

Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Методы решения геометрических задач

Захарова Алиса, Ражик Софья,
11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Степанькова Татьяна Николаевна,
учитель математики МБОУ «Лицей №1»

Пермь. 2012.

1. Введение

Как подготовиться к экзамену по математике?

Анализ результатов ЕГЭ показывает, что основные трудности вызывают геометрические задачи. Почему? Очевидно, потому, что в алгебре, тригонометрии, началах математического анализа разработана целая серия алгоритмов решения типовых задач. Так как самое трудное в решении любой задачи – планирование своих действий, то если есть алгоритм, значит есть программа действий, а потому трудности, если они имеют место, носят чаще всего технический, а не принципиальный характер.

При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, и выбрать наиболее подходящую к данному случаю теорему из большого количества теорем не просто.

А ещё это связано с тем, что редко какая задача в геометрии может быть решена с использованием определенной формулы. При решении большинства задач не обойтись без привлечения разнообразных фактов теории, доказательства тех или иных утверждений, справедливых лишь при определенном расположении элементов фигур. Но и при хорошем знании теории приобрести навык в решении задач можно лишь решив достаточно много задач, начиная с простых и переходя к более сложным, а самое главное, владея различными методами решения задач. Кроме того, во многих случаях требуется найти еще правильную далеко не всегда очевидную идею решения, осуществить дополнительные построения.

«Важным моментом при этом является то, чтобы технические детали решения не заслоняли основной идеи. Важнейшим элементом этой техники решения геометрических задач является работа с треугольниками, четырехугольниками, поскольку остальные фигуры можно разбить на вышеперечисленные, сводя тем самым задачу к более простой.»[3,2]

А в курсе стереометрии, усвоив способы решения базовых задач, можно переходить к решению более сложных задач, задач на комбинацию фигур.

Поэтому нами выбрана тема «Аналитический и геометрический методы решения задач».

Цель работы: научиться находить полное решение задачи, применяя эффективный способ.

Задачи работы:

- 1) Систематизировать, расширить и углубить теоретические знания по курсу планиметрии и стереометрии.
- 2) Рассмотреть различные методы решения геометрических задач.
- 3) Применить рассматриваемые приемы, методы, подходы при решении конкретных задач.

На основании изложенного считаем, что выполненная работа актуальна и обладает практической ценностью.

2. Методы решения геометрических задач

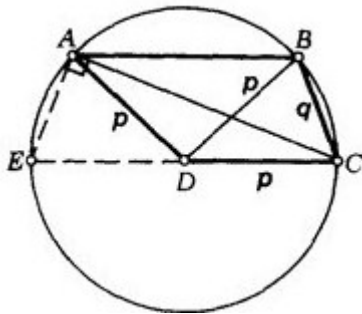
При решении геометрических задач обычно используются три основных метода: геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем; алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений; комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.

Какой бы путь решения ни был выбран, успешность его использования зависит, естественно, от знания теорем и умения их применять.

2.1 Метод дополнительного построения

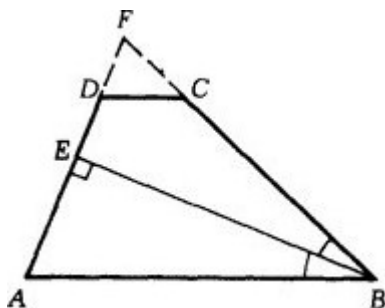
Всякое геометрическое решение геометрической задачи начинается с работы над чертежом. При этом иногда на «естественном» чертеже (т.е. на чертеже, на котором изображено только условие) трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, а если фигуру достроить, эти связи становятся очевидными.

Задача 2.1.1. *Длины основания CD , диагонали BD и боковой стороны AD трапеции $ABCD$ равны между собой и равны p . Длина боковой стороны BC равна q . Найти длину диагонали AC .*



Решение: В данной трапеции $ABCD$ нелегко увидеть связь между искомой диагональю AC и другими отрезками. Если же, приняв во внимание, что точка D равноудалена от точек A , B и C , провести окружность $O(D, p)$ и достроить данную трапецию до равнобедренной трапеции $ABCE$, из прямоугольного треугольника AEC легко найдем $AC = \sqrt{4p^2 - q^2}$.

Задача 2.1.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B перпендикулярна боковой стороне AD и пересекает ее в точке E . В каком отношении прямая BE делит площадь трапеции, если известно, что длина отрезка AE в два раза больше длины отрезка DE .



Решение: Если достроить данную трапецию $ABCD$ до треугольника AFB , получим равнобедренный треугольник, от которого отрезок DC отсекает подобный треугольник DFC с коэффициентом подобия $\frac{1}{4}$. Поэтому иско-

мое отношение равно $\frac{S_{EDCB}}{S_{AEB}} = \frac{S_{EFB} - S_{DFC}}{S_{AEB}} = \frac{\frac{1}{2}S_{AFB} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_{AFB}}{\frac{1}{2}S_{AFB}} = \frac{7}{8}$.

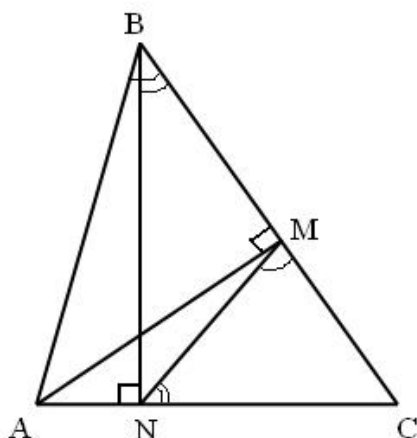
2.2 Метод подобия

Подобие треугольников

Две фигуры F и F_1 называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия, т.е. таким преобразованием, при котором расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз.

Признаки подобия треугольников:

- 1) Если два угла одного соответственно равны двум углам другого;
- 2) Если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами равны;
- 3) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.



Задача 2.2.1. В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN . Найти углы треугольника MNC , если $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

Решение:

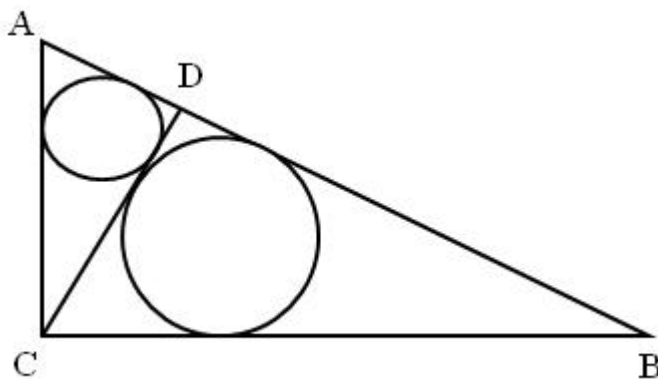
Прямоугольные треугольники AMC и BNC имеют равные острые углы при

вершине С, следовательно, они подобны и $\frac{NC}{BC} = \frac{MC}{AC}$. Отсюда заключаем, что в треугольник МСN и АСВ стороны, прилежащие к равному углу при вершине С, пропорциональны, следовательно (по второму признаку подобия), эти треугольники подобны. В подобных треугольниках против соответственных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle NMC = \alpha$ и $\angle MNC = \beta$.

Результат этой задачи можно сформировать так **если соединить основания двух высот треугольника, то образуется треугольник, подобный данному.**

Из определения подобия фигур следует, что в подобных фигурах все соответственные линейные элементы пропорциональны. Так, **отношение периметров подобных многоугольников равно отношению длин соответственных сторон.** Или, например, **в подобных треугольниках отношение радиусов вписанных и описанных окружностей равно отношению длин соответственных сторон.**

Задача 2.2.2. В прямоугольном треугольнике АВС из вершины С прямого угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники АСD и ВСD равны соответственно r_1 и r_2 . Найти радиус окружности, вписанной в треугольник АВС.



Решение:

Обозначим искомый радиус r , предположим $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Из подобия прямоугольных треугольников АСDи АВС (у них равные углы при вершине А)имеем $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}$, откуда $b = \frac{r_1}{r} \cdot c$. Прямоугольные треугольники CBD и АВСтакже подобны, поэтому $\frac{r}{r_2} = \frac{c}{a}$, откуда $a = \frac{r_2}{r} \cdot c$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то, возводя в квадрат выражения для a и b и складывая их, получим

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 c^2 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 c^2 = c^2, \text{ или } \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = 1.$$

$$\text{Теперь находим } r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Напомним, что **отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициентов подобия.** Для треугольников это утверждение можно

сформулировать так: **площади подобных треугольников относятся как квадраты длин соответственных сторон.**

2.3 Метод замены

Метод замены широко применяется в алгебре, но не менее эффективно «замена» может быть применена в геометрии. Сущность этого приема решения геометрических задач состоит в следующем: фигура, о которой идет речь в условии задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче.

Задача 2.3.1.

Дано:

$\angle AOB = 60^\circ$

$C \in \angle AOB$

$$CD \perp OA$$

$$CM \perp OB$$

CN ⊥ ON

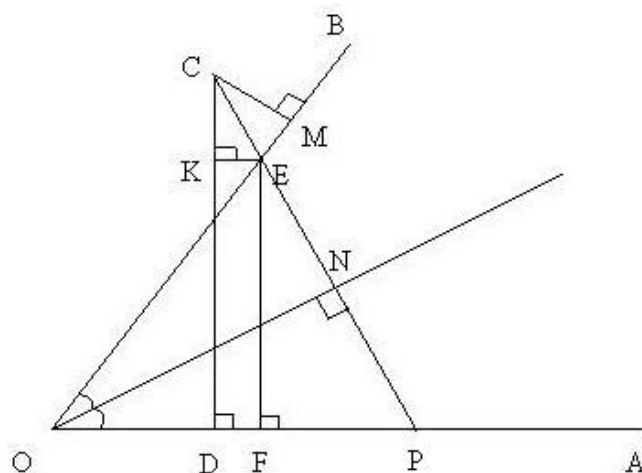
ON – биссектриса $\angle AOB$

$$CM=d_1$$

$$CD=d_2$$

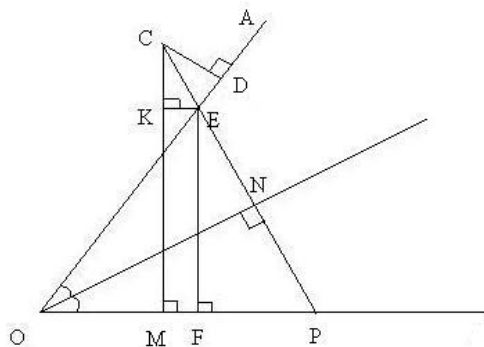
Найти: ON.

