphi^{(k)}(\xi), \tag{2.9.9}$$

где

$$\varphi^{(k)}(\xi) = \left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial \varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Теперь нашей задачей является получение по данному преобразованию (2.9.8) функций $\varphi^{(k)}(\xi)$ в (2.9.9) из функций $f^{(k)}(x)$ в (2.9.2). Очевидно, это можно сделать разными способами, однако, если необходимы члены большого порядка и их систематическое исследование, то можно рекомендовать рекуррентный алгоритм, аналогичный алгоритму § 7 главы I. Дифференцирование соотношения (2.9.8) по времени t дает

$$\dot{x} = \dot{\xi} + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{\partial E_k}{\partial \xi} \dot{\xi},$$

и, подставляя сюда (2.9.2) и (2.9.9), находим

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{\varepsilon^k}{k!} f^{(k)}(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\varepsilon^k}{k!} \varphi^{(k)}(\xi) + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{\partial E_k}{\partial \xi} \sum_{j \geqslant 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} \varphi^{(j)}(\xi). \tag{2.9.10}$$

Из соотношения (1.7.2) теперь мы видим, что

$$f(x(\xi, \varepsilon), \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\xi),$$

и в нашем распоряжении есть рекуррентные соотношения для определения функций $f_n(\xi)$, например, уравнения (1.7.4) или (1.7.15), или заключительные соотношения из § 7 главы I. Из (2.9.10) теперь следует, что

$$f_n(\xi) = \varphi^{(n)}(\xi) + \sum_{m=1}^{n} C_n^m \frac{\partial E_m(\xi)}{\partial \xi} \varphi^{(n-m)}(\xi). \qquad (2.9.11)$$

Если теперь рассмотреть (1.7.22), то получим

$$E_n(\xi) = -T_n(\xi) - \sum_{m=1}^{n-1} C_{n-1}^{m-1} T_m(\xi) \frac{\partial E_{n-m}(\xi)}{\partial \xi},$$

или в обозначениях (1.7.9)

$$E_n(\xi) = -T_n(\xi) - \sum_{m=1}^{n-1} C_{n-1}^{m-1} L_m E_{n-m}(\xi). \qquad (2.9.12)$$

Преобразование, обратное к (2.9.8), запишем в виде

$$\xi = x + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^{(k)}(x), \qquad (2.9.13)$$

так что

$$X^{(n)}(x) = T_n(x) - \sum_{m=1}^{n-1} C_{n-1}^{m} L_m X_{m,n-m}(x), \qquad (2.9.14)$$

где использованы введенные в (1.7.20) и (1.7.21) обозначения, т. е.

$$\begin{aligned} X_{p,q}(x) &= -\sum_{m=1}^{p} C_{p-1}^{m-1} L_m X_{p-m,q}(x), \\ X_{0,q}(x) &= X^{(q)}(x). \end{aligned} \qquad (2.9.15)$$

Наконец, находим

$$\varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) + \sum_{j=1}^{n} C_n^j \left[f_{j,n-j}(\xi) - \frac{\partial E_j}{\partial \xi} \varphi^{(n-j)}(\xi) \right], \qquad (2.9.16)$$

что и является искомым рекуррентным соотношением. Очевидно, уравнение (2.9.16) содержит коэффициенты T_n, определяю-

щие отображение (2.9.8), т. е. коэффициенты $X^{(n+1)}(x)$ разложения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} X^{(n+1)}(x),$$

получаемого из (2.9.13), и коэффициенты разложения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} = T(\xi, \varepsilon) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} T_{n+1}(\xi),$$

так же, как и в (1.7.6), (1.7.7) и (1.7.8). На каждом шаге приближения функции $T_n(\xi)$ в зависимости от выдвинутых требований должны быть выбраны соответствующим образом. Эти неизвестные функции $T_n(\xi)$ можно выделить в уравнении (2.9.16) следующим образом:

$$\frac{\partial T_n}{\partial \xi} \varphi^{(0)}(\xi) - \frac{\partial \varphi^{(0)}(\xi)}{\partial \xi} T_n(\xi) = \varphi^{(n)} - f^{(n)} - G_n(\xi), \quad (2.9.17)$$

где функции $G_n(\xi)$ зависят от всех предыдущих приближений. Кэмел получил для них такие формулы:

$$G_n(\xi) =$$

$$= \frac{\partial E_n^*(\xi)}{\partial \xi} \varphi^{(0)}(\xi) - f_{n,0}^*(\xi) + \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m \left[\frac{\partial E_m}{\partial \xi} \varphi^{(n-m)}(\xi) - f_{m,n-m}(\xi) \right], \quad (2.9.18)$$

где

$$E_n^*(\xi) = E_n(\xi) \quad \text{при} \quad T_n = 0,$$

$$f_{n,0}^*(\xi) = f_{n,0}(\xi) \quad \text{при} \quad T_n = 0,$$

$$f_{p,q}(\xi) = -\sum_{m=1}^{p} C_{p-1}^{m-1} L_m f_{p-m,q}(\xi),$$

$$f_{0,q}(\xi) = \varphi^{(q)}(\xi).$$

Полное описание этого метода было дано в работах Кэмела [57] и Хенрарда [51] и в работе Хори [55]. Кэмел показал, что подход, основанный на преобразованиях Ли, содержит в себе как частные случаи важные методы разложения по двум переменным и подбора асимптотических решений, развитые в работе Кеворкяна [58]. Этот вопрос здесь не рассматривается, так как он весьма подробно изложен в работе Коула (см. [18.5]). Может быть, стоило бы отметить, что алгоритм Депри для преобразований Ли, которые генерируются функцией малого параметра, примененный к функциям Гамильтона, зависящим от этого же

параметра, также может быть здесь получен, если с самого начала забыть про наличие этого параметра, что и было показано выше и следует из работы Мерсмана [73]. Аналогичным образом описанный выше метод может быть упрощен введением операторов и функций, не являющихся функциями параметра, с последующим разложением в степенные ряды по ε всех полученных результатов. Такой подход был осуществлен Хори [55], и здесь мы ограничимся кратким изложением его результатов.

Рассмотрим набор из n переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и операторы $T_k(\xi)$, и пусть

$$D_\xi = \sum_{k=1}^{n} T_k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k}. \tag{2.9.19}$$

Рассмотрим отображение

$$x_j = \xi_j + \sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p!} D_\xi^{p-1} T_j(\xi), \tag{2.9.20}$$

где

$$D_\xi^0 = 1, \quad D_\xi^1 = D_\xi, \quad D_\xi^p = D_\xi D_\xi^{p-1}.$$

Это отображение аналогично отображению (2.8.1) и соответствующим определениям. В частности, функция $T_k(\xi)$ играет роль функции $\partial S/\partial \xi_k$. Рассмотрим также отображение вещественной аналитической функции $f(x)$, зависящей от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, в ξ-пространство по формулам

$$f(x) = f(\xi) + \sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p!} D_\xi^p f(\xi). \tag{2.9.21}$$

В действительности формулы (2.9.20) являются следствием формул (2.9.21). Определим обратное отображение

$$T_k^{-1}(x) = T_k(\xi)\big|_{\xi=x}, \tag{2.9.22}$$

$$D_x = \sum_{k=1}^{n} T_k^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{2.9.23}$$

так что, обращая отображение (2.9.21), имеем

$$f(\xi) = f(x) + \sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^p}{p!} D_x^p f(x), \tag{2.9.24}$$

что является непосредственным обобщением преобразования Ли. Все выписанные соотношения в действительности в том или

ином виде содержатся в предыдущем изложении (где есть зависимость от ε), а их доказательство получается сразу же.

Уравнение

$$\dot{x}_k = f_k(x) \tag{2.9.25}$$

после применения преобразования (2.9.20), генерируемого функцией T_k, переходит в уравнение

$$\dot{\xi}_k = \varphi_k(\xi). \tag{2.9.26}$$

Используя (2.9.24), получаем преобразование, обратное к (2.9.20), в виде

$$\xi_j = x_j + \sum_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^p}{p!} D_x^{p-1} T_j^{-1}(x). \tag{2.9.27}$$

Так как из (2.9.25) следует, что

$$\frac{d}{dt} = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{2.9.28}$$

то для произвольной функции имеем

$$\frac{d}{dt} F(x) = \dot{F}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k} \dot{x}_k = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) F.$$

Вычисление функции $\varphi_k(\xi)$ в (2.9.26) проведем следующим образом. Дифференцирование соотношения (2.9.27) дает

$$\dot{\xi}_j = \dot{x}_j + \sum_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{d}{dt} \{D_x^{p-1} T_j^{-1}(x)\},$$

и, подставляя сюда (2.9.25) и (2.9.23), находим

$$\dot{\xi}_j = f_j(x) + \sum_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_x^{p-1} T_j^{-1}(x)\right)$$

или, используя (2.9.21) и (2.9.20),

$$\dot{\xi}_j = f_j(\xi) + \sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p!} D_\xi^p f_j(\xi) + \sum_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(D_\xi^{p-1} T_j(\xi)\right) +$$

$$+ \sum_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{q\geqslant 1} \frac{1}{q!} D_\xi^q \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(D_\xi^{p-1} T_j(\xi)\right)\right\} = \varphi_j(\xi). \tag{2.9.29}$$

Теперь рассмотрим ряды

$$\begin{aligned} f_j &= f_j^{(0)} + f_j^{(1)} + \ldots, \\ \varphi_j &= \varphi_j^{(0)} + \varphi_j^{(1)} + \ldots, \\ T_j &= T_j^{(0)} + T_j^{(1)} + \ldots \end{aligned} \tag{2.9.30}$$

и будем искать такие операторы T_j, чтобы функции φ_j имели желаемый вид. Очевидно, предполагаем, что уравнения

$$\dot{y}_k = f_k^{(0)}(y) \tag{2.9.31}$$

имеют известное общее решение. Разложение (2.9.30) функций f_j не обязательно подразумевает разложение в степенные ряды по некоторому малому параметру и не обязательно имеет бесконечное число членов. Действительно, в обычном случае для возмущений интегрируемой системы (2.9.31) имеем $f_j^{(k)} = 0$ при $k \geqslant 2$, т. е.

$$f_j = f_j^{(0)} + f_j^{(1)}.$$

Подставляя ряды (2.9.30) в (2.9.29) и приравнивая члены одинакового порядка, можно получить рекуррентный алгоритм вычисления неизвестных функций $\varphi_j^{(k)}$ и $T_j^{(k)}$. В этом отношении явное использование параметра ε для представления членов разного порядка является весьма удобным, хотя и не обязательным. Это означает, что приравнивание членов одинакового порядка лучше заменить приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε, если положить $f_j^{(k)} = O(\varepsilon^k)$, $\varphi_j^{(k)} = O(\varepsilon^k)$, $T_j^{(k)} = O(\varepsilon^k)$,

Первые несколько приближений имеют вид

$$f_j^{(0)} = \varphi_j^{(0)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ -f_k^{(0)} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial \xi_k} + T_k^{(1)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \xi_k} \right\} + f_j^{(1)} = \varphi_j^{(1)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ -f_k^{(0)} \frac{\partial T_j^{(2)}}{\partial \xi_k} + T_k^{(2)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \xi_k} \right\} + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^{n} T_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\varphi_j^{(1)} + f_j^{(1)} \right) -$$

$$- \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial \xi_k} \left(\varphi_k^{(1)} + f_k^{(1)} \right) + f_j^{(2)} = \varphi_j^{(2)},$$

а в общем случае

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ -f_k^{(0)} \frac{\partial T_j^{(p)}}{\partial \xi_k} + T_k^{(p)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \xi_k} \right\} + \ldots + f_j^{(p)} = \varphi_j^{(p)}, \tag{2.9.32}$$

что, по существу, эквивалентно выписанным выше соотношениям (2.9.17). Здесь все функции зависят от переменных ξ. Теперь мы введем важное понятие дополнительной системы, определив

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = f_j^{(0)}(\xi) \tag{2.9.33}$$

с общим решением

$$\xi_j = \xi_j(\tau), \tag{2.9.34}$$

так что

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ -f_k^{(0)} \frac{\partial T_j^{(p)}}{\partial \xi_k} + T_k^{(p)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \xi_k} \right\} = -\frac{dT_j^{(p)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^{n} T_k^{(p)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \xi_k}.$$

Общее уравнение (2.9.32) на каждом шаге вычисления приближения приводится к линейной системе дифференциальных уравнений относительно $T_j^{(p)}(\xi)$

$$-\frac{dT_j^{(p)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j^{(0)}(\xi(\tau))}{\partial \xi_k} T_k^{(p)}(\tau) + F_j^{(p)}(\tau) = \varphi_j^{(p)}, \tag{2.9.35}$$

где все ξ заменены решениями (2.9.34) дополнительной системы. Ясно, что уравнение (2.9.35) является непосредственным обобщением уравнения (2.8.9). Заметим, что как и в обычных методах усреднения, функции $\varphi_j^{(p)}$ надо выбирать так, чтобы в $T_j^{(p)}(\tau)$ отсутствовали секулярные члены, т. е. надо, чтобы предел

$$\lim_{\tau\to\infty} T_j^{(p)}(\tau)$$

был конечным. В простейшем случае функция $f_j^{(0)}$ линейно зависит от переменных ξ, так что система уравнений (2.9.35) является линейной неоднородной системой с постоянными коэффициентами для приближения любого порядка. Если имеет место не такой случай, а, например, функции $\partial f_j^{(0)}/\partial \xi_k|_{\xi=\xi(\tau)}$ являются периодическими или условно-периодическими функциями τ, то интегрирование уравнений (2.9.36) представляет собой нетривиальную задачу. Следовательно, желательно произвести такое разложение функций $f_j(\xi)$, чтобы все $f_j^{(0)}(\xi)$ были линейными.

Уравнение Ван дер Поля. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

которое можно записать так

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon\left(1 - x_1^2\right) x_2. \tag{2.9.36}$$

Здесь мы имеем

$$f_1^{(0)} = x_2, \quad f_2^{(0)} = -x_1, \qquad f_1^{(1)} = f_1^{(2)} = \ldots = f_1^{(p)} = \ldots = 0,$$
$$f_2^{(1)} = -\varepsilon\left(1 - x_1^2\right) x_2, \qquad f_2^{(2)} = f_2^{(3)} = \ldots = f_2^{(p)} = \ldots = 0.$$

Дополнительная система

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = f_j^{(0)} = \varphi_j^{(0)}$$

имеет решение вида

$$\xi_1 = \alpha\cos(\tau + \beta), \qquad \xi_2 = -\alpha\sin(\tau + \beta), \tag{2.9.37}$$

где α, β — скалярные постоянные. Уравнения первого приближения принимают вид

$$-\frac{dT_1^{(1)}}{d\tau} + T_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)},$$

$$-\frac{dT_2^{(1)}}{d\tau} - T_1^{(1)} + \varepsilon\left[1 - \alpha^2\cos^2(\tau + \beta)\right]\alpha\sin(\tau + \beta) = \varphi_2^{(1)},$$

или

$$\frac{d_2T_1^{(1)}}{d\tau^2} + T_1^{(1)} = \varepsilon\left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)\alpha\sin(\tau + \beta) - \frac{\alpha^3}{4}\sin(3\tau + 3\beta)\right] - \frac{d\varphi_1^{(1)}}{d\tau} - \varphi_2^{(1)}.$$

Для того чтобы не появилось секулярных членов, в уравнении для $T_1^{(1)}$ должен отсутствовать член $\sin(\tau + \beta)$. Один из возможных способов выбора произвольных функций описывается формулами

$$\frac{d^2T_1^{(1)}}{d\tau^2} + T_1^{(1)} = -\varepsilon\frac{\alpha^3}{4}\sin(3\tau + 3\beta),$$
$$\frac{d\varphi_1^{(1)}}{d\tau} + \varphi_2^{(1)} = \varepsilon\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)\alpha\sin(\tau + \beta),$$
$$\varphi_2^{(1)} = \frac{d\varphi_1^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)\alpha\sin(\tau + \beta),$$

так что

$$\varphi_2^{(1)} = -\varepsilon\left[1 - \frac{1}{4}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\right]\xi_2,$$

$$\varphi_1^{(1)} = -\varepsilon\left[1 - \frac{1}{4}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\right]\xi_1$$

и, следовательно,

$$T_1^{(1)} = \frac{\varepsilon\alpha^3}{32}\sin(3\tau + 3\beta) = \frac{\varepsilon}{32}\xi_2\left(\xi_2^2 - 3\xi_1^2\right),$$

$$T_2^{(1)} = \frac{\varepsilon}{2}\xi_1\left(-1 + \frac{7}{16}\xi_1^2 - \frac{5}{16}\xi_2^2\right).$$

Таким образом, уравнения в новых переменных в первом приближении имеют вид

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 - \varepsilon\left[1 - \frac{1}{4}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\right]\xi_1,$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\xi_1 - \varepsilon\left[1 - \frac{1}{4}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\right]\xi_2.$$

Легко проверить, что уравнение для ξ_2 получается из уравнения для ξ_1 при замене $\xi_2 \to -\xi_1$, $\xi_1 \to \xi_2$, что объясняется сделанным выбором $\varphi_2^{(1)} = d\varphi_1^{(1)}/d\tau$. Если положить

$$u^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

то найдем, что

$$\frac{du^2}{dt} = -2\varepsilon\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)u^2$$

и, следовательно,

$$u^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{4ke^{-\varepsilon t}}{ke^{-\varepsilon t} \pm 1},$$

а знак $+$ или $-$ надо выбирать в зависимости от знака постоянной k, т. е. в зависимости от начальных условий так, чтобы величина u^2 была положительной.

При $\varepsilon > 0$ мы получаем асимптотическое поведение:

$$u^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

что описывает хорошо известное демпфированное движение по направлению к *фокусу*. Если $\varepsilon < 0$, то $u^2 \to 4$ при $t \to \infty$ и мы имеем *предельный цикл* в уравнении Ван дер Поля. То, что первое приближение (по ε) дает возможность получить полную ин-

формацию об асимптотическом поведении системы, объясняется тем, что в любом приближении уравнения для ξ_1, ξ_2 имеют тот же вид, что и уравнения первого приближения, т. е.

$$\dot{\xi}_1 = [1 + \varepsilon^2 f_2(u^2) + \varepsilon^4 f_4(u^2) + \ldots]\,\xi_2 - \\ - \varepsilon\left[1 - \frac{u^2}{4} + \varepsilon^2 g_3(u^2) + \varepsilon^4 g_5(u^2) + \ldots\right]\xi_1,$$

$$\dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_1 \qquad (\xi_2 \to -\xi_1, \quad \xi_1 \to \xi_2),$$

так что описанные выше асимптотические свойства сохраняются.

10. Замечания

Интегрируемость динамической системы является весьма спорным понятием. Некоторые считают, что по отношению к гамильтоновым системам разделимость уравнения Гамильтона — Якоби может служить достаточно хорошим определением интегрируемости, хотя это и не является общим мнением. К сожалению, теорема Штеккеля не дает никаких указаний на то, как в действительности надо строить систему координат, чтобы разделить уравнение. Хорошо известно только, что если есть n независимых интегралов у системы с n степенями свободы, то, в соответствии с результатами Арнольда, инвариантное многообразие состоит из торов, на которых в общем случае движение будет условно-периодическим. Существование таких многообразий для некоторого класса систем изучал также Дилиберто, который называл их периодическими поверхностями. Для негамильтоновых систем этот вопрос еще более сложен, хотя, как показывает пример в конце главы V, здесь можно думать об обобщении процедуры нормализации Биркгофа в случае возмущенного движения гармонических осцилляторов. В действительности многие задачи соответствующим выбором переменных и времени могут быть сведены к задаче о гармонических осцилляторах. Например, ньютоновская задача двух тел использованием преобразования Леви-Чивита [69]

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv$$

совместно с преобразованием времени

$$d\tau = dt/r$$

сводится к простому гармоническому осциллятору. Другие силовые поля недавно были рассмотрены в работе Джакальи и др.

[42, 43], где использованы методы, введенные Кустаанхеймо [62] [1]).

Ниже мы также придем к изучению интегрируемости системы в окрестности устойчивого положения равновесия — область, в развитие которой много усилий вложили Зигель и Мозер, так же как и многие другие авторы. Хотя сходимость методов нормализации установлена быть не может, из результатов Контопулоса [17—23], Барбаниса [5] и Бозиса [9, 10] ясно, что при достаточно общих обстоятельствах могут существовать другие интегралы (или квазиинтегралы) как в общих, так и в резонансных системах. Очевидность существования интегралов была также установлена методом поверхностей сечения в работе Хенона и Хейлеса [52, 53].

Что касается методов последовательных приближений, то найти решение системы в виде ряда можно любым методом; при этом может быть достигнута сходимость этих методов на достаточно малом интервале времени. На интересующий вопрос можно ответить, используя простой метод итераций Пикара, что, по существу, и было сделано во многих работах, особенно в работах, использующих численные расчеты на ЭВМ.

Для заданной системы, зависящей от малого параметра, способ поиска решения в виде рядов по степеням этого параметра определяется тем, насколько решение близко к особой точке (равновесию) системы, и тем, является ли эта особая точка устойчивой. Свойства систем такого рода сначала изучались Биркгофом в связи с поведением отображений, сохраняющих площадь, в окрестности неподвижной точки. Сравнительно недавно важные результаты в этой области получили Мозер, а также Гельфанд и Лидский [35]. Типичный пример изменения характера разложения по параметру в окрестности равновесной точки дает ограниченная задача трех тел, в которой есть пять частных решений Лагранжа и Эйлера. Как было недавно показано в работе Себехея и др. [100], такие разложения могут проводиться по степеням $\varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon^{1/2}$ или ε.

Метод последовательных приближений Макмиллана [71, 72], описанный во втором параграфе, легко можно свести к методу усреднения для уравнения (2.2.6) или для этого же уравнения, но записанного в виде ряда (2.2.7). Такой метод был предложен Чезари и несколько позже Хейлом. Появление секулярных членов в решении, как было показано в примере, приведенном в начале § 3, привел Линдстедта к изучению методов усреднения. В некоторых задачах неудачный выбор опорного решения влияет на успех использования метода последовательных приближе-

---

[1]) О регуляризующих преобразованиях Леви-Чивита и Кустаанхеймо — Штифеля см. [13*] (*прим. перев.*).

ний, аналогично тому, как плохой выбор системы координат влияет на интегрируемость (разделимость движения) системы. Гамильтонизация системы, предложенная впервые Дираком, применима практически только в тех случаях, когда система (2.4.5) имеет постоянные коэффициенты (если не рассматривать исключительных случаев), т. е. когда функции g_i линейны относительно компонент x_j вектора $\boldsymbol{x}$ и имеют постоянные коэффициенты. Во всех остальных случаях определение опорного решения из (2.4.5) может представлять собой очень трудную задачу. Что касается метода Пуанкаре (который, кстати, называл его методом Линдстедта), то он был назван методом Цейпеля главным образом из-за работы Цейпеля об астероидах [105], для которых Брауэр [11] получил эффективное решение при решении задачи об искусственных спутниках Земли. Начиная примерно с этого времени и появились в полной мере в небесной механике методы усреднения. Интересно отметить, что до этого времени метод Пуанкаре использовался исключительно в теории нелинейных колебаний, в том числе и в работах советских авторов. Уравнение (2.4.8) также указывает на то, что за исключением операции усреднения все эти методы в консервативных системах сводятся к решению уравнения Гамильтона — Якоби с помощью последовательных приближений. Главный недостаток этих методов, заключающийся в неявной связи между старыми и новыми переменными, которая осуществляется производящей функцией W (см. уравнение (2.4.10)), и в задаче обращения этой связи, только недавно был преодолен введением рядов Ли. Утверждение о том, что если среднее условно-периодической функции равно нулю, то эта функция ограничена, может быть проверено, если потребовать выполнения некоторого условия иррациональности между базисными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ соответствующих рядов Фурье; точнее, нужна выполнимость условия

$$\left|\sum_{j=1}^{n} p_j\omega_j\right| \geqslant K\left|\sum_{j=1}^{n} p_j\right|^{-\sigma},$$

где K — некоторая положительная постоянная, а $\sigma > n-1$. Если эти условия не выполнены (они могут нарушаться только на множестве частот ω нулевой меры), то интеграл от условно-периодической функции с нулевым средним может не быть ограниченным из-за наличия малых делителей; этот вопрос обсуждался Мозером в теории условно-периодических движений.

Если исходить из чисто геометрической точки зрения, то Мозер [78] сделал очень важный шаг при изучении сохраняющих площадь отображений, близких к тождественным (см. (2.4.12)). На его работу очевидное влияние оказали труды Биркгофа и Зигеля.

Выкладки, включающие в себя действительные вычисления, следующие из (2.4.16), на практике оказываются очень утомительными и невероятно длинными. Тем не менее, недавнее введение в практику научных исследований автоматических буквенных алгоритмов для быстродействующих электронных вычислительных машин уничтожает большинство практических трудностей. Важные результаты здесь получили Ковалевский [60], Депри и Ром [28—31] в приложении к типичным задачам небесной механики[1]). Аналогичные работы из области нелинейной механики и теории цепей нам неизвестны.

Понятие вырожденных систем, введенное Арнольдом, к сожалению, является очень общим; тем более важно исследовать их поведение при введении возмущений. Существенной геометрической трудностью при этом является то, что размерность инвариантного многообразия невозмущенной задачи ниже размерности многообразия для возмущенной задачи[2]). Кроме того, линейные возмущенные системы крайне чувствительны к появлению различных резонансных ситуаций и весьма трудны для описания. Внимание, которое уделяется разделению переменных на быстрые и медленные, объясняется тем, что обычно быстрые переменные соответствуют малым амплитудам колебаний и не влияют на медленные переменные; эволюция последних связана с большими масштабами изменений по отношению к переменным невозмущенной системы и за большие промежутки времени.

Во многих случаях усреднение понимается просто как процедура исключения времени, входящего явно в уравнения движения. Тогда этот процесс осуществляется простым взятием среднего от правых частей дифференциальных уравнений. В действительности в методе Крылова — Боголюбова — Митропольского это является только первым шагом. Такая процедура в различных ее вариантах использовалась Хейлом [50], изучавшим при времени, стремящемся к бесконечности, разницу между решением неавтономной системы

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \tag{2.10.1}$$

и решением усредненной системы

$$\dot{x} = \varepsilon f_0(x), \tag{2.10.2}$$

где

$$f_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \varepsilon)\, dt.$$

---

[1]) См. также [14*—18*] (*прим. перев.*).
[2]) См. также [83], [19*], [20*] (*прим. ред.*).

Хейл получил условия, определяющие существование периодических решений, и условия их устойчивости. Исходное предположение при этом заключается в гипотезе существования преобразования

$$x = y + \varepsilon u(t, y, \varepsilon) \tag{2.10.3}$$

при достаточно общих условиях, которое приводит уравнение (2.10.1) к виду

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon F(t, y, \varepsilon), \tag{2.10.4}$$

где $F(t, y, 0) = 0$. Ясно, что близкое к тождественному преобразование (2.10.3) приводит к системе (2.10.4), отличающейся от (2.10.2) членами порядка не ниже $O(\varepsilon^2)$. Ошибка, оцененная Кинером, в действительности является только уточнением этой основной ошибки.

Мозер [84] [1]) изучил с современной точки зрения топологию кеплеровского движения, особые точки фазового пространства и ввел понятие усреднения на многообразии, избежав явного использования операций с координатами. Его существенные результаты основаны на применении специальных методов к векторному полю, задаваемому кеплеровским движением. Процедура регуляризации, использованная Мозером при изучении орбит, близких к началу координат ($r = 0$), была введена Леви-Чивита и хорошо известна под названием *преобразование обращения*. Обычно при изучении глобального поведения траекторий оно не используется, так как добавляет новые особенности в тех точках, где скорость частицы равна нулю.

Предположив, что правые части дифференциальных уравнений являются периодическими функциями времени, Ларичева [66] получила значительно более лучшую оценку ошибки усредненных уравнений небесномеханического движения, чем ошибка, оцененная Боголюбовым и Митропольским [8]. В своей работе «Теория орбит вблизи сжатой планеты» Кинер [64] дал отличное описание методов усреднения, а также, для частного примера, описание теории периодических поверхностей Дилиберто и ее связи с методами усреднения. В этом частном случае, как и ожидалось, существуют двумерные торы, так как предполагается, что поле планеты имеет цилиндрическую симметрию. Кинер также применил метод, развитый Хейлом в книге «Нелинейные колебания» [49], для получения условий периодичности орбит и, кроме того, построил их приближения.

Что касается применения метода Пуанкаре к гамильтоновым системам, когда гамильтониан представляется степенным рядом

---

[1]) См. также [13*] (*прим. перев.*).

по координатам и импульсам (как в примере из начала шестого параграфа), то он был описан в работе Джакальи [37]. Эта проблема сначала естественным образом возникла в теории малых колебаний, а затем в небесной механике при использовании переменных Пуанкаре и в задаче о резонансе. На этом пути получено некоторое обобщение понятия нормализации Биркгофа, связанное, во-первых, с предположением о том, что имеются произвольные комбинации координат и импульсов, и, во-вторых, с тем, что дается более систематическое изложение самой процедуры нормализации. Однако применение Депри [31] рядов Ли в аналогичной проблеме показывает, что возможно более сложное и эффективное использование этого метода. Как было показано в работе Джакальи [41] при исследовании колебательных случаев в эллиптической ограниченной задаче трех тел, в этом случае характеристические показатели лучше всего получать, используя метод Чезари, развитый в его работе [14]. Очевидно, после того, как получены выражения для характеристических показателей в виде рядов по малому параметру до некоторого порядка, нетрудно будет использовать преобразование Ляпунова, сводящее задачу к интегрированию линейной системы, коэффициенты которой являются постоянными при учете членов того же порядка по малому параметру. В этом случае проблема малых делителей из метода Пуанкаре переходит в задачу о параметрическом резонансе.

Построение интегралов движения с помощью метода последовательных приближений к условию Пуассона, предпринятое во многих работах Контопулоса, очень хорошо показывает изменение вида этих интегралов (или квазиинтегралов) при пересечении резонансных зон. Так как в предельном случае резонансные точки также плотны в фазовом пространстве, как множество рациональных чисел на отрезке, то можно ожидать очень запутанного и сложного поведения этих интегралов, изменяющих свой вид бесконечно много раз на каждом конечном интервале частот, определяемом малым параметром и (или) начальными условиями. В действительности этот факт не будет мешать сходимости для фиксированных наборов частот, образующих множество ненулевой меры. Однако такие интегралы не могут быть аналитическими, а никакие их представления в виде рядов не могут быть равномерно сходящимися или непрерывными. Все проведенные здесь рассмотрения и высказанные предположения весьма тесно соприкасаются с теориями Мозера и Колмогорова.

Построение интеграла Ковалевской, проведенное нами в § 6, представляет собой редчайший случай рядов, имеющих конечное число членов, и, разумеется, может быть осуществлено только в исключительных ситуациях. Тем не менее, этот пример указывает на опасности, появляющиеся при попытке дать определение

интегрируемых и неинтегрируемых систем для всех возможных случаев.

Методы преобразований Ли в настоящее время весьма популярны и они действительно представляют собой настоящий прорыв в стене классических методов. По крайней мере, можно сказать, что они были неизвестны Пуанкаре,— факт, в общем-то, удивительный для методов теории возмущений. Честь введения этих новых методов принадлежит Хори. Более поздние работы и модифицированные алгоритмы надлежит рассматривать только как обработку и другие варианты одной и той же основной идеи. Одним из лучших примеров использования этих методов является работа Депри и Рома [31] об основных задачах, связанных с искусственными спутниками Земли. Кроме того, таким примером могут служить недавние исследования Джакальи и др. [39, 40] о движении твердого тела под влиянием центрального гравитационного поля. Различные примеры также приводят Чой и Тэпли [16].

Пример, который мы дали при решении уравнения Ван дер Поля, с точностью до членов третьего порядка рассмотрен в недавней работе Хори [55], посвященной негамильтоновым системам. Этот пример является лучшим образцом использования метода преобразований Ли в негамильтоновых системах. Гамильтонизацию уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} = -\varepsilon(1-x^2)\dot{x}-x$$

можно провести, если положить $x = y_1$, $\dot{x} = y_2$, так что

$$\dot{y}_1 = y_2, \qquad \dot{y}_2 = -\varepsilon\left(1-y_1^2\right)y_2 - y_1,$$

и гамильтониан имеет вид

$$H = x_1\dot{y}_1 + x_2\dot{y}_2 = H_0 + H_1,$$

где

$$H_0 = x_1y_2 - x_2y_1,$$
$$H_1 = -\varepsilon\left(1-y_1^2\right)x_2y_2.$$

Уравнения движения записываются так:

$$\dot{y}_k = H_{x_k}, \qquad \dot{x}_k = -H_{y_k},$$

а дополнительная система, определяемая гамильтонианом $K = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$, имеет вид

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \xi_2, \qquad \frac{d\xi_2}{d\tau} = -\xi_1,$$
$$\frac{d\eta_1}{d\tau} = \eta_2, \qquad \frac{d\eta_2}{d\tau} = -\eta_1,$$

и ее решение можно записать следующим образом:

$$\xi_1^0 = \alpha_1 \sin(\tau + \beta_1), \qquad \xi_2^0 = \alpha_1 \cos(\tau + \beta_1),$$
$$\eta_1^0 = \alpha_2 \sin(\tau + \beta_2), \qquad \eta_2^0 = \alpha_2 \cos(\tau + \beta_2).$$

Из уравнения для приближения первого порядка

$$-\frac{dS_1}{d\tau} + H_1 = K_1$$

мы получаем

$$K_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H_1(\tau)\, d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-\varepsilon\left(1 - \eta_1^{0\,2}\right)\eta_2^0 - \eta_1^0\right] d\tau =$$
$$= -\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{2}\left(1 - \frac{\alpha_2^2}{4}\right)\cos(\beta_1 - \beta_2),$$
$$S_1 = \int [H_1(\tau) - K_1]\, d\tau.$$

Полное решение задачи до членов третьего порядка приведено в работе Чоя и Тэпли [16].

Наконец, для более детального и всеобъемлющего понимания методов усреднения, как с точки зрения Крылова и Боголюбова, так и с точки зрения Пуанкаре, а также для оценки отбрасываемых членов более высокого порядка, мы отсылаем читателя к посвященной классическим вопросам работе Мьюзена [87] и к обширной работе Волосова [101].

ЛИТЕРАТУРА

1. Abraham R. Foundations of mechanics.— Philadelphia: W. A. Benjamin Inc., 1967.
2. Andoyer H. Cours de mécanique céleste. (vol. I).— Paris: Gauthier-Villars, 1926.
3. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.—УМН, 1963, т. 18, № 5, стр. 13—40.
4. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.—УМН, 1963, т. 18, № 6, стр. 91—192.
5. Barbanis B. The topology of the third integral. Intern. Astron. Union Symp. No. 25.— New York: Academic Press, 1966, p: 19—25.
6. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.—М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
7. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике.—Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.—М.: Физматгиз, 1963.
9. Bozis G. A new integral in the restricted problem of three bodies. Doctoral thesis, Univ. of Saloniki, Greece, 1966.

10. Bozis G. On the existence of a new integral in the restricted three-body-problem.— Astron. J., 1966, vol. 71, № 6, p. 404—414.
11. Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellites without drag.— Astron. J., 1959, vol. 64, p. 378—390.
12. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.
13. Caley A.— Comb. Dublin Math. J., 1848, vol. 3, p. 116.
14. Cesari L. Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici.— Atti Accad. Ital. Mem. Clas. Fis. Mat. e Nat., 1940, t. 11, p. 633—692.
15. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1964.
16. Чой Дж., Тэпли Б. Расширенный метод канонических возмущений.— Механика, 1974, № 4, стр. 38—50.
17. Contopoulos G. A third integral of motion in a Galaxy.— Zeits. fur Astrophys., 1960, b. 49, s. 273—291.
18. Contopoulos G., Barbanis B. An application of the third integral of motion.— The Observatory, 1961, vol. 82, p. 80—82.
19. Contopoulos G. On the existence of a third integral of motion.— Astron. J., 1962, vol. 67, № 1, p. 1—14.
20. Contopoulos G. A classification of the integrals of motion.— Astrophis. J., 1963, vol. 138, N 4, p. 1297—1305.
21. Contopoulos G. Resonances cases and small divisors in a third integral of motion.— Astron. J., 1963, vol. 68, № 10, p. 763—769.
22. Contopoulos G., Woltjer L. The third integral in nonsmooth potentials.— Astrophis. J., 1964, vol. 140, N 3, p. 1106—1119.
23. Contopoulos G. The third integral in the restricted three-body problem.— Astrophis., J., 1965, vol. 142, № 2, p. 802—804.
24. Contopoulos G. Adiabatic invariants and the third integral.— J. Math. Phis., 1966, vol. 7, N 5, p. 788—797.
25. Contopoulos G., Hadjidemetrious J. P. Characteristics of invariant curves of plane orbits.— Astron. J., 1968, vol. 73, № 1, p. 86—96.
26. Contopoulos G. Resonance phenomena in spiral galaxies.— In: Periodic Orbits, Stagility and Resonances/Ed. G. E. Giacaglia.— Dordrecht, Holland: Reidel Pub. Co., 1970.
27. Contopoulos G. Orbits in highly perturbed dynamical systems, I, II, III.— Astron. J., 1970, vol. 75, № 1, p. 96—107; 1970, vol. 75, № 1, p. 108—130; 1971, vol. 76, № 2, p. 147—156.
28. Deprit A. et al. Birkhoff's normalization.— Celest. Mech., 1969, vol. 2, № 2, p. 222—251.
29. Deprit A. et al. Analytical Lunar ephermeris: Brouwer's suggestion.— Astron. J., 1970, vol. 75, № 6, p. 747—750.
30. Deprit A., Rom A. Characteristics exponents of L_4 in the elliptic restricted problem.— Astron. Astrophys., 1970, vol. 5, № 3, p. 416—428.
31. Deprit A., Rom A. The main problem of artificial sattelite theory for small and moderate eccentricities.— Celest. Mech., 1970, vol. 2, № 2, p. 166—206.
32. Diliberto S. P. New results on periodic surfaces and the averaging principle. US — Japanese Semin. on Diff. Func. Equas.— Philadelphia: W. A. Benjamin Ins., 1967, p. 49—87.
33. Dirac P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics.— London: Proceed. Roy. Soc., 1958, vol. A246, p. 326—332.
34. Euler L. Theoria motus Lunae.— Petrop., 1753: Theoria motus Lunae, novo methodo.— Petrop.: Typ. Imp. Acad. Scien., 1772.
35. Гельфанд И. М., Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— УМН, 1955, т. 10, № 1, стр. 3—40.

36. Giacaglia G. E. O. Notes on von Zeipel's method. GSFC-NASA Publ. X-547-64-161, Greenbelt, 1964.
37. Giacaglia G. E. O. Evalution of methods of integration by series in celestial mechanics. Doctoral Thesis, Yale University, New Haven, 1965.
38. Giacaglia G. E .O. Nonintegrable dynamical systems. Chair Thesis, General Mechanics, Univ. of Sao Paulo, 1967.
39. Giacaglia G. E. O. et al. A seminalytical theory forthe motion of a Lunar satellite.— Celest. Mech., 1970, vol. 3, № 1, p. 3—66.
40. Giacaglia G. E. O.. Jefferys W. H. Motion of a space station.— Celest. Mech. 1971, vol. 4, № 3/4, p. 442—467.
41. Giacaglia G. E. O. Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies.— Celest. Mech., 1971, vol. 4, № 3/4, p. 468—489.
42. Giacaglia G. E. O. Regularization of conservative central fields.— J. Japan. Astron. Soc., 1972, vol. 24, № 3.
43. Giacaglia G. E. O., Nuotio V. I. Spinor regularization of conservative central fields. 3-d Annual Meeting, Div. Dynamical Astron., Am. Astron. Soc., Univ. of Maryland; Bull. Amer. Astron. Soc., 1972.
44. Голдстейн Г. Классическая механика.—М.: Наука, 1975.
45. Гурса Э. Курс математического анализа.— М.—Л.: ОНТИ, 1936.
46. Hale J. K. On the boudedness of the solution of linear differential systems with periodic coefficients.— Riv. Mat. Univ. Parma, 1954, vol. 5, p. 137—167.
47. Hale J. K. Integral manifolds of perturbed differential equations.— Ann. Nath., 1961, vol. 73, № 3, p. 496—531.
48. Hale J. K. On differential equations containing a small parameter. Contrib. Diff. Eq. (ed. LaSalle et al.), vol. 1.— New York: J. Wiley pab., 1962.
49. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.—М.: Мир, 1966.
50. Hale J. K. Ordinary differential equations. Chapt. 5.— New York: Wiley-Interscience, 1969.
51. Henrard J. On a perturbation theory using Lie transforms.— Celest. Mech., 1970, vol. 3, № 1, p. 107—120.
52. Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments.— Astron. J., 1964, vol. 69, № 1, p. 73—79.
53. Henon M. Exploration numérique du problème restreint.— Ann. Astrophys., 1965, vol. 28, p. 499 and 992.
54. Hori C. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables.— J. Japan. Astron. Soc., 1966, vol. 18, № 4, p. 287—296.
55. Hori G. Theory of general perturbations for noncanonical systems.— J. Japan. Astron. Soc., 1971, vol. 23, p. 567—587.
56. Kamel A. A. Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter.— Celest. Mech., 1969, vol. 1, № 2, p. 190—199.
57. Kamel A. A. Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations.— Celest. Mech., 1970, vol. 3, № 1, p. 90—106.
58. Kevorkian J. The two variable expansion procedure for the approximate colution of certain nonlinear differential equations. vol. 7, p. 206. Lectures in applied mathematics. Providence, Amer. Math. Soc., 1966.
59. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.—ДАН СССР, 1953, т. 98, № 4, стр. 527—530.
60. Kovalevsky J. Review of some methods of programming of literal developments in celestial mechanics.— Astron. J., 1968, vol. 73, № 3, p. 203—209.
61. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.—Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

62. Kustaanheimo P. Spinor regularization of kepler motion.— Ann. Univ. Turkuensis, 1964, vol. A73, p. 3—7.
63. Kyner W. T. Invariant manifolds.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1961, vol. 10, p. 98—110.
64. Kyner W. T. A mathematical theory of the orbits about an oblate planet. Tech. Rep. to ONR, Det. Math.— Univ. of Southern Calif., Los Angeles, 1963.
65. Kyner W. T. Rigorous and formal stability of orbits about an oblate planet.— Mem. Amer. Math. Soc., 1968, vol. 81, p. 1—27.
66. Ларичева В. В. Об осреднении одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений.—Диф. уравнения, 1966, т. 2, № 3, стр. 345—352.
67. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.—М.: ИЛ, 1961.
68. Leimanis E., Minorsky N. Dynamics and nonlinear mechanics. Chapt. I.— New York: J. Wiley pub., 1958.
69. Levi-Civita T. Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei the carpi.— Ann. Math., 1903, t. 9, p. 1—27.
70. Lindstedt A. Beitrag zur integration der differentialgleichungen der störungtheorie. Abh. K. Akad. Wiss., St. Petersburg, 1882, b. 31, No. 4.
71. MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies.— New York: Dover Publications, 1920, p. 403—413.
72. MacMillan W. D. A method of determinating solutions of a system of analitic functions in the neighborhood of a branch point.— Math. Annalen, 1912, vol. 72, p. 180.
73. Mersman W. A. Explicit recursive algorithm for the construction of equivalent cannonical transformations.— Celest. Mech., 1971, vol. 3, № 3, p. 384—389.
74. Minorsky N. Nonlinear oscillations.— Princeton, New Jersey, van Nostrand Publ., 1962.
75. Moser J. Nonexistence of integrals for canonical systems of differential equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 409—436.
76. Moser J. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems.— Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, № 1, p. 81—114.
77. Мозер Ю. Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений.—Математика, 1962, т. 6, № 4, стр. 3—10.
78. Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.—Математика, 1962, т. 6, № 5, стр. 51—67.
79. Moser J. Perturbation theory for almost periodic solutions for undamped nonlinear differential equations. Int. Symp. on Nonlinear Diff. Eq. and Nonlinear Mech., Colorado Springs, 1961; p. 71—79, New York, Acad. Press, 1963.
80. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.—М.: Мир, 1973.
81. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.—УМН, 1968, т. 23, № 4, стр. 179—238.
82. Moser J. On the theory of quasi-periodic motions.— SIAM Rev., 1966, vol. 8, № 2, p. 145—172.
83. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды.—УМН, 1969, т. 24, № 2, стр. 165—211.
84. Moser J. Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold.— Comm. Pure Appl. Math., 1970, vol. 23, № 4, p. 609—636.
85. Moulton F. R. Periodic oscillating satellites.— Math. Ann., 1913, vol. 73, p. 441—479.
86. Moulton F. R. Periodic orbits.— Washington: Carnegie Inst. Washington Publ., 120.
87. Musen P. On the high order effects in the methods of Krylov-Bogoliubov and Poincare.— J. Astronaut. Sci., 1965, vol. 12, № 4, p. 129—134.

88. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.—М.: Гостехиздат, 1949.
89. Плисс В. А. К теории инвариантных поверхностей.—Диф. уравнения, 1966, т. 2, № 9, стр. 1139—1150.
90. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний.—М.: Наука, 1964.
91—92. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр.—М.: Наука, 1972, т. 2.
93. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике.—М.: Наука, 1965
94. Roels J., Louterman C. Normalization des systèmes linèaires canoniques et application an problème restreinte des trois corps.— Celest. Mech., 1970, vol. 3, № 1, p. 129—140.
95. Sansone G., Conti R. Nonlinear differential equations.— New York: Pergamon Press, 1964.
96. Зигель К. Л. Об интегралах канонических систем.—Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 103—117.
97. Зигель К. Л. О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия.—Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 129—156.
98. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.—М.: ИЛ, 1959.
99. Sternberg S. Celestial mechanics.— New York: W. A. Benjamin Inc., 1969, 2 vols.
100. Szebehely V. et. al. Mean motions and characteristic exponents at the libration points.— Astron. J., 1970, vol. 75, № 1, p. 92—95.
101. Волосов В. В. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.—УМН, 1962, т. 17, № 6, стр. 3—126.
102. Whittaker E. T. On the adelphic integrals of the differential equations of dynamics.— Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1916, vol. 37, p. 95.
103. Уиттекер Е. Аналитическая динамика.—М.: ОНТИ, 1937.
104. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.—М.: Наука, 1967.
105. Zeipel H. Recherches sur le mouvement des petits planets.— Arkiv. Astron. Mat. Phys.. 1916—1917, t. 11,12,13.

ГЛАВА III

ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

1. Движение, описываемое интегрируемой системой

В этом параграфе мы дадим более точную характеристику свойств траекторий, являющихся решениями интегрируемых систем.

Мы начнем с результата Лиувилля. Пусть дана гамильтонова система

$$\dot{y}_k = H_{x_k}, \qquad \dot{x}_k = -H_{y_k} \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{3.1.1}$$

где функция $H = H(y, x)$ аналитична в некоторой области D фазового пространства. Если в области $D' \subset D$ известны n общих интегралов $F_1, \ldots, F_n$, находящихся в инволюции, то в области D' система интегрируема, т. е. сводится к квадратурам. Пусть для $i = 1, \ldots, n$

$$F_i(y, x) = C_i = \text{const}. \tag{3.1.2}$$

В общем случае верно, что замкнутые многообразия, определяемые уравнениями (3.1.2), являются торами, и на них движение является условно-периодическим. В действительности можно показать, что этот вывод всегда верен для систем Лиувилля. Точнее, можно получить следующее утверждение [5].

Теорема. *Пусть система* (3.1.1) *с n степенями свободы имеет n первых общих интегралов $F_1, \ldots, F_n$, находящихся в инволюции. Уравнения $F_i = C_i$ определяют компактное многообразие $M = M_C$, в каждой точке которого векторы* $\operatorname{grad} F_i (i = 1, \ldots, n)$ *линейно независимы в фазовом пространстве размерности $2n$. Тогда M — тор размерности n и точка $(y(t), x(t))$, являющаяся решением уравнений* (3.1.1) *в области D', совершает условно-периодическое движение на M.*

Эта теорема оправдывает тот факт, что мы всегда рассматриваем в качестве интегрируемой системы систему с гамильтонианом $H = H_0(x)$, т. е. с гамильтонианом, зависящим только от импульсов. В общем случае частоты $\omega_k = H_{0x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ будут рационально независимы, так что движение на торах, определяемое параметрами $y_1, \ldots, y_n$, является эргодическим, в том

смысле, что траектории, покрывающие такие торы T^n, всюду плотны. Другими словами, для данной точки $P^0 \in T^n$ (где $P^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$) и для произвольного $\varepsilon > 0$ всегда можно найти такое $T(\varepsilon)$, что для данного $\bar{t}$ из интервала $0 < \bar{t} \leqslant T(\varepsilon)$ соотношения $|y_k(\bar{t}) - y_k^0| < \varepsilon$ удовлетворяются для всех k.

2. Возмущения интегрируемых систем

Рассмотрим систему, определяемую гамильтонианом

$$H = H_0(x) + \mu H_1(y, x, \mu), \tag{3.2.1}$$

где $0 < \mu \leqslant 1$, а H_1 — периодическая (периода 2π) функция относительно $y_1, \ldots, y_n$. Мы попытаемся проверить тот факт, что при этих условиях движение возмущенной системы, соответствующей гамильтониану (3.2.1), происходит на торе, который близок к тору, определяемому условиями $x_k = x_k^0 = \text{const}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Вначале мы остановимся на кратком описании классических методов теории возмущений. Они заключаются в приведении гамильтониана H, определяемого формулой (3.2.1), с помощью последовательных канонических замен к таким формам:

$$\begin{aligned}
H &= H_0^{(1)}(x') + \mu^2 H_1^{(1)}(y', x', \mu),\\
H &= H_0^{(2)}(x'') + \mu^3 H_1^{(2)}(y'', x'', \mu),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
H &= H_0^{(s)}(x^{(s)}) + \mu^{s+1} H_1^{(s)}(y^{(s)}, x^{(s)}, \mu),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Такие методы, как было видно в предыдущих главах, приводят к уравнениям вида

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial S}{\partial y_k} = F(x, y) = F(x, y + 2\pi),$$

решение которых содержит малые (если вообще не нулевые) знаменатели, а получающиеся при этом ряды в общем случае расходятся, даже если частоты ω_k являются рационально независимыми. В последнем случае предполагается, что n вещественных компонент вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ удовлетворяют бесконечному числу неравенств

$$\left| \sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i \right| \geqslant \left\{ \sum_{i=1}^{n} |k_i| \right\}^{-p} K, \tag{3.2.2}$$

где $p=n+1$, все целые числа k_i одновременно в нуль не обращаются, а число $K(\omega_1, \ldots, \omega_n)>0$ выбирается соответствующим образом (см. [24]). Следовательно, для множества значений $\omega_1, \ldots, \omega_n$, имеющего ненулевую меру, в классической теории возмущений все знаменатели ограничены снизу по абсолютной величине. Тем не менее, даже этого недостаточно, чтобы гарантировать сходимость рассматриваемых рядов. С другой стороны, так как мы считаем, что частоты ω_k являются непрерывными функциями $\overset{0}{x}_k$, то непрерывное изменение этих последних величин неминуемо приведет к резонансным значениям ω_k, и выше упомянутые ряды в любом случае не могут быть непрерывными функциями $\overset{0}{x}_k$, т. е. начальных условий задачи. При некоторых ограничениях на H_1 можно установить сохранение условно-периодических движений, и первая теорема, относящаяся к этому вопросу, была предложена Колмогоровым [25]. При доказательстве теоремы Колмогорова Арнольд писал [6]: «Простая и новая идея, комбинация весьма классических и вполне современных методов, решение 200-летних проблем, ясная геометрическая картина и широкие горизонты — таковы достоинства этой работы». Это действительно так, ибо ранние результаты Пуанкаре рассматривались в слишком общей форме, и думалось, что они оставляют только небольшой шанс на то, что динамическая система будет интегрируемой.

Можно только предполагать, что неинтегрируемые системы образуют плотное множество, скажем, в пространстве всех функций Гамильтона. Однако никаких предположений о плотности интегрируемых систем в нашем распоряжении нет. Если они, по крайней мере, также плотны, как множество рациональных чисел на отрезке, то мы можем по-прежнему сказать, что существует крайне мало интегрируемых систем. В действительности рассматриваемая проблема похожа на задачу n тел, на ограниченную задачу трех тел, на задачу о несимметричном волчке и т. д., в которых только доказана неинтегрируемость в том смысле, что в каких-то частных координатах и в каких-то частных случаях не существует общих интегралов или даже, в более специальных случаях, не существует алгебраических или аналитических интегралов (см., например, [43, 40, 36, 38]).

Простейший вывод, который можно сделать из теоремы Колмогорова, заключается в том, что при выполнении условия невырожденности $|\partial^2 H_0/\partial x^2| \neq 0$ при малом аналитическом возмущении большинство инвариантных многообразий (торов), определяемых функцией H_0, не разрушается, а лишь слегка деформируется. Термин «большинство» подразумевает нигде не плотное множество, дополнение которого имеет меру, малую вместе с ε.

Действительно, в любой окрестности инвариантного тора невозмущенной системы есть инвариантный тор, на котором все траектории замкнуты, т. е. частоты ω_k рационально зависимы. Однако при малых возмущениях эти инвариантные торы разрушаются. В любом случае для систем с больше чем одной степенью свободы ничего существенного о поведении траекторий в течение длительного времени (асимптотически) не известно. Для консервативной системы с двумя степенями свободы многообразие, определяемое интегралом энергии, является трехмерным и содержит двумерные инвариантные торы. Это — максимальная размерность, при которой промежуток между двумя такими торами конечен и замкнут, т. е. траектории, начинающиеся в этой области, будут оставаться в ней все время. Для больших размерностей это в общем случае неверно.

Как уже упоминалось выше, для формальных рядов, получающихся при приведении гамильтониана к виду, зависящему только от переменных действие, вопрос о сходимости встает главным образом из-за появления малых знаменателей. Как отмечают Брауэр и Клеменс [14], сходимость этих рядов зависит от того, насколько быстро уменьшаются числители с увеличением порядка приближения (по мере того, как все бо́льшие числа входят в комбинации (3.2.2)). Это подразумевает, что метод последовательных приближений должен быть устроен так, чтобы увеличивалась скорость уменьшения этих числителей. Вероятно, это один из наиболее важных аспектов, описанных Колмогоровым в предложениях по доказательству его теоремы. Такой метод был создан в виде метода типа ньютоновского метода приближений, обладающего квадратичной сходимостью, в том смысле, что ошибка n-го приближения ε_n имеет порядок ε_{n-1}^2 при $n=1, 2, \ldots$ и $\varepsilon_1<1$.

Точнее, предположим, что возмущение μH_1 в (3.2.1) находится в пределах: $|\mu H_1|<\mu<1$ при $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из некоторой области D'. Если записать H_1 в виде

$$H_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \cdot \exp\left(i\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right),$$

где $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n$, то при $|\operatorname{Im} \boldsymbol{y}| \leqslant \rho$ коэффициенты $A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ убывают как $M \exp(-|\boldsymbol{k}|\rho)$. Принимая во внимание (3.2.2), для $\mu^2 H_1^{(2)}$ можно получить оценку $M^2 \delta_1^{-q}$ при $|\operatorname{Im} \boldsymbol{y}'| \leqslant \rho - \delta_1$. Величина δ_1 связана с величиной δ_0, такой, что $M \leqslant \delta_0^N$ при $\delta_0>0$ достаточно малом и N достаточно большом. Следовательно, $H_1^{(s)} < \delta_s^N$ при $|\operatorname{Im} \boldsymbol{y}^{(s)}| < \rho - \delta_s = \rho_s < \rho_{s-1} < \ldots < \rho$. Можно предположить, что частоты системы ω_k фиксированы, и проаппроксимировать решение на неизвестный тор, определяемый в пространстве, в котором частоты в точности равны заданным. В полном доказательстве теоремы, данном Арнольдом [6], частоты ω_k не

являются фиксированными, а становятся меняющимися на каждом шаге приближения функциями действия. Упрощенный вариант теоремы Колмогорова был предложен Барраром [10]. Этот вариант сразу же приводит к некоторым следствиям в задаче представления Пуанкаре метода Линдстедта. Первоначально требовалась аналитичность функции H, но Мозер [33] показал достаточность существования некоторого количества производных функции H. Однако это требует применения процедуры сглаживания, которая будет обсуждаться в следующей главе.

Рассмотрим систему с гамильтонианом вида (везде суммирование проводится от 1 до n)

$$H(y, x) = H_0 + \sum_k \omega_k x_k + A(y) + \\ + \sum_k B_k(y) x_k + \sum_{k,j} C_{kj}(y) x_k x_j + D(y, x), \qquad (3.2.3)$$

где H — аналитическая по всем переменным и периодическая (периода 2π) функция переменных y_k, H_0 — некоторая постоянная, функция D содержит степени не ниже третьей относительно x_k, а величины ω_k удовлетворяют условию

$$\left|\sum_k j_k \omega_k\right| \geqslant \varepsilon \left(\sum_k |j_k|\right)^{-s} \qquad (3.2.4)$$

при $s=n+1$, при всех целых j_k и при выбранной некоторым образом постоянной $\varepsilon(\omega)$.

