*А. Г. Куликовский, Е.И.Свешникова*

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ

В книге излагаются результаты теоретического исследования нелинейных волн в упругих и вязкоупругих средах с учетом анизотропии материала, которая считается малой. Основное внимание уделено квазипоперечным волнам, которые обнаруживают нестандартное поведение даже при малой амплитуде. Результаты, касающиеся волн малой амплитуды, могут считаться в основном законченными и достаточно полными. Обсуждаются проблемы, связанные с имеющей место неединственностью решений упругих задач. Книга содержит большую вводную первую главу, в которой излагаются общие методы и результаты изучения гиперболических систем уравнений, выражающих законы сохранения. Содержание этой главы может представлять интерес для приложений в других областях механики и физики.

Книга содержит список литературы и предметный указатель. Книга предназначена для специалистов в области механики сплошной среды и уравнений в частных производных, а также студентам и аспирантам механикам и математикам.

Содержание

Предисловие 7

**1. Математическое введение 13**

1.1. Законы сохранения и соответствующие им дифференциальные уравнения 13

1.2. Гиперболические системы. Линейные и линеаризованные уравнения. Слабые разрывы. Инварианты Римана 18

1.3. Граничные условия. Эволюционность 26

1.4. Волны Римана 31

1.5. Разрывы и соотношения на них. Ударная адиабата 38

1.6. Условия эволюционности разрывов 43

1.7. Разрывы малой интенсивности 50

1.8. Поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге 55

1.9. Распад произвольного разрыва и другие автомодельные задачи 61

1.10. Уравнения законов сохранения в форме Годунова. Энтропия 71

1.11. Решения с разрывами как предел непрерывных решений уравнений усложненной модели 77

1.12. Малые возмущения в среде с диссипацией 81

1.13. Структура ударных волн 84

1.14. Дополнительные соотношения на разрыве 88

1.15. Еще о структуре и о числе дополнительных соотношений 96

**2. Постановка задачи о плоских волнах в упругой среде 117**

2.1. Модель упругой среды. Система уравнений 117

2.2. Уравнения теории упругости для одномерных движений в виде плоских волн. Условия на разрыве 126

2.3. Волновая изотропия и анизотропия. Внутренняя энергия среды с малой волновой анизотропией 131

2.4. Задание упругого потенциала для слабонелинейной среды 134
2.5. Распространение нелинейных волн в средах, взаимодействующих с электромагнитным полем 142
**3. Волны Римана 153**
3.1. Малые возмущения. Линейные волны 153
3.2. Уравнения для волн Римана 159
3.3. Квазипродольные волны Римана 161
3.4. Квазипоперечные волны Римана 164
3.5. Изменение величин в квазипоперечных волнах 169
3.6. Эволюция квазипоперечных волн Римана 171
3.7. Волны Римана в случае волновой изотропии 173
**4. Ударные волны 177**
4.1. Условия на слабых ударных волнах 177
4.2. Квазипродольные ударные волны 181
4.3. Квазипоперечные ударные волны. Ударная адиабата 183
4.4. Условие неубывания энтропии 190
4.5. Условия эволюционности скачка. Точки Жуге 192
4.6. Скорость квазипоперечных ударных волн 194
4.7. Типы эволюционных ударных, волн и их количество 199
4.8. Положение участков эволюционности на ударной адиабате 204
4.9. Ударные переходы в заданное состояние 210
4. 10. Частные виды начальной деформации 211
4.11. Квазипоперечные ударные волны при $G/R^2 \ll 1$ и $G/R^2 \gg 1$ 223
4.12. Волны в несжимаемых средах 230
4.13. Представление неэволюционного разрыва двумя эволюционными, идущими с одинаковой скоростью 232
**5. Нестационарные автомодельные задачи для волн малой амплитуды 239**
5.1. Предварительные замечания 239
5.2. Задача о внезапном изменении нагрузки на границе полупространства ("задача о поршне") 241
5.3. Построение решения в средах с $\kappa > 0$ 245
5.4. Построение решения в средах с $\kappa < 0$ 265
5.5. Распад произвольного начального разрыва. Соударение ударных волн 273
**6. Двумерные стационарные нелинейные волны и автомодельные решения 283**
6.1. Простые волны 283
6.2. Стационарные ударные волны в движущейся среде 290
6.3. Задача о бегущей нагрузке 294
**7. Упрощенные уравнения теории упругости. Неавтомодельные задачи 297**
7.1. Эквивалентная несжимаемая среда при описании квазипоперечных волн 297
7.2. Упрощенные уравнения для квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону 301
7.3. Описание волн Римана и разрывов с помощью упрощенных уравнений 304

теории упругости
7.4. Инварианты Римана. Уравнения в плоскости годографа. Неавтомодельные задачи 306
7.5. Эволюция при малой анизотропии волн, близких к вращательным. Катастрофическая перестройка 310
**8. Движения вязкоупругих сред 317**
8.1. Модель Кельвина-Фойхта. Уравнения одномерных движений 317
8.2. Задача о структуре квазипоперечных ударных волн 320
8.3. Численные решения задач о вязкоупругих волнах, имеющие автомодельную асимптотику 333
**9. Волны конечной амплитуды в слабоанизотропных упругих средах 359**
9.1. Введение. Случай волновой изотропии 359
9.2. Волны Римана в несжимаемой среде при $g << 1$ 365
9.3. Волны Римана в несжимаемой среде при анизотропии частного вида 374
9.4. Волны Римана в сжимаемой среде 377
9.5. Ударные волны в несжимаемой среде 381
9.6. Ударные волны в сжимаемой среде 392
Литература 399
**Предметный указатель 407**

Предметный указатель

автомодельная волна Римана, 36, 240
автомодельная задача, 61, 173, 239
адиабата Гюгонио, 180
априорная эволюционность, 44, 332
бегущая волна, 23, 83, 102, 155, 174, 299, 361
бесконечная проводимость, 145
быстрая волна, 193, 367
быстрая волна Римана, 169, 171, 367
быстрая ударная волна, 200, 384
вектор напряжения на площадке, 119
вектор потока тепла, 122
взаимодействие ударных волн, 342, 346
вмороженность магнитного поля, 144
внутренняя энергия, 121, 142
волна разрежения, 163
волна Римана, 31, 159, 365
волна сжатия, 163
волна круговой поляризации, 225
волновая анизотропия,133,138, 167, 365, 374
волновая изотропия,132, 137, 173,359
вращательная волна, 174, 225, 361
вращательный разрыв, 204, 225, 382
второй закон термодинамики, 123
гиперболическая система уравнений, 18, 19, 79, 158
действующая ударная адиабата, 89
деформационная анизотропия, 138
деформация профиля волны, 33, 163,371
диаграмма эволюционности, 49, 55, 57, 199
дивергентный вид уравнения, 16, 125
динамические уравнения теории упругости, 125, 127, 299
дисперсионное уравнение, 101, 104
диссипативная система, 101
диссипативные коэффициенты, 80, 112, 319, 333
диссипативный процесс, 79, 319
дополнительные соотношения на разрыве, 44, 89, 95, 108, 332
допустимые разрывы, 89
задача Коши, 20
задача о поршне, 62, 240

задача о структуре разрыва, 85, 102, 319
закон сохранения количества движения, 119
закон сохранения массы, 118
закон сохранения энергии, 122, 180
закон теплопроводности Фурье, 124
законы сохранения, 14,16,40, 119, 128
изотропная среда, 132, 134, 153, 166
инварианты Римана, 23, 26, 83, 302, 306
интегральная кривая простой волны, 287
интегральные законы сохранения, 14,119
интегральные кривые волн Римана, 32, 170, 369
интегральные уравнения теории упругости, 125, 128
квазилинейная система уравнений, 17
квазиповоротный разрыв, 387
квазипоперечная волна, 137, 158, 164, 183, 193
квазипоперечный разрыв, 180
квазипродольная волна, 137, 158, 181, 193
квазипродольный разрыв, 180
кинематические уравнения теории упругости, 125, 127, 299
кинематическое условие на разрыве, 129
комбинация двух эволюционных волн, 234, 254
контактный разрыв, 273
круговая поляризация волны, 225
лагранжева скорость разрыва, 129
линеаризация уравнений, 23, 30, 100, 104, 157
линейная изотропная среда, 135,167
линейная система уравнений, 17, 22
линейные волны, 23, 155
магнитная гидродинамика, 146
магнитоупругость, 146
малые возмущения, 23, 81, 153, 360
малый разрыв, 50, 60
медленная волна, 193, 367
медленная волна Римана, 169, 367
медленная ударная волна, 200, 384
модель Кельвина-Фойхта, 317
напряженность магнитного поля, 143
напряженность электрического поля, 143
начальная окружность, 382
начальная плоскость, 361
начальная прямая, 382
начально-краевая задача, 27, 334, 347
неединственность автомодельного решения, 261, 270, 280, 335
несжимаемая среда, 127, 230, 366
неустойчивость решения, 31
область неединственности, 261, 270, 335
обратимые разрывы, 43, 361
опрокидывание волны, 36, 163, 173
ортотропная среда, 139
основные соотношения на разрыве, 40, 108
параметр волновой анизотропии, 154, 187
параметр нелинейности, 163, 167
передняя точка Жуге, 193
перестройка решения, 313, 348, 355
плоские волны, 14, 126
плоскополяризованная волна, 174, 212, 361
поворотный разрыв, 362, 382
полная система уравнений, 79, 99, 319
поперечная волна, 157, 174, 203, 225, 231
правило площадей, 385
приходящие малые возмущения, 217
приходящие характеристики, 27

продольная волна, 157, 182
производство энтропии,75, 80, 88
простая волна, 31, 159, 286
разрыв Жуге, 45
распад разрыва, 61, 64, 273
расширяющаяся волна Римана, 36, 64, 163, 173
семейство характеристик, 159, 287
сильный разрыв, 38
система уравнений теории упругости, 125
скачок величины, 40, 129
скачок разрежения, 182
скачок сжатия, 182
скорость малых возмущений, 23, 156, 382
скорость разрыва лагранжева, 129
скорость ударной волны, 194, 382, 385
скорость характеристики, 19, 22, 25, 168
слабоанизотропная среда, 133
слабый разрыв, 20, 38
собственные значения, 19, 360
собственный вектор, 19, 369
соотношение на характеристике, 20, 83
соотношения на разрывах, 40, 129,361
столкновение ударных, волн, 279
структура разрыва, 78, 87, 98, 102, 321
тензор градиентов перемещения, 123,136
тензор конечных деформаций, 118,136
тензор напряжений Коши, 121
тензор напряжений Пиолы—Кирхгоффа, 120
теорема о кинетической энергии, 82
теорема Пойнтинга, 143
термодинамически обратимые разрывы, 75
тождество Гиббса, 123
точка Жуге, 49, 55, 193, 391
трансверсально изотропная среда, 139
ударная адиабата, 42, 130, 180, 184, 187, 362, 363, 385
ударная волна, 31, 75, 180
ударная волна второго типа, 203
ударная волна Жуге, 45, 59, 193
ударная поляра, 291
упрощенная система для волн в одном направлении, 303, 319, 334
упрощенная система уравнений, 100, 319
упрощенные уравнения теории упругости, 298, 303, 319
упругая среда, 123
упругие волны в магнитном поле, 144
упругие волны в электромагнитном поле, 147
упругие модули среды, 136, 140
упругий потенциал, 124,132, 134, 359
уравнение Бюргерса, 84
уравнение в дивергентной форме, 16
уравнение притока тепла, 122
уравнения в форме Годунова, 72, 127
уравнения в форме Пиолы—Кирхгоффа, 121, 146
уравнения теории упругости, интегральные, 128
условиедиссипативности, 101
условие Жуге, 31
условие неубывания энтропии, 76, 182, 190, 202
условия Лакса, 46
условия эволюционности, 43, 48, 182, 192, 364, 396
усложненная модель, 78, 98, 317, 319
устойчивость разрыва, 46
уходящие малые возмущения, 217

уходящие характеристики, 27, 43
фронт в электромагнитном поле, 99
фронт разрыва, 37
фронт фазового перехода, 96
характеристика, 19,22, 159
характеристики приходящие, 27
характеристики уходящие, 27, 43
характеристическая скорость, 19, 22, 25, 106, 168, 180, 193, 360, 366
характеристическая форма системы уравнений,19
характеристическое направление, 19
характеристическое уравнение, 18, 156, 168, 368
центрированная волна Римана, 36, 240
эволюционная граница, 28, 30
эволюционные граничные условия, 28, 30
эволюционный отрезок, 48, 54, 202, 384,391
эволюционный прямоугольник, 47, 55, 200
эволюционный разрыв, 45
эволюционный участок, 202, 204
эквивалентная несжимаемая среда, 186, 298
электромагнитные волны, 142
энергия электромагнитного поля, 145
энтропийная волна, 157, 159
энтропийная окружность, 191
энтропия,16,72,79,123, 190, 364

# Предисловие

Целью предлагаемой книги является последовательное изложение результатов теоретического исследования одномерных нелинейных волн и в первую очередь ударных волн в упругих средах. Главное внимание уделено квазипоперечным волнам. Продольные или квазипродольные волны были достаточно подробно изучены ранее. Результаты, составляющие содержание книги, получены в основном, в течение последних 15 лет и в связном последовательном виде ранее не публиковались. Кроме того, книга содержит подробное изложение общих математических методов изучения нелинейных гиперболических систем уравнений, выражающих законы сохранения. Эти вопросы рассматриваются в полном объеме, в виде, приспособленном для использования в механике сплошной среды. Математическая часть книги (Глава 1) может представлять самостоятельный интерес для читателей, работающих в других областях механики и физики.

По материалам, содержащимся в книге, читались специальные курсы для студентов и аспирантов механико-математического факультета Московского государственного университета.

Значительная часть книги посвящена исследованиям нелинейных волн малой амплитуды в упругой среде. В этой части результаты, излагаемые в книге, можно считать в основном законченными. Волны малой амплитуды рассмотрены с различных точек зрения и, главным образом, аналитическими и качественными методами.

Начало систематического изучения нелинейных волн малой амплитуды в упругих средах положено Д.Блендом (см. его книгу 1969 г.), который изучил нелинейные волны в изотропной сре-

де при отсутствии предварительных деформаций в плоскости волны. Уравнение состояния среды было представлено в виде нескольких первых членов степенного разложения по малой деформации. В качестве еще одного примера упругой среды может рассматриваться магнитная гидродинамика идеально проводящей сжимаемой жидкости. Магнитогидродинамические волны, в том числе, волны конечной амплитуды в совершенном газе были полностью изучены в ряде работ конца 50-х – начала 60-х годов (результаты этих исследований содержатся, например, в книге: А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, 1962 г.).

Ситуации, относящиеся к недеформированному изотропному телу или магнитной гидродинамике, рассмотренные в упомянутых выше работах, представляются в некотором смысле вырожденными в силу изотропии свойств среды в плоскости волны ("волновая изотропия"). При волновой изотропии все волны делятся на плоскополяризованные и волны с круговой поляризацией (вращательные). Последние не меняют своей формы при распространении (недеформирующиеся волны Римана). Таким волнам соответствуют также вращательные разрывы, которые можно рассматривать как очень узкие неопрокидывающиеся волны Римана (в отличие, например, от ударных волн в газах). Все это оказывает существенное влияние на выбор разрывных решений, которые при теоретическом изучении принимаются в качестве реально существующих.

Наличие даже малой анизотропии общего вида, в том числе анизотропии, вызванной предварительной деформацией (например, прошедшей ранее волной другой ориентации), снимает упомянутое выше вырождение, в результате чего поведение нелинейных волн становится более многообразным и интересным. Этому вопросу посвящена в основном предлагаемая книга. Наиболее содержателен случай, когда проявления нелинейности и анизотропии имеют одинаковый порядок величины и сложным образом взаимодействуют между собой. Случай волновой изотропии рассматривается подробно, в том числе и путем соответствующего предельного перехода.

В Главе 1 дается математическое введение, суммирующее известные общие результаты относительно одномерных нелиней-

ных волн и разрывов в решениях гиперболических систем уравнений, выражающих законы сохранения. К этому типу относятся уравнения теории упругости. Наряду со стандартным материалом, касающимся характеристик поведения волн малой амплитуды, волн Римана, соотношений на разрывах, эволюционности разрывов, свойств разрывов с малым изменением величин, обсуждаются также и не столь широко известные вопросы. Упомянем здесь поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге, обобщение понятия энтропии и возможности приведения уравнений к специальному виду, предложенному С.К.Годуновым, введение диссипации, использующее идеи термодинамики необратимых процессов, рассмотрение с общей точки зрения структуры ударных волн и разрывов с дополнительными соотношениями на них, определение возможного числа таких соотношений. Все эти результаты имеют большое значение не только для изучения упругих волн, но и применялись и будут находить себе дальнейшее применение во многих других задачах из различных областей механики и физики.

В Главе 2 дается краткое изложение основных понятий теории упругости, приводится система одномерных уравнений в форме Пиолы-Кирхгоффа и условия на разрывах. Обсуждается условие, обеспечивающее волновую изотропию или малую волновую анизотропию. Рассматриваются задачи о волнах при наличии электромагнитного поля, математически эквивалентные задачам об упругих волнах.

Далее проведено детальное исследование волн малой амплитуды в упругой среде с малой анизотропией: волн Римана – в Главе 3, ударных волн – в Главе 4. Изучаемые нелинейные волны естественным образом разделяются на квазипродольные и квазипоперечные. Квазипродольные волны ведут себя стандартным образом, изменение величин в них легко находится путем разложения в ряд по амплитуде волны. Они слабо взаимодействуют с квазипоперечными. Поведение квазипоперечных волн имеет сложный характер, если эффекты нелинейности и анизотропии одного порядка.

Существенным обстоятельством является то, что, как показывает исследование, имеется всего несколько различных вари-

антов поведения квазипоперечных нелинейных волн достаточно малой амплитуды в анизотропной среде, не считая особых случаев связанных с вырождением. Это позволяет полностью провести исследование. Рассмотрены также особые случаи.

В Главе 5 нелинейные волны, изученные в предыдущих главах, служат для построения решений классических автомодельных одномерных задач: задачи о мгновенном изменении нагрузки на границе полупространства и задачи о распаде произвольного начального разрыва. Наряду с их самостоятельной важностью эти задачи имеют большое значение как тестовые. Их качественное исследование проведено при всевозможных значениях параметров, задающих упругие свойства среды, а также начальные и граничные условия. Наиболее интересной особенностью, выявленной при построении автомодельных решений, является возможность существования нескольких решений (неединственность).

В Главе 6 рассматриваются нелинейные стационарные двумерные волны (типа волн Прандтля-Майера в газовой динамике) в системе координат, относительно которой среда движется, а также соответствующие автомодельные задачи.

В Главе 7 предложен другой путь исследования нелинейных волн, использующий приближенные уравнения. Пользуясь малостью нелинейности и анизотропии, получены приближенные уравнения, описывающие квазипоперечные волны в случае, когда в силу начальных или граничных условий квазипродольные волны достаточно малы. Эти уравнения составляют гиперболическую систему четвертого порядка и совпадают с уравнениями для поперечных волн в некоторой эквивалентной несжимаемой упругой среде.

Далее проводится упрощение системы уравнений теории упругости, пригодное для описания квазипоперечных волн, движущихся в одном направлении и взаимодействующих между собой, когда волны, идущие в противоположном направлении, малы. В результате получена гиперболическая система, состоящая из двух уравнений первого порядка. Преимущество такого подхода состоит в том, что наряду с описанием нелинейных волн малой амплитуды (уже изученных ранее) эта система позволяет

ввести инварианты Римана и качественно исследовать неавтомодельные задачи. Кроме того, использование полученной системы уравнений существенно упрощает получение численных решений. Установлено путем качественного анализа решения, что при малой волновой анизотропии в процессе эволюции волн Римана одного типа могут возникать быстрые перестройки решения с излучением волн другого типа с амплитудами сравнимыми с исходными. Это необычное явление имеет место только при наличии анизотропии.

Глава 8 посвящена главным образом разрешению вопроса о неединственности решений классических задач, рассмотренных в Главе 5. Для этого привлекается переход к усложненной модели, когда упругая среда рассматривается как предел вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта при вязкости стремящейся к нулю. На основании изучения структур ударных волн (исследованных качественно), а также решений, представляющих нестационарные неавтомодельные волны и их взаимодействие, (полученных численно) сделаны выводы о реализуемости невязких решений, рассматриваемых как предел вязких при вязкости, стремящейся к нулю. Это особенно важно при неединственности этих решений.

В последней Главе 9 рассмотрено влияние малой анизотропии на волны конечной амплитуды.

Книга имеет теоретический характер. Авторам не известны экспериментальные работы, результаты которых можно было бы использовать для сколько-нибудь содержательного сравнения с теоретическими выводами, излагаемыми в книге. В таком сравнении теоретические выводы несомненно нуждаются и можно только надеяться на появление соответствующих экспериментальных результатов в будущем.