Решение:

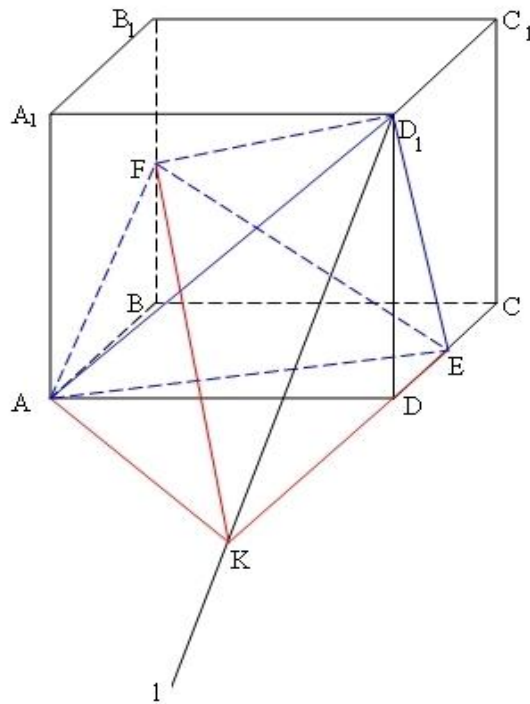


Пусть $d_2 > d_1$

- 1) $\triangle ONE = \triangle ONP \Rightarrow OP = OE$, значит $\triangle OEP$ – равнобедренный, а т.к. $\angle O = 60^\circ$, то $\angle E = \angle P = 60^\circ$, значит $\triangle OEP$ – равносторонний $\Rightarrow OP = PE$.
- 2) Проведем $EF \perp OP$ и рассмотрим $\triangle ONP = \triangle EFP$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow ON = EF$ т.е. заменим искомый отрезок ON на EF , т.к. его легче увязать с данными.
- 3) $EK \perp CD$; $\triangle CKE = \triangle CME \Rightarrow$
 $CK = CM = d_1$
 $KD = FE$; $KD = CD - CK = d_2 - d_1$



Задача 2.3.2. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Найти объем тетраэдра AD_1EF , где E – середина ребра DC и F – середина ребра BB_1 , если ребро куба равно 1.



Решение:

- 1) Через D_1 проведем l ,

$$\left. \begin{array}{l} l \parallel AF \\ AF \subset (AA_1B_1) \end{array} \right\} \Rightarrow l \parallel (AA_1B_1)$$

- 2) $(DD_1C_1) \parallel (AA_1B_1)$ и $l \parallel (AA_1B_1) \Rightarrow l \parallel (DD_1C_1)$, пусть $l \cap DC = K$

- 3) $\left. \begin{array}{l} D_1K \parallel AF \\ AF \subset (AFE) \end{array} \right\} \Rightarrow D_1K \parallel (AFE)$, значит $V_{D_1AFE} = V_{KAFE}$ (у них общее основание, а вершины D_1 и K лежат на прямой, параллельной (AFE)).

- 4) Заменим теперь пирамиду D_1AFE пирамидой $KAFE$. Примем за основание пирамиды $KAFE$ $\triangle AKE$, тогда высотой пирамиды будет FB . $V_{FAKE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AKE} \cdot FB$. $\triangle AFB \sim \triangle KDD_1$ ($\angle D = \angle B$; $\angle K = \angle A$ – т.к. стороны этих углов соответственно параллельны), значит:

$$\frac{FB}{D_1D} = \frac{AB}{KD};$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{DK} \Rightarrow DK = 2; DE = \frac{1}{2}; KE = 2 \frac{1}{2}.$$

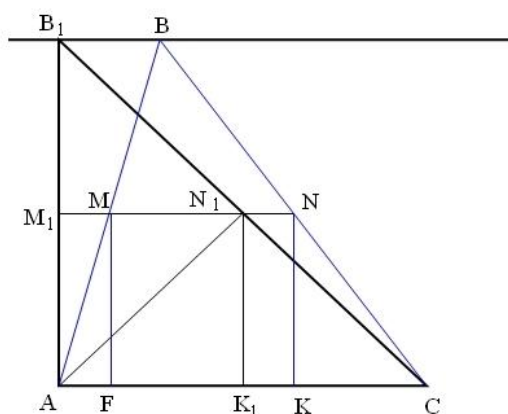
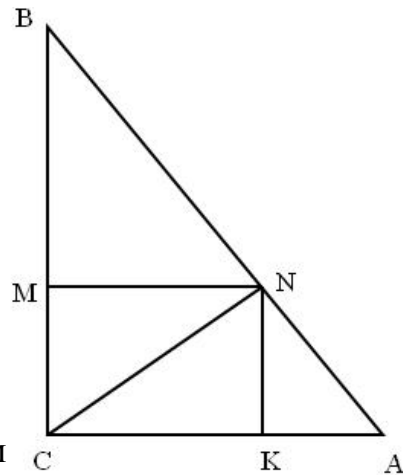
$$S_{\triangle AKE} = \frac{1}{2} \cdot KE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{4};$$

$$V_{FAKE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}.$$

В следующих трех задачах мы будем заменять более сложную фигуру (треугольник, пирамиду).

Задача 2.3.3. В данный треугольник вписать прямоугольник с диагональю наименьшей длины так, чтобы одна сторона треугольника (или ее продолжение) содержала две вершины, а две другие стороны – по одной вершине этого прямоугольника.

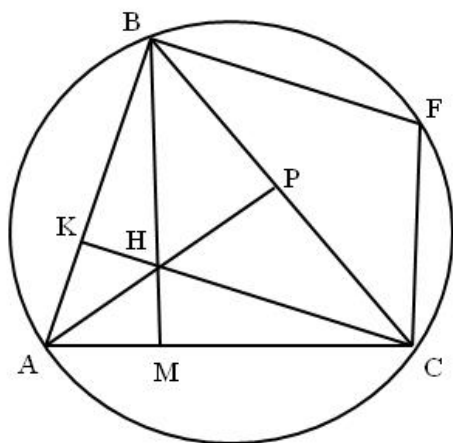
Решение: Если бы в этой задаче шла речь не о произвольном треугольнике, а о прямоугольном, имеющем с данным прямоугольником общий прямой угол, то решение не вызвало бы никаких затруднений: искомым прямоугольником был бы тот, в котором диагональ перпендикулярна к гипотенузе треугольника. Попробуем заменить данный треугольник прямоугольным треугольником с вписанным треугольником конгруэнтным искомому.



Пусть B_1AC – прямоугольный ($\angle A = 90^\circ$) треугольник с тем же основанием AC причем $(B_1B) \parallel (AC)$. Тогда $|M_1N_1| = |MN|$. В треугольник B_1AC впишем прямоугольник $AM_1N_1K_1$ с наименьшей диагональю (рис. 5). Прямая M_1N_1 пересечет стороны BA и BC соответственно в

точках M и N . Проведем $MF \perp AC$ и $NK \perp AC$. Прямоугольник $FMNK$ – искомый.

Задача 2.3.4. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB , BHC и AHC , где H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC , равны между собой.



Решение: Заменим один из этих треугольников (например, $\triangle BHC$) конгруэнтным ему треугольником и найдем радиус окружности, описанной вокруг замененного треугольника.

1 способ. Через вершину B проведем прямую,

параллельную высоте СК, а через С – прямую, параллельную высоте ВМ; пусть F – точка пересечения этих прямых.

Четырехугольник ВНСF – параллелограмм, поэтому $\triangle BFC \cong \triangle BNC$. Рассмотрим четырехугольник ABFC:

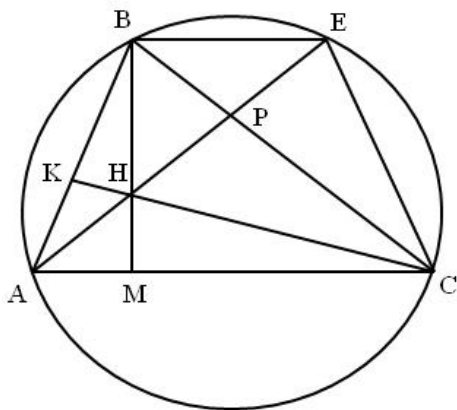
$$\left(\begin{array}{l} [FB] \parallel [CK] \\ [FC] \parallel [BM] \end{array} \right) \Rightarrow (\angle ABC = \angle ACF = 90^\circ).$$

Следовательно, точки А,В,F и С лежат на одной окружности, поэтому $R_{\triangle ABC} = R_{\triangle BFC}$ ($R_{\triangle ABC}$ обозначает радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$).

$$(\triangle BFC \cong \triangle BNC) \Rightarrow (R_{\triangle BFC} = R_{\triangle BNC}).$$

$$\text{Далее, } \left(\begin{array}{l} R_{\triangle ABC} = R_{\triangle BFC} \\ R_{\triangle BFC} = R_{\triangle BNC} \end{array} \right) \Rightarrow (R_{\triangle ABC} = R_{\triangle BNC}).$$

Аналогично доказывается, что $R_{\triangle ANB} = R_{\triangle ANC} = R_{\triangle ABC}$.



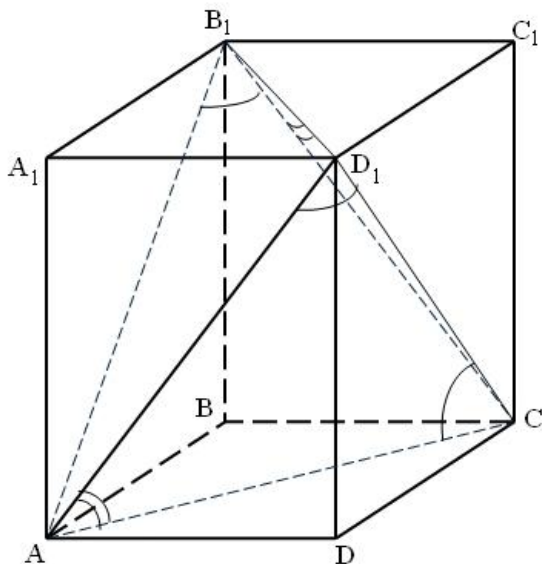
2 способ. Опишем около данного треугольника ABC окружность и продолжим его высоту AP до пересечения с проведенной окружностью в точке E (рис. 7). Заметим, что $\angle CBM = \angle PAC$ (каждый из этих углов дополняет угол ACB до 90°) и $\angle PAC = \angle CBE$ (каждый из них измеряется половиной угловой величины дуги EC, на которую они опираются); следовательно, $\angle CBE \cong \angle CBH$.

