## Дополнение II

# МЕТОД ВКБ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

*В. П. Маслов*

В книге Дж. Хединга изучается асимптотическое поведение решений уравнения

$$-h^2y'' + [u(x) - \lambda]\, y = 0 \qquad (1)$$

при $h \to 0$. Основная задача заключается в том, чтобы «сшить» асимптотику решения в областях $u(x) > \lambda$ и $u(x) < \lambda$. Важной задачей, не рассмотренной в книге, является изучение асимптотического поведения решения в окрестности нулей функции $u(x) - \lambda$ (точек «поворота»).

Метод, изложенный в книге, существенно одномерный и не переносится на многомерный случай. Роль точек поворота в многомерном случае играют фокальные точки (по другим терминологиям «каустические», «сопряженные», «точки Якоби», точки на огибающих) решений некоторой системы уравнений Гамильтона. К проблеме изучения поведения решения уравнения в частных производных вблизи таких точек и вдали от них приводит широкий класс математических и физических задач: поведение разрывов решений гиперболических уравнений в целом, задачи коротковолновой дифракции и рефракции, асимптотика решения задачи Коши для гиперболических систем с осциллирующими начальными данными, полуклассическая асимптотика задач квантовой механики, асимптотика собственных функций и собственных значений эллиптических операторов и т. д.

В настоящем добавлении приведена асимптотика решений многомерного аналога уравнения (1). Полученная асимптотика равномерна по $x$ и, следовательно, пригодна как вблизи фокальных точек, так и вдали от них.

Основные результаты требуют для своей формулировки введения некоторых предварительных понятий. Эти результаты изложены в теоремах 4 и 5.

Метод, которым мы действуем, сводит нахождение многомерной асимптотики к простой топологической задаче о некоторых индексах пересечения одномерных путей на $n$-мерных поверхностях в $2n$-мерном евклидовом пространстве. Существенную роль играют так называемые индексы по Морсу. План этого приложения состоит в следующем: вначале мы изложим одномерный метод ВКБ (который рассмотрен в книге Хединга) в терминах, удобных для обобщений на многомерный случай. Сама по себе эта формулировка уже приводит к некоторой новой точке зрения на задачу о нахождении асимптотики даже в одномерном случае. Затем будет изложен общий случай, когда размерность произвольна.

Основные теоремы приводятся в таком виде, чтобы они охватывали уравнения квантовой механики для многих частиц во внешнем электромагнитном поле с общим взаимодействием (в том числе и магнитным) в случае, когда часть частиц — тяжелые (квазиклассические), а часть частиц — легкие (квантовые).

## § 1. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Мы будем действовать по следующему плану.

Для построения асимптотических формул, равномерных по $x$ на всей оси $x$, нам придется вначале сконструировать некоторый оператор, зависящий от параметра $h$, отображающий пространство функций на заданной кривой Г в фазовой плоскости $p$, $q$ в пространство функций на прямой $q$. Для конструкции этого оператора, названного каноническим, вводится понятие индекса пути на кривой, и кривая покрывается интервалами, взаимно однозначно проектируемыми[1]) на одну из координатных осей ($p$ или $q$). Вначале канонический оператор определяется локально — для каждого из таких интервалов, а затем с помощью разбиения единицы строится оператор для всей кривой Г. Канонический оператор, вообще говоря, зависит от способа покрытия кривой Г интервалами и от способа разбиения единицы. Оказывается, од-

[1]) Под этим понимается, что проекция является диффеоморфизмом (гладким взаимно однозначным отображением с невырожденным якобианом).

нако, что если кривая не замкнута, то эта зависимость проявляется лишь на величинах первого порядка малости относительно параметра $h$. То же справедливо и для замкнутой кривой при условии, что площадь, ограниченная кривой, удовлетворяет некоторому соотношению, которое в физической литературе называется условием квантования Бора. При помощи канонического оператора мы выразим известную асимптотику собственной функции стационарного уравнения Шредингера, а также асимптотику решения задачи Коши для временнóго уравнения Шредингера. Приводимые в этом параграфе теоремы являются частным случаем более общих теорем (когда число измерений произвольно). Общие теоремы формулируются и доказываются в § 2—4. В этом параграфе все теоремы приводятся без доказательств.

## 1. Топологические предложения

Рассмотрим ограниченную гладкую несамопересекающуюся кривую $\Gamma$ (не обязательно замкнутую) на фазовой плоскости[1]), определяемую уравнениями $q = q(\alpha)$, $p = p(\alpha)$. Параметр $\alpha$ можно считать, например, длиной дуги, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки. Точку кривой $\Gamma$ с координатами $q(\alpha)$, $p(\alpha)$ будем также обозначать $\alpha$. Назовем точки кривой $\Gamma$, в которых выполняется условие $dq/d\alpha \neq 0$, *неособыми* или, более подробно, неособыми относительно операции проектирования кривой $\Gamma$ на координатную ось $q$ параллельно оси $p$. Остальные точки назовем *особыми*.

Предположим вначале, что множество $M$ особых точек конечно и что особые точки таковы, что при переходе через них производная $dq/dp$ вдоль $\Gamma$ меняет знак. Сопоставим каждой точке $\alpha \in M$ единичный касательный вектор $\mathbf{e}_\alpha$ в направлении возрастания $dq/dp$ (т. е. в сторону положительного значения $dq/dp$).

Определим индекс пути $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$ с началом в неособой точке $\alpha^1$ и концом в неособой точке $\alpha^2$ следующим образом: если путь проходит особую точку $\alpha$ в нап-

---

1) Точнее, одномерное гладкое подмногообразие (возможно, открытое).

равлении вектора $\mathbf{e}_\alpha$, то к индексу прибавляется 1, если в противоположном направлении — то вычитается 1. Индекс пути $l[\alpha^1, \alpha^2]$ обозначается символом $\operatorname{Ind} l[\alpha^1, \alpha^2]$.

Мы определили, таким образом, индекс пути при некоторых ограничениях, наложенных на множество $M$ и на точки $\alpha^1$ и $\alpha^2$, которые выполняются, когда кривая и путь находятся «в общем положении» [1].

Определим индекс произвольного пути на произвольной кривой $\Gamma$, приведя ее и путь в общее положение малым поворотом осей по часовой стрелке. Имеет место следующая важная теорема, доказательство которой почти очевидно из наглядных соображений.

Теорема. *Индекс замкнутого пути* (*цикла*), *проходимого в направлении часовой стрелки, является инвариантом относительно диффеоморфизмов.*

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q}, \tag{1.1}$$

где $H(q, p, t)$ — достаточно гладкая функция. Пусть $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ — несамопересекающаяся гладкая кривая $\Gamma$ в фазовой плоскости, а $Q(\alpha, t) = q(t)$, $P(\alpha, t) = p(t)$ — решение системы (1.1) с начальными данными $q^0(\alpha)$, $p^0(\alpha)$, лежащими на нашей кривой. Функции $Q(\alpha, t)$, $P(\alpha, t)$ задают отображение $U_t$ кривой $\Gamma$ на некоторую кривую $\Gamma_t$: $U_t\Gamma = \Gamma_t$. Всякий путь $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$ переходит при этом в некоторый путь $U_t l[\alpha^1, \alpha^2] = l_t[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma_t$. Спрашивается, как выражается $\operatorname{Ind} l_t[\alpha^1, \alpha^2]$ через $\operatorname{Ind} l[\alpha^1, \alpha^2]$? Для того чтобы ответить на этот вопрос, напомним некоторые определения, относящиеся к решению системы (1.1).

1) Множество точек $Q(\alpha^0, \tau)$ при $\tau$, меняющемся от 0 до $t$, называется траекторией и обозначается $Q(\alpha^0; 0, t)$.

2) Точка $Q(\alpha^0, \tau)$ на траектории $Q(\alpha^0; 0, t)$ называется фокальной, если $\partial Q(\alpha^0, \tau)/\partial\alpha^0 = 0$.

3) Пусть $\partial^2 H/\partial p^2 > 0$. Индексом траектории $\operatorname{Ind} Q(\alpha^0; 0, t)$ назовем число фокальных точек на полуинтервале $0 < \tau \leqslant t$ (так называемый индекс по Морсу [2]).

Имеет место следующее важное соотношение, которое решает вопрос о том, как изменяется индекс пути при отображении $U_t$:

$$\operatorname{Ind} l\,[\alpha^1,\ \alpha^2] + \operatorname{Ind} Q\,(\alpha^2;\ 0,\ t) = \operatorname{Ind} l_t\,[\alpha^1,\ \alpha^2] + \\ + \operatorname{Ind} Q\,(\alpha^1;\ 0,\ t). \quad (1.2)$$

В случае $H = p^2/2$ этот факт имеет простое геометрическое истолкование. Относительно доказательства в общем случае см. примечание на стр. 197.

## 2. Канонический оператор

Рассмотрим пространство $L_2[\Gamma]$ функций с интегрируемым квадратом по мере $d\alpha$ на кривой $\Gamma$ и пространство $L_2[R^1]$ функций от $x$ с интегрируемым квадратом на прямой $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, зависящих от параметра $h$. Параметр $h$ есть элемент некоторого подмножества $\mathfrak{V}$ интервала (0, 1), причем нуль является предельной точкой $\mathfrak{V}$.

Нас будут интересовать значения функций из $L_2[\Gamma]$ лишь с точностью до $O(h)$. Под $O(h)$ мы будем понимать функции вида $hF(\alpha,\ h)$, где $F(\alpha,\ h)$ — некоторая непрерывная по $\alpha$ и равномерно ограниченная при $h \to 0$ функция, причем $\left| h \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} \right|$ и $\int F^2(\alpha,\ h)\, d\alpha$ также ограничены константой, не зависящей от $h$. Это обозначение сохранится и в многомерном случае при $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$. Мы будем рассматривать семейство линейных операторов, зависящих от параметра $h \in \mathfrak{V}$, с областью определения в $L_2[\Gamma]$ и областью значений в $L_2[R^1]$.

Рассмотрим случай, когда кривая $\Gamma$ взаимно однозначно проектируется на ось $q$. Таким образом, из уравнения $q = q(\alpha)$ находится $\alpha = \alpha(q)$. Обозначим через $K_\Gamma^{\gamma,\,\alpha^0}$ линейный оператор, определенный на финитных функциях (см. [3]) из $L_2[\Gamma]$, действующий на функцию $\varphi(\alpha)$ следующим образом:

$$(K_\Gamma^{\gamma,\,\alpha^0}\varphi)(x) = K_\Gamma^{\gamma,\,\alpha^0}\varphi(\alpha) = \left\{ e^{i\gamma} \left| \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|^{-1/2}_{\alpha=\alpha(q)} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[ \frac{i}{h} \int\limits_{\alpha^0}^{\alpha(q)} p\,dq \right] \varphi[\alpha(q)] \right\}_{q=x}, \quad (1.3)$$

где $\gamma$ — некоторая константа, не зависящая от $\alpha$; $\alpha^0$ — некоторая точка на кривой $\Gamma$.

Пусть теперь кривая $\Gamma$ не проектируется взаимно однозначно на прямую $q$, но зато взаимно однозначно проектируется на прямую $p$. Таким образом, из $p=p(\alpha)$ следует $\alpha=\alpha(p)$. В этом случае обозначим через $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ оператор из $L_2[\Gamma]$ в $L_2[R^1]$, действующий на $\varphi(\alpha)$ следующим образом:

$$K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)=\frac{e^{i(\gamma-\pi/4)}}{\sqrt{2\pi h}}\int e^{ipx/h}\left|\frac{dp(\alpha)}{d\alpha}\right|^{-1/2}_{\alpha=\alpha(p)}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{i}{h}\int\limits_{\alpha^0}^{\alpha(p)} q\,dp\right]\varphi[\alpha(p)]\,dp, \qquad (1.4)$$

где $\gamma$ — некоторая константа, а $\alpha^0$ — некоторая точка на $\Gamma$, в которой $dq(\alpha)/d\alpha=0$. Интеграл берется по отрезку, на котором $\varphi[\alpha(p)]$ отлична от нуля. Если $x$ лежит вне отрезка $d$ оси $q$, на который проектируется носитель $\varphi(\alpha)$, то

$$(K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}\varphi)(x)=O(h^\infty). \qquad (1.4)'$$

Этот факт следует из того, что производная фазы интеграла (1.4) при $x\,\overline{\in}\,d$ не обращается в нуль, и мы можем проинтегрировать (1.4) по частям.

Теперь рассмотрим произвольную кривую $\Gamma$ описанного выше типа. Покроем кривую $\Gamma$ конечным числом открытых интервалов $\Omega^i$ так, чтобы в каждом интервале $\Omega^i$ выполнялось одно из неравенств: либо $dq(\alpha)/d\alpha\neq 0$ для всех точек интервала, либо $dq(\alpha)/d\alpha=0$ в некоторой точке, а $dp(\alpha)/d\alpha$ всюду в интервале отлична от нуля. Области первого типа назовем неособыми; области второго типа — особыми. В неособой области зададим в качестве локальных координат $q(\alpha)$, в особой области — $p(\alpha)$. Обозначим через $\Omega_0^j$ неособую область $\Omega^j$ с введенными в ней координатами $q(\alpha)$ (неособая локальная карта), а через $\Omega_1^k$ — особую область $\Omega^k$ с введенными в ней координатами $p(\alpha)$ (особая локальная карта). Пусть $\Omega_1^j$ $(j=j_1, \ldots, j_n, \ldots)$ — совокупность всех особых карт, $\Omega_0^j$ $(j=j_1', \ldots, j_n', \ldots)$ — совокупность всех неособых карт. Одну из точек $\alpha^j$, принадлежащую особой области $\Omega_1^j$, в которой $dq(\alpha)/d\alpha=0$, назовем центральной точкой особой карты. Центральной точкой неособой карты $\Omega_0^{j'}$ назовем произвольную точку $\alpha^{j'}$ этой карты. Совокупность карт $\{\Omega_1^j\}$, $\{\Omega_0^{j'}\}$ образует атлас Н кривой (см. [4]). Сопоставим действительное число $\gamma^0$ центральной точке одной из карт атласа Н, эту точку назовем начальной и обозначим $\alpha^0$.

Пусть носитель $R$ функции $\varphi(\alpha)\in C^\infty$ лежит в области $\Omega^k$. Определим действие канонического оператора на функцию $\varphi(\alpha)$ формулой (1.3), если $\Omega^k$ — неособая, и формулой (1.4), если $\Omega^k$ — особая, положив там $\gamma=\gamma^0-\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^k]$, где $\gamma^0$ — не зависящее от $k$ число, $\alpha^k$ — центральная точка карты, а $l[\alpha^0, \alpha^k]$ — некоторый путь из $\alpha^0$ в $\alpha^k$.

В общем случае можно определить канонический оператор с помощью разложения единицы по локальным картам. Обозначим через $e^i(\alpha)$, $i=0, \ldots, N$, разложение единицы, отвечающее покрытию $\{\Omega^i\}$ отрезка $R$. Это означает, что $e^i(\alpha)$ удовлетворяет условиям: 1) $e^i(\alpha)\in C^\infty$ и равно нулю вне $\Omega^i$; 2) $\sum\limits_{i=0}^{N} e^i(\alpha)=1$, если $\alpha\in R$ (см. [3]).

Для финитной функции $\varphi(\alpha)$ имеем $\varphi(\alpha)=\sum\limits_{i=0}^{N} e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$.

Носитель каждого члена суммы принадлежит лишь одной локальной карте, а на таких функциях канонический оператор определен формулами (1.3) и (1.4). В силу линейности и при учете (1.4)′ отсюда можно получить общий вид канонического оператора, действующего на финитную функцию $\varphi(\alpha)$. Покажем, как это сделать.

Пусть $j(x)$ — совокупность номеров всех тех карт атласа Н, которые содержат множество точек, являющихся пересечением прямой $q=x$ и отрезка $R\subset\Gamma$. Отрезок $R\subset\Gamma$ покрывается конечным числом карт атласа Н: $\Omega^0, \ldots, \Omega^N$. В общем случае канонический оператор $K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0}$ имеет вид

$$K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0}\varphi(\alpha)=e^{i\gamma}\sum_{j,\, j'\in j(x)}\Big[e^{-\frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^{j'}]}e^{j'}[\alpha(q)]\times$$

$$\times\left|\frac{dq}{d\alpha}[\alpha(q)]\right|^{-1/2} e^{\frac{i}{h}\int\limits_{l[\alpha^0, \alpha(q)]} p\,dq}\varphi[\alpha(q)]+$$

$$+e^{-\frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^j]}\frac{e^{+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}}\int e^{ipq/h}e^j[\alpha(p)]\times$$

$$\times\left|\frac{dp}{d\alpha}[\alpha(p)]\right|^{-1/2}e^{-\frac{i}{h}\int\limits_{l[\alpha^0, \alpha(p)]} q\,dp}\varphi[\alpha(p)]\,dp\Bigg]_{q=x}, \quad (1.5)$$

где $l[\alpha^0, \alpha^k]$ — некоторые пути из $\alpha^0$ в $\alpha^k$.

Рассмотрим пример, когда $\Gamma$ — окружность:

$$p=a\sin\alpha, \quad q=a\cos\alpha, \quad -5\pi/2\leqslant\alpha\leqslant-\pi/2,$$

концевые значения $\alpha$ отождествлены, а $\varphi(\alpha)=1$. Пусть $\alpha^0=-\pi/2$, $\gamma=0$, $l[\alpha^0, \alpha]$ — дуга меньше $2\pi$, взятая в направлении часовой стрелки от точки $-\pi/2$ до точки $\alpha$. Возьмем карты $\Omega^i$, изображенные на рис. 1. Центральные точки карт будут $\alpha^0=-\pi/2$, $\alpha^1=-\pi$, $\alpha^2=-3\pi/2$, $\alpha^3=-2\pi$. По определению $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^1]=0$, $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^2]=1$, $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^3]=1$.

Разложение единицы $e_i(\alpha)$ по этим областям имеет вид, изображенный на рис. 2. Канонический оператор, примененный к 1, в данном случае при $x_2<x<x_3$ равен

$$K^{0,\,-\pi/2}_{p^2+q^2=a^2}\cdot 1=(a^2-x^2)^{-1/4}\times$$

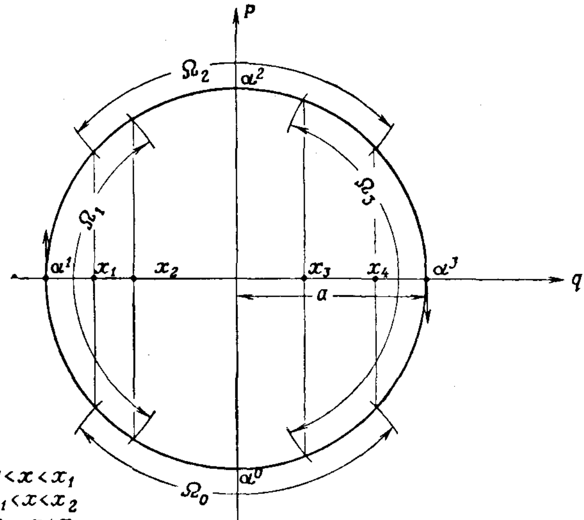
$$\times\exp\left\{\frac{i}{h}\left[-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{|x|}{a}+\frac{1}{2}|x|\sqrt{a^2-x^2}\right]\right\}\times$$

$$\times e^{i\pi a^2/4h}+i(a^2-x^2)^{-1/4}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{h}\left[\frac{a^2}{2}\arccos\frac{|x|}{a}-\frac{1}{2}|x|\sqrt{a^2-x^2}+\frac{\pi a^2}{4}\right]\right\},$$

$$0<\arccos\frac{|x|}{a}<\frac{\pi}{2}. \quad (1.6)$$

Замечание. В случае если $\Gamma$ — неограниченная кривая, то, заменяя в формуле (1.5) $\varphi(\alpha)$ на $\xi(\alpha, h)\varphi(\alpha)$, где $\xi(\alpha, h)$ — функция-регуляризатор, равная единице с точностью до $O(h^\infty)$ в любой ограниченной области и достаточно быстро стремящаяся к нулю при $\alpha\to\infty$ (например, $\xi(\alpha, h)=\exp\{-\alpha^2\exp(-1/h)\}$), мы получим, что ряды в (1.5) сходятся для любой ограниченной функции $\varphi(\alpha)$. Нетрудно убедиться, что для определенного таким образом канонического оператора в любой ограниченной области будут справедливы при некоторых условиях все результаты сформулированных ниже теорем. Аналогичное утверждение справедливо и в многомерном случае.




$$j(x)=\begin{cases} 1 & -a<x<x_1 \\ 0,1,2 & x_1<x<x_2 \\ 0,2 & x_2<x<x_3 \\ 0,2,3 & x_3<x<x_4 \\ 3 & x_4<x<a \end{cases}$$

Рис. 1. Атлас H окружности $q=a\cos\alpha$, $p=a\sin\alpha$; $\Omega_0$, $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ — карты.