Авторы не старались сделать сколько-нибудь полным список литературы по нелинейным волнам в упругих телах. Это относится особенно к продольным и квазипродольным волнам, которые в предлагаемой книге затронуты только слегка. Ссылки давались в основном на работы, которые непосредственно использовались при написании книги, а также на книги и учебники более общего содержания для указания идейной преемственно-

сти. Совершенно не рассматриваются волны в стержнях, оболочках и других случаях, когда проявляется влияние границ и неоднородности среды.

Предлагаемая книга, несмотря на элементарность изложения, предполагает у читателя наличие некоторого уровня математического образования (повидимому не менее трех курсов университета). Авторы надеются, что она будет интересна специалистам и по механике сплошных сред и по уравнениям в частных производных. Кроме конкретных результатов в классической области, которые могут найти и практические применения, представленные результаты позволяют увидеть много новых особенностей общей проблемы разрывных решений, которые не проявлялись ранее при рассмотрении других моделей сплошных сред.

Подробное обсуждение проблемы неединственности решений уравнений теории упругости, проведенное в книге, будет несомненно полезным при постановке и численном построении решений задач о волнах в твердых телах.

Содержание книги в большой мере основано на идеях, развитых советской школой магнитной гидродинамики. В МГУ инициатором этого направления исследований был Л.И.Седов. На первую главу книги оказали также большое влияние работы С.К.Годунова.

Авторы благодарны А.П.Чугайновой, предоставившей им результаты расчетов, приведенные в Главе 8, а также А.А.Бармину и Н.Т.Пащенко за полезные замечания, позволившие улучшить изложение ряда вопросов. Авторы благодарны также своим товарищам по работе за сочувствие и поддержку.

Предлагаемая монография отличается от книги авторов с тем же названием, изданной на английском языке в 1995 г., тем, что в ней появились новые параграфы (§§ 1.8, 1.14, 1.15, 7.1), а также ряд других дополнений и исправлений.

# Глава 1.

# Математическое введение

Динамические уравнения теории упругости представляют собой гиперболическую систему квазилинейных дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения. Исследование их решений основано в большой степени на приложении к этим конкретным уравнениям общих методов, применяемых при изучении поведения решений указанного класса гиперболических уравнений. Поэтому эта глава будет посвящена общим математическим методам исследования таких систем. Рассматриваются плоские одномерные нестационарные процессы, в которых независимыми переменными служат $x$ и $t$. Многие вопросы, обсуждаемые в этой главе, излагаются подробно в ряде известных учебников и монографий (см., например, Курант [1964], Рождественский и Яненко [1978]).

## 1.1. Законы сохранения и соответствующие им дифференциальные уравнения

Основные уравнения механики сплошной среды представляют собой так называемые *законы сохранения*, выражающие тот

факт, что некоторые важнейшие *физические величины*, характеризующие среду, заполняющую некоторый объем, (такие как масса, импульс, энергия и др.) могут изменяться только за счет *потоков этих величин через границы объема.*

Будем обозначать через $u_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ параметры, задающие в каждой точке состояние сплошной среды, включая ее движение, различные поля и другие необходимые характеристики. Любая другая функция состояния будет представлять собой функцию от $u_1$, $u_2$, ... $u_n$. В частности, для физических величин, входящих в законы сохранения, можно ввести понятия *плотности их распределения в объеме* $f_i(u_k)$, где $i$ – номер сохраняющейся величины, и *векторы потоков этих величин* $\boldsymbol{g}_i(u_k)$ с числом компонент, равным размерности пространства. Здесь и далее использована сокращенная запись $f(u_k)$, которую следует понимать как $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, или $f(u_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Зависимость функций от одной переменной $u_k$ с определенным номером $k$ будет всегда оговариваться особо.

В случае одномерных движений в виде плоских волн, когда все функции $u_k$ зависят от одной декартовой координаты $x$ и времени $t$, рассмотрим объем, границы которого представлены плоскостями $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$. Обозначим через $g_i$ нормальную к плоскостям $x_1 = \text{const}$ компоненту упомянутого выше вектора $\boldsymbol{g}_i$. Интегральные уравнения законов сохранения в отсутствии внешних воздействий записываются для каждой из физических величин $f_i$ в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} f_i(u_k)\,dx + g_i(u_k)\big|_{x=x_2} - g_i(u_k)\big|_{x=x_1} = 0. \qquad (1.1)$$

В некоторых случаях в механике сплошной среды допускаются внешние объемные воздействия на среду. Например, часто оказывается более удобным для описания изменения энергии при поглощении излучения использовать объемный приток энергии, хотя можно было бы представлять его и дивергенцией вектора потока излучения. Тогда в правых частях уравнений (1.1) вмес-

то нуля стоял бы член

$$\int_{x_1}^{x_2} h_i(u_k, x, t)\, dx,$$

где $h_i$ - плотность объемного притока $i$-ой физической величины к среде. В дальнейшем такого рода воздействия будут считаться отсутствующими, за исключением нескольких случаев, в которых эти вопросы будут специально оговариваться.

Интегральные уравнения вида (1.1) могут возникать не только из законов сохранения. Так интегральная форма одного из уравнений электромагнитного поля (закон Фарадея) имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, d\Sigma + \oint_{L} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

Здесь $c$ – скорость света, $\Sigma$ -произвольная неподвижная ориентируемая поверхность, опирающаяся на контур $L$, причем направление обхода контура и вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к $d\Sigma$ образуют правовинтовую систему, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей.

Если считать $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ зависящими только от $x$ и $t$ , то выбирая поверхность $\Sigma$ в виде прямоугольника со сторонами, параллельными осям $x$ и $y$, а в другом случае, осям $x$ и $z$ , получим

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} B_z\, dx + cE_y(x_2, t) - cE_y(x_1, t) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} B_y\, dx - cE_z(x_2, t) + cE_z(x_1, t) = 0.$$

Таким образом, в одномерном случае эти уравнения принимают такой же вид (1.1), как и законы сохранения, и мы их также будем называть законами сохранения.

В случае достаточной гладкости функций $f_i(u_k)$ и $g_i(u_k)$, что в дальнейшем всегда будет предполагаться, а также при достаточной гладкости функций $u_k(x, t)$, что будет предполагаться

не всегда, каждому уравнению (1.1) соответствует дифференциальное уравнение в *дивергентной форме*

$$\frac{\partial f_i(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial g_i(u_k)}{\partial x} = 0. \tag{1.2}$$

Во многих случаях используется также форма записи этих уравнений, содержащая производные от функций $u_k$

$$f_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial t} + g_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \tag{1.3}$$

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i(u_j)}{\partial u_k}, \quad g_{ik} = \frac{\partial g_i(u_j)}{\partial u_k}, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

*По повторяющимся индексам здесь и всюду далее предполагается суммирование.*

Не всякому дифференциальному уравнению в дивергентной форме (1.2) соответствует интегральный закон сохранения, имеющий физический смысл. Примером может служить энтропия, которая сохраняется в отсутствии теплообмена при непрерывных гладких движениях, что позволяет написать для нее уравнение в форме (1.2). Но энтропия может не сохраняться при наличии разрывов у функций $u_k$ внутри рассматриваемой области. В этом случае для энтропии нельзя написать интегрального уравнения вида (1.1). Этот вопрос будет рассмотрен ниже, в § 1.10.

Иногда при построении моделей в механике сплошной среды некоторые из соотношений постулируются в дифференциальном виде. При этом они, вообще говоря, могут не иметь дивергентного вида или иметь различные дивергентные формы записи, но не обладать соответствующими интегральными законами сохранения.

Если для $n$ функций $u_k$ имеется $n$ уравнений, выражающих законы сохранения, т.е. если в уравнениях (1.1) $i = 1, 2, \ldots, n$, то эти уравнения, так же как и уравнения (1.2) (или(1.3)) образуют замкнутую систему, которая называется *системой уравнений законов сохранения.* В этих случаях будет предполагаться, что

матрица $\|f_{ij}\|$ *невырождена* при всех интересующих нас значениях $u_k$, т.е. что ее определитель отличен от нуля

$$|f_{ij}| \neq 0. \tag{1.5}$$

Это позволяет разрешить систему (1.3) относительно производных по времени $\dfrac{\partial u_k}{\partial t}$ и получить еще одну форму записи уравнений (1.3)

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + a_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.6}$$

где $a_{ik}$ в общем случае зависят от $u_j$.

Такой же вид приобретают уравнения (1.2), если в качестве $u_k$ использованы сами плотности $f_i$. Все три формы записи (1.2), (1.3), (1.6) эквивалентны и будут далее использоваться в равной мере. Коэффициенты этих уравнений $f_{ij}$, $g_{ij}$, $a_{ij}$ не зависят от производных от $u_k$, а только от самих функций $u_k$. Такие системы называются *квазилинейными*. Если же указанные коэффициенты постоянны, то система называется *линейной*.

Многие системы механики сплошной среды, такие как уравнения газовой динамики, уравнения магнитной гидродинамики, уравнения теории упругости, уравнения Максвелла принадлежат к описанному типу систем уравнений, выражающих законы сохранения, и мы в дальнейшем будем рассматривать в качестве основного случая именно такие системы.

Под решением уравнений, выражающих законы сохранения, будет пониматься $n$ функций $u_i(x,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что уравнения (1.1) выполняются при любых $x_1$, $x_2$ и $t$. Такое определение решения происходит из механики сплошной среды (см. Седов [1994], Жермен [1983], Уизем [1977], Годунов [1978]). Часто предпочитают говорить об обобщенных решениях дифференциальных уравнений, которые вводятся посредством некоторых определений, вытекающих из законов сохранения (Рождественский и Яненко [1978], Курант [1964]).

## 1.2. Гиперболические системы. Линейные и линеаризованные уравнения. Слабые разрывы. Инварианты Римана

Система (1.6) (или система (1.3)) называется *гиперболической*, если ее можно привести к виду

$$l_i^{(k)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+c^{(k)}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)=0, \qquad i,k=1,\ldots,n \tag{1.7}$$

с действительными значениями $c^{(k)}=c^{(k)}(u_j)$. По индексу, стоящему в скобках, здесь и далее суммирования нет. При этом матрица $\|l_i^{(k)}(u_j)\|$ предполагается невырожденной. Особенность системы (1.7) состоит в том, что в каждом из уравнений ко всем функциям $u_i$ применяется один и тот же дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial t}+c^{(k)}\frac{\partial}{\partial x},$$

зависящий от номера уравнения $k$.

Смысл матрицы $\|l_i^{(k)}\|$ и функций $c^{(k)}$, зависящих в общем случае от $u_j$, становится понятным из способа приведения системы к виду (1.7), описанного ниже. Чтобы получить какое-либо уравнение системы (1.7), надо $i$-е уравнение системы (1.6) домножить на некоторый множитель $l_i$ и просуммировать затем по $i$. Очевидно, для получения уравнения в форме (1.7) должны выполняться равенства

$$l_i a_{ij}=cl_j,$$

представляющие собой систему однородных линейных алгебраических уравнений для определения $l_i$. Чтобы она имела нетривиальное решение, необходимо обращение в нуль определителя

$$|a_{ij}-c\delta_{ij}|=0,$$

$\delta_{ij}$ – символы Кронекера. Это алгебраическое уравнение для определения величины $c$ называют характеристическим уравнением системы (1.6).

Значит, величины $c(u_m)$ являются *собственными значениями* матрицы $\|a_{ij}(u_m)\|$, а $l_i(u_m)$ - компонентами ее *левого собственного вектора* $\boldsymbol{l}$, соответствующего выбранному $c(u_m)$.

Для возможности приведения системы к форме (1.7) у матрицы $\|a_{ij}\|$ должно существовать $n$ *линейно независимых собственных векторов* $l_i^{(1)}, l_i^{(2)}, \ldots l_i^{(k)}$. Они существуют, если все собственные значения $c^{(1)}, \ldots c^{(k)}$ различны. Если же среди $c^{(k)}$ есть кратные, то для гиперболичности необходимо, чтобы им соответствовало столько независимых собственных векторов, какова кратность $c^{(k)}$. Для этого нужно, чтобы Жорданова форма матрицы $\|a_{ij}\|$ была бы диагональной с действительными элементами. Таким образом, система (1.6) называется *гиперболической*, если в рассматриваемой области изменения $u_m$ *все собственные значения* $c^{(k)}(u_m)$ *матрицы* $\|a_{ij}(u_m)\|$ *действительны и имеется* $n$ *линейно независимых собственных векторов* $\boldsymbol{l}^{(k)}$, или, что то же самое, Жорданова форма матрицы $\|a_{ij}\|$ диагональна с действительными элементами. Если все собственные значения $c^{(k)}(u_m)$ к тому же различны, то говорят о *гиперболичности в узком смысле.* Очевидно, что для приведения системы (1.3) к форме (1.7) не обязательно приводить ее сначала к виду (1.6). Множители $l_i$ можно находить прямо для уравнений (1.5). В дальнейшем всегда будем предполагать, что рассматриваемая система уравнений гиперболическая.

Когда гиперболическая система представлена в виде (1.7), говорят, что она приведена к *характеристической форме.* Левая часть каждого уравнения содержит производные на плоскости $x, t$ вдоль одного направления $dx/dt = c^{(k)}$, которое называется *характеристическим.* Линия, касающаяся в каждой точке одного характеристического направления, называется *характеристикой*, а $c^{(k)}$ – *скоростью характеристики или характеристической скоростью.*

Характеристики, соответствующие собственному значению $c^{(k)}$, представляют на плоскости $x, t$ семейство кривых, заданное уравнением

$$\frac{dx}{dt} = c^{(k)}(u_j(x,t)),$$

где $u_j(x,t)$ – некоторое решение рассматриваемой системы уравнений. Будем называть это семейство кривых $k$ - ым семейством характеристик. Очевидно, характеристики зависят от выбора решения. В каждой точке $M$ плоскости $x,t$ при заданных значениях $u_j$ существует $n$ характеристических направлений, соответствующих $c^{(1)}$, $c^{(2)}$,...,$c^{(n)}$, и через эту точку проходят $n$ характеристик, некоторые из них могут совпадать (рис. 1.1) при совпадении значений $c$.

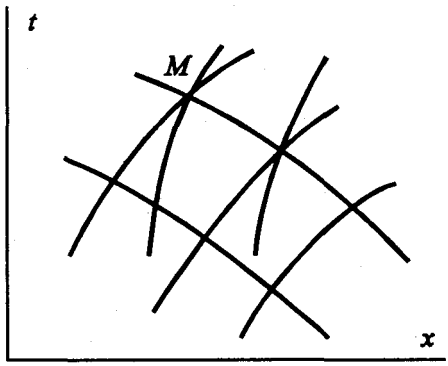



Рис. 1.1.

Каждое из уравнений (1.7), связывающее изменение функций $u_j$ вдоль одного характеристического направления, называют *соотношением на соответствующей характеристике.*

Характеристики играют важную роль в формировании решений системы уравнений гиперболического типа при заданных начальных условиях. Задачу нахождения функций $u_i(x,t)$, удовлетворяющих уравнениям (1.6), когда при $t = t_0$ заданы значения этих функций $u_i(x,t_0) = u_i^0(x)$ при всех $-\infty \leq x \leq \infty$, называют задачей Коши.

В связи с характеристиками особо следует сказать о таком свойстве решений гиперболических уравнений как слабые разрывы. *Слабым разрывом* называется разрыв производных функций, составляющих решение. Можно показать, что слабые разрывы распространяются с характеристическими скоростями, т.е. по характеристикам.

Предположим, что на некоторой линии $x = X(t)$ на плоскости $x, t$ терпит разрыв хотя бы одна из первых производных функций $u_i(x,t)$, а сами функции $u_i(x,t)$ непрерывны. Будем считать, что на линии $x = X(t)$ существуют односторонние производные от $u_i(x,t)$ с обеих сторон от этой линии. Обозначим через $(\partial u_i/\partial t)^-$ и $(\partial u_i/\partial x)^-$ значения производных со стороны $x > X(t)$ и через $(\partial u_i/\partial t)^+$ и $(\partial u_i/\partial x)^+$ – со стороны $x < X(t)$ (для определенности считается $dX/dt > 0$ и знаки "–" и "+" читаются как "перед" и "за" слабым разрывом). Обозначим квадратными скобками величину разрыва (скачок) производных

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\right] = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^+ - \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^-, \qquad \left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right] = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^-.$$

Поскольку по обе стороны от слабого разрыва справедлива система уравнений, которую возьмем в форме (1.6), а коэффициенты $a_{ij}(u_k)$ непрерывны на слабом разрыве, то легко получить соотношения

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\right] + a_{ij}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right], \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{1.8}$$

Эти уравнения получены вычитанием уравнений (1.6), записанных со стороны "–", из тех же уравнений со стороны "+".

Еще соотношения между разрывами производных следуют из условий непрерывности функций $u_i(x,t)$ на слабом разрыве, которые можно записать в виде

$$[u_i] = 0 \qquad \text{на линии} \quad x = X,$$

где $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$. Дифференцируя это равенство вдоль линии $x = X(t)$, получим

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\right] + c\left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right] = 0, \qquad c \equiv \frac{dX}{dt}.$$

В последних равенствах использовано правило, что порядок операций [ ] и $\partial/\partial t$ (или $\partial/\partial x$) можно менять местами

$$\frac{\partial [u_i]}{\partial t} = \frac{\partial u_i^+}{\partial t} - \frac{\partial u_i^-}{\partial t} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\right].$$

Используя полученные выше соотношения, запишем равенства (1.8) в виде

$$(a_{ij} - c\,\delta_{ij})\left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right] = 0. \tag{1.9}$$

Отсюда видно, что существование нетривиальных разрывов первых производных возможно, если выполняется равенство

$$|a_{ij} - c\,\delta_{ij}| = 0,$$

т.е. если *скорость слабого разрыва* $c = dX/dt$ *совпадает с одной из характеристических скоростей системы уравнений* (1.6). Соответственно, линия слабого разрыва на плоскости $x, t$ представляет собой *характеристику.* При этом скачки производных $[\partial u_i/\partial x]$ и $[\partial u_i/\partial t]$ оказываются пропорциональными собственному вектору матрицы $\|a_{ij}\|$ в рассматриваемой точке, а величины этих скачков определяется заданием одной (если $c$ – однократный корень характеристического уравнения (1.9)) произвольной постоянной.

Если терпят разрыв $n$-ые производные от $u_i$, а все $n-1$-е производные непрерывны, то, дифференцируя систему уравнений $n-1$ раз по $x$ и $t$ и действуя подобно предыдущему, можно получить, что линия слабого разрыва совпадает с характеристикой и найти связи между скачками производных. Таким образом, характеристики могут служить линиями склейки решений с различными аналитическими свойствами, представляя часто передние фронты возмущений.

Особенно ясно проявляется роль характеристик, когда система (1.6) является *линейной с постоянными коэффициентами.* Собственные значения матрицы $\|a_{ij}\|$ постоянны, $c^{(m)} = \text{const}$, и характеристики на плоскости $x, t$ являются прямыми

$$x = c^{(m)}t + \text{const}.$$

Линейные уравнения получаются, в частности, при рассмотрении *малых возмущений* на однородном фоне, заданном величинами $u_i = u_i^0 = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим решение системы (1.6) вида

$$u_i = u_i^0 + v_i(x, t), \qquad u_i^0 = \text{const},$$

в котором $v_i$ малы, так что зависимостью $a_{ik}$ от $v_j$ можно пренебречь. Чтобы нелинейная система (1.6) имела решение указанного вида, функции $v_i(x,t)$, представляющие малые возмущения фона, должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + a_{ik}(u_j^0)\frac{\partial v_k}{\partial x} = 0.$$

Эта операция называется *линеаризацией уравнений* (1.6) около состояния $u_i^0$, а решения полученной системы называют линейными волнами. Коэффициенты $a_{ik}(u_j^0)$ постоянны, а характеристические скорости малых возмущений $c^{(m)}(u_j^0)$, а также собственные векторы зависят от того состояния $u_j^0$, около которого проводилась линеаризация.

Если у системы уравнений (1.6) матрица коэффициентов $a_{ij}$ постоянна, то постоянна также и матрица коэффициентов $l_j^{(m)}$. Тогда введением новых искомых функций $\mathrm{w}_m = l_j^{(m)} u_j$ уравнения системы (1.7) приводятся к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathrm{w}_m}{\partial t} + c^{(m)}\frac{\partial \mathrm{w}_m}{\partial x} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n \\ \mathrm{w}_m = l_j^{(m)} u_j, \qquad c^{(m)} = \mathrm{const}, \qquad l_j^{(m)} = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Эта форма записи *линейной системы* замечательна тем, что каждое уравнение содержит *только одну неизвестную функцию* $\mathrm{w}_m$ и система распадается на $n$ независимых уравнений. Каждая из функций $\mathrm{w}_m$ сохраняет свое значение вдоль характеристик своего $m$ -го семейства, т.е. имеют место равенства

$$\mathrm{w}_m = \mathrm{w}_m(x - c^{(m)}t). \tag{1.11}$$

Функции $\mathrm{w}_m(v_j)$ называются *инвариантами Римана линейной системы* (1.6) с постоянными коэффициентами $a_{ik}$. Полученное решение для $\mathrm{w}_m$ (1.11 представляет собой *бегущую волну*, которая движется *с постоянной скоростью* $c^{(m)}$ *без изменения формы*. Общее решение линейной системы представляется в виде суммы $n$ волн, бегущих с характеристическими скоростями.