Аналогично доказываем, что $\angle BCE \cong \angle BCH$. Таким образом, $\triangle BEC \cong \triangle BNC$, следовательно, $R_{\triangle BEC} = R_{\triangle BNC}$.

Точки А,В,С и Е лежат на одной окружности, поэтому $R_{\triangle BEC} = R_{\triangle ABC}$. Окончательно получаем $R_{\triangle BNC} = R_{\triangle ABC}$.

Аналогично доказываем, что радиусы окружностей, описанных около треугольников АНВ и АНС, равны радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача 2.3.5. Из одной из вершин прямоугольного параллелепипеда про-



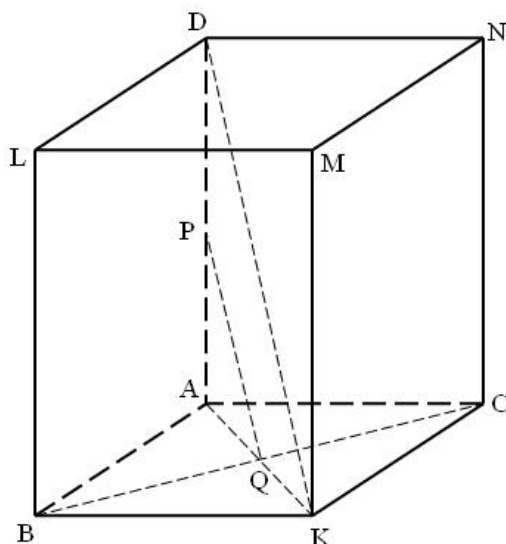
ведены диагонали всех граней, проходящих через эту вершину. Доказать, что сумма углов, попарно образованных этими диагоналями, равна 180° .

Решение: Соединим между собой точки A, D₁ и C – концы диагоналей, проведенных из вершины B₁ (рис. 9). Заменим прямоугольный параллелепипед ABCDA₁B₁C₁D₁ образовавшимся тетраэдром B₁AD₁C и докажем, что сумма плоских углов при вершине этого тетраэдра равна 180° .

Заметим, что $\triangle AB_1C \cong \triangle AD_1C$, $\triangle CB_1D_1 \cong \triangle CAD_1$ и $\triangle AB_1D_1 \cong \triangle ACD_1$; следовательно, $\angle AB_1C \cong \angle AD_1C$, $\angle CB_1D_1 \cong \angle CAD_1$ и $\angle AB_1D_1 \cong \angle ACD_1$.

Учитывая $\angle AD_1C + \angle CAD_1 + \angle ACD_1 = 180^\circ$ (сумма углов треугольника), получим $\angle AB_1D_1 + \angle AB_1C + \angle CB_1D_1 = 180^\circ$.

Задача 2.3.6. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины скрещивающихся ребер тетраэдра с прямым трехгранным углом при вершине, равна радиусу сферы, описанной около данного тетраэдра.



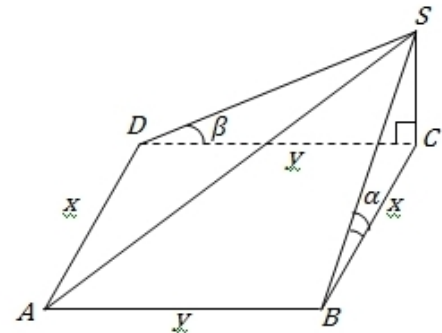
Решение: Дополним тетраэдр ABCD с прямыми плоскими углами при вершине A до прямоугольного параллелепипеда ABKCDLMN (рис. 10). Сфера, описанная около данного параллелепипеда, будет также описанной около тетраэдра ABCD. Из треугольника AKD следует, что $|PQ| = \frac{1}{2} |DK|$. Так как диагональ DK параллелепипеда является диаметром описанной сферы, длина отрезка PQ равна радиусу этой сферы.

2.4 Метод введения вспомогательного неизвестного

Суть метода заключается в том, что исходя из условия задачи составляют уравнение (или систему уравнений). В качестве вспомогательных аргументов

удобно выбирать величины, которые вместе с данными из условия задачи дают набор элементов, однозначно задающих некоторую фигуру.

Задача 2.4.1. В основании пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна Q . Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания углы α и β . Найти объём пирамиды.



Решение:

1) Пусть в пирамиде $SABCD$: $(SBC) \perp (ABCD)$ и $(SDC) \perp (ABCD)$, значит общее ребро $SC \perp (ABCD)$, то есть SC – высота пирамиды.

2) $SC \perp (ABC)$
 SB – наклонная
 BC – проекция
 $SABC$; $\angle SBC = \alpha$
 $AB \perp BC$

по теореме о трёх перпендикулярах $AB \perp SB$,
 значит $\angle SBC$ – линейный угол двугранного угла

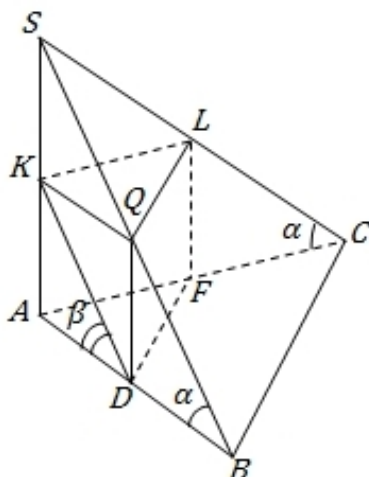
Аналогично $\angle SDC = \angle SADC = \beta$.

3) Пусть $BC = x$, а $DC = y$. Тогда
 из $\triangle BSC$: $SC = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$
 из $\triangle DSC$: $SC = y \cdot \operatorname{tg} \beta$ } $x \cdot \operatorname{tg} \alpha = y \cdot \operatorname{tg} \beta$, но по условию $x \cdot y = Q$.

Получаем $y = \sqrt{Q \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta} \Rightarrow SC = y \cdot \operatorname{tg} \beta = \sqrt{Q \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$

4) $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SC = \frac{1}{3} Q \sqrt{Q \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$.

Задача 2.4.2. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания и равно 1, два других образуют с плоскостью угла α . В пирамиду вписана прямая призма; три её вершины лежат на боковых рёбрах пирамиды, три другие – на основании пирамиды. Диагональ боковой грани призмы составляет с плоскостью основания угол β . Найти высоту призмы.



Решение:

1) $\triangle SAB$ – прямоугольный;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{AB};$$

$$AB = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha};$$

2) $\triangle CFL$ и $\triangle CSA$ – подобные;

Пусть $FL = x$;

$$\frac{SA}{x} = \frac{AC}{FC};$$

$$FL = \frac{AC \cdot x}{SA} = \frac{1 \cdot x}{tg\alpha \cdot 1} = \frac{x}{tg\alpha};$$

$$3) AC = AF + FC;$$

$$AD = AF = AC - FC = \frac{1}{tg\alpha} - \frac{x}{tg\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}(1 - x);$$

4) $\triangle KAD$ –прямоугольный;

$$tg\beta = \frac{AK}{AD};$$

$$AK = AD \cdot tg\beta = \frac{tg\beta}{tg\alpha}(1 - x) = \frac{tg\beta}{tg\alpha} - \frac{tg\beta \cdot AK}{tg\alpha};$$

$$AK \left(1 + \frac{tg\beta}{tg\alpha}\right) = \frac{tg\beta}{tg\alpha};$$

$$AK = \frac{tg\beta}{tg\alpha \left(1 + \frac{tg\beta}{tg\alpha}\right)} = \frac{tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

2.5 Метод площадей

В математических задачах часто бывает полезен такой прием: двумя способами найти одну и ту же величину и приравнять полученные для нее выражения. Пусть мы, например, двумя способами нашли площадь некоторой фигуры. Если в одном из выражений для площади входит, скажем синус какого-либо угла α , то при помощи соотношения $\sin \alpha \leq 1$ из полученного равенства можно получить некоторое неравенство, порой интересное.

Площадь произвольного треугольника:

$$1) S = \frac{1}{2}bh_b \quad (1)$$

$$2) S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad (2)$$

$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (3)$$

$$4) S = \frac{1}{2}Pr \quad (4)$$

$$5) S = \frac{abc}{4R} \quad (5)$$

Площадь прямоугольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab \quad (6)$$

Площадь равностороннего треугольника:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad (7)$$

Площадь выпуклого четырехугольника:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi \quad (8)$$

Площадь параллелограмма:

$$S = ah_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi \quad (9)$$

Площадь ромба:

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \quad (10)$$

Площадь трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad (11)$$

Площадь описанного многоугольника:

$$S = \frac{1}{2} Pr \quad (12)$$

Задача 2.5.1. Доказать, что произведение любых двух сторон треугольника не меньше произведения его периметра на радиус вписанной окружности: $ab \geq Pr$.

Решение: Достаточно приравнять выражения для нахождения площади произвольного треугольника и учесть, что $\sin \alpha \leq 1$.

Замечание: Из решения видно, что если угол между сторонами с длинами a и b — не прямой, то

$$ab > Pr. \quad (13)$$

Из этого неравенства и замечания следует, что для любого треугольника $ab + bc + ca > 3Pr$.

Задача 2.5.2. Доказать, что радиус R окружности, описанной около произвольного треугольника, радиус r вписанной окружности и его периметр P удовлетворяет неравенству

a) $R > \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{Pr}$, (14) если треугольник остроугольный или тупоугольный;

b) $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{Pr}$, (15) если треугольник прямоугольный.

Решение:

а) Соединим центр O описанной окружности с вершинами треугольника.

Для остроугольного треугольника

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} \quad (16)$$

По формуле (4)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}Pr \quad (16)$$

А по формуле (2)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin \alpha \quad (17)$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}R^2 \sin \beta \quad (18)$$

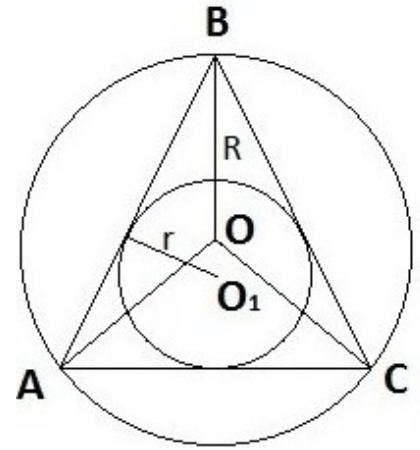
$$S_{COA} = \frac{1}{2}R^2 \sin \gamma \quad (19)$$

Из равенств (16)-(19)

$$Pr = R^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \quad (20)$$

Из общих свойств синуса $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3$. Поскольку

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ, \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma < 3. \quad (21)$$



Для тупоугольного треугольника

$$S_{ABC} = (S_{AOB} + S_{COB}) - S_{AOC} \text{ или}$$

$$Pr = R^2(\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)) \quad (22)$$

Поскольку $\sin \alpha \leq 1, \sin \beta \leq 1, \sin(\alpha + \beta) \geq -1$ и $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, мы имеем

$\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) < 3$. Отсюда и из (22) получаем (14)

б) Соединим вершину прямого угла с центром O описанной окружности.