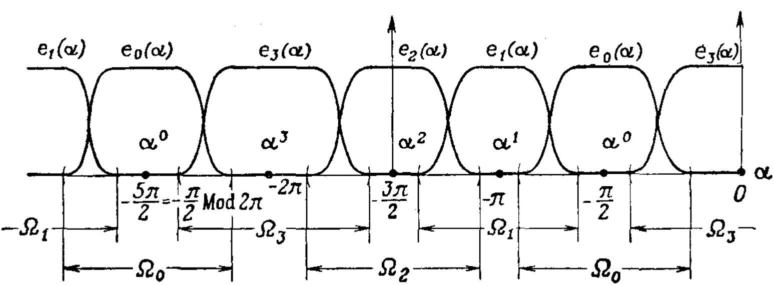



Рис. 2. Разложение единицы по атласу H:

$$\sum_{i=0}^{3} e_i(\alpha)\equiv 1,\quad e_i(\alpha)\in C^\infty,\quad e_i(\alpha)\equiv 0 \ \text{при}\ \alpha\,\bar{\in}\,\Omega_i.$$

### 3. Инвариантность канонического оператора

Пусть кривая Г не замкнута. Тогда канонический оператор $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ не зависит от вида атласа и от способа разбиения единицы с точностью до $O(h)$, т. е. выражения $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ для различных атласов и разбиений единицы отличаются лишь на функции вида $hK_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}F(\alpha, h)$, где $F(\alpha, h)$ удовлетворяют поставленным в начале п. 2 условиям. Подразумевается, что точка $\alpha^0$ при новом разбиении осталась начальной точкой атласа, а значит, осталась центральной точкой некоторой карты. Если же точка $\alpha=\alpha^0$ не осталась при новом разбиении центральной точкой карты, а стала принадлежать карте с центральной точкой $\alpha_1^0$, то в качестве начальной точки нового атласа должна быть взята какая-либо другая точка, например $\alpha_1^0$. Тогда прежний канонический оператор при таком новом разбиении равен (с точностью до $O(h)$) $K_\Gamma^{\tilde{\gamma},\alpha_1^0}$, где

$$\tilde{\gamma}=\gamma-\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l\,[\alpha^0,\ \alpha_1^0]+\frac{1}{h}\int\limits_{l\,[\alpha^0,\ \alpha_1^0]} p\,dq.$$

Если кривая Г замкнута, то канонический оператор $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ с точностью до $O(h)$ не зависит от способа разбиения единицы, но зависит, вообще говоря, от выбора путей $l\,[\alpha^0, \alpha^k]$ из начальной точки в центральные точки карт.

В этом случае для того, чтобы канонический оператор $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ не зависел от выбора канонического атласа и путей $l\,[\alpha^0, \alpha^k]$ с точностью до $O(h)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $h\in\mho$ нашлось такое целое $n$, что

$$\oint p\,dq=(2n+1)\pi h+O(h^2). \tag{1.7}$$

Заметим, что эта формула совпадает по форме с известной в физической литературе формулой квантования Бора.

Замечание относительно начальной точки атласа остается в силе и для случая замкнутой кривой.

Условие (1.7), а следовательно, и инвариантность канонического оператора сохраняются при преобразовании, не меняющем площадь (каноническом преобразовании).

## 4. Квазиклассическая асимптотика собственных функций и собственных значений

Напомним, что собственные значения уравнения (1) при $u(x)=x^2$ и условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\,dx<\infty$ (осциллятор) имеют вид $\lambda_n=(n+1/2)h$. Можно доказать, что в этом случае выражение (1.6) является асимптотикой при $h\to 0$ собственных функций уравнения (1).

В общем случае при произвольном $u(x)\in C^\infty$, но таком, что $u(\pm\infty)=\infty$, имеет место следующее предложение.

Пусть $\Gamma_n=\{q_n(\alpha),\ p_n(\alpha)\}$ — последовательность замкнутых кривых, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{dp_n(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{\partial u(q_n)}{\partial q_n},\quad \frac{dq_n(\alpha)}{d\alpha}=p_n,\qquad \frac{p_n^2}{2}+u(q_n)=E_n,$$

где $\{E_n\}\subset[\alpha,\beta]\ (\alpha>0)$ — зависящее от $h$ множество, определяемое условием $\oint p_n\,dq_n=2\pi(n+1/2)h$. Существует зависящий от $h$ набор таких собственных значений $\lambda=\lambda_n$ уравнения (1) в пространстве $L_2$ на прямой, что

$$\lambda_n-E_n=O(h^2),\quad \|\psi_n-K_{\Gamma n}^{0,\,\alpha^0}\cdot 1\|=O(h),$$

где $\psi_n$ — собственные функции, отвечающие $\lambda_n$.

## 5. Асимптотические ряды

Поскольку в дальнейшем будет речь всегда идти об асимптотических рядах, то и знак равенства мы условимся понимать в некотором «асимптотическом» смысле, который мы сейчас определим.

Мы будем говорить, что функция $F(x,\tau,h)$ эквивалентна нулю, если для любых целых $N_1$, $N_2$ и $N_3$ функция $h^{-N_1+N_2+N_3}\dfrac{\partial^{N_2+N_3}F(x,\tau,h)}{\partial x^{N_2}\,\partial\tau^{N_3}}$ ограничена равномерно по $h\in\mathfrak{F}$, $x\in R^n$ и $\tau\in[t-\varepsilon,\ t+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Мы отождествим между собой функции, разность между которыми эквивалентна нулю.

Таким образом, функции от $x$ и $h$ факторизуются по подпространству функций, имеющих бесконечное число ограниченных при $h \to 0$ производных и имеющих порядок $O(h^\infty)$. Мы будем рассматривать также функции со значениями в банаховом или в счетно-нормированном пространстве. И в этом случае осуществляется такая же факторизация, т. е. функции, имеющие порядок $O(h^N)$ при любом $N$ и бесконечно дифференцируемые (равномерно при $h \to 0$), полагаются эквивалентными нулю.

*Запомним, что все равенства, которые в дальнейшем будут написаны для функций от $x$ со значениями в банаховом или в счетно-нормированном пространстве, справедливы лишь с точностью до функций, эквивалентных нулю.*

Далее, если мы говорим, что функция $f(x, t, h)$ $N$ раз дифференцируема, то это значит, что все ее $N$ производных по $x$, $t$ ограничены при $h \to 0$. Если $f(x, t, h)$ — функция со значениями в банаховом (или счетно-нормированном) пространстве, то $N$-кратная дифференцируемость функции означает, что ее $N$ производных ограничены по норме в этом пространстве (или соответственно ограничены все нормы счетно-нормированного пространства) равномерно по $h$ при $h \to 0$.

Рассмотрим функцию $e^i(\alpha, h)$, $\alpha \in \Gamma$, в окрестности точки $h = 0$ принадлежащую $C^\infty(\alpha, h)$. Иначе говоря,

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^i(\alpha, h) = \sum_{j=0}^{\infty} h^j \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^i_j(\alpha) + O(h^\infty). \tag{1.8}$$

Слагаемое $O(h^\infty)$ означает, что написанные ряды — асимптотические при $h \to 0$. Пусть далее $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)$, $i = 0, \ldots, N$, где $e^i(\alpha)$ принадлежит разложению единицы по атласу II. Заменим теперь в выражении $K_\Gamma^{\gamma, \alpha_0}\varphi(\alpha)$ функцию $e^i(\alpha)$ на $e^i(\alpha, h)$. Получается семейство операторов, зависящих от $e^i(\alpha, h)$. Мы будем их обозначать через $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha_0}$, $\widetilde{K}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha_0}$, $\widetilde{\widetilde{K}}{}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha_0}$. Таким образом, запись $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha_0}\varphi(\alpha)$ не определяет вида $e^i(\alpha, h)$ при $h \neq 0$. Заметим, что два члена указанного семейства равны, вообще говоря, лишь с точностью до $O(h)$:

$$\widetilde{K}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha_0}\varphi(\alpha) = \widetilde{\widetilde{K}}{}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha_0}\varphi(\alpha)\,[1 + O(h)].$$

## 6. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши

Пусть $v(x, t) \in C^\infty$, $\varphi(\alpha) \in C^\infty$, и пусть $\varphi(\alpha)$ финитна, а решение $\psi(x, t)$ уравнения Шредингера (см. [5])

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x, t)\right]\psi = \hat{H}\psi \tag{1.9}$$

удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x, 0) = K_{\Gamma, h}^{\gamma^0, \alpha^0}\varphi(\alpha). \tag{1.9$'$}$$

Тогда решение $\psi(x, t)$ представимо в виде

$$\psi(x, t) = \widetilde{K}_{\Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha^0}\varphi(\alpha), \tag{1.10}$$

где

$$\gamma = \gamma^0 - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} Q(\alpha^0;\ 0,\ t) + $$
$$+ \frac{1}{h}\int_0^t \left[\frac{P^2(\alpha^0, \tau)}{2\mu} - v(Q(\alpha^0, \tau)\tau)\right] d\tau.$$

Примеры. Покажем теперь, какой вид имеет в конкретных случаях выписанная выше асимптотика решения уравнения Шредингера.

Предположим, что начальное условие для уравнения $ih\,\partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi$ имеет вид

$$\psi(x, 0) = \varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h}f(x)\right], \tag{1.11}$$

где $\varphi(x)$ — финитная функция с носителем $[-1, 1]$, $f(x) \in C^2$, $f(0) = 0$. Начальное условие (1.11) есть условие вида (1.9)$'$ при $\Gamma = \{q(\alpha) = \alpha,\ p(\alpha) = f'(\alpha)\}$, $\alpha \in [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, $\alpha^0 = 0$, $\gamma^0 = 0$. Канонический атлас состоит из одной неособой карты, $e^i(\alpha, h) = 1$ при $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Пусть пересечение прямой $q = x$ с кривой $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ при всех $x \in (x' - \delta, x' + \delta)$ не содержит особых точек, тогда оно состоит лишь из конечного числа точек $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$, т. е. $\alpha^i = \alpha^i(x, t)$. Пусть $\gamma^j$ — индекс пути $Q(\alpha^j;\ 0, t)$, т. е. число нулей функции $\partial Q(\alpha^j, \tau)/\partial\alpha^j$ при $0 < \tau \leqslant t$; $S(\alpha^j, t)$ — решение уравнения

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\mu\dot{Q}^2}{2} - v(Q, t),$$

удовлетворяющее условию $S(\alpha^j, 0)=f(\alpha^j)$. Поскольку

$$f(\alpha)=\int\limits_{l[0,\ \alpha]} p\,dq \quad \text{и}$$

$$S(\alpha,\ t)=\int\limits_{l[0,\ \alpha]} p\,dq+\int\limits_0^t \left\{\frac{P^2(\alpha,\ \tau)}{2\mu}-v\,[Q(\alpha,\ \tau),\ \tau]\right\}d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t \left\{\frac{P^2(0,\ \tau)}{2\mu}-v\,[Q(0,\ \tau),\ \tau]\right\}d\tau+\int\limits_{l_t[0,\ \alpha]} p\,dq,$$

то решение можно записать в виде

$$\psi(x,\ t)=\sum_{j=1}^{k} e^{-\frac{i\pi}{2}\gamma^j}\varphi\,[\alpha^j(x,\ t)]\left|\frac{\partial Q}{\partial \alpha^j}[\alpha^j(x,\ t),\ t]\right|^{-1/2}\times$$

$$\times\, e^{iS[\alpha^j(x,\ t),\ t]/h}+h\Phi(x,\ t,\ h), \qquad (1.12)$$

где $\Phi(x,\ t,\ h)$ ограничена при $h\to 0$ в окрестности точки $x=x'$.

Замечание. Функция Грина $\mathcal{G}(x,\ \xi,\ t)$ (фундаментальное решение уравнения Шредингера) удовлетворяет, очевидно, начальному условию $(1.9)'$ при $\Gamma=\{q(\alpha)=\xi,\ p(\alpha)=\alpha\}$ и $\varphi(\alpha)=1$. Вместе с тем, как известно, функция Грина может быть представлена в виде фейнмановского континуального интеграла (см. [6]), который формально представляется в виде $\Phi=\int \exp\left\{\frac{i}{h}\theta\right\}Dq(\tau)$, где

$$\theta=\int\limits_0^t L(\dot q,\ q,\ \tau)\,dt,\ q=q(\tau),$$

$$q(0)=\xi,\ q(t)=x, \qquad \text{(a)}$$

$$L=\frac{\mu\dot q^2}{2}-v(q).$$

Аналогично предыдущему примеру нетрудно убедиться, что если уравнение $\delta\theta=0$ при условии (а) имеет конечное число решений $q^k=q^k(\tau,\ t,\ x,\ \xi)$, $k=1,\ \ldots,\ k_0$, а вторая вариация $\delta^2\theta$ при $q=q^k$ не имеет нулевого собственного значения, то

$$\Phi=\mathcal{G}(x,\ \xi,\ t)\simeq(2\pi ih)^{-n/2}\sum_{k=1}^{k_0}|D(q^k)|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{i}{h}\int\limits_0^t L(\dot q^k\ q^k,\ \tau)\,d\tau\right\},$$

где $\gamma_k$ — число отрицательных собственных значений второй вариации для экстремали $q^k$ [1]), а $D(q^k)=(Dp^k(0)/Dx)^{-1}$, где $p^k(0)$ — начальный импульс экстремали $q^k$. Эта формула является континуальным аналогом метода стационарной фазы для интеграла $I = \int \exp\left\{\frac{i}{h} F(x)\right\} dx$, $x \in R^n$, который при некоторых условиях представляется при $h \to 0$ формулой

$$I \simeq (2\pi i h)^{n/2} \sum_{k=1}^{k_0} |D(x^k)|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2} + \frac{i}{h} F(x^k)\right\},$$

если число решений $x^k$ уравнения $dF=0$ конечно, а матрица $A$ формы $d^2F$ не имеет при $x=x^k$ нулевого собственного значения. Здесь $\gamma_k$ — число отрицательных собственных значений матрицы $A$, а $D(x)=\det A$ (см. [7]).

Пусть теперь пересечение прямой $q=x'$ и кривой $\Gamma_t=\{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ есть отрезок $p' \leqslant p \leqslant p''$. Следовательно, для $p \in \{p'-\varepsilon, p''+\varepsilon\}$ из $P(\alpha, t)=p$ получаем $\alpha=\alpha(p, t)$. Тогда решение $\psi(x, t)$ представимо в виде

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}\left[\gamma-\frac{1}{2}\right]}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{p'-\varepsilon}^{p''+\varepsilon} F(p) \exp\left\{\frac{ip}{h}[x - Q(\alpha(p, t), t)]\right\} \times$$
$$\times \left|\frac{\partial P}{\partial \alpha}[\alpha(p, t), t]\right|^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{h} S[\alpha(p, t), t]\right\} dp +$$
$$+ \sqrt{h}\Phi(x, t, h), \quad (1.13)$$

где $F(p)$ — гладкая функция, равная 1 при $p' \leqslant p \leqslant p''$ и нулю вне $p'-\varepsilon \leqslant p \leqslant p''+\varepsilon$, $\gamma$ равно числу фокальных точек на какой-либо траектории $Q(\alpha(p, t); 0, t)$ при $p \in [p', p'']$, а $\Phi(x, t, h)$ равномерно ограничена при $h \to 0$ в окрестности точки $x=x'$.

Заметим, что если $p'=p''$, а точка $q=x'$ — особая, то интеграл (1.13) можно легко упростить, разложив подинтегральное выражение в ряд в окрестности точки $p=p'$ и ограничившись первыми членами (см. [10]).

## § 2. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Многомерный случай мы будем исследовать по тому же плану, что и одномерный.

[1]) Как известно, $\gamma_k$ равно индексу по Морсу [2].

## 1. Топологические предложения

Рассмотрим вначале два конкретных случая.

Пусть $p(x)$ — потенциальное векторное поле в пространстве $x \in R^n$ (конфигурационном пространстве); ему отвечает, например, пучок частиц с импульсом $p(x)$. Можно сказать, что в $2n$-мерном (фазовом) пространстве $p, q$ задана $n$-мерная поверхность уравнением $p=p(q)$, или в параметрической форме $q=q(\alpha)=\alpha$, $p=p(\alpha)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\frac{\partial q_\sigma}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_\sigma}{\partial \alpha_j}-\frac{\partial q_\sigma}{\partial \alpha_j}\frac{\partial p_\sigma}{\partial \alpha_i}\right)=0, \tag{2.1}$$

т. е. скобки Лагранжа от $p(\alpha)$, $q(\alpha)$ равны нулю. Рассмотрим другой случай. Пусть пучок частиц испускается со всевозможными импульсами из точки $x=0$. Это значит, что в фазовом пространстве $p, q$ рассматривается $n$-мерная плоскость $q=0$, которая удовлетворяет, очевидно, условию (2.1).

Напомним, что каноническим преобразованием называется преобразование, оставляющее инвариантным условие (2.1). Каноническим преобразованием является, например, сдвиг вдоль траектории некоторой гамильтоновой системы. Очевидно, что каноническое преобразование, вообще говоря, не сохраняет однозначной зависимости от $q$ точек на поверхности, которая имела место в первом случае, или от $p$ — во втором случае. Поэтому мы будем рассматривать гладкую $n$-мерную поверхность $q=q(\alpha)$, $p=p(\alpha)$, $\alpha=\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в $2n$-мерном фазовом пространстве $q$, $p$ или, точнее, гладкое $n$-мерное подмногообразие (возможно, открытое) $\Gamma=\{q(\alpha), p(\alpha)\}$ $2n$-мерного евклидова пространства, для которого выполняется условие (2.1). Такую поверхность мы будем называть лагранжевым подмногообразием $\Gamma$. Условие (2.1) означает, что $\int p\,dq$ на $\Gamma$ локально не зависит от пути.

Множество $M$ точек многообразия $\Gamma$, удовлетворяющих условию $Dq/D\alpha=0$ (как обычно, $Dq/D\alpha$ означает $\det\|\partial q_i/\partial \alpha_j\|$), называется *особым*[1]).

[1]) Относительно проектирования на плоскость $p=0$ (см. [1]).

Лагранжево подмногообразие $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$ обладает замечательным свойством, которое позволяет обобщить понятие канонического оператора на многомерный случай. Это свойство выражается следующей леммой о локальных координатах.

Лемма 1. *Для любой точки $\alpha^0$ на лагранжевом подмногообразии $\Gamma$ существует такой поворот осей $\tilde{q} = Aq$, $\tilde{p} = Ap$, что некоторая окрестность точки $\alpha^0$ взаимно однозначно проектируется (т. е. проекция окрестности есть диффеоморфизм) на одну из $n$-мерных координатных плоскостей вида $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \ldots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \ldots = \tilde{p}_n = 0$.*

Заметим, что преобразование вида $\tilde{q} = Aq$, $\tilde{p} = Ap$, где $A$ — унитарная матрица, является каноническим.