Поскольку $\det \|l_i^{(k)}\| \neq 0$ , исходные функции $u_k$ находятся из системы алгебраических уравнений (1.10) как линейные комбинации $\mathrm{w}_m$.

В этом случае при решении задачи Коши значения функций $u_k(x)$, а следовательно и $\mathrm{w}_m(x)$ при $t = 0$ заданы начальными условиями в каждой точке оси $x$ . Вдоль каждой из $n$ характеристик на плоскости $x, t$ сохраняется значение соответствующего ей инварианта Римана $\mathrm{w}_m(x - c^m t) = \mathrm{w}_m(x)$. Это значит, что в любую точку плоскости $x, t$ вдоль приходящих в нее $n$ характеристик приносятся значения функций $\mathrm{w}_m(x)$, $m = 1, \ldots, n$, заданные в начальный момент. Так можно построить решение задачи Коши для линейной системы уравнений (1.10) в любой момент времени. Очевидно, распоряжаясь видом функций $\mathrm{w}_m(x - c^{(m)}t)$, можно удовлетворить произвольным начальным условиям для $u_i$, т.е. найти решение задачи Коши также и для функций $u_i(x, t)$.

Решения в виде бегущих волн могут быть получены непосредственно для системы (1.6) (или(1.3)) без перехода к новым функциям $\mathrm{w}_m$. Общее решение системы (1.6) при $a_{ij} = \mathrm{const}$ имеет вид линейной комбинации бегущих волн

$$u_i = \sum_{m=1}^{n} r_i^{(m)} Z_m(x - c^{(m)}t). \tag{1.12}$$

Здесь $\{r_i^{(m)}\}$ – правый собственный вектор матрицы $\|a_{ik}\|$, соответствующий характеристической скорости $c^{(m)}$, второй множитель $Z_m(x - c^{(m)}t)$ – произвольная функция (*амплитуда* $m$ -ой волны), которая при подходящей нормировке вектора $\{r_i^{(m)}\}$ совпадает с инвариантом Римана $\mathrm{w}_m(x - c^{(m)}t)$. Действительно, как известно, левые и правые собственные векторы матрицы $l_i^{(m)}$ и $r_i^{(k)}$ взаимно ортогональны при $c^{(m)} \neq c^{(k)}$. Пронормируем векторы $\{r_i^{(k)}\}$ так, чтобы $l_i^{(m)} r_i^{(m)} = 1$, $m = 1, 2, \ldots n$, тогда, домножив равенство (1.12) на $l_i^q$, получим

$$\mathrm{w}_q = Z_q. \tag{1.13}$$

Функции, задающие зависимость инвариантов Римана от своих аргументов (1.11), могут содержать разрывы (например, если

они были в начальных данных). Согласно равенствам (1.11), скорость распространения такого разрыва совпадает с одной из характеристических скоростей $c^{(m)}$. Для дальнейшего подчеркнем, что, так как $c^{(m)} = \text{const}$, то она совпадает с характеристической скоростью с обеих сторон от разрыва. На этом разрыве испытывает скачок $\mathrm{w}_m$, а остальные $\mathrm{w}_k$, $k \neq m$ – непрерывны. Как видно из равенств (1.12) и (1.13), скачки переменных $u_i$ на этом разрыве пропорциональны правому собственному вектору $\{r_i^{(m)}\}$ матрицы $\|a_{ij}\|$. Очевидно, все сказанное относится к решениям линеаризованных уравнений, т.е. к волнам бесконечно малой амплитуды на однородном фоне $u_k = u_k^0 = \text{const}$. Скорости распространения малых возмущений совпадают с характеристическими скоростями.

Заметим, что если бы уравнения линейной (т.е. при отсутствии зависимости $a_{ij}$ от $u_k$) системы (1.6) имели недифференциальные члены или ее коэффициенты зависели бы от $x$ или $t$, то систему можно было бы привести к виду (1.10), но с правыми частями, не содержащими производных от $\mathrm{w}_j$. При этом функции $\mathrm{w}_m$ будут меняться вдоль характеристик, а сама система (1.7) не будет распадаться в общем случае на отдельные уравнения.

Введение инвариантов Римана и соответствующее преобразование линейной системы к виду (1.10) во многих случаях весьма полезно. К сожалению, когда коэффициенты $a_{ik}$ зависят от $u_j$, такого преобразования в общем случае сделать нельзя. Однако, его можно всегда сделать для систем, состоящих из двух уравнений (Рождественский и Яненко [1983]). Для этого запишем уравнения (1.6) в характеристической форме (1.7)

$$l_\beta^{(\alpha)}(u_\gamma)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial t} + c^{(\alpha)}(u_\gamma)\frac{\partial u_\beta}{\partial x}\right) = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2. \tag{1.14}$$

Здесь собственные значения $c^{(\alpha)}$ и собственные векторы $l_\beta^{(\alpha)}$ являются функциями $u_1, u_2$, причем векторы $\boldsymbol{l}^{(1)}$ и $\boldsymbol{l}^{(2)}$ линейно независимы. Возьмем на плоскости $u_1, u_2$ линии, ортогональные собственным векторам $\boldsymbol{l}^{(1)}$ и $\boldsymbol{l}^{(2)}$, и введем функции $I_1(u_1, u_2)$ и $I_2(u_1, u_2)$, принимающие постоянные значения на этих линиях. Градиенты функций $I_1$ и $I_2$ направлены по векторам $\boldsymbol{l}^{(1)}$ и $\boldsymbol{l}^{(2)}$,

т.е.

$$\frac{\partial I_\alpha}{\partial u_\beta} = \lambda^{(\alpha)} l_\beta^{(\alpha)}.$$

При домножении уравнений (1.14) на коэффициенты пропорциональности $\lambda^{(\alpha)}(u_\gamma)$, система приводится к виду, аналогичному (1.10)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I_1}{\partial t} + c^{(1)}(I_1, I_2)\frac{\partial I_1}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial I_2}{\partial t} + c^{(2)}(I_1, I_2)\frac{\partial I_2}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Функции $I_1(u_\gamma)$ и $I_2(u_\gamma)$ сохраняются на соответствующих характеристиках и называются *инвариантами Римана* для системы (1.6) (при $n$=2) или для системы (1.15). В отличие от уравнений с постоянными коэффициентами теперь $c^{(\alpha)}$ являются функциями от $I_1$ и $I_2$, а система (1.15) для $I_\alpha$ не распадается на отдельные уравнения, как это было в линейном случае.

## 1.3. Граничные условия. Эволюционность

Во многих случаях требуется найти решение системы уравнений в ограниченной области изменения $x$ или в примыкающих одна к другой областях с одинаковыми или разными системами уравнений, действующими в этих областях. Тогда для построения однозначного решения нужно задавать, кроме *начальных* условий, еще *граничные условия* – некоторые соотношения, связывающие функции $u_j$ на границе.

Рассмотрим сначала вопрос о *необходимом числе граничных условий для однозначного построения решений линейных гиперболических систем* уравнений с постоянными коэффициентами при наличии начальных условий.

Пусть имеется граница, положение которой задано ее законом движения $x = X(t)$ или скоростью $dX/dt = W(t)$. Функции $u_j$ считаются заданными в момент времени $t_0$ при $x > X(t_0)$ (начальные условия). Требуется построить решение системы (1.6) при $t > t_0$ в области $x \geq X(t)$. В этом случае может оказаться,

что некоторые из волн, содержащихся в решении (1.12), приносят в точку $x, t$ значения своих амплитуд $w_m$ не из области начальных данных, а с указанной границы, и чтобы найти однозначное решение в этой точке, надо знать значения амплитуд этих волн на границе (*начально-краевая задача*).

Закон движения границы $x = X(t)$ на плоскости $x, t$ представлен жирной линией на рис. 1.2, наклон которой определен скоростью $W$. Будем сначала предполагать, что скорость границы $W$ не совпадает ни с одной из характеристических скоростей системы (1.6), т.е. $W \neq c^{(m)}$, $m = 1, \ldots, n$. Тогда все $n$ характеристик (и соответствующие им бегущие волны) в каждой точке границы можно разделить на *характеристики, уходящие от границы* в область $x > X(t)$, для которых $c^{(r)} > W$, $r = 1, 2, \ldots, s$, и *характеристики, приходящие к границе*, для которых $c^{(l)} < W$, $l = s+1, \ldots, n$. На рис. 1.2 характеристики изображены прямыми со стрелками в направлении роста $t$. На приходящих характеристиках известны из начальных условий значения инвариантов Римана $w_l$ . Для построения решения (1.12) нужно знать значения остальных функций $w_r$ $(r = 1, \ldots s)$ на уходящих от границы характеристиках.

Таким образом, для однозначного продолжения решения в области $t > t_0$ нужно так задать граничные условия, чтобы на кривой $x = X(t)$ они позволили найти $s$ значений инвариантов Римана уходящих волн $w_r$ по известным значениям инвариантов Римана приходящих волн $w_l$, т.е. $w_r = \varphi_r(w_{s+1}, \ldots w_n)$, $r = 1, 2, \ldots s$. Для этого число соотношений, задающих связи между функциями $w_j$ плюс закон движения границы должно быть равно $s + 1$.

Часто в задачах механики движение границы не задано, но имеется выражение для ее скорости $W$ через функции $u_i$, а связи между неизвестными функциями на границе включают и величину $W$. В этом случае все $s + 1$ соотношения становятся равноправными. В исходных переменных $u_i$ они могут быть записаны в виде

$$\Phi_q(u_1, \ldots u_k, W) = 0. \tag{1.16}$$

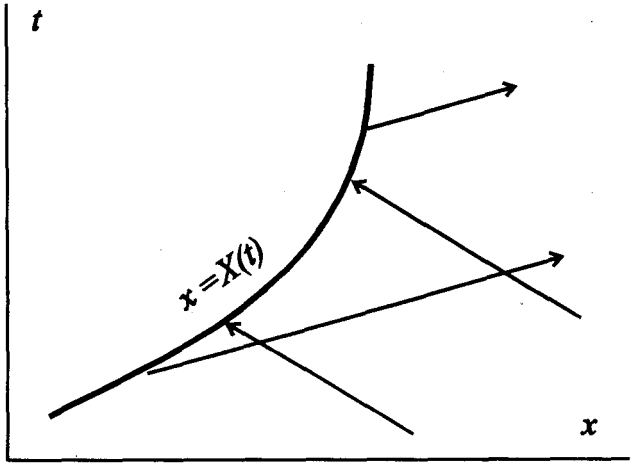



Рис. 1.2.

Эти соотношения должны позволить найти $s+1$ неизвестную величину $w_1$, $w_2$,...$w_s$, $W$. Кроме того, следствием этих уравнений не должно быть никакое соотношение, связывающее между собой амплитуды приходящих волн $w_{s+1}$,...$w_n$, так как эта связь будет противоречить произвольности начальных условий, определяющих эти величины. Чтобы это было возможно, необходимо, чтобы система (1.16) содержала $s+1$ уравнение с отличными от нуля якобианом относительно $w_r$ и $W$, $r = 1, 2 \ldots, s$.

Таким образом, *для однозначной разрешимости начально-краевой задачи для линейной гиперболической системы необходимо задавать* $s+1$ *граничных условий* вида (1.16), обладающих отличным от нуля якобианом относительно $w_1, w_2, \ldots, w_s$ и $W$, где $s$ – число характеристик, уходящих от границы в рассматриваемой точке $x, t$. Такие *граничные условия называются эволюционными.* Часто говорят об *эволюционной границе*, имея в виду то же самое.

Бывают задачи с таким законом движения границы, что необходимое для эволюционности количество условий может ме-

няться вдоль линии $x = X(t)$. Это происходит тогда, когда на ней есть точки, где какая-либо из величин $W - c^{(m)}$ меняет знак. Иллюстрация такого положения для системы двух уравнений ($n = 2$) приведена на рис. 1.3. На участке границы $AB$ оба семейства характеристик приходящие, и требуемое условиями эволюционности одно граничное условие служит для определения закона движения. На участке $BD$ надо задать еще одно условие, на участке $DF$ – два.

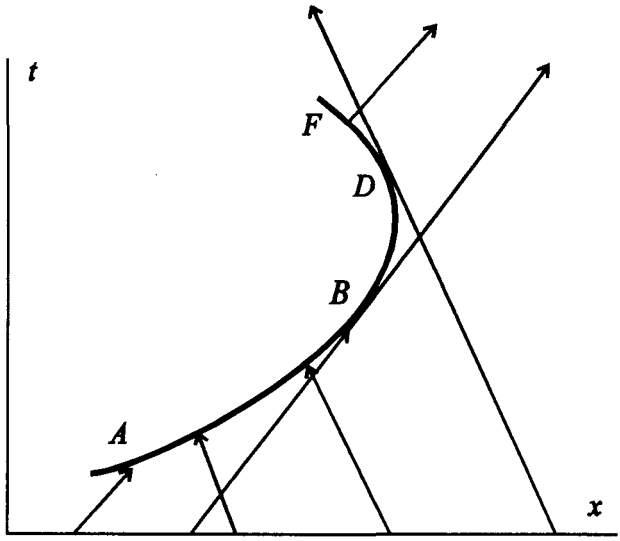



Рис. 1.3.

В некоторых случаях граничные условия должны выставляться на границе, разделяющей области, в каждой из которых решение описывается своей гиперболической системой (это могут быть, в частности, системы и с различным числом неизвестных). В этом случае условие эволюционности границы остается прежним, однако под $s$ следует понимать число всех уходящих в обе стороны от границы характеристик (налево уходят характеристики, у которых скорости меньше, чем $W$).

Отметим здесь особый случай, играющий, однако, в силу некоторых причин, связанных с симметрией ряда важных задач,

заметную роль в теории. Предположим, что система соотношений, предназначенная для определения величин $w_1, w_2, \ldots, w_s$, $W$ на границе, распадается на независимые подсистемы. Тогда условие эволюционности граничных условий заключается в равенстве числа соотношений в каждой из подсистем числу определяемых из этой подсистемы неизвестных (при отличии от нуля соответствующих якобианов). Этот вопрос будет подробно рассматриваться в связи с условиями на разрывах решений (§ 1.6).

*Для нелинейных задач под условиями эволюционности границы подразумевается выполнение условий эволюционности для линеаризованной задачи.* Линеаризация производится в малой окрестности точки на границе, в которой $u_i = u_i^0 = \text{const}$, так что $u_i = u_i^0 + v_i(x,t)$, при этом $v_i$ малы.

Эволюционность означает существование однозначного решения задачи о взаимодействии границы с малыми возмущениями в рамках линеаризованной постановки задачи для функций $v_i$ и $\delta W$, где $\delta W$ – малое возмущение скорости границы.

Нарушение условий эволюционности означает, что линеаризованная (или линейная) задача о взаимодействии малых возмущений с границей или имеет неоднозначное решение или неразрешима. Если число независимых граничных условий недостаточно для однозначного определения уходящих возмущений и возмущения скорости границы $W$, то решение задачи содержит произвол. Обычно это связано с физической нереальностью таких граничных условий (решения правильно поставленных задач не должны содержать произвольных функций). Более глубокое рассмотрение физической сущности проблемы иногда приводит к постановке заранее не очевидных дополнительных граничных условий (см.§ 1.14, § 1.15), которые делают рассматриваемую границу эволюционной.

Линейная задача неразрешима, когда число имеющихся граничных условий превышает $s+1$. В нелинейной постановке решение правильно поставленной задачи должно существовать. Это означает, что взаимодействие границы с малыми возмущениями приводит к немалым по величине возмущениям, например, к распаду неэволюционного разрыва (см. § 1.8, а также Главу 5 для теории упругости).

Часто *неэволюционность граничных условий* рассматривают как *неустойчивость решения задачи.* Если граничных условий недостаточно, то решение линеаризованной задачи содержит произвол, что позволяет построить сколь угодно быстро растущее решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям. Если граничных условий слишком много, но существует решение задачи о взаимодействии границы с малыми возмущениями в нелинейной постановке, когда возникающие возмущения не малы, то это тоже можно рассматривать как неустойчивость.

До сих пор предполагалось, что скорость границы $W$ не равна ни одной из характеристических скоростей. Если такое равенство имеет место, то будем говорить, что на границе выполнено *условие Жуге* (по аналогии с теорией детонационных волн (Ландау и Лившиц [1986])). К такого типа границам относятся некоторые разрывы в задачах механики сплошных сред, играющие важную роль при построении решений. О них будет подробно сказано при описании решений с разрывами в упругих средах (Главы 4 и 5).

## 1.4. Волны Римана

Для системы нелинейных гиперболических уравнений (1.6)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij}(u_k)\frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \qquad i, j, k = 1, \dots n$$

рассмотрим некоторое частное решение специального вида, которое называется *волной Римана*, или *простой волной*, хотя последний термин имеет более общее содержание, так как включает в себя не только одномерные нестационарные движения, но и стационарные двумерные, такие, как волны Прандтля-Майера в газовой динамике и аналогичные волны в других средах (для теории упругости см. Главу 6).

Решение системы (1.6) представляет *волну Римана*, если все $u_k$ являются функциями одной величины $\theta = \theta(x, t)$

$$u_k = u_k(\theta(x, t)), \qquad k = 1, 2, \dots n. \tag{1.17}$$

Подстановка решения (1.17) в уравнения (1.6) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(a_{ij} - c\delta_{ij})\frac{du_j}{d\theta} = 0, \qquad \text{где } c = -\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big/\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{1.18}$$

Нетривиальное решение линейной однородной системы (1.18) относительно функций $du_j/d\theta$ возможно при условии, что

$$|a_{ij} - c\delta_{ij}| = 0. \tag{1.19}$$

Это значит, что введенная указанным образом величина *$c$ совпадает с одной из характеристических скоростей системы* (1.6), т.е. $c = c^{(m)}(u_k)$, $m, k = 1, \ldots n$. При этом уравнения (1.18) определяют в пространстве $u_k$ *интегральные кривые*, касающиеся в каждой точке правого собственного вектора матрицы $\|a_{ik}\|$.

Количество различных решений типа волн Римана определяется числом линейно независимых собственных векторов. Из гиперболичности системы следует, что это число равно $n$. Будем дальше рассматривать одну из волн Римана, соответствующую простому корню характеристического уравнения, опуская индекс $(m)$ у характеристической скорости.

На каждой интегральной кривой все $u_k$ представляют собой функции одного параметра, который может быть выбран на интегральной кривой произвольно и принят в качестве $\theta$. Это может быть длина дуги интегральной кривой, одна из функций $u_k$ или характеристическая скорость $c$, если эти величины меняются вдоль рассматриваемого отрезка интегральной кривой монотонно. После выбора функции $\theta$ для определения ее зависимости от $x$ и $t$ служит второе уравнение (1.18), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + c(u_k(\theta))\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \tag{1.20}$$

где $c$ – один из корней уравнения (1.19). Характеристики уравнения (1.20) $dx/dt = c(u_k(\theta))$ являются одновременно одним из семейств характеристик системы (1.6). Согласно уравнению (1.20)

вдоль этих характеристик $d\theta/dt = 0$, т.е. $\theta = \text{const}$, а следовательно постоянны все $u_k(\theta)$ и $c = c(u_k(\theta))$. Это значит, что на плоскости $x, t$ *характеристики семейства, соответствующего рассматриваемой волне Римана, являются прямыми* и их наклон может быть определен при $t = 0$. Остальные семейства характеристик системы (1.6) в рассматриваемом решении в общем случае криволинейны.

Чтобы решение могло быть волной Римана, между значениями функций $u_k$ в начальный момент должна выполняться та же связь (1.17), что и в выбранном решении $u_i(\theta)$, представляющем волну Римана. Поэтому начальные условия содержат только одну произвольную функцию, например, $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$. Кроме того, решение содержит $n - 1$ постоянных, выделяющих интегральную кривую уравнений (1.18). Решение, представляющее волну Римана, строится на плоскости $x, t$ *однозначно* в области, где характеристики выбранного семейства *не пересекаются.*

Волны Римана являются естественным обобщением *волн малых возмущений*, рассмотренных в § 1.2. Каждый элемент $du_k = (du_k/d\theta)d\theta$ волны Римана представляет изменение, пропорциональное правому собственному вектору матрицы $\|a_{ik}\|$, т.е. такое же, какое имеет место в малых возмущениях, распространяющихся по заданному фону. Совпадают и скорости распространения этих возмущений. Поэтому волну Римана можно представить совокупностью малых возмущений, каждое из которых движется по фону, созданному предыдущим (рис. 1.4). Различие в скоростях этих малых возмущений вследствие $c(u_k) \neq \text{const}$ приводит к *деформации профиля волны.* Движение волны напоминает движение колоды карт, при котором скорость каждой карты мало отличается от скоростей соседних карт.

