Г. Е. ШИЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС

ФМ

Г. Е. ШИЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для математических специальностей
физико-математических и механико-математических
факультетов университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

Книга написана как учебник по специальному курсу математического анализа для студентов математических факультетов университетов. Вопросы теории функций действительного переменного, вариационного исчисления и интегральных уравнений освещаются в книге с единой точки зрения теории линейных пространств. От читателя требуется владение общим курсом математического анализа в объеме университетской программы.

Георгий Евгеньевич Шилов

Математический анализ

Редактор *А. Н. Копылова*

Техн. редактор *Е. А. Ермакова* Корректор *Е. В. Кузнецова*

Сдано в набор 27/IV 1961 г. Подписано к печати 2/IX 1961 г. Бумага 60×90 1/16. Физ. печ. л. 27,25. Усл. печ. л 27,25. Уч.-изд. л. 27,05. Тираж 25 000 экз. Т-08744. Цена книги 91 к. Заказ 1833.

Государственное издательство Физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.
Отпечатано с готовых матриц в 1-й типографии Трансжелдориздата МПС
Заказ 1651.

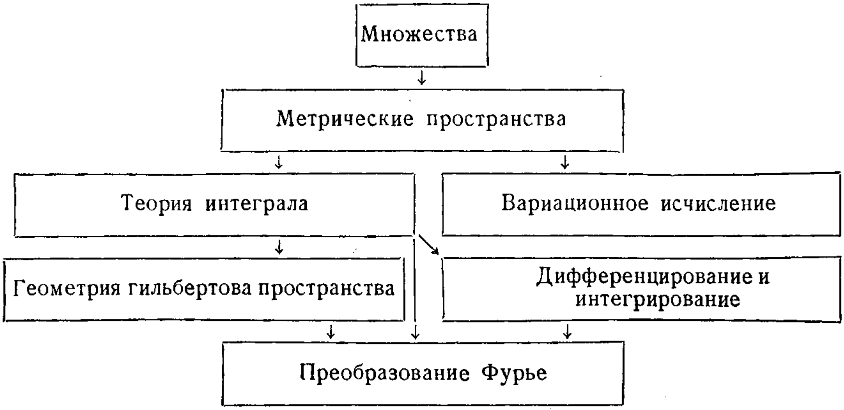
ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана в качестве учебника по специальному курсу математического анализа (сокращенно «Анализ III»). «Анализ III» читается на третьем курсе механико-математического факультета МГУ, начиная с 1949 г.; инициатором введения такого курса и первым лектором был акад. А. Н. Колмогоров. «Анализ III» построен на материале прежних отдельных курсов теории функций действительного переменного, вариационного исчисления и интегральных уравнений и освещает весь этот материал с единой точки зрения, имеющей свои истоки в теории линейных пространств.

Предлагаемая книга построена по следующему плану. Первая глава излагает стандартный минимум по теории множеств. Вторая глава содержит элементы теории метрических и линейных нормированных пространств. В третьей главе развивается вариационное исчисление; оно представлено здесь как теория дифференцируемых функционалов в линейных нормированных пространствах. Четвертая глава посвящена теории интеграла Лебега; в основу изложения положена схема Ф. Рисса, как более экономная по сравнению со схемой Лебега и более быстро вводящая в суть дела. Пятая глава «Геометрия гильбертова пространства» содержит теорию ортогональных разложений и интегральных уравнений в геометрической трактовке. В шестой главе выясняются связи между интегрированием и дифференцированием и строится интеграл Стильтьеса. В последней, седьмой главе излагается теория преобразования Фурье; здесь дан несколько нетрадиционный материал, которому, ввиду его особого значения в математической физике, уже давно следует занять надлежащее место в курсе математического анализа. Для обеспечения различных вариантов лекционного курса материал последних трех глав несколько расширен.

Логическая зависимость между главами дается следующей схемой:



Следует заметить, что общая точка зрения функционального анализа, развиваемая в этом курсе, не является целью сама по себе, а только средством; основная же цель есть введение в классические области математического анализа.

В пределах каждой темы, вынужденные быть максимально краткими, мы ограничиваемся лишь выяснением наиболее важных вопросов, вполне сознавая, что читатель, может быть, в некоторых случаях останется неудовлетворенным. Вообще отбор материала, особенно для последних глав, представил для автора наибольшие затруднения. Некоторые интересные, но лежащие несколько в стороне вопросы были вынесены в задачи; они могут быть использованы в работе семинара.

От читателя требуется владение общим курсом математического анализа в объеме, например, «Краткого курса» А. Я. Хинчина. При этом условии книгой можно пользоваться и для самостоятельного изучения предмета. В конце книги предполагаются известными также элементарные свойства аналитических функций.

Автор весьма признателен М. Г. Крейну, О. А. Олейник и Д. А. Райкову, прочитавшим книгу в рукописи и своей критикой много способствовавшим ее улучшению. При втором издании текст заново просмотрен, дополнен и местами улучшен. Введено также некоторое число новых задач. Автор благодарит своих многочисленных корреспондентов из Ленинграда, Казани, Баку и других городов СССР за ценные критические замечания по первому изданию.

Автор

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА

§ 1. Множества, подмножества, включения

Когда рассматривают несколько каких-нибудь объектов («элементов»), употребляют такие слова, как «совокупность», «собрание», «множество». Например, можно говорить о множестве студентов в аудитории, о множестве песчинок на пляже, о множестве вершин многоугольника или о множестве его сторон. Указанные примеры обладают тем свойством, что в каждом из них соответствующее множество состоит *из определенного числа элементов* (которое, может быть, практически и нелегко установить). Такие множества мы будем называть *конечными*.

В математике часто приходится иметь дело с совокупностями, состоящими не из конечного числа объектов; простейшими примерами служат множество всех натуральных чисел 1, 2, 3, ... и множество всех точек отрезка. Такие множества мы будем называть *бесконечными*. К числу множеств мы причисляем и *пустое множество* — множество, не содержащее ни одного элемента.

Так, например, как видно на рис. 1, множество вещественных корней уравнения $\frac{\sin x}{x} = b$ бесконечно при $b = 0$ (оно состоит в этом случае из всех

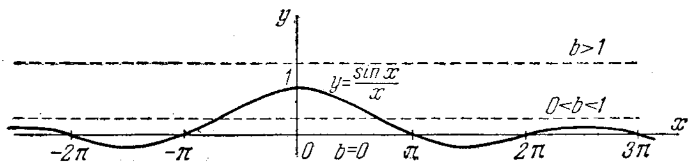


Рис. 1.

значений $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$), конечно, но не пусто при $0 < |b| \leqslant 1$ (можно подсчитать для каждого b, сколько именно корней оно имеет) и пусто при $|b| > 1$ (все значения функции $\frac{\sin x}{x}$ по модулю не превосходят 1, и уравнение $\frac{\sin x}{x} = b$ при $|b| > 1$ вовсе не имеет корней).

Как правило, мы будем обозначать множества большими буквами A, B, C, ..., а их элементы — малыми буквами. Запись $a \in A$ (или $A \ni a$) означает, что a есть элемент множества A; запись $a \bar{\in} A$ (или $A \bar{\ni} a$) означает, что a не есть элемент множества A. Запись $A \subset B$ (или $B \supset A$) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B; в этом случае множество A называют *подмножеством* множества B. Наиболее широким из подмножеств множества B является, очевидно, само множество B; наиболее узким — пустое множество. Любое из остальных подмножеств множества B фактически содержит элементы B, причем заведомо не все его элементы. Каждое из таких подмножеств называется *истинным* подмножеством. Знаки $\in$, $\ni$, $\subset$, $\supset$ называются *знаками включения*. Если имеют место включения $A \subset B$, $B \subset A$, то это означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B и, обратно, каждый элемент множества B является элементом множества A; таким образом, множества A и B состоят в данном случае из одних и тех же элементов и, значит, совпадают друг с другом. Этот факт записывается равенством $A = B$.

Существуют различные формы задания множеств. Наиболее простая состоит в указании всех элементов множества, например $A = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. Иная, часто употребляемая форма состоит в указании свойств элементов множества; например, $A = \{x : x^2 - 1 < 0\}$ есть множество всех x, для которых выполняется указанное после двоеточия неравенство.

§ 2. Операции над множествами

Мы рассмотрим здесь три простые операции, которые можно производить над множествами: *объединение*, *пересечение* и *дополнение*.

Опишем сначала операцию объединения множеств. Пусть даны множества A, B, C, ... Рассмотрим совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит *хотя бы к одному* из множеств A, B, C, ... Эта совокупность есть новое множество, которое и называют *объединением* множеств A, B, C, ...

Так, объединение множества $A = \{6, 7, 8, \ldots\}$ (всех натуральных чисел, больших чем 5) и множества $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$ (всех натуральных чисел, делящихся на 3) есть множество

$$S = \{3, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$$

(всех натуральных чисел, за исключением 1, 2, 4 и 5).

Введем теперь операцию пересечения множеств. *Пересечением* множеств A, B, C, ... называется совокупность элементов, входящих в *каждое* из указанных множеств.

Так, в предыдущем примере пересечением множеств

$$A=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots\},$$
$$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots\}$$

является множество

$$D=\{6,\ 9,\ 12,\ \ldots\}.$$

Может оказаться, что множества A, B, C, ... не имеют ни одного общего элемента. Тогда их пересечение есть пустое множество; в этом случае говорят, что множества A, B, C, ... *не пересекаются*. Например, три числовых множества

$$A=\{1,\ 2\},\quad B=\{2,\ 3\},\quad C=\{1,\ 3\}$$

не пересекаются (хотя каждые два из них имеют общие элементы).

Участвовать в объединении и пересечении могут как конечные, так и бесконечные совокупности множеств. Например, можно построить объединение множеств точек всех прямых на плоскости, проходящих через заданную точку O. Этим объединением будет, очевидно, множество всех точек плоскости. Пересечением указанных множеств будет множество, состоящее из единственной точки O.

Объединение S множеств A, B, C, ... называют иногда *суммой* и записывают в форме $S=A+B+C+\ldots$; пересечение D называют *произведением* и обозначают $D=ABC\ldots$. Некоторые основания для таких «арифметических» наименований имеются. Например, для любых трех множеств A, B, C справедливо равенство

$$(A+B)\,C=AC+BC.$$

Приведем доказательство этого равенства, как простой, но типичный образец рассуждений о равенствах множеств.

Как мы говорили, два множества считаются равными, если каждый элемент одного из них есть в то же время элемент другого. Таким образом, мы должны показать, что каждый элемент x, входящий в $(A+B)\,C$ (левая часть), входит в $AC+BC$ (правая часть) и, обратно, каждый элемент y, входящий в $AC+BC$, входит и в $(A+B)\,C$. Пусть сначала x принадлежит $(A+B)\,C$. Будучи элементом пересечения множеств $A+B$ и C, элемент x должен входить в каждое из них; таким образом, мы имеем

$$x\in A+B \text{ и } x\in C.$$

Так как x входит в объединение A и B, то x непременно входит в одно из слагаемых, например в A. Но включения $x\in A$, $x\in C$ влекут за собой $x\in AC$, откуда $x\in AC+BC$. Если же x входит не в A, а в B, то таким же образом получаем $x\in BC$, $x\in AC+BC$, что и требовалось. Обратно, если y принадлежит сумме $AC+BC$, то y принадлежит одному из слагаемых, например $y\in BC$. Но тогда $y\in B$ и $y\in C$; далее, из $y\in B$ следует $y\in A+B$ и окончательно $y\in(A+B)\,C$.

Случай $y \in AC$ разбирается аналогично, чем доказательство и завершается.

Следует, однако, заметить, что далеко не все арифметические правила переносятся на операции с множествами. Например, для множеств A, B, C имеют место формулы

$$A + A = A,$$
$$AA = A,$$
$$A + BC = (A + B)(A + C),$$

уже непохожие на обычные арифметические равенства. Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в справедливости этих формул.

Укажем еще на некоторые принятые обозначения для сумм и пересечений множеств. Для объединения множеств употребляются знаки $\sum$ и $\bigcup$, так что, например, запись

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \text{ или } S = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

означает объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$

Для пересечения множеств употребляются знаки $\prod$ и $\bigcap$, так что, например, записи

$$D = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \text{ или } D = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

означают пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$

Переходим теперь к операции дополнения.

Если множество B является подмножеством множества A, то совокупность всех элементов множества A, не принадлежащих B, называется *дополнением* множества B до множества A и обозначается CB или $A - B$[1]).

Отметим очевидную формулу

$$(A - B) + B = A.$$

Заметим, что для двух произвольных множеств A и B формула

$$(A + B) - B = A$$

вообще неверна; она верна только в случае, когда A и B не имеют общих элементов.

Из более сложных формул отметим следующую, которая часто будет далее встречаться:

$$C \sum_{\nu} B_\nu = \prod_{\nu} CB_\nu; \qquad (1)$$

[1]) C — начальная буква слова «complement» — дополнение (франц.).

прочитать ее можно так: *дополнение к объединению некоторых множеств есть пересечение их дополнений.*

Докажем справедливость этой формулы. Пусть $x \in C\sum_\nu B_\nu$; тогда $x \mathrel{\overline{\in}} \sum_\nu B_\nu$; это означает, что при любом ν $x \mathrel{\overline{\in}} B_\nu$, т. е. $x \in CB_\nu$; но тогда $x \in \prod_\nu CB_\nu$. Обратно, если $x \in \prod_\nu CB_\nu$, то $x \in CB_\nu$ при любом ν, т. е. $x \mathrel{\overline{\in}} B_\nu$ при любом ν; но тогда $x \mathrel{\overline{\in}} \sum_\nu B_\nu$, т. е. $x \in C\sum_\nu B_\nu$, что и требовалось.

Применяя к обеим частям равенства (1) еще раз операцию C и обозначая $A_\nu = CB_\nu$, мы получим формулу

$$\sum_\nu CA_\nu = C\prod_\nu A_\nu, \tag{2}$$

т. е. *дополнение к пересечению некоторых множеств есть объединение их дополнений.*

Приведенные результаты можно соединить в форме общего правила: *символ дополнения C можно менять местом со знаками* Σ и Π, *при этом один из этих знаков переходит в другой.*

§ 3. Эквивалентность множеств

Мы желаем теперь установить правила, по которым можно было бы сравнивать различные множества *по запасу* элементов в них.

Для конечных множеств здесь никакой проблемы нет: пересчитывая элементы каждого из двух конечных множеств A и B, мы можем непосредственно выяснить, какое из этих множеств более богато элементами по сравнению с другим. Естественно называть конечные множества A и B эквивалентными, если число элементов в них одинаково. Это определение эквивалентности, однако, непосредственно не переносится на случай бесконечных множеств. Мы сейчас придадим ему другую форму, в которой перенесение на бесконечные множества уже станет возможным. Для этого заметим, что при установлении эквивалентности или неэквивалентности конечных множеств A и B на самом деле нет необходимости в пересчете элементов того и другого множества. Например, если множество A есть множество слушателей в аудитории, а B есть множество стульев в этой же аудитории, то вместо того, чтобы пересчитывать отдельно слушателей и отдельно стулья, можно предложить каждому слушателю занять один из свободных стульев, и тогда станет сразу ясно, без всяких подсчетов, эквивалентны ли указанные множества или нет.

Процедура, которая производится в указанном примере, описываемая абстрактным образом, есть *установление соответствия между множествами A и B.*

Введем следующее важное определение. Если каждому элементу множества A каким-либо образом сопоставлен единственный элемент множества B, и при этом всякий элемент множества B оказывается сопоставленным одному и только одному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*. Множества A и B в этом случае и называются *эквивалентными*.

Это новое определение эквивалентности годится для любых множеств, не обязательно конечных; так, например, бесконечное множество A натуральных чисел 1, 2, ... эквивалентно множеству B целых отрицательных чисел -1, -2, ..., причем взаимно однозначное соответствие между множествами A и B устанавливается посредством правила: каждому числу $n \in A$ сопоставляется число $-n \in B$.

Точно так же множество натуральных чисел 1, 2, ... эквивалентно множеству всех четных положительных чисел 2, 4, ...; соответствие между ними осуществляется по правилу $n \longrightarrow 2n$.

На этом примере мы видим, что множество может быть эквивалентно своему истинному подмножеству; ситуация такого рода, разумеется, может осуществляться лишь для бесконечных множеств.

Соотношение эквивалентности обозначается знаком $\sim$. Легко видеть, что это соотношение транзитивно: если $A \sim B$, а $B \sim C$, то $A \sim C$. Если два множества эквивалентны, то говорят также, что они «равномощны», «имеют одну и ту же мощность».

Множество точек отрезка $[0, 1]$ эквивалентно множеству точек любого другого отрезка $[\gamma, \delta]$; соответствие осуществляется, например, с помощью центрального проектирования, как показано на рис. 2. Точно так же эквивалентны множества точек двух различных интервалов [1]).

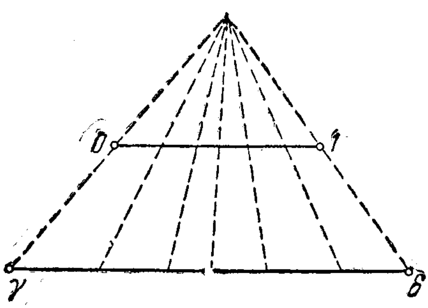


Рис. 2.

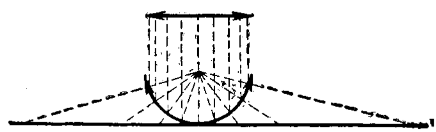


Рис. 3.

Множество точек интервала эквивалентно множеству точек прямой (рис. 3).

[1]) *Отрезок* $[\alpha, \beta]$ определяется неравенствами $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ (концы включены!), *интервал* (α, β) — неравенствами $\alpha < x < \beta$ (концы не включены!).

Не так просто ответить на вопрос, эквивалентно ли множество точек отрезка множеству точек интервала.

Имеется следующая общая теорема, которая, в частности, содержит положительный ответ на этот вопрос:

Теорема (Ф. Бернштейн, 1898). *Если множество A эквивалентно части множества B, а множество B эквивалентно части множества A, то множества A и B эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через B_1 часть множества B, эквивалентную множеству A, и через A_1 часть множества A, эквивалентную множеству B. Во взаимно однозначном соответствии $B \sim A_1$ элементы множества B_1 отвечают в A_1 некоторым элементам, совокупность которых мы обозначим через A_2. Мы имеем цепочку включений

$$A \supset A_1 \supset A_2,$$

причем $A_2 \sim A$, так как $A_2 \sim B_1$, $B_1 \sim A$. Если мы докажем, что $A \sim A_1$, то теорема будет доказана (так как $A_1 \sim B$). При взаимно однозначном отображении A на A_2 множество $A_1 \subset A$ переходит в некоторое множество $A_3 \subset A_2$, множество $A_2 \subset A_1$ переходит в некоторое множество $A_4 \subset A_3$, множество $A_3 \subset A_2$ переходит в некоторое множество $A_5 \subset A_4$ и т. д. Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\text{множество } A - A_1 \text{ переходит в } A_2 - A_3,\\
&\text{множество } A_1 - A_2 \text{ переходит в } A_3 - A_4,\\
&\text{множество } A_2 - A_3 \text{ переходит в } A_4 - A_5
\end{aligned}$$

и т. д.

Отсюда следует, что множества

$$A - A_1,\ A_2 - A_3,\ A_4 - A_5,\ A_6 - A_7 \text{ и т. д.}$$

попарно эквивалентны; объединение множеств без общих точек

$$(A - A_1) + (A_2 - A_3) + (A_4 - A_5) + \ldots$$

эквивалентно объединению

$$(A_2 - A_3) + (A_4 - A_5) + (A_6 - A_7) + \ldots$$

Обозначим через D пересечение множеств A, A_1, A_2, ... Имеют место следующие равенства:

$$A = D + (A - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \ldots \tag{1}$$

$$A_1 = D + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + \ldots \tag{2}$$

Докажем первое равенство. Пусть $a \in A$; покажем, что a входит в правую часть равенства (1). В самом деле, если a входит в каждое из множеств A_1, $A_2, \ldots$, то $a \in D$, и утверждение доказано. Если же a не принадлежит какому-либо из A_n, то пусть A_k — первое из таких множеств, так что заведомо $a \in A_{k-1}$; но тогда $a \in A_k - A_{k-1}$ и, следовательно, входит в правую часть (1). Обратно, если a входит в правую часть (1), то, очевидно, $a \in A$, так как каждое из слагаемых правой части есть подмножество множества A.

Точно так же доказывается равенство (2).

Равенства (1) и (2) можно записать в виде

$$A = [D + (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \ldots] + [(A - A_1) + (A_2 - A_3) + \ldots], \tag{3}$$

$$A_1 = [D + (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \ldots] + [(A_2 - A_3) + (A_4 - A_5) + \ldots]. \tag{4}$$

В правых частях обоих равенств в первой квадратной скобке стоит одно и то же множество, а во второй квадратной скобке — соответственно множества, эквивалентность которых была доказана выше. Теперь легко установить эквивалентность множеств A и A_1. Именно, поставим в соответствие каждой точке множества $D+(A_1-A_2)+(A_3-A_4)+\ldots\subset A$ эту же точку в множестве A_1; далее, каждой точке a множества $(A-A_1)+(A_2-A_3)+\ldots$ сопоставим ту точку множества $(A_2-A_3)+\ldots$, которая отвечает точке a в силу установленной выше эквивалентности этих множеств. Равенства (3) и (4) показывают, что при этом сопоставлении исчерпываются все элементы множеств A и A_1. Таким образом, между множествами A и A_1 существует взаимно однозначное соответствие, что и требуется.

Используя теорему Бернштейна, легко проверить, что множества точек отрезка и интервала равномощны. Действительно, заданный отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит подмножество, эквивалентное множеству точек заданного интервала (γ, δ) (любой внутренний к $[\alpha, \beta]$ интервал), а заданный интервал (γ, δ) содержит подмножество, эквивалентное множеству точек заданного отрезка $[\alpha, \beta]$ (любой внутренний отрезок). Применяя теорему Бернштейна, получаем, что $[\alpha, \beta]\sim(\gamma, \delta)$, что и требовалось.

§ 4. Счетные множества

Определение. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, 1, 2, ..., называют *счетным множеством*.

Можно сказать иначе: множество счетно, если все его элементы можно занумеровать всеми натуральными числами. Приведем несколько простых теорем о счетных множествах.

1. *Всякое бесконечное подмножество B счетного множества A также счетно.* Действительно, элементы B можно заново перенумеровать по порядку их следования в A (причем, поскольку B бесконечно, придется для нумерации использовать все натуральные числа).

2. *Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай двух множеств. Пусть имеются счетные множества $A=(a_1, a_2, \ldots)$ и $B=(b_1, b_2, \ldots)$. Выпишем в одну строку все элементы обоих этих множеств по следующему правилу:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots$$

Теперь все эти элементы можно заново перенумеровать по порядку следования в строке. Элемент, встречающийся два раза (т. е. такой, который входит и в A, и в B), естественно, приобретает номер в первый раз, а во второй раз пропускается. В результате каждый элемент объединения A и B получит свой номер, что и требуется.

Так, множество всех целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ счетно, как объединение двух счетных множеств $1, 2, 3, \ldots$ и $0, -1, -2, \ldots$

Совершенно аналогичным образом теорема доказывается в случае трех, четырех или вообще любого конечного числа счетных множеств. В случае счетной совокупности счетных множеств, например для совокупности множеств

$$\begin{gathered} A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n},\ \ldots\},\\ A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n},\ \ldots\},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_k=\{a_{k1},\ a_{k2},\ \ldots,\ a_{kn},\ \ldots\},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

изменение будет только в том, что правило для записывания всех элементов всех этих множеств в одну строку придется применить несколько более хитрое, например:

$$a_{11};\ a_{21},\ a_{22},\ a_{12};\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{23},\ a_{13};\ a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44},\ a_{34},\ a_{24},\ a_{14};\ \ldots$$

в остальном же доказательство не изменяется.

3. *Множество всех рациональных чисел* (*т. е. чисел вида* $\frac{p}{q}$, *где* p *и* q — *целые числа*) *счетно.*

Действительно, множество всех рациональных чисел есть объединение следующих счетных множеств:

1) множества A_1 всех целых чисел $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$

2) множества A_2 всех дробей вида $\frac{n}{2}$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$

3) множества A_3 всех дробей вида $\frac{n}{3}$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$

. . . .

k) множества A_k всех дробей вида $\frac{n}{k}$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

. . . .

Множества $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ \ldots$ составляют счетную совокупность множеств; так как каждое из них счетно, то в силу п. 2 и их объединение счетно, что и утверждалось.

4. *Если* $A=(a_1,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots)$ *и* $B=(b_1,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots)$ — *счетные множества, то множество всех пар* $(a_k,\ b_n)$ $(k,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$ *также является счетным.*

Действительно, множество всех этих пар распадается в счетную совокупность счетных множеств

$$\begin{gathered} A_1=\{(a_1,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ \ldots,\ (a_1,\ b_n),\ \ldots\},\\ A_2=\{(a_2,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots,\ (a_2,\ b_n),\ \ldots\},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_k=\{(a_k,\ b_1),\ (a_k,\ b_2),\ \ldots,\ (a_k,\ b_n),\ \ldots\}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

и в силу п. 2 является счетным множеством.

Этому примеру можно придать геометрический смысл: паре (a_k, b_n) отвечает точка на плоскости с координатами a_k, b_n; мы видим, в частности, что множество всех точек плоскости, имеющих обе рациональные координаты, счетно.

5. *Множество всех многочленов* $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ (*любых степеней*) *с рациональными коэффициентами* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *счетно*. Множество всех многочленов указанного вида есть объединение счетной совокупности множеств A_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, где A_n означает множество многочленов степени $\leqslant n$. Поэтому, имея в виду теорему п. 2, достаточно показать, что каждое из множеств A_n счетно. При $n=0$ речь идет о счетности множества самих рациональных чисел, которая установлена в п. 3. Далее будем действовать по индукции: предположим, что доказана счетность множества A_n, и докажем счетность множества A_{n+1}.

Каждый элемент множества A_{n+1} можно записать в виде

$$Q(x)+a_{n+1}x^{n+1},$$

где $Q(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$ с рациональными коэффициентами, т. е. элемент множества A_n, и a_{n+1} — рациональное число.

Множество многочленов $Q(x)$ по предположению счетно, и множество чисел a_{n+1} также счетно. Таким образом, каждому элементу множества A_{n+1} можно сопоставить пару $(Q(x), a_{n+1})$, каждая из составляющих которой пробегает счетное множество значений. В силу п. 4 множество A_{n+1} также счетно, что и требовалось.

Замечание. Разумеется, в данном случае несущественно, что мы рассматривали именно многочлены, т. е. линейные комбинации степеней x. Можно было бы рассматривать линейные комбинации, например, тригонометрических или иных функций. Можно вообще вместо многочлена $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ с рациональными коэффициентами рассматривать комплекс $(a_0; a_1, \ldots, a_n)$, каждая координата которого — элемент некоторого счетного множества; приведенное выше доказательство по сути дела показывает, что множество всех таких комплексов также есть счетное множество.

6. *Множество всех алгебраических чисел* (*т. е. корней многочленов с рациональными коэффициентами*) *счетно*.

Согласно п. 5 все многочлены с рациональными коэффициентами мы можем занумеровать натуральными числами, так что эти многочлены будут образовывать последовательность

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

Но каждый из указанных многочленов имеет некоторое конечное число корней. Выписывая в одну строку сначала все корни многочлена $P_1(x)$, затем все корни многочлена $P_2(x)$ и т. д., мы получаем возможность занумеровать и все алгебраические числа, что и требовалось.

Задачи. 1. Доказать, что указанные ниже множества являются счетными:

а) Множество всех отрезков $a \leqslant x \leqslant b$ с рациональными концами a и b.

б) Множество всех конечно-звенных ломаных на плоскости с вершинами в рациональных точках.

2. Доказать, что следующие множества или конечны, или счетны:

а) Множество взаимно не пересекающихся интервалов на оси.

б) Множество замкнутых самопересекающихся линий в форме восьмерки (на плоскости), не имеющих попарно общих точек.

в) Множество точек разрыва монотонной функции.

г) Множество M вещественных положительных чисел при условии, что все конечные суммы $\sum x_j$, $x_j \in M$, ограничены фиксированным числом A.

Указания. а) В каждом из имеющихся интервалов можно выбрать по рациональной точке. б) Внутри каждой из двух половин восьмерки выбрать по точке с рациональными координатами. в) Интервалы разрыва $(f(c-0), f(c+0))$ монотонной функции $f(x)$ не пересекаются. г) Вне любого отрезка $[0, \varepsilon]$ может лежать лишь конечное число точек M.

Замечание. В. В. Грушин и В. П. Паламодов доказали аналогичные утверждения для множества непересекающихся фигур на плоскости, имеющих тройные точки (как у буквы Т), а также для множества непересекающихся фигур в пространстве, содержащих особые точки типа «кнопки» или участки типа «листа Мёбиуса».

3. Разложить множество натуральных чисел 1, 2, ... в счетную совокупность попарно не пересекающихся счетных множеств.

4. (Задача-шутка). I. Как-то в гости к математику X пришли его друзья братья N. В передней они сняли шляпы и повесили на вешалку. Когда они собрались уходить и стали надевать шляпы, оказалось, к величайшему конфузу хозяина, что одной шляпы не хватает. В переднюю за это время никто не заходил.

II. Когда братья N снова пришли в гости к X (в шляпах), они опять повесили шляпы на вешалку в переднюю. Когда они стали, уходя, надевать шляпы, одна шляпа оказалась лишней. Хозяин и гости твердо помнили, что до их прихода на вешалке не было ни одной шляпы.

III. В следующий раз гости надели шляпы и ушли, а хозяин, проводив гостей на улицу и вернувшись, обнаружил, что шляп на вешалке оказалось столько же, сколько было до ухода гостей.

IV. Наконец, в четвертый раз гости пришли без шляп, а уходя, воспользовались шляпами, оставшимися от прошлого посещения. Проводив гостей, хозяин опять увидел шляпы на вешалке, — столько же, сколько было до прихода гостей.

Как объяснить все эти парадоксальные события?

См. указание на стр. 23.

§ 5. Множества мощности континуума

Оказывается, что существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать натуральными числами. Такие множества называются *несчетными*. Типичным примером несчетного множества является *континуум* — множество всех точек какого-либо отрезка.

Теорема 1 (Г. Кантор, 1874). *Множество всех точек отрезка* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *несчетно.*

Доказательство. Допустим, что, напротив, множество всех точек отрезка $[0, 1]$ счетно и все их можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Имея эту последовательность, построим следующим образом последовательность вложенных друг в друга отрезков.

Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части. Где бы ни находилась точка x_1, она не может принадлежать одновременно всем трем отрезкам $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, и среди них можно указать такой, который не содержит точки x_1 (ни внутри, ни на границе); этот отрезок мы обозначим через Δ_1. Далее, обозначим через Δ_2 ту из трех равных частей отрезка Δ_1, на которой не лежит точка x_2. Когда таким образом будут построены отрезки $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n$, мы обозначим через Δ_{n+1} ту из трех равных третей отрезка Δ_n, на которой не лежит точка x_{n+1}, и т. д. Бесконечная последовательность отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ в силу известной теоремы анализа имеет общую точку ξ. Эта точка ξ принадлежит каждому из отрезков Δ_n и, следовательно, не может совпадать ни с одной из точек x_n. Но это показывает, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не может исчерпывать всех точек отрезка $[0, 1]$, в противовес первоначальному предположению. Теорема доказана.

Мы видели, что все рациональные числа отрезка $[0, 1]$ составляют счетное множество. Остальные числа отрезка называются иррациональными; таковы, например, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{\pi}{4}$ и т. д. Мы видим теперь, что иррациональных чисел «значительно больше», чем рациональных: точнее говоря, иррациональные числа образуют заведомо несчетное множество (иначе, если бы множество иррациональных чисел было счетным, то было бы счетным и множество всех чисел $0 \leqslant x \leqslant 1$, как объединение двух счетных множеств). Более того, так как алгебраические иррациональные числа (корни многочленов с рациональными коэффициентами) образуют также счетное множество (§ 4), то несчетное множество составляют числа, не являющиеся корнями многочленов с рациональными коэффициентами,— трансцендентные числа.

Между прочим, приведенное рассуждение доказывает и само существование трансцендентных чисел — нисколько не очевидное заранее.

Всякое множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка $[0, 1]$, *называется множеством мощности континуума.*

Мы видели, что множества точек любого отрезка $[a, b]$, любого интервала (α, β) и, наконец, всей прямой $-\infty < x < \infty$ эквивалентны множеству точек отрезка $[0, 1]$ и, следовательно, все они имеют мощность континуума. Следующие теоремы позволяют указать новые широкие классы множеств мощности континуума.

Первая из теорем относится к любому бесконечному множеству:

Теорема 2. *Если к бесконечному множеству A добавить конечное или счетное множество B, то в сумме получится множество, эквивалентное исходному множеству A.*

Для доказательства выберем в множестве A произвольным образом счетное подмножество C, и пусть $D=A-C$. Имеем

$$A=D+C,$$
$$A+B=D+C+B.$$

Множества C и B счетны, поэтому и объединение $C+B$ — также счетное множество; существует, следовательно, взаимно однозначное отображение C на $C+B$. Используя это отображение (соответствие) и, кроме того, приведя в соответствие точкам множества D эти же самые точки, получим искомое взаимно однозначное соответствие между множествами A и $A+B$[1]).

Следствие 1. *Если из бесконечного множества Q выбросить конечное или счетное множество B, то остаток $A=Q-B$, если он представляет собой снова бесконечное множество, эквивалентен множеству Q.*

Это вытекает из равенства $Q=A+B$ в результате применения к множеству A только что доказанной теоремы.

Следствие 2. *Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума; такую же мощность имеет и множество трансцендентных чисел.*

Прежде чем переходить к следующим теоремам, рассмотрим так называемую двоичную запись вещественных чисел.

Ограничимся вещественными числами, принадлежащими отрезку $[0, 1]$. Точка $\frac{1}{2}$ делит этот отрезок на две равные части, которые мы обозначим через $\Delta_0=\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\Delta_1=\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Отрезок Δ_0 делится на две равные части точкой $\frac{1}{4}$; мы обозначим их через $\Delta_{00}=\left[0, \frac{1}{4}\right]$ и $\Delta_{01}=\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Аналогично точка $\frac{3}{4}$ делит пополам отрезок Δ_1; положим $\Delta_{10}=\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $\Delta_{11}=\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Продолжая процесс деления пополам, получим восемь отрезков Δ_{000}, Δ_{001}, ..., Δ_{111} длины $\frac{1}{8}$, шестнадцать отрезков Δ_{0000}, Δ_{0001}, ..., Δ_{1111} длины $\frac{1}{16}$ и т. д. Граничные точки всех этих отрезков имеют вид $\frac{p}{2^q}$, где p и q — нату-

---

[1]) Эта теорема, между прочим, позволяет сделать вывод об эквивалентности отрезка и интервала без применения теоремы Бернштейна.

ральные числа; эти точки — образующие, очевидно, счетное множество, — называются двоично-рациональными. Остальные точки отрезка $[0, 1]$ называются двоично-иррациональными; их множество имеет мощность континуума. Совокупность всех отрезков построенной системы обозначим через Δ.

Для каждой точки $\xi \in [0, 1]$ можно указать последовательность отрезков системы Δ, вложенных друг в друга, имеющих длины, соответственно равные $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$, и содержащих точку ξ. Действительно, точка ξ принадлежит одному из отрезков Δ_0, Δ_1; если она принадлежит, например, Δ_0, то она принадлежит Δ_{00} или Δ_{01} и т. д. Таким образом, для всякой точки ξ получаем:

$$\Delta_{\varepsilon_1} \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \supset \ldots \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} \supset \ldots \ni \xi \tag{1}$$

(числа ε_n суть нули или единицы). Имея систему включений (1), мы можем сопоставить точке ξ последовательность из нулей и единиц:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n \ldots \tag{2}$$

Символ (2) определяет *двоичную запись* вещественного числа ξ.

По последовательности (2) само число ξ однозначно восстанавливается:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}; \tag{3}$$

действительно, частичные суммы ряда (3) суть левые концы промежутков, участвующих во включениях (1); очевидно, что эти левые концы образуют монотонную (неубывающую) последовательность, сходящуюся к значению ξ.

Более того, можно с самого начала взять произвольную последовательность (2) из нулей и единиц и построить число ξ по формуле (3). Легко видеть, что это число ξ будет пересечением отрезков соответствующей системы (1). Таким образом, в наше построение вовлечены все возможные последовательности из нулей и единиц.

Если точка ξ не является двоично-рациональной, то все отрезки, участвующие во включениях (1), определяются ею однозначно. Если же ξ двоично-рациональна, то она является общим концом двух соседних равных отрезков системы Δ и на некотором шаге нашего процесса можно будет по произволу выбрать любой из них. Если мы возьмем правый, то все последующие отрезки придется брать левыми и все последующие числа в символе (2) будут равны единице. Если же мы возьмем левый отрезок, то все последующие отрезки придется брать правыми и все соответствующие числа в символе (2) будут равны нулю. Обратно, если в символе (2) все числа, начиная с некоторого места, нули или же единицы, то число ξ двоично-рационально, что вытекает непосредственно из формулы (3).

Итак, множество двоично-иррациональных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей из нулей и единиц, содержащих бесконечное число как нулей, так и единиц; множество двоично-рациональных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей, у которых все элементы, начиная с некоторого номера, нули, а также с множеством последовательностей, у которых все элементы, начиная с некоторого номера, единицы.

Теперь мы можем переходить к очередной теореме.

Теорема 3. *Множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Рассматриваемое множество есть объединение трех множеств: множества последовательностей, содержащих бесконечное число как нулей, так и единиц, множества последовательностей, содержащих лишь конечное число нулей, и множества последовательностей, содержащих лишь конечное число единиц. По доказанному первое из них эквивалентно множеству всех двоично-иррациональных чисел и имеет тем самым мощность континуума; два других множества, эквивалентные множеству двоично-рациональных чисел, счетны. В силу теоремы 1 само множество всех последовательностей из нулей и единиц имеет мощность континуума, что и требуется.

Теорема 4. *Множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел*

$$(0<)\, k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots \tag{4}$$

имеет мощность континуума.

Доказательство. Каждой последовательности (4) можно сопоставить последовательность нулей и единиц, в которой единицы стоят на местах с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ и нули — на остальных местах. Очевидно, что такое сопоставление приводит к взаимно однозначному соответствию между множеством всех возрастающих последовательностей натуральных чисел и всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц. По доказанному второе множество имеет мощность континуума; вместе с ним и первое множество имеет мощность континуума, что и требовалось.

Теорема 5. *Множество всех последовательностей натуральных чисел*

$$m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots \tag{5}$$

(не обязательно возрастающих) *имеет мощность континуума.*

Доказательство. Каждой последовательности натуральных чисел (5) можно сопоставить возрастающую последовательность

$$k_1 = m_1,\ k_2 = m_1 + m_2,\ \ldots,\ k_n = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,\ \ldots$$

Очевидно, что такое сопоставление приводит к взаимно однозначному соответствию между множеством всех последовательностей натуральных чисел и множеством возрастающих последовательностей. Второе множество, как мы показали, имеет мощность континуума; следовательно, и первое имеет мощность континуума.

Теорема 6. *Множество Z всех последовательностей вещественных чисел*

$$\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots)$$

имеет мощность континуума.

Доказательство. В силу теоремы 5 каждому значению ξ_n можно сопоставить последовательность натуральных чисел

$$\xi_n \to (p_{n1},\ p_{n2},\ \ldots,\ p_{nk},\ \ldots)$$

и, следовательно, символу ξ можно сопоставить таблицу

$$\begin{array}{l} p_{11}\, p_{12}\ \ldots\ p_{1k}\ \ldots \\ p_{21}\, p_{22}\ \ldots\ p_{2k}\ \ldots \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ p_{n1}\, p_{n2}\ \ldots\ p_{nk}\ \ldots \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \end{array}$$

Но все элементы этой таблицы можно записать в простую последовательность (ср. § 4):

$$p_{11};\ p_{21},\ p_{22},\ p_{12};\ p_{31},\ p_{32},\ p_{33},\ p_{23},\ p_{13};$$
$$p_{41},\ p_{42},\ p_{43},\ p_{44},\ p_{34},\ p_{24},\ p_{14},\ \ldots$$

Таким образом, символу ξ сопоставляется последовательность натуральных чисел. Очевидно, что и, обратно, каждая последовательность натуральных чисел может быть получена этим путем из некоторого символа ξ. Мы видим, что совокупность всех символов ξ эквивалентна совокупности всех последовательностей натуральных чисел и, следовательно, по теореме 5 имеет мощность континуума.

Доказательство аналогичной теоремы проходит — с соответствующими упрощениями — и для случая, когда символ ξ определяется только конечным числом координат, а не счетным:

$$\xi = (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n).$$

Если считать, что каждая из координат $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ пробегает вещественную ось, то мы получаем вывод, что *множество всех точек n-мерного пространства при любом n имеет мощность континуума.*

В частности, *множество всех комплексных чисел* (или, что то же, *множество точек плоскости*) *имеет мощность континуума.*

Замечание. Очевидно, нет никакой надобности считать каждую координату ξ_n именно вещественным числом: теорема полностью сохраняется, если координата ξ_n пробегает любое множество мощности континуума.

Теорема 7. *Множество $C(a, b)$ всех непрерывных функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность всех рациональных точек отрезка $[a, b]$. Поставим в соответствие каждой непрерывной функции $f(x)$ последовательность вещественных чисел — значений функции $f(x)$ в точках $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$:

$$f(x) \sim \{f(r_1), \quad f(r_2), \quad \ldots, \; f(r_n), \quad \ldots\} = \{f(r_n)\}.$$

При этом двум различным функциям $f(x)$ и $g(x)$ будут отвечать различные последовательности $\{f(r_n)\}$ и $\{g(r_n)\}$, поскольку две непрерывные функции, совпадающие во всех рациональных точках, совпадают и всюду. Таким образом, множество $C(a, b)$ всех непрерывных функций можно считать эквивалентным некоторой части множества всех числовых последовательностей. С другой стороны, множество всех числовых последовательностей имеет по теореме 5 мощность континуума и тем самым эквивалентно части множества $C(a, b)$, состоящей из постоянных. В силу теоремы Бернштейна (§ 3) множество $C(a, b)$ эквивалентно множеству всех числовых последовательностей и имеет вместе с ним мощность континуума.

Задачи. 1. Доказать, что множество всех непрерывных функций $f(x, y)$, определенных в квадрате $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, имеет мощность континуума.

2. Функция $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется функцией первого класса Бэра, если она есть предел последовательности непрерывных функций:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad f_n(x) \in C(a, b),$$

сходящейся в каждой точке отрезка. Доказать, что мощность множества всех функций первого класса Бэра равна мощности континуума.

Указание к задаче 4 § 4. Множество братьев N — счетное множество.

§ 6. Множества высших мощностей

Если множества A и B неэквивалентны, но одно из них, например A, эквивалентно некоторому подмножеству множества B, говорят, что множество B имеет *бóльшую мощность*, чем множество A. Так, счетное множество имеет бóльшую мощность, чем любое конечное, континуум — бóльшую мощность, чем счетное множество.

Существуют множества более высокой мощности, чем мощность континуума. Более того, если имеется множество некоторой мощности, всегда можно построить множество большей мощности, пользуясь следующей теоремой:

Теорема (Г. Кантор, 1878). *Пусть дано множество A, и B есть совокупность всех подмножеств множества A. Утверждается, что мощность множества B заведомо больше мощности множества A.*

Доказательство. Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, иными словами, что каждому *элементу x* множества A взаимно однозначно сопоставлено некоторое *подмножество A_x* этого множества. Элемент x может принадлежать подмножеству A_x или не принадлежать; первая возможность осуществляется, например, для подмножества A_x, совпадающего со всем множеством A, вторая — для пустого подмножества. Элементы первого типа назовем «хорошими», элементы второго типа — «плохими». Соберем все плохие элементы x, т. е. не принадлежащие соответствующим подмножествам A_x, и пусть Z означает их совокупность. В силу взаимно однозначного соответствия между подмножествами множества A и его элементами подмножеству Z отвечает некоторый элемент ζ. Исследуем две возможности: ζ или хороший элемент, или плохой. Если ζ — хороший элемент, то он принадлежит соответствующему подмножеству, т. е. $\zeta \in Z$. Но Z по построению состоит из плохих элементов, так что первая возможность исключается. Если ζ — плохой элемент, то он не принадлежит соответствующему подмножеству: $\zeta \overline{\in} Z$. Но Z по построению содержит *все* плохие элементы; поэтому и вторая возможность исключается.

Мы получили противоречие: ζ не может быть ни хорошим, ни плохим элементом. Следовательно, исходная посылка — эквивалентность множества A и множества B всех подмножеств A — неверна, эти множества не эквивалентны. Так как само множество A, очевидно, эквивалентно части множества B (состоящей из одноэлементных подмножеств), то мы делаем вывод, что множество B имеет бóльшую мощность, чем множество A. Теорема доказана.

Примеры. 1. Легко подсчитать, что конечное множество, содержащее n элементов, имеет ровно 2^n различных подмножеств (включая пустое).

2. Множество всех подмножеств счетного множества совпадает, очевидно, с множеством всех последовательностей различных натуральных чисел и имеет, следовательно, мощность континуума.

3. Множество всех подмножеств континуума можно реализовать как некоторое множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Именно подмножеству A этого отрезка сопоставляется функция $f_A(x)$, равная 1 при $x \in A$ и 0 при $x \overline{\in} A$ (характеристическая функция множества A). Множество всех таких функций имеет, следовательно, мощность бóльшую, чем мощность континуума. И подавно, множество *всех* функций на отрезке $[a, b]$ имеет мощность выше мощности континуума. Напомним, что множество непрерывных функций на отрезке имеет мощность континуума (§ 5, теорема 7).

Заключительное замечание. Основные идеи теории множеств были сформулированы впервые в конце XIX века в работах Георга Кантора (нем. математик, 1845—1918) и с тех пор проникли в самые разные области математики, в значительной мере завершив формирование ее языка. Для более подробного ознакомления можно рекомендовать книги Ф. Хаусдорфа «Теория множеств» (ОНТИ, Москва — Ленинград, 1937) и A. Fraenkel'я «Foundation of Set Theory» (Amsterdam, 1958).

ГЛАВА II

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и примеры метрических пространств. Изометрия

Одним из важнейших понятий в математическом анализе является понятие предельного перехода; оно лежит в основе таких фундаментальных для анализа операций, как дифференцирование и интегрирование.

По определению последовательность вещественных чисел x_n имеет пределом число x, если расстояние между x_n и x, т. е. модуль разности $x - x_n$, стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, понятие предельного перехода основано на возможности измерять расстояние между точками вещественной оси. Точно так же понятие предельного перехода на плоскости или в многомерном пространстве основано на возможности измерять расстояние между точками в соответствующих множествах. Мы введем далее понятие метрического пространства; так будет названа совокупность объектов, для которых указаны взаимные «расстояния», удовлетворяющие некоторым естественным условиям. Наличие расстояний позволит ввести и изучить свойства предельного перехода «в чистом виде», т. е. независимо от природы элементов, участвующих в этом построении.

1. Определение. Произвольное множество M некоторых элементов («точек») $x, y, \ldots$ называется *метрическим пространством*, если: 1) имеется правило, которое позволяет для любых двух точек x, y построить число $\rho(x, y)$ («расстояние от x до y»), 2) это правило удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам):

1) $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ для любых x и y (симметрия расстояния);
2) $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$; $\rho(x, x) = 0$ для любого x;
3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых x, y, z (неравенство треугольника).

Примеры. *1.* Любое множество M на вещественной прямой R_1 является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$.

Точно так же множество M в плоскости R_2 или в трехмерном пространстве R_3 является метрическим пространством, если считать расстоянием между точками (для определенности — в R_3) $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ обычное геометрическое расстояние

$$\rho(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2}.$$

Неравенство треугольника (аксиома 3) здесь есть обычное геометрическое неравенство: третья сторона треугольника не больше суммы двух других сторон.

Аналогично в n-мерном пространстве R_n расстояние между точками $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ можно определить формулой

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2}, \tag{1}$$

поэтому любое множество M в n-мерном пространстве является метрическим пространством с расстоянием (1).

Выполнение аксиом 1 и 2 здесь очевидно. Для проверки выполнения аксиомы 3 применим неравенство Коши[1])

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2},$$

которое имеет место для любых чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$.

Полагая в этом неравенстве $a_j=\xi_j-\eta_j$, $b_j=\eta_j-\zeta_j$, мы находим:

$$\rho^2(x, z)=\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\zeta_j)^2=\sum_{j=1}^{n}[(\xi_j-\eta_j)+(\eta_j-\zeta_j)]^2=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2+2\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)(\eta_j-\zeta_j)+\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2+2\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2=\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-\zeta_j)^2}\right)^2=$$
$$=[\rho(x, y)+\rho(y, z)]^2,$$

что и требуется.

---

[1]) Приведем доказательство этого неравенства. Обозначим $A=\sum a_j^2$, $B=\sum b_j^2$, $C=\sum a_j b_j$; нам нужно доказать, что

$$C^2 \leqslant AB. \tag{*}$$

Это неравенство будет выполнено, если многочлен второй степени

$$P(\lambda)=A\lambda^2+2C\lambda+B$$

2. В задачах анализа, как правило, встречаются пространства, элементами которых являются функции (функциональные пространства).

Введение той или иной метрики в функциональных пространствах зависит от требований задачи. Когда имеется расстояние, то ясно, что близкими надо считать те элементы, расстояние между которыми мало. В анализе по большей части приходится начинать с обратного: по условиям задачи видно, какие элементы естественно считать близкими и соответственно этому каким образом следует вводить определение расстояния.

Например, часто бывает естественным считать непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ близкими, если мала величина $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$. Эту величину можно принять за определение расстояния между функциями $x(t)$ и $y(t)$; оно, очевидно, удовлетворяет аксиомам 1—3, и поэтому любое множество M непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, с введением расстояния по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{2}$$

становится метрическим пространством.

3. В некоторых случаях (например, в вариационном исчислении), когда речь идет о функциях, имеющих производные до порядка k, естественно считать близкими такие элементы $x(t)$ и $y(t)$, у которых при всех значениях t близки не только значения самих функций, но и значения их производных до порядка k. Этому отвечает формула расстояния

$$\rho(x, y) = \\ = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{ |x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \ldots, |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)| \}. \tag{3}$$

Если взять некоторое множество функций $x(t)$, имеющих непрерывные производные до порядка k, то с введением расстояния по формуле (3) оно становится, очевидно, метрическим пространством.

4. В других случаях (например, в теории интегральных уравнений) естественно считать функции $x(t)$ и $y(t)$ близкими, если они близки в интегральном смысле, т. е. если мала величина

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt.$$

не имеет различных вещественных корней. Но

$$P(\lambda) = \sum a_j^2 \lambda^2 + 2 \sum a_j b_j \lambda + \sum b_j^2 = \sum (a_j \lambda + b_j)^2,$$

так что многочлен $P(\lambda)$ может иметь не более одного вещественного корня $\lambda = -\frac{b_1}{a_1} = \ldots = -\frac{b_n}{a_n}$. Таким образом, неравенство (*) справедливо.

Здесь естественно ввести расстояние по формуле

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt. \tag{4}$$

Очевидно, что аксиомы метрического пространства здесь также удовлетворяются.

5. Иногда бывает нужно определять близость между функциями с помощью интеграла не от первой, а от какой-либо другой, например p-й, степени разности между этими функциями; соответствующее расстояние может быть задано формулой

$$\rho^p(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt. \tag{5}$$

При $p \geqslant 1$ это определение также удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Правда, проверка выполнения аксиомы 3 (за исключением простых случаев $p = 1$ и $p = 2$) становится более сложной; мы ее приводить здесь не будем[1].

Таким образом, определение метрического пространства представляется достаточно гибким, чтобы удовлетворить самым разнообразным конкретным запросам математического анализа. В дальнейшем на материале всего нашего курса мы убедимся в справедливости этого соображения.

Метрическое пространство *всех* непрерывных функций на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ с расстоянием, определенным по формуле (2), обозначается через $C(a, b)$. Метрическое пространство *всех* непрерывных функций на $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до порядка k, с расстоянием, определенным по формуле (3), обозначается через $D_k(a, b)$; можно положить $D_0(a, b) \equiv C(a, b)$. Метрическое пространство всех непрерывных функций на $[a, b]$ с расстоянием (5) обозначается через $C_p(a, b)$.

2. Неравенство, выраженное аксиомой 3, можно обобщить на случай любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Именно имеет место следующее неравенство:

$$\rho(x_1, x_m) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m).$$

Оно получается путем последовательного применения аксиомы 3:

$$\rho(x_1, x_m) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_m) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_m) \leqslant \ldots$$

Отметим следующее простое свойство расстояний, которое можно называть «*неравенством четырехугольника*»: для любых четырех

[1]) См. гл. IV, § 5, п. 3.

точек x, y, z, u метрического пространства

$$|\rho(x, z)-\rho(y, u)| \leqslant \rho(x, y)+\rho(z, u). \tag{1}$$

Геометрически это означает, что разность двух сторон четырехугольника не превосходит суммы двух других сторон. Доказательство вытекает из неравенств

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, u)+\rho(u, z),$$
$$\rho(y, u) \leqslant \rho(y, x)+\rho(x, z)+\rho(z, u),$$

если из первого вычесть $\rho(y, u)$, а из второго $\rho(x, z)$. При $z=u$ неравенство четырехугольника обращается во *второе неравенство треугольника*

$$|\rho(x, z)-\rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y), \tag{2}$$

которое также часто применяется.

3. В теории множеств существенную роль играло понятие *эквивалентности*. Два эквивалентных множества, т. е. два множества, находящихся во взаимно однозначном соответствии, с точки зрения чистой теории множеств были абсолютно равноправными, хотя бы они состояли из совершенно различных по природе элементов. После того как было установлено, например, что множество точек отрезка и множество непрерывных функций, заданных на этом отрезке, имеют одинаковую мощность, в теории множеств уже нет никакого смысла обращаться с этими множествами, как с различными.

Но если два рассматриваемых нами множества являются метрическими пространствами (и интересуют нас именно как таковые), то теоретико-множественной эквивалентности уже недостаточно для того, чтобы мы считали такие два пространства равноправными, так как метрические соотношения у них могут быть совершенно различными. Например, эквивалентные как множества метрические пространства точек отрезка $[a, b]$ и непрерывных функций на этом отрезке неодинаковы по метрике — хотя бы потому, что в первом пространстве взаимные расстояния между элементами ограничены постоянной $b-a$, а во втором — ничем не ограничены; можно указать и много других различий. Поэтому естественно ввести следующее определение:

Два метрических пространства называются *изометричными*, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояние между соответствующими парами элементов.

Иными словами, если M и M' — изометричные пространства и элементам x, y пространства M соответствуют элементы x', y' пространства M', то $\rho(x, y)=\rho(x', y')$.

Например, пространства $C(0, 1)$ и $C(0, 2)$ непрерывных функций на отрезках $[0, 1]$ и $[0, 2]$ соответственно являются изометричными.

Соответствие между их элементами можно установить по формуле

$$C(0,\ 1) \ni x(t) \leftrightarrow y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \in C(0,\ 2).$$

Легко видеть, что это соответствие взаимно однозначно и сохраняет расстояния, что и требуется.

§ 2. Открытые множества

1. Совокупность всех точек x метрического пространства M, отстоящих от данной точки x_0 на расстоянии, меньшем заданной величины $r > 0$, так что

$$\rho(x,\ x_0) < r,$$

называется *шаром* (точнее, *открытым шаром*) радиуса r; точка x_0 есть *центр* этого шара. Совокупность всех точек x, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(x,\ x_0) \leqslant r,$$

называется *замкнутым шаром* радиуса r. Наконец, точки, находящиеся точно на расстоянии r от точки x_0, так что

$$\rho(x,\ x_0) = r,$$

образуют *сферу* радиуса r с центром в x_0. Введем следующее важное определение.

Множество U в метрическом пространстве M называется *открытым множеством* или *областью,* если каждая точка x_0 множества U является *внутренней точкой* этого множества, т. е. входит в это множество вместе с некоторым открытым шаром (радиус которого, вообще говоря, зависит от точки x_0) с центром в точке x_0.

Так, открытый шар с центром в некоторой точке x_1

$$U = \{x : \rho(x,\ x_1) < r\}$$

есть открытое множество. Действительно, пусть $x_0 \in U$, так что $\rho(x_0,\ x_1) = \theta < r$. Рассмотрим шар U_0 с центром в точке x_0 радиуса $r_0 < r - \theta$; мы утверждаем, что шар U_0 целиком входит в шар U. Действительно, для любого $x \in U_0$ по неравенству треугольника

$$\rho(x,\ x_1) \leqslant \rho(x,\ x_0) + \rho(x_0,\ x_1) < r_0 + \theta < r - \theta + \theta = r,$$

что и требуется.

Операции с открытыми множествами. Объединение открытых множеств в любом числе есть, очевидно, тоже открытое множество.

Пересечение открытых множеств в *конечном числе* также приводит к открытому множеству. Действительно, пусть точка x_0 принадлежит открытым множествам $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и входит в первое из них вместе с шаром радиуса r_1 (с центром в x_0), во второе — с шаром радиуса r_2 и т. д.; тогда шар с центром в x_0, радиуса $\min(r_1, \ldots, r_m)$, содержится в каждом из множеств $U_1, \ldots, U_m$ и, следовательно, содержится и в их пересечении.

Для бесконечного числа открытых множеств приведенное рассуждение не пройдет, так как минимум (точнее, точная нижняя грань) бесконечного числа положительных чисел может быть равным нулю. И действительно, пересечение бесконечного числа открытых множеств

$$U_n = \left\{ x : \rho(x, x_0) < \frac{1}{n} \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

содержит только те точки x, для которых $\rho(x, x_0) = 0$, т. е., согласно аксиоме 1, только точку x_0; это пересечение не есть, таким образом, открытое множество.

2. На оси $-\infty < x < \infty$ всякий интервал (α, β) (ограниченный или неограниченный) есть, очевидно, открытое множество. Открытым множеством является также конечное или счетное объединение интервалов (α_ν, β_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ без общих точек. Покажем, что *каждое открытое множество U на оси есть конечное или счетное объединение интервалов без общих точек.*

Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Согласно определению точка x входит в множество U вместе с некоторым шаром, т. е. вместе с некоторым интервалом оси, содержащим точку x. Мы построим сейчас наибольший интервал, содержащий точку x и содержащийся целиком в множестве U.

Обозначим через S множество точек, лежащих правее x и не принадлежащих U. Если S пусто, то вся полупрямая (x, ∞) входит в U. Если S не пусто, то оно обладает точной нижней гранью ξ. Эта точка ξ заведомо не входит в U, так как у любой точки множества U есть окрестность, целиком входящая в U и не содержащая тем самым ни одной точки множества S, а точка ξ, как точная нижняя грань множества S, в любой своей окрестности содержит точки из S. В частности, $\xi \neq x$. Очевидно также, что весь интервал (x, ξ) входит в U.

Аналогичное построение произведем слева от точки x; мы получим там содержащийся в U интервал (η, x), левый конец которого не входит в U (причем возможно, что этот интервал есть вся полупрямая $(-\infty, x)$).

Итак, по заданной точке $x \in U$ мы построили интервал (η, ξ), принадлежащий множеству U и такой, что его концы (из которых один или оба могут быть в бесконечности) уже не входят в множество U. Такого рода интервалы называются *составляющими интервалами открытого множества* U.

Если два составляющих интервала (η_1, ξ_1) и (η_2, ξ_2) имеют общую точку x_0, то они целиком совпадают; действительно, неравенство, например $\xi_1 < \xi_2$, невозможно, так как точка ξ_1, с одной стороны, как внутренняя точка интервала (x_0, ξ_2), должна принадлежать множеству U, а с другой стороны, как концевая точка интервала (x_0, ξ_1) она не может входить в U. Поэтому все множество U есть объединение составляющих интервалов, не имеющих попарно общих точек. Такое объединение не может быть более чем счетным, поскольку в каждом из составляющих интервалов множества U можно выбрать по рациональной точке, а рациональных точек — счетное множество. Тем самым наше утверждение полностью доказано.

Задачи. 1. Если множество E на прямой покрыто произвольной системой интервалов, то из нее можно выделить (не более чем счетную) подсистему, также покрывающую E.

Указание. Отметить те интервалы с рациональными концами, которые входят в интервалы покрытия, и оставить по одному из интервалов покрытия, содержащих данный отмеченный интервал.

2. Если множество E на плоскости покрыто произвольной системой кругов, то из нее можно выделить (не более чем счетную) подсистему, также покрывающую E.

Указание. См. задачу 1.

3. Говорят, что метрическое пространство M обладает *счетной базой*, если существует такая счетная система открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, что для любой точки $x \in M$ и любой области U, содержащей точку x, найдется множество U_k такое, что $x \in U_k \subset U$. Показать, что теорема, аналогичная утверждениям задач 1 и 2, справедлива в любом метрическом пространстве со счетной базой.

4. Доказать, что множество E_0 внутренних точек любого множества E открыто (если не пусто).

5. Доказать, что совокупность всех открытых множеств на прямой имеет мощность континуума.

Указание. Использовать теорему 6 § 5 гл. I.

§ 3. Сходящиеся последовательности и замкнутые множества

1. Будем говорить, что последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ метрического пространства M *сходится к точке* x того же пространства, если

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho(x, x_\nu) = 0,$$

иначе говоря, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится к x, если в любой шар с центром в точке x попадают все точки последовательности $x_1, x_2, \ldots$, начиная с некоторого номера.

Точка x называется *пределом* последовательности $x_1, x_2, \ldots; x_\nu, \ldots$ и обозначается $\lim x_\nu$.

Нетрудно показать, что элемент x определяется при этом *однозначно*. Действительно, если бы мы имели соотношения

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho(x, x_\nu) = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \rho(y, x_\nu) = 0,$$

то для заданного $\varepsilon > 0$ мы могли бы указать номер N, начиная с которого выполнялись бы неравенства

$$\rho(x, x_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y, x_\nu) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\nu \geqslant N)$$

и, следовательно, по неравенству треугольника

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_\nu) + \rho(y, x_\nu) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Так как в полученном неравенстве ε произвольно мало, то

$$\rho(x, y) = 0,$$

откуда в силу аксиомы 2

$$x = y,$$

что и требуется.

Примеры. *1.* Пусть метрическое пространство M лежит в n-мерном пространстве R_n (§ 1, пример 1), так что расстояние между точками $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ задано формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum (\xi_j - \eta_j)^2}.$$

Выясним, чтó означает сходимость последовательности

$$x_\nu = (\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

к точке

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Так как

$$\rho(x, x_\nu) = \sqrt{\sum (\xi_j - \xi_j^{(\nu)})^2},$$

то $\rho(x, x_\nu)$ стремится к нулю при $\nu \to \infty$ тогда и только тогда, когда *все числовые последовательности* $\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ при $\nu \to \infty$ сходятся соответственно к пределам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Кратко это выражают так: сходимость в R_n есть сходимость по всем координатам.

2. Сходимость последовательности функций $x_\nu(t) \in C(a, b)$ к функции $x(t)$ означает, что при $\nu \to \infty$

$$\rho(x, x_\nu) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_\nu(t)| \to 0.$$

В анализе такая сходимость называется *равномерной сходимостью.*

3. Сходимость последовательности функций $x_\nu(t)$ из пространства $C_p(a, b)$ к функции $x(t)$ означает, что при $\nu \to \infty$

$$\rho^p(x, x_\nu) = \int_a^b |x(t) - x_\nu(t)|^p dt \to 0.$$

В анализе такая сходимость называется *сходимостью в среднем порядка p* или просто сходимостью в среднем, если p фиксировано.

Всякая равномерно сходящаяся последовательность функций, очевидно, сходится также и в среднем при любом p.

Но легко построить последовательность функций, сходящуюся в среднем при любом p и не сходящуюся равномерно. Пусть, например, функция $x_\nu(t)$, вообще заключенная между нулем и единицей, отлична от нуля только в интервале Δ_ν длины, меньшей $\frac{1}{\nu}$, и достигает в этом интервале значения 1. Очевидно, что

$$\int_a^b x_\nu^p(t)\,dt < \frac{1}{\nu},$$

так что последовательность $x_\nu(t)$ при $\nu \to \infty$ *в среднем стремится к нулю.* Но $\max x_\nu(t) = 1$ для любого ν, так что последовательность $x_\nu(t)$ *не сходится к нулю равномерно.* Можно проверить, что эта последовательность ни к какой функции не сходится равномерно. Более того, интервалы Δ_ν можно выбрать так, что эта последовательность вообще не будет сходиться ни при одном значении t.

Лемма. *Если $x_\nu \to x$, $y_\nu \to y$, то $\rho(x_\nu, y_\nu) \to \rho(x, y)$.* (Иначе говоря, *расстояние есть непрерывная функция своих аргументов.*)

Доказательство. По неравенству четырехугольника (§ 1, п. 2)

$$|\rho(x, y) - \rho(x_\nu, y_\nu)| \leqslant \rho(x, x_\nu) + \rho(y, y_\nu).$$

Эта величина стремится к нулю при $\nu \to \infty$, что и требуется.

2. Точка x метрического пространства M называется *предельной* для множества $F \subset M$, если существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$ (различных) точек F, сходящаяся к точке x.

Другое определение предельной точки, очевидно эквивалентное вышеприведенному, гласит: точка x есть предельная точка множества F, если в любом шаре с центром в точке x имеются точки множества F (отличные от точки x).

Множество $F \subset M$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры. *1.* Отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ замкнут на вещественной прямой, а полуинтервал $a \leqslant x < b$ не замкнут, так как его предельная точка b не принадлежит ему.

2. В любом метрическом пространстве шар

$$U = \{x : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$$

есть замкнутое множество (поэтому он и называется замкнутым шаром).

Действительно, возьмем любую точку x_1, не принадлежащую шару U, так что $\rho(x_1, x_0) = r_1 > r$. Мы утверждаем, что в шаре с центром в точке x_1 и радиусом $\frac{1}{2}(r_1 - r)$ нет точек шара U: если бы такая точка нашлась, то, обозначив ее через z, мы имели бы

$$\rho(x_0, x_1) \leqslant \rho(x_0, z) + \rho(x_1, z) \leqslant r + \frac{1}{2}(r_1 - r) < \frac{1}{2} r_1$$

в противоречие с построением. Поэтому точка x_1 не может быть предельной точкой для множества U.

Замкнутые множества в метрическом пространстве M тесно связаны с открытыми множествами этого пространства. Именно имеет место теорема:

Теорема. *Множество U, дополнительное в метрическом пространстве M к замкнутому множеству F, всегда открыто. Множество F, дополнительное к открытому множеству U, всегда замкнуто.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество и U — его дополнение; покажем, что U открыто. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in U$; мы должны показать, что имеется шар, определяемый неравенством вида

$$\rho(x, x_0) < r,$$

целиком входящий в множество U.

Допуская противное, мы должны предположить, что в любом шаре с центром в точке x_0 имеются точки множества F. Но тогда, согласно второму определению предельной точки, x_0 есть предельная точка множества F. Так как F замкнуто, то мы должны были бы иметь $x_0 \in F$, что противоречит предположению $x_0 \in U$. Итак, U открыто.

Переходим ко второй половине теоремы. Пусть U открыто и F — его дополнение; покажем, что F замкнуто. Любая точка x_0, принадлежащая U, входит в U вместе с некоторым шаром, и поэтому не может быть предельной точкой множества F. Таким образом, предельные точки множества F могут быть только в самом F, и, следовательно, F замкнуто. Теорема доказана.

Вспоминая п. 2 § 2, мы получаем общее описание всех замкнутых множеств на прямой $-\infty < x < \infty$: *каждое замкнутое множество на прямой получается удалением конечной или счетной совокупности интервалов без общих точек.* Выбрасываемые интервалы, которые служат составляющими интервалами дополнительного открытого множества, называются *смежными интервалами* данного замкнутого множества.

Используя известные свойства открытых множеств в метрическом пространстве и найденную только что связь между открытыми и замкнутыми множествами, мы можем утверждать, что *объединение замкнутых множеств в конечном числе и пересечение замкнутых множеств в любом числе суть снова замкнутые множества.*

Действительно, пусть даны замкнутые множества F_ν (ν пробегает некоторую совокупность индексов), и пусть $U_\nu = CF_\nu$ — дополнительные открытые множества. По формуле (1) § 2 гл. I мы имеем:

$$C\sum_\nu F_\nu = \prod_\nu CF_\nu = \prod U_\nu.$$

Если ν пробегает конечную совокупность индексов, то $\prod U_\nu$, согласно § 2, есть открытое множество; поэтому дополнительное к $\prod U_\nu$ множество $\sum F_\nu$ замкнуто. Далее, по формуле (2) § 2 гл. I

$$C\prod_\nu F_\nu = \sum_\nu CF_\nu = \sum_\nu U_\nu.$$

Множество $\sum U_\nu$ всегда открыто; поэтому его дополнение $\prod F_\nu$ всегда замкнуто, что и требовалось.

3. Множество A, расположенное в метрическом пространстве M, называется ***всюду плотным в*** M, если всякая точка $b \in M$ есть предел последовательности точек $a_n \in A$ (не обязательно различных). Иными словами, A всюду плотно в M, если в любом шаре с центром в точке $b \in M$ имеется точка $a \in A$.

Так, множество рациональных точек всюду плотно на оси $-\infty < x < \infty$. Каждая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, согласно известной теореме Вейерштрасса, может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности многочленов; таким образом, множество всех многочленов всюду плотно в пространстве $C(a, b)$.

Свойство «всюду плотности» обладает своеобразной «транзитивностью»: *если множество A всюду плотно в пространстве M, а M в свою очередь всюду плотно в более широком пространстве P, то A, рассматриваемое как подмножество P, всюду плотно в P.* Действительно, поскольку M всюду плотно в P, для данной точки $x \in P$ и данного $\varepsilon > 0$ мы можем найти такую точку $b \in M$, что $\rho(b, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, далее, поскольку A всюду плотно в M, мы можем указать такую точку $a \in A$, что $\rho(a, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. По неравенству треугольника $\rho(a, x) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, x) < \varepsilon$; таким образом, в шаре радиуса ε с центром в любой точке $x \in P$ имеется точка $a \in A$, что и требовалось.

Пример. Покажем, что совокупность тригонометрических многочленов $T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ составляет всюду плотное множество в пространстве $C_p(-\pi, \pi)$. Из анализа известно, что всякая непрерывная функция $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, обладающая кусочно-непрерывной производной и удовлетворяющая условию $f(-\pi) = f(\pi)$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

сходящийся равномерно, т. е. по метрике пространства $C(-\pi, \pi)$ и тем самым по метрике $C_p(-\pi, \pi)$.

Таким образом, тригонометрические многочлены образуют всюду плотное множество A в совокупности M указанных непрерывных функций. Далее, любая непрерывная функция $\varphi(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющая условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, есть предел равномерно сходящейся последовательности функций $f_n(x)$ из M, например кусочно-линейных и совпадающих с $\varphi(x)$ в точках $\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$. Наконец, любая непрерывная функция $g(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций $\varphi_n(x)$ с $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi)$, сходящейся в метрике пространства $C_p(-\pi, \pi)$; например, можно положить $\varphi_n(x) = g(x)$ при $|x| \leqslant \pi - \frac{1}{n}$, $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$, а в оставшихся промежутках $\left(-\pi, -\pi + \frac{1}{n}\right)$ и $\left(\pi - \frac{1}{n}, \pi\right)$ доопределить $\varphi_n(x)$ по линейному закону. В силу указанной транзитивности мы получаем, что множество тригонометрических многочленов всюду плотно в пространстве $C_p(\pi, -\pi)$, что и требовалось.

4. Пусть дано произвольное подмножество A метрического протранства M; обозначим через $\bar{A}$ множество, состоящее из всех точек множества A и всех предельных точек множества A (не входящих в A). Если A — замкнутое множество, то $\bar{A} = A$; и обратно, если $\bar{A}$ совпадает с A, то все предельные точки множества A входят в A и, следовательно, A замкнуто. Множество $\bar{A}$ в общем случае называется *замыканием* множества A. Из определения замыкания легко следует, что данная точка $b \in M$ принадлежит множеству $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда в любом шаре с центром в точке b найдется точка a, принадлежащая A (возможно, совпадающая с b). В частности, очевидно, что A всюду плотно в своем замыкании; и обратно, если A всюду плотно в некотором множестве Q, то $Q \subset \bar{A}$.

Используя последнее замечание, покажем, что *замыкание произвольного множества $A \subset M$ всегда является замкнутым множеством.*

Иными словами, замыкание $\bar{\bar{A}}$ множества $\bar{A}$ совпадает с самим множеством $\bar{A}$. Мы знаем по условию, что A всюду плотно в $\bar{A}$ и $\bar{A}$ всюду плотно в $\bar{\bar{A}}$; поэтому A всюду плотно в $\bar{\bar{A}}$ и, следовательно, $\bar{\bar{A}}$ входит в замыкание A, т. е. $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$; но это и означает, что $\bar{A}$ замкнуто.

Заметим далее, что всякое замкнутое множество F, содержащее множество A, должно содержать и все предельные точки множества A и, следовательно, все множество $\bar{A}$. Так как по доказанному множество $\bar{A}$ замкнуто, то оно может быть охарактеризовано теперь как *наименьшее замкнутое множество, содержащее множество* A.

Примеры. *1.* Замыкание множества A всех рациональных точек на вещественной прямой есть совокупность всех (рациональных и иррациональных) точек этой прямой.

2. Замыкание в пространстве $C(a, b)$ множества всех многочленов $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ совпадает со всем пространством $C(a, b)$.

Задачи. 1. Множество предельных точек любого множества A обозначим через A'. Построить на прямой множество A так, чтобы $A'' = (A')'$ было не пустым, а A''' — пустым.

2. Доказать, что множество A' (см. задачу 1) замкнуто, каково бы ни было A.

3. Известно, что A' счетно. Доказать, что A счетно (A — на прямой).

4. Доказать, что результат задачи 3 остается справедливым в любом метрическом пространстве со счетной базой (§ 2, задача 3).

5. Точка x на прямой называется *точкой конденсации* несчетного множества A, если в любой окрестности точки x имеется несчетное множество точек множества A. Доказать, что у всякого несчетного множества A имеются точки конденсации; более того, почти все его точки, кроме, может быть, счетного множества, являются точками конденсации.

Указание. Точку, не являющуюся точкой конденсации множества A, можно покрыть интервалом, с рациональными концами, содержащим самое большее счетное множество точек множества.

6. Проверить, что результат задачи 5 сохраняется в любом метрическом пространстве со счетной базой.

7. Доказать, что множество M точек в плоскости, расположенных на единичной окружности Γ с центром в начале координат и имеющих полярные углы $1, 2, \ldots, n, \ldots$, всюду плотно на Γ.

Указание. Если дуга $\Delta_0 \subset \Gamma$ не содержит точек множества M, то дуги $\Delta_1 = \Delta - 1$, $\Delta_2 = \Delta - 2$ и т. д. также не содержат его точек. Дуги $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ равной длины, находясь на окружности Γ, не могут не пересекаться. Если, например, дуга Δ_k пересекается с дугой Δ_{k+m}, то объединение дуг Δ_k, Δ_{k+m}, Δ_{k+2m} покрывает всю окружность Γ, что невозможно.

8. Величина

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

называется расстоянием от точки x до множества A. Доказать, что для замкнутого множества A соотношения

$$\rho(x, A)=0, \qquad x \in A,$$

эквивалентны; если же A не замкнуто, то они не эквивалентны.

9. Доказать, что для любого множества A совокупность точек x, для которых $\rho(x, A)<\varepsilon$, открыта. С другой стороны, показать на примере, что совокупность точек y, для которых $\rho(y, A) \leqslant \varepsilon$, не обязана быть замкнутой, даже если A замкнуто.

Указание. Рассмотреть в пространстве $C(a, b)$ множество $A=\left\{x: \sin nx+\varepsilon+\frac{1}{n}\right\}$ и точку $\varphi_0(x) \equiv 0$.

10. Доказать, что всякое замкнутое множество F на прямой есть пересечение счетного множества открытых множеств. То же для метрического пространства со счетной базой.

Указание. Положить $U_n=\left\{x: \rho(x, F)<\frac{1}{n}\right\}$.

11. Даны два непересекающихся замкнутых множества F_1 и F_2. Построить непересекающиеся открытые множества U_1 и U_2 так, чтобы $U_1 \supset F_1$, $U_2 \supset F_2$ и U_1 и U_2 не пересекались.

Указание. Положить $U_1=\bigcup\limits_{x \in F_1}\left\{y: \rho(x, y)<\frac{1}{2} \rho(x, F_2)\right\}$, аналогично U_2.

12. Доказать, что всякое открытое множество есть объединение счетного множества замкнутых множеств (на прямой или в пространстве со счетной базой).

13. Доказать, что проекция плоского замкнутого ограниченного множества на прямую есть замкнутое множество.

Существенно ли предположение ограниченности?

Указание. В качестве примера рассмотреть проекцию равнобочной гиперболы на асимптоту.

14. Метрическое пространство M называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное множество A, плотное в M (так что замыкание A совпадает со всем M). Показать, что наличие счетной базы равносильно сепарабельности.

15. Доказать, что пространства $C(a, b)$ и $D_m(a, b)$ сепарабельны.

Указание. В качестве счетного всюду плотного множества можно взять совокупность многочленов с рациональными коэффициентами.

§ 4. Полные пространства

1. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ точек метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что для $\nu>N$ и $\mu>N$ выполняется неравенство

$$\rho(x_\nu, x_\mu) \leqslant \varepsilon.$$

Кратко мы будем писать в таких случаях:

$$\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} \rho(x_\nu, x_\mu)=0.$$

Например, любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Действительно, по неравенству треугольника

$$\rho(x_\nu, x_\mu) \leqslant \rho(x_\nu, x) + \rho(x, x_\mu),$$

и если $x_\nu \to x$, то правая часть для достаточно больших ν и μ становится меньше любого наперед заданного ε.

Если M есть вещественная прямая с обычной метрикой, то понятие фундаментальной последовательности точек совпадает с классическим понятием фундаментальной числовой последовательности. В теории вещественных чисел имеется критерий Коши, в силу которого всякая фундаментальная числовая последовательность является сходящейся. В общем метрическом пространстве критерий Коши оказывается уже несправедливым.

Рассмотрим открытый интервал (0, 1); он представляет собой метрическое пространство с обычной метрикой числовой оси. Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, очевидно, является фундаментальной в этом метрическом пространстве; но она не является в нем сходящейся. Следовательно, в метрическом пространстве (0,1) критерий Коши несправедлив.

2. Таким образом, в общем метрическом пространстве нельзя считать выполненным критерий Коши. Если в некоторых конкретных метрических пространствах критерий Коши все же выполняется, то это происходит в силу специальных свойств этих пространств. Класс таких пространств мы выделим следующим определением:

Метрическое пространство M называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность есть последовательность сходящаяся.

Примеры. *1.* Проверим, что n-мерное пространство R_n с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum (\xi_j - \eta_j)^2}$$

является полным. Пусть $x_\nu = (\xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)})$ — фундаментальная последовательность. Поскольку

$$|\xi_j^{(\nu)} - \xi_j^{(\mu)}|^2 \leqslant \sum_j |\xi_j^{(\nu)} - \xi_j^{(\mu)}|^2 = \rho^2(x_\nu, x_\mu),$$

то числовая последовательность $\xi_j^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ при каждом фиксированном $j = 1, 2, \ldots, n$ является фундаментальной числовой последовательностью и как таковая имеет некоторый предел ξ_i. Числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ определяют вектор $x \in R_n$. Поскольку

$$|x - x_\mu|^2 = \sum_i [\xi_i - \xi_i^{(\mu)}]^2 \to 0 \text{ при } \mu \to \infty,$$

вектор x есть предел взятой фундаментальной последовательности. Итак, каждая фундаментальная последовательность пространства R_n имеет в этом пространстве предел, что нам и требуется.

2. Пространство $C(a, b)$ — полное. В самом деле, если последовательность функций $y_n(x) \in C(a, b)$ фундаментальна, то при $\nu \to \infty$, $\mu \to \infty$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |y_\nu(x) - y_\mu(x)| \to 0. \qquad (1)$$

Фиксируем x; числа $y_n(x)$ в силу соотношения (1) образуют фундаментальную числовую последовательность, которая в силу классического критерия Коши обязана быть сходящейся последовательностью. Пусть $y(x)$ есть предел $y_\nu(x)$ при $\nu \to \infty$. Переходя в неравенстве

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |y_\nu(x) - y_\mu(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\nu, \mu > N = N(\varepsilon))$$

к пределу при $\nu \to \infty$, получаем:

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - y_\mu(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\mu > N = N(\varepsilon)). \qquad (2)$$

Следовательно, функция $y(x)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $y_n(x)$ и поэтому в силу известной теоремы анализа непрерывна. Из (2) следует далее, что $\rho(y, y_\mu) \to 0$. Таким образом, в пространстве $C(a, b)$ всякая фундаментальная последовательность является сходящейся; следовательно, $C(a, b)$ — полное пространство.

3. Замкнутое подмножество A полного метрического пространства M, рассматриваемое как самостоятельное метрическое пространство (с метрикой, заимствованной из M), является полным пространством. Действительно, всякая фундаментальная последовательность $y_\nu \in A$ сходится в M (поскольку M полное), и ее предел принадлежит множеству A в силу предположенной замкнутости этого множества. И обратно, если известно, что подмножество $A \subset M$ само есть полное метрическое пространство, то A замкнуто в M. В самом деле, если бы A не было замкнуто в M, то мы нашли бы в A последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к некоторой точке $y \in M - A$. Но последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна (метрика в A заимствована из M), поэтому в силу полноты A у нее должен существовать предел в A. Мы получили бы последовательность, имеющую два различных предела,— один в A, другой вне A, что невозможно.

4. Пространство $C_p(a, b)$ неполно ни при каком p. Для доказательства рассмотрим последовательность непрерывных функций $y_\nu(x)$, заключенных между 0 и 1 и при $\nu \to \infty$ равномерно стремящихся на каждом интервале $(a, c - \varepsilon)$ к 0, а на каждом интервале $(c + \varepsilon, b)$ — к 1 (c — фиксированная точка

между a и b). Эта последовательность удовлетворяет критерию Коши. В самом деле,

$$\int_a^b |y_\nu(x) - y_\mu(x)|^p\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

для достаточно больших ν и μ. Но *в то же время последовательность* $y_\nu(x)$ *не сходится в среднем ни к какой непрерывной функции.*

Для доказательства последнего утверждения заметим следующее. *Если последовательность функций* $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *сходится в среднем на промежутке* $\Delta = \{a \leqslant x \leqslant b\}$ *к непрерывной функции* $f(x)$, *а в некотором промежутке* $\delta = \{c \leqslant x \leqslant d\}$, *внутреннем к промежутку* Δ, *равномерно сходится к функции* $\varphi(x)$, *то в промежутке* δ *имеет место тождество* $\varphi(x) \equiv f(x)$. Действительно, в пространстве $C_p(c, d)$ мы имеем соотношения

$$\rho^p(f_\nu, f) = \int_c^d |f_\nu(x) - f(x)|^p\,dx \leqslant \int_a^b |f_\nu(x) - f(x)|^p\,dx \to 0,$$

$$\rho^p(f_\nu, \varphi) = \int_c^d |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p\,dx \leqslant \max_{x \in \delta} |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p (d - c) \to 0.$$

В силу единственности предела (§ 2) мы имеем $f(x) \equiv \varphi(x)$, что и утверждалось.

Если мы предположим, что построенная выше последовательность $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_\nu(x), \ldots$ сходится в среднем к некоторой непрерывной функции $f(x)$, то по доказанному мы должны были бы иметь равенство $f(x) = 0$ при $a \leqslant x < c$, $f(x) = 1$ при $c < x \leqslant b$. Но очевидно, что в таком случае, каково бы ни было значение $f(c)$, функция $f(x)$ не будет непрерывной функцией на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Задачи. 1. Ввести на прямой $\{-\infty < x < \infty\}$ метрику по формуле

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|.$$

Проверить выполнение всех аксиом метрического пространства. Будет ли это пространство полным?

Отв. Пространство неполно; последовательность $x_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots$ фундаментальна, но предела не имеет.

2. Доказать, что пространство $D_m(a, b)$ полно при любом m.

3. Является ли полным пространство всех числовых последовательностей

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots),$$

где $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$, с метрикой по формуле

$$\rho(x, y) = \max_n |\xi_n - \eta_n|?$$

Отв. Да.

4. Рассмотреть три пространства функций на прямой:

а) всех ограниченных непрерывных функций;

б) всех непрерывных функций, у которых $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$;

в) всех непрерывных функций, каждая из которых равна нулю вне некоторого интервала.

В этих пространствах вводится метрика по формуле

$$\rho(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|.$$

Будут ли указанные пространства полными?

Отв. В случаях а) и б) полные, в случае в) нет.

3. Лемма о замкнутых шарах. Полнота числовой прямой используется в анализе при доказательстве известной леммы о вложенных отрезках: последовательность вложенных друг в друга отрезков имеет общую точку. В полном метрическом пространстве этот факт имеет место с естественной заменой отрезков на замкнутые шары:

Лемма о замкнутых шарах. *В полном метрическом пространстве последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров*

$$U_\nu = \{y : \rho(y, y_\nu) \leqslant r_\nu\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

радиусы которых r_ν стремятся к нулю при $\nu \to \infty$, имеет общую точку.

Доказательство. Центр $y_{\nu+\mu}$ шара $U_{\nu+\mu}$ лежит, вместе со всем этим шаром, в шаре U_ν, так что

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) \leqslant r_\nu,$$

поэтому последовательность центров $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ фундаментальна. Так как пространство M полно, то эта последовательность имеет предел y_0. Поскольку шар U_ν — замкнутое множество в M (§ 3, п. 2, пример 2) и точки $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots$ принадлежат этому шару, то и $y_0 = \lim\limits_{\mu\to\infty} y_{\nu+\mu}$ принадлежит шару U_ν; число ν здесь любое, поэтому x_0 принадлежит всем шарам U_ν, что и утверждалось.

В главе I, используя теорему о вложенных отрезках, мы доказали, что множество точек отрезка [0, 1] несчетно. Мы можем установить теперь справедливость аналогичного утверждения и для широкого класса полных метрических пространств.

Предварительно введем следующее определение: точка x_0 метрического пространства M называется *изолированной*, если некоторый шар $\rho(x, x_0) < \delta$ не содержит ни одной точки пространства M, кроме самой точки x_0. Так, если M есть некоторое множество точек оси $-\infty < x < \infty$ с обычной метрикой, то $x_0 \in M$ есть изолированная точка, если имеется интервал, содержащий точку x_0 и не содержащий более ни одной точки множества M.

Теорема 1. *Всякое полное метрическое пространство M без изолированных точек несчетно.*

Доказательство. Допустим, напротив, что множество всех точек пространства M счетно. Тогда все эти точки можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Пусть y_1 — точка пространства M, отличная от точки x_1; обозначим через U_1 шар с центром в y_1, не содержащий (ни внутри, ни на границе) точки x_1. Так как y_1 неизолированная точка, то внутри этого шара есть и еще точки пространства M. Пусть y_2 — внутренняя точка шара U_1, отличная от точки x_2; обозначим через U_2 шар с центром в y_2, содержащийся целиком в шаре U_1 и не содержащий точки x_2. Продолжая этот процесс далее, мы получим последовательность шаров $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$, радиусы которых можно считать стремящимися к нулю, причем шар U_n не содержит точки x_n. Общая точка ξ всех шаров U_n, существующая по только что доказанной лемме, не может совпасть ни с одной из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по построению. Поэтому последовательность $x_1, x_2, \ldots$ не может исчерпать всего пространства M, как это было предположено; теорема доказана.

Мы видели выше (пример 3), что замкнутое множество в полном метрическом пространстве само является полным метрическим пространством. Таким образом, в полном метрическом пространстве любое замкнутое множество без изолированных точек несчетно.

Замечание. Если отказаться от предположения, что в пространстве M нет изолированных точек, то теорема перестанет быть справедливой. Соответствующим примером может служить любое счетное замкнутое множество (например, последовательность, сходящаяся к пределу) на прямой, рассматриваемое как самостоятельное метрическое пространство.

Рассмотрим теперь замкнутое множество F, расположенное на числовой оси. Очевидно, что всякая изолированная точка множества F является общим концом двух смежных интервалов к этому множеству, или, что то же, общим концом двух составляющих интервалов дополнительного открытого множества.

Будем называть замкнутое множество без изолированных точек *совершенным* множеством. Мы видели (§ 3), что каждое замкнутое множество на оси получается удалением некоторой совокупности интервалов без общих точек; теперь мы видим, что совершенное множество получается удалением совокупности интервалов не только без общих точек, но и без общих концов.

Примером совершенного множества служит любой отрезок $[a, b]$. Но легко можно построить совершенное множество, не содержащее целиком ни одного отрезка. Рассмотрим, в частности, построение так называемого *канторова множества.*

Канторово множество на отрезке $[0, 1]$ строится следующим образом. Сначала из этого отрезка удаляется интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ длины $\frac{1}{3}$, образующий среднюю из трех третей всего отрезка. Затем аналогичная операция производится с каждым из двух оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, т. е. из каждого из них удаляется его средняя третья часть, именно интервал $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ из отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и интервал $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ из отрезка $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Далее аналогичная процедура производится с каждым из четырех оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ и $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$, и процесс продолжается неограниченно. Оставшееся в результате замкнутое множество и называется канторовым множеством. Поскольку удаляемые при его построении интервалы не имели общих концов, канторово множество совершенно. Так как из каждых двух соседних интервалов с вершинами в точках $\frac{p}{3^q}$, $\frac{p+1}{3^q}$, $\frac{p+2}{3^q}$ был удален по крайней мере один, то канторово множество не содержит целиком ни одного отрезка. Тем не менее в силу только что доказанной теоремы канторово множество несчетно.

Более точно, мощность канторова множества есть мощность континуума. Это вытекает из следующей теоремы, относящейся к любому совершенному множеству на отрезке:

Теорема 2 (Г. Кантор). *Каждое совершенное множество на отрезке* $[a, b]$ *имеет мощность континуума.*

Доказательство. Будем предполагать, что точки a и b являются точными границами множества F; при этом, поскольку F замкнуто, мы имеем $a \in F$ и $b \in F$.

Если совершенное множество F содержит хотя бы один отрезок $[\alpha, \beta]$, то утверждение теоремы очевидно. Будем рассматривать случай, когда множество F не содержит ни одного отрезка. В этом случае между любыми двумя смежными к F интервалами имеется еще смежный интервал и число смежных интервалов, таким образом, бесконечно. Поскольку в множестве F нет изолированных точек, смежные интервалы к F не имеют не только общих точек, но и общих концов.

Все точки множества F можно разбить на два класса: в первый класс входят точки, являющиеся концами смежных интервалов множества F, — эти точки будем называть *точками первого рода*, — во второй класс — все остальные точки, *точки второго рода*. Так как совокупность смежных интервалов к совершенному множеству счетна, то множество точек первого рода также счетно. Все множество F в силу теоремы 1 несчетно; отсюда следует, что точки второго рода всегда существуют (что заранее нисколько не очевидно) и образуют несчетное множество. Мы сейчас используем другое построение, независимое от теоремы 1 и основанное на специальном свойстве прямой линии; из этого построения снова будет видно, что точки второго рода существуют и, более того, составляют множество мощности континуума.

Мы установим сейчас такое взаимно однозначное соответствие между множеством смежных интервалов к F и множеством двоично-рациональных точек на интервале $(0, 1)$, при котором сохранится порядок расположения: если смежный интервал Δ' лежит левее смежного интервала Δ'', то соответствующие им двоично-рациональные числа связаны неравенством $r' < r''$. Такое соответствие можно установить, например, следующим образом. Сначала поставим в соответствие смежному интервалу Δ_1 наибольшей длины (если таковых несколько, выберем любой) число $\frac{1}{2}$. Выберем среди всех смежных интервалов, лежащих левее Δ_1, наибольший Δ_2 (с той же оговоркой, если таковых несколько) и поставим ему в соответствие точку $\frac{1}{4}$; аналогично выберем среди всех смежных интервалов, лежащих правее Δ_1, наибольший Δ_3 и поставим ему в соответствие число $\frac{3}{4}$. На каждом из оставшихся четырех отрезков (левее Δ_2, между Δ_2 и Δ_1, между Δ_1 и Δ_3, правее Δ_3) выберем наибольший интервал и поставим в соответствие этим четырем интервалам, по порядку, числа $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{8}$. Ясно, что при таком установлении соответствия порядок расположения сохраняется. Продолжая этот процесс неограниченно, мы и придем в конце концов к интересующему нас соответствию между всеми смежными интервалами множества F и всеми двоично-рациональными точками интервала $(0, 1)$ с сохранением порядка расположения.

Далее мы распространим это соответствие, с одной стороны, на точки множества F, с другой — на двоично-иррациональные числа интервала $(0, 1)$. Пусть $\xi \in (0, 1)$ — двоично-иррациональное число. Оно разбивает все двоично-рациональные числа интервала $(0, 1)$ на два класса: левый $K_{л}$ и правый $K_{пр}$. Соответственно на два класса $D_{л}$ и $D_{пр}$ разбивается множество всех смежных интервалов множества F. Обозначим через $\eta_{л}$ точную верхнюю грань точек, входящих в интервалы класса $D_{л}$, и через $\eta_{пр}$ — точную нижнюю грань точек, входящих в интервалы класса $D_{пр}$.

Между каждой рациональной точкой интервала $(0, 1)$ и точкой ξ имеются еще рациональные точки; поэтому между каждым смежным интервалом множества F, лежащим левее $\eta_{л}$, и самой точкой $\eta_{л}$ имеются еще смежные интервалы; аналогично между каждым смежным интервалом множества F, лежащим правее $\eta_{пр}$, и самой точкой $\eta_{пр}$ имеются еще смежные интервалы. Поэтому точки $\eta_{л}$ и $\eta_{пр}$ сами не являются точками смежных интервалов или концами смежных интервалов; *это точки второго рода.*

Мы утверждаем, что $\eta_{л} = \eta_{пр}$; действительно, в противном случае нашелся бы смежный интервал, разделяющий точки $\eta_{л}$ и $\eta_{пр}$ и не принадлежащий по этой причине ни к классу $D_{л}$, ни к классу $D_{пр}$, что невозможно. Обозначим общее значение $\eta_{л}$ и $\eta_{пр}$ через η и эту точку η поставим в соответствие взятому двоично-иррациональному числу ξ. Закон соответствия $\xi \to \eta$, таким образом, установлен. Если $\xi' \neq \xi''$, то между ξ' и ξ'' найдется двоично-рациональная точка; соответствующий смежный интервал разделяет соответствующие точки η' и η'', и эти последние, следовательно, различны. Таким образом, соответствие между двоично-иррациональными числами интервала (0, 1) и (некоторыми) точками множества F взаимно однозначно. Мы видим, что множество F содержит подмножество F^*, эквивалентное множеству двоично-иррациональных точек интервала (0, 1), и вместе с этим последним множеством имеет, следовательно, мощность континуума. Теорема доказана.

Из приведенного доказательства видно, что множество F^* состоит только из точек второго рода. Мы утверждаем, что *каждая точка η второго рода есть образ некоторого двоично-иррационального числа ξ*. Действительно, точка η определяет разбиение совокупности всех смежных интервалов к множеству F на два класса: левый $D_л$ (интервалы, лежащие левее η) и правый $D_{пр}$ (интервалы, лежащие правее η). Вместе с этим и множество двоично-рациональных чисел разбивается на классы $K_л$ и $K_{пр}$. Число $\xi = \sup K_л = \inf K_{пр}$, как легко видеть, двоично-иррационально и имеет своим образом как раз точку η.

Переход от интервала (0, 1) к множеству F можно представить себе теперь как некую непрерывную деформацию, при которой каждая двоично-рациональная точка растягивается в целый интервал, каждая двоично-иррациональная точка остается точкой и порядок взаимного расположения соответствующих интервалов и точек сохраняется.

В дальнейшем замкнутое множество в метрическом пространстве, не содержащее ни одного шара целиком, мы будем называть *нигде не плотным*. Произвольное множество A в метрическом пространстве M мы будем называть *нигде не плотным*, если нигде не плотно $\bar{A}$ — замыкание множества A.

Задачи. 1. Показать, что каждое замкнутое множество (на оси или в пространстве со счетной базой) есть сумма совершенного и не более чем счетного.

Указание. Совершенное слагаемое — множество точек конденсации данного замкнутого множества. См. задачи 5—6 к § 3.

2. Доказать, что полное метрическое пространство не может быть представлено как счетная сумма своих нигде не плотных подмножеств.

Указание. Использовать метод доказательства теоремы 1.

§ 5. Теорема о неподвижной точке

1. Предположим, что имеется некоторая функция, определенная на метрическом пространстве M и ставящая в соответствие каждой точке y этого пространства точку $z = A(y)$ этого же пространства. Мы будем говорить в таком случае, что нам задано *отображение A пространства M в себя*.

В анализе часто приходится иметь дело с различными отображениями функциональных пространств. Например, если $f(x, y)$ — заданная непрерывная функция своих аргументов в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$, то с ее помощью можно построить отображение пространства $C(a, b)$ в себя по формулам:

$$A[y(x)] = f(x, y(x)),$$

$$A[y(x)] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi \quad (x_0, y_0 \text{ — заданные числа})$$

и т. п.

Всякая точка y, которая переводится отображением A в себя (т. е. для которой $Ay = y$), называется *неподвижной точкой* отображения A. К вопросу о существовании неподвижных точек отображений сводятся многие задачи анализа типа задач о существовании решений различных уравнений. Например, теорема о существовании решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

с начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$ есть задача о существовании неподвижной точки y отображения

$$Ay(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi,$$

поскольку уравнение (1) при указанных начальных условиях эквивалентно уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi.$$

Имеется много общих теорем, устанавливающих в тех или иных предположениях относительно отображения A наличие неподвижной точки у этого отображения. Мы приведем здесь одну из самых простых теорем такого рода, которая дает не только существование, но и единственность неподвижной точки, правда, при довольно сильном ограничении, наложенном на рассматриваемое отображение.

Определение. Отображение A метрического пространства M в себя называется *сжимающим*, если для любых двух точек y, z пространства M имеет место неравенство

$$\rho(Ay, Az) \leqslant \theta\rho(y, z),$$

где θ — фиксированное положительное число, меньшее 1.

Теорема. *Сжимающее отображение A полного метрического пространства M в себя имеет неподвижную точку, и притом единственную.*

Доказательство. Исходя из произвольной точки $y_0 \in M$, построим последовательность точек

$$y_1 = Ay_0, \quad y_2 = Ay_1 = A^2 y_0, \; \ldots, \; y_\nu = Ay_{\nu-1} = A^\nu y_0, \; \ldots$$

Мы утверждаем, что эта последовательность фундаментальна в M. Действительно, для любого ν

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+1}) = \rho(A^\nu y_0, A^{\nu+1} y_0) \leqslant \theta\rho(A^{\nu-1} y_0, A^\nu y_0) \leqslant \ldots \leqslant \theta^\nu \rho(y_0, y_1)$$

и, следовательно,

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) \leqslant \rho(y_\nu, y_{\nu+1}) + \rho(y_{\nu+1}, y_{\nu+2}) + \ldots + \rho(y_{\nu+\mu-1}, y_{\nu+\mu}) \leqslant$$
$$\leqslant \theta^\nu \rho(y_0, y_1) + \theta^{\nu+1}\rho(y_0, y_1) + \ldots + \theta^{\nu+\mu-1}\rho(y_0, y_1) \leqslant$$
$$\leqslant (\theta^\nu + \theta^{\nu+1} + \ldots + \theta^{\nu+\mu-1} + \ldots)\rho(y_0, y_1) = \frac{\theta^\nu}{1-\theta}\rho(y_0, y_1); \tag{2}$$

при достаточно большом ν эта величина становится как угодно малой. Так как M полно, то существует предел

$$y = \lim_{\nu \to \infty} y_\nu.$$

Покажем, что y — неподвижная точка. Мы имеем

$$\rho(Ay, y_\nu) = \rho(Ay, Ay_{\nu-1}) \leqslant \theta\rho(y, y_{\nu-1}) \to 0,$$

откуда следует, что последовательность y_ν сходится к Ay. В силу единственности предела $Ay = y$, что и требуется. Остается показать, что полученная неподвижная точка — единственная неподвижная точка преобразования A. Допустим, что z — вторая неподвижная точка, так что вместе с равенством $Ay = y$ имеет место и равенство $Az = z$. При этом

$$\rho(y, z) = \rho(Ay, Az) \leqslant \theta\rho(y, z).$$

Если $\rho(y, z) > 0$, то можно сократить равенство на $\rho(y, z)$, и мы получим противоречие: $1 \leqslant \theta$. Поэтому в действительности $\rho(y, z) = 0$, $y = z$, т. е. второй неподвижной точки, отличной от y, не существует. Теорема доказана.

Замечание. Полезно оценить расстояние от какой-то точки y_ν до неподвижной точки y. Для этого в неравенстве (2)

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) \leqslant \frac{\theta^\nu}{1-\theta}\rho(y_0, y_1)$$

перейдем к пределу при $\mu \to \infty$; используя непрерывность расстояния (§ 3), получаем:

$$\rho(y_\nu, y) \leqslant \frac{\theta^\nu}{1-\theta}\rho(y_0, y_1). \tag{3}$$

Это и есть интересующая нас оценка. В конкретных задачах она позволяет оценить заранее число шагов, необходимое для вычисления y с заданной точностью.

Полагая в (3) $\nu=0$, получаем:

$$\rho(y_0, y) \leqslant \frac{1}{1-\theta}\rho(y_0, y_1);$$

это неравенство дает оценку расстояния от исходной точки y_0 до неподвижной точки.

2. Теперь мы продемонстрируем применение этой теоремы на примере задачи о существовании и единственности решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{4}$$

с начальными условиями $x=x_0$, $y=y_0$. Как мы уже выше заметили, эта задача есть задача о существовании и единственности неподвижной точки отображения

$$Ay(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{5}$$

Функция $f(x, y)$ предполагается непрерывной в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$. Точка x_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Отображение (5) определено в метрическом пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Это пространство, как мы видели, полное; нам остается только выяснить, при каких условиях оператор A является сжимающим.

Для этого оценим расстояние в пространстве $C(a, b)$ между результатами применения оператора A к элементу $y(x)$ и к элементу $z(x)$:

$$\rho(Ay, Az) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |Ay(x) - Az(x)| =$$

$$= \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, z(\xi))]\, d\xi \right|.$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2| \tag{6}$$

для любого x в промежутке $[a, b]$ и любых значений y_1 и y_2 с фиксированной постоянной K. Неравенство (6) называется *условием Липшица*. Если условие Липшица выполнено, то мы будем иметь при любом ξ в промежутке $[a, b]$

$$|f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, z(\xi))| \leqslant K|y(\xi) - z(\xi)| \leqslant K\rho(y, z)$$

и, следовательно,

$$\rho(Ay,\ Az) \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} \int\limits_{x_0}^{x} K\rho(y,\ z)\ d\xi = K(b-a)\,\rho(y,\ z).$$

Мы видим, что оператор A является сжимающим, если интервал $[a,\ b]$, содержащий точку x_0, достаточно мал, так что

$$K(b-a) = \theta < 1.$$

В этом случае теорема о неподвижной точке может быть применена. Мы получаем: *если функция $f(x,\ y)$ удовлетворяет условию Липшица* (6), *то уравнение* (4) *с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 решение $y = y(x)$, и притом единственное.* Мы доказали тем самым основную теорему о существовании и единственности решения у дифференциального уравнения (4).

Аналогичным приемом можно доказать и непрерывную зависимость решения от начального условия. Условимся сначала называть отображения A и B *ε-близкими*, если при заданном $\varepsilon > 0$ для любой точки x пространства M выполняется неравенство $\rho(Ax,\ Bx) < \varepsilon$.

Лемма. *Пусть в полном метрическом пространстве M даны два сжимающих отображения A и B, так что*

$$\rho(Ax,\ Ay) \leqslant \theta_A \rho(x,\ y), \qquad \rho(Bx,\ By) \leqslant \theta_B \rho(x,\ y),$$

и пусть $\theta = \max(\theta_A,\ \theta_B) < 1$. Тогда можно утверждать, что если эти отображения ε-близки, то неподвижные точки их находятся друг от друга на расстоянии, не превосходящем $\frac{\varepsilon}{1-\theta}$.

Доказательство. Пусть y_0 есть неподвижная точка отображения A. Неподвижную точку отображения B, согласно общей теории, можно построить как предел y_ω последовательности $y_0,\ y_1 = By_0,\ y_2 = By_1,\ \ldots$, причем по доказанному

$$\rho(y_0,\ y_\omega) \leqslant \frac{\rho(y_0,\ y_1)}{1-\theta}.$$

Но так как A и B ε-близки, то $\rho(y_0,\ y_1) = \rho(Ay_0,\ By_0) < \varepsilon$, откуда $\rho(y_0,\ y_\omega) < \frac{\varepsilon}{1-\theta}$, что и требовалось доказать.

Теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начального условия может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. *Если уравнение* (1) *рассматривается на отрезке $[a,\ b]$ длиной меньше $\frac{1}{K}$, где K — постоянная из условия Липшица для функции $(f\,x,\ y)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ из $|y_0 - y_1| < \varepsilon$ следует*

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |y_0(x) - y_1(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-K(b-a)};$$

здесь $y_j(x)$ означает решение, удовлетворяющее начальному условию $y_j(x_0)=y_j$ $(j=0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$Ay(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\ y(\xi))\,d\xi,\quad By(x)=y_1+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\ y(\xi))\,d\xi.$$

Оба они — сжимающие с одним и тем же параметром $\theta=K(b-a)$. Если $|y_0-y_1|<\varepsilon$, то, очевидно, отображения A и B находятся в ε-близости. В силу леммы расстояние между их неподвижными точками не превосходит $\frac{\varepsilon}{1-\theta}=\frac{\varepsilon}{1-K(b-a)}$, что и требуется.

Задачи. **1.** Сформулировать и доказать по методу неподвижной точки теорему существования и единственности решения для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dx}=f_j(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Указание. Метрическое пространство M состоит из «вектор-функций» $y=(y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x))$ с метрикой

$$\rho(y,\ z)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y_1(x)-z_1(x)|,\ \ldots,\ |y_n(x)-z_n(x)|\}.$$

2. Отображение A на полупрямой $1\leqslant x<\infty$ переводит каждую точку x в $x+\frac{1}{x}$. Является ли отображение сжимающим? Имеет ли неподвижную точку?

Отв. Хотя отображение A и уменьшает расстояния, так что $\rho(Ax,\ Ay)<\rho(x,\ y)$, но неравенство $\rho(Ax,\ Ay)\leqslant\theta\rho(x,\ y)$ не выполняется (для всех x и y) ни при каком $\theta<1$. Отображение не сжимающее. Неподвижной точки нет.

§ 6. Пополнение метрического пространства

В теории Кантора вещественные числа определяются при помощи фундаментальных последовательностей рациональных чисел [1]). Рациональные числа образуют в обычной метрике *неполное* метрическое пространство M, и процесс построения вещественных чисел по Кантору можно рассматривать как процесс построения полного пространства $\overline{M}$, включающего пространство M. Метод Кантора, должным образом обобщенный, позволяет *любое* неполное метрическое пространство M включить в некоторое полное пространство $\overline{M}$.

Теорема (Ф. Хаусдорф, 1914). *Пусть M — метрическое пространство (вообще говоря, неполное). Существует полное метри-*

[1]) См., например, В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, Курс математического анализа, т. I, М.—Л., 1957.

ческое пространство $\overline{M}$, называемое пополнением пространства M, которое обладает следующими свойствами:

а) *M изометрично некоторой части $M_1 \subset \overline{M}$,*

б) *M_1 плотно в $\overline{M}$.*

Всякие два пространства $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, удовлетворяющие условиям а) *и* б), *изометричны между собой.*

Доказательство. Назовем две фундаментальные последовательности $\{y_\nu\}$ и $\{z_\nu\}$ пространства M *конфинальными*, если $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu) = 0$. Например, всякие две последовательности пространства M, сходящиеся к одному и тому же пределу, являются конфинальными, а сходящиеся к разным пределам не являются конфинальными. Две фундаментальные последовательности, конфинальные с третьей, конфинальны и между собой. Поэтому все фундаментальные последовательности, которые можно построить из элементов пространства M, можно разбить на классы так, что все последовательности, входящие в один класс, конфинальны между собой и любая последовательность, не входящая в этот класс, не конфинальна ни с одной последовательностью класса. Из таких классов — мы будем обозначать их Y, Z, ... — мы и будем строить новое пространство $\overline{M}$. Подлежит определению лишь величина расстояния между классами Y и Z. Мы определяем ее по формуле

$$\rho(Y, Z) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu), \tag{1}$$

где $\{y_\nu\}$ — любая фундаментальная последовательность класса Y, а $\{z_\nu\}$ — любая фундаментальная последовательность класса Z. Нужно, конечно, прежде всего проверить, что указанный предел существует и не зависит от выбора последовательностей $\{y_\nu\}$ и $\{z_\nu\}$ в классах Y и Z. По неравенству четырехугольника (§ 1, п. 2)

$$|\rho(y_\nu, z_\nu) - \rho(y_{\nu+\mu}, z_{\nu+\mu})| \leqslant \rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) + \rho(z_\nu, z_{\nu+\mu}),$$

откуда следует, что числа $\rho(y_\nu, z_\nu)$ образуют последовательность, удовлетворяющую критерию Коши. Таким образом, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu)$ существует. Если $\{y'_\nu\}$ и $\{z'_\nu\}$ — другие фундаментальные последовательности в классах Y и Z, то, снова применяя неравенство четырехугольника, находим, что

$$|\rho(y_\nu, z_\nu) - \rho(y'_\nu, z'_\nu)| \leqslant \rho(y_\nu, y'_\nu) + \rho(z_\nu, z'_\nu) \to 0,$$

поэтому последовательность $\rho(y'_\nu, z'_\nu)$ имеет тот же предел, что и последовательность $\rho(y_\nu, z_\nu)$. Таким образом, определение расстояния между классами не зависит от выбора фундаментальных последовательностей в этих классах.

Теперь мы должны проверить, что величина

$$\rho(Y, Z) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu)$$

удовлетворяет аксиомам 1—3 § 1.

Аксиома 1: $\rho(Y, Z) = \rho(Z, Y)$ выполнена по построению.

Аксиома 2: $\rho(Y, Z) > 0$ при $Y \neq Z$, $\rho(Y, Y) = 0$. Прежде всего, по построению функции ρ мы имеем $\rho(Y, Y) = 0$, ибо в формуле (1) можно положить $y_\nu = z_\nu$.

Далее предположим, что $\rho(Y, Z) = 0$. Это означает, что для любой фундаментальной последовательности $\{y_\nu\}$ из класса Y и любой фундаментальной последовательности $\{z_\nu\}$ из класса Z имеет место равенство $\lim(y_\nu, z_\nu) = 0$. Но тогда $\{y_\nu\}$ и $\{z_\nu\}$ — конфинальные последовательности, и класс Y должен совпадать с классом Z. Таким образом, если $\rho(Y, Z) = 0$, то $Y = Z$; отсюда следует, что при $Y \neq Z$ имеем $\rho(Y, Z) > 0$, что и требуется.

Аксиома 3: $\rho(Y, U) \leqslant \rho(Y, Z) + \rho(Z, U)$. Пусть $\{y_\nu\}$, $\{z_\nu\}$, $\{u_\nu\}$ — фиксированные фундаментальные последовательности из классов Y, Z, U соответственно. Искомое неравенство получается в результате перехода к пределу в неравенстве

$$\rho(y_\nu, u_\nu) \leqslant \rho(y_\nu, z_\nu) + \rho(z_\nu, u_\nu).$$

Проверим теперь для пространства $\overline{M}$ все утверждения, сформулированные выше в теореме о пополнении.

1) $\overline{M}$ *содержит подмножество* M_1, *изометричное пространству* M. Каждому элементу $y \in M$ поставим в соответствие класс $Y \subset \overline{M}$, содержащий последовательность $y, y, y, \ldots$ (т. е. класс всех последовательностей, сходящихся к y). Если по этому правилу точка y соответствует классу Y и точка z — классу Z, то

$$\rho(Y, Z) = \lim \rho(y, z) = \rho(y, z).$$

Отсюда следует, что совокупность соответствующих классов Y есть часть пространства $\overline{M}$, изометричная пространству M.

2) M_1 *плотно в* $\overline{M}$. Пусть Y — произвольный класс из $\overline{M}$ и $\{y_\nu\}$ — фундаментальная последовательность из класса Y. Рассмотрим последовательность классов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu, \ldots$, где Y_μ определяется последовательностью $(y_\mu, y_\mu, y_\mu, \ldots)$, т. е. отвечает элементу y_μ в соответствии $M \to M_1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер μ_0 так, чтобы при $\mu > \mu_0$ иметь $\rho(y_\mu, y_{\mu+p}) \leqslant \varepsilon$. Тогда мы будем иметь

$$\rho(Y, Y_\mu) = \lim_{\nu\to\infty} (y_\nu, y_\mu) \leqslant \varepsilon.$$

Но это означает, что класс Y есть предел классов Y_μ. Так как класс Y_μ принадлежит по построению множеству M_1, то тем самым доказано, что M_1 плотно в $\overline{M}$.

3) *$\overline{M}$ — полное пространство.* Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность элементов из $\overline{M}$. Для каждого класса Y_ν найдем класс $Z_\nu \subset M_1$ так, чтобы иметь $\rho(Y_\nu, Z_\nu) < \frac{1}{\nu}$, и пусть $z_\nu \in M$ есть элемент, соответствующий классу Z_ν. Мы утверждаем, что последовательность $\{z_\nu\}$ фундаментальна в пространстве M. Действительно,

$$\rho(z_\nu, z_\mu) = \rho(Z_\nu, Z_\mu) \leqslant \rho(Z_\nu, Y_\nu) + \rho(Y_\nu, Y_\mu) + \rho(Y_\mu, Z_\mu) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(Y_\nu, Y_\mu) + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} \to 0 \quad \text{при } \nu \to \infty, \ \mu \to \infty.$$

Фундаментальная последовательность $\{z_\nu\}$ определяет некоторый класс $Z \subset \overline{M}$; покажем, что класс Z является пределом в $\overline{M}$ последовательности Y_ν. Для заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно большом $\nu \geqslant \nu_0$ имеем:

$$\rho(Z, Y_\nu) \leqslant \rho(Z, Z_\nu) + \rho(Z_\nu, Y_\nu) = \lim_{\mu \to \infty} \rho(z_\mu, z_\nu) + \frac{1}{\nu} < \varepsilon.$$

Таким образом, всякая фундаментальная последовательность $Y_\nu \subset \overline{M}$ имеет в $\overline{M}$ предел, что и требовалось.

4) *Любое метрическое пространство $\overline{\overline{M}}$, обладающее свойствами 1) — 3), изометрично пространству $\overline{M}$.*

Действительно, пусть M_1 и M_2 — подмножества пространства $\overline{M}$ и $\overline{\overline{M}}$, изометричные пространству M и, следовательно, изометричные друг другу. Мы должны продолжить эту изометрию с множеств M_1 и M_2 на пространства $\overline{M}$ и $\overline{\overline{M}}$. Возьмем любой элемент $Y \subset \overline{M}$ и рассмотрим последовательность элементов $Y_\nu \subset M_1$, сходящуюся к Y. Соответствующая последовательность $Z_\nu \subset M_2$, во всяком случае, фундаментальна, так как в силу изометрии между M_1 и M_2 взаимные расстояния между элементами последовательности Z_ν такие же, какие и между элементами последовательности Y_ν. Так как $\overline{\overline{M}}$ полно, то в $\overline{M}$ имеется элемент $z = \lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu$. Этот элемент $z \subset \overline{\overline{M}}$ поставим в соответствие взятому элементу $Y \subset \overline{M}$. Он определен однозначно, поскольку конфинальные последовательности в $\overline{M}$ соответствуют конфинальным последовательностям в $\overline{M}$ и замена последовательности Y_ν на конфинальную приводит к замене последовательности Z_ν также на конфинальную. Указанное сопоставление взаимно однозначно и исчерпывает все элементы $\overline{M}$ и $\overline{M}$. Нам остается показать, что оно является изометрическим. Пусть элементы Y и Y' пространства $\overline{M}$ соответствуют элементам Z и Z' пространства $\overline{\overline{M}}$ и при этом

$$Y = \lim Y_\nu, \qquad Y' = \lim Y'_\nu \qquad (Y_\nu, \ Y'_\nu \text{ из } M_1).$$

Если далее Z_ν и Z'_ν — элементы M_2, отвечающие элементам Y_ν и Y'_ν, то $\rho(Z_\nu, Z'_\nu) = \rho(Y_\nu, Y'_\nu)$, и в силу леммы о непрерывности расстояния (§ 3, п. 1)

$$\rho(Z, Z') = \lim_{\nu\to\infty} \rho(Z_\nu, Z'_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(Y_\nu, Y'_\nu) = \rho(Y, Y'),$$

что и требуется. Тем самым наша теорема доказана полностью.

Замечание 1. Предположим, что данное метрическое пространство M есть часть другого полного метрического пространства M^*. Тогда в качестве пополнения M можно взять замыкание $\overline{M}$ множества M в пространстве M^*. Действительно, $\overline{M}$, как замкнутое подмножество полного пространства M^*, есть полное пространство; затем, оно содержит внутри себя M в качестве плотного подмножества. Оно удовлетворяет, таким образом, условиям доказанной теоремы и в силу этой теоремы может служить пополнением пространства M.

Замечание 2. Пространство $C_p(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с расстоянием по формуле

$$\rho^p(y, z) = \int_a^b |y(x) - z(x)|^p\, dx$$

неполно (мы видели это в § 4, п. 1). В силу доказанной теоремы оно имеет пополнение $\overline{C}_p(a, b)$. Естественно поставить вопрос: можно ли элементам пространства $\overline{C}_p(a, b)$, определенным по теореме 1 абстрактным образом, приписать конкретный смысл, истолковать их в виде каких-то функций? Оказывается, что это возможно сделать, хотя и не очень просто; мы откладываем рассмотрение этого вопроса до главы IV, когда будем располагать необходимыми средствами для его решения.

§ 7. Непрерывные функции и компактные пространства

1. Определения и простейшие свойства. Функция $f(x)$ с числовыми значениями, определенная на метрическом пространстве M, называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из условия

$$\rho(x, x_0) < \delta$$

следует

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Как и в классическом анализе, возможно и второе определение, эквивалентное первому: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности $x_n \to x_0$ имеем $f(x_n) \to f(x_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке множества M, называется *непрерывной на* M.

Одним из простейших примеров непрерывной функции в метрическом пространстве является расстояние от точки x до фиксированной точки x_0. Непрерывность этой функции вытекает из второго неравенства треугольника (§ 1, п. 2):

$$|\rho(x', x_0) - \rho(x'', x_0)| \leqslant \rho(x', x'').$$

Обычные свойства функций, непрерывных на прямой, известные в анализе, легко переносятся на случай непрерывных функций на метрических пространствах. Так, сумма, разность, произведение двух непрерывных функций — также непрерывные функции. Частное двух непрерывных функций есть также непрерывная функция во всех точках, где знаменатель отличен от нуля.