Рассмотрим далее каноническое преобразование $(y, x) \to (y', x')$, определяемое производящей функцией Гамильтона — Якоби

$$S(y, x') = \sum_k (x'_k + \alpha_k) y_k + Y(y) + \sum_k x'_k Y_k(y), \qquad (3.2.5)$$

где α_k — постоянные, так что

$$x_i = S_{y_i} = x'_i + \alpha_i + Y_{y_i}(y) + \sum_k x'_k Y_{k y_i}(y), \qquad (3.2.6)$$

$$y'_i = S_{x_i} = y_i + Y_i(y).$$

Из последнего соотношения, предположив, что матрица

$$\beta = \frac{\partial y'}{\partial y} = I + \left\{\frac{\partial Y_i}{\partial y_i}\right\}$$

является неособенной для y_i из некоторой окрестности точки y'_i, можно получить

$$y_i = F_i(y') = y'_i + \tilde{Y}_i(y'), \qquad (3.2.7)$$

и, следовательно, преобразование (3.2.6) обратимо. Подставляя x_i из (3.2.6) в (3.2.3), находим

$$H = H_0 + \sum_k \omega_k \alpha_k + \sum_k \omega_k x_k' + a_{(0)} + A^*(y) + \\ + \sum_k B_k^*(y) x_k' + A^{(1)}(y') + \sum_k B_k^{(1)}(y') x_k' + \\ + \sum_{k,j} C_{kj}^{(1)}(y') x_k' x_j' + D^{(1)}(y', x'), \qquad (3.2.8)$$

где ($\delta_{ij}=0$, $i \neq j$; $\delta_{ii}=1$)

$$A^*(y) = \sum_k \omega_k \frac{\partial Y}{\partial y_k} - A(y) - a_{(0)},$$

$$B_k^*(y) = \sum_j \left[\omega_j \frac{\partial Y_k}{\partial y_j} + C_{kj}\left(\alpha_j + \frac{\partial Y}{\partial y_j}\right)\right] + B_k(y),$$

$$A^{(1)}(y') = \sum_{k,j} C_{kj}(y)\left(\alpha_k + \frac{\partial Y}{\partial y_k}\right)\left(\alpha_j + \frac{\partial Y}{\partial y_j}\right) + D_0(y),$$

$$B_k^{(1)}(y') = \sum_{i,j} C_{ij}(y)\left(\alpha_i + \frac{\partial Y}{\partial y_i}\right)\frac{\partial Y_k}{\partial y_j} + D_k(y),$$

$$C_{ij}^{(1)}(y') = C_{ij}(y) + \sum_{k,l} C_{k,l}(y) \frac{\partial Y_i}{\partial y_k}\frac{\partial Y_j}{\partial y_l} + D_{ij}(y), \qquad (3.2.9)$$

$$D^{(1)}(y', x') = D\left(y, x' + \alpha + \frac{\partial Y}{\partial y^{\mathrm{T}}} + \sum_j x_j' \frac{\partial Y_j}{\partial y^{\mathrm{T}}}\right) - D_0(y) - \\ - \sum_i D_i(y) x_i' - \sum_{i,j} D_{ij}(y) x_i' x_j',$$

$$D_0(y) = D\left(y, \alpha + \frac{\partial Y}{\partial y^{\mathrm{T}}}\right),$$

$$D_i(y) = \sum_k \left(\delta_{ik} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_k}\right)\frac{\partial D}{\partial x_k}\left(y, \alpha + \frac{\partial Y}{\partial y^{\mathrm{T}}}\right),$$

$$D_{ij}(y) = \sum_{k,l}\left(\delta_{ik} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_k}\right)\left(\delta_{jl} + \frac{\partial Y_j}{\partial y_l}\right)\frac{\partial^2 D}{\partial x_k \partial x_l}\left(y, \alpha + \frac{\partial Y}{\partial y^{\mathrm{T}}}\right).$$

Здесь y надо заменить на y' согласно (3.2.7). Цель введения константы $a_{(0)}$ будет объяснена ниже. Надо обратить внимание на то, что величины $A^*(y)$ и $B_k^*(y)$ являются величинами первого порядка относительно α_k, Y, Y_k, которые полагаются малыми в некотором специальном смысле. С другой стороны, величины $A^{(1)}$ и $B_k^{(1)}$ являются величинами второго порядка по отношению к тем же переменным.

Целью метода является уничтожение величин A^*, B_k^*, с помощью соответствующего выбора Y, α_k, $Y_k (k=1, \ldots, n)$. Это можно сделать следующим образом. Введем величины

$$z_j = e^{iy_j}.$$

Тогда, в силу сделанных относительно H предположений, в частности, имеем

$$A(y) = \sum_k a_k e^{i(k^{\mathrm{T}}y)} = \sum_k a_k z^{(k)}, \tag{3.2.10}$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $(k^{\mathrm{T}}y) = k_1y_1 + \ldots + k_ny_n$, $z^{(k)} = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$. В силу тех же предположений, имеем

$$Y(y) = \sum_{k \neq 0} Y^{(k)} z^{(k)}, \qquad Y_j(y) = \sum_{k \neq 0} Y_j^{(k)} z^{(k)}. \tag{3.2.11}$$

Считая $A^*(y) = 0$, из первого соотношения (3.2.9) находим

$$\sum_j \omega_j \frac{\partial Y}{\partial y_j} = \sum_j i\omega_j z_j \frac{\partial Y}{\partial z_j} = \sum_j i\omega_j \sum_{k \neq 0} Y^{(k)} k_j z^{(k)} =$$
$$= \sum_{k \neq 0} i(\omega^{\mathrm{T}}k) Y^{(k)} z^{(k)} = \sum_{k \neq 0} a_k z^{(k)},$$

или

$$Y^{(k)} = -i(\omega^{\mathrm{T}}k)^{-1} a_k, \tag{3.2.12}$$

что и дает определение Y и $a_{(0)}$. Теперь из второго соотношения (3.2.9), определив

$$B_k = \sum_l B_k^{(l)} z^{(l)}, \qquad C_{kj} = \sum_l C_{kj}^{(l)} z^{(l)}$$

и

$$P_k(y) = \sum_j C_{kj} \frac{\partial Y}{\partial y_j} = \sum_l P_k^{(l)} z^{(l)},$$

находим, что α_j и $Y_j^{(k)}$ определяются уравнениями

$$\sum_k C_{jk}^{(0)} \alpha_k + P_j^{(0)} + B_j^{(0)} = 0 \tag{3.2.13}$$

и

$$i(\omega^{\mathrm{T}}k) Y_j^{(k)} + P_j^{(k)} + B_j^{(k)} + \sum_l C_{jl}^{(k)} \alpha_l = 0 \tag{3.2.14}$$

соответственно. Разумеется, надо предположить выполненными некоторые условия, а именно:

а) величины $(\omega^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k})$ не должны обращаться в нуль (для того чтобы выражения (3.2.12) имели смысл).

б) определитель $\{C_{jk}^{(0)}\}$ не должен быть равен нулю, чтобы уравнения (3.2.13) имели решение относительно вектора $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;

в) для получения констант $Y_j^{(k)}$ из уравнения (3.2.14) должно быть выполнено условие (а).

Также очевидно, что если $A(\boldsymbol{y})$, $B_k(\boldsymbol{y})$, $C_{kj}(\boldsymbol{y})$ имеют конечное тригонометрическое представление в виде полиномов Фурье (относительно $\boldsymbol{y}$), то производящая функция S, определяемая формулой (3.2.5), также является полиномом Фурье относительно $\boldsymbol{y}$. Описанную процедуру можно повторить и после применения последовательных канонических преобразований; в пределе исходной гамильтониан примет вид

$$H=\sum_k \omega_k X_k+\sum_{k,j} K_{kj}(\boldsymbol{Y})\, X_k X_j+\Delta(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}), \qquad (3.2.15)$$

где в Δ содержатся члены не ниже третьего порядка относительно компонент X_k вектора $\boldsymbol{X}$. В этом случае система допускает решение $(k=1, \ldots, n)$

$$X_k=0, \qquad Y_k=\omega_k(t-t_k). \qquad (3.2.16)$$

Теперь можно сформулировать теорему Колмогорова в следующем упрощенном виде.

Теорема (Колмогоров). *Пусть гамильтониан системы H, имеющий вид* (3.2.3), *аналитичен в области D_0: $|x_k| \leqslant r_0$, $|\operatorname{Im} y_k| \leqslant \rho_0$ и удовлетворяет в этой области следующим условиям:*

а) *для всех целых ненулевых одновременно чисел j_k, выбранной каким-нибудь образом постоянной $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$ и $s=n+1$ выполнены неравенства*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} j_k\omega_k\right| \geqslant \varepsilon\left\{\sum_{k=1}^{n}|j_k|\right\}^{-s}; \qquad (3.2.17)$$

б) *матрица $\{C_{jk}^{(0)}\}$ — неособенная.* (3.2.18)

Тогда для достаточно малых в D_0 функций $|A(\boldsymbol{y})|$ и $|B_k(\boldsymbol{y})|$ существует каноническое преобразование $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, имеющее вид

$$\begin{aligned} x_k &= X_k+E_k(\boldsymbol{Y})+\sum_j E_{kj}(\boldsymbol{Y})\, X_j, \\ y_k &= Y_k+N_k(\boldsymbol{Y}), \end{aligned} \qquad (3.2.19)$$

такое, что функции E_k, E_{kj}, N_k 2π-периодичны по каждой компо-

ненте Y_j и аналитичны в области Δ_0, определяемой неравенствами $|X_k| < \frac{3}{4} r_0$, $|\operatorname{Im} Y_k| < \frac{3}{4} \rho_0$. *Преобразование* (3.2.19) *отображает Δ_0 в D_0, а в Δ_0 гамильтониан H имеет вид* (3.2.15).

Доказательство этой теоремы состоит в основном в проверке того, что применение последовательности канонических преобразований вида (3.2.6) образует сходящийся процесс последовательных приближений при переходе от (3.2.3) к (3.2.15), а в итоге получается аналитическое каноническое преобразование. Теорема получается в результате доказательства ряда основных лемм, установленных Арнольдом [6, 7]. Здесь мы ограничимся упоминанием только двух главных лемм.

Лемма 1. *Если n ненулевых частот удовлетворяют условиям* (3.2.17), *если*

$$F(z) = \sum_{(k)\neq 0} f_{(k)} z^{(k)}, \tag{3.2.20}$$

и если S удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \frac{\partial S}{\partial y_j} \equiv i \sum_{j=1}^{n} \omega_j z_j \frac{\partial S}{\partial z_j} = F(z), \tag{3.2.21}$$

то его решение

$$S = -\sum_{(k)\neq 0} \frac{f_{(k)} z^{(k)}}{(k^{\mathrm{T}}\omega)} \tag{3.2.22}$$

удовлетворяет для выбранной соответствующим образом постоянной C следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} \|S\|_{\Gamma(\rho-h)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon h^{s+n}} \|F\|_{\Gamma(\rho)}, \\ \left\| \frac{\partial S}{\partial y_k} \right\|_{\Gamma(\rho-h)} = \left\| z_k \frac{\partial S}{\partial z_k} \right\|_{\Gamma(\rho-h)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon h^{s+n+1}} \|F\|_{\Gamma(\rho)}, \end{gathered} \tag{3.2.23}$$

где норма $\| \ \|$ является верхней гранью абсолютной величины функции в кольце

$$\Gamma(\rho) = \{e^{-\rho} \leqslant |z_k| \leqslant e^{\rho}\} = \{|\operatorname{Im} y_k| \leqslant \rho\}$$

для всех $k = 1, \ldots, n$ и $0 < h < \rho$.

Доказательство леммы опирается на условие иррациональности (3.2.17), которое дает верхнюю границу для делителей, т. е.

$$|(\omega^{\mathrm{T}} k)|^{-1} \leqslant \frac{\theta}{\varepsilon} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |k_j| \right\}^{s}, \tag{3.2.24}$$

где θ — константа, зависящая от n и s. Наиболее утомительная

часть доказательства заключается в правильной оценке величин $f_{(k)}/(k^{\mathrm{T}}\omega)$ в кольце $\Gamma(\rho)$ и последующей оценке функции S и ее производных. Необходимые соотношения получены Арнольдом в виде основной леммы [6].

Лемма 2. *Рассмотрим величины*

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \max\left(\|A\|_{\Gamma(\rho_0)};\quad \|B_k\|_{\Gamma(\rho_0)}\right) \\ \varepsilon_1 &= \max\left(\|A^{(1)}\|_{\Gamma(\rho_1)};\quad \|B_k^{(1)}\|_{\Gamma(\rho_1)}\right), \end{aligned} \qquad (k=1,\ \ldots,\ n),$$

$$r_1 = r_0 - 2h, \qquad \rho_1 = \rho_0 - 4h$$

и

$$0 < h < r_0/2,\ 0 < h < \rho_0/4.$$

Пусть

$$\Gamma(r, \rho) = \{|x_k| \leqslant r,\ |\operatorname{Im}(y_k)| \leqslant \rho;\ k=1,\ \ldots,\ n\},$$

$$\|F(y, x)\|_{\Gamma(r,\rho)} = \sup|F(y, x)| \quad \text{для всех} \quad (y, x) \in \Gamma(r, \rho).$$

Рассмотрим оценки

$$\max|C_{kj}^*| \leqslant 2N,$$

$$\|D(y, x)\|_{\Gamma(r_0, \rho_0)} \leqslant 2M, \qquad \|C_{kj}\|_{\Gamma(\rho_0)} \leqslant 2M,$$

где C_{kj}^* — элементы матрицы, обратной к матрице $\{C_{kj}^{(0)}\}$. Пусть выполнено (3.2.4) *и $h < \varepsilon$, $t = s + n + 1$, $1/2 \leqslant r_0 \leqslant 1$.*

Тогда при выполнении этих условий существуют константы C_k $(k=1,\ \ldots,\ s)$, зависящие только от N, M, n и такие, что, если $\varepsilon_0 \leqslant h^{2t+3}/C_0$, то выполнены следующие условия:

а) *Преобразование* (3.2.6) *может быть записано в виде*

$$\begin{aligned} y_i &= y_i' + f_i(y') = F_i(y'), \\ x_i &= x_i' + g_i(y') + \sum_j g_{ij}(y')\, x_j' = G_i(y', x'), \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

где функции F_i, G_i аналитичны при $y' \in \Gamma(\rho_1)$, а

$$\|f_i\|_{\Gamma(\rho_1)} \leqslant 2h, \qquad \|g_i\|_{\Gamma(\rho_1)} \leqslant \frac{2h}{n+2}, \qquad \|g_{ij}\|_{\Gamma(\rho_1)} \leqslant \frac{2h}{n+2}, \tag{3.2.26}$$

и отсюда следует, что преобразование (3.2.25) *отображает $\Gamma(r_1, \rho_1)$ в $\Gamma(r_0 - h, \rho_0 - 2h)$. Кроме того, $\varepsilon_1 \leqslant \frac{C_1}{h^{3t+3}}\varepsilon_0^2$.*

б) Новый гамильтониан определен для всех y', x' из $\Gamma(r_1, \rho_1)$, и

$$\|C_{ij}^{(1)}\|_{\Gamma(\rho_1)} \leqslant \|C_{ij}\|_{\Gamma(\rho_0)} + hC_2, \tag{3.2.27}$$

$$\|D^{(1)}(y', x')\|_{\Gamma(r_1, \rho_1)} \leqslant \|D(y, x)\|_{\Gamma(r_0, \rho_0)} + hC_3, \tag{3.2.28}$$

$$|C_{ij}^{(1)}(0) - C_{ij}(0)| \leqslant \left(\frac{C_4}{\rho_1} + C_5\right) h. \tag{3.2.29}$$

Детальное доказательство этой леммы приведено в работе Баррара [10]. Сначала используется лемма 1 для оценок

$$\max\left\|\frac{\partial Y}{\partial y_k}\right\|_{\Gamma(\rho_0-h)}\leqslant\frac{C'\varepsilon_0}{h^{t+1}},$$
$$\|P_k(y)\|_{\Gamma(\rho_0-h)}\leqslant\frac{C''\varepsilon_0}{h^{t+1}},\qquad|\alpha_k|\leqslant\frac{C'''\varepsilon_0}{h^{t+1}},\tag{3.2.30}$$

где C', C'', C''' — постоянные, зависящие только от N, M, n. После оценок величин Y, P_k, α_k в $\Gamma(\rho_0-h)$ проводятся оценки Y_k (из (3.2.14)) в $\Gamma(\rho_0-2h)$, получающиеся из леммы 1 в виде

$$\max\|Y_k\|_{\Gamma(\rho_0-2h)}\leqslant\frac{C^{\mathrm{IV}}\varepsilon_0}{h^{2t+1}},$$
$$\max\left\|\frac{\partial Y_k}{\partial y_j}\right\|_{\Gamma(\rho_0-2h)}\leqslant\frac{C^{\mathrm{V}}\varepsilon_0}{h^{2t+2}},\tag{3.2.31}$$

где опять постоянные C^{IV}, C^{V} зависят только от N, M, n. Затем используется теорема Руше для того, чтобы показать, что

$$\max\|Y_k\|_{\Gamma(\rho_0-2h)}<2h.$$

Тогда преобразование (3.2.26) будет иметь обратное

$$y_i=y_i'+f_i(y'),$$

где

$$\|f_i\|_{\Gamma(\rho_0-2h)}<2h,$$

и оно отображает $\Gamma(\rho_1)$ в $\Gamma(\rho_0-2h)$. Легко также видеть, что функции $f_i(y')$ являются 2π-периодическими по каждой из переменных y_k', так что утверждение (а) леммы получается введением величины $C_0=\max(C', C'', C''', C^{\mathrm{IV}}, C^{\mathrm{V}}, n+2)$, и, следовательно все величины

$$\max\left\|\frac{\partial Y}{\partial y_k}\right\|,\quad\max\left\|\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}\right\|,\quad\alpha_k$$

в кольце $\Gamma(\rho_0-2h)$ меньше, чем $h/(n+2)$. Аналогично, если $y'\in\Gamma(\rho_1)$, то из утверждения (а) следует: $y\in\Gamma(\rho_0-2h)$. Все остальные оценки из утверждения (б) леммы 2 также следуют из простого использования формулы Коши и неравенства Шварца.

Доказательство теоремы Колмогорова. Предыдущие леммы сразу же приводят к доказательству теоремы. Действительно, гамильтониан H, записанный через y, x из $\Gamma(r_0, \rho_0)$, переходит в гамильтониан такого же вида, но зависящий от y', x' из $\Gamma(r_0-2h, \rho_0-4h)$. Затем эта операция (определенная в лемме 1

и удовлетворяющая оценкам из леммы 2) повторяется. Введем определения

$$r_{m+1}=r_m-2h_{m+1}, \qquad \rho_{m+1}=\rho_m-4h_{m+1}.$$

На m-м шаге гамильтониан H определен в пространстве переменных $(y^{(m)}, x^{(m)}) \in \Gamma(r_m, \rho_m)$, и по утверждению леммы 2

$$\varepsilon_m = \max\left(\| A^{(m)} \|_{\Gamma(\rho_m)}; \quad \| B_h^{(m)} \|_{\Gamma(\rho_m)}\right).$$

Основной вопрос заключается в проверке справедливости леммы 2 на каждом шаге повторного использования преобразования, определяемого в лемме 1. Опять за деталями доказательства мы отсылаем читателя к работе Баррара [10]. Основой служат оценки леммы 2, получающиеся из условия

$$\varepsilon_m \leqslant \frac{h_{m+1}^{2t+3}}{C_0}, \qquad \varepsilon_{m+1} \leqslant \frac{C_1}{h_{m+1}^{3t+3}} (\varepsilon_m)^2.$$

Выбор удобной величины $L>1$, удовлетворяющей неравенствам

$$L^{m+1} \geqslant \frac{\max(C_0, C_1)}{h_{m+1}^{3t+3}}, \qquad L^2\varepsilon_0 = a < 1, \tag{3.2.32}$$

дает $|\varepsilon_m| < a^{2^m}$ и

$$\varepsilon_m < \frac{1}{L^{m+2}} < \frac{1}{L^{m+1}} \leqslant \frac{h_{m+1}^{3t+3}}{C_0},$$

что заменяет условия $\varepsilon_0 \leqslant h^{2t+3}/C_0$ и $\varepsilon_1 \leqslant C_1/h^{3t+3}$ из леммы 2. Неравенство (3.2.32) будет удовлетворено, если положить $h_m = \delta/2^m$ и $L \geqslant (2^{3t+3}/\delta^{3t+3})\max(C_0, C_1)$ или $L>1$ в любом случае. Для исходного гамильтониана (3.2.3) предположим выполненными оценки

$$|C_{kj}^*| \leqslant N, \qquad \| C_{kj} \|_{\Gamma(\rho_0)} \leqslant M,$$
$$\| D(y, x) \|_{\Gamma(r_0, \rho_0)} \leqslant M,$$

и для выбора соответствующего масштаба положим $r_0=1$. Выбрав достаточно малое $\delta>0$, можно показать, что $\varepsilon_m \to 0$ в в $\Gamma\left(\frac{3}{4} r_0, \frac{3}{4} \rho_0\right)$ при $m \to \infty$.

Осталось доказать, что предельное преобразование, получающееся итерациями леммы 1, удовлетворяет требованиям теоремы Колмогорова (уравнения (3.2.17) и (3.2.15)). Результирующее преобразование очевидно является каноническим, так как

оно является комбинацией ряда канонических преобразований. Кроме того, суммарное преобразование $T^{(m)}$ после m итераций отображает $\Gamma(r_{m+1}, \rho_{m+1})$ в $\Gamma(r_m, \rho_m)$, и область его определения содержит в себе $\Gamma\left(\frac{3}{4} r_0, \frac{3}{4} \rho_0\right)$. Поэтому $T^{(m)}$ является равномерно ограниченным, и последовательность сходится к преобразованию T, которое в точности равно (3.2.17).

В доказательстве Арнольда используются более строгие методы оценок, в то время как итерации функции Гамильтона H, с помощью которых здесь определены все операции из леммы 1, аналогичны итерациям Ньютона и, таким образом, обладают квадратичной сходимостью.

При обобщении теоремы Колмогорова на случай вырожденных систем, которое предложил Арнольд, предполагается, что в использованных выше обозначениях исходный гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 + \sum_{k=1}^{m} \omega_k x_k + \sum_{j=m+1}^{n} \mu\omega_j x_j + \\ + A(y) + \sum_{k=1}^{n} B_k(y) x_k + \sum_{k,j=1}^{n} C_{kj}(y) x_k x_j + D(y, x), \qquad (3.2.33)$$

где μ — малый параметр, например, порядка ε (см. уравнение (3.2.4)). Другой случай, также крайне трудный для изучения, соответствует условию $\det\{C_{kj}\} = 0$. Возможно, что первый случай может быть изучен аналогично вышеизложенному случаю путем доказательства таких же лемм и теорем, но скорость сходимости будет значительно ниже, чем в общем случае.

Общая теория Мозера [35] предполагает обширные знания многих теоретических результатов алгебры и дифференциальной геометрии. Подход Мозера к невырожденному случаю значительно проще, особенно если рассматривать только аналитические возмущения, чего на самом деле не делается. По этой причине Мозер вынужден использовать очень сложные методы сглаживания, но, разумеется, получаются и более общие результаты.

Формулировка теоремы Колмогорова, используемая Арнольдом [6], также оказывается более общей, чем рассмотренная выше.

Рассматривается гамильтониан (3.2.1), *аналитичный в некоторой области D фазового пространства, скажем $D = \{|\operatorname{Im} y_k| \leqslant \rho,\ x_k \in G\}$ $(k = 1, \ldots, n)$, где G — открытое множество в R^n и функция Гамильтона 2π-периодична по каждой из переменных y_k. Основное предположение заключается в условии необращения в нуль определителя $\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_j \partial x_k}\right|$ в области D. Тогда показывается,*

что для каждого $K>0$ существует $M(K, \rho, G, H_0)>0$ такое, что если $|\mu H_1| \leqslant M$ в D, то траектории, определяемые гамильтонианом H, таковы, что

1) *Существует инвариантное множество D_1* (вещественное), *и если $\operatorname{Re} D=D_1+D_2$, то $\operatorname{mes} D_2 \leqslant K \operatorname{mes} D$.*

2) *Множество D_1 состоит из инвариантных аналитических n-мерных торов T_ω, определяемых уравнениями*

$$x = x_\omega + f_\omega(\eta), \qquad y = \eta + g_\omega(\eta),$$

где f_ω, g_ω — аналитические функции с периодом 2π по каждой из переменных $\eta_k (k = 1, \ldots, n)$, а ω — параметр, определяющий тор T_ω.

3) *Движение, определяемое гамильтонианом H, на торе T_ω является условно-периодическим с n частотами $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$*

$$\omega_k = \dot{\eta}_k = \left.\frac{\partial H_0}{\partial x_k}\right|_{x=x_\omega},$$

которые удовлетворяют неравенствам

$$\left|\sum_{k=1}^{n} m_k \omega_k\right| \geqslant K \left\{\sum_{k=1}^{n} |m_k|\right\}^{-s} \qquad (s = n + 1)$$

для всех наборов целых чисел m_k, не обращающихся одновременно в нуль.

Эти условия в основном такие же, что и выписанные нами выше, а условие на H_0 переходит в условие на определитель квадратичной части функции H (относительно x_k, x_i), которая имеет вид (3.2.3). В самом деле, такое условие весьма похоже на условие, введенное Арнольдом при обобщении теоремы Колмогорова на вырожденные случаи, т. е. на случаи, когда $|\partial^2 H_0/\partial x_j \partial x_k| = 0$. Что касается функции (3.2.3), то вырождение будет иметь место, например, когда одна из компонент вектора x не входит ни в сумму $\sum \omega_k x_k$, ни в квадратичную часть $\sum C_{kj} x_k x_j$. Очевидно, что первый случай делает невозможным условие (3.2.4), в то время как во втором случае система уравнений (3.2.13) для определения α_k оказывается особенной. Как мы знаем из теории неявных функций, это приводит к разложениям по дробным степеням малого параметра, здесь — μ.

Проще говоря, теорема Колмогорова утверждает, что если функция H_0 невырождена, то при достаточно малых аналитических возмущениях множество ненулевой меры инвариантных торов, определяемых H_0, не разрушается, а лишь слегка деформируется. Однако переход с одного тора на другой не может быть получен непрерывным преобразованием, так как необходимо пересекать зоны рациональной зависимости частот ω_k.

Необходимо, однако отметить, что условие, налагаемое на H_0, можно сделать менее жестким и только предположить, что [1])

$$\det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} & \dfrac{\partial H_0}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial x_j} & 0 \end{Vmatrix} \neq 0. \tag{3.2.34}$$

3. Вырожденные системы

В тех случаях, когда упомянутые условия для $H_0(x)$ не выполнены, или в простейшей ситуации, которая встречается в теореме Колмогорова, когда матрица $\{C_{ij}\}$ является особенной, а условия иррациональности (3.2.4) остаются справедливыми, доказательства Арнольда или Баррара не годятся. В раннем варианте своего доказательства [9] Баррар указал возможный способ исследования случая, когда гамильтониан имеет вид

$$H = A_0 \sum_{k=1}^{m} \omega_k x_k + \sum_{j=m+1}^{n} \mu\omega_j x_j + A(x) + \mu H_1(y, x), \tag{3.3.1}$$

где A_0 — постоянная величина, а μ — постоянный параметр ($0 \leqslant \mu \leqslant 1$). По сравнению с исходным гамильтонианом, записанным в виде

$$H = H_0(x) + \mu [H_{1s}(x) + H_{1p}(y, x)], \tag{3.3.2}$$

причем

$$\oint H_{1p} dy = 0,$$

частоты ω_k определяются теперь формулами

$$\omega_k = \frac{\partial}{\partial x_k} (H_0 + \mu H_{1s}) \Big|_{x=x^0} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

$$\omega_j = \frac{\partial}{\partial x_j} H_{1s} \Big|_{x=x^0} \qquad (j = m+1, \ldots, n),$$

и предполагаются выполненными неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{m} j_k \omega_k + \mu \sum_{i=m+1}^{n} j_i \omega_i \right| \geqslant \mu \left[\sum_{p=1}^{n} |j_p| \right]^{-n-1} \delta$$

для всех не равных одновременно нулю целых чисел j_p. Известно, что мера всех ω_k ($k = 1, \ldots, n$), не удовлетворяющих этим

[1]) См. примечание в конце § 4 главы IV (*прим. перев.*).

условиям, меньше $K\delta\mu$, где K — надлежащим образом подобранная функция от ω_k. Введем новое предположение

$$\det\left\{\frac{\partial^2 (H_0 + \mu H_{1s})}{\partial x_i \partial x_j}\right\} = 2N\mu \neq 0$$

для $x = x^0 \in D$. Если функция H_{1s} достаточно мала, то существуют условно-периодические решения системы, соответствующие гамильтониану H, и они имеют вид

$$y_k = \omega_k (t - \tau_k) + \varphi_k \left(e^{i\lambda_1 t}, \ldots, e^{i\lambda_m t}, e^{i\mu\lambda_{m+1} t}, \ldots, e^{i\mu\lambda_n t}\right),$$
$$y_j = \mu\omega_j (t - \tau_j) + \varphi_j \left(e^{i\lambda_1 t}, \ldots, e^{i\lambda_m t}, e^{i\mu\lambda_{m+1} t}, \ldots, e^{i\mu\lambda_n t}\right),$$
$$x_i = \alpha_i + \psi_i \left(e^{i\lambda_1 t}, \ldots, e^{i\lambda_m t}, e^{i\mu\lambda_{m+1} t}, \ldots, e^{i\mu\lambda_n t}\right),$$

где $k = 1, \ldots, m$; $j = m + 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, n$. Функции $\varphi_k, \varphi_j, \psi_i$ имеют одинаковый вид. В действительности доказательство осуществляется приведением гамильтониана (3.3.2) к виду (3.3.1) с разложением в ряд Тейлора и применением бесконечного числа канонических преобразований, уменьшающих на каждом шаге величину $H_1(y, x)$. Можно показать, что этот метод будет сходящимся при $n = 2$, $m = 1$. Сходимость, однако, не может быть равномерной ни по отношению к μ, ни по отношению к x^0.

Теорема Арнольда [7] является гораздо бо́льшим достижением, особенно это касается свойств сходимости. Арнольд рассматривает функцию Гамильтона $H(y, x, \varepsilon)$, где $y = (y_0, y_1)$, $x = (x_0, x_1)$, а y_0, x_0 — векторы размерности n_0 и y_1, x_1 — векторы размерности n_1, так что $n = n_0 + n_1$ равно числу степеней свободы системы. Функция H предполагается 2π-периодической по каждой компоненте вектора y_0 и аналитической в области $D = \{x_0 \in G_0, |\operatorname{Im} y_0| \leqslant \rho, |x_1| \leqslant R, |y_1| \leqslant R\}$, а ε — вещественный параметр и $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$. Также предполагается, что существует разложение

$$H = H_0(x_0) + \varepsilon H_1(y, x) + \varepsilon^2 H_2(y, x, \varepsilon),$$

где H_1 может быть разбита на короткопериодическую $\widetilde{H}_1$ и долгопериодическую $\overline{H}_1$ части; при этом

$$H_1 = \overline{H}_1(x_0, x_1, y_1) + \widetilde{H}_1(x_0, x_1, y_0, y_1)$$

и

$$\oint \widetilde{H}_1 dy_0 = 0,$$

т. е. многомерный ряд Фурье для $\widetilde{H}_1$ не имеет постоянного члена или, точнее говоря, он может быть включен в $\overline{H}_1$. Долгопе-

риодическая часть также может быть разбита на секулярную часть $\overline{H}_{1s}$ и чисто периодическую (по каждой компоненте вектора y_1) часть $\overline{H}_{1p}$, т. е.

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_{1s}(x_0, \tau) + \overline{H}_{1p}(x_0, x_1, y_1),$$

где

$$\overline{H}_{1s} = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^{n_1} \lambda_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j,k=1}^{n_1} \lambda_{ijk} \tau_i \tau_j \tau_k + \ldots$$

Величины λ с индексами являются функциями x_0, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, а

$$2\tau_k = x_{1k}^2 + y_{1k}^2 \qquad (k = 1, \ldots, n_1).$$

Предполагается также, что в области G_0 выполнены условия

$$\det\left\{\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_{0i} \partial x_{0j}}\right\} \neq 0, \quad \det\{\lambda_{ij}\} \neq 0.$$

Тогда при соответствующих ограничениях на H_2, $\tilde{H}_1$, $\overline{H}_1$, $\overline{H}_{1s}$, $\overline{H}_{1p}$ для произвольной постоянной $K > 0$ можно найти такое число $E_0(K, H_0, H_1, G_0, \rho, R, C, \varepsilon)$, что при $0 < E < E_0$, $0 < \varepsilon < E_0^4$ и

$$|H_2| < C, \ |\tilde{H}_1| \leqslant C, \ |\overline{H}_{1s}| \leqslant C,$$
$$|\overline{H}_{1p}| < C \max(|x_1|, |y_1|), \ |H_1| < C$$

существуют условно-периодические решения данной гамильтоновой системы, покрывающие инвариантные торы T_ω, погруженные в область D_1, являющуюся частью области D, и дополнение этой области D_2, мало, в том смысле, что

$$\operatorname{mes} D_2 < K \operatorname{mes} D_1.$$

Инвариантные множества T_ω аналитичны и мало отличаются (в некотором специальном смысле) от торов, определяемых условиями $x_{0k} = x_{0k\omega} = \text{const}$, $\tau_k = \tau_{k\omega} = \text{const}$. Векторные частоты условно-периодического движения на таком торе имеют вид

$$\omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial x_{0\omega}}, \qquad \omega_1 = \frac{\partial \overline{H}_{1s}}{\partial \tau_\omega}.$$

Эта теорема, так же как и теорема Колмогорова, имеет большой геометрический смысл. Она показывает сохранение определенных инвариантных многообразий при возмущениях. Она также подразумевает, что эти инвариантные многообразия могут быть параметризованы в торы [1]), хотя условия невырожденности для H_0 и смягчены.

[1]) То есть эти инвариантные многообразия топологически эквивалентны соответствующим торам (*прим. перев.*).

4. Возмущение линейных колебаний

Рассмотрим гамильтониан

$$H = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{3.4.1}$$

где $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — канонически сопряженные векторы импульсов и координат размерности n, и пусть H — вещественная аналитическая функция в области D $2n$-мерного фазового пространства. Предположим, что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — вещественные переменные, а точка $(0, 0) \in D$ — изолированное положение равновесия системы

$$\dot{x}_k = -H_{y_k}, \qquad \dot{y}_k = H_{x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{3.4.2}$$

Предположим также, что

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_j} \right\} \neq 0$$

при $\boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{y} = 0$. По предположению функция H раскладывается в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, так что

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{3.4.3}$$

где H_p — однородные полиномы степени p относительно $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$. В дальнейшем предположим, что все собственные числа квадратичной формы H_2 различны между собой. Обозначим их через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$. Тогда существует линейное симплектическое преобразование, приводящее (3.4.3) к виду

$$H = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k Y_k + H_3(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + H_4(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + \ldots \tag{3.4.4}$$

Введем новые переменные по формулам

$$\varepsilon \xi_k = X_k, \qquad \varepsilon \eta_k = Y_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{3.4.5}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Уравнения (3.4.2) теперь можно переписать так:

$$\dot{\xi}_k = -\frac{\partial F}{\partial \eta_k}, \qquad \dot{\eta}_k = \frac{\partial F}{\partial \xi_k}, \tag{3.4.6}$$

где

$$F = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k \eta_k + \varepsilon F_1(\xi, \eta, \varepsilon), \tag{3.4.7}$$

а функция F_1 является степенным рядом относительно ξ_k, η_k, ε, начинающимся с членов третьей степени относительно ξ_k, η_k.

Собственные числа могут быть вещественными или комплексными. Здесь мы будем предполагать, что точка (0, 0) является *положением равновесия эллиптического типа*, т. е. все λ_k — чисто мнимые. Мы также определим

$$\lambda_k = i\omega_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

где вещественные числа ω_k могут быть положительными или отрицательными, но не нулевыми[1]). В этом случае коэффициенты функции F_1 будут чисто мнимыми, и мы можем написать[2])

$$F_1 = -iH_1,$$

где H_1 — степенной ряд относительно ξ_k, η_k с вещественными коэффициентами, и он начинается с членов третьего порядка относительно ξ_k, η_k.

После применения канонического преобразования

$$u_k = \frac{1}{2}\xi_k\eta_k, \qquad v_k = 2i\ln\frac{\xi_k}{\eta_k}, \tag{3.4.8}$$

или

$$\eta_k = \sqrt{2u_k}\,e^{iv_k}, \qquad \xi_k = \sqrt{2u_k}\,e^{-iv_k}, \tag{3.4.9}$$

уравнения (3.4.6) принимают вид

$$\dot{u}_k = -\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial v_k}, \qquad \dot{v}_k = \omega_k + \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial u_k}. \tag{3.4.10}$$

Этим уравнениям соответствует функция Гамильтона

$$H = \sum_{k=1}^{n}\omega_k u_k + \varepsilon H_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \varepsilon),$$

где функция H_1 периодична по каждой переменной v_k с периодом 2π, а ее коэффициенты ряда Фурье являются полиномами относительно $u_1, \ldots, u_n$[3]).

---

[1]) Знаки величин ω_k выясняются на этапе линейной нормализации (*прим. перев.*).

[2]) Это утверждение автора ошибочно. Например, квадратичная часть гамильтониана $H = \frac{1}{2}\omega(x^2+y^2) + 2\sqrt{2}x^2y$ в окрестности нулевого положения равновесия имеет чисто мнимое собственное значение $i\omega$, а тем не менее, записанный с помощью преобразования $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+iY)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(iX+Y)$ через переменные X, Y гамильтониан имеет вид $H = i\omega XY + (X^2+Y^2)(-Y+iX)$, т. е. не все его коэффициенты являются чисто мнимыми. Чтобы утверждение автора стало верным, исходный гамильтониан должен обладать некоторыми специальными свойствами (*прим. перев.*).

[3]) Эти полиномы обладают некоторыми специальными свойствами; см. (5.2.11) (*прим. перев.*).

Следовательно, задача построения решений в окрестности положения равновесия сводится к изучению возмущений интегрируемой системы дифференциальных уравнений, которая соответствует гамильтониану

$$H_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k u_k.$$

Теоремы, сформулированные в предыдущих параграфах, к этой задаче неприменимы, так как

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i \partial u_j} \right\} = 0.$$

С другой стороны, может оказаться, что функция

$$H_{1s} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} H_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\, dv_1 \ldots dv_n$$

равна нулю и, более того, частоты нормальных колебаний ω_k могут оказаться линейно зависимыми на множестве целых чисел. Однако в общем случае этого не будет. Именно с этой проблемой мы будем иметь дело в следующей главе, в которой строятся формальные ряды, являющиеся решением системы (3.4.10).

Важно отметить, что упомянутая проблема является частным случаем классической задачи о возмущениях линейных осцилляторов, т. е. задачи исследования уравнений ($k = 1, \ldots, n$)

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \varepsilon f_k(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \varepsilon).$$

Эти уравнения легко приводятся к виду

$$\dot{u}_k = \varepsilon U_k, \quad \dot{v}_k = \omega_k + \varepsilon V_k$$

с помощью преобразования

$$\dot{x}_k + i\omega_k x_k = u_k e^{iv_k},$$

т. е.

$$\dot{x}_k = u_k \cos v_k, \qquad \omega_k x_k = u_k \sin v_k, \tag{3.4.11}$$

где x_k, $\dot{x}_k$ ($k=1, \ldots, n$) — вещественные величины. Это и есть очень важная *задача о возмущенных линейных колебаниях*. Авторами основных результатов в этой задаче были: Крылов и Боголюбов [6], Ван дер Поль [42], Боголюбов [12, 13], Митропольский [28], Арнольд [1] и Мозер [29, 30].

Рассмотрим сначала автономный случай дифференциальных уравнений

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon Z(z, \dot{z}), \tag{3.4.12}$$

где функция Z предполагается аналитической по z, $\dot{z}$ в некоторой области фазового пространства $(z, \dot{z})$ и по ε при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Частота ω — вещественная и постоянная. С помощью преобразования

$$z = \sqrt{\frac{2x}{\omega}} \sin y, \qquad \dot{z} = \sqrt{2\omega x} \cos y \tag{3.4.13}$$

это уравнение переходит в уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon \sqrt{\frac{2x}{\omega}} \cos y Z^*(x, y) = \varepsilon g(r, y), \\ \dot{y} &= \omega - \varepsilon \frac{\sin y}{\sqrt{2\omega x}} Z^*(x, y) = \omega + \varepsilon f(x, y), \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

и будем считать функции g и f периодическими по y с периодом 2π. Мы попытаемся получить такое преобразование (см. [34])

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon v(\eta, \varepsilon) + \varepsilon V(\eta, \varepsilon)\xi = x(\xi, \eta, \varepsilon), \\ y &= \eta + \varepsilon u(\eta, \varepsilon) = y(\eta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

что уравнения (3.4.14) сводятся к уравнениям

$$\dot{\xi} = O(\varepsilon^2), \qquad \dot{\eta} = \tilde{\omega} + O(\xi). \tag{3.4.16}$$

Положив $\xi = 0$, мы, очевидно, сведем уравнения (3.4.16) к линейной интегрируемой системе.

Рассмотрим более общую систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega + Mx + \varepsilon g(x, y), \\ \dot{y} &= \omega + \lambda + \varepsilon f(x, y), \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

и будем считать, что существуют такие постоянные Ω, M, λ, зависящие от ε, ω, что система (3.4.17) сводится к системе (3.4.16). Решение этой задачи будет возможно, если систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon, \omega) = M(\varepsilon, \omega) &= 0, \\ \tilde{\omega} &= \omega + \lambda(\varepsilon, \omega) \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

можно решить для данных ω и ε из некоторого интервала $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Мы предположим, что функции v, V, u являются пе-

риодическими с периодом 2π по η, аналитическими по ε и η и имеют нулевое среднее относительно η. Более того, мы предположим, что существуют формальные ряды

$$\begin{aligned} \lambda &= \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots, \\ M &= \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots, \\ \Omega &= \varepsilon\Omega_1 + \varepsilon^2\Omega_2 + \ldots \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

В силу сделанных предположений об аналитичности можно записать

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \\ V &= V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \ldots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

где коэффициенты v_k, V_k, u_k $(k = 0, 1, \ldots)$ раскладываются в ряды Фурье; например,

$$v_k = \sum_j v_{kj} e^{ij\eta}, \qquad v_{kj} = \text{const}.$$

Из второго соотношения (3.4.15) следует, что

$$\dot{y} = \dot{\eta} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \dot{\eta},$$

и, сравнивая это уравнение со вторым соотношением (3.4.16), имеем

$$\dot{\eta} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} \dot{\eta} = \omega + \lambda + \varepsilon f(x(\xi, \eta, \varepsilon), y(\eta, \varepsilon)). \tag{3.4.21}$$

Из первых соотношений (3.4.15) и (3.4.16) получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta} \dot{\eta} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \dot{\eta} + \varepsilon V \dot{\xi} &= \\ = \Omega + M(\xi + \varepsilon v + \varepsilon V \xi) + \varepsilon g(x(\xi, \eta, \varepsilon), y(\eta, \varepsilon)). \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Дифференцирование этого уравнения по ξ дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \xi} + \varepsilon V \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} &= \\ = M(1 + \varepsilon V) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Считая уравнения (3.4.16) выполненными при $\xi = 0$, из (3.4.21),

(3.4.22) и (3.4.23) получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon\omega\frac{\partial u}{\partial\eta} &= \lambda + \varepsilon f(\varepsilon v, \eta + \varepsilon u),\\
\varepsilon\omega\frac{\partial v}{\partial\eta} &= \Omega + \varepsilon M v + \varepsilon g(\varepsilon v, \eta + \varepsilon u),\\
\varepsilon\omega\frac{\partial V}{\partial\eta} &= M(1+\varepsilon V) + \varepsilon\frac{\partial g}{\partial\xi}(\varepsilon v, \eta + \varepsilon u)(1+\varepsilon V).
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

Осталось показать, что из (3.4.24) можно получить функции u, v, V, определяющие нужным образом величины λ, M и Ω. Используя (3.4.19) и (3.4.20), для членов порядка $O(\varepsilon)$ получаем уравнения

$$\begin{aligned}
\omega\frac{du_0}{d\eta} &= \lambda_1 + f(0, \eta),\\
\omega\frac{dv_0}{d\eta} &= \Omega_1 + g(0, \eta),\\
\omega\frac{dV_0}{d\eta} &= M_1 + \frac{\partial g}{\partial\xi}(0, \eta).
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

В силу сделанных предположений имеем

$$\begin{aligned}
f(\xi, \eta) &= \sum_k f_k(\xi)\, e^{ik\eta} \qquad (k \neq 0),\\
g(\xi, \eta) &= \sum_k g_k(\xi)\, e^{ik\eta} \qquad (k \neq 0),\\
\frac{\partial g}{\partial\xi}(\xi, \eta) &= \sum_k g_k'(\xi)\, e^{ik\eta}.
\end{aligned}$$

Полагая

$$u_0 = \sum_k u_{0k} e^{ik\eta} \qquad (k \neq 0),$$

из первого уравнения (3.4.25) получаем

$$\lambda_1 = -f_0(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \eta)\, d\eta = \text{const},$$

$$u_{0k} = \frac{f_k(0)}{i\omega_k} = \text{const}.$$

Аналогичным образом находим

$$\Omega_1 = -g_0(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(0, \eta)\, d\eta = \text{const},$$

$$v_{0k} = \frac{g_k(0)}{i\omega_k} = \text{const}$$

и

$$M_1 = -\frac{dg_0(0)}{d\xi} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \xi}(0, \eta)\, d\eta = \text{const},$$

$$V_{0k} = \frac{g_k'(0)}{i\omega_k} = \text{const}.$$

В общем случае нетрудно показать, что уравнения для членов порядка ε^k $(k = 2, 3, \ldots)$ имеют вид (3.4.25), т. е. в результате получим

$$\begin{aligned} \eta &= \omega t + \eta_0, \\ x &= \varepsilon v(\eta, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j \varepsilon^k v_{kj} e^{ij(\omega t + \eta_0)}, \\ y &= \omega t + \eta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j \varepsilon^k u_{kj} e^{ij(\omega t + \eta_0)}, \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

и, следовательно, учитывая (3.4.13), можно заключить, что мы нашли периодическое решение $(\xi = 0)$ уравнения (3.4.12), обобщенного нами для того, чтобы можно было учесть члены, получающиеся при подстановке (3.4.14) в (3.4.17). Сходимость метода оказывается возможной, если предположить, что величина $|\omega|$ не слишком близка к нулю, и если предположить сходимость выражений (3.4.20) (см., например, [34]).

Типичным примером рассмотренной задачи является система автономных уравнений

$$\dot{z}_1 = z_2, \qquad z_2 = -\omega^2 z_1 + \varepsilon Z(z_1, z_2),$$

в которых функция Z является полиномом относительно z_1 и z_2. Эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_1 &= (\varepsilon\omega_1 - \omega^2) z_1 + \varepsilon\omega_2 z_2 + \varepsilon P_2(z_1, z_2), \end{aligned}$$

где P_2 — полином, начинающийся с членов не ниже второй степени.

Предположим, что собственные числа задачи, определяемые уравнением

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \varepsilon\omega_1 - \omega^2 & \varepsilon\omega_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

различны, т. е. $\omega^2 \neq \varepsilon\omega_1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\omega_2^2$. В этом случае линейная часть может быть приведена к диагональному виду с помощью

линейного преобразования

$$z = Bx, \qquad |B| \neq 0,$$

получающегося при условии, что

$$B^{-1}AB = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

где A — матрица линейной части уравнений.

В результате преобразования получаем

$$\dot{x} = \Lambda x + \varepsilon B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} = \Lambda x + g(x), \tag{3.4.27}$$

где функции g_k $(k = 1, 2)$ являются полиномами относительно x_1, x_2, начинающимися с членов не ниже второго порядка.

Посмотрим, при каких условиях существует преобразование

$$x = \varphi(y) = y + \varphi^*(y), \tag{3.4.28}$$

приводящее уравнения (3.4.27) к линейному виду

$$\dot{y} = \Lambda y, \tag{3.4.29}$$

т. е. к виду $\dot{y}_k = \lambda_k y_k$ $(k = 1, 2)$. Пусть функции φ_k являются степенными рядами относительно y_1, y_2, а разложение функции φ_k^* начинается с членов не ниже второго порядка.

Используя выписанные выше соотношения, получаем такие уравнения относительно φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Lambda y = \Lambda \varphi + g(\varphi). \tag{3.4.30}$$

Учитывая вид функций g, легко проверить, что уравнения

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_k}\lambda_k y_k = \lambda_n \varphi_n + g_n(\varphi_1, \varphi_2) \tag{3.4.31}$$

при $n = 1, 2$ дают коэффициенты функций φ, если только

$$\sum_{k=1}^{2} \lambda_k p_k - \lambda_j \neq 0 \qquad (j = 1, 2), \tag{3.4.32}$$

где p_1 и p_2 — целые неотрицательные числа, а $p_1 + p_2 \geqslant 2$.

Если вещественные части величин λ_k имеют одинаковые знаки, то доказательство сходимости можно провести так же, как это сделал Зигель [40] при доказательстве сходимости процеду-

ры построения периодических движений, определяемых теоремой Ляпунова, однако такое доказательство для общих случаев неизвестно[1]).

Важно отметить, что упомянутые выше предположения для уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon(1 - z^2)\dot{z}$$

выполняются при $\omega > \varepsilon/2$.

5. Линейные периодические возмущения

В заключение этой главы рассмотрим пример неавтономных линейных возмущений. В частности, мы будем иметь дело с уравнением

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon F(t) z, \tag{3.5.1}$$

где $F(t) = F(t+2\pi)$ для всех t и $F(t)$ является аналитической функцией для всех конечных t и имеет нулевое среднее значение. Проблемы, связанные с этим уравнением, были детально изучены сначала Чезари [16], а затем Гэмбиллом [18], Хейлом [21] и некоторыми другими авторами[2]). Здесь эту задачу мы будем рассматривать с помощью методов теории возмущений, специально приспособленных для ее решения, но отличающихся от методов, рассмотренных выше в § 9 главы II.

Введем преобразование

$$z = \sqrt{\frac{2x}{\omega}} \sin y, \qquad \dot{z} = \sqrt{2\omega x} \cos y \tag{3.5.2}$$

и получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2\varepsilon}{\omega} x \sin y \cos y\, F(t), \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega} \sin^2 y F(t), \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

уже рассмотренную для автономного случая. Далее, рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon v(\eta, t, \varepsilon) + \varepsilon V(\eta, t, \varepsilon)\xi, \\ y &= \eta + \varepsilon u(\eta, t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

---

[1]) В случае, когда все $\operatorname{Re} \lambda_k$ имеют одинаковые знаки и выполнено условие (3.4.32), доказательство сходимости проведено Пуанкаре [88.2]. Доказательство сходимости при невыполнении условий (3.4.32) проведено Дюляком [21*] (*прим. ред.*).

[2]) Подробную библиографию работ, посвященных исследованию таких систем, см. в [22*] (*прим. перев.*).

и покажем, что существуют 2π-периодические по y и t функции v, V, u, такие, что уравнения (3.5.3) приводятся к виду

$$\dot{\eta}=\Omega(\varepsilon, \omega) \tag{3.5.5}$$

при $\xi = 0$. Это позволит определить характеристические показатели Хилла в этой задаче. Следуя той же процедуре, что и в предыдущем параграфе, легко находим

$$\varepsilon\left(\Omega\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\omega-\Omega-\frac{\varepsilon}{\omega}\sin^2(\eta+\varepsilon u)\,F(t),$$

$$\varepsilon\left(\Omega\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\frac{2\varepsilon^2}{\omega}\,v\sin(\eta+\varepsilon u)\cos(\eta+\varepsilon u)\,F(t),$$

$$\varepsilon\left(\Omega\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial t}\right)=\frac{2\varepsilon}{\omega}(1+\varepsilon V)\sin(\eta+\varepsilon u)\cos(\eta+\varepsilon u)\,F(t).$$

Отсюда, полагая $\omega-\Omega=\varepsilon\lambda$, получаем

$$\Omega\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial t}=\lambda-\frac{1}{\omega}\sin^2(\eta+\varepsilon u)\,F(t), \tag{3.5.6}$$

$$\Omega\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{\omega}\,v\sin(2\eta+2\varepsilon u)\,F(t), \tag{3.5.7}$$

$$\Omega\frac{\partial(1+\varepsilon V)}{\partial\eta}+\frac{\partial(1+\varepsilon V)}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{\omega}(1+\varepsilon V)\sin(2\eta+2\varepsilon u)\,F(t). \tag{3.5.8}$$

Предположим, что из уравнения (3.5.6) можно определить величину λ и 2π-периодическую по t и η функцию u. Тогда правые части уравнений (3.5.7) и (3.5.8), поделенные на v и $1+\varepsilon V$ соответственно, будут известными 2π-периодическими функциями t и η. Если v и $1+\varepsilon V$ удовлетворяют одинаковым начальным (или граничным) условиям, то, очевидно,

$$v=1+\varepsilon V. \tag{3.5.9}$$

С другой стороны, взяв частные производные по η от обеих частей уравнения (3.5.6), находим

$$\Omega\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=-\frac{1}{\omega}\sin(2\eta+2\varepsilon u)\,F(t)\cdot\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}\right),$$

т. е.

$$\Omega\frac{\partial}{\partial\eta}\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=-\frac{\varepsilon}{\omega}\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\sin(2\eta+2\varepsilon u)\,F(t).$$

Отсюда вытекает, что уравнение для $1+\varepsilon\partial u/\partial\eta$, правая часть которого берется со знаком минус, такое же, что и уравнение (3.5.7) или (3.5.8). В частности, отсюда следует, что необходимо выпол-

нение равенства

$$\ln\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\ln v=f(\eta-\Omega t),$$

где f — произвольная функция. Положим $f=\ln[g(\eta-\Omega t)]$, так что

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)v=g(\eta-\Omega t), \tag{3.5.10}$$

где g — произвольная функция. Если удастся найти функцию, $u(\eta, t)$, то с помощью алгебраических операций легко получатся функции v и $1+\varepsilon V$, но с точностью до некоторой произвольной функции. Если функция u является 2π-периодической по η и t и требуется, чтобы этими же свойствами обладали функции v и V, то за функцию $g(\eta-\Omega t)$ необходимо принять какое-нибудь постоянное число, если только величина Ω не окажется рациональной. Тем не менее, как мы вскоре увидим, этот последний случай надо исключить из рассмотрения, если функцию u необходимо определять из уравнения (3.5.6). Следовательно, необходимо, чтобы

$$v\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=k(\varepsilon,\omega)=\text{const}. \tag{3.5.11}$$

После учета этого равенства преобразование (3.5.4) при $\xi=0$ принимает вид

$$x=\varepsilon v(\eta, t, \varepsilon), \qquad y=\eta+\varepsilon u(\eta, t, \varepsilon)$$

или

$$\begin{aligned} x&=\varepsilon v(\Omega t+\eta_0, t, \varepsilon),\\ y&=\Omega t+\eta_0+\varepsilon u(\Omega t+\eta_0, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

где u, v — 2π-периодические функции по $\eta=\Omega t+\eta_0$ и t. Эти функции не могут быть периодическими по t, если только не исключить случаи, когда величина Ω является рациональным числом. Принимая во внимание (3.5.2) и (3.5.12), легко видеть, что

$$z=\alpha(t)\cos\Omega t+\beta(t)\sin\Omega t,$$

так что в действительности величина Ω является характеристическим показателем Хилла. Применение описанного метода к уравнению Хилла в работе Джакальи [20] показало его преимущества по сравнению с классической процедурой вычисления бесконечного определителя.

Таким образом, осталось показать, что из уравнения (3.5.6) можно определить величину $\lambda=\lambda(\Omega, \omega, \varepsilon)$ и 2π-периодическую

по η и t функцию $u(\eta, t)$. Действительно, рассмотрим разложения

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots,$$
$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots,$$

где

$$u_k = u_k(\eta, t) = u_k(\eta + 2\pi, t) = u_k(\eta, t + 2\pi)$$

и

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} u_k d\eta = 0.$$

Для коэффициентов при ε^0 находим

$$\Omega \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda_0 - \frac{1}{\omega} \sin^2 \eta F(t) \tag{3.5.13}$$

и, следовательно, $\lambda_0 = 0$. В силу сделанных предположений, можно написать

$$F(t) = \sum_k F_k e^{ikt}, \qquad F_0 = 0,$$

что дает возможность определить u_0 при условии, что

$$|k\Omega - j| \geqslant \varepsilon |k|^{-p}, \tag{3.5.14}$$

где k — не равное нулю целое число, p — выбранное соответствующим образом положительное число, а j — произвольное целое число. Это утверждение будет рассмотрено в следующей главе в связи с полученными Мозером [33] результатами об отображениях кольца, сохраняющих площадь. В теории Мозера, кроме того, будет рассмотрена и проблема сходимости. Функции u_k, получающиеся при k-м приближении по ε, определяются как решение уравнений вида

$$\Omega \frac{\partial u_k}{\partial \eta} + \frac{\partial u_k}{\partial t} = \lambda_k + \sum_{p,q} A_{pq}^{(k)} e^{i(p\eta + qt)}, \tag{3.5.15}$$

если определить $\lambda_k = -A_{00}^{(k)}$, что является типичным для методов усреднения. В результате получим

$$\lambda = \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots = \varepsilon G(\varepsilon, \Omega, \omega),$$

т. е.

$$\omega - \Omega = \varepsilon^2 G(\varepsilon, \Omega, \omega),$$

откуда находим характеристический показатель в виде

$$\Omega = \Omega(\varepsilon, \omega) = \omega + \varepsilon^2\Omega_2(\omega) + \varepsilon^3\Omega_3(\omega) + \ldots.$$

Если уравнение (3.5.1) рассматривается для n-мерного случая, т. е.

$$\ddot{z} + Az = \varepsilon B(t) z,$$

где $z = \mathrm{col}\,(z_1, \ldots, z_n)$, A — постоянная $n \times n$-матрица, а $B(t)$ — периодическая $n \times n$-матрица, то вышеописанная процедура может быть применена в случае, когда все собственные числа матрицы A различны (и, следовательно, не равны нулю). Необходимо отметить при этом существенную трудность, заключающуюся в том, что уравнения, соответствующие уравнениям (3.5.6), не будут уравнениями только относительно неизвестной u_k, а являются уравнениями относительно всех других компонент вектора u и вектора v. Однако этот факт не мешает одновременному определению функций u и v с помощью метода последовательных приближений и обобщенной процедуры усреднения.

6. Замечания

Выполнимость условия иррациональности

$$|\omega^{\mathrm{T}} k| \geqslant K \left(\sum_{j=1}^{n} |k_j| \right)^{-s}, \tag{3.6.1}$$

где $s = n + 1$, может быть установлена в следующей теореме, сформулированной в работе Хинчина [23] и обсуждавшейся также в работе Коксмы [24].

Теорема. *Почти каждый вектор* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *удовлетворяет выписанным выше неравенствам* (3.6.1) *для всех ненулевых целочисленных векторов* $k = (k_1, \ldots, k_n)$ *и выбранной соответствующим образом величины* $K(\omega) > 0$.

Доказательство теоремы является весьма простым и опирается на тот факт, что неравенства (3.6.1) не выполняются только в резонансных областях, ширина которых меньше $2K\,|k|^{-s}$, где $|k| = \sum |k_j|$, для данных k, K и ω из ограниченной области $\Omega(\omega)$. Этот факт очень сильно влияет на сходимость итераций, так как, считая функцию $F(z)$ аналитической (см. уравнение (3.2.20)), получаем, что ее коэффициенты $f_{(k)}$ убывают экспоненциально быстро, т. е. для некоторых положительных вещественных чисел M, ρ имеем

$$|f_{(k)}| \leqslant M e^{-|k|\rho},$$

и, следовательно, из (3.2.22) получаем

$$\left| \frac{f_{(k)}}{(k^{\mathrm{T}}\omega)} \right| \leqslant \frac{ML}{K\delta^p} e^{-|k|(\rho-\delta)},$$

где $p = 2n + 3$, а L, δ — выбранные соответствующим образом постоянные. Это приводит к сходимости ряда для производящей функции метода Пуанкаре S в кольце $\Gamma(\rho - \delta)$.