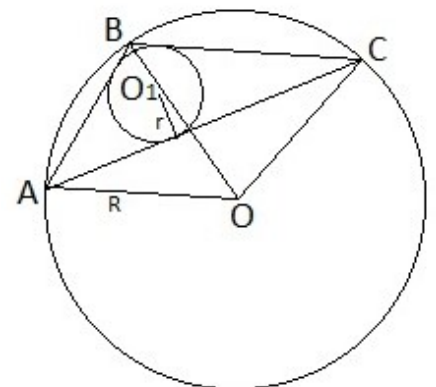
Для прямоугольного треугольника ABC аналог равенств (20), (22) имеет вид:

$$Pr = R^2(\sin \widehat{AOC} + \sin \widehat{COB})$$

Отсюда $\frac{Pr}{R^2} \leq 2$, что доказывает неравенство(15).

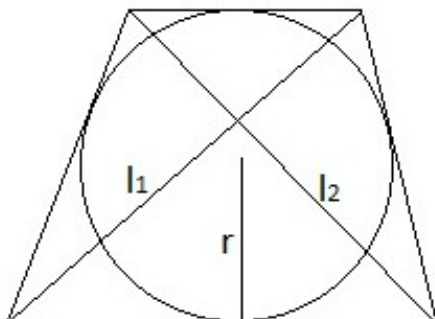
$$\text{Если } \hat{A} = \hat{B} = 45^\circ, \text{ то } R = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Pr};$$

В этом случае радиус R принимает наименьшее значение. Таким образом, из всех прямоугольных треугольников с фиксированным произведением Pr или с фиксированной площадью S , минимальный радиус R имеет равнобедренный треугольник.



Задача 2.5.3. Доказать, что периметр P четырехугольника, описанного около окружности радиуса r , и длины его диагоналей l_1 и l_2 удовлетворяют неравенству:

$$Pr \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}.$$



Решение: Из формул (8) и (12) $Pr = l_1 l_2 \sin \alpha$ (23)

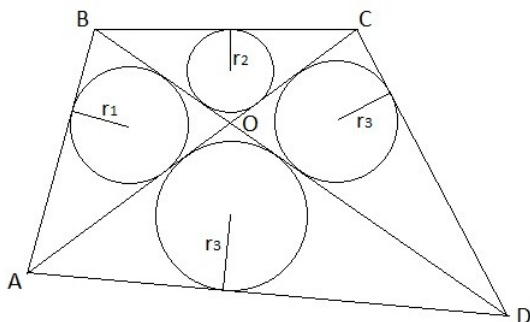
Из неравенства $(l_1 - l_2)^2 \geq 0$ следует $l_1 l_2 \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}$, откуда, в силу (23), получаем искомое неравенство.

Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то $\sin \alpha = 1$, т.е. $Pr = l_1 l_2$. Если еще $l_1 = l_2 = l$ (т.е. для квадрата), то $Pr = l^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}$.

Задача 2.5.4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Пусть P_1, P_2, P_3 и P_4 — периметры, соответственно треугольников AOB, BOC, COD и DOA , а r_1, r_2, r_3 и r_4 — радиусы вписанных в них окружностей.

Доказать неравенство:

$$|OA| \cdot |OB| \cdot |OC| \cdot |OD| \geq \sqrt{(P_1 r_1) \cdot (P_2 r_2) \cdot (P_3 r_3) \cdot (P_4 r_4)}. \quad (24)$$



Решение: С одной стороны по формуле (12) $S_{AOB} = \frac{1}{2} P_1 r_1$. (25)

С другой стороны, по формуле (2) $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB}$. (26)

$$\text{Из (25) и (26) } P_1 r_1 \leq OA \cdot OB \quad (27)$$

$$\text{Аналогично, } P_2 r_2 \leq OB \cdot OC, \quad (28)$$

$$P_3 r_3 \leq OC \cdot OD, \quad (29)$$

$$P_4 r_4 \leq OD \cdot OA. \quad (30)$$

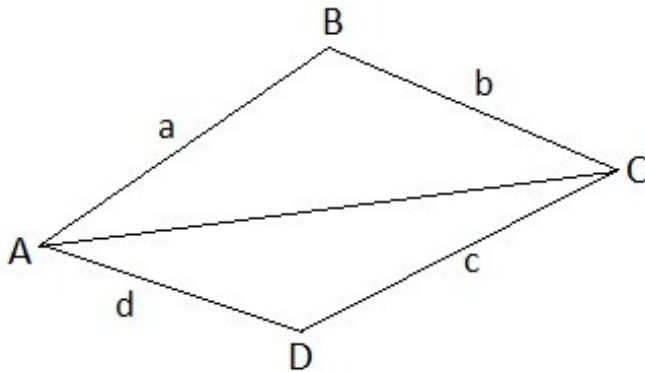
Из (27)-(30) легко получается требуемое неравенство.

Равенство достигается, когда $AC \perp BD$. Из (24) легко получается неравенство:

$$S_{AOB} \cdot S_{BOC} \cdot S_{COD} \cdot S_{DOA} \leq \frac{1}{16} OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2 \cdot OD^2.$$

Задача 2.5.5. Докажите, что для выпуклого четырехугольника $ABCD$ справедливо неравенство $S_{ABCD} \leq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$, (31)

Где a, b, c, d – длины его сторон.



Решение: Разобьем четырехугольник диагональю на два треугольника. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$. По формуле (2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{B}$.

$$\text{Отсюда и из неравенства } ab \geq \frac{a^2+b^2}{2} \text{ получаем } S_{ABC} \leq \frac{a^2+b^2}{4} \quad (32)$$

$$\text{Аналогично } S_{ADC} \leq \frac{c^2+d^2}{4} \quad (33)$$

Из (32) и (33) получаем требуемое неравенство.

Если $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ и $a = b = c = d$, т.е. четырехугольник $ABCD$ – квадрат, то соотношение (31) превращается в равенство.

Задача 2.5.6. На сторонах АВ и ВС треугольника ABC взяты соответственно точки М и N, так что $AM : MB = 5 : 3$ и $BN : NC = 2 : 7$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNB равна 11.

Дано: ABC – треугольник;

$$AM : MB = 5 : 3;$$

$$BN : NC = 2 : 7;$$

$$S_{\triangle MNB} = 11.$$

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Решение:

$$1) S_{MNB} = \frac{1}{2} MB \cdot BN \cdot \sin \hat{B}$$

$$S_{MNB} = \frac{1}{2} 3x \cdot 2y \cdot \sin \hat{B} = 3xy \sin \hat{B}$$

2) Так как площадь треугольника MNB равна 11, составим уравнение:

$$3xy \sin \hat{B} = 11$$

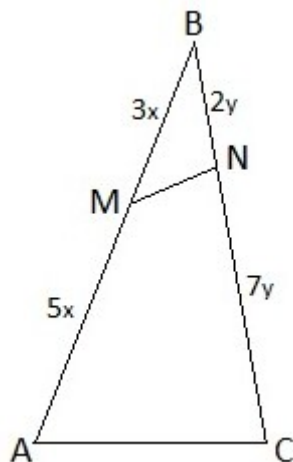
$$xy \sin \hat{B} = \frac{11}{3}$$

$$3) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 8x \cdot 9y \cdot \sin \hat{B} = 36xy \sin \hat{B}$$

$$4) \text{ Так как } xy \sin \hat{B} = \frac{11}{3}, S_{ABC} = 36 \cdot \frac{11}{3} = 132.$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 132$.



Задача 2.5.7. На сторонах АВ и ВС треугольника ABC взяты соответственно точки М и N, так что $AM : MB = 2 : 3$ и $BN : NC = 4 : 9$. Найдите площадь четырехугольника AMNC, если площадь треугольника ABC равна 130.

Дано: ABC – треугольник;

$$AM : MB = 2 : 3;$$

$$BN : NC = 4 : 9;$$

$$S_{\triangle ABC} = 130.$$

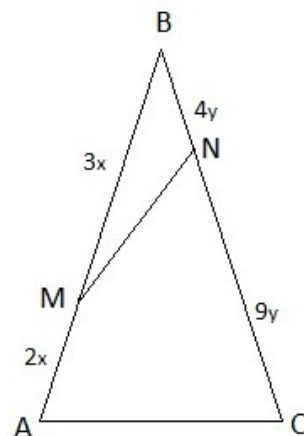
Найти: S_{AMNC}

Решение:

$$1) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 5x \cdot 13y \cdot \sin \hat{B} = \frac{65}{2} xy \sin \hat{B}$$

2) Так как площадь треугольника ABC равна 130, составим уравнение:



$$xy \sin \hat{B} = 4$$

$$S_{MNB} = \frac{1}{2} 3x \cdot 4y \cdot \sin \hat{B} = 6xy \sin \hat{B}$$

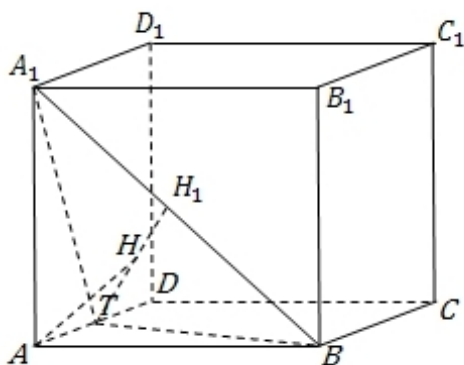
Так как $xy \sin \hat{B} = 4$, $S_{MNB} = 6 \cdot 4 = 24$

$$S_{AMNC} = 130 - 24 = 106$$

OTBeT: SAMNC=106.

Для нахождения расстояния от точки до плоскости или при нахождении углов между прямой и плоскостью метод «вспомогательного объёма» во многих случаях оказывается наиболее эффективным. Суть метода заключается в том, что объём некоторой фигуры выражается двумя способами, а затем из полученных равенств выражается искомая величина. Причём в этом методе нет необходимости строить проекцию прямой на плоскость или проекцию точки, что во многих случаях оказывается очень затруднительным.

Задача 2.6.1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$, где T - середина ребра AD .