Установим следующие важные свойства непрерывных функций на метрическом пространстве:

Лемма. *Если $f(x)$ — непрерывная функция, то множества*

$$F_1 = \{x\colon\ f(x) \leqslant A\},$$
$$F_2 = \{x\colon\ f(x) \geqslant A\}$$

замкнуты при любом A, а множества

$$U_1 = \{x\colon\ f(x) < A\},$$
$$U_2 = \{x\colon\ f(x) > A\}$$

открыты при любом A.

Доказательство. Докажем, что множество U_1 открыто. Пусть $x_0 \in U_1$, так что $f(x_0) < A$, и положим $\varepsilon = A - f(x_0)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует такой шар $\rho(x_0, x) < \delta$, в котором выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В пределах этого шара

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon = A,$$

и, следовательно, весь шар принадлежит множеству U_1. Так как x_0 — любая точка множества U_1, то U_1 — открытое множество. Его дополнением служит множество F_2, которое, следовательно, замкнуто. Для множеств U_2 и F_1 доказательство можно провести аналогично; можно, впрочем, заменить $f(x)$ на $2A - f(x)$, чем задача сводится к предыдущей.

Обратно, *если известно, что для некоторой функции $f(x)$, определенной на метрическом пространстве M, каждое из множеств*

$$U_1 = \{x\colon\ f(x) < A\}, \qquad U_2 = \{x\colon\ f(x) > A\}$$

при любом A является открытым, то функция $f(x)$ непрерывна.

Действительно, в этом случае для любой точки $x_0 \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ можно образовать множества

$$U_1 = \{x\colon\ f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}, \qquad U_2 = \{x\colon\ f(x) > f(x_0) - \varepsilon\},$$

которые по условию открыты. Пересечение этих множеств

$$U=\{x:\ f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}=\{x:\ -\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon\}$$

также открыто. Оно содержит, очевидно, точку x_0, а вместе с ней и некоторый шар $U_\delta(x_0)=\{x:\rho(x,\ x_0)<\delta\}$. В пределах этого шара выполняется неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

Соответствующее предложение можно формулировать и для множеств $F_1=\{x:\ f(x)\leqslant A\}$, $F_2=\{x:\ f(x)\geqslant A\}$: *если для функции $f(x)$ каждое из этих множеств при любом A является замкнутым, то $f(x)$ непрерывна.* Доказательство легко получается переходом к дополнениям.

Функции, определенные на метрическом пространстве, которое само состоит из функций, — как известные нам пространства $C(a,\ b)$, $D_n(a,\ b)$ и т. д. — мы будем, как правило, называть ***функционалами***.

Задачи. 1. Непрерывны ли на пространстве $C(a,\ b)$ функционалы:

а) $F(y)=y(a)$;

б) $F(y)=\max|y(x)|$;

в) $F(y)=\max y(x)$;

г) $F(y)=\int\limits_a^b y(x)\,dx$;

д) $$F(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y(x) \text{ принимает хотя бы одно отрицательное значение},\\ \frac{1}{2}, & \text{если } y(x)\equiv 0,\\ 1, & \text{если } y(x)\geqslant 0, \text{ причем } y(x)\not\equiv 0?\end{cases}$$

Отв. В случаях а) — г) непрерывны, в случае д) нет.

2. Непрерывны ли на пространстве $D_1(a,\ b)$ функционалы:

а) $F(y)=y(a)$;

б) $F(y)=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$?

Отв. Да.

3. Непрерывна ли функция $\rho(x,\ B)=\inf\limits_{y\in B}\rho(x,\ y)$ (§ 3, задача 8)?

Отв. Да.

4. Непрерывна ли функция $d(x,\ B)=\sup\limits_{y\in B}\rho(x,\ y)$?

Отв. Да.

2. Компактные множества. Аналогия со свойствами непрерывных функций на отрезке не всегда сохраняется при переходе к общему метрическому пространству. Например, непрерывная функция на отрезке $[a,\ b]$ всегда ограничена на этом отрезке и достигает своей верхней и нижней границы. Непрерывная функция в шаре радиуса r метрического пространства M может оказаться неограниченной или не достигать своих границ (пример указан в одной из задач к настоящему параграфу). Чтобы указанные свойства непрерывных функций оказались справедливыми в данном метрическом пространстве M, нужно подчинить это пространство дальнейшим ограничениям.

Будем называть метрическое пространство M *компактным*, если всякое бесконечное подмножество $A \subset M$ содержит фундаментальную последовательность.

Так, всякое бесконечное подмножество A на интервале $a < x < b$ в силу известной из анализа теоремы Больцано — Вейерштрасса имеет предельную точку и, следовательно, содержит фундаментальную последовательность; мы видим, что интервал $M = (a, b)$ есть компактное метрическое пространство.

Компактное метрическое пространство может не быть полным, как интервал (a, b) в предыдущем примере. Метрическое пространство, одновременно компактное и полное, называется *компактом*.

Можно дать и независимое определение компакта: компакт есть метрическое пространство M, в котором всякое бесконечное подмножество содержит *сходящуюся* последовательность.

Типичным примером компакта является отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ вещественной оси с обычной метрикой.

Оказывается, что свойства непрерывных функций быть ограниченными и достигать своих граней связаны именно с компактностью множества, на котором они определены.

Теорема 1. *Всякая непрерывная функция $f(x)$, определенная на компакте M, ограничена.*

Доказательство. Допустим, что $f(x)$ не ограничена. Тогда для любого целого n можно указать точку $x_n \in M$, в которой $|f(x_n)| > n$.

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в силу предположения должна содержать сходящуюся подпоследовательность; отбросив, если потребуется, часть точек, мы можем предположить, что сама эта последовательность сходится к некоторой точке $x_0 \in M$. В силу непрерывности $f(x)$ существует окрестность x_0, определяемая, например, неравенством $\rho(x, x_0) < \delta$, в которой $|f(x_0) - f(x)| < 1$, откуда $|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + 1$. С другой стороны, в этой окрестности имеются точки последовательности $x_1, x_2, \ldots$ со сколь угодно большими номерами; в этих точках $f(x)$ принимает сколь угодно большие значения. Полученное противоречие показывает, что $f(x)$ не может быть неограниченной; таким образом, на самом деле $f(x)$ ограничена, что и требуется.

Теорема 2. *Всякая непрерывная функция $f(x)$, определенная на компакте M, достигает на M точной верхней (и нижней) грани.*

Доказательство. Пусть b — точная верхняя грань значений $f(x)$. Для любого целого n можно указать точку x_n, в которой выполняется неравенство

$$0 \leqslant b - f(x_n) < \frac{1}{n}.$$

Допустим, что функция $f(x)$ ни в одной точке компакта M не принимает значения b. Тогда функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{b - f(x)}$$

непрерывна на компакте M и (по теореме 1) ограничена. Но на последовательности точек x_n знаменатель стремится к нулю. Поэтому функция $\varphi(x)$ не может быть ограниченной. Полученное противоречие показывает, что наше допущение несправедливо; следовательно, в некоторой точке компакта M функция $f(x)$ принимает значение b. Теорема доказана.

Справедливы и обратные утверждения: если некоторое метрическое пространство M не есть компакт, то существуют непрерывные функции, определенные на M и не ограниченные или хотя и ограниченные, но не достигающие своих точных границ. Этому вопросу посвящена одна из приведенных ниже задач. Таким образом, условие «M есть компакт» необходимо и достаточно для справедливости теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Всякая непрерывная функция $f(x)$, определенная на компакте M, равномерно непрерывна на нем; иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из $\rho(x, y) < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Допуская противное, мы для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_0$ сможем указать такие последовательности x_n и y_n, что

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Последовательность x_n в силу предположения содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0; отбросив, если нужно, часть точек, мы можем считать, что сама последовательность x_n сходится к точке x_0. Тогда и последовательность y_n сходится к точке x_0. Начиная с некоторого номера, точки x_n и y_n попадают в такую окрестность точки x_0, в которой выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Но тогда

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant |f(x_n) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

в противоречие с построением. Теорема доказана.

3. Условия компактности. Мы приведем теперь удобные условия, пригодные для проверки компактности конкретных метрических пространств.

Имея в виду дальнейшие применения, мы будем, не ограничивая общности, считать, что метрическое пространство M (изометрически) вложено в метрическое пространство P (поскольку всегда можно положить $P=M$).

Множество

$$B\subset P$$

будем называть *ε-сетью для множества* $M\subset P$, если каждая точка x множества M отстоит не далее чем на ε от некоторой точки $y\in B$.

Теорема 1 (Ф. Хаусдорф, 1914). *Множество M, расположенное в метрическом пространстве P, компактно (в метрике P) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ в P имеется конечная ε-сеть для M.*

Доказательство. Пусть M компактно и задано $\varepsilon>0$; покажем, что существует конечная ε-сеть для множества M. Возьмем произвольную точку $x_1\in M$. Если все остальные точки множества M находятся от точки x_1 на расстоянии $\leqslant\varepsilon$, то сама точка x_1 представляет ε-сеть для M и построение закончено. Если же среди точек множества M имеются такие, которые отстоят от x_1 дальше чем на ε, то мы выберем среди них произвольно точку x_2. Если теперь каждая точка множества M отстоит не далее чем на ε или от точки x_1, или от точки x_2, то x_1 и x_2 образуют конечную ε-сеть для M и построение закончено; в противном случае построение можно продолжить. В процессе построения каждая новая точка x_n отстоит от каждой из предшествующих $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ дальше чем на ε. Поэтому, если бы процесс можно было продолжать неограниченно, мы получили бы бесконечное подмножество $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ множества M, заведомо не содержащее ни одной фундаментальной последовательности, что противоречило бы компактности M. Так как M компактно, то процесс закончится после конечного числа шагов; а окончание процесса свидетельствует о построении конечной ε-сети для множества M.

Обратно, пусть в пространстве P имеется при каждом $\varepsilon>0$ конечная ε-сеть для множества M; покажем, что M компактно. Рассмотрим произвольное бесконечное подмножество $A\subset M$; мы должны выбрать в A фундаментальную последовательность. В качестве первой точки этой последовательности возьмем любую точку $x_0\in A$. Применяя условие теоремы при $\varepsilon=1$, мы можем покрыть множество A конечным числом шаров радиуса 1; среди них имеется такой — обозначим его через U_1, — который содержит бесконечное подмножество $A_1\subset A$. Выберем в A_1 любую точку $x_1\neq x_0$. Применяя условие теоремы при

$\varepsilon=\frac{1}{2}$, мы можем покрыть множество A_1 конечным числом шаров радиуса $\frac{1}{2}$; среди них есть шар U_2, который содержит бесконечное подмножество $A_2 \subset A_1$. Выберем любую точку $x_2 \in A_2$, не совпадающую ни с x_0, ни с x_1. Продолжая таким же образом далее, мы построим цепочку бесконечных подмножеств $A \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\nu \supset \ldots$ (причем каждое из множеств A_ν содержится в шаре U_ν радиуса $\frac{1}{\nu}$) и, кроме того, последовательность различных точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$, где $x_\nu \in A_\nu$. Мы утверждаем, что последовательность $x_0, x_1, \ldots$ фундаментальна. Действительно, при $\mu < \nu$ мы имеем $U_\mu \supset A_\mu \supset A_\nu$, поэтому $\rho(x_\mu, x_\nu) < \frac{2}{\mu}$. Эта величина стремится к нулю при $\mu \to \infty$, следовательно, последовательность $x_0, x_1, \ldots$ фундаментальна, что и требовалось.

В качестве применения этого признака покажем, что *любое ограниченное бесконечное множество в n-мерном евклидовом пространстве $P=E_n$ компактно*. Действительно, для любого m в том шаре пространства P, который содержит ограниченное множество M, существует лишь конечное число точек, все координаты которых имеют вид $\frac{k}{2^m}$, k — целое, а множество всех таких точек, очевидно, при достаточно большом m образует ε-сеть для M.

Отметим еще следующий простой признак компактности: *множество M в метрическом пространстве P компактно, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать в P компактное множество B_ε (может быть, и бесконечное), являющееся ε-сетью для M.*

Доказательство этого признака весьма просто. Мы утверждаем, что при заданном ε конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-*сеть Z для множества $B_{\frac{\varepsilon}{2}}$* — существующая в силу компактности $B_{\frac{\varepsilon}{2}}$ — есть ε-сеть для множества M. Действительно, для произвольной точки $x \in M$ по условию найдется такая точка $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}$, что $\rho(x, y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и такая точка $z \in Z$, что $\rho(y, z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, но тогда $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \leqslant \varepsilon$, что и утверждалось. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ множество M обладает конечной ε-сетью и, следовательно, компактно.

В качестве применения этого признака покажем, что *пополнение $\overline{M}$ любого компактного множества M есть компакт.* В самом деле, множество M, поскольку оно плотно в $\overline{M}$, является при любом $\varepsilon > 0$ ε-сетью для множества $\overline{M}$. По условию M компактно; отсюда и $\overline{M}$

компактно; а так как $\overline{M}$ полно, то оно есть компакт, что и требовалось.

Теорема 2. *Компактное подмножество M полного метрического пространства P является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто в P.*

Доказательство. Если подмножество M замкнуто в полном метрическом пространстве P, то оно само является полным метрическим пространством (§ 4, п. 2, пример 3). Если при этом M компактно, то, согласно определению, M есть компакт. Обратно, пусть $M \subset P$ — компакт; тем самым M компактное множество, и нужно показать только, что M замкнуто. Это следует из того же результата § 4 (п. 2, пример 3) и из того, что M как компакт есть полное пространство.

Соединяя теоремы 1 и 2, получаем:

Теорема 3. *Множество M в полном метрическом пространстве P является компактом тогда и только тогда когда, оно замкнуто в P и для каждого $\varepsilon > 0$ в P имеется для M конечная ε-сеть.*

В частности, компактом является любой замкнутый шар в евклидовом n-мерном пространстве. Всякая непрерывная функция, определенная на таком шаре, ограничена и достигает на нем своей точной верхней и нижней грани.

Задачи. 1. Указать в данном компакте Q счетное всюду плотное множество точек.

Указание. Рассмотреть объединение всех конечных $\frac{1}{m}$ -сетей для Q $(m = 1, 2, \ldots)$.

2. Показать, что из любой системы открытых множеств $\{G\}$, покрывающих в совокупности компакт Q, можно выбрать конечную подсистему $G_1, \ldots, G_m$, также покрывающую все Q.

Указание. Если из данного покрытия компакта Q нельзя выбрать конечного покрытия, то нельзя выбрать конечного покрытия и для некоторого шара Q_n — одного из шаров радиуса $\frac{1}{2^n}$, покрывающих в конечном числе компакт Q. Рассмотреть предельную точку множества центров шаров Q_n.

3. Проверить, что убывающая последовательность $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ непустых замкнутых подмножеств компакта имеет непустое пересечение.

Указание. Перейти к дополнениям и использовать задачу 2.

4. Если последовательность непрерывных функций $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ сходится на компакте Q к непрерывной функции $f(x)$, то она сходится равномерно на этом компакте (теорема Дини).

Указание. При заданном $\varepsilon > 0$ для фиксированной точки x_0 найти номер n_0 так, чтобы иметь $0 \leqslant f(x_0) - f_{n_0}(x_0) \leqslant \varepsilon$. Существует окрестность точки x_0, в которой $0 \leqslant f(x) - f_{n_0}(x) \leqslant 3\varepsilon$, а следовательно, и $0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant 3\varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$. Далее использовать результат задачи 2.

5. Совокупность непрерывных функций $\{f(x)\} = A$ на компакте Q называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho(x', x'') < \delta$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для любой $f \in A$; она называется *равномерно ограниченной*, если существует постоянная C такая, что $|f(x)| < C$ для любой $f \in A$. Показать, что совокупность A компактна

в метрике $\rho(f, g) = \max_{x \in Q} |f(x) - g(x)|$ тогда и только тогда, когда она равностепенно непрерывна и равномерно ограничена (*теорема Арцела*).

Указание. Включить A в пространство всех ограниченных (хотя бы и разрывных) функций на Q с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$. Для заданной δ-сети на Q совокупность кусочно-постоянных функций, принимающих в шарах радиуса δ с центрами в точках сети постоянные значения, целые кратные ε, не провосходящие по модулю C, образует конечную 3ε-сеть для A. (Для устранения многозначности в точках, общих нескольким шарам, выбирать из всех возможных значений одно произвольное.)

6. Проверить, что функционал

$$F(y) = \int_0^{1/2} y(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} y(x)\,dx$$

непрерывен в пространстве $C(0, 1)$; показать, что точная верхняя грань его значений в замкнутом единичном шаре пространства $C(0, 1)$ равна 1, но эта верхняя грань не достигается ни на каком элементе единичного шара.

7. Дано метрическое пространство M, которое не есть компакт. Построить непрерывную функцию на M и при этом не ограниченную.

Указание. Каждая точка x_k последовательности $x_1, x_2, \ldots$, из которой нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, находится на положительном расстоянии r_k от множества всех остальных точек этой последовательности. Всякая функция $f(x)$, непрерывная в каждом из шаров $\left\{\rho(x, x_k) \leqslant \frac{1}{2} r_k\right\}$, равная нулю на их границах и вне всех этих шаров, непрерывна на M.

8. Дано отображение компакта в себя, удовлетворяющее условию $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ при $x \neq y$. Показать, что у этого отображения существует единственная неподвижная точка.

Указание. Минимум непрерывной функции $\rho(x, Ax)$ не может быть положительным.

9. Доказать, что компакт нельзя отобразить изометрично на свою часть (В. А. Рохлин).

Указание. Допуская противное, можно указать точку, которая находится от образа компакта на положительном расстоянии r_0. Повторяя отображение, построить последовательность, все точки которой находятся друг от друга на расстоянии, не меньшем чем r_0.

10. Построить на плоскости компактное множество, изометричное своей части.

Указание. Рассмотреть множество точек с полярными координатами $\rho = 1$, $\varphi = 0, 1, 2, \ldots$

11. Пусть A и B — два изометрических отображения компакта Q на себя. Определим расстояние между отображениями A и B по формуле

$$\rho(A, B) = \max_{x \in Q} \rho(Ax, Bx). \qquad (1)$$

Показать, что совокупность всех изометрических отображений компакта Q на себя, метризованная по формуле (1), есть компакт (Б. Л. Ван-дер-Варден).

Указание. Для заданной конечной ε-сети на компакте Q, замечая, что существует лишь конечное число отображений конечного множества на себя, построить конечную 2ε-сеть в пространстве изометрических отображений.

4. Функции нескольких переменных. Нам будут встречаться иногда непрерывные функции нескольких аргументов, меняющихся в метрическом пространстве M. Рассмотрим для определенности функцию пары точек y, z. Числовая функция $f(y, z)$, аргументы которой принадлежат метрическому пространству M, называется непрерывной на паре $y=y_0$, $z=z_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из неравенств

$$\rho(y, y_0)<\delta, \quad \rho(z, z_0)<\delta$$

следует

$$|f(y, z)-f(y_0, z_0)|<\varepsilon.$$

Функция, непрерывная на любой паре y_0, z_0, называется непрерывной всюду.

Примером непрерывной функции пары точек y, z служит их расстояние $\rho(y, z)$. Действительно, в силу неравенства четырехугольника (§ 1, п. 2)

$$|\rho(y, z)-\rho(y_0, z_0)|\leqslant\rho(y, y_0)+\rho(z, z_0),$$

что может быть сделано меньше заданного $\varepsilon>0$ при

$$\rho(y, y_0)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(z, z_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для функций нескольких переменных нет необходимости повторять всю теорию, изложенную в пп. 1—2. В действительности всякая функция нескольких переменных, меняющихся в метрическом пространстве M, может быть представлена как функция одного переменного, меняющегося в некотором новом метрическом пространстве M'. Для простоты рассмотрим случай двух переменных. Введем для этого определение *произведения* метрических пространств.

Пусть заданы метрические пространства M и N. Рассмотрим множество всевозможных формальных пар $\{x, y\}$, где $x\in M$, $y\in N$, и определим расстояние между такими парами по формуле

$$\rho(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\})=\rho(x_1, x_2)+\rho(y_1, y_2),$$

причём $\rho(x_1, x_2)$ и $\rho(y_1, y_2)$ означают расстояние соответственно в пространствах M и N.

Легко проверить, что введенное по этому правилу расстояние удовлетворяет аксиомам § 1. Множество всех пар $\{x, y\}$ с расстоянием по формуле (1) и называется *произведением метрических пространств* M и N; оно обозначается $M\times N$.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, первый аргумент которой пробегает пространство M, а второй — пространство N. Ясно, что ее можно считать функцией одного аргумента, пробегающего пространство $M\times N$. В частности, функцию $f(x, y)$, аргументы которой пробегают одно и то же пространство M, можно считать функцией одного аргумента, пробегающего пространство $M\times M$. Если $f(x, y)$ — непрерывная функция аргументов x, y в том смысле, который был указан выше, то, очевидно, соответствующая функция на пространстве $M\times M$ будет непрерывна в обычном смысле (п. 1). Таким образом, теория непрерывных функций двух переменных приводится к теории непрерывных функций одного переменного.

Задачи. 1. Пусть пространства M и N компактны; показать, что произведение $M\times N$ также компактно.

2. Пусть пространства M и N полны; показать, что произведение $M\times N$ также полно.

3. Привести пример, где пространство M компактно, пространство N полно, а произведение $M\times N$ не является ни компактным, ни полным.

4. Если метрические пространства M и N оба бесконечны, то существует функция $f(x, y)$, непрерывная по каждому из аргументов в отдельности (при фиксированном другом аргументе), но не непрерывная на произведении $M\times N$.

§ 8. Линейные нормированные пространства

1. Линейные пространства. В анализе операция предельного перехода чаще всего встречается в комбинации с другими операциями, среди которых наиболее распространены линейные операции — сложение элементов и умножение на число. Сами эти операции изучаются в линейной алгебре. Напомним связанное с этими операциями основное определение — определение линейного пространства [1]):

Линейным пространством называется совокупность E элементов $x, y, \ldots$, для которых установлены операции сложения и умножения на число (вещественное или комплексное) так, что выполняются следующие ниже аксиомы 1—8.

Первая группа аксиом (1—4) описывает свойства сложения:

1. $x+y=y+x$ (*коммутативность сложения*).
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (*ассоциативность сложения*).
3. *Существует элемент* 0 *такой, что* $x+0=x$ *для любого* $x\in E$.
4. *Для каждого* $x\in E$ *уравнение* $x+y=0$ *разрешимо*. Элемент y называется *противоположным* элементу x.

Легко проверить, что элементы 0 и y, существование которых требуется в аксиомах 3 и 4, определяются единственным образом.

Следующая группа аксиом (5—8) связывает операции сложения и умножения на число. При этом через $\mathscr{E}$ обозначена та совокупность чисел (вещественных или комплексных), на которой допускается операция умножения.

5. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \qquad (\lambda\in\mathscr{E},\ \mu\in\mathscr{E},\ x\in E)$.
6. $1\cdot x=x$.
7. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.
8. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Можно показать, что $0\cdot x=0$ и что противоположный данному x элемент y получается путем умножения x на -1.

---

[1]) Подробное изложение можно найти, например, в книге: Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1956 (2 изд.), гл. II и далее.

Совокупность L элементов линейного пространства E называется *подпространством* в E, если операции сложения элементов L и умножения их на числа приводят всегда к элементам из L. Наименьшее подпространство состоит из одного элемента 0, наибольшее совпадает со всем E.

Примером линейного пространства является совокупность R_n комплексов из n чисел

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

с операциями «по координатам»: если

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

то по определению

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n).$$

Это пространство, как говорят, *n-мерно*, т. е. между всякими $n+1$ элементами $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ существует зависимость

$$C_1 x^{(1)} + \ldots + C_{n+1} x^{(n+1)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} C_j^2 > 0$$

и имеются n элементов $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$, между которыми такой зависимости не существует.

Функциональные пространства $C(a, b)$, $D_n(a, b)$, $C_p(a, b)$ (§ 1) также являются линейными пространствами (с естественными операциями). В отличие от R_n эти пространства уже бесконечномерны.

Напомним далее важное понятие изоморфизма между линейными пространствами. Два линейных пространства E' и E'' называются *изоморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие с сохранением операций сложения и умножения на числа; последнее означает, что если вектору $x' \in E'$ соответствует вектор $x'' \in E''$, а вектору $y' \in E'$ соответствует вектор $y'' \in E''$, то вектору $x' + y' \in E'$ соответствует вектор $x'' + y'' \in E''$ и при любом $\lambda \in \mathscr{C}$ вектору $\lambda x' \in E'$ соответствует вектор $\lambda x'' \in E''$.

Так, изоморфны любые два n-мерных пространства; каждое из них изоморфно координатному n-мерному пространству, описанному выше.

2. Линейные нормированные пространства. Свойства линейного пространства сочетаются с метрическими свойствами, о которых мы говорили на протяжении этой главы, в определении линейного нормированного пространства (пространства Банаха):

Линейным нормированным пространством называется множество E элементов $x, y, \ldots$, которое:

1) является линейным пространством;

2) является метрическим пространством

и в котором

3) расстояния $\rho(x, y)$ и линейные операции связаны следующими условиями:

а) расстояние не меняется при сдвиге, т. е.

$$\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y) \text{ при любых } x, y, z;$$

б) расстояния подчинены «условию однородности»:

$$\rho(\lambda x, 0)=|\lambda|\rho(x, 0)$$

для любого числа λ и любого элемента x.

Из аксиомы а) вытекает, что расстояние между двумя точками равно расстоянию их разности до нуля:

$$\rho(x, y)=\rho(x-y, y-y)=\rho(x-y, 0).$$

Поэтому достаточно знать расстояния от любого элемента до нуля. Расстояние $\rho(x, 0)$ называют *нормой* (или длиной) элемента x и обозначают $\|x\|$ или $|x|$. Из аксиом метрики и свойств 3) легко вывести, что норма любого элемента удовлетворяет условиям:

(α) $\|x\|>0$ при $x\neq 0$, $\|0\|=0$;

(β) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$;

(γ) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

Обратно, если в некотором линейном пространстве E введена норма, т. е. каждому элементу x сопоставлено число $\|x\|$ так, что выполнены условия (α) — (γ), то в пространстве E может быть введена метрика по формуле

$$\rho(x, y)=\|x-y\|$$

и пространство E становится линейным нормированным пространством. Обычно линейное пространство с нормой, удовлетворяющей условиям (α) — (γ), и называют *линейным нормированным пространством.*

Рассмотренные в § 1 этой главы метрические пространства $C(a, b)$, $D_m(a, b)$, $C_p(a, b)$ $(p=1, 2)$ являются линейными нормированными пространствами.

Действительно, в пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ расстояние вводилось по формуле

$$\rho(y, z)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)-z(x)|.$$

Очевидно, что аксиома 3) здесь выполнена. Норма элемента y определяется по формуле

$$\|y\|=\rho(y, 0)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)|.$$

В пространстве $D_m(a, b)$ функций с непрерывными производными до порядка m на отрезке $[a, b]$ расстояние вводилось по формуле

$$\rho(y, z) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|y(x) - z(x)|, \ \ldots, \ |y^{(m)}(x) - z^{(m)}(x)|\}.$$

Легко видеть, что и здесь выполнены оба свойства, требуемые аксиомой 3). Норма элемента y определяется по формуле

$$\|y\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|y(x)|, \ |y'(x)|, \ \ldots, \ |y^{(m)}(x)|\}.$$

В пространстве $C_p(a, b)\,(p = 1, 2)$ непрерывных функций на $[a, b]$ с расстоянием по формуле

$$\rho^p(y, z) = \int_a^b |y(x) - z(x)|^p\,dx$$

также выполнены оба требования аксиомы 3) (второе именно потому, что слева стоит ρ^p, а не ρ). Норма элемента y определяется по формуле

$$\|y\|^p = \int_a^b |y(x)|^p\,dx.$$

Множество, выделенное неравенством

$$\|x\| \leqslant 1,$$

есть шар радиуса 1 с центром в нуле пространства. Его называют *единичным шаром* пространства E.

Единичный шар (как и любой шар линейного нормированного пространства) *является выпуклым множеством.* Вообще множество M в линейном пространстве E называют выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x, y содержит все точки

$$z = \alpha x + \beta y, \qquad \alpha + \beta = 1, \qquad \alpha \geqslant 0, \qquad \beta \geqslant 0,$$

или, геометрически выражаясь, содержит отрезок, концами которого являются точки x и y. Выпуклость единичного шара следует непосредственно из аксиомы треугольника: если $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, то

$$\|z\| = \|\alpha x + \beta y\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\| \leqslant \alpha + \beta = 1.$$

Отметим некоторые общие свойства линейных нормированных пространств, связанные с понятием сходимости. Так как расстояние от точки x до точки y определяется как $\|x - y\|$, то факт сходимости последовательности x_n к элементу x записывается соотношением

$$\lim_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0.$$

Если $x_n \to x$, $y_n \to y$, *то* $x_n + y_n \to x + y$; действительно,

$$\|x+y-(x_n+y_n)\| = \|(x-x_n)+(y-y_n)\| \leqslant \\ \leqslant \|x-x_n\| + \|y-y_n\| \to 0.$$

Если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, *то* $\lambda_n x_n \to \lambda x$; действительно,

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| \leqslant \\ \leqslant |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\| \to 0.$$

В заключение скажем несколько слов о линейной изометрии линейных нормированных пространств. Два изоморфных линейных пространства могут иметь различные нормировки; таковы, например, $C(a, b)$ и $C_p(a, b)$. Если линейные нормированные пространства как линейные пространства изоморфны и как метрические пространства изометричны, они называются *линейно изометричными*. Например, линейно изометричны пространства $C(0, 1)$ и $C(0, 2)$, $C_p(0, 1)$ и $C_p(0, 2)$. Нужное взаимно однозначное соответствие может быть задано формулами:

$$C(0, 1) \ni \varphi(x) \longleftrightarrow \varphi(2x) \in C(0, 2); \; C_p(0, 1) \ni \varphi(x) \longleftrightarrow 2^{\frac{1}{p}} \varphi(2x) \in C_p(0, 2).$$

Впрочем, вместо точного термина «линейная изометрия» часто употребляют менее точный, но короткий — «изоморфизм».

3. Пополнение линейного нормированного пространства. Как и любое метрическое пространство, линейное нормированное пространство E может быть полным или неполным. В последнем случае пространство E можно пополнить, включив в более широкое полное метрическое пространство $\overline{E}$, как мы это делали в § 7. Полезно отметить, что пополнение линейного нормированного пространства является не только метрическим, но и линейным нормированным пространством. Для этого мы должны ввести в пополнение линейные операции и проверить выполнение аксиом 1) и 3).

Каждый элемент X пополнения метрического пространства E у нас был определен как символ, соответствующий классу конфинальных фундаментальных последовательностей пространства E.

Предположим теперь, что E — линейное нормированное пространство. Тогда, складывая две фундаментальные последовательности $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ почленно, мы получим последовательность

$$x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \; \ldots, \; x_n + y_n, \; \ldots,$$

которая также фундаментальна, поскольку

$$\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

При этом, заменяя последовательность $\{x_n\}$ на конфинальную $\{x_n''\}$ и последовательность $\{y_n\}$ на конфинальную $\{y'_n\}$, мы придем к последовательности сумм $\{x'_n+y'_n\}$, конфинальной с построенной $\{x_n+y_n\}$, поскольку

$$\|(x'_n+y'_n)-(x_n+y_n)\| \leqslant \|x'_n-x_n\|+\|y'_n-y_n\|.$$

Этот факт позволяет следующим образом ввести линейные операции над элементами пространства $\bar{E}$.

Выберем в классе X фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ и в классе Y фундаментальную последовательность $\{y_n\}$; будем считать суммой X и Y тот класс, который содержит фундаментальную последовательность $\{x_n+y_n\}$.

Предыдущие рассуждения подтверждают корректность этого определения и, в частности, независимость результата от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в соответствующих классах.

Аналогично произведение класса X на число λ определяется так: выбирают фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ в классе X и под классом λX понимают тот класс, который содержит фундаментальную последовательность $\{\lambda x_n\}$. Мы предоставляем читателю обосновать корректность этого определения.

Легко проверить, что аксиомы линейного пространства 1—8 здесь выполняются; в силу самого определения линейные операции над классами сводятся к соответствующим операциям над элементами исходного пространства. В частности, класс 0 состоит из всех последовательностей пространства E, сходящихся к нулю.

Нам остается проверить еще выполнение аксиомы 3 линейного нормированного пространства. Расстояние между классами X и Y определяется по формуле (1) § 7:

$$\rho(X, Y)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n),$$

где $\{x_n\}$ — любая фундаментальная последовательность из класса X, а $\{y_n\}$ — любая фундаментальная последовательность из класса Y. В частности, фиксируя в классах X, Y, Z фундаментальные последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, мы имеем:

$$\rho(X+Z, Y+Z)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n+z_n, y_n+z_n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=\rho(X, Y),$$

так что аксиома 3а) выполнена. Аналогично

$$\rho(\lambda X, 0)=\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda x_n, 0)=|\lambda|\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, 0)=|\lambda|\,\rho(X, 0),$$

так что выполнена и аксиома 3б). Тем самым наше утверждение полностью доказано.

4. Фактор-пространство. Пусть L — подпространство линейного пространства R (пока без метрики). Назовем элементы x и y *эквивалентными относительно* L, если их разность $x-y$ принадлежит L. Если два элемента x и y порознь эквивалентны третьему элементу z, то они эквивалентны и друг другу; действительно,

$$x-y=(x-z)-(y-z)\in L.$$

Поэтому все пространство R можно разбить на классы взаимно эквивалентных элементов так, что два элемента x и y попадают в один и тот же класс тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Подпространство L само образует один из классов; класс, содержащий элемент x_0, есть совокупность всех сумм x_0+l, где l пробегает все L. Будем обозначать классы эквивалентных элементов X, Y, ...

Покажем, что в совокупности всех классов X, Y, ... могут быть введены линейные операции. Определим сумму двух классов X и Y. Для этого возьмем в классе X произвольный элемент x и в классе Y произвольный элемент y; сумма $z=x+y$ лежит в некотором классе Z, который мы по определению будем считать суммой классов X и Y. Это определение выделяет класс Z по классам X и Y однозначно: если заменить x эквивалентным элементом $x=x+l$, $l\in L$, и элемент y эквивалентным элементом $y=y+l'$, $l'\in L$, то сумма $x+y$ заменяется элементом $x'+y'=(x+y)+(l+l')$, эквивалентным $x+y$. Аналогично определяется произведение класса X на число α: класс αX состоит из всех элементов, эквивалентных элементу αx, где x — любой фиксированный элемент класса X. Все аксиомы 1—8 линейного пространства (п. 1) выполняются здесь автоматически, приводясь к соответствующим аксиомам для самих элементов R. В частности, нулем пространства классов служит класс L.

Линейное пространство из классов, которое мы построили, называется *фактор-пространством* пространства R по его подпространству L и обозначается R/L.

Пусть теперь R — линейное нормированное пространство и L — его замкнутое подпространство. Тогда можно ввести норму и в фактор-пространство R/L. Именно, мы положим

$$\|X\|=\inf_{x\in X}\|x\|.$$

Проверим выполнение аксиом нормы.

а) Очевидно, что $\|L\|=0$, поскольку $0\in L$. Покажем, что $\|X\|>0$, если $X\neq L$. Если $\|X\|=0$, то в классе X имеется последовательность x_n, для которой $\|x_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть x — любой элемент класса X. Мы имеем $x-x_n=l_n\in L$. Но

$x - x_n \to x$, а L замкнуто; поэтому $x \in L$, $X = L$, что противоречит условию.

б) $\|\lambda X\| = \inf\limits_{z \in \lambda X} \|z\| = \inf\limits_{x \in X} \|\lambda x\| = |\lambda| \inf\limits_{x \in X} \|x\| = |\lambda| \, \|X\|$.

в) $\|X + Y\| = \inf\limits_{z \in X+Y} \|z\| \leqslant \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \|x+y\| \leqslant \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \{\|x\| + \|y\|\} =$
$= \inf\limits_{x \in X} \|x\| + \inf\limits_{y \in Y} \|y\| = \|X\| + \|Y\|$.

Итак, в рассматриваемом случае R/L — линейное нормированное пространство.

Предположим далее, что R — полное пространство. В этом случае *пространство R/L также полное пространство*. Для доказательства рассмотрим фундаментальную последовательность классов $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Для заданного k найдем номер n_k так, чтобы при любом $m = 1, 2, \ldots$ иметь $\|X_{n_k+m} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$; в частности, $\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. Выберем в классе X_{n_1} произвольный элемент x_1; далее, поскольку класс $X_{n_2} - X_{n_1}$ состоит из всевозможных разностей $x - x_1$, где x пробегает класс X_{n_2}, мы найдем элемент $x_2 \in X_{n_2}$ так, чтобы иметь $\|x_2 - x_1\| < 1$; далее таким же путем найдем элемент $x_3 \in X_{n_3}$ так, чтобы иметь $\|x_3 - x_2\| < \frac{1}{2}$, и т. д.; элемент x_{k+1} принадлежит классу $X_{n_{k+1}}$ и $\|x_{k+1} - x_k\| < \frac{1}{2^{k-1}}$. Последовательность x_k, очевидно, фундаментальна и в силу полноты R сходится к некоторому элементу x. Пусть X — класс, содержащий элемент x; мы имеем

$$\|X - X_{n_k}\| \leqslant \|x - x_k\| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Таким образом, последовательность классов X_{n_k} сходится к классу X. Но тогда и вся последовательность X_n, поскольку она фундаментальна, сходится к классу X, что и требовалось.

Примеры. *1.* Пусть имеется линейное пространство E, в которое введена *полунорма*. Это означает, что каждому элементу $x \in E$ сопоставлено число $\|x\|$ так, что удовлетворяются аксиомы нормы (β) и (γ) (т. е. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ и $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$), но аксиома ($\alpha$) не выполнена, так что имеются элементы $x \neq 0$, для которых $\|x\| = 0$. Покажем, как можно «исправить» пространство E — перейти от E к новому пространству, естественно связанному с E, в котором выполнены все три аксиомы (α), (β), (γ). Именно, совокупность *всех* элементов x с $\|x\| = 0$ в силу (β) и (γ) образует подпространство $Z \in E$. Образуем фактор-пространство R/Z; элементами его, как мы знаем, служат классы элементов, эквивалентные относительно Z. Все элементы одного класса X имеют одну и ту же полунорму, поскольку

$$\| x+l \| \leqslant \| x \| + \| l \| = \| x \|,$$
$$\| x \| \leqslant \| x+l-l \| \leqslant \| x+l \| + \| l \| = \| x+l \|.$$

Определим норму класса X как общее значение полунорм всех элементов класса X. Аксиомы (β) и (γ) здесь выполняются по построению, поскольку они выполнены для элементов x. Аксиома (α) также выполнена: норма класса L равна нулю, и если $\| X \| = 0$, то все элементы $x \in X$ имеют норму 0, так что X совпадает с Z. Таким образом, образуя фактор-пространство E по подпространству Z элементов с нулевой полунормой, мы получаем «настоящее» линейное нормированное пространство E/Z.

2. Пополнение линейного нормированного пространства E (п. 3) можно интерпретировать как построение фактор-пространства пространства R всех фундаментальных последовательностей из элементов пространства E по подпространству Z последовательностей, сходящихся к нулю.

Именно, пространство R обладает полунормой

$$\| \{x_n\} \| = \lim \| x_n \|.$$

Элементы с нулевой полунормой соответствуют последовательностям, сходящимся к нулю. Классы взаимно-эквивалентных элементов — это классы конфинальных фундаментальных последовательностей, и R/Z есть совокупность всех этих классов, нормированная как раз по правилу, указанному в примере 1.

Задачи. 1. Доказать, что аксиому треугольника в определении линейного нормированного пространства можно заменить условием выпуклости единичного шара.

2. На плоскости взято произвольное центрально-симметричное замкнутое выпуклое множество Q, у которого начало координат является внутренней точкой. Доказать, что существует норма, в которой Q является единичным шаром.

3. Пусть R — n-мерное нормированное пространство. Доказать, что последовательность $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ $(m = 1, 2, \ldots)$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда каждая из координат $\xi_j^{(m)}$ при $m \to \infty$ стремится к нулю.

Указание. Так как $\| x \| \leqslant \sum_{j=1}^{n} | \xi_j | \, \| e_j \|$, то из сходимости по координатам следует сходимость по норме. Для доказательства обратного достаточно рассмотреть шар $| x | \leqslant 1$ и показать, что координаты всех его точек ограничены фиксированной постоянной. Но если для некоторой последовательности x_m, $\| x_m \| \leqslant 1$, мы имеем $\max_j | \xi_j^{(m)} | = c_m \to \infty$, то $y_m = \frac{x_m}{c_m} \to 0$. В то же время среди координат каждого из векторов y_m имеется хотя бы одна, равная по модулю 1. Из последовательности y_m можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся по всем координатам, а следовательно и по норме, к некоторому вектору $y_0 \neq 0$, что противоречит данному соотношению $y_m \to 0$.

4. Доказать, что конечномерное подпространство нормированного пространства R всегда замкнуто в R.

Указание. Использовать задачу 3.

5. Пусть L — замкнутое подпространство нормированного пространства R, отличное от всего R. Доказать, что в единичном шаре пространства R имеется вектор y, отстоящий более чем на $\frac{1}{2}$ от всех векторов подпространства L.

Указание. Пусть $y_0 \in R - L$ и $d = \inf\limits_{x \in L} |y_0 - x|$; пусть, далее, найден $y_1 \in L$ такой, что $|y_0 - y_1| < 2d$. Тогда вектор $y = \frac{y_0 - y_1}{|y_0 - y_1|}$ удовлетворяет условию.

6. Постоянную $\frac{1}{2}$ в задаче 5 можно заменить любой постоянной, меньшей 1. Но заменить $\frac{1}{2}$ на 1, вообще говоря, нельзя. Для примера рассмотреть в пространстве $C(-1,1)$ подпространство L, состоящее из функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx.$$

7. В бесконечномерном линейном нормированном пространстве всегда существует ограниченное бесконечное множество, элементы которого имеют взаимные расстояния $> \frac{1}{2}$ (Ф. Рисс).

Указание. Использовать задачу 5.

Примечание. Результат этой задачи в соединении с результатами § 7 показывает, что условие компактности ограниченных множеств является необходимым и достаточным условием конечномерности нормированного пространства.

8. В полном линейном нормированном пространстве E имеется замкнутое множество F, содержащее на каждом луче tx_0, $0 \leq t < \infty$, некоторый отрезок $0 \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$. Доказать, что F содержит шар. (И. М. Гельфанд.)

Указание. $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} nF$; использовать задачу 2 к § 4, п. 5.

9 (Продолжение). Если замкнутое множество F в задаче 8 центрально симметрично и выпукло, то оно содержит шар с центром в точке 0.

Примечание. Без условия выпуклости теорема неверна даже на плоскости.

§ 9. Линейные и квадратичные функции в линейном пространстве

Среди функций, определенных на линейных нормированных пространствах, наиболее простыми являются линейные функции.

Определение линейной функции можно построить в любом линейном пространстве, без всякой метрики, именно: функция $f(x)$, определенная на линейном пространстве E, называется *линейной* (*линейным функционалом*), если она удовлетворяет условиям:

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых x, y из E;

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любого $x \in E$ и любого числа λ.

Найдем для примера общий вид линейного функционала в n-мерном пространстве E. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ есть базис в пространстве E;

положим для данного линейного функционала $f(x)$

$$f(e_1)=\alpha_1, \ldots, f(e_n)=\alpha_n.$$

Тогда для любого вектора $x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j \in E$ будем иметь:

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j.$$

Таким образом, всякий линейный функционал в n-мерном пространстве записывается в любом базисе как *линейная функция от координат вектора* x.

Задачи. 1. Если $f(x)$ есть линейный функционал в линейном пространстве E, то уравнением $f(x)=0$ в пространстве E выделяется подпространство E_1. Показать, что фактор-пространство E/E_1 (п. 4 § 8) одномерно.

Указание. Класс X элементов, эквивалентных относительно E_1, есть совокупность элементов, на которых $f(x)$ сохраняет постоянное значение. Отображение $x \to f(x)$ определяет изоморфизм между пространством E/E_1 и одномерным пространством.

2. Линейные функционалы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ называются линейно независимыми, если из $C_1f_1(x)+\ldots+C_nf_n(x)\equiv 0$ следует $C_1=\ldots=C_n=0$. Пусть E_n — подпространство пространства E, выделяемое системой уравнений $f_1(x)=0, \ldots, f_n(x)=0$. Показать, что фактор-пространство E/E_n n-мерно, если $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы.

Указание. На каждом классе X элементов, эквивалентных относительно E_n, функционалы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ сохраняют постоянные значения. Отображение $x \to \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ пространства E в n-мерное пространство R_n определяет изоморфизм фактор-пространства E/E_n с некоторым подпространством $R' \subset R_n$, имеющим, например, k измерений. Если бы мы имели $k<n$, то существовала бы линейная зависимость $C_1f_1(x)+\ldots+C_nf_n(x)\equiv 0$; таким образом, $k=n$, $R'=R_n$.

3. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — линейно независимые функционалы в линейном пространстве E и E_n — подпространство, фигурирующее в задаче 2. Показать, что всякий линейный функционал g, обращающийся в нуль на E_n, есть линейная комбинация функционалов $f_1, \ldots, f_n$, так что $g=\lambda_1f_1+\ldots+\lambda_nf_n$.

Указание. Можно однозначно определить g на классах элементов, эквивалентных относительно E_n, и тем самым определить g на пространстве E/E_n. Использовать далее общий вид линейного функционала в конечномерном пространстве.

4. Для всяких n линейно независимых функционалов $f_1, \ldots, f_n$ найти n элементов $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы иметь $\det \| f_j(x_k) \| \neq 0$.

Указание. Искомые элементы выбрать произвольно по одному в каждом из n линейно независимых классов n-мерного пространства E/E_n (задача 2).

Заметим, что линейная функция от координат вектора x n-мерного пространства E, очевидно, есть непрерывная функция от x в смысле § 7. Поэтому линейный функционал в конечномерном пространстве всегда есть непрерывная функция.

В бесконечномерных пространствах бывают линейные функционалы как непрерывные, так и не непрерывные. Мы ограничимся рассмотрением только класса непрерывных линейных функционалов.

Укажем два важных примера линейных непрерывных функционалов в пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных функций $y(x)$ на отрезке $[a, b]$:

а) $F(y) = y(x_0)$; это значит, что функционал F ставит в соответствие каждой точке пространства $C(a, b)$, т. е. непрерывной функции $y(x)$, значение этой функции в фиксированной точке x_0 отрезка $[a, b]$.

б) $F(y) = \int\limits_a^b f(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$, где $f(\xi)$ — фиксированная непрерывная функция от ξ.

Мы предоставляем читателю проверку требуемых свойств непрерывности и линейности этих функционалов.

Заметим, что линейный функционал $F(y) = y(x)_0$ в пространстве $C_p(a, b)$ уже не является непрерывным[1]).

Приведем теперь некоторые общие свойства линейных непрерывных функционалов в нормированном пространстве.

Лемма 1. *Линейный функционал $f(x)$, непрерывный в точке $x = 0$, ограничен (по модулю) в любом шаре $\|x\| \leqslant r$.*

Действительно, из непрерывности функционала $f(x)$ в точке $x = 0$ следует, что существует шар $U = \{x\colon \|x\| \leqslant \delta\}$, в котором значения функционала $f(x)$ ограничены заданным числом ε. Если теперь $\|x\| \leqslant r$, то $\frac{\delta}{r} x \in U$, поэтому

$$\left| f\left(\frac{\delta}{r}\, x\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Но так как функционал $f(x)$ линеен, то $f\left(\frac{\delta}{r}\, x\right) = \frac{\delta}{r} f(x)$ и, следовательно, при $\|x\| \leqslant r$

$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon r}{\delta},$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Если некоторый линейный функционал $f(x)$ ограничен в единичном шаре $\|x\| \leqslant 1$, так что, например, $|f(x)| \leqslant K$ в этом шаре, то функционал $f(x)$ при любом x удовлетворяет неравенству*

$$|f(x)| \leqslant K \|x\|$$

и непрерывен на всем пространстве E.

Действительно, для любого x отношение $\frac{x}{\|x\|}$ лежит в единичном шаре; поэтому по условию

$$f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}\, |f(x)| \leqslant K, \qquad |f(x)| \leqslant K \|x\|,$$

---

[1]) В данном примере функционал $F(y)$ определен в неполном пространстве. Пример с полным пространством см. в Дополнении в конце книги.

чем доказано первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из неравенства

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x-x_0)|\leqslant K|x-x_0|.$$

Как следствие из лемм 1 и 2 получаем, что для линейного функционала *из непрерывности в одной точке* $x=0$ *следует непрерывность всюду.*

Точная верхняя граница значений $|f(x)|$ в единичном шаре называется *нормой функционала* f и обозначается через $\|f\|$. В силу леммы 2 для любого $x \in E$ справедливо неравенство

$$|f(x)|\leqslant \|f\|\cdot\|x\|.$$

Задача. Линейный функционал $f(x)$ ограничен в шаре $\|x-x_0\|\leqslant r$. Доказать, что он непрерывен во всем пространстве E.

Часто приходится иметь дело с линейными функциями от нескольких аргументов: билинейными, трилинейными и т. д. Приведем определение билинейного функционала. Функция $f(y, z)$ от пары аргументов y, z, меняющихся в линейном пространстве, называется *билинейным функционалом*, если она представляет собой линейный функционал от z при каждом фиксированном y и линейный функционал от y при каждом фиксированном z.

В n-мерном пространстве легко можно найти общий вид билинейного функционала. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис n-мерного пространства и $f(y, z)$ — заданный билинейный функционал. Определим n^2 чисел β_{jk} $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ равенствами

$$\beta_{jk}=f(e_j, e_k).$$

Пусть теперь $y=\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j$ и $z=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k e_k$ — два произвольных вектора. Вычислим значение $f(y, z)$:

$$f(y, z)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j, \sum_{k=1}^{n}\zeta_k e_k\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_j\zeta_k f(e_j, e_k)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}\eta_j\zeta_k, \qquad (1)$$

т. е. функционал $f(y, z)$ в базисе $\{e_j\}$ записывается как билинейная форма от координат векторов y и z.

В бесконечномерном случае мы будем рассматривать билинейные функционалы с дополнительным предположением непрерывности. Напомним, что функция $f(y, z)$ называется непрерывной, например, при $y=0$, $z=0$, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$ так, что при $\|z\|<\delta$, $\|y\|\leqslant\delta$ мы имеем

$$|f(y, z)|<\varepsilon.$$

Из этого условия для билинейного непрерывного функционала $f(y, z)$ можно вывести следующую важную оценку: *для любых* y *и* z

$$|f(y, z)| \leqslant C\|y\|\cdot\|z\| \tag{2}$$

с фиксированной постоянной C. Действительно, в силу непрерывности $f(y, z)$ при $y=0$, $z=0$ имеется шар, например, радиуса δ, в котором $|f(y, z)|$ не превосходит заданной величины, например 1. Но тогда для любых y, z

$$\left|f\left(\delta\frac{y}{\|y\|},\ \delta\frac{z}{\|z\|}\right)\right| \leqslant 1,$$

откуда

$$|f(y, z)| \leqslant \frac{1}{\delta^2}\|y\|\cdot\|z\|. \tag{3}$$

Функция от y, которая получается при замене в билинейном функционале $f(y, z)$ аргумента z на y, т. е. функция $f(y, y)$, называется *квадратичным функционалом*. В частности, в n-мерном пространстве квадратичный функционал, как следует из формулы (1), всегда может быть записан в виде

$$f(y, y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}\eta_j\eta_k,$$

т. е. в виде квадратичной формы от координат вектора y. В общем случае квадратичный функционал удовлетворяет неравенству

$$|f(y, y)| \leqslant C\|y\|^2,$$

которое получается из неравенства (3) заменой z на y.

Аналогично можно построить трилинейные функционалы, кубические функционалы и т. д.

Заключительное замечание. Появление в начале XX века и глубокое проникновение в математический анализ теории метрических пространств было подготовлено всем предыдущим развитием анализа. Основные понятия теории, включая полноту, компактность и сепарабельность, были сформулированы в 1906 г. М. Фреше (франц. математик, р. 1878). Общее определение линейного нормированного пространства и линейных функционалов в нем (отсюда «функциональный анализ») было введено в 1922 г. Стефаном Банахом (польский математик, 1892—1945) и Норбертом Винером (американский математик, р. 1894). Для дальнейшего ознакомления можно рекомендовать «Теорию множеств» Хаусдорфа и «Курс функционального анализа» Банаха (Киев, 1948).

ГЛАВА III

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В классическом анализе функций одной или нескольких переменных одной из центральных задач была задача об отыскании экстремумов дифференцируемых функций. В функциональных пространствах, рассмотрение которых мы начали в главе II, экстремальные задачи также играют важную роль. Например, задача об определении формы минимальной поверхности вращения, натянутой на два круга с общей осью (рис. 4), может быть истолкована как задача об отыскании точки экстремума функции

$$F(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

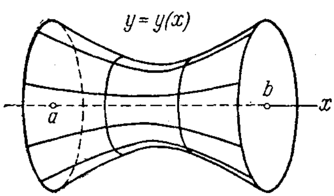


Рис. 4.

аргумент которой $y = y(x)$ сам есть элемент линейного нормированного пространства (в данном случае, например, пространства $D_1(a, b)$).

Вариационное исчисление имеет своей целью такое обобщение построений классического анализа, которое даст возможность решать подобные экстремальные задачи. Более широко понимаемое, вариационное исчисление есть анализ бесконечно малых (дифференциальное исчисление) в бесконечномерных пространствах.

§ 1. Дифференцируемые функционалы

1. Сначала напомним определение дифференцируемой функции в классическом анализе.

Если функция $F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные производные (в обычном смысле) по каждому из аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то ее приращение при переходе из точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в точку $x + h = (x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n)$, как известно, может быть записано в форме

$$\Delta F(x) = F(x+h) - F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x_j + \theta h_j)}{\partial x_j} h_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x_j)}{\partial x_j} h_j + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial F(x_j+\theta h_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial F(x_j)}{\partial x_j} \right] h_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x_j)}{\partial x_j} h_j + r(x, h) \qquad (0 < \theta < 1). \tag{1}$$

Первый член в правой части есть полный дифференциал функции F; он представляет собой выражение, линейно зависящее от составляющих вектора смещения h. Второй член в силу непрерывности частных производных $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ есть *бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с* $|h|$; это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ выполняется неравенство

$$|r(x, h)| \leqslant \varepsilon |h|.$$

В частности, если функция $F(x)$ обладает в окрестности точки x вторыми производными $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, то величина $r(x, h)$ имеет вид

$$r(x, h) = \sum \frac{\partial^2 F(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \ldots, x_n + \theta h_n)}{\partial x_i \partial x_k} h_i h_k \qquad (0 < \theta < 1),$$

и, если указанные вторые производные ограничены в окрестности точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ числом N, для $r(x, h)$ получается оценка

$$|r(x, h)| \leqslant Nn^2 |h|^2, \tag{1'}$$

которая показывает, что в этом случае $r(x, h)$ имеет порядок малости по сравнению с h не ниже второго.

Таким образом, в общем случае первое слагаемое в сумме (1) при достаточно малых смещениях h имеет господствующее значение; поэтому оно называется *главной линейной частью приращения функции* $F(x)$. На основании этих свойств строится общее определение дифференцируемой функции в n-мерном пространстве R_n. Именно, функция $F(x)$, определенная на множестве S в пространстве R_n, называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in S$, если ее приращение при переходе в точку $x_0 + h \in S$ можно записать в форме

$$\Delta F(x) = F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0, h) + r(x_0, h),$$

где $L(x_0, h)$ — линейная функция от смещения h, а $r(x_0, h)$ — бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с h в том смысле, как это было объяснено выше.

2. Это определение переносится и на случай функции, заданной в линейном нормированном пространстве, а именно: функционал $F(y)$, заданный в линейном нормированном пространстве E, называется *дифференцируемым в точке* $y_0 \in E$, если его приращение при переходе в точку y_0+h можно записать в форме

$$\Delta F(y)=F(y_0+h)-F(y_0)=L(y_0, h)+r(y_0, h),$$

где $L(y_0, h)$ — линейный непрерывный функционал от смещения h, а $r(y_0, h)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с h; это последнее означает, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что при $\|h\|<\delta$ выполняется неравенство $|r(y_0, h)|<\varepsilon\|h\|$.

Заметим, что может существовать лишь единственный линейный непрерывный функционал $L(y_0, h)$, удовлетворяющий поставленным условиям. Действительно, если бы мы имели

$$\Delta F(y)=L_1(y_0, h)+r_1(y_0, h)=L_2(y_0, h)+r_2(y_0, h),$$

то, вычитая, получили бы

$$L_1(y_0, h)-L_2(y_0, h)=r_2(y_0, h)-r_1(y_0, h)=r(y_0, h),$$

где $r(y_0, h)$ есть снова бесконечно малая высшего порядка по сравнению с h. Разность $L_1(y_0, h)-L_2(y_0, h)=L(y_0, h)$ представляет собой новый линейный непрерывный функционал от h. Для заданного $\varepsilon>0$ найдем такое $\delta>0$, что при $\|h\|<\delta$ выполняется неравенство

$$|r(y_0, h)|=|L(y_0, h)|<\varepsilon\|h\|.$$

Разделяя последнее неравенство на $\|h\|$, мы получаем, что в единичном шаре $\|h\|\leqslant 1$ значения линейного функционала $L(y_0, h)$ не превосходят по абсолютной величине числа ε. Но так как ε можно выбрать произвольно малым, то $L(y_0, h)\equiv 0$, $L_1(y_0, h)\equiv L_2(y_0, h)$, что и требуется.

Линейный функционал $L(y_0, h)$, определенный, по доказанному, единственным образом, называется *дифференциалом* или, чаще, *вариацией функционала F в точке* y_0 и обозначается $\delta F(y_0, h)$.

Известно, что дифференцируемая функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных имеет производную по каждому направлению. Это свойство переносится и на дифференцируемые функционалы в любом линейном нормированном пространстве:

Лемма. *Если функционал $F(y)$ дифференцируем при $y=y_0$, то при любом h функция $F(y_0+th)$, как функция от числа t, дифференцируема в обычном смысле по t при $t=0$ и ее производная равна $L(y_0, h)=\delta F(y_0, h)$.*

Доказательство. Искомая производная есть предел отношения

$$\frac{F(y_0+th)-F(y_0)}{t}=\frac{\delta F(y_0, th)+r(y_0, th)}{t}=\delta F(y_0, h)+\frac{r(y_0, th)}{t}. \qquad (2)$$

По условию для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $\|th\|=|t|\,\|h\|<\delta$ имеет место неравенство

$$|r(y_0, th)|<\varepsilon\|th\|=\varepsilon|t|\,\|h\|.$$

Отсюда следует, что частное

$$\frac{|r(y_0, th)|}{|t|}<\varepsilon\|h\|$$

и при $t\to 0$ может быть сделано как угодно малым. Это показывает, что отношение, стоящее в левой части (2), при $t\to 0$ имеет предел $\delta F(y_0, h)$, что и требовалось.

Замечание. *Если функционал $F(y)$ всюду дифференцируем, то функция $F(y+th)$ при фиксированных y и h дифференцируема при каждом t.* Действительно, положим $t=t_0+\tau$; тогда

$$F(y+th)=F(y+t_0h+\tau h)=F(y_0+\tau h) \qquad (y_0=y+t_0h);$$

по доказанному эта функция от τ дифференцируема по τ при $\tau=0$; но тогда и функция $F(y+th)$ дифференцируема по t при $t=t_0$.

3. *Примеры.* *1.* Линейный непрерывный функционал $F(y)$, очевидно, всегда есть дифференцируемая функция, поскольку

$$F(y+h)-F(y)=F(h)$$

и все приращение функционала сводится к линейному выражению по h.

2. Рассмотрим функционал

$$F(y)=\int_a^b f(x, y(x))\,dx$$

в пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Ядро $f(x, y)$ предполагается непрерывной и обладающей непрерывными частными производными до второго порядка (в обычном смысле) функцией своих аргументов в области $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<\infty$. Составим приращение функционала $F(y)$, когда функциональный аргумент $y(x)$ получит смещение $h(x)$:

$$\Delta F(y)=F(y+h)-F(y)=$$
$$=\int_a^b \{f[x, y(x)+h(x)]-f[x, y(x)]\}\,dx. \qquad (3)$$

Согласно определению дифференцируемой функции $f(x, y)$ мы имеем:

$$f(x, y+h)-f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial y}h+r(x, y, h),$$

где $r(x, y, h)$ при фиксированных x и y есть бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с h. В каждой ограниченной (по y) области вторые производные функции $f(x, y)$ ограничены по модулю, например, числом N, и функция $r(x, y, h)$, по предыдущему, допускает оценку

$$|r(x, y, h)| \leqslant N|h|^2.$$

Поэтому интеграл (3) приводится к виду

$$\Delta F(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h(x)\, dx + \varepsilon(y),$$

где функция $\varepsilon(y)$ ограничена по модулю числом

$$\int_a^b |r(x, y, h(x))|\, dx \leqslant N \int_a^b |h^2(x)|\, dx \leqslant N(b-a) \max |h^2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant N(b-a)\, \|h\|^2.$$

Мы видим, что приращение функционала $F(y)$ разлагается на главную линейную часть и бесконечно малую более высокого порядка. Таким образом, функционал $F(y)$ дифференцируем в пространстве $C(a, b)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h(x)\, dx.$$

3. Рассмотрим функционал

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

в пространстве $D_1(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, обладающих непрерывными производными первого порядка. Ядро $f(x, y, y')$ предполагается непрерывной функцией, обладающей непрерывными производными до второго порядка, определенной в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y, y' < \infty$. Составим приращение функционала $F(y)$, перейдя от аргумента $y = y(x)$ к аргументу $y(x) + h(x)$, $h \in D_1(a, b)$:

$$\Delta F(y) = F(y+h) - F(y) =$$
$$= \int_a^b \{f[x, y(x) + h(x), y'(x) + h'(x)] - f(x, y, y')\}\, dx =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x)\right] dx + \int_a^b r(x, y, y', h, h')\, dx.$$

Первое слагаемое, очевидно, линейно относительно смещения $h(x)$. Если N означает верхнюю границу вторых производных функции f по аргументам y и y' в некоторой ограниченной по y и y' области и поскольку в пространстве $D_1(a, b)$, как мы знаем,

$$\|h\| = \max\{|h(x)|, \quad |h'(x)|\},$$

то, обозначая $\mu = \|h\|$, мы получим для второго слагаемого оценку (см. неравенство (1'))

$$\int_a^b |r(x, y, h, y', h')|\, dx \leqslant 4N \int_a^b \mu^2 dx = 4N\mu^2 (b-a).$$

Полученное выражение второго порядка малости по сравнению с $\|h\|$. Мы видим, что функционал $F(y)$ дифференцируем в пространстве $D_1(a, b)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\right] dx.$$

4. Аналогично функционал

$$F(y) = \int_a^b f[x, y(x), \ldots, y^{(m)}(x)]\, dx$$

дифференцируем в пространстве $D_m(a, b)$; его вариация имеет вид

$$\delta F = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} h^{(m)}(x)\right] dx.$$

От функции f здесь снова требуется существование и непрерывность вторых производных (по всем аргументам).

5. Можно рассматривать также функционалы, аргументом которых служит функция нескольких переменных. Пусть для определенности рассматривается функционал

$$F(z) = \iint_G f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))\, dx\, dy, \tag{4}$$

где для сокращения введены обозначения

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Этот функционал мы рассмотрим, естественно, в пространстве $D_1(G)$ функций $z(x, y)$, непрерывных вместе с первыми частными производными в области G. Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|z\| = \max_{(x, y) \in G} \left\{ |z(x, y)|, \left|\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right| \right\}.$$

Предполагая, что функция f обладает непрерывными вторыми производными по всем аргументам, преобразуем выражение приращения функционала F, когда функциональный аргумент $z(x, y)$ получает приращение $h(x, y)$:

$$\Delta F = \iint_G [f(x, y, z+h, z_x+h_x, z_y+h_y) - f(x, y, z, z_x, z_y)]\,dx\,dy =$$
$$= \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial z_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} h_y\right] dx\,dy + \iint_G r(x, y, z, z_x, z_y, h, h_x, h_y)\,dx\,dy.$$

Первое слагаемое линейно по h. Второе слагаемое при $\|h\| = \mu$ оценивается неравенством

$$\iint_G |r(x, y, z, z_x, z_y, h, h_x, h_y)|\,dx\,dy \leqslant 9N \iint_G \mu^2\,dx\,dy = 9N\mu^2\,|G|,$$

где N означает верхнюю границу модулей вторых производных функции F, а $|G|$ есть площадь области G. Итак, функционал (4) дифференцируем в пространстве $D_1(G)$, и его вариация имеет вид

$$\delta F(z, h) = \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial z_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} h_y\right] dx\,dy.$$

6. Рассмотрим функционал, зависящий от нескольких функциональных аргументов, например

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\,dx.$$

Его естественно рассматривать в пространстве $D_1^{(n)}$, элементами которого являются вектор-функции $y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Норму вектор-функции $y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ определим формулой

$$\|y\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|y_1(x)|, \ldots, |y_n(x)|, |y_1'(x)|, \ldots, |y_n'(x)|\}.$$

Легко проверить, что здесь выполнены все аксиомы линейного нормированного пространства.

Предполагая, что f имеет ограниченные (числом N) вторые производные по $y_1, \ldots, y_n'$, оценим приращение функционала F, когда вектор-функция $y = (y_1, \ldots, y_n)$ получит приращение $h = (h_1, \ldots, h_n)$:

$$\Delta F(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1 + h_1, \ldots, y_n' + h_n')\,dx - \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n')\,dx =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n'} h_n'\right) dx + \int_a^b r(x, y_1, \ldots, y_n', h_1, \ldots, h_n')\,dx.$$

Первый член получившегося результата линеен по $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

Последний член при $\|h\| \leqslant \mu$ допускает оценку

$$\int_a^b |r(x, x_1, \ldots, y'_n, h_1, \ldots, h'_n)|\, dx \leqslant n^2 N \int_a^b \mu^2\, dx = n^2 N (b-a)\mu^2.$$

Это величина второго порядка по сравнению с μ. Таким образом, функционал F в данном случае также дифференцируем, и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y'_n} h'_n \right] dx.$$

Задачи. 1. Проверить дифференцируемость следующих функционалов:
а) $F(y) = y(a)$ в пространстве $C(a, b)$;
б) $F(y) = y(a)$ в пространстве $D_1(a, b)$;
в) $F(y) = y^2(a)$ в пространстве $C(a, b)$;
г) $F(y) = \sqrt{1 + y'^2(a)}$ в пространстве $D_1(a, b)$;
д) $F(y) = |y(a)|$ в пространстве $C(a, b)$.

Отв. а) — г) дифференцируемые, д) нет.

2. Проверить, что функционал $F^2(y)$ дифференцируем, если дифференцируем $F(y)$. Написать вариацию $F^2(y)$.

Отв. $\delta F^2(y, h) = 2F(y)\,\delta F(y, h)$.

4. В некоторых случаях, так же как и в классическом анализе, остаток $r(y, h)$ допускает дальнейшую расшифровку. Предположим, что остаток $r(y, h)$ приращения дифференцируемого функционала $F(y)$ после выделения главной линейной части может быть разложен на квадратичный функционал и новый остаток выше второго порядка малости

$$r(y, h) = \frac{1}{2} Q(y, h, h) + r_2(y, h),$$

так что для любого $\delta > 0$ можно найти $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|h\| < \delta$ будет

$$|r_2(y, h)| < \varepsilon |h|^2.$$

В этом случае квадратичный функционал $Q(y, h, h)$ называют вторым дифференциалом или *второй вариацией* функционала $F(y)$; сам функционал $F(y)$ называют в этом случае *дважды дифференцируемым*. Так же, как и первый дифференциал, определен однозначно и второй дифференциал.

Функционалы $F(y)$ интегрального типа, которые мы выше рассматривали, например

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx, \tag{1}$$

в пространстве $D_1(a, b)$ являются дважды дифференцируемыми, если подынтегральная функция f обладает непрерывными производными до третьего порядка включительно. Выражения для второй вариации таких функционалов легко получаются разложением f от аргумента $y+h$ по формуле Тейлора до членов третьего порядка. Так, для функционала

$$F(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$$

вторая вариация имеет вид

$$\delta^2 F(y, h)=\int_a^b f_{yy}(x, y)\,h^2\,dx; \tag{2}$$

для функционала (1)

$$\delta^2 F(y, h)=\int_a^b [f_{yy}h^2+2f_{yy'}hh'+f_{y'y'}h'^2]\,dx; \tag{3}$$

для функционала

$$F(y)=\int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\,dx$$

имеем

$$\delta^2 F=\int_a^b [f_{yy}h^2+\ldots+f_{y^{(k)}y^{(l)}}h^{(k)}h^{(l)}+\ldots+f_{y^{(m)}y^{(m)}}(h^{(m)})^2]\,dx; \tag{4}$$

для функционала

$$F(z)=\iint_G f(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy$$

аналогично

$$\delta^2 F=\iint_G [f_{zz}h^2+f_{zz_x}hh_x+\ldots+f_{z_yz_y}h_y^2]\,dx\,dy; \tag{5}$$

наконец, для функционала

$$F(y_1, \ldots, y_n)=\int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx$$

получается

$$\delta^2 F=\int_a^b [\sum f_{y_iy_k}h_ih_k+\sum f_{y_iy_k'}h_ih_k'+\sum f_{y_k'y_i'}h_k'h_i']\,dx. \tag{6}$$

Задачи. 1. Доказать единственность второй вариации.

2. Доказать, что квадратичный функционал дифференцируем, и найти его первую и вторую вариации.

Отв. $\delta A(y, y; h) = A(y, h) + A(h, y)$, $\delta^2 A(y, y; h, h) = 2A(h, h)$.

3. Написать вторую вариацию функционала $e^{F(y)}$, где $F(y)$—дважды дифференцируемый функционал.

Отв. $\delta^2 e^{F(y)} = \{[\delta F(y, h)]^2 + \delta^2 F(y, h, h)\} e^{F(y)}$.

§ 2. Экстремумы дифференцируемых функционалов

1. Рассмотрим некоторый дифференцируемый функционал F в линейном нормированном пространстве E. Поставим задачу найти те точки y, в которых функционал F достигает экстремальных значений — максимума или минимума.

По определению, функционал F достигает в точке y_0 *относительного минимума*, если существует такая окрестность точки y_0 (шар с центром в точке y_0), в пределах которой выполняется неравенство

$$F(y) \geqslant F(y_0).$$

Если для точки y_0 существует окрестность, в пределах которой выполняется противоположное неравенство

$$F(y) \leqslant F(y_0),$$

то говорят, что в точке y_0 функционал F имеет *относительный максимум*. В анализе для определения точек относительного экстремума дифференцируемых функций приравнивают нулю их дифференциалы. Покажем, что аналогичное правило справедливо и для дифференцируемых функционалов в линейных нормированных пространствах.

Лемма. *Во всякой точке y_0, где дифференцируемый функционал $F(y)$ достигает экстремума, первая вариация $\delta F(y_0, h)$ функционала F при любом приращении h равна нулю.*

Доказательство. При произвольно заданном h рассмотрим функцию $F(y_0 + th)$ от переменного t. Эта функция дифференцируема по t и при $t = 0$ имеет экстремальное значение. Поэтому ее производная при $t = 0$ обращается в нуль. Но эта производная равна $\delta F(y_0, h)$ в силу леммы § 1. Таким образом, при любом h выражение $\delta F(y_0, h)$ равно нулю, что и требовалось.

Всякая точка y_0, в которой первая вариация $\delta F(y_0, h)$ функционала $F(y)$ обращается в нуль при любом h, называется *стационарной точкой* функционала.

Таким образом, мы должны приравнять нулю вариацию $\delta F(y_0, h)$ (тождественно по h) и выяснить, при каких y_0 это возможно. Мы найдем тогда стационарные точки функционала. Далее из всех стационарных точек нужно отобрать интересующие нас точки максимума и минимума.

2. Если функционал $F(y)$ дважды дифференцируем, то для исследования этого последнего вопроса можно привлечь вторую вариацию функционала. Поскольку в стационарной точке y_0 первая вариация функционала равна нулю, приращение его при переходе в точку y_0+h записывается в виде

$$\Delta F=\frac{1}{2}\delta^2F(y_0,\ h)+r_1(y_0,\ h),$$

где величина $r_1(y_0,\ h)$ при любом $\varepsilon>0$ в шаре $\|h\|<\delta(\varepsilon)$ допускает оценку

$$|r_1(y_0,\ h)|\leqslant\varepsilon\|h\|^2.$$

Эту оценку можно записать в форме равенства

$$r_1(y_0,\ h)=\theta\varepsilon\|h\|^2,\ \text{где}\ -1\leqslant\theta\leqslant1.$$

Отсюда при $\|h\|<\delta(\varepsilon)$ выражение приращения функционала приводится к виду

$$\Delta F(y_0,\ h)=\frac{1}{2}\delta^2F(y_0;\ h)+\theta\varepsilon\|h\|^2. \tag{1}$$

Теперь мы можем сформулировать некоторое необходимое и некоторое достаточное условие минимума. А именно:

а) *Если стационарная точка y_0 есть точка минимума функционала $F(y)$*, то $\delta^2F(y_0, h_0)\geqslant0$ *при любом h_0.*

б) *Если в стационарной точке y_0 при всех h выполняется неравенство*

$$\delta^2F(y_0,\ h)\geqslant C\|h\|^2\quad (C>0\ \text{фиксировано}), \tag{1'}$$

то y_0 есть точка минимума функционала $F(y)$.

Для доказательства утверждения а) допустим обратное, т. е. допустим, что при некотором h_0 имеет место неравенство $\delta^2F(y_0,\ h_0)<0$. Возьмем $\varepsilon<\frac{|\delta^2F(y_0,\ h_0)|}{2\|h_0\|^2}$ и положим $h=th_0$, где t настолько мало, что $\|h\|=|t|\,\|h_0\|<\delta(\varepsilon)$. Тогда

$$\Delta F(y_0,\ h)=\frac{1}{2}\delta^2F(y_0,\ th_0)+\theta\varepsilon\|th_0\|^2=t^2\left[\frac{\delta^2F(y_0,\ h_0)}{2}+\theta\varepsilon\|h_0\|^2\right]<0,$$

так что y_0 не есть точка минимума функционала $F(y)$.

Для доказательства утверждения б) возьмем $\varepsilon<\frac{C}{2}$ и оценим снизу приращение функционала $F(y)$ в шаре радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром в точке y_0. Используя (1′), из (1) получаем

$$\Delta F(y_0,\ h) = \frac{1}{2}\delta^2 F(y_0,\ h) + \theta\varepsilon \|h\|^2 \geqslant \|h\|^2 \left(\frac{C}{2} + \theta\varepsilon\right) > 0 \text{ при } h \neq 0,$$

и, следовательно, y_0 есть точка минимума функционала $F(y)$.

Условие б), вообще говоря, нельзя ослабить, заменив его, казалось бы, естественным условием $\delta^2 F(y_0,\ h) > 0$ для всех h. Примером может служить функционал

$$F(y) = \int_0^1 xy^2(x)\,dx - \int_0^1 y^3(x)\,dx = \int_0^1 y^2(x)\,[x - y(x)]\,dx$$

в пространстве $C(0,\ 1)$. Точка $y(x) \equiv 0$ — стационарная точка для этого функционала, и вторая вариация

$$\delta^2 F(0,\ h) = \int_0^1 xh^2(x)\,dx$$

положительна для каждой функции $h(x) \neq 0$. Но функционал $F(y)$ принимает в любой окрестности нуля и отрицательные значения; достаточно при заданном $\varepsilon > 0$ взять в качестве $y(x)$ любую неотрицательную функцию, положительную при $x = 0$, не превосходящую $\varepsilon - x$ при $x < \varepsilon$ и равную нулю при $x \geqslant \varepsilon$.

Задачи. 1. Доказать, что линейный функционал, отличный от тождественного нуля, не имеет экстремумов.

2. Показать, что теория экстремума функционала

$$F(y) = f(y(x))\,\big|_{x=a}$$

в пространстве $C(a,\ b)$ совпадает с обычной теорией экстремума для функции $f(\xi)$.

3. Показать, что теория экстремума функционала

$$F(y) = f(y(a),\ y(b))$$

в пространстве $C(a,\ b)$ совпадает с обычной теорией экстремума для функции двух переменных $f(\xi,\ \eta)$.

3. В качестве примера проанализируем экстремальную задачу для функционала вида

$$F(y) = \int_a^b f(x,\ y(x))\,dx.$$

Этот функционал имеет первую вариацию (стр. 84)

$$\delta F(y,\ h) = \int_a^b \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,h(x)\,dx.$$

Пусть $y_0 = y_0(x)$ — искомая точка экстремума. В этой точке при любой функции $h(x)$ выражение $\delta F(y_0', h)$ должно обращаться в нуль. Мы получаем уравнение

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} h(x)\, dx = 0. \qquad (2)$$

Ниже будет доказано, что такое уравнение может удовлетворяться лишь при условии, что

$$\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} \equiv 0 \text{ по } x. \qquad (3)$$

Это уравнение, если его разрешить относительно y_0, даст, вообще говоря, одну или несколько функций от x — элементов пространства $C(a, b)$, в которых только и возможны экстремумы рассматриваемого функционала.

Вторая вариация функционала $F(y)$ имеет вид (стр. 88)

$$\delta^2 F(y_0, h) = \int_a^b \frac{\partial^2 f(x, y_0)}{\partial y^2} h^2(x)\, dx.$$

Если она неотрицательна при любой $h(x)$, то, очевидно, $f_{yy} \geqslant 0$. Поэтому неравенство $f_{yy} \geqslant 0$ служит необходимым условием минимума функционала F. С другой стороны, если при всех x имеем $f_{yy}(x, y_0(x)) > 0$, то стационарная точка $y_0(x)$ является минимумом функционала, поскольку

$$\Delta F(y_0, h) =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{1}{2} f_{yy}(x, y_0(x))\, h^2(x) + \frac{1}{6} f_{yyy}(x, y_0(x) + \theta(x)\, h(x))\, h^3(x)\right] dx =$$
$$= \int_a^b h^2(x) \left[\frac{1}{2} f_{yy} + \frac{1}{6} f_{yyy} h\right] dx > 0$$

при достаточно малых h.

4. Теперь вернемся к уравнению (2). Нам нужно доказать, что если оно выполняется для всех непрерывных $h(x)$, то имеет место равенство (3). Для этого применим лемму, которая и в дальнейшем нам будет неоднократно полезна:

Лемма. *Если для непрерывной функции $A(x)$ при любой непрерывной функции $h(x)$*

$$\int_a^b A(x)\,h(x)\,dx = 0, \tag{4}$$

то $A(x) \equiv 0$.

Доказательство. Если $A(x) \not\equiv 0$, то имеется внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, в которой $A(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $A(x_0) = c > 0$ и $U(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\}$ — окрестность точки x_0, в которой выполняется неравенство $A(x) > \frac{c}{2}$. Рассмотрим любую функцию $h(x)$, неотрицательную, равную нулю вне окрестности $U(x_0)$ и положительную при $x = x_0$. Тогда, очевидно,

$$\int_a^b A(x)\,h(x)\,dx = \int\limits_{|x - x_0| < \delta} A(x)\,h(x)\,dx > \frac{c}{2} \int\limits_{|x - x_0| < \delta} h(x)\,dx > 0,$$

что противоречит исходному предположению. Лемма доказана.

Замечание 1. Запас функций $h(x)$, для которых нужно требовать выполнения равенства (4), чтобы сохранить справедливость результата, можно значительно уменьшить; как видно из построения, можно наложить на $h(x)$ любые ограничения гладкости (вплоть до бесконечной дифференцируемости), можно также считать, что $h(x)$ равна нулю вблизи концов промежутка. Отметим также, что в аналогичной формулировке — с заменой отрезка $[a, b]$ на ограниченную область G — лемма сохраняется и в случае нескольких независимых переменных.

Замечание 2. Просматривая приведенные выше построения, легко убедиться, что они остаются справедливыми и в несколько более общей постановке. Именно функционал $F(y)$ может быть задан не на всем пространстве E, а только на некотором подмножестве $E' \subset E$, которое обладает тем свойством, что вместе с двумя своими точками y, $y + h$ содержит все точки вида $y + th$, $-\infty < t < \infty$, иными словами, содержит всю прямую, определяемую точками y и $y + h$. Подмножество $E' \subset E$, обладающее этим свойством, называется *линейным многообразием* в E. В задачах, которые мы будем рассматривать далее, функционал, определенный и дифференцируемый во всем пространстве E, рассматривается только на некотором линейном многообразии $E' \subset E$ и разыскиваются те точки $y_0 \in E'$, в которых функционал имеет значение, экстремальное относительно смещений в этом многообразии. Для решения такой задачи мы должны рассмотреть вариацию $\delta F(y, h)$ только для $y \in E'$ и разыскать при этом такие точки y_0, для которых $\delta F(y_0, h)$ равна нулю при любом смещении h, не выводящем из многообразия E'. Точно так же и вторую вариацию $\delta^2 F(y_0, h)$ мы должны исследовать только на смещениях h, не выводящих из многообразия E'.

§ 3. Функционалы вида $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$

На этих функционалах, часто встречающихся в задачах математики и механики, мы остановимся несколько подробнее.

1. Функционал в пространстве $D_1(a, b)$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

как мы видели в § 1 (стр. 85), имеет вариацию

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\right] dx. \qquad (1)$$

Чтобы найти точки экстремума функционала F, нужно приравнять нулю его вариацию $\delta F(y, h)$. Для искомой функции $y = y(x)$ здесь можно получить несколько вариантов условий в зависимости от многообразий, на которых задан функционал.

Рассмотрим сначала случай, когда функционал F задан на совокупности функций $y(x)$, принимающих в точках a и b заданные значения $y(a)$ и $y(b)$. Тем самым функция $h(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ должна обращаться в нуль. Очевидно, что эта совокупность является линейным многообразием в $D_1(a, b)$, и мы можем действовать в соответствии с замечанием 2 к § 2.

Предположим далее, что искомое решение $y = y(x)$ обладает непрерывной второй производной. (Это ограничение будет снято ниже.) Тогда оба коэффициента при $h(x)$ и $h'(x)$ в интеграле (1), где вместо y подставлено искомое решение $y(x)$, будут дифференцируемыми функциями от x. Интегрируя второе слагаемое по частям, получим:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\,dx = \frac{\partial f}{\partial y'} h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} f_{y'}\right] h(x)\,dx.$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, так как $h(a) = h(b) = 0$. Поэтому выражение вариации преобразуется к виду

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] h(x)\,dx.$$

В искомой точке экстремума вариация $\delta F(y, h)$ должна быть равна нулю при любом $h(x)$. Отсюда (как и выше в § 2) следует, что множитель при $h(x)$ тождественно равен нулю. Итак, для неизвестной функции $y=y(x)$ мы получили уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \tag{2}$$

(*уравнение Эйлера*). Раскрывая полную производную по x, мы можем записать это уравнение в форме

$$f_y-f_{xy'}-f_{yy'}\,y'-f_{y'y'}\,y''=0.$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, линейное относительно старшей производной. Итак, *если экстремум функционала F существует и достигается на функции $y=y(x)$, обладающей производной второго порядка, то эта функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера.*

Общее решение уравнения Эйлера, как и всякого дифференциального уравнения 2-го порядка, зависит от двух параметров: C_1 и C_2. Каждое отдельное решение, получающееся при фиксированных C_1 и C_2, называется *экстремалью* функционала F. Подбирая должным образом постоянные C_1 и C_2, мы, вообще говоря, сможем указать экстремаль, которая удовлетворяет поставленным условиям $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$ (может быть, и несколько таких экстремалей). Если же среди решений уравнения Эйлера нет ни одного, которое отвечает этим условиям, то это означает, что наша экстремальная задача не имеет решений в классе дважды дифференцируемых функций.

2. Изучая вторую вариацию функционала F, мы можем получить дальнейшие необходимые, а также и достаточные условия того или иного экстремума.

Вторая вариация, как было указано в § 1 (стр. 88), имеет вид

$$\delta^2 F=\frac{1}{2}\int\limits_a^b[f_{yy}h^2+2f_{yy'}hh'+f_{y'y'}h'^2]\,dx.$$

Среднее слагаемое можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_a^b f_{yy'}hh'\,dx=\int\limits_a^b\frac{1}{2}f_{yy'}\,dh^2(x)=-\frac{1}{2}\int\limits_a^b h^2\frac{d}{dx}f_{yy'}\,dx,$$

поэтому

$$\delta^2 F = \int_a^b \left[P(x) h^2 + \frac{1}{2} f_{y'y'} h'^2 \right] dx, \tag{3}$$

где $P(x) = \frac{1}{2}\left(f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{y'y'} \right)$.

Мы утверждаем, что для точки минимума $y = y_0(x)$ выполняется неравенство

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geqslant 0$$

при любом x в промежутке $[a, b]$.

Действительно, предположим, что в некоторой точке x_0, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, выражение $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ отрицательно. Тогда это выражение отрицательно и в некоторой окрестности U точки x_0. Пусть некоторая функция $h_0(x - x_0) \in D_1(a, b)$ в окрестности U принимает значения между 0 и 1, в точке x_0 равна 1, а вне окрестности U равна 0. Всегда можно найти интервал длины, например δ, на котором $h_0'(x - x_0) \geqslant c > 0$. Рассмотрим выражение второй вариации (3) для смещения $h_m(x) = h_0[m(x - x_0)]$, когда $m \to \infty$. Первое слагаемое остается ограниченным по модулю величиной

$$\int_a^b |P(x)| \, dx,$$

второе же, очевидно, стремится к $-\infty$, так как по условию $f_{y'y'} < 0$ в окрестности U, а в этой окрестности на интервале длины δ/m квадрат производной от функции $h_m(x)$ заведомо превосходит m^2c^2. Поэтому $\delta^2 F$ на смещении $h_m(x)$ с достаточно большим m принимает отрицательное значение; но тогда функционал F не может иметь минимум в точке y_0.

Итак, неравенство $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geqslant 0$ является необходимым условием минимума функционала $F(y)$ в стационарной точке $y_0(x)$. Это условие называется *условием Лежандра*.

Удобные *достаточные* условия минимума получить значительно сложнее. Мы приведем здесь без доказательства *достаточное условие Вейерштрасса*.

Предположим, что экстремаль $y = y(x)$ можно включить в «поле экстремалей», т. е. в однопараметрическое семейство экстремалей $y = y(x, \alpha)$, где $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$ и $y(x, 0) = y(x)$; при этом предполагается, что функция $y(x, \alpha)$ дифференцируема по α, $\frac{\partial y}{\partial \alpha} > 0$, и кривые $y = y(x, \alpha)$ в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ при разных значениях α не пересекаются. Тогда, *если для всех x и y в области, покрытой экстремалями $y = y(x, \alpha)$, выполняется при любом τ неравенство*

$$f_{y'y'}(x, y, \tau) > 0,$$

то экстремаль $y = y(x)$ реализует относительный минимум функционала F в пространстве D_1; более того, среди всех кривых $y = \varphi(x) \in D_1$, удовлетворяющих при достаточно малом β неравенству

$$|y(x) - \varphi(x)| < \beta,$$

каковы бы ни были производные $\varphi'(x)$, *функционал* F *принимает наименьшее значение на кривой* $y=y(x)$. *Если, наоборот, в указанных условиях выполняется неравенство*

$$f_{y'y'}(x, y, \tau) < 0,$$

то экстремаль $y=y(x)$ *реализует относительный максимум с теми же свойствами* *).

Укажем несколько конкретных задач из геометрии и механики, приводящих к задачам об отыскании экстремумов функционалов указанного вида.

а) Функционал

$$F(y)=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

выражает длину дуги кривой $y=y(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Задача об экстремуме этого функционала может быть сформулирована так: среди всех кривых $y=y(x)$, соединяющих заданные точки $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$, найти кривую с наименьшей длиной. В данном случае функция $f(x, y, y')=\sqrt{1+y'^2}$ не зависит от y, поэтому уравнение Эйлера (2) принимает вид

$$\frac{d}{dx} f_{y'}=0,$$

откуда

$$f_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{const};$$

но тогда и $y'=\text{const}$, и, следовательно, решение дается линейной функцией $y=Cx+C_1$; искомая линия есть прямая, соединяющая заданные точки.

Ясно, что мы имеем здесь дело с минимумом; посмотрим все же, во что превращается здесь условие Вейерштрасса. Экстремаль $y=Cx+C_1$, очевидно, можно включить в поле

$$y=Cx+C_1+\alpha, \qquad -\varepsilon < \alpha < \varepsilon.$$

Далее,

$$f_{y'y'}=\frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

и, следовательно,

$$f_{y'y'}(x, y, \tau)=\frac{1}{(1+\tau^2)^{3/2}} > 0,$$

так что условие Вейерштрасса удовлетворено.

б) Поставим аналогичную задачу для поверхности, заданной параметрическими уравнениями

$$x=x(u, v); \qquad y=y(u, v); \qquad z=z(u, v). \tag{4}$$

---

*) Доказательство можно найти, например, в «Курсе вариационного исчисления» М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника, М.—Л., 1950, гл. 8.

Известно, что длина дуги кривой $v=v(u)$, соединяющей на поверхности (4) точки A и B, выражается интегралом

$$F(v)=\int_a^b \sqrt{E(u,\ v)+2F(u,\ v)\frac{dv}{du}+G(u,\ v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du, \tag{5}$$

где E, F, G — гауссовы коэффициенты элемента дуги. Мы должны, следовательно, решить задачу об экстремуме функционала (5). Оставляя пока в стороне общий случай, рассмотрим случай сферы, заданной уравнением в сферических координатах ($u=\varphi$, $v=\psi$):

$$x=\cos\varphi\cos\psi,\ y=\sin\varphi\cos\psi,\ z=\sin\psi. \tag{6}$$

Гауссовы параметры имеют вид

$$\begin{aligned} G&=x_\varphi x_\varphi+y_\varphi y_\varphi+z_\varphi z_\varphi=\cos^2\psi,\\ F&=x_\varphi x_\psi+y_\varphi y_\psi+z_\varphi z_\psi=0,\\ E&=x_\psi x_\psi+y_\psi y_\psi+z_\psi z_\psi=1,\end{aligned}$$

и функционал (5) принимает вид

$$S=\int_a^b \sqrt{1+\cos^2\psi\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2}\,d\psi.$$

Уравнение Эйлера

$$F_\varphi-\frac{d}{d\psi}F_{\varphi'}=0,$$

так же как и выше, допускает первый интеграл

$$F_{\varphi'}=\frac{\cos^2\psi\cdot\varphi'}{\sqrt{1+\cos^2\psi\cdot\varphi'^2}}=C\leqslant 1$$

который может быть записан также в виде

$$\frac{d\varphi}{d\psi}=\frac{C}{\cos\psi\sqrt{\cos^2\psi-C^2}}.$$

Общий интеграл этого уравнения получается подстановкой $\operatorname{tg}\psi=t$:

$$\sin(\varphi+C_2)=C_1\operatorname{tg}\psi \qquad \left(C_1=\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\right)$$

или

$$\sin\psi=\alpha\sin\varphi\cos\psi+\beta\cos\varphi\cos\psi,$$

где α и β — новые постоянные. Возвращаясь к прямоугольным координатам по формулам (6), получаем

$$z=\alpha x+\beta y.$$

Мы получили уравнение плоскости, проходящей через начало координат; кривая, высекаемая ею на сфере, есть дуга большого круга. Таким образом, линии кратчайших расстояний на сфере, если они существуют, являются дугами больших кругов.

Проверим выполнение условия Вейерштрасса.

Если только две взятые точки не являются диаметрально противоположными (так что $\cos\psi > 0$), то дугу большого круга, соединяющую их, очевидно, можно включить в поле экстремалей. Далее,

$$F_{\varphi'\varphi'} = \frac{\cos^2\psi}{[1+\varphi'^2\cos^2\psi]^{3/2}},$$

поэтому

$$F_{\varphi'\varphi'}(\psi, \varphi, \tau) = \frac{\cos^2\psi}{[1+\tau^2\cos^2\psi]^{3/2}} > 0,$$

и условие Вейерштрасса выполнено; таким образом, дуга Γ большого круга, соединяющая две заданные точки, действительно реализует минимум длин среди всех кривых, соединяющих эти точки и проходящих достаточно близко от кривой Γ.

Прежде чем перейти к остальным двум примерам, сделаем одно практическое замечание относительно интегрирования уравнения Эйлера в случае, когда функция $f = f(x, y, y')$ не зависит от аргумента x, так что

$$f = f(y, y').$$

Будем считать здесь независимым переменным y, а x — его функцией, подлежащей определению. Тогда функционал F приводится к виду

$$F = \int\limits_{y_1}^{y_2} f\left(y, \frac{1}{x'}\right) x'\,dy.$$

Теперь уравнение Эйлера

$$g_x - \frac{d}{dy} g_{x'} = 0, \text{ где } g = f\left(y, \frac{1}{x'}\right) x',$$

так же как и выше, будет иметь первый интеграл

$$g_{x'} = \text{const},$$

или, что то же,

$$x' f_{y'}(y, y')\left(-\frac{1}{x'^2}\right) + f(y, y') = f - y' f_{y'}(y, y') = C. \tag{7}$$

Остается проинтегрировать полученное уравнение 1-го порядка, что возможно выполнить в квадратурах, поскольку в этом уравнении отсутствует x.

Переходим к рассмотрению следующих примеров.

в) Экстремум функционала

$$F(y) = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

дает решение следующей задачи: среди всех кривых $y = y(x)$, соединяющих заданные точки $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$, найти такую, для которой площадь соответствующей поверхности вращения вокруг оси x имеет наименьшее значение.

Для решения уравнения Эйлера используем предыдущее замечание. Первый интеграл (7) имеет в данном случае вид

$$y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

или, что то же,

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}.$$

Подстановкой $y = C \cdot \operatorname{ch} t$ уравнение легко интегрируется:

$$y = C \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{C} + C_1\right).$$

Кривая $y = y(x)$ будет искомой, если она принадлежит к этому двупараметрическому семейству и проходит через заданные точки $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$.

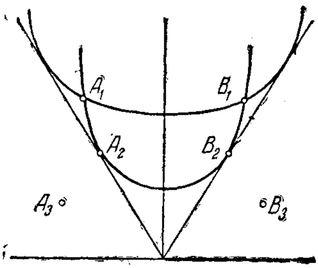


Рис. 5.

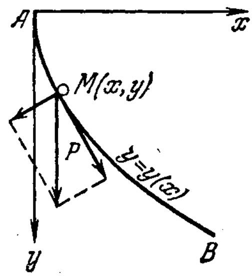


Рис. 6.

Для простоты будем считать, что $a = -b$, $y(a) = y(-a)$. Тогда $C_1 = 0$ и все семейство экстремалей сводится к однопараметрическому семейству

$$y = C \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{C}, \tag{8}$$

получающемуся из цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ с помощью всевозможных преобразований подобия (с центром в начале координат). В зависимости от положения точек $(a, y(a))$ и $(-a, y(-a))$ на плоскости могут возникнуть три различные возможности: в семействе цепных линий (8) есть две линии, проходящие через эту точку, одна или ни одной (рис. 5, пары точек A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 соответственно). Выясним, как обстоит дело с выполнением достаточного условия Вейерштрасса. Мы имеем

$$f_{y'y'} = 2\pi \frac{y}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

эта величина положительна при $y > 0$ и любом $y' = \tau$. С другой стороны, в первом случае верхнюю из двух возможных экстремалей, соединяющих точки A_1 и B_1, всегда можно включить в поле, используя для построения его экстремали семейства (8). Условие Вейерштрасса, таким образом, выполнено, поэтому верхняя экстремаль заведомо приводит к относительному минимуму функционала F. Нижнюю экстремаль нельзя включить в поле, и условие Вейерштрасса не выполняется; таким образом, вопрос относительно характера экстремума на нижней экстремали мы вынуждены оставить открытым. Более точное исследование показывает, что нижняя экстремаль не дает ни максимума, ни минимума.

Во втором случае единственная экстремаль, соединяющая точки A_2 и B_2, также включается в поле и, следовательно, реализует относительный минимум.

В третьем случае в классе дважды дифференцируемых линий, соединяющих точки A_3 и B_3, нет ни одной, на которой функционал F достигал бы относительного минимума.

г) В 1696 г. И. Бернулли поставил и решил следующую задачу, которая стала важной вехой в развитии вариационного исчисления: *какова должна быть кривая, соединяющая точки A и B в вертикальной плоскости, чтобы материальная точка M скатывалась по этой кривой от одной точки до второй под действием силы тяжести в наименьшее время?*

Искомая кривая была названа им брахистохроной.

Приступая к решению этой задачи, сначала найдем время, в течение которого материальная точка M с массой m скатывается под действием силы тяжести по заданной кривой из одной заданной точки в другую без начальной скорости. Поместим начало координат в первой из заданных точек и расположим оси, как указано на рис. 6.

Покажем прежде всего, что в точке с координатами x, y точка M имеет скорость $v = \sqrt{2gy}$. Для этого разложим силу тяжести $P = mg$ на нормальную и касательную составляющие; первая не играет роли, вторая создает касательное ускорение, равное $g\frac{dy}{ds}$. Имеем

$$\frac{dv}{du} = g\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{ds}{dt} = v;$$

разделяя эти уравнения друг на друга, исключаем ds и dt и приходим к уравнению

$$v\,dv = g\,dy.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия $y = 0$, $v = 0$, получим

$$v = \sqrt{2gy},$$

что и требовалось. Далее мы имеем

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

и для искомого промежутка времени находим выражение

$$F(y) = \int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Очевидно, что $F(y) = F(y(x))$ есть функционал, зависящий от выбора функции $y(x)$. Функция f в данном случае уже не является дважды дифференцируемой по y; тем не менее более точный подсчет обнаруживает, что и в данном случае F дифференцируем и его вариация вычисляется по формуле (1). Так же как и в предыдущем примере, уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$f - y'f_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

или, что то же,

$$y=\frac{C_1}{1+y'^2} \quad \left(C_1=\frac{C^2}{2g}\right).$$

Здесь удобно перейти к параметрическому представлению

$$y'=\operatorname{tg}\varphi.$$

Мы имеем в результате

$$y=C_1\cos^2\varphi, \quad y'=-C_1\sin 2\varphi\cdot\varphi'=\operatorname{tg}\varphi,$$

откуда

$$\varphi'=\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{1}{C_1\cos^2\varphi}$$

и, следовательно,

$$x=-\frac{C_1}{2}(2\varphi+\sin 2\varphi)+C_2.$$

Заменяя 2φ на $\pi-\theta$, получаем более простую параметрическую запись решения:

$$x=a(\theta-\sin\theta)+b, \quad y=a(1-\cos\theta),$$

где a и b — новые постоянные.

Таким образом, экстремали образуют семейство циклоид с точками возврата на оси x. Условиями задачи $y(0)=0$, $y(b)=C$ выделяется в этом семействе единственная кривая, которая и является искомой.

Замечание 1. В рассмотренных задачах мы находили кривые $y=y_0(x)$, реализующие относительный минимум функционала $F(y)$. Это несколько не соответствует постановке задачи: найти кривую $y=y_0(x)$, на которой реализуется абсолютный минимум функционала $F(y)$ [т. е. минимум не только среди достаточно близких кривых, но и среди вообще всех функций $y=y(x)$, для которых имеет смысл величина $F(y)$]. Конечно, если искомый минимум достигается на некоторой кривой $y=y_0(x)$, то для этой кривой он будет и относительным минимумом и поэтому будет «пойман» нашими методами. Но может быть и так, что абсолютный минимум не реализуется ни на одной гладкой кривой. Это заведомо имеет место, например, в задаче о минимальной поверхности вращения, если заданные точки, через которые должна проходить образующая, достаточно далеко раздвинуты. Но наши выводы еще не исключают допущения, что и в «хорошем» случае, когда заданные точки близки, соединяющая их экстремаль $y=y_0(x)$ реализует лишь относительный минимум, а абсолютный вовсе не реализуется (т. е. хотя для близких к $y=y_0(x)$ линий и справедливо неравенство $F(y)\geqslant F(y_0)$, но имеются иные линии, на которых все же $F(y)<F(y_0)$, и не существует гладкой функции, на которой $F(y)$ достигает минимума). В действительности это не имеет места. Имеется общая теорема, называемая теоремой Гильберта — Тонелли, которая гарантирует существование (в классе спрямляемых кривых) решения экстремальной задачи. Мы не имеем возможности останавливаться на ее доказательстве[1]).

Замечание 2. В ходе рассуждений мы *допустили*, что искомое решение $y=y(x)$ обладает непрерывной второй производной. Это допущение можно не вводить, если пойти несколько иным путем, который мы сейчас опишем.

---

[1]) См. Н. И. Ахиезер, Лекции по вариационному исчислению, Гостехиздат, 1955, гл. IV, §§ 33—36.

Вариация функционала

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

как мы помним, имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b [f_y h(x) + f_{y'} h'(x)]\,dx. \tag{9}$$

Мы преобразовали ее выражение, интегрируя второе слагаемое по частям, чтобы освободиться от $h'(x)$ и иметь дело только с $h(x)$. Но можно действовать и по-другому: интегрируя по частям первый член, освободиться от $h(x)$ и иметь дело только с $h'(x)$. Оказывается, что на этом пути не только не нужно предполагать существование y'', но даже можно доказать ее существование. Итак, проинтегрируем по частям первое слагаемое в выражении (9); мы находим тогда

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} h(x)\,dx = g(x)\,h(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,h'(x)\,dx,$$

где через $g(x)$ обозначена первообразная от функции $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$ (мы помним, что y есть некоторая функция от x; вместе с этим и $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$ есть некоторая функция от x). Так как $h(a) = h(b) = 0$, то внеинтегральный член исчезает, и мы получаем

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[-g(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\right] h'(x)\,dx = 0.$$

Ниже будет доказано, что это уравнение может удовлетворяться при всех допустимых $h(x)$, лишь если

$$-g(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Функция $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$, как функция от переменного x, вообще говоря, не имеет производной [вместе с $y'(x)$]. Но в данном случае уравнение (10) показывает, что функция $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$ вместе с $g(x)$ дифференцируема.

Дифференцируя левую часть по x, приходим к *уравнению Эйлера*:

$$-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Пока не доказано существование y'', полную производную у второго члена нельзя раскрывать по обычным правилам. Покажем, что *y'' существует всюду, где $f_{y'y'}(x, y, y')$ отлична от нуля.*

Производная $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$ есть предел при $\Delta x \to 0$ выражения

$$\frac{f_{y'}(x+\Delta x,\ y(x+\Delta x),\ y'(x+\Delta x)) - f_{y'}(x,\ y,\ y')}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial \overline{f_{y'}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{f_{y'}}}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\partial \overline{f_{y'}}}{\partial y'}\frac{\Delta y'}{\Delta x},$$

где черта наверху означает, что соответствующее выражение вычисляется при некоторых промежуточных значениях аргументов. При $\Delta x \to 0$ эта черта снимается и соответствующие функции рассматриваются при исходных значениях аргументов. Кроме того, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $y'(x)$. Так как $\frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}$ по условию отлична от нуля, то существует и предел выражения $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$, а это и означает существование второй производной.

Нам остается доказать следующую лемму Дю-Буа-Реймонда: *Если для некоторой непрерывной функции $A(x)$*

$$\int_a^b A(x)\,h'(x)\,dx = 0, \tag{11}$$

какова бы ни была функция $h(x) \in D_1(a, b)$, равная нулю при $x = a$ и $x = b$, то функция $A(x)$ постоянна.

Для доказательства допустим, что непрерывная функция $A(x)$ непостоянна, и, например, имеются точки x_1 и x_2, где $A(x_1) < A(x_2)$. Покажем, что существует функция $h(x) \in D_1(a, b)$, $h(a) = h(b) = 0$, для которой равенство (11) не выполняется. Возьмем произвольно число C между значениями $A(x_1)$ и $A(x_2)$. Так как $A(x)$ — непрерывная функция, то найдутся непересекающиеся интервалы $\Delta_1 \ni x_1$ и $\Delta_2 \ni x_2$, обладающие тем свойством, что для любых $x' \in \Delta_1$, $x'' \in \Delta_2$

$$A(x') < C < A(x'').$$

В качестве функции $h'(x)$ возьмем любую непрерывную функцию, положительную на интервале Δ_1, отрицательную на интервале Δ_2, равную нулю вне Δ_1 и Δ_2 и такую, что

$$\int_a^b h'(x)\,dx = \int_{\Delta_1} h'(x)\,dx + \int_{\Delta_2} h'(x)\,dx = 0.$$

Функцию $h(x)$ определим, естественно, формулой

$$h(x) = \int_a^x h'(\xi)\,d\xi;$$

очевидно, что $h(x) \in D_1(a, b)$ и $h(a) = h(b) = 0$.

Далее мы имеем

$$\int_a^b [A(x) - C]\,h'(x)\,dx = \int_{\Delta_1} (A(x) - C)\,h'(x)\,dx + \int_{\Delta_2} [A(x) - C]\,h'(x)\,dx < 0,$$

поскольку оба слагаемых отрицательны. Но тогда и

$$\int\limits_a^b A(x)\,h'(x)\,dx = \int\limits_a^b [A(x) - C]\,h'(x)\,dx + C\int\limits_a^b h'(x)\,dx = \int\limits_a^b [A(x) - C]\,h'(x)\,dx < 0;$$

мы видим, что при данной $h(x)$ равенство (11) не выполняется, что нам и требовалось.

Задачи. 1. Найти экстремали и исследовать условия разрешимости экстремальной задачи для следующих функционалов:

а) $\int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{y(1+y'^2)}\,dx, \qquad y(-1) = y(1) = b > 0;$

б) $\int\limits_a^b \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx, \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B.$

Отв. а) Одно решение при $b = 1$, два при $b > 1$ (параболы) и ни одного при $b < 1$.

б) Всегда одно решение вида $y = sh(C_1x + C_2)$.

2. Проанализировать экстремальные задачи для данных функционалов:

а) $\int\limits_0^1 y'\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$

б) $\int\limits_0^1 yy'\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$

в) $\int\limits_0^1 xyy'\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$

Отв. В случаях а) и б) значение функционала не зависит от выбора функции $y(x)$. В случае в) вариация функционала не равна нулю ни на одной из кривых, соединяющих заданные точки; экстремума нет.

3. Согласно принципу Ферма, свет движется так, что из точки A в точку B приходит за наименьшее время. Принимая, что в атмосфере Земли скорость света линейно меняется с высотой, найти форму лучей света. Кривизну земной поверхности не учитывать.

Отв. Дуги окружностей.

4. Найти экстремаль функционала

$$F(y) = \int\limits_0^1 e^{y'}\,\mathrm{tg}\,y'\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Отв. $y = x$.

5. Доказать следующее обобщение леммы Дю-Буа-Реймонда:

Если $A(x)$ — непрерывная функция и

$$\int_a^b A(x)\, h^{(n)}(x)\, dx = 0$$

для всякой функции $h(x) \in D_n(a, b)$, равной нулю при $x=a$ и $x=b$ вместе с производными до порядка $n-1$, то $A(x)$ есть многочлен степени $< n$.

Указание. Положить

$$h^{(n)}x = p(x), \quad h(x) = \int_a^x \ldots \int_a^x p\ (x)\ dx^n = \frac{1}{n!} \int_a^x p(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi$$

(формула Дирихле). Условие теоремы теперь можно выразить так: интеграл

$$\int_a^b A(x)\, p(x)\, dx$$

равен нулю на всякой функции $p(x)$, для которой

$$\int_a^b x^k p(x)\, dx = 0$$

при $k=0, 1, \ldots, n-1$. Применить далее результат задачи 3 § 9 гл. II

§ 4. Функционалы вида $\int_a^b f(x, y, y')dx$ (продолжение)

1. Условный экстремум. В конкретных задачах вариационного исчисления, кроме условий $y(a) = y(b)$, иногда накладываются дополнительные условия связей вида

$$G(y) = \int_a^b g(x, y, y')\, dx = C \qquad (C \text{ — заданная постоянная}).$$

Такова, например, задача Дидоны, где требуется найти линию $y = y(x)$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, которая при заданной длине $L > b-a$ ограничивает вместе с отрезком $[a, b]$ наибольшую площадь. Здесь подлежит исследованию на экстремум функционал

$$F(y) = \int_a^b y\, dx$$

при условиях закрепления $y(a) = y(b) = 0$ и условии связи

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx = L.$$

Абстрактная формулировка задачи следующая: *найти экстремум дифференцируемого функционала $F(y)$ на «кривом» многообразии, описываемом уравнением*

$$G(y)=C,$$

где $G(y)$ — некоторый другой дифференцируемый функционал.

При решении этой задачи мы дополнительно предположим, что искомая точка не является стационарной точкой функционала G. Поэтому стационарные точки функционала G, вообще говоря, должны быть исследованы особо. Основой для решения нашей задачи будет тот факт, что в искомой точке экстремума по-прежнему вариация функционала F должна обращаться в нуль, но уже не для всех возможных смещений h, а только для тех h, которые отвечают неизменному значению функционала G. Точнее говоря, мы утверждаем следующее: *в искомой точке экстремума для* любого *вектора h, удовлетворяющего уравнению*

$$\delta G(y, h)=0,$$

также должно удовлетворяться и уравнение

$$\delta F(y, h)=0.$$

Допустим, напротив, что для некоторого $h=h_0$ имеем

$$\delta G(y, h_0)=0, \quad \delta F(y, h_0)=A\neq 0.$$

Тогда при любом t, $|t|\leqslant 1$, будет

$$\delta G(y, th_0)=0, \qquad \delta F(y, th_0)=tA\neq 0 \text{ при } t\neq 0.$$

Смещение th_0 выводит нас, вообще говоря, за пределы поверхности $G(y)=C$, и мы имеем $G(y+th_0)\neq C$. Выберем произвольно вектор h_1, для которого линейный функционал $\delta G(y, h_1)\neq 0$, и с помощью подходящего числа s подправим смещение th_0 так, чтобы смещение th_0+sh_1 удовлетворяло уравнению

$$G(y+th_0+sh_1)=C.$$

Можно показать, что для всех достаточно малых t число s существует и является бесконечно малой более высокого порядка, чем t, так что $\frac{s}{t}\longrightarrow 0$ при $t\longrightarrow 0$.

Действительно, напишем уравнение

$$G(y+th_0+sh_1)=G(y).$$

Так как G — дифференцируемый функционал, то

$$G(y+th_0+sh_1)=G(y)+\delta G(th_0+sh_1)+r(th_0+sh_1),$$

где $r(h)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $|h|$. Так как $\delta G(h_0)=0$, $\delta G(h_1)=b\neq 0$, то мы получаем уравнение

$$K(s,\ t)\equiv sb+r(th_0+sh_1)=0. \tag{1}$$

Функция $r(th_0+sh_1)$ дифференцируема по t и s вместе с $G(y+th_0+sh_1)$, причем по условию $\left.\frac{\partial r(th_0+sh_1)}{\partial t}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}=\left.\frac{\partial r(th_0+sh_1)}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}=0$. Мы видим, что для функции $K(s,\ t)$ выполнены условия теоремы о неявной функции; из уравнения (1) можно выразить s как однозначную функцию от t, обращающуюся в нуль при $t=0$. Это — дифференцируемая функция от t, причем

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}:\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}=0,$$

так что s есть бесконечно малая более высокого порядка, чем t.

Далее, для функционала F мы имеем:

$$\begin{aligned}F(y+th_0+sh_1)-F(y)&=\delta F(y,\ th_0+sh_1)+\ldots=\\&=t\delta F(y,\ h_0)+s\delta F(y,\ h_1)+\ldots=ta+\ldots,\end{aligned}$$

где многоточием заменены бесконечно малые высшего порядка по сравнению с t. Это выражение имеет заведомо разные знаки при t положительном и отрицательном (достаточно малом по модулю); поэтому функционал F не может иметь экстремума в точке y, когда G сохраняет постоянное значение C.

Таким образом, наше утверждение доказано. Извлечем теперь из него правило для определения искомой экстремальной точки.

Для этого воспользуемся одной простой леммой из общей теории линейных функционалов.

Лемма. *Если линейный функционал $F(h)$ обращается в нуль на всяком векторе h_0, на котором обращается в нуль линейный функционал $G(h)$, то функционал $F(h)$ пропорционален функционалу $G(h)$:*

$$F(h)=\lambda G(h)\quad (\lambda \text{ фиксировано}). \tag{2}$$

Доказательство. Если $G(h)\equiv 0$, то и $F(h)\equiv 0$ и равенство (2) выполняется с любым λ. Пусть $G(h)\not\equiv 0$, так что имеется вектор h_1, для которого $G(h_0)=b\neq 0$. Тогда для любого h можно найти такое число t, что

$$G(h-th_0)=G(h)-tG(h_0)=0.$$

Очевидно, что это уравнение удовлетворяется при $t=\frac{G(h)}{G(h_0)}=0$. По условию,

$$F(h-th_0)=0,$$

откуда

$$F(h)=tF(h_0)=G(h)\,\frac{F(h_0)}{G(h_0)}=\lambda G(h),$$

где

$$\lambda=\frac{F(h_0)}{G(h_0)},$$

и лемма доказана.

Мы видели, что линейный функционал $\delta F(y, h)$ обращается в нуль на любом векторе h, на котором равен нулю функционал $\delta G(y, h)$. В силу доказанной выше леммы имеет место (для всех h) равенство

$$\delta F = \lambda \delta G,$$

или

$$\delta (F - \lambda G) = 0.$$

Таким образом, искомая экстремальная точка y определяется как такая, для которой функционал

$$H = F - \lambda G$$

при некотором (неизвестном) λ имеет стационарное значение (во всем пространстве). Если мы умеем находить y из такого условия, то для каждого λ получим стационарную точку $y(\lambda)$; но из всех λ годятся только те, для которых соответствующая точка $y(\lambda)$ удовлетворяет уравнению связи

$$G(y(\lambda)) = C.$$

Выведенное правило аналогично известному правилу множителей Лагранжа из теории условного экстремума функций нескольких переменных.

Пример. Найти экстремум функционала

$$F(y) = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

при условиях $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ и

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = C. \tag{3}$$

Здесь

$$H = F - \lambda G = \int_a^b (y - \lambda)\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Обозначая $y - \lambda = z$, получаем задачу об экстремуме функционала

$$H(z) = \int_a^b z\sqrt{1 + z'^2}\, dx$$

при условиях $z(a) = y_a - \lambda$, $z(b) = y_b - \lambda$. Решением служит, как мы знаем, дуга цепной линии; число λ при этом определяется из условия (3), фиксирующего длину этой дуги. Стационарная точка функционала $G(y)$ — единственная; она отвечает прямолинейному отрезку, соединяющему точки (a, y_a) и (b, y_b), причем $G(y)$ становится равным длине l этого отрезка. Очевидно, что при условии $G(y) = l$ задача теряет смысл.

Задачи. 1. Решить задачу Дидоны; найти линию $y = y(x)$, $y(b) = y(a) = 0$, которая при заданной длине $L > b - a$ ограничивает вместе с отрезком $a \leqslant x \leqslant b$ наибольшую площадь.

Отв. Дуга окружности.

2. Среди всех замкнутых кривых заданной длины L найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Указание. Применить полярную систему координат. Показать, что уравнение Эйлера для функционала $F - \lambda G$ означает, что кривизна искомой кривой постоянна.

Отв. Окружность.

3. Найти тело вращения наименьшего объема с данной площадью осевого сечения.

Отв. Цилиндр.

4. Найти тело вращения наибольшего объема с данной боковой поверхностью.

Отв. Тело вращения кругового сегмента вокруг хорды.

5. Дифференцируемые функционалы $G_1(y), \ldots, G_n(y)$ называются независимыми в точке y_0, если их вариации $\delta G_1(y_0, h), \ldots, \delta G_n(y_0, h)$ линейно независимы. Показать, что $y \longrightarrow \{G_1(y), \ldots, G_n(y)\}$ есть отображение окрестности точки $y_0 \in E$ *на* окрестность точки $\{G_1(y_0), \ldots, G_n(y_0)\}$ в n-мерном пространстве, если функционалы $G_1, \ldots, G_n$ независимы в точке y_0.

Указание. Найдя n элементов $h_1, \ldots, h_n$ так, чтобы иметь $\det \| G_j(h_k) \| \neq 0$ (задача 4 к § 9 гл. II), применить теорему о неявных функциях к системе уравнений (ξ_j заданы, t_j неизвестны)

$$G_j(y_0 + t_1 h_1 + \ldots + t_n h_n) = G_j(y_0) + \xi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

6. Показать, что задача на экстремум функционала

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

с n дополнительными условиями

$$G_1(y) = \int_a^b g_1(x, y, y') = C_1, \ldots, \qquad G_n(y) = \int_a^b g_n(x, y, y')\, dx = C_n$$

в предположении, что $G_j(y)$ независимы, приводится к задаче на экстремум функционала

$$F - \lambda_1 G_1 - \ldots - \lambda_n G_n = \int_a^b [f(x, y, y') - \lambda_1 g_1(x, y, y') - \ldots - \lambda_n g_n(x, y, y')]\, dx.$$

Указание. Используя задачу 5, показать, что в искомой точке экстремума для всякого смещения h, удовлетворяющего условиям $\delta G_1(y, h) = \ldots \ldots = \delta G_n(y, h) = 0$, должно удовлетворяться также уравнение $\delta F(y, h) = 0$. Далее использовать результат задачи 3 § 9 гл. II.

2. Задачи с подвижными концами. Теперь мы рассмотрим случаи, когда искомая кривая $y=y(x)$ подчинена граничным условиям иного типа, так что концы ее не закреплены в точках (a, y_a) и (b, y_b), а могут перемещаться по заданным кривым. Задачи такого рода часто встречаются в геометрии и механике.

Рассмотрим вначале случай, когда левый конец искомой кривой по-прежнему закреплен, а у правого фиксирована только абсцисса b.

Вариация функционала $F(y)$, как и раньше, имеет вид

$$\delta F(y, h)=\int_a^b [f_y h+f_{y'}h']\,ax,$$

но функция $h(x)$ уже не обязана обращаться в нуль в точке $x=b$. Интегрируя второе слагаемое по частям, получаем

$$\delta F(y, h)=f_{y'}\Big|_{x=b}h(b)+\int_a^b \left[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right]h\,dx.$$

В искомой точке экстремума вариация $\delta F(y, h)$ должна быть равна нулю, какова бы ни была функция смещения $h(x)$. Если рассмотреть сначала только функции смещения с условием $h(b)=0$, то, как и раньше, находим, что искомая кривая удовлетворяет уравнению Эйлера

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0, \tag{1}$$

т. е. эта кривая есть одна из экстремалей функционала F. Вместе с тем в точке экстремума вариация функционала F приводится к виду

$$\delta F(y, h)=f_{y'}\,|_{x=b}\,h(b). \tag{2}$$

Так как $h(b)$ произвольно, то условие экстремума $\delta F=0$ приводит к уравнению

$$f_{y'}(b, y(b), y'(b))=0, \tag{3}$$

которому должна удовлетворять искомая кривая.