Колмогоров [25] предложил следующий подход к решению вопроса о сходимости последовательности канонических преобразований, определяемых функцией S. Рассмотрим инвариантный тор $T(\omega^*)$ возмущенной системы; движение на нем будет условно-периодическим с заданными заранее частотами $\omega^* = (\omega_1^*, \ldots, \omega_n^*)$, удовлетворяющими условиями (3.6.1). Тор $T(\omega^*)$ расположен в окрестности соответствующего тора невозмущенной системы, определяемой гамильтонианом $H_0(x)$, т. е.

$$x^* = x + O(\mu), \qquad \omega^* = \frac{\partial H_0}{\partial x}\bigg|_{x=x^*}.$$

В этой окрестности можно ввести новые переменные x', y' с помощью аналитического канонического преобразования, определяемого функцией S, а гамильтониан тогда принимает вид

$$H(y, x) = H^{(1)}(y', x') = H_0^{(1)}(x') + H_1^{(1)}(y', x'),$$

где соотношение $|H_1^{(1)}| \sim |H_1|^2$ дает начало квадратичной сходимости ньютоновского типа, что обсуждалось в работах Нэша [37] и Канторовича [22]. Такой подход изменяет характер сходимости последовательных приближений, который был указан после уравнения (3.2.1) и где было получено только линейное сжатие, так же как и при классическом подходе в методе Пуанкаре. Оценки из леммы 1 могут быть получены с помощью процедуры мажорирования, однако, как указывал Мозер [35], оценки с помощью мажорирующих рядов не приводят к сходимости. Оценки Мозера привели к мажорирующим рядам $\sum_p (p!)^{2s} \mu^p$, которые расходятся для всех $\mu > 0$. В модифицированном методе Ньютона, предложенном Колмогоровым, точность увеличивается как степень двух и предыдущие ряды заменяются на ряды $\sum_p (p!)^{2s} \mu^{2^p}$, которые сходятся при достаточно малых $\mu > 0$. Как указывал сам Колмогоров, его теорема непосредственно применима в некоторых классических задачах динамики, например, в следующих задачах.

а) Движение точки на аналитической поверхности, мало отличающейся от поверхности вращения или от поверхности эллипсоида.

б) Плоское движение (планетарный случай) астероида под действием притяжения Солнца и Юпитера. Хотя в этой задаче гамильтониан невозмущенного движения имеет вид (в равномерно

вращающейся системе координат)

$$H_0 = \frac{1}{x_1^2} + \alpha x_2$$

и, следовательно, преобразование формально расходится, в том смысле, что $\det\{\partial^2 H_0/\partial x_i \partial x_j\} = 0$, но модифицированное условие

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} & \dfrac{\partial H_0}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial x_j} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

удовлетворено, и теорема Колмогорова применима.

Интересно отметить, что если выписанное выше условие выполнено, то существует функция $F = \Phi(H) = \Phi(H_0) + \varepsilon \ldots$, такая, что функция $\Phi(H_0)$ невырождена в обычном смысле. В качестве примера можно взять функцию

$$F = H^2 = \left(\frac{1}{x_1^2} + \alpha x_2\right)^2 + \ldots = F_0 + \ldots$$

и в результате получить $\det\{\partial^2 F_0/\partial x_i \partial x_j\} \neq 0$.

в) Устойчивость положения равновесия и периодических решений в системе с двумя степенями свободы в общем эллиптическом случае. Важным приложением является круговая ограниченная задача трех тел (см. работы Арнольда [1] и Леонтовича [27]). Наилучшее решение этого последнего вопроса было дано в работе Депри [17][1]), которые использовали важные работы Мозера [32] и Гельфанда и Лидского [19][2]). В окрестности такой эллиптической точки гамильтониан может быть записан в виде

$$H = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2} \omega_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) + H_3 + \ldots$$

Если $\omega_1 \omega_2 > 0$, то устойчивость гарантируется тем, что квадратичная форма H_2 в H будет знакоопределенной[3]), хотя это ус-

---

[1]) Окончательное решение задачи об устойчивости лагранжевых решений плоской круговой ограниченной задачи трех тел получено в работах [23*], [24*] (*прим. ред.*).

[2]) В действительности упомянутые работы Мозера и Гельфанда и Лидского не имеют непосредственного отношения к исследованию, проведенному Депри (*прим. ред.*).

[3]) В этом случае устойчивость устанавливается на основании теоремы Ляпунова об устойчивости, если за функцию Ляпунова принять знакоопределенный гамильтониан H, полная производная которого в силу уравнений движения равна нулю (*прим. перев.*).

ловие и является только достаточным. Для доказательства устойчивости в случае $\omega_1\omega_2<0$ функция H приводится к нормальной форме до членов четвертой степени, что, в соответствии с результатами Биркгофа [11], можно сделать, если $j_1\omega_1+j_2\omega_2\neq 0$ при $0<|j_1|+|j_2|\leqslant 4$, или если $|\omega_1/\omega_2|\neq p/q$ при $p, q=1, \ldots$ $\ldots, 4$. Укороченная нормальная форма в этом случае будет иметь вид

$$H=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2}\omega_j\left(x_j^2+y_j^2\right)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{4}\beta_{kl}\left(x_k^2+y_k^2\right)\left(x_l^2+y_l^2\right)+\ldots$$

Тогда теорема Арнольда утверждает, что:

Если для системы уравнений, соответствующей функции Гамильтона H,

$$\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \omega_1\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \omega_2\\ \omega_1 & \omega_2 & 0\end{vmatrix}\neq 0,$$

то положение равновесия $x_k=y_k=0$ $(k=1, 2)$ устойчиво.

Это условие в точности соответствует общему условию невырожденности в четвертом приближении, которое получили Мозер [33] и Арнольд [6] при решении задачи о существовании инвариантных кривых для возмущенного закручивающего отображения и при доказательстве теоремы Колмогорова о сохранении условно-периодических движений соответственно. Распространение этой теоремы на случаи большей размерности для получения таких же результатов, что и в системах с двумя степенями свободы, невозможно. Геометрическая причина этого заключается в том, что промежутки между торами размерности больше двух в общем случае не являются ограниченными областями. В действительности можно построить примеры, когда такие положения равновесия эллиптического типа являются неустойчивыми[1]).

Распространение результатов Колмогорова на случай вырожденных систем было дано Арнольдом по крайней мере для двух простых примеров: в классической задаче получения условно-периодических решений из периодических невозмущенных орбит [2] и в вырожденной задаче взаимодействия двух планет [4]. В первой задаче он рассматривал движение точки (y_1, y_2) на торе T_2. Это движение будет условно периодическим, если

$$\frac{dy_1}{dy_2}=\lambda, \tag{3.6.2}$$

[1]) Простой пример гамильтоновой системы такого рода см. в работе [25*] (*прим. перев.*).

где λ — иррациональное число. Близкая система (возмущенная) дифференциальных уравнений на торе может быть записана в виде

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \lambda + \alpha + \varepsilon f(y_1, y_2), \tag{3.6.3}$$

где α, ε — параметры, а функция $f(y_1, y_2)$ предполагается аналитической. Теорема Колмогорова в этом случае подразумевает, что если возмущение $\varepsilon f(y_1, y_2)$ достаточно мало, то можно найти такое $\alpha = \alpha_f(\varepsilon)$, что при соответствующей замене переменных уравнение (3.6.3) примет вид (3.6.2). Это и было показано Арнольдом в работе [3]. Вопрос о вырождении здесь возникает тогда, когда $\lambda = 0$ (или рационально), так что невозмущенное движение является периодическим и происходит по окружностям $y_1 = \text{const}$. В случае иррационального λ приведение (3.6.3) к виду (3.6.2) использует тот факт, что величина $n\lambda + m$ может быть ограничена снизу с помощью неравенства

$$|n\lambda + m| > K|\lambda|n^{-2} \tag{3.6.4}$$

для всех целых m и $n \neq 0$. Арнольд показал, что если $\Lambda(K)$ есть множество всех λ, удовлетворяющих условию (3.6.4), а Λ — объединение всех $\Lambda(K)$ при $K > 0$, то предельная точка множества Λ при K из интервала $(0, 1/4)$ есть нуль, и нуль является также точкой накопления Λ. Арнольдом установлены две следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть на торе T_2 дано дифференциальное уравнение*

$$dy_1/dy_2 = \varepsilon f(y_1, y_2), \tag{3.6.5}$$

где ε — параметр, а f — аналитическая функция. Пусть точки $y_1 + 2\pi$ и $y_2 + 2\pi$ отождествлены с точками y_1 и y_2, а

$$\int_0^{2\pi} f(y_1, y_2)\, dy_2 > 0$$

для всех y_1. Тогда для всех достаточно малых $\lambda \in \Lambda(K)$ можно найти $\varepsilon(\lambda)$ и замену переменных $z = z_\lambda(y_1, y_2)$, аналитическую по y_1 и y_2, такие, что уравнение (3.6.5) приводится к виду

$$dz/dy_2 = \lambda.$$

Множество $\varepsilon(\lambda)$ при $\lambda \in \Lambda$ имеет положительную меру и нуль является точкой накопления множества.

Для доказательства теоремы к уравнению (3.6.5) применяется классическая процедура усреднения, и оно приводится к виду

$$\frac{dy^{(1)}}{dy_2} = \varepsilon c + \varepsilon^2 F(y_1^{(1)}, \ y_2, \varepsilon). \tag{3.6.6}$$

После того как такое приведение осуществлено, рассматривается следующая теорема.

Теорема 2. *Теорема* 1 *справедлива для уравнения* (3.6.6) *на торе* T_2, *где* c — *постоянная, а* $F(y_1, y_2, \varepsilon)$ — *аналитическая функция.*

Теперь видно, что получена квадратичная сходимость. В конечном счете это приводит к тому, что

$$\lambda = \varepsilon c + \varepsilon^2 c + \ldots,$$

и после n-кратного применения процедуры усреднения получаем

$$\frac{dy_1^{(n)}}{dy_2} = \varepsilon c + \varepsilon^2 c + \ldots + \varepsilon^{2^n} F\left(y_1^{(n)}, y_2, \varepsilon\right).$$

В общем случае, если $|\varepsilon^2 F| < M < |\varepsilon c| \delta^4$, то после преобразования новая функция $F_{\text{нов}}$ удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon^2 F_{\text{нов}}| < M_1 < \frac{M^2}{\delta^4 |\varepsilon c|}.$$

Величину $\delta > 0$ можно выбрать так, что

$$|\varepsilon^2 F_{\text{нов}}^{(n)}| < M_n = M^{\frac{4n}{3}},$$

а это и обеспечивает сходимость.

Для примера рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon f(x, y),$$

и пусть среднее значение функции

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y)\, dx = f_s(y) > 0$$

для всех $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$. Определим также $f_p = f - f_s = f_p(x, y)$ и рассмотрим замену переменной

$$y_1 = y + \varepsilon h(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dy_1}{dx} = \varepsilon f_s(y) + \varepsilon f_p(x, y) + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial y} f(x, y).$$

Выберем

$$h(x, y) = -\int_0^x f_p(\xi, y)\, d\xi.$$

Следовательно,

$$\frac{dy_1}{dx} = \varepsilon f_s(y_1) + \varepsilon^2 \varphi(x, y_1, \varepsilon).$$

Наконец, определим новую переменную

$$y_2(y_1) = \int_0^{y_1} \frac{c\,d\xi}{f_s(\xi)},$$

где постоянная c определяется из условия $y_2(2\pi) - y_2(0) = 2\pi$, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \frac{c\,d\xi}{f_s(\xi)} = 2\pi.$$

Условие $f_s(y) > 0$ имеет очевидный смысл и необходимо для существования последнего интеграла. Для y_2 получаем, наконец, такое уравнение:

$$\frac{dy_2}{dx} = \varepsilon c + \varepsilon^2 \psi(x, y_2, \varepsilon).$$

Повторив процесс, получим

$$\frac{dy_3}{dx} = \varepsilon c' + \varepsilon^4 \theta(x, y_3, \varepsilon)$$

и т. д.

Можно привести очень много примеров, использующих идеи, содержащиеся в теореме Колмогорова. Тот вид (3.2.3), который, как мы предположили, имеет функция Гамильтона H, является немного менее общим, чем в оригинальном изложении Колмогорова, а условия невырожденности, получающиеся при этом, могут быть сделаны более наглядными и напоминают разложение гамильтониана в окрестности положения равновесия или периодического решения. Действительно, приведение к системе, обладающей инвариантными многообразиями в виде то-

ров, очевидно похоже на нормализацию Биркгофа функции H. То, что процедура мажорирования не может быть использована для эффективного доказательства сходимости последовательности канонических преобразований, определенных в лемме 1, не подлежит сомнению, и в действительности Арнольд и Мозер смогли обойтись без мажорирования. Гораздо более важным вопросом, требующим особого рассмотрения, является то, что обычно задача вырождена и, следовательно, не годится ни теорема Колмогорова, ни теоремы Мозера, которые будут обсуждаться в следующей главе. Если n — число степеней свободы, то отсутствие $m<n$ переменных действие в гамильтониане невозмущенного движения эквивалентно наличию m линейных связей между n ненулевыми частотами, определяемых соответствующей невозмущенной системой. Только что рассмотренный пример представляет собой первое удачное приближение к решению этого вопроса, хотя проведенное Арнольдом изучение отображения окружности на себя, начатое в работе [3], уже содержит в себе идеи, необходимые для решения вопроса в общей постановке, что и было затем сделано в работе [7].

Для системы с n степенями свободы существование одной целочисленной линейной связи между невозмущенными частотами соответствует наличию одного типа малых делителей при классическом использовании метода Пуанкаре. Существование $n-1$ таких связей соответствует невозмущенному периодическому движению. В обоих случаях можно показать существование условно-периодических движений при наличии аналитических и достаточно малых возмущений. Отсутствие некоторого числа переменных действие в невозмущенном движении, согласно Арнольду, называется *собственным вырождением*, и такие случаи, за исключением линейных, являются наиболее общими в физике. Для случаев собственного вырождения известен основной результат, полученный Арнольдом и справедливый также в общем случае независимо от числа отсутствующих в H_0 переменных действие. В работе [4] по классической теории возмущений Арнольд привел пример, в котором встречаются вместе все известные трудности, которые могут помешать сходимости в классических теориях, подобных методу Линдстедта — Пуанкаре. Рассматривалась задача взаимного влияния планет с иррациональными средними движениями (средняя угловая скорость движения вокруг Солнца). Случай рациональных средних движений может быть рассмотрен аналогично, что и было в действительности обнаружено в работе Мозера [35]. В плоском случае задача имеет четыре степени свободы, гамильтониан нулевого порядка (описывающий кеплеровское взаимодействие) зависит только от двух импульсов, а также вводится предположение о близости частот к рациональным значениям, настолько близко, насколько это по-

зволяет условие (3.6.1). Имеется как собственное вырождение, так и вырождение, обусловленное переходом от круговых орбит планет к эллиптическим.

Определив лагранжево движение как движение медленно вращающегося в плоскости эллипса, у которого большая полуось, эксцентриситет и долгота перицентра совершают короткопериодические колебания малой амплитуды. Арнольд доказал следующее утверждение [4]. Рассмотрим движение двух планет в одной плоскости вокруг Солнца, и пусть их общий центр масс неподвижен, а a_k и $e_k (k=1, 2)$ — большие полуоси и эксцентриситеты орбит планет. Определим в восьмимерном фазовом пространстве область $D(\delta)$: $0<c_k<a_k<C_k$; $e_k<\delta$ $(k=1, 2)$. И пусть $m_k=\mu\alpha_k (k=1, 2)$ — массы планет, где α_k — постоянные. Тогда имеет место такая теорема.

Теорема. *Для любого $\eta>0$ существует $\varepsilon>0$ такое, что если $\mu<\varepsilon$, $\delta<\varepsilon$, то большинство точек области $D(\delta)$, за исключением множества меры, меньшей $\eta \operatorname{mes} D(\delta)$, движется так, что*

1) *точка всегда остается в $D(\delta)$;*

2) *она совершает условно-периодическое движение на аналитических четырехмерных торах из $D(\delta)$;*

3) *она всегда остается ближе, чем η, к точке в фазовом пространстве, которая совершает некоторое лагранжево движение.*

По существу, этот результат является решением вопроса об устойчивости, в том смысле, что для упомянутого исключительного множества, везде плотного и неограниченного, движение будет топологически неустойчивым. Арнольд также сделал аналогичное заключение о наблюдаемых в природе щелях в распределении малых планет [1]).

При отсутствии линейных целочисленных связей между частотами медленно изменяющихся переменных (средние долготы планет), в соответствии с теоремой Колмогорова, можно применить метод усреднения относительно таких переменных. Гамильтониан приводится к виду

$$F = F_0(L) + \mu F_1(L, \xi, \eta) + O(\mu^2),$$

где $L = (L_1, L_2)$ — усредненные переменные действие, соответствующие средним долготам, а

$$\xi_k + i\eta_k = e_k \exp(i\omega_k) \qquad (k=1, 2),$$

ω_k — долгота перицентра планеты номер k. Затем гамильтониан приводится к (укороченной) нормальной форме в окрестности

---

[1]) Важные результаты в этой задаче получены в работе А. Д. Брюно [26*] (*прим. перев.*).

устойчивого положения равновесия $\xi_k=\eta_k=0$, т. е. к виду

$$F = F_2(r) + F_3(r, \theta),$$

где $r=(r_1, r_2)$, $\theta=(\theta_1, \theta_2)$, $F_3=O(r^3)$, а

$$\mu F_2 = \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + c_{11} r_1^2 + 2c_{12} r_1 r_2 + c_{22} r_2^2.$$

Следовательно, в новых канонических переменных (r, θ)

$$F = F_0(L') + \mu F_2(L', r) + O(\mu^2, r^3).$$

При этом $r_k=O(e_k^2)$. Частоты ν_1 и ν_2 являются величинами порядка $O(\mu)$, т. е. они соответствуют медленно меняющимся углам θ_1, θ_2. Условно-периодические решения получаются использованием итеративной процедуры ньютоновского типа, в которой достигнута квадратичная сходимость.

Оригинальная формулировка теоремы Арнольда для вырожденных систем, обобщающая описанный выше результат, может быть изложена в следующем виде. Пусть гамильтониан имеет вид

$$H = H_0(x_1, \ldots, x_k) + \varepsilon H_1(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n),$$

где $k<n$, функция H_1 является 2π-периодической по каждой из переменных y_i и аналитической при $x \in D$ и $|\operatorname{Im} y|<\zeta$. Предположим, что при $\varepsilon=0$ движение является условно-периодическим и определяется формулами

$$\dot{y}_i = \frac{\partial H_0}{\partial x_i} = \omega_i, \qquad \dot{x}_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

и

$$\dot{y}_j = \dot{x}_j = 0 \qquad (j = k+1, \ldots, n).$$

При условии, что среднее значение от H_1 по отношению к $y_1, \ldots, y_k$ не зависит от $y_{k+1}, \ldots, y_n$, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} H_1(y, x)\, dy_1 \ldots dy_k = \overline{H}_1(x),$$

можно показать, что при достаточно малых ε для большинства начальных условий (так же, как и в предыдущей теореме, исключительное множество является связным, всюду плотным и неограниченным) движение, определяемое гамильтонианом H, для всех моментов времени мало отличается от условно-периодического, определяемого частотами $\dot{y}_j=\partial\overline{H}/\partial x_j=\omega_j$ (где для $j=1, \ldots, n$ x_j — постоянные) и гамильтонианом $\overline{H}=H_0(x)+\varepsilon\,\overline{H}_1(x)$. Начальные условия должны быть таковы, чтобы

$$|j_1\omega_1 + \ldots + j_k\omega_k| > K(\omega)\left(\sum_{l=1}^{k} |j_l|\right)^{-k-1}$$

для выбранной соответствующим образом постоянной K. Точнее, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Пусть при $x \in D$ матрицы*

$$\left\{\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ k), \qquad \left\{\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i,\ j = k+1,\ \ldots,\ n)$$

являются неособенными. Пусть T — тороидальная область

$$\{\operatorname{Im} \boldsymbol{x} = \operatorname{Im} \boldsymbol{y} = 0;\ \boldsymbol{x} \in D;\ 0 \leqslant y_i \leqslant 2\pi,\ i = 1,\ \ldots,\ n\}.$$

Для данного произвольного $\eta > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что, если $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, то в T есть аналитические n-мерные инвариантные торы, и движение на них является условно-периодическим. Торы образуют в T нигде не плотное множество, мера дополнения которого меньше $\eta \operatorname{mes} T$.

Эта теорема является более простой эквивалентной формой сложной теоремы Арнольда, приведенной в § 3 настоящей главы. Стоит отметить, что предшествующая теорема о планетарном движении является очень важной, так как она дает решение проблемы в случае, когда имеется два разных типа вырождения: *предельное вырождение* $r_k = 0$ (или $e_k = 0$), соответствующее круговым орбитам, и *собственное вырождение* $\mu = 0$, при котором для описания невозмущенного движения необходимо меньше частот, чем для описания возмущенного движения.

Для общих линейных систем, рассмотренных в четвертом (уравнение (3.4.17)) и пятом (уравнение (3.5.3)) параграфах, наиболее ранние результаты были получены Боголюбовым [13] и дополнены Митропольским [28]. Новые результаты в этой области были получены Мозером [34] и затем улучшены в замечательной работе [35] того же автора.

Боголюбов [12] установил следующую теорему.

Теорема. *Если $\operatorname{Re} \Omega_k \leqslant -\gamma < 0$ и ε достаточно мало, то система*

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \Omega \boldsymbol{y} + \varepsilon \boldsymbol{g}(t,\ \boldsymbol{y},\ \varepsilon), \tag{3.6.7}$$

где $\Omega = \operatorname{diag}(\Omega_1,\ \ldots,\ \Omega_n)$, имеет почти-периодическое решение, если $\boldsymbol{g}(t,\ \boldsymbol{y},\ \varepsilon)$ — почти-периодическая функция. Если $\boldsymbol{g}(t,\ \boldsymbol{y},\ \varepsilon)$ — условно-периодическая функция с базисными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и аналитическая, то таким же будет и решение этих уравнений.

Как мы уже видели в этом разделе (уравнение (3.6.3), теорема 1), система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} + \varepsilon \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ \varepsilon,\ \boldsymbol{\lambda}) \tag{3.6.8}$$

допускает решение для $\lambda=\lambda(\varepsilon)$ вида

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{c}+\varepsilon\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{c},\varepsilon),$$

где $\boldsymbol{c}$ — соответствующим образом подобранный постоянный вектор $\boldsymbol{c}=(c_1,\ldots,c_n)$. Это утверждение было доказано Арнольдом.

Основная теорема Боголюбова сводит воедино оба этих типа систем и может быть сформулирована следующим образом.

Теорема (Боголюбов [12]). *Если для системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}+\varepsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon),\\ \dot{\boldsymbol{y}}&=\Omega\boldsymbol{y}+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\varepsilon)\end{aligned}\tag{3.6.9}$$

предположить, что

$$|\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}|\geqslant\gamma|\boldsymbol{j}|^{-\tau},\qquad \operatorname{Re}\Omega_k\leqslant-\gamma<0,\tag{3.6.10}$$

то существует $\lambda=\lambda(\varepsilon)$, *такое, что система обладает* n-*параметрическим семейством условно-периодических решений*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{c}+\varepsilon\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{c},\varepsilon),\\ \boldsymbol{y}&=\varepsilon\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{c},\varepsilon),\end{aligned}$$

где все рассматриваемые функции аналитичны по всем входящим в них аргументам.

Вектор $\boldsymbol{x}$ предполагается n-мерным, а вектор $\boldsymbol{y}$ — m-мерным. Мозер [34] показал справедливость этих результатов для случая, когда $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ дифференцируемы, сведя задачу к исследованию потока на торах. Однако он пошел еще дальше и доказал следующую теорему.

Теорема. *При условиях*

$$\begin{aligned}|i(\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega})-\Omega_k|&\geqslant\gamma|\boldsymbol{j}|^{-\tau},\qquad \boldsymbol{j}=(j_1,\ldots,j_n),\\ |i(\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega})-\Omega_k+\Omega_l|&\geqslant\gamma|\boldsymbol{j}|^{-\tau}\qquad (k,l=1,\ldots,n)\end{aligned}$$

существуют $\lambda=\lambda(\varepsilon)$, $\mu=\mu(\varepsilon)$, $M=M(\varepsilon)$, *аналитические по* ε, *уничтожающиеся при* $\varepsilon=0$ *и удовлетворяющие условиям*

$$\Omega^*\boldsymbol{\mu}=0,\qquad M\Omega^*-\Omega^*M=0,$$

где $*$ *означает транспонирование, такие, что система уравнений*

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}+\varepsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\varepsilon,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}),\\ \dot{\boldsymbol{y}}&=\Omega\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\mu}+M\boldsymbol{y}+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\varepsilon,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}),\end{aligned}\tag{3.6.11}$$

где $\boldsymbol{x}$ — *n-мерный, а* $\boldsymbol{y}$ — *m-мерный векторы,* $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ — *аналитические по всем аргументам и* 2π*-периодические по* $x_1, \ldots, x_n$ *функции, имеет условно-периодическое решение с частотами* $\boldsymbol{\omega}, \Omega$.

Это означает, что существует такое аналитическое преобразование

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\xi} + \varepsilon \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon), \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\eta} + \varepsilon \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) + \varepsilon V(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)\boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

что выписанная выше система (3.6.11) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\omega} + O(\boldsymbol{\eta}), \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \Omega\boldsymbol{\eta} + O(\boldsymbol{\eta}^2).$$

Уравнение Хилла. В качестве примера того специального случая, с которым мы имели дело в § 5, рассмотрим уравнение Хилла

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 2\varepsilon^2 z \sum_{k \geqslant 1} \alpha_k \cos 2k\tau, \tag{3.6.13}$$

где

$$\omega = 1 + \varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{3}{4}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Введем замену переменных

$$z = \sqrt{\frac{2x}{\omega}} \sin y, \qquad \dot{z} = \sqrt{2\omega x} \cos y$$

и получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon^2 \frac{x}{\omega} \sum_{k \geqslant 1} \alpha_k [\sin 2(y + k\tau) + \sin 2(y - k\tau)], \\ \dot{y} &= \omega - \varepsilon^2 \frac{1}{2\omega} \sum_{k \geqslant 1} \alpha_k [2\cos 2k\tau - \cos 2(y + k\tau) - \cos 2(y - k\tau)]. \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

Теперь найдем преобразование координат вида (3.6.12), т. е.

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon X(\eta, \tau, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{X}(\eta, \tau, \varepsilon)\xi, \\ y &= \eta + \varepsilon Y(\eta, \tau, \varepsilon), \end{aligned}$$

и приведем уравнения (3.6.14) к форме

$$\dot{\xi} = O(\xi^2), \qquad \dot{\eta} = \Omega + O(\xi),$$

где для некоторого λ

$$\Omega = \omega - \varepsilon\lambda(\varepsilon, \omega), \qquad |j\Omega - k| \geqslant \varepsilon' |j|^{-\alpha}$$

при выбранных соответствующим образом ε' и α.

Зигель [41] показал, что при $0<\Omega<1$ множество значений Ω, которые не удовлетворяют выписанным выше условиям (k, j — целые числа и $j\neq 0$), имеет меру, меньшую чем $2\pi\varepsilon'(1+\varepsilon')/3$.

В соответствии с уравнением (3.5.4) и утверждениями, приведенными в конце § 5, положим

$$\lambda=\sum_{k\geqslant 0}\lambda_k\varepsilon^k,\qquad Y_k=\sum_{p,q}Y_k^{(p,q)}\exp i\,(p\eta+q\tau),$$

$$Y=\sum_{k\geqslant 0}Y_k\varepsilon^k,\qquad X=\left(1+\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial\eta}\right)^{-1}.$$

Уравнения для определения Y_k при $k=0, 1, 2, \ldots$ имеют вид

$$\Omega\frac{\partial Y_k}{\partial\eta}+\frac{\partial Y_k}{\partial\tau}=\lambda_k+G_k(\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1},\eta,\tau),\tag{3.6.15}$$

и мы определим величину λ_k как среднее значение от $-G_k$ по отношению к η, τ. Действительно, легко видеть, что G_k в (3.6.15) по предположению имеет вид

$$G_k=\sum_{p,q}G_k^{(p,q)}\exp[i\,(p\eta+q\tau)],$$

так что в силу сделанного предположения об иррациональности Ω имеем

$$\lambda_k=-G_k^{(0,0)},\qquad Y_k^{(p,q)}=-i\,\frac{G_k^{(p,q)}}{p\Omega+q}$$

для всех p, q, не обращающихся одновременно в нуль. В случае уравнения Хилла (3.6.13) находим (см. [20])

$$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0\qquad\lambda_3=\frac{225\Omega}{16\omega^2(\Omega^2-1)}.$$

Следовательно,

$$\omega-\Omega=\varepsilon\lambda=\frac{225\varepsilon^4\Omega}{16\omega^2(\Omega^2-1)}+O(\varepsilon^5)$$

или, подставляя значение ω, получаем

$$\Omega=1+\varepsilon-\frac{3}{4}\varepsilon^2-\frac{201}{32}\varepsilon^3+O(\varepsilon^4),$$

что совпадает с выражением для c_0 (см. [15], стр. 276), полученным при вычислении бесконечного определителя последовательными приближениями от главной диагонали. Здесь исполь-

зованы те же обозначения, что и в работе автора [20]:

$$\tau = t - t_0, \quad \varepsilon \equiv m = n - n',$$

где величины t, t_0, n, n' определены в работе Брауна [15].

Для изучения общих методов построения условно-периодических решений нелинейных уравнений рассмотренного выше типа с помощью сходящихся разложений в ряды мы отсылаем читателя к работе Мозера [35]. По нашему мнению, эта работа содержит в себе большинство из того, что было сделано в теории возмущений. Системы уравнений в вариациях в окрестности положения равновесия или периодического решения также рассмотрены в этой работе, и там можно найти много интересных ответов на исследуемые здесь вопросы. Что касается резонансных случаев или случаев рациональности частот ω, Ω, то они будут рассмотрены в конце главы V настоящей книги именно с этой точки зрения.

Другие применения теоремы Колмогорова. Кроме уже упомянутых примеров, мы закончим этот раздел указанием на то, что Баррар [8] использовал теорему Колмогорова для доказательства существования условно-периодических орбит искусственных спутников сжатой Земли. Однако он не мог рассматривать орбиты с эксцентриситетами, стремящимися к нулю, из-за появляющегося предельного вырождения. Такое рассмотрение можно провести, если использовать упомянутый выше модифицированный подход Арнольда.

Мозер применил [30] теорему Колмогорова для построения условно-периодических решений уравнения Дюффинга без демпфирования

$$\ddot{x} + ax + bx^3 = \varepsilon f(t, x, \dot{x}), \tag{3.6.16}$$

где f — условно-периодическая функция времени t с базисными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и вещественная аналитическая функция относительно x, $\dot{x}$. Как обычно, считается, что при $\tau > n-1$ существует постоянная $K > 0$, такая, что условия

$$|\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} + j_0| \geqslant K|\boldsymbol{j}|^{-\tau}, \qquad \boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_n)$$

удовлетворяются для почти всех $\boldsymbol{\omega}$. При этих условиях Мозер показал, что при f, удовлетворяющей еще условию

$$f(t, x, \dot{x}) = f(-t, x, -\dot{x}),$$

существует вещественная аналитическая функция $\tilde{a}(\varepsilon)$ и условно-периодическое решение $x = \varphi(t, \varepsilon)$ с базисными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$, такие, что $\tilde{a}(0) = a$, $\varphi(t, 0) = 0$. В конечном счете это еще не дает решения уравнения (3.6.16), так как коэффици-

ент при x должен быть приведен к некоторому $\tilde{a}(\varepsilon)\neq a$. Метод, развитый Мозером, не является просто непосредственным применением теоремы Колмогорова, а некоторым новым подходом к рассматриваемой конкретной задаче, также и потому, что не требуется, чтобы исходное уравнение имело гамильтонов вид. Член bx^3 рассматривается как возмущение. Уравнение переписывается в комплексной форме

$$\dot{z}=i\tilde{a}z+bx^3+\varepsilon f(t, x, \dot{x}),$$

где $z=x+i\dot{x}$, а $\tilde{a}/a$ полагается изменяющимся на отрезке $[1-\mu, 1+\mu]$ при малом μ. Запишем

$$y=\tilde{a}-a=O(\mu),$$

так что уравнение примет вид

$$\dot{z}=i(a+y)z+\varepsilon g(\theta, z, \bar{z}),$$

где $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\theta_k=\omega_k t$.

Тогда существует преобразование координат

$$y=\eta+u(\eta), \qquad z=\zeta+v(\theta, \zeta, \bar{\zeta}, \eta),$$

такое, что в результате ряда последовательных приближений уравнение приводится к виду

$$\dot{\zeta}=i(a+\eta)\zeta,$$

который и используется для доказательства упомянутого результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.—ДАН СССР, 1961, т. 137, № 2, стр. 255—257.
2. Арнольд В. И. О рождении условно-периодического движения из семейства периодических движений.—ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1, стр. 13—15.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя.—Изв. АН СССР, Сер. матем., 1961, т. 25, № 1, стр. 21—86.
4. Арнольд В. И. О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем.—ДАН СССР, 1962, т. 145, № 3, стр. 487—490.
5. Арнольд В. И. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики.—Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 2, стр. 471—474.
6. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.—УМН, 1963, т. 18, № 5, стр. 13—40.
7. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.—УМН, 1963, т. 18, № 6, стр. 91—192.

8. Barrar R. B. Existence of conditionally periodic orbits for the motion of a satellite around an oblate planet.— J. of Appl. Math., 1966, vol. 24, p. 47—55.
9. Barrar R. B. A proof of the convergence of the Poincare — von Zeipel procedure in celestial mechanics.— Am. J. Math., 1966, vol. 88, p. 206—220.
10. Barrar R. B. Convergence of the von Zeipel procedure.— Celest. Mech., 1970, vol. 2, № 4, p. 494—504.
11. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.—М.: Гостехиздат, 1941.
12. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике.—Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
13. Боголюбов Н. Н. Об условно-периодических решениях в нелинейных задачах механики.—Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
14. Брауэр Д., Клеманс Дж. Методы небесной механики.—М.: Мир, 1964.
15. Brown E. W. An introductory treatise on the Lunar theory.— London: Univ. Press, 1896.
16. Cesari L. Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Atti Accad. Ital. Mem. Clas. Fis. Mat. e Nat., 1940, t. 11, p. 633—692.
17. Deprit A., Deprit-Bartholome A. Stability of the triangular lagrangian points.— Astron. J., 1967, vol. 72, № 2, p. 173—179.
18. Gambill R. A. Criteria for parametric instability for linear differential systems with periodic coefficients.— Riv. Mat. Univ. Parma, 1954, vol. 5, p. 169—181.
19. Гельфанд И. М., Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.—УМН, 1955, т. 10, № 1, стр. 3—40.
20. Giacaglia G. E. O. Transformation of Hill's equation — a method of solution.— Astron. J., 1967, vol. 72, № 8, p. 998—1001.
21. Hale J. K. Sufficient condition for the existence of periodic solutions of first and second order differential equations.— J. Math. Mech., 1958, vol. 7, № 2. p. 163—172.
22. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика.—УМН, 1948, т. 3, № 6, стр. 89—185.
23. Хинчин А. Я. Цепные дроби.—М.: ОНТИ, 1935.
24. Koksma J. F. Diophantische approximationen.— Berlin: Springer-Verlag, 1936.
25. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. Международный математический конгресс в Амстердаме.— М.: Физматгиз, 1961, стр. 187—208.
26. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.—Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
27. Леонтович А. М. Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел.—ДАН СССР, 1962, т. 143, № 3, стр. 525—528.
28. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.—М.: Наука, 1964.
29. Moser J. The resonance lines for the synchrotron. Geneva, p. 290—292, Proceed. CERN Symp., 1956.
30. Moser J. Combination tones for Duffing's equation.— Comm. Pure Appl. Math., 1965, vol. 18, № 2, p. 167—181.
31. Moser J. The stability behavior of the solution of hamiltonian systems. Lecture notes, S. I. D. A., 1965.
32. Moser J. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems.— Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, № 1, 81—114.
33. Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.—Математика, 1962, т. 6, № 5, стр. 51—67.

34. Moser J. On the theory of quasi-periodic motions.— SIAM Rev., 1966, vol. 8, № 2, p. 145—172.
35. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды.—УМН, 1969, т. 24, № 2, стр. 165—211.
36. Мозер Ю. Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений.—Математика, 1962, т. 6, № 4, стр. 3—10.
37. Nash P. The imbedding of Riemmanian manifolds.— Ann. Math., 1956, vol. 63, № 1, p. 20—63.
38. Rüsman H. Über die existenz einer normalform inhaltstreuer elliptischer transformationen.— Math. Annalen, 1959, b. 173, s. 64—77.
39. Зигель К. Л. Об интегралах канонических систем.—Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 103—117.
40. Зигель К. Л. О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия.—Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 129—156.
41. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.—М.: ИЛ, 1959.
42. Pol B. van der. Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance.— Phil. Mag., 1926, vol. 2, p. 21—27; 1927, vol. 3, p. 65—80.
43. Уиттекер Е. Аналитическая динамика.—М.: ОНТИ, 1937.

ГЛАВА IV

ВОЗМУЩЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ПЛОЩАДЬ

1. Предварительные соображения

Согласно теореме Лиувилля, поток гамильтоновой системы в фазовом пространстве сохраняет меру, т. е. сохраняется фазовый объем.

Рассмотрим общую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{4.1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Пусть функции f аналитичны в области D пространства R^n и периодичны по t с периодом 2π. Предположим также, что при всех t функции f принадлежат по крайней мере классу C^2 относительно t. Если $x_0 \in D$, то существует, и притом единственное, решение этой системы уравнений

$$x = g(x_0, t), \tag{4.1.2}$$

такое, что

$$g(x_0, 0) = x_0, \qquad \frac{\partial g}{\partial t}(x_0, t) = f(g(x_0, t), t).$$

Рассмотрим отображение

$$T: x \to g(x, 2\pi), \tag{4.1.3}$$

которое является однозначным в окрестности точки $x = x_0$. Обозначим через T^q q-кратное последовательное применение отображения T, например,

$$T^2: x \to T: g(x, 2\pi) \to g[g(x, 2\pi), 2\pi].$$

Пусть $\bar{x} = 0$ — решение системы уравнений (4.1.1). Тогда, очевидно, точка $\bar{x} = 0$ является *неподвижной точкой* отображения T^q (q — целое положительное число), т. е.

$$T^q: \bar{x} = \bar{x}. \tag{4.1.4}$$

Здесь стоит упомянуть следующие определения.

а) *Неподвижная точка* $\bar{x}$ *является особой,* если в D существует такая ее окрестность, что в ней нет других неподвижных точек отображения T. Отметим, что в общем случае неподвижная точка отображения T^q (q — целое положительное число) соответствует периодическому решению системы уравнений (4.1.1) с периодом $2\pi q$. Если эта точка особая, то периодическое решение также особое[1]). Очевидно, понятие, введенное Уиттекером [39], является частным случаем данного определения.

б) *Неподвижная точка* $\bar{x}$ *является неособой,* если в любой ее окрестности, принадлежащей области D, существует по крайней мере одна другая неподвижная точка. Соответствующее периодическое решение тогда называется неособым.

Здесь мы будем в основном рассматривать преобразования, сохраняющие площадь, т. е. такие, для которых в соотношении

$$|J|\,dx_1^* \ldots dx_n^* = dx_1 \ldots dx_n,$$

где J — матрица Якоби, а $|J|$ — якобиан

$$|J| = \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x_1^*, \ldots, x_n^*)}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial x^*}\right|,$$

имеем $|J| = 1$.

Рассмотрим теперь гамильтонову систему уравнений

$$\dot{x}_k = -H_{y_k} \qquad \dot{y}_k = H_{x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{4.1.5}$$

где функция Гамильтона

$$H = H(x, y, t) = H(x, y, t + 2\pi)$$

является аналитической в некоторой области D фазового пространства, содержащей в себе начало координат, и для всех конечных t она принадлежит по крайней мере классу C^2 относительно t. Пусть точка $(x, y) = (0, 0)$ является положением равновесия системы (4.1.5).

Пусть $(x_0, y_0) \in D$ и пусть

$$x = f(x_0, y_0, t), \qquad y = g(x_0, y_0, t)$$

будет соответствующим решением системы уравнений, аналитическим в D. Рассмотрим отображение

$$T \begin{cases} x^* = f(x, y, 2\pi), \\ y^* = g(x, y, 2\pi) \end{cases} \tag{4.1.6}$$

---

[1]) То есть предельный цикл (*прим. перев.*).

в окрестности начала координат. Очевидно, точка (0, 0) является неподвижной точкой отображения T. Так как функции f и g являются аналитическими в окрестности точки (0, 0), то их можно разложить в ряды Тейлора

$$x^* = f(0, 0, 2\pi) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0 y + \ldots,$$

$$y^* = g(0, 0, 2\pi) + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_0 x + \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_0 y + \ldots$$

Принимая во внимание, что $f_0 = g_0 = 0$, и определив

$$z^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = J(x, y), \qquad J_0 = J(0, 0),$$

получаем

$$z^* = J_0 z + \ldots \tag{4.1.7}$$

Заданное таким образом отображение T является каноническим, т. е. должно быть $|J| = 1$ и, более того, матрица J должна быть симплектической (с единичной валентностью)

$$J^T E J = E,$$

где

$$E = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix},$$

а I_n, O_n — единичная и нулевая матрицы размерности $n \times n$. Этими же свойствами, очевидно, обладает и матрица J_0, а отображение (4.1.7) сохраняет площадь. Рассмотрим линейное отображение

$$\xi^* = J_0 \xi \tag{4.1.8}$$

с собственными числами задачи, соответствующими алгебраическому уравнению степени $2n$ относительно λ

$$|J_0 - \lambda I| = 0.$$

Так как свободный член этого уравнения равен $|J_0|$, то ни один из его корней не равен нулю. Пусть u_k — собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_k, т. е.

$$J_0 u_k = \lambda_k u_k.$$

Отсюда последовательно получаем равенства

$$EJ_0\boldsymbol{u}_k = \lambda_k E\boldsymbol{u}_k,$$

$$J_0^{\mathrm{T}}EJ_0\boldsymbol{u}_k = \lambda_k J_0^{\mathrm{T}}E\boldsymbol{u}_k,$$

$$E\boldsymbol{u}_k = \lambda_k J_0^{\mathrm{T}}E\boldsymbol{u}_k,$$

$$J_0^{\mathrm{T}}E\boldsymbol{u}_k = \frac{1}{\lambda_k}E\boldsymbol{u}_k,$$

так что λ_k является решением такого характеристического уравнения

$$\left|J_0^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\lambda_k}I\right| = 0,$$

а так как $|J_0^{\mathrm{T}} - \lambda I| = |J_0 - \lambda I| = 0$, то если λ_k является собственным числом, тогда и $1/\lambda_k$ — также собственное число. Таким образом [1]),

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{2n} = 1.$$

Пусть все λ_k различны между собой (они могут быть вещественны или комплексны). Если существует линейное преобразование

$$\xi = L\omega,$$

такое, что

$$\omega^* = L^{-1}J_0L\omega = \Lambda\omega,$$

где

$$L^{-1}J_0L = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}),$$

то

$$\overset{*}{\omega}_k = \lambda_k\omega_k,$$

и отображение (4.1.7) можно записать в виде

$$Z^* = \Lambda Z + \psi(Z). \tag{4.1.9}$$

Так как отображение (4.1.9) является аналитическим в окрестности начала координат $Z = 0$, то можно написать

$$X_k^* = \lambda_k X_k + \sum_{m=2}^{\infty} p_m^{(k)}(X, Y),$$

$$Y_k^* = \frac{1}{\lambda_k}Y_k + \sum_{m=2}^{\infty} q_m^{(k)}(X, Y),$$

---

[1]) Это сразу видно из того, что $|J_0| = 1$ (*прим. перев.*).

где $k=1, \ldots, n$, а $p_m^{(k)}$ и $q_m^{(k)}$ — однородные полиномы степени m относительно $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$. В векторной форме можно написать

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^* &= \lambda \boldsymbol{X} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \\ \boldsymbol{Y}^* &= \left(\frac{1}{\lambda}\right) \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

где необходимо, чтобы

$$|J| = \left| \frac{\partial(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*)}{\partial(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})} \right| = 1$$

и, следовательно, отображение (4.1.10) сохраняет площадь.

Запишем теперь отображение (4.1.10) в виде

$$X_k^* = X_k U_k, \qquad Y_k^* = Y_k V_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{4.1.11}$$

где

$$U_k = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(k)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \qquad V_k = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{(k)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \tag{4.1.12}$$

а $P_m^{(k)}$ и $Q_m^{(k)}$ — однородные полиномы степени m. Разумеется, при этом мы имеем

$$P_0^{(k)} = \lambda_k, \qquad Q_0^{(k)} = \frac{1}{\lambda_k}.$$

Обсуждение свойств неподвижных точек отображений вида (4.1.10), которые сохраняют площадь, имеет первостепенную важность в теории динамических систем, но выходит, к сожалению, за рамки настоящей книги. Тем не менее, в качестве введения в результаты, излагающиеся в следующих параграфах, мы хотим упомянуть некоторые факты, касающиеся свойств отображений в окрестности неподвижной точки (подробнее см. [5], [35]).

Основная теорема утверждает, что для автономной системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

и начальных условий $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} \in D$ при $t=0$ и при условии аналитичности функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в D существует, и притом единственное, решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$, такое, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \boldsymbol{\xi}$ и функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ аналитична по t при t из максимального интервала $0 \leqslant t < T$. Если для точки $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in D$ решение $\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, t)$ является периодическим с периодом 2π и оно лежит в D, то отображение

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, 2\pi)$$

имеет неподвижную точку $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ в D.

В общем случае для данного преобразования, определенного в некоторой области D, задача заключается в решении вопроса о существовании и нахождении неподвижных точек этого преобразования. Теоремы Брауэра и Пуанкаре — Биркгофа о неподвижных точках являются типичными примерами такого рода задач. Вторая теорема немедленно находит себе применение во многих задачах динамики, так как соответствующая область является типичной для инвариантных многообразий, встречающихся в динамике. В этом отношении теория возмущений имеет дело со свойствами отображений в окрестности неподвижных точек или, в более общем случае, с поведением инвариантных многообразий, соответствующих отображениям, сохраняющим площадь при действии возмущений. В историческом отношении решающей проблемой явилась проблема нормализации отображения в окрестности неподвижной точки, решению которой посвящена оригинальная работа Биркгофа [4] и недавние исследования Густавсона [10][1]).

Хорошо известно, что сохраняющее площадь отображение

$$\begin{aligned} x_k' &= \lambda_k x_k + f_k(x, y), \\ y_k' &= \mu_k x_k + g_k(x, y) \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

при $\mu_k = 1/\lambda_k$ не может быть приведено, если рассматриваются не исключительные случаи, к нормальной форме

$$\xi_k' = \lambda_k \xi_k, \qquad \eta_k' = \mu_k \eta_k \tag{4.1.14}$$

с помощью преобразования

$$U = \begin{cases} x_k = \xi_k + \varphi_k(\xi, \eta), \\ y_k = \eta_k + \psi_k(\xi, \eta). \end{cases} \tag{4.1.15}$$

Нормальную форму Биркгофа

$$T: \begin{cases} \xi_k' = \xi_k u_k(\xi, \eta), \\ \eta_k' = \eta_k v_k(\xi, \eta), \end{cases} \tag{4.1.16}$$

где

$$u_k = \lambda_k + \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}^k \xi_j \eta_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{4,j,l}^k \xi_j \eta_j \xi_l \eta_l + \ldots,$$

$$v_k = \mu_k + \sum_{j=1}^{n} b_{2,j}^k \xi_j \eta_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{4,j,l}^k \xi_j \eta_j \xi_l \eta_l + \ldots,$$

---

[1]) См. также работы А. Д. Брюно о нормальных формах [8*—12*]. Другой подход для неавтономных периодических систем, использующий метод точечных отображений, использован в работах А. П. Маркеева [27*], [28*] (*прим. перев.*).

с помощью преобразования (4.1.15) опять же можно получить в виде формальных рядов, в общем случае расходящихся. Тем не менее, *можно найти преобразование, приводящее отображение* (4.1.13) *к виду, совпадающему с нормальной формой Биркгофа до приближения любого порядка,* хотя остаточные члены и не стремятся к нулю по мере того, как порядок приближения стремится к бесконечности. Этот факт для систем с одной степенью свободы естественным образом приводит к теореме Биркгофа о неподвижной точке.

Пусть теперь начало координат является неподвижной точкой (отображения) эллиптического типа и пусть отображение имеет вид (4.1.13) и сохраняет площадь. Матрица Якоби J этого преобразования является симплектической, т. е.

$$J^T E J = E.$$

Если, в частности рассмотреть замену переменных (4.1.15), где $k=1, \ldots, n$, то производные $\partial x_k/\partial \xi_k$, $\partial y_k/\partial \eta_k$ равны единице в начале координат $\xi=\eta=0$ и, следовательно, существует производящая функция $W(y, \xi)$, такая, что

$$x_k = W_{y_k}, \qquad \eta_k = W_{\xi_k}. \tag{4.1.17}$$

Функция W является аналитической в окрестности точки $(y, \xi) = (0, 0)$, а ряд

$$W = \sum_k y_k \xi_k + \ldots \tag{4.1.18}$$

в этой окрестности — сходящимся. Производящая функция W будет описывать любое преобразование типа U (см. (4.1.15)). При приведении к нормальной форме Биркгофа ряд для производящей функции W, тем не менее, в общем случае является расходящимся. В этом случае рассмотрим функцию W^*, полученную отбрасыванием в W всех членов, степень которых выше $2m+2$, т. е. функцию

$$W^* = \sum_{k=1}^{n} y_k \xi_k + \sum_{p,q} A_{pq} y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} \xi_1^{q_1} \ldots \xi_n^{q_n}, \tag{4.1.19}$$

где суммирование по p и q производится по всем значениям q_i, p_i, удовлетворяющим неравенствам

$$3 \leqslant \sum_i (p_i + q_i) \leqslant 2m + 2.$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} x_k &= W^*_{y_k} = \xi_k + \widetilde{X}_k(y, \xi), \\ \eta_k &= W^*_{\xi_k} = y_k + N_k(y, \xi), \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

а по предположению

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi_k \partial y_k} = 1$$

в начале координат $\xi = y = 0$. Следовательно, в окрестности начала координат можно написать

$$y_k = \eta_k + Y_k(\xi, \eta), \qquad x_k = \xi_k + X_k(\xi, \eta). \tag{4.1.21}$$

Ряды (4.1.21), разумеется, являются сходящимися в окрестности начала координат и приводят отображение (4.1.13) к виду T^*, который совпадает с нормальной формой Биркгофа (4.1.16) с точностью до членов порядка $2m+1$. Для получения T^* требуется только выполнение условий $\lambda_j^s \neq 1$, где $j = 1, \ldots, n$, а $s = 1, \ldots, 2m+2$. Если такое условие не выполнено, то в W^* появляются нулевые делители, точнее, они появляются первый раз в членах порядка $2 \leqslant k \leqslant 2m+2$ при $\lambda_j^k = 1$ [1]).

Пусть $m = 2$. Так как мы считаем начало координат неподвижной точкой эллиптического типа, то T^* имеет вид

$$\xi_k' = e^{i\Omega_k}\xi_k + \varphi_k^{(4)}(\xi, \eta),$$
$$\eta_k' = e^{-i\Omega_k}\eta_k + \psi_k^{(4)}(\xi, \eta),$$

где функции $\varphi_k^{(4)}$ и $\psi_k^{(4)}$ имеют порядок не ниже четырех, так что достаточно взять

$$\Omega_k = \alpha_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j \xi_j \eta_j.$$

Важным условием является то, что не все β_k^j одновременно могут быть нулевыми. Если β_k^j окажутся именно такими, то необходимо найти приближение более высокого порядка. Если это условие нарушено в любом порядке, то система является чрезвычайно особенной. Такая ситуация может быть связана с задачей о резонансе в консервативной системе.

Очевидно, числа α_k и β_k^j являются вещественными и, более того, $\eta_k = \overline{\xi}_k$ (черта означает комплексное сопряжение). Отсюда следует, что $\eta_k' = \overline{\xi}_k'$, так что необходимо рассматривать

---

[1]) В действительности должно выполняться более сильное требование $\lambda_1^{s_1}\lambda_2^{s_2} \ldots \lambda_n^{s_n} \neq 1$, где s_j — целые числа, а $|s_1| + \ldots + |s_n| = 1, 2, \ldots, 2m+2$ (*прим. ред.*).

только соотношения

$$\xi_k' = e^{i\Omega_k}\xi_k + \varphi_k^{(4)}(\xi, \bar{\xi}),$$

$$\Omega_k = \alpha_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j \xi_j \bar{\xi}_j, \qquad \lambda_k = e^{i\alpha_k}.$$

С другой стороны, разложение экспоненты имеет вид

$$e^{i\Omega_k} = \lambda_k (1 + i\delta_k),$$

где члены более высокого порядка входят в $\varphi_k^{(4)}$, а

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j |\xi_j|^2.$$

Следовательно, в векторной форме

$$\begin{gathered} \xi' = \Lambda\xi + \Phi^{(4)}, \\ \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1(1+i\delta_1), \ldots, \lambda_n(1+i\delta_n)\}. \end{gathered} \tag{4.1.22}$$

При $n = 1$ это преобразование удовлетворяет теореме Биркгофа о неподвижной точке. Распространение этой теоремы на случай $n > 1$ не является справедливым. При числе степеней свободы $n = 2$ для консервативной системы существуют случаи, когда теорема может быть верна. Например, когда гамильтониан периодичен по одной из переменных.

2. Области движения. Возмущения укороченной нормальной формы Биркгофа

Исследование асимптотического поведения решений гамильтоновых систем включает в себя, в частности, изучение областей возможного движения, инвариантных множеств, соответствующих некоторому множеству начальных условий. Эта задача является также частью задачи об устойчивости таких решений. Решения, которые рассматриваются в этом случае, являются периодическими или условно-периодическими. Введем ограничивающее определение, полезное для наших целей: функция $z(t) = \varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ является условно-периодической, если

а) функция φ периодична по каждой из θ_k $(k = 1, \ldots, 2)$;

б) функция φ обладает некоторыми свойствами регулярности, например, принадлежит классу C^p, или C^∞, или является аналитической;

в) $\theta_k = \omega_k t + \alpha_k \quad (k = 1, \ldots, n)$, где α_k, ω_k — постоянные;

г) $\sum_{k=1}^{n} p_k \omega_k = 0$, где $p_1, \ldots, p_n$ — целые числа, тогда и только тогда, когда $p_1 = \ldots = p_n = 0$ [1]).

Как мы уже видели, если система с гамильтонианом $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является интегрируемой в смысле Лиувилля, то в общем случае движение будет условно-периодическим, и соответствующее инвариантное множество состоит из n-мерных торов, параметризованных угловыми переменными $\eta_k = \omega_k t + \alpha_k \quad (k = 1, \ldots, n)$, где все ω_k линейно независимы на множестве целых чисел. Это эквивалентно существованию такого канонического преобразования $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to (\xi, \eta)$, что новая функция Гамильтона, выраженная через переменные ξ, η, будет зависеть только от переменных ξ (т. е. от $\xi_1, \ldots, \xi_n$).

Это преобразование может определяться производящей функцией Гамильтона — Якоби $S(\xi, y)$, такой, что

$$\eta_k = S_{\xi_k}, \qquad x_k = S_{y_k},$$

и, следовательно,

$$\xi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \text{const} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

и

$$\dot{\eta}_k(\boldsymbol{x}, y) = H_{\xi_k}(\boldsymbol{x}(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \omega_k(\xi) = \text{const}$$

или

$$\eta_k = \omega_k t + \alpha_k.$$

Траектории при этом остаются на некоторых n-мерных торах. Изменение начальных условий y_k будет менять только начальные фазы $\eta_k(0)$, а сами торы не изменяются. Изменения начальных условий для x_k приведет к изменению частот ω_k или к изменению «радиусов» торов, т. е. $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Действительно, функция W должна удовлетворять уравнению

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial y_n}, y_1, \ldots, y_n\right) = \alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

так что энергия зависит только от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и любые изменения начальных фаз α_k не влияют на значение энергии.

Условно-периодические движения обладают следующими важными свойствами.

---

[1]) Величины $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называются *базисными частотами* условно-периодической функции $z(t)$ (*прим. перев.*).

1) Траектории всюду плотны на торах. Это означает, что для любой заданной области D точка $(x(t), y(t))$ такова, что существует конечное время $t = \tau$, для которого $(x(\tau), y(\tau)) \in D$.

2) Траектории на торах равномерно распределены, т. е. время Δt, в течение которого точка остается в области D, пропорционально мере области D для достаточно больших Δt. Другими словами, для любой функции $F(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_k = \omega_k t + \alpha_k$, R-интегрируемой на торе, среднее значение по времени равно частному среднему значению по фазовым переменным

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\omega_1 t + \alpha_1, \ldots, \omega_n t + \alpha_n)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

3) Существуют значения $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$, такие, что для некоторых не равных одновременно нулю целых чисел $p_1, \ldots, p_n$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\bigg|_{\xi=\xi^0} = 0.$$

В этих случаях решение системы уравнений является периодическим. Таким образом, периодическое решение связано с существованием неподвижной точки сохраняющего площадь отображения, так что решение вопроса о существовании периодического решения сводится к изучению таких особых точек. Более того, аналогичные утверждения справедливы и относительно свойства устойчивости.

Как мы видели, в окрестности неподвижной точки эллиптического типа можно определить инвариантные торы с помощью возможного усечения нормальной формы Биркгофа. Нормальная форма показывает, что в окрестности точки эллиптического типа каждая инвариантная окружность радиуса r с центром в начале координат (которое является неподвижной точкой) отображается на себя посредством преобразования кручения

$$\alpha(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots$$

Если рассматривать возмущения, оказываемые отброшенными при нормализации членами, то основная задача состоит в определении того, что происходит с инвариантными окружностями (или торами). Из теоремы Колмогорова [17] следует, что большинство окружностей не разрушается, а лишь слегка деформируется.

Неподвижная точка, следовательно, окружена замкнутыми аналитическими инвариантными кривыми, сколь угодно малыми, т. е. она устойчива. Такие кривые покрывают область ненулевой меры, и начало координат для них является точкой накопления. Однако они не покрывают целиком любую заданную окрестность начала координат. Между ними существуют зоны неустойчивости, получающиеся из-за существования таких окрестностей, что величина $\alpha(r)$ соизмерима с 2π (см. [3]). В действительности под действием возмущений от членов высшего порядка часть окружностей переходит в четное число неподвижных точек, половина из которых — точки эллиптического типа, а половина — гиперболического типа [5]. Из точек гиперболического типа рождаются орбиты, известные под названием «хаотических движений», как и предполагалось в работах Пуанкаре и как недавно показал Денби [7].

3. Теоремы Мозера

Рассмотрим сначала систему с двумя степенями свободы ($n = 2$). Условно-периодические орбиты описываются формулами

$$y_k = \omega_k(x_1^0, x_2^0)\,t + y_k^0, \qquad x_k = x_k^0 \qquad (k = 1, 2). \qquad (4.3.1)$$

Тор T^2 можно получить двумя путями: как прямое произведение двух окружностей с радиусами x_1 и x_2 и с помощью квадрата в плоскости y_1, y_2. Второй путь проще и лучше обозрим в многомерных случаях. Если значения y_1 и y_2 брать по модулю 2π, то можно отождествить противоположные стороны квадрата, т. е. точки $(0, y_2)$ и $(y_1, 0)$ с точками $(2\pi, y_2)$ и $(y_1, 2\pi)$ соответственно. Таким образом, тор имеет классическое определение через соотношение эквивалентности. Траектории являются отрезками прямой линии, наклоненной к оси y_1 под углом ω_2/ω_1. Ясно, что если величина ω_2/ω_1 иррациональна, то траектории покрывают весь квадрат и являются условно-периодическими (эргодический поток). В любом случае решения остаются на торе, который, следовательно, инвариантен по отношению к потоку.