1) Сначала найдём объём пирамиды A_1ABT .

$$V_{A_1ABT} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABT} \cdot A_1A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{12};$$

2)Теперь выразим объём этой пирамиды как:

$$V_{ABTA_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 BT} \cdot AH$$

Высота AN будет являться расстоянием между точкой и плоскостью, выразим её из второго равенства:

$$AH = \frac{3V_{ABTA_1}}{S_{AA_1BT}};$$

$$S_{\Delta A_1 B T} = \frac{1}{2} T H_1 \cdot A_1 B;$$

$$TB = \sqrt{AT^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$TH_1 = \sqrt{TB^2 - H_1B^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{\Delta A_1BT} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$AH = \frac{3 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{6};$$

Задача 2.6.2. В единичном кубе

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости $(BD A_1)$.

Решение:

1) Сначала найдём объём пирамиды $A_1 ABD$.

$$V_{A_1 ABD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABD} \cdot A_1 A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

2) Теперь выразим объём этой пирамиды как:

$$V_{ABDA_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 BD} \cdot AH$$

Высота AH будет являться расстоянием между точкой и плоскостью, выразим её из второго равенства:

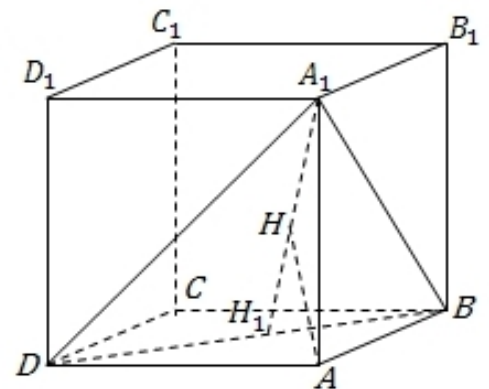
$$AH = \frac{3V_{ABDA_1}}{S_{\Delta A_1 BD}};$$

$$S_{\Delta A_1 BD} = \frac{1}{2} DB \cdot A_1 H_1$$

$$A_1 H_1 = \sqrt{A_1 B^2 - H B^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{\Delta A_1 BD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$



2.7 Векторный метод

Применение критериев коллинеарности и компланарности векторов в решении задач.

Критерии коллинеарности и компланарности векторов служат основой для применения векторной алгебры в решении стереометрических задач. Они позволяют выразить в виде векторных равенств различные утверждения о расположенных точках, прямых и плоскостях в пространстве. Переход от векторных равенств к скалярным происходит на основе единственности разложения вектора по двум неколлинеарным и трём некомпланарным векторам.

1° Для того чтобы три различные точки A, B, C лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ были коллинеарны, то есть чтобы существовало число λ такое что $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

2° Пусть A_1 и A_2 - различные точки прямой a , B_1 и B_2 - различные точки прямой b .

Для того чтобы прямые a и b были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ были коллинеарны, то есть чтобы существовало такое число что

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}.$$

3° Для того чтобы различные точки A, B, C, D лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ были компланарны, то есть чтобы существовали такие числа α и β что $\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

4° Пусть a и b различные прямые, A_1 и A_2 - точки прямой a , $A_1 \neq A_2$, B_1 и B_2 - точки прямой b , $B_1 \neq B_2$.

Для того чтобы прямые a и b пересекались, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}$ были компланарны, то есть чтобы существовали такие числа α и β , что $\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha \overrightarrow{A_1A_2} + \beta \overrightarrow{B_1B_2}$.

Угол между прямой и плоскостью в пространстве.

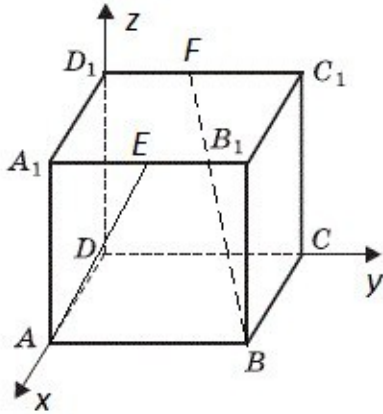
Для двух любых прямых в стереометрии введено понятие угла между ними.

Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все четыре угла, образованные пересекающимися прямыми, равны, то угол между ними равен 90° (или $\frac{\pi}{2}$ радиан).

Если две прямые параллельны, то угол между ними равен 0° .

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данными скрещивающимся прямым.

Задача 2.7.1. В кубе $A \dots D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и D_1C_1 . Найдите косинус угла между прямыми AE и BF .



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб;

$AB = 1$;

$A_1 E = E B_1, D_1 F = F C_1$;

Найти: $\cos \angle(AE, BF) = \cos \alpha$.

Решение:

Проведем оси координат. Начало координат точка D.

$$\begin{array}{l} 1) \quad \left. \begin{array}{l} A(1; 0; 0) \\ \overrightarrow{AE} \{0; \frac{1}{2}; 1\} \\ E(1; \frac{1}{2}; 1) \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} B(1; 1; 0) \\ \overrightarrow{BF} \{-1; -\frac{1}{2}; 1\} \\ F(0; \frac{1}{2}; 1) \end{array} \right\} \end{array}$$

$$2) \quad |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

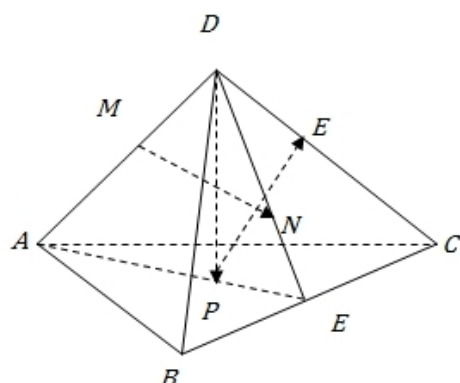
$$|\overrightarrow{BF}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2}$$

$$3) \quad \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BF}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 - \frac{1}{4} + 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Задача 2.7.2. В правильном тетраэдре $DABC$ отрезок MN соединяет середину ребра ADC центром грани BCD , а отрезок QP соединяет середину ребра CD с центром грани ABC . Найти угол между отрезками MN и QP .



Решение:

1) Предположим, что $|AD| = a$. Очевидно, что $|MD| = \frac{a}{2}$, $|DQ| = \frac{a}{2}$, $|DM| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Нетрудно доказать что $|DP| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $|PQ| = |MN| = \frac{a}{2}$.

2) Пусть φ - величина угла между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Найдём значение φ из определения скалярного умножения двух векторов

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|}$$

3) Запишем очевидные векторные равенства

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN}, \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP}.$$

4) Значения $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ подставляем

$$\cos \varphi = \frac{(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN}) \cdot (\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP})}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|}$$

5) Значит, что $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{DQ}) = \frac{2}{3}\pi$ и $(\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{MD}) = \pi - MDP$. Очевидно, что

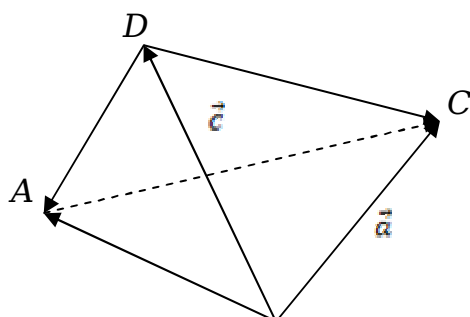
$$\cos MDP = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ а } \cos NDP = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

6) Учитывая сказанное выше, получаем

$$\cos \varphi = \frac{-\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{4a^2}{9}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{1}{18}.$$

$\varphi = \arccos \frac{1}{18}$ и есть угол между отрезками MN и PQ .

Задача 2.7.3. В тетраэдре $ABCD$ имеем $|AB| = |BC|, |AD| = |DC|$. Доказать, что рёбра AC и BD перпендикулярны.



$\vec{b}$

Решение: B

Выберем три некопланарных вектора: $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{BA} = \vec{b}, \overrightarrow{BD} = \vec{c}$. Имеем $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{c}, \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{c}$. По условию $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{c}|$. Отсюда следует, что $(\vec{a} - \vec{c})^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2, \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{c} + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2$. Учитывая, что $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, получаем $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$, то есть $(\vec{a} - \vec{b})\vec{c} = 0$. Поскольку $(\vec{a} - \vec{b}) = \overrightarrow{AC}, \vec{c} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}\overrightarrow{BD} = 0$, то есть $(AC) \perp (BD)$.

Следствие. В правильной треугольной пирамиде, в частности в правильном тетраэдре противоположные рёбра перпендикулярны.

2.8. Координатный метод

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. И, решая ту или иную геометрическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще, удобнее. Некоторые виды координатных систем, отличные от прямоугольных.

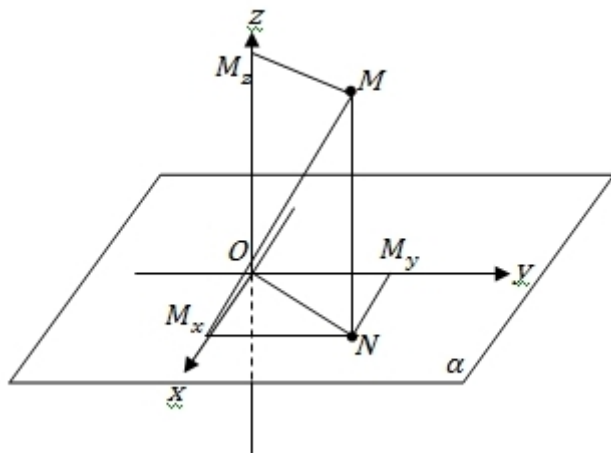
1. Косоугольные (аффинные) координаты.
2. Полярные координаты.
3. Цилиндрические координаты.
4. Сферические координаты.
5. Прямоугольные координаты.

Рассмотрим самые употребительные и простые координаты в пространстве, называемые прямоугольными. Их называют ещё декартовыми по имени Рене Декарта (1596-1650) – французского учёного и философа, впервые введшего координаты в геометрию (на плоскость).

Возьмём какую-либо плоскость α и введём на ней прямоугольные координаты x, y . Любой точке M в пространстве отнесём три координаты – две координаты x, y её проекции на плоскость α , а третью координату z , которую определим так: $|z|$ равен расстоянию от M до плоскости α , причём $z > 0$ с одной какой-нибудь стороны от плоскости α и $z < 0$ с другой стороны, а на самой плоскости $z = 0$. Если плоскость α представлять как горизонтальную, то считают $z > 0$ над ней, а $z < 0$ под ней. Заметим, что так как расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость, то $|z| = |MN|$.

Итак, каждой точке пространства однозначно отнесены три координаты x, y, z ; координата x считается первой, y второй, z третьей.

Обратно: если заданы три любые числа в определённом порядке x_0, y_0, z_0 , то найдётся, и притом единственная, точка M с координатами $x = x_0, y = y_0, z = z_0$.



Применение координат и алгебраических методов к исследованию алгебраических объектов и решению геометрических задач составляет раздел геометрии, называемый аналитической геометрией.