Пример. Один из вариантов задачи о брахистохроне (стр. 101) состоит в определении кривой $y=y(x)$, скатываясь по которой из начала координат материальная точка быстрее всего достигнет прямой $x=b$. Функционал $F(y)$ имеет, как мы помним, вид

$$F(y)=\int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Экстремали функционала $F(y)$, проходящие через начало координат, суть циклоиды

$$x = C(\theta - \sin\theta), \qquad y = C(1 - \cos\theta). \tag{4}$$

Условие (3) в данном случае, как легко видеть, приводится к виду

$$y'(b) = 0.$$

Мы должны, следовательно, среди всех циклоид (4) выбрать такую, которая пересекает прямую $x = b$ под прямым углом, т. е. такую, у которой y принимает наибольшее значение при $x = b$. Наибольшее значение достигается координатой y при $\theta = \pi$; отсюда для C получается уравнение

$$b = C\pi.$$

Таким образом, искомая кривая имеет уравнения

$$x = \frac{b}{\pi}(\theta - \sin\theta), \qquad y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos\theta).$$

Перейдем к случаю, когда правому концу искомой кривой предписано находиться на заданной линии с уравнением $y = b(x)$. Функционал $F(y)$ имеет в данном случае вид

$$F(y) = \int_a^\xi F(x, y, y')\,dx,$$

так что подлежит определению не только функция $y = y(x)$, но и правый конец ξ интервала интегрирования. В качестве линейного нормированного пространства, в котором определен функционал $F(y)$, мы возьмем, естественно, пространство $D_1(a, b)$ всех функций с непрерывными производными на отрезке $[a, b]$, заключающем в себе все возможные положения точки ξ.

Приращение функционала $F(y)$ при замене функционального аргумента $y(x)$ на $y(x) + h(x)$ можно записать в форме

$$\Delta F(y, h) = \int_a^\xi [f(x, y+h, y'+h') - f(x, y, y')]\,dx + \\ + \int_\xi^{\xi+\Delta\xi} f(x, y+h, y'+h')\,dx. \tag{5}$$

Главная линейная часть первого слагаемого вычисляется так же, как и в предыдущем случае:

$$\delta_1 F(y, h) = \int_a^\xi \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) h\,dx + f_{y'}\Big|_{x=\xi} h(\xi). \tag{6}$$

Приращение $\Delta\xi$ абсциссы ξ, величина $h(\xi)$ и угловой коэффициент кривой $y=b(x)$, по которой движется правый конец искомой линии, связаны соотношением (см. рис. 7)

$$[b'(\xi)-y'(\xi)]\,\Delta\xi=h(\xi),$$

откуда $\Delta\xi$ линейно выражается через $h(\xi)$:

$$\Delta\xi=\frac{h(\xi)}{b'(\xi)-y'(\xi)}.$$

Будем считать, что заданная линия отлична от экстремали, так что $b'(\xi)\neq y'(\xi)$. Теперь мы можем найти главную линейную часть второго слагаемого в равенстве (5):

$$\delta_2F(y, h)=\Delta\xi f(\xi, y(\xi), y'(\xi))=\frac{h(\xi)}{b'(\xi)-y'(\xi)}f(\xi, y, y'). \qquad (7)$$

Складывая (6) и (7), получаем:

$$\delta F(y, h)=\delta_1F(y, h)+\delta_2F(y, h)=$$
$$=\int\limits_a^\xi\left(f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right)h\,dx+\left[f_{y'}+\frac{f}{b'(x)-y'(x)}\right]\Bigg|_{x=\xi}h(\xi).$$

В искомой точке экстремума вариация $\delta F(y, h)$ должна быть равна нулю, какова бы ни была функция смещения $h(x)$. Если рассмотреть вначале только такие функции смещения, для которых $h(\xi)=0$, то второе слагаемое, как и раньше, пропадает, и получается, что искомая кривая должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0.$$

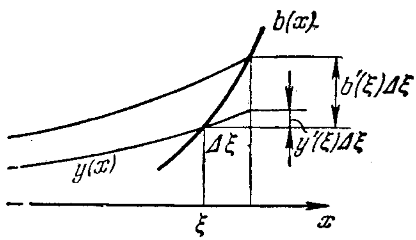


Рис. 7.

Как и ранее, искомая кривая есть одна из экстремалей функционала F. Вместе с тем для общей функции смещения в точке экстремума получаем уравнение

$$\left[f_{y'}+\frac{f}{b'(x)-y'(x)}\right]\Bigg|_{x=\xi}h(\xi)=0,$$

что в силу произвольности $h(\xi)$ приводит к условию

$$f+[b'(x)-y'(x)]\,f_{y'}\big|_{x=\xi}=0. \qquad (8)$$

Это соотношение накладывает в точке линии $y=b(x)$ добавочную связь на элементы $y(x)$ и $y'(x)$ искомой кривой, которая и может быть теперь полностью определена.

Пример. Какая кривая реализует минимум расстояний между точками A и B, первая из которых неподвижна, $A=A(0, 0)$, а вторая может перемещаться по заданной кривой $y=b(x)$?

Мы имеем дело с функционалом

$$F(y)=\int_0^\xi \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Экстремали этого функционала — прямые: первому условию задачи отвечают только те прямые, которые проходят через начало координат:

$$y=kx.$$

Условие (8) приобретает вид

$$\sqrt{1+k^2}+[b'(x)-k]\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}=0,$$

или, что то же,

$$kb'(x)=-1.$$

Это означает, что искомая прямая $y=kx$ должна пересекать заданную кривую $y=b(x)$ ортогонально.

Условие (8) называют обычно условием *трансверсальности;* искомая экстремаль должна пересекать заданную кривую *трансверсально.*

З а м е ч а н и е. Мы рассмотрели только такие случаи, когда правый конец искомой кривой может двигаться по заданной линии. Если и левый конец может двигаться по заданной линии, то таким же способом, как и выше, можно показать, что искомая кривая — экстремаль функционала F и что условие трансверсальности должно выполняться и для левого и для правого конца этой экстремали.

З а д а ч и. 1. Если $f(x, y, y')=A(x, y)\sqrt{1+y'^2}$, то условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.

2. Найти вариацию функционала

$$F(y)=\int_0^1 y^3y'^2\,dx$$

с единственным условием $y(0)=1$.

Отв. $$\delta F(y, h)=\int_0^1 [3y^2y'^2h+2y^3y'h']\,dx=$$
$$=\int_0^1 [3y^2y'^2-2(y^3y')']\,h\,dx+2y^3(1)\,y'(1)\,h(1).$$

3. Написать вариацию функционала

$$F(y) = \int_0^{x_0} [y^2 + y'^2]\,dx$$

при условиях $y(0) = 0$, $y(x_0) = e^{2x_0}$.

Отв.

$$\delta F(y,\ h) = \int_0^{x_0} [2y - 2y'']\,h(x)\,dx + \frac{y^2(x_0) + y'^2(x_0)}{2e^{2x_0} - y'(x_0)}\,h(x_0).$$

4. Написать вариацию функционала

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} [y^2 + y'^2]\,dx$$

при условиях $y(x_0) = \varphi(x_0)$, $y(x_1) = \psi(x_1)$.

Отв.

$$\delta F(y,\ h) = 2\int_{x_0}^{x_1} (y - y'')\,h\,dx + \frac{y^2(x_0) + y'^2(x_0)}{\varphi'(x_0) - y'(x_0)}\,h(x_0) + \frac{y^2(x_1) + y'^2(x_1)}{\psi'(x_1) - y'(x_1)}\,h(x_1).$$

5. Ломаные экстремали. Допустим, что в классе всех кусочно-гладких кривых $y = y(x)$ с фиксированными значениями $y(a)$ и $y(b)$ и одной угловой точкой при некотором $x = \xi$ экстремум функционала $F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$ реализуется на кривой $y_0(x)$. Доказать, что $y_0(x)$ при $x < \xi$ и при $x > \xi$ есть решение уравнения Эйлера и при переходе через угловую точку выражения $f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ и $f(x, y_0, y_0') - y_0' f_{y'}(x, y_0, y_0')$ остаются непрерывными (правило Вейерштрасса — Эрдмана).

Указание. Если угловая точка $(\xi, y(\xi))$ перемещается по кривой $\beta = \beta(\xi)$, то вариации слагаемых $\int_a^\xi$ и $\int_\xi^b$ должны компенсироваться. Учесть соотношение

$$\frac{h(\xi - 0)}{h(\xi + 0)} = \frac{\beta'(\xi) - y'(\xi - 0)}{\beta'(\xi) - y'(\xi + 0)},$$

ясное из геометрических соображений.

6. Закон отражения экстремалей. В предположениях предыдущей задачи найти условие, необходимое для того, чтобы ломаная экстремаль имела точку излома на заданной линии $y = \beta(x)$, располагаясь по одну сторону от этой линии.

Отв. Непрерывность выражения $f_{y'}(\beta' - y') + f$.

7. Закон преломления экстремалей. Кривая $y = \beta(x)$ делит плоскость на две части A и B, в одной из которых находится точка $(a, y(a))$,

в другой — точка $(b,\ y(b))$. В классе кусочно-гладких кривых $y=y(x)$ с единственной точкой излома на кривой $y=\beta(x)$ найти такую, на которой достигает экстремума функционал

$$\int_a^b f(x,\ y,\ y')\,dx,\quad f(x,\ y,\ y')=\begin{cases} g(x,\ y,\ y') & \text{при}\quad (x,\ y)\in A,\\ h(x,\ y,\ y') & \text{при}\quad (x,\ y)\in B.\end{cases}$$

Отв. Искомая кривая в каждой из областей A, B есть решение соответствующего уравнения Эйлера. При переходе через линию раздела выполняется условие

$$g_{y'}(\beta'-y'_A)+g=h_{y'}(\beta'-y'_B)+h.$$

§ 5. Функционалы с несколькими неизвестными функциями

Функционал вида

$$F(y)=\int_a^b f(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ y'_1,\ \ldots,\ y'_n)\,dx \tag{1}$$

рассматривается в линейном пространстве $D_1^{(n)}(a,\ b)$ вектор-функций $y=[y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)]$, определенных на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и обладающих непрерывными производными 1-го порядка; норма в этом пространстве задается формулой

$$\|y\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y_1(x)|,\ \ldots,\ |y_n(x)|,\ |y'_1(x)|,\ \ldots,\ |y'_n(x)|\}.$$

Если функция f имеет непрерывные производные до второго порядка по всем своим аргументам, то, как мы видели в § 2 (стр. 87), функционал (1) дифференцируем в пространстве $D_1^{(n)}$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y,\ h)=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y_n}h_n+\frac{\partial f}{\partial y'_1}h'_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y'_n}h'_n\right]dx.$$

Здесь вектор смещения h есть вектор-функция $[h_1(x),\ \ldots,\ h_n(x)]$ из того же пространства $D_1^{(n)}$.

В искомой экстремальной точке вариация функционала F обращается в нуль для всех h. В частности, если все компоненты вектора смещения, кроме одной, $h_j(x)$, положить равными нулю, то мы получим уравнение

$$\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y_j}h_j(x)+\frac{\partial f}{\partial y'_j}h'_j(x)\right]dx=0. \tag{2}$$

Будем решать экстремальную задачу на линейном многообразии вектор-функций $y=[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$ с заданными граничными значениями

$$y(a)=[y_1(a), \ldots, y_n(a)] \text{ и } y(b)=[y_1(b), \ldots, y_n(b)].$$

Тогда, предполагая, что искомые функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ дважды дифференцируемы по x, и применяя методику § 3, получим из (2) уравнение Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_j'}=0. \tag{3}$$

Система уравнений Эйлера (3) при $j=1, 2, \ldots, n$ представляет собой систему n уравнений второго порядка с n неизвестными функциями. Общее решение такой системы содержит $2n$ произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_{2n}$; выбирая их должным образом, мы получаем возможность выделить решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Впрочем, от предположения существования вторых производных можно освободиться, применяя тот же прием с леммой Дю-Буа-Реймонда, что и в § 3. Вместо предположения $\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y'}\neq 0$ здесь нужно будет использовать предположение $\det\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial y_j'\partial y_k'}\right\|\neq 0$.

Пример. Уравнения геодезических линий. Предположим, что квадрат дифференциала дуги на n-мерной поверхности L задан формулой

$$ds^2=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u)\,du_j du_k,$$

так что длина дуги кривой между точками A и B выражается равенством

$$S=\int_A^B \sqrt{\sum a_{jk}(u)\,du_j du_k}.$$

Коэффициенты $a_{jk}(u)$ предполагаются дифференцируемыми по всем аргументам $u_1, \ldots, u_n$, а квадратичная форма $\sum a_{jk}(u)\,du_j du_k$ — положительно определенной.

Найдем линии, на которых этот функционал имеет экстремальное значение. Считая, что u_j выражены как функции параметра t, получим систему уравнений Эйлера

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\sum\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l}u_j'u_k'-\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{g}}\sum a_{jl}u_j'=0 \quad (l=1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где положено $g(u)=\sum_{j,k} a_{jk}u_j'u_k'$. Эта величина обращается в 1, если параметром t служит длина дуги, что мы далее и предположим. Тогда уравнения (4) переходят в

$$\frac{1}{2}\sum\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l}u_j'u_k'-\frac{d}{dt}\sum a_{jl}u_j'=0 \quad (l=1, 2, \ldots, n).$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\sum_j a_{jl}u_j' = \sum_{j,k}\frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k}u_k' u_j' + \sum_j a_{jl}u_j'' =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j,k}\left(\frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k}u_k' u_j' + \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_j}u_j' u_k'\right)\right] + \sum_j a_{jl}u_j'',$$

и поэтому уравнения могут быть записаны в виде

$$\sum_j a_{jl}u_j'' = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_j}\right)u_j' u_k'. \qquad (5)$$

Так как форма $g = \sum a_{jk}u_j' u_k'$ не вырождена, то $\det \| a_{jk} \| \neq 0$, и следовательно, уравнения (5) можно разрешить относительно u_j''. Обозначая при этом

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_j}\right],$$

получим систему уравнений вида

$$u_m'' = \sum A_{lm}\Gamma_{jk}^l u_j' u_k'.$$

Применяя общие теоремы о существовании и единственности решения системы второго порядка, мы заключаем, что *через каждую точку поверхности* L (точнее через каждую неособенную точку, т. е. такую, в которой форма g не вырождается) *в каждом направлении проходит единственная геодезическая линия.*

Уравнения движения системы материальных точек. Пусть дана система из n материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_n$. Координаты j-й точки обозначим через x_j, y_j, z_j. Движение системы описывается, как известно, системой уравнений Ньютона

$$m_j\ddot{x}_j = F_{jx}, \quad m_j\ddot{y}_j = F_{jy}, \quad m_j\ddot{z}_j = F_{jz} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (6)$$

где точка, поставленная над буквой, означает дифференцирование по времени, а F_{jx}, F_{jy}, F_{jz} суть составляющие силы F_j, действующей на j-ю точку. Предположим, что силы F_j обладают потенциальной функцией $U = U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$; это означает, что выполняются равенства

$$F_{jx} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad F_{jy} = -\frac{\partial U}{\partial y_j}, \quad F_{jz} = -\frac{\partial U}{\partial z_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Существование потенциальной функции U позволяет вычислять работу сил, действующих на систему, на перемещениях $dx_1, dy_1, \ldots, dz_n$, как «разность потенциалов»:

$$\sum F_{jx}dx_j + F_{jy}dy_j + F_{jz}dz_j =$$
$$= -\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial z_n}dz_n\right) = -dU.$$

Функция

$$T=\sum \frac{m_j}{2}(\dot{x}_j^2+\dot{y}_j^2+\dot{z}_j^2)=T(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n),$$

как известно, называется кинетической энергией системы. Введем два важных функционала

$$J_1=\int_a^b T(\dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n)\,dt \quad \text{и} \quad J_2=\int_a^b U(t, x_1, \ldots, z_n)\,dt.$$

Считая, что начальное положение системы $x_1(a), \ldots, z_n(a)$ и конечное положение $x_1(b), \ldots, z_n(b)$ фиксированы, найдем вариации обоих функционалов J_1 и J_2. Обозначая компоненты вектора смещения соответственно через $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, будем иметь

$$\delta J_1=\int_a^b \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\delta \dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_n}\delta \dot{z}_n\right] dt$$

или, интегрируя каждое слагаемое по частям и учитывая, что

$$\delta x_1(a)=\delta x_1(b)=\ldots=\delta z_n(a)=\delta z_n(b)=0,$$

$$\delta J_1=-\int_a^b \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\delta x_1+\ldots+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_n}\delta z_n\right] dt=$$

$$=-\int_a^b [m_1\ddot{x}_1\delta x_1+\ldots+m_n\ddot{z}_n\delta z_n]\,dt.$$

Далее

$$\delta J_2=\int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial U}{\partial z_n}\delta z_n\right] dt=-\int_a^b [F_{1x}\delta x_1+\ldots+F_{nz}\delta z_n]\,dt.$$

В силу уравнений Ньютона (6) имеем

$$\delta J_1=\delta J_2,$$

откуда

$$\delta(J_1-J_2)=0.$$

Мы видим, что *на функциях $x_1(t), \ldots, z_n(t)$, описывающих действительное движение системы в промежутке времени $a \leqslant t \leqslant b$, функционал*

$$J_1-J_2=\int_a^b (T-U)\,dt$$

имеет стационарное значение.

Основная задача механики системы материальных точек, таким образом, оказывается задачей вариационного исчисления.

Впервые этот факт обнаружил У. Гамильтон (в 1835 г.), поэтому указанный результат носит название вариационного принципа Гамильтона.

Функция $L = T - U = L(x_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n)$ называется *функцией Лагранжа* для рассматриваемой системы.

Движение системы часто можно записывать с помощью не $3n$ функций $x_1, \ldots, z_n$, а меньшего числа переменных, в соответствии с числом степеней свободы (т. е. числом, меньшим $3n$ на число независимых связей). Если r — число степеней свободы, то положение системы определяется r параметрами — «обобщенными координатами» $q_1, q_2, \ldots, q_r$. При этом, в частности, через параметры $q_1, \ldots, q_r$ выражаются и все прямоугольные координаты точек системы

$$\left.\begin{aligned} x_j &= x_j(q_1, \ldots, q_r), \\ y_j &= y_j(q_1, \ldots, q_r), \\ z_j &= z_j(q_1, \ldots, q_r), \end{aligned}\right\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{y}_j = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{z}_j = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\dot{q}_k,$$

и, следовательно, кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_j}{2}(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)$$

есть некоторая квадратичная форма от «обобщенных скоростей» $\dot{q}_j$:

$$T = \sum_{j,\,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

коэффициенты которой — функции от обобщенных координат. Потенциальная функция $U(x_1, \ldots, z_n)$ таким же образом есть функция от обобщенных координат

$$U = U(q_1, \ldots, q_r).$$

Функция Лагранжа $L = T - U$ оказывается теперь функцией от $q_1, \ldots, q_r, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r$.

Условия стационарности функционала

$$\int_a^b L\,dt,$$

описываемые, как и всегда, уравнениями Эйлера, получают теперь вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n); \tag{7}$$

это — так называемая *система уравнений Лагранжа 2-го рода*.

Из уравнений движения можно легко получить условия равновесия, считая, что в положении равновесия кинетическая энергия системы равна нулю. Так как потенциальная функция не зависит от обобщенных скоростей, то для положения равновесия мы получим условия

$$\frac{\partial U}{\partial q_j}=0,$$

т. е. положение равновесия отвечает стационарному значению потенциальной энергии.

Уравнения (7) допускают первый интеграл, называемый *интегралом энергии*. Мы получим его, умножив каждое из уравнений на $dq_j=\dot{q}_j\,dt$ и сложив уравнения

$$\sum\frac{\partial T}{\partial q_j}dq_j-\sum\frac{\partial U}{\partial q_j}dq_j-\sum\dot{q}_j d\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]=0.$$

Так как

$$\dot{q}_j d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=d\left(\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j$$

и в силу однородности формы T относительно величин $\dot{q}_j$

$$\sum\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=2T,$$

то получаем:

$$\sum\frac{\partial T}{\partial q_j}dq_j-\sum\frac{\partial U}{\partial q_j}dq_j-2dT+\sum\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j=$$
$$=dT-dU-2dT=-(dU+dT)=0,$$

откуда

$$U+T=\text{const}.$$

Таким образом, *полная энергия системы* (сумма потенциальной и кинетической) *остается неизменной во все время движения.*

Последний факт позволяет легко доказать следующую теорему об устойчивом равновесии системы:

Теорема (Лиувилля). *Если в точке* $q^0=(q_1^0, \ldots, q_r^0)$ *потенциальная функция имеет строгий минимум, то для любого* (достаточно малого) $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\delta>0$, *что если системе, находящейся в покое в положении* $q_1^0, \ldots, q_r^0$, *придать кинетическую энергию, меньшую* δ, *то во всем дальнейшем движении системы точка* $q=(q_1, \ldots, q_r)$ *не выйдет за пределы окрестности* $|q-q^0|<\varepsilon$.

Доказательство. Так как по условию в точке q^0 функция $U(q_1, \ldots, q_r)$ имеет строгий минимум, то найдется шар $|q-q^0|\leqslant\varepsilon$, на границе которого всюду выполняется неравенство

$$U(q_1, \ldots, q_r)>U(q_1^0, \ldots, q_r^0)+\delta,$$

где δ — положительное фиксированное число. Если системе, находящейся в покое в точке q^0, придать кинетическую энергию $T \leqslant \delta$, то в дальнейшем движении полная энергия системы $T+U$ будет постоянной и не будет превосходить $U(q_1^0, \ldots, q_r^0)+\delta$. Но так как при $|q-q^0|=\varepsilon$ уже $U(q_1, \ldots, q_r)$ больше указанной величины, то, какова бы ни была $T (\geqslant 0)$, полная энергия не сможет остаться не превосходящей $U(q_1^0, \ldots, q_r^0)+\delta$. Поэтому точка $q_1, \ldots, q_r$ не выйдет за пределы указанной окрестности.

Более точный анализ, которого мы здесь не приводим[1]), показывает, что в достаточно малой окрестности $|q-q^0| \leqslant \varepsilon$ можно от координат $(q_1, \ldots, q_r)$ перейти (линейным преобразованием) к новым координатам $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ так, что в новых координатах уравнения движения (с точностью до малых высшего порядка) будут иметь вид

$$\tau_k = \varepsilon_k \cos(\omega_k t + \alpha_k),$$

где ε_k, ω_k, α_k — фиксированные числа $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Замечание 1. Интересно отметить, что задачу о движении механической системы с n степенями свободы можно трактовать как движение точки по геодезической линии на n-мерной поверхности $E=\text{const}$, взятой с некоторой специальной метрикой.

Действительно, функционал, отвечающий кинетической энергии, можно записать в форме

$$\int T\,dt = \int \sqrt{E-U}\sqrt{T}\,dt = \int \sqrt{(E-U)\sum a_{jk}(q)\,\dot{q}_j\dot{q}_k}\,dt,$$

и при условии $E=\text{const}$ экстремум этого функционала и функционала Гамильтона достигается на одной и той же линии.

Замечание 2. Принцип Гамильтона имеет ту характерную особенность, что в его формулировке отсутствует предположение о конечности числа степеней свободы. Поэтому его можно применять и в задачах механики систем с бесконечным числом степеней свободы, в частности в задачах механики сплошных масс, если у этих систем можно вычислить потенциальную и кинетическую энергию. (Применимость принципа Гамильтона и в этом случае следует из того эвристического соображения, что сплошную среду можно рассматривать и как систему из весьма большого, но конечного числа отдельных частичек.) Мы будем рассматривать такие задачи в § 8. Здесь мы рассмотрим только одну задачу о равновесии, именно задачу о форме равновесия гибкой нерастяжимой нити заданной длины L, подвешенной за два конца. Элемент нити имеет массу $\mu(x)\,ds$, где ds — элемент длины дуги и $\mu(x)$ — плотность. Сила тяжести $\mu(x)\,ds \cdot g$, действующая на этот элемент, имеет потенциальную функцию $\mu y g\,ds$.

---

[1]) См., например, Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, изд. 2-е, М., 1956, § 76, стр. 215.

Полная потенциальная энергия нити выражается интегралом

$$U=\int_a^b \mu(x)y(x)g\,ds=g\int_a^b \mu y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Условие равновесия есть условие минимума функции U. Нам известна также длина нити:

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=L.$$

Мы получили задачу на условный экстремум. В случае однородной нити ($\mu(x)=\text{const}$) ее решением (см. § 5) является дуга цепной линии. Итак, гибкая нерастяжимая однородная нить располагается в положении равновесия по цепной линии (откуда и название последней).

§ 6. Функционалы с несколькими независимыми переменными

1. Функционалы вида

$$F(u)=\iint\limits_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy \tag{1}$$

рассматриваются в пространстве $D_1(G)$ функций $u(x, y)$, определенных в плоской (ограниченной) области G, непрерывных и обладающих непрерывными производными первого порядка по каждому из аргументов. Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|u\|=\max\left\{|u(x, y)|,\ \left|\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|\right\}.$$

Если функция $f(x, y, u, v, w)$ имеет непрерывные производные до второго порядка по аргументам u, v, w, то, как мы видели в § 2 (стр. 86), функционал (1) дифференцируем в пространстве $D_1(G)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(u, h)=\iint\limits_G\left[\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial u_x}h_x+\frac{\partial f}{\partial u_y}h_y\right]dx\,dy.$$

Здесь $h=h(x, y)$ есть смещение функции $u(x, y)$. В экстремальной точке вариация функционала $F(y)$ обращается в нуль для любого смещения $h(x, y)$:

$$\iint\limits_G\left[\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial u_x}h_x+\frac{\partial f}{\partial u_y}h_y\right]dx\,dy=0.$$

Преобразуем это уравнение интегрированием по частям, считая, что значения функции $u(x, y)$ зафиксированы на границе Γ области G

и, следовательно, значения функции $h(x, y)$ на этой границе равны нулю. Например, для слагаемого $\frac{\partial f}{\partial u_x}$ мы имеем

$$\int_{A_1}^{B_1} \frac{\partial f}{\partial u_x} h_x\, dx = -\int_{A_1}^{B_1} h(x, y) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) dx$$

и, следовательно,

$$\iint_G \frac{\partial f}{\partial u_x} h_x\, dx\, dy = -\iint_G h \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x}\, dx\, dy.$$

Аналогичное преобразование производится со следующим слагаемым. В результате мы получаем уравнение

$$\delta F(y, h) = \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right] h(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Так как функция $h(x, y)$ произвольна, то имеет место равенство

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right) = 0, \tag{2}$$

называемое уравнением Эйлера — Остроградского. Это — уравнение в частных производных второго порядка; неизвестная функция $u(x, y)$ должна быть определена как решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям (известна функция $u(x, y)$ на границе Γ области G). Задача определения функции $u(x, y)$ по уравнению (2) с указанным граничным условием называется *задачей Дирихле*. Так же как и для соответствующих задач для одного переменного, задача Дирихле может иметь решение или не иметь; для многих важных уравнений вида (2) существование и единственность решения доказываются в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Совершенно аналогично уравнение Эйлера — Остроградского можно написать в случае трех или более независимых переменных.

2. ***Пример 1.*** Для функционала

$$F(u) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy$$

уравнение Эйлера — Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

его решения называются гармоническими функциями. Как доказывается в теории уравнений с частными производными, решение задачи Дирихле (и притом единственное) в данном случае существует для любой области G с кусочно-гладкой границей Γ и для любой непрерывной функции $u(x, y)$, заданной на Γ. См. также гл. 5, § 8.

Задача. Найти экстремум функционала

$$F(u)=\int_0^1\int_0^1 e^{uy}\sin u_y\,dx\,dy$$

при условиях $u(x, 0)=0$, $u(x, 1)=1$.

Отв. $u(x, y)=y$.

Примечание. Эта задача имеет единственное решение, хотя граничные условия заданы не на всей границе.

Функция $u(x, y)$ может быть подчинена и иным граничным условиям (не только условиям закрепления). В этих случаях искомое решение снова будет решением уравнения Эйлера (экстремалью), удовлетворяющим заданным граничным условиям, а также — если этими условиями оно еще не определено однозначно — дополнительным условиям на границе, получаемым из требования, чтобы вариация функционала равнялась нулю (как в задаче для простейшего функционала со свободным концом).

3. ***Пример 2.*** Выведем уравнение малых колебаний струны. Струна, располагающаяся в положении равновесия между точками 0 и l на оси x, совершает малые колебания около этого положения. Принимается, что каждая точка движется только в перпендикулярном к оси x направлении. Обозначим через $u(x, t)$ фигуру струны в момент t; предположим для определенности, что концы 0 и l остаются закрепленными, так что $u(0, t)=u(l, t)=0$. Кинетическая энергия струны, как сумма кинетических энергий ее частиц, выражается интегралом

$$T=\int_0^l u_t^2\frac{1}{2}\mu\,dx,$$

где $\mu\,dx$ есть масса элемента струны, отвечающего интервалу dx на оси x. Величина $\mu=\mu(x)$ есть плотность струны в точке x. Важнейшей характеристикой струны является ее потенциальная энергия; выражение потенциальной энергии, собственно говоря, есть фактическое определение струны с механической точки зрения. *Струна есть одномерная механическая система, потенциальная энергия каждого участка которой пропорциональна его удлинению по сравнению* *с положением равновесия.* Таким образом, мы имеем

$$dU = p(x)\,[\sqrt{1+u_x^2}\,dx - dx].$$

Коэффициент $p = p(x)$, фигурирующий в этом равенстве, называется модулем упругости струны (модулем Юнга). Считая, что u_x — настолько малая величина, что четвертой степенью u_x можно пренебречь, получим:

$$(\sqrt{1+u_x^2} - 1)\,dx \cong \frac{u_x^2}{2}\,dx$$

$$U = \int_0^l \frac{p(x)}{2}\,u_x^2\,dx.$$

Функция Лагранжа $L = T - U$ имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l [\mu u_t^2 - p u_x^2]\,dx.$$

Функционал Гамильтона $\int L\,dt$ теперь будет двойным интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l \int_a^b [\mu u_t^2 - p u_x^2]\,dx\,dt.$$

Напишем уравнение Эйлера — Остроградского:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t) + \frac{\partial}{\partial x}(p u_x) = 0. \tag{3}$$

Если μ и p постоянны (т. е. струна однородна по плотности и упругости), то мы получим уравнение

$$\mu u_{tt} - p u_{xx} = 0, \tag{4}$$

которое нас и интересовало.

Граничные условия, естественные с физической точки зрения, здесь можно взять следующие: при $t = 0$ заданы значения функции $u(x, 0)$ (т. е. известна форма начального отклонения) и функции $u_t(x, 0)$ (известна начальная скорость каждой точки). Покажем, что они определяют лишь единственное решение уравнения (3). Если бы имелось два решения уравнения струны $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$, отвечающие одинаковым значениям $u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0)$ и $u^{(1)}_{(t)}(x, 0) = u^{(2)}_{(t)}(x, 0)$, то их разность $u(x, t) = u^{(1)}(x, t) - u^{(2)}(x, t)$ была бы также решением, удовлетворяющим нулевым условиям $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$. Мы должны доказать, что $u(x, t) \equiv 0$. Используем для этого следующее соображение. Полная энергия струны

$$E=T+U=\frac{1}{2}\int_a^b [\mu u_t^2+pu_x^2]\,dx$$

так же, как и для системы из конечного числа материальных точек, должна оставаться постоянной во все время процесса (это мы строго докажем ниже). Но в начальный момент, по условию, $u_t(x, 0)=0$, $u(x, 0)=0$, так что и $u_x(x, 0)=0$, откуда при $t=0$ и $E=0$; а тогда в любой момент времени $E=0$ и, следовательно, $u_t=u_x=0$. Отсюда следует, что $u(x, t)$ постоянна; но так как $u(x, 0)=0$, то и $u(x, t)=0$ при каждом t.

Остается проверить для струны закон сохранения энергии. Эта проверка производится аналогично случаю системы из конечного числа точек с заменой сумм на интегралы по x. Именно умножим уравнение струны (3) на u_t и проинтегрируем по x:

$$\int_0^l u_t\left[\frac{\partial}{\partial x}(pu_x)-\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)\right]dx=0.$$

Первое слагаемое интегрируем по частям:

$$\int_0^l u_t\frac{\partial}{\partial x}(pu_x)\,dx=u_tku_x\Big|_0^l-\int_0^l u_{tx}pu_x\,dx.$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, так как $u_t(0, t)$ и $u_t(l, t)$ равны 0 вместе с $u(0, t)$ и $u(l, t)$. Таким образом, имеет место равенство

$$\int_0^l\left[u_t\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)+pu_xu_{tx}\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t^2)+\frac{\partial}{\partial t}(pu_x^2)\right]dx=0,$$

откуда

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^l[\mu u_t^2+pu_x^2]\,dx=0$$

и, следовательно,

$$E=\text{const},$$

что и требовалось доказать.

Укажем, как построить само решение, по крайней мере для достаточно гладких начальных функций $\varphi(x)=u(x, 0)$ и $\psi(x)=u_t(x, 0)$. Будем для простоты считать, что $p=1$, $\mu=1$, $l=\pi$ (общий случай рассмотрен в гл. V, § 5). Как легко проверить, функции $\sin nx\cos nt$

и $\sin nx \sin nt$ при любом целом n удовлетворяют уравнению

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{5}$$

и условиям закрепления на концах $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{1}^{\infty} \sin nx \,(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{6}$$

коэффициенты которого определим из условий

$$u(x, 0) = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin nx = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{1}^{\infty} nb_n \sin nx = \psi(x).$$

При достаточной гладкости функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$[1]) коэффициенты a_n и b_n настолько быстро стремятся к нулю, что ряд (6) оказывается абсолютно сходящимся вместе с формальными первыми и вторыми производными по x и t. Тогда можно вычислить u_{xx} и u_{tt} суммированием ряда из соответствующих производных; так как уравнение выполняется для каждого из слагаемых, то оно будет выполнено и для суммы. Более подробное изложение этого вопроса, а также анализ случаев, когда k и μ не постоянны, выходят за рамки нашего курса[2]).

Задача. Найти закон колебания струны, закрепленной на концах $x = 0$, $x = \pi$, если $k = \mu = 1$ и $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \sin 2x \cos x$.

Отв. $u(x, t) = \frac{1}{2} \sin x \sin t + \frac{1}{6} \sin 3x \sin 3t$.

4. Рассмотрим еще случай вынужденного движения, когда на струну действует внешняя сила.

Пусть на участок Δx нашей струны действует сила $f(x, t)\,\Delta x$. Эта сила обладает потенциальной функцией (работа на пути от 0 до u)

$$U_f = -\int_0^l f(x, t)\, u(x, t)\, dx,$$

и поэтому полная потенциальная энергия в этом случае выражается формулой

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_x^2 - fu\right] dx;$$

[1]) Точнее, при условии, что достаточно гладкими будут нечетные 2π-периодические продолжения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю ось.

[2]) См., например, И. Г. Петровский, Лекции по уравнениям с частными производными, М., 1953; Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. V, М., 1951.

уравнение Эйлера теперь будет иметь вид

$$ku_{xx} - \mu u_{tt} = f(x, t).$$

Из этого уравнения можно получить и форму положения равновесия в случае, когда внешняя сила в действительности не зависит от времени, так что $f(x, t) = f(x)$. В положении равновесия $u_{tt} = 0$ и, следовательно, форма струны $u = u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$ku_{xx} = f(x).$$

Среди всех решений этого уравнения интересующее нас выделяется граничными условиями в точках $x = 0$ и $x = l$.

Так, однородная струна (μ, $k = \mathrm{const}$) прогибается под действием силы тяжести ($f(x) = \mu g$) по параболе, являющейся решением уравнения

$$ku_{xx} = \mu g.$$

5. ***Пример 3.*** Уравнение малых колебаний мембраны. Мембрана есть «двумерный аналог» струны: это механическая система в форме поверхности, потенциальная энергия каждого участка которой пропорциональна увеличению его площади по сравнению с положением равновесия. Таким образом, если функция $u(x, y, t)$, заданная в области G на плоскости (x, y) при $t \geqslant 0$, описывает фигуру мембраны в момент t, то выражение для ее потенциальной энергии примет вид

$$U = \iint_G p\left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1\right) dx\,dy \cong \frac{1}{2}\iint_G p\,(u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy.$$

Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\iint_G \mu(x, y)\,u_t^2\,dx\,dy.$$

Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{1}{2}\iint_G [p\,(u_x^2 + u_y^2) - \mu u_t^2]\,dx\,dy.$$

Уравнение Эйлера — Остроградского принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(pu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(pu_y) - \frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t) = 0.$$

Для p и μ постоянных получается уравнение вида

$$u_{tt} = c^2(u_x^2 + u_y^2).$$

В качестве начальных условий, так же как и в случае струны, можно задать $u(x, y, 0)$ и $u_t(x, y, 0)$. Дальнейшая теория проходит в основном параллельно с теорией струны; мы снова отсылаем читателя к указанным выше курсам уравнений с частными производными.

§ 7. Функционалы с высшими производными

1. Функционал вида

$$F(y)=\int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\, dx \tag{1}$$

определен в пространстве $D_m(a, b)$ функций $y=y(x)$ с m непрерывными производными на отрезке $[a, b]$. Норма в пространстве $D_m(a, b)$, как мы помним, задается формулой

$$\|y\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y(x)|,\ |y'(x)|, \ldots, |y^{(m)}(x)|\}.$$

Если функция $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_m)$ имеет производные до 2-го порядка по аргументам $y_0, \ldots, y_m$, непрерывные при всех $y_0, \ldots, y_m$, то, как было сказано в § 2 (стр. 85), функционал (1) дифференцируем в $D_m(a, b)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h)=\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h+\frac{\partial f}{\partial y'} h'+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} h^{(m)}\right] dx. \tag{2}$$

Вектор смещения $h=h(x)$ есть функция из того же пространства $D_m(a, b)$. Экстремальную задачу для функционала $F(y)$ мы будем решать на многообразии функций $y(x)\in D_m(a, b)$ с заданными значениями

$$\left.\begin{array}{ll} y(a)=a_0, & y'(a)=a_1, \ldots, y^{(m-1)}(a)=a_{m-1}; \\ y(b)=b_0, & y'(b)=b_1, \ldots, y^{(m-1)}(b)=b_{m-1}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Тем самым для функции $h(x)$ выполняются условия

$$\left.\begin{array}{l} h(a)=h'(a)=\ldots=h^{(m-1)}(a)=0; \\ h(b)=h'(b)=\ldots=h^{(m-1)}(b)=0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Допустим, что искомая функция $y=y(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $2m$. Тогда все функции $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$, входящие в выражение вариации (2), как функции от x, будут иметь непрерывные производные до порядка m. Проинтегрируем по частям каждое из слагаемых (начиная со второго) столько раз, чтобы снять с функции $h(x)$ все дифференцирования. В силу (4) все внеинтегральные члены обратятся в нуль, и мы будем иметь

$$\delta F(y, h) = \\ = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right] h(x)\,dx.$$

Так как $h(x)$ произвольна, то искомая функция y должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2m$, которое также называется уравнением Эйлера. Общее его решение содержит $2m$ произвольных постоянных, которые можно употребить для выделения интересующего нас решения, подчиненного условиям (3).

Задача. Найти экстремали функционала

$$F(y) = \int_a^b (y'')^n\,dx.$$

Отв. $y = (\alpha x + \beta)^{\frac{2n-1}{n-1}} + \gamma x + \delta$ $\left(\text{при } n \neq 1,\ n \neq \frac{1}{2}\right)$. При $n = \frac{1}{2}$ имеем $\alpha y = \ln(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$; при $n = 1$ значение функционала не зависит от y.

2. Иногда встречаются задачи, в которых заданы на границе не все условия (3), а меньшее число, так что в общем решении уравнения Эйлера после подчинения его граничным условиям еще остаются свободные константы. Такие задачи аналогичны задачам со свободными концами для простейшего функционала (§ 5). При решении такой задачи нужно преобразовать выражение вариации (2) с учетом имеющихся граничных условий и, приравняв ее нулю, получить дополнительные условия на границе.

Пример. Найти кривую $y = y(x)$, реализующую экстремальное значение функционала

$$F(y) = \frac{1}{2}\int_a^b (y'')^2\,dx$$

при условиях $y(a) = y(b) = 0$.

Решение. Вариация функционала $F(y)$ имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b y''h''\,dx.$$

При первом интегрировании по частям граничные члены сохранятся ввиду того, что функция $h'(x)$ не обязана на границе обращаться в нуль. При вторичном интегрировании новых граничных членов не появится $(h(a)=h(b)=0)$ В результате мы получим:

$$\delta F(y, h) = y''(x) h'(x) \Big|_a^b - \int_a^b y'''(x) h'(x)\, dx =$$

$$= [y''(b) h'(b) - y''(a) h'(a)] + \int_a^b y^{IV}(x) h(x)\, dx.$$

Указанное выражение для экстремальной функции $y(x)$ должно обратиться в нуль, какова бы ни была функция $h(x) \in D_2(a, b)$ с условиями $h(a)=h(b)=0$. Если при этом и $h'(a)=h'(b)=0$, то мы получаем, что

$$\int_a^b y^{IV}(x) h(x)\, dx = 0,$$

откуда $y^{IV}(x)=0$, и, следовательно, $y(x)$ есть парабола 3-го порядка:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Таким образом, в выражении вариации интегральный член исчезает, и мы получаем для общего случая

$$\delta F(y, h) = y''(b) h'(b) - y''(a) h'(a) = 0.$$

Так как $h'(a)$ и $h'(b)$ независимы, то должны быть выполнены условия $y''(a) = y''(b) = 0$. Эти два условия вместе с двумя остальными $y(a)=y(b)=0$ однозначно выделяют искомое решение.

Задача. Найти кривую $y=y(x)$, реализующую экстремальное значение функционала

$$F(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'')^2\, dx$$

при условиях $y(0)=y'(0)=0, \quad y'(1)=1$.

Отв. $y = \frac{1}{2} x^2$.

3. Совершенно аналогичные соображения имеют место и для случая нескольких независимых переменных. Мы ограничимся для простоты рассмотрением функционала

$$F(u) = \iint_G f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\, dx\, dy$$

с интегрированием по области G в плоскости переменных x, y. Этот функционал определен в пространстве $D_2(G)$ функций $u(x, y)$, имеющих в области G непрерывные производные до второго порядка. Относительно функции f предполагается, что она имеет непрерывные производные по всем аргументам до второго порядка включительно.

Тогда первая вариация функционала F будет иметь вид

$$\delta F(u, h) = \\ = \iint\limits_G [f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y + f_{u_{xx}} h_{xx} + f_{u_{xy}} h_{xy} + f_{u_{yy}} h_{yy}]\, dx\, dy.$$

Вектор смещения $h = h(x, y)$ есть функция из того же пространства $D_2(G)$. В экстремальной точке $u = u(x, y)$ пространства $D_2(G)$ вариация $\delta F(u, h)$ обращается в нуль при любом $h(x, y)$, так что

$$\iint\limits_G [f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y + f_{u_{xx}} h_{xx} + f_{u_{xy}} h_{xy} + f_{u_{yy}} h_{yy}]\, dx\, dy = 0. \qquad (5)$$

Будем считать, что значения функций $u(x, y)$, u_x, u_y закреплены на границе Γ области G и, следовательно, величины h, h_x, h_y обращаются на Γ в нуль; относительно же искомой функции $u(x, y)$ предположим, что она имеет непрерывные производные до 4-го порядка включительно. Каждое из слагаемых под знаком интеграла имеет по x и y производные до 2-го порядка включительно. Интегрируем каждое из слагаемых, начиная со второго, один или два раза с тем, чтобы снять с функции $h(x, y)$ все дифференцирования; при этом в силу условий на границе все внеинтегральные члены обратятся в нуль и уравнение (5) перейдет в уравнение

$$\iint\limits_G \left[f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{u_{yy}}\right] h\, dx\, dy = 0.$$

Так как $h(x, y)$ в остальном произвольна, то функция u удовлетворяет уравнению 4-го порядка (уравнение Эйлера — Остроградского)

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{u_{yy}} = 0. \qquad (6)$$

Неизвестная функция $u(x, y)$ должна быть определена как решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Вопросы о существовании и единственности решения такого уравнения рассматриваются в теории уравнений с частными производными. Вместо условий закрепления в задаче могут фигурировать и иные условия, так же как и в случае функционалов с производными первого порядка (§ 5).

4. ***Пример.*** Уравнение малых колебаний стержня. Стержень, расположенный в состоянии равновесия между точками 0 и l на оси x, совершает поперечные колебания в плоскости (x, u). Обозначим через $u(x, t)$ профиль стержня в момент t и предположим, что концы 0 и l «наглухо заделаны», так что

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$
$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

Кинетическая энергия стержня, как и струны, выражается интегралом

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\,u_t^2\,dx,$$

где $\mu(x)\,dx$ — масса элемента, соответствующего интервалу dx. Потенциальная энергия стержня определяется — в противоположность потенциальной энергии струны — не удлинением, а искривлением профиля; точнее, стержень как механическая система определяется тем, что *потенциальная энергия каждого его участка пропорциональна квадрату кривизны профиля:*

$$dU=\frac{k(x)}{2}\,\frac{u_{xx}^2}{1+u_x^2}\,dx.$$

Считая, что u_x и u_{xx} малы, мы пренебрегаем членом $u_x^2u_{xx}^2$, что дает возможность записать dU в более простом виде:

$$dU=\frac{k(x)}{2}\,u_{xx}^2\,dx,$$

откуда потенциальная энергия

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l k u_{xx}^2\,dx.$$

Функция Лагранжа $L=T-U$ имеет вид

$$L=T-U=\frac{1}{2}\int_0^l [\mu u_t^2-ku_{xx}^2]\,dx.$$

Функционал Гамильтона изображается двойным интегралом

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\mu u_t^2-ku_{xx}^2]\,dx\,dt.$$

Напишем для данного случая уравнение Эйлера — Остроградского (6):

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ku_{xx})=0.$$

При постоянных μ и k получается уравнение

$$\mu u_{tt}+ku_{xxxx}=0,$$

которое и является уравнением свободных колебаний стержня. Начальные условия, естественные с физической точки зрения, можно взять следующие: при $t=0$ заданы значения функций $u(x, 0)$ (форма начального отклонения) и $u_t(x, 0)$ (начальные скорости точек стержня). Единственность решения задачи при указанных начальных и граничных условиях следует из рассмотрения интеграла энергии, как и для струны. Как построить само решение при тех или иных граничных условиях, разъясняется в курсах уравнений с частными производными[1]).

По тем же соображениям, что и для струны, уравнение вынужденных колебаний стержня будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k u_{xx})=f(x, t),$$

где $f(x, t)\,dx$ — сила, действующая на элемент dx. В случае, когда внешняя сила не зависит от времени, $f(x, t)=f(x)$, фигура равновесия стержня определяется из условия

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k u_{xx})=f(x).$$

В частности однородный стержень (μ, $k=\text{const}$) прогибается под действием силы тяжести ($f(x)=\mu g$) по некоторой кривой четвертого порядка.

Задача. Найти фигуру равновесия однородного стержня: а) наглухо заделанного; б) свободно подпертого на двух опорах (рис. 8) в точках $x_{1,2}=\pm l$.

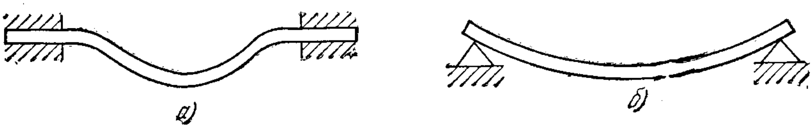


Рис. 8.

Указание. В случае б) граничные условия суть $u(-l)=u(l)=0$, производные $u'(-l)$ и $u'(l)$ остаются свободными.

Отв. (для $k=\mu=1$):

а) $$u(x)=\frac{g}{24}\left(x^2-l^2\right)^2;$$

б) $$u(x)=\frac{g}{24}\left(x^2-l^2\right)\left(x^2-5l^2\right).$$

---

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.

Заключительное замечание. Первый общий метод решения вариационных задач, выделивший вариационное исчисление в самостоятельную область математики, был найден около 1744 г. Леонардом Эйлером (1707—1783; швейцарец по рождению, бóльшую часть жизни работал в Петербургской Академии наук). Метод Эйлера является родоначальником современных «прямых методов» вариационного исчисления. Метод вариаций, который мы излагали, был предложен впервые в 1755 г. Ж. Лагранжем (франц. математик, 1736—1813) в письме к Эйлеру. В разработке классического вариационного исчисления принимали участие крупнейшие математики XIX века: Гаусс, Пуассон, Остроградский, Вейерштрасс и др. Мы описали здесь только начальные элементы этой большой и богатой приложениями области математики. Для дальнейшего ознакомления можно рекомендовать книгу Н. И. Ахиезера «Лекции по вариационному исчислению» (Гостехиздат, 1955), а также И. М. Гельфанда и С. В. Фомина «Вариационное исчисление», Физматгиз, 1961.

ГЛАВА IV
ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА

Мы переходим теперь к расширению понятия интеграла. Классическое определение интеграла, данное Коши и Риманом, вполне достаточное в применении к отдельным непрерывным или кусочно-непрерывным функциям, оказывается недостаточным с более общих точек зрения. Так, мы видели, что пространство $C_1(a, b)$ непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с метрикой

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{1}$$

не является полным: существуют фундаментальные последовательности, не имеющие предела в этом пространстве. Ничего не спасло бы присоединение к пространству $C_1(a, b)$ разрывных функций, интегрируемых по Риману. Только новая конструкция интеграла, более широкая, чем римановская, позволит нам указать класс функций, дающий пополнение пространства $C_1(a, b)$ по метрике (1).

Другая задача, для решения которой недостаточно старого определения интеграла,— это задача об описании достаточно широкого класса пар функций $\varphi(x)$ и $F(x)$, для которых формулы

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

$$F'(x) = \varphi(x) \tag{3}$$

являются эквивалентными. Точная постановка и решение этой второй задачи будут даны в гл. VI.

§ 1. Множества меры нуль и измеримые функции

Мы начнем теорию интеграла с изучения одного класса множеств на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, называемых множествами меры нуль.

Как мы увидим далее, это будут те множества, которыми можно пренебрегать при вычислении интегралов; точнее говоря, интеграл от функции $f(x)$ не будет изменяться, если значения функции $f(x)$ изменить произвольно на множестве меры нуль.

Определение. Множество A, расположенное на отрезке $[a, b]$, называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счетной системой интервалов, сумма длин которых не превосходит ε.

Примерами множеств меры нуль служат множества из одной точки, из двух точек, вообще, любая конечная или счетная совокупность точек. Докажем последнее. Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество и $\varepsilon > 0$ — заданное число; тогда система интервалов с длинами $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$, последовательно покрывающих точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, покрывает все множество A и имеет общую сумму длин, не большую чем $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \varepsilon$. В частности, множество рациональных чисел и множество алгебраических чисел — множества меры нуль.

С другой стороны, весь отрезок $[a, b]$ заведомо не есть множество меры нуль. Действительно, если отрезок покрыт счетной системой интервалов, то по известной лемме анализа можно из указанного покрытия выбрать конечное покрытие; сумма длин даже этих интервалов заведомо превосходит число $b - a$, т. е. длину всего отрезка $[a, b]$.

Уже теперь можно объяснить, почему значения функции на множестве меры нуль несущественны при вычислении интеграла от нее. Достаточно убедиться, что интеграл от функции $f(x)$, равной 1 на множестве A меры 0 и равной нулю на дополнении A, должен быть равен нулю. Покроем множество A системой интервалов с общей длиной $< \varepsilon$. Ясно, что интеграл от функции $f(x)$, если он определен разумно, не должен превосходить суммы площадей прямоугольников высоты 1 с основаниями на указанных интервалах. А эта сумма равна сумме длин самих интервалов и по условию меньше ε, т. е. может быть сделана как угодно малой. Отсюда необходимо следует, что функция $f(x)$ должна иметь интеграл, равный 0.

Отметим, что в приведенном определении множества меры нуль можно заменить покрытие множества интервалами покрытием из отрезков или любых промежутков (с включенными или исключенными концами). Действительно, если имеется покрытие множества A промежутками с общей длиной $< \varepsilon$, то, заменяя n-й промежуток содержащим его интервалом длины, не больше чем на $\frac{\varepsilon}{2^n}$ превосходящей длину n-го промежутка, мы получим и покрытие множества A интервалами, общая длина которых не превосходит 2ε; поэтому, если множество A можно покрыть системой каких-то промежутков с общей длиной как угодно малой, то можно покрыть и системой интервалов с общей длиной также как угодно малой, т. е. множество A имеет меру нуль.

Укажем простую конструкцию замкнутых множеств меры нуль. Предположим, что замкнутое множество F на отрезке $[a, b]$ получается выбрасыванием из этого отрезка открытого множества, состоящего из счетной совокупности непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ с общей длиной, равной $b-a$. Тогда мы можем утверждать, что множество F имеет заведомо меру нуль. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое n, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta_k| < \varepsilon.$$

Через $|\Delta|$ мы здесь и в дальнейшем обозначаем длину интервала Δ. Оставшиеся n интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ не пересекаются и вместе с промежуточными отрезками $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ (число которых m может быть равным $n-1$, n или $n+1$, включая тот случай, когда Δ_k и Δ_{k+1} имеют общий конец и, следовательно, Δ'_k вырождается в точку) дают конечное покрытие (промежутками) всего отрезка $[a, b]$. Так как сумма длин $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ больше, чем $b-a-\varepsilon$, то система $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ имеет общую длину заведомо $<\varepsilon$; а так как она, очевидно, покрывает все множество F, то мы и получаем, что F есть множество меры нуль.

Казалось бы, трудно ожидать, что после выбрасывания из отрезка длины $b-a$ системы непересекающихся интервалов с общей длиной также $b-a$ может остаться сколько-нибудь богатое точками множество. Оказывается, что тем не менее остаток может быть даже эквивалентен (по мощности) всему исходному отрезку.

Примером может служить уже известное нам канторово множество (гл. II, § 4, п. 4) на отрезке $[0, 1]$. Напомним, как оно строится. Сначала из отрезка $[0, 1]$ выбрасывается интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ длины $\frac{1}{3}$, составляющий среднюю из трех третей всего отрезка. Затем подобная операция производится с каждым из двух оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, т. е. из каждого из них выбрасывается его средняя третья часть, именно интервал $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ из отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и интервал $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ из отрезка $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Далее аналогичная процедура производится с каждым из четырех оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ и $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$, и процесс продолжается неограниченно. Оставшееся в результате замкнутое множество и называется канторовым. Нетрудно подсчитать полную сумму длин выброшенных интервалов: первый выброшенный интервал имел длину $\frac{1}{3}$, два следующих имели сумму длин $\frac{2}{9}$, следующие четыре — сумму длин $\frac{4}{27}$ и т. д.; общая сумма длин равна сумме ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots+\frac{2^n}{3^{n+1}}+\ldots=1.$$

Поэтому согласно сказанному выше канторово множество имеет меру нуль.

Далее, канторово множество не имеет изолированных точек, поскольку интервалы, выброшенные при его построении, не имели общих концов. Поэтому в силу теоремы 1 § 4 гл. II канторово множество несчетно; более того, в силу теоремы 2 того же параграфа оно имеет мощность континуума

В дальнейшем мы часто будем использовать следующее свойство множеств меры нуль:

Лемма. *Объединение конечной или счетной совокупности множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

Доказательство. Рассмотрим сразу случай счетной совокупности $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ множеств меры 0. Для заданного $\varepsilon > 0$ и для каждого n покроем множество A_n счетной системой интервалов с общей длиной меньше $\frac{\varepsilon}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда все множество $A = A_1 + \ldots \ldots + A_n + \ldots$ окажется покрытым счетной системой интервалов (сумма счетного множества счетных множеств) с общей длиной, меньшей ε. Следовательно, A имеет меру 0, что и требовалось.

Множество на отрезке $[a, b]$, дополнительное к множеству меры нуль, называется множеством *полной меры*. Таковыми являются, например, множество иррациональных чисел и множество трансцендентных чисел.

Пересечение конечной или счетной совокупности множеств полной меры есть снова множество полной меры. Действительно, если $Q_1, Q_2, \ldots$ — множества полной меры и $A_1 = CQ_1$, $A_2 = CQ_2, \ldots$ — дополнительные множества меры нуль, то

$$C\prod Q_j = \sum CQ_j = \sum A_j$$

в силу леммы имеет меру нуль; отсюда следует, что $\prod Q_j$ есть множество полной меры, что и утверждалось.

Если некоторым свойством обладают все точки некоторого множества полной меры на отрезке $[a, b]$, то мы говорим, что это свойство выполняется *почти для всех точек* отрезка $[a, b]$. Например, почти для всех точек $\xi \in [a, b]$ выполнено то свойство, что ξ иррационально. Бывают функции, почти всюду непрерывные, т. е. непрерывные в каждой точке, кроме, может быть, множества меры нуль. Для функций, которым разрешается принимать и бесконечные значения, имеет смысл название «конечная почти всюду»; это значит, что множество, на котором функция бесконечна, самое большее есть множество меры нуль.

Мы можем описать теперь класс функций, в котором будет происходить наша дальнейшая работа по определению интеграла. Функции, входящие в этот класс, называются *измеримыми* функциями. Измеримая функция, по определению, есть такая функция, которая определена и конечна почти всюду на $[a, b]$ и может быть представлена как предел почти всюду сходящейся последовательности *ступен-*

чатых функций. В свою очередь ступенчатая функция есть функция, принимающая некоторое постоянное значение в каждом из интервалов некоторого разбиения отрезка $[a, b]$ на части с помощью точек деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В самих точках деления мы можем не интересоваться значениями ступенчатой функции, поскольку этих точек конечное число — и тем самым множество меры нуль.

Совокупность ступенчатых функций есть линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на числа; если h и k — ступенчатые функции, то их линейная комбинация $\alpha h + \beta k$ есть также ступенчатая функция. Отсюда мы легко выведем, что и измеримые функции образуют линейное пространство. Действительно, если ступенчатые функции h_n сходятся к функции f всюду, кроме множества A меры нуль, а ступенчатые функции k_n — к функции g всюду, кроме множества B меры нуль, то ступенчатые функции $\alpha h_n + \beta k_n$ сходятся к функции $\alpha f + \beta g$ всюду, кроме множества $A + B$, которое, по доказанному выше, также есть множество меры нуль; следовательно, функция $\alpha f + \beta g$ также измерима.

И многие другие свойства, которыми обладает класс ступенчатых функций, можно подобным предельным переходом перенести на класс измеримых функций. Перечислим некоторые из них.

Произведение двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция; в соответствии с этим и произведение двух измеримых функций есть функция измеримая.

Частное двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция, если знаменатель не обращается в нуль. В соответствии с этим частное двух измеримых функций есть измеримая функция, если знаменатель почти всюду отличен от нуля. Действительно, если $h_n \to f$ всюду, кроме множества A меры нуль, $k_n \to g$ всюду, кроме множества B меры нуль, то, заменив у функций k_n, если это требуется, нулевые значения на значения $\frac{1}{n}$, мы получим новую последовательность ступенчатых функций k'_n, не обращающихся в нуль, и также сходящуюся к g всюду, кроме множества B; но тогда ступенчатые функции $\frac{h_n}{k_n}$ сходятся к $\frac{f}{g}$ всюду, кроме множества $A + B + C$, где C — множество меры нуль, на котором g обращается в нуль. Множество $A + B + C$ имеет меру нуль, и, следовательно, функция $\frac{f}{g}$ также измерима.

Абсолютная величина $|h(x)|$ ступенчатой функции $h(x)$ есть ступенчатая функция. Отсюда легко получить, что и абсолютная величина любой измеримой функции есть функция измеримая.

Если даны две ступенчатые функции $h(x)$ и $k(x)$, то

$$h_1(x) = \max\{h(x),\ k(x)\} \quad \text{и} \quad k_1(x) = \min\{h(x),\ k(x)\}$$

суть также ступенчатые функции. Предельным переходом получаем, что для двух измеримых функций f и g (рис. 9)

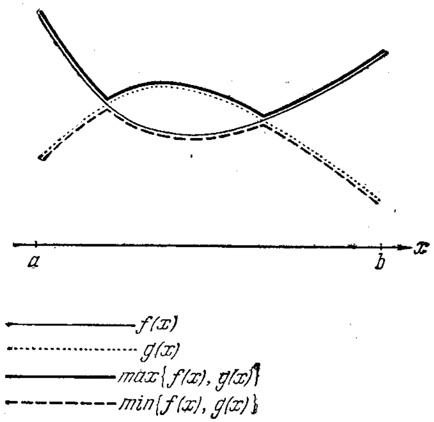


Рис. 9.

$$\max\{f(x),\ g(x)\}$$

и

$$\min\{f(x),\ g(x)\}$$

суть также измеримые функции.

В частности, вместе с функцией $f(x)$ измеримыми являются ее положительная часть $f^+(x) = \max\{f(x),\ 0\}$ и отрицательная часть $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$.

Отметим часто встречающиеся соотношения

$$f = f^+ - f^-,\quad |f| = f^+ + f^-,$$

имеющие место для всякой функции $f(x)$.

Задача. Известно, что сумма длин смежных интервалов к замкнутому множеству $F \subset [a, b]$ меньше $b - a$. Показать, что множество F не есть множество меры нуль.

§ 2. Класс C^+

Теперь мы приступаем к построению понятия интеграла. Рассмотрим сначала *ступенчатую функцию* $h(x)$, т. е. функцию, принимающую постоянные значения $b_1, b_2, \ldots, b_k$ в каждом из конечного числа промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$, на которые отрезок $[a, b]$ разбивается точками деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$. Интеграл от этой функции естественно положить равным

$$\int_b^a h(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} b_j |\Delta_j|.$$

Для сокращения записи будем в дальнейшем выражение вида $\int_a^b h(x)\,dx$ заменять на Ih. Как легко проверить, интеграл от ступенчатых функций обладает следующими свойствами:

а) $I(h_1 + h_2) = Ih_1 + Ih_2$ для любых двух степенчатых функций h_1 и h_2;

б) $I(\alpha h) = \alpha Ih$ для любого числа α;

в) если $h_1 \leqslant h_2$, то $Ih_1 \leqslant Ih_2$; в частности, если $h \geqslant 0$, то $Ih \geqslant 0$.

Следующие два свойства менее очевидны; далее будут даны их доказательства:

г) если последовательность $h_n \geqslant 0$ монотонно убывает (так что $h_1(x) \geqslant h_2(x) \geqslant \ldots$) и стремится к нулю почти всюду, то $Ih_n \to 0$;

д) если последовательность $h_n \geqslant 0$ монотонно убывает и при этом $Ih_n \to 0$, то эта последовательность стремится к нулю почти всюду.

В дальнейшем для обозначения предельного перехода при монотонном убывании будем употреблять знак $\searrow$, так что, например, запись $f_n \searrow f$ означает, что последовательность функций $f_n(x)$, монотонно убывая, стремится почти всюду к функции $f(x)$. Аналогичный смысл будет иметь знак $\nearrow$.

Докажем свойство г). Нам дано, что $h_n \searrow 0$, и требуется доказать, что $Ih_n \searrow 0$. Классическую теорему о почленном интегрировании сходящейся последовательности функций здесь применить нельзя, так как эта теорема предполагает равномерность сходимости последовательности функций к своему пределу. Для доказательства поступим следующим образом. Объединение множества, на котором последовательность h_n не сходится к нулю, и счетного множества всех точек разрыва всех h_n обозначим через A; это — множество меры нуль. Покроем его системой интервалов $\{\Delta_k\}$ с общей длиной, меньшей заданного $\varepsilon > 0$. Каждой из оставшихся точек x' сопоставим номер $n = n(x')$, для которого выполняется неравенство $h_n(x') < \varepsilon$, и интервал $\Delta(x')$, содержащий эту точку, в котором функция h_n сохраняет свое значение. Интервалы $\{\Delta_k\}$ вместе с интервалами $\{\Delta(x')\}$ образуют покрытие отрезка $[a, b]$, из которого мы можем выбрать конечное покрытие. Обозначим эти интервалы через $\Delta_1, \ldots, \Delta_m, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_p$, снабжая штрихом те интервалы, которые построены по точкам x'. Если r — наибольший из номеров, отвечающих соответствующим точкам x', то функция h_r и все последующие на интервалах $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_p$ не превосходят ε. На интервалах $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, сумма длин которых по построению меньше ε, эти функции не превосходят числа M — максимума функции $h_1(x)$. Теперь ясно, что для интеграла от функции $h_r(x)$ по отрезку $[a, b]$ и для интеграла от всех последующих функций мы получаем оценку вида

$$Ih_r < M\varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

Так как ε можно было взять произвольно малым, то мы приходим к выводу, что $Ih_r \to 0$, что и требовалось.

Докажем теперь свойство д), обратное свойству г). Нам дано, что функции h_n неотрицательны, монотонно убывают и что $Ih_n \searrow 0$. Очевидно, что функции h_n, убывая и оставаясь положительными, имеют при $n \to \infty$ некоторый предел $g(x) \geqslant 0$. Мы должны доказать, что функция $g(x)$ почти всюду равна нулю.

Для всякой функции $g(x) \geqslant 0$ множество F всех точек, где она отлична от нуля, есть счетная сумма множеств

$$F_m = \left\{x : g(x) \geqslant \frac{1}{m}\right\}.$$

Запись в правой части равенства показывает, что множество F_m есть множество всех точек x, где $g(x) \geqslant \frac{1}{m}$. Если мы покажем, что в нашем случае каждое из множеств F_m имеет меру нуль, то и их сумма F также будет иметь меру нуль. Поэтому ограничимся изучением множества F_m.

Достаточно рассмотреть ту часть F'_m множества F_m, где все функции h_n непрерывны (остающаяся часть счетна и имеет поэтому меру нуль). Так как $h_n(x) \geqslant g(x)$, то в каждой из точек множества F'_m также и $h_n(x) \geqslant \frac{1}{m}$. Фиксируем номер n; тогда участки постоянства функции $h_n(x)$, соответствующие ее значениям, большим или равным $\frac{1}{m}$, образуют покрытие множества F'_m. Пусть δ_n означает сумму длин этих участков. Так как заведомо

$$Ih_n \geqslant \delta_n \frac{1}{m},$$

то мы получаем, что

$$\delta_n \leqslant m\, Ih_n \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, при достаточно большом n множество F'_m покрывается системой интервалов с общей длиной как угодно малой. Следовательно, F'_m есть множество меры нуль, что и требовалось.

Теперь мы переходим к расширению определения интеграла с класса ступенчатых функций на более широкий класс.

Предварительно напомним схему построения интеграла Римана. В этой схеме для построения интеграла от функции $f(x)$ поступают следующим образом. Разбивают отрезок $[a, b]$ точками деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ на частные интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, обозначают

$$m_j = \inf_{x \in \Delta_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in \Delta_j} f(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

и составляют две суммы (зависящие, естественно, от совокупности Π точек разбиения отрезка $[a, b]$ на части):

$$\left.\begin{aligned} s_\Pi &= \sum m_j |\Delta_j|, \\ S_\Pi &= \sum M_j |\Delta_j|. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Первая сумма называется нижней, вторая — верхней. Если, добавив новые точки деления, заменить разбиение П разбиением П′, то

$$s_{\Pi} \leqslant s_{\Pi'}, \qquad S_{\Pi'} \leqslant S_{\Pi}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $s_{\Pi_1} \leqslant S_{\Pi_2}$, каковы бы ни были подразбиения Π_1 и Π_2. Далее рассматривается произвольная последовательность разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$, каждое из которых получается добавлением к предыдущему новых точек деления; тогда соответствующие нижние и верхние суммы образуют монотонные последовательности, идущие навстречу друг другу:

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots \quad \ldots \leqslant S_n \leqslant \ldots \leqslant S_2 \leqslant S_1.$$

Каждая из последовательностей имеет поэтому свой предел: $s_n \nearrow s$, $S_n \searrow S$, причем $s \leqslant S$. Доказывается, что числа s и S не зависят от выбора последовательности разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$, если только длина максимального интервала в разбиении Π_n неограниченно уменьшается с возрастанием n. Функция $f(x)$ считается интегрируемой по Риману, если $s = S$; общее значение этих пределов и полагают равным значению интеграла от $f(x)$. Если же $s < S$, то функцию $f(x)$ считают неинтегрируемой по Риману.

Рассмотрим теперь этот процесс с точки зрения действий со ступенчатыми функциями. Каждому разбиению П отрезка $[a, b]$ с точками деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отвечают две ступенчатые функции $h_{\Pi}(x)$ и $H_{\Pi}(x)$; первая из них в интервале Δ_j принимает значение m_j, а вторая — значение M_j. Нижняя и верхняя суммы (1) представляют собой интегралы от этих ступенчатых функций. Последовательности разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ отвечают две последовательности функций $h_n(x)$ и $H_n(x)$, первая из которых возрастает, а вторая убывает. Пусть, далее, $s(x)$ и $S(x)$ — предельные функции этих последовательностей:

$$h_n(x) \nearrow s(x), \qquad H_n(x) \searrow S(x).$$

Так как, кроме того, $h_n(x) \leqslant f(x) \leqslant H_n(x)$, то имеем $s(x) \leqslant f(x) \leqslant S(x)$. Мы утверждаем, что если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то эти три функции почти везде совпадают. Действительно, разность $S(x) - s(x)$ есть предел последовательности неотрицательных ступенчатых функций $H_n(x) - h_n(x)$. Эта последовательность монотонно убывает, и в случае интегрируемости $f(x)$ интегралы от $H_n(x) - h_n(x)$ стремятся к нулю. Но тогда, по свойству д), последовательность $H_n(x) - h_n(x)$ стремится почти всюду к нулю. Поэтому в случае интегрируемости $f(x)$ функции $s(x)$ и $S(x)$ почти всюду совпадают друг с другом и с функцией $f(x)$. Мы видим, что функция, интегрируемая по Риману, есть одновременно предел (почти всюду) возрастающей последовательности ступенчатых функций $s_n(x)$ и убывающей последовательности ступенчатых функций $S_n(x)$; интеграл же этой функции есть предел интегралов ступенчатых функций, участвующих в указанных последовательностях.

И обратно, если функции $s_n(x)$ и $S_n(x)$ почти всюду сходятся к $f(x)$, то разность $S_n(x)-s_n(x)$, убывая, почти всюду стремится к нулю. Поэтому, согласно свойству г), мы имеем $I(S_n(x)-s_n(x))\searrow 0$. Отсюда следует, что числовые последовательности $s_n=I(s_n(x))\nearrow s$, $S_n=I(S_n(x))\searrow S$ имеют общий предел. А это и означает, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману.

Таким образом, функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она является пределом (в смысле сходимости почти всюду) некоторой возрастающей последовательности ступенчатых функций $s_n(x)\leqslant f(x)$ и одновременно пределом некоторой убывающей последовательности ступенчатых функций $S_n(x)\geqslant f(x)$; при этом интеграл от f есть общее значение пределов интегралов от функций $s_n(x)$ и $S_n(x)$.

Это наблюдение послужит нам опорой при расширении определения интеграла на более широкий класс функций.

Введем класс функций, который будем обозначать C^+: функция $f(x)$ принадлежит, по определению, классу C^+, если она может быть представлена как предел (в смысле сходимости почти всюду) монотонно возрастающей последовательности ступенчатых функций

$$h_n\nearrow f,$$

причем интегралы от этих функций ограничены в совокупности:

$$Ih_n\leqslant C.$$

Покажем прежде всего, что всякая функция f из класса C^+ почти всюду конечна. Пусть E — множество точек, где $f(x)=\infty$. Можно считать заранее, что в каждой точке множества E все функции $h_n(x)$ непрерывны и выполняется соотношение $h_n(x)\to\infty$. Выберем произвольно число N; в каждой из точек множества E, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$h_n(x)>N,$$

так что E покрывается счетной суммой множеств вида $\{x:h_n(x)>N\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Каждое из этих множеств представляет собой конечное число интервалов; поэтому их объединение не более, чем счетная сумма интервалов:

$$U=\Delta_1^{(1)}+\ldots+\Delta_{n_1}^{(1)}+\Delta_1^{(2)}+\ldots+\Delta_{n_2}^{(2)}+\ldots+\Delta_1^{(k)}+\ldots+\Delta_{n_k}^{(k)}+\ldots$$

Здесь через $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_1}^{(1)}$ обозначены составляющие интервалы множества $\{x:h_1(x)>N\}$; через $\Delta_1^{(2)}, \ldots, \Delta_{n_2}^{(2)}$ обозначены составляющие интервалы множества $\{x:h_2(x)>N\}-\{x:h_1(x)>N\}$, так что $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_1}^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \ldots, \Delta_{n_2}^{(2)}$ составляют множество $\{h_2(x) > N\}$ и т. д. Оценим сумму длин всех этих интервалов. Для этого обозначим

$$\delta_k = |\Delta_1^{(1)}| + \ldots + |\Delta_{n_1}^{(1)}| + |\Delta_1^{(2)}| + \ldots + |\Delta_{n_k}^{(k)}|;$$

δ_k есть сумма длин интервалов, составляющих множество $\{x : h_k(x) > N\}$. Мы имеем по условию

$$\delta_k N < Ih_k \leqslant C.$$

Отсюда $\delta_k < \frac{C}{N}$; так как это верно для любого k, то мы заключаем, что полная сумма длин всех интервалов, составляющих U, не превосходит $\frac{C}{N}$. Так как N можно было взять произвольно большим, то мы видим, что E можно покрыть счетной системой интервалов с общей длиной, произвольно малой, Значит, E есть множество меры нуль, что и утверждалось.

В частности, всякая функция $f \in C^+$ измерима (§ 1). Определим теперь интеграл от функции f класса C^+ формулой

$$If = \lim_{n\to\infty} Ih_n, \tag{2}$$

где h_n — последовательность ступенчатых функций, участвующая в определении функции f. Так как последовательность чисел Ih_n монотонна, возрастает и ограничена, то предел справа существует; но мы должны еще доказать, что он не зависит от выбора последовательности h_n, определяющей функцию f. Для этого мы докажем следующий более общий факт: если h_n и k_n — ступенчатые функции с ограниченными в совокупности интегралами и почти всюду

$$h_n \nearrow f,\ k_n \nearrow g,\ f \leqslant g,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} Ih_n \leqslant \lim_{n\to\infty} Ik_n. \tag{3}$$

Для доказательства фиксируем номер m и рассмотрим убывающую последовательность ступенчатых функций

$$h_m - k_n.$$

Ее предел $h_m - g \leqslant f - g \leqslant 0$; но тогда $(h_m - k_n)^+ \searrow 0$, откуда, по свойству г), $I(h_m - k_n)^+ \searrow 0$; так как $I(h_m - k_n) \leqslant I(h_m - k_n)^+$, то $I(h_m - k_n) = Ih_m - Ik_n$, убывая, стремится к некоторому неположительному пределу. Отсюда мы делаем вывод, что $Ih_m \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} Ik_n$.

Так как это неравенство верно при любом m, то, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем (3), что и требовалось. Полагая $g = f$, получаем $If \leqslant Ig$; но в силу полной симметрии f и g мы имеем также $Ig \leqslant If$, откуда следует $If = Ig$. Таким образом, определение интеграла функции $f \in C^+$ по формуле (2) однозначно. Если же $f \in C^+$, $g \in C^+$, $f \leqslant g$, то имеет место неравенство $If \leqslant Ig$.

В частности, всякая функция f, интегрируемая в смысле Римана, принадлежит классу C^+, а ее интеграл Римана, как предел нижних сумм, совпадает с определенным нами интегралом If, как пределом интегралов от ступенчатых функций s_n, соответствующих тем же нижним суммам.

Мы видим, что введенное нами определение интеграла не менее широко, чем определение интеграла Римана. В действительности новое определение интеграла значительно более широко, чем определение интеграла Римана. Например, функция Дирихле $\chi(x)$, равная 0 при x иррациональном и 1 при x рациональном, не была интегрируемой по Риману; с нашей же новой точки зрения она почти всюду равна нулю, поэтому интегрируема и имеет интеграл, равный нулю. Можно привести и более сложные примеры, когда интегрируемая в новом смысле функция не интегрируема по Риману и не может быть превращена в интегрируемую по Риману изменением на множестве меры нуль.

Теперь предельным переходом мы можем перенести свойства интегралов от ступенчатых функций — не все, но некоторые — на интегралы от функций класса C^+. Именно легко проверить, что:

а) Класс C^+ вместе с функциями f и g содержит $f+g$ и

$$I(f+g) = If + Ig.$$

б) Класс C^+ вместе с функцией f содержит ее произведение на любое число $\alpha \geqslant 0$ и

$$I(\alpha f) = \alpha If.$$

Заметим, что в классе C^+ нельзя вычитать функции и умножать на отрицательные числа, поскольку мы все время должны иметь в виду возрастающие последовательности ступенчатых функций.

в) Класс C^+ вместе с функциями f и g содержит

$$\min(f, g) \text{ и } \max(f, g).$$

В частности, функция $f^+ = \max(f, 0)$ принадлежит классу C^+ вместе с функцией f. (Этого нельзя сказать о функциях f^- и $|f|$.)

Следующее свойство показывает, что класс C^+ замкнут относительно предельного перехода по возрастающим последовательностям функций с ограниченными интегралами:

Теорема. *Если* $f_n \in C^+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \nearrow f$ *и* $If_n < C$, *то* $f \in C^+$ *и* $If = \lim If_n$.

Доказательство. Для каждой из функций f_n построим определяющую ее последовательность ступенчатых функций:

$$\begin{array}{ll} h_{11} \leqslant h_{12} \leqslant \ldots \leqslant h_{1n} \leqslant \ldots, & h_{1n} \nearrow f_1, \\ h_{21} \leqslant h_{22} \leqslant \ldots \leqslant h_{2n} \leqslant \ldots, & h_{2n} \nearrow f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ h_{k1} \leqslant h_{k2} \leqslant \ldots \leqslant h_{kn} \leqslant \ldots, & h_{kn} \nearrow f_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Положим далее $h_n = \max(h_{1n}, \ldots, h_{nn})$. Очевидно, что h_n — также ступенчатая функция и последовательность $h_n (n = 1, 2, \ldots)$ монотонно возрастает. Далее, $h_n \leqslant \max(f_1, \ldots, f_n) = f_n$, откуда $Ih_n \leqslant \geqslant If_n \geqslant C$.

Обозначим $f^* = \lim h_n$; согласно определению класса C^+ мы имеем $f^* \in C^+$ и $If^* = \lim Ih_n$. Но так как $h_{kn} \leqslant h_n \leqslant f_n$ при любом фиксированном k и $n \geqslant k$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, находим $f_k \leqslant f^* \leqslant f$, откуда $f^* = f$ (почти всюду). Таким образом, $f \in C^+$. Далее, $Ih_{kn} \leqslant Ih_n \leqslant If_n \leqslant If$; так как $Ih_n \nearrow If^* = If$, то и $If_n \nearrow If$, чем доказательство и завершается.

Следствие. *Если для ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$, $g_k \in C^+$, $g_k \geqslant 0$, *интегралы от частных сумм ограничены в совокупности, так что*

$$I\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right) \leqslant C,$$

то $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *есть функция класса* C^+ *и* $If = \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k$.

Для доказательства достаточно положить $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$ и применить предыдущую теорему.

Задачи. 1. Если функция $f(x)$ отличается от функции $f_0(x)$ из класса C^+ лишь на множестве меры 0, то $f(x)$ также входит в C^+.

Указание. Последовательность $h_n(x) \nearrow f_0(x)$ является сходящейся почти всюду и к $f(x)$.

2. Показать, что функция Дирихле, равная 0 при x иррациональном и 1 при x иррациональном, входит в класс C^+.

3. Функция, равная 0 на замкнутом множестве F и 1 на его дополнении, входит в класс C^+.

4. Существует замкнутое множество F такое, что функция, равная 1 на F и 0 на его дополнении, не входит в C^+.

Указание. Взять F нигде не плотным и не являющимся множеством меры 0. См. задачу к § 1.

5. Доказать, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману или отличается от таковой на множестве меры 0 тогда и только тогда, когда $f \in C^+$, $-f \in C^+$.

6. Доказать, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру 0.

Указание. Если $s_n(x) \nearrow f(x)$ и $S_n(x) \searrow f(x)$ и x_0 есть точка непрерывности всех ступенчатых функций $s_n(x)$ и $S_n(x)$, то x_0 есть точка непрерывности $f(x)$. Обратно, во всякой точке непрерывности x_0 справедливы соотношения $s_n(x_0) \nearrow f(x_0)$, $S_n(x_0) \searrow f(x_0)$.

§ 3. Суммируемые функции

1. В этом параграфе мы завершим построение интеграла, распространив его с класса C^+ на некоторый более широкий класс L, в котором уже можно будет производить все естественные для функций операции.

Будем называть *суммируемой* (или *интегрируемой по Лебегу*) функцией всякую функцию $\varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, которая может быть представлена как разность

$$\varphi = f - g$$

двух функций из класса C^+. Совокупность всех суммируемых функций обозначим через L. В классе суммируемых функций можно производить следующие операции:

а) Сложение. Если $\varphi = f - g$ и $\varphi_1 = f_1 - g_1$ — суммируемые функции, f, g, f_1, g_1 — функции класса C^+, то

$$\varphi + \varphi_1 = (f + f_1) - (g + g_1),$$

и так как $f + f_1 \in C^+$, $g + g_1 \in C^+$, то $\varphi + \varphi_1$ есть функция класса L.

б) Умножение на любое вещественное число α. Если $\alpha \geqslant 0$, то из $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$ следует $\alpha\varphi = \alpha f - \alpha g$, $\alpha f \in Cg$, $\alpha g \in C^+$ и, следовательно, $\alpha\varphi \in L$; если же $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и равенство $\alpha\varphi = (-\alpha) g - (-\alpha) f$ показывает, что по-прежнему $\alpha\varphi \in L$.

Из а) и б) вытекает, что любые линейные комбинации функций класса L суть также функции класса L.

в) Взятие модуля функции. Пусть $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$, тогда $\max(f, g)$ и $\min(f, g)$ также принадлежат классу C^+; отсюда $|\varphi| = \max(f, g) - \min(f, g)$ принадлежит классу L. Решая уравнения

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-,$$
$$|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-,$$

мы видим, что функции φ^+ и φ^- также принадлежат классу L вместе с функцией φ.

Далее, равенства

$$\max(\varphi, \psi) = (\varphi + \psi)^+ - \psi,$$
$$\min(\varphi, \psi) = -\max(-\varphi, -\psi)$$

показывают, что вместе с функциями φ и ψ в класс L входят их максимум и минимум.

2. Введем теперь в класс L определение интеграла. Для этого, имея разложение

$$\left.\begin{array}{c} \varphi=f-g, \\ f\in C^+, \\ g\in C^+, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

положим

$$I\varphi=If-Ig.$$

Проверим, что при этом $I\varphi$ определен единственным образом. Пусть наряду с разложением (1) имеется второе разложение

$$\varphi=f_1-g_1, \quad f_1\in C^+, \quad g_1\in C^+.$$

Докажем, что $If-Ig=If_1-Ig_1$. Это равенство эквивалентно равенству

$$If+Ig_1=Ig+If_1. \qquad (2)$$

Но так как $f+g_1=f_1+g$, то в силу единственности интеграла в классе C^+ мы имеем:

$$I(f+g_1)=I(g+f_1),$$

откуда и вытекает (2).

Покажем далее, что полученный интеграл обладает в классе L обычными линейными свойствами. Пусть $\varphi=f-g$, $\varphi_1=f_1-g_1$, где f, g, f_1, g_1 входят в класс C^+. Тогда $\varphi+\varphi_1=(f+f_1)-(g+g_1)$, и согласно определению

$$I(\varphi+\varphi_1)=I(f+f_1)-I(g+g_1)=If+If_1-Ig-Ig_1=$$
$$=(If-Ig)+(If_1-Ig_1)=I\varphi+I\varphi_1.$$

Таким образом, интеграл суммы равен сумме интегралов. Далее, при $\alpha>0$ $I(\alpha\varphi)=I(\alpha f-\alpha g)=I(\alpha f)-I(\alpha g)=\alpha If-\alpha Ig=\alpha(If-Ig)=\alpha I\varphi$; с другой стороны, $I(-\varphi)=I(g-f)=Ig-If=-I\varphi$, и следовательно, при $\alpha<0$ мы имеет $I(\alpha\varphi)=I(-|\alpha|\varphi)=-I(|\alpha|\varphi)=-|\alpha|I(\varphi)=\alpha I\varphi$, так что число α можно выносить за знак интеграла, каков бы ни был знак α.

Заметим далее, что если $\varphi\geqslant 0$, $\varphi\in L$, то $I\varphi\geqslant 0$. Действительно, если $\varphi=f-g$, $f\in C^+$, $g\in C^+$ и $\varphi\geqslant 0$, то $f\geqslant g$ и $If\geqslant Ig$; поэтому $I\varphi=If-Ig\geqslant 0$. Отсюда получаем далее, что из $\varphi_1\leqslant\varphi_2$ следует $I\varphi_1\leqslant I\varphi_2$.

3. Теперь докажем важную теорему о почленном интегрировании рядов с положительными слагаемыми.

Теорема (Бéппо Лéви, 1906). *Если для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k$, $\varphi_k\in L$, $\varphi_k\geqslant 0$, *интегралы от частных сумм ограничены в совокупности,* *так что*

$$I\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right) \leqslant C,$$

то $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ *есть суммируемая функция и* $I\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} I\varphi_k$.

Доказательство. Отметим сначала, что в разложении суммируемой функции $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$, можно подчинять f и g дальнейшим условиям. Например, всегда можно выбрать g так, чтобы иметь $g \geqslant 0$, $Ig < \varepsilon$, где ε — заданное число. Для этого нужно рассмотреть последовательность ступенчатых функций $h_n \nearrow g$, так что $Ig = \lim Ih_n$, и затем написать

$$\varphi = f - g = (f - h_n) - (g - h_n) = f_n - g_n.$$

Очевидно, что при достаточно большом n требуемое условие для функции $g_n = g - h_n$ заведомо выполняется. Заметим при этом, что если $\varphi \geqslant 0$, то и функция $f_n = f - h_n \geqslant f - g = \varphi$ также получается неотрицательной.

Теперь для каждой из функций φ_k, участвующих в формулировке теоремы, построим разложение

$$\varphi_k = f_k - g_k,$$

где $f_k \geqslant 0$, $g_k \geqslant 0$, $Ig_k < \frac{1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ удовлетворяет условиям следствия из теоремы § 2 $\left(g_k \geqslant 0,\ I\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right) < 1\right)$. Поэтому $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ принадлежит классу C^+ и $Ig = \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k$. Покажем, что и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ также удовлетворяет условиям этого следствия; действительно, мы имеем $f_k \geqslant 0$ и

$$I\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) = I\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right) + I\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right) \leqslant C + 1.$$

Поэтому и $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ принадлежит классу C^+ и $If = \sum_{k=1}^{\infty} If_k$. Отсюда $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} g_k = f - g$ принадлежит классу L и

$$I\varphi = If - Ig = \sum_{k=1}^{\infty} If_k - \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k = \sum_{k=1}^{\infty} I(f_k - g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I\varphi_k.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если суммируемые функции ψ_n, монотонно возрастая, стремятся к пределу ψ и $I\psi_n \leqslant C$, то ψ — суммируемая функция и*

$$I\psi = \lim I\psi_n.$$

Для доказательства достаточно положить $\varphi_1 = \psi_2 - \psi_1, \ldots, \varphi_n = \psi_{n+1} - \psi_n$ и применить предыдущую теорему. Аналогичный результат справедлив, разумеется, и для убывающих последовательностей $\psi_n \searrow \psi$, если только $I\psi_n \geqslant C$.

4. В дальнейшем мы будем рассматривать произвольные (немонотонные) предельные переходы. Классические примеры показывают, что нельзя ожидать теоремы вида «*из* $\varphi_n \to \varphi$ *следует* $I\varphi_n \to I\varphi$» без дополнительных предположений о характере сходимости последовательности φ_n к своему пределу. Например, функции

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

сходятся к нулю при каждом $x \in [0, \pi]$, в то время как интегралы от них остаются постоянными (равными 2) и не стремятся к интегралу от предельной функции.

Рассмотрим совокупность $L(\varphi_0)$ всех суммируемых функций φ, удовлетворяющих неравенству

$$-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0, \tag{3}$$

где φ_0 — фиксированная неотрицательная суммируемая функция. Очевидно, что для каждой функции $\varphi \in L(\varphi_0)$ выполнено неравенство

$$-I\varphi_0 \leqslant I\varphi \leqslant I\varphi_0.$$

Если имеется монотонная последовательность функций φ_n — убывающая или возрастающая,— принадлежащих совокупности $L(\varphi_0)$, то предельная функция φ, разумеется, удовлетворяет неравенству (3) вместе с функциями φ_n; эта функция является, согласно предыдущему следствию, и суммируемой. Следовательно, совокупность $L(\varphi_0)$ замкнута относительно монотонных предельных переходов. Заметим далее, что для *любой* последовательности $\varphi_n \in L(\varphi_0)$ можно утверждать, что функции

$$\sup_n \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$$

и

$$\inf_n \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$$

также принадлежат совокупности $L(\varphi_0)$: первая из них является пределом при $n \to \infty$ возрастающей последовательности функций

$$\max\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \in L(\varphi_0),$$

а вторая — пределом убывающей последовательности функций

$$\min\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \in L(\varphi_0).$$

Пусть теперь $\varphi_n \in L(\varphi_0)$ — любая последовательность, сходящаяся почти всюду к некоторой функции ψ; покажем, что ψ также принадлежит классу $L(\varphi_0)$. Достаточно показать, что ψ представляется в виде предела некоторой монотонной последовательности функций из класса $L(\varphi_0)$. Положим

$$\psi_n(x) = \sup\{\varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots\},$$
$$\psi_n'(x) = \inf\{\varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots\}.$$

По доказанному, эти функции суммируемы и принадлежат классу $L(\varphi_0)$. Если рассмотреть только те значения x, где функции $\varphi_n(x)$ имеют предел $\psi(x)$, то очевидно, что при каждом таком значении

$$\psi_n(x) \geqslant \lim_{p\to\infty} \varphi_{n+p}(x) = \psi(x),$$
$$\psi_n''(x) \leqslant \lim_{p\to\infty} \varphi_{n+p}(x) = \psi(x).$$

Далее, убирая функцию φ_n из совокупности $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$, мы можем только уменьшить верхнюю грань этой совокупности и только увеличить нижнюю грань; поэтому

$$\psi_{n+1}(x) \leqslant \psi_n(x),$$
$$\psi_{n+1}''(x) \geqslant \psi_n'(x).$$

Следовательно, $\psi_n(x)$ — убывающая, а $\psi_n''(x)$ — возрастающая последовательность. Далее, ясно, что из $\varphi_n(x) \to \psi(x)$ следует $\psi_n(x) \searrow \psi(x)$ и $\psi_n'(x) \nearrow \psi(x)$. Таким образом, функция $\psi(x)$ оказывается пределом возрастающей последовательности функций класса $L(\varphi_0)$ (и одновременно пределом убывающей последовательности функций этого класса). Отсюда $\psi \in L(\varphi_0)$, что и утверждалось. При этом мы имеем $I\psi_n'' \nearrow I\psi$, $I\psi_n \searrow I\psi$ и $I\psi_n' \leqslant I\varphi_n \leqslant I\psi_n$, откуда $I\varphi_n \to I\psi$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема (Лебег, 1902). *Если последовательность суммируемых функций φ_n сходится почти всюду к функции φ и удовлетворяет условию*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \varphi_0(x) \in L,$$

то φ — суммируемая функция и $I\varphi = \lim I\varphi_n$. В частности, равенство $I\varphi = \lim I\varphi_n$ справедливо, если функции φ_n ограничены в совокупности.

Из этой теоремы мы можем получить важный результат относительно состава класса $L(\varphi_0)$. Именно покажем, что *если некоторая измеримая функция φ удовлетворяет (почти всюду) неравенству*

$$-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 \in L,$$

то она суммируема (и принадлежит тем самым классу $L(\varphi_0)$). Действительно, пусть h_n — последовательность ступенчатых функций, определяющая измеримую функцию φ. Обрезая ее сверху по уровню φ_0 и снизу по уровню $-\varphi_0$, т. е. заменяя ее функцией

$$\varphi_n = \max\{-\varphi_0, \ \min(h_n, \ \varphi_0)\},$$

мы получим последовательность суммируемых функций, принадлежащих классу $L(\varphi_0)$, сходящуюся почти всюду к функции φ. Значит, $\varphi = \lim \varphi_n$ является суммируемой функцией, что и требовалось.

В частности, *всякая ограниченная измеримая функция суммируема.*

С другой стороны, доказанная нами теорема о суммируемых функциях позволит сделать дальнейшие заключения об измеримых функциях. Покажем, что *предел $\varphi(x)$ сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций $\varphi_n(x)$ — если он конечен почти всюду — есть функция измеримая.* Достаточно рассмотреть случай $\varphi_n(x) \geqslant 0$, так как в противном случае можно отдельно рассмотреть последовательности φ_n^+ и φ_n^-. Но если почти всюду φ_n сходятся к φ, то также почти всюду последовательность функций $\psi_n = \frac{1}{1+\varphi_n}$ сходится к $\psi = \frac{1}{1+\varphi}$. Функции ψ_n заключены между 0 и 1 и измеримы. Поэтому они суммируемы, а их предел ψ, по доказанному,— также суммируемая и, следовательно, измеримая функция. Заметим, что функция ψ может принимать значение 0 только там, где $\varphi(x) = \infty$, т. е. на множестве меры 0. Поэтому, обращая полученное равенство, находим, что и

$$\varphi = \frac{1-\psi}{\psi}$$

есть функция измеримая, так как числитель и знаменатель полученного отношения измеримы и знаменатель отличен от нуля почти всюду.

5. В одном случае можно утверждать суммируемость предельной функции последовательности φ_n, заменив предположение об ограниченности функций $|\varphi_n|$ суммируемой функцией некоторыми другими предположениями:

Лемма (Фату, 1906). *Если $\varphi_n \geqslant 0$ — суммируемые функции, $\varphi_n \to \varphi$ почти всюду и $I\varphi_n \leqslant C$,* то *φ — суммируемая функция и*

$$0 \leqslant I\varphi \leqslant C.$$

Доказательство. Положим

$$\psi_n = \inf\{\varphi_n, \ \varphi_{n+1}, \ \ldots\} \geqslant 0.$$

Как и выше, функции ψ_n образуют возрастающую последовательность, сходящуюся почти всюду к функции φ. Далее, $\psi_n \leqslant \varphi_n$, $I\psi_n \leqslant I\varphi_n \leqslant C$; в силу теоремы Беппо Леви функция φ суммируема и $I\psi_n \nearrow I\varphi$. В частности, $0 \leqslant I\varphi = \lim I\psi_n \leqslant C$, что и требовалось.

Пусть, в частности, функция $\varphi_0 \geqslant 0$ суммируема и $I\varphi_0 = 0$; покажем, что $\varphi_0 = 0$ почти всюду. Положим $\varphi_n = n\varphi_0$; функция φ_n стремится к пределу φ, равному 0 там, где φ_0 равна нулю, и ∞ там, где $\varphi_0 > 0$. Но так как, по лемме Фату, предельная функция должна быть суммируемой, в частности измеримой, то множество тех x, где $\varphi(x) = \infty$, есть множество меры 0. Вместе с тем и множество тех x, где $\varphi_0(x) > 0$, есть множество меры 0. Мы получаем: *если у неотрицательной суммируемой функции $\varphi_0(x)$ интеграл равен нулю, то эта функция $\varphi_0(x)$ сама почти всюду равна нулю.*

6. В этом пункте мы не будем считать различными две суммируемые функции, совпадающие на множестве полной меры.

Точнее говоря, от самих суммируемых функций мы перейдем к классам эквивалентных функций: две функции считаются эквивалентными, если они совпадают на множестве полной меры. В частности, функция $f(x)$ эквивалентна нулю, если она отлична от нуля самое большее на множестве меры 0. Функции, эквивалентные нулю, образуют, очевидно, подпространство L_0 в линейном пространстве L всех суммируемых функций, что мы сейчас делаем, по сути дела, есть переход от пространства L к его фактор-пространству L/L_0 (гл. II, § 8, п. 4). В пространстве L имеется квазинорма $\|\varphi\| = I(|\varphi|)$ (напомним, что квазинорма отличается от нормы тем, что могут существовать ненулевые элементы с квазинормой, равной нулю). Подпространство L_0 состоит из тех и только тех функций, у которых квазинорма равна нулю. Поэтому в совокупность классов эквивалентных суммируемых функций можно ввести норму, считая ее равной $I(|\varphi|)$, где φ — любая из функций класса. В соответствии с п. 4 § 8 гл. II мы получим линейное нормированное пространство классов эквивалентных суммируемых функций, которое будем называть *пространством Лебега*. Впрочем, в дальнейшем мы откажемся от излишнего педантизма и будем говорить просто «суммируемая функция» вместо «класс эквивалентных суммируемых функций», а пространство Лебега будем обозначать по-прежнему через L, или, точнее, через $L_1(a, b)$.

Теорема (Э. Фишер и Ф. Рисс, 1907). *Пространство Лебега — полное пространство: всякая фундаментальная по норме $\|\varphi\| = I(|\varphi|)$ последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ имеет в смысле этой нормы предел в пространстве L.*

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, отметим два простых факта. Во-первых, элементы всякой фундаментальной последовательности ограничены по норме, так как, начиная с некоторого номера, все эти элементы содержатся в шаре радиуса ε

с центром в некоторой точке φ_n. Во-вторых, для доказательства существования предела фундаментальной последовательности φ_n достаточно показать, что имеется предел φ некоторой последовательности φ_{n_k} $(k=1, 2, \ldots)$; этот элемент φ будет пределом и всей последовательности φ_n в силу неравенства

$$\|\varphi-\varphi_n\| \leqslant \|\varphi-\varphi_{n_k}\| + \|\varphi_{n_k}-\varphi_n\|,$$

причем второе слагаемое справа стремится к нулю в силу фундаментальности последовательности φ_n.

Теперь переходим к доказательству теоремы.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — фундаментальная последовательность в пространстве L. Всегда можно выбрать последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$ так, чтобы при $n > n_k$ выполнялись неравенства

$$\|\varphi_n-\varphi_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

В частности, $\|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$; это означает, что

$$I(|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}|) < \frac{1}{2^k}.$$

Но тогда ряд суммируемых функций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}|$, согласно теореме Беппо Леви, сходится почти всюду. Отсюда следует, что сходится почти всюду и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k})$ с частными суммами

$$\sum_{k=1}^{N} (\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}) = \varphi_{n_{N+1}}-\varphi_{n_1}.$$

Это означает существование предела (почти всюду) при $k \to \infty$ у функции φ_{n_k}. Обозначим этот предел через φ. Функция φ измерима как предел измеримых функций. Так как нормы функций φ_{n_k}, т. е. числа $I(|\varphi_{n_k}|)$, ограничены, то, по лемме Фату, функция $|\varphi|$ суммируема. Следовательно, суммируема и измеримая функция φ. Далее, по той же лемме, примененной к функциям $\varphi-\varphi_{n_k}$, мы имеем:

$$\|\varphi-\varphi_{n_k}\| = I(|\varphi-\varphi_{n_k}|) \leqslant \sup_{p>k} I(|\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}|) =$$
$$= \sup_{p>k} \|\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}\|.$$

Но последний интеграл по условию может быть сделан при достаточно большом k сколь угодно малым. Следовательно, φ_{n_k} сходится к φ по норме пространства L, и теорема доказана.

В заключение покажем, что пространство $L_1(a, b)$ является пополнением пространства $C_1(a, b)$ непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с нормой (см. гл. II, § 8)

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Очевидно, что пространство $L_1(a, b)$ содержит пространство $C_1(a, b)$ как подпространство с той же метрикой. Поэтому нам достаточно показать, что $C_1(a, b)$ располагается в L_1 как плотное подмножество, так что каждую функцию $\varphi \in L_1$ можно представить как предел последовательности функций $f_n(x) \in C_1$. Легко убедиться, что каждая ступенчатая функция $h(x)$ обладает этим свойством. С другой стороны, поскольку каждая функция $\varphi \in L_1$ есть разность двух функций из класса C^+, достаточно проверить наше утверждение для функций из класса C^+. Пусть $\varphi \in C^+$ и $h_n \nearrow \varphi$ — последовательность ступенчатых функций. Тогда

$$\|\varphi - h_n\| = I(\varphi - h_n),$$

и так как $\varphi - h_n \searrow 0$, то по теореме Беппо Леви

$$I(\varphi - h_n) \searrow 0,$$

чем теорема и доказана.

Мы видели (гл. II, § 3, п. 3), что множество многочленов всюду плотно в пространстве $C[a, b]$ и множество тригонометрических многочленов $T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ всюду плотно в пространстве $C_1(-\pi, \pi)$. Так как $C(a, b)$ всюду плотно в своем пополнении $L_1(a, b)$, то мы можем заключить, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $L_1(a, b)$ при любых a и b; аналогично множество тригонометрических многочленов всюду плотно в пространстве $L_1(-\pi, \pi)$.

1. Если суммируемая функция f равна нулю вне отрезка $[\alpha, \beta]$, внутреннего по отношению к исходному отрезку $[a, b]$, так что функцию $f(x)$ можно «сдвигать», то в пространстве L она «непрерывна в интегральном смысле»: для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при $|h| < \delta$:

$$\|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Указание. Показать, что множество всех f, для которых (*) выполнено, замкнуто в пространстве L. Затем проверить (*) для непрерывных функций.

§ 4. Мера множеств и теория интегрирования Лебега

1. Мы называем множество A, лежащее на отрезке $[a, b]$, *измеримым*, если измерима (и, следовательно, суммируема) «характеристическая функция» этого множества, т. е. функция $\chi_A(x)$, равная 1 на

A и 0 на дополнении A. Интеграл от характеристической функции мы называем *мерой* множества A и обозначаем μA. Если множество A есть множество меры нуль в смысле определения § 1, то, как было там показано, интеграл от функции $\chi_A(x)$ равен нулю, так что A есть множество меры нуль и в нашем новом определении: $\mu A = 0$. Обратно, если интеграл характеристической функции множества A равен нулю, то, согласно замечанию после леммы Фату, A имеет меру нуль в прежнем смысле. Итак, для множества меры нуль новое определение совпадает с прежним.

Известные уже нам свойства интегралов позволят получить свойства измеримых множеств. Так, объединение A конечной или счетной совокупности измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ есть измеримое множество, поскольку его характеристическая функция может быть определена формулой

$$\chi_A(x) = \sup\{\chi_{A_1}(x), \ \ldots, \ \chi_{A_n}(x), \ \ldots\}.$$

В случае, если множества $A_1, A_2, \ldots$ не пересекаются, мы имеем:

$$\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) + \ldots + \chi_{A_n}(x) + \ldots$$

и в силу теоремы Лебега (§ 3)

$$\mu A = \mu A_1 + \ldots + \mu A_n + \ldots \tag{1}$$

Это свойство называют *полной*, или *аддитивностью меры*. Далее, вычитая измеримое множество A_1 из содержащего его измеримого множества A_2, получаем снова измеримое множество A_3, поскольку

$$\chi_{A_3} = \chi_{A_1} - \chi_{A_2}.$$

При этом $\mu A_3 = \mu A_1 - \mu A_2$. Так как отрезок $[a, b]$ измерим, то, в частности, измеримо дополнение любого измеримого множества $A \subset [a, b]$. Отсюда, далее, следует, что последовательность измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots$ имеет и измеримое пересечение, так как его дополнение

$$C\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} CA_n$$

есть измеримое множество. Отметим, наконец, следующее предельное соотношение:

Если

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \quad \text{и} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то

$$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu A_n. \tag{2}$$

Действительно, мы имеем:

$$A = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{n+1} - A_n) + \ldots,$$
$$\mu A = \mu A_1 + \mu(A_2 - A_1) + \ldots + \mu(A_{n+1} - A_n) + \ldots =$$
$$= \mu A_1 + (\mu A_2 - \mu A_1) + \ldots + (\mu A_{n+1} - \mu A_n) + \ldots = \lim_{n \to \infty} \mu A_n.$$

Если же $A_1, A_2, \ldots$ — произвольная система измеримых множеств, то множества $A_1' = A_1$, $A_2' = A_1 + A_2, \ldots, A_n' = A_1 + \ldots + A_n, \ldots$ также измеримы и вложены друг в друга; по доказанному, для $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет место равенство

$$\mu A = \lim \mu A_n' = \lim \mu [A_1 + \ldots + A_n].$$

В частности, поскольку всегда $\mu(A' + A'') = \mu(A' + [A'' - A'A'']) = \mu(A') + \mu(A'' - A'A'') \leqslant \mu A' + \mu A''$, мы имеем:

$$\mu A = \lim \mu A_n' \leqslant \lim_{n \to \infty} [\mu A_1 + \ldots + \mu A_n] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n. \tag{3}$$

Для пересечений имеют место аналогичные равенства, которые получаются применением операции дополнения: например, если даны измеримые множества $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $A = \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то

$$\mu A = \mu \prod_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{n \to \infty} \mu \prod_{k=1}^{n} A_k. \tag{4}$$

Любой промежуток (отрезок, интервал и т. п.) является, очевидно, измеримым множеством и имеет меру, равную его длине. Вышеприведенные формулы показывают, что любое открытое множество, как (не более чем) счетная сумма непересекающихся интервалов, измеримо и его мера равна сумме длин составляющих его интервалов. Далее, всякое замкнутое множество измеримо, как дополнение к открытому. Вообще всякое множество, которое получается из интервалов применением последовательных операций объединения и пересечения в счетном числе, а также операции дополнения, измеримо.

2. Естественно поставить вопрос, существуют ли вообще неизмеримые множества. Сказанное выше показывает, что вопрос о построении конкретного неизмеримого множества весьма сложен, так как обычные пути построения, начинающиеся с интервалов и использующие счетные объединения и пересечения, не выводят за пределы совокупности измеримых множеств. До сих пор не построено ни одного индивидуального примера неизмеримого множества. Тем не менее в существовании неизмеримых множеств мы можем не сомневаться. Приведем соответствующие рассуждения, следуя Н. Н. Лузину. Отрезок $[0, 1]$, на котором мы будем производить наши построения, удобнее представить себе свернутым в окружность длины 1, так что точки 0 и 1 оказываются совпадающими. Все расстояния мы будем измерять вдоль этой окружности.

Назовем точки ξ, η *родственными*, если расстояние между ними рационально, и *чуждыми*, если оно иррационально. Очевидно, что если ξ родственно с η, а η родственно с ζ, то ξ родственно с ζ. Счетную совокупность всех точек, находящихся на рациональных расстояниях от данной точки, назовем *семейством*; все члены этого семейства родственны между собой и чужды по отношению ко всякой точке, не входящей в семейство. Семейства A и B, включающие в себя заданные точки α и β, или совпадают (если α и β родственны), или не имеют ни одного общего элемента (если α и β чужды). Вся совокупность точек отрезка $[0, 1]$ есть объединение некоторого множества различных семейств. Множество всех семейств заведомо несчетное, так как несчетно множество всех точек отрезка $[0, 1]$. Представим себе теперь, что каким-то образом из каждого семейства выбрано по одному представителю. Обозначим через Z совокупность всех этих представителей. Мы утверждаем, что, по какому бы принципу ни выбирать представителей, все равно множество Z будет неизмеримым. (Мы не можем указать ни одного возможного правила для выбора представителей, поэтому нельзя сказать, что множество Z построено эффективно.) Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность всех рациональных чисел; обозначим через Z_n сдвиг множества Z как целого на отрезок r_n, так что Z_n состоит из точек вида $\xi + r_n$, где ξ пробегает все Z. Отсюда ясно, что множества Z_n и Z_m не пересекаются, если $m \neq n$; в противном случае мы имели бы равенство $\xi + r_n = \eta + r_m$, где ξ и η принадлежат Z; но тогда разность $\xi - \eta = r_m - r_n$ была бы рациональной, т. е. точки ξ и η были бы родственными, что по построению исключено. Далее, всякая точка отрезка $[0, 1]$ входит в некоторое Z_n, так как всякая точка λ имеет вид $\xi + r_n$, где ξ есть представитель того семейства, которое содержит точку λ. Таким образом, множества $Z_1, Z_2, \ldots$ не пересекаются и в сумме дают весь отрезок $[0, 1]$. Если бы множество Z было измеримо, то и все множества $Z_1, Z_2, \ldots$ были бы измеримы и имели бы меру, равную мере Z. В силу счетной аддитивности меры мы должны были бы иметь

$$\mu Z_1 + \mu Z_2 + \ldots + \mu Z_n + \ldots = \mu Z + \mu Z + \ldots + \mu Z + \ldots = 1.$$

Но это невозможно ни при каком значении μZ: ни при $\mu Z > 0$, ни при $\mu Z = 0$. Таким образом, множество Z не может быть измеримым.

Задачи. 1. Для любой измеримой функции f и числа c показать, что множество $E = \{ x : f(x) \geq c \}$ измеримо.

Указание: $E = \prod_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \prod_{m=n}^{\infty} \left\{ x : h_m(x) > c - \frac{1}{k} \right\}$, где $h_m \to f$ — последовательность ступенчатых функций.

2. Если $f_n \to f$ почти всюду, то при любом $c > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu \{ x : | f - f_n | \geq c \} = 0. \tag{5}$$

Указание.

$$\mu \prod_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{ x : f - f_n \geq c \} = 0.$$

3. Последовательность измеримых функций $f_n(x)$, удовлетворяющих при любом $c > 0$ соотношению (5), называется сходящейся по мере к функции f. Показать, что хотя сама последовательность f_n может не сходиться почти всюду к f, но она заведомо содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к f.

Указание. Для любых натуральных k и m найдется номер $n=n(k, m)$, для которого $\mu\left\{x: |f_{n(k,m)}-f| > \frac{1}{k}\right\} < \frac{\frac{1}{k}}{2m}$. Функции $f_{n(k,m)}$ при $k\to\infty$ сходятся к f на множестве меры $> b-a-\frac{1}{m}$. Искомая последовательность получается из $f_{n(k,m)}$ диагональным процессом по m.

4. Если каждая подпоследовательность данной последовательности измеримых функций f_n содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к фиксированной функции f, то f_n сходится к f по мере.

Указание. Доказательство от противного с использованием результата задачи 2.

5. Если $f\geqslant 0$ — суммируемая функция и $\mu\{x: f(x)\geqslant c\}\geqslant b$, то $If\geqslant bc$.

Указание. Для ступенчатых функций утверждение очевидно. В общем случае из формулы задачи 1 получить неравенство

$$b\leqslant \mu\{x: f(x)\geqslant c\}\leqslant \mu\left\{x: h_m(x) < c-\frac{1}{k}\right\}+\varepsilon$$

при любых k и ε и достаточно большом m. Отсюда

$$Ih_m\geqslant (b-\varepsilon)\left(c-\frac{1}{k}\right).$$

6. Если $f_n\geqslant 0$ и $If_n\longrightarrow 0$, то $f_n\longrightarrow 0$ по мере. (Сходимость почти всюду не вытекает из этих условий.) Условие $f_n\geqslant 0$ нельзя отбросить.

Указание. Использовать задачу 5.

7. В пространстве всех измеримых функций $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ введена метрика по формуле

$$\rho(f, g)=I\left(\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right). \tag{6}$$

Проверить выполнение аксиом метрического пространства. Показать, что сходимость по метрике (6) совпадает со сходимостью по мере. Показать, что это метрическое пространство полно.

8. Обозначим через $a_k(x)$ функцию, равную в точке $x\in[0, 1]$ k-му знаку двоичного разложения числа x. Показать, что для функции

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

справедливо равенство $\int\limits_0^1\left[\sigma_n(x)-\frac{1}{2}\right]^2 dx=\frac{1}{4n}$.

Указание. $\int\limits_0^1 a_j(x)\,a_k(x)\,dx=\frac{1}{4}$ при любых $j\neq k$.

9. (Продолжение). Последовательность $\sigma_{n^2}(x)$ сходится к $f(x)\equiv\frac{1}{2}$ почти всюду.

Указание. При любом $\varepsilon>0$ $\mu\left\{x: \left|\sigma_n(x)-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

10. (Продолжение). Последовательность $\sigma_n(x)$ сходится к $f(x)\equiv\frac{1}{2}$ почти всюду.

Указание. Если $m^2 < n < (m+1)^2$, то $\frac{1}{n} \sum_{m^2+1}^{n} a_k(x) < \frac{2m+1}{m^2}$.

Примечание. Результат задачи 10 показывает, что почти для каждого вещественного числа отрезка [0, 1] доля нулей и единиц в его двоичном разложении, определяемая, естественно, как предел функции $\sigma_n(x)$, равна $\frac{1}{2}$.

3. Далее мы будем изучать структуру измеримого множества положительной меры. Мы покажем, что *всякое измеримое множество A положительной меры, с точностью до множества произвольно малой меры, можно считать объединением конечного числа отрезков*. Точнее говоря, *для любого заданного $\varepsilon > 0$ мы беремся подобрать такую конечную систему отрезков B, что множество A можно будет получить из B удалением множества a меры $< \varepsilon$ и добавлением множества b также меры $< \varepsilon$.*

Для доказательства представим измеримую функцию $\chi_A(x)$ в виде предела почти всюду сходящейся последовательности ступенчатых функций $h_n(x)$. Если мы заменим каждую функцию h_n на функцию h'_n, равную 0 там, где h_n меньше $\frac{1}{2}$, и равную 1 там, где h_n больше или равна $\frac{1}{2}$, то получим новую, также почти всюду сходящуюся к χ_A последовательность ступенчатых функций, принимающих значения только 0 или 1. Каждая из функций h'_n есть характеристическая функция некоторого множества B_n, представляющего собой конечную систему отрезков. Мы утверждаем, что при достаточно большом n множество B_n удовлетворяет поставленному условию. Для этого рассмотрим функции $(h'_n - \chi_A)^+$ и $(h'_n - \chi_A)^-$. Функция $(h'_n - \chi_A)^+$ есть характеристическая функция множества b_n тех точек, которые принадлежат множеству B_n и не принадлежат множеству A; функция $(h'_n - \chi_A)^-$ есть характеристическая функция множества a_n тех точек, которые принадлежат A и не принадлежат B_n. Множество A получается из множества B_n прибавлением множества b_n и вычитанием множества a_n. С другой стороны,

$$\mu(a_n) + \mu(b_n) = I(h'_n - \chi_A)^- + I(h'_n - \chi_A)^+ = I(|h'_n - \chi_A|) \to 0,$$

что и завершает доказательство.

4. Мера измеримого множества как его верхняя мера. Доказанная теорема позволит нам получить второе, более конструктивное, определение измеримого множества. Покроем произвольное множество A на отрезке $[a, b]$ конечной или счетной системой интервалов и найдем сумму длин этих интервалов. Точная нижняя граница получающихся чисел при всевозможных покрытиях множества A системами интервалов обозначается μ^*A и называется *верхней* или *внешней мерой множества* A. Так, множество меры нуль по самому определению имеет и внешнюю меру нуль. Покажем, что *для каждого измеримого множества A его внешняя мера совпадает с числом* μA.

Если B есть система неперекрывающихся интервалов, покрывающая множество A, то, по сказанному выше, B есть измеримое множество с мерой, равной сумме длин интервалов; так как $A \subset B$, то $\mu A \leqslant \mu B$ и, следовательно, внешняя мера множества A

$$\mu^* A = \inf_{B \supset A} \mu B \geqslant \mu A. \tag{5}$$

С другой стороны, используя доказанную выше теорему, мы можем для заданного $\varepsilon > 0$ и любого n построить такую конечную систему интервалов B_n, что

$$A + b_n = B_n + a_n, \tag{6}$$

где каждое из измеримых множеств a_n и b_n имеет меру $< \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Пусть $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $a = \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$, $b = \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n$; очевидно, $\mu a = \lim \mu a_n = 0$, $\mu b \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu b_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Имеют место включения

$$A \subset B + a, \tag{7}$$

$$B \subset A + b. \tag{8}$$

Действительно, если точка $x \in A$ не входит в B, то она не входит ни в одно B_n, а так как $A \subset B_n + a_n$, то x входит во все a_n и, следовательно, входит в a; этим доказано (7).

Далее, рассмотрим точку y, входящую в B и тем самым принадлежащую некоторому B_n. Если при этом $y \overline{\in} A$, то из соотношения (6) следует, что y входит в b_n и тем самым в b; этим доказано (8). Отметим, что из (8) следует $\mu B \leqslant \mu A + \mu b < \mu A + \frac{\varepsilon}{2}$.

Вернемся к включению (7). Множество B в конечном счете есть система интервалов, конечная или счетная. Множество a, как множество меры нуль, можно покрыть системой интервалов с общей длиной $< \frac{\varepsilon}{2}$. В итоге все множество A оказывается покрытым (конечной или) счетной системой интервалов с общей длиной, не большей $\mu B + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu A + \varepsilon$. Отсюда $\mu^* A \leqslant \mu A + \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $\mu^* A \leqslant \mu A$ и в соединении с неравенством (5) мы получаем, что для всякого измеримого множества

$$\mu^* A = \mu A.$$

Иными словами, *мера всякого измеримого множества может быть определена конструктивно как его внешняя мера.*

5. Естественно возникает вопрос, можно ли определить сами измеримые множества, не привлекая понятия интеграла, в терминах внешней меры. Ответ на этот вопрос следующий: *множество A на отрезке $[a, b]$ измеримо тогда и только тогда, когда сумма внешних мер множества A и его дополнения CA* (до всего отрезка $[a, b]$) *равна длине отрезка* $[a, b]$:

$$\mu^*A + \mu^*CA = b - a. \tag{9}$$

Необходимость этого условия очевидна: если A измеримо, то и его дополнение измеримо и из равенства $\mu A + \mu CA = b - a$ следует равенство (9). Докажем достаточность этого условия. Пусть для множества A выполнено равенство (9). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти покрытие множества A и CA такими системами неперекрывающихся промежутков U и V, общая сумма длин которых

$$\mu U + \mu V < b - a + \varepsilon.$$

Обозначим через h_U и h_V характеристические функции множеств U и V. Функция $1 - h_V$ отлична от нуля только в пределах множества A, и поэтому

$$0 \leqslant 1 - h_V \leqslant \chi_A \leqslant h_U,$$

где χ_A — характеристическая функция множества A.

Отсюда

$$0 \leqslant I(1 - h_V) \leqslant Ih_U.$$

С другой стороны, по условию

$$Ih_U - I(1 - h_V) = Ih_U + Ih_V - (b - a) = \mu U + \mu V - (b - a) < \varepsilon.$$

При $\varepsilon \to 0$ последовательность $h_U (= h_{U(\varepsilon)})$ можно считать монотонно убывающей, а последовательность $1 - h_V$ — монотонно возрастающей. Поэтому последовательность $h_U - (1 - h_V)$ также монотонно убывает. Ее предел f есть неотрицательная измеримая ограниченная функция, интеграл от которой, согласно теореме Беппо Леви, равен нулю; поэтому f почти всюду равна нулю. Но так как

$$h_U - (1 - h_V) \geqslant h_U - \chi_A \geqslant 0,$$

то $\chi_A = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} h_U$ и тем самым есть измеримая и суммируемая функция. Это доказывает и достаточность сформулированного условия.