Если предположить выполненным условие Колмогорова

$$\det\left\{\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \neq 0,$$

то отсюда следует, что для аналитической функции $H = H_0 + \mu H_1$, достаточно малых μ и для всех ω_1, ω_2, рационально независимых и удовлетворяющих условию $|m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \geqslant K$ при всех не обращающихся одновременно в нуль целых m_1, m_2, существуют инвариантные торы

$$x_k = A_k(Y_1, Y_2), \qquad y_k = Y_k + \Phi_k(Y_1, Y_2) \qquad (k = 1, 2),$$

а решение на каждом торе определяется формулами $Y_k = \omega_k t + Y_k^0$. Этот факт можно выразить иначе, сказав, что эргодический поток может быть непрерывным при возмущениях.

Сведéние этой проблемы к изучению сохраняющего площадь отображения множества на себя дает определенные преимущества, которые следуют из геометрических свойств такого отображения. Проводниками геометрической линии исследования являлись Пуанкаре [31], Биркгоф [5] и Мозер [24, 26, 27].

Рассмотрим *задачу Мозера о сохраняющем площадь отображении кругового кольца на себя.* Для данного кругового кольца $A\{0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b\}$ рассмотрим отображение

$$U_0 \begin{cases} \theta^* = \theta + \omega(r), \\ r^* = r, \end{cases} \tag{4.3.2}$$

где $d\omega/dr > 0$, $r \in A$.

Такое отображение не изменяет окружностей, а просто вводит поворот на угол $\omega(r)$, увеличивающийся вместе с r. Рассмотрим теперь возмущенное отображение

$$U \begin{cases} \theta^* = \theta + \omega(r) + F(r, \theta), \\ r^* = r + G(r, \theta), \end{cases} \tag{4.3.3}$$

где $|F(r, \theta)| < \omega(r)$ для всех θ, $|G(r, \theta)| < r$ для $r \in A$ и периодических по θ (периода 2π) функций F, G. Тогда можно показать, что при некоторых условиях на $\omega(r)$, F, G и при U_0 и U, сохраняющих площадь, *отображение U (отображение кручения) имеет замкнутые инвариантные кривые, которые близки к инвариантным окружностям отображения U_0.* Одним из существенных условий является то, что величина ω должна быть несоизмерима с 2π. Связь этого результата с консервативными системами с одной степенью свободы очевидна. Действительно, инвариантными множествами интегрируемой одномерной гамильтоновой системы являются окружности.

Теперь рассмотрим систему с двумя степенями свободы, соответствующую гамильтониану

$$H = H_0(x_1, x_2) + \mu\{H_{1s}(x_1, x_2) + H_{1p}(x_1, x_2, y_1, y_2)\},$$

который аналитичен в некоторой области D фазового пространства и периодичен (с периодом 2π) относительно y_1 и y_2, а $|\mu| < \mu_0$, где $0 \leqslant \mu_0 \leqslant 1$. Пусть условия теоремы Колмогорова выполнены, и в области D справедливо: $\partial H_0/\partial x_2 \neq 0$. Следовательно, можно решить уравнение

$$H_0(x_1, x_2) + \mu H_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = h = \text{const}$$

относительно x_2 и найти

$$x_2 = \tilde{K}(x_1, y_1, y_2, h, \mu), \tag{4.3.4}$$

где K — аналитическая функция в некоторой области $D'\{(x_1, h\}; |\mu| < \mu_0\}$ и она периодична по y_1, y_2 с периодом 2π. Тогда можно разложить $\tilde{K}$ в степенной ряд относительно μ. В действительности нам достаточно знать, что при сделанных предположениях можно написать

$$\tilde{K} = K_0(x_1, h) + \mu K_1(x_1, y_1, y_2, h, \mu). \tag{4.3.5}$$

Теперь, исключив переменную x_2, можно также исключить из системы время. Действительно,

$$\frac{dx_1}{dy_2} = -\frac{\partial H}{\partial y_1}\Big/\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y_1}, \qquad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\partial H}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_1}, \tag{4.3.6}$$

где $\tilde{K}$ определяется формулой (4.3.5). Определим величины

$$y_2 = \tau, \qquad x_1 = x, \qquad y_1 = y,$$

так что, обозначив штрихом дифференцирование по τ, имеем систему

$$x' = \frac{\partial K}{\partial y}, \qquad y' = -\frac{\partial K}{\partial x} \tag{4.3.7}$$

с гамильтонианом

$$K = K_0(x) + \mu K_1(x, y, \tau, \mu).$$

В пространстве переменных x, y, τ изучение решений системы (4.3.7) может быть сведено к изучению отображения T_μ плоскости $\tau = 0$ в плоскость $\tau = 2\pi$. Такое отображение полностью определяется системой уравнений (4.3.7). Пусть при $\tau = 0$ имеются начальные условия $x = x_0$, $y = y_0$, лежащие в области D, а соответствующее решение уравнений (4.3.7) имеет вид

$$x = \varphi(\tau, x_0, y_0, \mu), \qquad y = \psi(\tau, x_0, y_0, \mu). \tag{4.3.8}$$

Тогда отображение T_μ определяется формулами

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi(2\pi, x, y, \mu), \\ y^* &= \psi(2\pi, x, y, \mu). \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

При $\mu = 0$ отображение T_0 имеет вид

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi_0(2\pi, x, y) = \varphi(2\pi, x, y, 0), \\ y^* &= \psi_0(2\pi, x, y) = \psi(2\pi, x, y, 0), \end{aligned}$$

где φ_0 и ψ_0 можно сразу же выписать в явном виде. Действительно, при $\mu = 0$ гамильтониан $K = K_0(x)$ и, следовательно,

$$y(\tau, x_0, y_0) = y_0 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\tau, \qquad x(\tau, x_0, y_0) = x_0,$$

где

$$\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial x_i}(x_1, x_2(y_1, y_2, x_1)) = \omega_i(x),$$

а отсюда $\omega_1/\omega_2 = \omega(x)$. Считая $\alpha(x) = 2\pi\omega(x)$, отображение T_0 можно записать в виде

$$x^* = x, \qquad y^* = y + \alpha(x),$$

что в точности совпадает с видом отображений, изученных Мозером. Отображение T_μ в конечном счете может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x^* &= x + \mu G(x, y, \mu), \\ y^* &= y + \alpha(x) + \mu F(x, y, \mu), \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

а величину x можно считать определенной в кольце $0 < a \leqslant x \leqslant b$. Ясно, что отображение (4.3.10) сохраняет площадь, т. е. площадь $dx\,dy$ инвариантна относительно T_μ. С другой стороны, легко видеть, что, в силу сделанных предположений, функции G и F периодичны по y с периодом 2π. Если в данном кольце имеем $\alpha'(x) > 0$, а $\alpha(x)$ удовлетворяет условию

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}2\pi\right| > \mu n^{3/2-\sigma},$$

где σ — целое число, большее четырех, m и $n \neq 0$ — целые числа, то теорема Мозера [26] гарантирует, что при достаточно малых μ отображение T_μ имеет инвариантные кривые, близкие к окружностям $x^* = \text{const}$, которые являются инвариантными кривыми отображения T_0. Другими словами, инвариантные кривые отображения T_0 мало изменяются при малых возмущениях.

С другой стороны, если существует интеграл $J(x, y) = \text{const}$, то, очевидно, $J(x^*, y^*) = J(x, y)$ и, следовательно, кривые $J(x, y) = \text{const}$ являются инвариантными кривыми. Это дает необходимое условие существования интегралов системы (4.3.7), близких к интегралам $x = \text{const}$ при $\mu = 0$.

Наконец, посмотрим, как условие $\alpha'(x) \neq 0$ выражается в терминах исходного гамильтониана. По определению

$$\alpha = 2\pi \frac{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))}{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))} = \alpha(x_1).$$

Таким образом,

$$\frac{d\alpha}{dx_1}=\frac{2\pi}{\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2}\right)^2}\left[\frac{\partial H_0}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)-\frac{\partial H_0}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)\right].$$

Но из определения $H_0(x_1, x_2) = h$ следует, что

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1}+\frac{\partial H_0}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}=0$$

или

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\frac{\partial H_0}{\partial x_1}}{\frac{\partial H_0}{\partial x_2}},$$

и, следовательно,

$$\frac{d\alpha}{dx_1}=-\frac{2\pi}{\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2}\right)^3}\Delta(x_1, x_2),$$

где Δ — определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial H_0}{\partial x_1}\\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} & \frac{\partial H_0}{\partial x_2}\\ \frac{\partial H_0}{\partial x_1} & \frac{\partial H_0}{\partial x_2} & 0\end{vmatrix}, \tag{4.3.11}$$

который должен быть отличен от нуля. Это условие является менее жестким, чем условие, рассмотренное Колмогоровым [17], а в действительности оно было получено Арнольдом [3] в его теореме. Здесь оно является следствием гипотезы Мозера [26] [1]).

4. Системы со многими степенями свободы

Рассмотрим аналитический (в некоторой области) и 2π-периодический по каждой компоненте $y_1, \ldots, y_n$ вектора $\boldsymbol{y}$ гамильтониан

$$H = H_0(\boldsymbol{x}) + \mu H_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{4.4.1}$$

При $\mu = 0$ условно-периодические решения

$$y_k = \Omega_k(\boldsymbol{x}^0)\,t + y_k^0, \qquad x_k = x_k^0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{4.4.2}$$

лежат на торе T_n, и поток является эргодическим. Вдоль каждого

[1]) См. примечание в конце § 4 (*прим. перев.*).

решения системы уравнений, соответствующих гамильтониану (4.4.1), мы имеем

$$H\ (\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)) = h = \text{const}.$$

Предположим, что $\partial H/\partial x_n \neq 0$. Тогда мы можем решить уравнение $H = h$ относительно x_n и найти

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_n, h, \mu). \tag{4.4.3}$$

Обозначая $y_n = \tau$ и исключая из уравнений время t, имеем

$$x_k' = \frac{\partial f}{\partial y_k}, \qquad y_k' = -\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n-1), \tag{4.4.4}$$

где

$$f = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, \tau, h, \mu).$$

Если функция H аналитична, то функция f также будет аналитична. Опять изучение решений системы (4.4.4) может быть сведено к изучению определяемого системой (4.4.4) отображения T_μ плоскости $\tau = 0$ в плоскость $\tau = 2\pi$. Действительно, пусть в плоскости $y_n = \tau = 0$ выбраны начальные условия x_k^0, y_k^0 $(k = 1, \ldots, n-1)$. Решение уравнений (4.4.4), проходящее через точку при $\tau = 0$, будет иметь вид

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\tau, \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \mu), \\ y_k &= y_k(\tau, \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \mu) \end{aligned} \qquad (k = 1, \ldots, n-1), \tag{4.4.5}$$

и, следовательно,

$$T_\mu \begin{cases} x_k^* = x_k(2\pi, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mu), \\ y_k^* = y_k(2\pi, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mu) \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{4.4.6}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_n}} = -\frac{\Omega_k}{\Omega_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{4.4.7}$$

так что при $\mu = 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$

$$\begin{aligned} x_k &= x_k^0, \\ y_k &= \frac{\Omega_k}{\Omega_n}(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)\,\tau + y_k^0. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Положив $\alpha_k = 2\pi\Omega_k/\Omega_n$, получаем $(k = 1, \ldots, n-1)$

$$T_0 \begin{cases} \overset{*}{x}_k = x_k, \\ \overset{*}{y}_k = \alpha_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + y_k, \end{cases} \tag{4.4.9}$$

и при $\mu \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$

$$T_\mu \begin{cases} \overset{*}{x}_k = x_k + G_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}), \\ \overset{*}{y}_k = y_k + \alpha_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + F_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}) \end{cases} \tag{4.4.10}$$

где переменные x_k берутся из кольца $0 < a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$. Ясно, что функции G_k и F_k зависят от μ и должны стремиться к нулю при $\mu \to 0$. Так как система уравнений (4.4.4) является гамильтоновой, то отображение T_μ сохраняет площадь. Если существует первый интеграл системы (4.4.4), то он является инвариантным по отношению к отображению T_μ. Более того, периодические решения периода $2\pi p$, где $p > 0$ — целое число, должны быть таковы, что

$$T_\mu^p(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0),$$

т. е. точка $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$ является неподвижной точкой отображения T_μ.

На геометрическом языке теорема Колмогорова теперь может быть сформулирована в следующем виде. Мы хотим *определить, при каких условиях отображение T_μ имеет инвариантные множества, близкие к инвариантным множествам (торам) отображения T_0.*

Рассмотрим T_0, определенное в кольце $0 < a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ $(k = 1, \ldots, N)$, при условии

$$\det\left\{\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j}\right\} \neq 0.$$

Торы T^N, являющиеся прямым произведением N окружностей $x_k = \text{const}$, инвариантны относительно отображения T_0. Рассмотрим теперь отображение T_μ, где F_k и G_k — ограниченные и 2π-периодические по $y_1, \ldots, y_N$ функции. Предположим, что *каждое замкнутое ограниченное множество, близкое к T^N и представленное в виде*

$$x_k = f_k(y_1, \ldots, y_N) = f_k(y_1 + 2\pi, \ldots, y_N + 2\pi), \tag{4.4.11}$$

пересекается со своим образом при отображении T_μ, где функции $\partial f_k/\partial y_j$ удовлетворяют некоторым условиям ограниченности. При сделанных предположениях теперь можно показать, что *отображение T_μ имеет ограниченные замкнутые инвариантные множе-*

ства при достаточно малых значениях функций F_k и G_k и при условии, что эти функции являются некоторое число раз дифференцируемыми.

Здесь мы только дадим схему доказательства этой основной теоремы, начав изложение с некоторых важных лемм. При $N = 1$ детальное доказательство было дано Мозером [26].

Теорема. *Для данных $\varepsilon > 0$ и целых $s > 1$ отображение T_μ имеет ограниченное замкнутое инвариантное множество*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}^0), \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}^0), \tag{4.4.12}$$

где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — N-мерные векторы, периодические по каждой компоненте $y_1, \ldots, y_N$ вектора $\boldsymbol{y}$, принадлежащие классу C^s и при $|p_k|_s + |q_k|_s < \varepsilon$, удовлетворяющие условиям:

а) *каждое замкнутое множество и его образ при отображении T_μ, определяемом формулами (4.4.10), имеет хотя бы одну общую точку;*

б) *в кольце $0 \leqslant a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$, $b_k - a_k \geqslant 1$ можно найти такое $C_0 > 1$, что*

$$\frac{1}{N!C_0^N} \leqslant \left| \det \left\{ \frac{\partial \alpha_k(x)}{\partial x} \right\} \right| < N!C_0^N.$$

Тогда можно найти такую функцию $f_0(\varepsilon, s, C_0) > 0$ и целое число $m(s)$, что $F_k \in C^m$, $G_k \in C^m$ и

$$\begin{gathered} |F_k|_0 + |G_k|_0 < \delta_0, \\ |\alpha_k|_0 + |F_k|_m + |G_k|_m < C_0. \end{gathered} \tag{4.4.13}$$

Более того, отображение, индуцируемое множеством (4.4.11), имеет вид

$$\tilde{y}_k = y_k^0 + \alpha_k(\boldsymbol{x}^0) = y_k^0 + \alpha_k. \tag{4.4.14}$$

Точнее, для данного α_k, удовлетворяющего условиям

$$\alpha_k(a) + \varepsilon < \alpha_k < \alpha_k(b) - \varepsilon, \tag{4.4.15}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{N} j_k \alpha_k + j_{N+1} 2\pi \right| \geqslant \varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^{N} |j_k| \right\}^{-N-1/2}, \tag{4.4.16}$$

при всех одновременно не равных нулю целых числах j_k существуют инвариантные множества (4.4.11) с $\alpha_k(\boldsymbol{x}^0) = \alpha_k$ (коэффициент кручения).

В теореме использовано обозначение

$$|f|_s = \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{s_n} f(x_1, \ldots, x_n) \right|,$$

где $s = s_1 + \ldots + s_n$, а $\boldsymbol{x} \in D$ — область определения функции $f(\boldsymbol{x})$.

Сначала можно доказать такое вспомогательное утверждение.

Лемма. *Данное отображение*

$$Q\begin{cases} x_k^* = x_k + g_k(x, y), \\ y_k^* = y_k + x_k + f_k(x, y) \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

определенное в кольце $0 < a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$, *где* f_k, g_k — 2π-*периодические по каждой компоненте* $y_1, \ldots, y_N$ *вектора* y *функции,* $b_k - a_k \geqslant 1/C_0$ *и*

а) $$|f|_1 + |g|_1 < \delta_0, \tag{4.4.17}$$

б) $$|D^m f_k| + |D^m g_k| < C_0, \tag{4.4.18}$$

где

$$D^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{p_N} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_N}\right)^{q_N}$$

при $p_1 + \ldots + p_N + q_1 + \ldots + q_N = m$,

в) $$a_k + \varepsilon < \alpha_k < b_k - \varepsilon,$$

г) $$\left|\sum_{k=1}^{N} j_k \alpha_k + 2\pi j_{N+1}\right| \geqslant \varepsilon \left\{\sum_{k=1}^{N} |j_k|\right\}^{-\sigma+N+3/2}$$

($\sigma \geqslant 2N + 1$) — *целое число*), *можно привести к виду*

$$Q_0\begin{cases} x_k^* = x_k, \\ y_k^* = y_k + x_k. \end{cases}$$

Это приведение можно осуществить с помощью итерационной процедуры, очень похожей на процедуру, использованную при доказательстве теоремы Колмогорова. Однако в данном случае итерации сходятся таким образом, что отклонение от Q_0 уменьшается вместе с $\delta_0^{q^n}$, где n — номер итерации, а q может быть взято равным 4/3.

Действительно, пусть три параметра Q, M, δ удовлетворяют соотношениям

$$M = Q^\nu > Q > 1, \qquad \delta = M^{-2q}$$

при

$$q = \frac{4}{3}, \qquad \nu = 6(\sigma + 1), \qquad m = 3 + 11\nu. \tag{4.4.19}$$

Параметры Q_{n-1}, M_{n-1}, δ_{n-1}, получающиеся при итерации номера

$n-1$, связаны с Q, M, δ соотношениями

$$Q = Q_{n-1}^{q}, \qquad Q_{n-1} = Q_0^{q^{n-1}},$$
$$M = M_{n-1}^{q}, \qquad M_{n-1} = M_0^{q^{n-1}},$$
$$\delta = \delta_{n-1}^{q}, \qquad \delta_{n-1} = \delta_0^{q^{n-1}}$$

при условии, что на каждом шаге

$$|f_k|_1 + |g_k|_1 < \delta_{n-1} \quad \text{при} \quad |x_k - \alpha_k| < \frac{1}{M_{n-1}}, \tag{4.4.20}$$

$$|D^m Q_{n-1} f_k| + |D^m M_{n-1} g_k| \leqslant Q_{n-1}^{q_1+\ldots+q_N+1} M_{n-1}^{p_1+\ldots+p_N+1} \tag{4.4.21}$$

при $q_1 + \ldots + q_N + p_1 + \ldots + p_N = m$.

При $n = 1$ соотношение (4.4.20) совпадает с (4.4.17) при достаточно малых δ. Более того, беря $M_0 > 1/\varepsilon$ и $|x_k - \alpha_k| < 1/M_0 < \varepsilon$, мы, разумеется, имеем $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$. Аналогичным образом соотношение (4.4.21) при $n = 1$ совпадает с (4.4.18). Действительно, из (4.4.18) следует, что

$$|D^m Q_0 f_k| + |D^m M_0 g_k| \leqslant C_0 M_0,$$

так как $M > Q$. Таким образом, в силу того, что

$$q_1 + \ldots + q_N + p_1 + \ldots + p_N = m \geqslant \nu,$$
$$Q_0^{q_1+\ldots+q_N} M_0^{p_1+\ldots+p_N} \leqslant Q_0^n > Q_0^\nu \geqslant M_0,$$

получаем

$$C_0 M_0 \leqslant C_0 Q_0^{q_1+\ldots+q_N} M_0^{p_1+\ldots+p_N} \leqslant Q_0^{q_1+\ldots+q_N+1} M_0^{p_1+\ldots+p_N+1},$$

так как $Q_0 > C_0$. Следовательно, при $n = 1$ мы должны взять $M_0 > 1/\varepsilon$ и $Q_0 > C_0$, т. е. $\delta_0 < \varepsilon^{2q}$, $\delta_0 < C_0^{-2q^\nu}$, и в конце концов δ_0 можно взять «много меньшим, чем» выписанные выше величины.

Теперь мы подходим к доказательству основной леммы, которая нуждается в упоминании двух хорошо известных утверждений.

А) Рассмотрим *разностное уравнение*

$$S(y + \alpha) - S(y) = F(y), \tag{4.4.22}$$

где S и F — периодические функции периода 2π по каждой компоненте $y_1, \ldots, y_N$ вектора $\boldsymbol{y}$ и они имеют нулевое среднее. Пусть вектор $\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворяет неравенствам

$$\left| \sum_{k=1}^{N} j_k \alpha_k + 2\pi j_{N+1} \right| \geqslant \varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^{N} |j_k| \right\}^{-\tau+N+1/2}, \tag{4.4.23}$$

где $\tau \geqslant 2N+1$ — целое число. Тогда, если функция $F(y)$ имеет $\tau \geqslant 2N+1$ непрерывных производных по каждой компоненте y_j, то уравнение (4.4.22) имеет непрерывное решение, такое, что

$$|S(F)|_0 \leqslant \frac{C}{\varepsilon}|F|_\tau, \tag{4.4.24}$$

где C — произвольная постоянная, которая не зависит ни от одного из параметров. Более того, можно взять $S(0)=0$. Действительно, используя для функции F разложение в ряд Фурье

$$F = \sum_{j\neq 0} F_j e^{i(j^{\mathrm{T}}y)},$$

получаем решение в виде

$$S = \sum_{j\neq 0} \frac{F_j}{e^{i(j^{\mathrm{T}}\alpha)}-1} e^{i(j^{\mathrm{T}}y)}, \tag{4.4.25}$$

где $j=(j_1, \ldots, j_N)$. Так как функция F имеет τ непрерывных производных по каждой компоненте y_j, то

$$|F_j| \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{N} |j_k|\right\}^{-\tau} |F|_\tau,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{N} |j_k| \neq 0$. С другой стороны,

$$\left|e^{i(j^{\mathrm{T}}\alpha)}-1\right| = \left|2\sin\frac{1}{2}(j^{\mathrm{T}}\alpha)\right| \geqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon\left\{\sum_{k=1}^{N}|j_k|\right\}^{-\tau+N+1/2}$$

для достаточно малых ε, и, следовательно,

$$\left|\frac{F_j}{e^{i(j^{\mathrm{T}}\alpha)}-1}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\varepsilon}\left\{\sum_{k=1}^{N}|j_k|\right\}^{-N-1/2} |F|_\tau,$$

и ряд (4.4.25) является абсолютно сходящимся. Для того, чтобы показать справедливость оценки (4.4.24), достаточно взять

$$C = \sum_{j\neq 0}\left\{\sum_{k=1}^{N}|j_k|\right\}^{-N-1/2}. \tag{4.4.26}$$

Как следствие отсюда получаем, что если $F(x, y)$ является 2π-периодической функцией по $y_1, \ldots, y_N$ и имеет нулевое среднее, то, как и раньше, можно решить разностное уравнение

$$S(x, y+\alpha) - S(x, y) = F(x, y)$$

и получить

$$|S|_0 \leqslant \frac{C}{\varepsilon} |D_y^\tau F|_0.$$

Б) Мы можем определить действие *операции сглаживания* (см. [26, 3]) на функцию $2N$ переменных. В некотором специальном смысле в результате этой операции функции $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ будут аппроксимироваться функциями $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, которые имеют более гладкое поведение, чем $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. В основном эта операция сводится к интерполяции производных функции Φ, которая оставляет инвариантными (точно интерполирует) полиномы некоторой степени.

Пусть $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — непрерывная функция в области

$$a_k < x_k < b_k, \qquad -\infty < y_k < +\infty$$

при $k = 1, \ldots, N$. Степень аппроксимации по отношению к двум векторным переменным $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ может быть различной (в действительности она может быть различной для каждой из $2N$ переменных) и она определяется двумя параметрами M и $Q > 1$. Сглаживающая функция $\Phi_{M,Q}(F)$ определяется в меньшей области

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{M} < x_k < b_k - \frac{1}{M} = \beta_k,$$

и предполагается, что $2/M < b_k - a_k$. Эта функция определяется формулой

$$\Phi_{M,Q}(F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \int \ldots \int_{\substack{a_k < \xi_k < b_k \\ -\infty < \eta_k < +\infty}} \int \ldots \int K_{M,Q}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}) F(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \, d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta}. \tag{4.4.27}$$

Ядро $K_{M,Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ берется так, чтобы

$$K_{M,Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = MK(M\boldsymbol{x}) \cdot QK(Q\boldsymbol{y}),$$

где $K(\boldsymbol{x}) \in C^\infty$, и удовлетворяет условиям

$$K(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{при} \quad |x_k| > 1 \tag{4.4.28}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int x_1^{k_1} \ldots x_N^{k_N} K(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad \sum k_i = 0 \\ 0 & \text{для} \quad 0 < \sum k_i < m, \end{cases} \tag{4.4.29}$$

где $k_i \geqslant 0$ и m — фиксированные числа. Таким образом, функция $\Phi_{M,Q}(F)$ зависит от m, которое выбирается так, чтобы удовлетворялись условия (4.4.13).

Условие (4.4.28) показывает, что $K_{M,Q}$ равно нулю при $|y_k| > 1/Q$ и $|x_k| > 1/M$. Следовательно, интервал интегрирования в (4.4.29) можно ограничить интервалом, содержащимся в $a_k < \xi_k < b_k$, так как $\alpha_k < x_k < \beta_k$. Отсюда функцию (4.4.27) можно записать через новые переменные u, v, имеющие очевидный смысл, так:

$$\Phi_{M,Q}(F(x, y)) = \int \ldots \int_{|u_k|<1, |v_k|<1} \int \ldots \int K_{1,1}(u, v) F\left(x - \frac{u}{M}, y - \frac{v}{Q}\right) du\, dv. \tag{4.4.30}$$

Наконец, условие (4.4.29) показывает, что полиномы $P_m(x, y)$ степени не выше m остаются инвариантными при операции сглаживания, т. е.

$$\Phi_{M,Q}(P_m(x, y)) = P_m(x, y).$$

Теперь, если функция $F(x, y)$ непрерывна в кольце $a_k < x_k < b_k$, то при $\alpha_k < x_k < \beta_k$ легко проверить, что

$$|D_x^q D_y^p \Phi_{M,Q}(F)| \leqslant \widetilde{C} Q^{p_1+\ldots+p_N} M^{q_1+\ldots+q_N} \sup_{a_k \leqslant x_k \leqslant b_k} |F| \tag{4.4.31}$$

для всех целых $p_1, \ldots, p_N$, $q_1, \ldots, q_N$, а постоянная $\widetilde{C}$ зависит от ядра $K(x)$ и чисел p, q. Аналогичным образом, если $F(x, y) \in C^m$, то при $\alpha_k < x_k < \beta_k$ справедливы неравенства

$$|F - \Phi_{M,Q}(F)| \leqslant C Q^{-p_1-\ldots-p_N} M^{-q_1-\ldots-q_N} \sup |D_x^q D_y^p F| \tag{4.4.32}$$

при $p_1 + \ldots + q_N = m$, $a_k < x_k < b_k$.

Эти утверждения можно получить, если заметить, что из (4.4.27) следуют неравенства

$$|D_x^q D_y^p \Phi_{M,Q}(F)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a_k \leqslant x_k \leqslant b_k} |F| \int \ldots \int |D_x^q D_y^p K_{M,Q}(x - \xi, y - \eta)| d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a_k \leqslant x_k \leqslant b_k} |F| Q^{p_1+\ldots+p_N} M^{q_1+\ldots+q_N} \int \ldots \int |D_x^q K(x)| dx \times$$

$$\times \int \ldots \int |D_y^p K(y)| dy,$$

которые и доказывают (4.4.31). Далее, мы разложим функцию $F(x - u/M, y - v/Q)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = v = 0$ до членов порядка, меньшего m, с какими-то остаточными членами. Так как $\Phi_{M,Q}$ сохраняет полиномы степени ниже m, то только остаточные члены этого ряда $R_m(x, y, u, v)$ дадут вклад в разложение $F - \Phi_{M,Q}(F) = (I - \Phi_{M,Q})F$. Эти остаточные члены

могут быть оценены с помощью неравенств $(p_1+\ldots+q_N=m)$

$$|R_m| \leqslant \sup_{(u,v)} \frac{|u_1^{q_1}\ldots u_N^{q_N} v_1^{p_1}\ldots v_N^{p_N}|}{Q^{p_1+\ldots+p_N} M^{q_1+\ldots+q_N}} |D_x^q D_y^p F(\xi, \eta)|,$$

где

$$|\xi_k - x_k| < \frac{1}{M}, \qquad |\eta_k - y_k| < \frac{1}{Q}, \qquad |u_k| < 1, \qquad |v_k| < 1.$$

Следовательно, из (4.4.30) мы получаем

$$|(I-\Phi_{M,Q}) F(x, y)| \leqslant C \sup Q^{-p_1-\ldots-p_N} M^{-q_1-\ldots-q_N} |D_x^q D_y^p F(\xi, \eta)|,$$

где $p_1+\ldots+p_N+q_1+\ldots+q_N=m$ и

$$C = N \sup_{p_1+\ldots+q_N=m} \int\ldots\int |u_1^{q_1}\ldots u_N^{q_N} v_1^{p_1}\ldots v_N^{p_N} K_{1,1}(u, v)| du\, dv,$$

что и доказывает неравенства (4.4.32).

Замечание. Для $a_k < x_k < b_k$ при $p_1+\ldots+p_N=\tau$, $q_1=\ldots=q_N=0$ мы имеем

$$S^* = |S(\Phi_{M,Q}(F(x, y)))| \leqslant \frac{C}{\varepsilon} |D_y^\tau \Phi_{M,Q}(F)|_0 \leqslant \widetilde{C} C \frac{Q^\tau}{\varepsilon} |F|_0,$$

и, выбирая $Q > 1/\varepsilon$, $\sigma = \tau + 1$, отсюда, следовательно, получаем

$$S^* \leqslant \widetilde{C} C Q^{\tau+1} |F|_0 = \widetilde{C} C Q^\sigma |F|_0 \tag{4.4.33}$$

и, аналогичным образом,

$$S^{*2} = |S(S(\Phi_{M,Q}(F(x, y))))| \leqslant \widetilde{C} C Q^{2\sigma} |F|_0. \tag{4.4.34}$$

Можно также показать, что функция $K(x)$, обладающая упомянутыми свойствами, действительно существует (см. [26]).

Теперь мы переходим к рассмотрению итерационной процедуры в процессе приведения отображения к линейному виду отображения кручения Мозера.

Лемма. *Рассмотрим отображение*

$$T \begin{cases} x_k^* = x_k + g_k(x, y), \\ y_k^* = y_k + x_k + f_k(x, y) \end{cases} \tag{4.4.35}$$

при $|x_k - \alpha_k| < 1/M_{n-1}$, *удовлетворяющее уже упомянутым выше условиям*

$$|f|_1 + |g|_1 < \delta_0, \qquad |D^m f_k| + |D^m g_k| < C_0$$

и такое, что каждая замкнутая ограниченная регулярная поверхность, близкая поверхности $x_k = \text{const}$ $(k = 1, \ldots, N)$, *и ее образ имеют хотя бы одну общую точку. Тогда для достаточно малых* δ_0 *существует преобразование*

$$x_k = \xi_k + u_k(\xi, \eta), \qquad y_k = \eta_k + v_k(\xi, \eta) \tag{4.4.36}$$

при

$$|\xi_k - \alpha_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M} > \frac{1}{M},$$

такое, что

$$|v_k|_1 + |u_k|_1 < \frac{1}{Q}, \tag{4.4.37}$$

а отображение T приводится к виду

$$\xi_k^* = \xi_k + \varphi_k(\xi, \eta), \qquad \eta_k^* = \eta_k + \zeta_k + \psi_k(\xi, \eta), \tag{4.4.38}$$

где

$$|\varphi_k|_0 + |\psi_k|_0 < \delta = \delta_{n-1}^q \tag{4.4.39}$$

при $|\xi_k - \alpha_k| < 1/Q$, *и, более того,*

$$|D_\eta^p D_\xi^q Q\varphi_k| + |D_\eta^p D_\xi^q M\psi_k| < Q^{p_1+\ldots+p_N+1} M^{q_1+\ldots+q_N+1} \tag{4.4.40}$$

при $p_1 + \ldots + p_N + q_1 + \ldots + q_N = m$.

Действительно, из выписанных выше соотношений следует

$$\xi_k + \varphi_k(\xi, \eta) + u_k(\xi^*, \eta^*) = \xi_k + u_k(\xi, \eta) + g_k(\xi + \boldsymbol{u}, \eta + v),$$
$$\eta_k + \xi_k + \psi_k(\xi, \eta) + v_k(\xi^*, \eta^*) = \eta_k + v_k(\xi, \eta) + \xi_k + u_k(\xi, \eta) + f_k(\xi + \boldsymbol{u}, \eta + v)$$

или

$$\varphi_k(\xi, \eta) + u_k(\xi^*, \eta^*) = u_k(\xi, \eta) + g_k[\xi + \boldsymbol{u}(\xi, \eta), \eta + \boldsymbol{v}(\xi, \eta)],$$
$$\psi_k(\xi, \eta) + v_k(\xi^*, \eta^*) = v_k(\xi, \eta) + u_k(\xi, \eta) + f_k[\xi + \boldsymbol{u}(\xi, \eta), \eta + \boldsymbol{v}(\xi, \eta)]. \tag{4.4.41}$$

Теперь линеаризуем уравнения, которые получаются из соотношений $\varphi_k = \psi_k = 0$ при условии, что величины f_k, g_k, u_k, v_k и $|\xi_k - \alpha_k|$ имеют одинаковый порядок малости, т. е. являются величинами порядка $O(\mu)$. Будем пренебрегать членами порядка, равного или большего, чем $O(\mu^2)$. В результате находим

$$\begin{aligned} v_k(\xi, \eta + \omega) - v_k(\xi, \eta) &= u_k(\xi, \eta) + f_k(\xi, \eta), \\ u_k(\xi, \eta + \omega) - u_k(\xi, \eta) &= g_k(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{4.4.42}$$

Второе из этих уравнений можно решить в соответствии с предыдущей леммой, если только функция $g_k(\xi, \eta)$ имеет нулевое

среднее относительно η. В любом случае к функциям f_k и g_k надо применить операцию сглаживания для того, чтобы восполнить «потерю» необходимого количества производных.

Определим функции u_k, v_k как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} u_k(\xi, \eta+\alpha) - u_k(\xi, \eta) &= \Phi(g_k - \bar{g}_k), \\ v_k(\xi, \eta+\alpha) - v_k(\xi, \eta) &= u_k(\xi, \eta) + \Phi(f_k), \end{aligned} \tag{4.4.43}$$

где $\bar{v}_k = 0$, черта означает среднее по отношению к η, а Φ — определенный ранее оператор сглаживания.

Усреднение второго из этих уравнений дает

$$\bar{u}_k + \bar{\Phi}(f_k) = 0,$$

так что из первого уравнения находим

$$u_k = S(\Phi(g_k)) + \bar{u}_k = S(\Phi(g_k)) - \bar{\Phi}(f_k), \tag{4.4.44}$$

где оператор S определяется формулой (4.4.22). Из второго уравнения (4.4.43) следует, что

$$v_k = S(u_k + \Phi(f_k)) = S(S(\Phi(g_k))) + S(\Phi(f_k)). \tag{4.4.45}$$

Уравнения (4.4.44) и (4.4.45) определяют функции u_k, v_k в кольце

$$|\xi_k - \alpha_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M} = \mu.$$

Остается проверить только соотношения (4.4.37), (4.4.39) и (4.4.40).

а) Используя (4.4.33) и (4.4.34) и рассматривая (4.4.20), находим

$$|u_k| + |v_k| \leqslant C_1 Q^{2\sigma}(|f_k|_0 + |g_k|_0) < C_1 Q^{2\sigma}\delta_{n-1} = C_1 Q^{2\sigma} M^{-2} \tag{4.4.46}$$

и аналогичным образом

$$\begin{aligned} |D_\xi u_k| + |D_\xi v_k| &\leqslant C_2 Q^{2\sigma} M^{-1}, \\ |D_\eta u_k| + |D_\eta v_k| &\leqslant C_2 Q^{2\sigma} M^{-1}. \end{aligned} \tag{4.4.47}$$

Так как мы приняли $\nu > 2\sigma + 1$, то $|u_k| + |v_k| < 1/QM$ и $|u_k|_1 + |v_k|_1 < 1/Q$, что и совпадает с доказываемым выражением (4.4.37). Отсюда также следует, что u_k, v_k определены в кольце

$$|\xi_k - \alpha_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M} < \frac{3}{M}$$

при условии

$$M_0 > 4^{1/(1+q)},$$

и здесь выполнено неравенство (4.4.46). По теореме о неявной функции образ области $|\xi_k-\alpha_k| < 3/M$ при отображении (4.4.36) будет покрывать по крайней мере кольцо $|x_k-\alpha_k| < 2/M$, и, следовательно, обратное преобразование определено (и притом единственным образом) в кольце $|x_k - \alpha_k| < 2/M$, и в нем оно будет непрерывно дифференцируемым при достаточно большом $M \geqslant M_0$. Отсюда следует, что отображение (4.4.38) определено и дифференцируемо в кольце $|x_k - \alpha_k| < 1/M$, так как преобразование (4.4.36) переводит эту область в

$$|x_k - \alpha_k| \leqslant |\xi_k - \alpha_k| + |u_k| < \frac{1}{M} + \frac{1}{QM},$$

а отображение (4.4.35) — в

$$|x_k^* - \alpha_k| < |x_k - \alpha_k| + \delta_{n+1} < \frac{1}{M} + \frac{1}{QM} + \frac{1}{M^2} < \frac{2}{M},$$

где отображение (4.4.38) определено единственным образом.

б) Оценка величин $|\varphi_k|$, $|\psi_k|$ в области $|\xi_k - \alpha_k| < 1/M$ нуждается в предположении, что каждая замкнутая поверхность, близкая к инвариантному многообразию $x_k = \text{const}$ $(k=1,\ldots,N)$, т. е. к $\xi_k = \xi_k^0$, имеет образ

$$\xi_k^* = \xi_k^0 + \varphi_k(\xi^0, \eta),$$

который пересекается с $\xi_k = \xi_k^0$ и, следовательно, это эквивалентно предположению о существовании хотя бы одного нуля функции $[\varphi_k(\xi^0, \eta)]$ относительно η. Следовательно,

$$\sup_\eta |\varphi_k(\xi^0, \eta)| \leqslant \underset{\eta}{\text{амплитуда}}\ \varphi_k(\xi^0, \eta) \leqslant 2 \sup_\eta |\varphi_k(\xi^0, \eta) + z_k(\xi^0)|,$$

где $z_k(\xi)$ — соответствующим образом подобранные функции от ξ. Мы будем брать

$$z_k(\xi) = -\overline{\Phi}(g_k(\xi, \eta)).$$

Из (4.4.41) имеем

$$\frac{1}{2}|\varphi_k(\xi, \eta)|_0 \leqslant |\varphi_k(\xi, \eta) - \overline{\Phi}(g_k(\xi, \eta))|_0 =$$
$$= |u_k(\xi, \eta) - u_k(\xi^*, \eta^*) + g_k(\xi + u, \eta + v) - \overline{\Phi}(g_k(\xi, \eta))|_0,$$

а используя (4.4.43), (4.4.47), находим

$$\frac{1}{2}|\varphi_k(\xi, \eta)|_0 \leqslant C_2 Q^{2\sigma+1} M^{-2} |\xi_k - \alpha_k| + |u_k|_1 (|\varphi_k|_0 + |\psi_k|_0) +$$
$$+ |\Phi(g_k(x, y))|_1 (|u_k|_0 + |v_k|_0) + |(I - \Phi)(g_k(x, y))|_0,$$

где нормы всех членов, зависящих от x, y, определяются при условии, что эти функции определены в кольце

$$|\xi_k - \alpha_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M}.$$

Аналогичным образом, вычитая первое уравнение (4.4.42) из второго уравнения (4.4.41), находим

$$\frac{1}{2}|\psi_k(\xi, \eta)|_0 \leqslant C_2 Q^{2\sigma+1} M^{-2} |\xi_k - \alpha_k| + |v_k|_1 (|\varphi_k|_0 + |\psi_k|_0) +$$
$$+ |\Phi(f_k(x, y))|_1 (|u_k|_0 + |v_k|_0) + |(I - \Phi)(f_k(x, y))|_0.$$

Складывая эти две последние оценки и рассматривая уже установленные условия

$$|\Phi(f_k)|_1 \leqslant C_3 M |f_k|_0 < \frac{C_3}{M}, \qquad |\Phi(g_k)|_1 \leqslant \frac{C_3}{M}$$

вместе с предположениями (4.4.21), т. е. с неравенствами

$$|D^m Q_{n-1} f_k| + |D^m M_{n-1} g_k| \leqslant Q_{n-1}^{q_1+\ldots+q_N+1} M_{n-1}^{p_1+\ldots+p_N},$$

где $q_1 + \ldots + q_N + p_1 + \ldots + p_N = m$, находим

$$|\varphi_k|_0 + |\psi_k|_0 \leqslant C_4 (Q^{2\sigma+1} M^{-3} + Q_{n-1}^{1+(1-q)m}). \qquad (4.4.48)$$

С другой стороны,

$$C_4 Q^{2\sigma+1} M^{-3} = C_4 M^{\frac{2\sigma+1}{\nu} - 3} < \frac{1}{2} M^{-2q}$$

при достаточно больших M и

$$\nu > \frac{2\sigma + 1}{3 - 2q} = 6\sigma + 3.$$

Кроме того, так как $m(q-1) > 1 + 2q^2\nu$, то мы имеем

$$C_4 Q_{n-1}^{1+(1-q)m} < \frac{1}{2} M^{-2q} = \frac{1}{2} Q_{n-1}^{-2q^2\nu}.$$

Из (4.4.48) тогда получаем

$$|\varphi_k|_0 + |\psi_k|_0 < M^{-2q} = \delta,$$

что и доказывает неравенство (4.4.39).

в) Для доказательства последней части леммы введем величины

$$x_k' = M x_k, \qquad \xi_k' = M \xi_k,$$
$$y_k' = Q y_k, \qquad \eta_k' = Q \eta_k.$$

Тогда отображение (4.4.35) можно записать в виде

$$T'\begin{cases} x_k^{*\prime} = x_k' + g_k'(x', y'), & g_k' = Mg_k, \\ y_k^{*\prime} = y_k' + \frac{Q}{M} x_k' + f_k'(x', y'), & f_k' = Qf_k. \end{cases} \tag{4.4.49}$$

Из (4.4.21) следует, что

$$|D_{x'}^p D_{y'}^q Qf_k| + |D_{x'}^p D_{y'}^q Mg_k| \leqslant$$
$$\leqslant Q_{n-1} \frac{M}{M_{n-1}} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q}\right)^{q_1+\ldots+q_N} \left(\frac{M_{n-1}}{M}\right)^{q_1+\ldots+q_N} \leqslant$$
$$\leqslant Q_{n-1} \frac{M}{M_{n-1}} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q}\right)^m = Q_{n-1}^{1+(1-q)(m-\nu)} \leqslant 1.$$

С другой стороны,

$$|Qf_k| + |Mg_k| \leqslant M\delta_{n-1} = \frac{1}{M} \leqslant 1$$

при $|x_k - \alpha_k| < 1/M_{n-1}$. Следовательно, функции f_k' и g_k' определены для всех вещественных y' и x' из области

$$|x_k' - M\alpha_k| < \frac{M}{M_{n-1}} < 1,$$

и они меньше единицы, так же как и их производные до порядка m. Из теоремы о среднем, примененной последовательно к каждой из этих производных до этого порядка, следует, что

$$|f_k'(x', y')|_m + |g_k'(x', y')|_m < C_5,$$

где константа C_5 зависит только от m. Следовательно, отображение T' из (4.4.49) таково, что справедливо неравенство

$$|x_k' + g_k'|_m + |y_k' + \frac{Q}{M} x_k' + f_k'|_m < C_6,$$

которое мы перепишем в виде $|T'|_m < C_6$.

Для преобразования переменных (4.4.36), записанного в виде

$$W'\begin{cases} x_k' = \xi_k' + u_k'(\xi', \eta'), \\ y_k' = \eta_k' + v_k'(\xi', \eta'). \end{cases}$$

при $p_1 + \ldots + p_N + q_1 + \ldots + q_N \leqslant m + 2\sigma$ мы аналогично находим

$$|u_k'|_m + |v_k'|_m < C_7 M Q^{2\sigma} \delta_{n-1} = C_7 M^{-1} Q^{2\sigma} < \frac{1}{Q} < \frac{1}{4}.$$

Теперь из теоремы о неявной функции следует существование обратного преобразования, все производные которого до порядка m ограничены константами, не зависящими от Q и M в кольце $|x_k - \alpha_k| < 2/M$. Следовательно,

$$|W'|_m < 2, \qquad |W'^{-1}|_m < 2$$

и отображение $W'^{-1}T'W'$ имеет в качестве компонент функции, производные которых до порядка m ограничены константой C_8, не зависящей от M и Q. Следовательно,

$$|D_\eta^p D_\xi^q Q\psi_k| + |D_\eta^p D_\xi^q M\varphi_k| < C_8 Q^{p_1+\ldots+p_N} M^{q_1+\ldots+q_N}$$

при $p_1 + \ldots + p_N + q_1 + \ldots + q_N < m$ в кольце $|\xi_k - \alpha_k| < 1/M$ при условии $Q > C_8$, что и доказывает неравенство (4.4.40).

Теперь утверждение первой леммы настоящего параграфа сразу же получается из только что доказанной леммы.

Действительно, определим

$$T^0 \begin{cases} x_k^* = x_k + g_k(x, y), \\ y_k^* = y_k + x_k + f_k(x, y) \end{cases}$$

при $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$, а также определим

$$T^\infty \begin{cases} x_k^* = x_k, \\ y_k^* = y_k + x_k. \end{cases}$$

Здесь $|f_k| + |g_k| < \delta_0$ для $|T^0 - T^\infty| < \delta_0$. Вторая лемма устанавливает существование преобразования

$$W_1 \begin{cases} x_k = \xi_k + u_k(\xi, \eta), \\ y_k = \eta_k + v_k(\xi, \eta), \end{cases}$$

которое переводит T^0 в T^1 при $T^1 = W_1^{-1}T^0W_1$, откуда формально получаем $|T^1 - T^\infty| < \delta_0^q = \delta_1$. Повторяя начатую процедуру приведения отображения T^0, определенную в любом меньшем кольце, находим

$$T^n = W_n^{-1}T^{n-1}W_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.4.50}$$

где $|T^n - T^\infty| < \delta_{n-1}^q = \delta_n$. Если считать ξ, η координатами, отнесенными к отображению T^n, то оно будет определено в кольце

$$|\xi_k - \alpha_k| < \frac{1}{M_n} = \frac{1}{M_{n-1}^q}. \tag{4.4.51}$$

Из второй леммы следует, что преобразование W_n координат шага номер $n-1$ в координаты шага номер n удовлетворяет неравенству

$$|W_n - I|_1 < \frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_{n-1}^q}, \tag{4.4.52}$$

где I — тождественное преобразование. Следовательно, на торах $\xi_k = \alpha_k$ отображение T^n сходится к отображению T^∞, которое представляет собой «поворот» $\overset{*}{\eta}_k = \eta_k + \alpha_k$.

Связь между координатами ξ, η отображения T^n и координатами x, y отображения T^0, как следует из (4.4.50), определяется соотношениями

$$S_n = W_1 W_2 \ldots W_n, \qquad T^n = S_n^{-1} T^0 S_n.$$

Преобразование S_n определено в кольце $|\xi_k - \alpha_k| < 1/M_n$ и отображает его в меньшее кольцо $|x_k - \alpha_k| < 1/M_0$. Если записать S_n в виде

$$S_n \begin{cases} x_k = \xi_k + p_k^n(\xi, \eta), \\ y_k = \eta_k + q_k^n(\xi, \eta), \end{cases}$$

то будет достаточно показать, что функции p_k^n, q_k^n (и их производные) равномерно сходятся к функциям $p_k(\eta)$ и $q_k(\eta)$. Если это так, то инвариантное многообразие из теоремы в начале настоящего параграфа (для специального случая $\alpha_k = x_k$ и $\delta = 1$) в точности равно

$$\begin{cases} x_k = \alpha_k + p_k(\eta), \\ y_k = \eta_k + q_k(\eta). \end{cases}$$

В этом легко убедиться, если сначала заметить, что

$$|p_k^n| + |q_k^n| < \sum_{t=1}^{n} (|u_t| + |v_t|) < \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{Q_t},$$

а для достаточно больших Q_0 последний член может быть сделан меньше ε. Для доказательства сходимости производных от p_k^n, q_k^n рассмотрим матрицу Якоби J_n преобразования W_n. Так как

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \delta_{k,j} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j}, \qquad \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j} = \frac{\partial u_k}{\partial \eta_j},$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j}, \qquad \frac{\partial y_k}{\partial \eta_j} = \delta_{k,j} + \frac{\partial v_k}{\partial \eta_j},$$

то отсюда следует, что

$$J_n - I = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix}.$$

Максимальная абсолютная величина этой матрицы, т. е. $|J_n - I|$, согласно (4.4.52), при $|u_k|_1 + |v_k|_1 < 1/Q$ определяется формулой

$$|J_n - I| < \frac{1}{Q_n}.$$

Матрица Якоби G_n преобразования S_n теперь, очевидно, будет равна произведению n матриц $J_1, \ldots, J_n$, т. е. $G_n = J_1 \ldots J_n$.

Также очевидно, что сходимость производных от p_k^n, q_k^n эквивалентна сходимости произведения G_n. Но матрица J_t мажорируется матрицей

$$I + \frac{1}{Q_t} U, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, достаточно показать сходимость произведения

$$\prod_{t=1}^{\infty} \left(I + \frac{1}{Q_t} U \right).$$

Это произведение, будучи коммутативным, меньше (или равно) произведения

$$\prod_{t=1}^{\infty} \exp \frac{U}{Q_t} = \exp \sum_{t=1}^{\infty} \frac{U}{Q_t},$$

которое, очевидно, является сходящимся. Также имеем

$$|G_n - I| \leqslant \left| \prod_{n=t}^{\infty} \left(I + \frac{1}{Q_t} U \right) - I \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \exp \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{Q_t} U \right) - I \right| \leqslant \exp \frac{C_9}{Q_0} - 1 \leqslant \frac{C_{10}}{Q_0}.$$

Выбором достаточно большого Q_0 можно сделать $|G_n - I| < \varepsilon$ и, следовательно, $|p_k|_s + |q_k|_s < \varepsilon$ при $s = 1$, как и утверждается в теореме.

Для завершения доказательства теоремы осталось снять ограничение $\alpha_k(\boldsymbol{x}) = x_k$. Для этого достаточно ввести замену переменных и опять доказать, что теорема следует из второй леммы настоящего параграфа. Действительно, пусть отображение

$$T_\mu \begin{cases} x_k^* = x_k + G_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\ y_k^* = y_k + \alpha_k(\boldsymbol{x}) + F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

определено при $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$. Пусть

$$\xi_k = \alpha_k(\boldsymbol{x}), \qquad \eta_k = y_k. \tag{4.4.53}$$

Тогда отображение T_μ принимает вид

$$T \begin{cases} \xi_k^* = \xi_k + g_k(\xi, \eta), \\ \eta_k^* = \eta_k + \xi_k + f_k(\xi, \eta), \end{cases}$$

так как преобразование $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to (\xi, \eta)$ однозначно и имеет m ограниченных производных. Кроме того,

$$f_k(\xi, \eta) = F_k(\boldsymbol{x}(\xi), \eta),$$

$$g_k(\xi, \eta) = \alpha_k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) - \alpha_k(\boldsymbol{x}) = \\ = \alpha_k(\boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(\xi), \eta)) - \alpha_k(\boldsymbol{x}(\xi)),$$

и, следовательно, условия (4.4.17) и (4.4.18) удовлетворяются при соответствующем выборе постоянной C_0. Кольцо, в котором определено отображение T, содержится в кольце шириной C_0^{-1}, т. е. $\alpha_k(\boldsymbol{b}) - \alpha_k(\boldsymbol{a}) \geqslant C_0^{-1}$ при $\alpha_k(\boldsymbol{a}) \leqslant \xi_k \leqslant \alpha_k(\boldsymbol{b})$, что следует из (4.4.53).

Доказательство теоремы для $s > 1$ проводится аналогичным образом с помощью вывода новых соответствующих соотношений между параметрами M, Q, δ, q, s, ν, σ, m (см., например, [26, 28]).

Важно отметить следующее.

I) Теорема Мозера эквивалентна (в смысле утверждений теорем) теореме Колмогорова, но не требует аналитичности гамильтониана (в случае аналитичности отображения T_μ). Требуется только существование производных до некоторого порядка. Это стало возможно в результате применения к соответствующим функциям операции сглаживания.

II) Появление малых делителей в рядах типа $\exp[i(\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})] - 1$ контролируется оценками вида (4.4.23). Классические результаты в теории диофантовых приближений показывают, что при всех целых j_k такой оценке не будет удовлетворять только множество значений, мера которого по сравнению с мерой единичного куба $0 < \alpha_k < 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ равна $O(\varepsilon)$ и стремится к нулю вме-

сте с ε. Возможные малые значения таких знаменателей компенсируются тем, что сходимость приближений к отображению T^∞ имеет такую же скорость, что и у последовательности $\delta_0^{q^n}$.

III) Условие невырожденности, фигурирующее в теореме Мозера, как уже упоминалось выше, совпадает с условием Арнольда и является менее жестким, чем условие Колмогорова [1]).

Действительно, так как

$$\alpha_k = 2\pi\omega_k = 2\pi\frac{\Omega_k}{\Omega_n}, \qquad \Omega_n \neq 0,$$

то условие (4.4.16) можно переписать в виде

$$\left|\sum_{k=1}^{N} j_k\Omega_k\right| \geqslant \varepsilon'\left(\sum_{k=1}^{n}|j_k|\right)^{-n+1/2},$$

что является обобщенным условием иррациональности Зигеля. Условие

$$\det\left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_j}\right) \neq 0$$

после использования определения

$$\alpha_k = 2\pi\frac{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_n}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, h))$$

и соотношений

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial H_0}{\partial x_n}}$$

приводит к обобщению условия (4.3.11), т. е.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_1\partial x_n} & \dfrac{\partial H_0}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_2\partial x_n} & \dfrac{\partial H_0}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_n^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H_0}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial H_0}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.4.54)$$

[1]) См. примечание в конце параграфа (*прим. перев.*).

Также очевидно, что если $\Omega_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ и если обычно условие невырожденности, фигурирующее в теореме Колмогорова, выполнено, то и (4.4.54) выполнено [1]). Обратное не всегда верно.

5. Вырожденные системы

Здесь мы ограничимся несколькими замечаниями, которые позволят доказать теорему, эквивалентную теореме Арнольда, в вырожденном случае.

Пусть μ — малый параметр, входящий в гамильтониан системы H и $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Однако в общем случае μ много меньше единицы. Допустим также, что некоторые $\Omega_k = 0$ $(k = 1, \ldots, p < n)$. Как и в теореме Арнольда, определим «секулярную» часть H_{1s} функции H_1, т. е.

$$H = H_0 + \mu(H_{1s} + H_{1p}),$$

а из нее определим

$$\Omega_k = \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

и

$$\Omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial x_j} \qquad (j = p + 1, \ldots, n).$$

Следовательно, отображение T_μ будем записывать в виде

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + \mu G_k(x, y) && (k = 1, \ldots, n), \\ y_k^* &= y_k + \mu[\alpha_k(x) + F_k(x, y)] + \beta_k && (k = 1, \ldots, p), \\ y_j^* &= y_j + \alpha_j(x) + \mu F_j(x, y) && (j = p + 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

и оно определено в кольце $0 < a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$, $b_k - a_k \geqslant 1$, где $k = 1, \ldots, n$. При этих условиях теорема Мозера будет оставаться справедливой, если ввести следующие модификации.

а) Отображение (4.4.14) надо заменить на отображение

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= y_k' + \mu\alpha_k(x^0) = y_k' + \mu\alpha_k && (k = 1, \ldots, p), \\ \tilde{y}_k &= y_j' + \alpha_j(x^0) = y_j' + \alpha_j && (j = p + 1, \ldots, n), \end{aligned}$$

---

[1]) В действительности условия Колмогорова и Арнольда — Мозера (4.4.54) не сводятся одно к другому. Ошибочность приведенного в тексте книги утверждения следует, например, из рассмотрения системы с гамильтонианом ($\omega_j > 0$)

$$H_0 = (\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)(1 + x_1 + x_2).$$

Здесь определитель Колмогорова равен $-(\omega_1 + \omega_2)^2 \neq 0$, а определитель (4.4.54) равен нулю (*прим. ред.*).

и δ_0 можно опять выбирать независимо от μ. Это очень важно, так как в противном случае при $\mu \to 0$ мы имели бы $\delta_0 \to 0$ и доказательство не годилось бы.

б) Отображение T_0 (т. е. T_μ при $\mu = 0$) надо заменить на отображение

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k && (k = 1, \ldots, n), \\ y_k^* &= \mu\alpha_k(\boldsymbol{x}) + y_k + \beta_k && (k = 1, \ldots, p), \\ y_j^* &= \alpha_j(\boldsymbol{x}) + y_j && (j = p+1, \cdots n). \end{aligned}$$

при

$$\mu\alpha_k(\boldsymbol{a}) < \mu\alpha_k(\boldsymbol{x}) < \mu\alpha_k(\boldsymbol{b}).$$

в) Интервал, определяемый формулой (4.4.15), надо заменить на интервал

$$\alpha_k(\boldsymbol{a}) + \varepsilon < \frac{\alpha_k - \beta_k}{\mu} < \alpha_k(\boldsymbol{b}) - \varepsilon,$$

и, наконец, условие (4.4.16) необходимо записать в виде

$$\left| \sum_{k=1}^{p} m_k \mu\alpha_k + \sum_{j=p+1}^{N} m_j\alpha_j + 2\pi m_{N+1} \right| \geqslant \mu\varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^{N} |m_k| \right\}^{-N-1/2},$$

где m_k, m_j — произвольные, не обращающиеся одновременно в нуль целые числа.