Эволюция начального возмущения в волне Римана зависит от поведения характеристической скорости $c(\theta)$ на интегральной кривой. Если $c(\theta) = \text{const}$ на интегральной кривой (но может при этом меняться при переходе к другой интегральной кривой), то на плоскости $x, t$ характеристики, соответствующие этой волне Римана, являются параллельными прямыми и, как следует из уравнения (1.20), волна Римана представляет собой бегущую волну

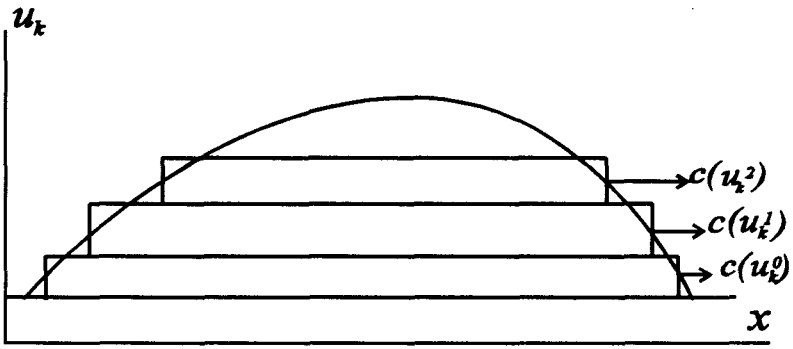



Рис. 1.4.

$$u_k = u_k(\theta), \qquad \theta(x,t) = \theta_0(x - ct).$$

Такие решения характерны для линейных систем. Но волны Римана, у которых $c(\theta) = \text{const}$, нередко встречаются и у нелинейных систем (например, альфвеновские волны в МГД и аналогичные вращательные волны в теории упругости – см. § 3.7).

Если $c$ не постоянна на интегральной кривой волны Римана, то на отрезках, где характеристическая скорость $c$ – монотонная функция, она может быть использована в качестве параметра $\theta$ на кривой. Тогда уравнение (1.20) приобретает стандартный вид уравнения Хопфа для нахождения функции $c(x,t)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \tag{1.21}$$

с начальным условием $c(x,0) = c_0(x)$.

Если на всей оси $x$ выполнено неравенство $dc_0/dx > 0$, то характеристики на плоскости $x,t$, выходящие из точек оси $x$ в область $t > 0$, являются расходящимися прямыми и решение существует и однозначно при всех $t > 0$. Если же $dc_0/dx < 0$ на каком-то интервале оси $x$, то найдется значение $t = t_*$ такое, что при $t > t_*$ характеристики будут пересекаться ($t_* = \min(dc_0/dx)^{-1}$). Формальное продолжение решения в область $t > t_*$ делает это решение неоднозначным.

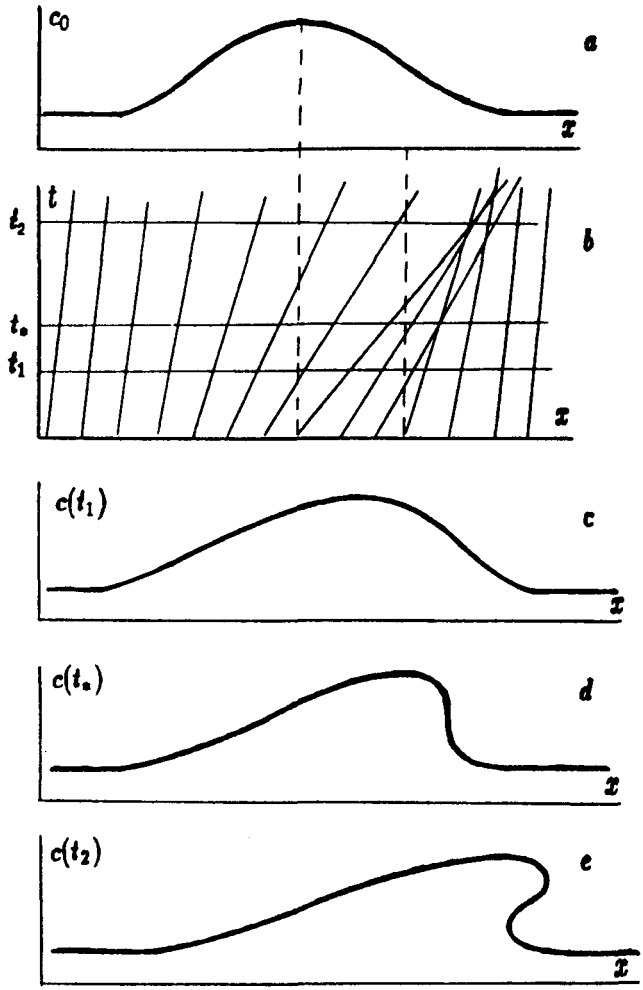



Рис. 1.5.

На рис. 1.5 изображена эволюция волны Римана, возникающей из начальных условий. соответствующих локальному увеличению характеристической скорости $c$. На рис. 1.5 $a$ представлены начальные значения $c(x,0) = c_0(x)$, на рис. 1.5 $b$ – расположение характеристик на плоскости $x, t$, на рис. 1.5 $c, d, e$ изо-

бражены профили функции $c(x,t)$ в различные последовательные моменты времени $t_1, t_*, t_2$, отмеченные на рис. 1.5 *b*.

Верхняя часть профиля $c(x)$ смещается быстрее, чем подошва, и в момент времени $t_*$ достигается положение с вертикальной касательной ($\partial c/\partial x = \infty$) в некоторой точке. При дальнейшем продолжении этого решения ($t_2 > t_*$) характеристики пересекаются (рис. 1.5 *b*) и решение становится неоднозначным (рис. 1.5 *d*). Это явление называют *опрокидыванием волны*.

В механике сплошной среды, где неоднозначные решения в большинстве случаев не имеют смысла, принимается, что в момент $t = t_*$ решение перестает быть непрерывным, благодаря чему остается однозначным. Возникает необходимость строить и исследовать решения, содержащие разрывы, что будет сделано в следующих параграфах.

Характеристики, начинающиеся на том участке оси $x$, где $dc_0/dx > 0$, расходятся, профиль функции $c(x,t)$ со временем становится более пологим и область, занятая этой частью волны Римана, *расширяется*. Расширяющиеся волны Римана представляют гладкое решение, существующее как угодно долго.

Если нелинейность в уравнениях (1.6) не очень большая (однако, $\partial c/\partial\theta \neq 0$), то при сходящихся характеристиках решение достаточно долго остается непрерывным. Но как бы малы ни были начальные возмущения, если подождать достаточно долго, характеристики обязательно пересекутся и волна опрокинется. Это свойство решения заложено в самих уравнениях и не связано с гладкостью начальных функций.

Разрыв может содержаться и в начальной функции $c(x,0) = c_0(x)$. Тогда, если значения $c_0$ справа от него больше, чем значения слева, то из него разовьется непрерывное решение типа волны Римана. На рис. 1.6 изображена эволюция волны Римана из начальных условий для $c$, заданных в виде ступеньки: $c = c_1$ при $x > 0$ и $c = c_2$ при $x < 0$, причем $c_2 < c_1$. Из точки $x = 0$ при этом выходит пучок прямолинейных характеристик с наклонами, меняющимися от $c_1$ до $c_2$ (рис. 1.6 *b*) и, следовательно, решение зависит от $x/t$. Волна Римана в этом случае называется *автомодельной, или центрированной*. Начальная ступенька размывается на некоторую область, ширина которой линейно

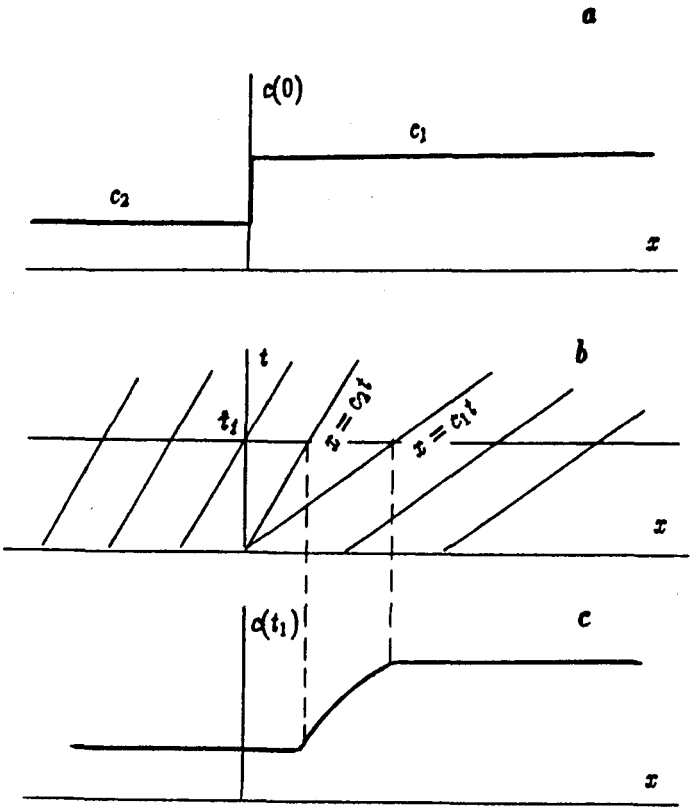



Рис. 1.6.

растет со временем. Справа и слева к ней примыкают области с постоянными значениями $c$ (рис. 1.6 $c$).

Решение, изображенное на рис. 1.6, может быть получено предельным переходом из волны Римана, соответствующей начальным данным в виде "размазанной ступеньки", когда ширина "размазки" стремится к нулю. Если рассмотреть такой же предельный переход для ступеньки, в которой $c_1 < c_2$, то получим, что время $t_*$ однозначности решения в виде волны Римана будет стремиться к нулю вместе с шириной размазки. Если считать, что при $t > t_*$ решение содержит разрыв, то в пределе получим,

что при начальных данных в виде неразмазанной ступеньки с $c_1 < c_2$ разрыв возникает с самого начала.

Когда в волне Римана $c = \text{const}$, разрывы в начальных условиях сохраняются при всех $t$ в решении типа бегущей волны. Такие разрывы существуют, в частности, и у линейных систем.

## 1.5. Разрывы и соотношения на них. Ударная адиабата

В предыдущем параграфе выяснено, что эволюция непрерывного решения системы дифференциальных уравнений (1.6) или отсутствие непрерывности начальных условий могут приводить к необходимости строить решения, содержащие разрывы функций $u_j$. Поверхность, на которой $u_j$ терпят разрыв (в рассматриваемом одномерном случае – точка $x = X(t)$) оси $x$), называется *поверхностью (или фронтом) сильного разрыва.* Так как на этой поверхности значения функций $u_i$ меняются скачком, то будем называть эту поверхность также фронтом (поверхностью) скачка. Если же разрыв имеют производные от $u_k$, то такая поверхность называется *фронтом слабого разрыва* (скачка производных, § 1.2).

Заметим, что эти определения относятся к системам уравнений первого порядка. В механике сплошной среды традиционно для многих моделей (в том числе в теории упругости) система может содержать уравнения более высокого порядка, которые, конечно, могут быть записаны в виде (1.6) путем введения вспомогательных функций. Если система уравнений содержит вторые или более высокие производные, то *сильным разрывом называется разрыв более низких производных*, чем старшие из тех, которые входят в уравнения. Если рвутся старшие производные, входящие в уравнения, или более высокие производные, то разрыв называется слабым. Мы будем рассматривать далее только сильные разрывы.

По обе стороны от поверхности разрыва функции $u_i$ будем считать гладкими, подчиняющимися системе дифференциальных уравнений вида (1.2). Для получения соотношений на раз-

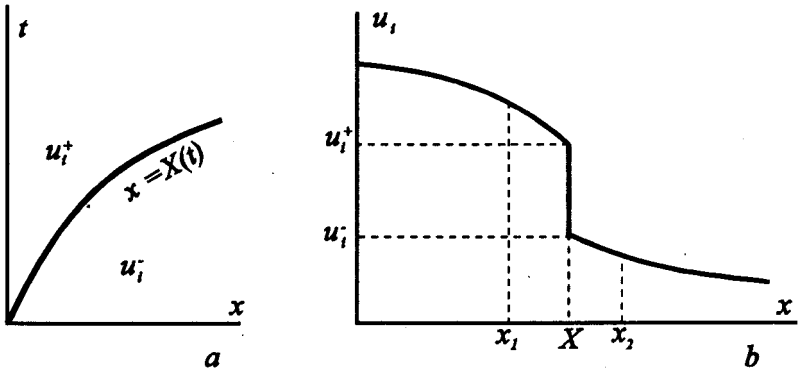



Рис. 1.7.

рыве они непригодны и необходимо вернуться к исходным интегральным уравнениям (1.1), не предполагающим обязательной непрерывности и дифференцируемости входящих в них функций и имеющим вследствие этого более широкую область применения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} f_i(u_k)\,dx + g_i(u_k(x_2,t)) - g_i(u_k(x_1,t)) = 0.$$

Здесь $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, $x_1 < x_2$. Как было сказано ранее, $f_i(u_k)$ можно толковать как плотность некоторой величины, а $g_i(u_k))$ – ее поток через единицу поверхности плоскости $x = \text{const}$. Рассмотрим, какие связи на значения $u_k$ в точках, примыкающих к поверхности разрыва, накладывают уравнения (1.1). Будем предполагать, что функции $u_k$ терпят разрыв (испытывают скачок) на линии $x = X(t)$ на плоскости $x, t$, по обе стороны от которой они считаются непрерывными и дифференцируемыми (рис. 1.7). Выберем направление оси $x$ так, чтобы

$$\frac{dX}{dt} = W \geq 0$$

и будем говорить, что область $x > X(t)$ соответствует состоянию *перед разрывом*, а область $x < X(t)$ – состоянию *за разрывом*. Значения всех функций непосредственно перед разрывом (т.е. при стремлении точки $x, t$ из области перед разрывом к линии разрыва) будем снабжать индексом "$-$", и аналогично, значения функций непосредственно за разрывом – индексом "$+$".

Выберем в уравнении (1.1) неподвижные пределы интегрирования $x_1$ и $x_2$, так чтобы в рассматриваемый момент времени $x_1 < X(t) < x_2$. Тогда, разбивая интервал интегрирования в интеграле по $x$ точкой $x = X(t)$ на две части и дифференцируя по времени получившиеся интегралы с учетом зависимости $X$ от $t$, получим

$$\frac{dX}{dt}(f_i^+ - f_i^-) + \int\limits_{x_1}^{X} \frac{\partial f_i}{\partial t}\,dx + \int\limits_{X}^{x_2} \frac{\partial f_i}{\partial t}\,dx + g_i(u_k(x_2)) - g_i(u_k(x_1)) = 0,$$

$$f^+ = f(u_k^+), \qquad f^- = f(u_k^-).$$

Если в последнем равенстве устремить значения $x_1$ и $x_2$ к $X$, то в пределе интегралы обратятся в нуль и мы получим соотношения на разрывах

$$[g_i] - W[f_i] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad W = dX/dt. \tag{1.22}$$

Здесь и далее приняты обозначения $[g_i]$, $[f_i]$ для скачков соответствующих величин на фронте разрыва

$$[g_i] = g_i(u_k^+) - g_i(u_k^-), \quad [f_i] = f_i(u_k^+) - f_i(u_k^-).$$

Заметим, что величина $g_i' = g_i - Wf_i$ представляет собой поток в системе координат, движущейся со скоростью $W$,так что соотношения (1.22) выражают непрерывность этих потоков на разрыве $[g_i'] = 0$.

Соотношения (1.22), вытекающие из интегральных законов сохранения (1.1), должны выполняться на всех поверхностях разрыва. Будем называть их *основными соотношениями на разрыве или законами сохранения на разрыве*. Этим, вообще говоря,

не исключается возможность добавления к системе (1.22) дополнительных соотношений, следующих из других физических соображений, не отраженных законами сохранения (1.1). Некоторые соображения относительно причин появления дополнительных соотношений будут обсуждаться в § 1.13, § 1.14 и § 1.15.

В § 1.1 говорилось, что иногда уравнения (1.1) содержат члены вида $\int_{x_1}^{x_2} h_i(u_k, x, t)\, dx$, представляющие внешние воздействия, которые можно трактовать как источники величин $f_i$. В систему (1.2) функции $h_i$ входят как недифференциальные члены, делая ее неоднородной. Если функции $h_i$ ограничены, то в условия на разрыве (1.22) они не войдут. Если же $h_i$ представляют сосредоточенные на поверхности разрыва внешние воздействия в виде $\delta$ - функций от $x - X$, то соотношения (1.22) приобретают дополнительные члены

$$[g_i] - W[f_i] = H_i, \qquad H_i = \lim_{\Delta x \to 0} \int\limits_{-\Delta x}^{\Delta x} h_i(x - X)\, dx.$$

Далее в основном будут изучаться "классические" разрывы, все соотношения на которых получены описанным образом из законов сохранения, число их совпадает с числом неизвестных функций, а внешние воздействия отсутствуют, т.е. когда система соотношений на разрыве дается равенствами (1.22). Типичными и хорошо известными представителями таких разрывов являются газодинамические ударные волны.

Бывает удобно в качестве функций $u_i$ принять сами плотности величин $f_i$ .Тогда соотношения на разрыве (1.22) запишутся в виде

$$[g_i] - W[u_i] = 0. \tag{1.23}$$

Это представление более удобно тогда, когда соответствующие дифференциальные уравнения записаны в форме (1.6).

В некоторых случаях систему соотношений (1.22) будем записывать в общем неявном виде

$$F_i(u_k^-, u_k^+, W) = 0 \qquad i, k = 1, 2, \ldots n. \tag{1.24}$$

Ввиду того, что переменные $u_i^-$ и $u_i^+$ входят в соотношения (1.22) симметричным образом, то с точки зрения этих уравнений оба набора переменных $u_i^+$ или $u_i^-$ полностью равноправны и каждый из них может соответствовать состоянию перед разрывом, а другой набор переменных – состоянию за разрывом. Однако, соображения, излагаемые в последующих параграфах этой главы, связанные, в частности, со вторым законом термодинамики, ликвидируют, как правило, этот произвол.

Если состояние $u_k^-$ перед разрывом известно и фиксировано, то соотношения (1.24) можно рассматривать как систему $n$ уравнений, которые связывают $n+1$ неизвестную функцию $u_k^+$, $W$, т.е. эта система содержит один свободный параметр.

*Ударной адиабатой*, по аналогии с газовой динамикой, будем называть множество состояний в пространстве $u_i$, в которые можно перейти из фиксированного начального состояния $u_i^-$, используя разрывные решения (скачки) с соблюдением уравнений законов сохранения при подходящем значении $W$. Уравнение ударной адиабаты можно получить путем исключения $W$ из основных соотношений на разрыве, например, из уравнений (1.23). Обычно это однопараметрическое множество – кривая в пространстве $u_i$. При непрерывных функциях $f$ и $g$ эта кривая проходит через начальную точку $u_i$. Ударную адиабату можно задать параметрически $W = W(\sigma)$, $u_k = u_k^+(\sigma)$, где $\sigma$ – параметр на ударной адиабате, например, длина дуги. В некоторых вырожденных случаях ударная адиабата может оказаться неодномерной или целому отрезку на ударной адиабате может соответствовать одно значение $W$.

Рассмотрим важный частный вид разрывов. В предыдущем параграфе при рассмотрении волн Римана был отмечен случай, когда волна Римана представляет собой бегущую волну, форма которой задается произвольной начальной функцией и не меняется в процессе движения. В частности, эта функция может содержать разрыв, который и распространяется с той же скоростью, что и вся волна, т.е. с характеристической скоростью. Такие бегущие волны, содержащие разрыв параметров, также описываются соотношениями на разрыве (1.22). Отличительным

свойством таких разрывов является их обратимость. Состояния перед и за разрывом можно поменять местами. В дальнейшем такие разрывы будем называть *обратимыми*. Их скорость $W$ совпадает с соответствующей этой волне характеристической скоростью спереди и сзади. Все другие разрывы будем называть *ударными волнами*.

## 1.6. Условия эволюционности разрывов

Поверхности разрывов служат границами для областей, в которых функции $u_i$ непрерывны, дифференцируемы и подчиняются дифференциальным уравнениям. Для обеспечения корректности решения дифференциальных систем уравнений по обе стороны от фронта разрыва необходимо выполнение условий эволюционности. Как было определено в § 1.3, условия эволюционности для гиперболических систем уравнений заключаются в возможности однозначно решить задачу о взаимодействии границы (в рассматриваемом случае – поверхности разрыва) с малыми возмущениями, зависящими от $x$ и $t$, в рамках линейного приближения.