Рассмотрим основные формулы в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости и в пространстве.

1. Расстояние между точками на плоскости $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ находится по формуле:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

2. Координаты $(x; y)$ середины отрезка с концами $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид:

$$y = kx + q$$

Угловой коэффициент k представляет собой значение тангенса угла, образуемого прямой и положительным направлением оси Ox , а начальная ордината q — значение ординаты точки пересечения прямой с осью Oy .

4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $A(x_0; y_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

5. Общее уравнение прямой имеет вид:

$$ax + by + c = 0$$

6. Уравнение прямых, параллельных соответственно осям Oy и Ox , имеет вид:

$$x = a,$$

$$y = b.$$

7. Условия параллельности и перпендикулярности прямых $y_1 = k_1x + q_1$ и $y_2 = k_2x + q_2$ соответственно имеют вид:

$$k_1 = k_2,$$

$$k_1 k_2 = -1.$$

8. Уравнение окружности радиусом R и с центрами соответственно в точках $O(0; 0)$ и $C(x_0; y_0)$ имеют вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

9. Уравнение:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Представляет собой уравнение параболы с вершиной в точке, абсцисса которой:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

10. Расстояние между точками в пространстве $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ находится по формуле:

$$A_1 A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка $A_1 A_2$ или модуль вектора, имеющего координаты:

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

11. Координаты $(x; y; z)$ середины отрезка $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

12. Модуль вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, заданного своими координатами, находится по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

13. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, то есть справедливы формулы:

$$(a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3),$$

$$\lambda(a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3).$$

14. Единичный вектор $\vec{a}_0$, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, находится по формуле:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

15. Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Где угол φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

16. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ выражается формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

В частности, $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, откуда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

17. Косинус угла между векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ находится по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

18. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ имеет вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ или } a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

А условие их коллинеарности (параллельности) – вид:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \text{ где } |\lambda| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

Или:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

19. Общее уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $(a; b; c)$, имеет вид:

$$ax + by + cz + d = 0$$

20. Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $(a; b; c)$ и проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$, имеет вид:

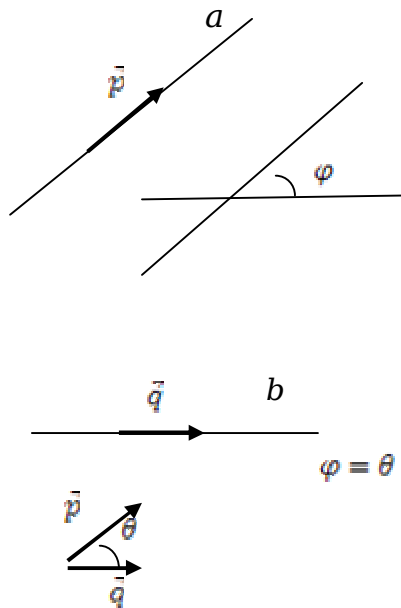
$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

21. Уравнение сферы с центром $O(0; 0; 0)$ записывается в виде:

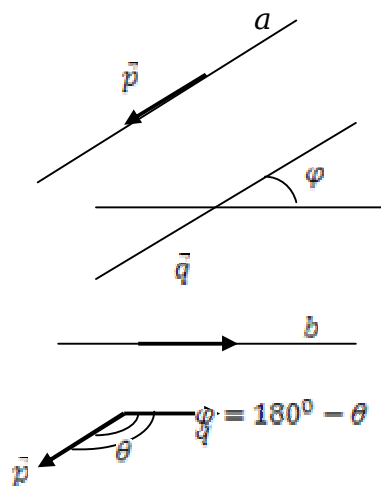
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

22. Свойство: как найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

а)



б)

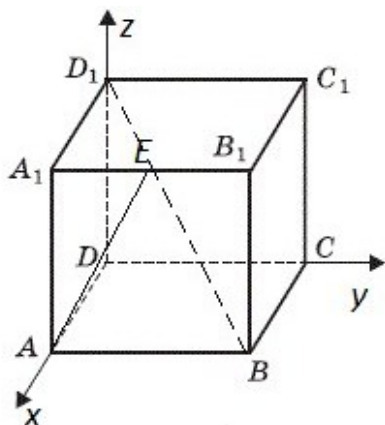


Пусть $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$ – направляющие векторы прямых a и b . Обозначим буквой φ искомый угол между этими прямыми. Для решения задачи достаточно найти $\cos \varphi$, так как значение $\cos \varphi$ позволяет найти угол φ .

Введём обозначение: $\theta = \angle(\vec{p}, \vec{q})$. Тогда либо $\varphi = \theta$, если $\theta \leq 90^\circ$, либо $\varphi = 180^\circ - \theta$, если $\theta > 90^\circ$. Поэтому либо $\cos \varphi = \cos \theta$, либо $\cos \varphi = -\cos \theta$. В любом случае $|\cos \varphi| = |\cos \theta|$, а так как $\theta \leq 90^\circ$, то $\cos \theta \geq 0$, и, следовательно, $\cos \varphi = |\cos \theta|$. Используя формулу:

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Задача 2.8.1. В кубе $A \dots D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1 . Найдите косинус угла между прямыми AE и BD_1 .



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб;

$AB = 1$;

$A_1 E = E B_1$;

Найти: $\cos \widehat{AE BD_1} = \cos \alpha$.

Решение:

Проведем оси координат. Начало координат точка D.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad A(1; 0; 0) \\ \overrightarrow{AE} \{0; \frac{1}{2}; 1\} \\ E(1; \frac{1}{2}; 1) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} B(1; 1; 0) \\ \overrightarrow{BD_1} \{-1; -1; 1\} \\ D_1(0; 0; 1) \end{array} \right\}$$

$$2) \quad |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

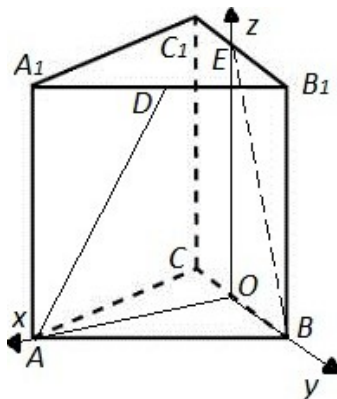
$$|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$3) \quad \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BD_1}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 - \frac{1}{2} + 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$

Задача 2.8.2. В правильной треугольной призме $A \dots C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины соответственно A_1B_1 и B_1C_1 . Найдите косинус угла между прямыми AD и BE .



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма;

$$AB = 1;$$

$$A_1D = DB_1, B_1E = EC_1;$$

Найти: $\cos \angle AD \hat{=} BE = \cos \alpha$.

Решение:

Проведем оси координат. Начало координат точка O .

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0 \right) \\ \overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}; 1 \right\} \\ D \left(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}; 1 \right) \\ B \left(0; \frac{1}{2}; 0 \right) \\ \overrightarrow{BE} \left\{ 0; -\frac{1}{2}; 1 \right\} \\ E \left(0; 0; 1 \right) \end{array} \right\}$$

$$2) \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

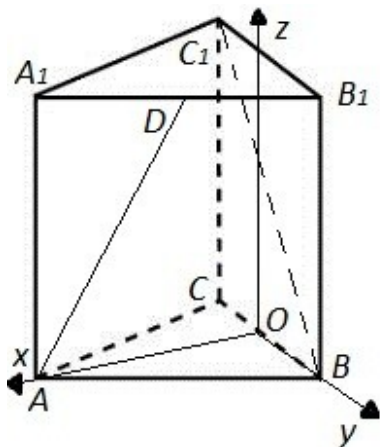
$$|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$3) \quad \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BE}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 - \frac{1}{8} + 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{7}{10}$$

Ответ: $\frac{7}{10}$

Задача 2.8.3. В правильной треугольной призме $A \dots C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина A_1B_1 . Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1 .



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма;

$$AB = 1;$$

$$A_1D = DB_1;$$

$$\text{Найти: } \cos \widehat{AD \ BC_1} = \cos \alpha.$$

Решение:

Проведем оси координат. Начало координат точка O .

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0 \right) \\ \overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}; 1 \right\} \\ D \left(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}; 1 \right) \\ B \left(0; \frac{1}{2}; 0 \right) \\ \overrightarrow{BC_1} \{ 0; -1; 1 \} \\ C_1 \left(0; -\frac{1}{2}; 1 \right) \end{array} \right\}$$

$$2) \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

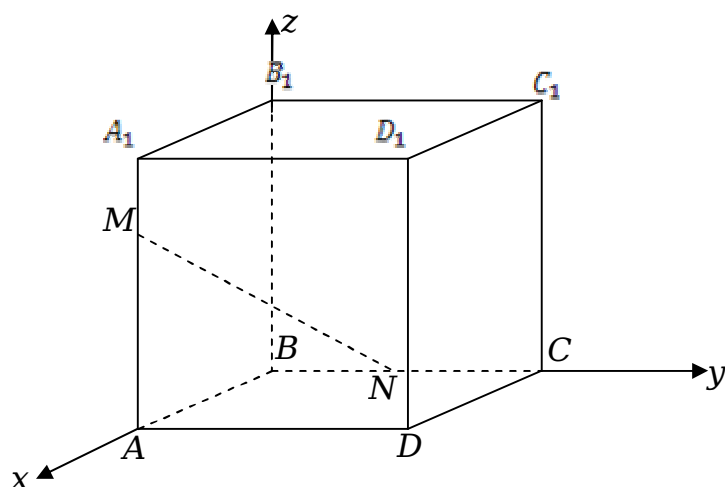
$$|\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$3) \quad \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 - \frac{1}{4} + 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

Задача 2.8.4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M лежит на ребре AA_1 , причём $AM:AM_1 = 3:1$, а точка N - середина ребра BC . Вычислите косинус угла между прямыми MN и DD_1 .