З а м е ч а н и е. Доказанную теорему можно сформулировать и следующим, по форме несколько более общим образом: *множество A, расположенное на отрезке $[a, b]$, измеримо тогда и только тогда, когда существуют последовательности измеримых множеств U_n и V_n такие, что $U_n \supset A$, $V_n \supset CA$,*

$$b - a \leqslant \mu U_n + \mu V_n \leqslant b - a + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

6. В своем построении теории меры и интеграла творец этой теории А. Лебег отправлялся от определения измеримого множества как раз в форме, установленной в последней теореме. Именно множество A он называл измеримым, если выполнялось соотношение

$$\mu^*A + \mu^*CA = b - a. \tag{10}$$

Иногда это определение высказывается в несколько иной форме, а именно: определяется внутренняя (нижняя) мера множества A по формуле

$$\mu_*A = \sup_{F \subset A} \mu F,$$

где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам F, содержащимся в данном множестве A; при этом мерой замкнутого множества F называется число $b - a - \mu CF$, где CF — дополнительное к F открытое множество. Далее, A называется измеримым множеством, если

$$\mu_*A = \mu^*A. \tag{11}$$

Легко проверить, что определения (6) и (7) равносильны. Действительно,

$$\mu_*A = \sup_{F \subset A} \mu F = \sup_{F \subset A} \{b - a - \mu CF\} = b - a - \inf_{F \subset A} \mu CF.$$

Но если множество F заключено в множестве A, то его дополнение CF покрывает множество CA; отсюда непосредственно следует, что

$$\mu_*A = b - a - \mu^*CA,$$

откуда вытекает, что равенства

$$\mu_*A = \mu^*A \text{ и } \mu^*A + \mu^*CA = b - a$$

эквивалентны.

Установив затем на основании определения (10) [или (11)] основные свойства меры, о которых мы говорили в начале параграфа, Лебег переходит к определению измеримых функций. Функцию $\varphi(x)$ он называет *измеримой* (а мы назовем *измеримой по Лебегу*), если всякое множество вида

$$\{x : \varphi(x) \leqslant c\}$$

измеримо, каково бы ни было вещественное число c.

Будем временно называть измеримые функции в том смысле, о котором говорилось в § 1, *измеримыми по Риссу*. Покажем, что определения измеримых функций по Лебегу и по Риссу совпадают.

Пусть $\varphi(x)$ измерима по Риссу; введем функцию

$$\varphi_c(x) = \max\{\varphi(x), c\}.$$

Отношение

$$\frac{\varphi_{c+\varepsilon} - \varphi_c}{\varepsilon}$$

есть также измеримая функция по Риссу, равная 0 там, где $\varphi(x) \geqslant c+\varepsilon$, и 1 там, где $\varphi \leqslant c$. При $\varepsilon \to 0$ указанное отношение имеет пределом характеристическую функцию множества $\{x : \varphi(x) \leqslant c\}$, которая, таким образом, также измерима по Риссу. Значит само это множество измеримо по Риссу, а следовательно, и по Лебегу.

Обратно, если функция $\varphi(x)$ измерима по Лебегу, т. е. все множества вида $\{x : \varphi(x) \leqslant c\}$ измеримы, то измеримы при любых c_1 и c_2 и множества вида

$$\{x : c_1 < \varphi(x) \leqslant c_2\} = \{x : \varphi(x) \leqslant c_2\} - \{x : \varphi(x) \leqslant c_1\}.$$

Пусть $\chi_{c_1 c_2}$ — характеристическая функция этого множества. Положим для заданного n функцию φ_n равной $\frac{m}{n}$ в тех точках, где выполняется неравенство

$$\left\{x : \frac{m}{n} < \varphi \leqslant \frac{m+1}{n}\right\} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Функция φ_n есть сумма всюду сходящегося ряда измеримых по Риссу функций

$$\varphi_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{n} \chi_{\frac{m}{n},\ \frac{m+1}{n}}(x)$$

и поэтому сама измерима по Риссу. Очевидно, что выполнено неравенство

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\varphi(x)$ есть предел при $n \to \infty$ последовательности измеримых по Риссу функций $\varphi_n(x)$ и, следовательно, измерима по Риссу, что и требовалось.

Далее Лебег строит определение интеграла для ограниченной измеримой функции $\varphi(x)$. Для этого он делит область изменения $[m, M]$ функции $\varphi(x)$ на n частей точками деления $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M$ и строит «интегральную сумму»

$$s_\Pi(\varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu\{x : y_j < \varphi(x) \leqslant y_{j+1}\}, \tag{8}$$

причем, поскольку функция $\varphi(x)$ измерима, числа $\mu\{x : y_j < \varphi(x) \leqslant y_{j+1}\}$ имеют смысл. Когда разбиение Π отрезка $[m, M]$ неограниченно измельчается, суммы $s_\Pi(\varphi)$, как доказывает Лебег, стремятся к (единственным образом определяемому) пределу, который и называется интегралом Лебега от функции $\varphi(x)$.

Проверим, что определение Лебега совпадает с определением Рисса, принятым в нашем изложении. Функция $\varphi_\Pi(x)$, равная y_j на множестве

$\{x : y_j < \varphi \leqslant y_{j+1}\}$, измерима, и ее интеграл по Риссу как раз равен величине $s_п(\varphi)$ (8). Так как она отличается от функции $\varphi(x)$ не более чем на $\max(y_{j+1} - y_j)$, то при неограниченном измельчении разбиения интервала $[m, M]$ функция $\varphi_п(x)$ равномерно стремится к функции $\varphi(x)$. Отсюда $I\varphi = \lim I\varphi_п$, чем и доказано существование интеграла Лебега и совпадение его с интегралом Рисса. Если $\varphi(x)$ — неограниченная, но неотрицательная функция, то Лебег далее поступает следующим образом. Обрезая функцию φ на высоте N, т. е. рассматривая функцию

$$\varphi_N(x) = \min(\varphi(x),\ N),$$

он получает измеримую неотрицательную ограниченную функцию. Ее интеграл $I\varphi_N$, существующий по предыдущему, неотрицателен и возрастает (точнее, не убывает) с возрастанием N. Если при $N \to \infty$ числа $I\varphi_N$ имеют конечный предел, то функция φ называется *суммируемой по Лебегу* и ее интеграл Лебега полагается равным $\lim I\varphi_N$. В общем случае, когда φ любого знака, она называется суммируемой по Лебегу, если суммируемы по Лебегу ее положительная часть φ^+ и отрицательная часть φ^-; тогда интеграл от φ строится по формуле

$$I\varphi = I\varphi^+ - I\varphi^-.$$

Проверим сейчас, что класс суммируемых функций в принятом у нас определении (суммируемых по Риссу) совпадает с классом функций, суммируемых по Лебегу, и значения соответствующих интегралов совпадают. Достаточно установить это для неотрицательных функций. Если неотрицательная функция $\varphi(x)$ суммируема по Лебегу, то она является пределом возрастающей последовательности ограниченных суммируемых функций φ_N; отсюда, по теореме Беппо Леви, φ суммируема по Риссу и мы имеем $I\varphi = \lim I\varphi_N$, т. е. ее интеграл по Риссу совпадает с интегралом по Лебегу. Обратно, если $\varphi(x) \geqslant 0$ суммируема по Риссу, то все функции φ_N ограничены и измеримы и их интегралы $I\varphi_N$ не превосходят числа $I\varphi$. Так как $I\varphi_N$ ограничены, то они имеют конечный предел, и, следовательно, $\varphi(x)$ суммируема по Лебегу; по предыдущему, ее интеграл Лебега совпадает с числом $I\varphi$. Таким образом, результат построения Лебега полностью совпадает с результатом построения Рисса. Мы предпочли изложить исходное построение по методу Рисса, так как в целом, по технике доказательств, оно несколько проще построения по методу Лебега и позволяет непосредственно строить теорию интеграла, минуя достаточно громоздкую теорию меры Лебега.

7. Интегрирование по измеримому множеству. До сих пор у нас областью интегрирования был отрезок $[a, b]$. Но легко можно определить интеграл и по любому измеримому множеству $E \subset [a, b]$. Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E; функцию φ

мы назовем суммируемой на множестве E, если произведение $\chi_E\varphi$ суммируемо на $[a, b]$, и полагаем, по определению,

$$\int_E \varphi\, dx = \int_a^b \chi_E\varphi\, dx = I(\chi_E\varphi).$$

Интеграл по множеству E обладает, очевидно, всеми обычными свойствами интеграла. Отметим некоторые специфические свойства.

а) *Если φ суммируема на $E = E_1 + E_2 + \ldots$ и (измеримые) множества $E_1, E_2, \ldots$ взаимно не пересекаются, то φ суммируема на каждом E_n и*

$$\int_E \varphi\, dx = \int_{E_1} \varphi\, dx + \int_{E_2} \varphi\, dx + \ldots \tag{12}$$

Действительно, так как $\chi_{E_n}\chi_E = \chi_{E_n}$, то $\chi_{E_n}\varphi = \chi_{E_n}(\chi_E\varphi)$ есть суммируемая функция на E_n. Далее, $\chi_{E_1} + \chi_{E_2} + \ldots = \chi_E$, откуда

$$\chi_{E_1}\varphi = \chi_{E_2}\varphi + \ldots = \chi_E\varphi,$$

причем частные суммы этого ряда ограничены суммируемой функцией $\chi_E|\varphi|$. Интегрируя ряд почленно, получаем формулу (12).

б) Обратный вывод — о суммируемости функции φ на E при условии суммируемости φ на каждом E_n и сходимости ряда (12) — мы можем сделать лишь при дополнительном условии $\varphi \geqslant 0$ на каждом E_n.

В этом случае $\chi_E\varphi$ есть предел неубывающей последовательности частных сумм ряда $\chi_{E_1}\varphi + \chi_{E_2}\varphi + \ldots$, интегралы которых ограничены общей постоянной; применяя теорему Беппо Леви, мы получаем, что $\chi_E\varphi$ суммируема и равенство (12) имеет место.

Свойство б) применяется иногда в следующей эквивалентной форме: *если функция φ неотрицательна, суммируема на каждом из множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ и интегралы $\int_{E_n} \varphi\, dx$ ограничены фиксированной постоянной, то φ суммируема на $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ и*

$$\int_E \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi\, dx.$$

в) *Абсолютная непрерывность интеграла по множеству*. Оказывается, что *интеграл от суммируемой* (на $[a, b]$) *функции φ, взятый по измеримому множеству E, стремится к нулю вместе с мерой этого множества, независимо от его расположения на* $[a, b]$. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\mu E < \delta$ следует $\int_E |\varphi|\, dx < \varepsilon$. Для доказательства мы найдем по заданному

$\varepsilon > 0$ ограниченную измеримую функцию $h(x) \geqslant 0$, для которой

$$\int_a^b ||\varphi(x)| - h(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть, например, $h(x)$ ограничена числом M, $0 \leqslant h(x) \leqslant M$. Тогда на любом измеримом множестве E меры меньше $\delta = \frac{1}{2M}$

$$\int_E |\varphi|\,dx \leqslant \int_E ||\varphi(x)| - h(x)|\,dx + \int_E h(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \delta M < \varepsilon,$$

что и требовалось.

8. В заключение остановимся еще на одной важной теореме из теории меры Лебега:

Теорема (Д. Ф. Егоров, 1911). *Пусть дана последовательность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... измеримых функций, сходящаяся почти всюду на $[a, b]$ к некоторому пределу $\varphi(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать измеримое (даже замкнутое) множество A меры $> b - a - \varepsilon$, на котором эта последовательность сходится к своему пределу равномерно.*

Доказательство. Предельная функция $\varphi(x)$ измерима. Рассматривая функции $\varphi - \varphi_n$ вместо φ_n, можно свести задачу к случаю последовательности, сходящейся к нулю; поэтому будем считать с самого начала, что $\varphi(x) \equiv 0$. Далее, можно считать функции φ_n неотрицательными и монотонно стремящимися к нулю; если бы это было не так, то мы заменили бы φ_n на $\sup\{|\varphi_n|, |\varphi_{n+1}|, \ldots\}$.

Обозначим через A_n^m множество точек, где выполняется неравенство $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{m}$. При фиксированном m множество A_n^m расширяется с увеличением индекса n и система всех этих множеств покрывает весь отрезок $[a, b]$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n^m = b - a$ и можно найти такой номер $n = n(m)$, что

$$\mu A_{n(m)}^m > b - a - \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Рассмотрим теперь пересечение A всех множеств $A_{n(m)}^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Так как дополнение к A имеет меру

$$\mu CA = \mu C\left\{\prod A_{n(m)}^m\right\} = \mu \cup CA_{n(m)}^m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon,$$

то мера самого A не меньше $b - a - \varepsilon$. Мы утверждаем, что на множестве A сходимость $\varphi_n \to 0$ равномерна, т. е. для заданного числа $\frac{1}{m}$

существует номер N, начиная с которого всюду на A выполняется неравенство $\varphi_n(x) < \frac{1}{m}$. Действительно, в качестве N можно взять $n(m)$, так как $A \subset A^m_{n(m)}$, и поэтому, если $n > n(m)$, то $\varphi_n(x) \leqslant \leqslant \varphi_{n(m)} x \leqslant \frac{1}{m}$ во всех точках A. Вспоминая, что $\mu A = \sup \mu F$, $F \subset A$, мы можем заменить измеримое множество A на замкнутое сколь угодно близкой меры. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что в формулировке этой теоремы отрезок $[a, b]$ может быть заменен любым измеримым множеством.

Следствием теоремы Егорова является теорема Лузина, устанавливающая новую характеристику измеримых функций:

Теорема (Н. Н. Лузин, 1915[1]). *Функция $\varphi(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, тогда и только тогда измерима, когда при любом $\varepsilon > 0$ имеется замкнутое подмножество $A \subset [a, b]$ меры $> b - a - \varepsilon$, на котором $\varphi(x)$ непрерывна.*

Действительно, если $h_n(x) \to \varphi(x)$ — последовательность ступенчатых функций, определяющая измеримую функцию $\varphi(x)$, то множество меры нуль, состоящее из точек расходимости последовательности и точек разрыва функций $h_n(x)$, мы можем покрыть системой интервалов с общей длиной $< \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, в силу теоремы Егорова из остающегося множества можно удалить еще часть, также меры $< \frac{\varepsilon}{2}$, так что на остатке последовательность $\varphi_n(x)$ будет сходиться равномерно; при этом можно считать, что удаляемая часть представляет собой систему интервалов. На остающемся замкнутом подмножестве F отрезка $[a, b]$, по мере большем, чем $b - a - \varepsilon$, функции $h_n(x)$ непрерывны и сходятся к своему пределу $\varphi(x)$ равномерно; отсюда следует, что на F функция $\varphi(x)$ непрерывна.

Доказательство обратного утверждения мы можем предоставить читателю.

Задачи. 1. Показать, что каждое измеримое множество с точностью до множества меры нуль есть пересечение последовательности открытых множеств и объединение последовательности замкнутых множеств.

2. Доказать, что совокупность измеримых множеств, каждые два из которых различаются более чем на множество меры нуль, имеет мощность не выше континуума.

Указание. Использовать задачу 1 и задачу 5 к § 2 гл. II.

3. Построить измеримое множество, которое на каждом интервале имеет положительную меру, так же как и его дополнение.

---

[1] Д. Ф. Егоров (1869—1931), Н. Н. Лузин (1883—1950) — московские математики, основатели московской школы теории функций действительного переменного.

4. Пусть A — множество меры $\geqslant \varepsilon$ на отрезке $[0, 1]$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — произвольные числа на этом отрезке, причем $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Показать, что в A имеется пара точек, расстояние между которыми совпадает с расстоянием между некоторой парой точек $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Указание. Показать, что множества $\xi_1 + A, \ldots, \xi_n + A$ (располагающиеся на отрезке $[0, 2]$) не могут не иметь общих точек.

5. Показать, что в каждом множестве положительной меры имеется пара точек с рациональным расстоянием.

Указание. Использовать предыдущую задачу.

6. Множество A точек на отрезке $[a, b]$ имеет меру $> \frac{1}{2}(b-a)$. Доказать, что в A имеется подмножество положительной меры, симметричное относительно середины отрезка.

Указание. Рассмотреть пересечение множества A с его отражением относительно середины отрезка.

7. Измеримые функции f и g называются равноизмеримыми, если для любого c имеем $\mu\{x: f > c\} = \mu\{x: g > c\}$. Показать, что: а) всякая измеримая функция равноизмерима с некоторой неубывающей функцией; б) равноизмеримые неубывающие функции совпадают почти всюду.

8. На отрезке $[a, b]$ дана произвольная последовательность $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ измеримых функций. Показать, что множество E точек, где существует $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, измеримо.

Указание. $E = \prod\limits_k \bigcup\limits_n \prod\limits_m \left\{x: |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right\}$.

§ 5. Обобщения

1. Случай бесконечного промежутка. Все предыдущие рассмотрения относились к функциям, определенным на отрезке $[a, b]$ оси x. Но нетрудно рассмотреть и случай бесконечных промежутков $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ или $(-\infty, \infty)$. Во всех этих случаях *ступенчатой функцией* $h(x)$ мы будем называть функцию, принимающую постоянные значения в конечном числе конечных интервалов $\Delta_j = (x_j, x_{j+1})$; в остальной же части бесконечного промежутка функция $h(x)$ предполагается равной нулю. *Измеримой функцией* называется функция $\varphi(x)$, которая является пределом сходящейся почти всюду на всем бесконечном промежутке последовательности ступенчатых функций. Интеграл от ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение b_j на интервале Δ_j длины $|\Delta_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, определяется, естественно, формулой

$$Ih = \sum_{j=1}^{k} b_j |\Delta_j|.$$

Класс C^+ определяется по-прежнему как совокупность функций $f(x)$, каждая из которых является пределом возрастающей последовательности ступенчатых функций $h_n(x)$ с ограниченными интегралами. Класс L суммируемых функций определяется как класс разностей

$\varphi=f-g$, $f\in C^+$, $g\in C^+$. Все теоремы § 2—4 сохраняются без всяких изменений, за единственным исключением: в рассматриваемом случае ограниченные измеримые функции, вообще говоря, уже не являются суммируемыми. Поэтому, в частности, равенство $I\varphi=\lim I\varphi_n$ перестает быть справедливым, если суммируемые функции φ_n сходятся почти всюду к функции φ_0, оставаясь ограниченными в совокупности; для справедливости этого равенства остается достаточным первоначальное условие $|\varphi_n|\leqslant\varphi_0$, где φ_0 — суммируемая функция. В доказательстве теоремы о том, что предел последовательности измеримых функций есть измеримая функция (§ 3, п. 4), нужно будет в связи с этим заменить функцию $\psi_n=\frac{1}{1+\varphi_n}$ на $\hat{\psi}_n=\frac{h}{h+\varphi_n}$, где h — строго положительная суммируемая функция. Остальные результаты переносятся на случай бесконечного промежутка без изменений. В частности, на бесконечном промежутке Δ можно определить линейное нормированное пространство $L_1(\Delta)$ (пространство Лебега), состоящее из всех суммируемых функций и снабженное нормой

$$\|\varphi\|=\int\limits_{\Delta}|\varphi(x)|\,dx.$$

Так же как и для конечного промежутка, доказывается, что и в общем случае пространство L полно и что ступенчатые функции составляют в нем всюду плотное множество.

2. Случай нескольких независимых переменных. Ограничимся рассмотрением случая двух переменных x и y и функций $\varphi(x, y)$, определенных в прямоугольнике $D=\{a_1\leqslant x\leqslant b_1, a_2\leqslant y\leqslant b_2\}$.

Множеством меры нуль в прямоугольнике D будем называть такое множество, которое при любом $\varepsilon>0$ может быть покрыто конечной или счетной системой прямоугольников $D_j=\{a_1^{(j)}\leqslant x\leqslant b_1^{(j)}, a_2^{(j)}\leqslant y\leqslant b_2^{(j)}\}$, сумма площадей которых не превосходит ε. Так, любой отрезок или ломаная являются множествами меры нуль.

Если прямоугольник D разбит на конечное число прямоугольников $D_1, \ldots, D_m$, то функция, постоянная на каждом из D_j, называется *ступенчатой функцией*. Интеграл от ступенчатой функции $h(x, y)$, принимающей в прямоугольнике D_j значение b_{j_m}, определяется формулой

$$Ih=\sum_{j=1}^{m} b_j|D_j|,$$

где $|D_j|$ есть площадь прямоугольника D_j.

Класс C^+, как и раньше, есть совокупность функций f, каждая из которых есть предел возрастающей последовательности ступенчатых функций h_n с ограниченными интегралами Ih_n. Класс L — пространство Лебега — есть класс разностей $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$. Теоремы §§ 2—4 переносятся на случай двух переменных без всяких изменений, исключая форму записи [вместо $f(x)$ пишем $f(x, y)$, вместо слова «интервал» пишем «прямоугольник» и т. д.].

Но здесь появляется новая важная задача — именно задача о повторном интегрировании.

В классическом анализе двойной интеграл (определенный первоначально как предел римановых интегральных сумм), например от непрерывной функции $f(x, y)$, сводится к двум обычным интегралам по одному переменному по формуле

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy\right\}dx.$$

В теории интеграла Лебега также имеет место аналогичная формула. Соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема (Дж. Фубини, 1907). *Пусть $\varphi(x, y)$ — суммируемая функция в прямоугольнике $D\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$. Тогда: 1) рассматриваемая как функция аргумента x при фиксированном y, эта функция является суммируемой функцией от x почти при всех значениях y; 2) ее интеграл по отрезку $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, который мы обозначим через $I_x\varphi(x, y)$,*

как функция от y, является суммируемой функцией на отрезке $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$; 3) имеет место равенство

$$I_y\{I_x\varphi(x, y)\} = I\varphi.$$

Меняя x и y ролями, получим аналогичную формулу:

$$I_x\{I_y\varphi(x, y)\} = I\varphi.$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для функции $\varphi \in C^+$. Пусть $h_n(x, y)$ — монотонно возрастающая последовательность ступенчатых функций, сходящаяся к функции $\varphi(x, y)$ на множестве E полной плоской меры. Образуем функции

$$g_n(y) = I_x h_n(x, y).$$

Функции $g_n(y)$ определены, во всяком случае, при всех y, которые не соответствуют линиям разрыва $h_n(x, y)$. Последовательность $g_n(y)$ монотонно возрастает при $n \to \infty$, и интегралы от $g_n(y)$ ограничены в совокупности:

$$I_y g_n(y) = I_y[I_x h_n(x, y)] = Ih_n(x, y) \nearrow I\varphi\,^{1)}.$$

[1]) Для ступенчатых функций формула повторного интегрирования, конечно допустима.

В силу теоремы Беппо Леви функции $g_n(y)$ сходятся почти при всех y к некоторой суммируемой функции $g(y)$, и при этом

$$I_y g(y) = \lim_{n\to\infty} I_y g_n(y) = I\varphi.$$

Пусть y — одна из точек того множества E_y полной меры, на котором функция $g(y)$ определена и конечна. При этом значении y функции $h_n(x, y)$ как функции от x образуют монотонно возрастающую последовательность и интегралы от них ограничены:

$$I_x h_n(x, y) = g_n(y) \nearrow g(y).$$

Поэтому в силу той же теоремы Беппо Леви функции $h_n(x, y)$ почти при всех x, т. е. на некотором множестве E_{yx} полной меры по x, стремятся к некоторой функции $\varphi_0(x, y)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} I_x h_n(x, y) = g(y) = I_x\varphi_0(x, y).$$

В результате получаем формулу

$$I\varphi = I_y g(y) = I_y\{I_x\varphi_0(x, y)\}. \tag{1}$$

Функция $\varphi_0(x, y)$ совпадает с функцией $\varphi(x, y)$ во всякой точке (x, y), которая принадлежит одновременно множеству E и множеству E_{yx}, поскольку на первом из них предел последовательности $h_n(x, y)$ есть $\varphi(x, y)$, а на втором $\varphi_0(x, y)$.

В частности, если $h_n(x, y)$ *всюду* сходится к функции $\varphi(x, y)$, то на множестве E_{yx} имеет место равенство $\varphi_0(x, y) = \varphi(x, y)$ и в этом случае утверждение нашей теоремы оказывается справедливым.

Последнее условие реализуется, например, в случае, когда функции $h_{n+1} - h_n = e_n$ являются характеристическими функциями непересекающихся прямоугольников D_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Интеграл $I\varphi$ представляет собой в этом случае (счетную) сумму площадей этих прямоугольников. Функция $g_n(y) = I_x h_n(x, y)$ есть сумма длин интервалов, полученных в пересечении соответствующей горизонтальной прямой с первыми n прямоугольниками; функция $g(y) = \lim g_n(y)$ есть (счетная) сумма длин всех аналогичных интервалов.

Формула (1) позволит нам сейчас установить одно важное свойство любого плоского множества Z полной меры. Именно мы утверждаем, что *почти всеми горизонтальными прямыми (т. е. всеми, кроме множества y-в линейной меры нуль) множество Z пересекается по множеству x-в полной линейной меры.*

Действительно, образуем для заданного $\varepsilon > 0$ покрытие дополнения CZ множества Z системой непересекающихся прямоугольников

$D_1, \ldots, D_n, \ldots$ с общей площадью $<\varepsilon$, и пусть $\varphi_\varepsilon(x, y)$ — характеристическая функция этой системы прямоугольников. По доказанному

$$I\varphi_\varepsilon(x, y) = I_y\{I_x\varphi_\varepsilon(x, y)\} = I_y g_\varepsilon(y).$$

Устремим ε к нулю; тогда можно считать, что функции $\varphi_\varepsilon(x, y)$ образуют убывающую последовательность; поэтому и функции $g_\varepsilon(y) = I_x\varphi_\varepsilon(x, y)$ также образуют убывающую последовательность. Так как $I\varphi_\varepsilon \to 0$, то $I_y g_\varepsilon(y) \to 0$, откуда следует, что почти при всех y также $g_\varepsilon(y) \to 0$.

Множество всех y, для которых $g_\varepsilon(y) \to 0$, обозначим через E_0; это множество имеет полную меру. Но каждое значение функции $g_\varepsilon(y)$, как мы уже указали, есть сумма длин интервалов, получающихся в пересечении соответствующей горизонтальной прямой $y = y_0$ с прямоугольниками $D_1, \ldots, D_n, \ldots$, покрывающими множество CZ. Мы видим, что пересечение множества CZ с прямой $y = y_0 \in E_0$ может быть покрыто (счетной) системой интервалов с общей длиной произвольно малой. Таким образом, это пересечение имеет меру нуль, а пересечение множества Z с этой же прямой имеет полную меру, что и требовалось.

Вернемся теперь к общему случаю.

Последовательность h_n сходится к φ на множестве E полной (плоской) меры; на оси y можно указать множество E'_y полной (линейной) меры так, что для $y_0 \in E'_y$ функции $h_n(x, y_0)$ сходятся к $\varphi(x, y_0)$ на множестве E'_{yx} полной меры по x. При построении множества E_y, где сходится последовательность $g_n(y)$, можно заранее исключить точки, не входящие в E'_y (они образуют множество меры нуль), и поэтому можно считать, что $E_y \subset E'_y$. Далее, при фиксированном $y_0 \in E_y$ для построения множества $E_{y_0 x}$, где сходится последовательность $h(x, y_0)$ к функции $\varphi_0(x, y_0)$, мы можем исключить точки, не входящие в $E'_{y_0 x}$, так что можно считать, что $E_{y_0 x} \subset E'_{y_0 x}$. Но на множестве $E'_{y_0 x}$ мы имеем $h_n(x, y_0) \nearrow \varphi(x, y)$. Поэтому всюду на $E_{y_0 x}$ имеем $\varphi(x, y_0) = \varphi_0(x, y_0)$. Мы находим, таким образом, что функция $\varphi(x, y)$ при $y \in E_y$ суммируема по x, ее интеграл $I_x\varphi(x, y) = g(y)$ — суммируемая функция от y и имеет место равенство

$$I_y\{I_x\varphi(x, y)\} = I\varphi.$$

Тем самым теорема Фубини полностью доказана.

Замечание. Из существования интегралов

$$I_y\{I_x\varphi(x, y)\} \quad \text{и} \quad I_x\{I_y\varphi(x, y)\} \tag{2}$$

не следует, вообще говоря, их равенства и суммируемости функции $\varphi(x, y)$ на множестве E. Но *если функция $\varphi(x, y)$ измерима и неотрицательна, то существование одного из интегралов* (2) *уже влечет суммируемость функции $\varphi(x, y)$ на множестве E и равенство*

$$I\varphi = I_y\{I_x\varphi\} = I_x\{I_y\varphi\}. \tag{3}$$

Действительно, пусть существует, например, $I_y\{I_x\varphi(x, y)\} = A$ и $\varphi_n(x, y) = \min\{\varphi(x, y), n\}$. Функция $\varphi_n(x, y)$ измерима, ограничена и поэтому суммируема на E; по теореме Фубини

$$I\varphi_n = I_y\{I_x\varphi_n\} \leqslant A.$$

С возрастанием n функции φ_n, монотонно возрастая, стремятся к функции φ; так как $I\varphi_n \leqslant A$, то по теореме Беппо Леви функция φ суммируема. Но тогда можно применить теорему Фубини, и мы получим соотношение (3), что и требуется.

Пример. Если $\varphi(x)$ суммируема при $a \leqslant x \leqslant b$, $\psi(y)$ суммируема при $a \leqslant y \leqslant b$, то $\varphi(x)\psi(y)$ суммируема на множестве $E = (a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b)$ и

$$I(\varphi\psi) = I\varphi I\psi. \tag{4}$$

Действительно, функция $|\varphi||\psi|$, очевидно, измерима, и существует интеграл $I_y\{I_x(|\varphi||\psi|)\} = I_y(|\psi|)I_x(|\varphi|) = I_y(|\psi|)I_x(|\varphi|)$; поэтому функция $|\varphi\psi|$ суммируема на E, а вместе с ней суммируема и $\varphi\psi$. Применяя (3), приходим к (4), что и требуется.

3. Пространство L_p. Пусть p — положительное число. Класс L_p образуется, по определению, из всех функций $f(x)$, определенных в области G, для которых

$$I(|f|^p) = \int_G |f|^p\,dx < \infty.$$

Этот класс функций при любом $p > 0$ есть линейное пространство. Действительно, очевидно, что вместе с f принадлежит L_p и αf при любом α. Далее, если $f \in L_p$, $g \in L_p$, то и $f + g \in L_p$, так как

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant$$
$$\leqslant [2\sup(|f|, |g|)]^p = 2^p[\sup(|f|, |g|)]^p.$$

Мы покажем далее, что при $p \geqslant 1$ это линейное пространство может быть превращено в полное линейное нормированное пространство с введением нормы

$$\|f\|_p = [I(|f|^p)]^{\frac{1}{p}}. \tag{1'}$$

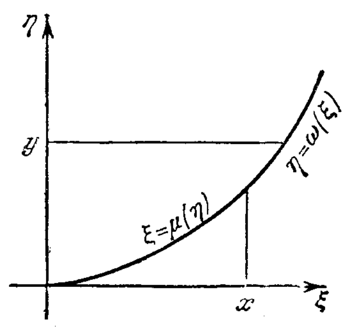


Рис. 10.

Это утверждение для $p = 1$ уже было установлено ранее (§ 3). Поэтому ограничимся теперь случаем $p > 1$. Очевидно, что норма (1′) удовлетворяет условию $\|f\|_p \geqslant 0$, и $\|f\|_p = 0$ влечет $f(x) = 0$ почти всюду; далее, очевидно, $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$ при любом вещественном α.

Неравенство треугольника устанавливается сложнее. Рассмотрим сначала следующую лемму:

Лемма. *Если* $\eta=\omega(\xi)$ — *возрастающая непрерывная функция,* $\omega(0)=0$, и $\xi=\mu(\eta)$ — *обратная функция (также, очевидно, непрерывная и возрастающая), то при любых* $x>0$, $y>0$

$$xy\leqslant\int_0^x \omega(\xi)\,d\xi+\int_0^y \mu(\eta)\,d\eta.$$

Доказательство немедленно получается, если рассмотреть рис. 10.

Положим в частности, $\omega(\xi)=\xi^{p-1}$ $(p>1)$, $\mu(\eta)=\eta^{\frac{1}{p-1}}$; мы получим тогда, что

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}. \tag{1}$$

Здесь число q определено равенством

$$q=\frac{1}{p-1}+1=\frac{p}{p-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

так что

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Применяя неравенство (1) к функциям $f(x)$ и $g(x)$, получим

$$|f(x)||g(x)|\leqslant\frac{|f(x)|^p}{p}+\frac{|g(x)|^q}{q}. \tag{3}$$

Допустим на момент, что $\|f\|_p=I^{\frac{1}{p}}(|f|^p)=1$, $\|g\|_q=I^{\frac{1}{q}}(|g|^q)=1$; тогда, интегрируя неравенство (3), мы получим, что

$$I(|fg|)\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Если же $f\in L_p$ и $g\in L_q$ — любые функции, то для функций $f_0=\frac{f}{\|f\|_p}$ и $g_0=\frac{g}{\|g\|_q}$ выполняются условия $\|f_0\|_p=\|g_0\|_q=1$; отсюда

$$I(|f_0g_0|)=\frac{I(|fg|)}{\|f\|_p\|g\|_q}\leqslant 1,$$

и, следовательно, для любых $f\in L_p$, $g\in L_q$ справедливо неравенство

$$I(|fg|)\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$$

(неравенство Гёльдера).

Предположим теперь, что $f \in L_p$, $g \in L_p$; оценим $\|f+g\|_p$. Имеем:

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p = |f|(|f|+|g|)^{p-1} + |g|(|f|+|g|)^{p-1}. \quad (4)$$

Число $p-1$ равно $\frac{p}{q}$ [как видно из (2)]; поэтому

$$(|f|+|g|)^{p-1} = (|f|+|g|)^{\frac{p}{q}} \in L_q,$$

причем

$$\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q = I^{\frac{1}{q}}[(|f|+|g|)^p].$$

Интегрируя (4) и применяя неравенство Гёльдера, получаем:

$$I(|f|+|g|)^p \leqslant \|f\|_p \|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q =$$
$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) I^{\frac{1}{q}}[(|f|+|g|)^p].$$

Разделяя на $I^{\frac{1}{q}}[(|f|+|g|)^p]$ и вспоминая, что $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, находим:

$$\|f+g\|_p = I^{\frac{1}{p}}(|f+g|)^p \leqslant I^{\frac{1}{p}}(|f|+|g|)^p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Таким образом, при $p > 1$ выполняется неравенство треугольника.

Остается проверить, что пространство L_p полное. Это делается аналогично проверке полноты пространства $L_1 = L$. Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность в пространстве L_p, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\varphi_{n_k} = \psi_k$, удовлетворяющую условиям

$$\|\psi_{k+1} - \psi_k\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Если область G ограничена, то по неравенству Гёльдера

$$I(|\psi_{k+1} - \psi|) \leqslant \|1\|_q \|\psi_{k+1} - \psi_k\|_p \leqslant C \cdot 2^{-k},$$

откуда следует также, как и при $p = 1$, сходимость (почти всюду) ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)$$

и существование (почти всюду) предельной функции $\varphi = \lim\limits_{k \to \infty} \psi_k$. В случае бесконечной области G следует интегрировать по любой ограниченной области, что также обеспечит существование предельной функции почти всюду на G.

Так как $|\varphi|^p \doteq \lim |\varphi_k|^p$ и $I(|\varphi_k|^p)$ ограничены, например, числом M, то $\varphi \in L_p$, причем $I(|\varphi|^p) \leqslant M$. Таким же образом, как в § 3, для $I(|\varphi - \varphi_n|^p)$ получаем оценку

$$I(|\varphi - \varphi_n|^p) \leqslant \sup_{k \geqslant n} I(|\varphi_k - \varphi_n|^p) \leqslant \varepsilon$$

при достаточно большом n, откуда следует, что $\|\varphi - \varphi_n\|_p \to 0$, чем и завершается доказательство.

Точно так же, как и в § 3, доказывается, что совокупность непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ плотна в пространстве L_p по метрике этого пространства.

Заключительное замечание. Первые работы А. Лебега (франц. математик, 1875—1941) по теории меры и интеграла относятся к 1902 г. Созданная вначале для решения внутренних задач теории функций действительного переменного (проблема о первообразной, сходимость тригонометрических рядов), лебеговская теория очень скоро вышла за эти узкие рамки. Теорема Фишера и Ф. Рисса о полноте пространства суммируемых функций (1907) и введенные Ф. Риссом пространства L_p в конечном итоге сделали интеграл Лебега необходимым в современных общих проблемах анализа и математической физики. Ф. Рисс (венгерский математик, 1880—1956) предложил и ту схему построения теории интеграла, которая принята в нашем изложении. Рекомендуемая литература: А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934; Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

ГЛАВА V

ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Основные определения и примеры

1. Линейное пространство H (с умножением на вещественные числа) называется (вещественным) *гильбертовым пространством*, если 1) указано правило, которое позволяет сопоставить каждой паре точек (векторов) x, y пространства H вещественное число, называемое скалярным произведением векторов x и y и обозначаемое (x, y); 2) это правило удовлетворяет следующим требованиям:

а) $(y, x) = (x, y)$ (переместительный закон);
б) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$ (распределительный закон);
в) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого вещественного числа λ;
г) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Из аксиом а) — в) легко получается общая формула

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \quad \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j), \tag{1}$$

справедливая для произвольных векторов $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ и произвольных вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, a_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$.

Примеры. *1.* В n-мерном пространстве R_n, элементами которого являются вещественные числовые комплексы $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, мы введем скалярное произведение векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ по формуле

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \ldots + \xi_n \eta_n. \tag{2}$$

Это определение обобщает известную формулу выражения скалярного произведения векторов в трехмерном пространстве через координаты сомножителей в ортогональной системе координат.) Читатель легко проверит, что требования а) — г) удовлетворяются. Конечномерное (вещественное) гильбертово пространство обычно называют *евклидовым* пространством.

2. Следующий пример представляет собой бесконечномерный аналог предыдущего.

Пространство l_2. Элементом этого пространства является любая последовательность чисел $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ со сходящейся суммой квадратов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty.$$

Линейные операции определяются естественным образом:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)+(\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)=(\xi_1+\eta_1, \ldots, \xi_n+\eta_n, \ldots),$$
$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)=(\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n, \ldots).$$

Скалярное произведение векторов $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ и $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)$ задается по формуле

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n. \tag{3}$$

Необходимо проверить корректность этих определений. Прежде всего, из элементарного неравенства

$$\xi_n \eta_n \leqslant \frac{1}{2}(\xi_n^2+\eta_n^2)$$

следует, что ряд (3) для $x \in l_2$, $y \in l_2$ всегда является сходящимся. Далее, равенства

$$\sum_{k=n}^{n+m} (\alpha\xi_k)^2=\alpha^2 \sum_{k=n}^{n+m} \xi_k^2,$$

$$\sum_{k=n}^{n+m} (\xi_k+\eta_k)^2=\sum_{k=n}^{n+m} \xi_k^2+2\sum_{k=n}^{n+m} \xi_k\eta_k+\sum_{k=n}^{n+m} \eta_k^2$$

показывают, что для $x \in l_2$ и $y \in l_2$ сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\xi_k)^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k+\eta_k)^2,$$

и, следовательно, определенные нами операции сложения векторов и умножения на число выполнимы в пределах пространства l_2.

Остается проверить выполнение аксиом а) — г); но достаточно одного взгляда, чтобы убедиться в их справедливости.

3. Пространство $L_2(a, b)$ функций $\varphi(x)$ с суммируемым квадратом на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, как мы видели (гл. IV, § 5), есть линейное пространство; введем в него скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Выполнение аксиом скалярного произведения непосредственно следует здесь из свойств интеграла Лебега. Заметим, что интегрируемость произведения $\varphi\psi$ следует, например, из неравенства

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2).$$

2. Изоморфизм гильбертовых пространств. Определение изоморфизма гильбертовых пространств строится по аналогии с определениями эквивалентности множеств, изометричности метрических пространств и изоморфизма линейных пространств, знакомыми нам по первой и второй главам. Именно два гильбертовых пространства H' и H'' называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие со следующими свойствами:

1) Если векторам x' и y' пространства H' отвечают векторы x'' и y'' пространства H'', то вектору $x'+y' \in H'$ отвечает вектор $x''+$ $+y'' \in H''$ и вектору $\alpha x' \in H'$ отвечает вектор $\alpha x'' \in H''$ при любом вещественном α.

2) В тех же предположениях число (x', y') равно числу (x'', y'').

В дальнейшем (§ 2, п. 3) мы покажем, что всякие два конечномерных гильбертовых пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу (и изоморфны, следовательно, пространству R_n примера 1). Пространства $L_2(a, b)$ и l_2 в действительности также изоморфны друг другу (§ 2, п. 6).

3. Длина вектора и угол между векторами. Наличие скалярного произведения позволяет ввести в гильбертовом пространстве понятие длины (нормы) вектора и угла между векторами по формулам

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}, \tag{1}$$

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}; \tag{2}$$

эти определения согласуются с обычными формулами аналитической геометрии. Вместо $\|x\|$ часто пишут просто $|x|$.

Рассмотрим эти определения в общем гильбертовом пространстве. Докажем, что отношение в правой части (2) по абсолютной величине не превосходит единицы, каковы бы ни были векторы x и y.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим вектор $\lambda x - y$, где λ — вещественное число. В силу аксиомы г) при любом λ имеем

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0. \tag{3}$$

Используя формулу (1) п. 1, мы можем написать это неравенство в виде

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0. \tag{4}$$

В левой части неравенства стоит квадратный трехчлен относительно λ с постоянными коэффициентами. Трехчлен этот не может иметь различных вещественных корней, так как тогда он не мог бы сохранять знака для всех значений λ. Поэтому дискриминант $(x, y)^2 - (x, x)(y, y)$ этого трехчлена не может быть положительным. Следовательно, $(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$, откуда, извлекая квадратный корень, получаем

$$|(x, y)| \leqslant |x|\,|y|, \tag{5}$$

что и требовалось.

Выясним, когда в неравенстве (5) возможен знак равенства. Если имеет место равенство

$$|(x, y)| = |x|\,|y|,$$

то дискриминант квадратного трехчлена (4) равен нулю и, следовательно, трехчлен имеет один вещественный корень λ_0. Мы получаем, таким образом,

$$\lambda_0^2(x, x) - 2\lambda_0(x, y) + (y, y) = (\lambda_0 x - y,\ \lambda_0 x - y) = 0,$$

откуда в силу аксиомы г) находим, что $\lambda_0 x - y = 0$, или $y = \lambda_0 x$. Наш результат можно сформулировать в геометрических терминах: *если скалярное произведение двух векторов по абсолютной величине равно произведению их длин, то эти векторы коллинеарны.*

Неравенство (5) называют *неравенством Коши — Буняковского.*

Примеры. *1.* В евклидовом пространстве R_n неравенство Коши — Буняковского имеет вид

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2}\,\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2}; \tag{6}$$

оно справедливо для любой пары векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, или, что то же самое, для любых двух систем вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. (Это неравенство найдено Коши в 1821 г.)

2. В пространстве $L_2(a, b)$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b \psi^2(x)\,dx}; \tag{7}$$

оно справедливо для любой пары суммируемых в квадрате функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. (Это неравенство для функций, интегрируемых по Риману, нашел В. Я. Буняковский в 1859 г.)

Переходим теперь к выяснению свойств нормы.

Из аксиомы г) вытекает, что у каждого вектора x гильбертова пространства H существует норма: у всякого вектора $x \neq 0$ норма положительна, у нуль-вектора норма равна нулю. Равенство

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \sqrt{(x, x)} = |\alpha| |x| \tag{8}$$

показывает, что *абсолютную величину числового множителя можно выносить за знак нормы вектора.* Наконец, норма удовлетворяет неравенству треугольника:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{9}$$

Действительно, в силу неравенства Коши — Буняковского

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2|x||y| + (y, y) = (|x| + |y|)^2,$$

откуда, извлекая корень, и получаем (9).

Таким образом, норма в пространстве H удовлетворяет аксиомам линейного нормированного пространства (гл. II, § 8). *Все метрические понятия и свойства, связанные с существованием нормы, имеют место в гильбертовом пространстве.* Но так как гильбертово пространство — лишь очень частный случай нормированного пространства, то есть основания ожидать, что норма в гильбертовом пространстве обладает и свойствами, специфическими лишь для гильбертовых пространств. К числу таких свойств относится следующая лемма:

Лемма о параллелограмме. *Для любых двух векторов x и y гильбертова пространства H имеет место равенство*

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

(сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон).

Доказательство получается простой выкладкой:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= 2(x, x) + 2(y, y) = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Задача. Известно, что в некотором нормированном пространстве R справедлива для любой пары векторов x, y лемма о параллелограмме. Рассмотреть функцию

$$(x, y) = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) \qquad (\text{так что } (x, x) = |x|^2)$$

и доказать, что она удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения п. 1.

Указание. Для проверки выполнения аксиомы б) применить лемму о параллелограмме к параллелограммам, построенным на векторах: 1) $x+z, y$; 2) $x-z, y$; 3) $y+z, x$; 4) $y-z, x$. Аксиому в) проверить вначале для целых λ, затем для дробных, затем перейти к пределу.

4. **Предельный переход в гильбертовом пространстве.** Вместе с метрикой в гильбертовом пространстве появляются понятия, связанные с предельным переходом. Мы говорим, что последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов гильбертова пространства H сходится к элементу x (или имеет пределом элемент x), если

$$\lim_{n \to \infty} |x - x_n| = 0.$$

Функция $f(x)$, определенная на пространстве H, называется *непрерывной* в точке x_0, если из $x \longrightarrow x_0$ следует $f(x) \longrightarrow f(x_0)$. Аналогично определяются непрерывные функции двух и более переменных.

Проверим для примера, что скалярное произведение (x, y) есть непрерывная функция от обеих переменных x и y, т. е. если $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, то $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$.

Положим $y - y_n = h_n$, $x - x_n = k_n$; по условию $h_n \longrightarrow 0$, $k_n \longrightarrow 0$. По неравенству Коши — Буняковского

$$|(x, y) - (x_n, y_n)| = |(x, y) - (x - k_n, y - h_n)| =$$
$$= |(x, h_n) + (y, k_n) - (k_n, h_n)| \leqslant |x||h_n| + |y||k_n| + |k_n||h_n|;$$

при возрастании n эта величина стремится к нулю. Отсюда следует, что $(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$, что и требовалось.

Последовательность $\{x_n\} \in H$ называется *фундаментальной*, если

$$\lim_{n, m \to \infty} |x_n - x_m| = 0.$$

Пространство H называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Все три рассмотренные выше конкретные пространства: R_n, l_2, L_2 — полные.

Полнота пространства R_n доказывается элементарно (ср. гл. II, § 4). Полноту пространства L_2 мы доказали в гл. IV, § 5, п. 3. Проверим, что пространство l_2 также полно.

Пусть $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)}, \ldots)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — фундаментальная последовательность векторов пространства l_2. Так как для m и p, стремящихся к бесконечности, по условию

$$\| x_m - x_p \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n^{(m)} - \xi_n^{(p)} |^2 \longrightarrow 0,$$

то, в частности, каждое слагаемое $|\xi_n^{(m)} - \xi_n^{(p)}|^2$ (при фиксированном n) стремится к нулю, когда m и p неограниченно увеличиваются, поэтому при каждом фиксированном n последовательность координат $\xi_n^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ в силу классического критерия Коши является сходящейся. Обозначим $\xi_n = \lim\limits_{m \to \infty} \xi_n^{(m)}$ и покажем, что вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ принадлежит пространству l_2.

Так как элементы фундаментальной последовательности в совокупности ограничены, то

$$\| x_m \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n^{(m)} |^2 \leqslant K,$$

где K не зависит от m. Поэтому для любого фиксированного N

$$\sum_{n=1}^{N} \xi_n^2 = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{N} | \xi_n^{(m)} |^2 \leqslant K;$$

отсюда непосредственно вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$.

Остается показать, что $\| x - x_m \|$ стремится к нулю, когда $m \to \infty$. Для этого в неравенстве

$$\sum_{n=1}^{N} | \xi_n^{(m)} - \xi_n^{(p)} |^2 \leqslant \varepsilon,$$

справедливом для заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших m и p и любом N, перейдем к пределу при $p \to \infty$.

В результате получим неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} | \xi_n^{(m)} - \xi_n |^2 \leqslant \varepsilon,$$

из которого после перехода к пределу при $N \to \infty$ получается неравенство

$$\| x_m - x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n^{(m)} - \xi_n |^2 \leqslant \varepsilon,$$

справедливое для всех достаточно больших m, что и требуется.

Если пространство H неполно, то, как мы видели в гл. II, можно построить пополнение пространства H. Элементами пополнения служат всевозможные классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. В гл. II было доказано, что в пополнение линейного нормированного пространства можно естественно ввести линейные операции и норму так, что оно будет снова линейным нормированным пространством. Если H — гильбертово пространство, то в пополнение можно ввести естественно и скалярное произведение. Именно пусть даны классы X и Y. Возьмем любые последовательности $\{x_n\} \in X$ и $\{y_n\} \in Y$. Мы утверждаем, что существует предел выражения (x_n, y_n) при $n \to \infty$.

Действительно, мы имеем:

$$| (x_n, y_n) - (x_m, y_m) | = | (x_n, y_n - y_m) | + | (x_n - x_m, y_m) | \leqslant$$
$$\leqslant | x_n | | y_n - y_m | + | x_n - x_m | | y_m |.$$

Числа $| x_n |$ и $| y_m |$ ограничены, поскольку соответствующие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны в H. Поэтому последовательность (x_n, y_n) удовлетворяет обычному критерию Коши и, следовательно, имеет предел, что и утверждалось. Этот предел не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в классах X и Y. Действительно, если $\{x'_n\} \in X$, $\{y'_n\} \in Y$, то

$$|(x'_n, y'_n) - (x_n, y_n)| = |(x'_n - x_n, y'_n) + (x_n, y'_n - y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |x'_n - x_n| \, |y'_n| + |x_n| \, |y'_n - y_n| \to 0,$$

поскольку y'_n и x'_n ограничены, $\{x'_n\}$ конфинальна с $\{x_n\}$ и $\{y'_n\}$ конфинальна с $\{y_n\}$.

Легко проверить выполнение аксиом а) — г), на чем мы уже не останавливаемся.

Таким образом, *пополнение гильбертова пространства есть снова гильбертово пространство.*

Задачи. 1. Пусть $d_1, d_2, \ldots$ — фиксированная последовательность чисел и $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n d_n$ сходится при любой последовательности $(\xi_n) \in l_2$; показать, что $(d_n) \in l_2$.

Указание. Сначала показать, что $d_n \to 0$. Далее, предположив, что $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$, рассмотреть отрезки $(d_{n_k}, \ldots, d_{n_{k+1}})$, для которых $1 \leqslant \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} d_n^2 \leqslant 2$. Положить $\xi_n = \frac{d_n}{k}$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ и показать, что $(\xi_n) \in l_2$, но $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n d_n = \infty$.

2. Пусть $c_1, c_2, \ldots$ — фиксированная последовательность положительных чисел; доказать, что множество M всех элементов $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2$ с $|\xi_n| \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ компактно тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

Указание. Если $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2 < \varepsilon$, то множество элементов $(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$ с $|\xi_n| \leqslant c_n$ образует компактную ε-сеть для M. При $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$ рассмотреть отрезки $(c_{n_k}, \ldots, c_{n_{k+1}})$, для которых $\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} c_n^2 > 1$; соответствующие элементы $(0, \ldots, 0, c_{n_k}, \ldots, c_{n_{k+1}-1}, 0, \ldots)$ входят в M и имеют взаимные расстояния, большие $\sqrt{2}$.

3. Доказать, что множество M элементов $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2$ компактно тогда и только тогда, когда: 1) все числа $|\xi_n|$ ограничены фиксированной по-

стоянной; 2) все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ сходятся на M равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N так, что $\sum_{N}^{\infty} \xi_n^2 < \varepsilon$ для всех $(\xi_n) \in M$.

Указание. Использовать метод решения задачи 2.

§ 2. Ортогональные разложения

1. Ортогональность. Векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то это определение, в соответствии с общим определением угла между двумя векторами (§ 1, п. 3), означает, что x и y образуют угол в $90°$. Нулевой вектор оказывается ортогональным любому вектору $x \in H$.

В пространстве $L_2(a, b)$ условие ортогональности векторов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеет вид

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Читатель легко проверит, вычислив соответствующие интегралы, что в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ любые два вектора «тригонометрической системы»

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

взаимно ортогональны.

Отметим несколько простых свойств, связанных с понятием ортогональности.

1) Если вектор x ортогонален векторам $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то он ортогонален и любой линейной комбинации $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k$ этих векторов. Действительно, мы имеем

$$(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k, x) = \alpha_1 (y_1, x) + \ldots + \alpha_k (y_k, x) = 0.$$

2) Если векторы $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ортогональны вектору x и $y = \lim_{n \to \infty} y_n$, то вектор y также ортогонален вектору x.

Действительно, в силу непрерывности скалярного произведения

$$(y, x) = \lim_{n \to \infty} (y_n, x) = 0,$$

что и требовалось.

Из свойств 1) и 2) следует, что совокупность всех векторов, ортогональных вектору x (или произвольному фиксированному множеству X векторов), образует замкнутое подпространство — *ортогональное дополнение к вектору x (к множеству X)*.

3) Теорема Пифагора и ее обобщение. Пусть векторы x и y ортогональны; тогда по аналогии с элементарной геометрией

вектор $x+y$ можно называть гипотенузой прямоугольного треугольника, построенного на векторах x и y. Умножая $x+y$ скалярно на себя и используя ортогональность векторов x и y, мы получаем:

$$|x+y|^2=(x+y,\ x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=$$
$$=(x,x)+(y,y)=|x|^2+|y|^2.$$

Мы доказали тем самым в общем гильбертовом пространстве теорему Пифагора: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.* Нетрудно обобщить эту теорему на случай любого конечного числа слагаемых. Именно пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ взаимно ортогональны и $z=x_1+x_2+\ldots+x_k$; тогда

$$|z|^2=(x_1+\ldots+x_k,\ x_1+\ldots+x_k)=|x_1|^2+\ldots+|x_k|^2.$$

2. Метод ортогонализации. Для получения ортогональной системы векторов часто используется метод ортогонализации данной неортогональной системы. Этот метод состоит в следующем. Пусть дана последовательность векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, в которой каждая конечная подсистема $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независима. Утверждается, что по формулам

$$\left.\begin{aligned}
&y_1=x_1,\\
&y_2=x_2+a_{21}x_1,\\
&y_3=x_3+a_{32}x_2+a_{31}x_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n=x_n+a_{n,\,n-1}x_{n-1}+\ldots+a_{n1}x_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

со специальным образом подобранными коэффициентами a_{jk} можно построить систему векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, ненулевых и взаимно ортогональных. Система формул (1) с соответствующими коэффициентами a_{jk} называется *формулами ортогонализации.*

Существование решения этой системы, подчиненного требуемым условиям ортогональности, легко доказать по индукции. Действительно, предположим, что построены ненулевые и взаимно ортогональные векторы $y_1, \ldots, y_{n-1}$, удовлетворяющие первым $n-1$ уравнениям системы (1), и покажем, что можно найти вектор y_n, удовлетворяющий n-му уравнению системы (1) и ортогональный векторам $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Будем искать вектор y_n в форме линейной комбинации от $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ следующего специального вида:

$$y_n=b_{n1}y_1+\ldots+b_{n,\,n-1}\,y_{n-1}+x_n, \qquad (2)$$

где $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — найденные уже векторы, а $b_{n1}, \ldots, b_{n,\,n-1}$ — коэффициенты, подлежащие определению.

Умножая уравнение (2) скалярно на y_k ($k<n$) и пользуясь предположенной ортогональностью y_k к $y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{n-1}$,

получаем

$$(y_n, y_k) = (x_n, y_k) + b_{nk}(y_k, y_k).$$

Приравнивая правую часть нулю, получаем уравнение относительно коэффициента b_{nk}, которое разрешимо, поскольку по предположению $(y_k, y_k) \neq 0$. Когда все коэффициенты b_{nk} $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ таким образом найдены, уравнение (2) позволяет построить вектор y_n. Он по построению будет ортогонален каждому из векторов $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$; нам остается только показать, что $y_n \neq 0$. Для этого вставим выражения $y_1, \ldots, y_{n-1}$ из первых $n-1$ уравнений (1) в n-е уравнение; мы получим линейное выражение y_n через $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, причем коэффициент при x_n равен 1. Если бы y_n был нулем, то мы получили бы линейную зависимость между $x_1, \ldots, x_n$, что по предположению не имеет места. Отсюда $y_n \neq 0$, что и требовалось; тем самым корректность метода ортогонализации обоснована.

Можно далее еще «улучшить» полученную ортогональную систему векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, разделив каждый из векторов y_n на его норму $|y_n|$; полученная система векторов $e_n = \frac{y_n}{|y_n|}$ не только ортогональна, но и нормирована, так что каждый из векторов имеет норму, равную единице. Такие системы векторов называют *ортонормальными*.

Задачи. 1. Пусть задана система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Доказать, что существует лишь единственная (с точностью до числовых множителей) система векторов $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, удовлетворяющая условиям: а) $(x_j, y_k) = 0$ при $j < k$; б) при любом n вектор y_n линейно выражается через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Многочлены, получающиеся при ортогонализации функций $1, x, x^2, \ldots$ в пространстве $L_2(-1, 1)$, называются многочленами Лежандра. Показать, что n-й многочлен Лежандра имеет вид

$$p_n(x) = C_n[(x^2-1)^n]^{(n)}.$$

Указание. Использовать задачу 1.

3. Функции, получающиеся при ортогонализации выражений $e^{-x^2}, xe^{-x^2}, \ldots, x^n e^{-x^2}, \ldots$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, называются функциями Эрмита. Показать, что n-я функция Эрмита имеет вид

$$\mathcal{E}_n(x) = C_n e^{x^2}[e^{-2x^2}]^{(n)}.$$

4. Функции, получающиеся при ортогонализации выражений $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, \ldots$ в пространстве $L_2(0, \infty)$, называются функциями Лагерра. Показать, что n-я функция Лагерра имеет вид

$$L_n(x) = C_n e^x (x^n e^{-2x})^{(n)}.$$

3. Изоморфизм между двумя n-мерными евклидовыми пространствами. Мы можем теперь доказать теорему об изоморфизме любых двух евклидовых пространств одинаковой размерности. Для доказательства этой теоремы построим в каждом из двух данных евклидовых пространств R_n' и R_n'' по ортогональному и нормированному базису: $e'_1, \ldots, e'_n$ в R'_n и $e''_1, \ldots, e''_n$ в R''_n, ортогонализируя по методу п. 2 произвольную линейно независимую систему в каждом из пространств R'_n и R''_n. Далее произвольному вектору $x' \in R'_n$, имеющему относительно базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ разложение, например,

$$x' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e'_j,$$

поставим в соответствие вектор $x'' \in R''_n$, имеющий относительно базиса $e''_1, \ldots, e''_n$ разложение с теми же самыми коэффициентами $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$x'' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e''_j.$$

Ясно, что это соответствие взаимно однозначно и сохраняет линейные операции. Покажем, что скалярные произведения соответствующих векторов в R'_n и R''_n совпадают. Положим

$$y' = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e'_k,$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e''_k;$$

тогда, поскольку базисы $\{e'_j\}$ и $\{e''_j\}$ ортонормальны,

$$(x', y') = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e'_j, \ \sum_{k=1}^{n} \eta_k e'_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j,$$

$$(x'', y'') = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e''_j, \ \sum_{k=1}^{n} \eta_k e''_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j = (x', y'),$$

что и утверждалось. Теорема доказана.

4. Ортонормальные системы в бесконечномерном гильбертовом пространстве H. В бесконечномерном пространстве заведомо имеются бесконечные ортонормальные системы. Мы будем называть ортонормальную систему $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ *полной* в пространстве H, если в пространстве H не существует ни одного ненулевого вектора, ортогонального всем векторам этой системы. Иначе говоря, система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ полна, если из условий

$$x \in H, \quad (e_n, x) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

вытекает, что $x = 0$.

Мы покажем, что *полная* ортонормальная система в *полном* гильбертовом пространстве является базисом в том смысле, что для каждого вектора $f \in H$ существует разложение в сходящийся (по норме) ряд

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j, \tag{1}$$

причем

$$|f|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2. \tag{2}$$

Для доказательства найдем сначала выражения коэффициентов разложения (1), предполагая, что оно существует. Для этого умножим скалярно обе части равенства (1) на вектор e_k. Так как скалярное произведение непрерывно, то

$$(f, e_k) = (\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j, e_k) = (\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_k) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} (\sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_k) = \lim_{n \to \infty} c_k = c_k.$$

Мы получаем формулу

$$c_k = (f, e_k). \tag{3}$$

Коэффициенты c_k, определенные по формулам (3), называются *коэффициентами Фурье* вектора f по системе $\{e_k\}$. Отметим, что эти числа можно составить прямо по вектору f и системе $\{e_k\}$, не зная еще, имеет или не имеет места разложение (1). Они имеют простой геометрический смысл: поскольку

$$(f, e_k) = |f| \, |e_k| \cos(\widehat{f, e_k}) = |f| \cos(\widehat{f, e_k}),$$

коэффициент a_k есть проекция вектора f на направление вектора e_k.

Пусть f — заданный вектор и $e_1, \ldots, e_n$ — фиксированная конечная ортонормальная система (неполная, вообще говоря). Составим вектор

$$g = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k.$$

Этот вектор принадлежит к подпространству H_n, порожденному векторами $e_1, \ldots, e_n$. Определим далее вектор h условием

$$f = g + h.$$

Мы утверждаем, что вектор h ортогонален каждому из векторов e_1, $e_2, \ldots, e_n$ (и, следовательно, всему подпространству H_n). Действительно, мы имеем

$$(h, e_j) = (f, e_j) - (g, e_j) = (f, e_j) - (\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k, e_j) =$$
$$= (f, e_j) - (f, e_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

На языке геометрии h есть перпендикуляр, опущенный из конца вектора f на подпространство H_n; а вектор g есть проекция f на это подпространство. В частности, согласно теореме Пифагора

$$|f|^2=|g|^2+|h|^2=\sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2+|h|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2.$$

Полученное неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2 \leqslant |f|^2, \tag{4}$$

имеющее место для любого вектора f и любой ортонормальной системы $e_1, \ldots, e_n$, называется *неравенством Бесселя.* Если нам дана бесконечная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, то, поскольку неравенство Бесселя справедливо при любом n, мы после перехода к пределу получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)^2 \leqslant |f|^2. \tag{5}$$

Иными словами, *квадраты коэффициентов Фурье любого вектора f по любой ортонормальной системе $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ образуют сходящийся ряд.*

Неравенство (5) мы также будем называть *неравенством Бесселя.*

Теперь мы переходим к формулировке и доказательству основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть в полном гильбертовом пространстве H выбрана полная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Тогда для любого вектора f имеет место разложение*

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f, e_j)\, e_j, \tag{6}$$

причем

$$|f|^2=\sum_{j=1}^{\infty}(f, e_j)^2. \tag{7}$$

Последнее равенство, представляющее собой бесконечномерное обобщение теоремы Пифагора, называют обычно *равенством Парсеваля.*

Доказательство. Положим для сокращения $(f, e_n)=a_n$.

Пусть s_p есть сумма p слагаемых ряда (6) и $q>p$.

Тогда

$$|s_q-s_p|^2=\left|\sum_{p+1}^{q} a_j e_j\right|^2=\sum_{p+1}^{q} a_j^2.$$

При $p \to \infty$ эта величина стремится к нулю вследствие сходимости ряда из чисел a_j^2. Поэтому суммы s_p образуют фундаментальную последовательность. Вследствие предположенной полноты пространства H суммы s_p при $p \to \infty$ имеют некоторый предел $s \in H$. Покажем, что $s = f$. Для этого заметим, что при фиксированном k и $p > k$

$$(s, e_k) = \lim_{p \to \infty} (s_p, e_k) = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{p} a_j e_j, e_k\right) = \lim_{p \to \infty} a_k = a_k = (f, e_k);$$

поэтому для любого k

$$(f - s, e_k) = (f, e_k) - (s, e_k) = 0. \tag{8}$$

Так как система $\{e_k\}$ предположена полной, то из равенства (8) следует $f = s$. Таким образом,

$$f = \lim_{p \to \infty} s_p = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j.$$

Далее, в силу непрерывности скалярного произведения

$$|f|^2 = (f, f) = (\lim_{p \to \infty} s_p, \lim_{p \to \infty} s_p) = \lim_{p \to \infty} (s_p, s_p) = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

что и требовалось.

Замечание 1. Если g — любой другой вектор пространства, то, вычисляя подобным же способом скалярное произведение (f, g), получим формулу

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)(g, e_k). \tag{9}$$

Замечание 2. Если $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — любая последовательность чисел со сходящимся рядом квадратов, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

как видно из начала нашего доказательства, сходится в пространстве H. Если обозначить его сумму через f, то, как и выше, будут иметь место равенства $a_n = (f, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Итак, *любая числовая последовательность со сходящимся рядом из квадратов есть последовательность коэффициентов Фурье некоторого вектора пространства H.*

5. Критерий полноты системы. Для применения основной теоремы п. 4 нужно располагать полной ортонормальной системой $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Если непосредственно не видно, является ли данная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ полной в пространстве H, можно воспользоваться следующим критерием полноты:

Теорема 2. *Данная ортонормальная система $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ полна в полном пространстве H тогда и только тогда, когда линейные комбинации векторов этой системы образуют множество, всюду плотное в H.*

Доказательство. Если система

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

полна, то в силу теоремы 1 каждый вектор $f \in H$ есть предел линейных комбинаций векторов системы $\{e_n\}$, так что совокупность линейных комбинаций векторов этой системы образует всюду плотное множество в пространстве H. Обратно, пусть известно, что линейные комбинации векторов системы $\{e_n\}$ образуют всюду плотное множество в пространстве H, и пусть для некоторого вектора g выполнены равенства $(g, e_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ортогональное дополнение к вектору g содержит все векторы e_k, все линейные комбинации этих векторов и замыкание множества линейных комбинаций, т. е. все пространство H. В частности, $(g, g) = 0$, откуда $g = 0$. Таким образом, система $\{e_n\}$ в указанном случае полна, что и требовалось.

Рассмотрим случай, когда система $\{e_n\}$ получена путем ортогонализации некоторой системы $\{x_n\}$. Согласно формулам ортогонализации каждый вектор e_n есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_n$ и, обратно, каждый вектор x_n есть линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_n$ [см. равенство (2) п. 2]. Поэтому общий запас всех линейных комбинаций векторов $\{e_n\}$ совпадает с общим запасом всех линейных комбинаций векторов $\{x_n\}$. Следовательно, полноту системы $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ можно устанавливать путем доказательства плотности в пространстве H совокупности всех линейных комбинаций исходных векторов $\{x_n\}$.

Пример. Как мы видели, в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ векторы $1, \cos x, \sin x, \ldots$ образуют ортогональную систему. Линейные комбинации векторов этой системы — тригонометрические многочлены — образуют всюду плотное множество в $L_2(-\pi, \pi)$ (гл. IV, § 5, п. 3). В силу теоремы 2 система $1, \cos x, \sin x, \ldots$ полна в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ и имеет место теорема 1: *всякая функция $\varphi(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ разлагается в ряд по функциям* $1, \cos x, \sin x, \ldots$, *сходящийся по метрике пространства* $L_2(-\pi, \pi)$. Следует заметить, что функции $1, \cos x, \sin x, \ldots$ не нормированы; легко вычислить, что $\|1\|^2 = 2\pi$, $\|\cos mx\|^2 = \|\sin mx\|^2 = \pi$. Нормированную систему образуют функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots$$

Согласно формулам (1) и (3) п. 4 искомое разложение имеет вид

$$\varphi(x)=\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\left(\varphi, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}+\left(\varphi, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx+\frac{\cos x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos x\,dx+\frac{\sin x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin x\,dx+\ldots$$

Обозначая

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

мы приходим к обычной записи ряда Фурье:

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Мы знаем теперь, что этот ряд сходится по метрике $L_2(-\pi, \pi)$ для любой функции $\varphi(x)\in L_2(-\pi, \pi)$.

Задачи. 1. Доказать полноту системы полиномов Лежандра (п. 2, задача 2) в пространстве $L_2(-1, 1)$.

Указание. Использовать теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами.

Замечание. Система функций Эрмита (п. 2, задача 3) в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ и система функций Лагерра (п. 2, задача 4) в пространстве $L_2(0, \infty)$ — также полные системы. См. гл. VII, § 3, п. 5.

2. Построить в пространстве $C_2(a, b)$ ортогональную систему непрерывных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$, обладающую свойствами:

а) из $\int_a^b f(x)\,e_n(x)\,dx=0 \quad (n=1, 2, \ldots)$ следует $f(x)\equiv 0$,

какова бы ни была *непрерывная* функция $f(x)$;

б) линейные комбинации функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ неплотны в пространстве $C_2(a, b)$.

Указание. Ортогонализовать последовательность многочленов с рациональными коэффициентами, ортогональных фиксированной разрывной функции, например характеристической для интервала (a, c), $a<c<b$.

Замечание. Результат этой задачи показывает, что для выполнения условия полноты системы, приведенного в этом пункте, существенно предположение о полноте пространства H.

6. Изоморфизм всех счетномерных гильбертовых пространств. Гильбертово пространство мы будем называть *счетномерным,* если в нем имеется счетная полная ортонормальная система. В этом пункте мы покажем, что любые два полных счетномерных пространства изоморфны.

Согласно теореме 1 п. 4 каждый вектор f полного счетномерного пространства H с полной ортонормальной системой $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ допускает разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

где $c_k = (f, e_k)$ и ряд из квадратов чисел c_k сходится. С другой стороны, как было замечено в п. 4, если $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ — произвольная последовательность чисел со сходящимся рядом из квадратов, то существует вектор $f \in H$, коэффициенты разложения которого по системе $\{e_k\}$ суть числа $\{c_k\}$.

Пользуясь этим, мы можем установить взаимно однозначное соответствие между произвольным полным счетномерным пространством H и пространством l_2 (§ 1, п. 1, пример 2), ставя в соответствие вектору $f \in H$ последовательность $c_n = (f, e_n)$ коэффициентов Фурье вектора f по полной ортонормальной системе $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Такое соответствие сохраняет, очевидно, линейные операции. Оно сохраняет и скалярное произведение, так как если

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k,$$

то по формуле (9) п. 4

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

а именно по такой формуле определялось и скалярное произведение элементов $x = (a_k)$ и $y = (b_k)$ пространства l_2. В частности, заново получается, что l_2 есть полное пространство. Мы видим также, что $L_2(a, b)$, *как полное счетномерное пространство, изоморфно пространству* l_2. Далее, *любые два полных счетномерных пространства изоморфны пространству* l_2 *и, следовательно, изоморфны друг другу*.

7. Сепарабельность. Конечномерные и счетномерные пространства могут быть определены как *сепарабельные* пространства, т. е. обладающие счетным всюду плотным множеством.

Действительно, если пространство H конечно- или счетномерно, то в нем есть конечная или счетная полная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots$ В силу теоремы 1 п. 4 линейные комбинации векторов $e_1, e_2, \ldots$ образуют всюду плотное множество в H. Если ограничиться при этом лишь линейными комбинациями, имеющими рациональные коэффициенты, то получится счетное множество элементов, по-прежнему плотное в H; таким образом, H сепарабельно.

Пусть, обратно, H сепарабельно и $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в H. Если произвести ортогонализацию элементов $f_1, f_2, \ldots$, то согласно п. 5 получится полная ортогональная в H система, причем она по построению будет не более чем счетной; таким образом, H конечно- или счетномерно.

Заметим, что *в сепарабельном пространстве H и каждое подпространство $H' \subset H$ сепарабельно*. Для доказательства фиксируем n и k и отметим элемент $\varphi_{nk} \in H'$, если таковой имеется в шаре радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в точке f_n счетного всюду плотного в H множества $f_1, f_2, \ldots$ Мы утверждаем, что полученное счетное множество элементов φ_{nk} $(k, n=1, 2, \ldots)$ плотно в H'. Действительно, для любого $\varphi \in H'$ и любого k мы можем в шаре радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в точке φ найти некоторый элемент f_n; тогда заведомо имеются элементы множества H' в шаре радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в f_n. Имеется, следовательно, элемент $\varphi_{nk} \in H'$, причем заведомо

$$|\varphi-\varphi_{nk}|<|\varphi-f_n|+|f_n-\varphi_{nk}|<\frac{2}{k}.$$

В частности, *в любом замкнутом подпространстве H' сепарабельного гильбертова пространства H имеется полная ортогональная система $e_1, e_2, \ldots$*

Задача. Доказать непосредственно сепарабельность пространств

$$L_2(-\infty, \infty) \text{ и } L_2(0, \infty).$$

8. Ортогональное дополнение. Вернемся к теореме ортогонализации п. 2. В этой теореме, исходя из заданной системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, мы строили новую систему $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ векторов так, чтобы y_n был линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_n$ и был ортогонален векторам $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Равенство

$$x_n=y_n-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\ldots-a_{n,n-1}x_{n-1}=y_n+g_n$$

определяет разложение вектора x_n в сумму двух векторов g_n и y_n, первый из которых лежит в подпространстве H_{n-1}, порожденном векторами $x_1, \ldots, x_{n-1}$, а второй ортогонален $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и, следовательно, ортогонален каждому вектору из подпространства H_{n-1}. Поэтому естественно называть вектор g_n проекцией вектора x_n на подпространство H_{n-1}, а y_n — перпендикуляром, опущенным из конца x_n на подпространство H_{n-1}. Процесс ортогонализации состоит как раз в том, что мы заменяем вектор x_n перпендикуляром, опущенным из его конца на подпространство, порожденное предыдущими векторами.

Существование этого перпендикуляра вытекает из анализа уравнений ортогонализации, как мы видели в п. 2. Соответствующий вывод существенно использует конечномерность подпространства H_{n-1}.

Пусть теперь L — произвольное подпространство гильбертова пространства H и f — вектор, не входящий в L. Поставим вопрос: можно ли и в этом случае обеспечить существование разложения

$$f = g + h,$$

где $g \in L$, а h ортогонален любому вектору из L (будем говорить коротко: ортогонален L)? Оказывается, что при некоторых условиях на H и на L такое разложение существует.

Теорема. *Если H — полное гильбертово пространство и $L \subset H$ — замкнутое подпространство, то для любого $f \in H$ существует разложение*

$$f = g + h, \tag{1}$$

где $g \in L$, а h ортогонален L; при этом g и h определены однозначно вектором f.

Доказательство. Обозначим $d = \inf_{g \in L} |f - g|$. Имеются две возможности: $d = 0$ и $d > 0$. Если $d = 0$, то найдется последовательность $g_n \in L$ такая, что $|f - g_n| \to 0$, откуда следует, что f — предельная точка для подпространства L; а так как L замкнуто, то точка f сама принадлежит L. Разложение (1) осуществляется, очевидно, при $g = f$, $h = 0$.

Пусть теперь $d > 0$. Рассмотрим последовательность $g_n \in L$, для которой $|f - g_n| \to d$. Применяя лемму о параллелограмме (§ 1, п. 3) к векторам $x = f - g_n$ и $y = f - g_m$, получаем:

$$2|f - g_n|^2 + 2|f - g_m|^2 = 4\left|f - \frac{g_n + g_m}{2}\right|^2 + |g_n - g_m|^2.$$

При $n, m \to \infty$ левая часть стремится к $4d^2$. Первое слагаемое правой части не менее чем $4d^2$, поскольку $\frac{g_n + g_m}{2} \in L$, $\left|f - \frac{g_n + g_m}{2}\right| \geqslant d$. Поэтому последнее слагаемое в правой части стремится к нулю, откуда вытекает, что последовательность g_n фундаментальна. Так как H — полное пространство, то последовательность g_n имеет при $n \to \infty$ предел g, который принадлежит подпространству L в силу замкнутости последнего.

Покажем, что вектор $h = f - g$ ортогонален L. Действительно, для любого $q \in L$ мы имеем при любом λ

$$\begin{aligned} d^2 &\leqslant |f - (g - \lambda q)|^2 = |h + \lambda q|^2 = \\ &= (h + \lambda q,\ h + \lambda q) = d^2 + 2\lambda (h,\ q) + \lambda^2 |q|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$2\lambda(h,\ q)+\lambda^2|q|^2 \geqslant 0,$$

но это возможно при любом λ, лишь если $(h,\ q)=0$.

Итак, разложение (1) установлено. Покажем теперь, что составляющие g и h определены однозначно. Допустим, что

$$f=g+h=g'+h',$$

где g, g' принадлежат L, а h, h' ортогональны L. Вычитая, находим:

$$0=(g-g')+(h-h'),$$

где $g-g' \in L$, а $h-h'$ ортогонален L. В силу теоремы Пифагора $g-g'=h-h'=0$, откуда $g=g'$, $h=h'$, что и требуется.

Совокупность всех векторов h, ортогональных подпространству L (включая нуль-вектор), образует замкнутое подпространство M, которое называется *ортогональным дополнением* подпространства L.

Мы доказали, что у всякого замкнутого подпространства $L \in H$ имеется ортогональное дополнение M, причем для любого вектора $f \in H$ справедливо разложение

$$f=g+h, \qquad g \in L, \qquad h \in M.$$

Задача. Система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ гильбертова пространства H называется *минимальной*, если при любом k вектор f_k не входит в замкнутое подпространство, порожденное остальными векторами; она называется *полной*, если замкнутое подпространство, порожденное всеми векторами $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, совпадает со всем пространством H.

Системы $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ называются *квадратически близкими*, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - e_k|^2 < \infty.$$

Показать, что минимальная система $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, квадратически близкая к ортонормальной полной системе $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, полна (Н. К. Бари).

Указание. Обозначим через $L_k^r(g)$ замкнутое подпространство, порожденное векторами $g_k, \ldots, g_r$. Пусть $\sum\limits_{N+1}^{\infty} |f_k - e_k| < 1$. Показать, что в $L_{N+1}^{\infty}(e)$ нет ни одного вектора, ортогонального всему $L_{N+1}^{\infty}(f)$. Отсюда вывести, что всякий вектор $x \in H$ может быть представлен в форме $y+z$, где $y \in L_1^N(e)$, $z \in L_{N+1}^{\infty}(f)$. Поэтому фактор-пространство $H/L_{N+1}^{\infty}(f)$ (см. гл. II, § 8, п. 4) имеет размерность не выше N. В то же время в нем имеются N линейно независимых векторов-образов $f_1, \ldots, f_N$; они, следовательно, образуют базис в $H/L_{N+1}^{\infty}(f)$.

Вектор z, ортогональный ко всем f_k $(k=1, 2, \ldots)$, имеет своим образом в $H/L_{N+1}^{\infty}(f)$ класс Z, ортогональный образам f_k $(k=1, 2, \ldots, N)$; поэтому $Z=0$, $z \in L_{N+1}^{\infty}(f)$; отсюда $z=0$.

9. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве. Мы применим сейчас теорему об ортогональном дополнении к выводу общей формы линейного ограниченного функционала в полном гильбертовом пространстве.

Пусть x_0 — фиксированный вектор; положим для любого x

$$f(x)=(x,\ x_0). \tag{1}$$

Функционал $f(x)$, очевидно, — линейный функционал в H. Он ограничен на единичном шаре в силу неравенства Коши — Буняковского:

$$|f(x)|=|(x,\ x_0)|\leqslant|x||x_0|.$$

Покажем, что *формула* (1) *дает общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве* H. Заметим, что линейный ограниченный функционал всегда непрерывен (гл. II, § 9).

Пусть $f(x)$ — ограниченный линейный функционал в полном гильбертовом пространстве H, отличный от тождественного нуля. Рассмотрим подпространство $H'\subset H$, определяемое уравнением $f(x)=0$. Используя непрерывность функционала $f(x)$, легко проверить, что H' замкнуто. Пусть H'' — ортогональное дополнение подпространства H'. Покажем, что H'' *одномерно*. Пусть $z_1, z_2 \in H''$; тогда $y=f(z_1)z_2-f(z_2)z_1$ также входит в H''; но, с другой стороны,

$$f(y)=f(z_1)f(z_2)-f(z_2)f(z_1)=0;$$

откуда следует, что $y\in H'$. Но из $y\in H'$ и $y\in H''$ вытекает, что $(y,\ y)=0$ и что, следовательно, $y=0$. Так как $f(z_1)\neq 0$, $f(z_2)\neq 0$, то векторы z_1 и z_2 линейно зависимы. Следовательно, H'' не может иметь более одного измерения.

Пусть теперь $e\in H''$ — нормированный вектор. Всякий вектор $z\in H''$ представляется в виде λe; с другой стороны, как мы видели в п. 8, всякий вектор $x\in H$ разлагается в сумму $x=z+y$ ($z\in H''$, $y\in H'$). Так как $z=\lambda e$, то

$$x=\lambda e+y=(x,\ e)\,e+y.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(x)=(x,\ e)f(e)+f(y)=(x,\ e)f(e)=(x,\ f(e)\,e)=(x,\ x_0),$$

где $x_0=f(e)\,e$ — фиксированный вектор пространства H.

Итак, *любой ограниченный линейный функционал в полном гильбертовом пространстве H представляет собой скалярное произведение вектора x на фиксированный вектор x_0*. Вектор x_0 при этом определяется однозначно, ибо из тождества $(x,\ x_0)\equiv(x,\ x_1)$ вытекало бы, что $(x,\ x_0-x_1)=0$ для любого x; но тогда и $(x_0-x_1,\ x_0-x_1)=0$, откуда $x_0=x_1$.

§ 3. Линейные операторы

1. Определение и примеры. Пусть R — линейное пространство. Оператор A, определенный в пространстве R, есть функция, которая каждому элементу $x \in R$ ставит в соответствие элемент $y = Ax$ этого же пространства.

Оператор A называется линейным, если выполняются условия

(I) $A(x+y) = Ax + Ay$ для любых x и y из R;

(II) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для любого $x \in R$ и любого числа α.

Из формул (I) и (II) легко получается более общая формула

$$A(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 A x_1 + \ldots + \alpha_k A x_k \tag{1}$$

для любых $x_1, \ldots, x_k \in R$ и любых вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Примеры. *1.* Оператор, который каждому вектору пространства ставит в соответствие нуль-вектор, очевидно, является линейным. Он называется *нулевым оператором.*

2. Оператор E, ставящий в соответствие каждому вектору x сам вектор x, очевидно, линейный; он называется *единичным* или *тождественным оператором.*

3. Линейный оператор A, переводящий каждый вектор x в λx (λ — фиксированное число), называется *оператором подобия.*

4. Пусть H — счетномерное гильбертово пространство и $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_n, \ldots$ — полная ортонормированная система в H. Фиксируем ограниченную последовательность вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, $|\lambda_n| \leqslant C$, и для любого вектора

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in H$$

положим по определению

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j. \tag{2}$$

Так как $\sum \lambda_j^2 \xi_j^2 \leqslant C^2 \sum \xi_j^2 < \infty$, то оператор Ax определен формулой (2) во всем пространстве H. Легко проверить, что этот оператор удовлетворяет условиям (I), (II). Оператор A, построенный по указанному правилу, будем называть оператором *нормального вида.* Каждый базисный вектор e_n переводится оператором A в себя самого с коэффициентом λ_n:

$$Ae_n = \lambda_n e_n.$$

5. На отрезке $[a, b]$ фиксируем измеримую ограниченную функцию $\alpha(x)$. В пространстве $L_2(a, b)$ определен линейный оператор умножения на $\alpha(x)$:

$$A\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(x).$$

6. Интегральный оператор Фредгольма. В области

$$G = [a \leqslant s \leqslant b,\ a \leqslant x \leqslant b]$$

фиксируем функцию $K(x, s)$, интегрируемую в квадрате по этой области:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds = K^2 < \infty.$$

Определим в пространстве $L_2(a, b)$ оператор A по формуле

$$y(x) = A\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds. \tag{3}$$

Покажем, что формула (3) действительно определяет оператор в $L_2(a, b)$. В силу теоремы Фубини (гл. IV, § 5, п. 2) функция $K^2(x, s)$, поскольку она суммируема в области G, является суммируемой функцией от s почти при всяком x, и, значит, $K(x, s)$, как функция от s, принадлежит $L_2(a, b)$. Интеграл (3), представляющий собой скалярное произведение функций $K(x, s)$ и $\varphi(s)$, существует для любой функции $\varphi(x) \in L_2(a, b)$. По той же теореме Фубини суммируема по x функция

$$k^2(x) = \int_a^b K^2(x, s)\,ds,$$

причем

$$\int_a^b k^2(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds = K^2,$$

так что $k(x) \in L_2(a, b)$. Оценивая теперь скалярное произведение (3) с помощью неравенства Коши — Буняковского, находим:

$$|y(x)|^2 \leqslant \int_a^b K^2(x,s)\,ds \int_a^b \varphi^2(s)\,ds = k^2(x)\,\|\varphi\|^2, \tag{4}$$

так что функция $y(x)$ принадлежит пространству $L_2(a, b)$, что и утверждалось.

Очевидно, что оператор Фредгольма (3) — линейный оператор (т. е. выполняются условия (I), (II)).

Задачи. 1. Показать, что условие ограниченности чисел λ_n нельзя ослабить при определении оператора A нормального вида (пример 4), если желают, чтобы оператор A был определен на всем пространстве. Иначе говоря, если при некоторой последовательности λ_n оператор A определен формулой (2) для любого вектора $x \in H$, то числа $|\lambda_n|$ ограничены в совокупности.

2. Условие ограниченности функции $\alpha(x)$ нельзя ослабить при определении оператора A в примере 5, если он должен быть определен на всем пространстве.

2. Действия с линейными операторами. Над линейными операторами, определенными в линейном пространстве R, можно производить различные действия, приводящие в результате к новым линейным операторам.

1) *Сложение операторов.* Если даны линейные операторы A и B, то оператор $C = A + B$ определяется формулой

$$Cx = (A + B)x = Ax + Bx.$$

2) *Умножение оператора на число.* Если A — линейный оператор, λ — вещественное число, то оператор $B = \lambda A$ определяется формулой

$$Bx = (\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

3) *Умножение операторов.* Если A и B — линейные операторы, то оператор $C = AB$ определяется условием

$$Cx = ABx = A(Bx)$$

(т. е. сначала на вектор x действует оператор B, а затем на результат действует оператор A).

Легко проверить, что в результате всех этих действий получаются снова линейные операторы. Для указанных действий справедливы обычные алгебраические законы: коммутативность сложения, ассоциативность, дистрибутивность (за исключением коммутативности умножения операторов). Степени оператора A определяются естественными рекуррентными формулами

$$A^0 = E, \quad A^n = A \cdot A^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Оператор B называется обратным к оператору A, если выполняются равенства

$$AB = BA = E;$$

обратный оператор к оператору A обозначается через A^{-1}. Если операторы C и D обладают обратными C^{-1} и D^{-1}, то и CD обладает обратным $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$.

3. Норма линейного оператора. Будем предполагать, что линейный оператор A действует в линейном нормированном пространстве R.

Наличие метрики в пространстве R позволяет целесообразно сопоставить каждому линейному оператору A неотрицательное число $\|A\|$, называемое *нормой оператора* A. Именно, мы рассмотрим числовую функцию $F(x) = |Ax|$, определенную для векторов $x \in R$. Нормой оператора A называется точная верхняя грань (возможно, равная ∞) значений этой функции на единичных векторах x:

$$\|A\| = \sup |Ax|. \tag{1}$$

Оператор A с конечной нормой называется *ограниченным*.

В n-мерном евклидовом пространстве величина $\|A\|$ конечна для всякого линейного оператора A[1]). Действительно, длина вектора Ax, очевидно, есть непрерывная функция от координат $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ этого вектора; каждая же из этих координат есть линейная функция от координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вектора x. В конечном счете $|Ax|$ есть непрерывная функция от координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вектора x. Так как сфера $|x| = 1$ является ограниченным и замкнутым множеством в n-мерном пространстве, то в силу результатов гл. II, § 7 непрерывная функция $|Ax|$ ограничена на этой сфере. Поскольку всякое ограниченное множество имеет точную верхнюю грань, число $\|A\|$ существует. Более того, на сфере $|x| = 1$ имеется и точка x_0, в которой непрерывная функция $|Ax|$ достигает своей точной верхней грани.

Примеры. *1.* Норма нулевого оператора, очевидно, равна нулю. Обратно, если $\|A\| = 0$, то это означает, что каждый нормированный вектор x_0 переводится оператором A в нуль; но так как каждый вектор x коллинеарен с некоторым нормированным вектором x_0, то $Ax = 0$ для любого x. Следовательно, если $\|A\| = 0$, то $A = 0$.

2. Норма тождественного оператора E равна единице, так как $|Ex| = |x|$ для любого вектора x.

3. Норма оператора подобия $Ax = \lambda x$ равна $|\lambda|$.

4. Норма оператора нормального типа в гильбертовом пространстве (пример 4 п. 2)

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \lambda_j e_j$$

равна точной верхней грани чисел $|\lambda_n|$. Действительно, если $C = \sup |\lambda_n|$ и $|x|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = 1$, мы имеем

$$|Ax|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \lambda_j^2 \leqslant C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = C^2,$$

---

[1]) В бесконечномерном пространстве возможен случай $\|A\| = \infty$.

откуда $\|A\| \leqslant C$; с другой стороны, $\|A\| \geqslant \sup |Ae_n| = \sup |\lambda_n e_n| = \sup |\lambda_n| = C$; полученные неравенства и доказывают наше утверждение.

5. Норма оператора умножения на ограниченную функцию $g(x)$ в пространстве $L_2(a, b)$ (пример 5 п. 1) равна числу C, определяемому из условий

$$\mu\{x : |g(x)| > C\} = 0,$$
$$\mu\{x : |g(x)| > C - \varepsilon\} > 0 \text{ при любом } \varepsilon > 0.$$

(Для непрерывной функции число C равно $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |g(x)|$.) Доказательство предоставляется читателю.

6. Для нормы оператора Фредгольма (пример 6 п. 1) с квадратично интегрируемым ядром $K(x, s)$ можно дать оценку

$$\|A\|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds, \tag{2}$$

вытекающую из равенства (4) п. 1 после интегрирования по x.

Остановимся на двух простых свойствах операторов с конечной нормой.

1) *Для любого вектора $x \in R$ и любого линейного оператора A с конечной нормой $\|A\|$ имеет место неравенство*

$$|Ax| \leqslant \|A\|\,|x|. \tag{3}$$

Действительно, неравенство (3) справедливо для любого единичного вектора по самому определению нормы оператора A. Если же x — произвольный вектор, отличный от нуля (для нуль-вектора неравенство (3), очевидно, выполнено), то $\dfrac{x}{|x|}$ — единичный вектор и, следовательно,

$$\left| A \frac{x}{|x|} \right| \leqslant \|A\|. \tag{4}$$

Но, поскольку A — линейный оператор, имеем:

$$\left| A \frac{x}{|x|} \right| = \frac{1}{|x|} |Ax|;$$

умножая теперь неравенство (4) на $|x|$, мы и получаем требуемое неравенство (3).

2) Если A и B — операторы с конечной нормой, то

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \qquad \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|. \tag{5}$$

Действительно, если $|x| = 1$, то $|(A + B)x| = |Ax + Bx| \leqslant |Ax| + |Bx| \leqslant \|A\| + \|B\|$, чем доказано первое из неравенств (5). Далее,

$|ABx| = |A(Bx)| \leqslant \|A\| |Bx| \leqslant \|A\| \|B\|$, чем доказано и второе неравенство.

Задачи. 1. Если A — ограниченный линейный оператор с нормой M, то

$$\sup |(Ax, y)| = M \tag{6}$$

(верхняя грань по всем нормированным векторам x и y). Обратно, если билинейная форма (Ax, y) ограничена на единичном шаре, то оператор A ограничен и его норма не превосходит числа M в равенстве (6).

2. Если имеется ортонормальный базис $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве H, то всякий линейный оператор A может быть задан бесконечной матрицей $\| a_{jk} \|$, где

$$Ae_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} e_k.$$

Известно, что для некоторого M и любых $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n$

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \eta_k \right|^2 \leqslant M^2 \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2.$$

Доказать, что A — ограниченный оператор с нормой, не превосходящей M; обратно, если A — ограниченный оператор с нормой M, то выполнено предыдущее условие.

Указание. Левая часть есть значение билинейной формы (Ax, y) на некоторых векторах x и y.

3. (Продолжение.) Получить неравенства

$$\sup \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^2 \leqslant \|A\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^2. \tag{7}$$

Указание. Во-первых, $\|Ae_j\|^2 = \sum_k (Ae_j, e_k)^2 = \sum_k a_{jk}^2$. Во-вторых, если $x_0 = \xi_k e_k$ такой, что $|x| = 1$ и $|Ax_0| > \|A\| - \varepsilon$, то

$$\|A\| - \varepsilon < |Ax_0| = |\sum \xi_k A e_k| \leqslant \sqrt{\sum \xi_k^2} \cdot \sqrt{\sum_k |Ae_k|^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_k \sum_j (Ae_k, e_j)^2} = \sqrt{\sum_k \sum_j a_{kj}^2}.$$

4. Оператор нормального вида обладает ограниченным обратным тогда и только тогда, когда соответствующие числа λ_n по модулю больше положительной постоянной.

5. Оператор нормального вида называется положительным, если все $\lambda_n > 0$. Показать, что для положительного оператора C нормального вида с ограниченным обратным при $0 < \alpha < \frac{2}{\|C\|}$ справедливо неравенство $\|E - \alpha C\| < 1$.

6. Показать, что всякий ограниченный билинейный функционал $A(x, y)$ в гильбертовом пространстве H может быть представлен в форме (Ax, y), где A — ограниченный линейный оператор.

Указание. Если фиксировать в функционале (Ax, y) первый аргумент x, то получится ограниченный линейный функционал от y, который по § 2, п. 9

представляется в форме (x', y). Проверить, что оператор $x' = Ax$ — ограниченный линейный оператор.

7. Оператор A^*, удовлетворяющий условию $(Ax, y) = (x, A^*y)$, называется сопряженным к оператору A. Показать, что у всякого линейного оператора A в гильбертовом пространстве имеется сопряженный.

Указание. Применить результат задачи 6 к билинейному функционалу $A(x, y) = (y, Ax)$.

8. Показать, что $\|A^*\| = \|A\|$.

Указание. Использовать задачу 1.

9. Если оператор A обладает ограниченным обратным B, то A^* обладает ограниченным обратным B^*.

10. Показать, что последняя двойная сумма в неравенстве (7) не зависит от выбора ортонормального базиса $\{e_n\}$.

Указание. Если $\{f_n\}$ — новый базис и $Af_k = \sum b_{jk} f_j$, то

$$\sum\sum a_{jk}^2 = \sum |Ae_j|^2 = \sum\sum (Ae_j, f_k) = \sum\sum (e_j, A^*f_k) =$$
$$= \sum |A^*f_k|^2 = \sum\sum b_{kj}^2.$$

4. Собственные векторы. Подпространство R' линейного пространства R называется *инвариантным относительно оператора* A, если из $x \in R'$ следует $Ax \in R'$.

В частности, тривиальные подпространства — нулевое и все пространство — являются инвариантными для всякого линейного оператора; нас будут интересовать, естественно, только нетривиальные инвариантные подпространства.

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства оператора A. Всякий (ненулевой) вектор, принадлежащий одномерному инвариантному подпространству оператора A, называется собственным вектором оператора A; иначе говоря, вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором* оператора A, если оператор A переводит вектор x в коллинеарный ему вектор:

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

Число λ, фигурирующее в этом равенстве, называется *собственным значением (собственным числом) оператора A, соответствующим собственному вектору x.*

Рассмотрим с этой точки зрения примеры линейных операторов, указанные в п. 1.

1) Для операторов в примерах 1—3 каждое подпространство является инвариантным и каждый ненулевой вектор пространства есть собственный с собственными значениями соответственно 0, 1, λ.

2) Оператор нормального типа (пример 4) по самому определению имеет собственные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ с собственными значениями соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

3) Оператор умножения на $\alpha(x) \equiv x$ (пример 5) не имеет собственных векторов в пространстве $L_2(a, b)$, так как нет такой измеримой

функции $\varphi(x)$, которая удовлетворяла бы уравнению

$$x\varphi(x)=\lambda\varphi(x)$$

и была бы отличной от нуля на множестве положительной меры.

4) Собственные векторы оператора Фредгольма (пример 6) суть решения интегрального уравнения

$$\int_a^b K(x, s)\ \varphi(s)\,ds=\lambda\varphi(x).$$

О существовании решений у этого уравнения мы будем говорить далее.

Совокупность *всех* собственных векторов оператора A с фиксированным собственным значением λ образует, очевидно, подпространство в пространстве R. Это подпространство называется *собственным подпространством, отвечающим собственному значению* λ.

5. Симметричные и вполне непрерывные операторы. Если известно, что некоторый линейный оператор A в гильбертовом пространстве есть оператор нормального типа, как в примере 4 п. 1, то изучение свойств этого оператора значительно облегчается. Базис из собственных векторов оператора A определяет естественную «систему координат», в которой удобно решать задачи, связанные с оператором A.

Необходимым условием приводимости оператора A к нормальному виду служит равенство

$$(Ax, y)=(x, Ay), \tag{1}$$

которое должно быть выполнено при любых x и y из пространства H. Действительно, если

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j e_j;\qquad y=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j e_j,\qquad Ax=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\xi_j e_j,\qquad Ay=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\eta_j e_j,$$

то, очевидно,

$$(Ax, y)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\xi_j\eta_j,\qquad (y, Ax)=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\lambda_j\xi_j,$$

так что равенство (1) выполняется. Операторы, удовлетворяющие условию (1), будем называть *симметричными*.

Условие симметричности не является еще достаточным условием приводимости оператора A к нормальному виду. Например, оператор умножения на x в пространстве $L_2(a, b)$ симметричен:

$$(x\varphi, \psi)=\int_a^b x\varphi(x)\,\psi(x)\,dx=(\varphi, x\psi),$$

но этот оператор, как мы видели выше, не имеет собственных векторов и поэтому не приводится к нормальному виду. Мы наложим на оператор A, кроме требования симметричности, еще дополнительное условие, которое будем называть условием *полной непрерывности:*

Из каждой последовательности векторов Af_n, где числа $|f_n|$ ограничены, можно выбрать сходящуюся последовательность.

Операторы, обладающие этим свойством, будем называть *вполне непрерывными.*

Вполне непрерывный оператор является ограниченным (и, следовательно, непрерывным): если бы для некоторой последовательности f_n, $|f_n|=1$, мы имели $|Af_n| \to \infty$, например $|Af_n| > n$, то из последовательности Af_n нельзя было бы выбрать сходящейся последовательности в противоречие с предположением.

Задачи. **1.** Является ли единичный оператор E вполне непрерывным? *Отв.* Нет, если пространство H бесконечномерно.

2. A и B — вполне непрерывные операторы; доказать, что $A+B$ — вполне непрерывный оператор.

3. A — вполне непрерывный оператор B — ограниченный; доказать, что AB и BA вполне непрерывны.

4. Если A и A^* — сопряженные операторы, то $A+A^*$, AA^*, A^*A — симметричные операторы, и $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.

5. Показать, что необходимое и достаточное условие полной непрерывности оператора нормального типа выражается равенством

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Указание. Использовать задачу 3 § 1.

6. Мы переходим теперь к фундаментальной теореме о симметричных вполне непрерывных операторах.

Теорема 1 (Д. Гильберт). *В полном гильбертовом сепарабельном пространстве всякий симметричный вполне непрерывный оператор обладает полной ортогональной системой собственных векторов.*

Доказательство этой теоремы мы проведем в несколько этапов.

Лемма 1. *Если $|e|=1$ и A — симметричный оператор, то*

$$|Ae|^2 \leqslant |A^2e|,$$

причем знак равенства возможен только в случае, когда e есть собственный вектор оператора A^2 с собственным значением

$$\lambda = |Ae|^2.$$

Доказательство. В силу симметрии оператора и неравенства Коши — Буняковского имеем:

$$|Ae|^2 = (Ae,\ Ae) = (A^2e,\ e) \leqslant |A^2e|\,|e| = |A^2e|. \tag{1}$$

Неравенство Коши — Буняковского обращается в равенство, лишь если фигурирующие в нем векторы коллинеарны (§ 1, п. 3), поэтому в случае равенства имеем

$$A^2e = \lambda e,$$

т. е. e есть собственный вектор оператора A^2. Подставляя полученное выражение в (1), находим λ:

$$(A^2e, e) = (\lambda e, e) = \lambda = |Ae|^2,$$

что и требовалось.

Назовем *максимальным вектором* ограниченного оператора A такой единичный вектор e, $|e| = 1$, на котором величина $|Ae|$ достигает своего наибольшего значения $M = \|A\|$. Вообще говоря, не у всякого ограниченного оператора существует максимальный вектор. Но мы покажем дальше, что у симметричного вполне непрерывного оператора максимальный вектор всегда имеется:

Лемма 2. *Симметричный вполне непрерывный оператор обладает максимальным вектором.*

Доказательство. Выберем последовательность $y_n = Ax_n$, где $|x_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так, чтобы иметь $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = M$. Из последовательности y_n можно, по условию, извлечь сходящуюся подпоследовательность; зачеркнув лишние векторы и исправив нумерацию, можно считать, что сама последовательность y_n сходится при $n \to \infty$; пусть $y = \lim y_n$. В силу непрерывности нормы $|y| = \lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = M$. Мы утверждаем, что вектор $z = \frac{1}{M} y$ является искомым максимальным вектором.

Прежде всего, в силу непрерывности оператора A имеем:

$$Az = \lim_{n\to\infty} A\left(\frac{y_n}{M}\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\frac{Ax_n}{M}\right).$$

Векторы $\frac{Ax_n}{M}$ принадлежат единичному шару, и поэтому векторы $A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)$ по длине не превосходят M. Применяя лемму 1, получаем:

$$M > \left|A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)\right| = \frac{1}{M}\left|A^2x_n\right| \geqslant \frac{1}{M}\left|Ax_n\right|^2 \to M,$$

откуда вытекает, что

$$|Az| = \lim \left|A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)\right| = M,$$

т. е. z есть максимальный вектор оператора A, что и требовалось.

От максимальных векторов недалеко и до собственных векторов.

Лемма 3. *Если e_0 — максимальный вектор для симметричного оператора A, то e_0 является собственным вектором для оператора A^2 с собственным значением $\|A\|^2$.*

Доказательство. По лемме 1 и по определению нормы оператора имеем:

$$\|A\|^2 = |Ae_0|^2 \leqslant |A^2 e_0| \leqslant \|A\|^2,$$

откуда

$$|Ae_0|^2 = |A^2 e_0| = \|A\|^2.$$

В силу леммы 1 e_0 есть собственный вектор оператора A^2 с собственным значением

$$\lambda = |Ae_0|^2 = \|A\|^2,$$

что и требовалось.

Лемма 4. *Если оператор A^2 обладает собственным вектором с собственным значением M^2, то оператор A имеет собственный вектор с собственным значением M или $-M$.*

Доказательство. Равенство $A^2 e_0 = M^2 e_0$ можно записать в виде

$$(A - ME)(A + ME)\, e_0 = 0 \qquad (E \text{ — единичный оператор}).$$

Допустим, что $z_0 = (A + ME)\, e_0 \neq 0$. Тогда из условия

$$(A - ME)\, z_0 = 0$$

или, что то же,

$$Az_0 = Mz_0$$

вытекает, что z_0 есть собственный вектор оператора A с собственным значением $M = \|A\|$. Если же $(A + ME)\, e_0 = 0$, то

$$Ae_0 = -Me_0,$$

и получается, что уже e_0 есть собственный вектор оператора A с собственным значением $M = -\|A\|$. Лемма доказана.

Леммы 1—4 показывают, что *всякий симметричный вполне непрерывный оператор A обладает собственным вектором с собственным значением $\pm\|A\|$.*

Теперь мы будем доказывать, что из собственных векторов оператора A можно построить полную ортогональную систему в пространстве H. Предпошлем этому построению следующие леммы:

Лемма 5. *Собственные векторы симметричного оператора, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Действительно, пусть имеют место равенства

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y$$

и $\lambda \neq \mu$. Умножим первое равенство скалярно на y, второе на x и вычтем второе из первого:

$$(Ax, y)-(x, Ay)=(\lambda-\mu)(x, y).$$

Левая часть этого равенства равна нулю вследствие симметрии оператора. Так как $\lambda \neq \mu$, то $(x, y)=0$, что и требовалось.

Лемма 6. *У вполне непрерывного оператора A всякая ортогональная нормированная система собственных векторов с собственными значениями, превосходящими по модулю положительное число δ, конечна.*

Доказательство. Допустим, что нашлась бесконечная система S таких собственных векторов. Каждый из них оператором переводится в себя самого с числовым множителем, большим числа δ.

Пусть e_j и e_k — какие-нибудь два из этих собственных векторов:

$$|e_j|=|e_k|=1, \quad (e_j, e_k)=0, \quad Ae_j=\lambda_j e_j, \quad Ae_k=\lambda_k e_k.$$

Имеем:

$$|Ae_j-Ae_k|^2=|\lambda_j e_j-\lambda_k e_k|^2=\lambda_j^2+\lambda_k^2>2\delta^2.$$

Это означает, что расстояния между векторами, полученными после воздействия оператора A на векторы системы S, заведомо будут превосходить $\delta\sqrt{2}$. Но из совокупности таких векторов нельзя выбрать никакой сходящейся последовательности, что противоречит полной непрерывности оператора A.

В частности, *существует только конечное число взаимно ортогональных векторов с данным собственным значением* $\lambda \neq 0$; иными словами, *каждое собственное подпространство, отвечающее ненулевому собственному значению вполне непрерывного симметричного оператора A, конечномерно.*

Эта лемма позволяет сделать определенные выводы относительно совокупности всех собственных векторов и собственных значений оператора A. Рассмотрим на вещественной оси множество всех собственных значений оператора A. В силу леммы 6 существует лишь конечное число собственных значений, превосходящих по абсолютной величине данное положительное число δ, поэтому, если собственных значений бесконечное множество, то они образуют последовательность, сходящуюся к нулю. Следовательно, мы можем занумеровать натуральными числами все собственные значения в порядке убывания абсолютной величины. Условимся, что при этом мы будем каждое собственное значение снабжать столькими последовательными номерами, какова размерность соответствующего собственного подпространства. В таком случае последовательности всех ненулевых собственных значений оператора

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

мы можем сопоставить последовательность собственных векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots,$$

причем $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Можно считать, что векторы $e_1, e_2, \ldots$ взаимно ортогональны и нормированы. В самом деле, если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то ортогональность e_n и e_m выполняется по лемме 5; если же $\lambda_n = \lambda_m$, то в пределах конечномерного собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\lambda_n = \lambda_m$, мы всегда можем провести ортогонализацию. Нормировка всех полученных векторов завершает построение.

Покажем теперь, что *каждый вектор z, ортогональный всем построенным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, переводится оператором A в нуль.* Для этого используем следующую лемму:

Лемма 7. *Пусть H' — подпространство в гильбертовом пространстве H, инвариантное относительно симметричного оператора A. Тогда ортогональное дополнение H'' подпространства H' также инвариантно относительно оператора A.*

Доказательство. Пусть x — любой вектор подпространства H', y — любой вектор подпространства H''. По условию $(Ax, y) = 0$. Но в таком случае в силу симметрии оператора и $(x, Ay) = 0$. Это означает, что вектор Ay ортогонален любому вектору $x \in H'$ и, следовательно, $Ay \in H''$ для любого $y \in H''$, что и требовалось.

Теперь рассмотрим совокупность P всех векторов z, ортогональных всем построенным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Эта совокупность P является замкнутым подпространством, как ортогональное дополнение линейной оболочки $L(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots) = L$[1]). Поскольку линейная оболочка L, очевидно, инвариантна относительно оператора A, ее ортогональное дополнение P, по лемме 7, также инвариантно относительно оператора A. Обозначим через $M(P)$ точную верхнюю границу значений $|Ax|$ на единичной сфере подпространства P. В силу леммы 4 в подпространстве P имеется собственный вектор e_0 с собственным значением $\lambda_0 = M(P)$. Но по самому построению подпространства P оно не может содержать ни одного собственного вектора с ненулевым собственным значением. Отсюда $\lambda_0 = M(P) = 0$; но это означает, что $Az = 0$ для любого вектора $z \in P$, что мы и утверждаем.

Обозначим через L' замыкание линейной оболочки векторов $e_1, e_2, \ldots$; ортогональное дополнение этого замыкания есть также подпространство P. Каждый вектор $x \in H$ может быть представлен в виде суммы

$$x = x' + x'', \quad x' \in L', \; x'' \in P.$$

Вектор x' можно, далее, разложить в ряд Фурье по системе $e_1, e_2, \ldots$

---

[1]) Линейной оболочкой системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется подпространство, состоящее из всех линейных комбинаций этих векторов.

..., e_n, ..., полной в пространстве L'; вектор x'', по доказанному, оператором A переводится в нуль. Мы получили следующую основную теорему:

Теорема 2. *В полном гильбертовом пространстве H, в котором задан симметричный вполне непрерывный оператор A, каждый вектор x может быть представлен в виде ортогональной суммы*

$$x = x' + x'' = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j + x'',$$

где e_1, e_2, ... — *собственные векторы оператора A с ненулевыми собственными значениями и $Ax'' = 0$.*

Из этой теоремы вытекает и теорема Гильберта. Действительно, в сепарабельном пространстве H подпространство P также сепарабельно, и в нем можно выбрать полную ортогональную систему e'_1, e'_2, ..., e'_n, ...; вместе с уже построенными векторами e_1, e_2, ..., e_n, ... получается полная ортогональная система во всем пространстве H. Каждый из векторов этой системы является собственным вектором оператора A: векторы e_n — с собственными значениями $\lambda_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), а векторы e'_n — с собственным значением 0. Тем самым теорема Гильберта полностью доказана.

Замечание. Векторы из области значений оператора A, т. е. векторы вида

$$\psi = A\varphi,$$

называются *истокообразно представимыми.* Мы ниже (§ 5) поясним смысл этого названия.

Всякий истокообразно представимый вектор ψ допускает разложение по собственным векторам оператора A с ненулевыми собственными значениями.

Действительно, в силу теоремы Гильберта

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j + x'',$$

где $Ae_n = \lambda_n e_n$ ($\lambda_n \neq 0$) и $Ax'' = 0$. Применяя к этому равенству оператор A, получаем:

$$\psi = A\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j,$$

что и утверждалось.

§ 4. Интегральные операторы с квадратично интегрируемыми ядрами

1. Мы применим изложенную в § 3 теорию к интегральному оператору Фредгольма

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$$

с квадратично интегрируемым ядром $K(x, s)$:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds = K^2 < \infty. \tag{1}$$

Оператор Фредгольма, как мы видели в п. 1 § 3, является ограниченным оператором в гильбертовом пространстве $H = L_2(a, b)$ и имеет норму, не превосходящую числа K.

Если ядро $K(x, s)$ симметрично, т. е. почти всюду в области $G = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$ имеем

$$K(x, s) = K(s, x),$$

то и оператор Фредгольма симметричен, т. е. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ *при любых φ и ψ из $L_2(a, b)$.*

Действительно, по теореме Фубини

$$\begin{aligned}(A\varphi, \psi) &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds \right\} \psi(x)\,dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\psi(x)\,ds\,dx = \\ &= \int_a^b \varphi(s) \left\{ \int_a^b K(x, s)\psi(x)\,dx \right\} ds = \\ &= \int_a^b \varphi(s) \left\{ \int_a^b K(s, x)\psi(x)\,dx \right\} ds = (\varphi, A\psi).\end{aligned}$$

Существование двойного интеграла

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\psi(x)\,ds\,dx,$$

являющееся одним из условий применимости теоремы Фубини, следует из существования интегралов

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds$$

и

$$\int_a^b \int_a^b \varphi^2(x)\,\psi^2(s)\,dx\,ds = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(s)\,ds.$$

Покажем теперь, что *оператор Фредгольма с квадратично интегрируемым ядром вполне непрерывен.* Напомним, что линейный оператор A по определению является вполне непрерывным, если из каждой последовательности Af_n, где $|f_n|$ ограничены, можно выбрать сходящуюся последовательность. Иначе говоря, оператор A вполне непрерывен, если он переводит любое ограниченное множество пространства H в компактное множество (гл. II, § 7). Пусть, например, A — ограниченный оператор, переводящий пространство H в конечномерное подпространство Q; мы утверждаем, что такой оператор A является вполне непрерывным. Действительно, векторы Af_n образуют ограниченное множество в конечномерном пространстве Q; а такое множество, согласно результатам гл. II, § 7, компактно, так что условие полной непрерывности оператора A выполнено.

Если функция $K(x, s)$ имеет вид

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\,\psi_k(s),$$

где $\varphi_k(x)$, $\psi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — функции с интегрируемым квадратом (такое ядро $K(x, s)$ называется *вырожденным*), то оператор $K(x, s)$ ограничен и

$$A\varphi(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\,\psi_k(s)\,\varphi(s)\,ds = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \int_a^b \psi_k(s)\,\varphi(s)\,ds \right\} \varphi_k(s),$$

т. е. оператор A переводит все пространство $L_2(a, b)$ в конечномерное подпространство, порожденное функциями $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$. Поэтому *оператор Фредгольма с вырожденным ядром является вполне непрерывным.*

Для перехода к общему случаю используем следующую лемму:

Лемма. *Пусть дана последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ линейных операторов в гильбертовом пространстве H, сходящаяся к оператору A в том смысле, что* $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. *Если операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ являются вполне непрерывными, то и предельный оператор A вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть вектор f пробегает ограниченное множество B, например шар радиуса r с центром в O; мы должны показать, что вектор Af при этом пробегает компактное множество. Достаточно установить, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{Af\}$ обладает компактной ε-сетью. Найдем в последовательности $A_n \to A$ оператор A_n так, чтобы иметь $\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{r}$. Множество элементов $\{A_n f\}$ $(f \in B)$ по условию компактно, и для любого f мы имеем $|A_n f - Af| \leqslant \leqslant \|A_n - A\| |f| \leqslant \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon$. Следовательно, множество $\{A_n f\}$ есть компактная ε-сеть для $\{Af\}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $K(x, s)$ — произвольная функция, квадратично интегрируемая в области $G = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$. Мы утверждаем, что эта функция может быть разложена [по метрике $L_2(G)$] в ряд вида

$$K(x, s) = \sum_{m, n=1}^{\infty} a_{mn} e_m(x) e_n(s). \tag{2}$$

В качестве функций $e_n(x)$ мы возьмем любую полную ортогональную систему в пространстве $L_2(a, b)$. В этом случае *произведения $e_m(x) e_n(s)$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2(G)$*. Ортогональность этой системы очевидна; проверим ее полноту. Если бы в пространстве $L_2(G)$ существовала функция $f(x, s)$, ортогональная всем произведениям $e_m(x) e_n(s)$, так что

$$\iint_G f(x, s) e_m(x) e_n(s)\, dx\, ds = 0 \quad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

то при любом фиксированном n мы по теореме Фубини имели бы

$$\int_a^b e_m(x) \left\{ \int_a^b f(x, s) e_n(s)\, ds \right\} dx = 0.$$

Вследствие полноты системы $e_m(x)$ отсюда следовало бы, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ и почти при всех x

$$\int_a^b f(x, s) e_n(s)\, ds = 0.$$

Вследствие полноты системы $e_n(s)$ отсюда вытекало бы, что почти при всех x и s

$$f(x, s) = 0$$

и, следовательно, $f(x, s)$ есть нулевой элемент пространства $L_2(G)$.

Итак, функции $e_m(x) e_n(s)$ действительно образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2(G)$. Но тогда каждый элемент пространства $L_2(G)$ в силу основной теоремы § 2 допускает разложение (1), что и утверждалось.

Вырожденные ядра, построенные по частным суммам $K_{pq}(x, s)$ ряда (2)

$$K_{pq}(x, s) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} a_{mn} e_m(x) e_n(s),$$

определяют последовательность вполне непрерывных операторов

$$A_{pq}\varphi(x) = \int_a^b K_{pq}(x, s)\varphi(s)\,ds.$$

Используя оценку нормы оператора Фредгольма (см. стр. 207), получаем неравенство

$$\| A - A_{pq} \|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b [K(x, s) - K_{pq}(x, s)]^2\,dx\,ds,$$

из которого следует, что операторы A_{pq} при $p \to \infty$, $q \to \infty$ сходятся по норме к оператору A.

Применяя лемму 1, заключаем, что вместе с операторами A_{pq} оператор A также вполне непрерывен, что и утверждалось.

2. Итак, оператор Фредгольма с симметричным квадратично интегрируемым ядром $K(x, s)$ симметричен и вполне непрерывен. Поэтому можно применить теорему Гильберта из § 3; в силу этой теоремы *в пространстве $L_2(a, b)$ имеется полная ортонормальная система, состоящая из собственных функций оператора Фредгольма.* Покажем, что *квадраты собственных значений оператора Фредгольма образуют сходящийся ряд.*

Рассмотрим равенство, определяющее нормированные собственные функции оператора Фредгольма:

$$\int_a^b K(x, s)\,e_n(s)\,ds = \lambda_n e_n(x); \tag{1}$$

оно показывает, что величина $\lambda_n e_n(x)$ является коэффициентом Фурье функции $K(x, s)$ (при постоянном значении x). Отсюда, применяя неравенство Бесселя (4) из § 2, п. 4, находим:

$$\int_a^b K^2(x, s)\,ds \geqslant \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2 e_n^2(x) \tag{2}$$

при каждом значении N. Интегрируя это неравенство по x, получаем:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,ds\,dx \geqslant \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2$$

при любом натуральном N. Отсюда следует, что ряд из λ_n^2 сходится, что и требовалось.

3. Рассмотрим оператор Фредгольма с ядром, удовлетворяющим *условию Гильберта — Шмидта*:

$$\int_a^b K^2(x, s)\,ds \leqslant C. \tag{1}$$

При выполнении этого условия всякая функция $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ переводится оператором A в ограниченную функцию, так как

$$|A\varphi(x)|^2 = \left[\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b K^2(x, s)\,ds \int_a^b \varphi^2(s)\,ds \leqslant C\int_a^b \varphi^2(s)\,ds. \tag{2}$$

В частности, *каждая собственная функция оператора A с ненулевым собственным значением ограничена.*

Функцию $g(x)$ вида

$$g(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = A\varphi$$

с произвольной функцией $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ мы будем называть (в соответствии с общим определением, данным в конце § 3) *истокообразно представимой через ядро $K(x, s)$*.

В конце § 3 было показано, что всякий истокообразно представимый вектор $\psi = A\varphi$ в случае симметричного оператора A допускает разложение по собственным векторам оператора A, именно

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\varphi, e_j)\,e_j. \tag{3}$$

Покажем, что при выполнении условия (1) ряд (3) для любой истокообразно представимой функции сходится не только по норме, но и абсолютно и равномерно. Действительно, в силу неравенства Коши (см. стр. 184) для любых m и n

$$\left\{\sum_{j=n}^{n+m} |(f, e_j)\lambda_j e_j(x)|\right\}^2 \leqslant \sum_{j=n}^{n+m} (f, e_j)^2 \sum_{j=n}^{n+m} \lambda_j^2 e_j^2(x). \tag{4}$$

Так как в правой части неравенства (4) сумма $\lambda_n^2 e_n^2(x) + \ldots$ во всяком случае ограничена [в силу неравенства (2) п. 2], а сумма $(f, e_n)^2 + \ldots$ делается сколь угодно малой при достаточно большом n [в силу неравенства Бесселя (см. стр. 194)], то сумма и в левой части равенства (4) обладает этим последним свойством; следовательно, рассматриваемый ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно, что и требовалось.

Доказанное здесь свойство называют иногда теоремой Гильберта — Шмидта.

Замечание. Если ядро $K(x, s)$ в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ непрерывно, то соответствующий оператор Фредгольма переводит всякую функцию $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ в *непрерывную функцию*. Действительно, если положить

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

то для любых x' и x''

$$|\psi(x') - \psi(x'')|^2 \leqslant \left\{\int_a^b |K(x', s) - K(x'', s)|\,|\varphi(s)|\,ds\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b [K(x', s) - K(x'', s)]^2\,ds \int_a^b [\varphi(s)]^2\,ds,$$

откуда непосредственно вытекает непрерывность функции $\psi(x)$. Естественно, что в этом случае и все собственные функции с ненулевыми собственными значениями также непрерывны.