*Условия эволюционности разрыва* состоят в том, что количество характеристик, уходящих от него в обе стороны на плоскости $x$,$t$, должно быть на единицу меньше числа граничных условий. Количество уходящих характеристик определяется относительными скоростями разрыва $W$ и малых возмущений, т.е. характеристик $c_i^-$, $c_i^+$.

Рассмотрим сначала общий случай, когда по разные стороны от разрыва действуют различные гиперболические системы уравнений, описывающие процессы перед и за разрывом. Их порядки обозначим через $n^-$ и $n^+$ соответственно. Пусть число независимых соотношений на разрыве выражено числом $N$. Тогда, *согласно условию эволюционности, число уходящих характеристик должно быть равно* $N-1$.

В каждой из областей по разные стороны от разрыва пронумеруем характеристические скорости так, что

$$c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{n^\pm}.$$

Предположим сначала, что скорость скачка $W$ не совпадает ни с одной из характеристических скоростей $c_i^-$ и $c_i^+$. Пусть налево (в сторону за разрывом) уходит $k-1$ характеристика. Тогда направо (в сторону перед разрывом), согласно условию эволюционности, должны уходить $N-k$ характеристик. Это означает, что одновременно должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} &c_{k-1}^+ < W < c_k^+ \\ &c_l^- < W < c_{l+1}^-, \qquad l-k = n^- - N. \end{aligned} \tag{1.25}$$

При $k=1$ влево не уходит ни одной характеристики и неравенство, содержащее $c_{k-1}^+$ писать не нужно, либо это неравенство можно писать формально, введя, по определению, значение $c_0^+ = \infty$. Точно так же при $l = n^-$ не следует писать неравенство, содержащее $c_{l+1}^-$, или можно его писать, введя, по определению, величину $c_{n^-+1}^- = \infty$. Очевидно, что должны выполняться неравенства $0 < k \le n^+$ и $0 < l \le n^-$.

Объединяя предыдущие неравенства, получим

$$\max\{c_{k-1}^+, c_l^-\} < W < \min\{c_k^+, c_{l+1}^-\},$$
$$c_0^+ = -\infty, \qquad c_{n+1}^- = \infty.$$

Условия эволюционности определяются числом $N$ граничных условий на разрыве. Если предположить, что все эти $N$ граничных условий выражают законы сохранения, которые обычно бывают известны заранее, то эволюционность относительно этих $N$ граничных условий в предположении об отсутствии каких-то других, дополнительных, соотношений на разрыве будем иногда называть (чтобы подчеркнуть это обстоятельство) *априорной эволюционностью*. Необходимость использования в некоторых случаях дополнительных граничных условий будет обсуждаться в §§ 1.14, 1.15 (см. также § 8.2). При наличии дополнительных соотношений априорно эволюционные разрывы оказываются неэволюционными, а эволюционными становятся априорно неэволюционные разрывы.

Иллюстрацию получения неравенств (1.25) дает рис. 1.8, где на двух параллельных осях отложены в одинаковом масштабе характеристические скорости $c_i^+$ и $c_j^-$ и скорость скачка $W$.

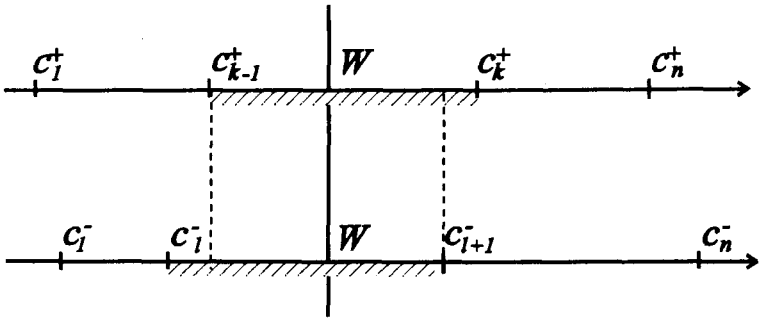



Рис. 1.8.

*Разрыв эволюционен* в области перекрытия заштрихованных на рис. 1.8 отрезков.

Разрывы, у которых скорость $W$ совпадает с одной из характеристических, тоже могут оказаться эволюционными. Например, разрывы бесконечно малой амплитуды, рассмотренные в § 1.2, для которых $c_k^- = W = c_k^+$, эволюционны. Поэтому в соотношениях, выражающих условия эволюционности, будем дополнять неравенства знаком равенства. Однако, эволюционность таких предельных разрывов (дальше мы будем называть их *разрывами Жуге или ударными волнами Жуге*) надо проверять отдельно в каждом конкретном случае.

Наиболее важным для приложений является случай, когда $n^- = n^+ = N = n$. В дальнейшем это будет приниматься всегда, если не оговорено противное. Такой разрыв удовлетворяет *условиям эволюционности*, или просто *эволюционен* (Ландау и Лифшиц [1986]), если выполнена система соотношений

$$c_{k-1}^{+} \leq W \leq c_k^{+}, \qquad c_k^{-} \leq W \leq c_{k+1}^{-},$$
$$c_0^{+} = -\infty, \qquad c_{n+1}^{-} = \infty. \tag{1.26}$$

Будем называть его *разрывом $k$ - того типа* ($k = 1, 2, \ldots n$). Применительно к газовой динамике условия эволюционности были даны Ландау в 1944 г. (Ландау и Лифшиц [1987]). Условия (1.26) называются также *условиями Лакса* (Lax [1957]), который получил их в случае системы $n$ уравнений, выражающих законы сохранения. Очевидно, условия (1.26) соответствуют $n$ *различным типам разрывов* в зависимости от того, какое из значений принимает $k$=1,2,...$n$.

Невыполнение требований (1.26) ведет к неэволюционности разрыва. В § 1.3 было показано, что неэволюционность границы можно трактовать как ее неустойчивость по отношению к малым возмущениям в рамках линейного приближения. Таким образом, условия (1.26) можно рассматривать как *необходимые условия устойчивости* (а значит и возможности существования) разрыва данного типа.

Часто бывает удобно изображать области, в которых выполнены соотношения (1.26), на схеме, где использованные ранее оси $c^-$, $c^+$ расположены ортогонально одна другой (рис. 1.9) (Ахиезер, Любарский, Половин [1958]).

Если рассматриваются ударные волны, распространяющиеся по некоторому заданному состоянию, то характеристические скорости $c_i^-$ фиксированы и можно представлять $W$ и $c_i^-$ на оси $c^-$ в реальном масштабе величин. В то же время $c_i^+$ меняют свои величины вдоль ударной адиабаты, но мы будем изображать на рис. 1.9 линии $c = c_i^+$ как прямые параллельные оси $c^-$. Это означает, что масштаб по оси $c_+$ является условным, но нам необходимо только наглядное представление неравенств между отмеченными на оси величинами $W$ и $c_i^+$.

Точки с координатами $W, W$, удовлетворяющие неравенствам (1.26), заполняют на плоскости $c^-, c_+$ прямоугольники вместе с их границами, заштрихованные на рис. 1.9. Имеется $n$ заштрихованных прямоугольников, каждый из которых соответству-

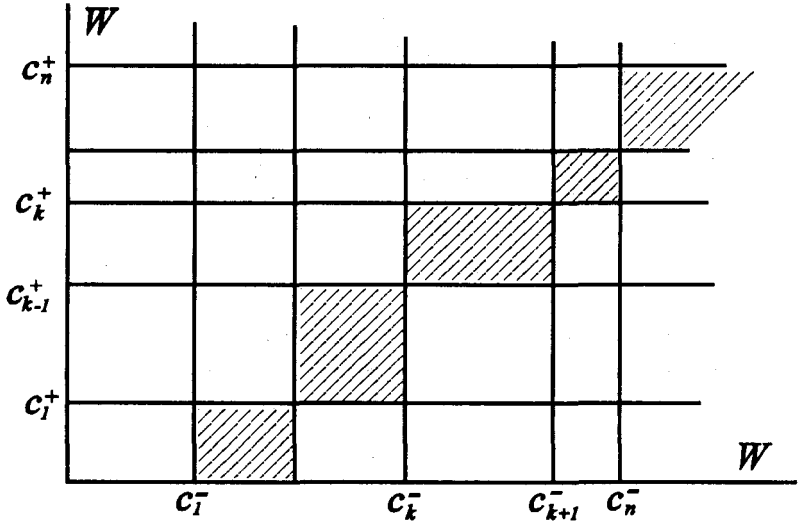



Рис. 1.9.

ет *одному из типов эволюционных разрывов.* На сетке плоскости $c^-, c^+$ *эволюционные прямоугольники расположены на одну клетку правее диагонали координатного угла.*

Левее и выше заштрихованных клеток лежат области значений $W$, для которых число уходящих от разрыва волн *больше, чем условий на разрыве*, полученных из законов сохранения. Однако, бывают ситуации, когда на разрыве выставляются дополнительные граничные условия, вытекающие не из законов сохранения, а из учета физических процессов внутри *структуры* разрывов. Наличие дополнительных соотношений может сделать эволюционными ударные волны, соответствующие прямоугольникам, сдвинутым относительно исходных влево-вверх. Источник появления таких соотношений будет обсуждаться ниже, в § 1.14 и § 1.15.

Для прямоугольников, которые лежат правее и ниже заштрихованных на рис. 1.9, число уходящих характеристик *меньше, чем необходимо для эволюционности разрывов.* Как правило,

эти неэволюционные разрывы представляют два или более слившихся эволюционных разрыва, которые при действии малых возмущений приобретают различные скорости и первоначальный разрыв распадается. Это явление будет рассмотрено в дальнейшем при изучении ударных волн в упругом теле (Глава 4).

Бывают случаи, когда линеаризованная система соотношений на разрыве *распадается на две (или несколько) независимых подсистемы* и возмущение $\delta W$ скорости скачка входит тогда лишь в одну из них. Условия эволюционности могут быть выставлены по-прежнему для всей системы в виде заштрихованных на рис. 1.9 прямоугольников, а затем, сверх того, для одной из двух подсистем еще дополнительные условия эволюционности. Обычно удобно требовать выполнения условий эволюционности для той подсистемы, которая не содержит $\delta W$. Для нее число соотношений на разрыве равно числу уходящих характеристик и эволюционные прямоугольники, которые соответствуют этой подсистеме, расположены вдоль диагонали координатного угла. Эволюционными для всей задачи будут разрывы, у которых $W$ попало в *перекрывающиеся прямоугольники.*

Наиболее частая причина, приводящая к расщеплению линеаризованных граничных условий, связана с инвариантностью задачи относительно изменения на противоположное направления одной или обеих осей, лежащих в плоскости фронта ударной волны. Подобная ситуация имеет место в магнитной гидродинамике (см., например, Куликовский и Любимов [1962]), а также в некоторых других случаях (см. ниже Главу 4).

В случае, когда системы уравнений различны по разные стороны разрыва, на плоскости $c^-, c^+$ эволюционным разрывам будет соответствовать некоторая система прямоугольников, идущая снизу-слева наверх-направо, примыкающих один к другому углами.

При заданном состоянии перед разрывом условия эволюционности (1.26) накладывают дополнительные ограничения на те состояния, которые могут осуществляться за разрывом, т.е. выделяют на ударной адиабате, которая в общем случае представляет собой кривую, отрезки, отвечающие требованиям эволюционности. Будем для краткости называть их *эволюционными отрез-*

*ками ударной адиабаты.* Каждому типу разрыва соответствует свой эволюционный отрезок (один или несколько) на ударной адиабате. Остальные состояния на ударной адиабате недостижимы посредством одного эволюционного скачка из начальной точки.

При исследовании эволюционности точек ударной адиабаты удобно для дальнейшего исследования схематически отобразить ее на плоскости $c^-, c^+$. Для этого используем выражение для скорости разрыва $W$ как функции некоторого параметра $\sigma$, отсчитываемого вдоль ударной адиабаты. По горизонтальной оси можно откладывать скорость ударной волны $W(\sigma)$ в реальном масштабе, а по вертикальной оси откладывать $W(\sigma)$ схематически, качественно, соблюдая только знаки неравенств между $W(\sigma)$ и $c_i^+(\sigma)$, а также непрерывность этих функций. Линия $W(\sigma)$ изображает на плоскости $c^-, c^+$ ударную адиабату. *Отрезки кривой $W(\sigma)$, попавшие в заштрихованные прямоугольники, соответствуют эволюционным участкам ударной адиабаты.* Схема на плоскости $c^-, c^+$ помогает наглядно представить их количество и расположение. Будем называть ее *диаграммой эволюционности.*

Точки пересечения таким образом построенного на плоскости $c^-, c^+$ графика $W(\sigma)$ с нанесенной сеткой линий $c^- = c_i^-$, $c^+ = c_k^+$ соответствуют концам отрезков эволюционности. В этих точках $W = c_i^-$ и $W = c_k^+$ и скорость скачка совпадает с одной из характеристических скоростей впереди или сзади разрыва. Следуя терминологии, принятой в теории газодинамической детонации, будем называть эти состояния на ударной адиабате *точками Жуге.*

Ввиду симметрии условий на разрыве (1.22) по отношению к переменным $u_i^-$ и $u_i^+$, ударная адиабата, которая представляет скачки из начальной точки $u_i^-$ в произвольную точку $u_i^+$ на ударной адиабате, также представляет скачки из точки $u_i^+$ в начальную точку $u_i^-$. Легко понять из упомянутой выше симметрии, что эволюционные прямоугольники для скачков $u_i^+ \to u_i^-$ расположены на плоскости $c^-, c^+$ симметрично эволюционным прямоугольникам скачков $u_i^- \to u_i^+$ по отношению к диагонали координатного угла.

При наличии у рассматриваемой системы обратимого разрыва (см. § 1.5), соответствующая этим разрывам часть ударной адиабаты отображается на плоскость $c^-, c^+$ в виде одной точки $(c_k^-, c_k^+)$.

## 1.7. Разрывы малой интенсивности

Ранее, в § 1.2 при рассмотрении в линейном приближении малых возмущений, распространяющихся по однородному фону, было показано, что общее решение задачи представляет собой линейную комбинацию из $n$ бегущих волн, каждая из которых движется с одной из характеристических скоростей и содержит произвольную функцию от $x - c^{(k)}t$, $c^{(k)} = \text{const}$. Поскольку эта функция может испытывать разрыв, то выражения, полученные в § 1.2, наряду с непрерывными волнами описывают также разрывы малой амплитуды в линейном приближении. В частности, из этих результатов следует, что малые разрывы могут принадлежать к одному из $n$ типов и что скорость разрывов в линейном приближении совпадает со скоростью характеристик.

Пусть теперь изменение параметров на разрыве мало, но не настолько, чтобы пользоваться линейным приближением. Будем для краткости называть такие *разрывы малыми* в отличие от термина *слабые*, который занят за другим понятием. На ударной адиабате, заданной уравнениями (1.23)

$$g_i(u_k^+) - g_i(u_k^-) = W(u_i^+ - u_i^-),$$

сейчас нас интересует область, примыкающая к начальной точке $u_i^-$. Будем считать состояние перед скачком (начальное) заданным и фиксированным, т.е. $u_i^- = \text{const}$. Состояние за скачком $u_i^+$ можно рассматривать как функцию некоторого параметра $\sigma$, отсчитываемого вдоль дуги ударной адиабаты, начиная от точки $u_i^-$. Параметр $\sigma$, который считается малым, представляет порядок величины амплитуды скачка функции $u_k$, т.е. величины $[u_k]$. Индекс "+" для обозначения параметров за скачком далее опускаем, считая $u_i^+ = u_i(\sigma)$ . В окрестности начальной точки на ударной адиабате функции $u_i(\sigma)$ и $W(\sigma)$ можно исследовать, пользуясь их разложением по малому параметру $\sigma$.

Сравним изменение параметров в малом скачке и в волне Римана того же типа, т.е. таких, которые в линейном приближении совпадают.

Волны Римана являются решением системы (1.6), полученной при $u_i = f_i$ из тех же интегральных законов сохранения (1.1), что и соотношения (1.23)

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + a_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \qquad a_{ik}(u_j) = \frac{\partial g_i}{\partial u_k}.$$

Изменение $u_k$ в волне Римана задается интегральными кривыми, которые в каждой точке касаются правого собственного вектора $r_k$ матрицы $\|a_{ij}\|$, а фазовой скоростью волны служит соответствующее собственное значение $c(u_i)$ этой матрицы (§ 1.3). Обозначим в начальном состоянии перед волной Римана $a_{ij}(u_k^-) = a_{ij}^-$, $c(u_k^-) = c^-$ и будем считать, что $c^-$ – однократное собственное значение.

Докажем следующие утверждения (Лакс [1957]): (1) Ударная адиабата и интегральная кривая соответствующей волны Римана с однократной характеристической скоростью *с имеют в начальном состоянии точку касания второго порядка* (т.е. у них в точке $u_i = u_i^-$ общая касательная и кривизна); (2) *Скорость ударной волны равна полусумме характеристических скоростей перед и за разрывом* с ошибкой, не превышающей по порядку величины квадрата изменений $u_i$ в разрыве.

Для вычисления $W(\sigma)$ на ударной адиабате воспользуемся разложением по $\sigma$

$$W(\sigma) = W(0) + \dot{W}(0)\sigma + O(\sigma^2)$$

и найдем его коэффициенты в начальной точке $\sigma = 0$, $u_i = u_i^-$. Для этого продифференцируем по $\sigma$ (т.е. вдоль ударной адиабаты) соотношения на разрыве (1.23), помня при этом, что $u_i^- =$ const. Такое дифференцирование обозначаем верхней точкой. Воспользовавшись равенством $a_{ij} = \partial g_i/\partial u_j$, получим

$$a_{ij}\dot{u}_j - W\dot{u}_i - \dot{W}(u_i - u_i^-) = 0. \tag{1.27}$$

При $\sigma = 0$ последний член пропадает, тогда $(a_{ij}^- - W(0)\delta_{ij})\dot{u}_j = 0$. Отсюда получаем $W(0) = c^-$, где $c^-$ – некоторое однократное

собственное значение матрицы $\|a_{ij}\|$ , и $\dot{u}_i(0) = \lambda r_i^-$, где $\{r_i^-\}$ – правый собственный вектор той же матрицы, $\lambda$ – численный множитель. Таким образом, ударная адиабата, так же как интегральная кривая волны Римана, касается собственного вектора $\{r_i^-\}$, т.е. они имеют в начальной точке общую касательную.

Будем для определенности считать, что собственные векторы пронормированы, $|\boldsymbol{r}| = 1$, а в качестве параметра $\sigma$ использована длина дуги ударной адиабаты. Тогда величины $\dot{u}_i$ тоже представляют единичный вектор, а $\lambda = 1$, т.е. $\dot{u}_i(0) = r_i^-$.

Продифференцируем по $\sigma$ равенство (1.27)

$$a_{ij}\ddot{u}_j + \dot{a}_{ij}\dot{u}_j - W\ddot{u}_i - 2\dot{W}\dot{u}_i - \ddot{W}(u_i - u_i^-) = 0.$$

Положим здесь $\sigma = 0$ и, учитывая, что $\dot{u}_k(0) = r_k^-$, $W(0) = c^-$, получим

$$(a_{ij}^- - c^-\delta_{ij})\ddot{u}_j^- + \dot{a}_{ij}^- r_j^- - 2\dot{W}(0)r_i^- = 0. \qquad (1.28)$$

Одновременно продифференцируем по $\sigma$ тождество $(a_{ij} - c\delta_{ij})r_j = 0$, определяющее собственный вектор $r_j$

$$a_{ij}\dot{r}_j + \dot{a}_{ij}r_j - c\dot{r}_i - \dot{c}r_i = 0.$$

Положим в последнем равенстве $\sigma = 0$, вычтем его из (1.28). Получим

$$(a_{ij}^- - c^-\delta_{ij})(\ddot{u}_j^- - \dot{r}_j^-) - (2\dot{W}(0) - \dot{c}^-)r_i^- = 0. \qquad (1.29)$$

Первое слагаемое можно обратить в нуль, домножив это соотношение скалярно на левый собственный вектор $\boldsymbol{l} = \{l_l\}$ матрицы $\|a_{ij}\|$. Тогда

$$(2\dot{W}(0) - \dot{c}^-)r_i^- l_i^- = 0.$$

Из алгебры известно, что $r_i l_i \neq 0$, следовательно

$$\dot{W}(0) = \frac{1}{2}\dot{c}^-. \qquad (1.30)$$

Таким образом, для $W(\sigma)$ получаем

$$W(\sigma) = c^- + \frac{1}{2}\dot{c}^-\sigma + O(\sigma^2).$$

В то же время $c(\sigma) = c^- + \dot{c}^-\sigma + O(\sigma^2) = c^+$. Совместное использование этих двух равенств приводит к обещанному выражению для $W(\sigma)$

$$W = \frac{1}{2}(c^- + c^+) + O(\sigma^2). \tag{1.31}$$

Соотношение (1.30) показывает, что в равенстве (1.29) второй член исчезает. Поэтому

$$\ddot{u}_j^- - \dot{r}_j^- = \mu r_j^-,$$

где $\mu$ – некоторый коэффициент, подлежащий определению. Ранее было принято, что векторы $r_j$ и $\dot{u}_j$ оба единичные и $\dot{u}_j^- = r_j^-$. Поскольку производные от единичных векторов ортогональны этим векторам, то следует положить $\mu = 0$. Тогда

$$\ddot{u}_j^- = r_j^-. \tag{1.32}$$

Так как производные берутся здесь по касательной к ударной адиабате, то это равенство утверждает, что в начальной точке имеет место равенство векторов кривизны ударной адиабаты и интегральной кривой волны Римана, имеющих совпадающие касательные.