6. Замечания

Проблемы нормализации гамильтоновой системы дифференциальных уравнений и сохраняющих меру отображений в окрестности положения равновесия или неподвижной точки соответственно аналогичны друг другу и имеют одинаковые трудности, приводящие в общем случае к расходимости асимптотических рядов, представляющих преобразование. Однако это не указывает на то, что нормальная форма не существует, а только в худшем случае на то, что такая форма не может быть получена с помощью степенных рядов. Основная идея, лежащая в основе нормализации Биркгофа в гамильтоновых системах, заключается в описании всех движений в окрестности положения равновесия с помощью естественного обобщения ляпуновской процедуры построения периодических движений в этой окрестности.

Основная теорема Биркгофа [5] утверждает, что если характеристические показатели (частоты нормальных колебаний в окрестности положения равновесия) рационально независимы, то в формальном смысле существует нормальная форма, и гамильтониан

в соответствующих координатах y и импульсах x может быть записан в виде формального ряда (степенно́го) относительно $\zeta_1, \ldots$ $\ldots, \zeta_n$, где $\zeta_k = x_k^2 + y_k^2$. Как уже отмечалось выше, в этом случае ясно, что все ζ становятся интегралами движения. В общем случае они являются только формальными интегралами, так как преобразование от исходной формы к нормальной форме описывается формальными рядами, вообще говоря, расходящимися.

В резонансных случаях, т. е. когда есть рациональная зависимость между частотами нормальных колебаний, ситуация не изменяется, и в общем случае нормальная форма, полученная Густавсоном [10], также расходится, на что также указывают его численные эксперименты, а также схожие эксперименты Хенона и Хейлеса [13]. Точные результаты о плотности множества гамильтонианов, для которых приведение к нормальной форме может быть осуществлено сходящимися рядами, были получены Зигелем [33].

Для систем с двумя степенями свободы тейлоровское разложение функции H вблизи положения равновесия эллиптического типа имеет вид

$$H = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2} \nu_k \left(y_k^2 + x_k^2\right) + H_3(y, x) + \ldots + H_n(y, x) + \ldots, \quad (4.6.1)$$

где

$$H_n = \sum_{k,l} c_{k,l} x^k y^l = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{l_1} \sum_{l_2} c_{k_1 k_2 l_1 l_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2},$$

и из сходимости разложения для H соответствующей перенормировкой фазовых переменных и времени можно получить

$$|c_{kl}| \leqslant 1. \quad (4.6.2)$$

Пусть S — множество всех функций H вида (4.6.1), удовлетворяющих условиям (4.6.2). Зигель показал, что гамильтонианы с иррациональными значениями ν_1/ν_2, для которых преобразование Биркгофа к нормальной форме расходится, плотны в S при топологии, определяемой выбором окрестностей, задаваемых неравенствами $|c_{k,l} - c_{k,l}^0| < \varepsilon_{k,l}$ для всех k, l и для данных $\varepsilon_{k,l}$. Скорость уменьшения чисел $\varepsilon_{k,l}$ с увеличением k, l произвольна.

Следовательно, для решения вопроса о сходимости или расходимости преобразования необходимо точно знать все коэффициенты функции H, что придает процедуре приведения к нормальной форме очень небольшое физическое значение, так как параметры системы никогда не бывают известны абсолютно точно. Более строгий результат Зигеля [34] указывает, что случаи, при кото-

рых имеет место сходимость преобразования Биркгофа, оказываются исключительными в том смысле, что они образуют множество, которое является объединением бесконечного числа нигде не плотных множеств. Стоит упомянуть результат Рюсмана [32], который показал, что если система дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану (4.6.1), допускает аналитический интеграл

$$G = \sum_{k=1}^{2} \beta_k \left(y_k^2 + x_k^2\right) + \ldots,$$

где $\nu_1\beta_2 - \nu_2\beta_1 \neq 0$, то преобразование Биркгофа сходится. Это оправдывает тот факт, что интегрируемые гамильтоновы системы в окрестности положения равновесия можно определить как системы, для которых преобразование Биркгофа сходится.

Связь между гамильтоновыми системами и сохраняющими меру отображениями устанавливается легко. Если дано такое отображение M, что M^0 — тождественное отображение, $M^1 = M$, $M^{t+s} = M^t M^s$, то отображению M соответствует решение гамильтоновой системы

$$\dot{y} = H_x(y, x), \qquad \dot{x} = -H_y(y, x),$$

т. е.

$$M^t \begin{cases} y = y(y_0, x_0, t), \\ x = x(y_0, x_0, t). \end{cases}$$

В этом случае отображение M имеет интеграл $H(y, x)$, который инвариантен относительно отображения M. Обратно, если отображение M обладает интегралом, то

$$M^0 \text{ — тождественное}, \qquad M^1 = M, \qquad M^{t+s} = M^t M^s$$

и само M может быть приведено к нормальной форме с помощью сходящегося преобразования Биркгофа. Основы доказательства этого утверждения были заложены Биркгофом [4]. За бо́льшими деталями мы отсылаем читателя к статье Мозера [25] об интегрируемости отображений.

Что касается приведения к нормальной форме системы

$$\dot{x}_k = f_k(x) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

в окрестности положения равновесия $x = 0$, то сходимость преобразования, описываемого рядами, может быть легко установлена. Если

$$f_k(x) = \sum_{l=1}^{n} c_{kl} x_l + \text{члены высшего порядка},$$

и собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\{c_{kl}\}$ различны между собой, то существует постоянная неособенная матрица P, такая, что

$$P^{-1}CP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda,$$

и в окрестности точки $x = 0$ мы получаем такой вид уравнений:

$$\dot{x} = \lambda x + \varphi(x).$$

Если $\sum_k j_k\lambda_k - \lambda_l \neq 0$ при $\sum_k j_k \geqslant 2$, где j_k — целые числа, то существует преобразование $x = y + \psi(y)$, приводящее исходную систему к виду

$$\dot{y} = \lambda y.$$

Сходимость можно установить, если все $\operatorname{Re}\lambda_k$ имеют один и тот же знак, так как в этом случае нетрудно показать, что все малые делители задачи, т. е. величины $\sum j_k\lambda_k - \lambda_l$, отделимы от нуля. Ясно, что вышеупомянутое предположение не может быть выполнено в гамильтоновой системе. Однако для неконсервативных систем в общем случае нормализация является более простой процедурой, чем применение рядов метода Ли, и оба этих метода приводят к одинаковому результату.

Ясная связь между приведением к нормальной форме и устойчивостью устанавливается с помощью следующей теоремы (см. [36]). Пусть D — ограниченная в C^n область, содержащая начало координат, и пусть решение уравнений $\dot{z} = f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $f(z)$ — аналитическая в D функция и $f(0) = 0$, остается в D.

Теорема. *Если решения системы уравнений $\dot{z} = f(z)$, $z(0) = z_0 \in D$ остаются в D при всех t и при всех $z_0 \in D$, то в окрестности D' $(D' \subset D)$ нуля существует такая замена переменных*

$$z = u(\zeta) = \zeta + \text{члены высшего порядка},$$

что преобразованная система дифференциальных уравнений имеет вид $\dot{\zeta} = A\zeta$, где A — постоянная диагональная матрица, собственные значения которой имеют нулевые вещественные части.

Теорема Мозера об инвариантных кривых становится проще для понимания, если рассматривается для двумерной системы, т. е. на плоскости. Рассмотрим кольцо $A\{1 \leqslant R \leqslant 2\}$, где $R^2 = x^2 + y^2$. Если θ — полярный угол, то $dx\,dy = \frac{1}{2}\,dR\,d\theta$.

Отображение кручения определяется формулами

$$M_0 \begin{cases} R^* = R, \\ \theta^* = \theta + \gamma(R). \end{cases}$$

Отображение M_0 очевидно сохраняет площадь, и окружности $R = \text{const}$ инвариантны относительно M_0. Важно, чтобы выполнялось *условие кручения*: $\gamma'(R) \neq 0$, $R \in A$. Основным свойством отображения M_0 является то, что каждая окружность для любого $\gamma(R)$, соизмеримого с 2π (т. е. $\gamma/2\pi = p/q$), состоит из неподвижных точек отображения M_0^q. Каждая окружность, для которой величина γ не соизмерима с 2π, плотно покрывается образами любой точки при отображении M_0^q. Мозер рассмотрел возмущенное отображение кручения

$$M_\varepsilon \begin{cases} R^* = R + \varepsilon f(R, \theta, \varepsilon), \\ \theta^* = \theta + \gamma(R) + \varepsilon g(R, \theta, \varepsilon), \end{cases}$$

где f, g — 2π-периодические функции θ. Отображение M_ε определено в кольце A. Наличие малого параметра ε не обязательно, но здесь для удобства мы выбрали именно этот вид отображения. Если отображение M_ε сохраняет площадь, то для данного рационального числа, заключенного между $\gamma(1)/2\pi < p/q$ и $\gamma(2)/2\pi > p/q$, существует $2q$ неподвижных точек отображения M_ε^q, удовлетворяющих условиям

$$R^q = R, \qquad \theta^q = \theta + 2\pi p$$

для достаточно малых ε. В теореме Мозера рассматриваются возмущения таких окружностей $R = \text{const}$, для которых число $\gamma(R)/2\pi$ является иррациональным, и эта теорема может быть сформулирована следующим образом (случай «малых возмущений»).

Теорема. *Пусть $\gamma'(R) \neq 0$ для $R \in A$ и пусть любая кривая Γ, окружающая окружность $R = 1$, пересекается со своим образом, т. е. с кривой $\Gamma^* = M_\varepsilon(\Gamma)$. Функции f и g предполагаются достаточно гладкими. Тогда для любого данного числа ω, заключенного между $\gamma(1)$ и $\gamma(2)$, не соизмеримого с 2π и удовлетворяющего неравенствам*

$$|q\omega - 2\pi p| \geqslant C|q|^{-3/2}$$

для всех целых p, $q \neq 0$, существует дифференцируемая замкнутая кривая

$$\Gamma \begin{cases} R = F(\varphi, \varepsilon), \\ \theta = \varphi + G(\varphi, \varepsilon), \end{cases}$$

где функции F, G имеют период 2π относительно φ, которая инвариантна относительно отображения M_ε при условии, что ε — достаточно малая величина. Более того, образ каждой точки кривой Γ получается заменой φ на $\varphi + \omega$.

Ясно, что если отображение M_ε сохраняет площадь, и кривая Γ окружает окружность $R = 1$, то образ этой кривой $M_\varepsilon(\Gamma)$ обязательно пересечет кривую Γ в силу предположения о свойстве сохранения площади, так как он не может целиком лежать внутри или вне кривой Γ при отображении M_ε, достаточно близком к M_0.

Эту теорему легко можно применить для прямого доказательства теоремы Арнольда об устойчивости положений равновесия эллиптического типа в двумерных системах. Важное применение этой теоремы было также указано Кинером [20] в задаче о движении спутника сжатой планеты в поле с цилиндрической симметрией. Мозер [29] описал применение своей теоремы в задаче об адиабатических инвариантах в магнитных полях с замкнутыми медленно меняющимися магнитными поверхностями. За описанием этих приложений мы отсылаем читателя к упомянутым оригинальным работам.

С геометрической точки зрения теорема Колмогорова имеет один очень интересный аспект.

Действительно, рассмотрим гамильтониан $H(y, x, \varepsilon)$, аналитический при $\varepsilon = 0$ и при $x \in D \subset R^n$, $|\operatorname{Im} y| < \rho$. Пусть, кроме того, $H(y + 2\pi, x, \varepsilon) = H(y, x, \varepsilon)$ и $H(y, x, 0) = H_0(x)$. Пусть точка $x = x_0 \in D$, и определим величину

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial x} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

при $\varepsilon = 0$ и $x = x_0$. Предположим далее, что точка x_0 может быть выбрана так, что при $\varepsilon = 0$ определитель $\det H_{xx} \neq 0$ и, более того, все ω_k $(k = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют обычным условиям иррациональности.

При сделанных предположениях теорема Колмогорова эквивалентна утверждению о существовании таких аналитических вектор-функций u, v, что выражения

$$y = \theta + u(\theta), \qquad x = C + v(\theta)$$

описывают инвариантный тор. Движение на торе определяется формулой $\dot{\theta} = \omega$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

Легко осуществить сведение описанной задачи к отображениям, сохраняющим меру. Действительно, рассматривая для простоты случай $n = 2$ и гамильтониан

$$H = H_0(x_1, x_2) + \varepsilon H_1(y_1, y_2, x_1, x_2, \varepsilon),$$

положим $x_1 = r$, $y_1 = \theta$, $y_2 = \tau$, $x_2 = x$. Далее предположим, что $\partial H_0/\partial x_2 \neq 0$. Исключая из уравнений движения время t и пере-

менную x с помощью интеграла движения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}\Big/\frac{\partial H}{\partial x} = F(r, \theta, \tau, \varepsilon), \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial r}\Big/\frac{\partial H}{\partial x} = G(r, \theta, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

где, очевидно, функции F и G имеют период 2π по τ. Более того, если через r_0, θ_0 обозначить начальные условия, соответствующие при $\tau = 0$ заданному значению энергии, т. е. $H(\theta_0, 0, r_0, x) = h$, то решение

$$\theta = \theta(\theta_0, r_0, \tau, \varepsilon), \qquad r = r(\theta_0, r_0, \tau, \varepsilon)$$

при $\tau = 2\pi$ отображает точку (θ_0, r_0) из плоскости $\tau = 0$ в точку (θ, r) из плоскости $\tau = 2\pi$ (эти плоскости перпендикулярны оси τ в расширенном фазовом пространстве рассматриваемой системы). Следовательно, отображение

$$M_\varepsilon \begin{cases} \theta^* = \theta(\theta_0, r_0, 2\pi, \varepsilon), \\ r^* = r(\theta_0, r_0, 2\pi, \varepsilon) \end{cases}$$

сохраняет площадь, так как система (4.6.3) гамильтонова, и при $\varepsilon = 0$ легко получить, что

$$M_0 \begin{cases} \theta^* = \theta_0 + 2\pi \dfrac{\omega_1}{\omega_2}, \\ r^* = r_0, \end{cases}$$

где

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\partial H_0}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial H_0}{\partial x_2} = \frac{\partial H_0}{\partial r}\Big/\frac{\partial H_0}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\alpha(r),$$

так как переменную x можно исключить, если использовать интеграл энергии. Тогда отображение M_0 определяется формулами

$$M_0 \begin{cases} \theta^* = \theta_0 + \alpha(r_0), \\ r^* = r_0, \end{cases}$$

а при $\varepsilon \neq 0$ имеем

$$M_\varepsilon \begin{cases} \theta^* = \theta_0 + \alpha(r_0) + \varepsilon\varphi(\theta_0, r_0, \varepsilon), \\ r^* = r_0 + \varepsilon\psi(\theta_0, r_0, \varepsilon). \end{cases}$$

Теперь можно применить теорему Мозера о малых отображениях кручения, если соответствующим образом ограничить величину x_1 (здесь r) кольцом $0 < a \leqslant r_0 \leqslant b$.

Понятие адиабатических инвариантов и их использование очень тесно связаны с обсуждаемыми сейчас методами теории возмущений. Это понятие очень интенсивно изучалось и хорошо описано в литературе; здесь мы хотим упомянуть некоторые из основных результатов. Ранней работой, которую следует назвать в связи с рассматриваемыми вопросами, является статья Андронова и др. [1], упомянутая Арнольдом. Очень хорошие работы выполнили Касуга [16] и Крускал [18]. Арнольд изучил часть рассматриваемой задачи в работе [2] и более подробно в работе [3] (глава II, стр. 111—124). Недавние работы, относящиеся в той или иной степени к нашему вопросу, выполнены Картсатосом [14], Вазовым [38] и Халламом [12].

Термин *адиабатический* имеет классический смысл (общий с термодинамическим смыслом), означающий очень медленное изменение параметров, определяющих физическую конфигурацию системы.

Рассмотрим динамическую систему с гамильтонианом

$$H = H(y, x, \tau),$$

где $\tau = \varepsilon t$, а ε — малый параметр. Мы имеем следующее определение.

Функция $I(y, x, \tau)$ называется *адиабатическим инвариантом* рассматриваемой системы, если для любого $\delta > 0$ возможно найти такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для всех t из интервала $0 < t < 1/\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|I(t) - I(0)| < \delta.$$

Здесь мы положили $I(t) = I(y(t), x(t), \varepsilon t)$, где $y(t)$, $x(t)$ — интегральные кривые системы, определяемой гамильтонианом H.

Ясно, что любой интеграл является адиабатическим инвариантом, а в действительности даже вечным инвариантом. Наиболее типичным примером для систем с одной степенью свободы является следующий пример, рассматриваемый в квантовой механике.

Рассмотрим $H = H(y, x, \tau)$. При $\tau = \text{const}$ уравнение $H(y, x, \tau) = E(y_0, x_0, \tau) = \text{const}$ в плоскости (y, x) описывает мгновенную конфигурацию линий энергетического уровня. Предположим, что при значениях τ и E из некоторой области эти линии образуют замкнутые траектории. В этом случае они заключены в некоторой области, площадь которой обозначим через $2\pi I(y_0, x_0, \tau)$, где (y_0, x_0) — любая точка соответствующей ограничивающей траектории. Тогда можно показать, что величина I является адиабатическим инвариантом в смысле, определенном выше. Например, рассмотрим простой маятник с медленно меня-

ющейся длиной нити. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 y^2,$$

где $\omega = \omega(\tau) > 0$ для всех $\tau = \varepsilon t$. Тогда

$$I = \frac{H}{\omega} = \frac{1}{2\omega} x^2 + \frac{1}{2} \omega y^2.$$

Хотя за конечное время величина $I(t)$ может измениться мало, но за большие промежутки времени она может иметь большие изменения (даже секулярные). Тем не менее было получено такое утверждение (см. [3], глава II, § 2).

Теорема. *Для медленно и периодически изменяющихся гамильтонианов $H(y, x, \tau)$ нелинейных колебательных систем с одной степенью свободы адиабатический инвариант сохраняется вечно, т. е. для любого $\delta > 0$ можно найти такое $\varepsilon_0(\delta) > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ неравенство $|I(t) - I(t_0)| < \delta$ выполняется для всех t.*

Этот важный факт является следствием нелинейности системы, т. е. следствием свойства зависимости частоты от амплитуды. Аналогичный результат не может быть получен для линейной системы с ее классической неустойчивостью при резонансе.

Для того чтобы показать строгую связь между адиабатическими инвариантами и формальными интегралами, получаемыми в асимптотических методах теории возмущений, рассмотрим систему с одной степенью свободы и гамильтонианом

$$H(y, x, \tau) = H(y, x, \tau + 2\pi), \qquad \tau = \varepsilon t.$$

При $\tau = \text{const}$ система автономна и интегрируется непосредственным образом. С помощью переменных действие — угол I, W, определяемых производящей функцией Гамильтона — Якоби $S = S(y, I, \tau)$, мы имеем

$$x = \partial S / \partial y, \qquad W = \partial S / \partial I,$$

где

$$S(y, I, \tau) = \oint_h x(h, y, \tau)\, dy.$$

Последний интеграл вычисляется вдоль замкнутой траектории, определяемой условием $h = H_0(I, \tau)$, где функция $h = H_0$ есть функция, обратная к функции

$$I(h, \tau) = \frac{1}{2\pi} \oint_{H=h} x(h, y, \tau)\, dy,$$

а $x(h, y, \tau)$ определяется из уравнения $H(y, x, \tau) = h$. Для современного и ясного определения операции введения переменных действие — угол мы предлагаем читателю книгу Мейровича [23] (глава 9).

Величина I, очевидно, является постоянной, а угол W на окружности $I = \text{const}$ изменяется равномерно:

$$\dot{W} = \dot{W}(I, \tau) = \frac{\partial H_0}{\partial I}.$$

До сих пор мы считали, что величина τ является постоянной. Пусть теперь τ изменяется со временем: $\tau = \varepsilon t$. Тогда приведенное описание движения является только приближенным (адиабатическим) в интервале времени $t \sim 1/\varepsilon$. Однако в общем случае мы можем написать

$$H(I, W, \tau) = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, W, \tau),$$

где в силу того, что преобразование $(y, x) \to (W, I)$ является каноническим, но зависящим явно от времени, имеем

$$H_1 = \frac{\partial S}{\partial \tau} = H_1(I, W, \tau).$$

Последняя величина является однозначной функцией W и τ, зависящей от них 2π-периодическим образом. Классическая картина поведения траекторий в расширенном фазовом пространстве (y, x, τ) — следующая. Отождествим точки с координатами τ и $\tau + 2\pi$, а также W и $W + 2\pi$. Уравнение $I = \text{const}$ определяет двумерные торы с угловыми координатами τ и W. Если $\varepsilon = 0$, то фазовая точка движется вдоль линий $\tau = \text{const}$ с угловой скоростью $\dot{W}(I, \tau)$. При $\varepsilon \neq 0$ имеет место медленное движение $(\tau = \varepsilon t)$ по нормали к уже описанному. Оно происходит на торе, имеющем две частоты. Однако в адиабатическом приближении фазовая точка остается на инвариантном торе, определяемом условием $I = \text{const}$. Истинное движение близко к адиабатическому приближению при $t \sim 1/\varepsilon$. Если система является нелинейной, то адиабатическое приближение остается справедливым при всех t. В действительности это и утверждается в теореме Колмогорова.

Средняя частота определяется формулой

$$\bar{\omega}(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(I, \tau)\, d\tau = \frac{d\bar{H}_0}{dI},$$

где

$$\bar{H}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_0(I, \tau)\, d\tau.$$

Нелинейный характер движения определяется условием невырожденности

$$\frac{d^2\overline{H}_0}{dI^2} = \frac{d\overline{\omega}}{dI} \neq 0.$$

Из этого условия следует вечная адиабатическая инвариантность величины I, т. е. всегда можно найти инвариантные торы для системы, соответствующей переменной величине τ, и они будут близки к торам $I = \text{const}$ для достаточно малых ε и любых моментов времени. Точнее, можно утверждать следующее.

1. Для любого $\delta > 0$ можно найти такое $\varepsilon_0 > 0$, что если $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, то точка (y_0, x_0, τ) лежит между двумя инвариантными торами T_1 и T_2, где

$$|I(y_1, x_1, \tau_1) - I(y_2, x_2, \tau_2)| < \delta$$

при условии, что $(y_1, x_1, \tau_1) \in T_1$, $(y_2, x_2, \tau_2) \in T_2$.

2. Рассмотрим такой гамильтониан

$$H(I, W, \tau) = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, W, \tau),$$

что $\partial H_0/\partial I \not\equiv 0$, $\partial^2 H_0/\partial I^2 \not\equiv 0$ и H аналитичен при $|I - I_0| < \rho$. Тогда для каждого $\delta > 0$ можно найти такое $\varepsilon_0 > 0$, что если $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $|I(t_0) - I_0| < \rho^{-\delta}$, то для всех t выполнено неравенство $|I(t) - I(t_0)| < \delta$.

С помощью леммы Арнольда (см. [3], стр. 116—118) о преобразовании гамильтониан приводится к виду

$$K(q, p, \theta) = \varepsilon K_0(p) + \varepsilon^2 K_1(q, p, \theta) + \ldots,$$

где $\theta = W$ — новая независимая переменная, а q, по существу, совпадает с τ. К этому гамильтониану можно применить теорему Колмогорова, из которой и следует, что I будет вечным инвариантом.

Адиабатическая инвариантность в системах с двумя степенями свободы также была исследована Арнольдом (см. [3], глава 2, § 3) и применена к классической задаче о магнитных ловушках. В результате доказано, что заряженные частицы (например, электроны), движущиеся по спиралям вокруг магнитных силовых линий, захватываются магнитным полем, если только оно медленно меняется или если скорости частиц малы. Основная лемма, рассмотренная Арнольдом для доказательства этого результата, заключается в следующем.

Лемма. *Пусть данный адиабатический гамильтониан* $H(y_1', y_2, x_1, x_2)$, *где* $y_1' = \varepsilon y_1$, *при фиксированных значениях* y_1', x_1 *определяет колебательную систему с переменными действие* $P(y_1', x_1, h)$ *и угол* $\Omega(y_1', y_2, x_1, x_2)$. *Тогда существует*

аналитическое преобразование переменных y_1', y_2, x_1, x_2 *в новые переменные* y, W, P_y, P_W, *обладающие такими свойствами.*

а) *Функции* y_1', y_2, x_1, x_2 *имеют период* 2π *по* W, *и при* $\varepsilon \to 0$ *получаем* $y \to y_1'$, $W \to \Omega$, $P_y \to x_1$, $P_W \to P$.

б) *Вдоль решений системы с гамильтонианом* H *справедливы следующие канонические уравнения с гамильтонианом* $I(y, P_y, W, h)$:

$$\frac{dP_y}{dW} = -\frac{\partial I}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dW} = \frac{\partial I}{\partial P_y},$$

где h — *параметр (константа интеграла энергии* $H = h$).

в) *Величина* I *имеет вид* $I = -\varepsilon P_W$, *где функция*

$$P_W = I_0(P_y, y, h) + \varepsilon I_1(P_y, y, W, h) + \ldots$$

является аналитической функцией периода 2π *по* W, *а*

$$I_0(P_y, y, h) = P(y, P_y, h).$$

Из проведенного ранее рассмотрения одномерных систем следует, что P и εx_1 будут вечными инвариантами. Различные способы приведения к гамильтониану рассмотренного вида, который в пределе становится адиабатическим инвариантом, могут быть осуществлены с помощью методов теории возмущений в нелинейных системах.

Контопулос [6] применил методы теории возмущений к построению третьего интеграла (который строится последовательными приближениями с учетом выполнения условий обращения в нуль скобок Пуассона) и к нахождению адиабатического инварианта в системе

$$\dot{y}_k = H_{x_k}, \qquad \dot{x}_k = -H_{y_k}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \omega_1^2 y_1^2 + \omega_2^2 y_2^2\right) - \varepsilon y_1 y_2^2 \sin \omega t = H_0 + \varepsilon H_1.$$

Эта работа, помимо очень интересных аналитических построений, содержит также численную проверку результатов. Основной вывод работы: если нет резонанса между частотами ω_1, ω_2, то оба метода дают одинаково хорошие результаты. Тем не менее, если числа ω_1 и ω_2 почти соизмеримы, то адиабатический инвариант очень быстро (по времени) вырождается и в случае точной соизмеримости пропадает. С другой стороны, в этом же случае соответствующим образом модифицированный третий интеграл можно

найти, так что он будет оставаться интегралом в очень высоком приближении (по времени). Как говорит Контопулос, несправедливость свойства адиабатической инвариантности при резонансе была известна еще по очень давним работам, на которые в работе [37] ссылается Зоммерфельд, однако в современной литературе этот факт упоминается редко.

Мы закончим этот раздел напоминанием, что в настоящей главе почти не говорилось о теории существования инвариантных многообразий возмущенных систем, которая построена в работах Левинсона [21], Дилиберто [8, 9], Кинера [19] и Лоуда [22]. Однако отличное описание результатов этих работ можно найти в замечательной работе Хейла [11]. Основная идея заключается в рассмотрении автономной системы

$$\dot{x} = f(x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

с периодическим решением

$$x = p_0(t) = p_0(t + T_0).$$

В n-мерном пространстве (x, θ) цилиндр $x = p_0(\theta)$ является инвариантной поверхностью, т. е. каждое решение, принадлежащее цилиндру в какой-то момент времени, будет оставаться на нем все время.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t, \varepsilon),$$

где $g(x, t, \varepsilon) = g(x, t + T, \varepsilon)$. Можно показать, что если $f(x)$ и $g(x, t, \varepsilon)$ принадлежат по крайней мере классу C^3, то при достаточно малых ε в пространстве (x, t) существует поверхность $x = p(t, \theta, \varepsilon) \in C^1$, лежащая вблизи цилиндра $x = p_0(\theta)$ и являющаяся инвариантной поверхностью возмущенной системы. Также справедливо утверждение, что функция $p(t, \theta, \varepsilon)$ имеет период T по t_0 и период T_0 по θ, а $p(t, \theta, 0) = p_0(\theta)$.

Распространение этих результатов на случай условно-периодических (по t) функций $g(x, t, \varepsilon)$ было осуществлено Хейлом [11]. Результат будет аналогичным, с тем только замечанием, что функция $p(t, \theta, \varepsilon)$ также условно периодична по t. Плисс [30][1]) получил условие существования инвариантных многообразий, которое не зависит от понятия возмущения, т. е. для систем вида

$$\dot{x} = X(x, y, t), \qquad \dot{y} = Y(x, y, t),$$

где x, y — векторы размерности n. Основное предположение: $X, Y \in C^1$ в некоторой области $\{x \in R^n,\ t \in R,\ \|y\| \leqslant K\}$ и X, Y

[1]) См. также книгу [29*] (*прим. перев.*).

имеют период T по t. При доказательстве используется сведéние задачи к исследованию сжимающих отображений, а затем к доказательству существования неподвижной точки. Аналогичный способ исследования интенсивно использовался Картсатосом в работе [15]. В этой работе можно найти много относящихся к рассматриваемому вопросу литературных ссылок, но ее обсуждение здесь проводиться не будет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и др. К теории адиабатических инвариантов.—Ж. Русск. хим. общ., 1928, т. 60, стр. 413—457.
2. Арнольд В. И. О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона.—ДАН СССР, 1962, т. 142, № 4, стр. 758—761.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.—УМН, 1963, т. 18, № 6, стр. 91—192.
4. Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical applications.— Acta Math., 1922, vol. 43, p. 1—119.
5. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.— М.— Л.: Гостехиздат, 1941.
6. Contopoulos G. Adiabatic invariants and the third integral.— J. Math. Phys., 1966, vol. 7, № 5, p. 788—797.
7. Danby J. M. A. Wild dynamical systems.— В кн.: Periodic Orbits, Stability and Resonances /Ed. G. E. O. Giacaglia.— Dordrecht, Holland: Reidel Pub. Co., 1970.
8. Diliberto S. P. An application of periodic surfaces. Solution of a small divisor problem. Contrib. to the theory of nonlinear oscill., vol. 3.— Ann. of Math. Studies, 1956, vol. 36, p. 257—261.
9. Diliberto S. P., Hufford G. Perturbation theorems for nonlinear ordinary differential equations.— Ann. of Math. Studies, 1956, vol. 36, p. 207—237.
10. Gustavson F. A. On constructing formal integral of a hamiltonian system near an equilibrium point.— Astron. J., 1966, vol. 71, № 8, p. 670—686.
11. Hale J. K. Integral manifolds of perturbed differential equations.— Ann. Math., 1960, vol. 73, № 3, p. 496—531.
12. Hallam T. G. Convergence of solutions of perturbed nonlinear differential equations.— Ann. Math. Pure Appl., 1972.
13. Hènon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments.— Astron. J., 1964, vol. 69, № 1, p. 73—79.
14. Kartsatos A. G. On the maintenance of oscillations of the n-th order equations under the effect of small forcing term.— J. Diff. Eq., 1971, vol. 10, p. 355—363.
15. Kartsatos A. G. On the relationship between a nonlinear system and its nonlinear perturbation. (Preprint from Dept. of Math., Univ. of South Florida, Tampa, Fla., 1972).
16. Kasuga T. On the adiabatic theorem for the hamiltonian system of differential equations in celestial mechanics.— Proc. Japan Acad., 1961, vol. 37, p. 366—382.
17. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.—ДАН СССР, 1953, т. 98, № 4, стр. 527—530.
18. Kruskal M. Adiabatic invariants.— Princeton, Princeton Univ. Press, 1961.
19. Kyner W. T. Small periodic perturbations of an autonomous system of vector equations.— Ann. of Math. Studies, 1958, vol. 41, p. 111—125.

20. Kyner W. T. Rigorous and formal stability of orbits about an oblate planet.— Mem. Amer. Math. Soc., 1968, vol. 81, p. 1—27.
21. Levinson N. Small periodic perturbations of an autonomous system with a stable orbit.— Ann. Math., 1950, vol. 52, № 3, p. 727—738.
22. Loud W. S. Periodic solutions of a perturbed autonomous system.— Ann. Math., 1959, vol. 70, № 3, p. 490—529.
23. Meirovitch L. Methods of analytical dynamics.— New York, McGraw-Hill, 1970.
24. Moser J. Nonexistence of integrals for canonical systems of differential equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 409—436.
25. Moser J. On the integrability of area-preserving cremona mappings near an elliptic fixed point.— Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1961, p. 176—180.
26. Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.—Математика, 1962, т. 6, № 5, стр. 51—67.
27. Moser J. Hamiltonian systems.— Lecture notes, New York Univ., 1964.
28. Moser J. On the theory of quasi-periodic motions.— SIAM Rev., 1966, vol. 8, № 2, p. 145—172.
29. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.—М.: Мир, 1973.
30. Плисс В. А. К теории инвариантных поверхностей.—Диф. уравнения, 1966, т. 2, № 9, стр. 1139—1150.
31. Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме. Избр. тр., 2.— М.: Наука, 1972.
32. Rüsmann H. Über das verhalten analytischer hamiltonscher differentialgleichungen in der nähe einer gleichgewichtslösung.— Math. Annalen, 1964, b. 154, s. 285—300.
33. Зигель К. Л. Об интегралах канонических систем.—Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 103—117.
34. Зигель К. Л. О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия.— Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 129—156.
35. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.—М.: ИЛ, 1959.
36. Siegel C. L., Moser J. K. Lectures on celestial mechanics.— New York, Springer-Verlag, 1971.
37. Sommerfeld A. Atombau und spektrallinien. vol. 1, 7-th ed., p. 370, p. 698, Braunschweig, Vieweg, 1951.
38. Wasow W. Adiabatic invariance of a simple oscillator.— Not. Am. Math. Soc., 1971, vol. 18, No. 7 (Abstract).
39. Уиттекер Е. Аналитическая динамика.—М.: ОНТИ, 1937.

ГЛАВА V

●

РЕЗОНАНСЫ

1. Введение

Ранний вариант описания проблемы, с которой мы сейчас будем иметь дело, можно найти в работах Бохлина [13] (см. также [68]), в монографии Цейпеля [76] по теории движения астероидов и в работе Уиттекера [75] о задаче поиска решений в виде рядов и о задаче поиска дополнительных интегралов. Все эти работы прямо или косвенно связаны с задачами небесной механики. Первыми, кто изучали эту проблему в теории линейных и нелинейных колебаний, были Ляпунов [55], Крылов [51], Боголюбов [11] и Митропольский [58]. В современной литературе, т. е. после середины нашего столетия, имеется очень много работ о резонансах, в которых содержатся обобщения старых и вводится много новых разнообразных определений и подходов к проблеме.

Хотя рассматриваемое понятие резонанса является объектом всеобщего изучения, его надлежащее определение сегодня зависит от частной задачи, исследуемой автором, и от области его научных интересов. Мы не будем отступать от этой «традиции», хотя и попытаемся поставить проблему в достаточно общих терминах, применения которых настолько широки, насколько только возможно.

Физическое предположение заключается в том, что нам дана система дифференциальных уравнений, описывающая поведение некоторого механизма, или электрического, или механического. Механизм является осциллятором в том смысле, что он может быть описан с помощью вполне определенного набора переменных действие и угол. В общем случае угловые переменные изменяются со временем с рационально независимыми частотами, а случай рациональной зависимости является исключительным, хотя и вполне возможным случаем. Следовательно, мы предполагаем, что осциллятор имеет дискретный спектр частот и что он ограничен некоторой полосой. Это основное предположение.

Типичные проблемы, которыми мы будем интересоваться, связаны с изучением поведения осциллятора при введении малых изменений его структуры и (или) под действием внешних по отношению к системе факторов (или возмущений). Такие изменения и возмущения вызывают эффекты, коренным образом связан-

ные с частотами осциллятора. Если движение осциллятора является резонансным (периодическое решение), т. е. существует по крайней мере одна обращающаяся в нуль линейная целочисленная комбинация частот, то каков же будет эффект малых возмущений (внутренних или внешних) в системе? Или каково будет результирующее движение, если внешнее воздействие также оказывает осциллятор, частоты которого рационально связаны с частотами системы? В классической постановке гармонический (линейный) осциллятор, который подвергается воздействию внешних сил, находящихся в резонансе с осциллятором, будет увеличивать свою амплитуду безгранично. Однако в естественно-технических задачах это невозможно, так как не существует ни чисто линейных систем, ни диссипативных сил, которыми можно полностью пренебречь, а система распадется, когда амплитуда колебаний достигнет значения, достаточного для разрушения системы.

Частота линейного осциллятора не зависит от амплитуды, а при точном резонансе величина амплитуды стремится к бесконечности. Для нелинейного осциллятора частота зависит от соответствующей амплитуды (или наоборот), так что при изменении амплитуды в осцилляторе перестает выполняться условие резонансности частот. Тем не менее, если два нелинейных осциллятора находятся в резонансе, то общим явлением становится такое, когда резонансная система стационарна с ограниченными амплитудами и фиксированными резонансами. Осцилляторы «захватываются в резонанс». Такая конфигурация в общем случае является устойчивой, в том смысле, что малые изменения в системе приводят к малым колебаниям около стационарной конфигурации. Асимптотическая устойчивость может оказаться только при наличии диссипативных сил, но не в консервативных системах.

Типичной задачей, иллюстрирующей проблему резонанса, особенно для читателей, работающих в области небесной механики, является задача о движении простого маятника. Эта задача была подробно исследована Брауном [14] и недавно еще более детальным образом Кинером [52]. Здесь мы не будем еще раз описывать этот пример, а лучше подойдем к проблеме с более общей точки зрения.

В любом случае крайне важно понять, что поведение системы под действием возмущений и при выполнении условий резонансности можно только тогда изучить до конца, когда известны все особые точки соответствующей системы дифференциальных уравнений и их характеристики досконально исследованы. Для систем с одной степенью свободы в общем случае это простая задача, и классификация особых точек хорошо известна. Такая классификация была обобщена на случай систем с двумя степенями свободы [66], но ее геометрическая интерпретация практически невозможна. Более того, большее число геометрических теорий, пригод-

ных для систем с одной степенью свободы (например, теорема Биркгофа о неподвижной точке, теорема Бендиксона — Пуанкаре, теория предельных циклов и аналогичные геометрические проблемы), нельзя обобщить на случай систем с двумя и более числом степеней свободы.

Большинство результатов, относящихся к проблеме резонансов в нелинейных системах и рассматривающихся здесь, являются описательными, за исключением только нескольких случаев. В большинстве случаев окончательный ответ приводится в виде уравнения Бохлина, к которому мы приходим применением принципа, известного главным образом под названием принципа минимума энергии или принципа сохранения устойчивых стационарных решений. В чисто историческом плане мы хотим упомянуть интересную статью Бакера [7], встретившегося с проблемой резонансов (малых делителей) в задачах небесной механики и давшего очень интересное описание поведения системы в типичной резонансной ситуации. Из этой работы можно почерпнуть много физических и математических рекомендаций. Сегодня за решение рассматриваемых вопросов берутся много авторов. Такое исследование, остающееся сегодня одним из лучших, было проведено Арнольдом [5]. Рассматриваемая проблема не может быть отделена от вопроса о структурной устойчивости, однако даже для систем с двумя степенями свободы результаты в этой области остаются скудными (см., например, [67]). Один известный результат проливает некоторый свет на теорию возмущений: гамильтоновы системы (не зависящие от времени) могут быть аппроксимированы структурно устойчивыми системами. Другими словами, для данной консервативной системы можно найти «очень близкую» (в смысле C^1), которая будет структурно устойчивой [1]). В этой связи мы еще раз упомянем возможные следствия того факта, что любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, приводимую к нормальной форме, можно записать в гамильтоновой форме (глава II, § 4). По нашему мнению, такую возможность надо использовать во всех случаях, чтобы воспользоваться специальными свойствами гамильтоновых систем, а особенно в связи со свойствами соответствующих инвариантных многообразий.

2. Движение в окрестности положения равновесия

В этом параграфе мы кратко опишем постановку задачи о движении в окрестности положения равновесия, ее решение с помощью формальных рядов и подход к полному решению, который необходим в случае, когда частоты нормальных колебаний линейно независимы на множестве целых чисел (глава III, § 4).

---

[1]) О структурной устойчивости см. [50*] (*прим. перев.*).

Пусть гамильтониан $H(y, x)$ аналитичен в некоторой области D фазового пространства, и соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\dot{y} = H_x^{\mathrm{T}}, \qquad \dot{x} = -H_y^{\mathrm{T}}, \tag{5.2.1}$$

где x, y — векторы размерности n. Допустим также существование такого изолированного стационарного решения x^0, y^0 в D, т. е.

$$H_{x^0} = H_{y^0} = 0, \tag{5.2.2}$$

для которого матрица $\partial^2 H/\partial y \partial x$ не является особенной при $x = x^0$, $y = y^0$. Отсюда, разумеется, следует, что такая точка является максимумом или минимумом для функции H, т. е. квадратичная часть тейлоровского разложения функции H в окрестности этой точки может быть приведена к нормальной форме или, что то же самое, соответствующие уравнения отвечают n независимым осцилляторам [1]). Мы будем считать, что точка (x^0, y^0) является точкой минимума, так что вышеупомянутую редукцию можно осуществить с помощью вещественного преобразования. В соответствии с этим, если дано $\delta > 0$, то можно найти такое $\varepsilon > 0$, что при

$$|x_0 - x^0| < \varepsilon, \qquad |y_0 - y^0| < \varepsilon,$$

где $(x_0, y_0) \in D$, для всех моментов времени имеем

$$|x - x^0| < \delta, \qquad |y - y^0| < \delta,$$

где x, y — решение уравнений (5.2.1), соответствующее начальным условиям x_0, y_0. Следовательно, определим $q = y - y^0$ и $p = x - x^0$, так что можно считать p, q ограниченными для всех моментов времени. Принимая q, p за новые переменные, раскладывая функцию $H(y^0 + q, x^0 + p)$ в ряд Тейлора и отбрасывая посто-

---

[1]) Из невырожденности матрицы $\partial^2 H/\partial y \partial x$ в положении равновесия в общем случае не следует, что эта точка является максимумом или минимумом гамильтониана. Это утверждение справедливо только в одномерном случае. Например, в двухчастотной системе с гамильтонианом $(\omega_1 > \omega_2 > 0)$

$$H = \frac{1}{2}\omega_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) - \frac{1}{2}\omega_2\left(x_2^2 + y_2^2\right)$$

упомянутая матрица невырождена, а тривиальное положение равновесия является лишь седловой точкой. В действительности замечание автора об экстремальных свойствах гамильтониана ниже никак не используется. а для приводимости системы к виду, отвечающему в линейном приближении независимым осцилляторам, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\partial^2 H/\partial y \partial x$ была невырожденной и чтобы кратным собственным значениям этой матрицы соответствовали простые элементарные делители (*прим. перев.*).

янную часть, в силу сделанных предположений получим

$$H = H_2 + H_3 + \ldots, \tag{5.2.3}$$

где $H_k(q, p)$—однородные полиномы степени k относительно компонент векторов q, p. Ряд (5.2.3) является абсолютно сходящимся. В частности, мы имеем

$$H_2 = \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} A q + q^{\mathrm{T}} B p + \frac{1}{2} p^{\mathrm{T}} C p, \tag{5.2.4}$$

где $A^{\mathrm{T}} = A$, $C^{\mathrm{T}} = C$, а, очевидно, H_2 — по предположению положительно определенная квадратичная форма, приводимая линейным симплектическим вещественным преобразованием к нормальной форме

$$H_2 = \frac{1}{2}(\eta^{\mathrm{T}}\eta + \xi^{\mathrm{T}} D^2 \xi). \tag{5.2.5}$$

Здесь $D^2 = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$, а $\omega_j^2 (j = 1, \ldots, n)$ — собственные числа задачи [1]). Якобиан $|J|$ линейного преобразования $(q, p) \to (\eta, \xi)$, т. е.

$$J = \frac{\partial (q, p)}{\partial (\eta, \xi)},$$

соответствует постоянной, вещественной и симплектической матрице [73]. Соотношение (5.2.5) можно переписать в виде

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\eta_k^2 + \omega_k^2 \xi_k),$$

так что функции Гамильтона H_2 соответствует n независимых гармонических осцилляторов, описывающих ограниченное движение вблизи положения равновесия, когда амплитуда колебаний стремится к нулю. Применяя преобразование $(q, p) \to (\eta, \xi)$ ко всему гамильтониану, находим

$$H = \frac{1}{2}(\eta^{\mathrm{T}}\eta + \xi^{\mathrm{T}} D^2 \xi) + H_3 + H_4 + \ldots,$$

где H_k — однородные полиномы степени k относительно компонент векторов η, ξ.

---

[1]) Все выкладки этого и следующего параграфа годятся не только для случая определенно положительной функции H_2. Достаточно только потребовать устойчивости в линейном приближении. Точнее (если не рассматривать случай простых элементарных делителей при равных частотах ω_j) в (5.2.9) и ниже числа ω_j не обязательно считать положительными, а лишь не равными друг другу или нулю (*прим. перев.*).

Уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= H_{\xi}^{\mathrm{T}} = D^2\xi + \Phi(\xi, \eta), \\ \dot{\xi} &= -H_{\eta}^{\mathrm{T}} = -\eta + \Psi(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

где Φ и Ψ — ряды из однородных полиномов относительно компонент векторов η, ξ, минимальная степень которых равна двум. Также ясно, что если записать $H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots$, то для всех t каждый полином H_k ограничен величиной порядка $O(\delta^k)$. Аналогичное утверждение верно и для рядов Φ и Ψ и, очевидно, уравнения (5.2.6) имеют единственное решение в области D.

Введем теперь каноническое преобразование

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{2\omega_k}\left(\eta_k^2 + \omega_k^2\xi_k^2\right), \\ \operatorname{tg} y_k &= \frac{1}{\omega_k}\frac{\eta_k}{\xi_k}, \qquad \omega_k > 0 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

или

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sqrt{\frac{2x_k}{\omega_k}}\cos y_k, \\ \eta_k &= \sqrt{2x_k\omega_k}\sin y_k. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Отсюда следует, что так как $|\eta_k|$, $|\xi_k|$ ограничены некоторой величиной порядка $O(\delta)$, а все ω_k $(k = 1, \ldots, n)$ положительны и конечны, то $|x_k|$ будут ограничены величиной порядка $O(\delta^2)$, а $|y_k| < \pi/2$ [1]). Следовательно, значение y_k полностью определяется из (5.2.7) значением тангенса.

После применения выписанного выше преобразования гамильтониан принимает вид (см. [75])

$$H = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{5.2.9}$$

где H_k имеют конечное число членов, соответствующих тригонометрическому полиному максимальной степени k относительно y, т. е.

$$H_k = \sum_{m}\sum_{\nu} A_k^{m,\nu} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \exp\left[i\left(\nu_1 y_1 + \ldots + \nu_n y_n\right)\right], \tag{5.2.10}$$

[1]) В действительности из (5.2.8) видно, что необходимо считать $-\pi < y_k \leqslant \pi$ (*прим. перев.*).

где

$$m_1 + \ldots + m_n = \frac{1}{2} k, \qquad (5.2.11)$$

$$|\nu_j| \leqslant 2m_j, \qquad |\nu_1| + \ldots + |\nu_n| \leqslant k.$$

Соотношения (5.2.11) называются *характеристиками Даламбера функции* H_k (или H)[1]. Все m_k — положительные полуцелые числа, а все ν_k — целые числа. Так как $x_k = O(\delta^2)$, то $H_k = O(\delta^k)$, $k = 3, 4, \ldots$ Интегрирование системы уравнений, определяемой гамильтонианом (5.2.9), теперь сводится к нахождению возмущений решения

$$x_k = x_k^0 = \text{const}, \qquad y_k = \omega_k t + y_k^0, \qquad (5.2.1)$$

соответствующего гамильтониану $H = H_2 = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$.

Действительно, соотношения (5.2.12) описывают бесконечно малые колебания в окрестности устойчивого положения равновесия (x^0, y^0), которое в новых переменных соответствует точке $x = y = 0$.

С самого начала ясно, что гамильтониан H является вырожденным, в том смысле, что матрица $\{\partial^2 H_2/\partial x_i \partial x_j\}$ — особенная. С другой стороны, функция H_3 не может содержать секулярных членов (членов, не зависящих от переменных y_j), так как она является нечетной функцией вектора y и имеет период 2π по каждой компоненте этого вектора. Также очень важно напомнить, что каждая функция H_k состоит из конечного числа членов (при конечном k). Число таких членов увеличивается с увеличением k в соответствии с условиями (5.2.11).

Форма H_2 такова, что никакая теорема, обсуждаемая в главе III книги, к ней неприменима. Тем не менее *мы можем показать, что в любом случае существуют формальные ряды, нормализующие функцию H, т. е. приводящие ее к виду* $H = K(X, 0)$, *где все угловые переменные отсутствуют.* В действительности будет показано, что существует преобразование, определяемое конечным числом тригонометрических полиномов такого же вида, что и вид H, такое, что вышеупомянутая нормализация может быть достигнута с любой степенью точности, хотя в пределе это и может привести к расходящимся рядам. В различных задачах такая редукция была проведена Депри и др. [30.2, 31.2], где использовались ряды Ли. Здесь мы будем использовать подход типа подхода Цейпеля, который в действительности, как говорилось в главе II, является эквивалентным вышеупомянутому подходу Депри.

---

[1]) Подробное описание свойств полиномов и рядов Пуассона, обладающих характеристиками Даламбера, см. в работе [30*] (*прим. перев.*).

3. Решение с помощью формальных рядов

Сначала рассмотрим случай, когда $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейно независимы на множестве целых чисел, т. е. условие

$$j_1\omega_1 + \ldots + j_n\omega_n = 0 \tag{5.3.1}$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда все целые числа $j_1, \ldots, j_n$ равны нулю. Из этого, в частности, следует, что ни одна из ω не может быть нулевой или, другими словами, все переменные присутствуют в гамильтониане. Однако это является прямым следствием предположения об устойчивости положения равновесия [1]).

Процедуру Цейпеля нельзя применить непосредственно без некоторых предварительных рассуждений и аккуратного определения понятия «порядка члена». Действительно, гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{5.3.2}$$

где $H_p = O(\delta^p)$, как следствие того, что степень полинома H_p, выраженного через $x_1, \ldots, x_n$, равна $p/2$, а $x_j = O(\delta^2)$. Отсюда следует, что дифференцирование по переменным x понижает порядок члена на две единицы, так что, например, полином

$$\frac{\partial^p H_k(x, y)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \qquad (p_1 + \ldots + p_n = p)$$

имеет порядок $O(\delta^{k-2p})$. Тем не менее в уравнениях, получающихся из обобщенного уравнения Гамильтона — Якоби, мы никогда не будем иметь членов отрицательного порядка по δ.

Производящая функция канонического преобразования $(x, y) \to (X, Y)$

$$S = X^{\mathrm{T}} y + S_3(X, y) + S_4(X, y) + \ldots \tag{5.3.3}$$

выбирается так, чтобы

$$x_k = S_{y_k} = X_k + S_{3y_k} + S_{4y_k} + \ldots, \tag{5.3.4}$$

а нормализованный гамильтониан имеет вид

$$K(X) = \sum_k \omega_k X_k + K_3(X) + K_4(X) + \ldots \tag{5.3.5}$$

---

[1]) Это не совсем верное утверждение, так как полная система может быть устойчивой и в случае нулевых чисел ω, т. е. если линейная система неустойчива. См., например, [31*] (*прим. ред.*).

На этом этапе все ряды считаются чисто формальными, за исключением ряда (5.3.2), который является равномерно сходящимся.

После подстановки (5.3.4) в (5.3.2) и разложения в ряд Тейлора первые несколько приближений будут определяться уравнениями

$$\sum_k \omega_k \frac{\partial S_3}{\partial y_k} + H_3(X, y) = K_3(X), \tag{5.3.6}$$

$$\sum_k \omega_k \frac{\partial S_4}{\partial y_k} + \sum_k \frac{\partial H_3(X, y)}{\partial X_k} \frac{\partial S_3}{\partial y_k} + H_4(X, y) = K_4(X), \tag{5.3.7}$$

$$\sum_k \omega_k \frac{\partial S_5}{\partial y_k} + \sum_k \frac{\partial H_3(X, y)}{\partial X_k} \frac{\partial S_4}{\partial y_k} + \\ + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \frac{\partial^2 H_3(X, y)}{\partial X_k \partial X_j} \frac{\partial S_3}{\partial y_k} \frac{\partial S_3}{\partial y_j} + \sum_k \frac{\partial H_4(X, y)}{\partial X_k} \frac{\partial S_3}{\partial y_k} + H_5(X, y) = \\ = K_5(X). \tag{5.3.8}$$

В нерезонансном случае формальное решение вообще не представляет никаких затруднений. Действительно, так как

$$H_p(X, y) = \sum_{\nu^p} A_p^{\nu^p}(X) \exp i\left(\nu_1^p y_1 + \ldots + \nu_n^p y_n\right), \tag{5.3.9}$$

где $\nu^p = (\nu_1^p, \ldots, \nu_n^p)$, а $A_p^{\nu^p}(X)$ — однородные полиномы степени $p/2$ относительно $X_1, \ldots, X_n$, то отсюда, например, следует

$$K_3(X) = A_3^0(X),$$

$$S_3 = \sum_{\nu^p} A_p^{\nu^p}(X) \left[i\left(\nu_1^3 \omega_1 + \ldots + \nu_n^3 \omega_n\right)\right]^{-1} \times \\ \times \exp i\left(\nu_1^3 y_1 + \ldots + \nu_n^3 y_n\right) + F_3(X, 0), \tag{5.3.10}$$

где $F_3(X, 0)$ — произвольная функция, зависящая только от X. Ее можно положить равной нулю. Это не повлияет на приближения более высоких порядков, так как во всех уравнениях функции $S_3, S_4, \ldots$ встречаются только в виде своих частных производных по переменным y. Уравнения для приближения любого порядка имеют одинаковый вид и решаются аналогично.

Теперь рассмотрим случай, когда имеется один (и только один) набор целых (несократимых одновременно) чисел $j_1, \ldots, j_n$, не обращающихся одновременно в нуль и таких, что выполнено условие (5.3.1). В этом случае может оказаться, что некоторые делители, встречающиеся в (5.3.10), равны нулю, т. е. некоторый набор чисел $(\nu_1^3, \ldots, \nu_n^3)$ кратен набору $(j_1, \ldots, j_n)$. Это обязательно должно случиться лишь с конечным числом членов какого-то при-

ближения, так как функция H_p имеет конечное число членов при конечном p. Тем не менее ясно, что при увеличении p рассматриваемые знаменатели могут стать сколь угодно малыми. Для рационально независимых чисел ω сходимости можно добиться введением нижней границы соответствующих резонансных соотношений, как это уже рассматривалось в главах III и IV. Действительно, Уиттекер [75] упоминает пример, в котором ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q_1^m q_2^n}{m-n\alpha}$$

при $|q_1|<1$, $|q_2|<1$ и α иррациональном в действительности являются сходящимися. Для рационально зависимых чисел ω рано или поздно должен появиться нулевой делитель и, следовательно, в том виде, в каком он использовался раньше, описанный способ нормализации применить нельзя.

В том случае, когда в функции H_3 нет таких членов $\nu_1^3 y_1+\ldots$ $\ldots+\nu_n^3 y_n$, что $\nu_1^3\omega_1+\ldots+\nu_n^3\omega_n=0$, все угловые переменные по-прежнему можно исключить, если только заметить, что функцию S_3 можно записать в виде (5.3.10), где произвольная функция F_3 может теперь зависеть и от критической комбинации (аргумента) $j_1y_1+\ldots+j_ny_n$, т. е.

$$F_3=F_3(X,\ j_1y_1+\ldots+j_ny_n). \tag{5.3.11}$$

Как легко проверить, произвольная функция, зависящая от такого критического аргумента, не даст никакого вклада в уравнение (5.3.6). Теперь уже произвольную функцию можно использовать для уничтожения любого члена, содержащего критический аргумент (или кратный ему аргумент) в следующих приближениях. Важная роль, выполняемая здесь следующими членами по отношению к квадратичной форме в преобразовании, которое рассматривается в теореме Биркгофа о неподвижной точке, также проявляется и в функции Гамильтона.

Действительно, положим

$$F_3(X,\ j^{\mathrm{T}}y)=\sum_{\alpha}B_3^{\alpha}(X)\exp\left[i\alpha\left(j^{\mathrm{T}}y\right)\right], \tag{5.3.12}$$

где целое число α определяется на следующем шаге вычисления приближений, а $B_3^{\alpha}(X)$ — однородные полиномы степени 3/2 относительно $X_1,\ldots,X_n$. Определив

$$H_3(X,y)=H_{3s}(X)+H_{3p}(X,y), \tag{5.3.13}$$

получаем

$$B_3^{\alpha}(X)=-\frac{i}{\alpha}A_4^{\alpha}(X)\left\{\sum_k j_k\frac{\partial H_{3s}(X)}{\partial X_k}\right\}^{-1}, \tag{5.3.14}$$

где $A_4^\alpha(X)$ — коэффициенты при членах с критическим аргументом $\alpha j^{\mathrm{T}} y$ в H_4. Видно, что дополнительные особенности могут появиться в окрестности и в самой точке $X = \overline{X}$, такой, что

$$\sum_k j_k \left.\frac{\partial H_{3s}(X)}{\partial X_k}\right|_{X=\overline{X}} = 0, \tag{5.3.15}$$

однако в общем случае этого не произойдет. Таким образом, решение получается введением на каждом шаге произвольной функции $F_p(X, j^{\mathrm{T}} y)$ в $S_p(X, y)$, которая должна определяться на следующем шаге. Возможно также, что «секулярная» часть функции H_3 или некоторого другого приближения окажется равной нулю. В этом случае приходится вводить секулярную часть из более высокого приближения, увеличив, таким образом, размеры соответствующих членов в рядах, что, тем не менее, будет полезно во многих задачах.

Если $H_{3s} = 0$, то, подставляя вместо этой функции функцию H_{4s}, получим вместо (5.3.14) формулу

$$B_3^\alpha(X) = -\frac{i}{\alpha} A_4^\alpha(X) \left\{ \sum_k j_k \frac{\partial H_{4s}(X)}{\partial X_k} \right\}^{-1},$$

так что в действительности $B_3^\alpha(X)$ является функцией второго порядка малости. Тем не менее, такие случаи и случай, когда H_3 содержит критический аргумент, являются наилучшими для применения нижеописываемого метода, согласно которому исходная система сводится к системе с одной степенью свободы, где в качестве единственной появляющейся угловой переменной берется критический аргумент. Следовательно, формально система сводится к квадратурам.