4. Вычисление собственных функций и собственных значений. Для практических применений полученные нами результаты требуют знания системы собственных функций соответствующего оператора Фредгольма.

Если ядро $K(x, s)$ оператора Фредгольма A вырождено, так что

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\,q_j(s),$$

то, как мы уже видели, оператор A отображает все пространство L_2 на конечномерное подпространство, порожденное функциями $p_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). Таким образом, собственные функции с ненулевыми собственными значениями следует искать только в этом подпространстве; они должны иметь вид

$$e(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j p_j(x). \tag{1}$$

Для определения коэффициентов c_j подставляем функцию (1) в уравнение, которым определяются собственные функции

$$\int_a^b K(x, s)\,e(s)\,ds = \lambda e(x).$$

Тогда получаем:

$$\lambda e(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda c_j p_j(x) = \int_a^b K(x, s) \sum_{j=1}^{m} c_j q_j(s)\, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} p_i(x) c_j \int_a^b q_i(s) q_j(s)\, ds = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} c_j q_{ij} p_i(x),$$

где

$$q_{ij} = \int_a^b q_i(s) q_j(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\lambda c_j = \sum_{i=1}^{m} q_{ij} c_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Эта система уравнений позволяет обычным способом найти λ и константы c_j.

Особенно простой вид эта система получает тогда, когда $p_i(x) \equiv q_i(x)$ и $(p_i, q_j) = 0$ при $i \neq j$.

В этом случае величины q_{ij} равны нулю при $i \neq j$ и система (2) имеет очевидное решение: $c_j = 1$ для некоторого j, $c_i = 0$ при $i \neq j$, $\lambda = c_{jj}$. Собственная функция, отвечающая этому решению, в силу формулы (1) совпадает с функцией $p_j(x) = q_j(x)$. Таким образом, в данном случае собственными функциями являются сами функции $p_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, а собственными значениями — числа c_{jj}, т. е. квадраты норм этих функций.

Если ядро $K(x, s)$ оператора Фредгольма A не вырождено, то часто используют следующий приближенный метод вычисления собственных функций и собственных значений. Заменяют данное ядро $K(x, s)$ близким ему вырожденным $K_n(x, s)$ (например, частной суммой ряда Фурье) и находят описанным выше способом собственные функции и собственные значения соответствующего оператора A_n. Оказывается, что при некоторых предположениях гладкости ядра $K(x, s)$ полученные собственные функции и собственные значения оператора A_n стремятся соответственно к собственным функциям и собственным значениям оператора A. Не имея возможности останавливаться на этих вопросах, мы отсылаем читателя к специальной литературе [1]).

Задачи. 1. Каковы собственные функции интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x, s) = \cos(x + s)$ в промежутках а) $[0, \pi]$, б) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

Отв. а) $\cos x$, $\sin x$; б) $\cos x + \sin x$, $\cos x - \sin x$.

---

[1]) См. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, 1951, гл. 3, § 9; Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949, гл. 2, § 4.

2. Показать, что квадратично суммируемая симметричная функция $K(x, s)$ разлагается в билинейный ряд, сходящийся по метрике $L_2(G)$:

$$K(x, s) = \sum \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(s), \tag{1}$$

где $\varphi_k(x)$ — нормированные собственные функции и λ_k — соответствующие собственные значения интегрального оператора K с ядром $K(x, s)$.

Указание. Произведения $\varphi_k(x)\varphi_m(s)$ образуют полную ортогональную систему в $L_2(G)$.

3. Если квадратично суммируемая функция $K(x, s)$ разложена в ряд, сходящийся по метрике $L_2(G)$:

$$K(x, s) = \sum \mu_k u_k(x) u_k(s),$$

и функции $u_k(s)$ взаимно ортогональны (в $L_2(a, b)$) и нормированы, то $u_k(x)$ есть собственная функция интегрального оператора с ядром $K(x, s)$, а μ_k — соответствующее собственное значение.

4. Аналогом конечномерной квадратичной формы $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k$ является *интегральная квадратичная форма*

$$(K\varphi, \varphi) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x, s) \varphi(x) \varphi(s)\, dx\, ds. \tag{2}$$

Квадратичная форма (2) называется *положительно определенной*, если для любой ненулевой функции $\varphi \in L_2(a, b)$ мы имеем $(K\varphi, \varphi) > 0$. Показать, что все собственные значения оператора Фредгольма K, отвечающего данной положительно определенной квадратичной форме, положительны.

5. Если ядро $K(x, s)$ положительно определенной квадратичной формы (1) симметрично и непрерывно, то $K(s, s) \geqslant 0$.

Указание. Допустив, что $K(s_0, s_0) < 0$, построить функцию $\varphi_0(x)$, для которой имело бы место неравенство $(K\varphi_0, \varphi_0) < 0$.

6. Для непрерывного симметричного ядра $K(x, s)$, отвечающего положительно определенной форме $(K\varphi, \varphi)$, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно (теорема Мерсера).

Указание. Применив результат задачи 5 к ядру $K(x, s) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(s)$, получить сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(s)$; пользуясь неравенством Коши, вывести отсюда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(s)$, равномерную по каждой координате при фиксированной другой. Отсюда и из результата задачи 3 вывести, что сумма этого ряда есть $K(x, s)$. Применяя к равенству $K(s, s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(s)$ теорему Дини (гл. II, § 7, задача 4) и снова используя неравенство Коши, получить равномерную сходимость ряда (1) в области G.

7. Показать, что оператор A, заданный в ортонормальном базисе $\{e_j\}$ матрицей $\| a_{jk} \|$ по формулам

$$Ae_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} e_k,$$

вполне непрерывен, если $\sum \sum a_{jk}^2 < \infty$.

Указание. Представить оператор A в форме предела операторов, отображающих все пространство на конечномерные подпространства.

8. Если A — интегральный оператор в $L_2(a, b)$ с произвольным квадратично интегрируемым ядром и $\{e_k(x)\}$ — ортонормальная система в $L_2(a, b)$, то $\sum |Ae_k|^2 = \sum\sum (Ae_k, e_n)^2 < \infty$.

Указание. Использовать метод п. 2.

9. Если оператор A в $L_2(a, b)$ задан в ортонормальном базисе $\{e_n(x)\}$ матрицей $\|a_{jk}\|$ с $\sum\sum a_{jk}^2 < \infty$, то существует квадратично интегрируемое ядро $K(x, s)$ такое, что $A\varphi = \int K(x, s)\varphi(s)\,ds$.

Указание. Положить $K(x, s) = \sum\sum (Ae_j, e_k)\,e_j(x)\,e_k(s)$.

Примечание. Результаты задач 8 и 9 показывают, что среди всех вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве $L_2(a, b)$, интегральные операторы Фредгольма выделяются тем условием, что у них сумма квадратов всех матричных элементов в любом ортонормальном базисе пространства $L_2(a, b)$ конечна.

§ 5. Задача Штурма — Лиувилля

1. Общая теорема об интегральном операторе с симметричным ядром имеет многие приложения в математической физике. Одним из важнейших приложений является *решение задачи Штурма — Лиувилля*.

Рассмотрим на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ дифференциальный оператор

$$S[u] = (p(x)\,u'(x))' - q(x)\,u(x) \qquad (1)$$
$$(p(x) \in D_1(a, b),\ q(x) \in C(a, b)),$$

определенный для дважды дифференцируемых функций $u(x)$, подчиненных некоторым однородным граничным условиям, например $u(a) = u(b) = 0$.

Оператор S существенно отличается от операторов, которые мы рассматривали ранее; он не является ограниченным оператором, он определен не на всем пространстве $L_2(a, b)$. Тем не менее на своей области определения он симметричен, т. е. для любых двух дважды дифференцируемых функций u, v, удовлетворяющих предписанным граничным условиям, выполняется равенство

$$(Su, v) = (u, Sv). \qquad (2)$$

Действительно,

$$\left.\begin{aligned} (Su, v) &= \int_a^b [(pu')' - qu]\,v\,dx = pu'v\Big|_a^b - \int_a^b (pu'v' + quv)\,dx,\\ (u, Sv) &= \int_a^b u\,[(pv')' - qv]\,dx = upv'\Big|_a^b - \int_a^b (pu'v' + quv)\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

В силу граничного условия

$$p(u'v-uv')\Big|_a^b=0,$$

и равенство (2) оказывается справедливым.

Функция $e(x)$ называется собственной функцией оператора S, если она входит в область определения оператора S (т. е. дважды дифференцируема и подчинена предписанным граничным условиям) и удовлетворяет уравнению

$$Se=\lambda e.$$

В силу симметрии оператора S, так же как и в § 3, его собственные функции, отвечающие различным значениям λ, ортогональны в пространстве $L_2(a, b)$. Требуется доказать, что *собственные функции оператора S образуют в $L_2(a, b)$ полную систему*. Эта задача, включающая в себя, во-первых, вопрос о существовании бесконечного множества собственных функций, во-вторых, вопрос о полноте их системы, и называется задачей Штурма—Лиувилля.

2. Вот важный пример, в котором возникает необходимость решения задачи Штурма—Лиувилля.

Рассмотрим колебания неоднородной струны, закрепленной в точках $x=a$ и $x=b$. Такие колебания, как мы знаем из гл. III, описываются уравнением

$$(pu_x)_x=\mu u_{tt}, \tag{1}$$

где $p(x)$ — модуль упругости, $\mu(x)$ — плотность материала струны; искомое решение $u(x, t)$ должно удовлетворять граничным условиям

$$u(a, t)=u(b, t)=0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x). \tag{3}$$

Будем искать решения уравнение (1) с условием (2) в форме

$$u(x, t)=X(x)T(t). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, находим:

$$\frac{(pX')'}{\mu X}=\frac{T''}{T}, \tag{5}$$

где штрих обозначает дифференцирование по соответствующему переменному. Правая часть равенства (5) не зависит от x, левая — от t, и, значит, отношение (5) постоянно. Обозначая его значение через λ, получаем два уравнения:

$$(pX')'=\lambda\mu X, \tag{6}$$

$$T''=\lambda T.$$

Если $\mu(x) \equiv 1$, то функция $X(x)$ должна быть собственной функцией уравнения Штурма—Лиувилля (6).

Если $\mu(x) \not\equiv 1$, то можно сделать подстановку

$$z = X\sqrt{\mu},$$

после которой уравнение (6) приведется к виду

$$(p_1 z')' - qz = \lambda z, \tag{7}$$

где

$$p_1 = \frac{p}{\mu}, \quad q = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[p\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)'\right]',$$

и функция $z(x)$ снова оказывается собственной функцией уравнения Штурма—Лиувилля (7). Будем считать в дальнейшем для простоты $\mu(x) \equiv 1$.

Предположим, что соответствующая проблема Штурма—Лиувилля имеет положительное решение: существует полная ортогональная система функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$, удовлетворяющих уравнениям

$$(p(x)\, e_n'(x))' = \lambda_n e_n(x)$$

и граничным условиям $e_n(a) = e_n(b) = 0$. Если $p(x) > 0$, то числа λ_n заведомо отрицательны, поскольку

$$\lambda_n \int_a^b e_n^2(x)\, dx = \int_a^b (pe_n')'\, e_n\, dx = pe_n'e_n \Big|_a^b - \int_a^b p\,[e_n'(x)]^2\, dx < 0.$$

Уравнение

$$T'' = \lambda_n T$$

имеет, очевидно, решение вида

$$T_n = A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t,$$

где $\nu_n^2 = -\lambda_n$, а A_n и B_n — произвольные постоянные. Уравнение (1) имеет совокупность решений вида

$$u_n(x, t) = e_n(x)(A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t),$$

представляющих чисто колебательные процессы с частотами $\nu_1, \nu_2, \ldots$ Числа $\nu_1, \nu_2, \ldots$ называются *собственными частотами* струны, определяемой условиями (1)—(3). Решение $u(x, t)$, удовлетворяющее также и начальным условиям (3), можно теперь получить, комбинируя найденные решения $u_n(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n получаются условия

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e_n(x),$$

$$u_t(x,\ 0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n B_n e_n(x).$$

В силу предположенной полноты системы $e_n(x)$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно разложить по системе $e_n(x)$ и найти коэффициенты A_n и B_n. Как видим, они определяются коэффициентами разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе $e_n(x)$. Таким образом, принципиально задача о колебаниях неоднородной струны оказывается разрешенной[1]).

3. Приступая к решению общей задача Штурма—Лиувилля, предположим сначала, что уравнение

$$Su \equiv (pu')' - qu = 0$$

не имеет решения в области определения оператора S (т. е. среди дважды дифференцируемых функций с фиксированными граничными условиями). Оператор S в этом предположении мы будем называть *неособенным.*

Мы покажем, что *неособенный оператор S имеет обратный оператор A, который является интегральным оператором Фредгольма с симметричным и непрерывным ядром.*

Слова «A — обратный оператор к оператору S» означают здесь следующее:

1) Для любой функции $u(x)$ из области определения оператора S имеем

$$A(Su) = u.$$

2) Для любой непрерывной функции $\psi(x)$ функция $A\psi(x)$ принадлежит к области определения оператора S и

$$S(A\psi) = \psi.$$

Существование оператора A с указанными свойствами решает проблему. Действительно, оператор A, как симметричный оператор Фредгольма, обладает системой ортогональных собственных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ с ненулевыми собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Все функции $e_n(x)$ непрерывны в силу заключительных результатов § 4. Применяя к равенству

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n} A e_n$$

---

[1]) Мы оставляем в стороне вопросы о сходимости полученных рядов и о том, в каком смысле функция $u(x,\ t)$ есть решение уравнения (1).

оператор S, получаем:

$$Se_n = \frac{1}{\lambda_n} SAe_n = \frac{1}{\lambda_n} e_n,$$

так что функция $e_n(x)$ является собственной функцией оператора S с собственным значением $\frac{1}{\lambda_n}$. Покажем, что функции $e_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют полную систему в пространстве $L_2(a, b)$ (и что, следовательно, оператор A не имеет собственных функций с нулевым собственным значением). Для любой функции u из области определения оператора S выполняется уравнение

$$A(Su) = u,$$

которое показывает, что функция u принадлежит области значений оператора A. Но тогда u может быть разложена в ряд по собственным функциям оператора A с ненулевыми собственными значениями, т. е. по функциям $e_1(x)$, $e_2(x)$, $\ldots$, $e_n(x)$, $\ldots$

Функции $u(x)$, очевидно, образуют плотное множество в пространстве $L_2(a, b)$. Отсюда следует, что функции $e_n(x)$ образуют полную систему в пространстве $L_2(a, b)$, что и требуется.

4. Таким образом, решение задачи Штурма—Лиувилля сводится к построению обратного оператора A к оператору S в форме интегрального оператора Фредгольма с симметричным ядром.

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из области определения оператора S, т. е. функция, удовлетворяющая граничным условиям и имеющая две непрерывные производные, и пусть $Su = \psi$. Мы должны восстановить функцию u по функции ψ. Заметим, что может существовать лишь единственная функция u, лежащая в области определения оператора S и удовлетворяющая уравнению $Su = \psi$. Действительно, разность v двух возможных решений такого уравнения удовлетворяла бы однородному уравнению $Sv = 0$ и лежала бы также в области определения оператора S, откуда по предположению следовало бы, что $v \equiv 0$.

Итак, мы должны решить уравнение

$$Su = \psi, \tag{1}$$

причем $\psi(x)$ — заданная непрерывная функция. Применим обычный способ вариации постоянных. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$Su \equiv (pu')' - qu = 0, \tag{2}$$

причем пусть для определенности $u_1(x)$ обращается в нуль при $x = b$, а $u_2(x)$ обращается в нуль при $x = a$. Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$u(x) = C_1(x)\, u_1(x) + C_2(x)\, u_2(x), \tag{3}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — некоторые дифференцируемые (один раз) функции, подлежащие определению. Дифференцируя соотношение (3), находим:

$$u'(x) = C_1'u_1 + C_2'u_2 + C_1u_1' + C_2u_2'.$$

Как обычно, на функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ накладываем условие

$$C_1'u_1 + C_2'u_2 = 0, \qquad (4)$$

откуда

$$u' = C_1u_1' + C_2u_2'. \qquad (5)$$

Дифференцируя вторично и подставляя в (1), получаем:

$$C_1'pu_1' + C_2'pu_2' = \varphi. \qquad (6)$$

Из двух уравнений (4)—(6) можно найти величины C_1' и C_2'. Определитель этой системы

$$p(u_1'u_2 - u_2'u_1)$$

в действительности не зависит от x. В самом деле, по известной формуле Лиувилля вронскиан уравнения $Su = 0$ выражается по формуле

$$W(x) = W(a)e^{-\int\limits_a^x \frac{p'(t)}{p(t)}dt} = W(a)e^{-\ln\frac{p(x)}{p(a)}} = \frac{W(a)p(a)}{p(x)},$$

следовательно,

$$p(u_1'u_2 - u_2'u_1) = p(x)W(x) = W(a)p(a) = c_0 = \text{const},$$

что и требуется.

Решая систему (4)—(6), получаем:

$$C_1' = \frac{u_2\varphi}{c_0}, \quad C_2' = -\frac{u_1\varphi}{c_0}.$$

Первообразные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ мы возьмем в следующей форме:

$$C_1(x) = \frac{1}{c_0}\int\limits_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad C_2(x) = \frac{1}{c_0}\int\limits_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi;$$

при таком выборе первообразных искомое решение

$$u = C_1u_1 + C_2u_2 = \frac{u_1(x)}{c_0}\int\limits_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{u_2(x)}{c_0}\int\limits_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (7)$$

удовлетворяет обоим граничным условиям $u(a) = u(b) = 0$.

Итак, мы получили следующий результат: если для некоторой функции $u(x)$, входящей в область определения оператора S, мы имеем $Su=\psi$, то

$$u(x)=\frac{u_1(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{u_2(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi,$$

или, иначе говоря,

$$u(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\psi(\xi)\,d\xi,$$

где

$$K(x,\ \xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{c_0}u_1(x)u_2(\xi) & \text{при} \quad \xi<x,\\ \dfrac{1}{c_0}u_1(\xi)u_2(x) & \text{при} \quad \xi>x.\end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, что функция $K(x,\ \xi)$ непрерывна при $a\leqslant\xi\leqslant b$, $a\leqslant x\leqslant b$ и симметрична. Обозначим:

$$A\psi=\int_a^b K(x,\ \xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Итак, для любой функции $u(x)$ из области определения оператора S мы имеем $A(Su)=u$. Таким образом, первое из двух условий, описывавших свойство «A есть обратный оператор для S», выполнено. Проверим второе условие. Пусть $\psi(x)$ — произвольная непрерывная функция на отрезке $[a,\ b]$; покажем, что $u=A\psi$ принадлежит области определения оператора S и выполняется уравнение

$$SA\psi=\psi. \tag{10}$$

Подставляя в (9) выражение функции $K(x,\ s)$ из (8), мы получаем

$$u(x)=\frac{u_1(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{u_2(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Очевидно, что эта функция непрерывна и обращается в нуль при $x=a$ и $x=b$; кроме того, она имеет непрерывную производную

$$u'(x)=\frac{u_1'(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{u_1(x)}{c_0}u_2(x)\psi(x)+\frac{u_2'(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi-$$
$$-\frac{u_2(x)}{c_0}u_1(x)\psi(x)=\frac{u_1'(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi+\frac{u_2'(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Из (12) видно, что $u(x)$ имеет и вторую производную

$$u''(x) = \frac{u_1''(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{u_1'(x)}{c_0}u_2(x)\varphi(x) + \frac{u_2''(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi -$$

$$- \frac{u_2'(x)}{c_0}u_1(x)\varphi(x) = \frac{u_1''(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{u_2''(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c_0}W(x)\varphi(x). \quad (13)$$

Умножая (13) на $p(x)$, (12) на $p'(x)$, (11) на $-q(x)$ и складывая, находим

$$pu'' + p'u' - qu = \frac{pu_1'' + p'u_1' - qu_1}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{pu_2'' + p'u_2' - qu_2}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{c_0}pW\varphi(x) = \varphi(x),$$

или

$$Su = SA\varphi = \varphi,$$

что и требуется.

Тем самым проблема Штурма — Лиувилля в неособенном случае полностью решена.

Построенная нами функция $K(x, s)$ называется *функцией Грина* рассматриваемой краевой задачи.

Замечание. Функции Грина $K(x, s)$ можно придать определенный физический смысл. Истолкуем уравнение

$$(pu')' - qu = \varphi(x)$$

как условие равновесия неоднородной струны под действием постоянной силы с плотностью $\varphi(x)$. Искомая форма равновесия, как мы показали, записывается в форме интеграла

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ отлична от нуля только в интервале длины $2h$ с центром в точке ξ_0 и принимает в этом интервале постоянное значение $\frac{1}{2h}$. Такая функция $\varphi(x)$ есть плотность силы 1, равномерно распределенной в промежутке $[\xi_0 - h, \xi_0 + h]$. Форма равновесия струны в этом случае задается функцией

$$\frac{1}{2h}\int_{\xi_0-h}^{\xi_0+h} K(x, \xi)\,d\xi.$$

В пределе при $h \to 0$ это выражение переходит в $K(x, \xi_0)$. Можно сказать поэтому, что *функция $K(x, \xi_0)$ изображает форму равновесия струны, к которой приложена сила* 1, *сосредоточенная в одной точке* ξ_0.

И обратно, если при любом ξ известна форма равновесия $K(x, \xi)$ струны под действием единичной силы, сосредоточенной в точке ξ, то естественно считать, что форма равновесия струны под действием непрерывно распределенной силы с плотностью $\psi(x)$ задается интегралом

$$\int_a^b K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Эти соображения можно было бы положить также в основу решения задачи Штурма — Лиувилля[1]).

Подобная же связь часто имеет место и в других физических моделях. Пусть, например $K(x, \xi)$ означает температуру, установившуюся в теплопроводящем стержне, занимающем отрезок $[a, b]$, под влиянием источника тепла мощности 1, расположенного в точке ξ; тогда температура, которая установится в этом стержне под влиянием непрерывно распределенных источников с плотностью $\psi(\xi)$, выразится интегралом

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Именно по этой причине функции вида (9) и названы «истокообразно представимыми».

5. Рассмотрим особый случай задачи, когда имеется функция $u(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющая граничным условиям и уравнению $Su = 0$. Это означает, что оператор S обладает собственным значением $\lambda = 0$. Поскольку S может обладать лишь счетным множеством собственных значений (вспомним, что собственные функции симметричного оператора S, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны), имеется число λ_0, не являющееся собственным значением оператора S. Тогда все наши рассуждения применимы к оператору $S_1 = S - \lambda_0 E$, который имеет ту же структуру, что и S, но не имеет нулевого собственного значения. Оператор S_1 обладает обратным оператором A_1 — интегральным оператором с симметричным ядром — и вследствие этого имеет полную систему собственных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$; отсюда следует, что оператор S имеет полную систему собственных функций — именно тех же $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ с собственными значениями $\lambda_1 + \lambda_0, \ldots, \lambda_n + \lambda_0, \ldots$. Таким образом, проблема Штурма — Лиувилля имеет решение и в особенном случае.

Задача. Построить функции Грина $K(x, s)$ для дифференциального оператора

$$Su = u_{xx}$$

[1]) Ср. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. 5, § 14.

при граничных условиях: 1) $u(0)=u(\pi)=0$; 2) $u(0)=u'(\pi)=0$. Написать разложения этих функций в билинейные ряды (§ 4, задача 2).

Отв. $K_1(x, \xi)=\begin{cases} x(\pi-\xi) & \text{при } x\leqslant\xi, \\ (\pi-x)\xi & \text{при } x\geqslant\xi, \end{cases}$ $\qquad K_2(x, s)=\min(x, s)$,

$$K_1(x, s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ns}{n^2},$$

$$K_2(x, s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

§ 6. Неоднородные интегральные уравнения с симметричными ядрами

1. В этом параграфе мы будем рассматривать уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $K(x, s)$ даны, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Ядро $K(x, s)$ предполагается симметричным и квадратично интегрируемым.

В абстрактном пространстве аналогичное уравнение имеет вид

$$\varphi=f+A\varphi, \tag{2}$$

где A — симметричный вполне непрерывный оператор.

Допустим сначала, что решение φ уравнения (2) существует.

Проектируя левую и правую части равенства (2) на ось, определяемую собственным вектором e_k (так, что $Ae_k=\lambda_k e_k$), получаем:

$$\begin{aligned}(\varphi, e_k)&=(f, e_k)+(A\varphi, e_k)=(f, e_k)+(\varphi, Ae_k)=\\&=(f, e_k)+(\varphi, \lambda_k e_k)=(f, e_k)+\lambda_k(\varphi, e_k),\end{aligned} \tag{3}$$

откуда при $\lambda_k\neq 1$ находим:

$$(\varphi, e_k)=\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}. \tag{4}$$

Таким образом, если среди собственных значений оператора нет числа 1, все коэффициенты Фурье решения φ определены однозначно. Само решение в этом случае может быть лишь единственным, именно равным

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}e_k. \tag{5}$$

Проверим, что ряд (5) действительно дает решение уравнения (2). Заметим сначала, что этот ряд сходится по норме, так как квадраты его коэффициентов, очевидно, образуют сходящийся числовой ряд[1]). Обозначим сумму ряда (5) через φ. Тогда

$$A\varphi=\sum(f, e_k)\frac{\lambda_k e_k}{1-\lambda_k}=-\sum(f, e_k)e_k+\sum\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}e_k=\varphi-f,$$

так что вектор φ действительно удовлетворяет уравнению (2).

Рассмотрим теперь случай, когда среди собственных значений оператора A имеется число 1. Если $\lambda_k=1$ и $(f, e_k)\neq 0$, то равенство (3) ведет к противоречию и уравнение (2) не имеет решения. Если же при $\lambda_k=1$ мы имеем также $(f, e_k)=0$, то равенство (3) не ведет к противоречию, но и не накладывает никаких условий на неизвестный коэффициент (φ, e_k).

Мы утверждаем, что ряд (5) и в этом случае дает решение уравнения (2), причем под величинами $\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}$ при $\lambda_k=1$ можно понимать любые числа. Действительно, положим $\varphi=\varphi'+\varphi''$, где

$$\varphi'=\sum\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}e_k \qquad (\lambda_k\neq 1),$$

$$\varphi''=\sum\xi_k e_k \qquad (\lambda_k=1).$$

По условию вектор f ортогонален векторам e_k при $\lambda_k=1$ и поэтому разлагается в ряд по векторам e_k первой группы. Применяя к подпространству, порожденному векторами e_k первой группы, доказанную выше теорему, получаем:

$$A\varphi'=\varphi'-f.$$

Далее, используя условия $\lambda_k=1$, находим:

$$A\varphi''=\sum\xi_k\lambda_k e_k=\sum\xi_k e_k=\varphi''.$$

Отсюда

$$A\varphi=A\varphi'+A\varphi''=\varphi'-f+\varphi''=\varphi-f,$$

что и требовалось.

Мы получили следующий результат:

Теорема. *Если среди чисел λ_k нет чисел, равных 1, то уравнение*

$$\varphi=f+A\varphi \tag{6}$$

имеет решение, и притом единственное, для любого f. Если среди чисел λ_k имеются равные 1, то решение уравнения (6) существует

---

[1]) Величины $\frac{1}{|1-\lambda_k|}$ в совокупности ограничены, так как $\lambda_k\to 0$ (§ 3).

только для векторов f, ортогональных соответствующему собственному подпространству оператора A; при этом решение определено с точностью до произвольного слагаемого из этого подпространства.

Задачи. **1.** Решить уравнения:

а) $$\varphi_1(x) = 3\int_0^2 xs\varphi_1(s)\,ds + 3x - 2.$$

б) $$\varphi_2(x) = 3\int_0^1 xs\varphi_2(s)\,ds + 3x - 2.$$

в) $$\varphi_3(x) = \int_0^1 (x+s)\,\varphi_3(s)\,ds + 18x^2 - 9x - 4.$$

г) $$\varphi_4(x) = \int_0^\pi \cos(x+s)\,\varphi_4(s)\,ds + 1.$$

Отв. а) $\varphi_1(x) = \frac{9}{7}x - 2$, б) $\varphi_2(x) = Cx - 2$ (C произвольно),

в) $\varphi_3(x) = 18x^2 + 12x + 9$, г) $\varphi_4(x) = 1 - \dfrac{2\sin x}{1 - \frac{\pi}{2}}$.

Указание. Использовать метод § 4, п. 4.

2. Интегральное уравнение, в которое неизвестная функция $\varphi(x)$ входит только под знаком интеграла

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),$$

называют иногда *уравнением первого рода* (в отличие от уравнений второго рода, рассмотренных выше, где неизвестная функция фигурирует и отдельно). Показать, что уравнение первого рода (в случае квадратично интегрируемого симметричного ядра) разрешимо в пространстве $L_2(a, b)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n^2}$, где c_n — коэффициенты разложения $f(x)$ по собственным функциям ядра $K(x, s)$, а λ_n — соответствующие собственные значения.

2. Уравнение вида (1) возникает, например, при решении задачи о вынужденных колебаниях неоднородной струны, закрепленной на концах, под действием периодической силы $g(x, t) = g(x)\cos\omega t$.

Эти колебания описываются уравнением

$$(p(x)\,u_x)_x = \mu(x)u_{tt} + g(x)\cos\omega t, \tag{1}$$

где $p(x)$, $\mu(x)$ — физические характеристики струны, $g(x)$ — внешняя сила в расчете на единицу длины струны.

Будем искать частное решение уравнения (1) в форме произведения

$$v(x, t) = \varphi(x)\cos\omega t, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая дважды дифференцируемая функция, равная нулю при $x=a$ и $x=b$. Подставляя (2) в (1), получаем для функции $\varphi(x)$ уравнение

$$(p\varphi')' + \omega^2\mu\varphi = g(x). \tag{3}$$

Применяя к обеим частям уравнения оператор A, обратный оператору $S=(p\varphi')'$, получаем:

$$\varphi + \omega^2 A(\mu\varphi) = Ag.$$

Вспоминая, что A есть оператор Фредгольма с симметричным ядром $K(x, s)$, приходим к уравнению

$$\varphi(x) = f(x) - \omega^2\int_a^b K(x, s)\,\mu(s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{4}$$

где $f(x) = Ag(x) = \int_a^b K(x, s)\,g(s)\,ds$ есть известная функция. Если $\mu(s)\not\equiv 1$, то оператор Фредгольма в полученном уравнении (4) имеет несимметричное ядро. В этом случае заменой неизвестной функции $\varphi(x)\sqrt{\mu(x)} = \psi(x)$ уравнение приводится к уравнению с симметричным ядром $\omega^2 K(x, s)\sqrt{\mu(x)\mu(s)}$. Будем считать для простоты $\mu(s)\equiv 1$.

Условием разрешимости уравнения (4) при любой $f(x)$ является отсутствие у ядра $-\omega^2 K(x, s)$ собственного значения 1, или, что то же, отсутствие у ядра Штурма — Лиувилля S, обратного оператору A, собственного значения $\lambda = -\omega^2$. Заметим, что условием $\lambda_n = -\nu_n^2$ определялись частоты собственных колебаний струны (§ 5, п. 2). Таким образом, условием разрешимости уравнения (4) при любой функции $f(x)$ является несовпадение частоты ω ни с одной собственной частотой струны ν_n. Как говорят, внешняя сила не должна находиться в резонансе с собственными частотами струны.

Если же частота внешней силы ω совпадает с одной из собственных частот струны, то условием разрешимости задачи является ортогональность $f(x)$ соответствующей собственной функции $e_n(x)$, т. е. выполнение равенства $(f, e_k) = (Ag, e_k) = 0$. Так как оператор A симметричен, то это условие немедленно приводится к ортогональности функции $g(x)$ и собственной функции $e_k(x)$:

$$(Ag, e_k) = (g, Ae_k) = (g, \lambda_k e_k) = \lambda_k(g, e_k) = 0.$$

Полученное решение интегрального уравнения (4) позволяет построить по формуле (2) одно из частных решений уравнения (3). Любое решение уравнения (3) получается добавлением к найденному решению некоторого решения однородного уравнения

$$(pv_x)_x = \mu v_{tt}.$$

Пользуясь этими соображениями, можно решать для уравнения (1) и задачу с начальными условиями.

§ 7. Неоднородные интегральные уравнения с произвольными ядрами

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \qquad (1_1)$$

где ядро $K(x, s)$ квадратично интегрируемо, но, вообще говоря, не симметрично. Функция $f(x)$ предполагается принадлежащей пространству $L_2(a, b)$, и в этом же пространстве разыскивается неизвестная функция $\varphi(x)$.

При $f(x) \equiv 0$ получается однородное уравнение, в котором мы обозначим неизвестную функцию через $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0(x) - \int_a^b K(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds = 0. \qquad (1_2)$$

Оказывается естественным наряду с уравнениями (1_1), (1_2) рассматривать «союзные» уравнения с ядром $K(s, x)$, отличающимся от исходного ядра $K(x, s)$ транспозицией аргументов:

$$(\psi x) - \int_a^b K(s, x)\, \psi(s)\, ds = g(x), \qquad (1_3)$$

$$\psi_0(x) - \int_a^b K(s, x)\, \psi_0(s)\, ds = 0. \qquad (1_4)$$

Следующая основная теорема устанавливает связь между решениями уравнений (1_1), (1_2), (1_3), (1_4).

Заметим сначала, что логически возможны только два случая:

а) *уравнение* (1_2) *имеет единственное решение* $\varphi_0(x) \equiv 0$;

б) *уравнение* (1_2) *имеет решение* $\varphi_0(x) \not\equiv 0$.

Теорема 1 (Э. Фредгольм, 1903). *В случае* а) *уравнение* (1_1) *имеет решение при всякой* $f(x) \in L_2$, *и притом единственное*; *уравнение* (1_4) *имеет единственное решение* $\psi_0(x) \equiv 0$; *уравнение* (1_3) *имеет единственное решение при всякой* $g(x) \in L_2$.

В случае б) *число линейно независимых решений уравнения* (1_2) *конечно; обозначим его через* ν. *Столько же линейно независимых решений имеет и уравнение* (1_4). *Уравнение* (1_1) *имеет решение тогда и только тогда, когда функция* $f(x)$ *ортогональна всем* ν *решениям уравнения* (1_4); *это решение определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, являющегося решением уравнения* (1_2); *среди всех решений уравнения* (1_1) *имеется одно и только одно, которое ортогонально всем решениям уравнения* (1_2). *Аналогичные утверждения справедливы для решений уравнения* (1_3).

2. Рассмотрим вначале аналог теоремы 1 для случая линейной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j = b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2_1}$$

Напишем соответствующую однородную систему

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j^0 = 0 \tag{2_2}$$

и союзные системы

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = c_i, \tag{2_3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j^0 = 0, \tag{2_4}$$

матрица которых получается транспонированием матрицы систем (2_1) и (2_2). Выясним, как обстоит здесь дело с утверждениями, аналогичными утверждениям теоремы Фредгольма.

а) Предположим, что система (2_2) имеет только нулевое решение. Как известно из алгебры, это означает, что ранг матрицы $A = \| a_{ij} \|$ равен числу m, т. е. $\det A \neq 0$. Поэтому система (2_1) имеет решение при любых правых частях b_i. Система (2_4) имеет определитель $\det \|a_{ji}\| = \det \| a_{ij} \|$ и, следовательно, также отличный от нуля; поэтому система (2_3) обладает решением при любых правых частях c_i, и притом единственным; в частности, при $c_i = 0$ имеется лишь единственное решение $\eta_j^0 = \theta$. Таким образом, все утверждения, аналогичные утверждениям теоремы Фредгольма, в случае а) проверены.

б) Предположим, что система (2_2) имеет ненулевое решение ξ_j^0. Это означает, что ранг r матрицы A меньше числа m. Число ν линейно независимых решений системы (2_2) равно $m - r$. Поскольку при транспонировании матрицы ее ранг не меняется, то число линейно независимых решений системы (2_4) также равно $m - r = \nu$. Система (2_1) уже не при всяких правых частях b_i имеет решение. Чтобы выяснить, какие условия нужно наложить на b_i, чтобы система (2_1) имела решение, интерпретируем систему (2_1) геометрически, считая совокупность чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ вектором m-мерного евклидова пространства R_m. Существование решения системы (2_1) равносильно утверждению, что вектор $b = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)$ входит в линейную оболочку L векторов $a_1 = (a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{m1})$, $a_2 = (a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{m2})$, ..., $a_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{mm})$. Если Z является ортогональным дополнением этой оболочки, то сказанное выше можно выразить и так: система (2_1) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор b ортогонален подпространству Z. Условие того, что некоторый вектор η^0

входит в подпространство Z, записывается в форме системы уравнений (2_4). Отсюда следует, что система (2_1) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор b ортогонален любому решению системы (2_4). Далее, в рассматриваемом случае система (2_1) имеет целую совокупность решений, геометрический образ которой есть гиперплоскость, параллельная подпространству решений системы (2_2). Перпендикуляр, опущенный из начала координат на эту гиперплоскость, однозначно выделяет среди всех этих решений такое, которое ортогонально всем решениям системы (2_2). Тем самым мы проверили все утверждения, аналогичные утверждениям теоремы Фредгольма, и для случая б).

3. Переходя к интегральным уравнениям, рассмотрим вначале уравнения с вырожденным ядром:

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) q_k(s),$$

$$K(s, x) = \sum_{k=1}^{m} p_k(s) q_k(x).$$

Функции $p_k(x)$, равно как и $q_k(s)$, мы можем считать линейно независимыми. Уравнения (1_1) — (1_4) приобретают вид

$$\varphi(x) - \sum_{k=1}^{m} p_k(x) \int_a^b q_k(s) \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{3_1}$$

$$\varphi_0(x) - \sum_{k=1}^{m} p_k(x) \int_a^b q_k(s) \varphi_0(s)\, ds = 0, \tag{3_2}$$

$$\psi(x) - \sum_{k=1}^{m} q_k(x) \int_a^b p_k(s) \psi(s)\, ds = g(x), \tag{3_3}$$

$$\psi_0(x) - \sum_{k=1}^{m} q_k(x) \int_a^b p_k(s) \psi_0(s)\, ds = 0. \tag{3_4}$$

Эти уравнения могут быть записаны в абстрактной форме:

$$\varphi - \sum p_k(q_k, \varphi) = f, \tag{4_1}$$

$$\varphi_0 - \sum p_k(q_k, \varphi_0) = 0, \tag{4_2}$$

$$\psi - \sum q_k(p_k, \psi) = g, \tag{4_3}$$

$$\psi_0 - \sum q_k(p_k, \psi_0) = 0, \tag{4_4}$$

где векторы φ, f, p_k, q_k, ... принадлежат некоторому евклидову пространству E.

Операторы, входящие в эти уравнения, принадлежат к типу *вырожденных операторов*; так называются операторы, задаваемые формулами вида

$$B\varphi = \sum_{k=1}^{m} p_k (q_k, \varphi).$$

Очевидно, что вырожденный оператор B отображает все пространство в конечномерное подпространство, порожденное векторами $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Из уравнения (4_1) ясно, что если его решение существует, то оно имеет вид

$$\varphi = f + \sum \xi_k p_k, \tag{5_1}$$

где ξ_k — некоторые неизвестные коэффициенты. Аналогично решения остальных систем имеют вид

$$\varphi_0 = \sum \xi_k^0 p_k, \tag{5_2}$$

$$\psi = g + \sum \eta_k q_k, \tag{5_3}$$

$$\psi_0 = \sum \eta_k^0 q_k. \tag{5_4}$$

Подставляя в (4_1) выражение (5_1), получаем, что числа ξ_k должны удовлетворять системе

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k p_k - \sum_{k=1}^{m} p_k (q_k, f) - \sum_{k=1}^{m} p_k \left(q_k, \sum_{i=1}^{m} \xi_i p_i \right) = 0$$

или (так как векторы p_k линейно независимы)

$$\xi_k - \sum_{i=1}^{m} \xi_i (p_i, q_k) = (f, q_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Обозначая $(p_i, q_k) = a_{ik}$ $(i \neq k)$, $1 - (p_i, q_i) = a_{ii}$, $(f, q_k) = b_k$, мы приводим эту систему к виду

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6_1}$$

Аналогично уравнения (4_2) — (4_4) приводятся соответственно к системам вида

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_j^0 = 0, \tag{6_2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \eta_j = c_i \tag{6_3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \eta_j^0 = 0, \tag{6_4}$$

где $c_i = (g, p_i)$. Если имеется решение у какой-либо из систем (6_1) — (6_4), то по соответствующей формуле из серии (5_1) — (5_4) можно будет построить и решение соответствующего уравнения из серии (4_1) — (4_4) или, что то же, соответствующего уравнения из серии (3_3) — (3_4).

Но для систем (6_1) — (6_6), как мы видели, справедливы все утверждения, аналогичные утверждениям теоремы Фредгольма. Поэтому они будут справедливы и для уравнений (3_1) — (3_4). Следует только проверить, что скалярное произведение, например, вектора f и решения ψ_0 уравнения (4_4) в смысле метрики абстрактного евклидова пространства E совпадает со скалярным произведением вектора b с координатами $b_k = (f, q_k)$ и вектора $\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_m^0)$ конечномерного евклидова пространства R_m. Эта проверка проводится простой выкладкой:

$$(f, \psi_0) = \left(f, \sum_{k=1}^{m} \eta_k^0 q_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k^0 (f, q_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \eta_k^0 = (b, \eta^0).$$

Таким образом, выполнение теоремы Фредгольма в случае вырожденного ядра $K(x, s)$ нами установлено.

4. Переходим к общему случаю. Пусть $K(x, s)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом в области $a \leqslant x, s \leqslant b$. Как было указано в § 4, интегральный оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

может быть представлен как предел (по норме) интегральных операторов

$$A_n\varphi = \int_a^b K_n(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

с вырожденными ядрами $K_n(x, s)$. Очевидно, что одновременно с этим сопряженный интегральный оператор

$$A^*\psi = \int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds$$

представляется как предел интегральных операторов

$$A_n^*\psi = \int_a^b K_n(s, x)\,\psi(s)\,ds,$$

ядра которых также вырождены.

Сопряженный интегральный оператор A^* связан с оператором A равенством

$$(A^*p, q) = (p, Aq) \qquad (7)$$

для любых векторов p, q. Для доказательства заметим, что

$$(A^*p, q) = \int_a^b \left\{ \int_a^b (K(s, x) p(s)\, ds \right\} q(x)\, dx,$$

$$(p, Aq) = \int_a^b p(x) \left\{ \int_a^b K(x, s) q(s)\, ds \right\} dx.$$

Первый из этих интегралов переходит во второй при перемене ролями переменных x и s и перестановке порядка интегрирования, что законно в общем случае в силу теоремы Фубини.

Уравнения (1_1) — (1_4) запишем в абстрактной форме, считая векторы $\varphi, f, \ldots$ элементами некоторого евклидова пространства E:

$$\varphi - A\varphi = f, \tag{8_1}$$

$$\varphi_0 - A\varphi_0 = 0, \tag{8_2}$$

$$\psi - A^*\psi = g, \tag{8_3}$$

$$\psi_0 - A^*\psi_0 = 0. \tag{8_4}$$

Решения уравнений типа (8_2) суть собственные векторы соответствующих операторов с собственным значением 1. Для краткости мы будем их называть просто собственными векторами. Операторы, отвечающие вырожденным ядрам $K_n(x, s)$ и $K_n(s, x)$, обозначим соответственно через A_n и $\overset{*}{A}_n$. Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi_n^0 - A_n\varphi_n^0 = 0. \tag{9_2}$$

Лемма 1. *Если уравнение* (9_2) *имеет при каждом* n *решение* $\varphi^0{}_n \neq 0$, *то и уравнение* (8_2) *имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Решение φ_n^0 уравнения (9_2) мы всегда можем считать нормированным, $\|\varphi_n^0\| = 1$. Так как оператор A вполне непрерывен, то последовательность $A\varphi_n^0$ содержит сходящуюся подпоследовательность; отбрасывая лишние номера и изменяя нумерацию, можно считать, что сходится сама последовательность $A\varphi_n^0$. Тогда $A_n\varphi_n^0$ также сходится, так как

$$A_n\varphi_n^0 = (A_n - A)\varphi_n^0 + A\varphi_n^0$$

и

$$\|(A_n - A)\varphi_n^0\| \leqslant \|A_n - A\|\ \|\varphi_n^0\| \to 0.$$

Вместе с $A_n\varphi_n^0$ сходится последовательность $\varphi_n^0 = A_n\varphi_n^0$; положим $\varphi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^0$. Вектор φ_0 вместе с φ_n^0 имеет норму 1 и

$$A\varphi_0 = \lim_{n\to\infty} A\varphi_n^0 = \lim_{n\to\infty} A_n\varphi_n^0 = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^0 = \varphi_0;$$

таким образом, уравнение (8_2) действительно обладает ненулевым решением φ_0.

Лемма 2. *Если уравнение* (9_2) *имеет при каждом* n *некоторое число* k *линейно независимых решений* $\varphi_{1n}^0, \varphi_{2n}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0$, *то и уравнение* (8_2) *имеет* k *линейно независимых решений* $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_k^0$.

Доказательство. Решения $\varphi_{1n}^0, \varphi_{2n}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0$ уравнения (9_2) мы можем считать ортогональными и нормированными. Образуем последовательности

$$\begin{array}{l} \varphi_{11}^0, \varphi_{12}^0, \ldots, \varphi_{1n}^0, \ldots, \\ \varphi_{21}^0, \varphi_{22}^0, \ldots, \varphi_{2n}^0, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{k1}^0, \varphi_{k2}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0, \ldots \end{array}$$

Каждая из них, как было доказано в лемме 1, содержит сходящуюся подпоследовательность. Отбрасывая лишние номера и изменяя нумерацию, можно считать, что все эти последовательности сходятся и их пределы $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_k^0$ суть ненулевые решения уравнения (8_2). Кроме того, поскольку функции $\varphi_{1n}^0, \varphi_{2n}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0$ при каждом n были ортогональны, то их пределы $\varphi_1^0, \varphi_2^0 \ldots, \varphi_k^0$ также ортогональны, а следовательно, и линейно независимы, что и требовалось доказать.

Совокупность всех решений уравнения (8_2) есть подпространство, которое мы обозначим через Φ_0. В силу леммы 6 § 3 подпространство Φ_0 конечномерно. Обозначим его размерность через ν.

Лемма 3. *Если вполне непрерывный оператор* A *может быть представлен как предел последовательности вырожденных операторов* A_n, *то он может быть представлен и как предел последовательности вырожденных операторов* $\tilde{A}_n$, *у каждого из которых пространство собственных векторов совпадает с подпространством* Φ_0.

Доказательство. Пусть $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_\nu^0$ — ортогональная нормированная система в подпространстве Φ_0. Обозначим

$$h_i^n = \varphi_i^0 - A_n\varphi_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Определим оператор $\tilde{A}_n$ формулой

$$\tilde{A}_n\varphi = A_n\varphi + \sum_{i=1}^{\nu} h_i^n(\varphi, \varphi_i^0).$$

Очевидно, что $\tilde{A}_n$ — вырожденный оператор вместе с оператором A_n. Ясно, что $\|\tilde{A}_n - A_n\| \to 0$, поскольку $h_i^n \to 0$; отсюда следует, что $\|\tilde{A}_n - A\| \to 0$. Покажем, что векторы φ_j^0 являются собственными векторами оператора $\tilde{A}_n$. Действительно,

$$\tilde{A}_n\varphi_j^0 = A_n\varphi_j^0 + \sum_{i=1}^{\nu} (\varphi_i^0 - A_n\varphi_i^0)(\varphi_j^0, \varphi_i^0) =$$
$$= A_n\varphi_j^0 + \varphi_j^0 - A_n\varphi_j^0 = \varphi_j^0,$$

что и требуется.

Операторы $\tilde{A}_n$ могут, вообще говоря, иметь и более чем ν линейно независимых собственных векторов, но мы утверждаем, что для бесконечного числа номеров этого быть не может. Действительно, в противном случае, рассматривая лишь те значения n, для которых операторы $\tilde{A}_n$ имеют по крайней мере $\nu+1$ линейно независимых собственных векторов, и применяя лемму 2, мы получили бы, что и оператор A имеет по крайней мере $\nu+1$ линейно независимых собственных векторов, что противоречит предположению.

Итак, мы получаем, что лишь конечное число операторов $\tilde{A}_n$ может иметь больше чем ν линейно независимых собственных векторов. Отбрасывая лишние номера и изменяя соответственно нумерацию, мы получаем последовательность операторов $\tilde{A}_n$, удовлетворяющую условиям леммы 3.

Теперь мы можем доказать, что *подпространство* Ψ_0 *решений уравнения* (8_4) *имеет ту же размерность, что и подпространство* Φ_0.

Рассмотрим последовательность вырожденных операторов $\tilde{A}_n$, указанную в лемме 3, и последовательность сопряженных операторов $\tilde{A}_n^*$. Так как для вырожденных операторов альтернатива Фредгольма верна, то каждый из операторов $\tilde{A}_n^*$ имеет пространство собственных векторов размерности ровно ν. Поскольку $\tilde{A}_n \to A$, мы имеем также $\tilde{A}_n^* \to A^*$. В силу леммы 2 существует система ν взаимно ортогональных и нормированных решений уравнения $A^*\psi_0 = \psi_0$. Более чем ν таких решений быть не может, так как, используя $\nu+1$ таких решений и проводя рассуждения в обратном порядке от оператора A^* к оператору A, мы получили бы $\nu+1$ линейно независимых решений у уравнения $A\varphi_0 = \varphi_0$, что по предположению исключено.

Итак, число линейно независимых решений у уравнений $A\varphi_0 = \varphi_0$ и $A^*\psi_0 = \psi_0$ всегда одинаково.

Теперь займемся вопросом о существовании решений у уравнения (8_1). Допустим, что вектор φ есть решение этого уравнения, и ψ_0 — решение уравнения (8_4). Умножая (8_1) на ψ_0 и используя (7), находим:

$$(\varphi, \psi_0) - (A\varphi, \psi_0) = (f, \psi_0).$$

Но, используя уравнение (8_4), мы имеем:

$$(\varphi, \psi_0) - (\varphi, A^*\psi_0) = (\varphi, \psi_0) - (\varphi, \psi_0) = 0,$$

так что для любого решения ψ_0 уравнения (8_4)

$$(f, \psi_0) = 0.$$

Таким образом, уравнение (8_1) может иметь решение только при условии, что вектор f ортогонален всем решениям уравнения (8_4). Покажем, что при выполнении этого условия решение уравнения (8_1) всегда существует.

Рассмотрим последовательность вырожденных операторов $\tilde{A}_n \to A$ с тем же подпространством Φ_0 собственных векторов, что и у оператора A, размерности ν. Существование такой последовательности операторов было установлено в лемме 3.

Каждый из операторов $\tilde{A}_n^*$ обладает тем же количеством ν ортогональных нормированных собственных векторов ψ_i^n, поскольку альтернатива справедлива для вырожденных операторов. В силу леммы 2 можно считать, что эти векторы стремятся при $n \to \infty$ соответственно к ортогональным и нормированным собственным векторам ψ_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ оператора A^*. Рассмотрим уравнение (8_1) с правой частью $f_n = f - \sum_{i=1}^{\nu} (f, \psi_i^n)\psi_i^n$. Вектор f_n ортогонален всем векторам ψ_i^n (f_n есть перпендикуляр, опущенный из конца вектора f на подпространство $L\{\psi_1^n, \psi_2^n, \ldots, \psi_\nu^n\}$), поэтому, применяя альтернативу для вырожденного оператора $\tilde{A}_n$, мы устанавливаем существование вектора φ_n, удовлетворяющего уравнению

$$\varphi_n - \tilde{A}_n\varphi_n = f_n.$$

Векторы f_n при $n \to \infty$ сходятся к вектору f, поскольку $\psi_i^n \to \psi_i$, $(f, \psi_i^0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Вектор φ_n можно выбрать так, чтобы он при любом n был ортогонален подпространству собственных векторов оператора $\tilde{A}_n$, т. е. подпространству Φ_0.

Покажем, что получающиеся таким образом векторы φ_n ограничены по норме. Допустим обратное: пусть нормы векторов φ_n не ограничены; тогда, отбрасывая излишние векторы, можно считать, что $\|\varphi_n\| \to \infty$. Полагая $\tilde{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$, мы получаем последовательность нормированных векторов, удовлетворяющих уравнению

$$\tilde{\varphi}_n - \tilde{A}_n\tilde{\varphi}_n = \frac{f}{\|\varphi_n\|}. \qquad (10)$$

Правая часть этого равенства стремится при $n \to \infty$ к нулю. Последовательность векторов $\tilde{A}_n\tilde{\varphi}_n$ по тем же соображениям, что и выше, можно считать сходящейся; вместе с ней будет сходящейся и последовательность векторов $\tilde{\varphi}_n$. Пусть $\varphi_0 = \lim \tilde{\varphi}_n$; так как $\|\tilde{\varphi}_n\| = 1$, то и

$\|\varphi_0\|=1$. Переходя к пределу в уравнении (10), получаем, что вектор φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\varphi_0 - A\varphi_0 = 0,$$

откуда следует, что вектор φ_0 входит в подпространство Φ_0. С другой стороны, поскольку все векторы $\tilde{\varphi}_n$ были ортогональны подпространству Φ_0, предельный вектор φ_0 также ортогонален Φ_0. Полученное противоречие показывает, что векторы φ_n в действительности ограничены по норме.

Так как φ_n ограничены, то последовательность $A\varphi_n$, как и раньше, можно считать сходящейся; вместе с ней будет сходящейся и последовательность $\tilde{A}_n\varphi_n = (\tilde{A}_n - A)\varphi_n + A\varphi_n$, а также и последовательность $\varphi_n = f_n + \tilde{A}_n\varphi_n$. Обозначим предел последовательности φ_n через φ; переходя к пределу в равенстве

$$\varphi_n = f_n + (\tilde{A}_n - A_n)\varphi_n + A\varphi_n,$$

получаем:

$$\varphi = f + A\varphi,$$

т. е. вектор φ есть решение уравнения (8_1).

Итак, *если правая часть f уравнения* (8_1) *ортогональна любому решению уравнения* (8_4), *то уравнение* (8_1) *заведомо разрешимо.* Решение φ при этом определяется с точностью до любого решения φ_0 однородного уравнения (8_2), и, поскольку совокупность всех решений (8_2) имеет конечное число измерений, оно может быть выбрано ортогональным ко всей этой совокупности; такой выбор выделяет уже единственное решени· уравнения (8_1).

Мы проверили все утверждения теоремы в случае б).

В случае а) уравнение (8_2) не имеет ненулевых решений, подпространство Φ_0 содержит только нуль-вектор. По доказанному подпространство Ψ_0 решений уравнения (8_4) в этом случае также содержит только нуль-вектор. Уравнение (8_1), как мы установили, имеет решение для любого f, ортогонального подпространству Ψ_0; в данном случае этому условию удовлетворяет любой вектор f и, следовательно, уравнение (8_1) имеет решение для любого вектора f. Это решение единственно; действительно, разность любых двух решений уравнения (8_1) есть решение уравнения (8_2) и, следовательно, по предположению равно нулю.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Заметим, что если ядро $K(x, s)$ непрерывно и свободный член $f(x)$ также непрерывен, то, как вытекает из заключительного замечания к п. 3 § 4, решение интегрального уравнения (1) есть непрерывная функция.

Приведем важное следствие из теоремы Фредгольма:

Альтернатива Фредгольма. *В условиях п.* 1 *возможно одно из двух: или полное интегральное уравнение* (1_1) *имеет решение при любой правой части* $f(x)\in L_2(a, b)$, *или однородное уравнение* (1_2) *имеет ненулевое решение.*

Задачи. 1. Если A — оператор в гильбертовом пространстве H, отображающий пространство H на конечномерное подпространство L, то A^* отображает H также на конечномерное подпространство той же размерности, что и L.

Указание. Ортогональное дополнение к L оператором A^* переводится в нуль. Поэтому $A^*H=A^*L$ и имеет размерность не выше размерности L. Из симметрии построения следует, что размерность уменьшиться не может.

2. Доказать, что для любого вполне непрерывного оператора A в гильбертовом пространстве H можно найти ортогональное разложение $H=H_1+H_2$ так, что H_1 конечно- или счетномерно, $AH_1\subset H_1$, $AH_2=0$.

Указание. Показать, что в замыкании подпространства AH не может быть несчетного множества ортогональных векторов.

3. Доказать, что всякий вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H есть предел (по норме) вырожденных операторов.

Указание. В силу задачи 2, можно считать, что $H=l_2$. Если $Ax=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)\in l_2$, положить $A_nx=(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$. Использовать задачу 3 к § 1, п. 1.

4. Доказать, что сопряженный оператор к вполне непрерывному также является вполне непрерывным оператором.

Указание. Использовать задачи 1 и 3.

5. Показать, что теорема Фредгольма остается справедливой, если фигурирующий в ней интегральный оператор Фредгольма заменить на любой вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве.

Указание. Использовать задачи 1 — 4.

§ 8. Приложения к теории потенциала

1. Мы будем предполагать известными следующие факты из теории дифференциальных уравнений[1]):

а) Функция $u(x, y)$, удовлетворяющая в области G на плоскости (x, y) уравнению

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

называется гармонической функцией. Примером служит функция

$$\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}; \tag{2}$$

зависящая от параметров ξ, η и гармоническая всюду, где подкоренное выражение отлично от нуля (т. е. всюду, кроме точки $x=\xi$, $y=\eta$). Полагая $(x, y)=P$, $(\xi, \eta)=Q$, будем функцию (1) обозначать короче:

$$\ln\frac{1}{r(P, Q)}. \tag{3}$$

---

[1]) См., например, И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1953, гл. 3.

Частные производные функции (1) также являются гармоническими функциями при $P \neq Q$.

б) Пусть C — некоторый простой замкнутый гладкий контур, разделяющий плоскость на две области: внутреннюю G_i и внешнюю G_e. Рассмотрим функцию v, непрерывную и дифференцируемую в области G_i и в области G_e (возможно, терпящую разрыв при переходе через точки контура C). Через v_i обозначаются предельные значения функции v при подходе к контуру C изнутри и через v_e — ее предельные значения при подходе к контуру C извне. Аналогичный смысл имеют нормальные производные $\frac{\partial v_i}{\partial n}$ и $\frac{\partial v_e}{\partial n}$ (считается, что нормаль имеет положительное направление во внешнюю сторону).

Если v — гармоническая функция, то из $v_i \equiv 0$ следует $v(P) \equiv 0$ в G_i и из $\frac{\partial v_i}{\partial n} \equiv 0$ следует $v(P) \equiv \text{const}$ в G_i; если, кроме того, v ограничена при $P \longrightarrow \infty$, то из $v_e \equiv 0$ следует $v(P) \equiv 0$ в G_e и из $\frac{\partial v_e}{\partial n} \equiv 0$ следует $v(P) \equiv \text{const}$ в G_e.

в) В дальнейшем точка Q всегда будет находиться на контуре C. Обозначим через $l = l_Q$ координату точки контура, например дугу, отсчитываемую от фиксированной начальной точки Q_0 до точки Q, и через ω — угол луча PQ с лучом PQ_0. Пусть задана непрерывная функция $\rho(l)$. Тогда функция

$$v(P) = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl \tag{4}$$

[потенциал двойного слоя с плотностью $\rho(l)$] есть функция, гармоническая в обеих областях G_i и G_e.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} = -\frac{1}{r(P, Q)} \frac{\partial r(P, Q)}{\partial n_Q} = -\frac{1}{r(P, Q)} \cos(\widehat{\overline{PQ}, \overline{n}}) \tag{4'}$$

и в то же время

$$dl_Q = r(P, Q)\, d\omega \frac{1}{\cos(\overline{PQ}, \overline{n})},$$

мы получаем новое выражение потенциала в форме

$$v(P) = -\int_C \rho(l)\, d\omega. \tag{4''}$$

Мы видим, в частности, что интеграл (4) существует и в точках P на самом контуре C. Если $\rho(l) \equiv 1$, то функция $v(P)$ приобретает простой геометрический смысл: она дает полное приращение угла, описываемого лучом PQ, когда Q пробегает в отрицательном направлении контур C и, следовательно,

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl = -2\pi, \quad \text{если } P \in G_i, \tag{5}$$

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl = -\pi, \quad \text{если } P \in C, \tag{6}$$

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl = 0, \quad \text{если } P \in G_e. \tag{7}$$

Таким образом, функция $v(P)$ имеет в данном случае в области G_i значения на π меньшие, чем на границе, а в области G_e — на π большие, чем на границе. В общем случае при произвольной непрерывной плотности $\rho(Q)$ имеют место формулы

$$v_i(Q) = v(Q) - \pi\rho(Q), \tag{8}$$

$$v_e(Q) = v(Q) + \pi\rho(Q), \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_i(Q)}{\partial n} = \frac{\partial v_e(Q)}{\partial n}. \tag{10}$$

Функция

$$u(P) = \int_C \rho(l) \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl \tag{11}$$

[потенциал простого слоя с плотностью $\rho(l)$] также гармоническая в обеих областях G_i и G_e, и имеют место формулы

$$u_i(Q) = u_e(Q) = u(Q), \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_i(P)}{\partial n} = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl + \pi\rho(P) \qquad (P \in C), \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_e(P)}{\partial n} = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl - \pi\rho(P) \qquad (P \in C). \tag{14}$$

Заметим, что потенциалы $v(P)$ и $u(P)$, обладая вблизи границы непрерывной ($v(P)$) или кусочно-непрерывной ($u(P)$) нормальной производной, могут не обладать сколько-нибудь хорошими (даже, например, квадратично интегрируемыми) производными по другим направлениям.

2. Ставятся следующие задачи:

1) Первая краевая задача (задача Дирихле): найти функцию $v(P)$, гармоническую в области G_i (внутренняя задача) или в G_e (внешняя задача) и имеющую предписанные заранее предельные значения $f(Q)$ на контуре C.

2) Вторая краевая задача (задача Неймана): найти функцию $u(P)$, гармоническую в области G_i (внутренняя задача) или в G_e (внешняя задача), нормальная производная которой имеет предписанные заранее предельные значения $g(Q)$ на контуре C.

Последние утверждения п. б) можно истолковать как теоремы единственности для решений этих задач. Именно, *внутренняя задача Дирихле может иметь лишь единственное решение, внутренняя задача Неймана — единственное решение с точностью до аддитивной постоянной; внешняя задача Дирихле может иметь лишь единственное решение в классе ограниченных функций, внешняя задача Неймана — в том же классе единственное решение с точностью до аддитивной постоянной.*

Далее приводится решение всех этих задач, предложенное Фредгольмом, для случая контура C, имеющего непрерывную кривизну.

3. Решение внутренней задачи Дирихле ищется в форме потенциала двойного слоя

$$v(P) = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl \tag{15}$$

с неизвестной непрерывной функцией $\rho(l)$. В силу равенства (8) и условия задачи (координата точки P на контуре C обозначена через x)

$$v_i(P) \equiv v_i(x) = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)} dl - \pi\rho(x) = f(x),$$

так что функция $\rho(x)$ должна быть определена из интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с ядром

$$K(x, l) = \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)} = -\frac{d\omega}{\partial l}.$$

Эта функция непрерывна при всех P и Q на контуре C; из (4″) следует, что при $P \to Q$ она имеет своим пределом величину кривизны контура C в точке Q с обратным знаком.

В силу альтернативы Фредгольма, установленной в § 7, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$\int_C \rho(l) K(x, l)\, dl - \pi\rho(x) = 0$$

имеет только нулевое решение. Допустим обратное: пусть $\rho_0(l)$ — ненулевое решение этого однородного уравнения. Тогда для гармонической функции

$$v_0(P) = \int_C K(x, l)\, \rho_0(l)\, dl = -\int_C \rho_0(l)\, d\omega$$

получаем

$$v_{i0}(P) = v_0(P) - \pi\rho_0(P) \equiv 0,$$

откуда в силу замечания в) $v_0(P) \equiv 0$ в области G_i. Но тогда и $\dfrac{\partial v_{i0}(P)}{\partial n} \equiv 0$. В силу (10) также $\dfrac{\partial v_{e0}(P)}{\partial n} = 0$. Так как функция $v_0(P)$, очевидно, при P, стремящемся к бесконечности, стремится к нулю, то в силу замечания б) мы получаем, что $v_0(P) \equiv 0$ в G_e. Отсюда $v_{e0}(P) = 0$. Из формул (8) и (9) мы теперь получаем, что и $\rho_0(P) = 0$, что и требовалось.

Применяя результаты § 7, получаем, что интегральное уравнение (15) имеет решение при всякой функции $f(P)$. Если $f(P)$ — непрерывная функция, то в силу непрерывности ядра $K(x, s)$ и заключительного замечания к п. 3 § 4 решение $\rho(P)$ будет также непрерывной функцией. Следовательно, для этого решения $\rho(P)$ формулы (8) — (10) будут справедливы, а вместе с ними будет законно и сведение задачи Дирихле к потенциалу (15).

Итак, *внутренняя задача Дирихле имеет решение при любых непрерывных граничных значениях $f(P)$.*

Решение внешней задачи Дирихле ищется в той же форме (15). Здесь мы получаем уравнение

$$v_e(P) = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)} dl + \pi\rho(P) = f(P). \tag{16}$$

Но на этот раз соответствующее однородное уравнение

$$\int \rho(l) K(x, l)\, dl + \pi\rho(x) = 0$$

уже имеет ненулевое решение $\rho(x) \equiv 1$ (см. формулу (6)). Это решение единственное (с точностью до числового множителя). Действительно, проводя рассуждения по вышеописанной схеме, заменяя при этом всюду индекс i на e и e на i, мы доходим до утверждения $\frac{\partial v_i(P)}{\partial n} = 0$, откуда в силу б) мы получаем $v(P) = \text{const}$ в G_i. Из формул (8) и (9) получаем, что и $\rho(P) = \text{const}$.

Поэтому в силу альтернативы Фредгольма уравнение (16) имеет решение не для всех f, а только для тех, которые ортогональны некоторой фиксированной функции $\rho_0(P)$ — единственному с точностью до множителя решению сопряженного уравнения.

Но мы можем добиться возможности решения задачи и при любой граничной функции f, если, кроме решений, определяемых формулой (15) и стремящихся, как мы видели, на бесконечности к нулю, будем рассматривать и такие, которые получаются из этих решений добавлением постоянной. В самом деле, если f — любая функция, заданная на границе, то всегда можно найти постоянную c так, чтобы разность $f - c$ была ортогональна функции ρ_0. Тогда по доказанному существует решение $v(P)$ внешней задачи с граничными значениями $f - c$. С другой стороны, $v_0(P) \equiv c$ есть решение внешней задачи с граничными значениями, равными c. Отсюда следует, что $v(P) + v_0(P)$ есть решение внешней задачи Дирихле с граничными значениями f. Таким образом, *внешняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной граничной функции f.*

4. Решение внутренней задачи Неймана ищется в форме потенциала простого слоя

$$u(P) = \int_C \rho(l) \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl \tag{17}$$

с неизвестной функцией $\rho(l)$. В силу равенства (13) и условия задачи

$$\frac{\partial u_i(P)}{\partial n} = \int \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl + \pi\rho(P) = g(P), \tag{18}$$

так что для функции $\rho(P)$ снова получается интегральное уравнение Фредгольма с ядром

$$K_1(x, l) = \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)},$$

транспонированным относительно ядра $K(x, l)$, фигурировавшего в задаче Дирихле. По доказанному однородное сопряженное уравнение

$$\int \rho(l) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl + \pi\rho(x) = 0$$

имеет только постоянное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение (18) имеет решение тогда и только тогда, когда функция $\rho(x)$ ортогональна 1, т. е.

$$\int_C \rho(l)\, dl = 0. \tag{19}$$

Но известно, что для любой гармонической функции $u(P)$ в области G_i — имеет она вид (11) или не имеет — справедливо равенство

$$\int\limits_C \frac{\partial u(l)}{\partial n}\, dl = 0,$$

если только функция $\dfrac{\partial u_i}{\partial n}$ существует и непрерывна.

Мы видим, что условие (19) *оказывается необходимым и достаточным для разрешимости внутренней задачи Неймана.*

Наконец, решение внешней задачи Неймана, которое ищется в той же форме (17), приводит к интегральному уравнению

$$\frac{\partial u_e(P)}{\partial n} = \int\limits_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl - \pi\rho(P) = g(P).$$

Однородное сопряженное уравнение

$$\int\limits_C \rho(l) K(x, l)\, dl - \pi\rho(x) = 0$$

по доказанному не имеет ненулевых решений. Поэтому *внешняя задача Неймана имеет решение при любой непрерывной граничной функции $g(P)$.*

Однако это решение, задаваемое потенциалом (17), в общем случае имеет логарифмический рост на бесконечности и поэтому не попадает в класс единственности, указанный в п. б). Можно показать, что потенциал (17) на бесконечности ограничен (и, более того, стремится к нулю) тогда и только тогда, когда выполняется условие (19). Таким образом, *условие* (19) *является необходимым и достаточным для разрешимости внешней задачи Неймана в классе ограниченных функций.*

§ 9. Интегральные уравнения с комплексным параметром

1. Комплексное гильбертово пространство. В анализе часто приходится рассматривать функции, принимающие и комплексные значения; естественно пытаться и из таких функций устраивать пространство со скалярным произведением. Но только аксиомы а) — г) п. 1 § 1 для нового скалярного произведения сохранить не удается. Действительно, выражение (ix, ix) по аксиоме г) должно быть положительным, а по аксиомам а) и в) оно должно быть равным $-(x, x)$, т. е. отрицательным.

Мы сформулируем аксиому а) в комплексном пространстве следующим образом:

а′) $(y, x) = \overline{(x, y)}$, где черта означает знак комплексного сопряжения.

Тогда можно сохранить остальные аксиомы:

б) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;

в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого комплексного λ;

г) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Из аксиомы а′) и аксиомы в) следует новое правило вынесения комплексного числового множителя за знак скалярного произведения со второго места:

$$(x, \lambda y)=\overline{(\lambda y, x)}=\overline{\lambda}\overline{(y, x)}=\overline{\lambda}\,\overline{(y, x)}=\overline{\lambda}(x, y),$$

т. е. *со второго места числовой множитель выносится с комплексным сопряжением.*

Примером комплексного гильбертова пространства является пространство $L_2(a, b)$, состоящее из *комплексных* функций $\varphi(x)$ с суммируемым квадратом модуля; скалярное произведение вводится по формуле

$$(\varphi, \psi)=\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Другой пример — пространство l_2 из *комплексных* последовательностей $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ со сходящимся рядом квадратов модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty.$$

Скалярное произведение элементов $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ вводится по формуле

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n.$$

Все основные результаты этой главы переносятся на случай комплексных гильбертовых пространств с более или менее очевидными изменениями в формулировках и выводах. Так, при выводе неравенства Коши — Буняковского (§ 1, п. 3) мы по-прежнему исходим из неравенства

$$(\lambda x-y, \lambda x-y)\geqslant 0,$$

справедливого при любом комплексном λ. Раскрывая левую часть, получаем

$$\lambda\overline{\lambda}(x, x)-\lambda(x, y)-\overline{\lambda}(y, x)+(y, y)\geqslant 0.$$

Положим $\lambda=te^{-i\arg(x, y)}$ (t вещественно), тогда это неравенство преобразуется к виду

$$t^2(x, x)-2t|(x, y)|+(y, y)\geqslant 0,$$

откуда, как и ранее,

$$|(x, y)|\leqslant|x||y|.$$

Если имеется вещественное гильбертово пространство H, то всегда можно построить «комплексное расширение» $\overline{H}$ пространства H из формальных сумм $x+iy$, где $x \in H$, $y \in H$. В пространстве $\overline{H}$ естественно вводятся линейные операции сложения и умножения на комплексные числа; введем также и скалярное произведение по формуле

$$(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)=[(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)]+i\,[(y_1,\ x_2)-(x_1,\ y_2)].$$

Легко проверить, что это скалярное произведение удовлетворяет условиям а'), б), в) и г). В частности,

$$(x+iy,\ x+iy)=(x,\ x)+(y,\ y).$$

Пространство $\overline{H}$ содержит пространство H в качестве подпространства (с умножением только на вещественные числа!) и с тем же скалярным произведением.

Введенные нами комплексные пространства $L_2(a,\ b)$ и l_2 являются, очевидно, комплексными расширениями рассмотренных ранее вещественных пространств $L_2(a,\ b)$ и l_2.

Всякая полная ортогональная система $e_1,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots$ в пространстве H будет полной ортогональной системой и в пространстве $\overline{H}$: если $(x+iy,\ e_n)=0$ при любом n, то при любом n и

$$(x,\ e_n)=0,\quad (y,\ e_n)=0,$$

откуда $x=0$, $y=0$, $x+iy=0$.

Существуют, конечно, и новые ортонормальные системы. Так, в пространстве $L_2(-\pi,\ \pi)$ система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ служит примером полной ортонормальной системы. Полнота ее следует из того факта, что каждая функция полной системы 1, $\cos x$, $\sin x,\ldots$ есть линейная комбинация функций e^{inx}.

Разложение вектора f по ортонормальной системе $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots$ в комплексном гильбертовом пространстве имеет вид

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

где $c_n=(f,\ e_n)=\overline{(e_n,\ f)}$. В частности, коэффициенты Фурье в пространстве $L_2(-\pi,\ \pi)$ для разложения

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

вычисляются по формуле

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Основная теорема § 2, п. 4 переносится на комплексный случай с тем единственным изменением, что в равенстве Парсеваля (7) и неравенстве Бесселя (5) вместо величин $(f,\ e_k)^2$ стоят $|(f,\ e_k)|^2$.

Линейный оператор A, действующий в комплексном пространстве H, называется *симметричным*, если он по-прежнему удовлетворяет уравнению

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

для любых x и y из H. Вообще говоря, линейные операторы в комплексном пространстве могут иметь собственные векторы с комплексными собственными значениями. Но *симметричный оператор A не может иметь невещественных собственных значений*. В самом деле, пусть $Ax = \lambda x$; тогда

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x),$$
$$(x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$$

и из равенства $(Ax, x) = (x, Ax)$ следует, что $\lambda = \overline{\lambda}$; тем самым λ вещественно.

Как нетрудно проверить, интегральный оператор Фредгольма

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

будет симметричным вполне непрерывным оператором в комплексном пространстве $L_2(a, b)$, если ядро $K(x, s)$ удовлетворяет условиям

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, s)|^2\,dx\,ds < \infty, \qquad K(x, s) = \overline{K(s, x)}.$$

Всякий линейный оператор A, действующий в вещественном пространстве H, можно распространить на его комплексное расширение $\overline{H}$ по формуле

$$\overline{A}(x + iy) = Ax + iAy.$$

Если при этом оператор A был симметричным в пространстве H, то оператор $\overline{A}$ в пространстве $\overline{H}$ также будет симметричным:

$$\begin{aligned}(A(x_1 + iy_1),\ x_2 + iy_2) &= \\ = (Ax_1, x_2) + i(Ay_1, x_2) &- i(Ax_1, y_2) + (Ay_1, y_2) = \\ = (x_1, Ax_2) + i(y_1, Ax_2) &- i(x_1, Ay_2) + (y_1, Ay_2) = \\ &= (x_1 + iy_1,\ A(x_2 + iy_2)).\end{aligned}$$

Теоремы относительно существования собственных векторов (§§ 3, 4) и о решении интегральных уравнений (§ 6) полностью переносятся на комплексный случай.

Теорема Фредгольма (§ 8) полностью сохраняется для интегрального оператора с квадратично интегрируемым ядром, действующего в комплексном пространстве $L_2(a, b)$:

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds;$$

при этом сопряженный оператор A^* определяется формулой

$$A^*\varphi = \int_a^b \overline{K(s, x)}\,\varphi(s)\,ds.$$

2. Мы можем получить новые сведения об общих свойствах операторов, если вместо одного уравнения

$$\varphi = A\varphi + f$$

будем рассматривать семейство уравнений с комплексным параметром μ:

$$\varphi = \mu A\varphi + f.$$

Можно записать это семейство уравнений в форме

$$(E - \mu A)\varphi = f. \qquad (1)$$

Оператор A, как и ранее, предполагается вполне непрерывным оператором, например оператором Фредгольма, но вообще не симметричным. Применяя альтернативу Фредгольма к уравнению (1), получаем: или при фиксированном значении μ уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части f (такое значение μ мы назовем *обыкновенным*), или при том же значении μ однородное уравнение

$$(E - \mu A)\varphi = 0$$

имеет ненулевое решение φ_0, которое, очевидно, является собственным вектором оператора A с собственным значением $\lambda = \frac{1}{\mu}$ (такое значение μ мы назовем *особым*). При различных значениях μ могут осуществляться различные возможности; но оказывается, что правилом является первая возможность, а вторая — исключением, а именно: *у вполне непрерывного оператора A может существовать не более конечного множества различных собственных значений, превосходящих по модулю данное положительное число.* Для симметричного вполне непрерывного оператора мы установили такой факт еще в § 3; покажем, что он справедлив и для любого вполне непрерывного оператора.

Предположим, что вполне непрерывный оператор A имеет бесконечное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, превосходящих по модулю положительное число δ; пусть $g_1, g_2 \ldots$ — соответствующие собственные векторы. Ортонормируя последовательность $g_1, g_2, \ldots$, получаем новую последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Векторы e_n, вообще говоря, уже не являются собственными для оператора A; именно, если

$$e_n = a_{nn} g_n + a_{n,\ n-1} g_{n-1} + \ldots + a_{n1} g_1, \tag{2}$$

то

$$Ae_n = a_{nn} \lambda_n g_n + a_{n,\ n-1} \lambda_{n-1} g_{n-1} + \ldots + a_{n1} \lambda_1 g_1. \tag{3}$$

Равенство

$$Ae_n = \lambda_n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} (\lambda_k - \lambda_n) g_k,$$

вытекающее из формул (2) — (3), определяет разложение вектора Ae_n на составляющую, лежащую в подпространстве $(g_1, \ldots, g_{n-1})$, и на составляющую, ортогональную этому подпространству. Последняя имеет длину, равную $|\lambda_n|$. Таким образом, расстояние вектора Ae_n до любого вектора в подпространстве $(g_1, \ldots, g_{n-1})$, в частности до вектора Ae_m при $m < n$, превосходит $|\lambda_n| \geqslant \delta$. Но тогда из последовательности $Ae_1, Ae_2, \ldots$ нельзя извлечь фундаментальную подпоследовательность, что противоречит полной непрерывности оператора A.

Итак, собственные значения λ_n любого вполне непрерывного оператора образуют самое большее счетную последовательность, сходящуюся к нулю. Поэтому исключительные значения $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$, при которых уравнение $(E - \mu A)\varphi = 0$ имеет ненулевое решение, образуют самое большее счетную последовательность, сходящуюся к ∞.

Рассмотрим обыкновенное значение μ, при котором уравнение $(E - \mu A)\varphi = f$ имеет единственное решение φ при любом $f \in H$. Обозначим решение φ, как функцию от f, через $R_\mu f$. Оператор R_μ есть, очевидно, линейный оператор. Покажем, что R_μ — ограниченный оператор. Допустим обратное: для некоторой ограниченной последовательности f_n векторы $\varphi_n = R_\mu f_n$ по норме неограниченно возрастают. Положим $\frac{\varphi_n}{|\varphi_n|} = e_n$, $\frac{f_n}{|\varphi_n|} = g_n$; векторы e_n имеют норму 1, векторы g_n стремятся к нулю. Из последовательности Ae_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; отбрасывая лишние номера, можно считать, что сама последовательность Ae_n сходится. Но тогда и последовательность $e_n = g_n + \mu Ae_n$ сходится к некоторому вектору e, $|e| = 1$. Так как $g_n \to 0$, то $e = \mu Ae$ и μ есть исключительное значение, в противоречие с предположением. Итак, R_μ — ограниченный оператор.

Так как соотношения $(E - \mu A)\varphi = f$ и $\varphi = R_\mu f$ равносильны, то оператор R_μ — обратный оператор по отношению к $E - \mu A$. Он называется *разрешающим оператором* или *резольвентой* оператора A.

3. Возникает вопрос, как построить явное выражение резольвенты.

Применим к оператору $B\varphi = \mu A\varphi + f$ принцип неподвижной точки (гл. II, § 5). Как мы помним, для наличия неподвижной точки у оператора B, действующего в полном пространстве, достаточно, чтобы он был сжимающим, т. е. чтобы при некоторой постоянной $\theta < 1$ выполнялось неравенство

$$|B\varphi - B\psi| \leqslant \theta |\varphi - \psi|. \tag{1}$$

В данном случае

$$|B\varphi - B\psi| = |\mu A\varphi - \mu A\psi| \leqslant |\mu| \, \| A \| \, |\varphi - \psi|$$

и для выполнения требуемой оценки достаточно иметь $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$. Итак, *уравнение* (1) п. 2 *разрешимо, и притом однозначно при всех достаточно малых* μ.

Само решение, как указывается в том же § 5 гл. II, есть предел последовательности φ_0, $B\varphi_0$, $B^2\varphi_0$, ..., $B^n\varphi_0$, ... с произвольным начальным вектором φ_0. Положим $\varphi_0 = 0$; тогда получим:

$$\begin{aligned}
&B\varphi_0 = f, \quad B^2\varphi_0 = \mu A f + f, \\
&B^3\varphi_0 = \mu A(\mu A f + f) + f = \mu^2 A^2 f + \mu A f + f, \ \ldots \\
&B^n\varphi_0 = f + \mu A f + \mu^2 A^2 f + \ldots + \mu^{n-1} A^{n-1} f, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Сходимость этого процесса равносильна сходимости ряда

$$f + \mu A f + \mu^2 A^2 f + \ldots \tag{2}$$

Итак, при $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ *уравнение* (1) п. 2 *имеет единственное решение в форме ряда* (2).

Следовательно, и оператор R_μ при $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ может быть задан рядом

$$R_\mu = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \ldots \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. Решение можно было бы получить путем формального разложения в ряд по степеням μ выражения $(E - \mu A)^{-1}$:

$$(E - \mu A)^{-1} = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \ \ldots \tag{4}$$

Ряд в правой части (4) сходится при всех μ, $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$, поскольку $\|\mu^n A^n\| \leqslant |\mu|^n \, \| A \|^n$. При умножении (справа или слева) на $E - \mu A$ он превращается в E, так что представляемый им оператор действительно является обратным оператору $E - \mu A$.

Если A есть интегральный оператор Фредгольма

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad \int_a^b\!\!\int_a^b |K^2(x, s)|\,dx\,ds = K^2 < \infty,$$

то, как мы сейчас покажем, при $|\mu| < \frac{1}{K}$ оператор R_μ имеет вид $E + \Gamma_\mu$, где Γ_μ — интегральный оператор Фредгольма с ядром, зависящим от параметра μ.

Для доказательства будем рассуждать так. Пусть даны два интегральных оператора:

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \qquad \int_a^b\int_a^b |K^2(x, s)|\,dx\,ds = K^2,$$

$$B\varphi = \int_a^b L(x, s)\varphi(s)\,ds, \qquad \int_a^b\int_a^b |L^2(x, s)|\,dx\,ds = L^2.$$

Построим оператор AB. Мы имеем:

$$AB\varphi = \int_a^b K(x, s)\left\{\int_a^b L(s, t)\varphi(t)\,dt\right\}ds = \int_a^b\left\{\int_a^b K(x, s)L(s, t)\,ds\right\}\varphi(t)\,dt.$$

Возможность перестановки порядка интегрирования вытекает из теоремы Фубини, примененной к суммируемой функции от s и t

$$K(x, s)L(s, t)\varphi(t),$$

которая есть произведение двух квадратично суммируемых функций $L(s, t)$ и $K(x, s)\varphi(t)$. Обозначим далее

$$M(x, t) = \int_a^b K(x, s)L(s, t)\,ds.$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$|M^2(x, t)| \leqslant \int_a^b |K^2(x, s)|\,ds \int_a^b |L^2(s, t)|\,ds,$$

поэтому $M(x, t)$ квадратично суммируема и

$$M^2 = \int_a^b\int_a^b |M^2(x, t)|\,dt\,dx \leqslant \int_a^b\int_a^b |K^2(x, s)|\,ds\,dx \int_a^b\int_a^b |L^2(s, t)|\,ds\,dt = K^2L^2.$$

Итак, оператор AB — интегральный оператор Фредгольма, ядро которого $M(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$M \leqslant KL.$$

Отсюда следует, что вместе с оператором A каждый из операторов A^2, A^3, ..., A^n, ... есть интегральный оператор и ядро $K_n(x, s)$ оператора A^n удовлетворяет неравенству

$$K_n^2 = \int_a^b\int_a^b |K_n^2(x, s)|\, dx\, ds \leqslant K^{2n}, \quad \text{где} \quad K^2 = \int_a^b\int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds.$$

При $|\mu| < \frac{1}{K}$ ряд

$$\mu K(x, s) + \mu^2 K^2(x, s) + \ldots + \mu^n K^n(x, s) + \ldots \tag{5}$$

в пространстве $L_2(G)$, $G = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$, мажорируется по норме сходящимся числовым рядом

$$|\mu| K + |\mu|^2 K^2 + \ldots + |\mu|^n K^n + \ldots$$

и поэтому сходится в среднем к некоторой функции $\Gamma(x, s, \mu)$, квадратично суммируемой при каждом μ, $|\mu| < \frac{1}{K}$. Но так как для интегральных операторов справедливо неравенство

$$\|A\|^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds = K^2,$$

то из сходимости в среднем ряда (5) следует сходимость ряда операторов $\mu A + \mu^2 A^2 + \ldots$; сумма же этого последнего ряда с добавкой единичного оператора и есть резольвента R_μ. Итак, при $|\mu| < \frac{1}{K}$ оператор R_μ есть сумма единичного оператора и интегрального оператора с ядром $\Gamma(x, s, \mu)$, что и требовалось.

Условие $|\mu| < \frac{1}{K}$, разумеется, не необходимо для разрешимости уравнения (1). Ряд (5), если он сходится, всегда определяет решение; а сходиться он может и в более широкой области значений μ. Если, например, некоторая итерация ядра $K(x, s)$ обращается в нуль, т. е.

$$K_m(x, s) \equiv 0$$

при некотором m, то ряд (5) сводится к конечной сумме и сходится при всех μ. Примером такого оператора является оператор с ядром $K(x, s) = p(x)q(s)$, где $p(x)$ и $q(s)$ — ортогональные функции. Действительно, в этом случае уже второе итерированное ядро равно нулю:

$$K_2(x, s) = \int_a^b p(x)\, q(t)\, p(t)\, q(s)\, dt = 0.$$

Более общим образом ряд (5) сходится при всех μ, если итерированные ядра удовлетворяют оценке вида

$$K_n(x, s)| \leqslant \frac{C^n}{n!}. \tag{6}$$

Во всех этих случаях резольвента R_μ существует при всех значениях μ и все значения μ являются обыкновенными. В качестве примера рассмотрим оператор Вольтерра

$$A\varphi(x) = \int_a^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

с ограниченным ядром $K(x, s)$, $|K(x, s)| \leqslant M$. Оператор Вольтерра можно считать частным случаем интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x, s)$, обращающимся в нуль в области $s \geqslant x$; вместо интеграла по s в пределах от a до b, который фигурирует в выражении оператора Фредгольма, мы получаем поэтому интеграл в пределах от a до x Имеем:

$$|K(x, s)| \leqslant M,$$

$$|K_2(x, s)| = \left|\int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt\right| =$$

$$= \begin{cases} \left|\int_s^x K(x, t)\, K(t, s)\, dt\right| \leqslant M^2 (x-s) & (x \geqslant s), \\ 0 & (x \leqslant s), \end{cases}$$

$$|K_3(x, s)| = \left|\int_a^b K_2(x, t)\, K(t, s)\, dt\right| =$$

$$= \begin{cases} \left|\int_s^x K_2(x, t)\, K(t, s)\, dt\right| \leqslant \frac{M^3}{2}(x-s)^2 & (x \geqslant s), \\ 0 & (x \leqslant s), \end{cases}$$

и т. д., так что при любом n

$$K_n(x, s) \begin{cases} \leqslant \frac{M^n}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} & (x \geqslant s), \\ = 0 & (x \leqslant s). \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_a^b\int_a^b |K_n^2(x, s)|\,dx\,ds \leq \frac{M_1^n}{(n-1)!}$$

и оценка (6) выполнена.

В общем случае ряд, определяющий резольвенту

$$R_\mu = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \ldots,$$

имеет конечный круг сходимости и не позволяет непосредственно вычислять резольвенту за пределами этого круга. Мы приведем (без вывода) формулы Фредгольма, дающие выражение резольвенты при любом неисключительном значении μ, в случае ограниченного и непрерывного ядра $K(x, s)$ [1]). Фиксируем значения $x_1, \ldots, x_n$ и $s_1, \ldots, s_n$ и введем обозначение

$$K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & \ldots & K(x_1, s_n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ K(x_n, s_1) & \ldots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}.$$

Составляются две функции $D(\mu)$ и $D(x, s, \mu)$ по формулам

$$D(\mu) = 1 - \mu\int_a^b K\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} d\xi + \frac{\mu^2}{2}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} d\xi_1\,d\xi_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{\mu^n}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \ldots$$

$$D(x, s, \mu) = K\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} - \mu\int_a^b K\begin{pmatrix} x & \xi \\ s & \xi \end{pmatrix} d\xi + \frac{\mu^2}{2}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \xi_2 \\ s & \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} d\xi_1\,d\xi_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)\frac{\mu^n}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ s & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \ldots$$

Обе эти функции оказываются целыми аналитическими функциями от μ; при этом функция $D(\mu)$ обращается в 0 при тех и только тех μ, которые являются исключительными значениями оператора A (когда не существует резольвенты R_μ). Оказывается, что решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \mu\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

[1]) См., например, И. И. Привалов, Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1937, гл. II. Т. Карлеман (1921) показал, что эти формулы остаются в силе и для квадратично интегрируемого ядра. Простое доказательство (с обобщением на бесконечный промежуток) имеется у С. Г. Михлина, ДАН СССР, 1944, т. 92, № 9, 387-390.

при любом обыкновенном значении μ имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, s, \mu)}{D(\mu)} f(s)\,ds.$$

Таким образом, резольвента R_μ оператора A везде, где она существует, есть сумма единичного оператора и интегрального оператора Фредгольма, ядром которого является отношение функций Фредгольма $D(x, s, \mu)$ и $D(\mu)$. Собственные функции оператора A также можно выразить через $D(\mu)$ и $D(x, s, \mu)$; но формулы эти неэффективны, и мы не будем их здесь приводить.

Задачи. 1. Показать, что совокупность решений уравнения

$$P(A)\varphi = (A - \lambda_1 E) \ldots (A - \lambda_m E)\varphi = 0$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — различные комплексные числа) совпадает с совокупностью линейных комбинаций собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Указание. Разложению на простейшие дроби

$$\frac{1}{(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_m)} = \frac{a_1}{\lambda - \lambda_1} + \ldots + \frac{a_m}{\lambda - \lambda_m}$$

отвечает операторное равенство

$$E = a_1 (A - \lambda_2 E) \ldots (A - \lambda_m E) + \ldots + a_m (A - \lambda_1 E) \ldots (A - \lambda_{m-1} E).$$

2. Если у оператора A^m имеется собственное значение λ, то у оператора A имеется собственное значение μ, равное одному из m корней m-й степени из числа λ.

Указание. Использовать задачу 1.

3. Если оператор A симметричен и A^m вполне непрерывен, то и A вполне непрерывен.

Указание. У оператора A имеется полная ортогональная система векторов с собственными значениями, стремящимися к нулю. Использовать далее задачу 5 к п. 5 § 3.

4. Показать, что оператор A, заданный в ортонормальном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n \ldots$ формулами

$$Ae_{2k-1} = e_{2k}, \quad Ae_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

не вполне непрерывен, в то время как A^2 вполне непрерывен.

В задачах 5 — 8 предполагается, что оператор A^m вполне непрерывен (сам A может не быть вполне непрерывным).

5. Доказать, что собственные значения оператора A могут составить самое большее счетную последовательность, сходящуюся к нулю.

Указание. Использовать задачу 2.

6. Если p—достаточно большое простое число, то собственные векторы, соответствующие собственному значению 1, у оператора A^p лишь те, которые являются собственными векторами оператора A для собственного значения 1.

Указание. Использовать задачи 2 и 5.

7. Размерность подпространства собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению 1, такова же, как и у оператора A^*.

Указание. Использовать задачу 6 и полную непрерывность A^p при $p > m$.

8. Уравнение $\varphi - A\varphi = f$ имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие $(f, \psi_0) = 0$, где ψ_0 — собственный вектор оператора A^* с собственным значением 1.

Указание. Рассмотреть уравнение

$$(E - A^p)\varphi = (E + A + \ldots + A^{p-1})f$$

с таким $p > m$, чтобы ни один комплексный корень p-й степени из 1 не был собственным значением операторов A и A^*. Проверить его разрешимость. Если φ_0 — решение, то $(E - A)\varphi_0 - f$ обращается оператором $E + A + \ldots + A^{p-1}$ в нуль. Применив далее задачу 1, получить, что $(E - A)\varphi_0 - f = 0$ (С. Л. Соболев).

Примечание. Задачи 7 и 8 показывают, что альтернатива Фредгольма сохраняется для операторов A, у которых некоторая степень A^m — вполне непрерывный оператор.

9. Пусть μ — неисключительное значение для вполне непрерывного оператора A (т. е. $E - \mu A = B$ — обратимый оператор) и $Q = E - \alpha B^*B$, где $\alpha > 0$ достаточно мало. Тогда последовательность $\varphi_{n+1} = Q\varphi_n + \alpha B^*f$ с произвольным φ_0 сходится к вектору ψ, являющемуся решением уравнения $(E - \mu A)\varphi = f$.

Указание. Уравнение $(E - \mu A)\varphi = f$ эквивалентно уравнению $\varphi = Q\varphi + \alpha B^*f$. Использовать решение задачи 5 § 3, п. 3 (где положено $C = B^*B$) и метод неподвижной точки (И. П. Натансон, 1948).

Примечание. Решение этой задачи указывает итерационный процесс для решения уравнения $(E - \mu A)\varphi = f$ при любом неисключительном значении μ.

10. Показать, что решение φ уравнения 1-го рода $A\varphi = f$, если оно существует, есть предел последовательности

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}(E - \mu AA^*) + \mu f, \qquad (1)$$

где $0 < \mu < \frac{2}{\|A\|^2}$ (В. М. Фридман, 1956).

Указание. Подставив в (1) $\varphi_n = \varphi + u_n$, получить формулу $u_n = (E - \mu AA^*)u_{n-1}$. Если e_j — ортонормальная система собственных векторов оператора AA^* с собственными значениями λ_j, то $(u_n, e_j) = (1 - \mu\lambda_j)(u_{n-1}, e_j) = (1 - \mu\lambda_j)(u_0, e_j)$. Выбрав p так, что $|(u_0, e_p)|^2 + |(u_0, e_{p+1})|^2 + \ldots < \varepsilon$, получить

$$|u_n|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u_n, e_j)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{p-1} (1 - \mu\lambda_j)^{2n} |u_0|^2 + \sum_{j=p}^{\infty} |(u_0, e_j)|^2 < 2\varepsilon$$

для достаточно больших n.

Заключительное замечание. Теория интегральных уравнений с переменным верхним пределом была построена в 1887 г. В. Вольтерра (итал. математик, 1860—1940). В 1900—1903 гг. появился цикл фундаментальных работ Э. Фредгольма (шведский математик, 1866—1927), где были введены целые функции $D(\mu)$ и $D(x, s, \mu)$ и через эти функции были выражены решение уравнения общего вида («уравнение Фредгольма») и собственные функции. Д. Гильберт (нем. математик, 1862—1943) в работах 1904—1910 гг. впервые использовал в интегральных уравнениях геометрические идеи, рассматривая задачу о собственных функциях как задачу о приведении бесконечномерной квадратичной формы к главным осям. «Гильбертово пространство» — одно из важнейших новых понятий математики XX века. Гильберт построил каноническое разложение симметричного ограниченного оператора (теорема, доказанная в § 3, есть частный случай по отношению к построениям Гильберта), которое стало началом современной спектральной теории линейных операторов, широко применяемой в математике и физике. Класс вполне непрерывных операторов (в пространстве Банаха) выделил впервые Ф. Рисс в 1919 г. О дальнейших применениях интегральных уравнений в математической физике см. в книге: С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1947; о спектральной теории и ее приложениях — в книгах: Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов, Гостехиздат, 1950 и М. А. Наймарк, Дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1952.

ГЛАВА VI

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Хорошо известно, что в классическом анализе непрерывных функций операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны. Точный смысл этого утверждения следующий:

А. Для данной непрерывной функции $\varphi(x)$ ее неопределенный интеграл

$$F(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi+C \tag{1}$$

с любой постоянной C есть дифференцируемая функция и при каждом x

$$F'(x)=\varphi(x). \tag{2}$$

Б. Для данной функции $F(x)$, обладающей непрерывной производной

$$\varphi(x)=F'(x),$$

имеет место равенство

$$\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi=F(x)+C, \tag{3}$$

где C — некоторая постоянная (именно равная $-F(a)$).

Мы располагаем теперь значительно более общим понятием интеграла, которое можно применить к широкому классу разрывных функций. Условие непрерывности $\varphi(x)$ уже не стесняет нас при построении неопределенного интеграла (1).

Возникают следующие проблемы:

Проблема I. Сохранится ли равенство (2), если в (1) функция $\varphi(x)$ — произвольная суммируемая функция?

Поскольку суммируемая функция $\varphi(x)$ может быть произвольно изменена на множестве меры нуль без изменения $F(x)$, то при решении проблемы I естественно требовать выполнения равенства (2) не всюду, а лишь почти всюду.

Проблема II. При каких условиях данная функция $F(x)$ обладает суммируемой производной $\varphi(x)$ (хотя бы определенной почти всюду) и имеет место формула (3)?

В этой главе мы укажем решение проблем I и II, а также рассмотрим некоторые смежные вопросы, главным из которых является построение интеграла Стильтьеса.

§ 1. Производная неубывающей функции

1. Рассмотрим сначала следующий вопрос: является ли наличие производной элементарным свойством функции $f(x)$ или же оно может быть выведено из других, более элементарных свойств? В качестве возможных более элементарных свойств естественно рассмотреть, например, свойство непрерывности. Хорошо известно, что функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 производную, непрерывна в этой точке. Верно ли обратное, иначе говоря, имеет ли непрерывная функция $f(x)$ производную? Конечно, нет; простейшие примеры типа $f(x) = |x|$ показывают, что функция может быть непрерывной и не всюду иметь производную. Но остается еще мыслимая возможность, что точки без производной являются для непрерывной функции исключением, и у всякой непрерывной функции на самом деле есть достаточно богатое множество точек, где она обладает производной. Так действительно думали многие математики в начале прошлого века. Но в конце концов ответ оказался отрицательным: знаменитый пример Вейерштрасса непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке (1860-е годы) [1]), изумивший ученый мир, положил конец попыткам отыскивать точки дифференцируемости у непрерывной функции. (В одной из задач к этому пункту предлагается более простой пример ван-дер-Вардена.) Итак, непрерывность функции не влечет ее дифференцируемости.

Попробуем подойти к вопросу с другой стороны. Функция $f(x)$, имеющая при $x = x_0$ производную $f'(x_0) > 0$, не убывает в окрестности точки x_0, в том смысле, что при достаточно близких к x_0 значениях x мы имеем $f(x) > f(x_0)$, если $x > x_0$, и $f(x) < f(x_0)$, если $x < x_0$. Может быть, монотонность функции имеет следствием наличие у нее производной? Если говорить об отдельных точках, это снова не так: к примеру, функция $f(x) = |x| + 2x$ всюду возрастает, а в точке $x = 0$ не имеет производной. Но оказывается, что точки, где монотонная функция не имеет производной, являются для этой функции уже исключением, а не правилом. Именно, как показал А. Лебег (1902), *неубывающие функции могут не иметь производной самое большее на множестве меры нуль.*

---

[1]) Чешский математик Б. Больцано построил подобный пример еще в 1830 г. Но его рукопись была обнаружена лишь в 1920 г. и опубликована в 1930 г. — через столетие после того, как была написана.

Теорема 1 (А. Лебег). *Неубывающая функция $F(x)$, определенная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную.*

Мы проведем доказательство вначале для случая непрерывной функции $F(x)$.

Пусть $G(x)$ — произвольная функция на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Назовем точку $x \in [a, b]$ *точкой подъема* (рис. 11), если правее x на отрезке $[a, b]$ имеется точка ξ, в которой функция G принимает бо́льшее значение, чем в точке x:

$$G(x) < G(\xi) \qquad (x < \xi). \tag{1}$$

Установим следующую лемму:

Лемма (Ф. Рисс). *Для непрерывной функции $G(x)$ множество всех точек подъема открыто на отрезке $[a, b]$ и в концах каждого составляющего интервала (a_k, b_k) этого множества выполняется неравенство*

$$G(a_k) \leqslant G(b_k). \tag{2}$$

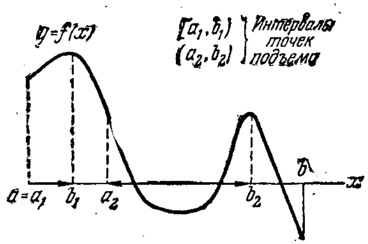


Рис. 11.

Доказательство. Поскольку функция $G(x)$ непрерывна, очевидно, что все достаточно близкие к точке подъема точки x также являются точками подъема; таким образом, множество Z всех точек подъема открыто. Пусть (a_k, b_k) — некоторый составляющий интервал этого множества. Покажем, что для любого $x \in (a_k, b_k)$ имеет место неравенство $G(x) \leqslant G(b_k)$; отсюда, переходя к пределу при $x \to a_k$, получим и требуемое неравенство (2).

Предположим, что $G(x_0) > G(b_k)$; найдем в интервале (a_k, b_k) самую правую точку x_0', в которой $G(x_0') = G(x_0)$. Так как $G(x_0') = G(x_0) > G(b_k)$, то $G(x_0) > G(x)$ всюду в интервале (x_0', b_k). Далее, точка b_k не принадлежит множеству точек подъема, поэтому всюду правее b_k имеем $G(x) \leqslant G(b_k)$. В итоге мы получаем, что всюду правее x_0' имеет место неравенство $G(x_0') > G(x)$. Но тогда x_0' не может быть точкой подъема в противоречие с построением.

Замечание. Точку x с условиями (1) мы будем называть далее более точно *точкой подъема вправо*. Можно определить аналогично *точку подъема влево* как такую точку x, левее которой существует точка ξ с большим значением функции:

$$\xi < x, \quad G(\xi) > G(x).$$

Точно так же, как и выше, можно доказать, что и множество точек подъема влево открыто и в концах его составляющих интервалов

(a_k, b_k) выполняется неравенство

$$G(a_k) \geqslant G(b_k).$$

Прежде чем переходить к доказательству самой теоремы Лебега, сделаем еще несколько замечаний общего характера.

Производная функции $F(x)$ определяется как предел отношения

$$\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}, \tag{3}$$

когда ξ приближается к x по любому закону. Разумеется, этот предел может и не существовать. Но во всяком случае всегда существуют величины (для которых мы допускаем и бесконечные значения):

$\Lambda_{пр}$ — верхний предел отношения (3) при ξ, приближающемся к x справа (верхнее правое производное число);

$\lambda_{пр}$ — нижний предел отношения (3) при том же условии (нижнее правое производное число);

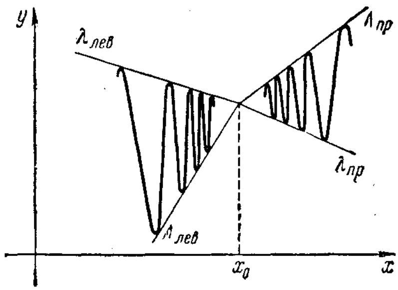


Рис. 12.

$\Lambda_{лев}$ — верхний предел отношения (3) при ξ, приближающемся к x слева (верхнее левое производное число);

$\lambda_{лев}$ — нижний предел отношения (3) при том же условии (нижнее левое производное число).

Рис. 12 иллюстрирует случай, когда в данной точке x_0 все четыре указанных производных числа различны и конечны. Читателю предоставляется изобразить графически случай, когда в данной точке все четыре числа принимают предписанные значения в промежутках $-\infty \leqslant \lambda_{пр} \leqslant \Lambda_{пр} \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant \lambda_{лев} \leqslant \Lambda_{лев} \leqslant +\infty$.

Если $\Lambda_{пр} = \lambda_{лев} \neq \pm\infty$, то функция $F(x)$ обладает при данном значении x производной справа; если $\Lambda_{лев} = \lambda_{лев} \neq \pm\infty$, то функция $F(x)$ обладает производной слева. Наконец, если все четыре производных числа конечны и равны друг другу, то в данной точке у функции $F(x)$ имеется производная.

Имея в виду все указанное, приступаем к доказательству теоремы Лебега.

Вспомним, что по условию теоремы мы имеем дело с неубывающей функцией: при $x < \xi$ всегда $F(x) \leqslant F(\xi)$. Поэтому отношение (3) неотрицательно; вместе с ним неотрицательны в каждой точке и все четыре производных числа $\Lambda_{пр}$, $\lambda_{пр}$, $\Lambda_{лев}$ и $\lambda_{лев}$.

Покажем, что почти всюду выполняется неравенство

$$\Lambda_{пр} < +\infty.$$

Если в некоторой точке x мы имеем $\Lambda_{\text{пр}} = +\infty$, то для любого C можно найти справа от x точку ξ, в которой

$$\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} > C,$$

или, что то же,

$$F(x) - Cx < F(\xi) - C\xi.$$

Таким образом, всякая точка x, в которой $\Lambda_{\text{пр}} = +\infty$, является точкой подъема вправо для функции $G(x) = F(x) - Cx$. Согласно лемме Рисса множество всех точек подъема вправо для этой функции открыто и в концевых точках составляющих интервалов выполняется неравенство

$$F(a_k) - Ca_k \leqslant F(b_k) - Cb_k,$$

или, что то же,

$$C(b_k - a_k) \leqslant F(b_k) - F(a_k). \tag{4}$$

Складывая неравенства (4) по всем составляющим интервалам, получаем:

$$C \sum (b_k - a_k) \leqslant \sum [F(b_k) - F(a_k)] \leqslant F(b) - F(a).$$

Мы видим, что множество Z точек x, в которых $\Lambda_{\text{пр}} = +\infty$, может быть покрыто системой интервалов с общей длиной

$$\sum (b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{C} [F(b) - F(a)].$$

Так как C может быть взято сколь угодно большим, то мы приходим к выводу, что множество Z имеет меру нуль, что и утверждалось.

Следующим этапом доказательства будет проверка выполнения почти всюду неравенства

$$\Lambda_{\text{пр}} \leqslant \lambda_{\text{лев}}.$$

Множество точек, где $\Lambda_{\text{пр}} > \lambda_{\text{лев}}$, представляется в виде счетной суммы множеств Z_{cC}, где выполняются неравенства

$$\lambda_{\text{лев}} < c < C < \Lambda_{\text{пр}},$$

причем c и C — всевозможные рациональные постоянные ($c < C$). Поэтому нам достаточно показать, что каждое из множеств Z_{cC} имеет меру нуль.

Пусть $x \in Z_{cC}$. Тогда, поскольку $\lambda_{\text{лев}} < c$, имеется точка ξ, лежащая левее x, в которой выполняется неравенство

$$\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} < c. \tag{5}$$

Заметим, что здесь $\xi - x < 0$; поэтому неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$F(\xi) - c\xi > F(x) - cx.$$

Таким образом, точка x является точкой подъема влево для функции $G(x)=F(x)-cx$. Применяя лемму Рисса (см. замечание на стр. 269), получаем для составляющих интервалов открытого множества всех точек подъема влево неравенства вида

$$F(a_k)-ca_k \geqslant F(b_k)-cb_k,$$

или, что то же,

$$F(b_k)-F(a_k) \leqslant c(b_k-a_k). \tag{6}$$

Взятая точка x лежит в одном из указанных интервалов (a_k, b_k). Поскольку в этой точке $\Lambda_{\text{пр}} > C$, мы можем в интервале (a_k, b_k) указать точку $\xi > x$, в которой

$$\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x} > C. \tag{7}$$

Дальнейшее построение будем проводить в пределах интервала (a_k, b_k). Неравенство (7), как и выше, показывает, что точка x является точкой подъема вправо для функции $F(x)-Cx$. Множество всех точек подъема вправо для этой функции в интервале (a_k, b_k) открыто и разбивается в сумму составляющих интервалов (a_{kj}, b_{kj}) $(j=1, 2, \ldots)$, причем на концах этих интервалов выполняются неравенства

$$F(a_{kj})-Ca_{kj} \leqslant F(b_{kj})-Cb_{kj}.$$

Иначе говоря,

$$F(b_{kj})-F(a_{kj}) \geqslant G(b_{kj}-a_{kj}).$$

Суммируя по индексу j, получим:

$$\sum_j (b_{kj}-a_{kj}) \leqslant \frac{1}{C}\sum [F(b_{kj})-F(a_{kj})] \leqslant \frac{1}{C}[F(b_k)-F(a_k)].$$

Используя неравенство (6), получаем:

$$\sum_j (b_{kj}-a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C}\sum (b_k-a_k).$$

Суммируя по индексу k, находим:

$$\sum_k \sum_j (b_{kj}-a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C}\sum_k (b_k-a_k). \tag{8}$$

Как система интервалов (a_k, b_k), так и система интервалов (a_{kj}, b_{kj}) покрывает множество Z_{cC}, и мы видим, что вторая система покрывает его более «экономно», чем первая.

Для каждой точки $x \in Z_{cC}$ в пределах соответствующего интервала (a_{kj}, b_{kj}) можно повторить это построение. Мы получим новую систему «третьего порядка» (a_{kjm}, b_{kjm}) $(m=1, 2, \ldots)$ и систему четвертого порядка (a_{kjmn}, b_{kjmn}) $(m, n=1, 2, \ldots)$, причем

$$\sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) \leqslant \frac{c}{C} \sum_m (b_{kjm} - a_{kjm}) \leqslant \frac{c}{C} (b_{kj} - a_{kj}).$$

Суммируя по k и j и используя (8), получим:

$$\sum_k \sum_j \sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) \leqslant \left(\frac{c}{C}\right)^2 \sum_k (b_k - a_k).$$

Продолжая далее этот процесс, мы получаем возможность покрывать множество Z_{cC} все более тесными системами интервалов, причем общая длина интервалов $2p$-й покрывающей системы не превосходит $\left(\frac{c}{C}\right)^p (b-a)$ и может быть сделана при достаточно большом p как угодно малой. Поэтому мера множества Z_{cC} равна нулю, что и утверждалось. Итак, *для любой неубывающей непрерывной функции почти всюду имеют место неравенства* $\Lambda_{\text{пр}} < +\infty$ и $\Lambda_{\text{пр}} \leqslant \lambda_{\text{лев}}$. Заменим функцию $F(x)$ на $F^*(x) = -F(-x)$; функция $F^*(x)$ также неубывающая, и для нее также почти всюду справедливо неравенство $\Lambda^*_{\text{пр}} \leqslant \lambda^*_{\text{лев}}$. Но легко сообразить, что в соответствующих точках $\Lambda^*_{\text{пр}} = \Lambda_{\text{лев}}$, $\lambda^*_{\text{лев}} = \lambda_{\text{пр}}$; поэтому почти всюду имеет место неравенство $\Lambda_{\text{лев}} \leqslant \lambda_{\text{пр}}$. Мы получаем, таким образом, цепь неравенств

$$0 \leqslant \Lambda_{\text{пр}} \leqslant \lambda_{\text{лев}} \leqslant \Lambda_{\text{лев}} \leqslant \lambda_{\text{пр}} \leqslant \Lambda_{\text{пр}} < +\infty,$$

выполняющихся одновременно на множестве полной меры; мы видим, что на этом множестве

$$0 \leqslant \Lambda_{\text{пр}} = \lambda_{\text{лев}} = \Lambda_{\text{лев}} = \lambda_{\text{пр}} < +\infty,$$

т. е. у функции $F(x)$ имеется конечная производная.

Тем самым доказана теорема Лебега для непрерывной неубывающей функции.

Переходим к рассмотрению разрывных неубывающих функций. Отметим, что у произвольной неубывающей функции $F(x)$ разрывы могут быть лишь первого рода, так что во всякой точке существуют пределы значений $F(x)$ справа и слева:

$$F(x+0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} F(\xi), \quad F(x-0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} F(\xi).$$

Действительно, наличие нескольких предельных значений с какой-нибудь стороны несовместимо с монотонностью функции. Интервал $(F(x-0), F(x+0))$ называется интервалом разрыва, а его длина $F(x+0) - F(x-0)$ — скачком функции $F(x)$ в точке x. Так как функция $F(x)$ не убывает, интервалы $(F(x-0), F(x+0))$ для разных точек разрыва не перекрываются (самое большее могут иметь общий конец); поэтому таких интервалов имеется не более счетного множества. Вместе с тем *у неубывающей функции и самих точек разрыва не может быть более счетного множества.*

Чтобы проверить наличие производной у разрывной неубывающей функции, мы соответственно обобщим лемму Рисса. Пусть $G(x)$ — если и не непрерывная функция, то во всяком случае имеющая разрывы только первого рода. Назовем точку x точкой подъема вправо, если правее x имеется точка ξ, в которой

$$\max\left[G(x),\quad G(x-0),\quad G(x+0)\right] < G(\xi).$$

Повторяя те же рассуждения, которые мы проводили выше при доказательстве леммы Рисса, мы получаем, что множество всех точек подъема вправо открыто, причем для каждого составляющего интервала (a_k, b_k) этого множества имеет место неравенство

$$G(a_k+0) \leqslant \max\left\{G(b_k),\ G(b_k-0),\ G(b_k+0)\right\}.$$

А этого уже достаточно, чтобы провести без изменения и доказательство самой теоремы.

Итак, *всякая неубывающая функция имеет почти везде конечную производную.*

Задачи. Доказать следующие предложения:

1. Если у непрерывной функции $F(x)$ одно из правых производных чисел неотрицательно в интервале (a, b), то $F(a) \leqslant F(b)$.

Указание. Каждая точка есть точка подъема вправо.

2. Если одно из правых производных чисел в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ заключено в пределах $[\alpha, \beta]$, то для любых x_1 и x_2 из интервала (a, b) имеем:

$$\alpha \leqslant \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \beta.$$

Указание. Применить результат задачи 1 к функции $F(x)-\alpha x$.

3. Если одно из производных чисел функции $F(x)$ непрерывно в точке x_0, то существует $F'(x_0)$.

Указание. Использовать задачу 2.

4. (Пример Ван-дер-Вардена). Положим

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-x & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

и продолжим эту функцию затем на всю ось с периодом 1. Положим далее

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{4^n}\varphi_0(4^n x).$$

Функция $\varphi_n(x)$ имеет период 4^{-n} и производную $\left(\text{всюду, кроме угловых точек с абсциссами } \frac{p}{2^n}\right)$, равную $+1$ или -1. Пусть, наконец,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Показать, что $f(x)$ непрерывна, но ни в одной точке не имеет производной.

Указание. Фиксируя m для данного x_0, возьмем приращение $h = \pm\frac{1}{4^m}$. Тогда приращения всех $\varphi_n(x)$, начиная с m-й, будут равными нулю. Функция $\varphi_{m-1}(x)$ имеет интервалы без угловых точек длины $\frac{2}{4^m}$; тот из них, который содержит точку x_0, содержит вместе с ней и один из интервалов $\left(x_0, x_0+\frac{1}{4^m}\right)$ или $\left(x_0, x_0-\frac{1}{4^m}\right)$. На этом интервале и все предшествующие функции $\varphi_k(x)$, $k < m-1$, не имеют угловых точек; приращения их будут по модулю равны приращению аргумента. В итоге мы получим

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta\varphi_k(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \text{четному числу при } m \text{ четном,} \\ \text{нечетному числу при } m \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Поэтому $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$.

5. В точке x, $0 \leqslant x < 1$, имеющей двоичное разложение $0, a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ (разложения, имеющие 1 в периоде, как обычно, исключаются), положим $f(x) = 0, a_1\, 0\, a_3\, 0 \ldots$, заменяя двоичные знаки на четных местах нулями. Показать, что $f(x)$ непрерывна справа и нигде не имеет правой производной.

Указание. Рассмотреть приращения функции, получающиеся при перемене в x n-го двоичного знака с 0 на 1 или группы 01 на 10.

2. К обычным правилам дифференцирования суммы и произведения, имеющим общий характер, мы присоединим здесь теорему о почленном дифференцировании ряда монотонных функций:

Теорема 2 («малая теорема Фубини»). *Всюду сходящийся ряд монотонных (неубывающих) функций*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x) \tag{1}$$

почти всюду допускает почленное дифференцирование:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать все функции $F_n(x)$ неотрицательными и равными нулю при $x = a$: в противном случае мы заменили бы $F_n(x)$ на $F_n(x) - F_n(a)$.

Сумма ряда из неубывающих функций есть, конечно, неубывающая функция. Рассмотрим множество E полной меры, на котором существуют все $F'_n(x)$ и $F'(x)$. При $x \in E$ и любом ξ мы имеем:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} [F_n(\xi) - F_n(x)]}{\xi - x} = \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

Так как слагаемые, стоящие слева, неотрицательны, то при любом N

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} [F_n(\xi) - F_n(x)]}{\xi - x} \leqslant \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

Переходя к пределу при $\xi \to x$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{N} F'_n(x) \leqslant F'(x),$$

откуда, устремляя N в ∞ и учитывая, что все $F'_n(x)$ неотрицательны, находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) \leqslant F'(x). \qquad (2)$$

Покажем, что в действительности почти при всех x здесь имеет место знак равенства. Найдем для заданного k частную сумму $S_{n_k}(x)$ ряда (1), для которой

$$0 \leqslant F(b) - S_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как разность $F(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{j > n_k} F_j(x)$ — неубывающая функция, то и для всех x

$$0 \leqslant F(x) - S_{n_k}(x) < \frac{1}{2^k},$$

и, следовательно, ряд из неубывающих функций

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F(x) - S_{n_k}(x)]$$

сходится (даже равномерно) на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Но тогда по доказанному и ряд производных сходится почти всюду. Общий член этого ряда $F'(x) - S'_{n_k}(x)$ почти всюду стремится к нулю, и, значит, почти всюду $S'_{n_k}(x) \to F'(x)$. Но если бы в неравенстве (2) стоял знак $<$, то никакая последовательность частных сумм не могла бы иметь пределом $F'(x)$. Поэтому в неравенстве (2) почти при каждом x должен иметь место знак равенства, что мы и утверждали.

3. Разложение неубывающей функции на функцию скачков и непрерывную функцию. Пусть $A = \{x, x_2, \ldots\}$ — произвольное конечное или счетное множество точек отрезка $[a, b]$ и $B = \{h_1, h_2, \ldots\}$ — такое же множество положительных чисел с конечной суммой $\sum_n h_n$. Между множествами A и B установим взаимно

однозначное соответствие так, чтобы точке x_n соответствовало число h_n с тем же номером n. Определим функцию $H(x)$ как сумму всех таких чисел h_n, для которых соответствующие точки x_n лежат не правее x:

$$H(x)=\sum_{x_n\leqslant x} h_n.$$

Функция $H(x)$, построенная по указанному правилу, называется *функцией скачков*. Как неубывающая функция, она имеет самое большее счетное множество точек разрыва. Покажем, что она непрерывна справа и все ее разрывы лежат в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, а соответствующие скачки $H(x_n)-H(x_n-0)$ равны как раз числам h_n. Действительно, для данного $x=x_0$ имеем:

$$H(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\sum_{x_n\leqslant x} h_n=\sum_{x_n\leqslant x_0} h_n=H(x_0),$$

$$H(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\sum_{x_n\leqslant x} h_n=\sum_{x_n< x_0} h_n.$$

Если точка x_0 не совпадает ни с одной из точек x_n, то $H(x_0+0)=H(x_0)=H(x_0-0)$ и x_0 есть точка непрерывности функции $H(x)$. Если точка x_0 попадает в одну из точек x_n, то разница между $H(x_0+0)=H(x_0)$ и $H(x_0-0)$, т. е. скачок в точке x_n составляет h_n. Таким образом, наше утверждение доказано.