Следствия из полученных утверждений дают дополнительные полезные сведения об ударных волнах.

Кривая, изображающая ударную адиабату в пространстве $u_i$, имеет *в начальной точке касание второго порядка с интегральной кривой волны Римана*, т.е. различие ударной адиабаты и интегральной кривой волны Римана имеет величину $O(\sigma^3)$, где $\sigma$ – величина порядка амплитуды скачка. В окрестности начальной точки $u_i^-$ для любой гладкой функции от $u_i$ разница ее изменения на разрыве и в волне Римана не превышает величины $\sigma^3$. В частности, во многих задачах механики это используется для оценки изменения энтропии.

Если в пространстве $u_k$ на интегральной кривой волны Римана характеристическая скорость $c$ не постоянна, то от начальной точки $u_k^-$ в сторону увеличения $c$ рядом с интегральной кривой волны Римана идет *эволюционный отрезок ударной адиабаты*,

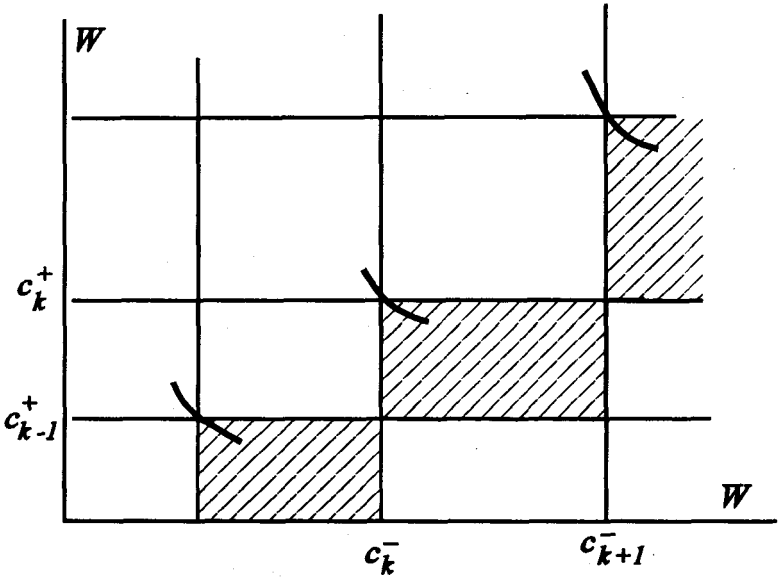



Рис. 1.10.

так как, согласно (1.31) и условиям эволюционности, выполнены неравенства $c^- < W = \frac{1}{2}(c^- + c^+) < c^+$. Соответствующая волна Римана имеет на плоскости $x, t$ *сходящиеся характеристики и тенденцию к опрокидыванию.* В сторону уменьшения $c$ идет *неэволюционный отрезок ударной адиабаты*, для которого $c^- > W > c^+$ и который с ошибкой порядка $\sigma^3$ может быть заменен *расширяющейся волной Римана.* Точки этого отрезка соответствуют обратным скачкам $u_i^+ \to u_i^-$, которые эволюционны.

Согласно предыдущему при некратной характеристической скорости $c$ ударная адиабата касается в начальной точке собственного вектора матрицы $\|a_{ij}\|$. Независимых собственных векторов у этой матрицы $n$ штук. Очевидно, что если все характеристические скорости различны, то в начальной точке происходит пересечение $n$ ветвей ударной адиабаты, на каждой из

которых $W$ близко к соответствующему значению $c$. Если матрица $\|a_{ij}\|$ симметрична, что часто бывает в задачах механики, то ее собственные векторы, а следовательно и ветви ударной адиабаты, так же как и интегральные кривые волн Римана в начальной точке *взаимно ортогональны.*

На диаграмме рис. 1.9, изображающей на плоскости $c^-, c^+$ условия эволюционности, бесконечно малым разрывам соответствует $n$ узловых точек сетки, где $c_i^- = c_i^+$, $i$=1,...$n$. График изменения вдоль ударной адиабаты скорости скачка $W(\sigma)$ проходит через все эти точки. У кривой, изображающей изменение скорости разрыва $W$ на плоскости $c^-, c^+$ (рис. 1.9), тот участок, где $W$ растет, идет из начальной точки (каждого узла сетки $c_i^-, c_i^+$) в заштрихованный прямоугольник (рис. 1.10), так как согласно предыдущему, если $W > c^-$, то в окрестности начальной точки выполняются неравенства

$$c_i^- < W < c_{i+1}^-, \quad c_{i-1}^+ < W < c_i^+.$$

График $W(\sigma)$ на диаграмме эволюционности на рис. 1.10 имеет, таким образом, по крайней мере, $n$ эволюционных отрезков, проходящих в эволюционных прямоугольниках, которым принадлежат малые разрывы всех $n$ типов.

Заметим сразу, что кроме таких разрывов могут существовать также эволюционные отрезки ударной адиабаты, которые не примыкают ни к одной точке, в которой $c_i^+ = c_i^-$. Эти отрезки соответствуют разрывам, интенсивность которых при заданном состоянии $u_i$ не может быть сделана малой (см. Главу 4).

## 1.8. Поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге

Границами областей эволюционности на ударной адиабате служат точки, где скорость скачка $W$ совпадает хотя бы с одной из характеристических скоростей $c_i^-$, $c_k^+$. Мы будем называть их *точками Жуге.* Однако, учитывая их разную роль в исследовании ударных волн, будем далее называть те точки, в которых

$W$ совпадает с характеристической скоростью перед разрывом ($W = c_i^-$), *передними* точками Жуге, а те точки, в которых $W = c_k^+$ – *задними*, или просто точками Жуге, как именно они были названы в теории детонации.

В окрестности точек Жуге, где $W = c^+$, можно получить дополнительные сведения о поведении ударной адиабаты и изменении параметров вдоль нее (Hanyga [1976], Куликовский [1979]).

Прежде всего покажем, что в случае общего положения равенства

$$\frac{dW}{d\sigma} = 0 \quad \text{и} \quad W = c^+ \tag{1.33}$$

могут выполняться на ударной адиабате только одновременно. Здесь $\sigma$ – параметр на ударной адиабате в пространстве $u_i$, например, длина дуги, $c^+$ – однократная характеристическая скорость в состоянии $u_j^+$. Если выполнено одно из равенств (1.33), то второе является его следствием. Как и в предыдущем параграфе, будем далее опускать индекс "+" при обозначении параметров за разрывом, сохраняя индекс "–" для состояний перед ним.

Для доказательства продифференцируем соотношения на разрыве (1.23) вдоль ударной адиабаты, считая $u_k^-$ постоянными.

$$(a_{ij} - W\delta_{ij})du_j = (u_i - u_i^-)dW. \tag{1.34}$$

Уравнение (1.34) аналогично уравнению (1.27) § 1.7.

Если в равенстве (1.34) $dW = 0$ и при этом не все $du_j$ равны нулю, то

$$\Delta = \det \|a_{ij} - W\delta_{ij}\| = 0. \tag{1.35}$$

Это значит, что $W$ совпадает с одним из собственных значений матрицы $\|a_{ij}(u_k)\|$, т.е. $W = c$.

Обратно, если $W = c$, то определитель (1.35) равен нулю. Тогда при домножении уравнения (1.34) на компоненты левого собственного вектора $\{l_i\}$ матрицы $\|a_{ij}\|$, соответствующего $c$, после суммирования по $i$ левая часть равенства исчезает, следовательно

$$dW(u_i - u_i^-)l_i = 0. \tag{1.36}$$

Предположим, что одновременно с равенством $W = c$ не обращается в нуль коэффициент при $dW$ в формуле (1.36) (случай общего положения), т.е. что

$$(u_i - u_i^-)l_i \neq 0. \tag{1.37}$$

Тогда из равенства (1.36) следует, что $dW = 0$ при $du_k$ не равных одновременно нулю, т.е. $dW/d\sigma = 0$.

Равенство (1.34) показывает, что при $dW/d\sigma = 0$ величины $du_j$ *являются компонентами правого собственного вектора матрицы* $\|a_{ij}\|$ и, следовательно, могут представлять малое изменение величины $u_i$ в малом возмущении или волне Римана, распространяющейся по состоянию $u_i$ в точке Жуге. Это означает, что *ударная адиабата в пространстве $u_i$ в точке Жуге касается интегральной кривой соответствующей волны Римана.*

Покажем, что, если на ударной адиабате величина $W - c$ меняет знак в изолированной точке Жуге, то в этой точке меняет знак и $dW$. Систему уравнений (1.34) можно разрешить для функций $du_j$ по правилу Крамера

$$du_j = \frac{b_j}{\Delta} dW.$$

При этом определитель системы $\Delta$ в знаменателе меняет знак в точке Жуге вместе с разностью $W - c$, а величины $b_j$ в числителе при выполнении условий (1.37) одновременно в нуль не обращаются. В то же время сами $du_j$ при движении вдоль дуги ударной адиабаты в одном направлении одновременно знака не меняют. Значит в точке Жуге меняет знак $dW$.

Если в некоторой точке $dW/d\sigma$ обращается в нуль и меняет при этом знак, то в этой точке функция $W(\sigma)$ имеет экстремум. Очевидно верно и обратное. Таким образом, *в точке Жуге, где $W = c^+$, функция $W(\sigma)$ имеет экстремум.*

Так как на диаграмме эволюционности на плоскости $c^-, c^+$ (рис. 1.10) по горизонтальной оси скорость откладывается без искажений, то линия $W(\sigma)$, изображающая ударную адиабату, пересекает в точках Жуге горизонтальные прямые сетки, имея в них вертикальные касательные (рис. 1.11) (имеются в виду точки пересечения, не соответствующие бесконечно малым разрывам).

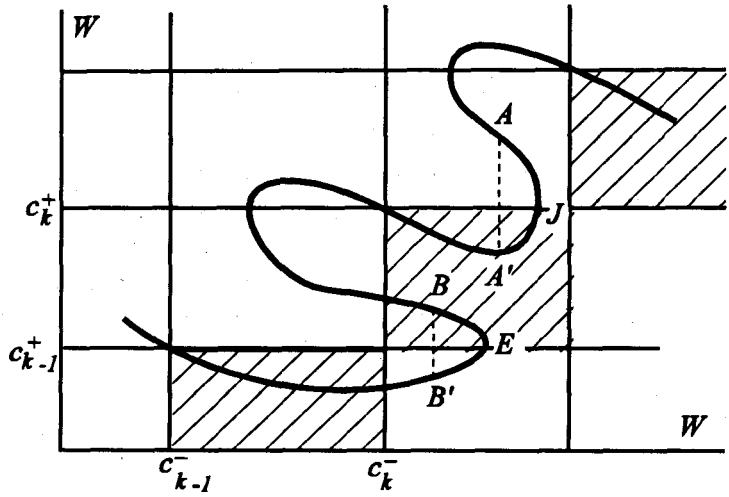



Рис. 1.11.

Причина выполнения указанных выше свойств ударной адиабаты очень проста. Если выполнено условие Жуге $W - c = 0$, то наряду с исходным разрывом можно рассмотреть как один разрыв комбинацию из исходного разрыва и следующего за ним с той же скоростью малого возмущения. Такой разрыв будет иметь ту же скорость, что и исходный, откуда следует, что $dW/d\sigma = 0$ в рассматриваемой точке. Наоборот, если на ударной адиабате имеются две близкие точки, соответствующие разрывам, движущимся с одной и той же скоростью, то переход из одной точки в другую можно считать малым разрывом, движущимся с той же скоростью. Это означает, что условие Жуге $W = c$ выполнено там, где эти точки совпадут, если величину разрыва устремить к нулю (т.е. в точке экстремума $W$).

Упомянутые выше свойства могут не выполняться при нарушении в точке Жуге условия (1.37). Условие (1.37) требует своей проверки в конкретных ситуациях.

Следствием доказанных выше утверждений является то, что решение в виде ударной волны Жуге может быть состыковано с решением в виде расширяющейся со временем волны Римана и их скорости в точке стыковки совпадают. В следующем параграфе будет видно, как это важно для построения решений автомодельных задач.

Рассмотрим в пространстве $u_i$ эволюционный отрезок ударной адиабаты с концом в точке Жуге и начинающуюся в этой точке часть интегральной кривой соответствующей неопрокидывающейся волны Римана. Эти кривые, согласно изложенному, имеют общую касательную в точке Жуге. Однако, касание этих двух линий в пространстве $u_i$ может происходить либо так, что одна из них служит продолжением другой, либо обе они направлены в одну сторону, образуя точку возврата.

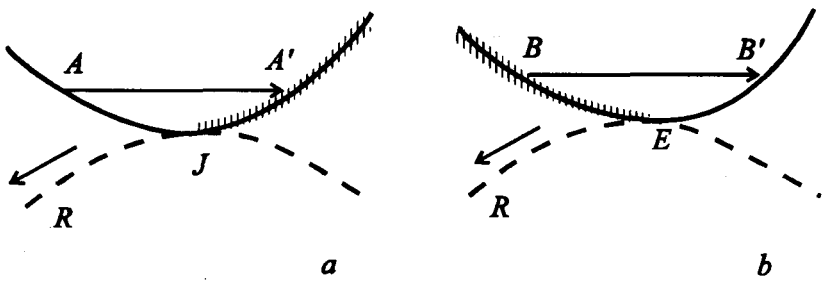



Рис. 1.12.

На рис. 1.12 сплошной линией изображены дуги ударной адиабаты в окрестности точек Жуге, а штриховой — участки интегральных кривых волн Римана, проходящих через эти точки. Косой штриховкой отмечены эволюционные участки ударной адиабаты, стрелками на интегральных кривых волн Римана обозначены направления убывания характеристической скорости $c$, т.е. направления изменения параметров в расширяющейся (неопрокидывающейся) волне Римана.

При выяснении, какой из этих вариантов осуществляется, поможет диаграмма на рис. 1.11. Для определения направления изменения параметров в пространстве $u_i$ в расширяющейся со временем (неопрокидывающейся) волне Римана в точках Жуге воспользуемся исследованием малых скачков § 1.7.

Наличие экстремума на ударной адиабате у функции $W(\sigma)$ скорости разрыва позволяет найти пару точек, соответствующих одному и тому же заданному значению $W$, близкому к экстремальному. Очевидно, скачок из одной такой точки в другую будет удовлетворять всем законам сохранения, а его скорость будет равна тому же значению $W$. Например, на рис. 1.11 изображены скачки $A \to A'$ или $B \to B'$. Скорость такого малого разрыва равна $W \simeq c_i$.

В § 1.7 показано, что малый разрыв, движущийся со скоростью, близкой к характеристической скорости $c$, эволюционен, если перед ним $W > c$, а за ним $W < c$. Это значит, что малый скачок эволюционен, если он совершается через прямую $W = c^+$ (на диаграмме на плоскости $c^-, c^+$, рис. 1.11) сверху вниз. Как было показано в § 1.7, изменение параметров $u_i$ в противоположном направлении (с точностью до $\sigma^3$) дает расширяющаяся волна Римана, если начальное состояние для обеих волн принимается одинаковым.

Если ударная адиабата на рис. 1.11 пересекает *верхнюю границу области эволюционности*, например, в точке $J$, то этот малый скачок относится к тому же типу, что и основной скачок, и совершается с неэволюционной части ударной адиабаты на эволюционную (из $A$ в $A'$). Так же из состояния $A$ в $A'$ происходит малый скачок в пространстве $u_i$. Тогда *интегральная кривая* в пространстве $u_i$, соответствующая расширяющейся волне Римана, идет в противоположную сторону и *является продолжением эволюционной части ударной адиабаты* с общей касательной в точке Жуге (линия $JR$ на рис. 1.12 *а*).

При пересечении ударной адиабатой *нижней границы области эволюционности* на диаграмме рис. 1.11 (например, в точке $E$) упомянутый малый эволюционный скачок относится к другому типу по сравнению с основным скачком и совершается из точки $B$ в $B'$, т.е. с эволюционного участка ударной адиабаты на

неэволюционный. В расширяющейся волне Римана, которая также относится в этом случае к другому типу, изменение $u_k$ происходит в противоположном направлении (вдоль стрелки на дуге $ER$ на рис. 1.12 *b*). Это означает, что эволюционный участок ударной адиабаты и часть интегральной кривой, соответствующая расширяющейся волне Римана, составляют в пространстве $u_i$ *кривую с точкой возврата в точке Жуге.*

## 1.9. Распад произвольного разрыва и другие автомодельные задачи

Среди задач, решение которых состоит из центрированных волн Римана и ударных волн, важное место занимают автомодельные задачи и, в первую очередь, *задача о распаде произвольного разрыва.* Предполагается, что при $t = 0$ начальные условия задаются следующим образом: при $x > 0$ заданы $u_i = U_i = \text{const}$, при $x < 0$ заданы $u_i = u_i^* = \text{const}$. Требуется построить решение при $t > 0$. Эта задача называется задачей о распаде произвольного начального разрыва. Кроме самостоятельного значения, она имеет также значение как тестовая. Отсутствие решения или его неединственность во многих случаях служат указанием на необходимость внесения уточнений в постановку задачи. В теории упругости такое уточнение может заключаться в переходе к более конкретизированной модели среды (см. Главу 7, где упругая среда рассматривается как предел вязкоупругой при вязкости, стремящейся к нулю).

Задача о распаде произвольного разрыва *автомодельна*, что позволяет разыскивать решение в виде

$$u_i = u_i\left(\frac{x}{t}\right). \tag{1.38}$$

Все непрерывные решения оказываются при этом центрированными волнами Римана, кроме того, решение может содержать разрывы и области постоянных значений всех искомых функций.

Наряду с задачей о распаде произвольного разрыва, в решении которой могут участвовать все имеющиеся типы волн Римана и ударных волн, в механике сплошной среды часто рассматривают более простую автомодельную задачу *о поршне* или о волнах в полупространстве. При этом начальные условия $u_i = U_i = \text{const}$ задаются только при $x > 0$ и выставляются также граничные условия обычно на плоскости, состоящей из одних и тех же частиц среды, которая в начальный момент времени занимала положение $x = 0$. Если $x$ – эйлерова координата, то движение этой ограничивающей среду плоскости задается или находится при решении начально-краевой задачи, а если $x$ –лагранжева координата, то граничные условия выставляются при $x = 0$.

Для автомодельности задачи необходимо, чтобы скорость движения плоскости, а также задаваемые на ней значения $u_i$ были бы постоянны во времени. Поскольку решение задачи ищется в полупространстве, то оно должно конструироваться только из волн Римана и ударных волн, уходящих от границы. Соответственно, число граничных условий, задаваемых на границе, которое должно удовлетворять требованию эволюционности, меньше порядка системы $n$. Обычно в конкретных задачах вопрос о постановке граничных условий не вызывает затруднений. Так в задачах об упругих волнах в полупространстве (Глава 5) на границе полупространства могут с равным успехом задаваться (1)вектор скорости среды, (2)вектор нормальных напряжений, (3)три компоненты тензора деформаций.

Рассмотрим сначала задачу о распаде произвольного разрыва в линейной (или линеаризованной) постановке. Общее решение линейной задачи дается равенством (1.12), которое для рассматриваемой задачи запишем в виде суммы бегущих волн малых возмущений

$$u_i - U_i = \sum_{m=1}^{n} r_i^{(m)} Z_m(x - c^{(m)}t),$$

где $r_i^{(m)}$ – компоненты $m$-го правого собственного вектора постоянной матрицы $a_{ij}$, входящей в систему (1.6), $Z_m$ – функция, задающая амплитуду $m$-ой волны, $c^{(m)}$ – скорости волн малых

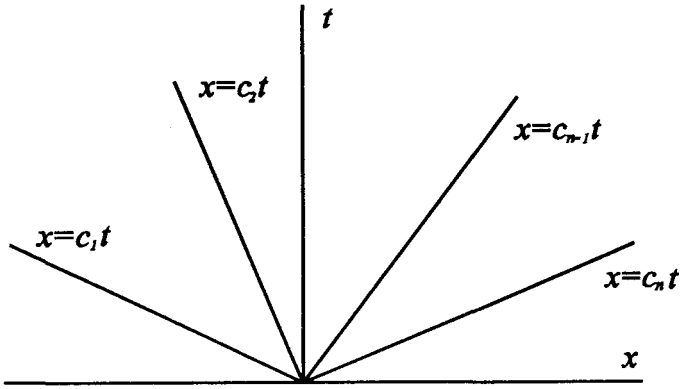



Рис. 1.13.