Лемму о локальных координатах мы сформулируем в виде двух лемм 1а и 1б.

Лемма 1а. *Пусть в точке $\alpha = \alpha^0$ матрица $B = \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant n}}$ имеет ранг $r < n$. Тогда существует такая ортогональная $n \times n$-матрица $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$, что при каноническом преобразовании*

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(\alpha^0)\, q_j(\alpha), \\ \tilde{p}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(\alpha^0)\, p_j(\alpha) \end{aligned} \tag{2.2}$$

*равенство*

$$\frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \alpha_j}(\alpha^0) = 0$$

*выполняется для всех $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant \sigma \leqslant k$, где $k = n - r$.*

Доказательство. Существуют такие ортогональные матрицы $C_1 = C_1(\alpha^0)$ и $C_2 = C_2(\alpha^0)$, что матрица $B_1 = C_1 B C_2$ диагональна при $\alpha = \alpha^0$ (см. [9]), причем ее первые $k$ строк состоят из нулей. Очевидно, что первые $k$ строк матрицы $B_2 = B_1 C_2^* = C_1 B$ тоже равны нулю.

Докажем, что $C_1 = C_1(\alpha^0)$ и есть искомая ортогональная матрица $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$. Положив $\tilde{q}(\alpha) = C_1 q(\alpha)$, получим

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} = C_1 \frac{\partial q}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} = C_1 B = B_2.$$

Отсюда следует, что $(\partial \tilde{q}_\sigma / \partial \alpha)_{\alpha = \alpha_0} = 0$, $\sigma = 1, \ldots, k$. Преобразование (2.2) оставляет инвариантными скобки Лагранжа. Лемма доказана.

Лемма 1б. *Если ранг матрицы* $\left\| \dfrac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\alpha = \alpha^0}$ *равен* $r$, $k = n - r$, *и* $\partial \tilde{q}_\sigma / \partial \alpha_j (\alpha^0) = 0$ *при* $\sigma \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *то матрица* $\tilde{D}_k = \| \partial (\tilde{y}_k)_i / \partial \alpha_j \|_{i,\, j \leqslant n}$, *где*

$$(\tilde{y}_k)_i = \begin{cases} \tilde{p}_i(\alpha) & \text{при} \quad i \leqslant k, \\ \tilde{q}_i(\alpha) & \text{при} \quad i > k, \end{cases} \tag{2.3}$$

*невырождена при* $\alpha = \alpha^0$.

Доказательство. Умножение матрицы $B_2$ справа на $C_2$ эквивалентно ортогональному преобразованию координат $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вида $\tilde{\alpha} = C_2^* \alpha$. Поэтому $B_1 = B_2 C_2 = \| \partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_j \|$.

Поскольку в матрице $B_1$ при $\alpha = \alpha^0$ отличны от нуля лишь члены $(\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_i)_{\alpha = \alpha^0}$ при $i > k$, то из условия (2.1) следует, что

$$\left( \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right)_{\alpha = \alpha^0} = 0 \quad \text{при} \quad i > k \text{ и } j \leqslant k. \tag{2.4}$$

Докажем, что при $\alpha = \alpha^0$ $J = \det \| \partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j \|_{i,\, j \leqslant k} \neq 0$. В противном случае в силу (2.4) ранг прямоугольной матрицы $A = \| \partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j \|_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant k}}$ при $\alpha = \alpha^0$ меньше $k$. Прямоугольная же матрица $\| \partial \tilde{q}_\sigma / \partial \tilde{\alpha}_j \|_{\alpha = \alpha^0}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $1 \leqslant \sigma \leqslant n$, равна нулю. Отсюда следует, что ранг прямоугольной матрицы вида

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{p}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \end{matrix} \right\|_{\alpha = \alpha^0} = \begin{array}{c|c|c|} & k & r \\ \hline n & 0 & \\ \hline n & A & \\ \hline \end{array}$$

меньше $n$, что невозможно, поскольку $\{q(\alpha), p(\alpha)\}$ — $n$-мерное подмногообразие. Полученное противоречие доказывает, что

$$\det \widetilde{D}_k \big|_{\alpha=\alpha^0} = \prod_{i=k+1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{q}_i}{\partial \widetilde{\alpha}_i}\right)_{\alpha=\alpha^0} J \big|_{\alpha=\alpha^0} \neq 0,$$

что и требовалось.

Координаты точки $\alpha^0$ вида $\widetilde{y}_k = \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_k, \widetilde{q}_{k+1}, \ldots$ $\ldots, \widetilde{q}_n$ $(k = n - r)$ будем называть фокальными координатами точки $\alpha^0$, а соответствующую плоскость — фокальной плоскостью.

Эта лемма может быть использована при выборе локальных координат (локальных карт лагранжева подмногообразия). Действительно, поскольку матрица $\widetilde{D}_k$ невырождена, мы можем в качестве локальной системы координат всегда вместо $\alpha$ брать $\widetilde{y}_k = \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_k, \widetilde{q}_{k+1}, \ldots, \widetilde{q}_n$. Для произвольного подмногообразия так делать нельзя. Всякий компакт $R$ на подмногообразии $\Gamma$ мы сможем покрыть конечным числом областей $\Omega^i$, в каждой из которых невырождена какая-нибудь матрица вида $\widetilde{D}_k$ и существует точка $\overset{i}{\alpha}_k$, в которой $\partial \widetilde{q}_1 / \partial \alpha = \ldots = \partial \widetilde{q}_k / \partial \alpha = 0$. (При $k = 0$ это любая точка области.) Примем $\widetilde{y}_k = \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_k, \widetilde{q}_{k+1}, \ldots, \widetilde{q}_n$, $\alpha = a^i(\widetilde{y}_k)$ в качестве локальных координат в такой области и будем называть эту область локальной картой $\overset{i}{\Omega}_k$, а точку $\overset{i}{\alpha}_k$ — центром локальной карты. Система локальных карт такого вида, покрывающих компакт $R$, составляет канонический атлас H компакта $R$. Множество центральных точек мы будем обозначать буквой $\mathscr{X}$.

Назовем точки, в которых $Dq/D\alpha \neq 0$, и карты, у которых $k = 0$, неособыми. Остальные точки и карты назовем особыми.

Введем индекс пути $l[\alpha', \alpha'']$ на лагранжевом многообразии. Мы дадим определение индекса пути, которое использует тот факт, что в общем положении размерность $M$ не превосходит $n - 1$. Пусть точки $\alpha'$ и $\alpha''$, принадлежащие одной и той же карте $\overset{i}{\widetilde{\Omega}}_k$, являются неособыми. Определим индекс пути $l[\alpha', \alpha''] \subset \overset{i}{\widetilde{\Omega}}_k$ как разность индексов инерции матрицы[1]) $\widetilde{B}_k = \| \partial\widetilde{q}_i / \partial\widetilde{p}_j \|_{i,\, j\leqslant k}$ в точках $\alpha'$ и $\alpha''$. Индекс пути $l[\alpha', \alpha'']$, если $\alpha''$ — центральная точка карты $\widetilde{\Omega}_k^i$, а $\alpha'$ — неособая точка этой карты, равен индексу инерции матрицы $\widetilde{B}_k$ в точке $\alpha'$.

Теорема 1. $\operatorname{Ind} l[\alpha', \alpha'']$, *где* $l[\alpha', \alpha''] \subset \widetilde{\Omega}_{k_1}$, *не зависит от карты* $\widetilde{\Omega}_{k_1}$, *т. е. если* $l[\alpha', \alpha'']$ *принадлежит в то же время и* $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$, *а* $\alpha'$, $\alpha''$ — *неособые, то*

$$\operatorname{Ind} \widetilde{B}_{k_1}(\alpha') - \operatorname{Ind} \widetilde{B}_{k_1}(\alpha'') = \operatorname{Ind} \widetilde{\widetilde{B}}_{k_2}(\alpha') - \operatorname{Ind} \widetilde{\widetilde{B}}_{k_2}(\alpha''). \quad (2.5)$$

Произвольный путь $l[\alpha', \alpha'']$ можно покрыть картами. В каждой карте определен индекс отрезка пути[2]). Индекс $l[\alpha', \alpha'']$ определяется в силу аддитивности индекса. Из теоремы 1 следует, что $\operatorname{Ind} l[\alpha', \alpha'']$ не зависит от покрытия и не меняется при непрерывной деформации пути $l[\alpha', \alpha'']$ в путь $\widetilde{l}[\alpha', \alpha'']$, т. е. $\operatorname{Ind} l[\alpha', \alpha'']$ является гомотопическим инвариантом (см. [4]).

Теорема 2. *Индекс одномерного цикла есть целочисленный инвариант инфинитезимальных канонических преобразований.*

Пусть $q(t)$, $p(t)$ — решение системы Гамильтона $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$, удовлетворяющее условию $q(0) = q^0(\alpha)$, $p(0) = p^0(\alpha)$, где $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ определяют лагранжево подмногообразие $\Gamma$. Обозначим $q(t) = Q(\alpha, t)$, $p(t) = P(\alpha, t)$. Подмногообразие $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$, где $t$ фиксировано, является лагранжевым подмногообразием фазового пространства. Всякий путь $l[\alpha', \alpha'']$ отобразится на путь $l_t[\alpha', \alpha''] \subset \Gamma_t$. Определим индекс траектории $Q(\alpha; 0, t)$. Предположим вначале, что форма $\sum\limits_{i,\, j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j$ строго положительна. Известно, что в этом случае число нулей якобиана $DQ(\alpha, \tau)/D\alpha$ при $0 < \tau \leqslant t$ с учетом их кратности

---

[1]) Которая, как будет доказано ниже, симметрична.

[2]) При условии, что подмногообразие особенностей имеет размерность, меньшую, чем $n$, например многообразие $\Gamma$ находится в общем положении по отношению к проекции. Этого достаточно, поскольку общего положения можно достичь сколь угодно малым каноническим поворотом.

конечно. Это число мы будем называть *индексом траектории* $Q(\alpha;\ 0,\ t)$ (индекс по Морсу). Введем индекс пути и для произвольного гамильтониана $H$, не удовлетворяющего условию $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$ при $z \neq 0$. В $(2n+1)$-мерном пространстве $q,\ p,\ t$ рассмотрим $(n+1)$-мерную пленку $R_t$, являющуюся объединением семейства $n$-мерных многообразий $\Gamma_\tau$ при $\tau$, меняющемся от 0 до $t$. В силу леммы 1б в каждой точке пленки $R_t$ невырождена некоторая матрица типа $\widetilde{D}_k$. Поэтому мы можем покрыть пленку $R_t$ каноническими картами $\widetilde{\Omega}_k$ размерности $n+1$. Определим индекс одномерного пути, лежащего в пленке, в том числе и индекс траектории $Q(\alpha;\ 0,\ t)$. Рассмотрим отрезок пути $l[\alpha',\ \alpha''] \in \in R_t$, целиком принадлежащий одной канонической карте $\widetilde{\Omega}_k$ с локальными каноническими координатами $\widetilde{y}_k,\ t$, концы которого являются неособыми точками. Аналогично тому как это было сделано для лагранжева многообразия, определим индекс пути $l[\alpha',\ \alpha'']$ как разность индексов инерции матрицы $\widetilde{B}_k$, взятых последовательно в точках $\alpha'$ и $\alpha''$. Аналогично предыдущему определяется центральная точка карты и индекс пути $l[\alpha',\ \alpha'']$, где $\alpha',\ \alpha'' \in \widetilde{\Omega}_k$, $\alpha'$ — неособая точка и $\alpha''$ — центральная точка, как индекс инерции матрицы $\widetilde{B}_k$ в точке $\alpha'$.

Доказательство теорем об инвариантности будет дано в следующем параграфе. Там же мы определим индекс пути, соединяющего произвольные две точки из $\widetilde{\Omega}_k \subset R_t$. Для пленки имеет место аналог теоремы 1, а индекс любого пути в $R_t$ определяется в силу аддитивности. Можно доказать, что в случае, когда путь есть траектория $Q(\alpha;\ 0,\ t)$ и условие $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$ при $z \neq 0$ выполнено, так определенный индекс совпадает с индексом по Морсу[1]).

---

[1]) Это утверждение не будет здесь доказано. Заметим лишь, что основная идея доказательства заключается в следующем. Рассматривая изменения индекса за малое время $t$, мы ограничиваемся линейными членами по $t$ решения уравнений Гамильтона. Деформацию сдвига по $t$ мы разбиваем на две последовательные деформации:

## 2. Определение канонического оператора

Пусть на лагранжевом многообразии $\Gamma$ задана финитная функция $\varphi(\alpha)$, носитель которой есть некоторый компакт $R$. Обозначим через H канонический атлас, отвечающий конечному покрытию $\{\Omega^i\}$, $i=1, \ldots, N$, компакта $R$, а через $e^i(\alpha)$, $i=1, \ldots, N$, — разложение единицы, отвечающее покрытию $\{\Omega^i\}$ ($e^i(\alpha)\in C^\infty$, $\sum\limits_1^N e^i(\alpha)=1$ при $\alpha\in R$, $e^i(\alpha)=0$ при $\alpha\,\bar{\in}\,\Omega^i$). Напомним, что локальной карте $\widetilde{\Omega}_k^i$ отвечает $\alpha=a^i(\widetilde{y}_k)$, где $\widetilde{y}_k=\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_k, \widetilde{q}_{k+1}, \ldots, \widetilde{q}_n$. Обозначим через $\sigma(\alpha)$ некоторую меру на многообразии $\Gamma$, а через $D\sigma(\alpha)/D\widetilde{y}_k$ — производную от нее по мере $d\widetilde{p}_1 \ldots$ $\ldots d\widetilde{p}_k\, d\widetilde{q}_{k+1} \ldots d\widetilde{q}_n$. В частности, если на $\Gamma$ можно ввести глобальные координаты $\alpha$, то можно положить, например,

$$d\sigma(\alpha)=d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \quad\text{и}\quad \frac{D\sigma(\alpha)}{D\widetilde{y}_k}=\frac{D\alpha}{D\widetilde{y}_k}=\det\left\|\frac{\partial\alpha_i}{\partial(\widetilde{y}_k)_j}\right\|.$$

Обозначим через $j(x)$ совокупность номеров всех тех карт атласа H, которые содержат точки плоскости $q=x$. Каноническим оператором $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ называется оператор вида

$$K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)=e^{i\gamma}\sum_{j\in j(x)} e^{-(i\pi/2)\operatorname{Ind} l[\alpha^0,\alpha_k^j]}\times$$
$$\times\,\Phi^{\widetilde{p}_k}e^j(a^j(\widetilde{y}_k))\cdot\left|\frac{D\sigma(\alpha)}{D\widetilde{y}_k}\right|^{1/2}\varphi(a^j(\widetilde{y}_k))\times$$
$$\times\, e^{\frac{i}{h}\left\{\int\limits_{l[\alpha^0,\, a^j(\widetilde{y}_k)]} p\,dq-\sum\limits_{i=1}^{k}\widetilde{p}_i\widetilde{q}_i(a^j(\widetilde{y}_k))\right\}} \tag{2.6}$$

при $q=x$, где $\Phi^{\widetilde{p}_k}$ — преобразование Фурье по первым $k$ переменным функции $\psi(\widetilde{y}_k)$, финитной по этим перемен-

а) при постоянном начальном импульсе $p$; б) при постоянной конечной координате $q$. Утверждение доказывается для первой деформации алгебраическим путем. Далее из топологических соображений доказывается, что вторая деформация не изменяет значения индекса.

ным с носителем $\omega$, т. е.

$$\Phi^{\widetilde{p}_k}\psi(\widetilde{y}_k)=\frac{e^{i\pi k/4}}{(2\pi h)^{k/2}}\int\limits_{\omega} e^{(i/h)\sum\limits_{i=1}^{k}\widetilde{p}_i\widetilde{q}_i}\psi(\widetilde{y}_k)\,d\widetilde{p}_1\ldots d\widetilde{p}_k. \qquad (2.7)$$

Канонический оператор определен на финитных функциях в пространстве непрерывных функций на многообразии Г. Область его значений лежит в пространстве $L_2[R^n]$.

Замечание. Канонический оператор здесь определен для $h>0$. В случае $h<0$ нужно брать все индексы со знаком минус.

Теорема 3. *Для того чтобы канонический оператор* $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ *не зависел с точностью до* $O(h)$ *от выбора канонического атласа, путей* $l[\alpha^0, \alpha]$ *и от способа разбиения единицы, необходимо и достаточно, чтобы для* $h\in\mho$ *выполнялись соотношения*

$$\frac{2}{\pi h}\oint\limits_{k} p\,dq=l_k\,(\mathrm{mod}\,4)+O(h),\quad k=1,\ldots,k_0, \qquad (2.8)$$

*где интеграл берется по* $k$-му *базисному циклу многообразия* Г, $l_k$ — *индекс этого цикла,* $k_0$ — *число Бетти многообразия* Г.

Заметим, что условия (2.8) накладывают ограничения на значения величин $I_k=\oint\limits_k p\,dq$. При $k_0=2$ для существования такого $\mho$, чтобы выполнялось (2.8), достаточна несоизмеримость $I_1$ и $I_2$.

Поскольку $\oint\limits_k p\,dq$ и $l_k$ инвариантны относительно канонических преобразований, то, очевидно, указанное свойство оператора $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ также сохраняется при канонических преобразованиях.

В дальнейшем мы всегда будем полагать, что условия (2.8) на лагранжевом подмногообразии выполнены и все рассматриваемые канонические операторы инвариантны.

Замечание. Для получения значений выражения $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ в окрестности точки $x=\bar{x}$ удобно пользоваться следующим специальным атласом $H(\bar{x})$. Пусть пересечение плоскости $q=\bar{x}$ и $\Gamma$ состоит из конечного числа точек $\alpha^i(\bar{x})$, $i=1, \ldots, i_0$. Выберем атлас $H(\bar{x})$ так, чтобы каждая из этих точек была центральной точкой некоторой карты $\widetilde{\Omega}^i_k(\bar{x})$. Канонический оператор, отвечающий атласу $H(\bar{x})$, в окрестности точки $x=\bar{x}$ будет состоять из суммы $i_0$ членов. Мы будем его обозначать для удобства через $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}(\bar{x})$.

Пусть теперь $\varphi(\alpha, h)$, $\alpha\in\Gamma$, $h\in[0, 1)$, является бесконечно дифференцируемой (при $h=0$) функцией аргументов $\alpha$ и $h$ со значениями в некотором счетно-нормированном пространстве.

Рассмотрим линейные непрерывные операторы $e^i(\alpha, h)$, $\alpha\in\Gamma$, $h\in[0, 1)$, в этом пространстве, зависящие от параметров $\alpha$ и $h$, а также от пути $l[\alpha^0, \alpha]$, и бесконечно дифференцируемые по $\alpha$ и $h$ при $h=0$, т. е. предположим, что выполняются соотношения вида (1.8). Пусть при $h=0$ эти операторы обращаются в финитные числовые функции $e^i(\alpha, 0)=e^i(\alpha)$, которые являются элементами разложения единицы по атласу H.

Подобно тому как это было сделано в п. 5 § 1, заменим в операторе $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ функции $e^i(\alpha)$ на $e^i(\alpha, h)$. Мы получим семейство операторов $K_{\Gamma,h}^{\gamma,\alpha^0}$, $\widetilde{K}_{\Gamma,h}^{\gamma,\alpha^0}$, $\widetilde{\widetilde{K}}_{\Gamma,h}^{\gamma,\alpha^0}, \ldots$, зависящих от $e^i(\alpha, h)$.