В силу малой теоремы Фубини как сумма сходящегося ряда неубывающих функций

$$H_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<x_n, \\ h_n & \text{при } x\geqslant x_n, \end{cases}$$

производные которых почти всюду равны нулю, функция $H(x)$ также имеет производную, почти всюду равную нулю.

Теорема. *Любую неубывающую непрерывную справа функцию $F(x)$ можно представить в виде суммы двух неубывающих:*

$$F(x)=H(x)+G(x),$$

причем так, что первое слагаемое $H(x)$ есть функция скачков, а второе $G(x)$ — непрерывная функция.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — все точки разрыва функции $F(x)$ и $h_1, h_2, \ldots$ — соответствующие скачки. Построим функцию скачков по формуле

$$H(x)=\sum_{x_n\leqslant x} h_n.$$

Покажем, что разность $G(x)=F(x)-H(x)$ не убывает и непрерывна. Для значений $x'<x''$ мы имеем:

$$G(x'')-G(x')=[F(x'')-F(x')]-[H(x'')-H(x')],$$

где разность справа неотрицательна [она представляет собой меру множества значений $F(x)$ на совокупности точек непрерывности в интервале x', x'']. Далее, в каждой точке x существуют $G(x+0)=G(x)$ и $G(x-0)$ и

$$G(x+0)-G(x-0)= \\ =[F(x+0)-F(x-0)]-[H(x+0)-H(x-0)];$$

в силу указанных выше свойств функции $H(x)$ эта разность при каждом x равна нулю, так что функция $G(x)$ непрерывна. Теорема доказана.

Замечание. Условие непрерывности справа, фигурирующее во всех наших построениях, можно отбросить, если соответственным образом обобщить понятие функции скачков. Пусть, например, заданы точки x_n и неотрицательные числа h_n и h_n'; функция, определяемая по формуле

$$H(x)=\sum_{x_n<x} h_n' + \sum_{x_n \leqslant x} h_n,$$

имеет в каждой точке x_n скачок слева h_n' (так что $H(x_n)-H(x_n-0)=h_n'$), скачок справа h_n (так что $H(x_n+0)-H(x_n)=h_n'$) и общий скачок $h_n'+h_n$. Если $F(x)$ — неубывающая функция, имеющая в точках x_n скачок слева h_n' и скачок справа h_n, то, вычитая из нее соответствующую функцию $H(x)$, получим непрерывную и неубывающую разность $G(x)=F(x)-H(x)$.

§ 2. Функции с ограниченным изменением

1. Отправляясь от неубывающих функций, можно построить и более широкие классы функций, имеющих почти всюду производную. Очевидно, вместе с неубывающими функциями имеют почти всюду производную и их разности. Мы укажем далее внутреннее определение функций, являющихся разностями неубывающих. Введем следующее определение:

Определение. Функция $F(x)$, определенная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, называется *функцией с ограниченным изменением*, если при любом разбиении отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ на части точками деления

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

сумма

$$\sum_{k=0}^{n+1} |F(x_{k+1})-F(x_k)| \tag{1}$$

остается меньше фиксированной постоянной.

Всякая *неубывающая* функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение, так как для нее сумма (1) не зависит от разбиения и равна $F(b)-F(a)$.

Сумма и разность двух функций с ограниченным изменением имеют, очевидно, также ограниченное изменение. В частности, разность двух неубывающих функций имеет ограниченное изменение. Мы увидим сейчас, что верно и обратное: каждая функция с ограниченным изменением может быть представлена как разность двух неубывающих функций.

Пусть $F(x)$ — функция с ограниченным изменением; точную верхнюю грань сумм (1) при всевозможных разбиениях отрезка $[a, b]$ мы будем называть ***полным изменением*** функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначать $\mathbf{V}_a^b[F]$. Покажем, что при $a<c<b$ имеет место равенство

$$\mathbf{V}_a^b[F]=\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]. \tag{2}$$

Если точка c включена в число точек деления отрезка $[a, b]$, так что, например, $x_m=c$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|+\sum_{k=m}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|. \tag{3}$$

Суммы в правой части можно сделать как угодно близкими к $\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]$, достаточно измельчив подразбиение. Поэтому можно утверждать, что

$$\mathbf{V}_a^b[F]=\sup\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|\geqslant\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]. \tag{4}$$

С другой стороны, имея произвольное подразбиение отрезка и добавив к нему еще одну точку c, мы можем только увеличить сумму (1). Поэтому для любого подразбиения, содержащего или не содержащего точку c, мы имеем в силу (3):

$$\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|\leqslant\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F].$$

Отсюда, переходя в левой части к верхней грани, получаем:

$$\mathbf{V}_a^b[F]\leqslant\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]. \tag{5}$$

Соединяя (3) и (5), получаем (2), что и требовалось. В частности, $V(x)=\mathbf{V}_a^x[F]$ — неубывающая функция. Разность $G(x)=V(x)-F(x)$ — также неубывающая функция, так как при $x'<x''$, очевидно, $V(x'')-V(x')=\mathbf{V}_{x'}^{x''}[F]\geqslant F(x'')-F(x')$ и, следовательно,

$$V(x'')-F(x'')\geqslant V(x')-F(x').$$

Таким образом, функция с ограниченным изменением представлена в виде разности двух неубывающих функций

$$F(x) = V(x) - G(x).$$

2. Многие свойства, которыми может дополнительно обладать функция $F(x)$, сохраняются и для ее неубывающих составляющих $V(x)$ и $G(x)$. К числу таких свойств относится, например, непрерывность— двусторонняя или односторонняя. Покажем, что если функция $F(x)$ при $x = x_0$ непрерывна, например, справа, то $V(x)$ и $G(x)$ также непрерывны справа при $x = x_0$. Достаточно показать это для функции $V(x)$. Так как функция $F(x)$ непрерывна справа в точке x_0, то при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при любом $x_1 > x_0$, отличающемся от x_0 меньше чем на δ, будет иметь место неравенство

$$|F(x_1) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Построим разбиение отрезка $[x_0, b]$ на части $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ так, чтобы иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| > \mathbf{V}_{x_0}^{b}[F] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точку x_1 здесь можно всегда подчинить условию $x_0 < x_1 < x_0 + \delta$. Мы получим:

$$\mathbf{V}_{x_0}^{b}[F] < \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + \varepsilon < \mathbf{V}_{x_1}^{b}[F] + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$V(x_1) - V(x_0) = \mathbf{V}_{x_0}^{x_1}[F] = \mathbf{V}_{x_0}^{b}[F] - \mathbf{V}_{x_1}^{b}[F] < \varepsilon,$$

откуда и вытекает, что $V(x)$ непрерывна справа при $x = x_0$. Аналогично доказывается непрерывность функции $V(x)$ слева в предположении, что непрерывна слева исходная функция $F(x)$. Как следствие получаем: *если функция $F(x)$ с ограниченным изменением непрерывна на отрезке $[a, b]$, то непрерывна и функция $V(x) = \mathbf{V}_{a}^{x}[F]$, а также и $G(x) = V(x) - F(x)$.*

Обратно, о многих свойствах функции $F(x)$ с ограниченным изменением можно судить по свойствам ее неубывающих составляющих. Так, всякая неубывающая функция по теореме Лебега (§ 1) имеет почти всюду производную. Поэтому и *любая функция с ограниченным изменением, как разность двух неубывающих функций, имеет почти всюду производную.*

Задачи. 1. Показать, что произведение двух функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ с ограниченным изменением есть снова функция с ограниченным изменением, причем

$$\mathbf{V}_a^b[F_1F_2] \leqslant \max_x |F_1(x)|\, \mathbf{V}_a^b[F_2] + \max_x |F_2(x)|\, \mathbf{V}_a^b[F_1].$$

2. Пусть $F(x) \geqslant \alpha > 0$ есть функция с ограниченным изменением. Показать, что и $\frac{1}{F(x)}$ есть функция с ограниченным изменением, причем

$$\mathbf{V}_a^b\left[\frac{1}{F(x)}\right] \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{V}_a^b[F].$$

3. Кривая $y = F(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется *спрямляемой*, если длины ломаных с последовательными вершинами в точках $(x_1, F(x_1)), \ldots, (x_n, F(x_n))$, где $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, ограничены фиксированной постоянной, не зависящей от числа n и выбора точек $x_2, \ldots, x_{n-1}$. Показать, что кривая $y = F(x)$ спрямляема тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение.

Указание. Использовать неравенство

$$|\Delta y_j| \leqslant \sqrt{|\Delta x_j|^2 + |\Delta y_j|^2} \leqslant |\Delta x_j| + |\Delta y_j|.$$

4. Доказать, что непрерывная функция $x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}$ на отрезке $[0, 1]$ имеет ограниченное изменение при $\alpha > \beta$ и не имеет ограниченного изменения при $\alpha \leqslant \beta$.

5. Существует ли непрерывная функция $F(x)$, не имеющая ограниченного изменения ни в каком промежутке?

Отв. Например, функция типа функции Вейерштрасса, нигде не имеющая производной.

6. В пространстве всех функций $F(x)$ с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ ввести норму

$$\|F\| = \mathbf{V}_a^b[F]$$

(функции, отличающиеся на константу, считаются эквивалентными). Показать что при этом получается полное нормированное пространство.

7. Положим $V(x) = \mathbf{V}_a^x[F]$, где $F(x)$ — функция с ограниченным изменением; показать, что почти всюду

$$V'(x) = |F'(x)|.$$

Указание. Для заданного n построить подразбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ так, чтобы сумма $\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)|$ отличалась от $\mathbf{V}_a^b[F]$ меньше чем на $\frac{1}{2^n}$. Положив $F_n(x) = \pm F(x) + C_{kn}$ на интервале (x_k, x_{k+1}), выбрать знаки $\pm$ и постоянные C_{kn} так, чтобы иметь $F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k) = |F(x_{k+1}) - F(x_k)|$. Показать, что $V(x) - F_n(x)$ не убывает. Применить к сходящемуся ряду $\sum_{n=1}^{\infty} [V(x) - F_n(x)]$ малую теорему Фубини.

8. Показать, что у функций $F(x)$ и $V(x)$ одни и те же точки разрыва, а скачки в точках разрыва совпадают с точностью до знака.

3. Рассмотрим неопределенный интеграл от суммируемой функции $\varphi(x)$:

$$F(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение, так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(\xi)|\, d\xi = \int_a^b |\varphi(\xi)|\, d\xi.$$

(Впрочем, можно и непосредственно представить $F(x)$ в виде разности двух неубывающих, использовав разложение $\varphi(x)$ на положительную и отрицательную части.) По доказанному *функция $F(x)$ имеет почти всюду производную $F'(x)$*.

Покажем, что эта производная почти всюду совпадает с исходной функцией $\varphi(x)$. Достаточно ограничиться суммируемой функцией $\varphi(x)$ из класса C^+ (гл. IV, § 2). Мы имеем $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$, где $h_n(x)$ — ступенчатая функция и $h_n(x) \leqslant h_{n+1}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для интегралов от функций $h_n(x)$ наше утверждение непосредственно очевидно: если

$$H_n(x) = \int_a^x h_n(\xi)\, d\xi,$$

то $H_n'(x) = h_n(x)$ всюду вне точек разрыва $h_n(x)$. Так как последовательность $h_n(x)$, монотонно возрастая, сходится к $\varphi(x)$, то при каждом x последовательность $H_n(x)$ имеет пределом функцию $F(x)$. Более того, функция $F(x)$ представляется в виде ряда неубывающих функций

$$F(x) = H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [H_{n+1}(x) - H_n(x)].$$

Применяя малую теорему Фубини, получаем: почти всюду

$$F'(x) = h_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [h_{n+1}(x) - h_n(x)] = \varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Мы разрешили тем самым проблему I, поставленную во введении к этой главе. Сформулируем результат в виде теоремы:

Теорема 1 (А. Лебег). *Если $\varphi(x)$ — суммируемая функция, то ее неопределенный интеграл*

$$F(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi$$

есть непрерывная функция с ограниченным изменением и имеет почти всюду производную, равную $\varphi(x)$.

4. Точки Лебега. Будем говорить, что точка $x_0 \in [a, b]$ есть *точка Лебега* суммируемой функции $\varphi(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi=0 \tag{1}$$

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, то, как легко видеть, любая точка $x_0 \in [a, b]$ есть точка Лебега функции $\varphi(x)$. Покажем, что в общем случае, когда $\varphi(x)$ суммируема, *почти каждая точка отрезка* $[a, b]$ *является точкой Лебега функции* $\varphi(x)$.

Пусть r — фиксированное число. Тогда на некотором множестве E_r полной меры в силу теоремы 1 выполняется предельное соотношение

$$\lim\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-r|\,d\xi=|\varphi(x_0)-r|.$$

Рассмотрим всюду плотное счетное множество значений r, например множество рациональных r. Пересечение E всех множеств E_r есть также множество полной меры. Пусть $x_0 \in E$ такова, что $\varphi(x_0)$ имеет конечное значение; покажем, что x_0 есть точка Лебега. Действительно, для заданного $\varepsilon>0$ можно указать такое рациональное r, что $|\varphi(x_0)-r|<\frac{\varepsilon}{3}$; далее можно написать:

$$\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-r|\,d\xi+\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x}|r-\varphi(x_0)|\,d\xi=$$
$$=\left\{\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-r|\,d\xi-|\varphi(x_0)-r|\right\}+2|\varphi(x_0)-r|.$$

При достаточно малом $|x-x_0|$ фигурная скобка становится меньше чем $\frac{\varepsilon}{3}$; поэтому при таких $|x-x_0|$ вся сумма справа будет меньше чем ε, откуда и вытекает требуемое равенство (1).

В точках Лебега суммируемая функция $\varphi(x)$ обладает многими свойствами непрерывной функции.

Нам понадобится в дальнейшем свойство функции $\varphi(x)$, выражаемое следующей леммой:

Лемма. *Если x_0 — точка Лебега функции $\varphi(x)$ и E_n — последовательность измеримых множеств, стягивающаяся к точке x_0 в том смысле, что E_n помещается на интервале Δ_n, содержащем точку x_0 и имеющем длину $\delta_n \to 0$, причем выполнено условие* $\mu E_n \geqslant \alpha\delta_n$ ($\alpha > 0$ — фиксированная постоянная), *то*

$$\lim \frac{1}{\mu E_n} \int\limits_{E_n} \varphi(\xi)\, d\xi = \varphi(x_0). \tag{2}$$

Доказательство. Мы имеем, очевидно,

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{\mu E_n} \int\limits_{E_n} \varphi(\xi)\, d\xi\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\mu E_n} \int\limits_{E_n} [\varphi(x_0) - \varphi(\xi)]\, d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\mu E_n} \int\limits_{E_n} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\mu\Delta_n} \int\limits_{\Delta_n} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi.$$

Если интервал Δ_n имеет своим концом точку x_0, то результат имеет пределом 0 по предположению (x_0 — точка Лебега). Если точка x_0 находится внутри интервала $\Delta_n = (\alpha_n, \beta_n)$, то полученное отношение заключено между отношениями

$$\frac{\alpha^{-1}}{x_0 - \alpha_n} \int\limits_{\alpha_n}^{x_0} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi \quad \text{и} \quad \frac{\alpha^{-1}}{\beta_n - x_0} \int\limits_{x_0}^{\beta_n} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi \text{ [1])}$$

и поэтому вместе с ними также стремится к нулю, что и требуется.

Как следствие получаем, что *в каждой точке Лебега функция $\varphi(x)$ равна производной от своего неопределенного интеграла.*

Задачи. 1. Точка x называется *точкой плотности* измеримого множества E, если

$$\lim_{\Delta \to \xi} \frac{\mu E(\Delta)}{\mu\Delta} = 1,$$

где $E(\Delta)$ означает часть множества E, попавшую на интервал Δ. Показать, что почти все точки множества E есть его точки плотности.

Указание. Применить лемму к характеристической функции множества E, положив $E_n = \Delta_n$ (интервал, стягивающийся к точке x).

---

[1]) По известному арифметическому неравенству дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ заключена между $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$.

2. Дано, что для любого интервала Δ $\mu E(\Delta) \geqslant \alpha\mu\Delta$, где $\alpha > 0$ фиксировано; показать, что E имеет полную меру.

Указание. Дополнительное множество не имеет точек плотности.

Следствие. Не существует измеримого множества такого, что мера его части, попавшей на произвольный интервал, равна точно половине длины этого интервала.

3. Точка ξ называется *точкой асимптотической непрерывности* измеримой на $[a, b]$ функции $F(x)$, если существует измеримое множество E, имеющее точку ξ своей точкой плотности, на котором $F(x)$ непрерывна. Доказать, что почти каждая точка $\xi \in [a, b]$ есть точка асимптотической непрерывности функции $F(x)$.

Указание. Каждая точка плотности множества E_ε, $\mu E_\varepsilon > b - a - \varepsilon$, на котором $F(x)$ непрерывна (гл. IV, § 4, п. 7), удовлетворяет условию.

4. Проверить, что в каждой точке Лебега суммируемая функция $F(x)$ асимптотически непрерывна; если $F(x)$ ограничена, то верно и обратное.

5. Построить пример суммируемой функции, у которой в точке Лебега соотношение (2) не выполняется, если в качестве E_n выбирать некоторые множества, для которых $\frac{\mu E_n}{\mu \Delta_n} \to 0$.

§ 3. Восстановление функции по ее производной

Мы переходим теперь к решению проблемы II из введения к этой главе.

1. На отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ дана функция $F(x)$, обладающая почти всюду производной $F'(x) = \varphi(x)$.

Спрашивается: будет ли функция $\varphi(x)$ суммируемой и справедлива ли формула

$$F(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi + C? \tag{1}$$

Как мы знаем, необходимым условием для выполнения равенства (1) является наличие ограниченного изменения у функции $F(x)$. Будем считать, что оно выполнено, и на первых порах предположим, что $F(x)$ не убывает. Сначала ответим на первый вопрос: покажем, что *производная от неубывающей функции всегда суммируема*. Производная функции $F(x)$ есть предел отношения

$$\Phi_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Функции $\Phi_h(x)$ неотрицательны и при $h \to 0$ почти везде на отрезке $[a, b]$ сходятся к пределу $F'(x)$ [1]). Для доказательства суммируемости функции $F'(x)$ применим теорему Фату из § 3 гл. IV; она обеспечит суммируемость функции $F'(x)$, если интегралы от функций $\Phi_h(x)$ по отрезку $[a, b]$ остаются ограниченными. Если считать α и β точками

[1]) Если $x + h$ выходит за пределы отрезка $[a, b]$, продолжаем $F(x)$, как постоянную.

непрерывности всех $\Phi_h(x)$, то мы имеем:

$$\int_\alpha^\beta \Phi_h(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_{\alpha+h}^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^\beta F(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} F(x)\,dx.$$

Эта величина при $h \to 0$ имеет предел $F(\beta) - F(\alpha)$ и, следовательно, ограничена. Таким образом, теорему Фату можно применить. Вместе с суммируемостью функции $F'(x)$ она дает и неравенство

$$\int_\alpha^\beta F'(x)\,dx \leqslant F(\beta) - F(\alpha) \leqslant F(b-0) - F(a+0).$$

Устремляя $\alpha \to a$, $\beta \to b$, получаем, что $F'(x)$ суммируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leqslant F(b-0) - F(a+0).$$

В частности, если a и b суть точки непрерывности функции $F(x)$, то

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leqslant F(b) - F(a). \tag{2}$$

Здесь фактически может быть и знак $<$, например, для ступенчатой функции $F(x)$, у которой производная почти всюду равна нулю.

2. Но оказывается, что и для *непрерывной* неубывающей функции $F(x)$ в неравенстве (2) п. 1 может фактически быть знак $<$.

Рассмотрим для примера какое-нибудь замкнутое нигде не плотное множество Z (например, канторово).

В свое время (гл. II, § 4) мы показали, что такое множество имеет мощность континуума. Вспомним это построение. Вначале мы установили соответствие между множеством всех смежных интервалов к множеству Z и множеством двоично-рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ с сохранением порядка, т. е. так, что если интервал Δ' лежит левее интервала Δ'', то соответствующие двоично-рациональные числа r' и r'' связаны неравенством $r' < r''$. Далее мы распространили это соответствие, с одной стороны, на все точки 2-го рода множества Z, с другой — на все двоично-иррациональные числа отрезка $[0, 1]$ также с сохранением порядка. Это соответствие определяет неубывающую функцию $F(x)$ переменного x, пробегающего весь отрезок $[a, b]$, на котором расположено множество Z; функция $F(x)$ изменяется от 0 до 1; в смежных интервалах множества Z она постоянна и принимает соответствующее двоично-рациональное значение, а в точках 2-го рода множества Z — соответствующее двоично-иррациональное значение. Эта функция, поскольку она не убывает и принимает все значения в интервале $[0, 1]$, непрерывна. Производная ее во всяком случае существует и равна нулю во всех точках смежных интервалов; поэтому, если множество Z имеет меру нуль, производная от $F(x)$ почти всюду равна нулю и в (2) имеет место знак $<$.

3. Таким образом, чтобы в выражении (2) п. 1 стоял знак равенства, нужно на неубывающую функцию $F(x)$ накладывать более сильные ограничения, чем непрерывность.

Определение. Функция $F(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что, какова бы ни была (конечная) система неперекрывающихся интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ с общей длиной

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

соответствующая сумма абсолютных приращений функции не превосходит ε:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Например, абсолютно непрерывна всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|F(x'') - F(x')| \leqslant C|x'' - x'|,$$

так как для любой системы интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leqslant C \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

и чтобы сделать сумму слева меньше заданного $\varepsilon > 0$, нужно только, чтобы общая длина взятой системы интервалов не превосходила $\delta < \frac{\varepsilon}{C}$.

С другой стороны, неубывающая непрерывная функция $F(x)$, которую мы построили в п. 2, имеющая производную, почти всюду равную нулю, заведомо не абсолютно непрерывна. Действительно, множество Z можно покрыть счетной системой неперекрывающихся интервалов сколь угодно малой общей длины, на которых сумма приращений функции $F(x)$ равна 1; на достаточно большой конечной подсистеме сумма ее приращений заведомо превзойдет $\frac{1}{2}$, что несовместимо с определением абсолютной непрерывности.

Функция $F(x)$, являющаяся неопределенным интегралом суммируемой функции $\varphi(x)$, так что

$$F(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi,$$

всегда абсолютно непрерывна.

Действительно, мы имеем

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k)-F(a_k)| = \sum_{k=1}^n \left|\int_{a_k}^{b_k} \varphi(\xi)\,d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |\varphi(\xi)|\,d\xi = \int_{\Sigma(a_k,\,b_k)} |\varphi(\xi)|\,d\xi,$$

и в силу абсолютной непрерывности интеграла по множеству (см. стр. 169) полученное выражение стремится к нулю вместе с мерой системы интервалов (a_k, b_k).

Отметим несколько простых свойств абсолютно непрерывных функций.

Оказывается, в определении абсолютно непрерывной функции вместо неравенства (1) можно писать неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^n [F(b_k)-F(a_k)]\right| \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

что на первый взгляд кажется несколько неожиданным. Но, в самом деле, пусть для любой системы интервалов с общей длиной $<\delta$ выполняется (2). Тогда, фиксируя такую систему интервалов, мы выделим из нее две подсистемы так, что на интервалах первой приращения функции $F(x)$ положительны, а на интервалах второй — отрицательны. Записывая для каждой из этих подсистем неравенство (2) и складывая, мы и получаем (1) с несущественной заменой ε на 2ε.

Всякая абсолютно непрерывная функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение. Действительно, пусть число $\delta>0$ отвечает данному $\varepsilon>0$ из условия абсолютной непрерывности функции $F(x)$. Тогда в любом интервале длины $\leqslant\delta$ функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение, не превосходящее ε, а поэтому во всем промежутке $[a, b]$, который можно представить как соединение конечного числа отрезков длины $\leqslant\delta$, изменение функции $F(x)$ также конечно.

Абсолютно непрерывную функцию как функцию с ограниченным изменением можно представить в виде разности двух неубывающих:

$$F(x)=V(x)-G(x), \qquad V(x)=\mathbf{V}_a^x[F]. \tag{3}$$

Мы утверждаем, что уменьшаемое и вычитаемое в разложении (3) также абсолютно непрерывны. Проверим это для уменьшаемого $V(x)$.

Пусть задано $\varepsilon < 0$, найдено $\delta > 0$ из условия абсолютной непрерывности функции $F(x)$ и рассматривается система интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ с общей длиной $< \delta$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \{V(b_k) - V(a_k)\} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}_{a_k}^{b_k}[F]. \tag{4}$$

Эта сумма есть точная верхняя грань величин

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} |F(x_{k,j+1}) - F(x_{kj})|, \tag{5}$$

где $a_k = x_{k_0} < x_{k1} < \ldots < x_{k\eta_k} = b_k$ есть произвольное подразбиение интервала (a_k, b_k). Так как сумма длин интервалов подразбиения интервала (a_k, b_k) равна длине самого интервала (a_k, b_k) и общая сумма длин интервалов (a_k, b_k) меньше δ, то в силу абсолютной непрерывности функции $F(x)$ каждое из выражений (5) не превосходит ε. Но тогда и сумма (4) не превосходит ε; отсюда следует, что функция $V(x)$ абсолютно непрерывна, что и утверждалось.

Как всякая функция с ограниченным изменением, абсолютно непрерывная функция имеет почти всюду производную. Для дальнейшего установим следующую лемму:

Лемма. *Если неубывающая абсолютно непрерывная функция $F(x)$ имеет производную, равную нулю почти всюду, то $F(x)$ постоянна.*

Доказательство. Область изменения функции $F(x)$ есть отрезок $S = [F(a), F(b)]$; мы докажем, что его мера равна нулю, чем и будет доказана теорема. Обозначим через Z множество (меры нуль) тех точек x, где производная или не существует, или не равна нулю, через E — множество (полной меры) тех точек, где производная $F(x)$ существует и равна нулю. Множество Z отображается функцией $F(x)$ в некоторое множество $F(Z)$, а множество E — в $F(E)$; очевидно, что $S = F(E) + F(Z)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ из условия абсолютной непрерывности функции $F(x)$ и покроем множество Z (возможно, счетной) системой неперекрывающихся промежутков с общей длиной $< \delta$[1]); тогда множество $F(Z)$ окажется покрытым системой промежутков с общей длиной $\leqslant \varepsilon$. Так как ε произвольно мало, то мера множества $F(Z)$ равна нулю. Далее, для каждой точки $x \in E$, поскольку в этой точке производная $F(x)$ равна нулю, можно указать точку $\xi > x$, для которой

$$F(\xi) - F(x) \leqslant \varepsilon(\xi - x),$$

---

[1]) Систему неперекрывающихся промежутков можно получить из любого покрытия $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \supset Z$, выбрасывая из каждого Δ_n точки, входящие в $\Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1}$.

или, что то же самое,

$$\varepsilon\xi - F(\xi) \geqslant \varepsilon x - F(x).$$

Таким образом, x есть точка подъема вправо для функции $G(x) = \varepsilon x - F(x)$ (§ 1). По лемме Рисса множество точек подъема вправо открыто, и для составляющих интервалов (a_k, b_k) этого множества имеют место неравенства

$$\varepsilon a_k - F(a_k) \leqslant \varepsilon b_k - F(b_k)$$

или

$$F(b_k) - F(a_k) \leqslant \varepsilon(b_k - a_k),$$

откуда

$$\sum [F(b_k) - F(a_k)] \leqslant \varepsilon \sum (b_k - a_k) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Таким образом, множество $F(E)$ покрывается системой промежутков $(F(a_k), F(b_k))$ с общей длиной как угодно малой. Отсюда $F(E)$ имеет меру нуль. Следовательно, и отрезок $S = F(Z) + F(E)$ имеет меру нуль, т. е. сводится в одну точку, что и требуется.

Замечание. Анализируя приведенное доказательство, заметим, что из него можно извлечь и несколько более общие результаты, а именно:

а) если функция $F(x)$ не убывает и абсолютно непрерывна, то образ $F(Z)$ любого множества Z меры нуль есть множество меры нуль;

б) если функция $F(x)$ не убывает и имеет на множестве E производную, равную нулю, то образ $F(E)$ множества E имеет меру нуль.

Теперь мы можем доказать основную теорему этого параграфа, дающую решение проблемы II.

Теорема (А. Лебег). *Производная $\varphi(x)$ абсолютно непрерывной функции $F(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, суммируема, и для каждого x*

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Доказательство. Абсолютно непрерывную функцию $F(x)$ можно представить в виде разности неубывающих абсолютно непрерывных функций; поэтому без ограничения общности можно считать, что $F(x)$ — неубывающая функция. Пусть $\varphi(x)$ — ее производная; по доказанному, $\varphi(x)$ суммируема. Положим:

$$G(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Функция $G(x)$ абсолютно непрерывна, и, как мы видели в § 2, ее производная совпадает почти всюду с $\varphi(x)$. Но производная абсолютно непрерывной функции $F(x)$ также совпадает с функцией $\varphi(x)$; поэтому производная разности $H(x)=F(x)-G(x)$ почти всюду равна нулю. Заметим, что функция $H(x)$ также не убывает, поскольку в силу неравенства (2) п. 1

$$H(\beta)-H(\alpha)=F(\beta)-F(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx\geqslant 0.$$

Поэтому согласно лемме $H(x)$ есть постоянная, например C_0. Но тогда мы имеем:

$$F(x)=G(x)+H(x)=\int_{a}^{x}\varphi(\xi)+C_0.$$

Полагая $x=a$, получаем значение $C_0=F(a)$. Теорема доказана.

Рассмотрим неубывающую непрерывную, но не абсолютно непрерывную функцию $F(x)$. Повторяя для нее предыдущее рассуждение, мы получим, что разность

$$Z(x)=F(x)-G(x)$$

есть неубывающая непрерывная функция с производной, почти всюду равной нулю. Так как $Z(x)$ вместе с $F(x)$ не является абсолютно непрерывной, то $Z(x)$ — не постоянная. Мы получаем представление непрерывной неубывающей функции $F(x)$ в форме суммы двух неубывающих непрерывных функций

$$F(x)=G(x)+Z(x), \tag{4}$$

первая из которых абсолютно непрерывна, а вторая имеет производную, почти всюду равную нулю.

Для произвольной неубывающей функции (возможно, разрывной) это разложение в соответствии с последним пунктом § 1 дополняется еще одним слагаемым — функцией скачков $H(x)$:

$$F(x)=G(x)+Z(x)+H(x).$$

От неубывающих функций легко перейти к функциям с ограниченным изменением. Равенство (4) остается в силе и для непрерывной функции $F(x)$ с ограниченным изменением; при этом $G(x)$ — абсолютно непрерывная функция, $Z(x)$ — так называемая сингулярная функция, т. е. непрерывная функция с ограниченным изменением, имеющая производную, почти всюду равную нулю.

Заметим кстати, что разложение данной непрерывной функции $F(x)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие может быть единственным лишь с точностью до аддитивной постоянной. Пусть, в самом деле,

$$F(x)=G(x)+Z(x)=G_1(x)+Z_1(x),$$

где G и G_1 абсолютно непрерывны, Z и Z_1 сингулярны; тогда

$$G - G_1 = Z_1 - Z$$

и функция $G - G_1$, абсолютно непрерывная и вместе с правой частью имеющая производную, почти всюду равную нулю, необходимо должна быть постоянной.

4. Интегрирование по частям. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — суммируемые функции и $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ — их неопределенные интегралы. Имеет место формула

$$\int_a^b \Phi(x)\psi(x)\,dx + \int_a^b \Psi(x)\varphi(x)\,dx = \Phi(b)\Psi(b) - \Phi(a)\Psi(a). \quad (1)$$

Для доказательства достаточно заметить, что функция $\Phi(x)\Psi(x)$ абсолютно непрерывна вместе с $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ и ее производная выражается по обычной формуле

$$(\Phi(x)\Psi(x))' = \Phi(x)\psi(x) + \varphi(x)\Psi(x),$$

из которой (1) получается интегрированием в пределах от a до b.

Задачи. **1.** Построить непрерывную функцию, у которой производная существовала бы всюду, но не была бы суммируемой.

Отв. Например, $y = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$.

2. Дано, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\sum(b_k - a_k) < \delta$ вытекает $\sum|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ (т. е. в условии абсолютной непрерывности опущено требование неперекрывания интервалов (a_k, b_k)). Показать, что $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x'') - F(x')| \leqslant C|x'' - x'|.$$

3. Доказать теорему, обратную лемме (стр. 290, Замечание): если функция $F(x)$ не убывает и образ $F(Z)$ множества Z, где производная $F(x)$ не существует или бесконечна, имеет меру нуль, то $F(x)$ абсолютно непрерывна.

4. Если $F(x)$ абсолютно непрерывна, то и $|F(x)|^p$ при $p \geqslant 1$ также абсолютно непрерывна; для $p < 1$ теорема неверна.

5. Пусть $\varphi(x)$ — суммируемая функция на отрезке $[a, b]$; доказать, что полное изменение функции $F(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi$ равно $\int_a^b |\varphi(\xi)|\,d\xi$.

Указание. Следствие задачи 7 п. 2 § 2. Независимое построение: аппроксимировать $\varphi(x)$ в метрике L_1 ступенчатыми функциями.

6. Показать, что абсолютно непрерывные функции образуют замкнутое подпространство в пространстве функций с ограниченным изменением (см. задачу 6 п. 2 § 2).

§ 4. Функции нескольких переменных

1. Мы ставим себе задачей теперь перенесение результатов §§ 1—3, относящихся к случаю одного переменного, на случай нескольких переменных. Будем рассматривать для простоты случай двух переменных.

Начнем с формулировки известных фактов классического анализа. Если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция, то можно образовать ее интеграл по любой (замкнутой) области G:

$$\Phi(G) = \iint_G \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Он заменяет, естественно, неопределенный интеграл $\int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi$, который мы рассматривали, когда имели дело с одним переменным.

Функция точки $\varphi(x, y)$ может быть получена из функции области $\Phi(G)$ с помощью предельной операции, заменяющей дифференцирование:

$$\varphi(x, y) = \lim_{G \to (x, y)} \frac{1}{|G|} \iint_G \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $|G|$ обозначает площадь области G, а $G \to (x, y)$ означает, что область G стягивается в точку (x, y). Если теперь $\varphi(\xi, \eta)$ — произвольная суммируемая функция, определенная в прямоугольнике $\Delta = \{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$, то вместо области G мы можем взять любое измеримое множество $\mathscr{E}$. Естественно возникают следующие проблемы:

Проблема III. *Имеет ли место предельное соотношение*

$$\varphi(x, y) = \lim_{\mathscr{E} \to (x, y)} \frac{1}{\mu\mathscr{E}} \iint_{\mathscr{E}} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

почти всюду в области Δ, если $\varphi(x, y)$ — произвольная суммируемая функция?

Обратная задача может быть поставлена следующим образом:

Проблема IV. *Пусть задана функция измеримого множества $\Phi(\mathscr{E})$; в каком случае можно утверждать, что (хотя бы почти всюду) существует ее «плотность»*

$$\varphi(x, y) = \lim_{\mathscr{E} \to (x, y)} \frac{\Phi(\mathscr{E})}{\mu\mathscr{E}},$$

и при каких условиях функция $\Phi(\mathscr{E})$ *восстанавливается по своей плотности в форме интеграла*

$$\Phi(\mathscr{E})=\iint\limits_{\mathscr{E}}\varphi(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta?$$

Решение обеих проблем мы сведем к решению аналогичных проблем для одного переменного, рассмотренных в §§ 1—3, с помощью так называемого принципа соответствия Рисса.

2. Теорема 1 (принцип соответствия Ф. Рисса). *Между множеством почти всех точек плоскости и множеством почти всех точек прямой можно установить взаимно однозначное соответствие так, что измеримые подмножества будут соответствовать измеримым, и притом равной меры.*

Доказательство. Разобьем ось ξ на интервалы $(m,\ m+1)$ длины 1 и плоскость $(x,\ y)$ — на квадраты со стороной 1 с вершинами в целых точках. Сопоставим произвольным образом взаимно однозначно указанные интервалы оси с указанными квадратами плоскости; тех и других счетное множество, и сопоставление возможно. Далее разделим каждый квадрат на 4 равных квадрата площадью $\frac{1}{4}$, соответствующий интервал — на 4 равных интервала длины $\frac{1}{4}$, и опять-таки произвольно сопоставим каждый из этих меньших квадратов с одним из указанных меньших интервалов. Будем это построение продолжать неограниченно, следя лишь за тем, чтобы с интервалами, получающимися при делении на 4 части очередного интервала Δ, сопоставлялись квадраты, получающиеся при делении на 4 части квадрата, соответствующего интервалу Δ. Совокупность всех полученных при этом квадратов на плоскости будем называть *плоской сетью*, а совокупность интервалов на оси — *линейной сетью*.

По построению каждой последовательности вложенных друг в друга квадратов плоской сети отвечает последовательность вложенных друг в друга промежутков линейной сети, и обратно. Мы продолжим это соответствие на соответствие между точками плоскости и точками прямой следующим образом.

Для определенности будем рассматривать только «правильные» последовательности квадратов и промежутков, т. е. такие, n-й член которых имеет меру (площадь или длину) ровно $\frac{1}{4^n}$.

Если точка на плоскости имеет обе координаты двоично-иррациональные, то существует единственная правильная последовательность квадратов плоской сети, содержащих эту точку. Рассматривая соответствующую последовательность промежутков оси, получим в их пересечении однозначно определенную точку оси, которую и поставим в соответствие взятой точке плоскости. Если точка на плоскости имеет одну координату (или обе) двоично-рациональную, то существуют две (или четыре) правильные последовательности квадратов плоской сети, содержащих эту точку; таким образом, мы можем ей сопоставить две (или четыре) точки оси. Так как множество всех точек плоскости с хотя бы одной рациональной координатой, как множество меры нуль, покрывается системой квадратов сети с общей площадью сколь угодно малой, то и совокупность соответствующих двоек и четверок точек оси покрывается системой промежутков с такой же общей длиной и, следовательно, имеет линейную меру нуль. (Очевидно, четверок даже не более счетного множества.) Обратно, если точка оси имеет двоично-иррациональную координату, то ей можно сопоставить однозначно определенную точку плоскости, используя единственную правильную последовательность промежутков, содержащую эту точку. Если же точка на прямой имеет двоично-рациональную координату, то ей сопоставляется, вообще говоря, пара точек плоскости; но множество всех точек плоскости, участвующих в таких парах, не более чем счетно.

В итоге мы получаем возможность сопоставить взаимно однозначно два множества полной меры; множество точек плоскости с обеими двоично-иррациональными координатами, за вычетом тех, которые участвуют в указанных парах, и множество точек оси с двоично-иррациональной координатой, за вычетом множества меры нуль точек, участвующих в указанных двойках и четверках. Покажем, что при этом соответствии *каждое измеримое множество*, например, в промежутке $[0, 1]$ *переходит в измеримое множество* в соответствующем квадрате *с той же мерой*. Вначале заметим, что каждое открытое множество на оси может быть представлено в виде объединения некоторого (счетного) множества промежутков сети без общих внутренних точек. Пусть E — произвольное измеримое множество на отрезке $[0, 1]$. Существуют последовательности открытых множеств O_n и O'_n $(n=1, 2, \ldots)$, которые обладают тем свойством, что

$$O_n \supset E, \quad O'_n \supset CE,$$
$$1 \leqslant \mu O_n + \mu O'_n \leqslant 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Пусть $\mathscr{E}$ — образ множества E на плоскости. Рассматривая совокупность множеств G_n и G'_n на плоскости, составленных из квадратов, соответствующих двоично-рациональным промежуткам, входящим в O_n и O'_n, мы получим соотношения

$$G_n \supset \mathscr{E}, \quad G'_n \supset C\mathscr{E},$$
$$1 \leqslant \mu G_n + \mu G'_n \leqslant 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Из этих соотношений следует, что $\mathscr{E}$ измеримо (гл. IV, § 4, п. 5) и что оно имеет меру

$$\mu\mathscr{E}=\lim\mu G_n=\lim\mu O_n=\mu E,$$

что нам и требовалось.

Мы можем, далее, распространить соответствие и на измеримые функции на оси и на плоскости, ставя в соответствие функции $f(\xi)$ такую функцию $\varphi(x, y)$, для которой $\varphi(x, y)=f(\xi)$, если (x, y) соответствует точке ξ. При этом функции $f(\xi)$ и $\varphi(x, y)$ не только измеримы, но даже «равноизмеримы» в том смысле, что при любом C множества $\{\xi: f(\xi)<C\}$ и $\{(x,y): \varphi(x, y)<C\}$ имеют равную меру. Отсюда следует далее, что интегралы от функций $f(\xi)$ и $\varphi(x, y)$ по соответствующим измеримым множествам E и $\mathscr{E}$ имеют равные значения.

3. Мы можем теперь приступить к решению проблемы III. Будем говорить, что последовательность $\mathscr{E}_n$ плоских измеримых множеств *правильно стягивается* к точке $P=(x, y)$, если существует последовательность квадратов Q_n плоской сети, содержащая точку P, причем $\mu Q_n\to 0$, $\mathscr{E}_n\subset Q_n$, $\mu\mathscr{E}_n\geqslant\alpha\mu Q_n$, где $\alpha>0$ — фиксированная постоянная.

Теорема 2. *Если $\varphi(x, y)$ суммируема на прямоугольнике Δ, то почти для всех точек этого прямоугольника*

$$\varphi(x, y)=\lim_{\mathscr{E}_n\to(x, y)}\frac{1}{\mu\mathscr{E}_n}\iint_{\mathscr{E}_n}\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{1}$$

какова бы ни была последовательность измеримых множеств $\mathscr{E}_n$, правильно стягивающаяся к точке (x, y).

Доказательство. Суммируемой функции $\varphi(x, y)$ в силу принципа соответствия отвечает суммируемая функция $f(\xi)$, точке (x, y) в плоскости — точка ξ на оси, последовательности квадратов Q_n — последовательность интервалов Δ_n, содержащих точку ξ, и последовательности множеств $\mathscr{E}_n$ — последовательность измеримых множеств $E_n\subset\Delta_n$, причем $\mu E_n\geqslant\alpha\mu\Delta_n$; кроме того, имеет место равенство

$$\frac{1}{\mu\mathscr{E}_n}\iint_{\mathscr{E}_n}\varphi(x, y)\,dx\,dy=\frac{1}{\mu E_n}\int_{E_n}f(\xi)\,d\xi.$$

По лемме § 2 (п. 4) последнее выражение имеет пределом $f(x)$ почти во всех точках, именно во всех точках Лебега функции $f(\xi)$. Возвращаясь к функции $\varphi(x, y)$, получаем, что предельное соотношение (1) выполнено почти во всех точках прямоугольника Δ, что и требовалось.

4. Переходим теперь к решению проблемы IV.

Нам задана функция $\Phi(\mathscr{E})$ измеримого множества $\mathscr{E}$; спрашивается: когда можно утверждать, что функция $\Phi(\mathscr{E})$ представляется в виде

$$\Phi(\mathcal{E}) = \iint\limits_{\mathcal{E}} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{1}$$

где $\varphi(x, y)$ — суммируемая функция?

Укажем вначале необходимые условия такой представимости. Если функция $\Phi(\mathcal{E})$ имеет вид (1), то она обладает следующими очевидными свойствами:

а) аддитивность: $\Phi(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = \Phi(\mathcal{E}_1) + \Phi(\mathcal{E}_2)$, если измеримые множества $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ не имеют общих точек;

б) абсолютная непрерывность: для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что из $\mu\mathcal{E} < \delta$ следует $|\Phi(\mathcal{E})| < \varepsilon$ (см. стр. 169 и 174).

Покажем, что этих свойств функции $\Phi(\mathcal{E})$ — даже распространенных не на все измеримые множества, а лишь на те, которые составлены из квадратов сети,— достаточно, чтобы утверждать, что функция $\Phi(\mathcal{E})$ представляется в форме (1).

В силу принципа соответствия функции $\Phi(\mathcal{E})$ можно сопоставить функцию $\Psi(E)$, определенную на измеримых подмножествах оси x. От функции множества $\Psi(E)$ можно перейти к функции точки $F(x)$, полагая $F(x)$ равной значению $\Psi(E)$ на интервале $E = (a, x)$. Полученная функция $F(x)$ абсолютно непрерывна в обычном смысле; действительно, для заданной системы непересекающихся интервалов $\Delta_k = (a_k, b_k)$ с общей длиной $< \delta$

$$\sum [F(b_k) - F(a_k)] = \sum \Psi(\Delta_k) = \sum \Phi(\mathcal{E}_k) = \Phi\left(\sum \mathcal{E}_k\right), \tag{2}$$

где $\mathcal{E}_k$ — множество на плоскости, соответствующее интервалу Δ_k. Так как сумма мер множеств $\mathcal{E}_k$ вместе с суммой длин интервалов Δ_k меньше δ, то каждая из сумм (2) по абсолютной величине меньше ε, что и требовалось. Согласно основной теореме § 3 функция $F(x)$ представляется в форме интеграла от своей производной $\varphi(x) = F'(x)$:

$$F(x) = \int\limits_a^x \varphi(\xi)\, d\xi + F(a).$$

Суммируемой функции $\varphi(\xi)$ отвечает по принципу соответствия суммируемая функция $\varphi(x, y)$ на плоскости. Покажем, что функция множества

$$G(\mathcal{E}) = \iint\limits_{\mathcal{E}} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

совпадает с исходной функцией $\Phi(\mathcal{E})$. Так как $\Phi(\mathcal{E})$ и $G(\mathcal{E})$ аддитивны и абсолютно непрерывны, то совпадение достаточно доказать для множеств $\mathcal{E}$, являющихся квадратами сети, поскольку согласно теореме п. 3 § 4 гл. IV любое измеримое множество может быть заменено конечной суммой таких квадратов с точностью до множества как угодно малой меры. Но если $\mathscr{E}$ — квадрат сети, то ему соответствует интервал сети на прямой, например $\Delta=(\alpha, \beta)$; поэтому

$$\Phi(\mathscr{E})=\Psi(\Delta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx,$$

$$G(\mathscr{E})=\iint_{\mathscr{E}}\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx,$$

откуда $\Phi(\mathscr{E})=G(\mathscr{E})$, что и требовалось.

По доказанному выше функция $\varphi(\xi, \eta)$ может быть и непосредственно получена из $\Phi(\mathscr{E})$ с помощью предельной операции

$$\varphi(x, y)=\lim_{\mathscr{E}_n\to(x, y)}\frac{1}{\mu\mathscr{E}_n}\iint_{\mathscr{E}_n}\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=\lim_{\mathscr{E}_n\to(x, y)}\frac{\Phi(\mathscr{E}_n)}{\mu\mathscr{E}_n},$$

где $\mathscr{E}_n$ — правильно стягивающаяся к точке (x, y) последовательность измеримых множеств; предел существует почти в каждой точке. Итак, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Для того чтобы функция множеств $\Phi(\mathscr{E})$ имела почти в каждой точке плотность $\varphi(x, y)$ и была справедлива для каждого измеримого множества $\mathscr{E}$ формула*

$$\Phi(\mathscr{E})=\iint_{\mathscr{E}}\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(\mathscr{E})$ была аддитивна и абсолютно непрерывна.

5. В качестве применения доказанной теоремы найдем общий вид линейного непрерывного функционала $f[\varphi]$ в пространстве $L_1(D)$ всех функций, интегрируемых в данной плоской области D.

Условие непрерывности функционала f можно записать в виде неравенства

$$|f[\varphi]|\leqslant C\|\varphi\|=C\iint_{D}|\varphi(x, y)|\,dx\,dy$$

с фиксированной постоянной C.

Сопоставим функционалу f функцию измеримого множества $F(\mathscr{E})$, равную значению функционала f на характеристической функции $\chi_{\mathscr{E}}$ множества $\mathscr{E}$. Функция $F(\mathscr{E})$ аддитивна вместе с функционалом f и удовлетворяет неравенству

$$|F(\mathscr{E})|=|f(\chi_{\mathscr{E}})|\leqslant C\iint_{\mathscr{E}}\chi_{\mathscr{E}}(x, y)\,dx\,dy=C\mu\mathscr{E}, \tag{3}$$

откуда следует, что $F(\mathscr{E})$ абсолютно непрерывна. По теореме 3 функция $F(\mathscr{E})$ обладает почти в каждой точке плотностью

$$g(x, y) = \lim_{\mathscr{E}_n \to (x, y)} \frac{F(\mathscr{E}_n)}{\mu \mathscr{E}_n}.$$

Очевидно, что функция $g(x, y)$ по модулю не превосходит C. Функция $F(\mathscr{E})$ по той же теореме 3 восстанавливается через $g(x, y)$ по формуле

$$F(\mathscr{E}) = \iint_{\mathscr{E}} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_{D} \chi_{\mathscr{E}}(\xi, \eta)\, g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Итак, для характеристических функций измеримых множеств

$$f[\chi_{\mathscr{E}}] = F(\mathscr{E}) = \iint_{D} \chi_{\mathscr{E}}(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy.$$

Функционал

$$f_1[\varphi] = \iint_{D} \varphi(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy,$$

очевидно, является линейным непрерывным функционалом на пространстве $L_1(D)$. Он совпадает с функционалом $f[\varphi]$ на характеристических функциях измеримых множеств; но тогда он совпадает с f и на всех ступенчатых функциях и в пределе вообще на всех функциях $\varphi \in L_1(D)$.

Итак, $f = f_1$, и мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Каждый линейный непрерывный функционал $f[\varphi]$ в пространстве $L_1(D)$ имеет вид*

$$f[\varphi] = \iint_{D} \varphi(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy,$$

где $g(x, y)$ — ограниченная измеримая функция.

Не требует разъяснений, что аналогичная теорема справедлива для случая функций любого числа независимых переменных.

6. Теорема 3, доказанная в п. 4, является аналогом теоремы о дифференцируемости и об интегральном представлении абсолютно непрерывной функции одного переменного (§ 3).

Рассмотрим теперь, какой аналог имеет теорема о разложении любой монотонной — например, неубывающей — непрерывной функции $F(x)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие.

Неубывающей непрерывной функции $F(x)$ соответствует неотрицательная аддитивная функция интервала сети (α, β), равная $F(\beta) - F(\alpha)$, которую можно распространить и на любые конечные системы интервалов сети (пользуясь аддитивностью). По принципу соответствия на системах квадратов сети в плоскости будет задана неотрицательная аддитивная функция $\Phi(\mathscr{E})$. Функция $\Phi(\mathscr{E})$ непрерывна в том смысле, что если квадрат сети $\mathscr{E}_n$ стягивается в точку (может быть, граничную), то $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(\mathscr{E}_n) = 0$. Обратно, любой аддитивной неотрицательной непрерывной функции $\Phi(\mathfrak{E})$, определенной на конечных системах квадратов сети, отвечает неотрицательная непрерывная функция интервалов сети (α, β) и, следовательно, неубывающая непрерывная функция $F(x)$.

Разложим функцию $F(x)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие:

$$F(x) = G(x) + Z(x).$$

Этому разложению отвечает разложение функции множества также на две составляющие:

$$\Phi(\mathfrak{E}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}(\mathfrak{E}).$$

Первая составляющая $\mathfrak{G}(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна и представляется в форме интеграла от своей плотности. Рассмотрим, каким свойством обладает вторая составляющая $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$. Пусть ξ_0 — любая точка, в которой производная функции $Z(x)$ равна нулю, и (x_0, y_0) — соответствующая точка в плоскости; пусть, далее, $\mathfrak{E}_n$ — последовательность измеримых множеств специального вида, именно конечных систем квадратов сети, правильно стягивающаяся к точке (x_0, y_0). Множество $\mathfrak{E}_n$ заключено в квадрате сети Q_n и $\mu\mathfrak{E}_n \geqslant \alpha\mu Q_n$, $\alpha > 0$. Квадрат сети Q_n соответствует интервалу (α_n, β_n), стягивающемуся к точке ξ_0. Поэтому

$$\frac{\mathfrak{Z}(\mathfrak{E}_n)}{\mu\mathfrak{E}_n} \leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\mu Q_n}\mathfrak{Z}(\mathfrak{E}_n) \leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\beta_n - \alpha_n}[Z(\beta_n) - Z(\alpha_n)] \to 0,$$

так как в точке ξ_0 производная у функции $Z(x)$ равна нулю. Таким образом, если определять плотность с помощью только квадратов сети и их конечных сумм, правильно стягивающихся к точке (x, y), то плотность функции $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ также оказывается почти всюду равной нулю.

Замечание. При рассмотрении неабсолютно непрерывных функций множеств $\Phi(\mathfrak{E})$ мы были вынуждены ограничиться их значениями не на всех измеримых по Лебегу множествах, а только на квадратах сети и их конечных объединениях. Это ограничение было не случайным. На самом деле, пользуясь процессом, аналогичным построению системы измеримых по Лебегу множеств, начиная от интервалов (гл. IV, § 4), для каждой неотрицательной счетно-аддитивной функции прямоугольников $\Phi(\mathfrak{E})$ можно определить систему $\sigma(\Phi)$ множеств, измеримых по функции Φ, или, короче, Φ-измеримых. Но *если $\Phi(\mathfrak{E})$ непрерывна и не абсолютно непрерывна, то система $\sigma(\Phi)$ заведомо содержит не все множества, измеримые по Лебегу.* Действительно, в этом случае всегда существует несчетное множество $\mathfrak{E}_0$, у которого $\mu\mathfrak{E}_0 = 0$, $\Phi(\mathfrak{E}_0) > 0$; далее можно найти $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_0$, уже Φ-неизмеримое, так что $\mathfrak{E}_1 \overline{\in} \sigma(\Phi)$; в то же время $\mathfrak{E}_1$ измеримо по Лебегу и $\mu\mathfrak{E}_1 = \mu\mathfrak{E}_0 = 0$.

§ 5. Интеграл Стильтьеса

1. При построении теории интеграла мы отправлялись от известных значений интегралов ступенчатых функций. Интеграл от «элементарной ступеньки» — функции, равной 1 на интервале Δ и 0 вне этого интервала, — мы полагали равным длине интервала Δ. Интервалам равной длины отвечали одинаковые значения интегралов, так что при интегрировании прямая представляла собой совершенно однородное многообразие, устроенное одинаково во всех своих частях. Но во многих вопросах по существу нельзя считать ось однородной. В некоторых случаях, как, например, для неоднородной струны или неоднородного стержня, мы учитывали неоднородность введением переменной плотности. К сожалению, введение плотности не всегда спасает от затруднений (пример: струна, нагруженная точечными бусинками). Наиболее целесообразный подход к рассмотрению такого рода проблем — введение меры промежутков, учитывающей неоднородность оси.

Промежутком оси будем считать любой из пяти следующих видов множеств:

1) отрезок $[\alpha, \beta]$ (концы включены);
2) интервал (α, β) (концы исключены);
3) полуинтервал $(\alpha, \beta]$ (включен правый конец);
4) полуинтервал $[\alpha, \beta)$ (включен левый конец);
5) отдельная точка $[\alpha]$.

Пусть каждому промежутку Δ на отрезке $[a, b]$ сопоставлено некоторое неотрицательное число $\rho\Delta$, причем выполняется условие полной аддитивности: если промежуток Δ есть объединение промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \ldots$ без общих точек, то

$$\rho\Delta = \rho\Delta_1 + \rho\Delta_2 + \ldots + \rho\Delta_n + \ldots$$

Мы говорим в таком случае, что нам задана *мера Стильтьеса*.

Возможны случаи, когда отдельные точки имеют положительную меру Стильтьеса. Впрочем, это может случиться сравнительно редко, самое большее для счетного множества точек, поскольку лишь конечное число точек могут иметь меру, превосходящую заданную постоянную $c > 0$.

Примеры. *1.* $\rho\Delta$ есть длина промежутка Δ (мера Лебега).

2. $\rho\Delta = \int\limits_{\Delta} \varphi(x)\,dx,$

где $\varphi(x)$ — фиксированная неотрицательная суммируемая функция.

3. $\rho\Delta$ равна 1 для всякого Δ, содержащего точку c, и 0 для всякого Δ, не содержащего точки c.

Условие полной аддитивности меры можно заменить на два условия: условие ее (конечной) аддитивности и условие непрерывности.

а) Условие аддитивности: если промежутки Δ_1 и Δ_2 не имеют общих точек, то

$$\rho(\Delta_1 + \Delta_2) = \rho\Delta_1 + \rho\Delta_2.$$

Естественно, что свойство аддитивности, если оно имеет место для каждой пары непересекающихся слагаемых, остается справедливым и для любого конечного числа непересекающихся слагаемых $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$:

$$\rho(\Delta_1 + \ldots + \Delta_n) = \rho\Delta_1 + \ldots + \rho\Delta_n.$$

б) Условие непрерывности: если последовательность вложенных друг в друга промежутков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ имеет в пересечении промежуток Δ, то $\rho\Delta = \lim \rho\Delta_n$.

Легко убедиться, что свойства а) и б) вытекают из условия полной аддитивности. Обратное,— что условие полной аддитивности есть следствие условий а) и б),— менее просто; мы получим этот вывод ниже из теории интеграла (стр. 304).

Можно рассматривать меру $\rho\Delta$ не только на отрезке $[a, b]$, но и на всей прямой $-\infty < x < \infty$. При этом, если мера всей прямой конечна, то этот случай ничем не отличается от случая меры, заданной на конечном отрезке, так что во всем дальнейшем можно без всяких изменений заменить отрезок $[a, b]$ на всю прямую при условии конечности ее меры.

Имея меру Стильтьеса, мы определим и соответствующий интеграл. Начинаем, как обычно, с интегрирования ступенчатых функций. Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное множество неперекрывающихся промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Функция $h(x)$, принимающая постоянное значение h_j на интервале Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, называется ступенчатой функцией. Определим интеграл Стильтьеса от функции $h(x)$ по формуле

$$I_\rho h = \sum_{j=1}^{n} h_j \rho\Delta_j.$$

Далее мы будем распространять понятие интеграла со ступенчатых функций на ρ-измеримые функции — пределы последовательностей ступенчатых функций, как мы делали в гл. IV для интеграла Лебега. На пути этого построения важным этапом было понятие множества меры нуль. В нашей новой схеме множество $Z \subset [a, b]$ называется множеством (стильтьесовской) меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ оно покрывается конечной или счетной системой интервалов с общей мерой Стильтьеса $< \varepsilon$. Заметим, что теперь отдельные точки могут быть множествами положительной меры и целые отрезки могут иметь меру нуль (как в примере 3). Последовательность функций $f_n(x)$ называется почти всюду сходящейся, если она сходится во всех точках отрезка, кроме, может быть, множества (стильтьесовской) меры нуль.

В частности, последовательность, сходящаяся почти всюду, должна фактически сходиться в точках, несущих положительную меру; зато она может вести себя совершенно произвольно на отрезках, несущих меру 0.

Мы должны определить интеграл для функций класса C_ρ^+, состоящего из функций $f(x)$, являющихся пределами (почти всюду) возрастающих последовательностей ступенчатых функций. В § 2 гл. IV это построение базировалось на двух леммах, относящихся к убывающим последовательностям ступенчатых функций и утверждающих, что соотношения $h_n \searrow 0$, $Ih_n \searrow 0$ равносильны. В доказательстве этих лемм было существенно, что множество всех точек разрыва функций h_n $(n=1, 2, \ldots)$ имеет меру нуль. В нашем случае, если отправляться от произвольных ступенчатых функций, это условие заведомо не будет выполняться, так как ничто не мешает ступенчатой функции делать скачок как раз в точке, несущей положительную меру. Из этого затруднения мы выйдем очень просто: мы потребуем, чтобы исходные ступенчатые функции не имели скачков в точках, несущих положительную меру. (Таких точек, самое большее, лишь счетное множество, как мы видели выше.)

С выполнением этого условия можно далее повторить целиком схему §§ 2—3 гл. IV. Класс C_ρ^+ (стильтьесовский) образуют функции $f(x)$, которые являются пределами почти всюду сходящихся возрастающих последовательностей ступенчатых функций $h_n(x)$ с ограниченными интегралами $I_\rho h_n$, не имеющих скачков в точках оси, несущих положительную меру. Интеграл Стильтьеса $I_\rho f$ определяется по формуле

$$I_\rho f = \lim I_\rho h_n.$$

Разности функций из класса C^+ образуют класс функций L_ρ, которые называются *суммируемыми в смысле Лебега — Стильтьеса.*

Если $\varphi = f_1 - f_2$, где $f_1 \in C_\rho^+$, $f_2 \in C_\rho^+$, то интеграл Стильтьеса от функции φ определяется по формуле

$$I_\rho \varphi = I_\rho f_1 + I_\rho f_2.$$

Проверка корректности всех этих определений проводится по схеме гл. IV.

Интеграл $I_\rho \varphi$ называется *интегралом Лебега — Стильтьеса по мере* ρ и обозначается более подробно так:

$$I_\rho \varphi = \int_a^b \varphi(x)\, \rho(dx).$$

Заметим, что ступенчатая фукция $h(x)$ с разрывом в точке положительной меры всегда может быть представлена в виде предела возрастающей или убывающей последовательности допустимых ступенчатых функций и потому $h(x)$ заведомо войдет в класс C_ρ^+ или в L_ρ, так что наше ограничение класса ступенчатых функций при построении интеграла не ведет к уменьшению всей совокупности суммируемых функций. Класс L_ρ есть линейное нормированное полное пространство с нормой

$$\|\varphi\| = I_\rho(|\varphi|).$$

Аналогично определяются пространства L_ρ^p $(p \geqslant 1)$. Естественно определяются ρ-измеримые функции, как пределы почти всюду (по мере ρ) сходящихся последовательностей ступенчатых функций. Можно определить далее ρ-измеримые множества, как множества, характеристические функции которых ρ-измеримы; ρ-мера ρ-измеримого множества E определяется по формуле

$$\rho E = I_\rho(\chi_E(x)), \qquad \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} E. \end{cases}$$

На совокупности ρ-измеримых множеств ρ-мера счетно-аддитивна, т. е.

$$\rho(E_1 + E_2 + \ldots) = \rho E_1 + \rho E_2 + \ldots,$$

если множества E_1, $E_2, \ldots$ ρ-измеримы и не имеют общих точек.

Теперь ρ-измеримая функция может быть определена как такая функция $f(x)$, у которой множество $\{x : f(x) < C\}$ ρ-измеримо при любом C. Это позволяет перенести на ρ-интегралы и всю лебеговскую теорию (гл. IV, § 4, п. 6).

Условие счетной аддитивности ρ-меры на промежутках или формально более слабые условия аддитивности и непрерывности (стр. 301—302) играют во всех этих построениях существенную роль. Во-первых, эти условия существенны при определении множеств ρ-меры нуль. С одной стороны, промежуток Δ имеет меру нуль, если ему приписана ρ-мера: $\rho\Delta = 0$. С другой стороны, в соответствии с приведенным выше условием промежуток Δ меры нуль возможно покрыть системой интервалов — здесь даже одним интервалом — меры как угодно малой. Условие непрерывности обеспечивает согласование этих определений. Далее, по нашему построению, мера промежутка Δ, у которого один или оба конца несут положительную меру, определяется через интеграл как $I_\rho(\Delta)$, что есть предел мер промежутков $\rho\Delta_n$, концы которых имеют меру нуль; условие непрерывности обеспечивает равенство $I_\rho(\Delta) = \rho\Delta$. Заметим, наконец, что мы получили через теорию интеграла и доказательство полной аддитивности конечно-аддитивной и непрерывной меры Стильтьеса.

2. Мере ρ можно сопоставить неубывающую функцию

$$F(x) = \rho\,[a, x].$$

По функции $F(x)$ мера ρ единственным образом восстанавливается для всякого промежутка, а именно мы имеем:

$$\rho[a, x] = F(x), \tag{1}$$
$$\rho(x, x'] = \rho[a, x'] - \rho]a, x] = F(x') - F(x). \tag{2}$$

Для полуинтервала $[a, x)$ можно написать следующее равенство:

$$\rho[a, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}] + \rho[a, x_1]$$
$$(a < x_1 < x_2 < \ldots < x, \ \lim_{n\to\infty} x_n = x).$$

Заметим, что на этом месте использована полная аддитивность функции ρ. С помощью функции F последнее соотношение записывается так:

$$\rho[a, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [F(x_{n+1}) - F(x_n)] + F(x_1) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x-0).$$

Теперь уже легко найти $\rho\Delta$ для всех остальных типов промежутков:

$$\rho[x, x') = \rho[a, x') - \rho[a, x) = F(x'-0) - F(x-0), \tag{3}$$
$$\rho(x, x') = \rho[a, x') - \rho[a, x] = F(x'-0) - F(x), \tag{4}$$
$$\rho[x, x'] = \rho[a, x'] - \rho[a, x) = F(x') - F(x+0), \tag{5}$$
$$\rho[x] = \rho[a, x] - \rho[a, x) = F(x) - F(x-0). \tag{6}$$

Функция $F(x)$, определяемая равенством (1), непрерывна справа в каждой точке, так как

$$F(x+0) = \lim_{x_n\to x+0} F(x_n) = F(x_1) - [F(x_1) - F(x_2)] - \ldots =$$
$$= \rho[a, x_1] - \rho[x_2, x_1] - \ldots = \rho[a, x] = F(x).$$

Как показывает равенство (6), в каждой точке x, несущей ненулевую ρ-меру, функция $F(x)$ претерпевает скачок, равный ρ-мере точки x; в остальных точках функция $F(x)$ непрерывна.

Обратно, произвольная неубывающая непрерывная справа функция $F(x)$ определяет по формулам (1)—(6) неотрицательную функцию промежутков; нетрудно проверить, что эта функция промежутков $\rho\Delta$ аддитивна и непрерывна, а следовательно, и счетно аддитивна. Функция $F(x)$ называется по отношению к мере Стильтьеса ρ ***производящей функцией***.

В случае конечной меры на бесконечном промежутке, уходящем влево до $-\infty$, производящая функция соответственно задается равенством

$$F(x) = \rho[-\infty, x],$$

формально получающимся из (1) заменой a на $-\infty$. Заметим, что точка $-\infty$ (и $+\infty$) также может нести положительную меру.

В общем случае интеграл Лебега — Стильтьеса, построенный по производящей функции $F(x)$, обозначается символом

$$I_\rho \varphi = \int_a^b \varphi(x)\,dF(x). \tag{7}$$

Это обозначение очень удобно и находится, как мы увидим ниже, в соответствии с остальными общепринятыми обозначениями. Укажем на одно отличие. Полагая $\varphi(x) \equiv 1$, получим согласно определению

$$\int_a^b dF(x) = \rho\,[a, b] = F(b),$$

а не $F(b) - F(a)$, как было бы естественно. Это исключение имеет значение, разумеется, лишь если $F(a) \neq 0$, т. е. если точка a несет положительную меру. Функция $F(x)$ по отношению к интегралу (7) называется *интегрирующей функцией*.

3. Рассмотрим некоторые отдельные типы интегрирующих функций.

а) Интегрирующая функция $F(x)$ есть функция скачков: имеются точки x_n и числа p_n, $\sum p_n < \infty$, так что $F(x)$ задана формулой вида

$$F(x) = \sum_{x_n \leqslant x} p_n.$$

Как было показано в § 1, п. 3, $F(x)$ непрерывна справа.

В этом случае мера $\rho\Delta$ промежутка Δ есть сумма всех p_n, соответствующих точкам x_n, лежащим в Δ. Интеграл от ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение h_j в промежутке Δ_j, равен

$$\sum_j h_j \rho\Delta_j = \sum_j h_j \sum_{x_n \in \Delta_j} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} h(x_n)\,p_n.$$

Если последовательность ступенчатых функций $h_\nu(x)$, возрастая, стремится почти всюду по мере ρ к функции $f(x)$, причем $I_\rho h_\nu$ ограничены, то это значит, что функции $h_\nu(x)$ при $\nu \to \infty$ стремятся к $f(x)$ в каждой из точек x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, причем

$$I_\rho f = \lim_{\nu \to \infty} I_\rho h_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\,p_n.$$

Переходя к разностям, получаем, что класс L_ρ образован функциями $\varphi(x)$, определенными (однозначно) только в точках x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, причем

$$I_\rho \varphi = \sum_n \varphi(x_n)\,p_n \quad \text{и} \quad \sum_n p_n\,|\varphi(x_n)| < \infty.$$

Легко проверить, что любая функция $\varphi(x)$ с $\sum_n p_n |\varphi(x_n)| < \infty$ попадает в пространство L_ρ. Этим пространство L_ρ полностью описано.

б) Интегрирующая функция $F(x)$ абсолютно непрерывна. Тогда значение меры Стильтьеса на любом промежутке имеет вид

$$\rho[\alpha, \beta] = \rho[\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(\xi)\, d\xi,$$

где $g(\xi) \geqslant 0$ — производная функции $F(x)$. Точек с положительной ρ-мерой вовсе нет. Интеграл от ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение h_j в промежутке Δ_j, равен

$$I_\rho(h) = \sum h_j \rho\Delta_j = \sum h_j \int_{\Delta_j} g(\xi)\, d\xi = \int_a^b h(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = I(hg),$$

где I обозначает интеграл Лебега.

Если последовательность h_n, возрастая, стремится почти всюду по мере ρ к функции f, причем интегралы $I_\rho h_n$ ограничены, то это означает, что ограничены интегралы Лебега $I(h_n g)$ и, следовательно, предел fg последовательности $h_n g$ есть суммируемая в обычном смысле функция; при этом

$$I_\rho f = \lim I_\rho h_n = \lim I(h_n g) = I(fg).$$

Переходя к разностям, получаем, что класс L_ρ состоит из функций φ, для которых произведения φg суммируемы в обычном смысле; при этом для любой $\varphi \in L_\rho$ имеет место равенство

$$\int_a^b \varphi\, dF = I_\rho \varphi = I(g\varphi) = \int_a^b \varphi g\, dx \tag{1}$$

(так что в этом случае можно заменять dF на $F'(x)\, dx = g\, dx$).

Всякое множество лебеговской меры нуль (будем коротко писать: L-меры 0) покрывается конечной или счетной системой S промежутков с общей длиной как угодно малой; ρ-мера этой системы промежутков равна интегралу по S от функции $g(x)$ и, следовательно, стремится к нулю вместе с обычной мерой S. Отсюда следует, что всякое множество L-меры 0 будет и множеством ρ-меры 0. Рассмотрим любое L-измеримое множество E. Мы знаем, что существуют замкнутое множество F и открытое G, $F \subset E \subset G$, причем разность $G - F$ имеет L-меру как угодно малую. Множества G и F ρ-измеримы, и по доказанному ρ-мера множества $G - F$ также как угодно мала; отсюда следует, что множество E ρ-измеримо. Итак, *любое L-измеримое множе-*

ство является и ρ-измеримым. При этом ρ-мера множества E согласно формуле (1) равна

$$I_\rho \chi_E = I(\chi_E g) = \int_E g(x)dx.$$

Рассмотрим теперь строение ρ-измеримых множеств. Пусть E есть ρ-измеримое множество и $\chi(x)$ — его характеристическая функция; тогда по доказанному χg суммируема в обычном смысле и

$$\rho E = \int_a^b \chi(x)\,dF(x) = \int_a^b \chi g\,dx.$$

Пусть E_1 — множество точек, где $\chi g > 0$; оно содержится в E и L-измеримо. Само множество E может быть и неизмеримым в обычном смысле; но, представляя его в форме

$$E = E_1 + (E - E_1),$$

мы видим, что оно *имеет вид суммы двух множеств, из которых одно L-измеримо, а на другом функция $g(x)$ равна* 0. Справедливо и обратное: *если некоторое множество E представляется в виде суммы двух множеств E_1 и E_2 без общих точек, одно из которых L-измеримо, а на другом $g(x)$ равна* 0, *то E ρ-измеримо.* Так как L-измеримое множество является ρ-измеримым, то достаточно показать, что множество E_2, на котором функция $g(x)$ равна нулю, ρ-измеримо (и имеет ρ-меру нуль). Но множество E_0 *всех* точек, где $g(x)$ равна 0, измеримо в обычном смысле. Следовательно, оно ρ-измеримо, и его ρ-мера

$$\rho E_0 = \int_{E_0} g\,dx = 0.$$

Поэтому и всякое подмножество $E \subset E_0$ ρ-измеримо и имеет ρ-меру нуль, чем доказательство и завершается.

Выше было доказано, что если функция φ ρ-суммируема, то произведение φg L-суммируемо. Покажем, что верно и обратное: если для некоторой функции φ произведение φg L-суммируемо, то φ ρ-суммируема. Проверим сначала, что φ есть ρ-измеримая функция. Рассмотрим при заданном C множество E тех точек, где выполняется неравенство $\varphi(x) \leqslant C$. Это множество совпадает с множеством E', где выполняется неравенство $\varphi(x)\,g(x) \leqslant Cg(x)$, за вычетом некоторого множества E'', где $g(x)$ равна нулю. Множество E' L-измеримо и, следовательно, ρ-измеримо, множество E'' имеет ρ-меру нуль; поэтому E ρ-измеримо. Так как C произвольно, то мы приходим к выводу, что функция φ ρ-измерима. Для доказательства ρ-суммируемости функции φ нам достаточно доказать, что ограничены интегралы $I_\rho \varphi_N$, где $\varphi_N = \min(|\varphi|, N)$.

Но функция φ_N ограничена и ρ-измерима, следовательно, ρ-суммируема, а тогда по формуле (1)

$$I_\rho \varphi_N = I(\varphi_N g) \leqslant I(|\varphi| g),$$

что и требуется. Итак, мы получили полную характеристику ρ-суммируемых функций: *это те и только те функции $\varphi(x)$, для которых произведение φg суммируемо в обычном смысле.*

4. Можно и в общем случае, когда интегрирующая функция $F(x)$ — произвольная неубывающая функция, дать некоторую характеристику соответствующего пространства L_ρ, хотя и менее эффективную. Для этого рассмотрим отображение оси x на ось y, осуществляемое функцией $y = F(x)$. В точках непрерывности это отображение однозначно; точке разрыва x_0 мы будем сопоставлять целый промежуток $[F(x_0 - 0), F(x_0)]$. Обратная функция $x = G(y)$ обладает теми же свойствами; она может сопоставлять каждому значению y одну точку x или целый интервал — последнее лишь в случае, если имеется интервал оси x, на котором $F(x)$ сохраняет постоянное значение y_0 (таких значений y_0 может быть самое большее счетное множество). Каждому множеству E оси x сопоставляется некоторое множество $\mathscr{E}$ оси y; при этом промежутку Δ оси x сопоставляется промежуток оси y, длина которого в точности равна ρ-мере промежутка Δ. Каждой функции $f(x)$ соответствует функция $g(y) = f(G(y))$, определенная при тех значениях y, для которых $G(y)$ однозначна. Таким образом, функция $g(y)$ может не быть определенной самое большее на фиксированном счетном множестве точек. Ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение h_j в промежутке Δ_j, отвечает ступенчатая функция $k(y)$, принимающая значение h_j в промежутке $F(\Delta_j)$; при этом

$$I_\rho h = \sum h_j \rho \Delta_j = \sum h_j |F(\Delta_j)| = Ik,$$

где $|F(\Delta_j)|$ означает длину промежутка $F(\Delta_j)$. Мы видим, что при указанном сопоставлении ступенчатой функции h на оси x отвечает ступенчатая функция k на оси y с обычным интегралом Ik, равным ρ-интегралу функции h.

Теперь ясно, что предельный процесс, приводящий к построению ρ-суммируемой функции $\varphi(x)$ на оси x, соответствует на оси y предельному процессу, приводящему к функции $\psi(y) = \varphi(G(y))$, суммируемой в обычном смысле. Таким образом, если $\varphi(x)$ ρ-суммируема, то соответствующая функция $\psi(y) = \varphi(G(y))$ суммируема по Лебегу и $I_\rho \varphi = I\psi$. Функция $\psi(y)$, кроме того, постоянна на каждом интервале, соответствующем точке x положительной ρ-меры. Обратно, если функция $\psi(y)$ суммируема по Лебегу и постоянна на системе интервалов, отвечающих точкам x положительной ρ-меры, то ее можно аппроксимировать по метрике L_1 ступенчатыми функциями, также постоянными на этой системе интервалов; отсюда следует, что функция $\varphi(x) = \psi(F(x))$ ρ-суммируема и $I_\rho\varphi = I\psi$. Таким образом, *функция* $\varphi(x)$ *ρ-суммируема тогда и только тогда, когда функция* $\psi(y) = \varphi(G(y))$ *суммируема в обычном смысле.* В частности, множество E на оси x ρ-измеримо тогда и только тогда, когда измеримо по Лебегу соответствующее множество $F(E)$.

Из этих результатов, в частности, можно получить обобщение формулы (1) п. 3, относящейся к случаю абсолютно непрерывной интегрирующей функции, на общий случай.

Назовем функцию $\Phi(x)$ *абсолютно непрерывной относительно неубывающей функции* $F(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была система непересекающихся интервалов (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, m)$, из условия

$$\sum [F(b_k) - F(a_k)] < \delta$$

следует

$$\sum |\Phi(b_k) - \Phi(a_k)| < \varepsilon.$$

Абсолютная непрерывность Φ относительно F имеет место, например, если Φ удовлетворяет относительно F «условию Липшица», т. е. при любых α и β

$$|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| \leqslant [F(\beta) - F(\alpha)]\, C \tag{2}$$

с фиксированной постоянной C.

Согласно сказанному выше функция $\Phi(G(y)) = \Psi(y)$ абсолютно непрерывна относительно обычной меры Лебега на оси y и поэтому представляется как интеграл от своей производной $\psi(y)$:

$$\Psi(y) = \int_{a_1}^{y} \psi(\eta)\, d\eta \quad (a_1 = F(a)).$$

В свою очередь это означает, что *функция* $\Phi(x)$ *есть интеграл от функции* $g(x) = \psi(G(y))$ *по мере* dF:

$$\Phi(x) = \int_a^x g(\xi)\, dF(\xi). \tag{3}$$

Заметим, что при выполнении условия Липшица (2) функция $g(x)$ ограничена по модулю постоянной C.

Предположим далее, что Φ — также неубывающая функция. Тогда тем же путем легко проверить, что *произведение любой функции* $f(x)$, *суммируемой по мере* $d\Phi$, *и функции* $g(x)$ *суммируемо и по мере* dF, *причем*

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dF(x). \tag{4}$$

Соображения, связывающие интеграл Стильтьеса с интегралом Лебега, будут развиты в конце следующего параграфа в применении к случаю функций нескольких переменных.

§ 6. Интеграл Стильтьеса (продолжение)

1. В предыдущем параграфе мера, определяющая интеграл Стильтьеса, предполагалась неотрицательной. Но, оказывается, схема наших построений может быть без труда распространена и на некоторые меры, которым разрешается принимать и неположительные значения.

Нам удобнее будет говорить сейчас не о самих мерах, а об их производящих функциях. Пусть $\Phi(x)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, непрерывная справа. Как и всякая такая функция, она представляется в виде разности двух неубывающих функций, также непрерывных справа, одна из которых есть полное изменение функции $\Phi(x)$ (§ 2):

$$\Phi(x) = V(x) - G(x).$$

Функция Φ удовлетворяет относительно V условию Липшица с постоянной 1:

$$|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| \leqslant V_\alpha^\beta[\Phi] = V(\beta) - V(\alpha).$$

Поэтому, в силу (3),

$$\Phi(x) = \int_a^x h(\xi)\,dV(\xi).$$

Руководствуясь аналогией с (4), для любой функции $\varphi(x)$, суммируемой по $V(x)$, положим по определению

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\Phi = \int_a^b \varphi(x)\,h(x)\,dV(x). \tag{1}$$

Этим определен интеграл по функции $\Phi(x)$. Напомним, что функция $\Phi(x)$ не предполагается неубывающей функцией, а лишь обладающей ограниченным изменением.

Интеграл (1) может быть выражен и непосредственно через интегралы по неубывающим функциям; именно, мы имеем

$$G(x) = V(x) - \Phi(x) = \int_a^x [1 - h(\xi)]\,dV(\xi),$$

откуда

$$\int_a^b \varphi dG = \int_a^b (1-h)\varphi dV = \int_a^b \varphi dV - \int_a^b \varphi h dV$$

и, следовательно,

$$\int_a^b \varphi h dV = \int_a^b \varphi dV - \int_a^b \varphi dG. \tag{2}$$

Наконец, и интеграл, определяемый равенством (1), можно получить и непосредственной конструкцией, аналогичной конструкции интеграла по неотрицательной мере. Пусть $\rho\Delta$ — мера, отвечающая производящей функции $V(x)$ и $\sigma\Delta$ — мера, отвечающая функции $G(x)$. Построим по формулам (2) — (6) § 5, п. 2 меру $\tau\Delta$, отправляясь от функции $\Phi(x)$:

$$\tau(x, x'] = \Phi(x') - \Phi(x), \qquad \tau[x, x') = \Phi(x'-0) - \Phi(x-0),$$
$$\tau(x, x') = \Phi(x'-0) - \Phi(x), \quad \tau[x, x'] = \Phi(x') - \Phi(x-0).$$

Функция промежутков $\tau\Delta$ аддитивна и непрерывна; это можно проверить, исходя как непосредственно из определения, так и из равенства $\tau\Delta = \rho\Delta - \sigma\Delta$. Эта функция может принимать и отрицательные значения; но при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на промежутки

$$[a, b] = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_m$$

удовлетворяется условие

$$|\tau\Delta_1| + |\tau\Delta_2| + \ldots + |\tau\Delta_m| \leqslant \sum_{j=1}^m \rho\Delta_j + \sum_{j=1}^m \sigma\Delta_j < C \tag{3}$$

с фиксированной постоянной C. Неравенство (3) отражает тот факт, что исходная функция $\Phi(x)$ имеет ограниченное изменение. Далее, невзирая на возможную отрицательность значений $\tau\Delta$, мы можем определить интегралы по мере $\tau\Delta$ от ступенчатых функций и затем обычным предельным переходом получить пространство L_τ. Во всех оценках вместо $\rho[a, b]$ придется ставить постоянную C из (3). Используя на каждом этапе равенство $\rho\Delta - \sigma\Delta = \tau\Delta$, мы получим формулу (2), а вместе с ней и формулу (1).

2. Интеграл Римана — Стильтьеса. Рассмотрим для произвольной функции $f(x)$ и некоторой производящей функции $\Phi(x)$ (с ограниченным изменением) суммы, аналогичные суммам Римана:

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j)\left[\Phi(x_{j+1}) - \Phi(x_j)\right] \tag{1}$$
$$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b, \ x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}).$$

Предел таких сумм при неограниченном измельчении интервалов $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, если он существует, называется *интегралом Римана — Стильтьеса от функции* $f(x)$ *по функции* $\Phi(x)$. Покажем, что он заведомо существует и совпадает с уже определенным выше интегралом Лебега — Стильтьеса от f по Φ в промежутке $(a, b]$, если $f(x)$ непрерывна. Написанная интегральная сумма есть интеграл Лебега — Стильтьеса от ступенчатой функции $h_m(x)$, определенной в промежутке $(a, b]$ и равной $f(\xi_j)$ в промежутке $\Delta_j = (x_j, x_{j+1}]$. При неограниченном измельчении промежутков Δ_j ступенчатая функция $h_m(x)$ равномерно стремится к функции $f(x)$; поэтому в силу основных теорем теории интеграла

$$\sum f(\xi_j)[\Phi(x_{j+1}) - \Phi(x_j)] = \int\limits_{(a, b]} h_m(x)\, d\Phi \longrightarrow \int\limits_{(a, b]} f(x)\, d\Phi,$$

что и требовалось.

Из самого определения интеграла Римана — Стильтьеса вытекает справедливость оценки

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\, d\Phi(x)\right| \leqslant \sup_{x \in (a, b]} |f(x)|\, V_a^b[\Phi],$$

заменяющей оценку

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|\,(b - a)$$

для обычного интеграла Римана.

Заметим, что при определении интеграла Римана — Стильтьеса нет необходимости заботиться о том, чтобы функция $\Phi(x)$ была непрерывна справа. В действительности, если функция $f(x)$ непрерывна, интегральные суммы (1) имеют предел при любой функции $\Phi(x)$ с ограниченным изменением, и этот предел не зависит от значений функции $\Phi(x)$ в ее точках разрыва. Для доказательства, имея некоторую функцию с ограниченным изменением $\Phi(x)$, положим:

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + D(x),$$

где $\Phi_0(x)$ совпадает с $\Phi(x)$ во всех точках непрерывности $\Phi(x)$, а в точках разрыва равна $\Phi(x+0)$ и, следовательно, непрерывна справа; функция $D(x)$, очевидно, может быть отличной от нуля самое большее лишь в счетном множестве $z_1, z_2, \ldots$ точек разрыва функции $\Phi(x)$.

Интегральные суммы, составленные по функции $\Phi_0(x)$, по доказанному имеют предел

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\Phi_0(x).$$

Покажем, что интегральные суммы, составленные по функции $D(x)$, стремятся к нулю. Так как $D(x)$ вместе с $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ имеет ограниченное изменение, то сумма модулей всех значений $D(x)$ конечна. Найдем для заданного $\varepsilon > 0$ номер N так, чтобы иметь $\sum\limits_{n>N} |D(z_n)| < \varepsilon$.

Положим далее

$$D(x) = D_1(x) + \ldots + D_N(x) + \overline{D}_N(x),$$

где $D_j(x)$ отлична от нуля лишь в точке z_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$, а $\overline{D}_N(x)$ отлична от нуля лишь в точках z_n $(n > N)$. Интегральная сумма, составленная по функции $D_j(x)$, равна или 0, или

$$[f(\xi_j') - f(\xi_j'')] D_j(z_j),$$

где $\xi_j' \leqslant z_j \leqslant \xi_j''$ и точки ξ_j' и ξ_j'' лежат в соседних элементах подразбиения отрезка $[a, b]$. В силу непрерывности $f(x)$ эта величина становится как угодно малой при измельчении подразбиения. Интегральная сумма, составленная по функции $\overline{D}_N(x)$, допускает оценку

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j) [\overline{D}_N(x_{j+1}) - \overline{D}_N(x_j)] \right| \leqslant 2M \sum_{n \geqslant N} |D(z_n)| \leqslant 2M\varepsilon,$$

где $M = \max |f(x)|$; как мы видим, эта сумма также сколь угодно мала. Таким образом, интегральные суммы, составленные по функции $D(x)$, действительно стремятся к нулю с измельчением подразбиений отрезка, и наше утверждение доказано.

Задачи. 1. Найти значения интегралов Стильтьеса:

$$I_1 = \int_{-1}^{3} x\, dF(x), \qquad F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } & x = -1, \\ 1 \text{ при } & -1 < x < 2, \\ -1 \text{ при } & 2 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{0}^{2} x^2\, dF(x), \qquad F(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 0 \text{ при } & \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2}, \\ 2 \text{ при } & x = \frac{3}{2}, \\ -2 \text{ при } & \frac{3}{2} < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Отв. $I_1 = -5$; $I_2 = -\frac{17}{4}$.

2. Написать выражение статического момента относительно начала координат массы, распределенной на отрезке $[a, b]$ так, что масса отрезка $[a, x]$ равна числу $F(x)$.

Отв. $M = \int\limits_a^b x\,dF(x)$.

3. Предельный переход под знаком интеграла Римана — Стильтьеса.

Теорема 1 (Е. Хелли). *Если функции $F_n(x)$ с ограниченным изменением сходятся в каждой точке отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ к некоторой функции $F(x)$, причем полные изменения всех функций $F_n(x)$ ограничены в совокупности:*

$$\bigvee_a^b [F_n] \leqslant C,$$

то предельная функция $F(x)$ также обладает ограниченным изменением и для любой непрерывной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dF(x). \tag{1}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что $F(x)$ имеет ограниченное изменение, не превосходящее C. Действительно, для любого разбиения отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ мы имеем:

$$\sum_{j=0}^{m-1} |F(x_{j+1}) - F(x_j)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{m-1} |F_n(x_{j+1}) - F_n(x_j)| \leqslant C,$$

откуда и следует, что $\bigvee_a^b [F] \leqslant C$.

Теперь переходим к доказательству соотношения (1). Пусть сначала $\varphi(x)$ есть ступенчатая функция, равная h_j на промежутке

$$\Delta_j = (x_j, x_{j+1}).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) = \sum h_j [F_n(x_{j+1}) - F_n(x_j)],$$

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dF(x) = \sum h_j [F(x_{j+1}) - F(x_j)].$$

Очевидно, что при достаточно большом $n \geqslant N$ эти выражения отличаются друг от друга меньше чем на заданное $\varepsilon > 0$. В общем случае для заданного $\varepsilon > 0$ мы построим ступенчатую функцию $\varphi_\varepsilon(x)$

так, чтобы иметь $|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|<\frac{\varepsilon}{C}$. Тогда

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF_n(x)\right|=$$

$$=\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF_n(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{C}\,\mathbf{V}_a^b[F_n]\leqslant\varepsilon,$$

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF(x)\right|=$$

$$=\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{C}\,\mathbf{V}_a^b[F]\leqslant\varepsilon,$$

и, следовательно, при $n>N$

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)-\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right|\leqslant\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF_n(x)\right|+$$

$$+\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF(x)\right|+\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF_n(x)-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF(x)\right|\leqslant 3\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Замечание 1. Эту теорему можно несколько обобщить, допустив зависимость от n и интегрируемой функции $\varphi(x)$. Именно, мы утверждаем, что справедливо соотношение

$$\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dF_n(x),$$

если выполнены условия:

а) функции $F_n(x)$ имеют равномерно ограниченные изменения и сходятся к функции $F(x)$ в каждой точке отрезка $[a, b]$;

б) непрерывные функции $\varphi_n(x)$ равномерно сходятся к своему пределу $\varphi(x)$.

Доказательство немедленно вытекает из оценок

$$\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_n(x)]\,dF_n(x)\right|\leqslant\max\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\mathbf{V}_a^b[F_n],$$

$$\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_n(x)]\,dF(x)\right|\leqslant\max\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\mathbf{V}_a^b[F]$$

и только что доказанной теоремы.

Замечание 2. Теорема 2 (вместе с замечанием 1) очевидным образом переносится и на бесконечный промежуток интегрирования, например $[0, \infty]$, если функции $F_n(x)$ имеют равномерно ограниченное изменение на всем этом промежутке и функция $\varphi(x)$ (или $\varphi_n(x)$, если речь идет о замечании 1) непрерывна, включая бесконечно удаленную точку; это последнее свойство позволяет равномерно аппроксимировать $\varphi(x)$ ступенчатыми функциями, что существенно используется в доказательстве.

Замечание 3. Если $\varphi(x)$ не является непрерывной на бесконечности, а только ограниченной, так что $|\varphi(x)| \leqslant M$, то теорема Хелли остается еще справедливой, если функции $F_n(x)$ удовлетворяют следующему дополнительному условию (роль которого сводится к тому, чтобы масса, несомая распределением $F_n(x)$, не уходила с возрастанием n в бесконечность):

(*) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $N = N(\varepsilon)$ *так, что для всех* n

$$\operatorname*{Var}_{|x| \geqslant N} F_n(x) \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Действительно, переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (2), мы находим, что и для предельной функции $F(x)$

$$\operatorname*{Var}_{|x| \geqslant N} F(x) \leqslant \varepsilon.$$

Далее, для заданного $\varepsilon \geqslant 0$, найдя N из условия (*), мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x) = \int_{-N}^{N} \varphi(x)\, d[F_n(x) - F(x)] + \\ + \int_{|x| \geqslant N} \varphi(x)\, dF_n(x) - \int_{|x| \geqslant N} \varphi(x)\, dF(x). \tag{3}$$

Имея N, мы можем на основании теоремы Хелли для конечного промежутка $[-N, N]$ найти номер n_0 так, чтобы при $n > n_0$ иметь

$$\left| \int_{-N}^{N} \varphi(x)\, d[F_n(x) - F(x)] \right| < \varepsilon.$$

Оставшиеся два интеграла по построению не превосходят по модулю $2M\varepsilon$; мы видим, что вся левая часть в (3) не превосходит $(2M+1)\varepsilon$, что и доказывает справедливость предельного перехода под знаком интеграла Стильтьеса в указанном случае.

4. Применение теоремы 1 весьма облегчается следующей теоремой, дающей возможность из данного множества функций с (равномерно) ограниченным изменением выбрать сходящуюся последовательность.

Теорема 2 (Е. Хелли). *Из всякого бесконечного множества K функций $f(x)$, определенных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и обладающих свойствами*

$$\max |f(x)| \leqslant C, \tag{1}$$

$$\mathbf{V}_a^b[f] \leqslant V \tag{2}$$

(где C и V — постоянные, не зависящие от выбора $f \in K$), можно выбрать последовательность $f_n(x)$, сходящуюся в каждой точке отрезка $a \leqslant x \leqslant b$.

Доказательство. Предположим сначала, что функции $f(x)$ не убывают. Пусть $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность всех рациональных точек отрезка $[a, b]$. Так как числа $f(r_1)$ ограничены, то существует последовательность функций $f_{n1} \in K$, для которых числа $f_{n1}(r_1)$ имеют предел. Из этой последовательности $f_{n1}(x)$ можно выбрать подпоследовательность $f_{n2}(x)$, для которой сходятся числа $f_{n2}(r_2)$ (а также, конечно, и числа $f_{n2}(r_1)$); продолжая таким образом, получим для каждого k последовательность $f_{nk}(x)$, сходящуюся при $n \to \infty$ в точках $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Диагональная последовательность $f_{nn}(x)$ — будем ее обозначать просто $f_n(x)$ — сходится при каждом $x = r_1, r_2, \ldots$ Предел $f(x)$ последовательности $f_n(x)$, определенный пока еще в рациональных точках, представляет собой неубывающую функцию. Дополним ее определение во всех остальных точках, полагая для каждого иррационального x

$$f(x) = \lim_{r \to x-0} f(r) \qquad (r \text{ рационально}).$$

В результате мы получим неубывающую функцию, определенную уже для всех точек отрезка $[a, b]$. Покажем, что она остается пределом последовательности $f_n(x)$ во всех своих точках непрерывности. Пусть x_0 — точка непрерывности $f(x)$; для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы из $|x - x_0| < \delta$ следовало $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, и выберем рациональные точки $r' < x_0 < r''$ так, чтобы иметь $r'' < x_0 + \delta$, $r' > x_0 - \delta$. Найдем номер N, начиная с которого, выполняются неравенства $|f_n(r') - f(r')| < \varepsilon$, $|f_n(r'') - f(r'')| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $|f_n(r') - f_n(r'')| < 4\varepsilon$. Так как функция $f_n(x)$ не убывает, то число $f_n(x_0)$ лежит между числами $f_n(r')$ и $f_n(r'')$; поэтому

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f_n(x_0)| &\leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f(r')| + |f(r') - f_n(r')| + |f_n(r') - f_n(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + |f_n(r') - f_n(r'')| \leqslant 6\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что $f(x_0) = \lim f_n(x_0)$.

Построенная нами последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ всюду, кроме, может быть, точек разрыва функции $f(x)$. Этих точек разрыва самое большее счетное множество. Поэтому, снова применяя диагональный процесс, мы из последовательности $f_n(x)$ сможем выделить подпоследовательность, которая сходится также и во всех точках разрыва функции $f(x)$. Итак, мы выделили из данного семейства неубывающих функций последовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[a, b]$, что и требовалось.

В общем случае, когда функции $f(x) \in K$ могут и не быть неубывающими, мы представим каждую из них в форме

$$f(x) = V(x) - G(x),$$

где $V(x)$ — полное изменение функции $f(x)$ на отрезке $[a, x]$. Функции $V(x)$ не убывают и по условию (2) ограничены; функции $G(x)$ также обладают этими свойствами. По доказанному существует последовательность $f_n(x) \in K$, для которой функции $V_n(x)$ сходятся в каждой точке отрезка $[a, b]$. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $f_{n_k}(x)$, для которой функции $G_{n_k}(x)$ сходятся в каждой точке отрезка $[a, b]$; но тогда и $f_{n_k}(x)$ сходятся в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

5. Интеграл Стильтьеса для нескольких переменных. Будем говорить для определенности о случае двух переменных x и y, меняющихся в квадрате $\Delta_0 = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$. Назовем «промежутком» на плоскости множество точек (x, y), где каждая из координат пробегает некоторый промежуток (любого из пяти типов, указанных в п. 1) на своей оси. Предположим, что для каждого промежутка Δ в квадрате Δ_0 задана функция $\rho\Delta \geqslant 0$, удовлетворяющая условию полной аддитивности: если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ взаимно не пересекаются и их объединение Δ есть снова промежуток, то

$$\rho\Delta = \rho\Delta_1 + \ldots + \rho\Delta_n + \ldots$$

Функцию $\rho\Delta$, как и выше, мы называем *мерой Стильтьеса*. Разобьем квадрат Δ_0 на конечное число промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ без общих точек; функция $h(x, y)$, равная постоянной h_j на множестве Δ_j, называется ступенчатой, и ее интеграл определяется по формуле

$$I_\rho h = \sum_j h_j \rho\Delta_j.$$

Применяя процессы расширения, уже много раз описанные выше, можно распространить понятие интеграла I_ρ на широкий класс функций L_ρ, которые называются *суммируемыми в смысле Лебега — Стильтьеса относительно меры* ρ. Объем этого класса функций и корректность построения проще всего получить, применяя метод установления соответствия с линейной мерой, подобно тому как это было сделано в § 4 для меры Лебега. Этот метод состоит в следующем. Построим по мере $\rho\Delta$ две функции, каждая от одного переменного:

$$F_1(x) = \rho\Delta_x, \quad F_2(y) = \rho\Delta_y.$$

Здесь Δ_x означает ту часть плоскости, точки которой (ξ, η) удовлетворяют неравенству $\xi \leqslant x$, а Δ_y — ту часть, которая отвечает неравенству $\eta \leqslant y$. Функции $F_1(x)$ и $F_2(y)$ не убывают и поэтому имеют не более счетного множества точек разрыва. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все точки разрыва функции $F_1(x)$. Можно построить на оси x совокупность чисел вида $x_0 + \frac{p}{2^q}$ (x_0 фиксировано, p и q — целые), не содержащую ни одной из точек $x_1, \ldots, x_n, \ldots$; это следует из того, что множество $\left\{x_n + \frac{p}{2^q}\right\}$ при всех n, p, $q = 1, 2, \ldots$ счетно и поэтому содержит заведомо не все точки оси; в качестве x_0 можно взять любую точку, не входящую в это множество. Таким же образом построим на оси y совокупность чисел $y_0 + \frac{p}{2^q}$, не содержащую ни одной из точек разрыва функции $F_2(y)$. Прямые $x = x_0 + \frac{p}{2^q}$ и $y = y_0 + \frac{p}{2^q}$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; q фиксировано) определяют сеть — разбиение плоскости на квадраты со стороной $\frac{1}{2^q}$, границы которых не несут положительной меры. Теперь можно устанавливать соответствие между квадратами сети на плоскости и интервалами оси так же, как мы делали в § 4, но с одним изменением: в § 4 квадрату плоскости мы ставили в соответствие интервал длины, равной площади квадрата, а теперь будем ставить в соответствие интервал длины, равной ρ-мере квадрата. Разумеется, нужно следить, чтобы при соответствии сохранялось отношение включения. Так же как и в § 4, мы убеждаемся в том, что построенное соответствие будет взаимно однозначным с точностью до множества ρ-меры нуль на плоскости и лебеговой меры нуль на прямой. Всякому множеству на плоскости, измеримому по мере ρ, будет соответствовать измеримое по Лебегу множество на оси той же меры Лебега. Отметим некоторые особенности этого соответствия. Точка (x_0, y_0) на плоскости, имеющая положительную ρ-меру, переходит в целый интервал оси соответствующей длины. Таких интервалов будет не более счетного множества, и мы обозначим их $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ С другой стороны, квадрату сети на плоскости, мера которого равна нулю, отвечает отдельная точка оси x.

Ступенчатой функции на плоскости, принимающей постоянные значения на квадратах сети, отвечает ступенчатая функция на оси, постоянная на каждом из интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots$ Интегралы ступенчатых функций, соответствующих друг другу, — первый по ρ-мере на плоскости, второй по мере Лебега на оси — равны. Предельным переходом от указанных ступенчатых функций на оси мы получим все суммируемые функции, постоянные на интервалах $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$; соответствующий предельный переход на плоскости приведет к совокупности функций, суммируемых по мере ρ. Каждому свойству интеграла Лебега на прямой, относящемуся к функциям, постоянным на интервалах $\{\delta_n\}$, соответствует некоторое свойство интеграла Лебега — Стильтьеса с мерой ρ. Таким образом, указанное соответствие освобождает нас от необходимости специально передоказывать для интеграла Лебега—Стильтьеса все те теоремы, которые мы доказали (гл. IV и VI) для интеграла Лебега; все эти теоремы автоматически оказываются справедливыми и для интеграла Лебега — Стильтьеса.

6. Производящая функция в случае нескольких переменных. Пусть ξ, η — произвольная точка в квадрате Δ_0 и $\Delta_{\xi\eta}$ — промежуток, выделяемый неравенствами $x \leqslant \xi$, $y \leqslant \eta$. Положим

$$F(\xi, \eta) = \rho\Delta_{\xi\eta}.$$

Функция $F(\xi, \eta)$ по формулам, аналогичным формулам (2) — (6) п. 2, § 5, позволяет восстановить меру $\rho\Delta$ для каждого промежутка Δ и называется поэтому производящей функцией меры $\rho\Delta$. Эта функция $F(\xi, \eta)$ «не убывает» — в том смысле, что при $\xi \leqslant \xi'$, $\eta \leqslant \eta'$ имеем:

$$F(\xi, \eta) \leqslant F(\xi', \eta'),$$

а также «непрерывна сверху», т. е.

$$F(\xi+0, \eta+0) = \lim_{\substack{x \to \xi+0 \\ y \to \eta+0}} F(x, y) = F(\xi, \eta).$$

Обратно, каждая функция, которая не убывает и непрерывна сверху в указанном смысле, может служить производящей функцией для некоторой вполне аддитивной меры.

Интеграл Стильтьеса от функции $\varphi(x, y)$, построенный по производящей функции $F(\xi, \eta)$, записывается в виде

$$\int_a^b \int_a^b \varphi(x, y)\, dF(x, y).$$

Вместо неотрицательной меры $\rho\Delta$ можно рассматривать меру $\rho\Delta$ произвольного знака с *ограниченным изменением*; под этим последним свойством мы понимаем тот факт, что при любом разбиении основного квадрата Δ_0 на промежутки $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ имеет место неравенство

$$|\rho\Delta_1| + \ldots + |\rho\Delta_m| < C \tag{1}$$

с фиксированной постоянной C. В соответствии с этим и вместо неубывающей производящей функции $F(x, y)$ можно рассматривать производящую функцию $F(x, y)$ *с ограниченным изменением*; это последнее означает, что мера $\rho\Delta$, построенная по общим правилам по функции

$F(x, y)$, должна удовлетворять неравенству (1). Разумеется, предположение о непрерывности сверху, обеспечивающее полную аддитивность меры $\rho\Delta$, должно быть сохранено и в этом, более общем случае.

§ 7. Применение интеграла Стильтьеса в анализе

Интеграл Стильтьеса имеет многочисленные применения. Мы приведем в этом параграфе вывод трех формул из трех разных разделов математического анализа. Еще одна формула — именно представление положительно определенной функции — дается в § 7 гл. VII.

1. Линейные функционалы в пространстве $C(a, b)$. Простейшим линейным непрерывным функционалом в пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных функций $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ является значение функции $\varphi(x)$ в фиксированной точке $x=\xi$. Оказывается, что общий вид линейного функционала в этом пространстве получается «стильтьесовским комбинированием» таких простейших функционалов; именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (Ф. Рисс). *Всякий линейный непрерывный функционал $f[\varphi]$ в пространстве $C(a, b)$ может быть записан в форме*

$$f[\varphi]=\int_a^b \varphi(\xi)\, dF(\xi), \tag{1}$$

где $F(\xi)$ — некоторая функция с ограниченным изменением, непрерывная справа.

Доказательство будет проведено в несколько этапов.

I. Рассмотрим линейное пространство K ограниченных функций $\varphi(x)$, заданных на некотором множестве X. Предположим, что на пространстве K задан линейный функционал $f[\varphi]$, удовлетворяющий условию

$$|f[\varphi]| \leqslant C \sup|\varphi(x)| \tag{2}$$

с фиксированной постоянной C.

Мы утверждаем, что *всякой ограниченной и возрастающей последовательности $\varphi_n(x)\in K$ отвечает сходящаяся последовательность $f[\varphi_n]$*. В самом деле, для любой $\varphi\in K$ можно написать:

$$|f[\varphi]|=\pm f[\varphi]=f[\pm\varphi]$$

при соответствующем выборе знака «$+$» или «$-$». Для заданной ограниченной (например, числом M) возрастающей последовательности $\varphi_n(x)\in K$ можно составить ряд

$$|f[\varphi_2-\varphi_1]|+|f[\varphi_3-\varphi_2]|+\ldots+|f[\varphi_{n+1}-\varphi_n]|+\ldots;$$

n-ю частную сумму этого ряда в соответствии со сказанным можно записать в форме

$$f[\pm(\varphi_2-\varphi_1)]+f[\pm(\varphi_3-\varphi_2)]+\ldots+f[\pm(\varphi_{n+1}-\varphi_n)]=$$
$$=f[\pm(\varphi_2-\varphi_1)\pm(\varphi_3-\varphi_2)\pm\ldots\pm(\varphi_{n+1}-\varphi_n)].$$

Но

$$|\pm(\varphi_2-\varphi_1)\pm\ldots\pm(\varphi_{n+1}-\varphi_n)|\leqslant(\varphi_2-\varphi_1)+\ldots+(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=$$
$$=\varphi_{n+1}-\varphi_1\leqslant 2M,$$

откуда в силу (2)

$$|f[\varphi_2-\varphi_1]|+\ldots+|f[\varphi_{n+1}-\varphi_n]|\leqslant 2MC$$

и, следовательно, ряд

$$f[\varphi_2-\varphi_1]+f[\varphi_3-\varphi_2]+\ldots+f[\varphi_{n+1}-\varphi_n]+\ldots$$

сходится; а это и означает сходимость последовательности $f[\varphi_n]$.

Естественно возникает вопрос: одинаково ли предельное значение $f[\varphi_n]$ для двух разных последовательностей φ_n, сходящихся, возрастая, к одной и той же функции φ?

Мы ограничимся здесь следующим простым утверждением: *исходя из данных последовательностей $\varphi_n \nearrow \varphi$ и $\psi_n \nearrow \psi$, построим строго возрастающие последовательности $\overline{\varphi}_n=\varphi_n-\frac{1}{n}$, $\overline{\psi}_n=\psi_n-\frac{1}{n}$; если для любого n можно найти k и m так, что $\overline{\psi}_m>\overline{\varphi}_n$, $\overline{\varphi}_k>\overline{\psi}_n$, то* $\lim f[\varphi_n]=\lim f[\psi_n]$. Действительно, в этом случае мы можем построить новую последовательность

$$\overline{\varphi}_1<\overline{\psi}_{n1}<\overline{\varphi}_{n2}<\overline{\psi}_{n3}<\ldots,$$

также сходящуюся к φ; по доказанному значения функционала f на этой последовательности имеют предел; но это означает, что числа $f[\varphi_n]$ и $f[\psi_n]$ стремятся к одному и тому же пределу.

То же относится, очевидно, к убывающим последовательностям.

Такое положение всегда имеет место, например, в случае, когда K есть пространство C всех непрерывных функций на отрезке или на замкнутом ограниченном множестве в p-мерном пространстве. Действительно, фиксируем n и будем неограниченно увеличивать m. Предположим, что для каждого m множество E_m точек, где $\psi_m-\frac{1}{m}\leqslant\varphi_n-\frac{1}{n}$, будет непустым. Замкнутые множества E_m образуют убывающую последовательность ($E_1\supset E_2\supset\ldots$), и если каждое из них непусто, то у всех этих множеств найдется общая точка x_0. Переходя в неравенстве

$$\psi_m(x_0)-\frac{1}{m}\leqslant\varphi_n(x_0)-\frac{1}{n}$$

к пределу при $m\longrightarrow\infty$, получим:

$$\varphi(x_0)\leqslant\varphi_n(x_0)-\frac{1}{n}$$

или

$$\varphi_n(x_0)\geqslant\varphi(x_0)+\frac{1}{n},$$

что невозможно.

Таким образом, в случае пространства C функционал f может быть *однозначно* определен на классе ограниченных функций C^+, которые являются пределами возрастающих последовательностей непрерывных функций. На классе C^+, очевидно, сохраняется равенство $f[\varphi+\psi]=f[\varphi]+f[\psi]$. Образуем класс R из разностей $g=\varphi-\psi$, $\varphi\in C^+$, $\psi\in C^+$, и положим $f[g]=f[\varphi]-f[\psi]$. И это определение приводит к однозначному результату (ср. § 2 гл. IV). Функционал f остается аддитивным и однородным на всем классе R. Если в классе K вместе с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ содержится $\max\{\varphi,\psi\}$ и $\min\{\varphi,\psi\}$, то в классе R сохраняется и неравенство (2); точнее говоря, из $g\in R$ следует, что

$$|f[g]|\leqslant C\sup|g(x)|. \qquad (3)$$

В самом деле, пусть

$$g=\varphi-\psi,\qquad \varphi_n\nearrow\varphi,\qquad \psi_n\nearrow\psi\qquad (\varphi_n,\ \psi_n\in K).$$

Обозначим $\sup|\varphi(x)-\psi(x)|=\mu$. Если $\sup|\varphi_n(x)-\psi_n(x)|\leqslant\mu$ при любом n, то искомое неравенство (3) получится предельным переходом из неравенства

$$|f[\varphi_n-\psi_n]|\leqslant C\sup|\varphi_n(x)-\psi_n(x)|,$$

имеющего место, поскольку $\varphi_n-\psi_n\in K$. В общем случае мы заменим функцию φ_n на $\bar\varphi_n$ по формуле

$$\bar\varphi_n=\max[\psi_n-\mu,\quad \min(\varphi_n,\psi_n+\mu)],$$

которая «обрезает» функцию φ_n в границах $\psi_n\pm\mu$. Вместе с функциями φ_n и ψ_n функции $\bar\varphi_n$ также возрастают и стремятся к φ. Но теперь уже $|\bar\varphi_n-\psi_n|\leqslant\mu$, и, следовательно, утверждение справедливо.

II. В качестве пространства K рассмотрим пространство $C(a, b)$ всех непрерывных функций $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Заданный линейный непрерывный функционал $f[\varphi]$ согласно I однозначно распространяется на некоторый класс разрывных функций; не описывая этот класс в целом, заметим только, что он содержит характеристические функции любых промежутков оси. Введем функцию

$$F(\xi)=f[\chi_{[a,\xi]}(x)],$$

где $\chi_{[a,\xi]}(x)$ равна 1 при $a\leqslant x\leqslant\xi$ и 0 при $\xi<x\leqslant b$.

Покажем, что функция $F(\xi)$ обладает ограниченным изменением. Пусть $a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_n=b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$; оценим сумму

$$\sum_{j=0}^{n-1}|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|.$$

Очевидно,

$$|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|=\pm[F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)]=\pm f[\chi_{[\xi_j,\xi_{j+1}]}(x)]=$$
$$=f[\pm\chi_{(\xi_j,\xi_{j+1})}(x)]$$

и

$$\sum_{j=0}^{n-1}|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|=f\Big[\sum_{j=0}^{n-1}\pm\chi_{(\xi_j,\xi_{j+1})}(x)\Big].$$

Функция, стоящая под знаком f, по модулю не превосходит 1; поэтому в силу неравенства (3)

$$\sum_{j=0}^{n-1}|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|\leqslant C,$$

откуда и вытекает, что функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение.

Проверим далее, что $F(x)$ непрерывна справа, т. е. при любом $\xi<b$ и любой последовательности $\xi_n\searrow\xi$

$$F(\xi)=\lim F(\xi_k). \tag{4}$$

Последовательность $\psi_n(x)=\chi_{[a,\xi_n]}(x)$, убывая, стремится к функции $\psi(x)=\chi_{[a,\xi]}(x)$. Числа $f[\psi_n]$ и $f[\psi]$ определены однозначно; в частности, $f[\psi]$ есть предел чисел $f[\varphi_n]$, где $\varphi_n(x)$ — непрерывная функция, равная, например, 1 при $x\leqslant\xi+\frac{1}{n}$, равная 0 при $x\geqslant\xi+\frac{2}{n}$ и линейная в промежутке $\left[\xi+\frac{1}{n},\ \xi+\frac{2}{n}\right]$.

Чтобы установить искомое соотношение $f[\psi_n] \to f[\psi]$, нам достаточно показать, что для любого n можно найти k и m так, чтобы выполнялись неравенства

$$\psi_m + \frac{1}{m} < \varphi_n + \frac{1}{n}, \quad \varphi_k + \frac{1}{k} < \psi_n + \frac{1}{n}.$$

Но элементарным геометрическим построением (рис. 13) легко показать, что для заданного n искомые k и m всегда существуют. Таким образом, соотношение (4) справедливо.

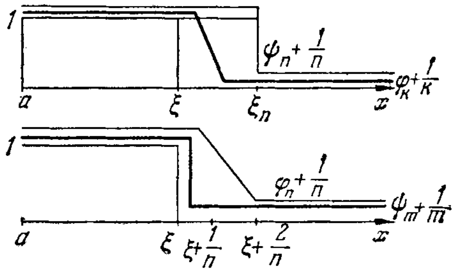


Рис. 13.

Заметим, в частности, что если функционал $f[\varphi]$ неотрицателен, т. е. принимает значения $\geqslant 0$ на функциях $\varphi(x) \geqslant 0$, то это свойство сохраняется и при расширении функционала на указанный класс разрывных функций. Поскольку при $\xi < \eta$ мы имеем $\chi_{[a,\xi]}(x) \leqslant \chi_{[a,\eta]}(x)$ в этом случае $F(\xi) \leqslant F(\eta)$, т. е. $F(\xi)$ — неубывающая функция.

Функция $F(x)$ как функция с ограниченным изменением может служить интегрирующей функцией для интеграла Стильтьеса. Мы имеем при этом

$$f[\chi_{[a,\xi]}(x)] = F(\xi) = \int_a^{\xi} dF(x) = \int_a^b \chi_{[a,\xi]}(x)\, dF(x), \tag{5}$$

вместе с характеристическими функциями интегралов равенство (5) справедливо для всех ступенчатых функций; а так как каждая непрерывная функция есть предел равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций, то, переходя к пределу, получаем равенство

$$f[\varphi] = \int_a^b \varphi(x)\, dF(x),$$

справедливое уже для любой непрерывной функции $\varphi(x)$. Теорема доказана.

III. Наметим путь обобщения этой теоремы на случай функций нескольких независимых переменных.

Функционал $f[\varphi]$ на пространстве C непрерывных функций (для простоты двух переменных x и y), меняющихся в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$[1]), в соответствии с п. I можно продолжить на класс разрывных функций, содержащий характеристические функции всех прямоугольников. Введем функцию двух переменных

$$F(\xi, \eta) = f[\chi_{[a,\, a,\, \xi,\, \eta]}(x, y)],$$

[1]) К этому случаю сводится и общий случай, когда функции $\varphi(x, y)$ меняются на произвольном ограниченном замкнутом множестве F. Множество F можно заключить в квадрат Q указанного вида и каждую непрерывную функцию, не увеличивая верхней грани ее модуля, продолжить до непрерывной функции на Q. Так как, обратно, каждая непрерывная функция на Q непрерывна и на F, то можно считать функционал f заданным на всем $C(Q)$.

где $\chi_{[a,\,a,\,\xi,\,\eta]}(x, y)$ есть характеристическая функция прямоугольника $[a \leqslant x \leqslant \xi,$ $a \leqslant y \leqslant \eta] = D_{\xi,\,\eta}$. Тем же приемом, что и в п. II, можно доказать, что функция $F(\xi, \eta)$ имеет ограниченное изменение и непрерывна сверху (см. конец § 6) и, следовательно, является интегрирующей для некоторого интеграла Стильтьеса. Далее, поскольку

$$f[\chi_{[a,\,a,\,\xi,\,\eta]}(x, y)] = F(\xi, \eta) = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} dF(x, y) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b \chi_{[a,\,a,\,\xi,\,\eta]}(x, y)\,dF(x, y),$$

переходом к линейным комбинациям и пополнением по метрике C мы получаем для любой непрерывной функции

$$f[\varphi] = \int\limits_a^b\int\limits_a^b \varphi(x, y)\,dF(x, y).$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая любого числа переменных.

2. Абсолютно монотонные функции. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ $(-\infty \leqslant a,\ b \leqslant \infty)$, называется *абсолютно монотонной*, если она сама и все ее производные неотрицательны:

$$f^{(n)}(x) \geqslant 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Абсолютно монотонной функцией является положительная постоянная, а также функция вида $e^{\alpha x}$ $(\alpha > 0)$. Оказывается, если отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ имеет бесконечную протяженность, то всякая абсолютно монотонная функция получается «стильтьесовским комбинированием» простейших абсолютно монотонных функций $e^{\alpha x}$. Ограничимся для определенности полупрямой $-\infty < x < 0$.

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн). *Всякая абсолютно монотонная при $x < 0$ функция $f(x)$ может быть записана в форме*

$$f(x) = C + \int\limits_0^\infty e^{\alpha x}\,dF(\alpha), \tag{1}$$

где $F(\alpha)$ — некоторая неубывающая ограниченная функция.

Впрочем, постоянную C можно включить в интеграл, если добавить еще скачок функции $F(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

Прежде чем доказывать эту теорему[1]), выясним некоторые свойства абсолютно монотонных функций. Так как $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ и не убывает, то существует предел $\theta_n = \lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(x)$; очевидно, что $\theta_0 \geqslant 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0$. Мы утверждаем далее, что функции $f^{(n)}(x)$ стремятся при $x \to -\infty$ к нулю настолько быстро, что сходятся все интегралы

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^0 (-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx,$$

причем значение интеграла I_n таково:

$$I_n = Mn!,$$

[1]) По Б. И. Коренблюму, Успехи матем. наук, 1951, т. 6, № 4.

где $M=f(0)-f(-\infty)$. Действительно, для любого $n \geqslant 1$ и $x<0$

$$f^{(n)}(x) \leqslant \frac{2}{|x|} \int_{x}^{\frac{x}{2}} f^{(n)}(\xi)\, d\xi \leqslant \frac{2}{|x|}\left[f^{(n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)-f^{(n-1)}(x)\right],$$

так что следующая производная убывает при $x \rightarrow -\infty$ по крайней мере на один порядок (по степени x) быстрее, чем предыдущая; так как $f\left(\frac{x}{2}\right)-$ $-f(x) \rightarrow 0$, то $f^{(n)}(x) x^{n} \rightarrow 0$ при любом n. Поэтому при интегрировании по частям

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx=\left.\frac{(-x)^{n}}{n!} f^{(n)}(x)\right|_{-\infty}^{0}+\int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\, dx$$

внеинтегральный член обращается в нуль. Продолжая интегрирование, получим:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx=\int_{-\infty}^{0} f'(x)\, dx=f(0)-f(-\infty)=M,$$

что и требовалось.