В рассматриваемом случае рассмотрим сначала каноническое преобразование к новым переменным x', y' по формулам

$$\begin{aligned} y_k' &= y_k \quad (k = 1, \ldots, n-1), & y_n' &= j_1 y_1 + \ldots + j_n y_n, \\ x_k &= x_k' + j_k x_n' \quad (k = 1, \ldots, n-1), & x_n &= j_n x_n' \quad (j_n \neq 0). \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

В новых переменных гамильтониан приобретает вид

$$H = \omega_1 x_1' + \ldots + \omega_{n-1} x_{n-1}' + \sum_\alpha A_3^\alpha(x) \exp i\alpha y_n' + H_3^* + H_4 + \ldots,$$

где в H_3^* собраны члены, не содержащие только критический аргумент y_n'. Записанная в новых переменных система является вырожденной. Если все $A_3^\alpha(x')$ не равны тождественно нулю и H_3^* имеет нулевую секулярную часть, то можно исключить из

гамильтониана только углы $y_1', \ldots, y_{n-1}'$, т. е. углы, соответствующие имеющимся в H_2 импульсам. Теперь, опуская штрихи при переменных, функцию H можно записать в новом виде

$$H = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_{n-1} x_{n-1} + \sum_{\alpha} A_3^{\alpha}(\boldsymbol{x}) \exp i\alpha y_n + \\ + H_3^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + H_4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \ldots, \qquad (5.3.17)$$

где функция H_3^* может быть записана следующим образом:

$$H_3^* = \sum_{\boldsymbol{\nu}} A_3^{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}) \exp [i(\nu_1 y_1 + \ldots + \nu_n y_n)];$$

при этом целые числа $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ не обращаются одновременно в нуль, если $\nu_n \neq 0$. Следовательно, в силу сделанного предположения о единственности набора ненулевых одновременно целых чисел, удовлетворяющих соотношению (5.3.1), условие $\nu_1\omega_1 + \ldots + \nu_n\omega_n = 0$ не может быть выполнено ни для одного набора целых чисел $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ из H_3^*.

Теперь только необходимо потребовать, чтобы новый гамильтониан K, записанный в новых переменных $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, представлялся рядом

$$K = K(\boldsymbol{X}, Y_n) = K_2 + K_3 + K_4 + \ldots,$$

вообще говоря, формальным, так что $X_1, \ldots, X_{n-1}$ являются постоянными, и система имеет единственную степень свободы. Производящая функция опять определяется формальным рядом

$$S = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + S_3(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}) + S_4(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}) + \ldots,$$

а соответствующее преобразование имеет вид

$$x_k = X_k + \frac{\partial S_3}{\partial y_k} + \frac{\partial S_4}{\partial y_k} + \ldots, \qquad Y_k = y_k + \frac{\partial S_3}{\partial X_k} + \frac{\partial S_4}{\partial X_k} + \ldots,$$

что, как и всегда, дает $K_2 = \omega_1 X_1 + \ldots + \omega_{n-1} X_{n-1}$.

Рассмотрим тейлоровское разложение обобщенного уравнения Гамильтона — Якоби

$$H\left(\boldsymbol{X} + \frac{\partial S_3}{\partial \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}} + \ldots, \boldsymbol{y}\right) = K\left(\boldsymbol{X}, y_n + \frac{\partial S_3}{\partial X_n} + \ldots\right) = \\ = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k X_k + K_3(\boldsymbol{X}, Y_n) + \ldots$$

Принимая во внимание уменьшение порядка на две единицы при каждом дифференцировании по $\boldsymbol{X}$, для первых нескольких

приближений получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \frac{\partial S_3}{\partial y_k} + H_3(X, y) = K_3(X, y_n),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \frac{\partial S_4}{\partial y_k} + \sum_k \frac{\partial H_3(X, y)}{\partial X_k} \frac{\partial S_3}{\partial y_k} + H_4(X, y) =$$

$$= K_4(X, y_n) + \frac{\partial K_3(X, y_n)}{\partial y_n} \frac{\partial S_3}{\partial X_n},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \frac{\partial S_5}{\partial y_k} + \sum_k \frac{\partial H_3(X, y)}{\partial X_k} \frac{\partial S_4}{\partial y_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,j} \frac{\partial^2 H_3(X, y)}{\partial X_k \partial X_j} \frac{\partial S_3}{\partial y_k} \frac{\partial S_3}{\partial y_j} +$$

$$+ \sum_k \frac{\partial H_4(X, y)}{\partial X_k} \frac{\partial S_3}{\partial y_k} + H_5(X, y) =$$

$$= K_5(X, y_n) + \frac{\partial K_3(X, y_n)}{\partial y_n} \frac{\partial S_4}{\partial X_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_3(X, y_n)}{\partial y_n^2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial X_n}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial K_4(X, y_n)}{\partial y_n} \frac{\partial S_3}{\partial X_n}.$$

На каждом шаге, очевидно, соответствующее уравнение можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \frac{\partial S_\beta}{\partial y_k} + H_\beta^*(X, y) + \sum_{\alpha\beta} A_\beta^{\alpha\beta}(X) \exp\left(i\alpha^\beta y_n\right) = K_\beta(X, y_n), \tag{5.3.18}$$

где функция H_β^* обладает теми же свойствами, что и описанная ранее функция H_3^* в (5.3.17).

Определим функцию K_β в виде

$$K_\beta(X, y_n) = H_{\beta s}^*(X) + \sum_{\alpha\beta} A_\beta^{\alpha\beta}(X) \exp\left(i\alpha^\beta y_n\right), \tag{5.3.19}$$

где

$$H_\beta^* = H_{\beta s}^*(X) + H_{\beta p}^*(X, y).$$

Тогда функция S_β определяется как решение уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \frac{\partial S_\beta}{\partial y_k} + H_{\beta p}^*(X, y) = 0,$$

в котором в силу сделанного выбора функции H_β^* нет ни одного нулевого делителя. Такая *частичная нормализация* может быть

осуществлена до приближения любого порядка, так что мы можем записать новый гамильтониан в виде

$$K = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k X_k + K_3(X, Y_n) + \ldots + K_\beta(X, Y_n) + O(|X|^{\beta+1}),$$

и с точностью до $O(|X|^{\beta+1})$ соответствующая система может быть проинтегрирована в квадратурах.

4. Эквивалентность проблеме возмущения линейных систем

Легко установить связь между результатами предыдущего параграфа и классической задачей возмущения линейных систем, изученной в работах Чезари [15], Хейла [40] и некоторых других авторов. Действительно, рассмотрим уравнения (5.2.6), переписанные в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & D^2 \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial(\eta, \xi)} \right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.4.1}$$

где $\Delta H = H_3 + H_4 + \ldots$ Введем линейное преобразование

$$z = \begin{pmatrix} -iD^{-1} & -I \\ iD^{-1} & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \tag{5.4.2}$$

или обратное ему

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iD & -iD \\ -I & -I \end{pmatrix} z, \tag{5.4.3}$$

где z — вектор размерности $2n$. Отсюда следует, что z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} iD & O \\ O & -iD \end{pmatrix} z + 2i \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial z} \right)^{\mathrm{T}}$$

или $(k = 1, \ldots, n)$

$$\dot{z}_k = i\omega_k z_k + f_k(z), \qquad \dot{z}_{n+k} = -i\omega_k z_{n+k} + f_{n+k}(z), \tag{5.4.4}$$

где

$$f_k = \frac{2i}{\omega_k} \frac{\partial \Delta H}{\partial z_{n+k}}, \qquad f_{n+k} = -\frac{2i}{\omega_k} \frac{\partial \Delta H}{\partial z_k}. \tag{5.4.5}$$

Следует заметить, что уравнения (5.4.4) можно переписать

в виде ($k = 1, \ldots, n$)

$$\dot{z}_k = \frac{2i}{\omega_k}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial z_{n+k}}, \qquad \dot{z}_{n+k} = -\frac{2i}{\omega_k}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial z_k}, \tag{5.4.6}$$

где

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\sum \omega_k^2 z_k z_{n+k} + \Delta H.$$

В любом случае уравнение для фундаментальной матрицы решений уравнений (5.4.4) можно записать так:

$$\dot{Z} = AZ + \Phi(Z), \tag{5.4.7}$$

где $\Phi(Z)$ — матрица, элементами которой являются ряды из однородных полиномов степени не ниже 3/2. В используемых здесь обозначениях

$$\Phi = \Phi_3 + \Phi_4 + \ldots$$

Теперь можно представить метод усреднения, описанный в предыдущем параграфе, с помощью следующей процедуры последовательных приближений. Пусть B — постоянная диагональная матрица с неизвестными элементами λ_k ($k = 1, \ldots, 2n$). Тогда можно положить

$$B = \operatorname{diag}(i\tau_1, \ldots, i\tau_n, -i\tau_1, \ldots, -i\tau_n),$$

где неизвестные постоянные $\tau_1, \ldots, \tau_n$ должны определяться в результате использования метода усреднения. Определим дополнительное уравнение

$$\dot{Z} = BZ + G(Z), \tag{5.4.8}$$

где

$$G(Z) = \Phi(Z) + (A - B)Z. \tag{5.4.9}$$

Видно, что при $G(Z) = 0$ решение уравнения (5.4.8) имеет вид

$$Z^{(0)} = e^{Bt}C, \tag{5.4.10}$$

где C — постоянная матрица, которую можно положить равной единичной матрице.

Введем преобразование

$$Z = e^{Bt}Y,$$

так что уравнение (5.4.8) переходит в уравнение

$$\dot{Y} = e^{-Bt}G(e^{Bt}Y), \tag{5.4.11}$$

где $Y^{(0)} = \text{const}$ — приближение нулевого порядка. Вообще говоря, нельзя считать, что в интеграле от функции $e^{-Bt}G(e^{Bt}Y^{(0)})$

не будет содержаться секулярных членов. Надо считать, что секулярные члены будут присутствовать в таком интеграле наряду с условно-периодическими функциями времени t (предполагается, что величины $\tau_1, \ldots, \tau_n$ линейно независимы на множестве целых чисел).

Тогда определим операцию усреднения

$$P[M(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T M(t)\,dt,$$

так что матрица

$$M(t) - P[M(t)] = (J - P)M(t)$$

является условно-периодической или, в исключительных случаях, периодической. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\dot{Y}^{(1)} = (J - P)e^{-Bt}G(e^{Bt}Y^{(0)}),$$

интегрирование которого дает условно-периодическую матрицу. В общем случае мы определим процедуру последовательных приближений и усреднения формулой

$$Y^{(m)} = Y^{(0)} + \int^t (J - P)\,e^{-B\theta}G\left(e^{B\theta}Y^{(m-1)}\right)d\theta.$$

Возвращаясь к матрице Z, получаем

$$Z^{(m)} = e^{Bt}Y^{(0)} + e^{Bt}\int^t (J - P)\,e^{-B\theta}\left[\Phi\left(Z^{(m-1)}\right) + (A - B)\,Z^{(m-1)}\right]d\theta. \tag{5.4.12}$$

Если процедура сходится, то последовательность $Z^{(m)}$ будет иметь предел Z, удовлетворяющий интегральному уравнению

$$Z = e^{Bt}Y^{(0)} + e^{Bt}\int^t (J - P)\,e^{-B\theta}\left[\Phi(Z) + (A - B)\,Z\right]d\theta.$$

Дифференцируя последнее уравнение, получаем

$$\dot{Z} = Be^{Bt}Y^{(0)} + B\left(Z - e^{Bt}Y^{(0)}\right) + e^{Bt}(J - P)\,e^{-Bt}\left[\Phi(Z) + (A - B)\,Z\right]$$

или

$$\dot{Z} = AZ + \Phi(Z) - e^{Bt}P\{e^{-Bt}[\Phi(Z) + (A - B)Z]\},$$

что является решением уравнения (5.4.7) тогда и только тогда,

когда выполнено равенство

$$P\{e^{-Bt}[\Phi(Z)+(A-B)Z]\}=0$$

или

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-Bt}[\Phi(Z(t))+(A-B)Z(t)]\,dt=0. \qquad (5.4.13)$$

До сих пор не была показана ни сходимость, ни расходимость метода последовательных приближений, определяемых уравнением (5.4.12). Теорему о сходимости, доказанную Чезари [15] и Хейлом [40] при более общих предположениях для определения периодических решений, в этом случае не так просто обобщить, так как принцип сжатия, который позволяет применить теорему Банаха о неподвижной точке, здесь очевидно не выполняется. Действительно, полнота пространства всех условно-периодических функций очевидно не имеет места. В этом случае похоже, что можно применить непосредственный путь доказательства, аналогично тому, как это было сделано Чезари [15]. По нашему мнению, этот метод будет сходящимся, по крайней мере для множества частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$, удовлетворяющих соответствующему условию иррациональности и, возможно, за исключением некоторого конечного числа соотношений между ω_k, которые привели бы к классической задаче о параметрической неустойчивости (см. [60, 31, 37]).

В покомпонентной форме уравнение (5.4.12) можно переписать так:

$$Z_{kj}^{(m)}=e^{i\tau_k t}Z_{kj}^{(0)}+e^{i\tau_k t}\int^t (J-P)\,e^{-i\tau_k\theta}\left[\Phi_{kj}\left(Z^{(m-1)}\right)+\right.$$
$$\left.+\,i\,(\omega_k-\tau_k)\,Z_{kj}^{(m-1)}\right]d\theta,$$

а условием (5.4.13) определяются постоянные $Z_{kj}^{(0)}$, и оно должно быть сведено к системе уравнений относительно неизвестных $\tau_1, \ldots, \tau_n$, выражающихся через $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Эквивалентные соотношения для исходной системы (5.4.4) имеют вид

$$z_k^{(m)}=e^{i\tau_k t}z_k^{(0)}+e^{i\tau_k t}\int^t (J-P)\,e^{-i\tau_k\theta}\left[f_k\left(z^{(m-1)}\right)+\right.$$
$$\left.+\,i\,(\omega_k-\tau_k)\,z_k^{(m-1)}\right]d\theta,$$

$$z_{n+k}^{(m)}=e^{-i\tau_k t}z_{n+k}^{(0)}+e^{-i\tau_k t}\int^t (J-P)\,e^{i\tau_k\theta}\left[f_{n+k}\left(z^{(m-1)}\right)-\right.$$
$$\left.-\,i\,(\omega_k-\tau_k)\,z_{n+k}^{(m-1)}\right]d\theta,$$

или для вектора z

$$z^{(m)} = e^{Bt}z^{(0)} + e^{Bt}\int^{t} (J - P)\, e^{-iB\theta}\left[f\left(z^{(m-1)}\right) + (A - B)\, z^{(m-1)}\right] d\theta. \tag{5.4.14}$$

Тот факт, что близкие к линейным целочисленные соотношения между частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ могут привести (и в самом деле приводят) к появлению если и не нулевых, то по крайней мере малых делителей, немедленно следует из результата применения оператора $P[f(t)]$ к функции $f(t) = \exp i(k_1y_1 + \ldots + k_ny_n)$, где $y_k = \omega_k t + y_k^0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Хейл (см. [49.2]) доказал существование почти-периодических решений системы уравнений

$$\dot{y} = Ay + q(t, y, \varepsilon) \tag{5.4.15}$$

при условии, что функции q — почти-периодические относительно t, а система $\dot{y} = Ay$ — некритическая, т. е. все собственные числа матрицы A имеют ненулевые вещественные части. Рассматриваемый здесь случай очевидно соответствует критической системе, хотя можно найти такое преобразование, которое делает все элементы диагональной матрицы вещественными. Для некритических случаев можно показать существование почти-периодических решений (относительно t) уравнений (5.4.15) с теми же частотами, что и у функции q. Для динамических систем этот результат очень важен при изучении возмущений почти-периодических решений. Если получающаяся вариационная система нормализована до членов второго порядка, и в результате получается некритическая система, то почти-периодические решения будут существовать в соответствующим образом ограниченной окрестности исходного решения. Аналогичные проблемы возникают и при исследовании устойчивости по Ляпунову, структурной устойчивости относительно возмущений, а также при изучении свойств инвариантных (или интегральных) многообразий. Основные результаты в этой области получили Дилиберто [27], Боголюбов и Митропольский [12]. Основные результаты, касающиеся условно-периодических решений, получили Малкин [56, 57] и Розе [71].

5. Нелинейный резонанс

До сих пор мы имели дело с задачей построения решения в окрестности положения равновесия, начиная эти построения с линейных гармонических колебаний, соответствующих нормальным колебаниям. *Теперь мы займемся более общей задачей, т. е.*

будем считать исходный осциллятор нелинейным в том смысле, что частоты зависят от амплитуд. Как упоминалось выше, некоторые аспекты этой проблемы рассмотрел Пуанкаре [68], осуществивший идеи, которые предложил Бохлин [13].

Изучение нелинейного осциллятора и выяснение эффектов влияния на него возмущений потребует точного знания всех особых точек фазового пространства, определения сепаратрис, седел и центров, а также областей колебательного или вращательного характера движения. Разумеется, все эти понятия широко известны, и их подробное описание можно найти, например, в работах [64, 74, 54, 65, 28, 2]. Эти книги являются основными также и для большинства других обсуждаемых в этой главе вопросов, хотя работы Мозера [61—63] наиболее близки к излагаемым здесь вопросам. Ряд ценных замечаний относительно рассматриваемых вопросов содержится в работе Кинера [52], но, к сожалению, она малодоступна.

Рассмотрим сначала автономную гамильтонову систему, определяемую гамильтонианом $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ в некоторой области D фазового пространства. В области D функция H имеет конечное число особых точек (типа центр или седло). Здесь сепаратрисы определяются просто как траектории, соединяющие (в предельном смысле) две седловые точки, которые могут в конечном счете совпасть. Во внутренней по отношению к сепаратрисе области всегда существует центр. Для систем с числом степеней свободы, большим единицы, некоторые из этих понятий сразу же обобщить нельзя. В предыдущих параграфах мы описали получение решений в виде рядов (в конечном счете, только формальных), описывающих движение в окрестности устойчивого положения равновесия. Здесь мы до некоторой степени расширим задачу, получив *формальные ряды, описывающие решение в окрестности центра* (т. е. в колебательной области) *и в окрестности вращательного движения* (т. е. во вращательной области). В первом случае одна или более угловых переменных ограничены теми или иными пределами в общем интервале, меньшем чем 2π, в то время как во втором случае все угловые переменные неограничены.

Мы предположим, что гамильтониан можно разбить на конечное или счетное число частей, т. е.

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots,$$

где для простоты будем считать $H_k = O(\varepsilon^k)$, хотя наличие «малого параметра» ε несущественно. Тем не менее, его использование упрощает вывод многих формул. Мы также будем рассматривать следующие предположения.

а) Движение с функцией Гамильтона H_0 является интегрируемым и, следовательно, если надо, ее можно записать в виде функции только импульсов (или координат).

б) Функции $H_k (k > 0)$ состоят из конечного числа членов вида

$$H_k = \sum_{\nu^k} A_k^{\nu^k}(p) \exp i\left(\nu_1^k q_1 + \ldots + \nu_n^k q_n\right).$$

в) Множества инвариантных многообразий систем уравнений с функциями Гамильтона H и H_0 соответственно не сильно отличаются друг от друга. Другими словами, предполагается, что существует непрерывное преобразование, переводящее одно множество в другое и такое, что при $\varepsilon \to 0$ оно становится тождественным.

Последнее предположение, по существу, совпадает с утверждением теоремы Колмогорова, в которой, разумеется, должна быть еще исключена линейная зависимость между частотами движения, соответствующего гамильтониану H_0. Так как эти частоты предполагаются непрерывно зависящими от амплитуд, то можно исключить такое множество начальных условий, которое приводит к различного рода «неприятностям». Вопрос теперь заключается в том, как можно описать движение в окрестности резонансной области (критической точки).

Сначала мы изучим системы с одной степенью свободы, т. е. системы, которые в принципе сводятся к квадратурам. Следовательно, это рассмотрение служит только для целей дальнейшего обобщения результатов.

Итак, пусть дан гамильтониан

$$H = H_0(p) + H_1(p, q) + H_2(p, q) + \ldots$$

со скалярными величинами p, q, а $H_k = O(\varepsilon^k)$, $H_k = \sum_{\nu} A_k^{\nu}(p) \exp(i\nu q)$.

Предполагается, что функция H аналитична в некоторой области D фазового пространства (p, q) и что при $\varepsilon = 0$ имеем $\partial^k H_0/\partial p^k = 0$ при $p = p_0 \in D$ и $k = 1, \ldots, m$ (m — конечное число).

Мы также предположим, что при $\varepsilon \neq 0$ гамильтониан имеет точку минимума, т. е. можно решить систему

$$\frac{\partial H(p, q)}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} = 0, \tag{5.5.1}$$

и ее гессиан будет отличен от нуля в окрестности некоторого решения этой системы (5.5.1). В силу сделанных предположений система (5.5.1) имеет по крайней мере два решения: максимум и минимум в области D[1]). Пусть точка минимума определяется

[1]) Это следует из периодичности гамильтониана относительно q (*прим. перев.*).

координатами $(\bar{p}, \bar{q})$, где

$$\bar{p} = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots, \quad \varepsilon \bar{q} = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^3 q_3 + \ldots \tag{5.5.2}$$

Из аналитичности функции H в области D следует, что существует такое $\delta = \delta(H, \varepsilon) > 0$, что при $|p - p_0| \leqslant \delta$, $p \in D$, и $0 \leqslant q < 2\pi$ выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial^k H_0(p)}{\partial p^k} \right| \leqslant \Omega_0 \varepsilon^{(m+1-k)s}, \tag{5.5.3}$$

где $s > 0$, а Ω_0 не зависит от ε, δ и $k = 1, \ldots, m$.

Наша цель заключается в исключении из гамильтониана переменной q, т. е. в приведении к нормальной форме в окрестности особой точки p_0. Эта цель будет еще больше расширена в следующих параграфах.

Пусть каноническое нормализующее преобразование определяется производящей функцией

$$S(P, q) = Pq + \Delta S(P, q),$$

где функция ΔS определена в некоторой области Ω по P при $0 \leqslant q < 2\pi$ и имеет порядок $O(\varepsilon^r)$ $(r > 0)$. Величина r зависит от s, от порядка α наинизших членов в H, содержащих угловую переменную q, и от m. Предполагается также, что новый гамильтониан $K(P)$ может быть записан в виде

$$K(P) = K_0(P) + \Delta K(P),$$

где функция $\Delta K(P)$ определена в области Ω и имеет некоторый порядок $O(\varepsilon^\beta)$ $(\beta > 0)$. Все вещественные числа s, r, β априори неизвестны и должны быть определены по числам α, m.

Уравнение энергии

$$H\left(P + \frac{\partial \Delta S}{\partial q}, q\right) = K(P), \tag{5.5.4}$$

разложенное в ряд Тейлора, дает

$$H_0(P) + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k H_0(P)}{\partial P^k} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial q}\right)^k + \ldots$$

$$\ldots + H_1(P) + \sum_{k=1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k H_1(P, q)}{\partial P^k} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial q}\right)^k + \ldots$$

$$\ldots + H_2(P) + \sum_{k=1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k H_2(P, q)}{\partial P^k} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial q}\right)^k + \ldots = K_0(P) + \Delta K(P), \tag{5.5.5}$$

так что, как и обычно, $K_0(P) = H_0(P)$. Следующее приближение в S (в ΔS) надо использовать для уничтожения q в $H_\alpha(P, q)$, если предполагается, что все функции $H_1, \ldots, H_{\alpha-1}$ не зависят

от q. В силу сделанных предположений получаем, что при достаточно малых ε функция ΔS должна удовлетворять уравнению

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k H_0(P)}{\partial P^k} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial q}\right)^k + H_\alpha(P, q) = K_\alpha(P), \qquad (5.5.6)$$

где $\alpha \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ — заданные целые числа. Кроме того, положим

$$\Delta K = K_1(P) + \ldots + K_{\alpha-1}(P) + K_\alpha(P) + \ldots, \qquad (5.5.7)$$

где

$$K_j(P) = H_j(P) \qquad (j = 1, \ldots, \alpha - 1).$$

Из уравнения (5.5.6) следуют соотношения

$$(m + 1 - k)s + kr = \alpha \qquad (k = 1, \ldots, m), \qquad (5.5.8)$$

так что необходимо выполнение равенства

$$r = s = \frac{\alpha}{m+1}, \qquad (5.5.9)$$

которое является решением уравнений (5.5.8) для всех k.

Эти условия определяют то, что мы называем областью колебаний, т. е. область, содержащую центр и ограниченную замкнутой сепаратрисой.

В случае $\alpha = 1$ и $m = 1$ мы получаем классический результат $r = s = 1/2$, т. е. разложения $S(P, q)$ и $K(P)$ ведутся по степеням квадратного корня из малого параметра ε. Идея разложения по степеням квадратного корня очень стара и, как уже упоминалось выше, вытекает из теории Вейерштрасса об умножении степенных рядов. Она естественным образом появилась из работ Бохлина [13] о колебательных движениях. В наших работах мы в основном полагали, что вблизи p_0 функция H ведет себя как

$$H \sim (p - p_0)^{m+1} f(p, q) + \varepsilon g(p, q),$$

где $f(p_0, q) \neq 0$. В классической постановке $m = 1$.

Хотя это и не является необходимым, мы опишем простейший и в действительности наиболее общий случай $\alpha = 1$, $m = 1$, т. е. можно записать

$$S = Pq + S_{1/2}(P, q) + S_1(P, q) + \ldots,$$

$$K = H_0(P) + K_1(P) + K_{3/2}(P) + K_2(P) + \ldots,$$

так как легко проверить, что $K_0(P) = H_0(P)$, $K_{1/2}(P) = 0$. Из (5.5.5) следует, что уравнение первого порядка для определения функций $S_{1/2}$ и K_1 имеет вид

$$H_0' \frac{\partial S_{1/2}}{\partial q} + \frac{1}{2} H_0'' \left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial q}\right)^2 + H_1(P, q) = K_1(P), \qquad (5.5.10)$$

где штрихи означают дифференцирование по P.

Для определения функции $K_1(P)$ мы потребуем, чтобы точка $(\bar{p}, \bar{q})$ была неподвижной точкой преобразования, определяемого функцией S. Так как функция $H_1(P, q)$ непрерывна и периодична по q, то мы можем найти K_1 в виде

$$K_1(P) = \min_{\{q\}} H_1(P, q) = H_1(P, \bar{q}_1(P)), \qquad (5.5.11)$$

где функция $\bar{q}_1(P)$ такова, что

$$\left.\frac{\partial H_1}{\partial q}\right|_{q=\bar{q}_1} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 H_1}{\partial q^2}\right|_{q=\bar{q}_1} > 0$$

для всех $P \in \Omega$. Ясно, что так как функция H аналитична, то $\bar{q} - \bar{q}_1(\bar{p}) = O(\varepsilon)$ или $\bar{q} - \bar{q}_1(p_0) = O(\varepsilon)$. Пусть

$$F_1(P, q) = H_1(P, q) - K_1(P),$$

так что, очевидно, функция $F_1(P, q)$ положительна при $P \in \Omega$ и $0 \leqslant q < 2\pi$, за исключением значений $q = \bar{q}_1(P)$, при которых она равна нулю. Функция $S_{1/2}$ теперь определяется из уравнения Бохлина

$$H_0' \frac{\partial S_{1/2}}{\partial q} + \frac{1}{2} H_0'' \left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial q}\right)^2 + F_1(P, q) = 0. \qquad (5.5.12)$$

При $q = \bar{q}_1(P)$ и $P = p_0$ получаем, что $\partial S_{1/2}/\partial q = 0$. Так как в этом приближении

$$p = P + \frac{\partial S_{1/2}}{\partial q}, \qquad Q = q + \frac{\partial S_{1/2}}{\partial P},$$

то из предыдущего равенства находим, что рассматриваемая неподвижная точка является центром, если $S_{1/2}$ удовлетворяет равенству $\partial S_{1/2}/\partial P = 0$ при $P = p_0$.

Для простоты перепишем уравнение (5.5.12) в виде

$$A \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{1}{2} B \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + F(P, q) = 0, \qquad (5.5.13)$$

где $F(P, q) > 0$, $F(P, \bar{q}_1(P)) = 0$, а $A = O(\varepsilon^{1/2})$ и B ограничено снизу при малом ε. При этих условиях получаем, что, так как

функция $F(P, q)$ является периодической по q, то она является также четной функцией этой переменной, т. е. $F(P, q) = F(P, -q)$ и, следовательно, ее можно записать в виде

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(P) \sin^{2j} q.$$

Пусть всегда выполнено равенство

$$\frac{A^2}{2B} \frac{1}{\sigma^2} = \max_{\{q\}} F(P, q). \tag{5.5.14}$$

Тогда функция σ, зависящая от P, больше нуля. Функция

$$\Psi(P, q) = \frac{2B\sigma^2}{A^2} F(P, q)$$

такова, что

$$\max_{\{q\}} \Psi(P, q) = 1 \qquad (q = \pm \pi/2),$$
$$\min_{\{q\}} \Psi(P, q) = 0 \qquad (q = 0),$$
$$\Psi(P, q) = \Psi(P, -q)$$

и она, следовательно, может быть записана в виде

$$\Psi(P, q) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(P) \sin^{2j} q,$$

где

$$\beta_j = \frac{2B\sigma^2}{A^2} \alpha_j(P).$$

Будем предполагать, что

$$\beta_1 \approx 1, \qquad |\beta_j| < 1 \qquad (j \geqslant 2).$$

Исключая тогда случай $A = 0$, получим

$$\frac{\partial W}{\partial q} = R(P) \left\{ -1 \pm \left[-\frac{1}{\sigma^2} \Psi(P, q) \right]^{1/2} \right\}, \tag{5.5.15}$$

где $R = A/B$. Мы также предположим, что $A > 0$. Случай $A < 0$ соответствует аналогичной формуле с заменой A на $|A|$ и соответствующей заменой знаков.

Очевидно, возможны следующие случаи:

$\sigma < 1$ — *колебания*,

$\sigma > 1$ — *вращения*,

$\sigma = 1$ — *сепаратриса или седловые точки*.

Так как в последнем случае требуется выполнение точного равенства, то он имеет значение только в предельном приближении к S, и то, если ряд для S сходится.

Если $\sigma < 1$, то функция $\Psi(P, q)$ не может достичь своего предельного значения (единицы), т. е. существуют такие значения $q = q_1$, $q = q_2$, что

$$\Psi(P, q_1) = \Psi(P, q_2) = \sigma^2,$$

и в рассмотренном выше случае $q_1 = -q_2$. Значения q_1 и q_2 являются граничными точками колебаний. Если $\sigma > 1$, то функция $\Psi(P, q)$ принимает все возможные значения, угол q неограничен и $\dot{q}$ имеет (в среднем) постоянный знак.

Теперь введем модуль $k = \min(\sigma, \sigma^{-1})$ и эллиптический интеграл u, определяемый формулой

$$\Psi(P, q) = k^2 \operatorname{sn}^2 u = \sigma^2 \operatorname{sn}^2 u \quad \text{(колебания)}$$

или

$$\Psi(P, q) = \operatorname{sn}^2 u \quad \text{(вращения)},$$

где $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби sn с модулем k и амплитудой φ, которая определяется формулой

$$\operatorname{am} u = \varphi_L = \arcsin\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\Psi}\right) \quad \text{(колебания)}$$

или формулой

$$\operatorname{am} u = \varphi_C = \arcsin\left(\sqrt{\Psi}\right) \quad \text{(вращения)}.$$

В обоих случаях максимальное значение амплитуды равно $\pi/2$ и совпадает с $q = q_1$ или $q = q_2$ (колебания) или с $q = \pi/2$ (вращения). Переменная u совершает полный оборот с периодом $4K$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода $u\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$. Модуль k зависит от P.

Уравнение для W теперь можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)_L = R(-1 + \operatorname{cn} u)$$

или

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)_C = R(-1 + \operatorname{dn} u)$$

в случае колебаний и вращений соответственно. Знаки плюс или минус, разумеется, несущественны, так как функция $\operatorname{cn} u$ изменяет знак через каждую половину периода $2K$, при вещественных значениях u функция $\operatorname{dn} u$ всегда положительна.

Рассмотрим случай, когда Ψ — четная функция и $q_2 = -q_1$, т. е. имеются симметричные колебания относительно колебательного центра. Отсюда следует, что

$$\Psi_L(P, q) = \sigma^2 \operatorname{sn}^2 u = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(P) \sin^{2j} q$$

и

$$(\sin^2 q)_C = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \operatorname{sn}^{2(2j+1)} u.$$

В обоих случаях мы можем написать

$$\sin^2 q = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \operatorname{sn}^{2(2j+1)} u,$$

где $|B_j| < B_0$ $(j \geqslant 1)$, $B_0 \approx \sigma^2$ в случае колебаний и $B_0 \approx 1$ в случае вращений. Мы также находим, что

$$\sin q = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \operatorname{sn}^{4j+1} u,$$

где $C_0(L) = \sigma$ и $C_0(C) = 1$. Кроме того, $|C_j| < C_0$ при $j \geqslant 1$. Выражение для $\cos q$ зависит от типа движения. В общем случае мы имеем

$$\cos^2 q = 1 - \sin^2 q = 1 - (B_0 \operatorname{sn}^2 u + B_1 \operatorname{sn}^6 u + \ldots).$$

В случае колебаний $B_0 \approx \sigma^2 = k^2$, так что добавляя и вычитая величину $\sigma^2 \operatorname{sn}^2 u$, находим

$$\cos^2 q = \operatorname{dn}^2 u - [(B_0 - \sigma^2) \operatorname{sn}^2 u + B_1 \operatorname{sn}^6 u + \ldots],$$

и все коэффициенты $|B_0 - \sigma^2|$, $|B_1|$, ... малы по сравнению с единицей. Так как $k = \sigma < 1$, то из выписанных выше рядов мы получим сходящееся выражение

$$(\cos q)_L = \operatorname{dn} u \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \operatorname{sn}^{2j} u\right],$$

где $|D_j| < 1$.

В случае вращений $B_0 \approx 1$, так что добавляя и вычитая из $\cos^2 q$ величину $\operatorname{sn}^2 u$, находим

$$\cos^2 q = \operatorname{cn}^2 u - [(B_0 - 1) \operatorname{sn}^2 u + B_1 \operatorname{sn}^6 u + \ldots],$$

где коэффициенты $|B_0 - 1|$, $|B_1|$, ... малы по сравнению с

единицей. Следовательно,

$$(\cos q)_C = \operatorname{cn} u \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij} \operatorname{tn}^{2i} u \operatorname{sn}^{4j} u + 1 \right],$$

где $|E_{ij}| < 1$.

Наконец, рассматривая ряды Фурье для $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{dn} u$, можно записать функции $\cos q$, $\sin q$ и $\Psi(P, q)$ в виде рядов Фурье по u. Функция $q = q(u)$ легко получается с помощью выписанных выше соотношений и тождества

$$\frac{d}{du}(\sin q) = \cos q \frac{dq}{du}.$$

В случае колебаний находим

$$\frac{dq}{du} = \operatorname{cn} u \cdot \sum_{j=1}^{\infty} F_j \operatorname{sn}^{2j} u,$$

где $F_0 \approx \sigma$. Отсюда следует выражение
$W_L =$

$$= -Rq + R \int \operatorname{cn} u \left(\frac{dq}{du} \right)_L du = -R_q + R \sum_{j=0}^{\infty} F_j \int \operatorname{sn}^{2j} u \operatorname{cn}^2 u \, du,$$

которое в общем случае состоит из эллиптических интегралов, представленных сходящимися рядами Фурье относительно $\sin(j\pi u/2K)$ плюс линейный член по u. Аналогичный характер имеет связь между q_L и u, т. е.

$$q_L = \sum_{j=0}^{\infty} F_j \int \operatorname{cn} u \operatorname{sn}^{2j} u \, du,$$

где $F_0 \approx \sigma$. Существенно, что переменная p находится из соотношения

$$p = P + \frac{\partial S_{1/2}}{\partial q} + O(\varepsilon),$$

и в случае колебаний

$$p = P + R(-1 + \operatorname{cn} u) = P - \frac{H_0'}{H_0''} + \frac{H_0'}{H_0''} \operatorname{cn} u,$$

так что p колеблется около среднего значения

$$\overline{p} = P - \frac{H_0'(P)}{H_0''(P)}$$

и достигает максимального значения при $u = 0$ или $u = 4K$, и минимального значения при $u = 2K$.

В случае вращений находим

$$\left(\frac{dq}{du}\right)_C = \operatorname{dn} u \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} G_{ij} \operatorname{tn}^{2i} u \operatorname{sn}^{4j} u,$$

где $G_{00} \approx 1$ и $|G_{ij}| < 1$ для всех других индексов. Следовательно, имеем выражение

$$W_C = -Rq + R \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} G_{ij} \int \operatorname{tn}^{2i} u \operatorname{sn}^{4j} u \operatorname{dn}^2 u \, du,$$

которое также состоит из эллиптических интегралов, представляемых рядами Фурье по u. В этом случае находим

$$p = P - R(1 - \operatorname{dn} u) = P - \frac{H_0'}{H_0''} + \frac{H_0'}{H_0''} \operatorname{dn} u,$$

и среднее значение p определяется формулой

$$\overline{p} = P - \frac{H_0'}{H_0''} + \frac{H_0'}{H_0''} \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{2},$$

где

$$k^2 = \frac{1}{\sigma^2} = [\Psi(P, q_1)]^{-1} = [\Psi(P, q_2)]^{-1}.$$

Максимальное значение p соответствует величине $u = 0$, $2K$, $4K$ $(q = 0)$, а минимальное — $u = K$, $3K$ $(q = q_1$ или $q = q_2)$.

6. Асимптотические разложения до любого порядка

Чтобы сделать законным формальный подход вычисления приближения первого порядка, который описан в предыдущем параграфе, надо показать, как получить решения для высших приближений. Для приближения любого порядка мы потребуем, чтобы функция ΔS была стационарной в колебательном центре.

Уравнение для членов порядка $\varepsilon^{3/2}$ будет иметь вид

$$\left(H_0' + H_0'' \frac{\partial S_{1/2}}{\partial q}\right) \frac{\partial S_1}{\partial q} + \frac{1}{6} H_0''' \left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial q}\right)^3 + H_1' \frac{\partial S_{1/2}}{\partial q} = K_{3/2}(P).$$

Тем не менее, мы отметим, что в колебательном центре коэффициент при $\partial S_1/\partial q$ обращается в нуль и функция S_1 становится в этой точке неопределенной. Следовательно, в уравнение мы должны добавить член наименьшего порядка (большего или равного

3/2), который содержит $(\partial S_1/\partial q)^2$. Таким образом, мы перепишем вышеприведенное уравнение в виде

$$\left(H_0' + H_0'' \frac{\partial S_{1/2}}{\partial q}\right)\frac{\partial S_1}{\partial q} + \frac{1}{2} H_0'' \left(\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2 + U_{3/2}(P, q) = K_{3/2}(P), \quad (5.6.1)$$

где член $U_{3/2}$ определяется из предыдущего уравнения. Так как член $H_{3/2}$ отсутствует, то ошибка в определении $\bar{q}_1(P)$ (точка минимума функции $U_{3/2}(P, q)$) имеет порядок малости $O(\varepsilon^{1/2})$ по сравнению с величинами из рассматриваемого уравнения и, следовательно, допустима. Таким образом, мы определяем

$$K_{3/2}(P) = U_{3/2}(P, \bar{q}_1(P)).$$

Положим

$$U_{3/2} - K_{3/2} = F_{3/2}(P, q).$$

Определяя теперь

$$\Delta S^{(1)} = S_{1/2} + S_1 \quad (5.6.2)$$

и

$$F^{(3/2)} = F_1 + F_{3/2},$$

из уравнений (5.5.12) и (5.6.1) получаем уравнение

$$H_0' \frac{\partial \Delta S^{(1)}}{\partial q} + \frac{1}{2} H_0'' \left(\frac{\partial \Delta S^{(1)}}{\partial q}\right)^2 + F^{(3/2)}(P, q) = 0, \quad (5.6.3)$$

из которого, так же как и в первом приближении, находим $\Delta S^{(1)}$ или S_1.

Вдали от колебательного центра квадратичный член (т. е. член $O(\varepsilon^2)$) в (5.6.1) не вносит ошибки, так как он имеет более высокий порядок. По мере приближения к центру каждый член в (5.6.1) стремится к нулю как $\varepsilon^{1/2}$. Следовательно, в пределе $F_{3/2} = 0$, и координаты центра не изменились. Тем не менее, амплитуда колебаний может измениться на величину, порядок которой может быть больше ε. Этого не случится в следующем приближении при определении $S_{3/2}$, так как в общем случае $H_2 \neq 0$. Уравнение для следующего приближения будет иметь вид

$$H_0' \frac{\partial \Delta S^{(3/2)}}{\partial q} + \frac{1}{2} H_0'' \left(\frac{\partial \Delta S^{(3/2)}}{\partial q}\right)^2 + U^{(2)}(P, q) = K^{(2)}(P), \quad (5.6.4)$$

и координаты колебательного центра теперь изменятся на величину $\bar{q}_2(P)$, являющуюся решением уравнений

$$\frac{\partial U^{(2)}(P, q)}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U^2(P, q)}{\partial q^2} > 0,$$

а в силу исходного предположения об аналитичности имеем

$$\bar{q} - \bar{q}_2 = O(\varepsilon^2).$$

Предыдущие приближения соответствующим образом исправляются, и уравнение (5.6.4) дает улучшенное решение. Можно теперь легко показать, что процесс может быть повторен до приближения любого порядка, так что в общем случае

$$H_0' \frac{\partial \Delta S^{(n)}}{\partial q} + \frac{1}{2} H_0'' \left(\frac{\partial \Delta S^{(n)}}{\partial q}\right)^2 + F^{(n+1/2)}(P, q) = 0.$$

Если процесс сходится, то мы, очевидно, получаем

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial q} = \frac{H_0'}{H_0''}(-1 + \operatorname{cn} u)$$

или

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial q} = \frac{H_0'}{H_0''}(-1 + \operatorname{dn} u)$$

соответственно, если

$$2\frac{H_0''}{(H_0')^2} \max_q F^\infty(P, q) = \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{k^2} > 1$$

или

$$2\frac{H_0''}{(H_0')^2} \max F^\infty(P, q) = \frac{1}{\sigma^2} = k^2 < 1.$$

Только в таком предельном приближении, если оно существует, можно определить асимптотическое движение. Сепаратриса определяется условием

$$2\frac{H_0''}{(H_0')^2} \max_q F^\infty(P, q) = 1.$$

В этом случае соответствующее преобразование, очевидно, имеет вид

$$2\frac{H_0''}{(H_0')^2} F^\infty(P, q) = \operatorname{th}^2 u,$$

что дает

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial q} = \frac{H_0'}{H_0''}(-1 + \operatorname{sch} u),$$

и точка $q = 0$ соответствует точке $u = \infty$. Отсюда следует, что

$$p = P - \frac{H_0'}{H_0''}(1 - \operatorname{sch} u),$$

и предельное значение p определяется формулой

$$p_{\lim} = P - H_0'/H_0'',$$

которая в точности совпадает с формулой для среднего значения в колебательном движении.

В общем случае, как уже говорилось, сходимости рядов можно добиться только для конечных интервалов времени $T = O(\varepsilon^{-1})$ независимо от того, сколько приближений учитывается (см. [52]).

7. Общая теория и идеальная резонансная проблема

Рассмотрим гамильтониан

$$H = H_0(x) + H_1(x, y) + H_2(x, y) + \ldots = \text{const},$$

где H_1, H_2, ...— периодические функции y с периодом 2π. Рассмотрим топологию фазовой плоскости (y, x) с траекториями $H(x, y) = \text{const}$. Предположим, что в этой плоскости имеется центр и две седловые точки, которые после соответствующего преобразования мы будем считать расположенными следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{центр:} && x = \bar{x}, \quad y = \pi; \\ &\text{седла:} && x = \bar{x}, \quad y = 0 \quad (2\pi). \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Если теперь рассмотреть точку x_0 и тейлоровское разложение H вблизи этой точки, то мы найдем

$$H = H_0(x_0) + H_0'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} H_0''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + H_1(x_0, y) + H_1'(x_0, y)(x - x_0) + \ldots = \text{const}, \tag{5.7.2}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x. Здесь мы последуем подходу, основные черты которого предложены в работах Хори [45] и который затем детально развит в работах Жуппа [47], [48]. Мы здесь также будем предполагать, что, как и обычно, функции $H_p(x, y)$ при $p \geqslant 1$ можно разложить в ряды Фурье (которые мы будем считать быстро сходящимися) и что H является четной функцией y, хотя последнее ограничение можно довольно просто устранить. Отсюда следует, что функции $H_p(x, y)$ при $p \geqslant 1$ можно записать в виде

$$H_p(x, y) = \sum_{n=0} A_p^n(x) \cos ny. \tag{5.7.3}$$

Мы рассмотрим классический случай $|x - x_0| = O(\varepsilon^{1/2})$. Это связано с поведением функции $H_0(x)$ в окрестности точки x_0, как уже упоминалось в предыдущих параграфах. Отсюда следует, что «главной» частью функции H, за исключением константы, является функция

$$\widetilde{H}_1 = B\delta + \frac{1}{2} B'\delta^2 + A_1^1(x_0) \cos y = B\delta + \frac{1}{2} B'\delta^2 + A \cos y, \tag{5.7.4}$$

где A, B, B' — постоянные величины, а $\delta = x - x_0$. Мы будем считать $A > 0$. Случай $A < 0$ получается из рассмотренного ниже случая очевидными модификациями. Оставшаяся часть гамильтониана может быть записана в виде ряда Фурье, коэффициентами которого являются полиномы относительно δ:

$$H = \widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2 + \widetilde{H}_3 + \ldots \tag{5.7.5}$$

Каждая функция $\widetilde{H}_p$ имеет конечное число членов относительно δ, но тригонометрических членов может быть бесконечно много. Будет также показано, что функцию (5.7.5) можно привести к виду (5.7.4), который соответствует так называемой *идеальной резонансной проблеме*. Такая редукция будет вкратце описана в конце настоящего параграфа.

Рассмотрим теперь систему уравнений, соответствующую гамильтониану (5.7.4), который перепишем в виде

$$\widetilde{H}_1 = F = B\delta + \frac{1}{2}B'\delta^2 + A\cos y = C = \text{const}, \tag{5.7.6}$$

пренебрегая членами порядка выше $O(\varepsilon)$. Отметим, что мы считаем максимальное значение B величиной порядка $O(\varepsilon^{1/2})$, величина B' конечна и не мала, т. е. порядка $O(1)$, а $A = O(\varepsilon)$. Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (5.7.6), имеют вид

$$\dot{\delta} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial F}{\partial \delta}. \tag{5.7.7}$$

Очевидно, что уравнения (5.7.7) имеют равновесные решения

$$\delta = -\frac{B}{B'}, \qquad y = 0,\ \pi,\ (2\pi),$$

и также очевидно, что решение $y = \pi$, $\delta = -B/B'$ является центром, в то время как решения $y = 0$, 2π и $\delta = -B/B'$ являются неустойчивыми (седловыми) точками. Пусть при $t = 0$ имеем $\delta = 0$, $y = \pi$. Определим $\eta' = y - \pi$. Тогда гамильтониан (5.7.6) при $C = -A + \text{const}$ принимает вид

$$F = B\delta + \frac{1}{2}B'\delta^2 + 2A\sin^2\frac{1}{2}\eta', \tag{5.7.8}$$

который является новым «интегралом энергии». Наконец, пусть даны формулы

$$2A = \omega^2 = O(\varepsilon), \qquad \delta = \frac{1}{2}\xi - \frac{B}{B'}, \qquad \eta' = 2\eta,$$

описывающие каноническое преобразование $(\delta,\ \eta') \to (\xi,\ \eta)$.

Отсюда следует, что

$$F = \xi^2 + \omega^2 \sin^2\eta, \tag{5.7.9}$$

где в соответствии с вышеупомянутыми начальными условиями при $t = 0$ имеем $\eta = 0$ и $\xi = 2B/B'$, т. е. значение F вполне определено. Теперь становится ясна важность аналогии с маятником.

Положениями равновесия системы с гамильтонианом (5.7.9) являются точки:

устойчивая (центр): $\eta = 0, \quad \xi = 0;$

неустойчивые (седла): $\eta = \pm\pi/2, \quad \xi = 0,$

и мы считаем $|\xi| = O(\varepsilon^{1/2})$.

Если это же преобразование проделать над введенным выше полным гамильтонианом, то мы найдем

$$H = F + \sum_k F_k(\xi, 2\eta), \tag{5.7.10}$$

где функции $F_k(\xi, 2\eta)$ являются рядами Фурье относительно 2η и их коэффициенты являются полиномами относительно ξ.

Решение главной (идеальной) задачи, соответствующей функции Гамильтона F, хорошо известно и получено с помощью метода Цейпеля (см., например, [48]), а аналогия с маятником детально разработана Кинером [52]. В первой из упомянутых работ приводится решение для приближений любого порядка, хотя в общем случае это приводит к появлению гиперэллиптических интегралов. Решение для приближения первого порядка (члены $O(\varepsilon^{1/2})$) в основном такое же, как и в § 5 настоящей главы.

Основное отличие от описанного выше подхода заключается в том, что вместо использования колебательного центра исходной системы в качестве начальной точки для получения разложений вида (5.7.2) можно использовать произвольную точку x_0. *Эта точка x_0 может быть взята и из области колебаний, и из области вращений.* Однако ее нельзя взять на сепаратрисе или принять за нее неустойчивые точки, так как в этих случаях разложение не может быть сходящимся и в действительности оно лишено смысла. Эти движения можно получить только как предельные случаи вращений или колебаний. Такие предельные случаи первоначально изучались Пуанкаре [68], а самые последние исследования описаны в статье Гарфинкеля и др. [29, 30].

Интересно посмотреть, как эту задачу можно решить с помощью рядов Ли. Рассмотрим, например, подход Ли — Хори. Главной частью в H является функция F, и она является га-

мильтонианом дополнительной системы

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \eta} = \omega^2 \sin 2\eta, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \xi} = -2\xi, \tag{5.7.11}$$

так что мы получаем уравнение маятника

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\omega^2 \sin 2\eta = 0.$$

Различие между колебательным, вращательным или асимптотическим характером движения в конечном счете определяется начальными условиями или, по-другому, значением интеграла энергии (5.7.9) и значением ξ или η в некоторый момент τ. Хорошо известно из теории простого маятника, что значение энергии определяет тип движения. Одинаковое описание всех типов движения, как приближение к некоторому истинному движению, определяемому возмущениями (5.7.10) гамильтониана F, имеет сомнительное значение. Эти возмущения можно надлежащим образом подобрать в областях колебаний и вращений, т. е. достаточно далеко от сепаратрисы. Возмущения асимптотического движения или седловых точек представляют собой нечто иное и должны рассматриваться особым образом. Непохоже, чтобы этот тип движения сохранялся, в то время как колебания или вращения по всей видимости сохраняются при достаточно малых возмущениях.

Теорема Арнольда дает нам объяснение этому эффекту. Невозмущенная орбита в этом случае описывается эллиптическими функциями или интегралами, и можно будет использовать метод теории возмущений, но, поскольку используется «лучшее» невозмущенное движение, чем просто положение равновесия (которое обязательно должно быть центром), то можно ожидать, что метод последовательных приближений имеет большие шансы на сходимость. В описываемой здесь формулировке уравнения Ли — Хори в точности совпадают с этими уравнениями для нерезонансных систем. Понижение порядка при дифференцировании по ξ в точности компенсируется умножением на η, которое после подстановки решения дополнительной системы приводит к появлению малого сомножителя $O(\varepsilon^{1/2})$. В самом деле, можно трактовать выражение (5.7.10) как обычный ряд с $F = F_0$ и с остаточными членами увеличивающегося порядка, приняв в конечном счете за порядок дробь $p/2$, где p — целое число. Характер разложения очень похож на разложения из работы Жуппа [48, 49], и здесь его не стоит повторять. До членов второго порядка это разложение можно найти в работе [49].

Приведение общего случая, упомянутое в начале параграфа, к идеальному виду (5.7.9) может быть осуществлено следующим

образом (см. [36]). Пусть

$$H = A_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x) \cos jy = H(x, y), \qquad (5.7.12)$$

где величины $A_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ предполагаются ограниченными малыми порядка ε. Как обычно, мы запишем

$$A_j(x) = O(\varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

при x из некоторого интервала $D \in R$. Мы также положим в этом интервале $A_0(x) = O(1)$, $A_0'(x) = O(\varepsilon^{1/2})$, а переменная y определена на отрезке $[0, 2\pi]$. *Идеальная резонансная проблема определяется гамильтонианом*

$$H_I = A(x) + B(x) \cos y, \qquad (5.7.13)$$

и при некоторых условиях существует каноническое преобразование, определяемое формальными рядами, которое приводит гамильтониан (5.7.12) *к виду* (5.7.13), т. е. такое каноническое преобразование $(x, y) \to (\xi, \eta)$, что

$$H(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = K(\xi, \eta) = P(\xi) + Q(\xi) \cos \eta. \quad (5.7.14)$$

Вначале допустим, что выполнены условия:

а) Для любого $x \in D$ и $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ существуют только два решения $y = 0$ и $y = \pi$ уравнения $\dot{x} = -H_y = 0$.

б) $A_0(x) > 0$, $A_1(x) > 0$ при $x \in D$.

в) Максимальное значение M функции H достигается для $x \in D$ при $y = 0$.

г) $$M(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x) > 0.$$

д) Минимальное значение m функции H достигается для $x \in D$ при $y = \pi$.

е) $$m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j A_j(x) = 0.$$

ж) Производящая функция преобразования $(x, y) \to (\xi, \eta)$ имеет классический асимптотический вид

$$S(\xi, y) = \xi y + S_{1/2}(\xi, y) + S_1(\xi, y) + \ldots$$

з) Коэффициенты $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ имеют аналогичный асимптотический вид

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_{1/2}(\xi) + P_1(\xi) + \ldots,$$
$$Q(\xi) = Q_0(\xi) + Q_{1/2}(\xi) + Q_1(\xi) + \ldots$$

Приравнивая члены одинакового порядка в тейлоровском разложении уравнения

$$H\left(\xi+\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y}+\ldots, y\right)=K\left(\xi, y+\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}+\ldots\right),$$

мы найдем

$$O(1): \qquad P_0(\xi)=A_0(\xi), \quad Q_0(\xi)=0,$$

$$O(\varepsilon^{1/2}): \quad P_{1/2}(\xi)=Q_{1/2}(\xi)=0,$$

$$O(\varepsilon): \qquad A_0'(\xi)\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y}+\frac{1}{2}A_0''(\xi)\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y}\right)^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}A_j(\xi)\cos jy=P_1(\xi)+Q_1(\xi)\cos y,$$

$$O(\varepsilon^{3/2}): \qquad \left[A_0'(\xi)+A_0''(\xi)\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y}\right]\frac{\partial S_1}{\partial y}+\frac{1}{2}A_0''(\xi)\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{6}A_0'''(\xi)\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y}\right)^3+\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y}\sum_{j=1}^{\infty}A_j'(\xi)\cos jy=$$

$$=P_{3/2}(\xi)+Q_{3/2}(\xi)\cos y-Q_1(\xi)\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\sin y$$

и т. д. В общем случае рассматриваемые уравнения имеют вид

$$\left[A_0'(\xi)+A_0''(\xi)\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y}\right]\frac{\partial S_n}{\partial y}+\frac{1}{2}A_0''(\xi)\left(\frac{\partial S_n}{\partial y}\right)^2=$$

$$=P_{n+1/2}(\xi)+Q_{n+1/2}(\xi)\cos y+R_{n+1/2}(\xi, y), \qquad (5.7.15)$$

где $n=1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ и где функции $R_{n+1/2}(\xi, y)$ зависят от уже известных предыдущих приближений. Привлекая члены более высокого порядка, мы можем записать уравнение (5.7.15) в виде

$$\left[A_0'(\xi)+A_0''(\xi)\frac{\partial S^{(n-1/2)}}{\partial y}\right]\frac{\partial S_n}{\partial y}+\frac{1}{2}A_0''(\xi)\left(\frac{\partial S_n}{\partial y}\right)^2=$$

$$=P_{n+1/2}(\xi)+Q_{n+1/2}(\xi)\cos y+R_{n+1/2}(\xi, y), \qquad (5.7.16)$$

где

$$S^{(p)}=S_{1/2}+S_1+S_{3/2}+\ldots+S_p.$$

Суммируя уравнения (5.7.16) от $n=1$ до $n=p$ и прибавляя еще уравнение для членов порядка $O(\varepsilon)$, при $p=1/2, 1, 3/2, \ldots$

находим, что

$$A_0'(\xi)\frac{\partial S^{(p)}}{\partial y}+\frac{1}{2}A_0''(\xi)\left(\frac{\partial S^{(p)}}{\partial y}\right)^2=P^{(p+1/2)}(\xi)+Q^{(p+1/2)}(\xi)\cos y+$$
$$+R^{(p+1/2)}(\xi,y),\qquad(5.7.17)$$

где

$$P^{(k)}=P_1+P_{3/2}+\ldots+P_k,$$
$$Q^{(k)}=Q_1+Q_{3/2}+\ldots+Q_k,$$
$$R^{(k)}=R_{1/2}+R_1+\ldots+R_k.$$

Рассмотрим случай $p=1/2$. Решая уравнение относительно $(S_{1/2})_y$, находим

$$(S_{1/2})_y=-\frac{A_0'}{A_0''}\pm\left\{\left(\frac{A_0'}{A_0''}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{A_0''}\left[P_1-(A_1-Q_1)\cos y-\sum_{j=2}^{\infty}A_j\cos jy\right]\right\}^{1/2}$$

и выберем

$$P_1(\xi)=Q_1(\xi)=A_1(\xi),$$

так что

$$(S_{1/2})_y=-\frac{A_0'}{A_0''}\pm\left\{\left(\frac{A_0'}{A_0''}\right)^2+\frac{2}{A_0''}\left[2A_1\cos^2\frac{y}{2}-\sum_{j=1}^{\infty}A_j\cos jy\right]\right\}^{1/2}.$$

Если $y=0$, то величина, имеющая степень 1/2, приобретает вид

$$\left(\frac{A_0'}{A_0''}\right)^2+\frac{2}{A_0''}[2A_1-M(\xi)].$$

Если эта величина положительна, то функция $(S_{1/2})_y$ всегда вещественна, и переменная y описывает вращения. Если она отрицательна, то величина y не может достичь значения $y=0$, и эта величина описывает колебания около значения $y=\pi$. Если $y=\pi$, то эта величина принимает вид $(A_0'/A_0'')^2$, и знак в рассматриваемом выражении надо выбрать так, чтобы $(S_{1/2})_\xi=0$ в этой же точке. Этим условиям легко удовлетворить, если $(S_{1/2})_y$ представляет собой ряд из синусов целых кратностей величины y, но в общем случае этого не будет.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{y} = H_x = 0,$$

т. е. уравнение

$$A_0'(x) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j'(x) \cos jy = 0.$$

При $y = \pi$ имеем уравнение

$$A_0'(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j A_j'(\bar{x}) = 0,$$

и, так как входящие в него величины имеют разные порядки, то приближенно (с точностью выше $\varepsilon^{1/2}$) решение будет определяться условием:

а) $\bar{x} \approx \bar{x}_{1/2}$, где $A_0'(\bar{x}_{1/2}) = 0$; точка $(\bar{x},\ y=\pi)$ является центром колебаний, а точка $(\bar{x}_{1/2},\ y = \pi)$ дает первое приближение для его координат.

При $y = 0$ имеем уравнение

$$A_0'(x^*) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j'(x^*) = 0,$$

и опять:

б) $x^* = \overset{*}{x}_{1/2}$, где $A_0'(\overset{*}{x}_{1/2}) = 0$; точка $(x^*,\ y = 0)$ является седловой точкой, а точка $(\overset{*}{x}_{1/2},\ y = 0)$ дает первое приближение для ее координат.

При $y = \pi$, $x = \bar{x}$ первое приближение функции $S = \xi y + S_{1/2}$ соответствует тождественному преобразованию, так как $(S_{1/2})_y = 0$, а $(S_{1/2})_\xi = 0$ по построению.