возмущений, $U_i$ – постоянные начальные значения $u_i$ при $x > 0$.

Очевидно, функции $Z_m(\xi_m)$, представляют собой ступенчатые функции своего аргумента $\xi_m = x - c^{(m)}t$ , принимающие нулевые значения при величинах аргумента больших нуля. Для нахождения их (постоянных) значений $Z^+$ при отрицательных аргументах ("за системой волн") необходимо при фиксированном $t$ подставить в предыдущее равенство достаточно большое по модулю отрицательное значение $x$, что дает

$$u_i^* - U_i = \sum r_i^{(m)} Z_m^+.$$

В силу предполагаемой линейной независимости собственных векторов, выписанные выше равенства, рассматриваемые как система уравнений относительно $Z_m^+$, однозначно определяют эти величины. Таким образом, решение задачи о распаде произвольного разрыва в линейной постановке всегда существует и единственно.

На плоскости $x, t$ решение представлено на рис. 1.13. Вдоль лучей $x = c^{(m)}t$ расположены разрывы, на которых функции $u_i$ приобретают приращения равные $\Delta_m u_i = r_i^{(m)} Z_m^+$. В каждом из секторов между этими лучами все $u_i$ постоянны.

В пространстве $u_i$ решение задачи сводится к переходу от точки $u_i^*$ в точку $U_i$ с помощью $n$ скачков, каждый из кото-

рых совершается вдоль соответствующего собственного вектора $\{r_i^{(m)}\}$. Линии, параллельные $n$ собственным векторам, могут быть приняты в качестве координатных линий новой системы переменных $Z_m^+$. Существование и единственность решения обеспечивается тем, что должен быть отличен от нуля якобиана преобразования $|r_i^{(m)}| \neq 0$.

Рассмотрим теперь задачу о распаде произвольного разрыва в нелинейной постановке, считая, однако, что изменение величин в волнах, входящих в решение, невелики и для ударных волн можно пользоваться результатами § 1.7. В нелинейной постановке появляется различие между ударными волнами и волнами Римана (в линейном решении и та, и другая представляются разрывами). В решении задачи могут присутствовать только расширяющиеся со временем (неопрокидывающиеся) волны Римана, в которых $\partial c/\partial x \geq 0$, поскольку в рассматриваемом случае $c = x/t$. Это требование определяет на кривой, представляющей волну Римана в пространстве $u_i$, вполне определенное направление изменения величин. Как показано в § 1.7, состояния за эволюционными ударными волнами лежат на отрезке ударной адиабаты, расположенном по одну сторону от начальной точки. Ударная адиабата касается в начальной точке интегральной кривой волны Римана и имеет с ней одинаковую кривизну, причем эволюционный отрезок ударной адиабаты является продолжением части интегральной кривой волны Римана, соответствующей неопрокидывающимся волнам, начинающимся в начальной точке. Изменение функций $u_i$ в $m$-й волне (ударной или неопрокидывающейся волне Римана) представляется изменением $u_i$ от точки, изображающей состояние перед волной (при больших $x$), до некоторой точки, лежащей на рассмотренной выше составной кривой $m$-й волны.

Для слабых ударных волн неравенства (1.26), выражающие условия эволюционности, выполняются строго, если производная от характеристической скорости вдоль характеристического направления не равна нулю, т.е. если $c^+ \neq c^-$. При этом $W = \frac{1}{2}(c^+ + c^-)$ и $W \neq c^-$, $W \neq c^+$. В этом случае присутствие в решении $k$-ой ударной волны исключает наличие в решении $k$-ой

волны Римана. (Ниже будет показано, что такое сосуществование волн одного типа в решении возможно, если для ударной волны выполнено условие Жуге $W = c^-$ или $W = c^+$).

Таким образом, в общем случае *решение задачи о распаде разрыва состоит из n волн различных типов, каждая из которых является либо ударной, либо неопрокидывающейся волной Римана.* При этом задача построения решения сводится к тому, чтобы в пространстве $u_i$ перейти от точки $u_i = u_i^*$ в точку $u_i = U_i$, двигаясь по $n$ кривым, каждая из которых соответствует волне 1-го, 2-го, ...,$n$-го типа. В случае волн бесконечно малой амплитуды каждая из кривых заменялась касательной прямой и в силу некомпланарности этих прямых задача оказывалась однозначно разрешимой. Очевидно, что задача остается однозначно разрешимой и в случае волн конечной но достаточно малой амплитуды, поскольку она остается близкой к линейной.

Амплитуды изменения величин в волнах и их характер определяются величиной и направлением смещения точки по кривой, соответствующей $k$-ой волне. Точно так же решается задача о поршне и другие автомодельные задачи. Важно отметить, что в случае волн малой амплитуды число граничных условий, задаваемых на границе полупространства, равно числу уходящих от нее волн, поскольку это имеет место для случая волн бесконечно малой амплитуды.

При изучении автомодельных задач для волн конечной амплитуды, ограничимся только рассмотрением особенностей решения в случаях, когда для одной из ударных волн выполняется условие Жуге, или условие Жуге выполнено приближенно.

Рассмотрим сначала решение автомодельной задачи, когда один из разрывов близок к "своей" точке Жуге, соответствующей на диаграмме эволюционности на рис. 1.11 пересечению ударной адиабаты с верхней границей эволюционного прямоугольника (на рисунке это точка $J$). Как было упомянуто, в пространстве $u_i$ эволюционный участок ударной адиабаты, соответствующий разрывам $k$-го типа, касается в точке Жуге интегральной кривой волны Римана, соответствующей $c_k$.

Как было показано в § 1.8, в случае общего положения продолжением эволюционного отрезка ударной адиабаты, располо-

женным вблизи ее неэволюционной части, служит часть интегральной кривой волны Римана, на которой характеристическая скорость убывает при удалении от точки Жуге.

Такое взаимное расположение упомянутых кривых не препятствует непрерывной зависимости решения автомодельной задачи в окрестности точки Жуге от параметров, задающих состояние за автомодельной системой волн, распространяющихся по заданному состоянию впереди. Упомянутая непрерывная зависимость очевидна в случае, когда разрыв с рассматриваемой точкой Жуге – самый быстрый в системе волн, дающих решение рассматриваемой задачи. При малом изменении состояния за системой волн в общем случае решение будет содержать либо эволюционный разрыв рассматриваемого быстрого типа, близкий к точке Жуге, либо быстрый разрыв Жуге со следующей за ним быстрой автомодельной неопрокидывающейся волной Римана. Если измененное состояние за системой волн не лежит на эволюционном отрезке ударной адиабаты или на продолжающей ее части интегральной кривой волны Римана, то это приводит к появлению других (отличных от быстрой) волн малой амплитуды. При этом *задача всегда оказывается разрешимой*, поскольку система векторов, касательных к кривым, задающим изменение величин в этих волнах, и касательная к ударной адиабате в точке Жуге образуют невырожденную систему векторов, представляющую полную систему собственных векторов, отвечающих малым возмущениям относительно состояния, задаваемого точкой Жуге.

В случае, когда рассматриваемая точка Жуге не соответствует самой быстрой волне, разрешимость задачи об определении амплитуд волн выяснить сложнее. Однако, в задачах об упругих волнах в слабоанизотропных средах разрешимость этой задачи будет доказана ниже (Глава 6), и, вообще, разрешимость задачи об определении амплитуд волн соответствует случаю общего положения.

При наличии "чужой" точки Жуге, когда для разрыва $k$-го типа выполняется равенство $W = c^+_{k-1}$, ударная адиабата покидает эволюционный прямоугольник на диаграмме, пересекая его нижнюю границу (на рис. 1.11 такой точкой Жуге является точ-

ка $E$). В этом случае в пространстве $u_i$ отрезок ударной адиабаты, соответствующий $k$-ым ударным волнам, касается в точке Жуге интегральной кривой $(k-1)$-ой волны Римана (соответствующей характеристической скорости $c_{k-1}$). Было показано ранее, что в пространстве $u_i$ эволюционная часть ударной адиабаты, соответствующая $k$-разрывам, вместе с автомодельной частью интегральной кривой $(k-1)$-й волны Римана (на которой характеристическая скорость убывает при удалении от точки Жуге, а сама волна расширяется с ростом $t$) имеют в точке Жуге точку возврата (см. рис. 1.14, где буквами $S_k$ и $R_{k-1}$ обозначены соответствующие части ударной адиабаты и автомодельной волны Римана, а штриховой линией – неэволюционный отрезок ударной адиабаты).

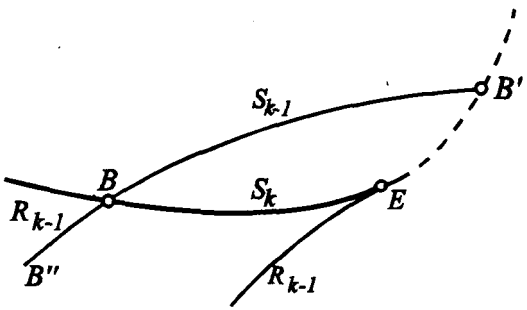



Рис. 1.14.

Если в малой окрестности точки Жуге $E$ в пространстве $u_i$ заменить ударную адиабату $S_k$ и волну Римана $R_{k-1}$ их совпадающей касательной, то видно, что изменение параметров, характеризующее две упомянутые волны, приводит к движению вдоль одного и того же луча. Из этого следует, что при вариации амплитуд $n$ различных волн, имеющихся в распоряжении при построении решения, точка $u_i^*$ пробегает не всю $n$-мерную окрестность точки Жуге, а гиперповерхность $n-1$ измерения. Это показывает несуществование решения в принятом линейном приближении.

Для более аккуратного построения близких автомодельных решений заметим, что каждая точка (например, точка $B$ на рис. 1.14), принадлежащая отрезку эволюционности $S_k$ ударной адиабаты, соответствует, в силу своего положения, состоянию за $k$-м разрывом, за которым может следовать или $(k-1)$-й эволюционный разрыв $S_{k-1}$ или непрерывная автомодельная $(k-1)$-я волна Римана $R_{k-1}$. В пространстве $u_i$ состояние за упомянутыми волнами принадлежит кривой, составленной из эволюционной части $BB'$ ударной адиабаты $S_{k-1}$ и служащей продолжением ее интегральной кривой $BB''$ волны Римана $R_{k-1}$. При движении точки $B$ по $S_k$ составная кривая $B''BB'$ заметает некоторую двумерную поверхность, для точек которой можно построить решение, состоящее из последовательности $k$-го эволюционного разрыва и $(k-1)$-й волны (непрерывной или разрыва), близкое к решению, соответствующему точке Жуге $E$. Назовем это решение решением I.

Покажем, что это – поверхность с краем, по другую сторону которого автомодельного решения описанного типа не существует. Найдем кривую, представляющую собой этот край.

Если по состоянию $B$ за эволюционным разрывом $k$-го типа, движущимся со скоростью $W_B$, следует достаточно малый эволюционный разрыв $(k-1)$-го типа, то его скорость меньше, чем $W_B$, поскольку за разрывом $k$-го типа, согласно условиям эволюционности (1.26), $W_B - c^+_{k-1} > 0$. Если, не меняя состояние $B$, увеличивать амплитуду $(k-1)$-го скачка, то его скорость будет расти и, когда точка, представляющая состояние за этим разрывом, придет в состояние $B'$ (рис. 1.13), скорость этого $(k-1)$-го разрыва станет равной $W_B$. В физическом пространстве разрывы $k$-го и $(k-1)$-го типов сольются, образуя один неэволюционный разрыв, соответствующий точке $B'$. Дальнейшее увеличение амплитуды скачка $(k-1)$-го типа не имеет физического смысла и не соответствует решениям автомодельной задачи, так как $(k-1)$-й разрыв не может обогнать $k$-й. Это приводит к тому, что в пространстве переменных $u_i$ область, где существует решение, состоящее из двух разрывов $k$-го и $(k-1)$-го типов, $S_kS_{k-1}$, представляет некоторую поверхность, ограниченную кривой, состоящей из точек $B$ и $B'$, т.е. ударной адиабатой.

По другую сторону от эволюционного отрезка ударной адиабаты $S_k$, как было сказано выше, можно построить автомодельное решение, состоящее из разрыва $k$-го типа $S_k$ и волны Римана $(k-1)$-го типа $R_{k-1}$, которое будем обозначать $S_k R_{k-1}$. Двумерная поверхность, соответствующая решениям $S_k S_{k-1}$ и $S_k R_{k-1}$, ограничена кривой, которая состоит из неэволюционной части ударной адиабаты (дуга $EB'$ на рис. 1.14) и интегральной кривой волны Римана (дуга $EC$), касающейся ударной адиабаты в точке $E$.

По другую сторону от упомянутого края двумерной поверхности *автомодельное решение может не существовать, а если существует, то должно иметь другое строение.* Как показало рассмотрение волн в анизотропном упругом теле (Глава 5) и, как следует из общих соображений, возможны два случая.

1. Возможен случай, когда область, в которой существует другое решение, ограничена тем же краем, так что решение в окрестности точки $E$ существует и единственно. Для этого необходимо, чтобы второе решение, так же как и рассмотренное выше первое, было генетически связано с неэволюционной частью ударной адиабаты (дуга $EB'$ на рис. 1.14). А это возможно, если имеется другая, отличающаяся от рассмотренной выше, комбинация из двух разрывов, которые сливаются в один при приближении с другой стороны к линии, представляющей неэволюционный отрезок ударной адиабаты. Именно такая ситуация может иметь место, когда $W_J > W_E$, т.е. в случае, когда на рис. 1.13 точка $J$ лежит правее точки$E$. В Главе 5 для задач теории упругости при $W_J > W_E$ такая комбинация найдена. В этом случае при скоростях, чуть меньше $W_E$, имеются две различных быстрых квазипоперечных ударных волны, соответствующих верхнему эволюционному прямоугольнику (рис. 1.13), которые вместе с медленными волнами могут составить две комбинации, соответствующие неэволюционному разрыву, близкому к скачку в точку $E$.

Отметим, что автомодельные решения, получающиеся в результате различного распада неэволюционной ударной волны, хотя не близки между собой, если оценивать их близость по максимуму модуля разности решений, но остаются все же близки-

ми между собой, если использовать другие меры их различия, учитывающие величину области, где эти решения сильно различаются. Это связано с тем, что скорости ударных волн, образующих в результате слияния неэволюционную ударную волну, близки к скорости образовавшейся волны.

2. Рассмотрим теперь случай, когда неэволюционная часть ударной адиабаты, примыкающая к точке Жуге, такова, что существует только одна (рассмотренная выше) комбинация из двух волн, слияние которых соответствует неэволюционным разрывам. Это всегда имеет место в случае $W_J < W_E$, изображенном на рис. 1.13. Тогда, если автомодельное решение существует для всех точек окрестности точки $E$, то второе решение, не будучи прямо связано с ударной адиабатой в окрестности точки $E$, в общем случае не близко к рассмотренному выше решению I, а граница области, где это решение имеет место, в общем случае не проходит близко к точке $E$. Это означает, что в половине окрестности точки $E$ имеются два не близких между собой автомодельных решения, одно из которых решение I, а второе не близко к нему и существует в полной окрестности точки $E$. Если менять параметры, определяющие задачу, то можно пересечь границу области существования решения, после чего решение I перестанет существовать и должно мгновенно распасться на другую автомодельную систему волн. Это явление будет рассмотрено в § 7.5 для задач теории упругости. Не исключена также возможность отсутствия автомодельного решения в области, где не существует решения I (на рис. 1.14 правее линии $B'EC$), хотя физической задачи такого типа авторам не известно.

Как видно из изложенного, упомянутые особенности автомодельных (и некоторых неавтомодельных) решений связаны с наличием тех или других точек Жуге на ударной адиабате. В решении автомодельных задач упругости (Глава 5) имеет место (при $\varkappa > 0$) неединственность рассмотренного выше типа, связанная с наличием на ударной адиабате чужой точки Жуге.

Все утверждения, доказанные для автомодельных решений с аргументом $x/t$, верны также и для стационарных автомодельных решений (Глава 6) с аргументом $\varphi = \operatorname{arctg} y/x$.

## 1.10. Уравнения законов сохранения в форме Годунова. Энтропия

Гиперболические системы уравнений, выражающие законы сохранения, которые описывают поведение сплошных сред, обладают важным свойством. А именно, в качестве формального следствия правильно записанных уравнений сплошной среды можно получить еще одно дивергентное уравнение, которое в большинстве моделей сплошных сред выражает сохранение энтропии в случае непрерывных процессов. В других моделях оно может выражать сохранение механической энергии, как например, в случае изучения волн по теории мелкой воды. Как показано С.К.Годуновым (Годунов [1962], [1978]), это свойство позволяет записать исходные уравнения в изящной форме, в которой число функций, характеризующих систему уравнений, сокращается и становится равным числу измерений (включая время). Кроме того, явное введение энтропии (так будем называть сохраняющуюся в непрерывных процессах величину) позволит изучить изменение ее плотности и производство энтропии на разрыве.

Итак, предполагаем, что в результате домножения уравнений исходной системы (1.2)

$$\frac{\partial f_i(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial g_i(u_k)}{\partial x} = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

на некоторые множители $q_i(u_k)$ и суммирования по $i$ получается еще одно уравнение вида

$$\frac{\partial f(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial g(u_k)}{\partial x} = 0. \tag{1.39}$$

Мы ограничимся здесь, как и ранее, случаем одной пространственной переменной $x$. Возможность получения уравнения (1.39) означает,что

$$df = q_i df_i, \qquad dg = q_i dg_i.$$

Рассмотрим новые функции $F$ и $G$

$$F = f - q_i f_i, \qquad G = g - q_i g_i.$$

С помощью предыдущих равенств, рассматривая $q_i$ как новые переменные (вместо $u_i$), получим

$$dF = -f_i dq_i, \quad dG = -g_i dq_i \quad \text{или} \quad f_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Тогда

$$f = F - q_i \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad g = G - q_i \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Приведенные здесь преобразования лишь знаками отличаются от обычных преобразований Лежандра.

Таким образом, система уравнений (1.2) и дополнительное дивергентное уравнение (1.39) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F - q_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(G - q_i \frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{1.41}$$

Две функции $F(q_i)$ и $G(q_i)$ полностью характеризуют рассматриваемую систему уравнений. В случае большего числа пространственных переменных вместо одной функции $G$ уравнения будут содержать несколько функций $G_\alpha$ – по числу пространственных переменных. Уравнения (1.40) представляют *запись системы* (1.2) *в форме Годунова.*

При рассмотрении уравнений механики сплошных сред в качестве функции $f$ удобно выбирать *плотность энтропии* $s$, а в качестве $g$ – *поток энтропии*

$$f = F - q_i \frac{\partial F}{\partial q_i} = s.$$

При таком толковании $f$ функция $F(q_k)$ для важнейших моделей сплошной среды оказывается *выпуклой функцией* своих аргументов (Годунов [1961a], [1978]). Под выпуклостью понимается выполнение неравенства

$$F(q_k^{(2)}) - F(q_k^{(1)}) - F_i(q_k^{(1)})(q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) > 0, \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \tag{1.42}$$

где $q_i^{(1)}$ и $q_i^{(2)}$ – две любые не совпадающие точки пространства. Очевидно, условие (1.42) эквивалентно требованию *положительной определенности матрицы вторых производных* $\|F_{ij}\|$ во всех точках, здесь обозначено

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Для уравнений теории упругости в форме Пиолы-Кирхгоффа это условие будет проверено в Главе 3. Выпуклость функции $F(q_i)$ будет предполагаться всюду в этой главе.

Выпуклость $F(q_i)$ связана с предположением об устойчивости однородного состояния среды в случае, если допускаются произвольные диссипативные механизмы (что это значит будет вскоре сказано). Пусть однородное состояние среды характеризуется величинами $f_i(x,0) = f_i^0 = \text{const}$. Возмутим среду таким образом, что

$$\int \delta f_i \, dV = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \text{где} \quad \delta f_i = f_i(x,t) - f_i^0,$$

$dV$ – элемент объема. Будет предполагаться, что процессы, которые затем происходят в среде, не противоречат законам сохранения, откуда следует, что среднее значение $\delta f_i$ будет равно нулю всегда: $\int \delta f_i \, dV = 0$. Рассмотрим случай периодических возмущений, когда будем считать, что $\int \delta f_i \, dV$ берется по ячейке. Предположение о произвольности диссипативных процессов заключается в том, что энтропия возрастает и в конце концов (при $t \to \infty$) среда придет в состояние с максимальной энтропией, допускаемой связями $\int \delta f_i \, dV = 0$. Предположение об устойчивости заключается в том, что состояние с наибольшей энтропией является однородным и, очевидно, представляется равенствами $f_i = f_i^0$.