Теорема 3а. *Пусть лагранжеву подмногообразию* $\Gamma$ *сопоставлен канонический атлас* H *с начальной точкой* $\alpha_0$ *и некоторый оператор* $K_{\Gamma,h}^{\gamma,\alpha^0}$. *Пусть* $\widetilde{H}$ — *другой канонический атлас подмногообразия* $\Gamma$ *с начальной точкой* $\widetilde{\alpha}^0$. *Тогда существует единственный оператор вида* $\widetilde{K}_{\Gamma,h}^{\widetilde{\gamma},\widetilde{\alpha}^0}$, *равный* $K_{\Gamma,h}^{\gamma,\alpha^0}$ *на функциях вида* $\varphi(\alpha, h)$. *При этом*

$$\widetilde{\gamma}=\gamma-\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \widetilde{\alpha}^0]+\frac{1}{h}\int\limits_{l[\alpha^0,\widetilde{\alpha}^0]} p\,dq.$$

## § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ

Мы докажем здесь инвариантность индексов по модулю 4, поскольку для определения канонического оператора достаточно знать лишь такие индексы. В дальнейшем нам понадобится асимптотика интеграла

$$I=\left[2\pi h\exp\frac{i\pi}{2}\right]^{-n/2}\int\varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h}f(x)\right]dx,$$

где $\varphi(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция со значениями в счетно-нормированном пространстве $B^\infty$ и носителем $\Omega$, а $f(x) \in C^\infty$. Предположим, что уравнение $df(x)=0$ при $x \in \Omega$ имеет единственное решение $x=x^0$ (стационарную точку).

1) Пусть форма $d^2f(x)$ невырождена при $x=x^0$, ее индекс инерции равен $\gamma$, а $J$ — дискриминант этой формы. Тогда

$$I = |J|^{-1/2}\left[\varphi(x^0)+\sum_{\nu=1}^{\infty} h^\nu C_\nu\right]\exp\left\{\frac{i}{h}f(x^0)-\frac{i\pi\gamma}{2}\right\},$$

где $C_\nu$ — линейная комбинация $\varphi(x)$ и ее производных до $2\nu$-го порядка в точке $x=x^0$ с коэффициентами, зависящими от производных $f(x)$ в точке $x=x^0$.

2) Пусть $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}|I| < \infty$ для любой финитной $\varphi(x)$, тогда форма $d^2f(x^0)$ невырождена и справедливо утверждение 1).

Доказательство этого утверждения (так называемый «метод стационарной фазы»), известное для случая, когда $\varphi(x)$ — числовая функция ([7], [10]), переносится автоматически на случай функции со значениями в $B^\infty$.

Если некоторая область $\Omega \subset \Gamma$ взаимно однозначно проектируется на плоскость $\tilde q_1 = \tilde q_2 = \ldots = \tilde q_{k_1} = \tilde p_{k_1+1} = \ldots$ $\ldots = \tilde p_n = 0$, то будем писать $\Omega \subset \tilde\Omega_{k_1}$, а если одновременно проектируется взаимно однозначно и на плоскость $\tilde{\tilde q}_1 = \tilde{\tilde q}_2 = \ldots = \tilde{\tilde q}_{k_2} = \tilde{\tilde p}_{k_2+1} = \ldots = \tilde{\tilde p}_n = 0$, то будем сокращенно писать $\Omega \subset \tilde\Omega_{k_1} \cap \tilde{\tilde\Omega}_{k_2}$. Если точка $\alpha$ принадлежит элементу покрытия H, отвечающему карте $\tilde\Omega_k$, то будем писать $\alpha \in \tilde\Omega_k$.

Точки $\alpha \in \tilde\Omega_k$ поставлены во взаимно однозначное соответствие со своими проекциями $\tilde y_k$ на плоскость $\tilde q_1 = \tilde q_2 = \ldots = \tilde q_k = \tilde p_{k+1} = \ldots = \tilde p_n = 0$, так что можно писать $\tilde y_k = \tilde y_k(\alpha)$ и $\alpha = \alpha(\tilde y_k)$. Последняя функция определена лишь на проекции $\tilde{\mathfrak{B}}_k$ области, отвечающей $\tilde\Omega_k$, на указанную плоскость. Обозначим $\tilde J_k = D\sigma(\alpha)/D\tilde y_k$, $\tilde\gamma_k = \operatorname{Ind}\tilde B_k$. Пусть $S(\alpha)$ — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению $\partial S(\alpha)/\partial\alpha_j = p\,\partial q/\partial\alpha_j$. Обозначим

$$\widetilde{I}_k = \widetilde{I}_k(\widetilde{y}_k) = \left[\,|\widetilde{J}_k|^{1/2}\,\varphi(\alpha)\exp\left\{\frac{i}{h}\left[S(\alpha) - \sum_{j=1}^{k}\widetilde{p}_j\widetilde{q}_j(\alpha)\right]\right\}\right]_{\alpha=\alpha(\widetilde{y}_k)},$$

где $\varphi(\alpha)$ — некоторая гладкая функция с носителем $\Omega \subset \widetilde{\Omega}_k$. Соответствующие величины, отвечающие $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_k$, будем покрывать двумя волнами. Обозначим через $\Phi^{q_k}$ обратное преобразование Фурье:

$$\Phi^{\widetilde{q}_k}\psi = \frac{e^{-i\pi k/4}}{(2\pi h)^{k/2}}\int e^{-\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{k}\widetilde{p}_j\widetilde{q}_j}\,\psi(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_k)\,d\widetilde{q}_1\ldots d\widetilde{q}_k. \tag{3.1}$$

В случае когда носитель функции $\psi(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_k)$ равен $R$, интеграл нужно брать по $R$.

Доказательству трех сформулированных теорем мы предпошлем несколько лемм. Заранее условимся, что все равенства в леммах 1—4 и доказательстве теоремы 3 мы будем понимать с точностью до $O(h)$ в указанном выше (§ 1, п. 2) смысле.

Лемма 2. *Пусть носитель $\Omega$ финитной функции $\varphi(\alpha)$ принадлежит лагранжеву многообразию $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$ и проектируется взаимно однозначно на координатную плоскость $q$ и на плоскость $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = \ldots = \widetilde{q}_k = \widetilde{p}_{k+1} = \ldots \ldots = \widetilde{p}_n = 0$, а $\mho_k$ — его проекция на плоскость $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = \ldots \ldots = \widetilde{q}_k = \widetilde{p}_{k+1} = \ldots = \widetilde{p}_n = 0$. Тогда выражение $\Phi^{\widetilde{q}_k} I_0(\widetilde{q})$ равно $\widetilde{I}_k e^{-(i\pi/2)\widetilde{\gamma}_k}$ при $\widetilde{y}_k \in \mho_k$ и равно нулю при $\widetilde{y}_k \bar{\in} \mho_k$.*

Доказательство. Для вычисления интеграла $\Phi^{\widetilde{q}_k} I_0(\widetilde{q})$ применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки $\widetilde{q}_i = \widetilde{q}_i^0$, $i = 1, \ldots, k$, определяются из системы

$$\frac{\partial S(\alpha(\widetilde{q}))}{\partial\widetilde{q}_i} = \widetilde{p}_i, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{3.2}$$

Положим в (3.2)

$$\widetilde{p}_j=\widetilde{p}_j(\overline{\alpha}),\ \widetilde{q}_i=\widetilde{q}_i(\overline{\alpha}),\quad i=k+1,\ \ldots,\ n,\ j=1,\ \ldots,\ k. \tag{3.3}$$

Поскольку

$$\frac{\partial S(\alpha(\widetilde{q}))}{\partial\widetilde{q}}=\widetilde{p}(\alpha(\widetilde{q}))\ \text{ и }\ \alpha(\widetilde{q}(\overline{\alpha}))=\overline{\alpha}\ \text{ при }\ \overline{\alpha}\in\widetilde{\Omega}_0,$$

то система (3.2) удовлетворяется при $\widetilde{q}_i^0=\widetilde{q}_i(\overline{\alpha})$, $i=1,\ldots,k$. Положим в системе (3.3) $\overline{\alpha}=\alpha(\widetilde{y}_k)$ $(\widetilde{y}_k=\widetilde{p}_1,\ \ldots,\ \widetilde{p}_k,\ \widetilde{q}_{k+1},\ \ldots,\ \widetilde{q}_n)$. Получим, что $\widetilde{q}_i^0=\widetilde{q}_i[\alpha(\widetilde{y}_k)]$, $i=1,\ldots,k$, являются решениями системы (3.2) при произвольных $\widetilde{y}_k\in\mho_k$, поскольку

$$\widetilde{p}_j[\alpha(\widetilde{y}_k)]\equiv\widetilde{p}_j,\quad j=1,\ldots k,\quad \widetilde{q}_i[\alpha(\widetilde{y}_k)]\equiv\widetilde{q}_i,\ i=k+1,\ldots,n.$$

Если $\widetilde{y}_k\,\overline{\in}\,\mho_k$, то стационарные точки $\widetilde{q}_i^0$, $i=1,\ldots,k$, не принадлежат области, в которой подинтегральная функция отлична от нуля.

Единственность решения системы (3.2) в области $\widetilde{y}_k\in\mho_k$ следует из того факта, что

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S(\alpha(\widetilde{q}))}{\partial\widetilde{q}_i\,\partial\widetilde{q}_j}\right\|_{i,j=1,\ldots,k}=\det\widetilde{B}_k^{-1}=$$

$$=\frac{D\sigma(\alpha)/D\widetilde{q}}{D\sigma(\alpha)/D\widetilde{y}_k}\neq 0,\quad \widetilde{q}_i=\widetilde{q}_i(\overline{\alpha}). \tag{3.4}$$

Условия применимости метода стационарной фазы выполнены, откуда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть носитель функции* $\varphi(\alpha)$ *принадлежит пересечению* $\widetilde{\Omega}_{k_1}\cap\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$, *тогда в точках* $\widetilde{\widetilde{y}}_{k_2}\in\mho_{k_2}$, *таких, что* $\alpha(\widetilde{\widetilde{y}}_{k_2})$ *является неособой, имеет место равенство*[1])

$$\Phi^{\widetilde{\widetilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\widetilde{p}_{k_1}}\widetilde{I}_{k_1}=e^{i\pi/2\cdot(\widetilde{\gamma}_{k_1}-\widetilde{\widetilde{\gamma}}_{k_2})}\,\widetilde{\widetilde{I}}_{k_2}. \tag{3.5}$$

---

[1]) Здесь $\Phi^{\widetilde{\widetilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\widetilde{p}_{k_1}}\widetilde{I}_{k_1}\equiv\Phi^{\widetilde{\widetilde{q}}_{k_2}}[\Phi^{\widetilde{p}_{k_1}}\widetilde{I}_{k_1}]_{\widetilde{q}=\widetilde{q}(\widetilde{\widetilde{q}})}$.

Доказательство. В силу леммы 2 в неособых точках

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_1}}\tilde{I}_0 = e^{-i\tilde{\gamma}_{k_1}\pi/2}\, I_{k_1}. \tag{3.6}$$

Отсюда 168

$$\tilde{I}_0 = e^{-i\tilde{\gamma}_{k_1}\pi/2}\,\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}. \tag{3.7}$$

Поэтому в силу леммы 2

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1} = e^{i\pi/2\cdot\tilde{\gamma}_{k_1}}\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}I_0 = e^{i\pi/2\cdot(\tilde{\gamma}_{k_1}-\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2})}\tilde{\tilde{I}}_{k_2}, \tag{3.8}$$

что и требовалось.

Лемма 4. *Пусть носитель* $\varphi(\alpha)$ *принадлежит* $\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$, *тогда имеет место соотношение*

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1} = e^{-i\pi m/2}\tilde{\tilde{I}}_{k_2},$$

*где* $m$ — *некоторое целое число, не зависящее от* $\tilde{\tilde{y}}_{k_2}$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2}) = \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1},$$

имеющий вид

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2}) = \frac{e^{i\pi/4\cdot(k_1-k_2)}}{(2\pi h)^{(k_1+k_2)/2}}\cdot\int \exp\left\{\frac{i}{h}\left[S(\bar{\alpha}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j(\tilde{q}_j(\bar{\alpha})-\tilde{q}_j)\right]\right\}\exp\left[-\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{k_2}\tilde{\tilde{p}}_j\tilde{\tilde{q}}_j\right]\times$$

$$\times\left|\frac{D\sigma(\alpha)}{D\tilde{y}_{k_1}}\right|^{1/2}\cdot\varphi(\bar{\alpha})\,d\tilde{p}_1\ldots d\tilde{p}_{k_1}\,d\tilde{\tilde{q}}_1\ldots d\tilde{\tilde{q}}_{k_2}, \tag{3.9}$$

где

$$\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\tilde{\tilde{q}}_j,\quad \det\|\beta_{ij}\| = 1,$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{y}_{k_1}) = \bar{\alpha}\left(\tilde{p}_1,\ \ldots,\ \tilde{p}_{k_1},\ \sum_{j=1}^{n}\beta_{k_1+1,\,j}\tilde{\tilde{q}}_j,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}\tilde{\tilde{q}}_j\right).$$

Для вычисления интеграла (3.9) применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки $\tilde{\tilde{q}}_i^0, \tilde{p}_j^0$, $i=1, \ldots, k_2$, $j=1, \ldots, k_1$, определяются из системы

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha})-\sum\limits_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial\tilde{p}_j}=-\tilde{q}_j, \quad j=1, \ldots, k_1, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha})-\sum\limits_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial\tilde{\tilde{q}}_\nu}+\sum_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j\beta_{j\nu}-\tilde{\tilde{p}}_\nu=0, \ \nu=1, \ldots, k_2. \tag{3.11}$$

Как известно,

$$\frac{\partial\left[S(\bar{\alpha})-\sum\limits_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right]}{\partial\tilde{p}_j}=-\tilde{q}_j(\bar{\alpha}), \quad j=1, \ldots, k_1, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial\left[S(\bar{\alpha})-\sum\limits_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right]}{\partial\tilde{q}_\nu}=\tilde{p}_\nu(\bar{\alpha}), \quad \nu=k_1+1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что

$$\frac{\partial\left[S(\bar{\alpha})-\sum\limits_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right]}{\partial\tilde{\tilde{q}}_\nu}=\sum_{l=k_1+1}^{n}\frac{\partial\left[S(\bar{\alpha})-\sum\limits_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right]}{\partial\tilde{q}_l}\beta_{l\nu}=$$

$$=\sum_{l=k_1+1}^{n}\tilde{p}_l(\bar{\alpha})\beta_{l\nu}. \tag{3.14}$$

В силу (3.12), (3,14) систему (3.10), (3.11) можно переписать в виде

$$\tilde{q}_j(\bar{\alpha})=\tilde{q}_j, \qquad j=1, \ldots, k_1, \tag{3.10$'$}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{p}_j(\bar{\alpha})\beta_{j\nu}=\tilde{\tilde{p}}_\nu, \qquad \nu=1, \ldots, k_2. \tag{3.11$'$}$$

Можно убедиться, что система (3.10), (3.11) имеет решение $\tilde{p}=\tilde{p}_j^0=\tilde{p}_j^0(\bar{\bar{\alpha}})$, $\tilde{\tilde{q}}_i=\tilde{\tilde{q}}_i^0=\tilde{\tilde{q}}_i(\bar{\bar{\alpha}})$, где $\bar{\bar{\alpha}}=\bar{\bar{\alpha}}(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ — решение системы $\overset{\approx}{p}_j(\alpha)=\overset{\approx}{p}_j$ $(j=1, \ldots, k_2)$, $\overset{\approx}{q}_i(\alpha)=\overset{\approx}{q}_i$ $(i=k_2+ +1, \ldots, n)$. Пусть далее $D_{k_1k_2}(\overset{=}{\alpha})$—определитель матрицы $A(\overset{=}{\alpha})$ вторых производных фазы интеграла (3.9). Из формулы (3.8) следует, что при $\overset{\approx}{y}_{k_2}$, таком, что $\alpha(\overset{\approx}{y}_{k_2})$ — неособая точка,

$$\varlimsup_{h\to 0}\Phi^{\overset{\approx}{q}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}<\infty.$$

Следовательно (см. утверждение 2 на стр. 201), $D_{k_1k_2}(\alpha(\overset{\approx}{y}_{k_2}))\neq 0$ и метод стационарной фазы применим. Отсюда и из соотношения (3.8) следует, что в неособых точках $\overset{=}{\alpha}$

$$|D_{k_1k_2}(\overset{=}{\alpha})|=\left|\frac{\overset{\approx}{I}_{k_2}(\overset{=}{\alpha})}{\tilde{I}_{k_1}(\overset{=}{\alpha})}\right|. \tag{3.15}$$

Отсюда по непрерывности получаем, что это равенство сохраняется и в особых точках $\overset{=}{\alpha}\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\overset{\approx}{\Omega}_{k_2}$. Значит, $D_{k_1k_2}(\overset{=}{\alpha})\neq 0$ при $\overset{=}{\alpha}\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\overset{\approx}{\Omega}_{k_2}$. С помощью метода стационарной фазы получаем

$$I(\overset{\approx}{y}_{k_2})=e^{-i\pi m/2}\overset{\approx}{I}_{k_2},$$

где $m=\operatorname{Ind}A(\overset{=}{\alpha})-k_2$. Из (3.15) следует, что $D_{k_1k_2}(\overset{=}{\alpha})$ не обращается в нуль на пересечении карт $\tilde{\Omega}_{k_1}$ и $\overset{\approx}{\Omega}_{k_2}$. Следовательно, $\operatorname{Ind}A(\alpha)$ не меняется при $\alpha\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\overset{\approx}{\Omega}_{k_2}$. Лемма доказана.

Следствие. *Разность* $\tilde{\gamma}_{k_1}-\overset{\approx}{\gamma}_{k_2}$ *равна* $m$ *для всех неособых* $\alpha\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\overset{\approx}{\Omega}_{k_2}$.

Отсюда, поскольку $m$ не зависит от $\alpha\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\overset{\approx}{\Omega}_{k_2}$, то $[\overset{\approx}{\gamma}_{k_2}-\tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha^1)=[\overset{\approx}{\gamma}_{k_2}-\tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha^2)$ для любых неособых точек $\alpha^1$ и $\alpha^2$, принадлежащих пересечению $\tilde{\Omega}_{k_1}$ и $\overset{\approx}{\Omega}_{k_2}$.

Следовательно,

$$\overset{\approx}{\gamma}_{k_2}(\alpha^1)-\overset{\approx}{\gamma}_{k_2}(\alpha^2)=\tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha^1)-\tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha^2)=\operatorname{Inv}.$$

Мы доказали, что индекс пути из $\alpha^1$ в $\alpha^2$ является инвариантом, не зависящим от того, в какую карту попали точки $\alpha^1$ и $\alpha^2$. Отсюда следует теорема 1 о гомотопической инвариантности индекса пути [1]).

Доказательство теоремы 3. Обозначим через $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}, \mathrm{H}, \{e^j\}, \{l^j\}]$ канонический оператор вида (2.6), зависящий от покрытия H, совокупности центров $\mathscr{X}$, разбиения единицы $\{e^j\}$ и путей $\{l^j\}$. Нетрудно убедиться, что в силу гомотопической инвариантности в малом $\int p\,dq$ и $\operatorname{Ind} l\,[\alpha^0, \alpha]$ выполнение условий (2.8) необходимо и достаточно для того, чтобы с точностью $O(h)$ оператор $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ однозначным образом определялся данным атласом H, центрами $\mathscr{X}$ и данным разбиением единицы. Таким образом,

$$K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}, \mathrm{H}, \{e^j\}, \{l^j\}] \sim K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}, \mathrm{H}, \{e^j\}, \{\tilde{l}^j\}],$$

и мы можем оператор (2.6) обозначить через $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}, \mathrm{H}, \{e^j\}]$.