Решение:

$$1) M\left(1; 0; \frac{3}{4}\right); N\left(0; \frac{1}{2}; 0\right) D(1; 1; 0); D_1(1; 1; 1)$$

$$2) \overrightarrow{MN} \left\{ 1 - 0; \frac{1}{2} - 0; 0 - \frac{3}{4} \right\} \Rightarrow \left\{ -1; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4} \right\}$$

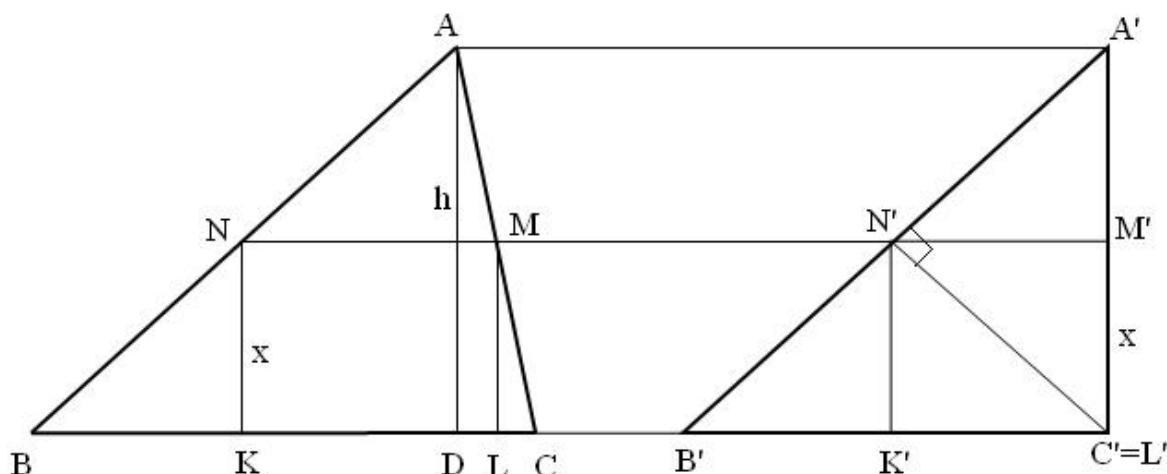
$$\overrightarrow{DD_1} \{ 1 - 1; 1 - 1; 1 - 0 \} \Rightarrow \{ 0; 0; 1 \}$$

$$3) \cos(\overrightarrow{MN} \overrightarrow{DD_1}) = \frac{\left| -\frac{3}{4} \right|}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \right)}} = \sqrt{\frac{3}{29}}$$

3. Правильное решение геометрической задачи.

При решении геометрической задачи необходимо рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения элементов фигуры. Решение задачи, допускающей различные конфигурации, будет неполным и ошибочным, если ограничиться рассмотрением лишь одного из возможных случаев. Решая такие задачи, важно не ошибиться, приняв частное за общее.

Задача 3.1. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник с наименьшей диагональю.



Решение: Пусть в треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что его сторона KL лежит на прямой BC , а вершины M и N – на сторонах AC и AB (рис. 1,а). Пусть AD – высота треугольника ABC . Построим треугольник $A'B'C'$ с прямым углом C' так, чтобы стороны BC и $B'C'$ были равны и располагались на одной прямой, и чтобы прямые AA' и BC были параллельны (рис. 1,б). Тогда $A'C' = AD = h$.

Докажем, что если в треугольники ABC и $A'B'C'$ вписаны прямоугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$, имеющие равные высоты KN и $K'N'$, то эти прямоугольники равны.

Пусть $BC = a$. Из подобия треугольников ANM и ABC имеем $MN = \frac{a}{h}(h-x)$, где $x = KN$.

Аналогично найдем, что $M'N' = \frac{a}{h}(h-x)$.

Значит, $MN = M'N'$, и задача сводится к более простой: в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ вписать прямоугольник с наименьшей диагональю.

Ясно, что диагональ вписанного в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ прямоугольника, угол которого совпадает с углом C' , будет наименьшей, если она перпендикулярна гипотенузе $A'B'$. Любой другой прямоугольник бу-

дет иметь большую диагональ, так как его диагональ, являясь наклонной к гипотенузе $A'B'$, больше перпендикулярна к $A'B'$.

Отсюда следует построение и в общем случае, поскольку $KN=KN$. При этом ясно, что длина наименьшей диагонали искомого треугольника (две вершины которого лежат на стороне BC) равна $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Кроме того, поскольку диагональ LN прямоугольника $KLMN$ перпендикулярна AB , треугольники KLN и ABC подобны, так что $\frac{KN}{KL} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{h}$, т.е. у искомого прямоугольника $KLMN$ отношение сторон $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.

Казалось бы, задача решена. Но это не так. Чтобы получить полное решение задачи, следует рассмотреть еще два случая: когда две вершины вписанного прямоугольника лежат на прямой AC и когда – на прямой AB , а затем сравнить результаты.

Пусть S – площадь треугольника ABC , a, b, c – длины его сторон, h_a, h_b, h_c – соответствующие им высоты.

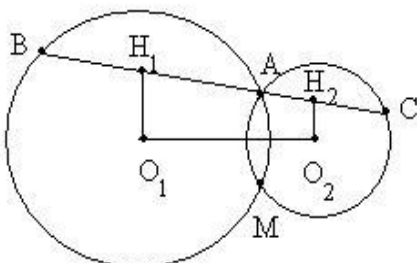
Как мы уже доказали, наименьшее значение длины диагонали прямоугольника, вписанного в треугольник ABC так, что две его вершины лежат на прямой BC , равно $d_1 = \frac{ah_a}{\sqrt{a^2+h_a^2}} = \frac{2S}{\sqrt{a^2+h_a^2}}$.

Следовательно, если две вершины прямоугольника лежат на прямой AC , то его диагональ имеет наименьшую длину, равную $d_2 = \frac{2S}{\sqrt{b^2+h_b^2}}$.

Будем считать, что данный треугольник разносторонний, и $a > b > c$. Сравним выражения $a^2 + h_a^2$ и $b^2 + h_b^2$: $(a^2 + h_a^2) - (b^2 + h_b^2) = (a^2 - b^2) + (h_a^2 - h_b^2) = (a^2 - b^2) = ((\frac{2S}{a})^2 - (\frac{2S}{b})^2) = a^2 - b^2 + (\frac{4S^2}{a^2} - \frac{4S^2}{b^2}) = (a^2 - b^2)(1 - \frac{4S^2}{a^2b^2}) > 0$, поскольку $a > b$ и $2S > ab$.

Поскольку $a^2 + h_a^2 > b^2 + h_b^2$, и значит, если $a > b$, то $d_1 > d_2$.

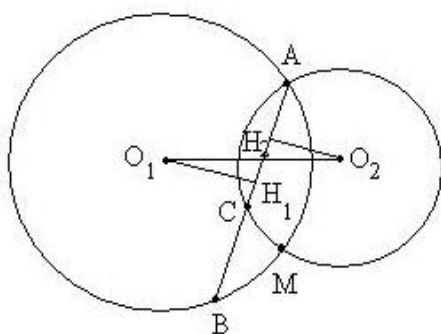
В результате проведенного исследования можно сделать вывод: из всех прямоугольников $KLMN$ вписанных в данный треугольник ABC , наименьшую диагональ имеет прямоугольник, две вершины которого лежат на большей стороне BC треугольника, и отношение сторон которого $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.



Задача 3.2. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наибольшей.

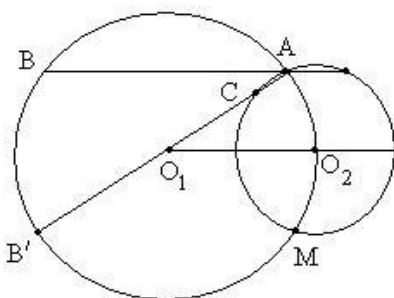
Решение: Пусть данный окружности пересекаются в точках A и

М.Проведем через точку А произвольную прямую, пересекающую окружность с центром O_1 в точке В, а окружность с центром O_2 – в точке С. Проведем перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой ВС. Легко увидеть, что $BC=2H_1H_2$. Поскольку H_1H_2 – ортогональная проекция отрезка O_1O_2 на прямую ВС, $H_1H_2= O_1O_2 \cos \alpha$, где α – угол между секущей ВС и линией центров O_1O_2 , так что $BC=2O_1O_2 \cdot \cos \alpha$, и отрезок ВС имеет наибольшую длину, равную $2O_1O_2$, тогда, когда $\alpha=0$, т.е. секущая ВС параллельна прямой O_1O_2 .



Приведенное рассуждение, однако, неверно. Дело в том, что в задаче говорится не об отрезке ВС, а об отрезке секущей, заключенном внутри кругов. Возможны три случая расположения точек В и С: секущую можно провести так, что эти точки будут лежать:

- 1) По разные стороны от точки А;
- 2) По одну сторону от точки А;
- 3) Одна из них, например, точка С будет совпадать с точкой А.



В случае, если точка С лежит между точками А и В, отрезком секущей, заключенным внутри кругов, является не отрезок ВС, а отрезок АВ – хорда окружности. Хорда же имеет наибольшую длину, если она проходит через центр и является диаметром окружности.

Таким образом, следует еще выяснить, какой из отрезков больше: отрезок, параллельный прямой O_1O_2 , длина которого равна $2O_1O_2$ (во всех перечисленных способах $BC=2 H_1H_2$), или же диаметр $2R$ большей окружности (рис. 3,в). Окончательно получается следующий ответ:

если $O_1O_2 > R$, то секущую следует провести параллельно линии центров O_1O_2 ;

если $O_1O_2 < R$, то секущую следует провести через центр большей окружности;

если $O_1O_2 = R$, то условию задачи удовлетворяют две прямые, одна из которых параллельна O_1O_2 , а другая проходит через центр большей окружности (рис. 3,в).

Для окружностей одинакового радиуса получается аналогичный ответ, только в случаях $O_1O_2 \leq R$ к указанным прямым добавляется еще прямая, проходящая через центр второй окружности.

Задача 3.3. Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь $\triangle BMT$, если сторона квадрата равна 4.

Решение:

1 случай.

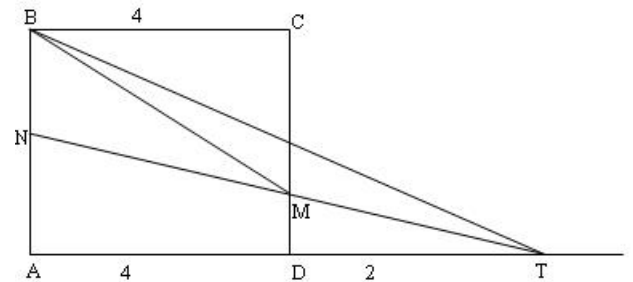
$$1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{AT}{AN} = 3; AT = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$2) S_{BMT} = S_{BNT} - S_{BNM};$$

$$S_{BNM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4;$$

$$S_{BNT} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6;$$

$$3) S_{BMT} = 6 - 4 = 2.$$

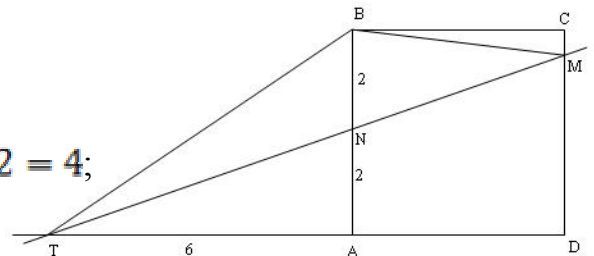


2 случай.

$$1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{AT}{AN} = 3; AT = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$2) S_{TBN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6; S_{BNM} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4;$$

$$3) S_{BMT} = 6 + 4 = 10.$$



Задача 3.4. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC=44$, $AD=100$, $AB=CD=35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K , найдите длину отрезка CK .