В следующем приближении для получения $(S_1)_y = 0$ мы опять выберем $P_{3/2} = Q_{3/2}$, и теперь функция $Q_{3/2}$ определяется по коэффициентам известных членов при $\cos y$, т. е.

$$Q_{3/2}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{6} A_0''' \left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y} \right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial S_{1/2}}{\partial y} \sum_{j=1}^{\infty} A_j'(\xi) \cos jy + Q_1(\xi) \frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi} \sin y \right\} \cos y \, dy.$$

В общем случае выбор этих функций будет таким:

$$P^{(k)}(\xi) = Q^{(k)}(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^{(k)}(\xi, y)\, dy,$$

и по индукции легко установить, что $R^{(k)}(\xi, \pi) = 0$ и

$$\frac{\partial S^{(p)}}{\partial y} = -\frac{A_0'}{A_0''} \pm \left\{\left(\frac{A_0'}{A_0''}\right)^2 + \frac{2}{A_0''}\left[2P^{(p+1/2)}\cos^2\frac{y}{2} + R^{(p+1/2)}(\xi, y)\right]\right\}^{1/2},$$

а при $y = \pi$ получаем $(S^{(p)})_y = 0$.

Колебательный, вращательный или асимптотический характер движения на каждом шаге будет определяться в соответствии с тем, будет ли выражение

$$\left(\frac{A_0'}{A_0''}\right)^2 + \frac{2}{A_0''}\left[2P^{(p+1/2)}(\xi) + R^{(p+1/2)}(\xi, 0)\right]$$

больше, меньше или равно нулю соответственно, хотя наличие асимптотического случая, если он и имеет место, можно установить только в пределе при $p \to \infty$. Теперь определим формальный ряд для функции $S(\xi, y)$, которая соответствует преобразованию, приводящему гамильтониан к виду

$$K(\xi, \eta) = (P_0 + P_1 + P_{3/2} + \ldots) + (Q_1 + Q_{3/2} + \ldots)\cos\eta =$$
$$= A_0(\xi) + 2P(\xi)\cos^2\frac{\eta}{2}, \qquad (5.7.18)$$

где $A_0(\xi) = O(1)$, $A_0'(\xi) = O(\varepsilon^{1/2})$, $P(\xi) = O(\varepsilon)$.

При $\eta = \pi$ функция $K(\xi, \eta)$ имеет минимум, если, разумеется, считать $A_0(\xi) > 0$, $P(\xi) > 0$. Такой вид гамильтониана в точности определяет идеальную резонансную проблему.

Здесь мы описали самую простую ситуацию, которая только может встретиться. Очевидно возможна более сложная топология фазовой плоскости (x, y), если имеется некоторое количество n центров и более чем $2n - 1$ седловых точек. По-видимому, в более общем случае какое-то обсуждение становится невозможным.

Следующим по простоте после рассмотренного случая является случай, когда имеется более общая идеальная резонансная проблема и имеется два центра и три седловых точки на отрезке $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$. Здесь главная часть гамильтониана имеет вид

$$F = A_0(x) + A_1(x)\cos y + B_1(x)\cos 2y, \qquad (5.7.19)$$

где при $x \in D$ имеем $A_0'(x) = O(\varepsilon^{1/2})$, а $A_1(x) = O(\varepsilon)$, $B_1(x) = O(\varepsilon)$. Этот случай детально рассмотрен в работе Джакальи [36].

8. Несколько степеней свободы

До сих пор мы рассматривали задачи с одной степенью свободы. В действительности в общем случае система с m рационально независимыми друг от друга резонансными соотношениями между частотами может быть сведена к системе с m степенями свободы. Если $m > 1$, то полное рассмотрение этой задачи маловероятно. Общепризнано, что очень мало известно о системах с двумя степенями свободы и, как упоминалось выше, интерпретация критических точек является крайне громоздкой. Однако в самом общем виде проблему можно сформулировать следующим образом.

Опять рассмотрим систему уравнений с гамильтонианом

$$H(x, y) = H_0(x) + H_1(x, y) + \ldots, \tag{5.8.1}$$

где при $k \geqslant 1$

$$H_k = \sum_p A_k^p(x) \exp(ip^{\mathrm{T}}y), \tag{5.8.2}$$

а число членов в каждой функции H_k предполагается конечным. Как обычно, предположим, что функция H аналитична при $x \in D$, где D — некоторое n-мерное дифференцируемое многообразие. Ряд (5.8.1) предполагается равномерно сходящимся как степенной ряд по «малому параметру» ε, который всегда служит для упрощения выкладок, хотя в некоторых примерах можно показать справедливость (сходимость) формальных рядов, строящихся при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало. Мы будем считать систему с гамильтонианом (5.8.1) неприводимой в том смысле, что все угловые переменные описывают медленное движение. Все быстрые переменные системы предполагаются исключенными тем или иным способом (см. главу II). Предположение о нелинейности резонанса теперь соответствует рассмотрению особых точек системы уравнений

$$\dot{x} = -H_y^{\mathrm{T}}, \qquad \dot{y} = H_x^{\mathrm{T}},$$

т. е. решений $x = x^0$, $y = y^0$ уравнений $H_x = 0$, $H_y = 0$. Решения такого типа являются «центрами» «характеристический многочлен системы уравнений в первых вариациях имеет только чисто мнимые корни) или «седлами» (характеристический многочлен имеет по крайней мере одну пару корней с ненулевой вещественной частью; один из корней этой пары имеет отрицательную вещественную часть, а другой должен иметь положительную). Как хорошо известно, «центры» не обязательно являются устойчивыми точками. «Седла», разумеется, неустойчивы. Однако

для консервативных систем недавно было доказано, что теорема, обратная теореме Лагранжа — Дирихле, справедлива при достаточно общих условиях (см. [39]), т. е. если гамильтониан H не зависит от времени, то его аналитичности более чем достаточно для обеспечения устойчивости точки минимума потенциала и неустойчивости точки максимума [1]).

Приближение к нелинейным условиям резонанса, очевидно, дается уравнениями

$$x = x^0 = \text{const}, \qquad y = H^{\mathrm{T}}_{0x^0} t + y^0,$$

где для данного $\mu > 0$ мы предположим, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $\|\partial H_0/\partial x_k\|_{x=x^0} = O(\varepsilon^{1/2})$ при $\|x - x^0\| \leqslant \mu$. Определитель, составленный из вторых производных, предполагается невырожденным и отделимым снизу от нуля величиной $O(1)$, т. е. не уничтожающимся вместе с ε и не зависящим от ε.

Разложив функцию Гамильтона в n-мерный ряд Тейлора вблизи некоторой точки x_0, мы получим главную часть функции H в виде

$$F(\delta, y) = a^{\mathrm{T}}\delta + \delta^{\mathrm{T}} A \delta + H_1(x_0, y), \tag{5.8.3}$$

где

$$a = \frac{\partial H_0}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}, \qquad \delta = x - x_0, \qquad A = \frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_0},$$

$$H_1(x_0, y) = \sum_p A_1^p(x_0) \exp(i p^{\mathrm{T}} y).$$

Можно показать, что существует формальное каноническое преобразование, которое приводит гамильтониан общей задачи к виду, аналогичному виду гамильтониана главной задачи (5.8.3). Эта процедура очень похожа на процедуру приведения, уже описанную для одномерного случая. Мы опять будем считать

$$\|\delta\| = O(\varepsilon^{1/2}), \qquad \|a\| = O(\varepsilon^{1/2}), \qquad |H_1| = O(\varepsilon).$$

---

[1]) Под теоремой, обратной к теореме Лагранжа — Дирихле, обычно подразумевают такое утверждение: для устойчивости положения равновесия консервативной системы необходимо, чтобы ее потенциальная энергия имела в этом положении равновесия строгий изолированный минимум по всем координатам. Это утверждение до сих пор не доказано даже для аналитических систем, хотя последние результаты Четаева [32*] и недавние результаты Коитера [33*] дают довольно хорошее приближение к решению этой проблемы. В упомянутой работе Хагедорна [39] доказана лишь неустойчивость точки максимума потенциальной энергии консервативной системы, а также рассмотрено аналогичное «обращение» теоремы Раусса для непотенциальных систем. Относительно устойчивости точки минимума потенциальной энергии в [39] лишь приведен пример неаналитической системы (неустойчивой), указаны ошибки некоторых авторов (например, в [53]) при доказательстве этого утверждения, а также высказана та же гипотеза, что и в данной книге (*прим. перев.*).

Далее, очевидно, что матрица A симметрична и, следовательно, соответствующим преобразованием ее можно привести к диагональному виду. Но такое преобразование привело бы к появлению нецелых коэффициентов в функции H_1, выраженной в новых угловых переменных и, следовательно, оно не очень удобно. Как и в большинстве случаев ранее, предположим, что главный член в H_1 соответствует единственной комбинации угловых переменных y_k $(k = 1, \ldots, n)$, и пусть эта комбинация записана так:

$$z = \bar{p}_1 y_1 + \ldots + \bar{p}_n y_n.$$

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (5.8.3), имеют вид

$$\dot{\delta}_k = -\frac{\partial F}{\partial y_k} = -iA_1^{\bar{p}}\bar{p}_k \exp(i\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) + i(A_1^{\bar{p}})^* \bar{p}_k \exp(-i\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}), \quad (5.8.4)$$

$$\dot{y}_k = \frac{\partial F}{\partial \delta_k} = a_k + 2\sum_{j=1}^{n} A_{kj}\delta_j, \quad (5.8.5)$$

где * означает комплексное сопряжение. Отсюда следует, что

$$\ddot{z} = \left[-2iA_1^{\bar{p}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{kj}\bar{p}_j\bar{p}_k\right] \exp(iz) + \\ + \left[2i(A_1^{\bar{p}})^* \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{kj}\bar{p}_j\bar{p}_k\right] \exp(-iz)$$

или

$$\ddot{z} = \omega e^{iz} + \omega^* e^{-iz}, \quad (5.8.6)$$

где z — вещественная переменная, а ω — комплексная величина, определяемая формулой

$$\omega = -2iA_1^{\bar{p}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{kj}\bar{p}_j\bar{p}_k.$$

Действительно, мы можем записать уравнение (5.8.6) в вещественной форме

$$\ddot{z} = \omega_1 \cos z - \omega_2 \sin z, \quad (5.8.7)$$

где

$$\omega_1 = 2\mathrm{Re}\,\omega, \qquad \omega_2 = 2\mathrm{Im}\,\omega.$$

Решением уравнения (5.8.7) является эллиптический интеграл первого рода, легко приводимый к нормальной форме заменой

$$\zeta = z + \alpha, \quad \sin\alpha = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \qquad \cos\alpha = -\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}},$$

так что при $m = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ имеем уравнение

$$\ddot{\zeta} = m \sin \zeta, \tag{5.8.8}$$

которое опять является уравнением простого маятника. Следовательно, поведение переменной ζ уже рассматривалось и «главный аргумент» z может описывать колебания, вращения или асимптотическое движение.

Теперь легко полностью проинтегрировать уравнения (5.8.4) и (5.8.5), если сначала получить δ_k из (5.8.4) с помощью простых квадратур, так как теперь

$$\dot{\delta}_k = ip_k \left[-A_1^{\bar{p}} e^{iz} + \left(A_1^{\bar{p}}\right)^* e^{-iz} \right].$$

После этого из уравнений (5.8.5) получаем каждый угол y_k опять в виде простой квадратуры.

Ясно, что рассмотренный выше случай в действительности эквивалентен одномерному случаю.

Задачу также можно решить аналогичным способом, если главная часть функции H_1 зависит от угла $z = \bar{p}_1 y_1 + \ldots + \bar{p}_n y_n$ и конечного числа целых кратностей величины z, хотя в этом случае уравнение для z может привести к вычислению гиперэллиптических интегралов, так как $\ddot{\zeta} = m_1 \sin \zeta + \ldots + m_p \sin p\zeta$.

Когда имеется несколько линейно независимых комбинаций $z_1, \ldots, z_p$, то решить задачу известными методами удается только, если возможно определить непересекающиеся области, в каждой из которых каждая переменная z_k соответствует главному члену. Полное решение в этом случае может быть получено объединением решений, локально справедливых в каждой из упомянутых областей. Одним из наиболее эффективных методов является процедура разложения по многим переменным, справедливая асимптотически в упомянутых областях. Такой метод для случая $p = 2$ был развит в работе [50], а позже в работе [18]. Здесь мы не будем останавливаться на таких процедурах.

Когда имеется p угловых комбинаций, система, которую надо решить, имеет вид

$$\ddot{z}_k = \sum_{j=1}^{p} (A_{kj} \cos z_j + B_{kj} \sin z_j)$$

или

$$\ddot{\zeta}_k = \sum_{j=1}^{p} m_{kj} \sin \zeta_j \qquad (k = 1, \ldots, p). \tag{5.8.9}$$

В случае малых колебаний в окрестности точки $\zeta_j = 0$ эта система является линейной, и решение находится сразу же. В против-

ном случае система уравнений (5.8.9) далеко не тривиальна. Аналогично можно сказать, что если все углы y_k описывают колебания около некоторого положения равновесия, то при малых колебаниях решение может быть проаппроксимировано любым желаемым образом. Но если хотя бы один угол y_k описывает вращения, то решение получить не так просто. Эти же утверждения можно сделать и относительно переменных ζ.

В качестве примера рассмотрим случай $p = 2$, так что можно написать (функция F предполагается четной относительно y_1, y_2)

$$F = a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_{11}\delta_1^2 + 2a_{12}\delta_1\delta_2 + a_{22}\delta_2^2 + \\ + A_1^{\alpha\beta}\cos(\alpha y_1 + \beta y_2) + A_1^{pq}\cos(py_1 + qy_2). \tag{5.8.10}$$

В этом случае мы находим

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -k_{11}\sin z_1 - k_{12}\sin z_2, \\ \ddot{z}_2 &= -k_{21}\sin z_1 - k_{22}\sin z_2, \end{aligned} \tag{5.8.11}$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2, & z_2 &= py_1 + qy_2, \\ k_{11} &= \tilde{k}_{11}A_1^{\alpha\beta}, & k_{12} &= \tilde{k}_{12}A_1^{pq}, \\ k_{21} &= \tilde{k}_{12}A_1^{\alpha\beta}, & k_{22} &= \tilde{k}_{22}A_1^{pq} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{11} &= 2(\alpha^2 a_{11} + 2\alpha\beta a_{12} + \beta^2 a_{22}), \\ \tilde{k}_{12} &= 2(\alpha p a_{11} + \beta q a_{12} + \alpha q a_{12} + \beta p a_{22}), \\ \tilde{k}_{22} &= 2(p^2 a_{11} + 2pq a_{12} + q^2 a_{22}). \end{aligned}$$

Преобразование

$$\sin\frac{z_1}{2} = k_1\,\mathrm{sn}\,(u_1, k_1), \qquad \sin\frac{z_2}{2} = k_2\,\mathrm{sn}\,(u_2, k_2)$$

приводит уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\left(\dot{u}_1^2 - k_{11}\right)\mathrm{cn}^2 u_1\right] &= \alpha_1\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_2\dot{u}_1, \\ \frac{d}{dt}\left[\left(\dot{u}_2^2 - k_{22}\right)\mathrm{cn}^2 u_2\right] &= \alpha_2\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_1\dot{u}_2, \end{aligned} \tag{5.8.12}$$

где

$$\alpha_1 = -2k_{12}\frac{k_2}{k_1}, \qquad \alpha_2 = -2k_{21}\frac{k_1}{k_2}.$$

Система *распадается*, если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т. е. для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha p a_{11} + (\beta p + \alpha q)a_{12} + \beta q a_{22} = 0, \tag{5.8.13}$$

и в этом случае решение уравнений (5.8.12) получается немедленно. Одним из возможных случаев является случай

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0, \tag{5.8.14}$$

но тогда мы имеем дело не со случаем резонанса. Другим интегрируемым случаем, разумеется, является случай, когда

$$k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0, \tag{5.8.15}$$

и в этом случае величины z_1 и z_2 таковы, что одна из них является целой кратностью другой, и мы опять возвращаемся к одномерному случаю.

Другое частное решение можно получить, если $k_1 = k_2$, т. е. функции z_1 и z_2 являются периодическими функциями времени t и имеют одинаковый период. Действительно, легко проверить, что если $k_{11} + k_{12} = k_{22} + k_{21}$, то мы имеем частное решение $\dot{u}_1 = \dot{u}_2$, так что z_1 и z_2 являются просто сдвинутыми по фазе друг относительно друга периодическими функциями с одинаковым периодом.

Однако в общем случае z_1 и z_2 (их вещественные части) будут условно-периодическими функциями времени t, и в конечном счете можно получить их непериодические экспоненциальные ряды Фурье, если в исходной системе (5.8.11) положить

$$\sin\frac{z_j}{2} = \sum_k \sum_l a_j^{kl} \exp\left[i\left(k\omega_1 t + l\omega_2 t\right)\right],$$

где, разумеется, ω_1 и ω_2 — неизвестные частоты. Ясно, что так как при $k_{12} = 0$ имеем

$$\sin\frac{z_1}{2} = k_1 \operatorname{sn}(u_1, k_1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_1^k(k_1) \sin\left[(2k+1)\frac{\pi u_1}{2K(k_1)}\right],$$

где $u_1 = \sqrt{k_{11}}t + u_{10}$, а при $k_{21} = 0$ аналогично имеем

$$\sin\frac{z_2}{2} = k_2 \operatorname{sn}(u_2, k_2) = \sum_{l=0}^{\infty} b_2^l(k_2) \sin\left[(2l+1)\frac{\pi u_2}{2K(k_2)}\right],$$

где $u_2 = \sqrt{k_{22}}t + u_{20}$ и в этих выражениях модули k_1 и k_2 зависят от начальных условий, то легко получить члены нулевого порядка в разложениях ω_1 и ω_2, записав их через k_{11}, k_{22}, k_1, k_2, а члены более высокого порядка находятся по рекуррентным формулам. Такая процедура типична для случаев, когда система «слабо завязана», т. е. $|k_{12}|$, $|k_{21}| \ll |k_{11}|$, $|k_{22}|$. Совершенно ясно надо

осознавать, что сложность проблемы, описанная выше, связана только с главной задачей, решение которой служит основой для получения решений высших порядков или, в случае подхода, основанного на рядах Ли, для определения решения дополнительной системы. В обоих случаях главная задача настолько сложна, что есть только небольшая надежда на получение каких-нибудь дальнейших приближений.

Если за точку, около которой производится разложение, принять центр, то при $p=2$ метод Цейпеля, примененный к описанной выше задаче, приводит к уравнению

$$\begin{aligned} a_1 (S_{1/2})_{y_1} + a_2 (S_{1/2})_{y_2} + a_{11} [(S_{1/2})_{y_1}]^2 + \\ + 2a_{12} (S_{1/2})_{y_1} (S_{1/2})_{y_2} + a_{22} [(S_{1/2})_{y_2}]^2 + \\ + A_1^{\alpha\beta} \cos(\alpha y_1 + \beta y_2) + A_1^{pq} \cos(p y_1 + q y_2) = K_1(\delta_1', \delta_2'), \end{aligned} \tag{5.8.16}$$

где $S_{1/2}$ — приближение первого порядка (т. е. член порядка $O(\varepsilon^{1/2})$) в производящей функции канонического преобразования $(\delta_1, \delta_2, y_1, y_2) \to (\delta_1', \delta_2', y_1', y_2')$. Разумеется, при этом мы ничего не приобретаем, потому что малопонятно, как решать уравнение в частных производных (5.8.16). Кроме того, утерян принцип получения функции $K_1(\delta_1', \delta_2')$, т. е. членов порядка $O(\varepsilon)$ в новой функции Гамильтона. Решение будет тривиальным для общего (нерезонансного) случая $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ или, точнее говоря, когда

$$S = \text{тождественная часть} + \Delta S,$$

где за ΔS можно взять функцию порядка $O(\varepsilon)$. Используя ранее введенные величины z_1 и z_2, уравнение (5.8.16) перепишем в виде

$$\begin{aligned} (\alpha a_1 + \beta a_2)(S_{1/2})_{z_1} + (p a_1 + q a_2)(S_{1/2})_{z_2} + \\ + \frac{1}{2} \tilde{k}_{11} [(S_{1/2})_{z_1}]^2 + \tilde{k}_{12} (S_{1/2})_{z_1} (S_{1/2})_{z_2} + \frac{1}{2} \tilde{k}_{22} [(S_{1/2})_{z_2}]^2 + \\ + A_1^{\alpha\beta} \cos z_1 + A_1^{pq} \cos z_2 = K_1. \end{aligned} \tag{5.8.17}$$

Это уравнение при $\tilde{k}_{12} = 0$ опять имеет простое решение в эллиптических функциях Якоби, в то время как в общем случае оно не проще исходного.

Вероятно, будет полезно отметить, что иногда возможно выбрать такую исходную точку, что

$$\alpha p a_{11} + (\beta p + \alpha q) a_{12} + \beta q a_{22} = 0, \tag{5.8.18}$$

где величины a_{11}, a_{12}, a_{22} не обязательно равны нулю. Действи-

тельно, целые числа α, β, p, q заданы, но так как

$$a_{ij} \left.\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\substack{x_1=x_{10}\\ x_2=x_{20}}},$$

то может случиться, что специальным выбором величин x_{10}, x_{20} удастся «развязать» систему. Для того чтобы это было можно сделать, функция H_0 должна принадлежать к классу функций f, удовлетворяющих уравнению ($p = 2$)

$$k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2l\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + m\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{5.8.19}$$

где k, l, m — заданные целые числа. Рассмотрим следующие важные частные случаи.

I) $\alpha = \beta$, так что $\alpha q + \beta p = \beta q + \alpha p$ и, следовательно, в (5.8.19) $2l = m + k$; в этом случае уравнение (5.8.19) переходит в уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(k\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0,$$

которое легко решить;

II) $p = q$; аналогично предыдущему случаю;

III) известно, что когда km больше, равно или меньше l^2, то уравнение будет соответственно эллиптического, параболического или гиперболического типа; в каждом случае свойства решений для f хорошо известны и могут быть найдены в любой книге о дифференциальных уравнениях в частных производных.

На самом деле проблема менее сложна, так как функция f, т. е. $H_0(\delta_1, \delta_2)$, задана, и вопрос о том, будет ли удовлетворяться уравнение (5.8.18), сводится к решению уравнения (в общем случае не алгебраического) относительно двух неизвестных. Все возможные решения этого уравнения дадут области, в которых резонансные эффекты могут быть отделены друг от друга.

9. Взаимодействие двух гармонических осцилляторов

Мы завершим эту главу кратким обсуждением задачи о нелинейной связи осцилляторов. Это описание основано на результатах, полученных в работе Хори [46], и служит заключительным примером использования методов теории возмущений, основанных на рядах Ли для консервативных систем. Рассматриваемая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \varepsilon x_2^2, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= 2\varepsilon x_1 x_2, \end{aligned} \tag{5.9.1}$$

где ω_1, ω_2, ε — положительные вещественные постоянные. Существование третьего интеграла для этой системы уравнений исследовалось в нескольких работах Контопулоса и др. [19—22].

В гамильтоновой форме уравнения (5.9.1) можно переписать так:

$$\dot{x}_k = F_{y_k}, \qquad \dot{y}_k = -F_{x_k} \qquad (k = 1, 2), \tag{5.9.2}$$

где

$$F = F_0(x, y) + F_1(x), \tag{5.9.3}$$

$$F_0 = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2 + \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2\right), \tag{5.9.4}$$

$$F_1 = -\varepsilon x_1 x_2^2. \tag{5.9.5}$$

Расматриваемая теория строится до членов второго порядка включительно. Для канонического преобразования $(x, y) \to (\xi, \eta)$, определяемого по формулам

$$\begin{aligned} x_j &= \xi_j + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_j} + \frac{\partial S_2}{\partial \eta_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_j}, S_1\right), \\ y_j &= \eta_j - \frac{\partial S_1}{\partial \xi_j} - \frac{\partial S_2}{\partial \xi_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_j}, S_1\right), \end{aligned} \tag{5.9.6}$$

где мы пренебрегли членами порядка $O(\varepsilon^3)$, генератор Ли — Хори $S(\xi, \eta, \varepsilon)$ представим в виде степенного ряда по ε

$$S = S_1 + S_2 + \ldots$$

С точностью до членов того же порядка отображение функции $f(\xi, \eta)$ с помощью генератора S задается формулой

$$f(x, y) = f(\xi, \eta) + (f, S_1) + (f, S_2) + \frac{1}{2}((f, S_1), S_1). \tag{5.9.7}$$

Это соотношение, как указывалось в главе II, может быть использовано для получения формулы

$$\Phi(\xi, \eta) = F(x, y), \tag{5.9.8}$$

где Φ — новый (преобразованный) гамильтониан. Заметим, что в этом примере обозначения x и ξ приняты для координат, а обозначения y и η — для импульсов.

Так как

$$\Phi_0 = F_0 = \frac{1}{2}\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2\right),$$

то решение дополнительной системы имеет вид $(j = 1, 2)$

$$\xi_j = c_j \cos\left(\omega_j \tau + c_j'\right), \qquad \eta_j = -c_j\omega_j \sin\left(\omega_j \tau + c_j'\right). \tag{5.9.9}$$

Нерезонансный случай. Пусть ω_1 и ω_2 — линейно независимы на множестве целых чисел. Тогда решение соответствующих уравнений имеет вид

$$\Phi_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(\xi(\tau), \eta(\tau))\, d\tau = F_{1s}, \tag{5.9.10}$$

$$S_1 = \int [F_1(\xi(\tau), \eta(\tau)) - \Phi_1]\, d\tau, \tag{5.9.11}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(F_1 + \Phi_1, S_1)_s, \tag{5.9.12}$$

$$S_2 = \int \left\{\frac{1}{2}(F_1 + \Phi_1, S_1) - \Phi_2\right\} d\tau, \tag{5.9.13}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}(F_1 + \Phi_1, S_2)_s + \frac{1}{2}(F_2 + \Phi_2, S_1)_s + \\ + \frac{1}{12}((F_1 - \Phi_1, S_1), S_1)_s \tag{5.9.14}$$

и дает генератор S до членов второго порядка включительно, а новый гамильтониан до членов третьего порядка.

В нашем случае находим

$$S_1 = \frac{\varepsilon}{\omega_1^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \left[(\omega_1^2 - 2\omega_2^2)\eta_1\xi_2^2 - 2\omega_1^2\xi_1\xi_2\eta_2 - 2\eta_1\eta_2^2\right],$$

$$\Phi_1 = 0,$$

$$S_2 = \frac{\varepsilon^2}{2\omega_1^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \left\{\frac{\xi_1\eta_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left[(2\omega_1^2 + \omega_2^2)\xi_2^2 - 3\eta_2^2\right] + \right.$$

$$+ \xi_2\eta_2 \left[\frac{\omega_1^2(4\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\omega_2^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\xi_1^2 - \frac{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}{\omega_2^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\eta_1^2 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{5\omega_1^2 - 8\omega_2^2}{8\omega_2^2}\xi_2^2 + \frac{3\omega_1^2 - {}^2}{8\omega_2^4}\eta_2^2\right]\right\}, \tag{5.9.15}$$

$$\Phi_2 = \frac{\varepsilon^2}{2\omega_1^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \left[\left(\omega_2^2 - \frac{3}{8}\omega_1^2\right)\left(\xi_2^2 + \frac{\eta_2^2}{\omega_2^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \omega_1^2\left(\xi_1^2 + \frac{\eta_1^2}{\omega_1^2}\right)\left(\xi_2^2 + \frac{\eta_2^2}{\omega_1^2}\right)\right],$$

$$\Phi_3 = 0.$$

В соответствии с общими результатами, установленными в главе II, следующие величины являются интегралами движения для дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану $\Phi(\xi, \eta)$:

$$\Phi(\xi, \eta) = \text{const}, \qquad \Phi_0(\xi, \eta) = \text{const}. \tag{5.9.16}$$

Легко проверить, что из (5.9.16) следует ($j = 1, 2$)

$$\xi_j^2 + \frac{1}{\omega_j^2}\eta_j^2 = c_j^2 = \text{const}. \tag{5.9.17}$$

Следовательно, решение уравнений, соответствующих гамильтониану Φ, имеет вид

$$\xi_j = c_j \cos(\omega_j^* t + c_j'), \qquad \eta_j = -c_j\omega_j \sin(\omega_j^* t + c_j'), \tag{5.9.18}$$

где «исправленные» частоты ω_j^* с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^4)$ определяются формулами

$$(\omega_1^*)^2 = \omega_1^2\left\{1 + \frac{\varepsilon^2 c_2^2}{\omega_1^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)}\right\}, \tag{5.9.19}$$

$$(\omega_2^*)^2 = \omega_2^2\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)}\left[\omega_1^2 c_1^2 + \left(2\omega_2^2 - \frac{3}{4}\omega_1^2\right)c_2^2\right]\right\}.$$

Связь между переменными (x, y) и (ξ, η) легко устанавливается с помощью формул (5.9.6). Формула, соответствующая формуле (5.9.7), при обратном преобразовании имеет вид

$$f(\xi, \eta) = f(x, y) - (f, S_1) - (f, S_2) + \frac{1}{2}((f, S_1), S_1) + \ldots \tag{5.9.20}$$

где невыписанные члены имеют порядок $O(\varepsilon^3)$. Применение формулы (5.9.20) к функции

$$f = \xi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\eta_1^2 = c_1^2 = \text{const}$$

дает с той же точностью третий интеграл, полученный в работе Контопулоса [22]:

$$x_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}y_1^2 + \ldots = c_1^2 = \text{const}.$$

Использование в тех же целях функции

$$f = \xi_2^2 + \frac{1}{\omega_2^2}\eta_2^2$$

не дает нового интеграла, не зависящего от c_1^2 и интеграла энергии (Φ или F).

Резонансный случай. Из (5.9.15) и (5.9.19) ясно, что в рассматриваемых нами приближениях надо исключить случаи

$$\omega_1^2 = 4\omega_2^2, \qquad \omega_1^2 = \omega_2^2.$$

В действительности по мере получения приближений высших порядков будут появляться делители вида $n\omega_1 - m\omega_2$, где целые числа n, m увеличиваются вместе с порядком строящейся теории. Как указывалось в предыдущих параграфах, даже не надо, чтобы эти делители обращались в нуль, а для неприменимости теории достаточно, чтобы они были достаточно малыми. Например, первое из соотношений (5.9.15) показывает, что если $\omega_1^2 - 4\omega_2^2 = O(\varepsilon)$, то функция S_1 больше не будет величиной первого порядка малости, как это предполагается с самого начала. В таких случаях аргумент (критический), соответствующий малому делителю, надо оставить в функции Φ, если она выражается через решение дополнительной системы (5.9.9).

Если $\omega_1^2 \approx 4\omega_2^2$, то такой подход приводит к выражениям

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= -\frac{\varepsilon}{4\omega_1\omega_2^2}\left[\omega_1\xi_1\left(\omega_2^2\xi_2^2 - \eta_2^2\right) + 2\omega_2\eta_1\xi_2\eta_2\right],\\
S_1 &= \frac{\varepsilon}{4\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)}\left[\omega_2^2(3\omega_1 + 4\omega_2)\eta_1\xi_2^2 + \right.\\
&\qquad \left. + (\omega_1 + 4\omega_2)\eta_1\eta_2^2 + 2\omega_1^2\omega_2\xi_1\xi_2\eta_2\right], \qquad (5.9.21)\\
\Phi_2 &= -\frac{\varepsilon^2}{32\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)}\left[4\omega_1^2\omega_2\left(\xi_1^2 + \frac{\eta_1^2}{\omega_1^2}\right)\left(\xi_2^2 + \frac{\eta_2^2}{\omega_2^2}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \omega_2^2(5\omega_1 + 8\omega_2)\left(\xi_2^2 + \frac{\eta_2^2}{\omega_2^2}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Этих соотношений достаточно для последующего построения третьего интеграла и подтверждения результатов, полученных в работе Контопулоса [21].

Теперь, как и предлагается в методе Линдстедта, можно ввести такое каноническое преобразование, после применения которого одна из координат не будет входить в гамильтониан, а именно, та координата, которая соответствует некритическому аргументу. Следовательно, при использовании дополнительной системы новые координаты надо определить по формулам

$$\begin{aligned}
q_1 &= 2(\omega_2\tau + c_2') - (\omega_1\tau + c_1'),\\
q_2 &= -(\omega_2\tau + c_2').
\end{aligned} \qquad (5.9.22)$$

Второе из этих соотношений выбрано таким образом, что q_2 не будет входить в гамильтониан, а соответствующий импульс будет совпадать с найденным Контопулосом третьим интегралом для резонансного случая. Вообще говоря, за q_2 можно принять любую линейную комбинацию величин $\omega_1\tau + c_1'$ и $\omega_2\tau + c_2'$ (не кратную только критическому аргументу q_1). Импульсы, соответствующие координатам q_1, q_2, определенным по формулам (5.9.22), записываются так:

$$p_1 = \frac{\omega_1}{2} c_1^2, \qquad p_2 = \omega_1 c_1^2 + \frac{\omega_2}{2} c_2^2, \tag{5.9.23}$$

а сами переменные q_1, q_2, p_1, p_2 легко выражаются через ξ, η с помощью формул (5.9.9).

Легко видеть, что гамильтониан, записанный в переменных $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$, не содержит q_2, так что p_2 — константа, т. е.

$$\omega_1\left(\xi_1^2 + \frac{\eta_1^2}{\omega_1^2}\right) + \frac{\omega_2}{2}\left(\xi_2^2 + \frac{\eta_2^2}{\omega_2^2}\right) = p_2 = \text{const}. \tag{5.9.24}$$

Преобразование этого выражения с помощью формулы (5.9.20) дает третий интеграл Контопулоса в этом резонансном случае:

$$\omega_1\left(x_1^2 + \frac{y_1^2}{\omega_1^2}\right) + \frac{\omega_2}{2}\left(x_2^2 + \frac{y_2^2}{\omega_2^2}\right) +$$
$$+ \frac{2\varepsilon}{\omega_1\omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)}\left[\omega_2(\omega_1 + \omega_2)x_1x_2^2 + x_1y_2^2 - y_1x_2y_2\right] + \ldots = p_2 = \text{const}.$$

Хори в упомянутой выше работе получил полностью эквивалентный результат, положив $\omega_1^2 = 4\omega_2^2$ (точное равенство)[1]).

Другой резонансный случай, рассмотренный Контопулосом [22], а также описанный здесь,— это случай $\omega_1^2 \approx \omega_2^2$[2]). В этом случае критический аргумент, приводящий к появлению малого (или нулевого) делителя в общей теории, имеет вид $(\omega_1\tau + c_1') - (\omega_2\tau + c_2')$. Сохраняя этот аргумент (и кратные ему аргументы) в функции Φ_2 (функция Φ_1 остается такой же, как и в

---

[1]) См. также [34*, 35*], где рассмотрены и другие резонансные случаи (*прим. перев.*).

[2]) Здесь и в [22] рассмотрен только один из двух возможных случаев, так называемый случай простых элементарных делителей определяющей матрицы невозмущенной (линейной) системы. Некоторые замечания о наличии третьего интеграла в этом и более сложном случае непростых элементарных делителей можно найти в работе [36*] (*прим. ред.*).

нерезонансном случае), получаем

$$\Phi_2 = \frac{\varepsilon^2}{2\omega_1^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \left\{ \left(\omega_2^2 - \frac{3}{8}\omega_1^2\right)\left(\xi_2^2 + \frac{\eta_2^2}{\omega_2^2}\right)^2 + \right.$$

$$+ \omega_1^2\left(\xi_1^2 + \frac{\eta_1^2}{\omega_1^2}\right)\left(\xi_2^2 + \frac{\eta_2^2}{\omega_2^2}\right) + \frac{1}{2}\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)\left[\left(\xi_1^2 - \frac{1}{\omega_1^2}\eta_1^2\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\xi_2^2 - \frac{1}{\omega_2^2}\eta_2^2\right) + \frac{4}{\omega_1\omega_2}\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2\right]\right\}.$$

Как и в предыдущем случае, после введения соответствующего набора новых переменных

$$q_1 = (\omega_2\tau + c_2') - (\omega_1\tau + c_1'), \quad q_2 = -(\omega_2\tau + c_2'),$$

$$p_1 = \frac{1}{2}\omega_1 c_1^2, \qquad p_2 = \frac{1}{2}\omega_1 c_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2 c_2^2$$

новый гамильтониан не будет содержать координаты q_2, так что импульс p_2 будет постоянным. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\omega_1\left(\xi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\eta_1^2\right) + \frac{1}{2}\omega_2\left(\xi_2^2 + \frac{1}{\omega_2^2}\eta_2^2\right) = p_2 = \text{const},$$

или, используя (5.9.20),

$$\frac{\omega_1}{2}\left(x_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}y_1^2\right) + \frac{\omega_2}{2}\left(x_2^2 + \frac{1}{\omega_2^2}y_2^2\right) -$$

$$- \frac{\varepsilon}{\omega_1\omega_2\sqrt{\omega_1^2 - 4\omega_2^2}}\left[\omega_2(\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 - 2\omega_2^2)x_1x_2^2 + \right.$$

$$\left. + 2(\omega_1 - \omega_2)(x_1y_2^2 - y_1x_2y_2)\right] + O(\varepsilon^2) = p_2 = \text{const}.$$

Опять можно показать, что эта формула точно совпадает с результатами, полученными Контопулосом в случае $\omega_1^2 \approx \omega_2^2$.

В обоих рассмотренных здесь резонансных случаях легко видеть, что новый гамильтониан, записанный в переменных $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$, имеет ту же главную часть, что и в идеальной резонансной проблеме. А именно, для резонанса $\omega_1^2 \approx 4\omega_2^2$ имеем

$$H = (\omega_1 - 2\omega_2)p_1 + \omega_2 p_2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\omega_1\omega_2}}(p_2 - 2p_1)\sqrt{p_1}\cos q_1,$$

а для резонанса $\omega_1^2 \approx \omega_2^2$ —

$$H = (\omega_1 - \omega_2)p_1 + \omega_2 p_2 + \frac{\varepsilon}{4\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)}\left[(8\omega_2^2 - 3\omega_1^2)p_2^2 + \right.$$

$$+ 2\left(3\omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 - 8\omega_2^2\right) p_1 p_2 - \left(3\omega_1^2 + 8\omega_1\omega_2 - 8\omega_2^2\right) p_1^2 + \\ + 4\omega_2\left(\omega_1 + 2\omega_2\right)\left(p_2 - p_1\right) p_1 \cos 2q_1].$$

В обоих случаях видно, что при точном резонансе

$$\partial H_0/\partial p_1 = 0.$$

Однако во втором случае можно допустить, что эта производная является малой величиной порядка $O(\varepsilon)$, и тогда по-прежнему можно получить решение в виде формальных рядов по степеням ε. В первом случае величина наименьшего порядка может быть малой величиной порядка $O(\varepsilon^{1/2})$, и в этом случае решение надо строить по степеням $\varepsilon^{1/2}$, о чем и говорилось в предыдущем параграфе.

Системы дифференциальных уравнений типа системы (5.9.1) очень широко изучаются в литературе, и сравнение классических методов решения с формальным подходом, основанным на рядах Ли, может оказаться весьма плодотворным. Сходимость рядов этого последнего подхода является, вероятно, наиболее интересной частью проблемы.

10. Замечания

С физической точки зрения понятия линейного или нелинейного резонанса могут отражать только некоторые аспекты тех или иных постановок задач. Для любых физических целей линейный резонанс не существует. Нелинейный резонанс является главным принципом настройки, т. е. выделения сигнала из общего шумового фона, а в естественных системах — причина устойчивых колебательных конфигураций; общим для обеих ситуаций является явление «захвата в резонанс». В более сложных системах резонанс выявляется только с помощью численных исследований. Хорошие примеры в этом отношении дают работы Хенона и Хейлеса [43] и Густавсона [38]. В некоторых случаях метод поверхностей сечения (или результаты Пуанкаре) является очень эффективным, как например, в задаче, рассмотренной Дэнби [26]. Что касается гамильтоновых систем, то мы немедленно сталкиваемся с вопросом о том, будут ли такие системы осцилляторами. Ясное описание, даваемое с помощью переменных действие — угол, применимо только тогда, когда можно разделить уравнение Гамильтона — Якоби, и поэтому оно имеет слишком ограниченную область применения. Таким образом, мы вынуждены прийти к обычному описанию колебаний в окрестности положения равновесия, которое надо считать устойчивым. Нелинейность заключается в том, что если такие колебания периодичны по каждой переменной, которая описывает отклонение от положения равновесия, то их период зависит от этого отклонения.

Математическое определение нелинейного резонанса, основанное на методе, который применяется для получения асимптотических решений, разумеется, не является удовлетворительным, хотя и часто используется (см., например, [52], стр. 18). Такое определение, если оно основано на появлении нулевых делителей в приближенных методах (как описывается в этой главе), есть не что иное, как эквивалентное утверждение о неполном вырождении. Перед тем как переходить к более уточненным и подробным определениям, надо отдавать себе отчет, что рассматриваемый вопрос по существу заключается в изучении поведения нелинейной динамической системы под влиянием внешних (или внутренних) возмущений. Асимптотически устойчивые решения можно в конечном счете получить с помощью асимптотических или чисто качественных методов, на что и указывалось в работах Боголюбова и Митропольского [12], Немыцкого и Степанова [64], Чезари [16] и Митропольского [58]. Поиск таких решений очень часто сводится к определению расположения и типов особых точек в фазовом пространстве. Тип этих точек зависит от поведения интегральных кривых в их окрестности, и, следовательно, располагая такой информацией, мы можем установить топологическую картину поведения траекторий в этих окрестностях фазового пространства. Однако в большинстве случаев поведение интегральных кривых в фазовом пространстве остается неизвестным, и часто численные методы являются единственными методами, имеющимися в нашем распоряжении. Кроме того, иногда пытаются понять нелинейные эффекты, упростив систему.

Характерный пример типично нелинейных трудностей и резонансных эффектов дает рассмотрение уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha \dot{x} = \beta f(\tau), \tag{5.10.1}$$

где ω и α зависят от x и $\dot{x}$. Амплитуда β вынуждающей силы предполагается фиксированной, а $\tau = \varepsilon t$, где ε — малая величина. Типичным предположением является предположение о том, что ω^2 и α являются функциями «энергии» E системы, т. е.

$$2E = \dot{x}^2 + \omega^2(E)x^2, \tag{5.10.2}$$

и тогда ищется колебательное решение

$$x = a\cos(\nu t + \varphi), \qquad \dot{x} = -\alpha\nu\sin(\nu t + \varphi).$$

Если амплитуда a и фаза φ медленно меняются со временем за период $T = 2\pi/\nu$, то можно усреднить соответствующее уравнение за период и получить решение с известной величиной ошибки (см., например, [52], стр. 17—18, уравнения (2.19) и (2.20)).

Такие усредненные уравнения, получающиеся в результате упомянутой процедуры, имеют вид

$$\dot{\alpha} = -\frac{\alpha}{2} a - \frac{\beta}{2\nu} \sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2\nu}(\omega^2 - \nu^2) - \frac{\beta}{2\nu a}\cos\varphi, \qquad (5.10.3)$$
$$E = \frac{1}{4} a^2 (\omega^2 + \nu^2),$$

и они показывают, что предположение о медленном изменении амплитуды верно, если

$$|\alpha a|, \quad \left|\frac{\beta}{\nu}\right| \ll \nu a.$$

Медленно меняющаяся фаза будет встречаться в таких областях плоскости (a,φ), где

$$\left|\nu - \left(\omega^2 + \frac{\beta}{a}\cos\varphi\right)^{1/2}\right| \ll \nu.$$

При отсутствии диссипации ($\alpha = 0$) система является канонической, и соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H(p, \theta) = \frac{1}{2\nu}\int^{p} [\omega^2(x) - \nu^2]\, dx - 2\varepsilon\sqrt{p}\cos\theta,$$

где $p = a^2$, $\varepsilon = \beta/2\nu$.

Отсюда видно, что амплитуда a является ограниченной, если предел

$$\lim_{a\to\infty}\int_{a_0}^{a} |\omega^2(x^2) - \nu^2|\, x\, dx \qquad (5.10.4)$$

конечен и не равен нулю. В действительности это условие подразумевает, что система не ведет себя линейно при больших амплитудах. За исключением тех интегральных кривых, для которых особая точка является предельной точкой, траектории в фазовой плоскости (a, θ) замкнуты и не пересекаются друг с другом, если при этом отождествить точки $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$.

При отсутствии диссипации особыми точками системы

$$\dot{a} = -\varepsilon\sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \frac{1}{2\nu}(\omega^2 - \nu^2) - \frac{\varepsilon}{a}\cos\varphi, \qquad (5.10.5)$$

которая относится к типу систем, обсуждавшихся в главе III, являются точки

$$a = 0, \qquad \varphi = \pi/2, \qquad \varphi = 3\pi/2$$

и $\dot{a} = \dot{\varphi} = 0$, т. е.

$$\varphi = 0,\ \pi, \qquad \frac{a}{2\nu}(\omega^2 - \nu^2) = \pm\,\varepsilon. \tag{5.10.6}$$

Уравнение (5.10.6) описывает резонансную кривую системы в плоскости (a, ν). Это означает, что координата особой точки a при данном значении ν является корнем уравнения

$$\nu_{\pm}(a) = (\omega^2 \pm \beta/a)^{1/2},$$

где фаза $\varphi = \pi$ при $\nu = \nu_+$ и фаза $\varphi = 0$ при $\nu = \nu_-$. Видно, что $\nu_+(a)$ является кривой центров, если $\nu_+(a) < 0$, кривой седел, если $\nu_+'(a) > 0$, и кривой смешанного типа, если $\nu_+'(a) = 0$. Для $\nu_-(a)$ ситуация обратна. Приведем некоторые важные факты, справедливые для любой нелинейной системы.

а) Для любого значения частоты ν существует по крайней мере один центр.

б) Число центров на единицу больше числа седел.

в) При малых вариациях каждая смешанная точка исчезает или распадается на пару точек: центр и седло.

г) Сепаратриса проходит через каждое седло и исключительные особые точки $a = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$.

д) Наконец, общей чертой движения без диссипации является то, что период, определяемый формулой

$$T(C) = \oint\limits_{H=C} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}},$$

может быть оценен в результате следующей приближенной процедуры, если только интегральные кривые достаточно близки к центру. Линеаризация уравнений (5.10.5) в окрестности центра C_k дает

$$\dot{a} = -\,\varepsilon\varphi, \qquad \dot{\varphi} = -\,\alpha_k[a_k - a],$$

где

$$\varphi(C_k) = 0, \qquad a_k = a\ (C_k), \qquad \alpha_k = \omega_k'\omega/\nu + \varepsilon/a^2,$$

$$\omega_k = \omega\,(a\,(C_k)), \qquad \omega_k' = \omega'\,(a\,(C_k)).$$

Такие линеаризованные уравнения очевидно могут быть записаны в виде

$$\ddot{x} + \varepsilon\alpha_k x = 0,$$

где $x = a - a(C_k)$. Таким образом, в пределе $C = C_k$ и частоты в амплитуде колебаний x определяются формулой

$$\Omega_k = \sqrt{\varepsilon\alpha_k},$$

а период —

$$T_k = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\alpha_k}.$$

В этой системе степень 1/2 возникает естественным образом, и обычная ссылка на изучение «пограничного слоя» едва ли необходима. Действительно, как мы видели в § 5 настоящей главы, при различных предположениях возникают различные степени ε (уравнение (5.5.9)). В областях, далеких от центра, интеграл для $T(C)$ надо вычислять точно, и в большинстве случаев это можно сделать только численно. Однако, если $a \gg \varepsilon$, то пренебрегая членами $(\varepsilon/a)^2$ и более высокого порядка, находим

$$\dot{x} = -\varepsilon \sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \alpha_k x,$$

и при $-1 \leqslant C_k \leqslant 1$ интеграл для $T(C)$ дает формулу

$$T(C) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon\alpha_k}} K\left(\sqrt{\frac{1+C_k}{2}}\right),$$

а при $C_k > 1$

$$T(C) = 2\,[\varepsilon\alpha_k(1+C_k)/2]^{-1/2} K\left(\sqrt{\frac{1+C_k}{2}}\right),$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k.

Мы можем проверить результат для центра, положив $C_k = -1$. Если $C_k \to 1$, то $T \to \infty$, и в действительности случай $C_k = 1$ соответствует сепаратрисе.

Вариация амплитуды Δa (амплитуда колебаний в окрестности центра) определяется формулой

$$\Delta a(C) = \max a(C, \varphi) - \min a(C, \varphi),$$

и, следовательно, получаем

$$\Delta a = 2[2\Delta(1+C_k)\alpha_k]^{1/2}$$

и

$$\Delta a = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha_k}}\left[\sqrt{C_k+1} - \sqrt{C_k-1}\right] \qquad (C_k > 1).$$

Эти результаты по существу описаны в наших статьях [32—36], но здесь мы следовали прямому описанию работы Бакаи [6].

В результате получаем, что Δa увеличивается вместе с C_k, стремясь к максимальному значению при $C_k \to 1$ слева, а затем круто уменьшается; при этом характер движения изменяется с

колебательного (конечные вариации фазы) на вращательный (неограниченные вариации фазы).

Если вводится диссипация, то картину фазовых траекторий также нетрудно найти, несмотря на «потерю» интеграла энергии (гамильтониан). Действительно, хотя траектории больше не являются замкнутыми, они приближаются или к замкнутым траекториям, или к неподвижной точке. В противоположность предыдущему случаю мы имеем следующие свойства.

а) Фаза φ особой точки не является постоянной. Для особой точки, определенной ветвью $\nu_+(a)$, имеем $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$, а для точки, определенной ветвью $\nu_-(a)$, имеем $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

б) При значении a, удовлетворяющем соотношению $a\alpha = 2\varepsilon$, ветви $\nu_+(a)$ и $\nu_-(a)$ сливаются с кривой, определяемой формулой $\nu = \nu(\omega)$. При отсутствии трения ветвь $\nu_+(a)$ (или $\nu_-(a)$) лежит всегда над (или под) этой кривой.

в) Центры переходят в фокусы, которые устойчивы при $d(\alpha a)/da > 0$ и неустойчивы при $d(\alpha a)/da < 0$. Седловые и смешанные точки остаются.

г) Каждая фазовая траектория стремится к устойчивому фокусу или к устойчивому предельному циклу, окружающему его. Переход осуществляется через фазовую траекторию, имеющую седло в качестве предельной особой точки. В этом случае одна ветвь приближается к фокусу, а другая — к предельному циклу.

В заключение мы хотим упомянуть важные результаты, полученные Мозером [62] при построении условно-периодических движений, в частности, при построении движений в окрестности резонансных систем.

Этот вопрос связан с возможностью применения к резонансным случаям теоремы Мозера об условно-периодических движениях, описанной в § 6 главы III. Обобщение этой теоремы для гамильтоновых систем получено Мозером [62]. Если рассматривается система с N степенями свободы, а n — число рационально независимых частот невозмущенной системы, то в случае $n = N$ применима теорема Колмогорова или теорема Мозера. Если $n = 0$, то мы имеем положение равновесия, а случай $n = 1$ соответствует периодическому движению; первым этот случай рассматривал Арнольд [4]. Все остальные случаи $1 < n < N$ являются резонансными, и кратность резонанса равна $N - n$. С точки зрения вопросов, описанных в § 3 главы III, резонансы рассматривались в статье Арнольда [5] при обобщении теоремы Колмогорова. Действительно, основные результаты работы Мозера содержатся в теореме Арнольда,— факт, становящийся очевидным при сравнении, например, функции $\bar{H}_1$ (§ 3, глава III) с функцией $\tilde{H}$ из работы Мозера. В случае простого резонанса (т. е. $n = N - 1$) результаты Мозера можно сформулировать очень просто.

Действительно, рассмотрим гамильтониан

$$H = H(y_1, \ldots, y_N, x_1, \ldots, x_N, \varepsilon),$$

где $H(y, x, 0) = H_0(y_N, x)$, а функция H 2π-периодична по каждой угловой переменной $y_1, \ldots, y_n$ $(n = N - 1)$. Более того, для фиксированных значений $x_1, \ldots, x_{N-1}$, ограниченных в некоторой ограниченной области, мы будем считать точку $y_N = x_N = 0$ равновесным решением системы с гамильтонианом H_0, т. е.

$$\frac{\partial H_0}{\partial y_N} = \frac{\partial H_0}{\partial x_N} = 0.$$

При $\varepsilon = 0$ на многообразии

$$x_k = C_k = \text{const}, \qquad y_N = x_N = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{5.10.7}$$

мы имеем n-параметрическое семейство условно-периодических движений. При условии, что положение равновесия является положением равновесия эллиптического типа, эти движения могут быть продолжены при достаточно малых возмущениях, т. е. при малых ε [1]). Точнее, Мозер (см. [62], теорема 6) доказал такое утверждение.

Теорема. *Пусть система с гамильтонианом $H(y, x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет равновесную точку и выполнены условия:*

1) *при* $\varepsilon = 0$, $x_N = y_N = 0$, $x_k = C_k (i, j, k = 1, \ldots, n)$

$$\det \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_N} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_N \partial x_j} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_N^2} \end{Bmatrix} \neq 0,$$

2) *если при* $\varepsilon = 0$, $x_N = y_N = 0$, $x_k = C_k$,

$$\Delta = \det \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_N^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_N \partial y_N} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_N \partial y_N} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_N^2} \end{Bmatrix} = \alpha^2 > 0,$$

то при $\varepsilon = 0$, $x_N = y_N = 0$, $x_k = C_k$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$

$$\det \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} & \dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_j} & \Delta \end{Bmatrix} \neq 0.$$

---

[1]) Вопросы построения и исследования устойчивости таких движений рассматривались в работе [20*] (*прим. ред.*).

Тогда при достаточно малых ε *существуют условно-периодические решения с* n *частотами, которые близки решениям, определяемым формулами* (5.10.7).

Разложение функции в ряд Тейлора осуществляется в окрестности решения (5.10.7), и положение равновесия $x_N = y_N = 0$ предполагается положением равновесия эллиптического типа, т. е. матрица

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_N^2} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_N \partial y_N} \\ \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_N \partial y_N} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y_N^2} \end{Bmatrix}$$

приводима к диагональной форме

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \neq 0$. Таким образом, окончательная форма гамильтониана такова:

$$\widetilde{H} = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j + \frac{1}{2}\left(X_N^2 + Y_N^2\right) + O(\varepsilon),$$

где

$$|X_j - x_j| \sim O(\varepsilon^2) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$
$$|X_N - x_N| \sim |Y_N - y_N| \sim O(\varepsilon^4).$$

Дифференциальные уравнения возьмем в виде

$$\dot{y} = a + O(\varepsilon), \qquad \dot{\xi} = \Omega\xi + O(\varepsilon), \tag{5.10.8}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\xi = (x_1, \ldots, x_n, x_N, y_N)$.

Собственные числа матрицы Ω таковы:

$$\Omega_1 = \ldots = \Omega_n = 0, \qquad \Omega_N = -\Omega_{N+1} = \sqrt{-1}.$$

Для применения теоремы Мозера (§ 6 главы III) необходимо построить модифицированную систему

$$\dot{y} = a + \lambda + O(\varepsilon),$$
$$\dot{\xi} = \Omega\xi + M\xi + O(\varepsilon).$$

Однако, как показал Мозер, можно выбрать $M = \sigma\Omega$, где вещественная величина $\sigma \neq 0$, так что «растяжением» времени

$$d\tau = (1 + \sigma)\,dt$$

находим

$$y' = (1+\sigma)^{-1}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\lambda}) + O(\varepsilon),$$
$$\xi' = \Omega\xi + O(\varepsilon),$$

и константы

$$a_j = (1+\sigma)^{-1}(a_j + \lambda_j)$$

можно получить соответствующими величинам C_k $(k = 1, \ldots, n)$, которые удовлетворяют предположениям теоремы.

Тогда в системе (5.10.8) будут существовать условно-периодические движения.

Что касается периодических решений в окрестности положения равновесия, когда частоты нормальных колебаний являются рационально зависимыми, то этот вопрос первым изучал Зигель [73]. Он привел пример, показывающий, что распространение теоремы Ляпунова на этот случай не всегда возможно. Однако совсем недавно в работе Бергера [8] для гамильтоновых систем при отсутствии гироскопических членов была доказана одна важная теорема из этой области. С другой стороны, Хенрард [44] в конкретной системе [1]), в которой такие члены присутствуют, провел формальную нормализацию, и с помощью численных методов показал, что, по-видимому, при некотором резонансном соотношении между частотами нормальных колебаний в окрестности положения равновесия существуют периодические орбиты. Наконец, Рул [69], применив метод нормализации, показал существование периодических орбит, соответствующих рациональным частотам, в ограниченной задаче трех тел, а позже [70] дал доказательство теоремы, обобщающей результаты Ляпунова. Точнее, периодические решения в окрестности положения равновесия будут существовать, когда $\lambda_i = k\lambda_1$ $(k \geqslant 4$, λ_1 — чисто мнимая величина) и выполнены некоторые условия, зависящие от k и от членов более высокого порядка в разложении гамильтониана около положения равновесия. Здесь мы ограничимся упоминанием только наиболее важных результатов Бергера и Рула [2]).

Бергер обобщил теорему Ляпунова следующим образом [8].

Теорема. *Пусть дан гамильтониан*

$$H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y} + F(\boldsymbol{y}),$$

где $\boldsymbol{y}$ *и* $\boldsymbol{x}$ — n*-мерные векторы,* $F(\boldsymbol{y})$ *принадлежит по крайней мере классу* C^1 *при* $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, $\lim\limits_{\|\boldsymbol{y}\|\to 0}\left\|\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}\right\| / \|\boldsymbol{y}\| = 0$, а A —

[1]) В работе [44] рассматривается движение в окрестности лагранжевых решений плоской круговой ограниченной задачи трех тел (*прим. перев.*).

[2]) См. также [37*] (*прим. перев.*).

постоянная самосопряженная матрица размерности $n \times n$ с собственными числами $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$. Если существует p собственных чисел, не обязательно различных, но равных величине $k^2\lambda_j^2$ (k — целое число для некоторого $1 \leqslant j \leqslant n$, то существует по крайней мере p различных однопараметрических семейств $u_j(\varepsilon)$ ($j = 1, \ldots, p$) периодических орбит с периодами $T_j(\varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$ все семейства переходят в положение равновесия и периоды равны $2\pi/|\lambda_j|$. Более того, если функция $F(y)$ вещественно аналитична, то $u_j(\varepsilon)$ и $T_j(\varepsilon)$ непрерывны в окрестности положения равновесия.

Ясно, что теорему нельзя применить, если гамильтониан содержит линейные по x члены, т. е. по вектору «скоростей». В этом случае применима теорема Рула при следующих предположениях [69, 70].