Прежде чем переходить к доказательству независимости канонического оператора от разбиения единицы, докажем лемму.

Лемма 5. *Пусть области* $\Omega^i = \Omega^i(\beta)$, $i = 1, \ldots, N$, (*элементы покрытия* $\mathrm{H}(\beta)$ *с совокупностью центров* $\mathscr{X}(\beta)$) *и* $\tilde{e}^i(\alpha) = \tilde{e}^i(\alpha, \beta)$ (*элементы разложения единицы*) *зависят от некоторого параметра* $\beta \in [0, \varepsilon]$ *так, что каждая область* $\Omega^i(\beta)$ *при всех* $\beta \in [0, \varepsilon]$ *взаимно однозначно проектируется на одну и ту же плоскость* $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$, *а* $\tilde{e}^i(\alpha, \beta)$ *дважды дифференцируема по* $\beta$. *Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial\beta} K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}\{\mathscr{X}(\beta), \mathrm{H}(\beta), \{\tilde{e}^i(\alpha, \beta)\}\}\varphi(\alpha) = 0.$$

---

1) По определению, $\operatorname{Ind} l\,[\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\alpha}_{k_2}] = m$, где $\tilde{\alpha}_{k_1}$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$ — центральные точки карт $\tilde{\Omega}_{k_1}$, $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для точки $\beta=0$. Пусть $\widetilde{e}^j_k(\alpha,\beta)$ — элемент разложения единицы, отвечающий некоторой карте $\widetilde{\Omega}^j_k(\beta)$, и пусть карта $\widetilde{\Omega}^j_k(\beta)$ пересекается только с $l$ картами $\widetilde{\widetilde{\Omega}}^i_{k_i}(\beta)$, $i=1,\ldots,l$. Рассмотрим

$$K_\Gamma^{\gamma,\,\alpha^0}\varphi(\alpha)=K_\Gamma^{\gamma,\,\alpha^0}\sum_{j=1}^{N}\widetilde{e}^j_k(\alpha,0)\varphi(\alpha). \tag{3.16}$$

Докажем, что $\left[\frac{\partial}{\partial\beta}K_\Gamma^{\gamma,\,\alpha^0}\widetilde{e}^j_k(\alpha,0)\varphi(\alpha)\right]_{\beta=0}=0.$

Имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta}K_\Gamma^{\gamma,\,\alpha^0}\widetilde{e}^j_k(\alpha,0)\varphi(\alpha)\right]_{\beta=0}=\left\{\Phi^{\widetilde{p}_k}e^{-i\widetilde{\gamma}^j\pi/2}I_k\frac{\partial\widetilde{e}^j_k(\alpha,\beta)}{\partial\beta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{l}\Phi^{\widetilde{\widetilde{p}}_{k_\nu}}e^{-i\widetilde{\widetilde{\gamma}}^\nu\pi/2}\widetilde{\widetilde{I}}_{k_\nu}\frac{\partial\widetilde{\widetilde{e}}^\nu(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right\}\widetilde{e}^j_k(\alpha,0). \tag{3.17}$$

Здесь $\widetilde{\widetilde{e}}^\nu$ и $\widetilde{\widetilde{I}}_{k_\nu}$ отвечают картам $\widetilde{\widetilde{\Omega}}^\nu_{k_\nu}(\beta)$, а

$$\Phi^{\widetilde{\widetilde{p}}_{k_\nu}}f(\alpha)=\Phi^{\widetilde{\widetilde{p}}_{k_\nu}}f[\alpha(\widetilde{\widetilde{y}}_{k_\nu})].$$

В силу лемм 3 и 4

$$\Phi^{\widetilde{p}_k}\exp\left(-i\frac{\widetilde{\gamma}_k\pi}{2}\right)\widetilde{I}_k\left[\frac{\partial\widetilde{\widetilde{e}}^\nu(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}\right]\widetilde{e}^j_k(\alpha,0)=$$

$$=\exp\left(-i\frac{\widetilde{\widetilde{\gamma}}_{k_\nu}\pi}{2}\right)\Phi^{\widetilde{\widetilde{p}}_{k_\nu}}I_{k_\nu}\left[\frac{\partial\widetilde{\widetilde{e}}^\nu(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}\right]\widetilde{e}^j_k(\alpha,0),$$
$$\nu=1,\ldots,l. \tag{3.18}$$

Поскольку $\widetilde{e}^j_k(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{l}\widetilde{\widetilde{e}}^i(\alpha,\beta)=1$ при $\alpha\in\widetilde{\Omega}^j_k(\beta)\cap R$, то $\partial\left[\widetilde{e}^j_k(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{l}\widetilde{\widetilde{e}}^i(\alpha,\beta)\right]/\partial\beta=0$ в указанных точках. Отсюда, из (3.17) и (3.18) следует утверждение леммы.

Пусть $\overline{\mathrm{H}}$ и $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$ — атласы с одной и той же совокупностью центров $\mathscr{X}$, т. е. одной центральной точке $\alpha^j$

отвечают области $\bar{\Omega}^i \in \bar{\mathrm{H}}$ и $\bar{\bar{\Omega}}^i \in \bar{\bar{\mathrm{H}}}$. Рассмотрим атлас Н с центрами $\mathscr{X}$ и областями $\Omega^i = \bar{\Omega}^i \bigcup \bar{\bar{\Omega}}^i$. Им отвечают разложения единицы $\{e^i(\alpha)\}$, $\{\bar{e}^i(\alpha)\}$ и $\{\bar{\bar{e}}^i(\alpha)\}$. Рассмотрим разложение единицы $\{e^i(\alpha, \beta)\}$, где $e^i(\alpha, \beta) = [\bar{e}^i(\alpha) + \beta e^i(\alpha)](1+\beta)^{-1}$, отвечающее покрытию $\Omega^i(\beta)$, где $\Omega^i(\beta) = \Omega^i$ при $\beta \in (0,1]$ и $\Omega^i(0) = \bar{\Omega}^i$. В силу леммы 5 получаем, что канонический оператор не меняется (с точностью до $O(h)$) от замены атласа Н на $\bar{\mathrm{H}}$. Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и относительно атласа $\bar{\bar{\mathrm{H}}}$. Следовательно, замена атласа $\bar{\mathrm{H}}$ на $\bar{\bar{\mathrm{H}}}$ сказывается в каноническом операторе лишь на величинах порядка $O(h)$. Поэтому мы можем записать $K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0}[\mathscr{X}, \mathrm{H}, \{e^i\}] = K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0}(\mathscr{X})$.

Пусть теперь дан атлас Н. Возьмем некоторую точку $\bar{\alpha} \in R$, $\bar{\alpha} \bar{\in} \mathscr{X}$. Изменим покрытие Н (сохраняя его центры $\mathscr{X}$) так, чтобы точка $\bar{\alpha}$ принадлежала только одной карте $\tilde{\Omega}_k^{i_0}$ нового атласа Н′ с теми же самыми центрами $\mathscr{X}$. По доказанному эта процедура оставляет $K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0}$ инвариантным. Окружим точку $\bar{\alpha}$ такой областью, которая пересекается только с $\tilde{\Omega}_k^{i_0}$ и целиком проектируется на фокальную плоскость, отвечающую $\bar{\alpha}$. Таким образом, мы построим новую карту с центром в точке $\bar{\alpha}$, обозначим ее через $\tilde{\tilde{\Omega}}_k^{\omega}$, а дополненный этой картой атлас Н′ и дополненное точкой $\bar{\alpha}$ множество $\mathscr{X}$ соответственно обозначим Н″ и $\mathscr{X}''$. Пусть $\{e_{(1)}^i(\alpha)\}$ — разбиение единицы по атласу Н′, тогда можно построить следующее разбиение единицы $\{e_{(2)}^i(\alpha)\}$ по атласу Н″:

$$\begin{cases} e_{(2)}^i(\alpha) \equiv e_{(1)}^i(\alpha) & \text{при } i \neq i_0, \\ e_{(1)}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}^{i_0}(\alpha) + e_{(2)}^{\omega}(\alpha). \end{cases}$$

Рассмотрим разность выражений $K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0}\varphi(\alpha)$, соответствующих атласам Н′ и Н″ с разбиениями единицы $e_{(1)}^i$

и $e^i_{(2)}$ соответственно. Очевидно, что

$$K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}(\mathscr{X})\varphi(\alpha)-K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}(\mathscr{X}'')\varphi(\alpha)=$$

$$=\exp\left(i\gamma-\frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l\,[\alpha^0,\alpha^{i_0}]\right)\Phi^{\widetilde{p}_k}[e^{i_0}_{(1)}(\alpha)-e^{i_0}_{(2)}(\alpha)]\widetilde{I}_k-$$

$$-\exp\left\{i\gamma-\frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l\,[\alpha^0,\alpha^\omega]\right\}\Phi^{\widetilde{\widetilde{p}}_{k'}}e^\omega_{(2)}(\alpha)\widetilde{\widetilde{I}}_{k'}. \qquad (3.19)$$

Так как $e^{i_0}_{(1)}(\alpha)-e^{i_0}_{(2)}(\alpha)=e^\omega_{(2)}(\alpha)$ и носитель $e^\omega_{(2)}\in\widetilde{\Omega}^{i_0}_k\cap\widetilde{\widetilde{\Omega}}^\omega_{k'}$, то в силу лемм 3 и 4 разность (3.19) эквивалентна нулю. Следовательно, к центрам $\mathscr{X}$ атласа II можно добавить новые центральные точки и от этого оператор $K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}$ изменится на $O(h)$. Пусть даны канонические атласы H′ и H″ с совокупностями центров $\mathscr{X}'$ и $\mathscr{X}''$. Рассмотрим атлас H с совокупностью центров $\mathscr{X}=\mathscr{X}'\cup\mathscr{X}''$. По доказанному

$$K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}']\sim K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}] \text{ и } K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}'']\sim K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}],$$

следовательно,

$$K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}]\mathscr{X}']\sim K_\Gamma^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}''],$$

что и требовалось.

Теорема 3а доказывается аналогично, при учете, что в леммах 2—4 метод стационарной фазы дает асимптотические ряды по степеням $h$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Gamma_0$ и $\Gamma_t$ — лагранжевы многообразия, причем $\Gamma_0$ может быть непрерывно деформировано в $\Gamma_t$, так что они включаются в однопараметрическое семейство $\Gamma_\tau$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, где $\Gamma_\tau$ — лагранжево многообразие при любом $\tau$.

Пусть, как обычно, $\mathrm{H}_0$ — канонический атлас начального лагранжева подмногообразия $\Gamma_0=\{q^0(\alpha),\ p^0(\alpha)\}$. Обозначим через $U_{\tau_1,\tau_2}$ отображение подмногообразия $\Gamma_{\tau_1}$ на $\Gamma_{\tau_2}$: $U_{\tau_1,\tau_2}\Gamma_{\tau_1}=\Gamma_{\tau_2}$, через $\mathrm{H}_\tau$ — канонический атлас подмногообразия $\Gamma_\tau$.

Пусть $\Omega^j$ отвечает карте $\widetilde{\Omega}^j_k\subset\mathrm{H}_0$. По определению карты $\widetilde{\Omega}^j_k$ область $\Omega^j$ взаимно однозначно проектируется на плоскость $\widetilde{p}_1,\ \ldots,\ \widetilde{p}_k,\ \widetilde{q}_{k+1},\ \ldots,\ \widetilde{q}_n$. Положим $\Omega^j_{\tau_0}=$

$=U_{0,\tau_0}\Omega^j$. Очевидно, что при $\tau_0<\varepsilon$ область $\Omega^j_{\tau_0}$ также будет взаимно однозначно проектироваться на ту же плоскость. Поскольку областей $\Omega^j$ конечное число, то найдется такое $\varepsilon>0$, что при $\tau_0<\varepsilon$ во всех областях $\Omega^j_{\tau_0}$ можно ввести те же локальные координаты $\widetilde{y}_k$, что и в их прообразах $\Omega^j$. Таким образом, в качестве атласа $\mathrm{H}_{\tau_0}$ на $\Gamma_{\tau_0}$ можно взять совокупность локальных карт $(\widetilde{\Omega}^i_{\tau_0})_k=U_{0,\tau_0}\widetilde{\Omega}^i_k$, отвечающих областям $\Omega^i_{\tau_0}$ и координатам $\widetilde{y}_k=\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_k, \widetilde{q}_{k+1}, \ldots, \widetilde{q}_n$, так, что при $\tau_0\leqslant\varepsilon$ можно, по определению, писать $\mathrm{H}_{\tau_0}=U_{0,\tau_0}\mathrm{H}_0$.

В силу леммы Бореля конечный интервал $[0, t]$ мы можем разбить (точками $0=\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m=t$) на конечное число интервалов длины $\Delta$, обладающих следующим свойством: на $\Gamma_{\tau_i}$ может быть выбран такой атлас $\mathrm{H}^i_{\tau_i}$, что $\mathrm{H}^i_\tau=U_{\tau_i,\tau}\mathrm{H}^i_{\tau_i}$ — атлас при $\tau_i\leqslant\tau\leqslant\tau_{i+1}$. В свою очередь на $\Gamma_{\tau_{i+1}}$ может быть выбран такой атлас $\mathrm{H}^{i+1}_{\tau_{i+1}}$, вообще говоря, отличный от атласа $\mathrm{H}^i_{\tau_{i+1}}=U_{\tau_i,\tau_{i+1}}\mathrm{H}^i_{\tau_i}$, что $\mathrm{H}^{i+1}_\tau=$ $=U_{\tau_{i+1},\tau}\mathrm{H}^{i+1}_{\tau_{i+1}}$ — атлас того же типа при $\tau_{i+1}\leqslant\tau\leqslant\tau_{i+2}$.

Рассмотрим цикл $\gamma_{\tau_i}$ на подмногообразии $\Gamma_{\tau_i}$. Докажем инвариантность $\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i}$ относительно деформации $\Gamma_{\tau_i}\to\Gamma_{\tau_{i+1}}$, т. е. докажем, что при этой деформации $\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i}=\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_{i+1}}$, где $\gamma_{\tau_{i+1}}=U_{\tau_i,\tau_{i+1}}\gamma_{\tau_i}$. Поскольку мы доказали инвариантность $\operatorname{Ind}\gamma$ при переходе от одного атласа к другому, то тем самым будет доказана инвариантность индекса любого цикла относительно деформации $\Gamma\to\Gamma_t$.

Вначале допустим, что цикл $\gamma_{\tau_i}$ можно деформировать на $\Gamma_{\tau_i}$ таким образом, чтобы он не проходил подряд через две особые карты атласа $\mathrm{H}^i_{\tau_i}$. Рассмотрим отрезок $l_{\tau_i}=l_{\tau_i}[\alpha^1, \alpha^2]$ цикла $\gamma_{\tau_i}$, лежащий целиком в трех картах $\Omega^1$, $\widetilde{\Omega}_k$, $\Omega^2$, где $\widetilde{\Omega}_k$ — особая, $\Omega^1$ и $\Omega^2$ — неособые карты. Карты $U_{\tau_i,\tau}\,\Omega^\sigma$ $(\sigma=1, 2)$, $U_{\tau_i,\tau}\widetilde{\Omega}_k$ при $\tau_i\leqslant\tau\leqslant\tau_{i+1}$ мы будем обозначать снова через $\Omega^\sigma$ $(\sigma=1,2)$, $\widetilde{\Omega}_k$ соответственно.

Рассмотрим отрезок $U_{\tau_i,\tau_{i+1}}l_{\tau_i}=l_{\tau_{i+1}}\subset\gamma_{\tau_{i+1}}$. Докажем, что $\operatorname{Ind}l_{\tau_i}=\operatorname{Ind}l_{\tau_{i+1}}$. Тем самым будет доказана инвариантность $\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i}$, поскольку по построению величина индекса может изменяться лишь при переходе через особые точки. В силу этого замечания, не уменьшая общности, мы можем предположить, что $\alpha^1$, $\alpha^2 \in \widetilde{\Omega}_k$, т. е. $\alpha^1 \in \widetilde{\Omega}_k \bigcap \Omega^1$, а $\alpha^2 \in \widetilde{\Omega}_k \bigcap \Omega^2$. На каждом из пересечений $\widetilde{\Omega}_k \bigcap \Omega^1$, $\widetilde{\Omega}_k \bigcap \Omega^2$ якобиан $D\widetilde{y}_0/D\widetilde{y}_k$, по определению карт $\Omega^\sigma$ и $\widetilde{\Omega}_k$, не обращается в нуль. По построению он отличен от нуля и в точках $U_{\tau_i, \tau}\alpha^\sigma$ $(\sigma = 1, 2)$, $\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}$. Следовательно, и равный ему детерминант матрицы $\widetilde{B}_k = \| \partial\widetilde{q}_i/\partial\widetilde{p}_j \|_{i, j \leqslant k}$ отличен от нуля в этих точках. Поэтому индекс инерции матрицы $\widetilde{B}_k$ не меняется при переходе от $\alpha^\sigma \in \Gamma_{\tau_i}$ к $U_{\tau_i, \tau_{i+1}}\alpha^\sigma \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$. Следовательно, $\operatorname{Ind} l_{\tau_i} = \operatorname{Ind} l_{\tau_{i+1}}$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай. Деформируем цикл $\gamma_{\tau_i}$ и цикл $\gamma_{\tau_{i+1}}$ таким образом, чтобы они проходили через центральные точки всех карт, которые эти циклы пересекают. Рассмотрим отрезок цикла $\gamma_{\tau_i}$, проходящий из центральной точки $\widetilde{\alpha}_{k_1}$ карты $\widetilde{\Omega}_{k_1}$ в центральную точку $\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_2}$ карты $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$ на многообразии $\Gamma_{\tau_i}$. Рассмотрим соответствующий отрезок пути цикла $\gamma_{\tau_{i+1}}$ из центральной точки $\widetilde{\alpha}'_{k_1} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ карты $\widetilde{\Omega}'_{k_1} = U_{\tau_i, \tau_{i+1}}\widetilde{\Omega}_{k_1}$ в центральную точку $\widetilde{\widetilde{\alpha}}'_{k_2} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ карты $\widetilde{\widetilde{\Omega}}'_{k_2} = U_{\tau_i, \tau_{i+1}}\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$. Докажем, что индексы этих путей совпадают. Отсюда, очевидно, будет следовать, что индекс цикла $\gamma_{\tau_i}$ равен индексу цикла $\gamma_{\tau_{i+1}}$.

Напомним, что мы определили индекс пути из неособой точки $\alpha^1$ карты $\widetilde{\Omega}_k$ в центральную точку $\widetilde{\alpha}_k$ этой же карты как индекс инерции матрицы $\widetilde{B}_k$ в точке $\alpha^1$.

Пусть $\alpha^1 \in \widetilde{\Omega}_{k_1} \bigcap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$ и является неособой, $\widetilde{\alpha}_{k_1}$ и $\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_2}$ — центральные точки карт $\widetilde{\Omega}_{k_1}$ и $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$ соответственно. Очевидно, что $\operatorname{Ind} l\,[\widetilde{\alpha}_{k_1}, \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_2}] = -\operatorname{Ind} l\,[\alpha^1, \widetilde{\alpha}_{k_1}] + \operatorname{Ind} l\,[\alpha^1, \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_2}]$. Таким образом, индекс пути из $\widetilde{\alpha}_{k_1}$ в $\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_2}$ равен разности индексов инерции матриц $\widetilde{B}_{k_1}$ и $\widetilde{\widetilde{B}}_{k_2}$, взятых в точке

$\alpha^1 \in \widetilde{\Omega}_{k_1} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$. По доказанному в лемме 4 эта разность равна индексу инерции матрицы $A(\alpha^1)$.

Заметим, что мы всегда можем считать, что многообразия $\Gamma_{\tau_i}$ и $\Gamma_{\tau_{i+1}}$ находятся в общем положении. Однако при некоторых $\tau \in \{\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}\}$ многообразие может и не находится в общем положении.