Переходим к доказательству теоремы 2. По формуле Дирихле

$$f(x)-f(-\infty)=\int_{-\infty}^{x} f'(\xi)\, d\xi=\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{n} f^{(n+1)}(\xi)\, d\xi=$$

$$=\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{x} \xi^{n}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^{n} f^{(n+1)}(\xi)\, d\xi.$$

В этом интеграле произведем подстановку $\xi=-nt$; тогда получим:

$$f(x)-f(-\infty)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_{-\frac{x}{n}}^{\infty} n^{n} t^{n}\left(1+\frac{x}{nt}\right)^{n} n^{n+1} f^{(n+1)}(-nt)\, n\, dt=$$

$$=\int_{-\frac{x}{n}}^{\infty}\left(1+\frac{x}{nt}\right)^{n} dF_{n}(t),$$

где

$$F_{n}(t)=\frac{(-1)^{n+1} n^{2n+2}}{n!} \int_{0}^{t} \tau^{n} f^{(n+1)}(-n\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Мы утверждаем, что функции $F_n(t)$ равномерно ограничены при всех $t \geqslant 0$. Действительно, заменяя в интеграле (2) величину $-n\tau$ на η, получим:

$$0 \leqslant F_n(t) = \frac{n^{2n+2}}{n!} \int_{-nt}^{0} \frac{\eta^n}{n^n} f^{(n+1)}(\eta) \frac{1}{n^n+1} \frac{d\eta}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{0} f^{(n+1)}(\eta) \, |\eta|^n \, d\eta = M.$$

введем функции

$$\varphi_n(t, x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{nt}\right)^n, & t \geqslant -\frac{x}{n} > 0, \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant -\frac{x}{n}. \end{cases}$$

Эти функции стремятся при $n \to \infty$ равномерно по $t\,(t \geqslant 0)$ к пределу

$$\varphi(t, x) = e^{\frac{x}{t}}.$$

Отметим, что эта экспонента возрастает при $t \to \infty$ до значения 1 в силу предположения $x < 0$.

В силу теоремы 2 Хелли (§ 6) из последовательности неубывающих функций $F_n(t)$ можно выбрать всюду сходящуюся последовательность; по теореме 1 о сходимости интегралов Стильтьеса (см. Замечания 1 и 2 после этой теоремы) имеем:

$$\int_0^\infty \varphi_n(t, x) \, dF_n(t) \to \int_0^\infty \varphi(t, x) \, dF(t).$$

Следовательно, при $x < 0$

$$f(x) = f(-\infty) + \int_0^\infty e^{\frac{x}{t}} dF(t);$$

заменяя здесь $\frac{1}{t}$ на α, мы получаем искомую формулу (1).

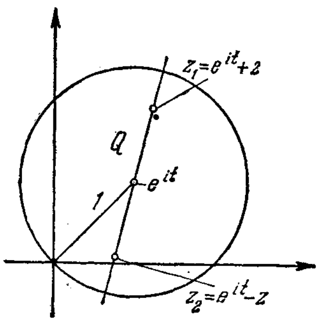


Рис. 14.

3. **Отображение единичного круга в правую полуплоскость.** Найдем общий вид функции $w = f(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$ и имеющей неотрицательную вещественную часть, т. е. отображающей круг $|z| < 1$ в правую полуплоскость. Примером служат постоянная $\alpha + i\beta$, $\alpha \geqslant 0$, а также функция

$$f_t(z) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

с произвольным вещественным t. В самом деле, при заданном t и $|z| \leqslant 1$ точки $z_1 = e^{it} + z$ и $z_2 = e^{it} - z$ находятся в пределах круга Q радиуса 1 с центром в точке e^{it} на одном диаметре этого круга (рис. 14). Весь этот диаметр виден из начала координат (находящегося на окружности круга Q) под углом $\frac{\pi}{2}$; отрезок диаметра между точками z_1 и z_2 виден под углом

$\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $|\arg f_t(z)| = |\arg z_1 - \arg z_2| \leqslant \frac{\pi}{2}$, откуда вытекает, что $\operatorname{Re} f_t(z) \geqslant 0$.

Оказывается, всякая функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$ и отображающая этот круг в правую полуплоскость, получается «стильтьесовским комбинированием» указанных простейших функций; именно имеет место следующая теорема:

Теорема 3. (Г. Херглотц). *Всякая аналитическая функция в круге $|z| < 1$ с неотрицательной вещественной частью может быть записана в виде*

$$f(z) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dF(t), \tag{1}$$

где β — вещественное число, а $F(t)$ — неубывающая функция.

Доказательство[1]). Как известно аналитическая функция $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r < 1$ может быть представлена через граничные значения своей вещественной части $u(z)$ по формуле Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, u(re^{it})\, dt + i\beta.$$

Этот интеграл можно записать в форме

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, dF_r(t) + i\beta,$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t u(re^{i\tau})\, d\tau$$

— неубывающая функция от t. Мы имеем, далее, по теореме о среднем для гармонических функций

$$F_r(t) \leqslant F_r(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau})\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\, u(0),$$

так что семейство функций $F_r(t)$ равномерно ограничено при всех $r < 1$. Функции $\frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}$ ($|z| < 1$ фиксировано) сходятся при $r \to 1$ равномерно по t к функции $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$. Из последовательности $F_r(t)$ $(r \to 1)$ согласно теореме 2 § 6 можно извлечь подпоследовательность, всюду сходящуюся к некоторой неубы-

[1]) По Н. И. Ахиезеру и И. М. Глазману (Теория линейных операторов. Гостехиздат, 1950). Формулу Шварца см., например, А. И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций, изд. 2-е, Физматгиз, 1961, гл. 6.

вающей функции $F(t)$; применяя теорему 1 § 6, получим:

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}-z}{re^{it}+z}\,dF_r(t)+i\beta\to\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,dF(t)+i\beta,$$

что и утверждалось.

Замечание. По формуле (1) может быть представлена и постоянная $\alpha\geqslant 0$; для этого достаточно положить $F(t)=\alpha t$.

§ 8. Дифференцирование функций множеств

1. Теоремы о дифференцировании функций от множеств можно сформулировать наиболее общим образом, отвлекаясь от природы того основного множества, по которому производится дифференцирование.

Пусть дано некоторое абстрактное множество X и некоторое семейство L вещественных функций $f(x)$, определенных на множестве X. Относительно семейства L предполагается, что оно представляет собой линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на числа, содержит все постоянные и вместе с каждой функцией $f(x)$ содержит ее модуль $|f(x)|$. Отсюда можно вывести, что из $f\in L$ следует $f^+\in L$, $f^-\in L$ и из $f\in L$, $g\in L$ следует $\max(f, g)\in L$ и $\min(f, g)\in L$.

Пусть, далее, на семействе L задан «интеграл» I, иными словами, задан линейный функционал, обладающий приведенными ниже свойствами а) — ж):

а) *Из* $\varphi(x)\geqslant 0$ *следует* $I\varphi\geqslant 0$.

Отсюда вытекает, что $I\varphi\leqslant I\psi$ для $\varphi\leqslant\psi$ и что $|I\varphi|\leqslant I(|\varphi|)$.

б) *Если* φ_n, *монотонно возрастая, стремится к функции* φ *и* $I\varphi_n$ *ограничены, то* $\varphi\in L$ *и* $I\varphi=\lim I\varphi_n$.

Функция $\varphi(x)$, для которой $I(|\varphi|)=0$, называется I-эквивалентной нулю, а множество, где такая функция отлична от нуля,— множеством I-меры нуль.

в) *Любая функция* $\varphi(x)$, *отличная от нуля только на множестве* I*-меры нуль, входит в пространство* L, *и* $I\varphi=0$.

г) *Пространство* L_I *классов* I*-эквивалентных функций есть полное нормированное пространство с нормой*

$$\|\varphi\|=I(|\varphi|).$$

Из г) можно вывести, что совокупность тех $\varphi\in L$, для которых $|\varphi|^2\in L$, образует полное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)=I(\varphi, \psi).$$

д) *Имеется некоторая совокупность ограниченных функций* L_0, *плотная в пространстве* L_I.

Совокупность всех функций $\varphi\in L_I$, которые являются пределами возрастающих последовательностей функций $\varphi_n\in L_0$, обозначается через L_I^+.

е) *Каждая функция* $\varphi\in L_I$ *есть разность двух функций, входящих в класс* L_I^+.

Имея множества меры нуль, естественно определить и понятие «почти всюду». Например, последовательность функций сходится почти всюду, если она сходится во всех точках множества X, кроме, быть может, множества меры нуль. Предел последовательности функций $\varphi_n(x)\in L_I$, сходящейся почти всюду, мы назовем I-измеримой функцией.

ж) *Произведение двух* I*-измеримых функций есть* I*-измеримая функция: частное* $1/\varphi$ *есть* I*-измеримая функция, если знаменатель* φ I*-измерим и обращается в нуль самое большее на множестве* I*-меры нуль.*

Можно доказать, так же как и в гл. IV, что I-измеримая функция, ограниченная по модулю I-суммируемой (т. е. функцией $\varphi \in L_I$), сама I-суммируема. В частности, всякая ограниченная I-измеримая функция является I-суммируемой.

Примерами совокупностей L_I могут служить пространства интегрируемых функций по мере Лебега или мере Стильтьеса на отрезке оси или в области n-мерного пространства.

2. Нашей задачей является сравнение двух интегралов I и J, удовлетворяющих поставленным условиям. Предполагается, что совокупность L_I функций φ, интегрируемых с помощью функционала I (короче, I-интегрируемых), и совокупность L_J функций ψ, интегрируемых с помощью функционала J (J-интегрируемых), определены на одном и том же множестве X и имеют пересечение L_0 (функции, одновременно I- и J-интегрируемые), плотное в L_I по метрике L_I и в L_J по метрике L_J.

Будем говорить, что интеграл I абсолютно непрерывен относительно интеграла J, если для любой $\psi \in L_0$ из $\psi \geqslant 0$, $J\psi = 0$, вытекает $I\psi = 0$.

Пусть, например, I есть интеграл Стильтьеса на отрезке $[a, b]$ с абсолютно непрерывной неотрицательной интегрирующей функцией $F(x)$, а J — интеграл Лебега на том же отрезке. В качестве множества L_0 возьмем совокупность всех ограниченных измеримых функций. Если $\psi \in L_0$, $\psi \geqslant 0$ и $J\psi = 0$, то, как мы знаем, функция ψ равна нулю почти всюду; но тогда и

$$I\psi = \int_0^b \psi\, dF = \int_a^b \psi F'(x)\, dx = 0,$$

т. е. интеграл I абсолютно непрерывен относительно интеграла J в только что определенном смысле. Как мы видели в § 5, в этом случае I-интегрируемые функции φ характеризуются тем, что произведение функции φ на некоторую фиксированную J-интегрируемую функцию $g\,(= F'(x))$ есть снова J-интегрируемая функция.

Аналогичный факт справедлив и в общем случае; мы докажем далее следующую основную теорему:

Теорема (Радона — Никодима). *Для того чтобы интеграл I был абсолютно непрерывен относительно интеграла J, необходимо и достаточно, чтобы существовала J-интегрируемая функция ψ_0 такая, что произведение ψ_0 и любой I-интегрируемой функции φ есть снова J-интегрируемая функция и*

$$I\varphi = J(\varphi\psi_0).$$

Доказательство[1]). Достаточность условия теоремы очевидна: если $\psi \in L_0$, $\psi \geqslant 0$, $J\psi = 0$, то множество, на котором $\psi > 0$, имеет J-меру нуль; в силу аксиомы в) функция $\psi\psi_0 \in L_J$, $J(\psi\psi_0) = 0$ и, следовательно, $I\psi = J(\psi\psi_0) = 0$. Мы должны показать, что условие теоремы необходимо для абсолютной непрерывности I относительно J.

Рассмотрим сначала случай, когда $I \leqslant J$, т. е. для любой $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi \in L_0$, имеет место неравенство $I\varphi \leqslant J\varphi$. В этом случае всякое множество J-меры нуль будет и множеством I-меры нуль. Всякая J-измеримая функция, как предел J-почти всюду сходящейся последовательности $\varphi_n \in L_0$, будет и I-измеримой функцией.

Мы утверждаем далее, что в этом случае интеграл I можно доопределить *на всех* функциях $\varphi \in L_J$.

---

[1]) По Ф. Риссу.

Действительно, можно образовать последовательность $\varphi_n \in L_0$, сходящуюся к заданной функции $\varphi \in L_J$ по метрике L_J, так что

$$J(|\varphi_n - \varphi|) \to 0.$$

Но тогда

$$|I\varphi_n - I\varphi_m| \leqslant I(|\varphi_n - \varphi_m|) \leqslant J(|\varphi_n - \varphi_m|) \to 0,$$

так что последовательность φ_n фундаментальна по норме L_I. Положим $I\varphi = \lim I\varphi_n$. Это определение, как легко видеть, однозначно, и для $\varphi \geqslant 0$ всегда $I\varphi \leqslant J\varphi$.

Мы утверждаем, во-вторых, что функционал I, доопределенный, как указано, на все пространство L_J, является на любом пространстве $L_J^p (p \geqslant 1)$ ограниченным функционалом по норме L_J^p. Действительно, для $\varphi \in L_J^p$ имеет место неравенство

$$I(|\varphi|^p) \leqslant J(|\varphi|^p),$$

так что функционал I заведомо ограничен на единичном шаре пространства L_J^p. Мы рассмотрим только значение $p = 2$. Согласно теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве (гл. V, § 2) существует функция $g \in L_J^2$ такая, что для любой $\varphi \in L_J^2$

$$I\varphi = J(g\varphi). \tag{1}$$

Мы утверждаем, что функция g заключена в границах $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ почти всюду по мере J. Действительно, положим в равенстве (1) $\varphi = g^-$; тогда мы получим:

$$Ig^- = J(gg^-) = J(-(g^-)^2) = -J((g^-)^2),$$

и так как $Ig^- \geqslant 0$, $J((g^-)^2) \geqslant 0$, то

$$Ig^- = J((g^-)^2) = 0,$$

так что множество точек, где $g^-(x) \geqslant 0$, имеет J-меру нуль. Итак, почти всюду по мере J мы имеем $g(x) \geqslant 0$. Второе неравенство $g(x) \leqslant 1$ получается заменой в предыдущих рассуждениях функционала I на $J - I$.

Равенство (1) установлено для всех $\varphi \in L_J^2$. Перенесем его теперь на все функции $\varphi \in L_I$. Достаточно рассмотреть функции класса L_I^+. По определению каждую функцию $\varphi \in L_I^+$ можно представить в виде предела возрастающей последовательности функций $\varphi_n \in L_0$. Для функций φ_n равенство (1) справедливо:

$$I\varphi_n = J(g\varphi_n).$$

Вместе с соотношением $\varphi_n \nearrow \varphi$ также имеет место и соотношение $g\varphi_n \nearrow g\varphi$. В силу свойства б) функция $g\varphi$ принадлежит L_I, причем

$$J(g\varphi) = \lim J(g\varphi_n) = \lim I\varphi_n = I\varphi.$$

Итак, для любой $\varphi \in L_I$ мы имеем $g\varphi \in L_J$ и $J(g\varphi) = I\varphi$. Имеет место и обратное утверждение в следующей форме: если φ I-измерима и $g\varphi \in L_J$, то $\varphi \in L_I$ и $I\varphi = J(g\varphi)$[1]. Для доказательства положим $\varphi_N = \min\{|\varphi|, N\}$. Функция φ_N ограничена и I-измерима, следовательно, I-суммируема, и по доказанному $I\varphi_N = J(g\varphi_N)$. Так как $J(g\varphi_N) \leqslant J(g|\varphi|)$, то числа $I\varphi_N$ ограничены; отсюда $|\varphi| = \lim \varphi_N$ принадлежит L_I, что и требовалось.

---

[1]) Если к числу наших аксиом добавить аксиомы, связывающие, как у Лебега, измеримые функции с измеримыми множествами, то условие I-измеримости φ станет излишним (ср. § 5, п. 3).

Мы доказали теорему Радона — Никодима в случае $I \leqslant J$. Переходим теперь к общему случаю.

Пусть I и J — произвольные неотрицательные функционалы, удовлетворяющие условиям п. 1, причем I абсолютно непрерывен относительно J. Введем функционал $K = I + J$. Так как $I \leqslant K$, $J \leqslant K$, то существуют функции k и l, принадлежащие пространству L_K^2 и заключенные между 0 и 1 такие, что для любой $\varphi \in L_I$

$$I\varphi = K(k\varphi) \tag{2}$$

и для любой $\psi \in L_J$

$$J\psi = K(l\psi). \tag{3}$$

При $\varphi = \psi \in L_0$ мы получаем:

$$I\varphi + J\varphi = K\varphi = K[(k+l)\varphi],$$

и так как L_0 плотно в L_K, то и для любой $\varphi \in L_K$

$$K\varphi = K[(k+l)\varphi].$$

Мы утверждаем, что почти всюду по мере K имеет место равенство

$$k + l = 1. \tag{4}$$

Для этого возьмем в качестве φ характеристическую функцию e_0 множества $E_0 = \{k + l < 1\}$. Мы получим:

$$Ke_0 = K[(k+l)e_0]$$

или

$$K[(1 - (k+l)e_0] = 0. \tag{5}$$

Но функция $[1 - (k+l)]e_0$ неотрицательна; в силу равенства (5) она почти всюду по K равна нулю. Следовательно, неравенство $k + l < 1$ может выполняться лишь на множестве K-меры нуль. Аналогично и неравенство $k + l > 1$ может выполняться лишь на множестве K-меры нуль. Таким образом, (4) выполняется почти всюду по мере K, что и утверждалось.

Итак, для всякой J-суммируемой функции ψ произведение $(1-k)\psi$ K-суммируемо и имеет место равенство

$$J\psi = K[(1-k)\psi]. \tag{6}$$

Равенство (6) имеет место и в том случае, когда функция ψ J-измерима, а $(1-k)\psi$ K-суммируема; как мы видели выше, отсюда следует J-суммируемость функции ψ. Возьмем в качестве функции φ в (2) и в качестве ψ в (3) характеристическую функцию e множества Z, где $k(x) = 1$; тогда получим:

$$Ie = K(ke) = K(e),$$
$$Je = K((1-k)e) = K(0) = 0.$$

Мы видим, что множество Z имеет J-меру нуль. Так как I абсолютно непрерывен относительно J, то и $Ie = 0$ и $Ke = 0$; множество Z имеет I-меру нуль и K-меру нуль. Пусть теперь φ — любая функция из пространства L_I. Найдем функцию ψ из условия

$$k\varphi = (1-k)\psi.$$

Имеем:

$$\psi = \frac{k}{1-k}\varphi = \frac{1}{1-k}k\varphi.$$

Здесь $k\varphi \in L_K$ есть K-измеримая функция. Коэффициент $\frac{1}{1-k}$ — также K-измеримая функция, поскольку знаменатель обращается в нуль на множестве

K-меры нуль. Поэтому ψ есть I-измеримая функция, а следовательно, и J-измеримая функция. Так как $(1-k)\psi = k\varphi \in L_K$, то ψ J-суммируема и

$$I\varphi = K(k\varphi) = K((1-k)\psi) = J\psi = J\left(\frac{k}{1-k}\varphi\right). \tag{7}$$

Полагая в (7) $\varphi = 1$, находим, что $\psi_0 = \frac{k}{1-k}$ есть J-интегрируемая функция. Тем самым теорема Радона — Никодима доказана полностью.

Заключительное замечание. Связь дифференцирования и интегрирования, описанная нами в §§ 1—3, была найдена впервые Лебегом (1902) и является одним из важнейших достижений лебеговской теории интегрирования. Несколько ранее (1894) Т. Стильтьес (голландский математик, 1856—1894), занимаясь теорией непрерывных дробей, пришел к новому понятию интеграла, называемого теперь интегралом Римана — Стильтьеса. С работы Ф. Рисса, который в 1909 г. получил представление общего вида линейного функционала в пространстве непрерывных функций с помощью интеграла Стильтьеса, начинается широкое проникновение интеграла Стильтьеса в самые различные области анализа; вместе с тем развивается и общая теория меры, переходя постепенно с прямой на многомерное пространство и затем на абстрактные множества. Именно в таком общем виде теория меры и интеграла оказалась способной участвовать в задачах высшего анализа, таких, как гармонический анализ на группах, теория случайных процессов, динамические системы и др. Рекомендуемая литература: П. Халмош, Теория меры, ИЛ, 1953.

ГЛАВА VII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. О сходимости рядов Фурье

1. Во многих вопросах анализа используется разложение функций в ряд Фурье. В простейшем случае, для отрезка $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, это разложение, будучи записано в комплексной форме, имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}. \tag{1}$$

Разложение в ряд Фурье, сравнительно с другими возможными разложениями, появляется чаще по следующим причинам. Во-первых, функции e^{imx} при различных m ортогональны [в метрике комплексного гильбертова пространства $L_2(-\pi, \pi)$], так что разложение (1) есть разложение по ортогональному базису. Во-вторых, функции $e^{imx} = u_m(x)$, будучи продолженными на всю ось с периодом 2π, остаются превосходными по своим аналитическим качествам (целые аналитические функции) и удовлетворяют простым функциональным уравнениям, таким, как

$$u_m(x+\xi) = u_m(x)\, u_m(\xi)$$

или

$$u'_m(x) = imu_m(x).$$

В-третьих, коэффициенты разложения (1) вычисляются по простым формулам:

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi)\, e^{-im\xi} d\xi. \tag{2}$$

Вопрос о сходимости ряда Фурье (1) может иметь разные формы. Во-первых, можно выяснять, сходится ли ряд Фурье в данной точке x_0. Во-вторых, можно рассматривать сходимость ряда (1) в различных нормах. Вторую постановку мы уточним в п. 2; здесь же мы займемся первой постановкой, т. е. изучением сходимости ряда Фурье в отдельной точке в обычном числовом смысле.

Мы докажем здесь следующую теорему, дающую достаточное условие сходимости ряда Фурье (1) к значению $\varphi(x)$ в данной точке x_0.

Теорема 1. *Если для суммируемой функции $\varphi(x)$ сходится интеграл*

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)|}{|h|}\,dh,$$

то частные суммы ряда Фурье функции $\varphi(x)$ в точке $x=x_0$ сходятся к значению $\varphi(x_0)$.

Условие суммируемости отношения $\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ при $|t|<\delta$ называется *условием Дини*. Оно выполняется, например, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет *условию Липшица порядка* α:

$$|\varphi(x+t)-\varphi(x)|\leqslant C|t|^{\alpha} \qquad (0<\alpha\leqslant 1).$$

В частности, если функция φ имеет в точке x конечную производную (или хотя бы конечные производные числа, гл. VI, § 1), то выполняется условие Липшица порядка 1 и, следовательно, числа $s_n(x)$ сходятся к числу $\varphi(x)$.

Приступая к доказательству теоремы, мы начинаем с преобразования выражения частной суммы $s_n(x)$ ряда (1). Имеем:

$$s_n(x)=\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)\,e^{ik(x-\xi)}\,d\xi.$$

Произведем подстановку $x-\xi=-t$. Будем считать, что функция $\varphi(\xi)$ продолжена с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю прямую, как периодическая функция с периодом 2π; тогда новые пределы интегрирования $-\pi-x$ и $\pi-x$ можно будет заменить на $-\pi$ и π, и в результате мы получим:

$$\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{-n}^{n} e^{ikt}\,dt.$$

Далее, суммируя геометрическую прогрессию, получаем:

$$\sum_{-n}^{n} e^{ikt}=\frac{e^{int}-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}}=\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}=\frac{\sin\left(h+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

и, таким образом,

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{3}$$

Функция

$$D_n(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

называется *ядром Дирихле*. Если положить $\varphi(x)\equiv 1$, то, очевидно, $s_n(x)\equiv 1$ при любом n; в этом случае формула (3) дает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt=1.$$

Разность $s_n(x)-\varphi(x)$ теперь можно привести к виду

$$s_n(x)-\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{4}$$

Мы хотим выяснить, при каких условиях $s_n(x)$ стремится к $\varphi(x)$, или, что то же, интеграл (4) стремится к нулю. Для этого докажем лемму:

Лемма 1. *Если $\varphi(x)$ — суммируемая функция на отрезке $[a, b]$, то интегралы*

$$\int_a^b\varphi(x)\sin\lambda x\,dx,\qquad\int_a^b\varphi(x)\cos\lambda x\,dx$$

стремятся к нулю при $\lambda\to\infty$.

Доказательство. Пусть сначала $\varphi(x)$ — характеристическая функция интервала $(c, d)\subset[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b\varphi(x)\sin\lambda x\,dx=\int_c^d\sin\lambda x\,dx=\frac{\cos\lambda c-\cos\lambda d}{\lambda}\to 0.$$

Любая ступенчатая функция $h(x)$ есть линейная комбинация характеристических функций интервалов, поэтому для любой ступенчатой функции утверждение леммы также справедливо.

Если же $\varphi(x)$ — произвольная суммируемая функция, то для заданного $\varepsilon>0$ мы найдем ступенчатую функцию $h(x)$ так, чтобы иметь

$$\int_a^b|\varphi(x)-h(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

и далее найдем $\lambda_0 > 0$ так, чтобы при $|\lambda| > \lambda_0$ было

$$\left| \int_a^b h(x) \sin \lambda x \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при этих значениях λ

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \right| \leqslant \int_a^b |\varphi(x) - h(x)| \, dx + \left| \int_a^b h(x) \sin \lambda x \, dx \right| < \varepsilon,$$

откуда все следует. Для множителя $\cos \lambda x$ доказательство аналогичное.

В частности, мы приходим к выводу: *Коэффициенты Фурье a_n всякой интегрируемой функции $\varphi(x)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.*

Вернемся теперь к интегралу (4)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}} \, dt = I_n.$$

Предположим, что при данном значении x суммируемая функция $\varphi(x)$ определена и конечна и отношение

$$\frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t}$$

интегрируемо по t в пределах $|t| \leqslant \delta$, и, следовательно, и по всему интервалу $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Тогда и функция

$$\frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$$

интегрируема в пределах $-\pi < t < \pi$ и к интегралу I_n можно применить лемму 1; в силу этой леммы I_n стремится к нулю при $n \to \infty$, что нам и требуется. Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание. Условие Дини в ряде случаев можно ослабить, но вовсе отбросить его с сохранением сходимости ряда Фурье нельзя. Существуют даже непрерывные функции, у которых ряд Фурье в отдельных точках расходится (см. п. 3). А. Н. Колмогоров построил пример суммируемой функции, у которой ряд Фурье расходится в каждой точке [1]). До сих пор нет решения проблемы, поставленной Н. Н. Лузиным в 1915 г.: будет ли сходиться почти всюду ряд Фурье для функции $f \in L_2$?

В тех же терминах можно дать и условие равномерной сходимости ряда Фурье.

---

[1]) См. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, гл. 8.

Теорема 1'. *Если на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ суммируемая функция $\varphi(x)$ ограничена и условие Дини выполняется равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x)|}{|t|}\,dt < \varepsilon$$

одновременно для всех $x \in E$, то ряд Фурье функции $\varphi(x)$ сходится к ней равномерно на множестве E.

Для доказательства используем лемму, являющуюся усилением леммы 1.

Лемма 1'. *Соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = 0$$

осуществляется равномерно на любом множестве B суммируемых на $[a, b]$ функций $f(t)$, компактном по метрике $L_1(a, b)$.

Действительно, по заданному $\varepsilon > 0$ мы можем построить в $L_1(a, b)$ конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для множества B; пусть это будут функции $f_1(t), \ldots, f_m(t)$. По лемме 1 можно найти λ_0 так, чтобы при $\lambda > \lambda_0$ выполнялись неравенства

$$\left|\int_a^b f_j(t)\sin\lambda t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Если теперь $f(t) \in B$ — любая функция и для некоторого j мы имеем $\|f(t)-f_j(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, то при $\lambda > \lambda_0$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)-f_j(t)|\,dt + \left|\int_a^b f_j(t)\sin\lambda t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству теоремы 1'. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы иметь при всех $x \in E$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x)|}{|t|}\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Тогда

$$s_n(x)-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}\,\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}. \tag{6}$$

Так как $\dfrac{t}{2\pi \sin \frac{t}{2}} < 1$, то первое слагаемое в силу (5) не превосходит $\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in E$. Для оценки остальных слагаемых покажем, что функции

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\sin \frac{t}{2}},$$

как функции от $t \in [\delta, \pi]$ с параметром $x \in E$, образуют компактное множество B в пространстве $L_1(\delta, \pi)$. Пусть $x_n \in E$ — любая последовательность точек; можно считать, что x_n стремятся к некоторой точке x_0 и что значения $\varphi(x_n)$ стремятся к некоторому числу c_0. Тогда в метрике $L_1(\delta, \pi)$ мы получим $\varphi(x_n + t) \longrightarrow \varphi(x_0 + t)$ и, значит,

$$\| f_{x_n}(t) - f_{x_0}(t) \| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\varphi(x_n + t) - \varphi(x_0 + t)}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|} \right\| + \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\varphi(x_n) - c_0}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} [\| \varphi(x_n + t) - \varphi(x_0 + t) \| + \pi | \varphi(x_n) - c_0 |] \longrightarrow 0,$$

т. е. последовательность $f_{x_n}(t)$ фундаментальна в $L_1(\delta, \pi)$.

Таким образом, множество B компактно. По лемме 1′ можно найти λ_0 так, что при $n > \lambda_0$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

одновременно для всех $x \in E$. Аналогичное построение можно провести для последнего слагаемого в (6). В результате мы видим, что при достаточно больших n величина $| s_n(x) - \varphi(x) |$ становится $< \varepsilon$ сразу для всех $x \in E$, чем теорема 1′ и доказана.

Следствие. *Если в некотором промежутке* $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$ *все производные числа суммируемой функции* $\varphi(x)$ *остаются ограниченными некоторой постоянной* K, *то ряд Фурье функции* $\varphi(x)$ *сходится равномерно на любом отрезке* $[\alpha', \beta']$ *таком, что* $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.

Действительно, при $x \in [\alpha', \beta']$ мы имеем:

$$| \varphi(x+t) - \varphi(x) | \leqslant K | t |$$

для всех $| t | \leqslant \min(\beta - \beta', \alpha' - \alpha)$, так что на отрезке $[\alpha', \beta']$ функция $\varphi(x)$ ограничена и условие Дини выполняется равномерно.

Например, если суммируемая функция $\varphi(x)$ равна нулю на отрезке $[\alpha, \beta]$ то ее ряд Фурье сходится к нулю равномерно в любом внутреннем по отношению к $[\alpha, \beta]$ отрезке $[\alpha', \beta']$.

Задачи. 1. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и в окрестности точки x_0 имеет ограниченное изменение, то ряд Фурье функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ сходится к $\varphi(x_0)$.

Указание. Достаточно рассмотреть неубывающую $\varphi(x)$. Использовать вторую теорему о среднем:

$$\int_0^h \varphi(t) g(t)\, dt = \varphi(h) \int_\xi^h g(t)\, dt, \qquad 0 < \xi < h,$$

и равномерную ограниченность интеграла $\int\limits_{n\xi}^{nh} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

2. Без предположения непрерывности $\varphi(x)$ в задаче 1 ряд Фурье сходится к значению $\frac{1}{2}[\varphi(x_0+0)+\varphi(x_0-0)]$.

Указание: В силу четности ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) D_n(t)\, dt = \int_0^{\pi} [\varphi(x+t)+\varphi(x-t)] D_n(t)\, dt.$$

2. Переходим к вопросам о сходимости ряда Фурье

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \tag{1}$$

по нормам различных функциональных пространств. Сначала напомним известные факты относительно сходимости рядов Фурье. В элементарных курсах анализа доказывается, что всякая непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $\varphi(x)$, кусочно-гладкая и удовлетворяющая условию $\varphi(\pi)=\varphi(-\pi)$ (обеспечивающему непрерывность 2π-периодического продолжения функции $\varphi(x)$ на всю ось), разлагается в ряд Фурье, сходящийся абсолютно и равномерно, т. е., в частности, по норме пространства $C(-\pi, \pi)$. С другой стороны, в гл. V мы видели, что всякая квадратично интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $\varphi(x)$ есть сумма ряда Фурье (1), сходящегося к $\varphi(x)$ в среднем квадратическом [т. е. по метрике пространства $L_2(-\pi, \pi)$].

Ряды по функциям e^{imx} можно строить и изучать и в других нормированных пространствах функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Но всех нормированных пространств функций слишком много; мы ограничимся важным классом пространств, содержащим большинство тех, которые используются в аналитических применениях.

Определение. Нормированное пространство R функций, определенных на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется *однородным пространством* функций, если выполняются следующие условия:

1) Все функции $\varphi(x) \in R$ суммируемы, и из сходимости $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ по норме R вытекает сходимость $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ по норме $L_1(-\pi, \pi)$, т. е. соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \to 0.$$

2) Если функцию $\varphi(x)$ продолжить на всю ось x, как периодическую функцию с периодом 2π, то при любом вещественном h будут иметь смысл функции $\varphi(x+h)$ — сдвиги функции $\varphi(x)$. Требуется, чтобы все эти сдвиги принадлежали пространству R вместе с функцией $\varphi(x)$ и чтобы норма со сдвигом не менялась:

$$\|\varphi(x+h)\|=\|\varphi(x)\| \quad \text{при любом } h. \tag{2}$$

3) Пространство R содержит все тригонометрические многочлены — линейные комбинации функций e^{imx}, и их совокупность образует всюду плотное множество в пространстве R.

Условиям 1—3 удовлетворяют многие из известных нам пространств функций. Например, эти условия выполнены в пространствах $L_p(-\pi, \pi)$ для всех $p \geqslant 1$. В пространстве $C(-\pi, \pi)$ всех непрерывных функций на $[-\pi, \pi]$ условие 2 не выполнено, так как непрерывная функция $\varphi(x)$ при $\varphi(\pi) \neq \varphi(-\pi)$ перестает быть непрерывной после периодического продолжения на всю ось и, например, $\varphi(x+\pi)$ уже не входит в $C(-\pi, \pi)$. Но если мы рассмотрим не все пространство $C(-\pi, \pi)$, а только его подпространство $\hat{C}(-\pi, \pi)$, выделяемое условием $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$, то $\hat{C}(-\pi, \pi)$ будет уже удовлетворять всем условиям 1—3. Аналогично подпространство $\hat{D}_n(-\pi, \pi)$ пространства $D_n(-\pi, \pi)$, выделяемое условиями $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$, $\varphi'(-\pi)=\varphi'(\pi), \ldots, \varphi^{(n)}(-\pi)=\varphi^{(n)}(\pi)$, также удовлетворяет условиям 1—3.

Установим прежде всего вид ряда Фурье в однородном пространстве R. Собственно, нам понадобится здесь только условие 1.

Лемма 2. *Если для некоторой функции $\varphi(x)$, входящей в однородное пространство R, разложение*

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \tag{3}$$

сходится по норме пространства R, то

$$a_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi)\, e^{-im\xi} d\xi \tag{4}$$

есть обычные коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$.

Доказательство. В силу условия 1 имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{-n}^{n} a_m e^{imx}-\varphi(x)\Big|\, dx \to 0.$$

Но тогда и при каждом фиксированном k

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big\{\Big| e^{-ikx} \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx}-e^{-ikx}\varphi(x)\Big\}\, dx \to 0,$$

откуда, в силу ортогональности функций e^{imx} на $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-ikx}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx}\,dx = a_k \cdot 2\pi,$$

что и приводит нас к формуле (4).

Следующее свойство функций, входящих в однородное пространство, играет важную роль в дальнейшем.

Лемма 3. *Всякая функция $\varphi(x)$, входящая в однородное пространство R, непрерывна относительно сдвига по норме: для любого $\varepsilon < 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ имеем $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Обозначим через Q совокупность всех функций $\varphi(x) \in R$, непрерывных по норме относительно сдвига. Очевидно, что совокупность Q есть подпространство пространства R: оно содержит вместе с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ любую их линейную комбинацию. Покажем, что Q замкнуто по норме. Пусть $\varphi_n \to \varphi$, где $\varphi_n \in Q$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер n так, чтобы иметь $\|\varphi - \varphi_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Затем подберем δ из условия непрерывности относительно сдвига функции $\varphi_n(x)$ так, чтобы иметь $\|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|h| < \delta$. В силу условия 2 мы будем иметь одновременно и $\|\varphi(x+h) - \varphi_n(x+h)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Отсюда

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq \|\varphi(x+h) - \varphi_n(x+h)\| + \\ + \|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\| + \|\varphi_n(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon,$$

так что функция $\varphi(x)$ также непрерывна относительно сдвига. Наконец, заметим, что каждая из функций e^{imx} непрерывна относительно сдвига, так как

$$\|e^{im(x+h)} - e^{imx}\| = |e^{imh} - 1|\,\|e^{imx}\| \to 0 \text{ при } |h| \to 0.$$

Таким образом, совокупность Q содержит все тригонометрические многочлены и замкнута; поэтому в силу условия 3 $Q = R$, и лемма доказана.

Теперь мы переходим к формулировке основных наших проблем.

А. *Дана функция $\varphi(x)$ из однородного пространства R, и по формулам* (4) *вычислены ее коэффициенты Фурье. Будет ли ряд Фурье $\sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$ сходиться к функции $\varphi(x)$ по норме пространства R?*

Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный: существуют однородные пространства, и притом самые привычные нам, как

$\hat{C}(-\pi, \pi)$ и $L_1(-\pi, \pi)$, в которых ряд Фурье, во всяком случае для некоторых функций, оказывается расходящимся.

Такой ответ вызывает естественное пожелание:

Б. *Указать по возможности простой единообразный процесс, позволяющий эффективно восстанавливать функцию $\varphi(x)$ по ее ряду Фурье, невзирая на возможную расходимость этого ряда.*

В направлении выполнения этого пожелания мы получим здесь следующий результат:

Теорема 2. *Для любой функции $\varphi(x) \in R$ средние арифметические частных сумм $s_n(x) = \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx}$ ее ряда Фурье*

$$\sigma_p(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{p-1}(x)}{p}$$

сходятся по норме к функции $\varphi(x)$ при $p \to \infty$.

3. В этом пункте мы убедимся, что в пространствах $\hat{C}(-\pi, \pi)$ и $L_1(-\pi, \pi)$ имеются функции, ряды Фурье которых не сходятся по норме пространства. Вначале мы покажем, что интегралы

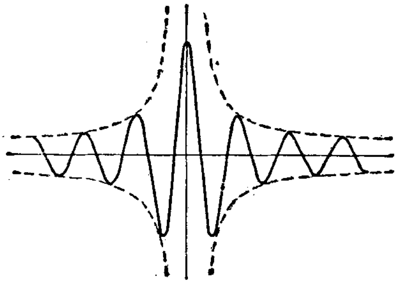


Рис. 15.

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}},$$

неограниченно возрастают при $n \to \infty$. График функции $D_n(t)$ дан на рис. 15.

В точках t, где $\left(n + \frac{1}{2}\right) t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \ldots$, величина $\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right|$ обращается в единицу; в интервалах

$$\left|\left(n + \frac{1}{2}\right) t - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right| < \frac{\pi}{3} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

эта величина превосходит $\frac{1}{2}$. В этих же интервалах величина $\sin\frac{t}{2}$ не превосходит

$$\sin \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{3}\pi}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)} < \frac{(k+1)\pi}{2n}.$$

Поэтому интеграл от $|D_n(t)|$, распространенный только на указанные промежутки, заведомо превосходит

$$\frac{2\pi}{3\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{(k+1)\pi}{2n}}=\frac{2n}{3\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\to\infty.$$

Собственно, в этом факте и заключается основная причина того, что ряд Фурье, вообще говоря, не сходится в пространствах $\widehat{C}(-\pi, \pi)$ и $L_1(-\pi, \pi)$. Рассмотрим в пространстве $\widehat{C}(-\pi, \pi)$ функционалы

$$\Phi_n[\varphi]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,D_n(t)\,dt,$$

дающие значение частной суммы $s_n(x)$ ряда Фурье для функции $\varphi(x)$ при $x=0$. Каждый из функционалов $\Phi_n(\varphi)$ ограничен на единичном шаре пространства $\widehat{C}(-\pi, \pi)$, но *в совокупности* они не ограничены на этом шаре. Действительно, если брать в качестве $\varphi(t)$ непрерывные функции, приближающиеся к $+1$ на интервалах, где $D_n(t)$ положительно, и к -1 на интервалах, где $D_n(t)$ отрицательно, причем так, чтобы они по модулю не превосходили 1 и тем самым принадлежали единичному шару пространства $\widehat{C}(-\pi, \pi)$, мы будем получать как угодно большие (при достаточно большом n) числовые значения $\Phi_n(\varphi)$. Мы утверждаем, что существует и индивидуальная функция $\varphi_0(x)$, на которой значения функционалов $\Phi_n(\varphi_0)$ не ограничены (и, значит, соответствующий ряд Фурье расходится при $x=0$). Это вытекает из следующей общей леммы функционального анализа:

Лемма 4. *Если в полном нормированном пространстве R последовательность линейных функционалов Φ_n не является ограниченной в шаре $|\varphi|\leqslant 1$, то имеется элемент φ_0, на котором $\Phi_n[\varphi_0]$ не ограничены.*

Доказательство этой леммы приводится в Дополнении, § 2 (стр. 427).

Таким образом, *заведомо имеется непрерывная функция, для которой ряд Фурье расходится в точке $x=0$.*

С небольшой технической доделкой такое же рассуждение можно провести и для пространства $L_1(-\pi, \pi)$. Предположим, что для любого $\varphi\in L_1$ частные суммы ряда Фурье $S_n\varphi$ стремятся по норме к элементу φ. Даже можно предположить и меньше, а именно, что числа $\|S_n\varphi\|$ ограничены для каждого $\varphi\in L_1$. Тогда мы можем утверждать, что *числа $\|S_n\varphi\|$ ограничены одной и той же постоянной K для всех $\|\varphi\|\leqslant 1$.* Если бы это было не так, то, применяя ту же лемму функционального анализа, мы нашли бы элемент φ_0, для которого числа $\|S_n\varphi_0\|$ не были бы ограниченными. Пусть теперь $\mu(x)$ — любая ограниченная измеримая функция, например, не превосходящая 1 по модулю. Справедливо неравенство

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}S_n\varphi(x)\,\mu(x)\,dx\right|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|S_n\varphi(x)|\,dx=\|S_n\varphi\|\leqslant K.$$

Вводя явное выражение оператора S_n, мы получаем:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\,D_n(t)\,\mu(x)\,dt\,dx\right|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,D_n(x-t)\,\mu(x)\,dx\,dt\right|\leqslant K. \quad (1)$$

Но легко показать, что такое неравенство не может выполняться при всех n, любых $\varphi\in L_1$ с $\|\varphi\|\leqslant 1$ и любых измеримых $\mu(x)$ с $|\mu(x)|\leqslant 1$. Действительно, неравенство (1) можно записать в виде

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,M_n(t)\,dt\right|\leqslant K, \quad (2)$$

где $M_n(t)=\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)\,\mu(x)\,dx$ есть, очевидно, непрерывная функция от t.

Положим $\varphi(t)$ равной $\frac{1}{2\varepsilon}$ при $|t|\leqslant\varepsilon$ и 0 вне этого отрезка; при этом $\|\varphi\|=1$, а интеграл в (2) превращается в среднее от функции $M_n(t)$ по отрезку $|t|\leqslant\varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим:

$$|M_n(0)|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\mu(x)\,dx\right|\leqslant K.$$

Функция $\mu(x)$ у нас еще не определена. Положим ее равной $+1$ там, где $D_n(x)>0$, и -1 там, где $D_n(x)<0$; получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx\leqslant K.$$

Но мы уже доказали, что такое неравенство не может иметь места для всех n. Итак, *заведомо имеется элемент* $\varphi_0\in L_1$, *для которого частные суммы* $S_n\varphi_0$ *не сходятся к* φ_0 *по норме* $L_1(-\pi,\pi)$.

Доказанные факты, разумеется, не исключают того, что в отдельных однородных пространствах сходимость $S_n\varphi\to\varphi$ может иметь место для всякого элемента φ. Но такой факт, если он имеет место, является специфическим свойством рассматриваемого пространства R. Мы знаем, например, что этот факт имеет место в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$. Имеется также теорема М. Рисса, в силу которой аналогичный факт справедлив и в любом пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ при $p>1$ [1]).

Замечание. Без предположения однородности пространства R и теорема 2 становится неверной; более того, может случиться, что никакие линейные комбинации частных сумм ряда Фурье функции $\varphi(x)$ не будут сходиться к $\varphi(x)$ по норме R.

Рассмотрим для примера пространство R, состоящее из функций $\varphi(x)$, непрерывных при $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, принадлежащих к L_2 при $|x|\leqslant\pi$ и имеющих норму

$$\|\varphi\|=\max_{|x|\leqslant\frac{\pi}{2}}|\varphi(x)|+\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)|\,dx.$$

[1]) См. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, гл. 7.

Это пространство, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 3) однородного пространства, но не удовлетворяет условию 2). Функция $\varphi_0(x)$, равная $+\frac{\pi}{4}$ при $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $-\frac{\pi}{4}$ в остальных точках промежутка $[-\pi, \pi]$, принадлежит R и имеет формальный ряд Фурье

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots$$

Все члены этого ряда обращаются в 0 при $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Поэтому любая линейная комбинация частных сумм этого ряда также обращается в нуль при $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Так как сама функция $\varphi_0(x)$ при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ равна $-\frac{1}{2}$, а сходимость по норме R требует, в частности, равномерной сходимости в отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то ясно, что не может существовать линейных комбинаций частных сумм ряда Фурье функции $\varphi_0(x)$, которые сходились бы к $\varphi_0(x)$ по норме пространства R.

4. Основным аппаратом при доказательстве теоремы 2 будет у нас *интегрирование непрерывных абстрактных функций со значениями в нормированном пространстве* R. В этом пункте мы приведем соответствующие определения и необходимые элементы теории.

Пусть $f(t)$ означает элемент полного нормированного пространства R, зависящий от вещественного параметра t, или, что то же, функцию параметра t с значениями в пространстве R. Такие функции называют *абстрактными функциями*. Будем говорить, что $f(t)$ непрерывно зависит от параметра t в точке $t = \tau$, если при $t \to \tau$ всегда

$$\| f(t) - f(\tau) \| \to 0.$$

Абстрактная функция $f(t)$, непрерывно зависящая от t при любом $t = \tau$ из отрезка $a \leqslant t \leqslant b$, называется *непрерывной абстрактной функцией от* t на $[a, b]$.

Следующие предложения, представляющие собой естественные обобщения известных элементарных теорем анализа, легко доказываются с помощью обычных рассуждений, использующих компактность отрезка:

а) *Абстрактная функция* $f(t)$, *непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *ограничена по норме, так что* $\| f(t) \| < M$ *при всех* t.

б) *Абстрактная функция* $f(t)$, *непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *равномерно непрерывна на нем: для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что из* $|t' - t''| < \delta$ *следует* $\| f(t') - f(t'') \| < \varepsilon$.

в) Последовательность абстрактных функций $f_n(t)$ называется сходящейся к абстрактной функции $f(t)$ *равномерно на* $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$

$$\max_t \| f_n(t) - f(t) \| < \varepsilon.$$

Утверждается, что *предел $f(t)$ равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $f_n(t)$ есть также непрерывная функция.*

Мы определим далее интеграл Римана от функции $f(t)$. Пусть Π означает разбиение промежутка $[a, b]$ точками деления $a = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_n = b$ с разностями $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. Величину $d(\Pi) = \max \Delta t_j$ называем параметром разбиения Π. Составим интегральную сумму

$$s_\pi = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\,\Delta t_j. \tag{1}$$

Величина s_π, очевидно, есть элемент того же пространства R. Утверждается, что при неограниченном измельчении разбиения Π, т. е. при $d(\Pi) \to 0$, интегральная сумма s_π стремится к однозначно определенному элементу If пространства R, который и называется ***интегралом Римана от абстрактной функции*** $f(t)$.

Приведем доказательство существования интеграла.

Лемма 5. *Пусть задано $\varepsilon > 0$ и выбрано $\delta > 0$ так, что $|f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ всякий раз, когда $|t' - t''| < \delta$; утверждается, что все суммы* (1) *с* $d(\Pi) \leq \delta$ *отличаются друг от друга по норме не более чем на* $\varepsilon(b - a)$.

Рассмотрим сначала интегральные суммы

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\,\Delta t_j \quad \text{и} \quad s' = \sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\,\Delta t_k,$$

причем подразбиение основного промежутка, отвечающее второй сумме, получается из подразбиения, отвечающего первой сумме, добавлением нескольких новых точек. В этом случае каждое слагаемое первой суммы $f(t_j)\,\Delta t_j$ заменяется при переходе ко второй сумме величиной

$$f(t_{j1})\,\Delta t_{j1} + \ldots + f(t_{jr})\,\Delta t_{jr}.$$

Здесь по условию каждую из величин $f(t_{j1}), \ldots, f(t_{jr})$ можно заменить на $f(t_j)$ с ошибкой, по норме меньшей $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$f(t_{j1}) = f(t_j) + h_1, \ldots, f(t_{jr}) = f(t_j) + h_r, \quad \|h_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\|f(t_{j1})\,\Delta t_{j1} + \ldots + f(t_{jr})\,\Delta t_{jr} - f(t_j)\,\Delta t_j\| \leq \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|\,\Delta t_{ji} < \frac{\varepsilon}{2}\,\Delta t_j,$$

откуда

$$\|s - s'\| < \sum \frac{\varepsilon}{2}\,\Delta t_j = \frac{\varepsilon}{2}(b - a).$$

Пусть теперь s_1 и s_2 — любые две интегральные суммы с единственным условием, чтобы элементы соответствующих подразбиений не превосходили указанного δ. Образуем интегральную сумму s, используя подразбиение с точками деления основного промежутка, участвующими и в первой сумме, и во второй сумме. Тогда по доказанному

$$\| s - s_1 \| < \frac{\varepsilon}{2}(b-a), \quad \| s - s_2 \| < \frac{\varepsilon}{2}(b-a),$$

откуда

$$\| s_1 - s_2 \| < \varepsilon (b-a),$$

что и требовалось.

Из леммы 5 уже легко вывести, что при неограниченном измельчении отрезка $[a, b]$ суммы (1) имеют предел. Действительно, пусть Π_n — произвольная последовательность подразбиений с $d(\Pi_n) \to 0$. По доказанному соответствующие интегральные суммы s_n образуют фундаментальную последовательность; обозначим через If ее предел в пространстве R. Любая другая последовательность интегральных сумм s_n' с $d(\Pi_n') \to 0$ имеет тот же предел так как в силу доказанного $\| s_n - s_n' \| \to 0$. Элемент If мы и будем называть *интегралом от функции $f(t)$ по промежутку* $[a, b]$.

Интеграл от абстрактной функции обладает обычными свойствами интеграла:

$$I(f+g) = If + Ig; \tag{2}$$

$$I(\alpha f) = \alpha If; \tag{3}$$

$$\text{если } \|f\| \leqslant M, \text{ то } \|If\| \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

Произведение абстрактной непрерывной функции $f(t)$ на вещественную непрерывную функцию $\beta(t)$ есть снова абстрактная непрерывная функция. При этом, если $\beta(t) \geqslant 0$, $\|f\| \leqslant M$, то имеет место неравенство

$$\| I(\beta f) \| \leqslant M \int_a^b \beta(t)\, dt. \tag{5}$$

Все эти свойства легко доказываются предельным переходом от интегральных сумм.

Важным примером являются абстрактные функции, значения которых при каждом t принадлежат нормированному пространству R обычных функций от аргумента x, так что $f(t) = \varphi(x, t)$.

Из определения интеграла абстрактной функции очевидно, что в этом случае операция If и обычное интегрирование функции $\varphi(x, t)$ по переменному t приводят к одному и тому же результату.

5. В этом пункте мы докажем теорему 2: *для любой функции $\varphi(x)$, принадлежащей однородному пространству R, средние арифметические частных сумм ее ряда Фурье сходятся к $\varphi(x)$ по норме пространства R.*

Прежде чем доказывать эту теорему, найдем выражение для средних арифметических частных сумм ряда Фурье.

Положим

$$\sigma_n(x)=\frac{s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_{n-1}(x)}{n},$$

где $s_m(x)=\sum_{-m}^{m} a_k e^{ikx}$ есть частная сумма ряда Фурье функции $\varphi(x)$. Как мы видели выше,

$$s_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

поэтому

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Сумму, стоящую под знаком интеграла, легко вычислить, если умножить числитель и знаменатель каждого слагаемого на $\sin\frac{t}{2}$:

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\sin\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\cos mt-\cos(m+1)t}{2\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1-\cos nt}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Итак, мы получаем:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt. \tag{1}$$

Функция

$$F_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

называется ядром Фейера. В отличие от ядра Дирихле ядро Фейера неотрицательно. Далее, если $\varphi(x)\equiv 1$, то и $s_n(x)\equiv 1$, $\sigma_n(x)\equiv 1$ и из (1) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt=1.$$

Переходим к доказательству теоремы 2. Проверим сначала, что она справедлива для любого тригонометрического многочлена

$$\varphi(x) = \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx}.$$

Среднее арифметическое первых p частных сумм ряда Фурье функции $\varphi(x)$ мы представим в форме

$$\sigma_p(x) = \frac{s_0(x) + \ldots + s_n(x)}{p} + \frac{s_{n+1}(x) + \ldots + s_p(x)}{p} =$$
$$= \frac{s_0(x) + \ldots + s_n(x)}{p} + \frac{p-n}{p}\varphi(x),$$

поскольку частные суммы $s_q(x)$ при $q > n$ совпадают с самой функцией $\varphi(x)$. Далее, при $p \to \infty$ первое слагаемое стремится к нулю, а второе — к $\varphi(x)$; тем самым при $p \to \infty$ мы имеем $\sigma_p(x) \to \varphi(x)$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай. Равенство (1) задает $\sigma_n(x)$ как результат применения к элементу $\varphi \in R$ линейного интегрального оператора — обозначим его, например, через A_n — с ядром Фейера. Применим к интегралу в правой части, рассматриваемому как интеграл от абстрактной непрерывной функции от t с значениями в пространстве R, неравенство (5) п. 4; мы получим оценку

$$\|\sigma_n(x)\| = \|A_n\varphi\| \leqslant \|\varphi\| \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \|\varphi\|.$$

Это означает, что норма оператора A_n при любом n не превосходит 1. Мы используем сейчас следующую простую лемму:

Лемма 6. *Пусть в нормированном пространстве R задана последовательность линейных операторов A_n, нормы которых ограничены фиксированной постоянной K. Если соотношение $A_n\varphi \to \varphi$ справедливо для элементов φ, принадлежащих некоторому всюду плотному множеству $Q \subset R$, то оно справедливо и для всех элементов $\varphi \in R$.*

С помощью этой леммы доказательство теоремы 2 быстро завершается. Действительно, нам нужно доказать справедливость соотношения $A_n\varphi \to \varphi$, где A_n — операторы с ядром Фейера. Но мы видели, что нормы этих операторов ограничены числом 1 и что соотношение $A_n\varphi \to \varphi$ выполняется для тригонометрических многочленов, которые по условию всюду плотны в однородном пространстве R. В силу леммы 6 соотношение $A_n\varphi \to \varphi$ справедливо для всех $\varphi \in R$, чем теорема 2 и доказана.

Нам остается доказать лемму 6. Пусть $\varphi \in R$ — любой элемент и задано $\varepsilon > 0$. Найдем элемент $\varphi_\varepsilon \in Q$ такой, что $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\| < \varepsilon$, и затем такой номер N, что $\|A_n\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Тогда для этих же $n > N$ мы будем иметь:

$$\|A_n\varphi - \varphi\| \leqslant \|A_n\varphi - A_n\varphi_\varepsilon\| + \|A_n\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\| \leqslant K\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

откуда и следует, что $A_n\varphi \to \varphi$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 в применении к пространству $\tilde{C}(-\pi, \pi)$ приводит к следующему результату: *всякая функция $\varphi(x)$, непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющая условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, есть предел равномерно сходящейся последовательности средних арифметических частных сумм своего ряда Фурье.* В этом частном виде теорема 2 была доказана впервые в 1905 г. Л. Фейером.

В применении к пространству $L_1(-\pi, \pi)$ теорема 2 приводит к важному свойству единственности:

Если все коэффициенты Фурье суммируемой функции $\varphi(x)$ равны нулю, то сама функция $\varphi(x)$ равна нулю (почти всюду). Действительно, из условия теоремы следует, что все члены ряда Фурье функции $\varphi(x)$ равны нулю; но тогда все $s_n(x)$ равны нулю, все $\sigma_n(x)$ равны нулю и, следовательно, по норме L_1

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = 0.$$

Другим выражением того же свойства служит утверждение:

Если у двух интегрируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ все коэффициенты Фурье соответственно совпадают, то $\varphi(x)$ почти всюду совпадает с $\psi(x)$.

Для доказательства достаточно образовать разность $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$; все ее коэффициенты Фурье по условию равны нулю, откуда $f(x)$ равна нулю почти всюду.

Задачи 1. Точка x_0 называется обобщенной точкой Дини для суммируемой функции $\varphi(x)$, если при некотором c сходится интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(x_0 + t) - c|}{|t|}\, dt.$$

Показать, что ряд Фурье функции $\varphi(t)$ сходится в обобщенной точке Дини к значению c.

2. Точка x_0 называется (обычной) точкой Дини для суммируемой функции $\varphi(x)$, если сходится интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)|}{|t|}\, dt.$$

Показать, что почти все обобщенные точки Дини являются обычными точками Дини.

Указание. Проверить, что каждая обобщенная точка Дини, которая одновременно является точкой Лебега для функции $\varphi(x)$, есть обычная точка Дини.

3. Если $f(t)$ — абстрактная непрерывная функция ($a \leqslant t \leqslant b$), то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\| \int f(t) \sin \lambda t \, dt \right\| = 0.$$

4. Доказать, что члены ряда Фурье функции $\varphi(x)$, принадлежащей однородному пространству R, стремятся к нулю по норме R.

Указание. Член ряда Фурье

$$a_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{in(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) e^{int} dt$$

истолковать как интеграл от абстрактной непрерывной функции. Применить результат задачи 3.

5. Если последовательность $\{y_n\}$ элементов нормированного пространства R сходится по норме к элементу y, то последовательность средних арифметических $s_n = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$ также сходится по норме к элементу y.

6. Доказать, что для всякой суммируемой функции средние арифметические ряда Фурье сходятся к значению этой функции во всякой ее точке Лебега. Получить отсюда теорему единственности (см. стр. 352).

Указание. Положим $u(t) = |\varphi(x+t) - \varphi(x)|$, $U'(t) = u(t)$; тогда

$$\int_0^{\delta} u(t) \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} = I_1 + I_2,$$

$$I_1 \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{n}} u(t) \, dt < \frac{\varepsilon n}{4} \quad \text{(точка Лебега!)},$$

$$I_2 \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{u(t)}{t^2} dt = \frac{1}{t^2} U(t) \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta} + 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{1}{t^3} U(t) \, dt < \frac{U(\delta)}{\delta^2} + 2\varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} < \frac{\varepsilon}{\delta} + 2\varepsilon n,$$

$$\frac{1}{n}(I_1 + I_2) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{n\delta} + 2\varepsilon < 4\varepsilon \text{ при } n > \frac{1}{\delta}.$$

7. Показать, что в определении однородного пространства функций условие 3) (стр. 342) можно заменить результатом леммы 3 (стр. 343).

8. Показать, что всякая функция с ограниченным изменением, непрерывная относительно сдвига по норме — полному изменению (см. задача 6 стр. 281), абсолютно непрерывна.

9. Доказать теорему: если подмножество A однородного пространства R функций $\varphi(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, *равномерно ограничено*, т. е. $\|\varphi\| \leqslant C_1$, и *равностепенно непрерывно*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ так, что

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |h| < \delta,$$

то A компактно в R (см. теорему Арцела, гл. II, § 7, задача 5) (С. Б. Стечкин).

Указание. $\sigma_n(x)$ при достаточно большом n образуют компактную ε-сеть в A относительно R (§ 7 гл. II).

§ 2. Преобразование Фурье

1. Когда мы желаем представить периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом 2π в виде наложения чистых гармонических колебаний, мы обращаемся к ряду Фурье

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}. \tag{1}$$

Если речь идет о функции с периодом $2\pi l$, то соответствующий ряд Фурье приобретает вид

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{x}{l}}, \tag{2}$$

где коэффициенты a_n определяются по формуле

$$a_n=\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l}\varphi(\xi)\, e^{-in\frac{\xi}{l}}\,d\xi. \tag{3}$$

Формула (3) получается из (2) умножением на $e^{-in\frac{x}{l}}$ и интегрированием по x в пределах от $-\pi l$ до πl.

Из (2) и (3) следует:

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l}\varphi(\xi)\, e^{\frac{in}{l}(x-\xi)}\,d\xi. \tag{4}$$

Естественно попытаться совершить в формуле (4) предельный переход $l\to\infty$, с тем чтобы иметь возможность представить в виде наложения гармонических колебаний по возможности любую функцию $\varphi(x)$, определенную на всей оси $-\infty<x<\infty$. Формальный переход к пределу $l\to\infty$ приводит к формуле

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\, e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\}, \tag{5}$$

где символом σ обозначен непрерывный аргумент, получающийся из дискретного аргумента $\sigma_n=\frac{n}{l}$. Итак, искомая формула разложения $\varphi(x)$ по гармоническим колебаниям должна иметь вид

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\, e^{i\sigma x}\,d\sigma, \tag{6}$$

где

$$\psi(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-i\sigma\xi}\,d\xi. \tag{7}$$

Функция $\psi(\sigma)$, определенная по формуле (7), называется *преобразованием Фурье* (или *интегралом Фурье*) функции $\varphi(x)$; формула (6) называется *формулой обращения* преобразования Фурье или *обратным преобразованием Фурье*. Обратное преобразование Фурье (6) отличается от прямого (7) по сути только знаком в показателе экспоненты и коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$. Иногда пишут преобразование Фурье в форме

$$\psi(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma\xi}\,d\xi; \tag{8}$$

тогда формула обращения принимает вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{-i\sigma\xi}\,d\sigma. \tag{9}$$

Чтобы придать формулам прямого и обратного преобразования Фурье бо́льшую симметричность, часто определяют преобразование Фурье формулой

$$\psi(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma\xi}\,d\xi; \tag{10}$$

тогда формула обращения принимает вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{-i\sigma\xi}\,d\sigma. \tag{11}$$

При любой форме записи во всяком случае очевидно, что преобразование Фурье — линейное преобразование: сумму функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ оно переводит в сумму $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ и произведение функции $\varphi(x)$ на число λ переводит в произведение $\psi(\sigma)$ на то же число λ.

Мы будем придерживаться определения (7) с формулой обращения (6).

2. Вместо того, чтобы обосновывать законность предельного перехода к формуле (5), мы покажем непосредственно, что из (7) следует (6) в определенных предположениях относительно функции $\varphi(x)$.

Первое предположение состоит, естественно, в том, что *функция $\varphi(x)$ интегрируема на всей оси $-\infty<x<\infty$*. Это обеспечивает существование интеграла (7) при любом значении σ, $-\infty<\sigma<\infty$.

Вот первое следствие указанного предположения: *функция* $\psi(\sigma)$ *ограничена, непрерывна при всех* σ *и при* $|\sigma|\to\infty$ *имеет пределом* 0. Первое утверждение вытекает из оценки

$$|\psi(\sigma)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)|\,d\xi.$$

Из этой же оценки вытекает, что последовательность функций $\varphi_n(x)$, сходящаяся по метрике пространства $L_1(-\infty, \infty)$, переводится преобразованием Фурье в последовательность функций $\psi_n(\sigma)$, равномерно сходящуюся на оси $-\infty<\sigma<\infty$.

Второе и третье утверждения мы проверим вначале для характеристической функции интервала (c, d). В этом случае

$$\psi(\sigma)=\int_c^d e^{-i\sigma x}\,dx=\frac{e^{-i\sigma c}-e^{-i\sigma d}}{i\sigma}$$

и полученное выражение показывает, что $\psi(\sigma)$ непрерывна и стремится к нулю при $|\sigma|\to\infty$. Так как любая ступенчатая функция $h(x)$ есть линейная комбинация характеристических функций интервалов, то второе и третье утверждения справедливы и для всех ступенчатых функций. Наконец, любая суммируемая функция $\varphi(x)$ есть предел (по метрике $L_1(-\infty, \infty)$) ступенчатых функций. По доказанному ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ есть предел (в смысле равномерной сходимости на оси σ) непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Но тогда и сама функция $\psi(\sigma)$ непрерывна и стремится к нулю на бесконечности, что и требовалось.

Теперь обратимся к доказательству формулы (6). Рассмотрим вначале интеграл в конечных пределах:

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\psi(\sigma)\,e^{i\sigma x}\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\}d\sigma.$$

Внутренний интеграл сходится равномерно по параметру σ, поэтому порядок интегрирования по σ и по ξ можно изменить:

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left\{\int_{-N}^{N}e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\sigma\right\}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,\frac{e^{iN(x-\xi)}-e^{-iN(x-\xi)}}{i(x-\xi)}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,\frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\,\frac{\sin Nt}{t}\,dt. \qquad (1)$$

Последнее преобразование произведено путем замены переменного $x-\xi=-t$. Мы покажем, что *при* $N\to\infty$ *функция* $\varphi_N(x)$ *стремится к* $\varphi(x)$, *если* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию Дини*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x)|}{|t|}\,dt<\infty \quad \text{при некотором } \delta>0.$$

Для доказательства вспомним, что имеет место равенство [1])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}\,dt=1.$$

Поэтому разность $\varphi_N(x)-\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\varphi_N(x)-\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin Nt}{t}\,dt.$$

Интеграл мы разобьем на две части:

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{|t|\leqslant T}+\int_{|t|\geqslant T}.$$

Второе слагаемое можно записать в виде

$$\int_{|t|\geqslant T}\varphi(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt-\varphi(x)\int_{|t|\geqslant T}\frac{\sin Nt}{t}\,dt,$$

откуда видно, что при данном x и достаточно большом T это слагаемое делается как угодно малым независимо от значения N, если только N, например, больше 1.

Первое слагаемое имеет вид

$$\int_{-T}^{T}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}\sin Nt\,dt,$$

и, так как функция $\dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ в указанном промежутке суммируема (условие Дини!), оно стремится к нулю с возрастанием N по лемме 2 § 1. Отсюда

$$\lim\varphi_N(x)=\varphi(x),$$

что и требовалось.

Итак, если функция $\varphi(x)$ суммируема и удовлетворяет условию Дини, то она восстанавливается по своему преобразованию Фурье $\psi(\sigma)$ по формуле (6).

---

[1]) См., например, А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа, 1953, гл. 26, § 111, стр. 503.

Подчеркнем, что интеграл (6) не является, вообще говоря, абсолютно сходящимся и не может быть определен по формуле

$$\lim_{N_1, N_2 \to \infty} \int_{N_1}^{N_2},$$

где N_1 и N_2 стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

3. Рассмотрим несколько примеров на вычисление преобразований Фурье.

1) Найдем преобразование Фурье для функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x-\lambda)^m}, \tag{1}$$

где m — натуральное число, а λ — невещественная постоянная; пусть, например, $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

Интеграл

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{(x-\lambda)^m} dx \tag{2}$$

абсолютно сходится при $m > 1$, но и при $m = 1$ он существует как условно сходящийся в смысле

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N}.$$

При любом $m \geqslant 1$ интеграл (2) удобно вычислять методом контурного интегрирования. При $\sigma > 0$ мы рассмотрим контур в плоскости $z = x + iy$, состоящий из участка оси x в пределах $-N \leqslant x \leqslant N$ и полуокружности в нижней полуплоскости, опирающейся на этот участок как на диаметр (рис. 16). В нижней полуплоскости функция $e^{-i\sigma z} = e^{-i\sigma x} e^{\sigma y}$ при $\sigma > 0$ ограничена, и интеграл по полуокружности стремится к нулю в силу известной леммы Жордана[1]). Так как особая точка подынтегральной функции находится в верхней полуплоскости при $\sigma > 0$, получаем $\psi(\sigma) = 0$.

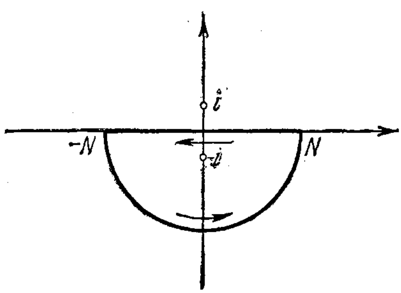


Рис. 16.

При $\sigma < 0$, чтобы использовать лемму Жордана, нужно рассматривать полуокружность в верхней полуплоскости, и мы получаем по

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 1951, стр. 224.

теореме о вычетах:

$$\psi(\sigma)=2\pi i \text{ Выч } \left.\frac{e^{-i\sigma z}}{(z-\lambda)^m}\right|_{z=\lambda}.$$

Указанный вычет легко сосчитать, если разложить функцию $e^{-i\sigma z}$ в ряд Тейлора по степеням $z-\lambda$:

$$e^{-i\sigma z}=e^{-i\sigma(z-\lambda)}e^{-i\sigma\lambda}=e^{-i\sigma\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-i\sigma(z-\lambda)]^n}{n!}.$$

Вычет есть коэффициент при $(z-\lambda)^{-1}$; следовательно,

$$\psi(\sigma)=2\pi i e^{-i\sigma\lambda}\frac{(-i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Итак, при $\operatorname{Im}\lambda>0$

$$\psi(\sigma)=\begin{cases}0 & \text{при } \sigma>0,\\ 2\pi i e^{-i\sigma\lambda}\dfrac{(-i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} & \text{при } \sigma<0.\end{cases} \tag{3}$$

При $\operatorname{Im}\lambda<0$ мы найдем аналогично

$$\psi(\sigma)=\begin{cases}-2\pi i e^{-i\sigma\lambda}\dfrac{(-i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} & \text{при } \sigma>0,\\ 0 & \text{при } \sigma<0.\end{cases} \tag{4}$$

Любая дробно-рациональная функция, не имеющая особенностей на вещественной оси и стремящаяся к нулю на бесконечности, разлагается на простейшие дроби вида $\frac{A}{(x-\lambda)^m}$, где $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Поэтому полученные формулы позволяют написать и преобразование Фурье от любой такой дробно-рациональной функции. Функции $\psi(\sigma)$, определяемые формулами (3) и (4), как легко проверить, экспоненциально убывают при $|\sigma|\to\infty$; поэтому и преобразование Фурье любой дробно-рациональной функции экспоненциально убывает при $|\sigma|\to\infty$.

2) Найдем преобразование Фурье от функции

$$\varphi(x)=e^{-ax^2} \quad (a>0).$$

Выражение

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-i\sigma x}\,dx$$

есть интеграл от аналитической функции $e^{-az^2-i\sigma z}$, $z=x+iy$, по вещественной оси. Так как

$$|e^{-a(x+iy)^2-i\sigma(x+iy)}|=e^{-ax^2+ay^2+\sigma y},$$

то в любой горизонтальной полосе $|y| \leqslant y_0$ подынтегральная функция при $x \to \pm\infty$ стремится к нулю равномерно по y. Поэтому, используя теорему Коши, можно при интегрировании перейти на любую параллельную прямую в z-плоскости, не изменяя результата:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\sigma(x+iy)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ay^2+\sigma y-2aixy-i\sigma x} dx = e^{ay^2+\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\sigma)} dx.$$

Положим $y = -\frac{\sigma}{2a}$; тогда мы получим $ay^2 + \sigma y = -\frac{\sigma^2}{4a}$ и по известной формуле [1])

$$\psi(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = -e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В частности, для $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ получаем $\psi(\sigma) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ — функцию того же вида, отличающуюся от исходной функции только множителем $\sqrt{2\pi}$.

Задача. Заполнить пустые места в таблице

№	$\varphi(x)$	$\psi(\sigma)$
1	$\frac{1}{x^2+a^2}$	
2		$\frac{1}{\sigma+\sigma_0+i\tau_0}$
3		$\frac{\sin a\sigma}{\sigma}$
4		$\frac{\sin^2 a\sigma}{\sigma}$
5	$\frac{\sin^2 ax}{x^2}$	

Отв. $\psi_1(\sigma) = \frac{\pi}{\sigma} e^{-a|\sigma|}$, $\varphi_2(x) = e^{x(\tau_0 - i\sigma_0)}$ при $x < 0$ и 0 при $x > 0$; $\varphi_3(x) = \frac{1}{2}$ при $|x| < a$ и 0 при $|x| > a$; $\varphi_4(x) = \frac{i}{4}$ при $0 < x < 2a$, $-\frac{i}{4}$ при $-2a < x < 0$, 0 при $|x| > 2a$; $\psi_5(\sigma) = \pi\left(a - \frac{|\sigma|}{2}\right)$ при $|\sigma| < 2a$ и 0 при $|\sigma| > 2a$.

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II (Физматгиз, 1958), гл. III, § 8, п. 78.

4. Теперь рассмотрим вопрос о средних арифметических интеграла Фурье, аналогично тому, как это было сделано в отношении средних арифметических ряда Фурье в § 1. Вместо среднего арифметического n сумм ряда Фурье мы рассмотрим, естественно, среднее интегральное

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\int_0^N \varphi_\nu(x)\,d\nu. \tag{1}$$

Подставляя значение $\varphi_\nu(x)$ из формулы (1) п. 2, находим:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi N}\int_0^N \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\frac{\sin\nu t}{t}\,dt\right\} d\nu =$$

$$= \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\left\{\int_0^N \sin\nu t\,d\nu\right\} dt = \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\,\frac{1-\cos Nt}{t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\frac{\sin^2\frac{N}{2}t}{t^2}\,dt.$$

Выражение

$$F_N(t) = \frac{2}{\pi N}\,\frac{\sin^2\frac{N}{2}t}{t^2}$$

называется *ядром Фейера для интеграла Фурье*. Ядро Фейера обладает следующими свойствами:

а) $F_N(t) \geqslant 0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_N(t)\,dt = 1$;

в) $\int\limits_{|t|\geqslant\delta} F_N(t)\,dt \longrightarrow 0$ при $N \longrightarrow \infty$ и любом фиксированном $\delta > 0$.

Неравенство а) очевидно; равенство б) выводится из равенства

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\nu t}{t}\,dt = 1 \tag{2}$$

интегрированием по параметру ν в пределах от ε до N с последующим предельным переходом $\varepsilon \longrightarrow 0$ [1].

[1]) Интеграл (2) сходится равномерно по параметру ν в области $\varepsilon \leqslant \nu \leqslant N$, что обеспечивает законность интегрирования по параметру подынтегральной функции в этом промежутке. При $0 < \nu \leqslant N$ он не сходится равномерно.

Соотношение в) следует из оценки

$$\int\limits_{|t|\geqslant\delta} F_N(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\pi N}\int\limits_{|t|\geqslant\delta}\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{\pi N\delta}.$$

Из равенства б) вытекает соотношение

$$\sigma_N(x)-\varphi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\,F_N(t)\,dt. \tag{3}$$

Мы будем далее рассматривать вопрос о сходимости средних арифметических интеграла Фурье в различных нормированных пространствах. Несколько изменяя определения § 1, относящиеся к функциям на отрезке $[-\pi, \pi]$, мы будем называть далее *однородным пространством* нормированное пространство R функций $\varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) все функции $\varphi(x)\in R$ суммируемы на $(-\infty, \infty)$, и из сходимости $\varphi_n\to\varphi$ в R следует сходимость $\varphi_n\to\varphi$ по норме $L_1(-\infty, \infty)$;

2) все сдвиги $\varphi(x+h)$ входят в R вместе с $\varphi(x)$, и

$$\|\varphi(x+h)\|=\|\varphi(x)\| \text{ при любом вещественном } h;$$

3) норма в R непрерывна относительно сдвига, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|=0.$$

Мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Если функция $\varphi(x)$ принадлежит однородному пространству R, то средние арифметические $\sigma_N(x)$ ее интеграла Фурье также принадлежат R и $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N(x)=\varphi(x)$ по норме R.*

Доказательство этой теоремы, так же как и аналогичной теоремы § 1, будет основано на интегрировании абстрактных функций с значениями в пространстве R. Необходимо рассмотреть также и несобственные интегралы абстрактных функций; приведем соответствующие определения.

Несобственные интегралы от абстрактных функций. Допустим, что абстрактная функция $f(t)$ с значениями в нормированном пространстве R определена и непрерывна на полуоси (a, ∞). Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{\infty} f(t)\,dt \tag{4}$$

мы определяем как предел собственного интеграла

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

при $b \longrightarrow \infty$, если только этот предел существует.

В частности, если конечен обычный несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \| f(t) \|\,dt, \tag{5}$$

то существует и несобственный интеграл (4). Действительно, в этом случае при любых b', b''

$$\left\| \int_{b'}^{b''} f(t)\,dt \right\| \leqslant \int_{b'}^{b''} \| f(t) \|\,dt \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad b' \longrightarrow \infty,\ b'' \longrightarrow \infty,$$

так что любая последовательность собственных интегралов

$$\int_a^{b_n} f(t)\,dt \qquad (b_n \longrightarrow \infty)$$

удовлетворяет критерию Коши; в силу полноты R предел (4) существует. В случае существования интеграла (5) интеграл (4) называется абсолютно сходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{a}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$.

Из оценки

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \| f(t) \|\,dt$$

предельным переходом $b \longrightarrow \infty$ получается оценка

$$\left\| \int_a^\infty f(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^\infty \| f(t) \|\,dt. \tag{6}$$

Аналогичная оценка имеет место и для абсолютно сходящихся интегралов двух других типов.

Переходим теперь к доказательству теоремы.

Интеграл (3) можно рассматривать как несобственный интеграл абстрактной функции $f(t) = [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\,F_N(t)$, входящей при каждом значении t в пространство R. По условию функция $f(t)$ непрерывна. Интеграл (3) сходится абсолютно в силу неравенства

$$\| [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\,F_N(t) \| \leqslant 2\,\| \varphi(x) \|\,F_N(t) \in L_1(-\infty,\ \infty).$$

В частности, мы получаем $\sigma_N(x) - \varphi(x) \in R$; отсюда и $\sigma_N(x) \in R$.

Далее для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы из $|t| < \delta$ следовало $\| \varphi(x+t) - \varphi(x) \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Используя свойства б) — в) ядра Фейера, находим:

$$\| \sigma_N(x) - \varphi(x) \| \leqslant \int\limits_{|t| \leqslant \delta} \| \varphi(x+t) - \varphi(x) \| F_N(t)\,dt + \\ + \int\limits_{|t| \geqslant \delta} \| \varphi(x+t) - \varphi(x) \| F_N(t)\,dt \leqslant \\ \leqslant \max_{|t| \leqslant \delta} \| \varphi(x+t) - \varphi(x) \| \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_N(t)\,dt + 2 \| \varphi(x) \| \int\limits_{|t| \geqslant \delta} F_N(t)\,dt.$$

Первое слагаемое при любом N не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, второе становится $< \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно большом $N > N_0$. В итоге при $N > N_0$ получаем:

$$\| \sigma_N(x) - \varphi(x) \| < \varepsilon,$$

чем теорема и доказана.

Применим данную теорему к пространству $R = L_1(-\infty, \infty)$. Нужно, конечно, проверить, что $L_1(-\infty, \infty)$ — однородное пространство. Условия 1 и 2 выполняются здесь очевидным образом. Для проверки условия 3 заметим следующее:

а) всякая характеристическая функция промежутка непрерывна в метрике L_1 относительно сдвига (легко проверяется непосредственно);

б) совокупность $Q \subset L_1$ всех функций, непрерывных относительно сдвига, есть замкнутое подпространство в L_1 (доказывается так же, как в лемме 3 § 1).

Соединяя а) и б) и вспоминая, что линейные комбинации характеристических функций (т. е. ступенчатые функции) всюду плотны в пространстве L_1, мы получаем, что $Q \equiv L_1$. Иными словами, всякая функция $\varphi(x) \in L_1$ непрерывна относительно сдвига, что и требуется.

В итоге мы получили теорему:

Средние арифметические интеграла Фурье любой суммируемой функции $\varphi(x)$ на оси $-\infty < x < \infty$ сходятся к $\varphi(x)$ в метрике $L_1(-\infty, \infty)$. Как следствие получается теорема о единственности преобразования Фурье:

Если преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ суммируемой функции $\varphi(x)$ равно нулю при всех σ, то и $\varphi(x) \equiv 0$ (почти всюду).

Действительно, в этом случае $\psi(\sigma) \equiv 0$, $\varphi_\nu(x) \equiv 0$, $\sigma_N(x) \equiv 0$, и, следовательно, $\varphi(x) = \lim \sigma_N(x) = 0$.

Другим примером может служить пространство $CL_1(-\infty, \infty)$ всех равномерно непрерывных и суммируемых на $(-\infty, \infty)$ функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi(x)\| = \max_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)| + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx.$$

Проверку выполнения свойств 1—3 однородного пространства мы предоставляем читателю. Применяя теорему 2, получаем: *средние арифметические интеграла Фурье любой равномерно непрерывной суммируемой функции $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, сходятся к $\varphi(x)$ равномерно на всей оси и по метрике $L_1(-\infty, \infty)$.* Эта теорема представляет собой обобщение теоремы Фейера на случай интеграла Фурье.

§ 3. Преобразование Фурье (продолжение)

В этом параграфе и далее мы будем оператор Фурье обозначать символом F:

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx.$$

Оператор F есть, как мы знаем, линейный оператор, обладающий обратным оператором

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x}\, d\sigma.$$

1. Преобразование Фурье и операция дифференцирования. Предположим, что абсолютно интегрируемая функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна в окрестности каждой точки и ее производная также интегрируема на оси $-\infty < x < \infty$. Выясним, как связаны преобразования Фурье функции $\varphi(x)$ и ее производной. Заметим, что по предположению об интегрируемости $\varphi'(x)$, функция

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(\xi)\, d\xi$$

имеет предел при $x \to \infty$; этот предел может быть только нулем, так как иначе $\varphi(x)$ не была бы интегрируемой. То же относится к случаю $x \to -\infty$. Далее, интегрируя по частям, получаем:

$$F[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) e^{-ix\sigma}\, dx = \varphi(x) e^{-ix\sigma}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\sigma}\, dx.$$

По доказанному внеинтегральный член равен нулю; получаем равенство

$$F[\varphi'] = i\sigma F[\varphi].$$

Иными словами, дифференцирование функции $\varphi(x)$ отвечает умножению функции $\psi(\sigma)=F[\varphi]$ на множитель $i\sigma$. Если у функции $\varphi(x)$ интегрируемы производные до порядка m, то, повторяя процесс, получаем:

$$F[\varphi^{(k)}(x)]=(i\sigma)^k F[\varphi] \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, m).$$

Так как $F[\varphi^{(k)}(x)]$ как преобразование Фурье интегрируемой функции есть ограниченная функция от σ (и даже стремящаяся к нулю при $|\sigma|\to\infty$), то для $F(\varphi(x))$, мы получим оценку

$$F[\varphi]=\frac{|F[\varphi^{(k)}(x)]|}{|\sigma|^k}\leqslant\frac{C}{|\sigma|^k}.$$

Итак, *чем больше функция* $\varphi(x)$ *имеет интегрируемых производных, тем быстрее ее преобразование Фурье стремится к нулю на бесконечности.*

В частности, при некоторой гладкости функции $\varphi(x)$ ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ становится также абсолютно интегрируемой функцией. Из неравенства (1) видно, что для этого достаточно существования (в L_1) φ, φ' и φ''. Можно ограничиться и требованием существования φ и φ', но при дополнительном условии, что они принадлежат не только L_1, но и L_2. В самом деле, как мы увидим в § 6, из $\varphi\in L_2$, $\varphi'\in L_2$ следует $\sigma\psi(\sigma)\in L_2$, откуда

$$|\psi(\sigma)|=|\sigma\psi(\sigma)\cdot\frac{1}{\sigma}|\leqslant\frac{1}{2}\left\{|\sigma\psi(\sigma)|^2+\frac{1}{\sigma^2}\right\}$$

есть интегрируемая функция, что и требуется.

Для любого дифференциального оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ порядка $\leqslant m$ мы получаем формулу

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi\right]=P(i\sigma)F[\varphi].$$

Линейное дифференциальное уравнение на оси x относительно функции $\varphi(x)$ переходит в алгебраическое уравнение на оси σ относительно $\psi(\sigma)$. Это открывает новые возможности для решения дифференциальных уравнений. Поскольку дифференциальные уравнения, к которым можно применять этот метод, должны быть линейными с постоянными коэффициентами, для обыкновенных дифференциальных уравнений применение этого метода мало что может дать (учитывая тем более, что мы обязаны оставаться в границах класса интегрируемых функций на всей оси). Но для уравнений с частными производными метод преобразования Фурье уже оказывается полезным. Мы покажем это в п. 3 на примере уравнения теплопроводимости.

2. Преобразование Фурье и свертка. Пусть $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ — преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$; выясним, преобразованием Фурье какой функции является произведение $\psi_1(\sigma)\psi_2(\sigma)$. Мы имеем:

$$\psi_1(\sigma)\psi_2(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)e^{-i\sigma\xi}\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\eta)e^{-i\sigma\eta}\,d\eta=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta)e^{-i\sigma(\xi+\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

причем двойной интеграл абсолютно сходится (см. замечание к теореме Фубини, гл. IV, § 5, п. 2). Чтобы от двух экспонент перейти к одной, совершим замену переменного $\eta=x-\xi$; тогда получим:

$$\psi_1(\sigma)\psi_2(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x-\xi)e^{-i\sigma x}\,dx\right\}d\xi=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)\,d\xi\right\}d\eta, \qquad (1)$$

причем перестановка интегралов законна в силу теоремы Фубини. Функция

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)\,d\xi,$$

существующая (в силу одного из утверждений теоремы Фубини) почти при каждом x, и абсолютно интегрируемая по x (в силу другого утверждения этой же теоремы), называется *сверткой* функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Формула (1) показывает, что *произведение функций* $\psi_1(\sigma)$ *и* $\psi_2(\sigma)$ *является преобразованием Фурье от свертки* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$.

Свертка $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ обозначается через $\varphi_1*\varphi_2$. Эта операция коммутативна и ассоциативна, поскольку преобразованием Фурье она переводится в коммутативную и ассоциативную операцию $\psi_1\psi_2$.

Задачи. 1. Пусть $e_a(x)$ есть характеристическая функция интервала $0<x<a$. Найти свертку

$$e_b(x)*\frac{e_{a+h}(x)-e_a(x)}{h}.$$

Отв. См. рис. 17.

2. Доказать, что для любой $\varphi(x)\in L_1(-\infty,\infty)$

$$\lim_{h\to 0}\varphi(x)*\frac{e_{a+h}(x)-e_a(x)}{h}=\varphi(x-a) \qquad (2)$$

(предел в смысле метрики $L_1(-\infty,\infty)$).

Указание. Проверить (2) для функций $\varphi(x)=e_b(x)$ и их линейных комбинаций. При переходе к пределу воспользоваться ограниченностью нормы второго множителя.

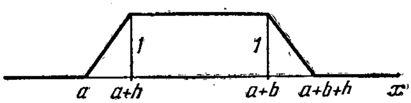


Рис. 17.

3. Если A есть замкнутое подпространство в $L_1(-\infty, \infty)$, содержащее вместе с каждой функцией $\varphi(x)$ все ее сдвиги $\varphi(x-h)$, то A содержит и свертку $\varphi(x)$ со всякой функцией $\psi(x)\in L_1(-\infty, \infty)$.

Указание. Свертка есть предел линейных комбинаций сдвигов.

3. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности. Найдем решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности $(-\infty<x<\infty,\ t\geqslant 0)$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

обращающееся в заданную функцию $u_0(x)$ при $t=0$. Физический смысл указанной задачи состоит в определении температуры одномерного однородного континуума (бесконечного стержня) в любой момент времени $t>0$ по известной его температуре в момент $t=0$. Сделаем следующие предположения:

а) функции $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ интегрируемы по x при $-\infty<x<\infty$ и любом фиксированном $t\geqslant 0$;

б) функция $u_t(x, t)$ имеет в каждом интервале $0\leqslant t\leqslant T$ интегрируемую мажоранту:

$$|u_t(x, t)|\leqslant \Phi(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\,dx<\infty.$$

Перейдем в уравнении (1) к преобразованию Фурье, умножив это уравнение на $e^{-i\sigma x}$ и проинтегрировав по x от 0 до ∞. В силу условия б) можно написать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\,e^{-i\sigma x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\,e^{-i\sigma x}\,dx=v_t(\sigma, t),$$

где

$$v(\sigma, t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\,e^{-i\sigma x}\,dx$$

есть преобразование Фурье искомого решения $u(x, t)$.

В силу условия а) и результатов п. 1

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\sigma^2 F[u] = -\sigma^2 v(\sigma, t).$$

В результате мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v_t(\sigma, t) = -\sigma^2 v(\sigma, t).$$

Нужно найти решение этого уравнения, обращающееся при $t=0$ в

$$v_0(\sigma) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-i\sigma x}\, dx.$$

Искомое решение, очевидно, имеет вид

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t} v_0(\sigma).$$

Мы знаем $\left(\text{см. пример 2 § 2, где положено } a = \frac{1}{4t}\right)$, что

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

По формуле свертки (п. 2)

$$v(\sigma, t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] F[u_0] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right],$$

и так как $v(\sigma, t) = F[u(x, t)]$, то окончательно

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x-\xi)\, d\xi.$$

Полученная формула решения называется *интегралом Пуассона.*

4. Связь между убыванием функции $\varphi(x)$ при $|x| \to \infty$ и гладкостью ее преобразования Фурье. Мы знаем, что преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ абсолютно интегрируемой функции $\varphi(x)$ — ограниченная непрерывная функция от σ, $-\infty < \sigma < \infty$, стремящаяся к нулю при $|\sigma| \to \infty$. Предположим теперь, что не только $\varphi(x)$, но и $x\varphi(x)$ — интегрируемая функция на оси $-\infty < x < \infty$. Тогда можно утверждать, что функция $\psi(\sigma)$ дифференцируема. Действительно, формальное дифференцирование по параметру σ интеграла Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx = \psi(\sigma)$$

приводит к интегралу

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx,$$

который является абсолютно сходящимся и равномерно сходящимся по параметру σ. В силу известной теоремы о дифференцировании равномерно сходящегося интеграла функция $\psi(\sigma)$ дифференцируема и

$$\psi'(\sigma)=-i\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx.$$

Мы получаем выразительную формулу

$$iF'[\varphi]=F[x\varphi], \tag{1}$$

показывающую, что операция умножения на x переходит после преобразования Фурье в операцию $i\frac{d}{d\sigma}$. Как преобразование Фурье интегрируемой функции, функция $\psi'(\sigma)$ снова непрерывна, ограничена и стремится к 0 при $|\sigma|\to\infty$. Если вместе с функцией $\varphi(x)$ интегрируемыми на оси x являются и функции $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, ..., $x^m\varphi(x)$, то процесс дифференцирования можно продолжить; мы получим, что функция $\psi(\sigma)=F[\varphi]$ имеет производные до порядка m, непрерывные, ограниченные и стремящиеся к нулю при $|\sigma|\to\infty$, и имеет место формула

$$i^kF^{(k)}[\varphi]=F[x^k\varphi] \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Для произвольного многочлена $P(x)$ степени $\leqslant m$ мы получим формулу

$$P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)F[\varphi]=F[P(x)\,\varphi]. \tag{3}$$

Если *все* произведения $x^m\varphi(x)$ интегрируемы ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), то функция $F[\varphi]=\psi(\sigma)$ имеет производные по σ *всех* порядков и каждая из ее производных непрерывна и стремится к нулю при $|\sigma|\to\infty$.

Мы видим, что чем более сильные условия убывания на бесконечности мы накладываем на функцию $\varphi(x)$, тем более гладкой получается функция $\psi(\sigma)$.

В связи с изложенным можно указать важный класс функций, который при преобразовании Фурье переходит в себя самого, только с заменой аргумента x на аргумент σ. Рассмотрим совокупность S_x бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, которые для всех $k,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ удовлетворяют неравенствам

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_{kq}, \tag{4}$$

где C_{kq} — постоянная, зависящая от выбора функции φ. Через S_σ мы обозначим класс таких же функций $\psi(\sigma)$ от аргумента σ.

Заметим прежде всего, что каждая из функций $x^k\varphi^{(q)}(x)$ не только ограничена, но и интегрируема на оси, поскольку вместе с неравенством (4) справедливо и неравенство

$$|x^{k+2}\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{k+2,q}, \quad |x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant \frac{C_{k+2,q}}{x^2}.$$

Пусть $\psi(\sigma)=F[\varphi]$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x)\in S_x$. По доказанному функция $\psi(\sigma)$ бесконечно дифференцируема, причем

$$i^q\psi^{(q)}(\sigma)=F[x^q\varphi(x)].$$

Далее, функция $x^q\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема вместе с $\varphi(x)$ и все ее последовательные производные сами являются интегрируемыми, поскольку по формуле Лейбница они линейно выражаются через интегрируемые функции $x^j\varphi^{(q-j)}(x)$. Поэтому функции

$$(i\sigma)^k\psi^{(q)}(\sigma)=(-i)^q F[(x^q\varphi(x))^{(k)}],$$

как преобразования Фурье интегрируемых функций, ограничены при всех k и q. Итак, *если* $\varphi(x)\in S_x$, *то* $\psi(\sigma)\in S_\sigma$. Обратно, пусть дана функция $\psi(\sigma)\in S_\sigma$. Построим функцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma.$$

Функция $2\pi\varphi(-x)$ есть, очевидно, преобразование Фурье функции $\psi(\sigma)$ и поэтому входит в S_x. Но тогда, очевидно, и $\varphi(x)\in S_x$. По формуле обращения

$$\psi(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\,\varphi(-x)e^{i\sigma x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\sigma x}dx,$$

так что $\psi(\sigma)$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Итак, *каждая функция* $\psi\in S_\sigma$ *есть преобразование Фурье функции* $\varphi\in S_x$. Таким образом, *при преобразовании Фурье класс* S_x *отображается на весь класс* S_σ. Символически этот факт можно записать равенством

$$F[S_x]=S_\sigma.$$

Посмотрим, как будут улучшаться свойства гладкости функций $\psi(\sigma)$ при наложении дальнейших ограничений на поведение функций $\varphi(x)$ на бесконечности.

Пусть интегрируемым является произведение $\varphi(x)e^{b|x|}$, где $b>0$ — фиксированная постоянная. Можно утверждать, что в этом случае преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ функции $\varphi(x)$ не только бесконечно дифференцируемая функция, но и аналитическая. Действительно, интеграл

Фурье

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx$$

теперь определен не только для вещественных, но и для некоторых комплексных σ; если обозначить $s=\sigma+i\tau$ (σ, τ вещественны), то мы получим:

$$\psi(\sigma+i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}e^{\tau x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-isx}\,dx,$$

и интеграл сходится при $|\tau|\leqslant b$, т. е. в целой горизонтальной полосе s-плоскости. Полученная функция комплексного переменного s аналитична во всякой внутренней точке этой полосы; действительно, при формальном дифференцировании по s мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-isx}(-ix)\,dx.$$

Полученный интеграл равномерно сходится в некоторой окрестности точки s (не выходящей за пределы указанной полосы) и представляет, следовательно, производную функции $\psi(s)$. Функция $\psi(s)$ ограничена во всей указанной полосе, поскольку

$$|\psi(s)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,e^{|\tau||x|}\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,e^{b|x|}\,dx.$$

Отсюда следует, в частности, что последовательности функций $\varphi_n(x)$, сходящейся по норме $\|\varphi\|=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,e^{b|x|}\,dx$, отвечает последовательность $\psi_n(s)$, равномерно сходящаяся во всей полосе $|\tau|\leqslant b$.

Далее, можно утверждать, что функция $\psi(s)=\psi(\sigma+i\tau)$ стремится при $\sigma\to\pm\infty$ к нулю равномерно по τ, $|\tau|\leqslant b$. Действительно, это имеет место для преобразования Фурье характеристической функции интервала $(\alpha,\ \beta)$:

$$\psi(s)=\int_{\alpha}^{\beta}e^{-isx}\,dx=\frac{e^{-is\alpha}-e^{-is\beta}}{is},$$

поскольку числитель полученного отношения ограничен при $|\tau|\leqslant b$. К общему же случаю можно перейти обычным предельным переходом от ступенчатых функций.

Отметим, что в силу последнего свойства в формуле обращения можно производить интегрирование не только по вещественной оси, но по любой параллельной прямой, лежащей в указанной полосе s-плоскости, так что

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{i\sigma x}\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau)\,e^{i(\sigma+i\tau)x}\,d\sigma.$$

Предположим далее, что $\varphi(x)$ интегрируема в произведении с $e^{b|x|}$ при *любом* b. Тогда функция $\psi(s)$ определена и аналитична в любой полосе $|\tau|\leqslant b$, т. е. является целой аналитической функцией; эта целая функция по доказанному в любой полосе $|\tau|\leqslant b$ остается ограниченной (с границей, зависящей от b) и равномерно стремящейся к нулю при $\sigma\to\pm\infty$. В формуле обращения можно производить интегрирование по любой прямой, параллельной оси абсцисс.

Еще более сильного убывания функции $\varphi(x)$ на бесконечности можно добиться наложением условия интегрируемости произведения ее с функцией $e^{b|x|^p}$, $p>1$. Можно показать (на чем мы не будем здесь останавливаться), что целая функция $\psi(s)$ будет тогда удовлетворять оценке

$$|\psi(\sigma+i\tau)|\leqslant Ce^{a|\tau|^{p'}},\quad \text{где}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

В этом случае говорят, что функция $\psi(s)$ имеет в s-плоскости *экспоненциальный порядок роста* $\leqslant p'$.

Числа p и p' оба превосходят 1; но меняются они в противоположных направлениях, и, когда p неограниченно возрастает, p' приближается к 1.

Предположим, наконец, что $\varphi(x)$ интегрируема в произведении с любой возрастающей функцией от $|x|$. Этим свойством обладают финитные функции $\varphi(x)$ (обращающиеся почти всюду в 0 вне некоторого промежутка $|x|\leqslant a$) и, как легко убедиться, только такие функции. Итак, положим, что $\varphi(x)$ обращается в нуль при $|x|\geqslant a$. Тогда преобразование Фурье

$$\psi(s)=\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,e^{-isx}\,dx$$

есть целая аналитическая функция от s; в s-плоскости она допускает следующую оценку:

$$|\psi(\sigma+i\tau)|\leqslant\int_{-a}^{a}|\varphi(x)|\,e^{|\tau||x|}\,dx\leqslant Ce^{a|\tau|},$$

где $C=\int_{-a}^{a}|\varphi(x)|\,dx$; как говорят, функция $\psi(s)$ есть целая *функция не выше 1-го порядка роста с типом* $\leqslant a$. Таким образом, чем быстрее убывает функция $\varphi(x)$ на бесконечности, тем «глаже» становится ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$. Начиная от непрерывных функций $\psi(\sigma)$, мы прошли через конечно дифференцируемые, бесконечно дифференцируемые, аналитические в полосе, в плоскости и дошли до аналитических функций 1-го порядка с конечным типом. Это предел гладкости для функций, стремящихся к нулю в обе стороны по вещественной оси (мы знаем, что этим последним свойством всегда обладают преобразования Фурье интегрируемых функций); известно, что не существует отличных от нуля целых аналитических функций, стремящихся к нулю по оси абсцисс и имеющих в плоскости более медленный рост, чем $e^{a|\tau|}$ при любом $a>0$ [1]).

5. Вот одно из простейших применений доказанных теорем.

Пусть $\varphi_0(x)\in L_2(a, b)$ $(-\infty\leqslant a,\ b\leqslant\infty)$ — функция, почти всюду отличная от нуля и удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi_0(x)|\leqslant Ce^{-\alpha|x|}$$

с некоторым положительным α. Покажем, что *система функций* $\varphi_n(x)=x^n\varphi_0(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *полна в пространстве* $L_2(a, b)$ *в том смысле, что линейные комбинации этих функций образуют множество, всюду плотное в* $L_2(a, b)$.

Действительно, если бы это было не так, то по теореме об ортогональном дополнении (гл. V, § 2, п. 8) существовала бы функция $f(x)\in L_2(a, b)$, не тождественно равная нулю, ортогональная всем функциям $\varphi_n(x)$, так что при любом $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,\varphi_0(x)\,dx=0. \tag{5}$$

Функция $f(x)\varphi_0(x)$ интегрируема в произведении с любой функцией $e^{\beta|x|}$, где $\beta<\alpha$; поэтому, продолжая в случае необходимости $f(x)\varphi_0(x)$ тождественным нулем на остающуюся часть оси $(-\infty, \infty)$, получаем, что ее преобразование Фурье $g(s)$ есть функция, аналитическая в полосе $|\tau|<\alpha$. Так как согласно формуле (2)

$$i^n g^{(n)}(\sigma)=\int_a^b f(x)\,x^n\varphi_0(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx,$$

то из (5) вытекает, что при всех $n=0, 1, 2, \ldots$ мы имеем $g^{(n)}(0)=0$. Отсюда в силу аналитичности $g(s)$ всюду $g(\sigma)\equiv 0$. По доказанной теореме единственности (конец § 2) также $f(x)\varphi_0(x)\equiv 0$ (почти всюду), и следовательно, $f(x)\equiv 0$ (почти всюду) в противоречие с построением. Таким образом, система $x^n\varphi_0(x)$ полна в $L_2(a, b)$, что и требовалось.

Например, при $a=-\infty$, $b=\infty$, $\varphi_0(x)=e^{-x^2}$ получаем полноту системы функций Эрмита $x^ne^{-x^2}$, при $a=0$, $b=\infty$, $\varphi_0(x)=e^{-x}$ получаем полноту функций Лагерра (гл. V, § 2).

§ 4. Преобразование Лапласа

1. Пусть дана функция $\varphi(x)$, которая (сама, возможно, и не интегрируемая) становится интегрируемой при умножении на $e^{-\gamma x}$ при некотором вещественном γ. Тогда преобразование Фурье от функции $\varphi(x)$, возможно не существующее в нашем первоначальном смысле, оказывается существующим для некоторых комплексных s:

$$\psi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-isx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-ix\sigma}e^{x\tau}\,dx,$$

[1]) См., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950, гл. 6, § 3.

в частности, на прямой $\tau=-\gamma$. Как мы видим, на этой прямой $\psi(s)$ является преобразованием Фурье интегрируемой функции $\varphi(x)e^{x\tau}$.

Наиболее важный случай такого рода получается при условиях

$$\left.\begin{array}{ll} |\varphi(x)|<Ce^{\alpha x} & \text{при } x>0, \\ \varphi(x)=0 & \text{при } x<0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Здесь преобразование Фурье

$$\psi(s)=\int_0^\infty \varphi(x)e^{x\tau}e^{-ix\sigma}\,dx=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-ixs}\,dx \qquad (2)$$

существует при всех $\tau<-\alpha$, т. е. в полуплоскости плоскости s, ограниченной сверху прямой $\tau=-\alpha$. Как мы уже знаем, в формуле обращения можно производить интегрирование по любой горизонтальной прямой $\tau=-\gamma$, лежащей ниже линии $\tau=-\alpha$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-i\gamma-\infty}^{-i\gamma+\infty}\psi(s)e^{isx}\,ds. \qquad (3)$$

Сделаем в формулах (2) и (3) замену переменного $is=p$. Когда s пробегает полуплоскость $\operatorname{Im}s<-\alpha$, p пробегает полуплоскость $\operatorname{Re}p>\alpha$. Функция

$$\Phi(p)\equiv\psi(s)=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-px}\,dx$$

определена и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p>\alpha$; на каждой вертикальной прямой в этой полуплоскости она стремится к нулю, когда $\operatorname{Im}p\to\pm\infty$, причем это стремление равномерно на любом конечном промежутке значений $\operatorname{Re}p$. Формула обращения (3) приобретает вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)e^{px}\frac{dp}{i}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)e^{px}\,dp \quad (\gamma>\alpha).$$

Функция $\Phi(p)$ называется *преобразованием Лапласа* от функции $\varphi(x)$ [удовлетворяющей условиям (1)]. Преобразование Лапласа, как мы видели, отличается от преобразования Фурье (рассматриваемого в комплексной области) лишь поворотом в области комплексного аргумента на 90°.

Следующая простая теорема дает общие достаточные (но далеко не необходимые) условия того, что данная функция $\Phi(p)$ есть преобразование Лапласа некоторой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям (1).

Теорема 1. *Если функция $\Phi(p)$ удовлетворяет условиям*
а) *$\Phi(p)$ аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Re}p>\gamma_0$,

б) $\Phi(p)$ *допускает оценку* $(p=p_1+ip_2)$

$$|\Phi(p_1+ip_2)|\leqslant B(p_2),\ \textit{причем}\ \int_{-\infty}^{\infty} B(p_2)\,dp_2=B<\infty,$$

то $\Phi(p)$ *есть преобразование Лапласа функции* $\varphi(x)$, *равной нулю при* $x<0$, *а при* $x>0$ *удовлетворяющей неравенству*

$$|\varphi(x)|<Ce^{\gamma_0 x}.$$

Доказательство. Мы определим функцию $\varphi(x)$ формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)\,e^{pt}\,dp\ (\gamma>\gamma_0). \qquad (4)$$

Применяя обычные рассуждения с формулой Коши и опираясь на свойства а), б), легко проверить, что интеграл (1) не зависит от γ. С другой стороны, справедлива оценка

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\gamma+ip_2)|\,e^{\gamma x}\,dp_2\leqslant\frac{B}{2\pi}e^{\gamma x}.$$

При $x>0$, устремляя γ к γ_0, получаем оценку

$$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{\gamma_0 x};$$

при $x<0$, устремляя γ к $+\infty$, получаем $\varphi(x)\equiv 0$.

Если записать формулу (4) в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p_1+ip_2)\,e^{(p_1+ip_2)x}i\,dp_2=\frac{e^{p_1x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p_1+ip_2)\,e^{ip_2x}\,dp_2,$$

то мы получим, что $2\pi\varphi(-x)\,e^{p_1x}$ есть преобразование Фурье по переменному p_2 абсолютно интегрируемой функции $\Phi(p_1+ip_2)$ (p_1 фиксировано). По формуле обращения

$$\Phi(p_1+ip_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\varphi(-x)\,e^{(p_1+ip_2)x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-px}\,dx,$$

так что $\Phi(p_1+ip_2)$ есть действительно преобразование Лапласа функции $\varphi(x)$.

2. Преобразование Лапласа часто используется для решения дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, отвечающих устанавливающимся процессам; в таких задачах неизвестная функция $f(t)$ при $t<0$ равна нулю, а при $t>0$ должна быть решением некоторого уравнения, удовлетворяющим при $t=0$ некоторым начальным условиям.

Рассмотрим сначала обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b(t) \tag{1}$$

с заданными значениями

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0, \\ y'(0) &= y_1, \\ &\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (1) на e^{-pt} и проинтегрируем по t от 0 до ∞. Обозначим через

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-pt}\, dt$$

преобразование Лапласа функции $y(t)$. Тогда, интегрируя по частям, находим:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty y'(t)\, e^{-pt}\, dt = y(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y(t)\, e^{-pt}\, dt = -y_0 + pY(p), \\ &\int_0^\infty y''(t)\, e^{-pt}\, dt = y'(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y'(t)\, e^{-pt}\, dt = \\ &\qquad = -y_1 + p(-y_0 + pY(p)) = -y_1 - py_0 + p^2 Y(p), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\int_0^\infty y^{(n)}(t)\, e^{-pt}\, dt = y^{(n-1)}(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y^{(n-1)}(t)\, e^{-pt}\, dt = \\ &\qquad = -y_{n-1} + p(-y_{n-2} - py_{n-3} - \ldots + p^{n-1} Y(p)) = \\ &\qquad\qquad = -y_{n-1} - py_{n-2} - \ldots + p^n Y(p). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Умножая каждое из уравнений (2) на соответствующий коэффициент a_k и складывая, получим уравнение вида

$$R_0(p) + R(p)\, Y(p) = B(p),$$

где $R_0(p)$ — многочлен не выше, чем $n-1$-ой степени от p, $R(p)$ — многочлен n-й степени от p, а $B(p)$ — преобразование Лапласа от функции $b(t)$. Для неизвестной функции $Y(p)$ получается таким образом чисто алгебраическое уравнение. Решая его, находим:

$$Y(p) = \frac{B(p) - R_0(p)}{R(p)},$$

искомое решение $y(t)$ представится по формуле обращения

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{B(p)-R_0(p)}{R'(p)}e^{pt}\,dp. \tag{3}$$

Для вычисления интеграла (3) прибегают, как правило, к контурному интегрированию и теории вычетов, как мы это производили при вычислении интеграла Фурье от рациональных функций. Заметим, что функция e^{pt} при $t>0$ ограничена в левой полуплоскости ($\operatorname{Re}p<\gamma$) и не ограничена в правой; поэтому полуокружности, входящие в состав контура, нужно строить в левую сторону от прямой $\operatorname{Re}p=\gamma$, а не в правую. В качестве числа γ можно брать любое, отвечающее тому условию, что все особенности функции $R(p)$ лежат слева от прямой $\operatorname{Re}p=\gamma$.

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=b\sin kt, \quad y_0=0, \quad y_1=0,$$

с комплексно сопряженными (невещественными) характеристическими корнями $\lambda=\alpha+i\beta$, $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$, причем $\alpha<0$.

В электротехнике такое уравнение описывает вынужденные колебания в контуре с сопротивлением, самоиндукцией и емкостью под действием вынуждающей э.д.с. с частотой k. Переход к преобразованию Лапласа приводит к уравнению

$$(a_0p^2+a_1p+a_2)Y(p)=\int\limits_0^\infty b\sin kt e^{-pt}\,dt=\frac{bk}{k^2+p^2}.$$

Решая это уравнение, находим:

$$Y(p)=\frac{bk}{(a_0p^2+a_1p+a_2)(k^2+p^2)}.$$

По формуле обращения

$$y(t)=\frac{bk}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{(a_0p^2+a_1p+a_2)(k^2+p^2)}.$$

Положим

$$f(p)=\frac{e^{pt}}{(a_0p^2+a_1p+a_2)(k^2+p^2)}.$$

Знаменатель имеет четыре простых корня в точках $\pm ik$ и $\alpha\pm i\beta$. В качестве γ можно взять любое положительное число. Для вычисления интеграла дополняем прямую $\operatorname{Re}p=\gamma$ бесконечно большой полуокружностью в левой полуплоскости; тогда по теореме о вычетах

$$y(t)=bk\left\{\text{Выч}\,f(p)\,|_{p=ik}+\text{Выч}\,f(p)\,|_{p=-ik}+\right.$$
$$\left.+\text{Выч}\,f(p)\,|_{p=\alpha+i\beta}+\text{Выч}\,f(p)\,|_{p=\alpha-i\beta}\right\}.$$

Вычет в каждой точке вычисляется по общей формуле для простых полюсов

$$\text{Выч}\left.\frac{A(p)}{B(p)}\right|_{p=p_0}=\frac{A(p_0)}{B'(p_0)}.$$

В итоге получаем:

$$y(t)=bk\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{(\lambda^2+k^2)\,2i\beta a_0}-\frac{e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\bar\lambda^2+k^2)\,2i\beta a_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{ikt}}{(-a_0k^2+a_1ik+a_2)\,2ik}-\frac{e^{-ikt}}{(-a_0k^2-a_1ik+a_2)\,2ik}\right].$$

Результирующий процесс есть наложение периодического колебания с частотой внешней силы и затухающего колебания с собственной частотой системы; скорость затухания определяется величиной α, т. е. абсциссой характеристических корней.

При $\alpha=0$, $\beta=k$ наступает явление резонанса. В этом случае исходное уравнение имеет вид

$$y''+k^2y=b\sin kt$$

с формулой решения

$$y(t)=\frac{bk}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{(p^2+k^2)^2}.$$

Точки $p=\pm ik$ являются полюсами 2-го порядка подынтегральной функции. Вычисляя вычеты по общим правилам (для кратных полюсов), находим:

$$y(t)=bk\left[e^{ikt}\left(-\frac{t}{4k^2}+\frac{1}{4ik^3}\right)+e^{-ikt}\left(-\frac{t}{4k^2}-\frac{1}{4ik^3}\right)\right]=$$
$$=-\frac{bt}{2k}\cos kt-\frac{b}{2k^2}\sin kt.$$

Получается колебание с неограниченно возрастающей амплитудой.

3. Те же методы применяются для уравнений с частными производными.

Если обыкновенное уравнение после преобразования Лапласа по t переходило в алгебраическое уравнение относительно неизвестной функции, то в уравнении, содержащем производные не только по t, но и по переменным $x, y, \ldots$, после преобразования Лапласа по t исчезнут производные по t и останутся производные по $x, y, \ldots$ При большом числе независимых переменных получится, конечно, слабое упрощение, но в случае двух независимых переменных t, x метод преобразования Лапласа может применяться с большой эффективностью.

Рассмотрим для примера уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в конечном промежутке $0\leqslant x\leqslant l$ с граничными и начальными условиями $u_x(0,\ t)=0$, $u(l,\ t)=u_1$, $u(x,\ 0)=u_0$. Физически эти условия означают, что теплота не выходит через конец $x=0$, а на конце $x=l$ поддерживается постоянная температура u_1; в начальный момент температура постоянна и равна u_0.

Применим для решения задачи преобразование Лапласа по t, т. е. перейдем от функции $u(x,\ t)$ к функции

$$v(x,\ p)=\int^{\infty} e^{-pt}\,u(x,\ t)\,dt.$$

Для функции $v(x, p)$ мы получаем уравнение

$$\frac{d^2 v(x, p)}{dx^2} - pv(x, p) = -u_0$$

с условиями

$$v_x(0, p) = 0, \qquad v(l, p) = \frac{u_1}{p}.$$

Это уравнение 2-го порядка имеет решение

$$v(x, p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}},$$

откуда

$$u(x, t) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}} \frac{dp}{p}.$$

Подынтегральная функция — однозначная функция от p с полюсами $p_0 = 0$ и $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Мы покажем, что интеграл равен сумме вычетов соответствующей функции во всех этих полюсах. Для этого рассмотрим в левой полуплоскости полуокружность Γ_n с центром в начале координат и радиусом $n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$; она проходит между двумя соседними полюсами, и мы покажем, что отношение $\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ на всей этой полуокружности ограничено; тогда при $n \to \infty$ интеграл по Γ_n в силу леммы Жордана стремится к нулю, и весь интеграл (1), как обычно, сведется к сумме вычетов.

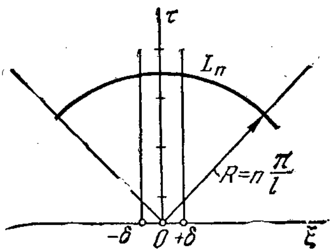


Рис. 18.

Вместо того, чтобы рассматривать отношение $\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ на полуокружности Γ_n, где $|p| = n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, можно заменить $\sqrt{p}$ на ζ, p на ζ^2 и рассматривать отношение $\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}$ на четверти окружности L_n радиуса $n\frac{\pi}{l}$ с аргументом, меняющимся от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$ (рис. 18). Положим $\zeta = \xi + i\tau$, мы имеем $\tau > 0$, $|\xi| \leqslant \tau$ и

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 = \left|\frac{\operatorname{ch} x(\xi + i\tau)}{\operatorname{ch} l(\xi + i\tau)}\right|^2 = \left|\frac{\operatorname{ch} x\xi \cos x\tau + i \operatorname{sh} x\xi \sin x\tau}{\operatorname{ch} l\xi \cos l\tau + i \operatorname{sh} l\xi \sin l\tau}\right|^2 =$$

$$= \frac{\operatorname{ch}^2 x\xi \cos^2 x\tau + \operatorname{sh}^2 x\xi \sin^2 x\tau}{\operatorname{ch}^2 l\xi \cos^2 l\tau + \operatorname{sh}^2 l\xi \sin^2 l\tau} \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{ch}^2 l\xi \cos^2 l\tau + \operatorname{sh}^2 l\xi \sin^2 l\tau}. \tag{1}$$

Если $|\xi| \leqslant \delta$, то на окружности L_n при достаточно большом n мы имеем $\left|\tau - n\frac{\pi}{l}\right| < \varepsilon$ и, следовательно, $\cos^2 l\tau > 1 - \eta$, где ε, η как угодно малы;

поэтому

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{(1-\eta)\operatorname{ch}^2 l\xi} = \frac{1}{1-\eta}. \qquad (2)$$

Если $|\xi| \geqslant \delta$, то мы заменим в знаменателе (1) $\operatorname{ch}^2 l\xi$ на $\operatorname{sh}^2 l\xi$; тогда мы получим:

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{sh}^2 l\xi} = \operatorname{cth}^2 l\xi \leqslant \operatorname{cth}^2 l\delta. \qquad (3)$$

Неравенства (2) и (3) показывают, что отношение $\left|\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}\right|$ ограничено фиксированной постоянной на указанных окружностях. Поэтому, как было указано, интеграл сводится к сумме вычетов. Вычет относительно полюса $p=0$ равен 1. Вычет относительно полюса $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$, как легко подсчитать, равен

$$\frac{(-1)^n 4}{\pi(2n-1)} e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}.$$

В конце концов мы получаем решение в виде суммы ряда

$$u(x, t) = u_0 + \frac{4}{\pi}(u_1 - u_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}.$$

Задачи. **1.** Заполнить пустые места в таблице

№	$y(t)$	$Y(p)$
1	t^n	
2	$\cos at$	
3	$\operatorname{sh} at$	
4		$\frac{p}{p^2-a^2}$
5		$\frac{a}{p^2+a^2}$

Отв. $Y_1(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $Y_2(p) = \frac{p}{a^2+p^2}$, $Y_3(p) = \frac{a}{p^2-a^2}$, $y_4(t) = \operatorname{ch} at$, $y_5(t) = \sin at$.

2. Решить уравнение $y^{(IV)} + 4y''' + 4y'' = 0$ при условиях $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

Отв. $4y(t) = -9 + 15t + 9e^{-2t} + 7te^{-2t}$.

3. Решить систему уравнений

$$y'' - 3y' + y + z' - z = 0$$
$$-y' + y + z'' - 5z' + 4z = 0$$

при условиях $y_0 = y_1 = z_1 = 0$, $z_0 = 1$.

Отв. $4y = e^t - e^{3t} + 2te^{3t}$, $4z = 5e^t - e^{3t} - 2te^{3t}$.

4. Решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$$

при условиях $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = a \cos \omega t$.

Отв.

$$u(x, t) = ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \frac{a}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi t} \sin x\sqrt{\xi}\, \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + \omega^2}.$$

Примечание. Множество примеров на преобразование Лапласа и его применения в задачах математической физики имеется в книгах: Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948; И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.

§ 5. Квазианалитические классы функций

1. Метод преобразования Лапласа с успехом применяется и при решении теоретических проблем. В качестве одного из таких применений мы изложим здесь основную теорему теории квазианалитических классов функций[1]).