Решение:

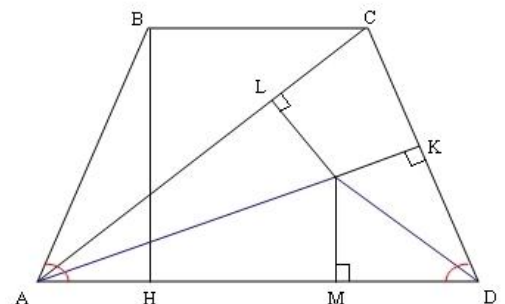
1 случай.

$$1) AH = \frac{1}{2} \cdot (100 - 44) = 28$$

$$2) \cos \alpha = \frac{28}{35}$$

$$3) AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cdot \cos \alpha = 35^2 + 100^2 - 2 \cdot 35 \cdot 100 \cdot \frac{28}{35} = 5625 = 75^2$$

$$4) 100 - x + 35 - x = 75$$

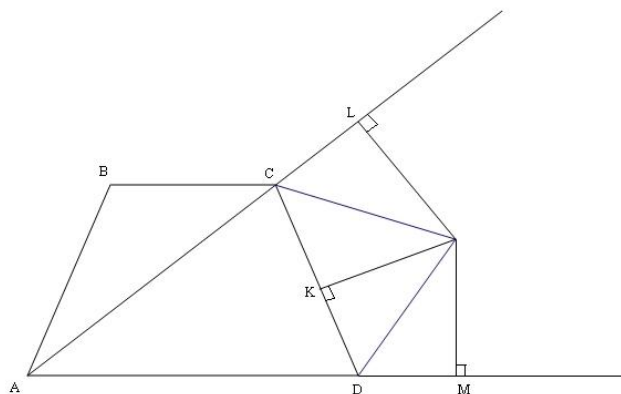


$$2 \cdot x = 60$$

$$x = 30$$

$$5) CK = 35 - 30 = 5.$$

2 случай.



$$1) AL = AM$$

$$75 + x = 100 + 35 - x$$

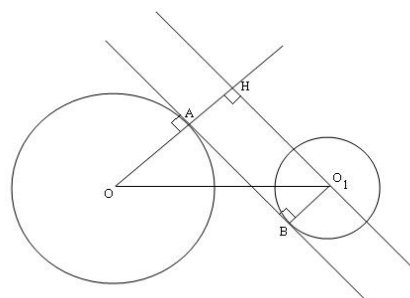
$$x = 30 = CK$$

Задача 3.5. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключённой между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Решение:

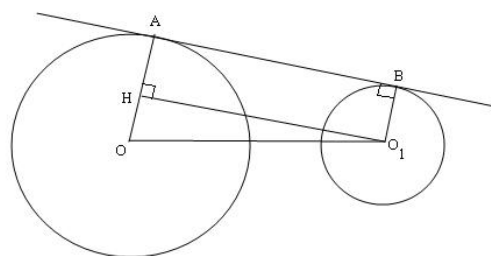
1 случай.

$$1) O_1H = AB = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{18 - 50} = 30$$



2 случай.

$$1) O_1H = AB = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$$



Задача 3.6. В прямоугольнике ABCD, $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

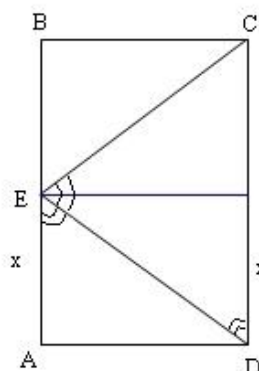
Решение:

1 случай.

$$1) EN \parallel AD; \triangle AED = \triangle END \Rightarrow \angle AED = \angle NDE = \alpha$$

$$2) \triangle CDE: \angle CED = \angle CDE = \alpha \Rightarrow CE = CD = 2$$

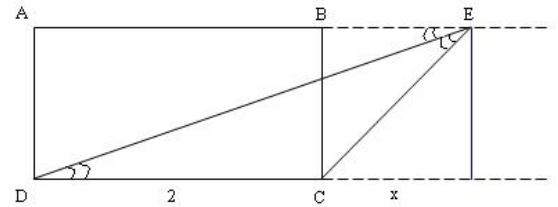
$$3) \triangle EBC: BC^2 + BE^2 = EC^2$$



$$\begin{aligned}
 3 + (2 - x)^2 &= 4 \\
 (2 - x)^2 &= 1 \\
 2 - x &= 1 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

2 случай.

- 1) $AE \parallel DC \Rightarrow \angle AED = \angle EDC$ (H/Л)
- 2) $\triangle DEC$ – равнобедренный;
 $DC = CE = 2$
- 3) $x = \sqrt{4 - 3} = 1$
- 4) $AE = 2 + 1 = 3$.

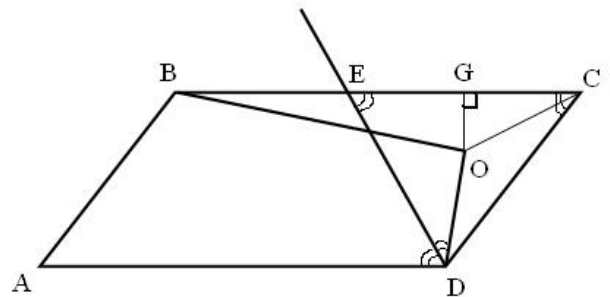


Задача 3.7. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB=3$, $BC=5$, $\angle A=60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение:

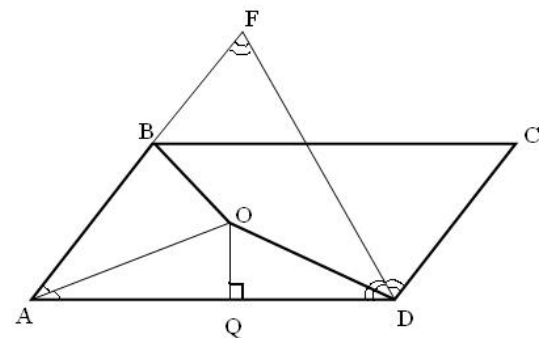
1 случай.

- 1) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = CO$; $CO = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$
- 2) $S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ =$
 $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$
- 3) $r = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = GO$
- 4) $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{3}}{4}$
- 5) $S_{ABCD} = 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$
- 6) $S_{ABOD} = \frac{15\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} (15 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}) = \frac{11\sqrt{3}}{2}$.



2 случай.

- 1) $r = \frac{5\sqrt{3}}{6} = OQ$; $R = \frac{5\sqrt{3}}{3} = AO$
- 2) $S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot 5 = \frac{25\sqrt{3}}{12}$
- 3) $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot 3 = \frac{15\sqrt{3}}{12}$
- 4) $S_{ABOD} = \frac{25\sqrt{3}}{12} + \frac{15\sqrt{3}}{12} = \frac{40\sqrt{3}}{12} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.



Задача 3.8. В $\triangle ABC$ проведены медиана AM и высота AH . Известно, что $MH:BN=3:2$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .

Решение:

1 случай.

$$1) S_{AMH} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HM$$

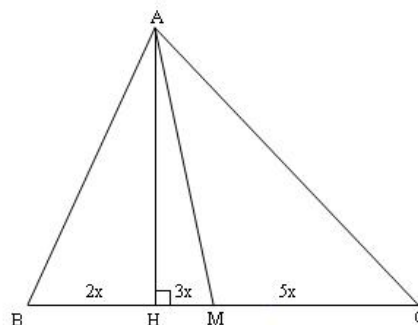
$$\frac{1}{2} \cdot AH \cdot 3x = 24$$

$$AH \cdot x = 16$$

$$AH = \frac{16}{x}$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{x} \cdot 10x = 80.$$



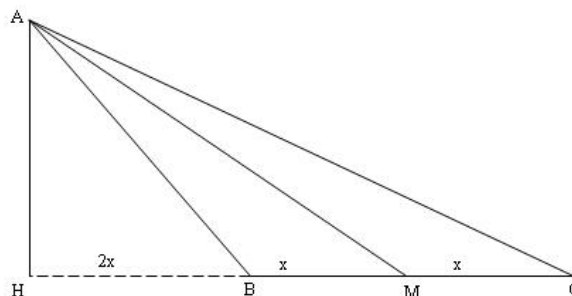
3 случай.

$$1) S_{AMH} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HM$$

$$48 = AH \cdot 3x$$

$$AH = \frac{16}{x}$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{x} \cdot 2x = 16.$$



В заключение мы можем дать такой общий совет: чтобы получить правильное решение геометрической задачи, решите ее для одного случая, а затем проверьте, годится ли найденное решение для всех других возможных случаев. Не забывайте, что треугольник может быть не только остроугольным, что центр описанной около треугольника окружности не всегда лежит внутри треугольника, что угол при большем основании трапеции может быть тупым и т. д. Иногда удастся найти и такой подход к задаче, который, обладая общностью, позволяет получить решение, охватывающее все возможные случаи. Решение одной и той же задачи разными способами не только позволяет отыскивать наиболее простое и красивое решение задачи, но и служит эффективным средством контроля и проверки.

Список литературы

- 1) Джордж Пойа «Математическое открытие». Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М., 1976 г., 448 с.
- 2) Учебное пособие под редакцией Г. Н. Яковлева «Геометрия. Теория и ее использование для решения задач». Издательство «Альфа».
- 3) Математика. Еженедельное приложение к газете «Первое сентября» 27-28/94. Спецвыпуск №4.
- 4) Пособие по математике для поступающих в ВУЗы под редакцией А.Д. Кутасов, Т.С. Пиголкина, издательство г. Москва «Наука», 1985 г., 480 с.
- 5) Справочник по методам решения по математике. Цыпкин А.Г., Пинский А.И., Москва «Наука» 1989 г., 576 с.
- 6) Векторы на экзаменах, С.А. Шестаков, Москва: МЦММ 2005, 112 с.
- 7) Журнал «Квант» №4, №5, №9. 1979 г.
- 8) Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие/В.К. Егерев, Б.А. Кордемский, В.В. Зайцев и др.; Под ред. М.И. Сканди. – 6-е изд., испр. И доп. – М.: ООО «Гамма-С.А.», АО «СТОЛЕТИЕ», 1999. – 560 с.