Пусть $\alpha^0 \in \widetilde{\Omega}_{k_1} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$ и лежит на $\gamma_{\tau_i}$, а $\underset{1}{\alpha^0} = U_{\tau_i, \tau_{i+1}} \alpha^0$ лежит на $\gamma_{\tau_{i+1}}$, причем точки $\alpha^0$ и $\underset{1}{\alpha^0}$ неособые. Докажем, что индексы инерции матрицы $A(\alpha)$ в точках $\alpha^0$ и $\underset{1}{\alpha^0}$ совпадают. Этим и в силу сказанного выше будет исчерпано доказательство инвариантности индекса цикла $\gamma_{\tau_i}$.

Равенство (3.15), доказанное для случая, когда многообразие особенностей $M$ имеет размерность не более чем $n-1$, по непрерывности продолжается на общий случай. Поэтому $\det A(\alpha)$ не обращается в нуль на пересечении карт $\widetilde{\Omega}_{k_1} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$, а также вдоль пути $U_{\tau_i, \tau}\alpha_0$ при $\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}$. Следовательно, вдоль этого пути индекс инерции матрицы $A(\alpha)$ не изменяется (в противном случае $\det A(\alpha)$ обратился бы в нуль), что и требовалось. Отсюда следует и аналог теоремы 1 для пленки.

## § 4. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### 1. Формулировка теоремы

Мы остановимся на наиболее общей и наиболее актуальной с точки зрения квантовой химии и физики задаче, когда в линейном уравнении с частными производными малый параметр стоит лишь при производных по некоторым выделенным переменным. Этому случаю отвечает задача, связанная с взаимодействием тяжелых и легких частиц, которая, например, имеет место в квантовой теории молекул или в теории столкновений.

Таким образом, наш дифференциальный оператор будет зависеть от двух систем переменных. Пусть малый параметр стоит при производных по $n$ переменным (например, описывающим систему тяжелых частиц). Относительно зависимости оператора от остальных переменных (число которых, в частности, может быть и равно нулю) и производных по ним нам понадобятся лишь настолько общие сведения, что мы можем для простоты записи написать дифференциальное уравнение от $n$ выделенных переменных с операторными коэффициентами, зависящими от этих переменных как от параметров.

Например, уравнение

$$-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2\psi}{dx_2^2}+v(x_1, x_2)\psi=\lambda\psi,$$

где $m_1 \gg m_2$, мы представим в виде

$$-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+A(x_1)\psi=\lambda\psi,$$

где $A(x_1)$ — оператор

$$-\frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+v(x_1, x_2),$$

зависящий от $x_1$ как от параметра. Оператор $A(x_1)$ неограничен в $L_2$. В случае если $v(x_1, x_2)\in C^\infty$, мы можем сказать, что он переводит пространство $W_2^k[R^1]$ функций от $x_2$ в пространство $W_2^{k-2}[R^1]$. Таким образом, если рассмотреть счетно-нормированное пространство[1]) $W_2^\infty[R^1]$, то очевидно, что оператор $A(x_1)$ переводит это пространство в себя.

Функция $\psi(x_1, x_2)$ может быть рассмотрена как функция $x_1$ со значениями в пространстве $W_2^\infty[R^1]$ функций от $x_2$.

В общем случае мы не будем конкретизировать счетно-нормированного пространства, в котором действуют операторные коэффициенты, но во всех приложениях это пространство есть пространство $W_2^\infty[R^s]$, где $s$ — некоторое целое число.

Рассмотрим в качестве примера еще одну задачу:

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left[h^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-v(x_1, x_2)\right]\psi=F(x_1, x_2, t, h),$$

$$\psi|_{t=0}=\psi_0(x_1, x_2, h). \tag{4.1}$$

---

[1]) То есть пространство функций от $x_2$, принадлежащих $W_2^k[R^1]$ при $k=1, 2, \ldots$ (см. [3]).

Предположим, что все заданные функции — бесконечно дифференцируемые по всем аргументам, а величины

$$\max_{\substack{0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0\leqslant h\leqslant 1}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{2} \int \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} F(x_1, x_2, t, h) \right|^2 dx_1\, dx_2, \tag{4.2}$$

$$\max_{0\leqslant h\leqslant 1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{2} \int \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \psi_0(x_1,\ x_2,\ h) \right|^2 dx_1\, dx_2 \tag{4.3}$$

ограничены при $k=1, 2, \ldots$. Это означает, что $F(x_1, x_2, t, h)$ как функция аргументов $x_1$ и $x_2$ принадлежит $W_2^\infty[R^2]$ и непрерывна по $t$ и $h$. Пространство функций со счетным числом норм вида (4.2) или (4.3) мы будем обозначать соответственно $W_2^\infty[R^2, C_2]$ и $W_2^\infty[R^2, C_1]$.

Можно убедиться, что решение $\psi(x_1, x_2, t, h)$ задачи (4.1) удовлетворяет условию $h\psi(x_1, x_2, t, h)\in W_2^\infty[R^2, C_2]$. Иначе говоря, найдется такое $N$, что если $F\in W_2^N[R^2, C_2]$ и $\psi_0\in W_2^N[R^2, C_1]$, то $h\psi(x_1, x_2, t, h)\in W_2^{m(N)}[R^2, C_2]$, причем $\lim\limits_{N\to\infty} m(N)=\infty$. Мы здесь не выделяли переменных $t$ и $x_1$, при производных по которым стоит малый параметр $h$. Однако мы можем рассматривать, кроме пространства $W_2^N[R^2, C_2]$, пространство $W_2^N\{R^1, C_2, W_2^N[R^1]\}$ функций от $x_1, t, h$ со значениями в пространстве $W_2^N[R^1]$ функций от $x_2$. При этом $W_2^N\{R^1, C_2, W_2^N[R^1]\}$ вкладывается в $W_2^N[R^2, C_2]$. Пусть $\{B^N\}$ — некоторая последовательность банаховых пространств $B^{N+1}\subset B^N$, $N=1, 2, \ldots$, определяющая счетно-нормированное пространство $B^\infty$. В общем случае мы будем рассматривать пространство функций от $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, t, h$, принадлежащих $W_2^\infty[R^n, C_2]$, со значениями в некотором абстрактном счетно-нормированном пространстве $B^\infty$. Это пространство функций, которое мы обозначим через $W_2^\infty[R^n, C_2, B^\infty]$, имеет счетное число норм вида

$$\max_{\substack{0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0\leqslant h\leqslant 1}} \left( \sum_{\substack{i\leqslant n\\ k\leqslant N}} \int \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} F(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t,\ h) \right\|_{B^N}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Канонический оператор $K_{\Gamma,h}^{\gamma,\alpha_0}$, переводящий функцию из $W_2^\infty[\Gamma, C_2, B^\infty]$ со значениями в $B^\infty$ в некоторую функцию $x\in R^n$ со значениями в $B^\infty$, определяется обычным образом, причем $e^i(\alpha, h)$ — непрерывные по $\alpha$, $h$ линейные операторы на многообразии $\Gamma$, при $h=0$ обращающиеся в числовые функции $e^i(\alpha)$ ($e^i(\alpha)$ — элементы разложения единицы по атласу H).

Мы будем изучать асимптотику решения задачи Коши для уравнения

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{L}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, -ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, h\right)\psi, \tag{4.4}$$

где

$$\hat{L}\left(x_1, \ldots, x_n, t, -ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, h\right)\psi = \hat{L}(x, t, \hat{p}, h)\psi = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/h}\,dp\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} L(x, t, p, h)\,e^{-ip\xi/h}\psi(\xi, t)\,d\xi. \tag{4.5}$$

1) Пусть $B^1$ — гильбертово пространство, а оператор $L(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n, t)$, зависящий от $2n+2$ параметров $p_1, \ldots, p_n\in\tilde{\Sigma}\subset R^n$, $x_1, \ldots, x_n\in\Sigma\subset R^n$, $t$, $h$, отображает $B^\infty$ в себя. Пусть оператор $L$ бесконечно дифференцируем по всем этим параметрам и все его частные производные отображают $B^\infty$ в себя. Предположим, что $L(x, t, p, 0)$ самосопряжен в $B^1$ и что существует изолированное собственное значение $H(x, t, p)$ этого оператора, зависящее от параметров $x$, $t$, $p$. Будем его называть *гамильтонианом* оператора $\hat{L}$. Рассмотрим случай, когда кратность этого собственного значения конечна и не зависит от параметров при $p\in\tilde{\Sigma}$, $x\in\Sigma$. (Случай $L(x, t, p, 0)\equiv H(x, t, p, 0)$ может быть рассмотрен аналогичным образом.) Пусть собственные функции $\chi^1(x, t, p)$, $\chi^2(x, t, p)$, ..., $\chi^r(x, t, p)$, отвечающие $H(x, t, p)$ при $p\in\tilde{\Sigma}$, $x\in\Sigma$, при-

надлежат $B^\infty$. Обозначим через $P_H$ проекционный оператор на собственное подпространство, отвечающее $H(x, t, p)$.

Предположим, что оператор

$$T = \{[L(x, t, p, 0) - H(x, t, p)][1 - P_H]\}^{-1}[1 - P_H]$$

существует при $p \in \widetilde{\Sigma}$, $x \in \Sigma$ и определен всюду в $B^\infty$.

2) Наконец, предположим, что решение $\psi \in W_2^\infty[R^n, C_2, B^\infty]$ задачи

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{L}\psi = h^l F(x, t, h), \quad \psi|_{t=0} = h^s \psi_0(x, h),$$

где $l$ и $s$ — некоторые фиксированные числа, а $F(x, t, h)$ и $\psi_0(x, h)$ — произвольные заданные элементы из $W_2^\infty[R^n, C_2, B^\infty]$ и $W_2^\infty[R^n, C_1, B^\infty]$, существует и единственно.

Заметим, что из этих условий практически в конкретных квантовомеханических задачах нужно проверять лишь условие постоянной кратности и изолированности точки $H(x, t, p)$. Из остальных условий нетривиальными для дифференциальных операторов являются: а) принадлежность собственных функций пространству $B^\infty$, б) существование решения $\chi \in B^\infty$ уравнения

$$[L(x, t, p, 0) - H(x, t, p)]\chi = F,$$

где $F \in B^\infty$, в) существование и единственность решения уравнения (4.4). Эти условия проверяются для уравнений квантовой механики с помощью энергетических неравенств. Заметим, что если $B^1$ есть $n$-мерное векторное пространство, а $B^i = B^1$, $i = 2, 3, \ldots, N, \ldots$, то $L(x, t, p, h)$ есть $n \times n$-матрица. Если, кроме того, $L(x, t, p, h)$ линейно зависит от $p$, то уравнение (4.4) есть система первого порядка. В частности, если $L(x, t, p, h) = L^0(x, t, p) + ihL^1(x, t)$, где $L^0(x, t, 0) = 0$, то уравнение (4.4) есть произвольная симметрическая гиперболическая система первого порядка, не зависящая от $h$ (параметр $h$ сокращается). При этом от параметра $h$ зависят лишь начальные данные (осциллирующие начальные условия). Если совершить в приведенной ниже формуле (4.8) преобразование Фурье по $\omega = 1/h$, то мы получим решение задачи о распространении разрыва в большом для гиперболической системы [14].

При высказанных предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ — лагранжево подмногообразие, $\alpha^0$ — его начальная точка. Пусть при*

$0 \leqslant t \leqslant T$ *существует решение* $Q(\alpha, t) \in \Sigma$, $P(\alpha, t) \in \widetilde{\Sigma}$ *системы*[1])

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}, \quad H = H(Q, t, P), \tag{4.6}$$

*удовлетворяющее начальному условию*

$$Q|_{t=0} = q^0(\alpha), \quad P|_{t=0} = p^0(\alpha), \tag{4.7}$$

*и бесконечно дифференцируемое по* $\alpha$ *и* $t$. *Для каждой финитной вектор-функции*

$$\varphi^0(\alpha, h) = \{\varphi^{01}(\alpha, h), \ldots, \varphi^{0r}(\alpha, h)\},$$

*бесконечно дифференцируемой по* $\alpha$ *и ограниченной при* $0 \leqslant h \leqslant 1$ *вместе со всеми производными, существует решение задачи*

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{L}\psi, \tag{4.4}$$

$$\psi|_{t=0} = K^{0,\,\alpha^0}_{\Gamma,\,h}\sum_{i=1}^{r}\varphi^{0i}\chi^i(q^0(\alpha),\ 0,\ p^0(\alpha)), \tag{4.4a}$$

*являющееся функцией от* $x$, $t$, $h$ *со значениями в* $B^\infty$, *представимое в виде*

$$\psi = K^{\gamma,\,\alpha^0_t}_{\Gamma_t,\,h}\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha, t, h)\,\chi^\nu[Q(\alpha, t), t, P(\alpha, t)], \tag{4.8}$$

*где*

$$\Gamma_t = \{Q(\alpha, t),\ P(\alpha, t)\};$$

$\alpha^0_t$ — *начальная точка на многообразии* $\Gamma_t$;

$$\gamma = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l\,[\alpha^0_0,\ \alpha^0_t] + \frac{1}{h}\int\limits_{l[\alpha^0_0,\,\alpha^0_t]}\left\{-H\,dt + \sum_{i=1}^{n} p_i\,dq_i\right\};$$

*а* $\varphi(\alpha, t, h) = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \varphi_2(\alpha, t, h), \ldots, \varphi_r(\alpha, t, h)\}$ *удов-*

---

[1]) Для уравнений квантовой механики решение (4.6), (4.7) существует при любом $T$.

*летворяет уравнению*[1])

$$\frac{d\varphi}{dt}=\left\| -\left(\chi^{\nu}, \frac{d\chi^{\mu}}{dt}\right)-\sum_{i=1}^{n+1}\left(\chi^{\nu}, \left(\frac{\partial L}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial\chi^{\mu}}{\partial x_i}\right)_{h=0}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial x_i}\delta_{\mu\nu}-i\left(\chi^{\nu}, \frac{\partial L}{\partial h}\chi^{\mu}\right)_{h=0}\right\|_{\substack{p=P(\alpha,\,t)\\ x=Q(\alpha,\,t)}}\varphi \quad (4.9)$$

*и начальному условию*

$$\varphi\big|_{t=0}=\varphi^0(\alpha, h). \quad (4.10)$$

В конкретных примерах из формулы (4.8) можно получить столь же простые выражения, как и в одномерном случае (см. § 1, п. 6). Для этого асимптотику в окрестности точки $x=\bar{x}$ нужно выразить с помощью оператора $K_{\Gamma}^{\gamma,\,\alpha^0}(\bar{x})$.

Доказательство теоремы мы разобьем на 4 пункта, снабженные заголовками. Первые два пункта посвящены доказательству вспомогательных лемм, далее рассматривается локальный случай малого времени $T$ и, наконец, в последнем пункте завершается доказательство теоремы.

**2. Разложение оператора по степеням малого параметра.**

Пусть $\psi=\psi(y_k, t, h)=\varphi\exp[iS/h]$, где $S=S(y_k, t)\in C^{\infty}$, $y_k=(p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, а $\varphi=\varphi(y_k, t, h)$ — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция при $0\leqslant h\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant a$ и финитная функция аргументов $y_k$ со значениями в счетно-нормированном пространстве $B^{\infty}$. В формулах (4.4) и (4.5) переобозначим $(p_{k+1}, \ldots, p_n)$ через $\xi=(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$, а $(x_1, \ldots, x_k)$ — через $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_k)$; соответственно $\hat{p}_i=\hat{\xi}_i$ при $i=k+1, \ldots, n$. Теперь мы можем записать

$$L(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n, h)=L(\eta, x, t, p, \xi, h).$$

Обозначим через $F_x$ частную производную $\partial F/\partial x$; например, $L_h=\partial L/\partial h$, $L_{p_i}=\partial L/\partial p_i$. Положим $\eta^0=-S_p$, $\xi^0=S_x$, $L^0=L(\eta, x, t, p, \xi, 0)$, $L_h^0=\partial L/\partial h\,|_{h=0}$. Условимся, что

[1]) Скалярные произведения в (4.9) берутся в $B^1$, а символ $\|\ \ \|$ означает матрицу.

повторение индексов $\nu$, $\mu$ означает суммирование по всем возможным значениям $\nu$, $\mu$, например

$$\eta_\nu p_\nu = \sum_{i=1}^{k} \eta_i p_i, \quad x_\nu \xi_\nu = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \xi_i.$$

Лемма 6. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\left[ -ih\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(\eta, x, t, \hat{p}, \hat{\xi}, h) \right] \Phi^{p_k} \psi =$$

$$= \Phi^{p_k} e^{iS/h} \Big\{ [L^0 + S_t]\varphi + ih \Big[ L^0_{\eta_\nu}\varphi_{p_\nu} - L^0_{\xi_\nu}\varphi_{x_\nu} - \varphi_t -$$

$$- \left( \frac{1}{2} S_{p_\nu p_\mu} L^0_{\eta_\nu \eta_\mu} + \frac{1}{2} S_{x_\nu x_\mu} L^0_{\xi_\nu \xi_\mu} - S_{p_\nu x_\mu} L^0_{\eta_\nu \xi_\mu} - L_{\eta_\nu p_\nu} \right) \varphi -$$

$$- iL^0_h \varphi \Big]_{\substack{\eta=\eta^0 \\ \xi=\xi^0}} + \sum_{i=2}^{N} h^i P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta}) \varphi \Big\} + h^{N+1} z(\eta, x, t, h), \tag{4.11}$$

*где* $P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})$ — *полиномы* $2i$-*го порядка по* $\hat{\eta}$, $\hat{\xi}$, *а* $h^m z(\eta, x, t, h) \in W_2^m[R^n, C_2, B^\infty]$, $m = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. Обозначим

$$I_1(\eta, x, t, \xi, h) = \int \exp\left[ \frac{i}{h}(\eta_\nu p'_\nu - \xi_\nu x'_\nu) \right] \times$$

$$\times L(\eta, x, t, p', \xi, h) \exp\left[ \frac{i}{h} S(p', x', t) \right] \varphi(p', x', t, h)\, dx' dp',$$

$$I_2(x, t, p, h) = (2\pi h)^{-n} \int \exp\left[ \frac{i}{h}(\xi_\nu x_\nu - \eta_\nu p_\nu) \right] \times$$

$$\times I_1(\eta, x, t, \xi, h)\, d\xi\, d\eta.$$

Очевидно, что

$$\hat{L}\Phi^{p_k}\psi = \Phi^{p_k} I_2. \tag{4.12}$$

Пусть $\Omega$ — носитель функции $\varphi(p', x', t, h)$. Обозначим $\Omega_{\xi^0} = S_{x'}(\Omega)$, $\Omega_{\eta^0} = -S_{p'}(\Omega)$. Возьмем финитную функцию $\Phi(\eta, \xi)$, носитель которой содержит область $\Omega^0 = \Omega_{\eta^0} \times \times \Omega_{\xi^0}$, причем $\Phi(\eta, \xi) = 1$ при $(\eta, \xi) \in \Omega^0$. Обозначим

$$I_3(x, t, p, h) = \int (1 - \Phi(\eta, \xi)) \exp\left[ \frac{i}{h}(\xi_\nu x_\nu - \eta_\nu p_\nu) \right] \times$$

$$\times I_1(\eta, x, t, \xi, h)\, d\xi\, d\eta.$$

Из определения $\Phi(\eta, \xi)$ следует, что $I_3(x, t, p, h)$ отличен от нуля лишь при $(\eta, \xi) \overline{\in} \Omega^0$, т. е. при $\xi \neq S_{x'}(p', x', t)$, $\eta \neq -S_{p'}(p', x', t)$. Если $(\eta, \xi) \overline{\in} \Omega^0$, то фаза подынтегрального выражения интеграла $I_1(\eta, x, t, \xi, h)$ не имеет стационарных точек. Поэтому $I_3(x, t, p, h) = h^N z(x, t, p, h)$, где $N$ — любое целое число, а $h^i z(x, t, p, h) \in W_2^i[R^n, C_2, B^\infty]$. Отсюда

$$I_2(x, t, p, h) = I_4(x, t, p, h) + h^N z(x, t, p, h), \quad (4.13)$$

где

$$I_4(x, t, p, h) = (2\pi h)^{-n} \int \Phi(\eta, \xi) \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{h}[\xi_\nu(x_\nu - x'_\nu) + \eta_\nu(p_\nu - p'_\nu)]\right\} \varphi(p', x', t, h) \times \\ \times \exp\left[\frac{i}{h} S(p', x', t)\right] d\xi\, d\eta\, dx'\, dp'.$$

Стационарными точками $\xi^0$, $x'^0$, $p'^0$, $\eta^0$ являются решения системы

$$x_j'^0 = x_j, \quad \frac{\partial S(p'^0, x'^0, t)}{\partial x_j'^0} = \xi_j^0, \quad j = k+1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial S(p'^0, x'^0, t)}{\partial p_i'^0} = -\eta_i^0, \quad p_i^0 = p_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Эта система, очевидно, имеет единственное решение

$$\xi^0 = S_x, \quad x'^0 = x, \quad \eta^0 = -S_p, \quad p'^0 = p,$$

а ее функциональный определитель равен единице. Применяя метод стационарной фазы для вычисления интеграла $I_4(x, t, p, h)$ и учитывая (4.13), получаем

$$I_2(x, t, p, h) = e^{iS/h}\left[L^0\varphi + \sum_{i=1}^{N} h^i P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})\varphi + \right. \\ \left. + h^{N+1}\tilde{z}(x, t, p, h)\right], \quad (4.14)$$

где $h^i \tilde{z}(x, t, p, h) \in W_2^i[R^n, C_2, B^\infty]$, а $P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})\varphi$ есть линейная комбинация производных $L^0$ по $\eta$, $\xi$, $p$, $h$ до $2i$-го порядка при $\eta = \eta^0$, $\xi = \xi^0$ с коэффициентами[1]),

[1]) Эти коэффициенты сами являются линейными комбинациями производных от $\varphi$ до $2i$-го порядка. Поэтому $P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})$ — полином $2i$-й степени относительно $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$.