Известно, что функция $f(x)$ вещественного переменного x, если она бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0, не обязана еще быть аналитической, т. е. разлагаться в окрестности этой точки в ряд Тейлора. Но если последовательные производные функции $f(x)$ не слишком быстро растут, именно так, что выполняются условия

$$\max_{|x - x_0| < \delta} |f^{(n)}(x)| \leqslant CM^n n!, \tag{1}$$

то аналитичность функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 уже будет иметь место. Действительно, остаточный член в формуле Тейлора

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) =$$
$$= \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_1) \quad (x_0 - \delta < x_1 < x_0 + \delta)$$

допускает в этом случае оценку $|R_n(x)| \leqslant CM^n |x - x_0|^n$ и при $|x - x_0| < \frac{1}{M}$ стремится к нулю, откуда следует, что в интер-

[1]) По книге С. Мандельбройта, Квазианалитические классы функций, М.—Л., 1936.

вале $|x-x_0|<\frac{1}{M}$ функция $f(x)$ есть сумма своего ряда Тейлора. Применяя формулу Коши для производных аналитической функции, легко проверить, что и, обратно, аналитичность функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 влечет выполнение условия (1). Пусть $m_0, m_1, \ldots \ldots, m_n, \ldots$ — произвольная последовательность положительных чисел. Образуем класс $C\langle m_n\rangle$ функций $f(x)$, определенных на оси $-\infty<x<\infty$ и удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant CM^n m_n \quad (n=0,\ 1,\ 2\ \ldots),$$

где постоянные C и M могут зависеть от выбора функции f. Если числа m_n растут быстрее, чем $n!$, то класс $C\langle m_n\rangle$ может включать и неаналитические функции. Но, как показал А. Данжуа в 1921 г., если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}\right)=\infty$, то класс $C\langle m_n\rangle$ обладает следующим замечательным свойством: *если две функции $f(x)$ и $g(x)$, входящие в класс $C\langle m_n\rangle$, совпадают в некоторой точке x_0 вместе со всеми производными, то они тождественно совпадают при всех значениях x.* Для аналитических функций это свойство хорошо известно со времен Коши.

Классы $C\langle m_n\rangle$, в которых из совпадения двух функций вместе со всеми производными вытекает совпадение этих функций всюду, были названы *квазианалитическими классами*. В 1926 г. Т. Карлеман дал полное описание квазианалитических классов; несколько более простую формулировку предложил в 1930 г. А. Островский. Теорема Карлемана в формулировке Островского звучит следующим образом:

Теорема 1. *Положим*

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{m_n}. \tag{2}$$

Для того чтобы класс $C\langle m_n\rangle$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr=\infty. \tag{3}$$

Пусть, например, $m_n=n^{n\alpha}$, где α фиксировано. Тогда, как легко вычислить,

$$T(r)\sim r^{1-\alpha};$$

интеграл (3) сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. Теорема Карлемана утверждает, таким образом, что класс $C\langle n^{n\alpha}\rangle$ квазианалитичен при $\alpha\leqslant 1$ (как мы видели выше, он состоит даже из аналитических функций) и не квазианалитичен при $\alpha>1$.

Существуют квазианалитические классы, состоящие не только из аналитических функций. Можно проверить, что функция $f(x)=\sum T^{-1}(n)\cos nx$ входит в класс $C_{\langle m_n\rangle}$ и не является аналитической, если $\frac{\sqrt[n]{m_n}}{n}\to\infty$; поэтому, например, при $m_n=n!\ln^n n$ в квазианалитическом классе $C_{\langle m_n\rangle}$ имеются неаналитические функции.

2. В этом пункте, пользуясь преобразованием Лапласа, мы сведем проблему о квазианалитических классах к некоторой другой проблеме, относящейся к аналитическим функциям в полуплоскости.

Допустим, что класс $C\langle m_n\rangle$ не квазианалитичен. Это означает, что в классе $C\langle m_n\rangle$ существуют функции $f(x)$ и $g(x)$, совпадающие при $x=x_0$ вместе со всеми производными, но не совпадающие всюду. Без ограничения общности можно считать $x_0=0$ и $f(x)\not\equiv g(x)$ при $x>0$; выполнения этих условий всегда можно добиться сдвигом и заменой x на $-x$, т. е. операциями, очевидно выполнимыми в пределах класса $C\langle m_n\rangle$. Рассмотрим далее функцию $\varphi(x)$, равную $f(x)-g(x)$ при $x\geqslant 0$ и равную 0 при $x<0$; очевидно, что она также принадлежит классу $C\langle m_n\rangle$. Эта функция равна нулю при $x<0$ и ограничена при $x>0$, и, следовательно, обладает преобразованием Лапласа

$$\Phi(p)=\int_0^\infty \varphi(x)\,e^{-px}\,dx, \tag{1}$$

аналитическим в полуплоскости $\operatorname{Re}p>0$.

Посмотрим, какими дальнейшими свойствами обладает функция $\Phi(p)$. Производя в (1) n раз интегрирование по частям, получим:

$$p^n\Phi(p)=\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x)\,e^{-px}\,dx,$$

откуда вытекает оценка

$$|p^n\Phi(p)|\leqslant CM^n m_n\int_0^\infty e^{-px}\,dx=CM^n m_n\frac{1}{|p|}\leqslant C_1M^n m_n$$

при $|p|>\gamma>0$. Обратно, пусть имеется в полуплоскости $\operatorname{Re}p>\gamma$ аналитическая функция $\Phi(p)\not\equiv 0$, удовлетворяющая неравенствам вида

$$|p^n\Phi(p)|\leqslant CM^n m_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, что $\left(\frac{\Phi(p)}{p^2}\right)e^{-\gamma x}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 § 4; в качестве интегрируемой мажоранты, требуемой условием б), можно, например, взять $Cm_0\frac{1}{|p|^2}$. В силу этой теоремы функция $\varphi(x)$, определенная равенством

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Phi(p)}{p^2}e^{(p-\gamma)x}\,dp, \tag{2}$$

равна нулю при $x<0$. Поскольку $\Phi(p)\not\equiv 0$, функция $\varphi(x)\not\equiv 0$ при $x>0$. Далее, $\varphi(x)$ имеет производные всех порядков и

$$|\varphi^{(n)}(x)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Phi(p)}{p^2}(p-\gamma)^n e^{(p-\gamma)x}\,dp\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{CM^nm_n}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left|\frac{p-\gamma}{p}\right|^n\frac{|dp|}{|p^2|}\leqslant\frac{C}{2\pi}M^nm_n\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{|dp|}{|p|^2}=C'M^nm_n.$$

Мы видим, что $\varphi(x)$ принадлежит классу $C\langle m_n\rangle$. Так как $\varphi(x)=0$ при $x<0$ и $\varphi(x)\not\equiv 0$, то класс $C\langle m_n\rangle$ не квазианалитический. Итак, *проблема о квазианалитических классах эквивалентна проблеме* («проблема Ватсона») *о существовании функции* $\Phi(p)\not\equiv 0$, *аналитической в правой полуплоскости и удовлетворяющей неравенствам*

$$|p^n\Phi(p)|\leqslant CM^nm_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

3. Преобразованием инверсии $p=\frac{2\gamma}{s}$ полуплоскость $\operatorname{Re}p>\gamma$ переводится в круг $|s-1|<1$, а проблема Ватсона приводится к следующей: при каких условиях, наложенных на последовательность m_n, существует в круге $|s-1|<1$ аналитическая функция $F(s)\not\equiv 0$, удовлетворяющая неравенствам

$$|F(s)|\leqslant|CM^nm_n|s|^n? \tag{3}$$

Предположим, что такая функция $F(s)$ имеется. Можно найти такое ρ, что $F(\rho)\neq 0$, $|F(\rho+\rho e^{i\theta})|<1$ при всех вещественных θ, причем на окружности $s=\rho+\rho e^{i\theta}$ функция $F(s)$ имеет единственный нуль при $s=0$. Все дальнейшие построения будут проходить в пределах круга $|s-\rho|\leqslant\rho$. В силу неравенств (3)

$$|F(\rho+\rho e^{i\theta})|\leqslant CM^nm_n\rho^n|1+e^{i\theta}|^n=CM^nm_n\left|2\rho\cos\frac{\theta}{2}\right|^n.$$

Переходя в правой части к минимуму по n, получим:

$$F|(\rho+\rho e^{i\theta})|\leqslant\frac{C}{\max\limits_n\dfrac{1}{M^nm_n\left|2\rho\cos\dfrac{\theta}{2}\right|^n}}$$

и согласно определению функции $T(r)$

$$|F(\rho+\rho e^{i\theta})| \leqslant \frac{C}{T\left(\dfrac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right)},$$

откуда

$$\ln|F(\rho+\rho e^{i\theta})| \leqslant \ln C - \ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right).$$

В теории аналитических функций известна следующая теорема (доказательство ее мы дадим в п. 5): если функция $F(z)$ аналитична внутри круга $|z-z_0|<h$, отлична от нуля при $z=z_0$, не превосходит по модулю 1, а в замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant h$ непрерывна и на окружности $|z-z_0|=h$ имеет единственный нуль, то интеграл

$$-\int_0^{2\pi} \ln|f(z_0+he^{i\theta})|\,d\theta$$

имеет конечное значение.

Применяя эту теорему к рассматриваемому нами случаю, находим, что функция

$$\ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right) \leqslant \ln C - \ln|F(\rho+\rho e^{i\theta})|$$

обладает конечным интегралом по θ в пределах от 0 до 2π. Если сделать подстановку

$$2M\rho\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{r},$$

то мы получим, что сходится интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\,\frac{1}{\sqrt{M^2\rho^2-\dfrac{1}{4r^2}}}\,dr,$$

а с ним и интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr. \tag{4}$$

Итак, *если класс* $C\langle m_n\rangle$ не квазианалитичен, то интеграл (4) сходится. Этим установлена достаточность условия Карлемана в теореме 1.

4. Переходя к доказательству необходимости условия Карлемана, допустим, что интеграл (4) сходится. Вместе с ним сходится и интеграл

$$\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2M\rho \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) d\theta;$$

поэтому можно построить интеграл Пуассона

$$G(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta,$$

который представляет собой функцию, гармоническую в круге $r<1$. Положим $G(s-1)=P(s)$ и обозначим через $Q(s)$ сопряженную гармоническую функцию в круге $|s-1|<1$. Пусть, далее,

$$F(s) = e^{-\{P(s)+iQ(s)\}}.$$

Мы утверждаем, что для функции $F(s)$ выполняются неравенства

$$|F(s)| \leqslant m_n |s|^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

Действительно, неравенства (5) эквивалентны неравенствам

$$e^{-P(s)} \leqslant m_n |s|^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

или

$$-G(s) = -P(s+1) \leqslant \ln m_n + n\ln|s+1|. \tag{6}$$

Оба слагаемых справа можно представить в форме интегралов Пуассона:

$$\ln m_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\ln m_n (1-r^2)}{1-2r\cos s(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta,$$

$$n\ln|s+1| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{n\ln|e^{i\theta}+1|(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta,$$

и поэтому неравенство (6), подлежащее доказательству, можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} \ln\left\{T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) m_n |1+e^{i\theta}|^n\right\}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta \geqslant 0. \tag{7}$$

Но $|1+e^{i\theta}| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$; так как

$$T(r) = \sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{m_n},$$

то для каждого отдельного n

$$T(r) \geqslant \frac{r^n}{m_n}, \quad T(r)\, m_n r^n \geqslant 1,$$

и, следовательно, под знаком интеграла в (7) стоит неотрицательная функция. Отсюда следует, что неравенство (7) справедливо; вместе с ним выполняется и неравенство (5), и класс $C\langle m_n \rangle$ согласно п. 1 оказывается не квазианалитическим. Этим теорема Карлемана доказана полностью.

5. В этом пункте мы докажем теорему из теории функций комплексного переменного, которую мы использовали в п. 3.

Теорема. *Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < h$, отлична от нуля при $z = z_0$, по модулю не превосходит* 1, *непрерывна в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant h$ и имеет на окружности $|z - z_0| = h$ единственный нуль в точке z^*, то интеграл*

$$-\int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + he^{i\theta})|\, d\theta$$

конечен.

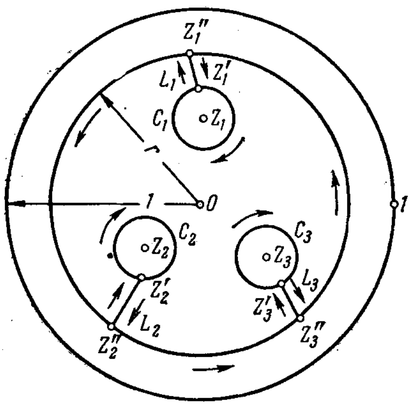


Рис. 19.

Доказательство. Без ограничения общности можно полагать $z_0 = 0$, $h = 1$, $z^* = 1$. В круге $|z| \leqslant r < 1$ функция $f(z)$ аналитична и может иметь лишь конечное число корней $z_1, \ldots, z_m$; можно считать, что на окружности $|z| = r$ корни отсутствуют.

Рассмотрим замкнутый контур C, показанный на рис. 19, состоящий из дуг окружности $|z| = r$, проходимой в положительном направлении, окружностей C_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ весьма малого радиуса ε, проходимых в отрицательном направлении, и линий $L_k = [z_k'', z_k']$, соединяющих указанные дуги и проходимых дважды в противоположных направлениях. Функция $\ln f(z)$ аналитична внутри контура C, и значение $\ln f(0)$ может быть представлено формулой Коши:

$$\ln f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln f(z) \frac{dz}{z}. \tag{1}$$

Рассмотрим часть контура C, образованную окружностью C_j радиуса ε с центром в точке z_j, проходимую в отрицательном направлении. Та часть интеграла (1), которая берется по этой окружности C_j, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \ln f(z) \frac{i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta}{z_j + \varepsilon e^{i\theta}}. \tag{2}$$

Если k_j — кратность корня z_j, то $f(z)=(z-z_j)^{k_j}f_j(z)$, где $f_j(z_j)\neq 0$, и

$$|\ln f(z)|=|\ln(z-z_j)^k f_j(z)|=|k\ln(z-z_j)+\ln f_j(z)|\leqslant$$
$$\leqslant k|\ln|z-z_j|+2\pi|+|\ln f_j(z)|\leqslant k|\ln\varepsilon|+C_1.$$

В силу этой оценки подынтегральное выражение в (2) становится при $\varepsilon\longrightarrow 0$ как угодно малым, и, следовательно, все интегралы по окружностям C_j стремятся к нулю при $\varepsilon\longrightarrow 0$.

При обходе в отрицательном направлении вокруг точки z_j функция $\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$ приобретает слагаемое $-2\pi k_j i$, поэтому интеграл по части контура, образованной отрезком L_j, пройденным дважды в противоположных направлениях, равен

$$k_j\int\limits_{L_j}\frac{dz}{z}=k_j[\ln z_j'-\ln z_j''].$$

На каждом следующем участке окружности $|z|=r$ функция $\ln f(z)$ по сравнению с предыдущим приобретает слагаемое $-2\pi k_j i$, что дает во всем интеграле (1) добавку вида

$$k_j\int\limits_{z_j''}^{z_{j+1}''}i\,d\theta,$$

очевидно чисто мнимую. Имея все это в виду, отделим вещественную часть в равенстве (1) при $\varepsilon\longrightarrow 0$; мы получим:

$$\ln|f(0)|=\sum_{j=1}^{m}k_j\ln|z_j'|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta;$$

а так как $|z_j'|<1$, $\ln|z_j'|<0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\geqslant\ln|f(0)|,$$

или, что то же,

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\ln|f(0)|.$$

На окружности $|z|=1$ по условию имеется единственный нуль в точке $z^*=1$. Выберем произвольно $\delta>0$; тогда, очевидно,

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\ln|f(0)|.$$

Оставляя δ фиксированным, перейдем в этом неравенстве к пределу при $r\longrightarrow 1$; получим:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\ln|f(0)|.$$

Это неравенство справедливо при любом $\delta > 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем, что существует и интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Теорема доказана.

§ 6. Преобразования Фурье в классе $L_2(-\infty, \infty)$

1. Функция $\varphi(x)$, интегрируемая в квадрате на всей оси x, вообще говоря, не интегрируема в первой степени $\left(\text{пример: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$, поэтому она не имеет преобразования Фурье в обычном смысле. Мы покажем тем не менее, что имеет место следующее предложение (заменяющее теорему о преобразовании Фурье в классе L_1):

Теорема (Планшерель, 1910). *Для всякой функции $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ интеграл*

$$\psi_N(\sigma) = \int_{-N}^{N} \varphi(x)e^{-ix\sigma}\,dx \tag{1}$$

представляет собой функцию, принадлежащую (по σ) пространству $L_2(-\infty, \infty)$. При $N \to \infty$ функция $\psi_N(\sigma)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$ имеет некоторый предел $\psi(\sigma)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx. \tag{2}$$

Если $\varphi(x)$, кроме того, принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$, то $\psi(\sigma)$ есть обычное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Поэтому $\psi(\sigma)$ и в общем случае (когда $\varphi(x) \not\in L_1(-\infty, \infty)$) называется преобразованием Фурье от $\varphi(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из класса S_x (§ 3, п. 4), и пусть $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ — их преобразования Фурье, принадлежащие классу S_σ. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma\right\}\overline{\varphi_2(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(\sigma)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\overline{\varphi_2(x)}\,dx\right\}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(\sigma)\overline{\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x)e^{-i\sigma x}\,dx\right\}}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(\sigma)\overline{\psi_2(\sigma)}\,d\sigma.$$

Перемена порядка интегрирования, произведенная на третьем этапе, законна в силу абсолютной сходимости двойного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(\sigma)||\varphi_2(x)|\,dx\,d\sigma.$$

В частности, при $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi(x)$, $\psi_1(\sigma)=\psi_2(\sigma)=\psi(\sigma)$ получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx. \tag{3}$$

Пусть, далее, $\varphi(x)$ — интегрируемая в квадрате функция, обращающаяся в нуль при $|x|\geqslant a$. Можно образовать последовательность функций $\varphi_n(x)\in S$, обращающихся в нуль при $|x|\geqslant a$, сходящуюся к $\varphi(x)$ по метрике $L_2(-a, a)$. Так как для всякой функции $f\in L_2(-a, a)$ по неравенству Коши — Буняковского

$$\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_{-a}^{a} 1\,dx}\sqrt{\int_{-a}^{a} |f(x)|^2\,dx} = \\ = \sqrt{2a}\sqrt{\int_{-a}^{a} |f(x)|^2\,dx},$$

то имеем:

$$\int_{-a}^{a} |\varphi(x)-\varphi_n(x)|\,dx \leqslant \sqrt{2a}\sqrt{\int_{-a}^{a} |\varphi(x)-\varphi_n(x)|^2\,dx} \to 0,$$

так что $\varphi_n(x)$ сходятся к $\varphi(x)$ и по метрике $L_1(-a, a)$; а поскольку и $\varphi_n(x)$ и $\varphi(x)$ обращаются в нуль при $|x|\geqslant a$, эта сходимость имеет место и по метрике $L_1(-\infty, \infty)$. Но тогда преобразования Фурье $\psi_n(\sigma)$ функций $\varphi_n(x)$ равномерно при $-\infty<\sigma<\infty$ сходятся к преобразованию Фурье $\psi(\sigma)$ функции $\varphi(x)$. Кроме того, функции $\psi_n(\sigma)$ образуют последовательность, фундаментальную в метрике $L_2(-\infty, \infty)$, так как по доказанному

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\sigma)-\psi_m(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|^2\,dx.$$

Отсюда следует, что $\psi(\sigma)=\lim\psi_n(\sigma)$ принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\,d\sigma = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\sigma)|^2\,d\sigma = \\ = 2\pi \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2\,dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx.$$

В действительности пределами двух последних интегралов являются $-a$ и a.

Пусть, наконец, $\varphi(x)$ — любая функция из $L_2(-\infty, \infty)$ и $\varphi_N(x)$ равна $\varphi(x)$ при $|x| \leqslant N$ и 0 при $|x| \geqslant N$. Преобразование Фурье $\psi_N(\sigma)$ функции $\varphi_N(x)$ по доказанному принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_N(\sigma)|^2 \, d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x)|^2 \, dx, \tag{4}$$

а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_N(\sigma) - \psi_M(\sigma)|^2 \, d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi_M(x)|^2 \, dx. \tag{5}$$

Но последовательность $\varphi_N(x)$ сходится в метрике $L_2(-\infty, \infty)$ к функции $\varphi(x)$ и потому фундаментальна; из равенства (5) следует, что последовательность $\psi_N(\sigma)$ также фундаментальна. Обозначим $\psi(\sigma) \coloneqq \lim \psi_N(\sigma)$; из (4) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2 \, d\sigma = 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_N(\sigma)|^2 \, d\sigma =$$
$$= 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x)|^2 \, dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \, dx. \tag{6}$$

Наконец, если $\varphi(x)$ принадлежит и $L_1(-\infty, \infty)$, то для функции $\varphi_N(x)$ мы будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi(x)| \, dx \to 0,$$

откуда следует, что $\psi_N(\sigma)$ равномерно сходятся к (обычному) преобразованию Фурье функции $\varphi(x)$. Но так как в среднем $\psi_N(\sigma)$ сходятся к $\psi(\sigma)$, то $\psi(\sigma)$ и есть обычное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

Тем самым теорема Планшереля полностью доказана.

Легко проверить и соотношение, несколько более общее, чем (6), именно, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — любые функции из $L_2(-\infty, \infty)$ и $\psi_1(\sigma)$, $\psi_2(\sigma)$ — их преобразования Фурье, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma) \overline{\psi_2(\sigma)} \, d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} \, dx.$$

Для доказательства достаточно применить теорему Планшереля к функции $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ и сравнить результаты справа и слева.

2. Соотношения между гладкостью функции и убыванием ее преобразования Фурье, полученные в § 3 для интегрируемых функций, сохраняют свою силу также и для квадратично интегрируемых функций.

Пусть вначале квадратично интегрируемая функция $\varphi(x)$ локально абсолютно непрерывна и ее производная $\varphi'(x)$ также квадратично интегрируема. Тогда *преобразованием Фурье функции* $\varphi'(x)$ *является произведение преобразования Фурье* $\psi(\sigma)$ *функции* $\varphi(x)$ *на* $i\sigma$.

Действительно, функция $\varphi(x)$ в данном случае при $x \to \infty$ имеет предел, поскольку

$$|\varphi(x)|^2 = \varphi(x)\overline{\varphi(x)} = \varphi(0)\overline{\varphi}(0) + \int_0^x \varphi(\xi)\overline{\varphi'(\xi)}\,d\xi + \int_0^x \varphi'(\xi)\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi,$$

а функции $\varphi\overline{\varphi}$ и $\overline{\varphi}\varphi'$ интегрируемы на бесконечном промежутке; очевидно, что этот предел может быть только нулем.

Используя этот факт, мы построим последовательность финитных абсолютно непрерывных функций $\varphi_\nu(x)$, так что в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$

$$\varphi_\nu(x) \to \varphi(x),$$
$$\varphi'_\nu(x) \to \varphi'(x).$$

Именно, в качестве $\varphi_\nu(x)$ мы возьмем непрерывную функцию, равную $\varphi(x)$ на интервале $(-\nu, \nu)$, 0 вне интервала $U_\nu = (-\nu - |\varphi(-\nu)|, \nu + |\varphi(\nu)|)$ и линейную в двух оставшихся промежутках; поскольку $\varphi(\nu) \to 0$ при $\nu \to \pm\infty$, функция $\varphi_\nu(x)$ стремится к $\varphi(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$. Далее, функция $\varphi'_\nu(x)$ совпадает с $\varphi'(x)$ в интервале $(-\nu, \nu)$, равна 0 вне интервала U_ν и равна ± 1 в двух оставшихся промежутках; очевидно, что $\varphi'_\nu(x)$ стремится к $\varphi'(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$.

По теореме Планшереля в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$

$$F[\varphi_\nu(x)] = \psi_\nu(\sigma) \to F[\varphi(x)] \quad = \psi(\sigma);$$
$$F[\varphi'_\nu(x)] = i\sigma\psi_\nu(\sigma) \to F(\varphi'(x)] = \psi_1(\sigma),$$

а так как последовательность $i\sigma\psi_\nu(\sigma)$ стремится, очевидно, к функции $i\sigma\psi(\sigma)$, то мы получаем

$$\psi_1(\sigma) = F[\varphi'(x)] = i\sigma\psi(\sigma),$$

что и требовалось.

Пусть, обратно, вместе с функцией $\varphi(x)$ является квадратично интегрируемой и $x\varphi(x)$. Покажем, что *преобразование Фурье* $\psi(\sigma)$ *функции* $\varphi(x)$ *есть локально абсолютно непрерывная функция и* $F[x\varphi(x)] = i\psi'(\sigma)$. Положим $\varphi_\nu(x) = \varphi(x)$ при $|x| \leqslant \nu$ и $\varphi_\nu(x) = 0$ при $|x| > \nu$; тогда $\varphi_\nu(x) \to \varphi(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$. Очевидно, и

$x\varphi_\nu(x) \to x\varphi(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$. Пусть $F[x\varphi(x)] = ig(\sigma)$; мы получаем

$$\psi_\nu(\sigma) = F[\varphi_\nu(x)] \to F[\varphi(x)] \quad = \psi(\sigma),$$
$$i\psi'_\nu(\sigma) = F[x\varphi_\nu(x)] \to F[x\varphi(x)] = ig(\sigma).$$

По лемме п. 6 § 3 гл. IV из последовательности $\psi_\nu(\sigma)$ можно извлечь подпоследовательность $\psi_{\nu_k}(\sigma)$, сходящуюся к $\psi(\sigma)$ почти всюду. Пусть, например, $\psi(\sigma_0) = \lim \psi_{\nu_k}(\sigma_0)$. Мы имеем далее

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} [\psi'_{\nu_k}(\xi) - \psi'_{\nu_m}(\xi)]\, d\xi = [\psi_{\nu_k}(\sigma) - \psi_{\nu_m}(\sigma)] - [\psi_{\nu_k}(\sigma_0) - \psi_{\nu_m}(\sigma_0)];$$

с другой стороны

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} |\psi'_{\nu_k}(\xi) - \psi'_{\nu_m}(\xi)|\, d\xi \leqslant \sqrt{|\sigma - \sigma_0|} \sqrt{\int_{\sigma_0}^{\sigma} |\psi'_{\nu_k}(\xi) - \psi'_{\nu_m}(\xi)|^2\, d\xi} \to 0,$$

откуда следует, что последовательность $\psi_{\nu_k}(\sigma)$ равномерно сходится в любом конечном промежутке. Но тогда $\psi(\sigma) = \lim \psi_{\nu_k}(\sigma)$ есть уже непрерывная функция. Далее

$$\psi(\sigma) - \psi(\sigma_0) = \lim \int_{\sigma_0}^{\sigma} [\psi'_{\nu_k}(\xi)]\, d\xi = \int_{\sigma_0}^{\sigma} g(\xi)\, d\xi,$$

откуда следует, что $\psi(\sigma)$ локально абсолютно непрерывна и $\psi'(\sigma) = g(\sigma)$, что мы и утверждали.

3. Теорема Винера и Палея. Если интегрируемая в квадрате функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне отрезке $[-b, b]$, то ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$, кроме того, что оно также интегрируемо в квадрате, может быть аналитически продолжено в плоскость $s = \sigma + i\tau$. Действительно, выражение

$$\psi(s) = \int_{-b}^{b} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx$$

определено при всех комплексных $s = \sigma + i\tau$. Оно представляет собой аналитическую функцию от s и удовлетворяет оценке

$$|\psi(s)| \leqslant \int_{-b}^{b} |\varphi(x)|\, e^{|\tau x|}\, dx \leqslant Ce^{b|\tau|} \leqslant Ce^{b|s|}.$$

Целая аналитическая функция $\psi(s)$, удовлетворяющая неравенству

$$|\psi(s)| \leqslant Ce^{b|s|},$$

называется *функцией экспоненциального типа* $\leqslant b$. Мы видим, что преобразование Фурье квадратично интегрируемой функции, обращающейся в нуль при $|x| > b$, есть целая функция экспоненциального типа $\leqslant b$. В этом пункте мы установим обратную теорему.

Теорема (Винер — Палей). *Если целая функция $\psi(s)$ экспоненциального типа $\leqslant b$ интегрируема в квадрате по вещественной оси, то она является преобразованием Фурье интегрируемой в квадрате функции $\varphi(x)$, равной 0 вне отрезка $[-b, b]$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, выведем оценки коэффициентов ряда Тейлора для целых функций экспоненциального типа.

Коэффициенты ряда Тейлора аналитической функции

$$\psi(s) = \sum_0^{\infty} a_n s^n,$$

как известно, вычисляются по формулам Коши:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=r} \frac{\psi(s)}{s^{n+1}}\, ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если $\psi(s)$ — целая функция экспоненциального типа $\leqslant b$, то для чисел a_n получаются оценки

$$|a_n| \leqslant C \frac{e^{br}}{r^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Переходя здесь к минимуму по r, получим неравенства

$$|a_n| \leqslant C \left(\frac{eb}{n}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{*}$$

Исходя из оценок (*), покажем, что частные суммы ряда Тейлора для функции $\psi(\sigma)$ имеют при любом $\varepsilon > 0$ общую мажоранту вида $C_\varepsilon e^{(b+\varepsilon) r}$. Действительно, начиная с некоторого номера N, который можно взять между числами $2eb|s|$ и $2eb|s| + 1$, выполняются неравенства

$$\frac{eb|s|}{n} \leqslant \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\sum_N^{\infty} |a_n s^n| \leqslant C \sum_N^{\infty} \left(\frac{eb|s|}{n}\right)^n < C \sum_N^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant C.$$

С другой стороны, величина $\left(\frac{eb|s|}{n}\right)^n$ как функция от n достигает при $n = b|s|$ максимального значения $e^{b|s|}$, как это легко проверить дифференцированием. Отсюда

$$\sum_0^{\infty} |a_n s^n| = \sum_0^{N-1} |a_n s^n| + \sum_N^{\infty} |a_n s^n| \leqslant C(2eb|s| + 1) e^{b|s|} + C \leqslant C_\varepsilon e^{(b+\varepsilon)|s|}$$

при любом $\varepsilon > 0$, что и требовалось.

Переходим теперь к доказательству самой теоремы 1. Пусть $\psi(s) = \sum\limits_0^{\infty} a_n s^n$ — целая функция, экспоненциального типа $\leqslant b$, интегрируемая в квадрате по вещественной оси, и $\varphi(x)$ — ее (обратное) преобразование Фурье; по теореме Планшереля для любой функции $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и ее преобразования Фурье $v(\sigma) \in L_2(-\infty, \infty)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) v(\sigma) d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) u(x) dx.$$

Предположим, что $v(\sigma)$ равна нулю вне отрезка $[-c, c]$ и, следовательно, $u(x)$ есть целая аналитическая функция аргумента $z = x + iy$. В этом случае ряд

$$\psi(\sigma) v(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n v(\sigma) \tag{1}$$

сходится по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) v(\sigma) d\sigma$$

можно вычислить почленным интегрированием ряда (1); получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) v(\sigma) d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^n v(\sigma) d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u^{(n)}(0). \tag{2}$$

Равенство (2) имеет место и в более общих предположениях, когда $v(\sigma)$ не обязательно финитная функция, а только достаточно быстро убывающая, так что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n v(\sigma)$ остается сходящимся по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Так как для функции $\psi(\sigma)$ по доказанному все частные суммы ряда Тейлора имеют общую мажоранту вида $C_\varepsilon e^{(b+\varepsilon)|\sigma|}$ при любом $\varepsilon > 0$, то достаточно, чтобы функция $v(\sigma)$ убывала при $|\sigma| \to \infty$ быстрее, чем $e^{-c|\sigma|}$, $c > b$.

Обозначим через E_c класс функций $v(\sigma)$, удовлетворяющих неравенству

$$|v(\sigma)| \leqslant Ce^{-c|\sigma|} \qquad (c > 0).$$

Покажем, что если функция $v(\sigma)$ принадлежит E_c, то уравнения

$$w'(\sigma) \pm c_1 w(\sigma) = v(\sigma) \qquad (0 < c_1 < c)$$

имеют решение в классе E_{c_1}. Действительно, для уравнения со знаком «+» можно взять решение

$$w(\sigma) = e^{-c_1\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{c_1\lambda} v(\lambda) d\lambda.$$

Очевидно, что интеграл, стоящий справа, существует при всех σ. Далее, при $\sigma \to +\infty$ имеем:

$$|w(\sigma)| \leqslant e^{-c_1\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{c_1\lambda} |v(\lambda)| d\lambda \leqslant C_1 e^{-c_1\sigma},$$

а при $\sigma \to -\infty$

$$|w(\sigma)| \leqslant e^{-c_1\sigma} C \int_{-\infty}^{\sigma} e^{c_1\lambda} e^{c\lambda} d\lambda = Ce^{-c_1\sigma} \frac{e^{(c_1+c)\sigma}}{c_1+c} \leqslant C_2 e^{-c|\sigma|} \leqslant C_2 e^{-c_1|\sigma|},$$

так что $w(\sigma) \in E_{c_1}$. Для уравнения со знаком «—» нужно аналогичным образом рассмотреть решение

$$w(\sigma) = e^{c_1\sigma} \int_{\sigma}^{\infty} e^{-c_1\lambda} v(\lambda)\, d\lambda.$$

Рассмотрим, с другой стороны, независимо от предыдущих построений, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u^{(n)}(0), \tag{3}$$

где числа a_n удовлетворяют неравенствам $|a_n| < C(ebn^{-1})^n$, а $u(x+iy)$ — произвольная функция, аналитическая в круге $|z| \leqslant b$. Покажем, что ряд (3) является сходящимся. Каждая функция $u(z)$, аналитическая при $|z| \leqslant b$, определена и аналитична в некотором круге $|z| \leqslant b+\varepsilon$, и по формуле Коши

$$u^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=b+\varepsilon} \frac{u(z)\, dz}{z^{n+1}},$$

откуда

$$|u^{(n)}(0)| \leqslant \frac{Cn!}{(b+\varepsilon)^n}. \tag{4}$$

Заменяя по формуле Стирлинга $n!$ на $C_1 n^{n+1/2} e^{-n}$, получим

$$|u^{(n)}(0)| \leqslant C_2 \left[\frac{n}{e(b+\varepsilon)}\right]^n \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|u^{(n)}(0)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C_3 \left(\frac{eb}{n}\right)^n \left(\frac{n}{e(b+\varepsilon)}\right)^n = C_4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{b+\varepsilon}\right)^n < \infty, \tag{6}$$

что и утверждалось.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, u(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma,$$

определенный на функциях $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$; на тех функциях $u(x)$, которые принадлежат классу E_c, $c > b$, он может быть задан формулой (2)

$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u^{(n)}(0).$$

Как мы показали, по этой формуле он может быть определен и на совокупности всех аналитических функций в круге $|z| \leqslant b$. При этом функционал $\Phi(u)$ непрерывен в следующем смысле: если функции $u_m(z)$ определены и аналитичны в круге $|z| \leqslant b+\varepsilon$ и во всем этом круге при $m \to \infty$ равномерно сходятся к нулю, то $\Phi(u_m) \to 0$. Это следует из самих формул (4)—(6), где в качестве постоянной C, очевидно, можно поставить величину $\max\limits_{|z| \leqslant a+\varepsilon} |u(z)|$.

Мы должны показать, что функция $\varphi(x)$ — преобразование Фурье данной функции $\psi(\sigma)$ — равна нулю при $|x| \geqslant a$. Пусть $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_m < \ldots \ldots \longrightarrow \varepsilon$ и

$$u_m(z) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{z}{b+\varepsilon_k}\right)^2}{\prod\limits_{k=1}^{m} \left[1+\left(\frac{z}{b+\varepsilon_k}\right)^2\right]} u_0(z),$$

где $u_0(z) \in L_2(-\infty, \infty)$ — некоторая целая функция, преобразование Фурье которой $v_0(\sigma)$ принадлежит классу $E_{b+\varepsilon}$.

Разлагая коэффициент при $u_0(z)$ на простейшие дроби, мы получим представление $u_m(z)$ в форме

$$u_m(z) = A_0 u_0(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{1+\frac{iz}{b+\varepsilon_k}} u_0(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{1-\frac{iz}{b+\varepsilon_k}} u_0(z).$$

Пусть $u_k^+(z) = \left(1+\frac{iz}{b+\varepsilon_k}\right)^{-1} u_0(z)$, $u_k^-(z) = \left(1-\frac{iz}{b+\varepsilon_k}\right)^{-1} u_0(z)$, $v_k^+(\sigma)$ и $v_k^-(\sigma)$ — соответствующие преобразования Фурье; мы имеем по формулам (3) п. 4 § 3:

$$v_0(\sigma) = v_k^+(\sigma) + \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{b+\varepsilon_k} v_k^+(\sigma),$$

$$v_0(\sigma) = v_k^-(\sigma) - \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{b+\varepsilon_k} v_k^-(\sigma).$$

Так как функция $v_0(\sigma)$ по условию принадлежит классу $E_{b+\varepsilon}$ и числа $b+\varepsilon_j$ меньше $b+\varepsilon$, то по доказанному v_k^+ и v_k^- принадлежат классу $E_{b+\varepsilon_k}$; отсюда следует, что функция $v_m(\sigma) = F[u_m(x)]$ принадлежит классу $E_{b+\frac{\varepsilon}{2}}$. Поэтому для функции $v_m(\sigma)$ функционал (2) принимает значение

$$\Phi(u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, v_m(\sigma)\, d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u_m^{(n)}(0).$$

При $m \longrightarrow \infty$ последовательность функций $u_m(z)$

а) сходится к 0 равномерно в круге $|z| \leqslant b + \frac{\varepsilon}{2}$;

б) сходится по метрике $L_2(-\infty, \infty)$ к функции, равной $u_0(x)$ при $|x| > b+\varepsilon$ и равной 0 при $|x| < b+\varepsilon$.

По доказанному $\Phi(u_m) \longrightarrow 0$. С другой стороны.

$$\Phi(u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, u_m(x)\, dx \longrightarrow \int_{|x| \geqslant b+\varepsilon} \varphi(x)\, u_0(x)\, dx.$$

Отсюда

$$\int_{|x| \geqslant b+\varepsilon} \varphi(x)\, u_0(x)\, dx = 0.$$

Это равенство можно написать и в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, u_0(x)\, dx = 0,$$

где $\varphi_0(x)$ равна $\varphi(x)$ при $|x| > b+\varepsilon$ и равна 0 при $|x| < b+\varepsilon$. Функция $u_0(x)$ — здесь любая целая функция, преобразование Фурье которой принадлежит классу $E_{b+\varepsilon}$. Так как совокупность таких функций полна в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$[1]), то $\varphi_0(x) \equiv 0$ (почти всюду), откуда $\varphi(x) \equiv 0$ почти всюду при $|x| > b+\varepsilon$; так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\varphi(x)$ равна нулю почти всюду при $|x| > b$, что и требовалось.

Задачи 1. Обозначим через E совокупность всех функций $\psi(\sigma)$, являющихся целыми функциями аргумента $s = \sigma + i\tau$ экспоненциального типа $\leqslant b$ и таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma = 1. \qquad (*)$$

Пусть G — некоторое ограниченное измеримое множество на оси σ. Показать, что

$$\theta(G) \equiv \sup_{\psi \in E} \int_G |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma < 1.$$

Указание. Пользуясь теоремой Палея и Винера, проверить, что функции $\psi(\sigma + i\tau) \in E$ равномерно ограничены в любом круге. Из формулы Коши вывести, что и первые производные функции $\psi(s)$ ограничены в любом круге. В силу теоремы Арцела (гл. 2, § 7, задача 5) совокупность E компактна в любом круге Q. Если имеется последовательность $\psi_\nu \in E$, для которой $\int_G |\psi_\nu(\sigma)|^2\, d\sigma \longrightarrow 1$, то, выбирая из нее подпоследовательность, равномерно сходящуюся в $Q \supset 2G$, получаем для предельной функции $\psi(\sigma)$ равенства

$$\int_G |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma = 1, \qquad \int_{Q-G} |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma = 0, \qquad (*)$$

откуда $\psi(\sigma) \equiv 0$ в $Q - G$, и следовательно, $\psi(\sigma) \equiv 0$, что противоречит (*).

2 (Продолжение). Показать, что для любого множества G конечной меры

$$\theta(G) \leqslant 2b\mu G.$$

Указание. Применить к выражению $\psi(\sigma)$ через $\varphi(x)$ неравенство Коши — Буняковского.

3 (Продолжение). Показать, что результат задачи 1 сохраняется для любого множества G конечной меры (Б. П. Панеях).

Указание. $G = G_1 + G_2$, где G_1 ограничено, $2b\mu G_2 < 1$. Если $\theta(G) = 1$, то, так же как в задаче 1, можно указать последовательность $\psi_\nu(\sigma)$, сходящуюся к нулю равномерно вне G, следовательно, и на G_1 так что $\int_{G_1} |\psi_\nu(\sigma)|^2\, d\sigma \longrightarrow 0$; но тогда $\theta(G_2) = 1$, что противоречит результату задачи 2.

---

[1]) В качестве функции $u_0(x)$ можно, например, взять функцию Эрмита $x^n e^{-x^2}$ (см. § 3, п. 5).

4. Показать, что преобразование Фурье $\psi(s)$ функции $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, равной нулю при $x < 0$, характеризуется условием: $\psi(\sigma + i\tau)$ аналитична при $\tau < 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma + i\tau)|^2 \, d\sigma \leqslant C$ при всех $\tau \leqslant 0$.

Указание. Использовать теорему Планшереля для $\tau < 0$.

4. **Принцип неопределенности в квантовой механике.** В квантовой механике при изучении движения материальной частицы M искомыми величинами являются не координата частицы и ее скорость, как в классической механике, а распределение вероятностей этих величин. Для простоты будем рассматривать одномерный случай. Тогда искомые функции следующие:

1) *Функция положения* $\varphi(x)$. Это — некоторая комплексная функция, определенная на оси $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \, dx = 1; \tag{1}$$

она определяет вероятность пребывания материальной частицы M (в данный момент времени) в интервале (α, β) по формуле

$$\text{Вер}\,\{x \in (\alpha, \beta)\} = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|^2 \, dx.$$

2) *Функция импульса* $\psi(p)$. Эта функция определена на оси $-\infty < p < \infty$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(p)|^2 \, dp = 2\pi. \tag{2}$$

Для импульса частицы (произведения ее массы на скорость) функция $\psi(p)$ определяет вероятность его значения в интервале (γ, δ) по формуле

$$\text{Вер}\,\{p \in (\gamma, \delta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma}^{\delta} |\psi(p)|^2 \, dp.$$

Одна из основных аксиом квантовой механики (мы не будем вдаваться в ее физический смысл) состоит в предположении, что функция импульса есть преобразование Фурье функции положения:

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ipx} \, dx. \tag{3}$$

Зная функцию положения, мы можем написать «наиболее вероятное» значение (математическое ожидание) положения частицы:

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x)|^2 \, dx.$$

Можно считать $\xi=0$; этого всегда можно добиться сдвигом функции φ вдоль оси x. Заметим, что сдвиг вдоль оси x не изменяет величины $|\psi(p)|$, так как для любой $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-h)\, e^{-ipx}\, dx = e^{-iph} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ipx}\, dx. \tag{4}$$

Таким же образом математическое ожидание импульса

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p\, |\psi(p)|^2\, dp \tag{5}$$

мы также можем считать равным нулю.

Оценка разброса величины x дается средним квадратичным отклонением (дисперсией)

$$\delta_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, |\varphi(x)|^2\, dx. \tag{6}$$

Чем меньше δ_x^2, тем больше уверенности, что точка M действительно находится вблизи начала координат. Таким же образом оценка разброса p дается средним квадратичным отклонением

$$\delta_p^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^2\, |\psi(p)|^2\, dp. \tag{7}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(p)$, естественно, предполагаются такими, что существуют интегралы (6) — (7). Тем самым, в силу сказанного в п. 2, функции $\varphi'(x)$, $p'(\sigma)$ существуют и квадратично интегрируемы. Функция $x\varphi(x)\,\overline{\varphi}'(x)$ интегрируема в первой степени, а интегрируемая функция $x\varphi\overline{\varphi}$, имеющая интегрируемую производную $\varphi\overline{\varphi} + x\varphi'\overline{\varphi} + x\varphi\overline{\varphi}'$, равна на бесконечности нулю.

Имеет место неравенство

$$\delta_x^2\, \delta_p^2 \geqslant \frac{1}{4}, \tag{8}$$

которое называется *соотношением неопределенностей*. Оно показывает, что чем точнее известно положение частицы (т. е. чем меньше δ_x), тем менее точно известно значение ее импульса (т. е. тем больше δ_p) и обратно, так что не может быть функций $\varphi(x)$ и $\psi(p)$, дающих одновременно очень точные значения и положения частицы, и ее импульса.

Для доказательства соотношения (8) рассмотрим интеграл

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x\varphi(x) + \varphi'(x)|^2\, dx$$

с вещественным параметром α. Пользуясь формулой $|z|^2 = z\overline{z}$, находим:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x\varphi + \varphi')(\alpha x\overline{\varphi} + \overline{\varphi}')\, dx =$$
$$= \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi|^2\, dx + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\overline{\varphi}' + \varphi'\overline{\varphi})\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'|^2\, dx.$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi|^2 dx = \delta_x^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\bar{\varphi}' + \varphi'\bar{\varphi})\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\bar{\varphi})'\,dx = x\varphi\bar{\varphi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dx = -1,$$

и по теореме Планшереля, поскольку $F|\varphi'| = ip\psi(p)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\psi(p)|^2 dp = \delta_p^2.$$

Итак,

$$I(\alpha) = \alpha^2\delta_x^2 - \alpha + \delta_p^2. \tag{9}$$

Так как по построению $I(\alpha) \geqslant 0$, то квадратный трехчлен (9) не имеет мнимых корней и, следовательно,

$$1 - 4\delta_x^2\,\delta_p^2 \leqslant 0,$$

откуда

$$\delta_x^2\,\delta_p^2 \geqslant \frac{1}{4},$$

что и утверждалось.

§ 7. Преобразования Фурье — Стильтьеса

Формулу преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma} \varphi(x)\,dx \tag{1}$$

можно записать в форме интеграла Стильтьеса

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\,d\Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi$$

— абсолютно непрерывная функция с ограниченным изменением на оси $-\infty < x < \infty$.

Можно рассматривать общие интегралы вида

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\,d\Phi(x), \tag{2}$$

где $\Phi(x)$ — уже произвольная функция с ограниченным изменением на оси $-\infty < x < \infty$. Интеграл вида (2) называется *интегралом Фурье — Стильтьеса.*

Функция $\psi(\sigma)$, определенная интегралом (2), ограничена:

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |d\Phi(x)| = \mathbf{V}_{-\infty}^{\infty}[\Phi].$$

Она также непрерывна; действительно,

$$|\psi(\sigma') - \psi(\sigma'')| = \int_{-A}^{A} [e^{-ix\sigma'} - e^{-ix\sigma''}]\, d\Phi(x) + \\ + \int_{|x| \geqslant A} [e^{-ix\sigma'} - e^{-ix\sigma''}]\, d\Phi(x);$$

второй из интегралов становится как угодно малым при достаточно большом A независимо от σ' и σ'', а первый при выбранном A становится как угодно малым при достаточно малой разности между σ' и σ''.

Но в отличие от интеграла Фурье — Лебега (1), интеграл Фурье — Стильтьеса (2) не стремится, вообще говоря, к нулю при $|\sigma| \to \infty$. Например, если $\Phi(x)$ отвечает массе 1, сосредоточенной в точке x_0, то

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x) = e^{-ix_0\sigma}$$

есть периодическая функция от σ.

Всякая периодическая функция $\psi(\sigma)$, разлагающаяся в ряд Фурье

$$\psi(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\sigma} \tag{3}$$

с абсолютно сходящимся рядом коэффициентов

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

может быть представлена в форме интеграла Фурье — Стильтьеса: для этого нужно производящую функцию взять кусочно-постоянной и совершающей скачок a_n при переходе через точку $x = n$. То же справедливо для более общего класса функций, который получается из (3) заменой показателя $in\sigma$ на $i\lambda_n\sigma$, где λ_n — произвольная последовательность вещественных чисел; эти функции принадлежат к классу так называемых *почти периодических функций.*

Мы продемонстрируем применение интеграла Фурье — Стильтьеса на примере доказательства одной теоремы, имеющей применения в теории вероятностей.

Назовем измеримую функцию $\varphi(\sigma)$ $(-\infty < \sigma < \infty)$ *положительно определенной*, если для любой непрерывной функции $u(x)$ и любых a, b имеет место неравенство

$$\int_a^b \int_a^b \varphi(\sigma - \eta) u(\sigma) \overline{u(\eta)}\, d\sigma\, d\eta \geqslant 0. \tag{4}$$

Примером положительно определенной функции является функция $e^{-i\sigma x}$ с фиксированным значением x; в самом деле,

$$\int_a^b \int_a^b e^{-i(\sigma-\eta)x} u(\sigma) \overline{u(\eta)}\, d\sigma\, d\eta = \int_a^b e^{-i\sigma x} u(\sigma)\, d\sigma \int_a^b e^{i\eta x} \overline{u(\eta)}\, d\eta =$$

$$= \left| \int_a^b e^{-i\sigma x} u(\sigma)\, d\sigma \right|^2 \geqslant 0.$$

Оказывается, что любая непрерывная положительно определенная функция $\varphi(\sigma)$ получается «стильтьесовским комбинированием» функций $e^{-ix\sigma}$; именно имеет место теорема:

Теорема (С. Бохнер — А. Я. Хинчин, 1932). *Каждая непрерывная положительно определенная функция* $\varphi(\sigma)$ *может быть представлена в виде*

$$\varphi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — *ограниченная неубывающая функция.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда положительно определенная функция $\varphi(\sigma)$ имеет, кроме того, непрерывную производную. Полагая в формуле (4) $u(\sigma) = e^{i\xi\sigma}$, $a = 0$, $b = n$, получаем:

$$\int_0^n \int_0^n \varphi(\sigma - \eta) e^{i\xi\sigma} e^{-i\xi\eta}\, d\sigma\, d\eta \geqslant 0,$$

или, заменяя $\sigma - \eta$ на λ,

$$\int_{-n}^{n} \varphi(\lambda) e^{i\lambda\xi} \left(1 - \frac{|\lambda|}{n}\right) d\lambda = f_n(\xi) \geqslant 0. \tag{5}$$

Формулу (5) можно истолковать как формулу преобразования Фурье от функции

$$\Psi_n(\lambda) = \begin{cases} \varphi(\lambda)\left(1 - \frac{|\lambda|}{n}\right) & (|\lambda| \leqslant n), \\ 0 & (|\lambda| > n). \end{cases}$$

Так как функция $\psi(\sigma)$, по предположению, дифференцируема, то $\Psi_n(\lambda)$ — кусочно-гладкая функция и согласно теореме § 2 (см. стр. 357) при каждом λ справедлива формула обращения

$$\Psi_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f_n(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

При этом

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(\xi)\,d\xi=\Psi_n(0)=\psi(0).$$

Введя монотонную функцию

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} f_n(\xi)\,d\xi,$$

мы можем написать интеграл (6) в форме интеграла Стильтьеса

$$\Psi_n(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,d\Phi_n(x). \tag{7}$$

При $n\to\infty$ левая часть стремится, очевидно к пределу $\psi(\lambda)$. Функции $\Phi_n(x)$ образуют последовательность, из которой по теореме Хелли (гл. VI, § 6, п. 4) можно выбрать всюду сходящуюся подпоследовательность; изменяя, если нужно, нумерацию, можно считать, что сама последовательность $\Phi_n(x)$ всюду сходится к некоторой функции $\Phi(x)$, также неубывающей и изменяющейся в тех же границах 0 и $\psi(0)$. Если бы мы применили теперь другую теорему Хелли (гл. VI, § 6, п. 3), обеспечивающую возможность предельного перехода под знаком интеграла Стильтьеса, то мы бы получили, что

$$\psi(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,d\Phi_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,d\Phi(x),$$

и доказательство было бы завершено.

При использовании теоремы Хелли мы должны учесть, что промежуток интегрирования бесконечный и функция $e^{-i\lambda x}$ не является непрерывной в бесконечно удаленных точках. Поэтому в соответствии с замечанием 3 после теоремы Хелли мы должны проверить выполнение условия (*): для любого $\varepsilon>0$ можно указать $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех n

$$\operatorname*{Var}_{|x|\geqslant N}\Phi_n(x)\leqslant\varepsilon.$$

Для этого мы применим следующую лемму:

Лемма. *Пусть задано семейство функций* $\Psi_\alpha(\lambda)$ *вида*

$$\Psi_\alpha(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,d\Phi_\alpha(x),$$

где $\Phi_\alpha(x)$ — *неубывающие функции с ограниченной вариацией. Если семейство* $\Psi_\alpha(\lambda)$ *равностепенно непрерывно при* $\lambda=0$, *т. е. если для каждого* $\varepsilon>0$ *можно найти такое* $\delta>0$, *что для всех* α *при* $|\lambda|<\delta$ *выполняется неравенство*

$$|\Psi_\alpha(\lambda)-\Psi_\alpha(0)|<\varepsilon,$$

то функции $\Phi_\alpha(x)$ *удовлетворяют условию* (*) (*с заменой* n *на* α).

Доказательство леммы. Из условия равностепенной непрерывности, в частности, вытекает, что при $|h|<\delta$

$$\left|\Psi_\alpha(0)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Psi_\alpha(\lambda)\,d\lambda\right|=\frac{1}{2h}\left|\int_{-h}^{h}[\Psi_\alpha(0)-\Psi_\alpha(\lambda)]\,d\lambda\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|\Psi_\alpha(0)-\Psi_\alpha(\lambda)|\,d\lambda<\varepsilon.$$

Далее, имея h, найдем A так, чтобы при $|x|>A$ иметь $\left|\frac{\sin hx}{hx}\right|\leqslant\frac{1}{2}$ $\left(\text{достаточно положить } A=\frac{1}{h}\right)$; тогда мы получим:

$$\varepsilon>\Psi_\alpha(0)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Psi_\alpha(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}d\,\Phi_\alpha(x)-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}e^{i\lambda x}\,d\lambda\right\}d\Phi_\alpha(x)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-\frac{\sin hx}{hx}\right]d\Phi_\alpha(x)\geqslant\int_{|x|\geqslant A}\left[1-\frac{\sin hx}{hx}\right]d\Phi_\alpha(x)\geqslant\frac{1}{2}\int_{|x|\geqslant A}d\Phi_\alpha(x),$$

и условие (*), таким образом, выполнено, что и требовалось.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Мы видим, что нам остается проверить равностепенную непрерывность в точке $\lambda=0$ совокупности функций $\Psi_n(\lambda)$, фигурирующих в равенстве (7). Но каждая из этих функций получается из фиксированной непрерывной функции $\varphi(\lambda)$ умножением на функцию $1-\left(\frac{|\lambda|}{n}\right)$, которая при $n\to\infty$ приближается равномерно к 1. Ясно, что условие равностепенной непрерывности в таком случае выполняется. Тем самым теорема Бохнера — Хинчина у нас доказана, — пока еще для случая, когда функция $\varphi(\sigma)$ дифференцируема.

Пусть теперь положительно определенная функция $\varphi(\sigma)$ только непрерывна. Построим *симметрическое усреднение функции* $\varphi(\sigma)$:

$$\varphi^h(\sigma) \equiv S_h\varphi(\sigma) \equiv \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\sigma+\xi)\,d\xi = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\sigma-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2h}\int_{\sigma-h}^{\sigma+h}\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Очевидно, что функция $\varphi^h(\sigma)$ имеет и непрерывную производную. Проверим, что двойное симметрическое усреднение функции $\varphi(\sigma)$

$$S_hS_h\varphi(\sigma) = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\varphi(\sigma+\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{8}$$

есть снова положительно определенная функция. Действительно,

$$\int\int S_hS_h\varphi(\sigma-\tau)\,u(\sigma)\overline{u(\tau)}\,d\sigma\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{4h^2}\int\int\int\int\varphi(\sigma-\tau+\xi+\eta)\,u(\sigma)\overline{u(\tau)}\,d\sigma\,d\tau\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \frac{1}{4h^2}\int\int\int\int\varphi(\sigma'-\tau')\,u(\sigma'-\xi)\overline{u(\tau'+\eta)}\,d\sigma'\,d\tau'\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \int\int\varphi(\sigma'-\tau')\left\{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u(\sigma'-\xi)\,d\xi\right\}\left\{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\overline{u(\tau'+\eta)}\,d\eta\right\}d\sigma'\,d\tau' =$$
$$= \int\int\varphi(\sigma'-\tau')\,v(\sigma')\overline{v(\tau')}\,d\sigma'\,d\tau' \geqslant 0,$$

где положено

$$v(\sigma) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u(\sigma-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u(\sigma+\eta)\,d\eta.$$

Применяя доказанную теорему для двойного симметрического усреднения $\varphi^{hh}(\sigma) = S_hS_h\varphi(\sigma)$ функции $\varphi(\sigma)$, мы получаем:

$$\varphi^{hh}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\sigma}\,d\Phi_h(x), \tag{9}$$

где $\Phi_h(\sigma)$ — неубывающая функция, изменяющаяся в пределах от 0 до $\varphi^{hh}(0)$. Семейство функций $\varphi^{hh}(\sigma)$ равностепенно непрерывно при $\sigma = 0$; действительно, мы имеем:

$$|\varphi^{hh}(\sigma)-\varphi^{hh}(0)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}|\varphi(\sigma+\xi+\eta)-\varphi(\xi+\eta)|\,d\xi\,d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{|\xi|\leqslant h\\|\eta|\leqslant h}}|\varphi(\sigma+\xi+\eta)-\varphi(\xi+\eta)|,$$

и дело сводится к равномерной непрерывности в окрестности нулевой точки самой функции $\psi(\sigma)$.

Устремим теперь h к 0. Функции $\psi^{hh}(\sigma)$ будут иметь пределом значение $\psi(\sigma)$. Из последовательности $\Phi_h(x)$ можно выбрать подпоследовательность — можно считать, что это сама последовательность $\Phi_h(x)$, — сходящуюся всюду к неубывающей функции $\Phi(x)$, изменяющейся в границах от 0 до $\psi(0)$. Используя снова доказанную выше лемму, мы получаем возможность еще раз применить теорему Хелли на промежутке $-\infty < x < \infty$ и получить таким образом из (9) равенство

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(\sigma). \tag{10}$$

Тем самым теорема Бохнера — Хинчина полностью доказана.

Замечание. Более точный анализ показывает, что требование непрерывности положительно определенной функции в условии теоремы Бохнера — Хинчина излишне. Теорема остается справедливой и в предположении, что положительно определенная функция $\psi(\sigma)$ *измерима*; представление (10) оказывается при этом справедливым почти всюду. Как следствие получается, что всякая измеримая положительно определенная функции может быть преобразована в непрерывную изменением своих значений на множестве меры нуль.

§ 8. Преобразование Фурье в случае нескольких независимых переменных

В задачах математической физики часто приходится иметь дело с преобразованием Фурье функций нескольких переменных. Мы рассмотрим в этом параграфе простейшие факты, относящиеся к этому преобразованию.

Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — интегрируемая функция n переменных $x_1, \ldots, x_n$ во всем n-мерном пространстве R_n. *Преобразованием Фурье функции* $\varphi(x)$ называется функция

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \\ = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} e^{-i(x_1\sigma_1 + \ldots + x_n\sigma_n)} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n \tag{1}$$

или в символической записи

$$\psi(\sigma) = \int_{R_n} e^{-i(x,\sigma)} \varphi(x)\, dx.$$

Если $\varphi(x)$ есть произведение функций $\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)$, интегрируемых каждая по своему переменному, то n-кратный интеграл (1) приводится к произведению n однократных интегралов:

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x_1)e^{-ix_1\sigma_1}dx_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x_n)e^{-ix_n\sigma_n}dx_n=\psi_1(\sigma_1)\ldots\psi_n(\sigma_n),$$

где $\psi_k(\sigma_k)$ есть обычное преобразование Фурье функции $\varphi_k(x_k)$.

В общем случае многократный интеграл (1) по теореме Фубини можно записать в форме повторного интеграла

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\ldots\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\ldots,x_n)e^{-ix_1\sigma_1}dx_1\right\}e^{-ix_2\sigma_2}dx_2\right\}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\right\}e^{-ix_n\sigma_n}dx_n.$$

Каждая из фигурных скобок определяет преобразование Фурье по одной координате при фиксированных остальных. Обращая последовательно каждую из этих операций, формально получаем:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\ldots\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)e^{ix_n\sigma_n}d\sigma_n\right)\right\}\times$$

$$\times e^{ix_{n-1}\sigma_{n-1}}d\sigma_{n-1}\ldots\Big\}e^{ix_1\sigma_1}d\sigma_1$$

или в форме n-кратного интеграла

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\ldots\int\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)e^{i(x,\sigma)}d\sigma_1\ldots d\sigma_n. \quad (2)$$

Так как функция $\psi(\sigma)$, вообще говоря, не является абсолютно интегрируемой в R_n, то формула (2) может иметь смысл только при указании способа вычисления интеграла в правой части. Мы ниже укажем несколько возможных интерпретаций интеграла (2).

Теорема. *Предположим, что функция* $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *удовлетворяет условиям*:

$$|\varphi(x_1+t_1,x_2,\ldots,x_n)-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\leqslant C|t_1|^\alpha, \quad (3_1)$$

$$|\varphi(x_1,x_2+t_2,x_3,\ldots,x_n)-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\leqslant C(x_1)|t_2|^\alpha, \quad (3_2)$$

. . . .

$$|\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n+t_n)-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\leqslant$$

$$\leqslant C(x_1,\ldots,x_{n-1})|t_n|^\alpha, \quad (3_n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C(x_1)dx_1<\infty,\ \ldots,\ \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}C(x_1,\ldots,x_{n-1})dx_1\ldots dx_{n-1}<\infty$$

$$(0<\alpha\leqslant 1).$$

Тогда формула (2) *справедлива, если ее понимать как результат* *последовательных переходов к пределу при* $N_n \to \infty, \ldots, N_1 \to \infty$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{N_1\to\infty} \int_{-N_1}^{N_1} \left\{ \ldots \lim_{N_{n-1}\to\infty} \int_{-N_{n-1}}^{N_{n-1}} \left\{ \lim_{N_n\to\infty} \int_{-N_n}^{N_n} \psi(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, e^{ix_n\sigma_n} d\sigma_n \right\} e^{ix_{n-1}\sigma_{n-1}} d\sigma_{n-1} \ldots \right\} e^{ix_1\sigma_1} d\sigma_1. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-ix_1\sigma_1} dx_1.$$

В силу теоремы Фубини функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ суммируема по x_1 почти при всех $x_2, \ldots, x_n$.

Из условия (3_1) и теоремы п. 2 § 2 вытекает, что справедлива формула обращения

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{N_1\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_1}^{N_1} \varphi_1(\sigma_1, x_2 \ldots, x_n) e^{ix_1\sigma_1} d\sigma_1.$$

Функция $\varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n)$ почти при всех $x_3, \ldots, x_n$ суммируема по x_2 и удовлетворяет условию

$$|\varphi_1(\sigma_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n) - \varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)| dx_1 \leqslant$$
$$\leqslant |t_2|^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} C(x_1) dx_1 \leqslant C_2 |t_2|^\alpha,$$

вытекающему из (3_2). Поэтому для функции

$$\varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-ix_2\sigma_2} dx_2$$

справедлива формула обращения

$$\varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{N_2\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} \varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, x_2, \ldots, x_n) e^{ix_2\sigma_2} d\sigma_2,$$

откуда

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \lim_{N_1\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_1}^{N_1} \left\{ \lim_{N_2\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} \varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n) e^{ix_2\sigma_2} d\sigma_2 \right\} e^{ix_1\sigma} d\sigma_1.$$

Продолжая таким образом далее, в конце концов придем к искомой формуле (4).

Условия теоремы 1 выполняются, например, если у интегрируемой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ существуют частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$, первая из которых ограничена постоянной, вторая — интегрируемой функцией от x_1, третья — интегрируемой функцией от x_1 и x_2 и т. д.

Существуют и другие способы сведения n-кратного интеграла к повторным. Рассмотрим здесь выражение преобразования Фурье в сферических координатах. В сферических координатах интегрирование ведется вначале при фиксированном $r > 0$ по сфере радиуса r с центром в начале координат и затем по r от 0 до ∞. Обозначим через $d\omega$ элемент единичной сферы Ω_1; тогда элемент сферы Ω_r радиуса r будет иметь вид $r^{n-1}\,d\omega$. Выражение (1) преобразуется к виду

$$\psi(\sigma) = \int_0^\infty \left\{ \int_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta}\,\varphi(r;\,\omega)\,d\omega \right\} r^{n-1}\,dr.$$

Здесь ω означает направление из начала координат, или, если угодно, точку единичной сферы; $\varphi(r;\,\omega)$ — значение функции $\varphi(x)$ в точке пересечения луча ω и сферы Ω_r; ρ есть $|\sigma|$, а θ — угол между направлениями векторов x и σ.

Особенно простой вид приобретает эта формула в случае, когда функция φ зависит только от r, т. е. является сферически симметричной. В этом случае $\varphi(r,\,\omega) = \varphi(r)$ и мы имеем:

$$\psi(\sigma) = \int_0^\infty \left\{ \int_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta}\,d\omega \right\} \varphi(r)\,r^{n-1}\,dr. \tag{5}$$

Внутренний интеграл можно вычислить до конца. Рассмотрим сначала случай $n = 3$; тогда, принимая направление вектора σ за полярную ось, будем иметь:

$$d\omega = \sin\theta\,d\theta\,d\alpha,$$

где α — полярный угол в плоскости, ортогональной вектору σ; в результате получим:

$$\int_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\alpha = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta\,d\theta \right\} d\alpha = \frac{2\pi}{i\rho r}\,e^{-i\rho r\cos\theta}\Big|_0^\pi = 4\pi\,\frac{\sin\rho r}{\rho r}$$

и в итоге

$$\psi(\sigma) = \frac{4\pi}{\rho}\int_0^\infty \varphi(r)\,r\sin\rho r\,dr.$$

В общем случае, при произвольном n, внутренний интеграл в (5) выражается через бесселевы функции[1])

$$\int_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta}\,d\omega = (2\pi)^{\frac{n}{2}-1}(\rho r)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) \qquad (6)$$

и поэтому полностью преобразование Фурье сферически симметричной функции записывается в виде

$$\psi(\sigma) = \left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}-1}\int_0^\infty \varphi(r) J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) r^{\frac{n}{2}}\,dr. \qquad (7)$$

Из формулы (7) можно сделать несколько неожиданный вывод: преобразование Фурье сферически симметричной функции в n-мерном пространстве при $n \geqslant 3$ есть дифференцируемая функция (для $\rho \neq 0$), и притом порядок ее дифференцируемости возрастает вместе с n. Действительно, функция $\varphi(r)$ является интегрируемой в n-мерном пространстве, если существует интеграл

$$\int_0^\infty |\varphi(r)|\, r^{n-1}\,dr.$$

В интеграле (7) каждое формальное дифференцирование по ρ приводит к новому множителю r под знаком интеграла: так как при больших $r\,|J_{n/2-1}(\rho r)| \leqslant Cr^{-1/2}$, то умножение на r под знаком интеграла допустимо по крайней мере до тех пор, пока общий показатель при r остается не превосходящим $n-\frac{1}{2}$, т. е. по крайней мере $\left[n-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ раз. Следовательно, функция $\psi(\sigma)$ имеет производные (по ρ) по крайней мере до порядка $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. При $n=3$ функция $\psi(\sigma)$ дифференцируема, по крайней мере один раз.

Рассмотрим формулу обращения интеграла Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R_n}\cdots\int \psi(\sigma)\, e^{i(\sigma, x)}\,d\sigma$$

и попробуем придать ей смысл, интегрируя сначала по шару $|\sigma| \leqslant R$ и затем устремляя R к ∞. Положим:

$$\varphi_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\sigma|\leqslant R}\cdots\int \psi(\sigma)\, e^{i(\sigma, x)}\,d\sigma.$$

Подставляя выражение $\psi(\sigma)$ из (1) и изменяя порядок интегрирования по x и σ (что возможно в силу абсолютной и равномерной по σ сходимости n-кратного интеграла (1)), получим:

$$\varphi_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R_n}\varphi(\xi)\left\{\int_{|\sigma|\leqslant R} e^{i(\xi - x,\, \sigma)}\,d\sigma\right\}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R_n}\varphi(\xi)\, H_R(\xi)\,d\xi.$$

[1]) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1 Гостехиздат, 1951, гл. VII.

Внутренний интеграл преобразуем к сферическим координатам

$$H_R(\xi) = \int\limits_{|\sigma| \leq R} e^{i(\xi - x, \sigma)} d\sigma = \int\limits_0^R \rho^{n-1} \left\{ \int\limits_{\Omega_\rho} e^{i|\xi - x|\rho\cos\theta} d\omega \right\} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^R \rho^{n-1} (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} (\rho r)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)\, d\rho =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} r^{1-\frac{n}{2}} \int\limits_0^R \rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)\, d\rho \qquad (r = |x - \xi|)$$

в соответствии с формулой (6). Далее, заменяя ρr на τ, получим:

$$H_R(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} r^{-n} \int\limits_0^{Rr} \tau^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\tau)\, d\tau.$$

Согласно одной из формул теории бесселевых функций

$$\tau^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\tau) = \frac{d}{d\tau} (\tau^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\tau)),$$

и, следовательно,

$$H_R(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} r^{-n} (Rr)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(Rr) = (2\pi)^{\frac{n}{2}-1} |\xi - x|^{-\frac{n}{2}} R^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(Rr).$$

Для величины $\varphi_R(x)$ мы получаем выражение

$$\varphi_R(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}-1} R^{\frac{n}{2}} \int \varphi(\xi) |\xi - x|^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R|\xi - x|)\, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}-1} R^{\frac{n}{2}} \int \varphi(\xi + x) |\xi|^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R|\xi|)\, d\xi. \tag{8}$$

В последнем интеграле по ξ произведем сначала интегрирование по сфере $|\xi| = r$. Для этого обозначим:

$$\Phi(r, x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega} \varphi(x + \omega r)\, d\omega. \tag{9}$$

Эта величина есть среднее значение функции φ на сфере радиуса r с центром в точке x. Интеграл (8) теперь приводится к виду

$$\varphi_R(x) = CR^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty \Phi(r, x) r^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}}(Rr)\, dr = C \int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{\tau}{R}, x\right) J_{\frac{n}{2}}(\tau) \tau^{\frac{n}{2}-1} d\tau.$$

Положим:

$$f(\tau)=\begin{cases}\Phi(x,\tau)\,\tau^{\frac{n}{2}-1} & \text{при } n \text{ четном},\\ \Phi(x,\tau)\,\tau^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} & \text{при } n \text{ нечетном};\end{cases}$$

тогда мы получим, обозначая через m целое число $\frac{n}{2}-1$ или $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$,

$$\varphi_R(x)=CR^m\int\limits_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^*(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

где

$$J_m^*(\tau)=\begin{cases}J_{\frac{n}{2}}(\tau) & \text{при } n \text{ четном},\\ \dfrac{J_{\frac{n}{2}}(\tau)}{\sqrt{\tau}} & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Бесселева функция $J_{\frac{n}{2}}(\tau)$, как известно, ограничена при $\tau\to 0$, а на бесконечности имеет вид

$$J_{\frac{n}{2}}(\tau)=a_0\frac{e^{i\frac{n}{2}\tau}}{\sqrt{\tau}}+H(\tau),$$

где $H(\tau)$ абсолютно интегрируема. Отсюда следует, что $J_{\frac{n}{2}}(\tau)$ обладает конечным интегралом на $(0, \infty)$ (условно сходящимся при $\tau\to\infty$). Положим:

$$J^1_{\frac{n}{2}}(x)=\int\limits_x^\infty J_{\frac{n}{2}}(\tau)\,d\tau.$$

Асимптотика функции $J^1_{\frac{n}{2}}(x)$ при $x\to\infty$ такова же, как и у $J_{\frac{n}{2}}(x)$. Действительно, при любом $r>0$ интегрированием по частям находим:

$$\int\limits_x^\infty\frac{e^{ia\tau}}{\tau^r}\,d\tau=\frac{e^{iar}}{ia\tau^r}\Bigg|_x^\infty-\int\limits_x^\infty\frac{re^{ia\tau}\,d\tau}{ia\tau^{r+1}}=-\frac{e^{iax}}{iax^r}+\theta\frac{C}{x^{r+1}}\;(|\theta|\leqslant 1),$$

что обеспечивает абсолютную интегрируемость второго слагаемого при $x\to\infty$. Ограниченность $J^1_{\frac{n}{2}}(x)$ при $x\to 0$ имеет место в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty J_{\frac{n}{2}}(x)\,dx$. Можно построить функции

$$J^2_{\frac{n}{2}}(x)=\int\limits_x^\infty J^1_{\frac{n}{2}}(\tau)\,d\tau,\quad J^3_{\frac{n}{2}}(x)=\int\limits_x^\infty J^2_{\frac{n}{2}}(\tau)\,d\tau,\;\ldots;$$

все они обладают теми же асимптотическими свойствами, что $J_{\frac{n}{2}}(x)$. То же относится к функции $J_m^*(x)$.

После этих предварительных замечаний сформулируем теорему.

Теорема (С. Бохнер, 1932). *Если функция* $f(\tau)=\tau^m\Phi(\tau, x)$ (см. (9)) *ограничена, непрерывна и абсолютно интегрируема* (*от* 0 до ∞) *и имеет ограниченное изменение вместе с производными до порядка m, то при каждом x*

$$\varphi(x)=\lim_{R\to\infty}\varphi_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|\sigma|\leqslant R}\psi(\sigma)e^{i(\sigma, x)}\,d\sigma. \tag{11}$$

Доказательство. Интегрируя по частям соотношение (10), получаем:

$$\int_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^*(\tau)\,d\tau=f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*1}(\tau)\Big|_0^\infty-\frac{1}{R}\int_0^\infty f'\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*1}(\tau)\,d\tau.$$

Так как функция $f(\tau)$ имеет при $\tau=0$ нуль порядка не ниже m и ограничена при $x\longrightarrow\infty$, то внеинтегральный член обращается в нуль. Повторяя интегрирование по частям, получим:

$$(-1)^m R^m\int_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^*(\tau)\,d\tau=\int_0^\infty f^{*(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*m}(\tau)\,d\tau.$$

Разобьем полученный интеграл на две части:

$$\int_0^\infty=\int_0^N+\int_N^\infty.$$

При $R\longrightarrow\infty$ на основании общих теорем о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int_0^N f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*m}(\tau)\,d\tau\longrightarrow\int_0^N f^{(m)}(0)\,J_m^{*(m)}(\tau)\,d\tau=C_m f^{(m)}(0).$$

Второй из интегралов допускает оценку

$$\left|\int_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*m}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\left|C\int_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right|+\left|\int_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)H(\tau)\,d\tau\right|,$$

где $H(\tau)$ — абсолютно интегрируемая функция, $p=\frac{1}{2}$ или 1. Так как $f^{(m)}(x)$ имеет ограниченное изменение, то можно записать:

$$f^{(m)}(x)=A(x)-B(x),$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — неотрицательные ограниченные неубывающие функции. Поэтому

$$\left|\int_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right| \leqslant \left|\int_N^\infty A\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right| + \left|\int_N^\infty B\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant A\left(\frac{N}{R}\right)\frac{1}{N^p 2\pi a} + B\left(\frac{N}{R}\right)\frac{1}{N^p 2\pi a} \longrightarrow 0$$

при $N \to \infty$ независимо от значения R. Отсюда следует, что

$$R^m \int_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right) j_m^*(\tau)\,d\tau \longrightarrow f^{(m)}(0)\,C_m.$$

Итак

$$\lim \varphi_R(x) = f^{(m)}(0)\,C'_m = \varphi(x)\,C''_m \tag{12}$$

с некоторой постоянной C''_m. Но так как для некоторых функций, например e^{-x^2}, соотношение (12) верно с $C''_m = 1$, то, значит, для всех $\varphi(x)$ постоянная C''_m равна единице. Теорема доказана.

Замечание. Условия этой теоремы выполнены, например, если предположить, что сама функция $\varphi(x)$ имеет производные до порядка $m = \left[\frac{n}{2} - 1\right]$, абсолютно интегрируемые по всему пространству. Это следует непосредственно из формулы (9), если учесть, что существуют интегралы

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega_n}\left\{\int_\Omega \frac{\partial^k \varphi(x+\omega r)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\,d\omega\right\} r^{n-1}\,dr.$$

Рассмотрим теперь вопрос о суммируемости n-кратного интеграла Фурье методом средних арифметических. Для этого от выражения

$$\varphi_\rho(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\rho}^{\rho}\ldots\int_{-\rho}^{\rho}\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\,e^{i(x,\sigma)}\,d\sigma =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\ldots\int\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\left\{\int\ldots\int e^{i(x-\xi,\sigma)}\,d\sigma\right\}d\xi =$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\int\ldots\int\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\prod\frac{\sin(x_j-\xi_j)}{x_j-\xi_j}\,d\xi$$

перейдем к среднему на интервале $0 \leqslant \rho \leqslant R$:

$$\sigma_R(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{R^n}\int_0^R \varphi_\rho(x_1, \ldots, x_n)\,d\rho =$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\frac{1}{R^n}\int\varphi(x+t)\prod_{j=1}^n\frac{\sin^2 R\frac{t_j}{2}}{t_j^2}\,dt_1, \ldots, dt_n.$$

Ядро Фейера

$$\Phi(R, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \frac{R}{2} t_j}{t_j^2}$$

есть произведение n одномерных ядер Фейера вида $\dfrac{\sin^2 \frac{R}{2} t}{t^2}$. Оно обладает следующими свойствами:

а) $\Phi(R, t) \geqslant 0$;

б) $\int \ldots \int \Phi(R, t)\, dt = 1$;

в) $\int\limits_{|t| \geqslant \delta} \ldots \int \Phi(R, t)\, dt \to 0$, когда $R \to \infty$.

Последнее эквивалентно предельному соотношению

$$\int\limits_{\substack{|t_j| \leqslant \delta_j \\ j=1, 2, \ldots, n}} \Phi(R, t)\, dt = \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{|t_j| \leqslant \delta_j} \frac{\sin^2 \frac{Rt_j}{2}}{t_j^2}\, dt_j \to 1,$$

а это последнее имеет место в силу выполнения данного свойства для каждого из ядер от одного переменного.

Из свойств а) — в), так же как и для одного переменного, следует, что

$$\varphi_R(x) \to \varphi(x), \tag{13}$$

если функция $\varphi(x)$ непрерывна.

Более общим образом: если $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит некоторому нормированному пространству $E \in L_1(R)$ и непрерывна относительно сдвига в этом пространстве, т. е.

$$\lim_{t \to 0} \| \varphi(x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n) - \varphi(x_1, \ldots, x_n) \| = 0,$$

то соотношение (3) имеет место по норме пространства:

$$\| \varphi(x) - \varphi_R(x) \| \to 0.$$

Эта последняя теорема, как и в случае одного переменного, в применении к пространству всех интегрируемых функций приводит к теореме единственности преобразования Фурье: *если у двух интегрируемых функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ преобразования Фурье $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ тождественно совпадают, то $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают почти всюду.*

Можно и для случая n независимых переменных определить класс S (§ 3); он состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, для которых при любых $k_1, \ldots, k_n, q_1, \ldots, q_n$

величины

$$\left| x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \frac{\partial^{q_1+\dots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} + \dots + dx_n^{q_n}} \right|$$

ограничены во всем пространстве. Этот класс, как и в случае одного переменного, после преобразования Фурье переходит в себя.

Наконец, на случай n переменных переносится и вся L_2-теория (§ 6): если функция $\varphi(x)$ интегрируема в квадрате по R_n, то ее преобразование Фурье, определенное по формуле

$$\psi(\sigma) = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \dots \int_{-N}^{N} \varphi(x) e^{-i(x,\sigma)} dx$$

(предельный переход по метрике пространства квадратично интегрируемых функций от σ), существует, принадлежит L_2 и

$$\int \dots \int |\psi(\sigma)|^2 d\sigma = (2\pi)^n \int \dots \int |\varphi(x)|^2 dx.$$

Имеет место также аналог теоремы Палея и Винера, а также теоремы Бохнера—Хинчина о представлении положительно определенных функций (§ 7).

Задачи. 1. Доказать, что преобразование Фурье от функции

$$e^{-\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k}$$

с положительно определенной квадратичной формой в показателе равно

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{D}} e^{\frac{D(\sigma)}{4D}},$$

где

$$D = \det \| a_{jk} \|, \quad D(\sigma) = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Указание. Преобразовать квадратичную форму ортогональным преобразованием к каноническому виду.

2. Найти преобразование Фурье от функции e^{-ar} $\left(r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\right)$.

Отв.

$$F(e^{-ar}) = \frac{2^n \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(\sqrt{a^2+\rho^2})^{\frac{n+1}{2}}} \qquad \left(\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}\right).$$

Заключительное замечание. Ряды и интегралы Фурье как средство решения задач математической физики ведут свое начало от работ Ж.-Б. Фурье (франц. математик, 1768—1830), систематизированных в книге «Аналитическая теория тепла» (1822). Преобразование Лапласа применялось еще Эйлером (1737) для решения дифференциальных уравнений; П.-С. Лаплас (франц. математик, астроном и физик, 1749—1827) развил это преобразование и широко использовал в книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812). Преобразования Фурье и Лапласа являются одним из основных средств математической физики XIX и XX вв. Проблема представимости произвольных функций рядом Фурье, над которой работали крупные математики XIX—XX вв., в большой мере способствовала возникновению теории функций действительного переменного. Интеграл Лебега и связанное с ним равенство $F[L_2(-\infty, \infty)] = L_2(-\infty, \infty)$ сделали преобразование Фурье необходимым и для построения основных концепций теоретической физики (квантовая механика). В тридцатых годах нашего века в теории интеграла Фурье были сделаны новые крупные открытия, в частности, доказаны теорема Палея — Винера (§ 6, п. 3) и теорема Бохнера—Хинчина (§ 7). В современных исследованиях аппарат преобразований Фурье развит и для растущих функций, что, в частности, позволило дать подход к разрешению основных проблем общей теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Рекомендуемая литература: А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГТТИ, 1939; Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948; Б. ван дер Поль и Х. Бреннер, Операционное исчисление, ИЛ, 1952; Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, Гостехиздат, 1949; И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 1—3, Физматгиз, 1958 (2-е издание, вып. 1 — 1960), И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 4, Физматгиз, 1961.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Еще о множествах

Понятия и предложения, которые составили главу I нашей книги, называют иногда «наивной теорией множеств». Дело в том, что уже на ранней стадии развития теории множеств в ней были обнаружены парадоксы и противоречия, которые показывали, что теория множеств не может развиваться без четкой аксиоматики и правил вывода. Особенно много сомнений было высказано в свое время в связи с так называемой «аксиомой выбора», или эквивалентной ей леммой Цорна (см. ниже). Этот вопрос приобрел большую актуальность еще потому, что аксиома выбора оказалась необходимой для развития высших разделов самого анализа и других ветвей математики. Начиная с двадцатых годов, было предложено несколько систем теории множеств с аксиомами и правилами вывода, предохраняющими от классических парадоксов; к сожалению, ни для одной из этих систем не было доказано внутренней непротиворечивости. К. Гёдель показал (1938), что в одну из них, называемую «системой Неймана — Бернайса», присоединение аксиомы выбора не может внести противоречия, если сама эта система (без аксиомы выбора) является непротиворечивой. С другой стороны, Спеккер (1933) показал, что аксиома выбора не имеет места в другой системе, «системе Куайна», допускающей бо́льшую свободу в обращении с множествами. Наши дальнейшие построения будут относиться к множествам в смысле Неймана—Бернайса; мы не приводим здесь соответствующей аксиоматики, и читатель должен будет поверить нам, что эти построения выполнены в пределах названной системы.

Определение. Некоторое множество A называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов, называемых *сравнимыми*, определено *соотношение сравнения* $\leqslant$ (меньше или равно), причем выполнены следующие условия:

1) $x \leqslant x$ для каждого $x \in A$;
2) если $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, то $x = y$;
3) если $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Каждое множество A можно считать частично упорядоченным, если считать, что соотношение сравнения $x \leqslant y$ определено только при $y = x$. Это — тривиальная частичная упорядоченность, которую естественнее было бы называть неупорядоченностью. Противоположный случай будет иметь место, если любые два элемента x, y множества A сравнимы, так что всегда выполняется соотношение $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. В этом случае множество A называют просто *упорядоченным* или *линейно упорядоченным*.

Примеры. 1. Множество целых чисел линейно упорядочено при обычном определении знака $\leqslant$. Таково же множество вещественных чисел.

2. Множество точек плоскости (x, y) частично упорядочено, если считать, что $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если $y_1 = y_2$, $x_1 \leqslant x_2$.

3. Совокупность A, B ... подмножеств данного множества E частично упорядочена, если $A \leqslant B$ означает включение $A \subset B$.

Каждое подмножество частично упорядоченного множества также является частично упорядоченным с тем же отношением сравнения. При этом в частично упорядоченном множестве, вообще говоря, можно выделять и линейно упорядоченные подмножества, как в примере 2 подмножество точек (x, y), расположенное на одной горизонтальной прямой. Назовем линейно упорядоченное подмножество B частично упорядоченного подмножества A *максимальным*, если не существует более широкого линейно упорядоченного подмножества $B_1 \supset B$. Так, в частично упорядоченном множестве всех точек плоскости (пример 2) множество всех точек любой горизонтальной прямой является максимальным линейно упорядоченным подмножеством.

В дальнейшем существенную роль будет играть следующая аксиома.

Аксиома (Цорн, 1935). *Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество.*

Введем еще два важных понятия.

Пусть имеется частично упорядоченное множество A и его подмножество B. Множество B называется *ограниченным* в A, если существует элемент $b_0 \in A$ такой, что $b \leqslant b_0$ при всех $b \in B$; всякий элемент $b_0 \in A$, удовлетворяющий этому условию, называется *верхней границей* множества B. Элемент x частично упорядоченного множества A называется *максимальным*, если не существует элемента $y \neq x$ большего, чем x.

В тривиальной частичной упорядоченности, о которой шла речь выше, каждый элемент x является максимальным. С другой стороны, частично упорядоченное множество может вовсе не иметь максимальных элементов (как множество целых чисел).

Следующая теорема дает достаточное условие существования максимальных элементов в данном частично упорядоченном множестве:

Теорема 1. (Цорн). *Если каждое линейно упорядоченное подмножество B частично упорядоченного множества A ограничено, то A содержит максимальный элемент.*

Доказательство. Пусть B_0 — максимальное линейно упорядоченное подмножество множества A; в силу аксиомы Цорна таковое существует. Пусть, далее, b_0 есть верхняя граница множества B_0. Мы утверждаем, что b_0 есть максимальный элемент. Действительно, если бы существовал элемент $a_0 \in A$ бóльший, чем b_0, то множество $B_0 + a_0$ было бы снова линейно упорядоченным и более широким, чем B_0, что противоречило бы максимальности B_0.

На теореме 1 основано доказательство весьма важной в теории множеств теоремы, носящей название *теоремы выбора*. Коротко говоря, эта теорема утверждает, что если задана система множеств $\{A_\alpha\}$, то существует множество Z, содержащее ровно по одной точке из каждого из множеств A_α.

Теорема 2. (теорема выбора). *Пусть каждому индексу α из некоторой совокупности Λ отнесено множество A_α. Тогда существует множество элементов a_α такое, что при каждом фиксированном α элемент a_α принадлежит множеству A_α, и при этом индекс α пробегает все Λ.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ всех функций x_α, определенных на подмножествах множества Λ и принимающих значения в множествах A_α. Каждый фиксированный элемент y_α множества A_α определяет одну из таких функций, определенную только при одном значении α. Таким образом, $\mathfrak{A}$ не пусто. Между функциями x_α можно установить отношение сравнения, считая $x_\alpha \leqslant y_\alpha$, если функция y_α определена во всяком случае для тех же значений α, что и функция x_α (и, может быть, для иных значений α), и на области определения функции x_α мы имеем $y_\alpha = x_\alpha$. Рассмотрим любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$. Пусть Λ_0 — объединение всех подмножеств множества Λ, на которых заданы функции $x_\alpha \in \mathfrak{A}_0$. В каждой точке $\alpha_0 \in \Lambda_0$ определены некоторые из функций $x_\alpha \in \mathfrak{A}_0$, причем из сравнимости этих функций вытекает, что все они принимают при $\alpha=\alpha_0$ одно и то же значение x_{α_0}. Это единственным образом определяемое значение задает на Λ_0 однозначную функцию y_α. Ясно, что она сравнима со всеми функциями $x_\alpha \in \mathfrak{A}_0$, и именно $x_\alpha \leqslant y_\alpha$. Мы видим, что линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{A}_0$ ограничено в $\mathfrak{A}$. По теореме 1 в $\mathfrak{A}$ имеется максимальный элемент a_α. Мы утверждаем, что функция a_α определена на всем множестве Λ. Действительно, если бы элемент $\alpha_0 \in \Lambda$ не входил в ее область определения, мы с помощью какого-нибудь элемента $y_0 \in A_{\alpha_0}$ могли бы расширить ее область определения, добавив значение y_0 в точке α_0, и a_α не была бы в $\mathfrak{A}$ максимальным элементом. Таким образом, a_α есть искомая функция.

На теореме выбора, явно или неявно, основаны многие построения анализа. Например, доказательство существования неизмеримого множества (стр. 161) фактически требует применения этой теоремы. Но и в более элементарных рассуждениях можно обнаружить использование теоремы выбора. Рассмотрим, например, доказательство эквивалентности двух известных определений непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 метрического пространства («ε — δ-определение» и «lim-определение»). Обычное сведение второго определения к первому делается «от противного»: предполагается, что первое определение не выполнено; тогда при некотором $\varepsilon > 0$, придавая числу δ последовательно значения $\delta_n \to 0$ и выбирая в соответствующей δ_n-окрестности точки x_0 точку x_n так, чтобы иметь $|f(x_0) - f(x_n)| > \varepsilon$, получаем противоречие со вторым определением. Мы видим, что по пути нам фактически пришлось использовать возможность произвольного выбора.

Теорема выбора была задолго до Цорна сформулирована Р. Цермело (1904) в форме аксиомы. Цермело вывел из «аксиомы выбора» теорему — на первый взгляд несколько парадоксальную — о том, что каждое множество может быть «вполне упорядочено». Для выяснения смысла этого результата сравним порядковые свойства трех линейно упорядоченных множеств: множества A_1 всех вещественных чисел, множества A_2 всех вещественных неотрицательных чисел и множества A_3 всех натуральных чисел. Множество A_1 не имеет первого (наименьшего) элемента. Множество A_2 имеет первый элемент 0, но не имеет непосредственно следующего. Множество A_3 имеет первый элемент 1, имеет непосредственно следующий за ним — 2 и т. д.

Термин «непосредственно следующий» можно заменить более определенным «наименьший из всех следующих». Мы называем линейно упорядоченное множество A *вполне упорядоченным*, если у каждого непустого подмножества $C \subset A$ есть наименьший элемент. Обозначим наименьший элемент вполне упорядоченного множества A через 1, непосредственно следующий за ним — через 2, далее — 3, 4 и т. д. Если множество A не является конечным, то этот процесс приведет нас к построению счетного подмножества $B=(1,\ 2, \ldots,\ n, \ldots)$. Возможно, что B не исчерпывает всего A, и тогда есть элемент, непосредственно следующий за B; мы обозначим его через ω. Непосредственно следующий элемент за $B+\omega$ мы обозначим через $\omega+1$; следующие элементы естественно обозначить $\omega+2$, $\omega+3$, ... Далее появится элемент $\omega+\omega=2\omega$, $3\omega, \ldots, \omega^2=\omega\cdot\omega$ и т. д. Таким образом, определяется некоторая каноническая система нумерации элементов вполне упорядоченного множества. Но в пределах этой нумерации укладывается каждый раз только конечное или счетное подмножество, и трудно представить себе несчетное вполне упорядоченное множество. Теперь мы можем оценить эффектную формулировку теоремы Цермело:

В каждое множество A можно внести соотношение сравнения $\leqslant$ так, что оно окажется при этом вполне упорядоченным.

Наметим вывод теоремы Цермело из теоремы Цорна.

Пусть дано произвольное множество A. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ тех подмножеств A, которые могут быть вполне упорядочены. При этом, если данное подмножество $B \subset A$ может быть вполне упорядочено несколькими способами, оно входит в совокупность $\mathfrak{A}$ столько раз, сколько имеется способов его полного упорядочения. Совокупность $\mathfrak{A}$ не пуста, она содержит, например, все одноэлементные подмножества множества A. В совокупность $\mathfrak{A}$ введем частичную упорядоченность, считая, что $B_1 \leqslant B_2$, если $B_1 \subset B_2$ соотношение порядка на B_1 то же, что и на B_2, и все элементы $B_2 - B_1$ больше, чем любой элемент B_1 (так что B_1 является, так сказать, началом B_2). Проверим, что выполнено условие теоремы Цорна. Пусть имеется линейно упорядоченная система $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$. По предположению для всех элементов, входящих в множества системы $\mathfrak{A}_0$, имеется единое полное упорядочение. Оно будет иметься тем самым и на объединении B всех подмножеств, входящих в $\mathfrak{A}_0$. Это объединение B вместе с получившимся на нем отношением сравнения входит в $\mathfrak{A}_0$, и тем самым $\mathfrak{A}_0$ ограничено. По теореме Цорна $\mathfrak{A}$ содержит максимальный элемент A_0. Элемент A_0 есть некоторое подмножество множества A, допускающее полное упорядочение. Мы утверждаем, что $A_0 = A$; действительно, если бы имелся элемент $z \in A$, не входящий в A_0, то мы рассмотрели бы подмножество $A_0 + z$ и считали бы z следующим за всеми элементами A_0; но тогда A_0 не было бы максимальным вполне упорядоченным подмножеством. Таким образом, $A_0 = A$, и теорема доказана.

§ 2. Теоремы о линейных функционалах

Следующая теорема позволяет строить в линейных пространствах разнообразные линейные функционалы. «Комплексная» ее формулировка идет от Г. Хана (1927) (хотя сам Хан рассматривал только вещественные пространства), «вещественная», налагающая на функционал $p(x)$ меньше условий,— от С. Банаха (1929).

Теорема (Хан — Банах).

а) *Пусть в линейном вещественном пространстве E задан функционал, $p(x)$, удовлетворяющий условиям*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ при } \lambda \geqslant 0. \tag{1}$$

Пусть, далее, на подпространстве $E_0 \subset E$ задан линейный функционал $f(x)$ удовлетворяющий неравенству

$$f(x) \leqslant p(x). \tag{2}$$

Утверждается, что в пространстве E существует линейный функционал $f^*(x)$, совпадающий на E_0 с $f(x)$ и всюду в E удовлетворяющий неравенству

$$f^*(x) \leqslant p(x). \tag{3}$$

Иными словами, функционал $f(x)$ может быть продолжен с E_0 на все E с сохранением неравенства (2).

б) *Пусть в линейном комплексном пространстве E задан функционал $p(x)$, удовлетворяющий условиям*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \text{ при любом комплексном } \lambda. \tag{1'}$$

Пусть, далее, на подпространстве $E_0 \subset E$ задан линейный функционал $f(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|f(x)| \leqslant p(x). \tag{2'}$$

Утверждается, что в пространстве E существует линейный функционал $f^*(x)$, совпадающий на E_0 с $f(x)$ и всюду в E удовлетворяющий неравенству

$$|f^*(x)| \leqslant p(x). \tag{3'}$$

Иными словами, функционал $f(x)$ может быть продолжен с E_0 на все E с сохранением неравенства (2').

Доказательство. Элементы подпространства E_0 будем обозначать через y. Вначале мы покажем, что можно расширить функционал f с подпространства E_0 на подпространство E_1, имеющее на одно измерение больше, чем E_0.

Точнее говоря, мы сделаем следующее: возьмем произвольно вектор x_0, не принадлежащий E_0, и покажем, что можно построить линейный функционал $f_1(x)$, определенный на подпространстве E_1 всех линейных комбинаций векторов $y \in E$ и вектора x_0, так, что $f_1(x)$ будет совпадать на E_0 с $f(x)$ и будет ограниченным на E_1 тем же функционалом $p(x)$ (в комплексном случае — по модулю).

Построение будем производить вначале для вещественного случая. Мы определим функционал f_1, естественно по формуле

$$f_1(y) = f_1(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda f_1(x_0), \tag{4}$$

где число $f_1(x_0)$ подлежит определению, с тем, чтобы было выполнено условие (2). Условие (2) можно теперь записать в форме

$$f_1(y) = f(y) + \lambda f_1(x_0) \leqslant p(y + \lambda x_0). \tag{5}$$

При $\lambda > 0$ это неравенство можно записать в виде

$$f\left(\frac{y}{\lambda}\right) + f_1(x_0) \leqslant p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right)$$

или

$$f(y_1) + f_1(x_0) \leqslant p(y_1 + x_0), \quad y_1 = \frac{y}{\lambda}. \tag{6}$$

При $\lambda < 0$ мы положим $\mu = -\lambda > 0$; тогда мы получим

$$f(y) - \mu f_1(x_0) \leqslant p(y - \mu x_0),$$

или, деля на μ и обозначая $y_2 = \frac{y}{\mu}$,

$$f(y_2) - f_1(x_0) \leqslant p(y_2 - x_0). \tag{7}$$

Обратно, если число $f_1(x_0)$ при любых $y_1 \in E_0$ и $y_2 \in E_0$ удовлетворяет неравенствам (6) и (7), то удовлетворяется и неравенство (5) при любом $y \in E_0$ и любом λ. Неравенства (6), (7) можно записать в форме

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leqslant f_1(x_0) \leqslant p(y_1 + x_0) - f(y_1).$$

Мы видим, что решение поставленной задачи зависит от соотношения между числами

$$\alpha = \sup_{y_2 \in E_0} \{f(y_2) - p(y_2 - x_0)\}$$

и

$$\beta = \inf_{y_1 \in E_0} \{p(y_1 + x_0) - f(y_1)\}.$$

Если $\alpha \leqslant \beta$, то наша задача разрешима; если же оказалось бы, что $\alpha > \beta$, то величину $f_1(x_0)$, удовлетворяющую условию (2), найти было бы нельзя. Покажем, что в действительности всегда $\alpha \leqslant \beta$. Для этого нужно проверить, что при любых y_1 и y_2 из E_0 выполняется неравенство

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leqslant p(y_1 + x_0) - f(y_1),$$

или, что то же,

$$f(y_1) + f(y_2) \leqslant p(y_1 + x_0) + p(y_2 - x_0). \tag{8}$$

Покажем, что неравенство (8) на самом деле имеет место. Действительно, мы имеем

$$f(y_1)+f(y_2)=f(y_1+y_2)\leqslant p(y_1+y_2)=$$
$$=p(y_1+x_0+y_2-x_0)\leqslant p(y_1+x_0)+p(y_2-x_0),$$

что и требуется. Итак, искомое число $f_1(x_0)$ существует, а следовательно искомое продолжение функционала f возможно.

В комплексном случае мы разложим функционал $f(y)$ на вещественную и мнимую составляющие:

$$f(y)=g(y)+ih(y).$$

Функционалы $g(y)$ и $h(y)$ — вещественные линейные функционалы в пространстве E_0, рассматриваемом как вещественное пространство, и вместе с функционалом f ограничены тем же функционалом $p(x)$. Далее мы имеем

$$f(iy)=if(y)=g(iy)+ih(iy)=ig(y)-h(y),$$

откуда $h(y)=-g(iy)$ и, следовательно,

$$f(y)=g(y)-ig(iy).$$

По доказанному функционал $g(y)$ можно продолжить с сохранением неравенства (2′) на вещественное подпространство $E_{1/2}$ вещественных линейных комбинаций векторов $y\in E_0$ и вектора x_0, а затем — также с сохранением этого неравенства — на подпространство $E_1\supset E_{1/2}$ вещественных линейных комбинаций векторов $y\in E_0$, x_0 и ix_0. Положим на E_1

$$f(x)=g(x)-ig(ix).$$

Мы получим расширение функционала f с E_0 на E_1. Проверим, что он остается линейным функционалом в комплексном пространстве E_1. Достаточно проверить, что $f(ix)=if(x)$. Действительно,

$$f(ix)=g(ix)-ig(-x)=i[-ig(ix)-g(-x)]=i[g(x)-ig(ix)]=if(x).$$

Остается показать, что в E_1 для функционала f выполняется неравенство (3′). При заданном x_0 выберем вещественное число θ так, чтобы $e^{i\theta}f(x)$ было вещественным неотрицательным числом. Тогда $e^{i\theta}f(x)=f(e^{i\theta}x)=g(e^{i\theta}x)$ и, следовательно,

$$|f(x)|=|e^{i\theta}f(x)|=g(e^{i\theta}x)\leqslant p(e^{i\theta}x)=p(x),$$

что и требовалось.

Итак, всегда — в вещественном или комплексном случае — возможно распространить с выполнением неравенства (3) или (3′) заданный функционал с данного подпространства $E_0\neq E$ на некоторое более широкое E_1. Покажем, что существует распространение функционала f с выполнением соответствующего неравенства на все пространство E. Для этого используем теорему Цорна из § 1. Именно, рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ тех подпространств пространства E, на которые искомое распространение возможно. При этом будем считать, что данное подпространство E_α входит в $\mathfrak{A}$ столько раз, сколькими способами возможно распространение функционала f на E_α. Все семейство $\mathfrak{A}$ можно частично упорядочить, считая $E_\alpha\leqslant E_\beta$, если $E_\alpha\subset E_\beta$ и значения функционала f, распространенного на E_α и на E_β, совпадают на подпространстве E_α. Пусть $\mathfrak{A}_0$ — линейно упорядоченное подсемейство в $\mathfrak{A}$. На объединении E_ω всех подпространств E_α, входящих в $\mathfrak{A}$, функционал f однозначно определен и удовлетворяет неравенству (3) или (3′). Следовательно, E_ω само входит в $\mathfrak{A}$ и, очевидно, является верхней границей для всех $E_\alpha\in\mathfrak{A}_0$. Тем самым $\mathfrak{A}_\alpha$ ограничено. Согласно теореме Цорна, в семействе $\mathfrak{A}$ есть максимальный элемент E^*. На подпространство E^* можно распространить линейный функционал f с выполнением неравенства (3) или (3′). Если бы было $E^* \neq E$, то по доказанному функционал f можно было бы распространить и на более широкое подпространство, что противоречило бы максимальности E^*. Итак, $E^* = E$, и теорема доказана.

Приведем теперь некоторые следствия из теоремы Хана — Банаха.

1. В качестве функционала $p(x)$ (в вещественном и в комплексном случае) можно взять норму элемента x или ее кратное. При этом получается, в частности, что *функционал, удовлетворяющий на подпространстве* $E_0 \subset E$ *неравенству*

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|,$$

— следовательно, имеющий на подпространстве E_0 *норму, не превосходящую* C, *— может быть продолжен на все пространство* E *с сохранением этой нормы.* Это наиболее часто встречающееся следствие теоремы Хана — Банаха.

2. *Для каждого элемента* $x_0 \neq 0$ *нормированного пространства* E *существует линейный функционал* f, *определенный на всем* E, *имеющий норму* 1 *и такой, что* $f(x_0) \neq 0$. Действительно, полагая $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$, мы получаем линейный функционал с нормой 1, определенный на одномерном подпространстве, порожденном элементом x_0. Продолжая его на все E с сохранением нормы, получим искомый функционал.

3. *Для всякого замкнутого подпространства* $E_0 \neq E$ *и элемента* $x_0 \notin E_0$ *существует линейный функционал* f, *имеющий норму* 1, *равный* 0 *на* E_0 *и такой, что* $f(x_0) \neq 0$.

Действительно, определим функционал f на подпространстве E_1, состоящем из всех векторов вида $x = y + \lambda x_0$ ($y \in E_0$, λ — любое число), формулой

$$f(x) = c\lambda,$$

где c — некоторая положительная постоянная. Мы имеем на E_1:

$$\|f\| = \sup_{y \in E_0} \frac{c|\lambda|}{\|y + \lambda x_0\|} = \sup_{y \in E_0} \frac{c}{\left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|} = \frac{c}{\inf\limits_{y \in E_0}\left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|} = \frac{c}{d},$$

где $d = \inf\limits_{y \in E_0}\left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|$ есть расстояние от элемента x_0 до подпространства E_0; d положительно, поскольку E_0 замкнуто. Мы видим, что, если положить $c = d$, мы получим на E_1 функционал с нормой 1. Продолжая его далее на все E с сохранением нормы, получим искомый функционал.

Замечание 1. Следствие 3 можно сформулировать еще и так: *для любого подпространства* $E_0 \not\subset E$ *и элемента* x_0, *не входящего в замыкание* E_0, *существует линейный функционал с нормой* 1, *равный* 0 *на* E_0 *и такой, что* $f(x_0) \neq 0$.

Замечание 2. Функционал $p(x)$, фигурирующий в комплексной формулировке теоремы Хана — Банаха, есть «почти» норма; он отличается от нормы тем, что может обращаться в нуль не только при $x \neq 0$, а и на целом многообразии. Мы будем называть такой функционал $p(x)$ *полунормой*. В вещественном случае функционал $p(x)$ по своим свойствам еще дальше от нормы; он может принимать даже и отрицательные значения.

Замечание 3. В некоторых построениях анализа теорема Хана — Банаха может быть применена с большой пользой. Например, при выводе общей формы линейного непрерывного функционала в пространстве $C(a, b)$ (гл. VI, § 7, п. 1), минуя рассуждения с продолжением функционала на более широкое пространство (этап I) мы могли бы прямо использовать эту теорему.

При этом легко проверяется, так же как и на этапе II, что получающаяся функция $F(\xi)=f[\chi_{[a,\xi]}(x)]$ имеет ограниченное изменение. Но непрерывность справа этой функции, обеспечивающая полную аддитивность меры, вообще говоря, не будет иметь места. Если для одного переменного это обстоятельство не является существенным, поскольку интегрирующую функцию всегда можно исправить в точках разрыва, сделав ее непрерывной справа (п. 2 § 6), то для нескольких переменных возможность такого исправления представляется значительно более сложной.

Рассмотрим некоторые факты, связанные с последовательностью линейных функционалов.

Теорема (Банах и Штейнгауз, 1927). *Если значения линейных функционалов $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ ограничены на каждом фиксированном элементе $x \in E$, то они равномерно ограничены на единичном шаре пространства E; иначе говоря, нормы функционалов $f_n(x)$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. Если последовательность линейных функционалов $f_n(x)$ не ограничена в единичном шаре $\|x\| \leqslant 1$, то, очевидно, она не ограничена и в любом шаре $\|x\| \leqslant r$; более того, она не ограничена и в любом шаре $U(x_0, r)=\|x-x_0\| \leqslant r$, так как если бы для $x \in U(x_0, r)$ числа $f_n(x)$ и $f_n(x_0)$ были ограничены, то были бы ограничены и числа $f_n(x-x_0)= =f_n(x)-f_n(x_0)$, что уже невозможно, так как $x-x_0$ пробегает шар радиуса r с центром в начале. Заметив это, выберем в единичном шаре элемент x_1, $\|x_1\|<1$, на котором какой-то из функционалов f_n — обозначим его через f_1 — превосходит по модулю 1:

$$|f_1(x_1)|>1.$$

Так как f_1 — непрерывный функционал, то существует шар $\|x-x_1\| \leqslant r_1$, который целиком содержится в исходном шаре $\|x\| \leqslant 1$ и в котором выполняется неравенство

$$|f_1(x)|>1.$$

Внутри этого шара найдем элемент x_2 и функционал f_2 так, чтобы иметь

$$|f_2(x_2)|>2,$$

и затем выберем новый шар $\|x-x_2\| \leqslant r_2$, заключенный в предыдущем, во всех точках которого выполняется неравенство

$$|f_2(x)|>2.$$

Продолжая таким образом далее, получим последовательность вложенных друг в друга шаров с радиусами $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, стремящимися к нулю. В общей точке x_0 всех этих шаров (существующей в силу полноты пространства R и леммы § 5 гл. II) имеют место неравенства

$$|f_1(x_0)|>1, \quad |f_2(x_0)|>2, \ldots, \quad |f_n(x_0)|>n, \ldots,$$

т. е. числа $f_n(x_0)$ не ограничены, что противоречит условию теоремы.

Следствие. *Если последовательность линейных непрерывных функционалов $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится при каждом $x \in E$, то предельный функционал $f(x)=\lim f_n(x)$ также является линейным и непрерывным.*

Действительно, линейные свойства функционала $f(x)$ получаются предельным переходом в равенстве $f_n(\alpha_x+\beta_y)=\alpha f_n(x)+\beta f_n(y)$; а из теоремы Банаха вытекает, что ограничены и значения этого функционала в единичном шаре.

Задачи. 1. На подпространстве E_0 линейного пространства E (без нормы) задан линейный функционал f. Доказать, что он допускает линейное продолжение на все пространство E.

Указание. Использовать схему доказательства теоремы Хана — Банаха (не заботясь о значении $f(x_0)$).

2. Показать, что в бесконечномерном нормированном пространстве существует всюду определенный линейный функционал, для которого

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \infty.$$

Указание. Изменить схему доказательства теоремы Хана — Банаха с тем, чтобы при каждом расширении «на одно измерение» норма функционала увеличивалась на единицу.

Начать с произвольного функционала, определенного на одномерном пространстве; после счетного числа расширений на одно измерение получится неограниченный функционал. Для дальнейшего расширения (до всего E) применить задачу 1.

3. Доказать полноту следующих пространств числовых (комплексных) последовательностей (с естественными линейными операциями):

а) пространства c_0 последовательностей, стремящихся к нулю:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots), \qquad \lim \xi_n = 0,$$

с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|;$$

б) пространства l_1 последовательностей

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|,$$

в) пространства m ограниченных числовых последовательностей

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots), \qquad \sup_n |\xi_n| < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

Примечание. Пространство c_0 есть замкнутое подмножество пространства m; при этом c_0 сепарабельно, а m — не сепарабельно (см. задачу 14 к § 3 гл. II), поскольку m обладает множеством элементов мощности континуум с взаимными расстояниями 1 (см. теорему 3 § 5 гл. I).

4. Найти общий вид линейных непрерывных функционалов (и указать их нормы) в пространствах c_0 и l_1 (задача 8 к § 9).

Указание. Обозначим $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$; в указанных пространствах каждый элемент разлагается в ряд по e_n, сходящийся по норме пространства. Поэтому достаточно найти числа $f(e_n)$ и выяснить их свойства.

Отв. В пространстве c_0 линейный непрерывный функционал $f(x)$ задается элементом $\alpha \in l_1$, так что при $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in c_0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n, \qquad \|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

В пространстве l_1 линейный непрерывный функционал $g(\alpha)$ задается элементом $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots) \in m$, так что при $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in l_1$

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \alpha_n, \qquad \|g\| = \sup_n |\eta_n|.$$

Примечание. Могло бы показаться, что и любой функционал на пространстве m можно было бы записать в форме

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \xi_n, \tag{9}$$

где β_n — фиксированная последовательность чисел и $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$. Но это не так. В следующей задаче мы увидим, что в пространстве m есть линейный функционал $f(x)$, который каждую сходящуюся последовательность $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ переводит в ее предел $\lim \xi_n$. Такой функционал не может иметь вид (9). Действительно, применяя (9) к элементу e_n, мы получили бы, что $f(e_n) = \beta_n = 0$; отсюда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \xi_n \equiv 0$, что не имеет места, так как, например, $f(e) = 1$, где $e = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

5. На пространстве m всех ограниченных комплексных последовательностей $x = (\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$ построить линейный функционал с нормой 1, переводящий каждую последовательность x в число ξ, заключенное в наименьшем выпуклом множестве, содержащем все предельные точки последовательности ξ_n (и, в частности, каждую сходящуюся последовательность — в ее предел).

Указание. Пусть $m_r \subset m$ означает совокупность вещественных последовательностей. Определить на m_r полунорму $p(x) = \overline{\lim} |\xi_n|$. Вещественный линейный функционал f, равный 1 на элементе $e = (1, 1, \ldots, 1 \ldots)$ и имеющий тем самым на подпространстве $\{\lambda e\}$ полунорму 1, продолжить на все m_r с сохранением полунормы. Используя равенства $|f(x)| \leqslant p(x)$, $f(x - \lambda e) = f(x) - \lambda$, проверить, что значение функционала $f(x)$ расположено между $\overline{\lim}\, \xi_n$ и $\underline{\lim}\, \xi_n$. Для комплексной последовательности $x + iy$ положить $f(x + iy) = f(x) + if(y)$ (проверить, что полученный функционал линейный). Его значение (комплексное число) лежит заведомо не правее вертикальной прямой, проходящей через самую правую предельную точку последовательности ξ_n. Заменяя x на $e^{i\theta}x$ и проводя аналогичное рассуждение, получить требуемое.

6 (Продолжение). Фиксируем элемент $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, для которого $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j = 1$. С помощью элемента α от ограниченной последовательности $x = (\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots)$ можно перейти к новой ограниченной последовательности $\alpha * x = (\eta_0, \ldots, \eta_n, \ldots)$, где $\eta_n = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j \xi_{j+n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Это действие будем называть *α-операцией.*

Показать, что все предельные точки последовательности $\alpha * x$ заключены в выпуклой оболочке множества всех предельных точек последовательности x.

Указание. Число η_n есть «среднее взвешенное» из чисел $\xi_{0+n}, \xi_{1+n}, \ldots$

7 (Продолжение). Пусть в условии задачи 6 условие $\alpha_j \geqslant 0$ заменено на условие $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| = A < \infty$ (числа α_j могут быть теперь любыми комплексными числами). Показать, что предельные точки последовательности $\alpha * x$ заключены в круге, концентрическом с кругом $Q(x)$, заключающим все предельные точки последовательности x, и радиусом в A раз больше радиуса круга $Q(x)$.

Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда центр круга $Q(x)$ в начале координат.

Примечание. Будем говорить, что последовательность x имеет некоторое число ξ своим *α-пределом*, если последовательность $\alpha * x$ имеет число ξ своим обычным пределом.

Результат задач 6—7 показывает, что если последовательность x имеет обычный предел ξ, то она имеет и α-предел, равный ξ при любом выборе α; далее, α-предел, если он существует, сам заключен в A-растяжении круга $Q(x)$. В частности, $p(\alpha * x) \leqslant Ap(x)$.

8 (Продолжение). Улучшить конструкцию функционала f в задаче 5 так, чтобы каждая последовательность, имеющая α-предел (при заданном фиксированном α), переводилась функционалом f в значение этого предела.

Указание. Подпространство m_α последовательностей с нулевым α-пределом не содержит в замыкании по полунорме $p(x)$ элемента e, поскольку $Ap(e-x) \geqslant p(\alpha * (e-x)) = p(\alpha * e - \alpha * x) = p(e) = 1$. Положить $f(x) = 0$ на m_α, $f(e) = 1$ и продолжить с сохранением полунормы на все m.

9 (Продолжение). Улучшить конструкцию функционала f так, чтобы каждая последовательность, имеющая α-предел хотя бы при одном α, переводилась функционалом f в значение этого предела.

Указание. Если x имеет α-предел, а y имеет β-предел, то $x+y$ имеет γ-предел, где

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j}.$$

Поэтому совокупность m_0 всех элементов $x \in m$, имеющих нулевой α-предел при каком-нибудь α, есть подпространство.

Примечание. Существуют последовательности $x \in m$, не имеющие α-предела ни при каком α; например, этим свойством обладает последовательность $(1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где промежутки, состоящие сплошь из нулей, неограниченно увеличиваются.

10 (Продолжение). Последовательность x называется *квазинулевой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = 1$, такой, что $p(\alpha * x) < \varepsilon$.

Показать, что функционал f (задача 5) можно выбрать так, что для всякой квазинулевой последовательности будет $f(x) = 0$.

Указание. Квазинулевые последовательности образуют подпространство, и $e = (1, \ldots, 1, \ldots)$ не входит в его замыкание по полунорме $p(x)$.

11 (Продолжение). Всякая последовательность вида $\mu * x$, где $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_n, \ldots)$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = 0$, является квазинулевой.

Указание. Проверить, что утверждение справедливо для $\mu_0 = (1, -1, 0, 0, \ldots)$ и ее сдвигов. Представить произвольную квазинулевую последовательность μ в виде линейной комбинации μ_0, ее сдвигов и последовательности z с $p(z) < \varepsilon$.

12 (Продолжение). Показать, что функционал f, построенный в задаче 10, обладает свойством $f(\alpha * x) = f(x)$ для любого α.

Указание. Последовательность $x - \alpha * x$ является квазинулевой в силу результата задачи 11.

Примечание. В частности, при $\alpha = (0, 1, 0, \ldots)$ последовательность $\alpha * x$ есть сдвиг последовательности x; таким образом, значение функционала $f(x)$ не меняется при сдвиге последовательности x.

13. Если числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k$ сходится при каждом $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots) \in c_0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$.

Указание. Из условия следует, что последовательность функционалов на c_0 $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \alpha_k$ сходится для каждого элемента $x \in c_0$. Применить далее теорему Банаха — Штейнгауза и общий вид линейного функционала на c_0 (задача 4).

14. T-предел ограниченной последовательности. Пусть дана бесконечная матрица $T = (t_{jk})$, $j = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условиям:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} |t_{jk}| \leqslant C$, C не зависит от j;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} = s_j$, $\lim_{j \to \infty} s_j = 1$;

(3) $\lim_{j \to \infty} t_{jk} = 0$ при любом $k = 1, 2, \ldots$

(матрица Теплица). Пусть далее $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ — ограниченная последовательность. Составим последовательность Tx из чисел $t_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} \xi_k$; предел последовательности Tx, если он существует, называется *T-пределом* последовательности x. Показать, что:

а) если последовательность x сходится (в обычном смысле) к пределу ξ, то последовательность Tx также сходится к пределу ξ;

б) если произвольная матрица $T = (t_{jk})$ обладает тем свойством, что для любой сходящейся последовательности $x = \{\xi_n\}$, $\lim \xi_n = \xi$, числа $t_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} \xi_k$ существуют и также сходятся к ξ, то матрица T обладает свойствами (1) — (3).

Указание. а) Достаточно рассмотреть случай $\xi = 0$. б) Применяя матрицу T к элементу $(0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots)$, получить (3). Применяя матрицу T к элементу $(1, \ldots, 1, \ldots)$, получить (2). Сходимость каждого из рядов (1) вывести из задачи 13. При этом функционалы $t_j(x)$ сходятся при каждом $x \in c_0$; в силу теоремы Банаха — Штейнгауза их нормы ограничены в совокупности, что дает (1).

15. Показать, что α-пределы (задачи 6—12) являются частным случаем T-пределов.

Отв. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, то соответствующая матрица T имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|.$$

16. Построить матрицу Теплица T так, чтобы для $e = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ и $\hat{e} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ иметь $T\hat{e} = \hat{e} + e$.

Отв. Например:

$$T=\begin{Vmatrix} 1+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Примечание. Наличие такой матрицы T показывает, что на пространстве m не существует линейного функционала f, обладающего свойствами $f(Tx)=f(x)$, $f(e)=1$; таким образом, результат задачи 12, относящейся к α-пределам, не может быть перенесен на T-пределы.

17. Доказать, что замкнутое подпространство пространства $L_1(-\infty, \infty)$, содержащее некоторую функцию $\varphi(x)\not\equiv 0$, все ее сдвиги и все их произведения на экспоненты $e^{ix\sigma}$, совпадает со всем пространством $L_1(-\infty, \infty)$.

Указание. Применить следствие 3 теоремы Хана — Банаха, общий вид линейного непрерывного функционала на L_1 и теорему единственности преобразования Фурье.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ
(цифры обозначают страницы)