Теорема. *Пусть дан вещественный аналитический гамильтониан $H(y, x)$ в окрестности положения равновесия* (0, 0). *Если все собственные числа линейной системы в вариациях различны между собой, одно из них, например, λ_1, является чисто мнимым, и существует другое собственное число, например, λ_2, такое, что $\lambda_2 = k\lambda_1$ ($k \geqslant 4$ — целое число), то существует семейство вещественных периодических решений, зависящих аналитически от вещественного параметра в окрестности положения равновесия, если, кроме того, число $R(k) \neq 0$.*

Это число зависит от k и от коэффициентов разложения функции H в окрестности точки (0, 0) до членов четвертого порядка. Если $\varepsilon \to 0$, то эти решения переходят в положение равновесия, а их периоды, являющиеся аналитическими функциями параметра ε, стремятся к величине $2\pi/|\lambda_1|$. Первое приближение для этого решения совпадает с первым приближением, получающимся в методе Ляпунова для нерезонансного случая [1]).

Разумеется, список результатов для многих частных случаев может быть продолжен до бесконечности. Мы хотим только упомянуть важные работы, которые написали Хейл [41] (особенно §§ III.5—III.11 и главы IV,V), Сансоне и Конти [72] (особенно §§ VII.1, VIII.7), Чезари [16] (§ 8, 9), Андронов и др [2] §§ (1.2—1.5, главы II, VI), Андронов и др. [3] (главы II, III, IV, особенно с важной точки зрения структурной устойчивости), Немыцкий и Степанов [64] (главы IV, V), Ла-Салль и Лефшец [53] (глава 4, особенно с точки зрения обобщения ляпуновского метода исследования устойчивости), некоторые авторы Трудов

---

[1]) Весьма примечательно, что, в отличие от классического нерезонансного случая Ляпунова, в резонансном случае в работах [44, 69, 70, 37*], кроме того, обнаружены такие периодические движения, которые при $\varepsilon \to 0$ не переходят в положение равновесия (*прим. перев.*).

Международного симпозиума по дифференциальным уравнениям и динамическим системам [42] (под редакцией Хейла и Ла-Салля). Урабе [74] (главы 4, 5), Розе [71] (главы 9, 10, 12, 13, 18 и некоторые примеры на протяжении всей книги), некоторые авторы в переводах Американского математического общества [1], Чен [17] (особенно некоторые примеры по вибрациям в нелинейных механизмах).

Одной из лучших работ по теории колебаний в электрических системах, где анализируется проблема резонанса в некоторых ситуациях и для некоторых примеров, является работа Блакьера [10]. Наконец, много общих задач и специальных случаев, встречающихся в небесной механике, собрано в Трудах Международного симпозиума по периодическим орбитам, устойчивости и резонансам [35] (под редакцией Джакальи).

Очень часто утверждается, и в действительности с общематематической точки зрения это верно, что асимптотические методы не могут точно предсказать орбиты на интервалах времени, превышающие $1/\varepsilon$, где ε — малый параметр задачи. Тем не менее, доказано, что такие методы (основанные главным образом на методах Линдстедта, Пуанкаре и Цейпеля) как в нерезонансной, так и в резонансной ситуациях, могут точно предсказать наблюдения на гораздо большие времена. Например, учет долгопериодических возмущений, произведенный для искусственных спутников Земли, должен был бы оставаться верным в течение примерно 2×10^3 часов (около 84 дней), а в конце этого периода точность должна была бы резко ухудшиться. Однако при надлежащем использовании методов усреднения точность, лучшая, чем одна миллионная, может поддерживаться в течение 100 дней. Аналогичное утверждение верно и относительно справедливости нормальных форм, полученных с помощью «вообще говоря, расходящихся» рядов. В этом отношении очень интересны замечания Мозера [59], сказавшего, что «...в случае системы с двумя степенями свободы такое преобразование (нормализация Биркгофа) может быть получено также только с помощью расходящихся рядов. Но при использовании понятия устойчивости в практических целях эти ряды дают вполне достаточное описание...». Замечание аналогичного рода было сделано Кинером [52], утверждавшим, что «...модель (маятниковая) справедлива для интервалов времени порядка $1/\sqrt{J_{22}}$ (J_{22} — малый параметр задачи), например, в течение периода колебаний». Утверждения такого типа должны сопровождаться словами: «если J_{22} — достаточно малая величина». Однако численная проверка показывает, что «эта теория может быть применена и для синхронных спутников Земли...». Мы хотим добавить, что времена, превышающие математический интервал справедливости теории возмущений, должны получаться в результате каких-то специальных оценок, сущест-

венно использующих те или иные особенности конкретной задачи.

Что касается представления движения в окрестности особых точек с помощью асимптотических методов усреднения, то, начиная с создания теории Хори [45], известно много работ, например, работы Гарфинкеля [30] (в этой работе есть хороший список литературы по рассматриваемому вопросу), Джакальи [32—34, 36] и Жуппа [47, 49].

Наконец, с важной точки зрения построения и справедливости третьего интеграла движения, мы настоятельно рекомендуем несколько работ Контопулоса [21—25], так как, кроме тщательных аналитических выкладок, они содержат много обширных и производящих глубокое впечатление численных приложений и проверок, очень эффективные вычислительные процедуры для исключительно простых и академических параметров, и, кроме того, удобны для читателя, использующего методы усреднения в теории возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Almuhamedov, Bautin, Elsgolz, Malkin, Nemytskii. Stability and dynamical systems.— Amer. Math. Soc. Transl. ser. 1, 1962, vol. 5
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
3. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.—М.: Наука, 1967.
4. Арнольд В. И. О рождении условно-периодических движений из семейства периодических движений.—ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1, стр. 13—15.
5. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.—УМН, 1963, т. 18, № 6, стр. 91—192.
6. Bakai A. S. Resonance phenomena in nonlinear systems.— Diff. eq., 1966, vol. 2, p. 479—491.
7. Baker H. F. On certain linear differential equations of astronomical interest.— Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), 1916, vol. 216, p.129—189.
8. Berger M. On one parameter families of real solutions of nonlinear operator equations.— Bull. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 75, № 2, p. 456—459.
9. Bhatia N. P., Szegö G. P. Stability theory of dynamical systems.— New York: Springer-Verlag, 1970.
10. Блакьер О. Анализ нелинейных систем.— М.: Мир, 1969.
11. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике.—Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
12. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.
13. Bohlin K. Über die bedeutung der prinzips der lebendigen kraft für die frage von der stabilitäd dynamischer systeme.— Acta. Math., 1887, b. 10, s. 115—138.
14. Brown E. W. Elements of theory of resonance.— Rice Inst. Publ., 1932, vol. 19.

15. Cesari L. Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici.— Atti Accad. Ital. Mem. Clas. Fis. Mat. e Nat., 1940, t.11, p. 633—692.
16. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1964.
17. Chen Y. Vibrations theoretical methods.— Massachusetts, Addison-Wesley, 1966.
18. Cole J. D. Perturbation methods in applied mathematics.— Massachusetts, Ginn-Blaisdell, 1968.
19. Contopoulos G. A third integral of motion in a galaxy.— Zeits. fur Astrophys., 1960, b. 49, s. 273—291.
20. Contopoulos G. On the existence of a third integral of motion.— Astron. J., 1962, vol. 67, № 1, p. 1—14.
21. Contopoulos G. Resonance cases and small divisors in a third integral of motion, I.— Astron. J., 1963, vol. 68, № 10, p. 763—779.
22. Contopoulos G. Resonance cases and small divisors in a third integral of motion, II.— Astron. J., 1965, vol. 70, № 10, p. 817—835.
23. Contopoulos G. Resonance cases and small divisors in a third integral of motion, III.— Astron. J., 1966, vol. 71, № 8, p. 687—698.
24. Contopoulos G. Resonant periodic orbits.— Astrophys. J., 1968, vol. 153, № 1, p. 83—94.
25. Contopoulos G. Resonance phenomena in spiral galaxies.— В кн.: Periodic Orbits, Stability and Resonances/Ed. G. E. O. Gicaglia.— Dordrecht, Holland: Reidel Pub. Co., 1970.
26. Danby J. M. A. Wild dynamical systems.— В кн.: Periodic Orbits. Stability and Resonances/Ed. G. E. O. Giacaglia.— Dordrecht, Holland: Reidel Pub. Co., 1970.
27. Diliberto S. P. Perturbation theorems for periodic surfaces, I, II.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1960, vol. 9, p. 265—299; 1961, vol. 10, p.111—200.
28. Elsgolts L. E. An estimate for the number of singular points of a dynamical system defined on a manifold.— Providence, Am. Math. Soc. Transl., 1952, No. 68.
29. Garfinkel B. et al. A recursive von Zeipel algorithm for the ideal resonance problem.— Astron. J., 1971, vol. 76, № 2 p. 157—166.
30. Garfinkel B. et al. Regularization of the ideal resonance problem.— Celest. Mech., 1972, vol. 5, № 2, p. 189—203.
31. Гельфанд И. М., Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.—УМН, 1955, т. 10, № 1, стр. 3—40.
32. Giacaglia G. E. O. Double resonance in the motion of a satellite.— Symp. Math., 1968, vol. 3, p. 45—63 (publ. Acad. Press, New York, 1970).
33. Giacaglia G. E. O. Resonance in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1969, vol. 74, № 10, p. 1254—1260.
34. Giacaglia G. E. O. Parametric representation of resonance in the restricted problem.— Mem. Soc. Astron. Ital., 1969, t. 40, p. 499—515.
35. Giacaglia G. E. O. (Ed.) Periodic Orbits, Stability and Resonances.— Dordrecht, Holland: Reidel Pub. Co., 1970.
36. Giacaglia G. E. O. Two centers of libration.—В кн.: Periodic Orbits, Stability and Resonances /Ed. G. E. O. Giacaglia.—Dordrecht, Holland: Reidel Pub. Co., 1970.
37. Giacaglia G. E. O. Characteristic exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies.— Celest. Mech. 1971, vol. 4, № 3/4, p. 468—489.
38. Gustavson F. A. On constructing formal integrals of a hamiltonian system near equilibrium point.— Astron. J., 1966, vol. 71, p. 670—686.
39. Хагедорн П. Обращение теорем устойчивости Лагранжа — Дирихле и Раусса.—Механика, 1972, № 5, стр. 3—36.

40. Hale J. K. On the boundedness of the solutions of linear differential systems with periodic coefficients.— Riv. Mat. Univ. Parma, 1954, vol. 5, p. 137—167.
41. Hale J. K. Ordinary differential equations.— New York: Wiley-Interscience, 1969.
42. Hale J. K., LaSalle J. P. (Eds.) Differential eguations and dynamical systems.— New York: Acad. Press, 1967.
43. Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments.— Astron. J., 1964, vol. 69, № 1, p. 73—79.
44. Henrard J. Periodic orbits emanating from a resonant eguilibrium.— Boeing Sci. Res. Lab. Publ., 1969, D1-82-0874.
45. Hori G. The motion of an artificial satellite in the vicinity of the critical inclination.— Astron. J., 1960, vol. 65, № 5, p. 291—303.
46. Hori G. Nonlinear coupling of two harmonic oscillators.— J. Japan. Astron. Soc., 1967, vol. 19, p. 230—241.
47. Jupp A. H. On the ideal resonance problem.— Astron. J., 1969, vol. 74, № 1, p. 35—43.
48. Jupp A. H. On the ideal resonance problem, II.— Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1970, vol. 148, p. 197—210.
49. Jupp A. H. A second order solution of the ideal resonance problem by Lie series.— Celest. Mech., 1972, vol. 5, № 1, p. 8—26.
50. Kevorkian J. The two variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations, vol. 7, p. 206. Lectures in applied mathematics. Providence, Amer. Matr. Soc., 1966.
51. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.— Киев: Изд-во АН УССР, 1934.
52. Kyner W. T. Lectures on nonlinear resonance. Yale Summer Institute in Dynamical Astronomy, Purdue Univ., 1968.
53. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.— М.: Мир, 1964.
54. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1960.
55. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.
56. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1966.
57. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.
58. Митропольский Ю. А. О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость.—Укр. матем. ж., 1964, т. 14, № 4, стр. 475—501.
59. Moser J. The resonance lines for the synchrotron. Geneva, p. 290—292, Proceed. CERN Symp., 1956.
60. Moser J. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems.— Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, № 1, p. 81—114.
61. Moser J. On the theory of quasi-periodic motions.— SIAM Rev., 1966, vol. 8, № 2, p. 145—172.
62. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды.—УМН, 1969, т. 24, № 2, стр. 165—211.
63. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973.
64. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.— Л.: Гостехиздат, 1949.
65. Немыцкий В. В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—УМН, 1965, т. 20, № 1, стр. 1—34.
66. Немыцкий В. В. Топологическая классификация особых точек.—Диф. уравнения, 1967, т. 3, № 3, стр. 359—370.

67. Peixoto M. M. Qualitative theory of differential equations and structural stability. — В кн.: Differential equations and dynamical systems/Eds. J. K. Hale, J. P. LaSalle.— New York: Acad. Press, 1967.
68. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1.— М.: Наука, 1971.
69. Roels J. Orbites de longues periodes resonantes autour des points equilateraux de Lagrage, 1, 2.— Astron. Astrophys., 1969, vol. 1, № 1, p. 77—90; № 3, p. 380—387.
70. Roels J. An extension to resonant cases of Lyapunov's theorem concerning the periodic solutions near a hamiltonian equilibrium.— J. Diff. Eq., 1971, vol. 9, № 2, p. 300—324.
71. Розе М. Нелинейные колебания и теория устойчивости.—М.: Наука, 1971.
72. Sansone G., Conti R. Nonlinear differential equations.— New York: Pergamon Press, 1964.
73. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: ИЛ, 1959.
74. Urabe M. Nonlinear autonomous oscillations.— New York: Acad. Press, 1967.
75. Уиттекер Е. Аналитическая динамика.— М.: ОНТИ, 1937.
76. Zeipel H. Réchérches sur le mouvement des petites planéts.— Arkiv. Astron. Mat. Phys., 1916—1917, t. 11, 12, 13.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ЗАМЕЧАНИЯ, НЕКОТОРЫЕ ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ И ИССЛЕДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ

Методы усреднения используются уже довольно давно, и к настоящему времени мы накопили опыт их применения и приобрели необходимую интуицию. Они дают удивительно хорошие результаты, которые, вообще говоря, даже лучше, чем можно было бы ожидать исходя из чисто математических оценок. Как бы ни была хороша оценка для общего случая, ясно, что в конкретной задаче может быть получена лучшая оценка. Другим аспектом рассматриваемого вопроса, особенно в задачах, где угловые частоты могут быть получены непосредственно из наблюдений, является то, что значительно более хороший результат получается, если такие частоты (их численные значения) используются в аналитической теории. Тогда периодические колебания около некоторых средних значений, полученные в виде аналитических выражений, оказываются в хорошем согласии с наблюдениями. Вероятно — это одна из причин успеха теории движения Луны Хилла — Брауна по сравнению с теорией Делоне. Рассмотрение вопросов такого рода показывает, что эта старая проблема остается открытой до сих пор, и никакие имеющиеся в нашем распоряжении «современные» методы не дают возможности вычислить действительные частоты нелинейной системы. Для приложений эта проблема остается нерешенной, так как в приближениях рядами, сходящимися или только формальными, может быть вычислено лишь конечное и, вообще говоря, очень небольшое количество членов. Пока нельзя найти способа выражения общего члена и суммы этих рядов. В прошлом этого можно было достичь только для тривиальных примеров. Таким образом, мы обращаемся к нелинейному методу решения. Можно добавить, что ускоренные методы сходимости, типа метода Ньютона, которые были введены Колмогоровым, привели к реальному прогрессу в достижении этой цели. Но даже здесь известны случаи, когда метод Ньютона не дает квадратичной сходимости: должны быть удовлетворены некоторые специальные условия. Кроме того, до сих пор были развиты только численные приложения этого метода. В численном анализе существуют также методы решения дифференциальных уравнений, которые в конечном счете дают сходимость лучше квадратичной. В основном они известны под названием методов Эйткена. Например, если при сведении интегрирования к задаче о неподвижной точке имеются три после-

довательных приближения к точке, т. е. x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, то отличная оценка неподвижной точки (или корня соответствующего уравнения) дается формулой

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}.$$

Это соотношение точно оценивает сумму геометрической прогрессии в том смысле, что если взять $x_{n-1} = 1$, $x_n = 1 + \varepsilon$, $x_{n+1} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2$, то получим $x_{n+2} = 1/(1 - \varepsilon)$. Этот и другие интересные методы описываются в работе Фиджина [7]. Как можно использовать такие ускоренные методы в аналитической теории,— это открытый вопрос.

Существуют другие методы, кроме тех, которые используют процедуру усреднения, однако они не стали такими же популярными, как эти последние при действительном применении методов к решению задач с помощью степенных рядов по (малому) параметру. Методы усреднения просты, наглядны, понятны и, что самое главное, систематизированы. Это означает, что они легко переносятся на автоматические способы решения (с помощью итераций) на электронной вычислительной машине с алгебраическим символьным манипулятором. Такие машинные манипуляторы, специально приспособленные для метода усреднения, были созданы в работах Депри и Рома [23, 24, 30.2, 31.2] и Джеффриса [14]. Кроме того, в Смитсоновской астрофизической обсерватории в Кембридже (Массачусетс) Ж. Черняк [16*] создал специальный язык, основанный на системе FORMAC и приспособленный для решения аналогичных задач[1]).

В работе [2] Арнольд анализировал некоторые нерешенные проблемы, и, насколько нам известно, они остаются нерешенными и сегодня. Хотя большие успехи были сделаны при качественном изучении динамических систем, по-прежнему очень мало известно о двумерных системах и еще меньше для многомерных случаев. Первый вопрос, поднятый Арнольдом, связан с устойчивостью положения равновесия эллиптического типа в системах с числом степеней свободы, большим двух. Аналогичную трудность представляет собой вопрос об обобщении теоремы Пуанкаре—Биркгофа о неподвижной точке на случай высоких размерностей системы. Кроме того, Арнольд имел дело с устойчивостью по мере для динамических систем, которая связана с тем свойством, что большинство изменений начальных условий сохраняет

[1]) См. монографию [17*] и другие работы авторов из Института Теоретической Астрономии АН СССР, а также работу [18*], посвященную использованию ЭВМ для исследования поведения гамильтоновых систем вблизи положений равновесия (*прим. перев.*).

условно периодический тип решения [1]). С другой стороны, так как промежутки между инвариантными торами для случая размерности, большей двух, являются связанными между собой и неограниченными, то траектория, проходящая между двумя инвариантными торами, не обязательно будет оставаться близкой к одному из них или являться ограниченной,— этот случай Арнольд назвал топологической неустойчивостью [2]). Вопрос заключается в том, является ли такая ситуация типичной для динамических (гамильтоновых) систем с более чем двумя степенями свободы [3]). Арнольд также упоминает тот факт, что нет хотя бы приближенного доказательства существования зон неустойчивости (хоатическое движение) Пуанкаре в окрестности точки гиперболического типа. Мы хотим напомнить, что уже после этого Денби [6] для конкретной динамической системы показал, что в действительности такие зоны существуют. Хотя в его работе используются численные методы исследования, тем не менее, без сомнения, ясно, что такие зоны могут и не существовать.

Другой задачей является задача о больших возмущениях. Если рассматривать для сильно возмущенных систем исходный вопрос о существовании инвариантных торов, то можно видеть, что никакого прогресса в его решении нет, хотя Контопулос [5], исходя из полуаналитической точки зрения, получил очень интересные результаты, связанные главным образом с выводом о разрушении в конечном счете третьего интеграла движения.

Следующим и по трудности, и по важности вопросом является вопрос об обобщении теории Флоке — Ляпунова на случай условно-периодических систем. Если y — вектор размерности n, и дифференциальные уравнения для него $\dot{y} = Y(y)$ имеют периодическое решение $y = \bar{y}(\omega t)$ с периодом $T = 2\pi/\omega$, а $Y(\bar{y}) \neq 0$ при всех t, то соответствующая система уравнений в вариациях имеет вид

$$\delta\dot{y} = \frac{\partial Y}{\partial y}(\bar{y}(\omega t))\,\delta y.$$

В теории Флоке — Ляпунова устанавливается существование системы нормальных координат, в которых эта линейная система с периодическими коэффициентами сводится к линейной системе с постоянными коэффициентами. Другими словами, вводится такая угловая переменная θ и такой $(n-1)$-мерный вектор x, что

---

[1]) Такая устойчивость называется устойчивостью для большинства начальных условий (данных) или устойчивостью по Арнольду (*прим. перев.*).

[2]) Этот эффект называют еще «диффузией Арнольда» (*прим. перев.*).

[3]) Об оценке скорости «диффузии Арнольда» в многомерных гамильтоновых системах см. работы Н. Н. Нехорошева [38*—41*] (*прим. перев.*).

существует преобразование

$$y = \bar{y}(\theta) + F(\theta)\,x,$$

где F — 2π-периодическая матрица размерности $(n-1)\times n$. Это преобразование обладает следующими свойствами.

а) Уравнение $\dot{y} = Y(y)$ переходит в уравнения

$$\dot{\theta} = \omega + f(x, \theta), \qquad \dot{x} = g(x, \theta),$$

где $f(0, \theta) = g(0, \theta) = 0$.

б) Соотношения $\theta = \omega t + \text{const}$, $x = 0$, определяют периодическое решение $y = \bar{y}(\omega t)$.

в) Матрица $\partial g(0, \theta)/\partial x = \Omega$, имеющая размерность $(n-1)\times(n-1)$, не зависит от θ, так что вариационная система приводится к виду $\dot{\theta} = \omega$, $\delta\dot{x} = \Omega\delta x$. Собственные числа матрицы Ω являются характеристическими показателями Флоке — Ляпунова.

Теперь вопрос заключается в обобщении этих результатов на случай, когда уравнения $\dot{y} = Y(y)$ имеют условно-периодическое решение $y = \bar{y}(\omega_1 t, \ldots, \omega_m t)$, где вектор y имеет размерность n, а $m \leqslant n$ или $m > n$. Точнее, мы хотим знать, существует ли такая система нормальных координат $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, что уравнения $\dot{y} = Y(y)$ приводятся к виду

$$\dot{\theta} = F(\theta, x), \qquad \dot{x} = G(\theta, x),$$

где F, G — 2π-периодические функции по каждой переменной θ_k, а $F(\theta, 0) = \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) = \text{const}$ и $G(\theta, 0) = 0$. Условно-периодическое решение $\bar{y}(\omega t)$ переходит в решение $\theta_k = \omega_k t + \text{const}$, $x = 0$, а система уравнений в вариациях приобретает вид

$$\dot{\theta} = F(\theta, x), \qquad \delta\dot{x} = \frac{\partial G}{\partial x}(\theta, 0)\,\delta x,$$

где $\partial G(\theta, 0)/\partial x = \Omega$ — постоянная матрица размерности $p\times p$. Собственные числа матрицы Ω в этом случае были бы обобщенными показателями Флоке — Ляпунова для условно-периодического решения $\bar{y}(\omega t)$. С другой стороны, если сразу же дана система с этими свойствами, т. е. с самого начала известны нормальные координаты, то эквивалентной задачей является задача определения инвариантного многообразия $x = 0$. Таким многообразием, очевидно, являются торы размерности m, погруженные в $(p+m)$-мерное пространство, с угловыми координатами

$\theta_1, \ldots, \theta_m$ на них. Собственные числа $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$ матрицы Ω и компоненты $\omega_1, \ldots, \omega_m$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ являются характеристическими числами Мозера [19], а все ω_k по предположению являются рационально независимыми.

В таком обобщенном случае основное, что надо доказать, это — приводимость вариационной системы для условно-периодического решения. При $n = 1$ и $m \geqslant 2$ (условно-периодические решения одномерной системы) такая приводимость при некоторых условиях была показана, однако об остальных случаях ($n > 1$) ничего не известно. (См. работы Гельмана [8] и Андриановой [1], цитированные Арнольдом.)

Другой важной проблемой, упомянутой несколько выше, является изучение совокупности движений в окрестности положения равновесия. Для неканонических систем приводимость к нормальной форме была показана Зигелем [26], однако, как уже говорилось, для канонических систем необходимые предположения не могут быть выполнены. Общий случай изучения совокупности движений в окрестности периодического решения также является открытым вопросом для канонических систем. Он обсуждался в работе Зигеля [27], но остался нерешенным. Наиболее общей формой этой проблемы является грандиозная задача изучения совокупности движений в окрестности условно-периодического решения. Важные результаты в этой области были получены в работе Белаги [3]. Эта проблема, представленная Мозером [19] как задача о сохранении условно-периодических решений, уже обсуждалась выше. Его результаты похожи на результаты, полученные Белагой, главную теорему которого мы приводим ниже.

Теорема. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \Lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

где $\boldsymbol{x}$ — *вектор размерности* n, $\boldsymbol{y}$ — *вектор размерности* m, *матрица* $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *а* $\boldsymbol{f} = O(\boldsymbol{x}^2)$, $\boldsymbol{g} = O(\boldsymbol{x})$ — 2π-*периодические функции относительно* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. *Рассмотрим бесконечное количество условий*

$$|(k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n) - \varepsilon\lambda_j + \sqrt{-1}\,(l_1\omega_1 + \ldots + l_m\omega_m)| \geqslant$$
$$\geqslant K\,[\,|k_1| + \ldots + |k_n| + |l_1| + \ldots + |l_m|\,]^{-(m+n+1)}$$

для некоторого $K > 0$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $j = 1, \ldots, n$; *все числа* $k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m$ — *целые, а* $|k_1| + \ldots + |k_n| > 1 + \varepsilon$. *Тогда существует аналитическое преобразование*

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

приводящее данную систему к виду

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \Lambda \boldsymbol{X}, \qquad \dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{\omega}.$$

Функции φ, ψ — 2π-*периодические по* $y_1, \ldots, y_m$, *а* $\varphi = O(x^2)$, $\psi = O(x)$.

Однако такая теорема неприменима к каноническим системам в том смысле, что системы, удовлетворяющие описанным выше условиям относительно ω, Λ, образуют множество нулевой меры в пространстве (ω, Λ). Результаты Мозера только показывают существование сходящегося метода построения условно-периодических движений. Вся совокупность таких движений неизвестна.

Ясно, что все эти вопросы могут быть обобщены на случай динамических систем с более чем одной независимой переменной или на случай функциональных дифференциальных уравнений. Об этих уравнениях см. работу Хейла [11].

Другой проблемой, представляющей большой интерес, является вопрос о лучшем понимании решения «вдали, вблизи и при выполнении резонансных условий». Когда мы в действительности будем иметь процесс захвата в резонанс и какое наиболее предпочтительное определение резонанса системы? Для сильно возмущенных систем это — полностью открытый вопрос. Наличие диссипативных сил имеет здесь большое значение, но может и не быть решающим фактором при выборе некоторых устойчивых резонансных конфигураций. Интересный пример такого рода в небесной механике недавно был изучен в работах Коломбо [4] и Кинера [17]. Действительно, явление резонанса между средними движениями планет и их спутников, как орбитальными, так и движениями относительно центра масс, может служить темой для дискуссии. См., например, работы Гингерича [9], Хенона [12], Молчанова [20, 21] и Роя и Овендена [25][1]).

Существует также ряд вопросов, связанных с изучением динамических систем в алгебре Ли. Они могут быть связаны (а могут и не быть связаны) с методами теории возмущений, использующими преобразование Ли, хотя известно, что движение, соответствующее гамильтониану H, образует группу Ли в алгебре Ли, определенной скобками Пуассона $(F_i, F_j) = 0$, где $F_i (i, j = 1, \ldots, n)$ — интегралы системы уравнений с функцией Гамильтона H, если только они существуют. С этой точки зрения, используя алгебру Ли (для операторов), Мозер [19] описал ясный подход к изучению задачи возмущений условно-периодических движений. С помощью аналогичного подхода можно описать в более точных терминах методы теории возмущений, введенные Хори [13]. По существу, эту задачу можно рассматривать как задачу построения алгебры операторов и определения их области действия и нуль-пространства. В задаче формального приведения

---

[1]) Относительно различного рода синхронизмов в небесной механике см. также работы В. В. Белецкого, в частности, книги [43*, 42*] (*прим. перев.*).

к нормальной форме такие методы были использованы в работе Густавсона [10]. Мы не знакомы подробно с подобными приложениями, за исключением только работ Лейманиса [18] по изучению движения твердого тела. Однако в области квантовой механики такой подход весьма распространен (алгебра коммутаторов). Связь этих вопросов с задачами небесной механики была установлена в различных работах Кустаанхеймо [15, 16] и Нуотио [22] по алгебре спиноров. К сожалению, эти вопросы не являются легко доступными для специалистов, работающих в области астрономии, техники и физики, так как требуют больших знаний алгебры.

Очевидно, список открытых вопросов и исследуемых задач бесконечен, и всегда можно только приветствовать различного рода обобщения известных результатов. Трудно только предвидеть, какие обобщения могут сыграть важную роль в прикладных науках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианова Л. Я. Приводимость системы n линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами.—Вестник ЛГУ, 1962, т. 17, № 7, стр. 14—24.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.—УМН, 1963, т. 18, № 6, стр. 91—192.
3. Белага Э. Т. О приводимости обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно-периодического движения.—ДАН СССР, 1962, т. 143, № 2, стр. 255—258.
4. Colombo G. Rotational period of the planet Mercury (Letter to editor).— Nature, 1965, vol. 208, p. 575.
5. Contopoulos G. Orbits in highly perturbed dynamical systems.— Astron. J., 1970, vol. 75, № 1, p. 96—107; p. 108—130. 1971, vol. 76, № 2, p. 147—156.
6. Danby J. M. A. Wild dynamical systems.—В кн.: Periodic Orbits, Stability and Resonances /Ed. G. E. O. Giacaglia.— Dordrecht, Holland: Reidel Publ. Co., 1970.
7. Feagin T. W. Numerical solution of two-point boundary value problems using Chebyshev series. Ph. D. Thesis, College of Engineering, Univ. of Texas at Austin, 1972.
8. Гельман А. Е. О приводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.—ДАН СССР, 1957, т. 116, № 4, стр. 535—537.
9. Gingerich O. Kepler and the resonant structure of the Solar system.— Icarus, 1969, vol. 11, p. 111—113.
10. Gustavson F. A. On constructing formal integrals of a hamiltonian system near an equilibrium point.— Astron. J., 1966, vol. 71, № 8, p. 670—686.
11. Hale J. K. Functional differential equations.— New York, Berlin: Springer-Verlag, 1971.
12. Henon M. A comment an 'The resonant structure of the Solar system by A. M. Molchanov.— Icarus, 1969, vol. 11, p. 93—94.

13. Hori G. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables.— J. Japan. Astron. Soc., 1966, vol. 18, № 4, p. 287—296.
14. Jefferys W. H. A Fortran-based list processor for Poisson series.— Celest. Mech., 1970, vol. 2, № 4, p. 474—477.
15. Kustaanheimo P., Nuotio V. S. Spinor algebra, I. Preprint No. 1, Dept. of Appl. Math., Univ. of Helsinki, 1965.
16. Kustaanheimo P., Nuotio V. S. Lectures on celestial mechanics. Preprint No. 2, Dept. of Appl. Math., Univ. of Helsinki, 1966.
17. Kyner W. T. Passage through resonance.— В кн.: Periodic Orbits, Stability and Resonances /Ed. G. E. O. Giacaglia.— Dordrecht, Holland: Reidel Publ. Co., 1970.
18. Leimanis E. The general problem of motion of coupled rigid bodies about a fixed point.— New York, Berlin: Springer-Verlag, 1965.
19. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды.—УМН, 1969, т. 24, № 2, стр. 165—211.
20. Molchanov A. M. Resonances in complex system: a reply to critiques.— Icarus, 1969, vol. 11, p. 95—103.
21. Molchanov A. M. The reality of resonances in the Solar system.— Icarus, 1969, vol. 11, p. 104—110.
22. Nuotio V. S. Generalized motor electrodynamics.— Ann. Acad. Sci. Fennicae, Series A, VI. Phys., 1970, vol. 351, p. 1—37.
23. Rom A. Mechanized algebraic operations.— Celest. Mech., 1970, vol. 1, № 3/4, p. 301—319.
24. Rom A. Echeloned series processor.— Celest. Mech., 1971, vol. 3, № 3, p. 331—345.
25. Roy A., Ovenden M. On the occurrence of commensurable mean motions in the Solar system, I, II.— Mont. Not. Roy. Astron. Soc., 1954, vol. 114, p. 232; 1955, vol. 115, p. 296.
26. Зигель К. Л. О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия.—Математика, 1961, т. 5, № 2, стр. 119—128.
27. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: ИЛ, 1959.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

(используется в примечаниях редактора и переводчика и приводится в порядке упоминания в тексте)

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.— М.: Наука, 1973.
2. Синг Дж. Л. Классическая динамика.— М.: Физматгиз, 1963.
3. Херрик С. Астродинамика, т. 1.— М.: Мир, 1976.
4. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения.— М.: Наука, 1968.
5. Брюно А. Д. Асимптотика решений нелинейных дифференциальных уравнений.—ДАН СССР, 1962, т. 143, № 2, стр. 763—766.
6. Брюно А. Д. Степенные асимптотики решений нелинейных систем.— Изв. АН СССР. Сер. «Математика», 1965, т. 29, № 2, стр. 329—364.
7. Брюно А. Д. О степенных асимптотиках решений нелинейных систем.— М.: ИМП АН СССР, 1973, препринт № 51.
8. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений.— Труды Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25, стр. 119—262; 1972, т. 26, стр. 199—239.
9. Брюно А. Д. Множества аналитичности нормализующего преобразования.— М.: ИПМ АН СССР, 1974, препринт № 98.
10. Брюно А. Д. Аналитические интегральные множества.— М.: ИПМ АН СССР, 1975, препринт № 86.
11. Брюно А. Д. Нормальная форма в нелинейных задачах.—М.: ИМП АН СССР, 1976, препринт № 18.
12. Брюно А. Д. Нормальная форма и методы осреднения.—ДАН СССР, 1976, т. 230, № 2, стр. 257—260.
13. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика.—М.: Наука, 1975.
14. Chapront J., Mangeney L. Développements littéraux dans la théorie analytique de la Lune.— Astron. and Astrophys., 1969, No. 2, p. 425—437.
15. Chapront J. Construction d'une théorie littérale plané taire jusqu'au second order des masses.— Astron. and Astrophys., 1970, No. 7, p. 175—203.
16. Cherniack J. R. A more general system for Poisson series manipulation.— Celest. Mech., 1973, vol. 7, № 1, p. 107—121.
17. Брумберг В. А. Небесно-механические методы проведения буквенных операций на ЭВМ.—Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1974.
18. Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем.—М.: ИПМ АН СССР, 1976, препринт № 31.
19. Мельников В. К. Об одном семействе условно-периодических решений систем Гамильтона.—ДАН СССР, 1968, т. 161, № 3, стр. 546—549.
20. Sokolsky A. G. On the stability of small quasiperiodic motions in the hamiltonian systems.— Celest. Mech., 1978, vol. 17, p. 373—394.
21. Dulac H. Solutions d'un systeme d'equations differentielles dans le voisinage des valeurs singulieres.— Bul. Math. de France, 1912, t. 40, p. 324—383.

22. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.
23. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел.— ПММ, 1969, т. 33, № 1, стр. 112—116.
24. Сокольский А. Г. Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс.—Письма в АЖ, 1978, т. 4, № 3, стр. 148—152.
25. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел.—ПММ, 1973, т. 37, № 4, стр. 753—757.
26. Брюно А. Д. Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов.—Матем. сб., 1970, т. 83, № 2, стр. 273—312.
27. Маркеев А. П. О методе точечных отображений и некоторых его приложениях в задаче трех тел.— М.: ИМП АН СССР, 1973, препринт № 49.
28. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в системе Солнце — Юпитер.—Астрон. ж., 1974, т. 51, № 3, стр. 627—634.
29. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1977.
30. Deprit A., Delie A. Trojan orbits. I. d'Alember series at L_4.— Icarus, 1965, vol. 4, No 3, p. 242—266.
31. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка.— ПММ, 1977, т. 41, № 1, стр. 24—33.
32. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.—М., Изд-во АН СССР, 1962.
33. Koiter W. T. On the instability of equilibrium in the absence of a minimum of the potential energy.— Proc. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Ser. B, 1965, vol. 68, No 3, p. 107—113.
34. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. — ПММ, 1968, т. 32, № 4, стр. 738—744.
35. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем.— ПММ, 1970, т. 34, № 6, стр. 997—1004.
36. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот.—ПММ. 1974, т. 38, № 5, стр. 791—799.
37. Schmidt D. S. Periodic solutions near a resonant equilibrium of a hamiltonian system.— Celest. Mech., 1974, vol. 9, № 1, p. 81—103.
38. Нехорошев Н. Н. О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.— Функц. анализ, 1971, т. 5, № 4, стр. 82—83.
39. Нехорошев Н. Н. Устойчивые оценки снизу для гладких отображений и для градиентов гладких функций.—Матем. сб., 1973, т. 90, № 3, стр. 432—478.
40. Нехорошев Н. Н. Метод последовательных канонических замен переменных. Добавление к книге Ю. Мозера «Лекции о гамильтоновых системах».—М.: Мир, 1973, стр. 150—164.
41. Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.—УМН, 1977, т. 32, № 6, стр. 5—66.
42. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле.—М.: Изд-во МГУ, 1975.
43. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. Изд. 2-е.—М.: Наука, 1977.
44. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.

45. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.
46. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике.— М.: Наука, 1971.
47. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1971.
48. Найфэ А. Х. Методы возмущений.—М.: Мир, 1976.
49. Старжинский В. М. Прикладные методы нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1977.
50. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
51. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.— М.: Наука, 1978.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрахам (Abraham R.) 14, 49, 53
Альмухамедов 299, 300
Андриянова Л. Я. 308, 310
Андронов А. А. 228, 234, 254, 298, 300
Андуайе (Andoyer H.) 89, 133
Арнольд В. И. 49, 53, 73, 78, 93, 138, 140, 146, 147, 150, 153, 157, 169, 170, 174, 175, 182, 196, 200, 207, 228, 229, 231, 238, 294, 300, 305, 310, 313

Бакаи (Bakai A. S.) 293, 300
Бекер (Baker H. F.) 238, 300
Барбанис (Barbanis B.) 127, 133
Баррар (Barrar R. B.) 142, 148, 149, 152, 181, 183
Баутин Н. Н. 299, 300, 313
Белага Э. Т. 308, 310
Белецкий В. В. 309, 313
Бергер (Berger M.) 297, 300
Биркгоф (Birkhoff G. D.) 9, 14, 48, 50, 53, 83, 133, 170, 183, 189, 190, 196, 197, 221, 223, 234
Блакьер (Blaquière A.) 299, 300
Боголюбов Н. Н. 8, 9, 48, 51, 53, 73, 130, 133, 135, 157, 177, 178, 183, 236, 253, 300, 302
Бозис (Bozis G.) 55, 127, 133
Бохлин (Bohlin K.) 8, 236, 254, 257
Браун (Brown E. W.) 8, 50, 51, 180, 181, 183, 237, 300
Брауэр (Brouwer D.) 49, 50, 81, 128, 134, 141, 183
Бревес (Breves J. A.) 19, 50
Брумберг В. А. 129, 305, 312
Брюно А. Д. 84, 175, 190, 312, 313
Бурштейн Э. Л. 27, 49, 50, 73
Бхатиа (Bhatia N. P.) 300

Вазов (Wasow W.) 228, 235
Ван дер Поль (van der Pol B.) 157, 184
Витт А. А. 254, 298, 300
Волосов В. В. 133, 137,

Гарфинкель (Garfinkel B.) 66, 268, 300, 301
Гельман А. Е. 308, 310
Гельфанд И. М. 127, 134, 169, 183, 252, 301
Гингерич (Gingerich O.) 309, 310
Голдстейн (Goldstein H.) 23, 89, 135
Гордон И. П. 298, 300
Гребеников Е. А. 313
Гурса (Goursat E.) 56, 135
Густавсон (Gustavson F. A.) 190, 222, 234, 289, 301, 310
Гэмбилл (Gambill R. A.) 48, 163, 183

Дарвин (Darwin G. H.) 49, 50
Дели (Delie A.) 242, 313
Делоне (Delaunay C. E.) 8, 47, 50
Демин В. Г. 75, 312
Депри (Deprit A.) 30, 34, 39, 41, 83, 89, 129, 131, 169, 242, 305, 313
Депри-Барсоломе (Deprit-Bartholomé A.) 169, 183
Джакалья (Giacaglia G. E. O.) 8, 41, 47, 71, 91, 94, 100, 127, 131, 132, 165, 180, 181, 252, 270, 274, 293, 299, 301
Джеффрис (Jefferys W. H.) 41, 50, 132, 135, 305, 311
Дилиберто (Diliberto S. P.) 27, 49, 50, 53, 134, 233, 234, 253, 301
Дирак (Dirac P. A. M.) 49, 51, 134
Дэнби (Danby J. M. A.) 49, 50, 196, 234, 289, 301, 306, 310
Дюляк (Dulac H.) 163, 312

Жупп (Jupp A. H.) 266, 268, 300

Зигель (Siegel C. L.) 14, 23, 28, 48, 49, 53, 54, 83, 140, 162, 180, 184, 189, 222, 224, 235, 297, 303, 308, 311
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 233, 235

Калей (Caley A.) 57, 134
Канторович Л. В. 168, 183
Картан (Cartan E.) 43, 50
Картс (Kurth R.) 49, 51
Картсатос (Kartsatos A. G.) 228, 234
Касуга (Kasuga T.) 228, 234
Кеворкян (Kevorkian J.) 119, 135, 278, 302
Кинер (Kyner W. T.) 8, 27, 48, 50, 51, 53, 73, 78, 130, 136, 226, 233, 234, 235, 237, 254, 266, 268, 290, 299, 302, 309
Клеменс (Clemence G. M.) 49, 50, 81, 141, 134, 183
Ковалевский (Kovalevsky J.) 129, 135
Койтер (Koiter W. T.) 276, 313
Коксма (Koksma J. F.) 140, 167, 183
Колмогоров А. Н. 13, 49, 51, 53, 78, 135, 140, 168, 183, 195, 200, 234
Коломбо (Kolombo G.) 309, 310
Конти (Conti R.) 53, 137, 298, 303
Контопулос (Contopoulos G.) 55, 84, 85, 134, 127, 232, 234, 283, 286, 287, 300, 301, 305, 310
Коул (Cole J. D.) 119, 278, 301
Крускал (Kruskal M.) 228, 234
Крылов Н. М. 8, 9, 48, 51, 53, 135, 157, 183, 236, 302
Кустаанхеймо (Kustaanheimo P.) 127, 135, 310, 311
Кэмел (Kamel A.) 43, 49, 51, 115, 116, 119, 135
Кэмпбелл (Campbell J. A.) 41, 54

Ландау Л. Д. 23, 312
Ларичева В. В. 130, 136
Ла-Салль (La Salle J. P.) 254, 276, 298, 299, 302
Левинсон (Levinson N.) 233, 235
Леви-Чивита (Levi-Civita T.) 69, 136

Лейманис (Leimanis E.) 27, 49, 51, 93, 136, 310, 311
Леонтович А. М. 169, 183
Леонтович Е. А. 298, 300, 313
Лефшец (Lefschetz S.) 8, 53, 136, 254, 276, 298, 302
Ли (Lie M. S.) 27, 29, 51
Лидский В. Б. 127, 134, 169, 183, 252, 301
Линдстедт (Lindstedt A.) 7, 8, 47, 51, 53, 63, 136
Лифшиц Е. М. 23, 312
Лоуд (Loud W. S.) 233, 235
Лутерман (Louterman G.) 137
Ляпунов А. М. 236, 302

Майер А. Г. 298, 300
Макмиллан (Mac Millan W. D.) 11, 52, 49, 55, 57, 127, 136
Малкин И. Г. 253, 299, 300, 302
Маркеев А. П. 129, 169, 170, 190, 287, 305, 312, 313
Мейрович (Meirovitch L.) 230, 235
Мельников В. К. 129, 312
Мерман Г. А. 49, 52
Мерсман (Mersman W. A.) 30, 41, 52, 110, 120, 136
Минер (Miners W. E.) 50, 52
Минорский (Minorsky N.) 53, 93, 136
Митропольский Ю. А. 53, 73, 130, 133, 157, 177, 183, 236, 253, 290, 300, 302, 313
Мозер (Moser J. K.) 9, 14, 27, 28, 49, 52, 53, 71, 78, 109, 128, 129, 130, 136, 140, 142, 150, 157, 161, 166, 168, 169, 170, 174, 177, 178, 181, 183, 184, 197, 200, 203, 207, 209, 218, 223, 226, 235, 252, 254, 294, 295, 299, 302, 308, 309
Молчанов А. М. 309, 311
Мультон (Moulton F. R.) 52, 49, 61, 136
Мьюзен (Musen P.) 133, 136
Мэндженей (Mangeney L.) 129, 312

Найфэ (Nayfeh A. H.) 313
Немыцкий В. В. 53, 136, 238, 254, 290, 298, 299, 300, 302
Нехорошев Н. Н. 313, 306
Нуотио (Nuotio V. S.) 310, 311
Нэш (Nash P.) 168, 184

Овенден (Ovenden M.) 309, 311

Пауэрс (Powers W. F.) 50, 52
Пейксото (Peixoto M. M.) 238, 303
Плисс В. А. 53, 137, 233, 235, 313
Пуанкаре (Poincarè A.) 8, 9, 41, 47, 48, 52, 53, 55, 75, 88, 137, 163, 197, 235, 236, 255, 268, 303
Пуассон (Poisson S. D.) 49, 52

Розе (Roseau M.) 253, 299, 303
Рой (Roy M.) 309, 311
Ром (Rom A.) 83, 89, 129, 131, 132, 134, 242, 305, 311
Рул (Roels J.) 137, 297, 298, 303
Рюсман (Rüsmann H.) 140, 184, 223, 235
Рябов Ю. А. 313

Сансоне (Sansone G.) 53, 137, 298, 303
Себехей (Szebehely V.) 48, 52, 127, 137
Сего (Szegö G. P.) 298, 300
Синг (Sing G. L.) 23, 312
Сокольский А. Г. 1, 129, 169, 243, 287, 295, 305, 312, 313
Соловьев Л. С. 27, 49, 50, 73
Старжинский В. М. 163, 312, 313
Степанов В. В. 53, 136, 254, 290, 298, 302
Стернберг (Sternberg S.) 53, 137
Стремгрен (Stromgren E.) 48, 52

Тиссеран (Tisserand F.) 8, 47, 52
Тэпли (Tapley B. D.) 50, 52, 132, 133, 134

Уинтнер (Wintner A.) 48, 52, 53, 137
Уиттекер (Whittaker E. T.) 53, 81, 84, 88, 137, 140, 184, 186, 235, 236, 241, 245, 303
Уолтьер (Woltjer L.) 127, 134
Урабе (Urabe M.) 254, 299, 303

Фиджин (Feagin T. W.) 305, 310
Фрунд (Freund R. F.) 27, 50

Хагедорн (Hagedorn P.) 276, 301
Хаджидеметриос (Hadjidemetrious J. P.) 85, 134
Хайкин С. Э. 254, 298, 300
Халлам (Hallam T. G.) 228, 234
Хаффорд (Hufford G.) 49, 50, 233, 234
Хейл (Hale J. K.) 27, 48, 49, 51, 53, 129, 130, 135, 163, 183, 233, 234, 249, 252, 253, 298, 299, 302, 309, 310
Хейлес (Heiles C.) 127, 135, 222, 234, 289, 302
Хенон (Henon M.) 127, 135, 222, 234, 289, 302, 309, 310
Хенрард (Henrard J.) 135, 119, 297, 298, 302
Херрик (Herrick S.) 49, 312
Хинчин А. Я. 167, 183
Хори (Hori G.) 29, 43, 49, 51, 104, 112, 115, 119, 120, 132, 135, 266, 282, 300, 302, 309, 311

Цейпель (Zeipel H.) 8, 79, 137, 128, 236, 303

Чезари (Cesari L.) 8, 48, 49, 50, 53, 131, 134, 163, 183, 249, 252, 290, 298, 301
Чен (Chen Y.) 299, 301
Черняк (Cherniack J. R.) 129, 305, 312
Четаев Н. Г. 276, 313
Чой (Choi J. S.) 132, 133, 134

Шапрон (Chapront J.) 129, 312
Шейфеле (Scheifele G.) 127, 130, 312
Шмидт (Schmidt D. S.) 297, 298, 313
Шнайад (Shniad H.) 40, 52, 109
Штифель (Stiefel E. L.) 127, 130, 312

Эйлер (Euler L.) 8, 47, 51, 53, 134
Эльсгольц Л. Э. 254, 299, 300, 301

Якубович В. А. 48, 163, 312

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабатическая инвариантность 231
Адиабатический инвариант 228
Арнольда теорема 170
Асимптотическое разложение 263

Базисные частоты 194
Биркгофа нормализация 55, 78, 131, 174
— —, связь с проблемой Пуанкаре 83
— нормальная форма 54, 190, 221
Боголюбова теорема 177
Бохлина уравнение 238

Ван дер Поля уравнение 123, 157, 163
Вариация 9, 11, 14
— интегралов 49
Вечный инвариант 228
Возмущения 12, 138, 139
— линейные периодические 163
— линейных колебаний 155
— — —, задача 157
Волчок симметричный 89
Вращение 65, 254, 259
Вырождение 73, 151
— предельное 177
— собственное 174, 177
Вырожденные системы 150, 220

Гамильтона главная функция 68
— функция 24
Гамильтона — Якоби проблема 25
— — производящая функция 194
— — уравнение 24, 39, 128
Гамильтонова система 11
Гармонический осциллятор 47, 126, 282
Генератор 39
Гиперболического типа точки 193
Группа симплектическая 22

Даламбера характеристики 242
Движение астероидов 236
—на торах 170
— условно-периодическое 194
Дирака пространство 66
Диффузия Арнольда 306
Долгопериодическая функция 76
Дополнительная система 106, 113
Дополнительные интегралы 84, 104
Дюффинга уравнение 112, 181

Задача классическая о магнитных ловушках 231
— Мозера 197
— о возмущениях линейных колебаний 157
— о движении маятника 237
— трех тел ограниченная 48
Задач классические динамики 168
Закон количества движения и импульса 11
— энергии и работы 10
Захват в резонанс 237, 289, 309

Идеальная резонансная проблема 267
Инвариант адиабатический 228
— вечный 228
Инвариантная поверхность возмущенной системы 233
Инвариантность адиабатическая 231
Инвариантные кривые 197, 199
Интеграл Ковалевской 93
— третий 232, 283, 300
— энергии 10, 267
Интегралы дополнительные 55, 78, 84, 93, 104
— формальные 222, 229
Интегрируемость 53, 54, 126
— Лиувилля 69
Иррациональность 167
—, обобщенное условие Зигеля 219
Исключение переменных 77
Искусственные спутники 49, 181

Каноническое возмущение 26
— отображение 33
— преобразование 14, 19
Каноничность полная 23, 24
Ковалевской интеграл 93
Колебания 61, 254, 259
Короткопериодическая функция 76
Кручения коэффициент 203
— отображение 127, 224
— условие 225

Лагранжа матрица 14, 16
— скобки 15
— уравнения 16
Ли алгебра 309
— генератор 30, 109, 113
— каноническое отображение 49
— преобразование 28, 34, 38, 104, 109, 115, 309
— —, зависящее от параметра 34
— производная 31
— ряды 28, 34, 36, 40, 49
— теорема 29, 32, 41
Линейные колебания 155, 157
Линдстедта метод 66, 286
Лиувилля теорема 18

Магнитные ловушки 231
Малые знаменатели 139
Манипулятор алгебраический символьный 305
Матрица Лагранжа 14
— Пуассона 14, 15, 17, 21
— симплектическая 187
— Якоби 11, 216
Маятник 268
— простой 61, 228, 237, 278
Метод итераций классический, сходимость 55
— КВМ 73, 129
— Линдстедта 68, 128

Метод Пикара 60
— Пуанкаре 39, 41, 66, 80, 128
— усреднения 27, 53, 78, 250, 304
— — Крылова — Боголюбова 8
— — Линдстедта — Пуанкаре 56
— Цейпеля 41, 109, 128, 242, 243, 268
— Эйткена 304
Методы теории возмущений 53, 115
Многообразия инвариантные 140, 233
Момент кинетический 10

Неинтегрируемость 54
Нелинейный характер движения 231
Неподвижная точка 185, 189
— — неособая 186
— — особая 186
Неустойчивость топологическая 306
Нормализация 28, 79, 248, 256
Нормальные колебания 221
— координаты 306
Ньютоновское приближение 141, 304

Область колебаний 257
Обычная точка 186
Ограниченная задача трех тел 48
Операция сглаживания 207
Опорное решение 12, 63, 88
Особая точка 186
Осциллятор 236
—, захват в резонанс 237
— нелинейный 254
Осцилляторное решение 290
Осцилляторы гармонические 282
Отделимость 54
Отображение кручения 197, 224
—, неподвижная точка 185, 186, 189
Отображения, сохраняющие меру 223
—, — площадь 185, 189, 197
—, — —, задача Мозера 197

Первые интегралы движения 106
Переменные быстрые 73, 76, 129
— действие — угол 53, 69, 71, 230
— медленные 73, 76, 129
Периодические возмущения 163
— поверхности 27
Пикара метод 60
Планетное движение 175
Поверхности периодические 126
— сечения 55
Полное решение 26
Положение равновесия 238
— — эллиптического типа 156
Порядок члена 243
Предельный цикл 125
Преобразование векторное 46
— каноническое 24
— — свободное 24
— кручения 78, 224
— обратное к каноническому 34
— обращения 130
— однородное 23
—, полностью каноническое 23, 29
—, сохраняющее площадь 186
— точечное каноническое 23
Преобразования обобщенные 42
—, эквивалентность 39
Приводимость 308
Принцип минимума энергии 238
Производящая функция 26
— — тождественного преобразования 69
Произвольные постоянные 16
Пространство котангенциальное 53
Процедура усреднения 71
Пуанкаре метод 39, 41, 66, 80, 128, 130
Пуассона матрица 14, 15, 17, 21
— скобки 15
— уравнение 10

Разложение по двум переменным 119, 278
Резонанс 8, 58, 236, 289
—, асимптотическое разложение 263
— идеальный 266, 270, 288
—, кратность 294
— нелинейный 253, 289
—, общая проблема 73
— простой 294
Резонансная кривая 292
Резонансные области 167
Рекуррентный алгоритм 45
Решение опорное 88
— периодическое неособое 186
— — особое 186
— —, существование 130
— —, устойчивость 130
— почти-периодическое, существование 253
Ряды формальные 12, 243

Сглаживание 207
Седло 254, 259, 292
Секулярный член 7, 11, 47, 61, 93
Сепаратриса 254, 259
Симплектическая группа 22
Система возмущенная 16
— —, инвариантная поверхность 233
— гамильтонова 11
— дополнительная 106, 123
— «слабо завязанная» 280
Системы вырожденные 152, 220
— интегрируемые 138, 139, 233
— линейные 249
— негамильтоновы 115
Смешанные секулярные члены 7, 11, 47, 63
Сохранение объема 23
Среднее значение 70
Степени дробные 58
Сходимость 55
— ускоренная 304

Теорема Арнольда 153, 170
— Боголюбова 177
— Колмогорова 140, 145, 148, 151, 173, 181, 202
— Лиувилля 18
— Ляпунова 297
— Мозера 196, 203, 218, 220, 224
— Раусса, обращение 276
— Якоби 11, 68
— — Пуанкаре 22
Теория Луны 47, 304
— Флоке — Ляпунова 306
— Хори 41
Топологическая неустойчивость 306
Точки гиперболического типа 196
— эллиптического типа 196
Третий интеграл 232, 285, 287

Уравнение Ван дер Поля 123
— простого маятника 278
— Пуассона 10
— разностное 205
— Хилла 179
Условие кручения 225
— обобщенное иррациональности Зигеля 219
Условно-периодические движения 138, 194

Условно-периодическая функция 70
Условно-периодическое решение 178, 195, 307
Усреднение 11, 27, 48, 53, 55, 78, 107, 250, 304
—, метод Крылова — Боголюбова 8
—, обобщение процедуры 78
—, процедура 71
Устойчивость по Арнольду 306
— — мере 305
— точки эллиптического типа 169

Фокус 125
Функция долгопериодическая 76, 153
— короткопериодическая 76, 153
— производящая Гамильтона — Якоби 194
— свободная от секулярных членов 70
— условно-периодическая 70, 193
— — —, среднее значение 70
— чисто условно-периодическая 70, 72
— эллиптическая Якоби 260

Хаотическое движение 306
Характеристики Даламбера 242
Характеристические показатели 8, 163, 307
— числа 308
Хилла уравнение 165, 179
Хори теория 41

Центр 254, 259, 292

Частоты базисные 194

Эйлера — Лагранжа метод 9
— углы 89
Эквивалентность методов Ли и Цейпеля 109
— преобразований 39, 40
Эллиптического типа точки 196

Якоби матрица 14, 216
— — симплектическая 11
— теорема 11
— функция эллиптическая 260

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора 5
Предисловие 6
Введение 7

Глава I. **Теория канонических преобразований. Обобщения** . . . 14
1. Введение 14
2. Канонические преобразования 19
3. Уравнение Гамильтона — Якоби. Обобщения 24
4. Ряды Ли и преобразования Ли 28
5. Преобразование Ли, зависящее от параметра 34
6. Эквивалентность преобразований 39
7. Обобщенные преобразования на основе рядов Ли 42
8. Замечания 47
Литература 50

Глава II. **Методы теории возмущений для гамильтоновых систем. Обобщения** 53
1. Введение 53
2. Сходимость классического метода итераций 55
3. Секулярные члены. Способ Линдстедта 61
4. Метод Пуанкаре (метод Линдстедта) 66
5. Быстрые и медленные переменные 73
6. Обобщение процедуры усреднения, нормализация Биркгофа и дополнительные интегралы 78
7. Решение задачи Пуанкаре с помощью скобок Пуассона. Уничтожение секулярных членов в дополнительных интегралах . . 93
8. Методы теории возмущений, основанные на преобразованиях Ли 104
9. Методы теории возмущений для негамильтоновых систем, основанные на преобразованиях Ли 115
10. Замечания 126
Литература 133

Глава III. **Возмущения интегрируемых систем** 138
1. Движение, описываемое интегрируемой системой 138
2. Возмущения интегрируемых систем 139
3. Вырожденные системы 152
4. Возмущение линейных колебаний 155
5. Линейные периодические возмущения 163
6. Замечания 167
Литература 182

Глава IV. **Возмущения отображений, сохраняющих площадь** . . 185
1. Предварительные соображения 185
2. Области движения. Возмущения укороченной нормальной формы Биркгофа 193
3. Теоремы Мозера 196

4. Системы со многими степенями свободы 200
5. Вырожденные системы 220
6. Замечания 221
Литература 234

Глава V. **Резонансы** 236
1. Введение 236
2. Движение в окрестности положения равновесия 238
3. Решение с помощью формальных рядов 243
4. Эквивалентность проблеме возмущения линейных систем . . 249
5. Нелинейный резонанс 253
6. Асимптотические разложения до любого порядка 263
7. Общая теория и идеальная резонансная проблема 266
8. Несколько степеней свободы 275
9. Взаимодействие двух гармонических осцилляторов . . . 282
10. Замечания 289
Литература 300

Заключение. Замечания, некоторые открытые вопросы и исследуемые задачи 304
Литература 310
Литература, добавленная при переводе 312
Именной указатель 315
Предметный указатель 317