не зависящими от вида $L$. Используя это свойство, определим эти коэффициенты в $P_1 = P_1(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})\varphi$ следующим образом. Положим вначале $L = C_0 = \text{const}$, тогда, очевидно,

$$I_2 = C_0 \varphi \exp\left(\frac{i}{h} S\right).$$

Значит, в формуле (4.14) в этом случае $P_1(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})\varphi = 0$ и, следовательно, коэффициент при $L^0$ в $P_1$ равен нулю. Затем положим $L = \eta_j$. Тогда интеграл $I_2$ в силу известного свойства преобразования Фурье может быть представлен в виде $I_2 = ih\,\partial\{\varphi \exp(iS/h)\}/\partial p_j$, т. е.

$$I_2 = [-\varphi S_{p_j} + ih\varphi_{p_j}] \exp\left(\frac{i}{h} S\right).$$

Поскольку в данном случае $L_{\eta_i} = \delta_{ij}$, а остальные производные от $L$ равны нулю, то мы получаем, что коэффициенты при $L_{\eta_\nu}$ в $P_1$ равны $i\varphi_{p_\nu}$. Аналогично, полагая $L = \xi_j + p_\nu$, $L = \eta_i \eta_j + \xi_l + \xi_m$, $L = \eta_l \xi_m + p_\nu \xi_l$, находим все коэффициенты полинома $P_1(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})$. В силу (4.12) и при учете того, что $h^m z(\eta, x, t, h) = \Phi^{p_k} h^m \tilde{z}(x, t, p, h) \in \in W_2^m[R^n, C_2, B^\infty]$, получаем утверждение леммы.

### 3. Лемма абстрактной теории возмущений

Лемма 7. *Пусть $A$, $U_i$, $i = 1, \ldots, N$, — линейные операторы с областями определения и областями значений, лежащими в счетно-нормированном пространстве $B^\infty$; $h$ — некоторая константа; сужение $\tilde{A}$ оператора $A$ имеет обратный*[1]). *Предположим, что существуют такие решения $\chi^0, \ldots, \chi^{N_1}$ уравнения $A\chi = 0$, что*

$$f_k = \chi^k + \tilde{A}^{-1} \sum_{i=1}^{k} U_i f_{k-i} \quad (k = 1, \ldots, N_1), \; f_0 = \chi^0 \qquad (4.14)'$$

---

[1]) То есть уравнение $Ax = 0$ при $x \in D(A)$ может иметь и нетривиальное решение, а при $x \in D(\tilde{A})$ имеет лишь тривиальное решение.

*принадлежат области определения* $D(B)$ *оператора* $B=\sum_{i=1}^{N} h^{i-1} U_i$. *Тогда*

$$\left[A-\sum_{i=1}^{N} h^i U_i\right] \sum_{k=0}^{N_1} h^k f_k = h^{N_1+1} g,$$

*где* $g$ — *некоторый элемент из* $B^{\infty}$.

Доказательство. Подействуем оператором $A-\sum_{i=1}^{N} h^i U_i$ на элемент $\psi=\sum_{k=0}^{N_1} h^k f_k$. Поскольку $A\widetilde{A}^{-1}B=B$ и $A\chi^j=0$, то $Af_k=\sum_{i=1}^{k} U_i f_{k-i}$. Следовательно,

$$A\psi=\sum_{n=1}^{N_1} h^n \sum_{i=1}^{n} U_i f_{n-i}=\sum_{k=0}^{N_1-1} h^{k+1} \sum_{j=0}^{k} U_{j+1} f_{k-j}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{N} h^j U_j \psi = h \sum_{i=0}^{N-1} h^i U_{i+1} \psi = \sum_{k=0}^{N_1+N-1} h^{k+1} \sum_{i=0}^{k} U_{i+1} f_{k-i}.$$

(Мы полагаем $U_i=0$ при $i>N$.) Поэтому

$$\left(A-\sum_{i=1}^{N} h^i U_i\right)\psi = \sum_{k=N_1}^{N_1+N-1} h^{k+1} \sum_{i=0}^{k} U_{i+1} f_{k-i} = h^{N_1+1} g.$$

Лемма доказана.

## 4. Асимптотика решения в малом

Пусть $\chi^1, \ldots, \chi^r$ — ортонормированная система собственных векторов оператора $L^0=L(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n, 0)$, соответствующих собственному значению $H(x, t, p)$:

$$\begin{gathered} L^0\chi^i = H\chi^i \quad (i=1, \ldots, r), \\ \chi^i=\chi^i(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n), \\ H=H(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n). \end{gathered} \tag{4.15}$$

Дифференцируя (4.15) по $p_\nu$ и обозначая $\partial L^0/\partial p_\nu = L^0_{p_\nu}$,

$\partial\chi^i/\partial p_\nu = \chi_{p_\nu}$, получаем

$$L^0_{p_\nu}\chi^i + L^0\chi^i_{p_\nu} = H_{p_\nu}\chi^i + H\chi^i_{p_\nu}. \qquad (4.16)$$

Умножая скалярно это тождество на $\chi^j$ и учитывая (4.15), получаем

$$(\chi^j,\ L^0_{p_\nu}\chi^i) = H_{p_\nu}\delta_{ij}.$$

Аналогично получаем

$$(\chi^j,\ L^0_{x_\nu}\chi^i) = H_{x_\nu}\delta_{ij}. \qquad (4.16)'$$

Продифференцируем теперь (4.16) по $p_\mu$. Умножая полученное равенство скалярно на $\chi^j$, приходим к соотношению

$$(\chi^j,\ L^0_{p_\nu p_\mu}\chi^i) - H_{p_\nu p_\mu}\delta_{ij} + $$
$$+ (\chi^j,\ [L^0_{p_\mu} - H_{p_\mu}]\,\chi^i_{p_\nu}) + (\chi^j,\ [L^0_{p_\nu} - H_{p_\nu}]\,\chi^i_{p_\mu}) = 0, \qquad (4.16а)$$

и аналогично

$$(\chi^j,\ L^0_{p_\nu x_\mu}\chi^i) - H_{p_\nu x_\mu}\delta_{ij} + (\chi^j,\ [L^0_{x_\mu} - H_{x_\mu}]\,\chi^i_{p_\nu}) +$$
$$+ (\chi^j,\ [L^0_{p_\nu} - H_{p_\nu}]\,\chi^i_{x_\mu}) = 0. \qquad (4.16б)$$

Обозначим через $R$ оператор, стоящий в правой части равенства (4.11) в фигурных скобках, так что равенство (4.11) переписывается в виде

$$\left[-ih\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}\right]\Phi^{p_k}\psi = \Phi^{p_k} e^{\frac{i}{h}S(p,\ x,\ t)} R\varphi + h^{N+1}z(x,\ t,\ h). \qquad (4.17)$$

Представим $R$ в виде

$$R = A + \sum_{i=1}^{N} h^i U_i = A + hB,$$

где $A$ и $U_i$ не зависят от $h$. Пусть $S(p,\ x,\ t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\eta^0,\ x,\ t,\ p,\ \xi^0) = 0,$$

т. е. является действием, причем $P(\alpha,\ t)$, $Q(\alpha,\ t)$ — характеристики этого уравнения. Тогда в силу (4.15) уравнение

$$A\chi = \left[L^0 + \frac{\partial S}{\partial t}\right]\chi = [L^0 - H]\,\chi\,\Big|_{\substack{p=P(\alpha,\ t)\\ x=Q(\alpha,\ t)}} = 0$$

имеет решение, если $\chi$ принадлежит подпространству собственных векторов оператора $L^0$. Таким образом, в этом случае $AP_H = 0$, где $P_H$ — оператор проектирования на подпространство собственных векторов оператора $L^0$, соответствующих собственному значению $H$.

Из условия 1) следует, что оператор $\widetilde{A} = A(1 - P_H)$ имеет обратный в $B^\infty$, а оператор $[A(1-P_H)]^{-1}(1-P_H)$ определен на всем $B^\infty$ ($\widetilde{A}$ есть сужение оператора $A$ на подпространство $(1-P_H)B^\infty$, имеющее обратный).

Для того чтобы можно было применить лемму 7 и найти такое $\varphi$, чтобы

$$R\varphi = h^{N+1}z(y_k, t, h) \quad (h^i z(y_k, t, h) \in W_2^i[R^n, C_2, B^\infty]), \qquad (4.17)'$$

достаточно потребовать существования $N$ членов вида (4.14)'.

Пользуясь обозначениями леммы 7 и обозначая через $\varphi^{kj}$ коэффициент разложения $f_k$ по базису $\{\chi^j\}$ в подпространстве собственных функций оператора $L^0$, можно следующим образом сформулировать условие существования первого члена вида (4.14)' в этой лемме:

$$U_1\Big(\sum_{j=1}^{r} \varphi^{0j}\chi^j\Big) \in D(\widetilde{A}^{-1}). \qquad (4.18)$$

Это означает, что

$$P_H U_1 \sum_{j=1}^{r} \varphi^{0j}\chi^j = 0, \qquad (4.19)$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi^i U_1 \chi^j)\,\varphi^{0j} = 0.$$

Скалярное произведение здесь и далее берется в $B^1$, поэтому выражение $(\chi^i, U_1\chi^j)$ содержит операторы дифференцирования по $x$, $p$, $t$.

В силу леммы 7 для вычисления $k$-го члена вида (4.14)' мы должны потребовать, чтобы $P_H \sum_{i=1}^{k} U_i f_{k+1-i} = 0$. Отсюда будет следовать, что

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi^i, U_1\chi^j)\,\varphi^{kj} = F, \qquad (4.20)$$

где $F$ зависит лишь от $\varphi^{lj}$ при $l<k$, и мы получим рекуррентную последовательность уравнений для определения $\varphi^{kj}=\varphi^{kj}(y_k, t)$.

Итак, задача сводится к отысканию дифференциального оператора $L=(\chi^i, U_1\chi^j)$ в пространстве $C^\infty$ и доказательству существования решений $\varphi$ уравнений

$$L\varphi=0 \quad \text{и} \quad L\varphi=F, \tag{4.21}$$

где $\varphi\in C^\infty$ и $F\in C^\infty$.

Заметим, что оператор $U_1$ есть сумма вида

$$U_1=i\sum_{\nu=1}^{k} L^0_{\eta_\nu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}-i\sum_{\mu=k+1}^{n} L^0_{\xi_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}+R_1-i\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.22}$$

при $\eta=\eta^0$, $\xi=\xi^0$, где $R_1$ не содержит операторов дифференцирования, а является оператором в $B^\infty$, зависящим от параметров $y_k$, $t$.

Поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{r}(\chi^j, U_1\chi^\alpha)\varphi^{l\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{r} i\left\{\sum_{\nu=1}^{k}(\chi^j, L^0_{\eta_\nu}\chi^\alpha)\varphi^{l\alpha}_{p_\nu}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\mu=k+1}^{n}(\chi^j, L^0_{\xi_\mu}\chi^\alpha)\varphi^{l\alpha}_{x_\mu}\right\}+\sum_{i=1}^{r}a_{ij}\varphi^{li}-i\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\chi^i,\chi^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{l\alpha}$$

при $\eta=\eta^0$, $\xi=\xi^0$, где $a_{ij}$ — известные функции параметров $y_k$, $t$. В силу тождества (4.16)′ имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{r}(\chi^j, U_1\chi^\alpha)\varphi^{l\alpha}=i\sum_{\nu=1}^{k}H_{x_\nu}\varphi^{lj}_{p_\nu}-i\sum_{\nu=k+1}^{n}H_{p_\nu}\varphi^{lj}_{x_\nu}-$$

$$-i\varphi^{lj}_t+\sum_{i=1}^{r}a_{ij}\varphi^{li}=-i\frac{d\varphi^{lj}}{dt}+\sum_{i=1}^{r}a_{ij}\varphi^{li}. \tag{4.23}$$

Нетрудно убедиться, что решения уравнений (4.21) в силу (4.23) при $t\leqslant t_0$ существуют и бесконечно дифференцируемы при достаточно малом $t\leqslant t_0$, а значит, принадлежат $D(U_i)$, $i=1, \ldots, N$. Условия леммы 7 выполнены;

следовательно, выражения вида[1])

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} (-h)^n f_n$$

удовлетворяют уравнению

$$Au_N + hBu_N = h^{N+1} z(x, t, p, h),$$

где

$$h^i z(x, t, p, h) \in W_2^i [R^n, C_2, B^\infty].$$

Отсюда следует, что, поскольку $h^i \Phi^{p_k} z(x, p, t, h) \in \in W_2^i [R^n, C_2, B^\infty]$, то

$$\hat{L}\Phi^{p_k} e^{iS(p, x, t)/h} u_N = h^{N+1} \Phi^{p_k} e^{iS(p, x, t)/h} z(x, p, t, h) = \\ = h^{N+1} \tilde{z}(x, t, h),$$

где $h^m \tilde{z}(x, t, h) \in W_2^m [R^n, C_2, B^\infty]$.

По условию 2) (см. § 4, п. 1) существует решение $w \in W_2^{l(m)} [R^n, C_2, B^{l(m)}]$, где $l(m) \to \infty$ при $m \to \infty$, уравнения

$$h^{-l} \hat{L} w = h^m \tilde{z}(x, t, h).$$

Поэтому

$$\hat{L}(\Phi^{p_k} e^{iS/h} u_N - h^{N+1-l-m} w) = 0.$$

Поскольку $N$ сколь угодно велико, то отсюда следует, что при $t \leqslant t_0$ существует решение уравнения (4.4), представимое в виде

$$\Phi^{p_k} e^{iS/h} u_M + h^M z_1(x, t, h),$$

где $h^i z_1(x, t, h) \in W_2^i [R^n, C_2, B^\infty]$, а $M$ сколь угодно велико. Нам, однако, еще нужно получить решение уравнения в «явном виде», т. е. выписать матрицу $(a_{ij})$. Для этого мы воспользуемся тождествами (4.16), (4.16а), (4.16б).

[1]) Напомним, что $f_k$ выражается через $k$ произвольных решений уравнения $A\chi = 0$ (см. § 4, п. 3).

Заметим прежде всего, что

$$\sum_{\mu=1}^{r}(\chi^j,\ U_1\chi^\mu)=-i\frac{d}{dt}+i\sum_{\mu=1}^{r}\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\left(\chi^j,\ \frac{\partial L^0}{\partial\eta_\nu^0}\frac{\delta\chi^\mu}{\delta p_\nu}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=k+1}^{n}\left(\chi^j,\ \frac{\partial L^0}{\partial\xi_i^0}\frac{\delta\chi^\mu}{\delta x_i}\right)-\left(\chi^i,\ \frac{\delta\chi^\mu}{\delta t}\right)\right\}+(\chi^j, R_1\chi^\mu),\quad (4.24)$$

где $\delta/\delta p_\nu$, $\delta/\delta x_i$ и $\delta/\delta t$ означают полные частные производные по независимым переменным $p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots$ $\ldots, x_n, t$; например,

$$\frac{\delta\chi^\mu}{\delta p_\nu}=\frac{\partial\chi^\mu}{\partial p_\nu}-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\chi^\mu}{\partial\eta_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_j\,\partial p_\nu}+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{\partial\chi^\mu}{\partial\xi_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\,\partial p_\nu}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Положим $\varphi^{0j}=u_{0j}/\sqrt{J}$, где $J=Dy_k/D\alpha$ отличен от нуля при $t\leqslant t_0$. В силу леммы Соболева (см. [11])

$$\frac{d}{dt}\ln J=-\sum_{i=1}^{k}H_{\eta_j^0 p_i}+\sum_{i,\,j=1}^{k}H_{\eta_i^0\eta_j^0}S_{p_ip_j}+\sum_{i,\,j=k+1}^{n}H_{\xi_j^0\xi_i^0}S_{x_ix_j}-$$

$$-2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}H_{\eta_i^0\xi_j^0}S_{p_ix_j}+\sum_{j=k+1}^{n}H_{x_j\xi_j^0}.$$

Подставляя

$$\frac{d\varphi^{0j}}{dt}=\frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{du_{0j}}{dt}-\frac{1}{2}u_{0j}\frac{d}{dt}\ln J\right)$$

в выражение для оператора $U_1$ (см. 4.24) и учитывая тождества (4.16а), (4.16б), получаем следующее уравнение для вектора $\mathbf{u}=(u_{01}, \ldots, u_{0r})$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+G\mathbf{u}=0,$$

где $G$ — матрица вида

$$G=\left\|\left(\chi^\nu,\ \frac{d\chi^\mu}{dt}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\chi^\nu,\ \left(\frac{\partial L^0}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial\chi^\mu}{\partial x_i}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial x_i}\delta_{\mu\nu}+i\left(\chi^\nu,\ \frac{\partial L}{\partial h}\bigg|_{h=0}\chi^\mu\right)\right\|.\quad (4.25)$$

Оператор $\sqrt{J}(\chi^\nu, U_1\chi^\mu)(1/\sqrt{J})$ имеет вид $d/dt+G$.

Окончательно получаем, что при высказанных предположениях существует решение уравнения $ih(\partial\psi/\partial t)=\hat{L}\psi$, представимое в виде

$$\psi(x,t)=\Phi^{p_k}e^{iS(p,x,t)/h}\left\{\frac{1}{\sqrt{|J|}}\sum_{\nu=1}^{r}\varphi^{0\nu}(p,x,t)\times\right.$$

$$\left.\times\chi^{\nu}(x,\eta^0,t,p,\xi^0)+\sum_{k=1}^{N}h^k f_k(x,p,t)\right\}+h^{N+1}z(x,t,h), \tag{4.26}$$

где $f_k(x,p,t)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые функции, финитные по $p$ и $x$, со значениями в $B^\infty$, а $h^i z(x,t,h)\in W_2^i[R^n,C_2,B^\infty]$, причем $\varphi^0(\widetilde{y}_k,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi^0}{dt}+G\varphi^0=0 \qquad (\varphi^0=\varphi^{01},\ldots,\varphi^{0r}).$$

Мы получили асимптотику в малом решения уравнения (4.4). Перейдем к выводу асимптотической формулы (4.8).

## 5. Асимптотика решения в большом

Прежде всего покажем, что теорема 4 непосредственно следует из утверждений, доказанных в предыдущем пункте, при условии, что время $t$ достаточно мало (т. е. теорема 4 справедлива в малом). Для этого получим из формулы (4.26) формулу (4.8). Предположим, что носитель вектор-функции $\varphi^0(\alpha,h)$ [см. (4.10)] принадлежит области $\Omega^i$. В силу (4.9) носитель вектор-функции $\varphi(\alpha,t,h)$ будет принадлежать $\Omega_t^i$. Поэтому выражение (4.8) в этом случае в силу определения канонического оператора может быть записано в форме (4.26) при учете равенства

$$S(p,x,t)=\int_{l[\alpha^0,\alpha_t^0]}\{-H\,dt+p\,dq\}+\int_{l[\alpha_t^0,\alpha_t(\widetilde{y}_k)]}\widetilde{p}\,d\widetilde{q}-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\widetilde{p}_i\widetilde{q}_i[\alpha_t(\widetilde{y}_k)].$$

Но формула (4.26) получена в предположении, что

$$D[\widetilde{P}_1(\alpha, t), \ldots, \widetilde{P}_k(\alpha, t), \widetilde{Q}_{k+1}(\alpha, t), \ldots, \widetilde{Q}_n(\alpha, t)]/D\alpha$$

не обращается в нуль, т. е. при $t \leqslant \varepsilon$. Поскольку канонический оператор может быть разложен на конечную сумму выражений вида (4.26), то мы получаем утверждение теоремы 4 при $t \leqslant \varepsilon$. Все эти рассуждения, разумеется, могут быть отнесены к произвольному начальному моменту $t_0$. Решение $Q(\alpha, t)$, $P(\alpha, t)$ задачи (4.6), (4.7) задает отображение $U_{0,t}$ подмногообразия $\Gamma_0$ на подмногообразие $\Gamma_t$.

Применим к отображению $U_{0,T}$ построение, приведенное в начале доказательства теоремы 2 (см. § 3), и разобьем отрезок $[0, T]$ на интервалы $t=0, t_1, t_2, \ldots, T$. Мы сохраним введенные там обозначения: $\mathrm{H}_t^0 = U_{0,t}\mathrm{H}^0$ при $t \leqslant t_1$; $\mathrm{H}_t^i = U_{t_i, t}\mathrm{H}_{t_i}^i$ при $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Пусть при $t=0$ решение уравнения (4.4) удовлетворяет (4.4а). По доказанному, при $t \leqslant t_1$ это решение можно представить в виде (4.8), где $\alpha_t^0 = \alpha^0$, $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0$, $\mathrm{H}[\Gamma_t] = \mathrm{H}_t^0$:

$$\psi(x, t) = K_{\Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha^0}[\mathrm{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu \chi^\nu.$$

Заметим, что из условий теоремы 4 следует, что решение уравнения (4.4), удовлетворяющее начальному условию, эквивалентному нулю, эквивалентно нулю.

Для решения уравнения (4.4) вновь поставим начальное условие вида

$$\psi(x, t_1) = K_{\Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha^0}[\mathrm{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu \chi^\nu \tag{4.27}$$

при $t = t_1$. В силу единственности решения [см. условие 2) § 4 п. 1] получим при $t \geqslant t_1$ решение $\psi(x, t)$ задачи (4.4), (4.4а).

Перейдя в условии (4.27) к атласу $\mathrm{H}_{t_1}^1$, мы получим с точностью до функции, эквивалентной нулю, что

$$\psi(x, t_1) = K_{\Gamma_t, h}^{\widetilde{\gamma}, \alpha_1^0}[\mathrm{H}_{t_1}^1] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu \chi^\nu,$$

где $\alpha_1^0$ — начальная точка $\mathrm{H}_{t_1}^1$, а $\widetilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_1^0] + \frac{1}{h} \int\limits_{l[\alpha^0, \alpha_1^0]} p\,dq$. Как было замечено, решение уравнения при $t > t_1$ от этого не изменится с точностью до функции, эквивалентной нулю. Поэтому получим при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

$$\psi(x, t) = K^{\widetilde{\gamma}, \alpha_1^0}_{\Gamma_t, h} [\mathrm{H}_t^1] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu \chi^\nu.$$

Продолжая этот процесс по индукции, придем к утверждению теоремы 4.

## § 5. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим пространство $B^\infty$, где $B^1$ — гильбертово. Рассмотрим оператор

$$\hat{L} = L\left(x_1, \ldots, x_n, -ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, h\right),$$

определенный по формуле (4.5). Дополнительно полагаем, что этот оператор не зависит от $t$, самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2[B^1] = W_2^0[R^n, B^1]$ функций от $x_1, \ldots, x_n$ со значениями в $B^1$ и что условия 1), наложенные на этот оператор в § 4, выполнены. Пусть, кроме того, спектр оператора $\hat{L}$ не является предельным при $\lambda = E^0$. Предположим, что существует такое семейство компактных замкнутых лагранжевых многообразий $\Gamma(E)$ без края при $E \in \mathscr{E} = (E^0 - \varepsilon, E^0 + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, что 1) $\Gamma(E)$ непрерывно зависит от $E$; 2) $H(p(\alpha), q(\alpha)) = E$ при $\alpha \in \Gamma(E)$ $(H(p, q)$ — гамильтониан оператора $\hat{L})$; 3) $U_{0,t}\Gamma(E) = \Gamma_t(E) = \Gamma(E)$.

В качестве меры $\sigma(\alpha)$ на многообразии $\Gamma(E)$ возьмем меру, инвариантную относительно сдвигов вдоль траекторий гамильтоновой системы. В пространстве функций на $\Gamma(E)$ с интегрируемым квадратом по этой мере оператор

$$R = i\frac{d}{dt} + i\left\|\left(\chi^\nu, \frac{d\chi^\mu}{dt}\right) + \left(\chi^\nu, \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\right]\frac{\partial \chi^\mu}{\partial p_i}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial x_i}\delta_{\mu\nu} + i\left(\chi^\nu, \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}\chi^\mu\right)\right\|_{\substack{p=P(\alpha, t)\\ x=Q(\alpha, t)}}$$

самосопряжен[1]). Пусть $\mu(E)$ — его собственное значение, а $\xi(\alpha)$ — соответствующая ему собственная функция.

Теорема 5. *Пусть $\{E^i\} \subset \mathscr{E}$, $i=1, \ldots, i_0$, — зависящее от $h$ множество из $\mathscr{E}$, такое, что на $\Gamma(E^i)$ выполняется система соотношений*

$$\frac{2}{\pi h} \oint_k p(\alpha)\, dq(\alpha) = l_k \pmod 4 + O(h), \qquad 1 \leqslant k \leqslant k_0, \tag{5.0}$$

*где $\oint_k$ обозначает интеграл по $k$-му базисному циклу многообразия $\Gamma(E^i)$, $l_k$ — индекс этого цикла, $k_0$ — одномерное число Бетти многообразия $\Gamma(E^i)$. Тогда существует такой зависящий от $h$ набор собственных значений $\lambda^i$ оператора $\hat{L}$, что*

$$\lambda^i = E^i - h\mu(E^i) + O(h^2).$$

Доказательство. Сохраняя обозначения, введенные в доказательстве теоремы 4 (§ 4, п. 5), рассмотрим $K^{\widetilde{\gamma}_t,\, \alpha_t^0}_{\Gamma_t(E^i)}[\mathrm{H}_t^0] \sum\limits_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t)\, \chi^\nu(\alpha)$ при $t \leqslant t_1$, где

$$\alpha_t^0 = U_{0,t}^{-1}\alpha^0, \qquad \widetilde{\gamma}_t = \int\limits_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} p\,dq - H\,dt, \ \varphi_\nu(\alpha, t) = \\ = \xi_\nu(\alpha)\, e^{i\mu t}, \ \mu = \mu(E^i).$$

В силу (4.17), (4.17)′ при $N=1$, $i=0$ (см. также замечание в начале п. 5 § 4), поскольку $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0$ по построению, имеем

$$\left(-ih\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}\right) K^{\widetilde{\gamma}_t,\, \alpha_t^0}_{\Gamma_t(E^j)}(\mathrm{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t)\, \chi^\nu(\alpha) = h^2 z(x, t, h),$$

где $z(x, t, h)$ принадлежит $L_2(B^1, C_2)$ — пространству непрерывных по $t$ и $h$ и квадратично интегрируемых функций $x \in R^n$ со значениями в $B^1$. В дальнейшем функции из $L_2[B^1, C_2]$ мы будем обозначать буквами $z_1, z_2, z_3, \ldots$.

Очевидно, что

$$K^{\widetilde{\gamma}_t,\, \alpha_t^0}_{\Gamma_t(E^j)}(\mathrm{H}_t^0) = e^{-iE^j t/h} K^{0,\, \alpha^0}_{\Gamma(E^j)}(\mathrm{H}_t^0),$$

---

[1]) Напомним, что скалярные произведения здесь берутся в $B^1$.

поскольку $\Gamma_t(E^j)=\Gamma(E^j)$, $H=E^j$, точка $\alpha_t^0$ на подмногообразии $\Gamma_t(E^j)$ совпадает с точкой $\alpha^0$ на подмногообразии $\Gamma$ в объемлющем евклидовом пространстве, и, следовательно, $\widetilde{\gamma}_t=-\frac{1}{h}\int\limits_{l[\alpha^0,\alpha_t^0]} H\,dt=-\frac{1}{h}E^j t$. Поскольку условия теоремы 3 в силу (5.0) выполнены, мы можем применить лемму 5 и на основании ее получить

$$\frac{\partial}{\partial t}K^{0,\alpha^0}_{\Gamma(E^j)}(\mathrm{H}_t^0)\,\varphi(\alpha)=hz_1(x,t,h).$$

Поэтому

$$-ih\frac{\partial}{\partial t}K^{\gamma_t,\alpha_t^0}_{\Gamma_t(E^i)}(\mathrm{H}_t^0)\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha,t)\,\chi^\nu(\alpha)=$$

$$=-ih\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{-iE^it/h}K^{0,\alpha^0}_{\Gamma(E^i)}(\mathrm{H}_t^0)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha)\,e^{i\mu t}\right\}=$$

$$-(-E^i+h\mu)\,e^{i\left(\mu-\frac{E^i}{h}\right)t}K^{0,\alpha^0}_{\Gamma(E^i)}(\mathrm{H}_t^0)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha)=h^2z_2.$$

Отсюда

$$[\hat{L}-E^i+h\mu]\,K^{0,\alpha^0}_{\Gamma(E^i)}(\mathrm{H}_t^0)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha)=h^2z_3, \tag{5.1}$$

причем либо $E^i-h\mu(E^i)$ является точкой спектра оператора $\hat{L}$, либо

$$\left\|K^{0,\alpha^0}_{\Gamma(E^i)}(\mathrm{H}_t^0)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha)\right\|_{L_2}=$$

$$=h^2\left\|[\hat{L}-E^i+h\mu]^{-1}z_3\right\|_{L_2}\leqslant h^2\left\|[\hat{L}-E^i+h\mu]^{-1}\right\|_{L_2}\|z_3\|,$$

где $\|\ \|_{L_2}$ — норма в $L_2[B^1]$. Поскольку $\|(\hat{L}-E^i+h\mu)^{-1}\|_{L_2}\leqslant 1/d$, где $d$ — расстояние от точки $E^i-h\mu$ до спектра оператора $\hat{L}$, то отсюда получаем, что $d\leqslant O(h^2)$, что и требовалось.

Заметим, что соотношение (5.1) приводит также с помощью простой леммы теории возмущений к асимптотике спектральной функции $E_{\Delta\lambda}$ интервала $\Delta\lambda \sim o(h)$ оператора $\hat{L}$, а именно:

$$\left\| [1 - E_{\Delta\lambda}] K^{\gamma,\, \alpha^0}_{\Gamma(E^i)} \sum_{\nu=1}^{r} \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2[B^1]} = O(h), \quad (5.2)$$

где $\Delta\lambda = \{E^i - o(h),\ E^i + o(h)\}$.

Изложенный метод позволяет найти приближения собственных значений с точностью до $o(h^N)$, где $N$ — любое целое число, и сузить в соотношении (5.2) интервал $\Delta\lambda$ до величины $o(h^N)$. Таким образом, если точка $\lambda^i$ простая и интервал $\lambda^i \pm o(h^N)$ не содержит других точек спектра, то получается асимптотика собственной функции $\psi^i$ оператора $\hat{L}$, отвечающей точке $\lambda^i$.

Заметим далее, что в случае, когда $r = 1$, а $\chi(x, p)$ действительна, матрица $G = 0$, и задача сводится к отысканию собственных функций и собственных значений оператора сдвига вдоль гамильтоновой системы (или оператора $id/dt$) на многообразии $\Gamma$. Эта задача широко изучена. Кроме того, мы можем взять в этом случае $\mu = 0$, $\xi(\alpha) = 1$.

В качестве примера рассмотрим оператор Гамильтона вида

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2M}\Delta_1 - \frac{h^2}{2M}\Delta_2 + \frac{e^2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + \hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|), \quad (5.3)$$

где $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\Delta_i = (\partial/\partial x_i)^2 + (\partial/\partial y_i)^2 + (\partial/\partial z_i)^2$ $(i = 1, 2)$, $e$ — заряд, а $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ — оператор Гамильтона общего вида для системы $N$ электронов в поле двух неподвижных протонов (см., например, [5]). Оператор Гамильтона $\hat{H}$ отвечает двухатомной молекуле.

Пусть $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ — некоторое собственное значение оператора $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ (так называемый электронный терм). Мы предположим, что функция

$$u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) = \frac{e^2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$$

имеет минимум (терм $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ устойчивый). Для простоты будем полагать, как это обычно имеет место, что этот минимум единствен (это условие не существенно).

Будем искать асимптотику собственных значений оператора $\hat{H}$, расположенных вблизи точки $\lambda^0$, лежащей между минимумом и абсолютным максимумом функции $u|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$. В этом промежутке спектр $\hat{H}$ дискретен (см. [13]).

Мы предположим, что кратность собственного значения $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ остается постоянной в области $\Omega \ni |\bar{r}_1-\bar{r}_2|$, для которой $u(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)\leqslant\lambda^0$, т. е. что в этой области терм $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ не пересекается ни с каким другим. Пусть эта кратность равна 1. Нетрудно доказать, что при этих ограничениях оператор $\hat{H}_N(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ удовлетворяет условиям 1) (см. § 4, п. 1), если в качестве $B^\infty$ взять $W_2^\infty[R^{3N}]$, а оператор $\hat{H}$ — условиям теоремы 5.

Обозначим через $a$ линейные размеры молекулы.

Перейдем в (5.3) к безразмерным переменным. Положим $\bar{\varrho}_1=\bar{r}_1/a$, $\bar{\varrho}_2=\bar{r}_2/a$ и разделим (5.3) на $V_0=\min\limits_{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|\in\Omega} E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$. Получим оператор

$$\hat{H}=-\frac{\nu^2}{2}\Delta_1-\frac{\nu^2}{2}\Delta_2+\frac{\alpha_1}{|\bar{\varrho}_1-\bar{\varrho}_2|}+\hat{H}_N[|\bar{\varrho}_1-\bar{\varrho}_2|,\ \alpha_1,\ \alpha_2],$$

где

$$\nu=\frac{h}{a\sqrt{MV_0}},\quad \alpha_1=\frac{e^2}{aV_0},\quad \alpha_2=\frac{h}{a\sqrt{mV_0}}$$

($m$ — масса электрона). Здесь $\sum\limits_{i=1}^{3}\partial^2/\partial\varrho_{\sigma i}^2$ $(\sigma=1,\ 2)$ снова обозначена через $\Delta$. Поскольку для реальных молекул $\nu\sim10^{-4}\div10^{-3}$, а $\alpha_1\sim1$ и $\alpha_2\sim1$, то можно рассматривать $\nu$ как малый параметр и искать асимптотику уравнения $\hat{H}\psi_n=\lambda_n\psi_n$ при $\nu\to0$. Гамильтониан оператора $\hat{H}$ имеет вид

$$\frac{p_1^2}{2}+\frac{p_2^2}{2}+\frac{\alpha_1}{|\bar{\varrho}_2-\bar{\varrho}_1|}+\frac{E(a(\bar{\varrho}_1-\bar{\varrho}_2))}{V_0}.$$

Ему отвечает следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\left\{\frac{1}{2}(\nabla_1 S)^2+\frac{1}{2}(\nabla_2 S)^2\right\}+\frac{\alpha_1}{|\bar{\varrho}_1-\bar{\varrho}_2|}+\frac{E[|\bar{r}_1-\bar{r}_2|]}{V_0}=\lambda^0. \qquad (5.4)$$

Введем новые переменные

$$\bar{r}=\bar{\varrho}_1-\bar{\varrho}_2,\quad \bar{R}=\bar{\varrho}_1+\bar{\varrho}_2.$$

Обозначая через $\nabla_{\bar R}$ и $\nabla_{\bar r}$ операторы $\nabla$ по переменным $\bar R$ и $\bar r$ соответственно, получаем

$$\frac{1}{2}\{(\nabla_{\bar R}S)^2+(\nabla_{\bar r}S)^2\}+\frac{\alpha_1}{r}+\frac{E(r)}{V_0}=\lambda^0.$$

Полагая $S=S(\bar r)$, получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2+\frac{2\alpha_1}{r}+\frac{2E(r)}{V_0}=2\lambda^0.$$

Нетрудно убедиться, что условия (5.0) в данном случае будут иметь вид

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi\,d\varphi=2\pi m\nu,$$

$$2\pi p_\theta=\pi(2l+1)\nu,$$

$$\oint p_r\,dr=2\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2\left(\lambda_n^0-\frac{\alpha_1}{r}-\frac{E(r)}{V_0}\right)-\frac{p_\theta^2}{r^2}}\,dr=\pi(2n+1)\nu,$$

где $r_1$ и $r_2$ — нули подкоренного выражения.

Таким образом, $\lambda_k=\lambda_k^0+O(\nu^2)$, где $\lambda_k^0$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2\lambda_k^0-\frac{2\alpha_1}{r}-\frac{2E(r)}{V_0}-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\nu^2}{r^2}}\,dr=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\nu.$$

Заметим, что известный метод Борна — Опенгеймера (адиабатический метод) может быть применен к решению поставленной задачи лишь при дополнительном условии: $k\sim 1$ (см. [5]).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, *Труды МИАН*, **45** (1955), 1—140.
2. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, ОНТИ, М., 1933.
3. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.

4. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
5. Шифф Л., Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.
6. Фейнман Р., Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике; сб. «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ, М., 1955, стр. 167—207.
7. Федорюк М. В., Метод стационарной фазы для многомерных интегралов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **2**, № 1 (1962), 145—150.
8. Голдстейн Г., Классическая механика, ГИТТЛ, 1957.
9. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.
10. Федорюк М. В., Метод стационарной фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 4, № 4 (1964), 671—682.
11. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, М., ГИТТЛ, 1951.
12. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
13. Виленкин Н. Я. и др., Функциональный анализ, изд-во «Наука», М., 1964.
14. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, изд-во МГУ, 1965.