Например, если рассматриваются произвольные достаточно малые возмущения газа, то предполагается, что при учете вязкости и теплопроводности газ с течением времени стремится к

однородному состоянию с постоянной скоростью. Это означает, что однородное состояние предполагается асимптотически устойчивым при заданных массе, импульсе и энергии ячейки.

Если периодические возмущения малы, то линейную часть $\delta s$ можно представить как линейную комбинацию $\delta f_i$ с постоянными коэффициентами. Воспользовавшись равенством нулю средних значений $\delta f_i$, получим, что

$$\int \delta s \, dV = \int \delta^2 s \, dV,$$

где $\delta^2 s$ – вторая вариация энтропии

$$\delta^2 s = \frac{\partial^2 f}{\partial f_i \partial f_j} \delta f_i \delta f_j.$$

В силу того, что согласно основному предположению однородное состояние среды обладает энтропией большей, чем любое другое с теми же средними значениями $f_i$, получим, что матрица $\|\partial^2 f / \partial f_i \partial f_j\|$ должна быть отрицательно определена, а функция $-f$ должна быть выпуклой функцией $f_i$. Поскольку свойство выпуклости сохраняется при преобразовании Лежандра, $F$ также является выпуклой функцией от $q_i$.

Запишем условия на разрыве (1.22) для рассматриваемой системы уравнений в новых переменных

$$\left[\frac{\partial G}{\partial q_i}\right] - W \left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\right] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.43}$$

Уравнение (1.41) не имеет соответствующего интегрального закона сохранения, поэтому соотношение типа (1.43) в виде равенства этому уравнению поставить в соответствие нельзя. Можно предположить, однако, что может быть выписано некоторое неравенство, соответствующее на разрыве дифференциальному уравнению (1.41)

Если в качестве $f$ выбрана энтропия, то выражение

$$P(q_i, W) = Wf - g = W(F - F_i q_i) - G + G_i q_i,$$
$$F_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad G_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

представляет собой поток энтропии в отрицательном направлении оси $x$ через поверхность, движущуюся со скоростью $W$. Изменение этой величины на фронте разрыва, движущегося со скоростью $W$, представляет собой *производство энтропии на фронте разрыва*, которое согласно, второму закону термодинамики, должно подчиняться требованию

$$[P] \geq 0.$$

Условие $[P] \geq 0$ приводит к тому, что из множества разрывов, задаваемых ударной адиабатой, следует исключить как нереальные те разрывы, для которых указанное условие нарушено. Если $[P] > 0$, то это указывает на *термодинамически необратимый характер явлений внутри разрывов.*

В § 1.5 были указаны разрывы, представляющие предельный случай волн Римана с недеформирующимся профилем, в записи которых сама произвольная функция, задающая форму волны, выбирается разрывной. Так как изменение величин в таких разрывах совпадает с изменением их в непрерывных волнах, то производство энтропии в этих разрывах отсутствует и они *термодинамически обратимы.* К этому типу, наряду с другими, относятся разрывы, называемые *тангенциальными и контактными*, через поверхность которых отсутствует поток массы. Все разрывы, не представляющие собой предельной формы неопрокидывающейся волны Римана, будем называть *ударными волнами.*

Найдем изменение производства энтропии $[P]$ при малом смещении точки $q_i$ вдоль ударной адиабаты

$$d[P] = (G_{ij} - WF_{ij})q_i dq_j + (F - F_i q_i - F^- + F_i^- q_i^-)\, dW,$$
$$F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}, \qquad G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Ударная адиабата определяется уравнениями (1.43), поэтому $dq_i$ и $dW$ вдоль нее связаны соотношениями, получающимися из (1.43) дифференцированием при условии $q_i^- = \text{const}$

$$(G_{ij} - WF_{ij})dq_j = (F_i - F_i^-)\, dW.$$

(Это уравнение отличается от уравнения (1.34) выбором независимых переменных). Используя эти равенства, находим

$$d[P] = (F - F^- - F_i^-(q_i - q_i^-))\, dW. \tag{1.44}$$

Таким образом, с учетом условия (1.42) выпуклости функции $F(q_k)$ из равенства (1.44) следует, что знак $d[P]$ совпадает со знаком $dW$ и они обращаются в нуль одновременно. Это значит, что максимумы и минимумы функций $[P]$ и $W$ совпадают на ударной адиабате и эти точки, как было показано в § 1.8, являются точками Жуге, где $W = c^+$.

Если можно указать такую систему отсчета, в которой тождественно равен нулю поток энтропии $g = G - (\partial G/\partial q_i)q_i \equiv 0$, то в ней $P = Wf$ и условие $[P] \geq 0$ превращается в *условие неубывания энтропии* $[s] = [f] \geq 0$. Для упругой среды или газа такой системой, где $g \equiv 0$, служит лагранжева система координат, связанная со средой (см. Главу 2).

Выясним, как изменяется плотность энтропии вдоль ударной адиабаты, предполагая при этом, что введена упомянутая выше система координат, в которой $g \equiv 0$. В этой системе

$$G - G_i q_i \equiv 0, \qquad \frac{\partial}{\partial q_j}(G_i q_i - G) = G_{ij} q_i = 0.$$

Используя эти равенства и выражение для $dq_i$ вдоль ударной адиабаты, получаем

$$df = d(F - F_i q_i) = -F_{ij} q_i dq_j = \frac{1}{W}[F_i] q_i\, dW.$$

Отсюда видно, что, если $[F_i]q_i \neq 0$ в точке, где $W$ достигает экстремума (точка Жуге), то в этой точке имеет экстремум также энтропия. В Главе 4 будет показано, что для квазипоперечных упругих ударных волн ненулевой интенсивности приращение энтропии совпадает по знаку с приращением скорости на ударной адиабате.

Оценим величину производства энтропии, а также приращение энтропии для слабых ударных волн с амплитудой скачка

$[q_i] \sim \sigma$, считая $g \equiv 0$. При малой интенсивности изменение $F$ в ударной волне с точностью до $\sigma^2$ можно представить формулой

$$F - F^- = F_i^-[q_i] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\right)^- [q_i][q_j].$$

В начальной точке $W = c^-$, так что, используя равенство (1.44), а также равенство $P = Wf$, справедливое при $g \equiv 0$, получим

$$[P] = \frac{1}{2}\int\limits_{c^-}^{W} \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}[q_i][q_j]\, dW$$

Подынтегральное выражение положительно и не превосходит по порядку величины $\sigma^2$, а разность $W - c^-$, определяющая область интегрирования, как показано в § 1.7, не превосходит по порядку величины $\sigma$. Как следует из последнего выражения для $[P]$, во-первых, производство энтропии, а следовательно и изменение энтропии в слабых ударных волнах не превосходят по порядку величины $\sigma^3$. Во-вторых, эти величины положительны только в ударных волнах, движущихся быстрее, чем $c^-$. Первое из этих утверждений независимо получается из доказанной в § 1.7 близости ударной адиабаты и интегральной кривой соответствующей волны Римана, а второе показывает, что именно эволюционные малые разрывы удовлетворяют требованию неубывания энтропии.

## 1.11. Решения с разрывами как предел непрерывных решений уравнений усложненной модели

Условия эволюционности и неубывания энтропии, рассмотренные выше, имели целью отбросить некоторые из разрывов, удовлетворяющих законам сохранения, как нереальные.

При анализе задач, связанных с распространением продольных ударных волн в сжимаемых средах (Галин [1959]), и некоторых других задач (Олейник [1959], Калашников [1959], Рожде-

ственский и Яненко [1978]) показано, что отбор разрывов, которые должны использоваться для построения решений, во многих случаях не должен ограничиваться только условиями эволюционности и неубывания энтропии. В качестве еще одного принципа отбора разрывов в перечисленных выше работах используется требование существования *структуры разрывов*, о чем пойдет речь ниже. Отбор по этому признаку оказывается особенно полезным и важным в случаях, когда неединственность решений задач устраняется с его применением, как это имело место в процитированных выше работах. Хотя неединственность решений не всегда устраняется требованием существования структуры (см. § 1.14, а также Главу 8 предлагаемой книги), это требование представляется важным инструментом исследования ударных волн.

В этом параграфе обсуждается подход к изучению разрывов, связанный с представлением о них как об *узких областях быстрого, но непрерывного изменения величин.* Даже в случаях, когда шириной этих узких зон можно пренебречь, этот подход оказывается полезным, так как дает дополнительное правило отбора допустимых разрывов.

При теоретическом подходе к изучению разрывов вводят в рассмотрение более сложные детализированные модели среды, учитывающие физические механизмы, обеспечивающие непрерывность изменения величин. Для газа, например, такими усложненными по сравнению с уравнениями газовой динамики моделями могут служить уравнения теплопроводного вязкого газа Навье-Стокса или уравнения Больцмана. Гиперболические уравнения возникают как предельный случай, когда внешний масштаб задачи $L$ становится много больше внутреннего масштаба, определяющего ширину областей с быстрым изменением решения. При этом в уравнениях можно проводить упрощения, связанные с отбрасыванием малых членов. В частности, в областях, где функции меняются на расстояниях порядка $L$, при достаточно больших $L$ можно пренебрегать высшими производными по сравнению с низшими, поскольку каждое дифференцирование добавляет к порядку величины множитель $1/L$. Члены с высшими производными остаются существенными в узких зонах с

быстрым изменением решения.

Существует другой эквивалентный предельный переход, приводящий к гиперболическим системам, при котором устремляют к нулю коэффициенты при некоторых членах в полной системе уравнений, например, коэффициенты вязкости и теплопроводности в уравнениях Навье-Стокса.

Таким образом, при изучении разрывов как пределов непрерывных решений в рассмотрение вводится новая, более сложная модель среды, использование которой приводит к тем или иным выводам, касающимся разрывов. При этом важно, чтобы эта модель соответствовала физике процессов, происходящих в среде. Исходной системой уравнений следует считать эту полную, более детализированную модель, а гиперболическая система законов сохранения возникает как ее предельный случай. Важно при этом отметить, что одна и та же *гиперболическая система уравнений может соответствовать различным исходным полным уравнениям* и поэтому различным множествам осуществимых разрывов.

Усложненные, полные, уравнения обычно отличаются от упрощенной предельной гиперболической системы наличием дополнительных членов в тех же уравнениях (в более сложных случаях возникает необходимость введения новых переменных и новых уравнений). Эти дополнительные члены, обеспечивающие непрерывность решений, обычно представляют *диссипативные процессы, связанные с производством энтропии*, а также процессы, связанные с дисперсией волн. Надо отметить, что, если диссипация отсутствует, а имеется только дисперсия, то опрокидывание волн Римана может не приводить к чему-либо, напоминающему образование разрыва, как это выявлено при изучении решений уравнения Кортевега-де Вриза (Карпман [1973], Уизем [1977]). При обращении к более полным моделям по сравнению с гиперболическими системами законов сохранения мы будем предполагать всегда наличие диссипативных механизмов.

Приведем здесь некоторую систему уравнений, выражающих законы сохранения и содержащих диссипативные члены. Предположим (Годунов [1961a], [1978]) в соответствии с идеями термодинамики необратимых процессов (де-Гроот и Мазур [1964]),

что необратимость явлений проявляет себя в том, что в уравнениях (1.2), представляющих законы сохранения, к выражениям для потоков $g_i$ добавляются члены пропорциональные производным от неизвестных функций $u_i$ по координате, а плотности $f_i$ не меняются. Это сохраняет дивергентный вид уравнений. Таким образом получим

$$\frac{\partial f_i(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(g_i(u_k) - \mu_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.45}$$

или в переменных $q_i$, введенных в § 1.10 и более удобных при изучении диссипативных процессов,

$$\frac{\partial F_i(q_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(G_i(q_k) - \nu_{ij}\frac{\partial q_j}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.46}$$

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad G_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Диссипативные коэффициенты $\mu_{ij}$ и $\nu_{ij}$ могут быть функциями $u_k$ или $q_k$ соответственно. Матрица коэффициентов $\|\nu_{ij}\|$ легко может быть пересчитана из матрицы $\|\mu_{ij}\|$ с помощью преобразования переменных. Очевидно, при $L \to \infty$ или $\nu_{ij} \to 0$ система (1.46) в пределе переходит в гиперболическую систему (1.40) (а система (1.45) соответственно в (1.2)).

Уравнение для изменения энтропии получается, как и ранее, домножением уравнений (1.46) на $q_i$ и последующим сложением

$$\frac{\partial}{\partial t}(F - q_iF_i) + \frac{\partial}{\partial x}\left(G - q_iG_i + q_i\nu_{ij}\frac{\partial q_j}{\partial x}\right) = \nu_{ij}\frac{\partial q_i}{\partial x}\frac{\partial q_j}{\partial x}. \tag{1.47}$$

Поскольку $F - q_iF_i$ может быть отождествлено с плотностью энтропии $s$, то $G - q_iG_i + q_i\nu_{ij}\dfrac{\partial q_j}{\partial x}$ следует принять за поток энтропии. Тогда величина $\nu_{ij}\dfrac{\partial q_i}{\partial x}\dfrac{\partial q_j}{\partial x}$ представляет *производство энтропии* в единице объема, обозначаемое в термодинамике необратимых процессов как $d_is/dt$. Именно этот член приводит к производству энтропии на разрыве в решении соответствующей гиперболической системы, если разрыв рассматривать как предел непрерывного решения при $\nu_{ij} \to 0$.

Согласно второму закону термодинамики производство энтропии неотрицательно, и следовательно, квадратичная форма его выражающая, также неотрицательно определена, т.е. при всевозможных значениях $\partial q_i/\partial x$

$$\frac{d_i s}{dt} \equiv \nu_{kj} \frac{\partial q_k}{\partial x} \frac{\partial q_j}{\partial x} \geq 0. \tag{1.48}$$

Если матрица $\|\nu_{ij}\|$ не зависит от аксиальных векторов (например, от магнитного поля), то она симметрична $\nu_{ij} = \nu_{ji}$ (де-Гроот и Мазур [1964]).

Отметим, что термодинамика необратимых процессов хорошо описывает процессы, близкие к равновесным, а для сильно неравновесных процессов применяются также более сложные модели.

## 1.12. Малые возмущения в среде с диссипацией

Рассмотрим влияние дополнительных диссипативных членов на поведение малых возмущений. Произведем линеаризацию исходных уравнений, записанных в переменных $u_k$ в виде (1.45) или в переменных $q_k$ в виде (1.46), на однородном фоне $u_k^0 = \text{const}$ или $q_k^0 = \text{const}$ соответственно. Покажем, что возмущения затухают, если их наличие приводит к отличному от нуля производству энтропии. При этом удобнее пользоваться переменными $q_k$. Для малых возмущений

$$p_j = q_j - q_j^0$$

имеем линейную систему с постоянными коэффициентами

$$F_{kj} \frac{\partial p_j}{\partial t} + G_{kj} \frac{\partial p_j}{\partial x} = \nu_{kj} \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2}, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.49}$$

Рассмотрим два вида возмущений: (a) периодические по $x$ и (b) достаточно быстро убывающие при $x \to \pm\infty$. Домножая уравнения (1.49) на $p_k$ и, после суммирования по $k$, интегрируя

по $x$ в случае (a) по периоду, а в случае (b) от $-\infty$ до $+\infty$, суммируя, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{2}F_{kj}p_k p_j\,dx = -\int \nu_{kj}\frac{\partial p_k}{\partial x}\frac{\partial p_j}{\partial x}\,dx. \tag{1.50}$$

Было использовано интегрирование по частям и обращение в нуль внеинтегральных членов, которое имеет место в обоих рассматриваемых случаях. Так как $\|F_{kj}\|$ принимается положительно определенной матрицей (см. § 1.10), то равенство (1.50) может служить для оценки решения, а величина $F_{kj}p_k p_j$ может быть принята за плотность энергии возмущений. Само уравнение (1.50) является аналогом *теоремы о кинетической энергии в механике.* Согласно соотношению (1.48) *энергия возмущений не может расти.*

Если матрица $\|\nu_{kj}\|$ достаточно богата элементами, то правая часть равенства (1.50) отрицательна и возмущения затухают. В частности, можно показать, что применение равенства (1.50) к синусоидальным волнам вида

$$p_j = \operatorname{Re}\left(P_j\, e^{i(kx-\omega t)}\right), \qquad \operatorname{Im} k = 0$$

(где $i=\sqrt{-1}$, $k$ – волновое число, $P_j = a_j + ib_j$ – комплексные постоянные, которые находятся после подстановки предложенной выше формы решения в систему уравнений) приводит к затуханию возмущений, и следовательно, к неравенству $\operatorname{Im}\omega < 0$, если

$$\nu_{kj}(a_k a_j + b_k b_j) \neq 0.$$

Затухание синусоидальных возмущений приводит к затуханию произвольных возмущений, которые могут быть представлены интегралом Фурье.

Для выявления влияния диссипативных членов на поведение нелинейных решений рассмотрим приближенно частное решение уравнений (1.45), характеризующееся большим пространственным масштабом $L$, которое близко к волне Римана малой амплитуды. Домножим уравнения (1.45) на левый собственный вектор

$\boldsymbol{l} = \{l_k\}$ матрицы $\|f_{kj} - cg_{kj}\|$, соответствующий характеристической скорости $c$, связанной с изучаемой волной

$$l_k f_{kj}\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + c\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) = l_k \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{kj}\frac{\partial u_j}{\partial x}\right). \qquad (1.51)$$

Левая часть этого равенства совпадает с левой частью равенства (1.7), выражающего соотношение на характеристике в предположении, что $f_{kj} = \delta_{kj}$. Для достаточно длинных волн правая часть равенства (1.51) мала по сравнению с каждым из слагаемых в левой части, поскольку содержит лишнюю производную.

В качестве нулевого приближения можно пренебречь правой частью и нелинейными членами в левой части. При этом решение нулевого приближения представляет бегущую волну

$$\mathrm{w} = \mathrm{w}(x - c^0 t), \qquad \mathrm{w} = l_k^0 f_{kj}^0 (u_j - u_j^0),$$

где величины с индексом "0" соответствуют фону $u_j = u_j^0$. Это решение было получено ранее в § 1.2 для случая, когда $f_{kj} = \delta_{kj}$. Величина w представляет собой один из *инвариантов Римана*. Остальные инварианты Римана будем считать в нулевом приближении равными нулю.

При рассмотрении первого приближения будем считать, что $c$, $l_k$, $f_{kj}$ и сами $u_k$ выражаются через w. Тогда левую часть равенства (1.51) можно представить в виде

$$a(\mathrm{w})\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + c(\mathrm{w})\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right), \qquad a(\mathrm{w}) = l_k f_{kj}\frac{\partial u_j}{\partial \mathrm{w}}.$$

Для волн малой амплитуды в выражениях для $a(\mathrm{w})$ и $c(\mathrm{w})$ можно ограничиться линейным приближением

$$a(\mathrm{w}) = a^0 + a^1\mathrm{w}, \qquad c(\mathrm{w}) = c^0 + c^1\mathrm{w}.$$

Поскольку правая часть в равенстве (1.51) представляет собой малую величину по сравнению с каждым из членов в левой части, то, деля равенство (1.51) на $a(\mathrm{w})$ и записывая правую часть в главном (линейном) приближении, получим

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + (c^0 + c^1\mathrm{w})\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}, \qquad \mu = \frac{1}{a^0} l_k^0 \mu_{kj}^0 \frac{\partial u_j}{\partial \mathrm{w}} = \mathrm{const}. \quad (1.52)$$

Очевидно, $\mu \geq 0$, так как в противном случае линеаризованное уравнение (1.52) обладало бы растущими периодическими по $x$ решениями, что запрещено условием неубывания энтропии. В дальнейшем будем считать величину $\mu$ положительной.

Если ввести новую неизвестную $c = c^0 + c^1 \mathrm{w}$, то уравнение (1.52) перейдет в известное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c\,\frac{\partial c}{\partial x} = \mu\,\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \tag{1.53}$$

При $\mu = 0$ оно переходит в исследованное в § 1.4 уравнение Хопфа, описывающее волну Римана.

Общее решение уравнения Бюргерса выписывается в явном виде с помощью квадратур, что позволяет выписать явное решение задачи Коши (Рождественский и Яненко [1978], Уизем [1977]). Исследование показывает, что решение этого уравнения остается непрерывным и гладким при всех значениях $t$. Если рассматривать решение задачи с фиксированными начальными условиями как функцию коэффициента $\mu$, то показано, что при малых значениях $\mu$ существуют решения близкие к волнам Римана. Их опрокидывание заканчивается образованием узких слоев, внутри которых диссипативные члены сравниваются по порядку величины с нелинейными. В пределе при $\mu \to 0$ они превращаются в разрывы, соединяющие области медленного изменения w.

## 1.13. Структура ударных волн

Рассмотрим в постановке § 1.12 решение в узком переходном слое, который при $\mu \to 0$ превращается в разрыв. Как было отмечено в § 1.11, предельный переход $\mu \to 0$ с точностью до линейного масштаба эквивалентен предельному переходу $L \to \infty$, где $L$ – характерный масштаб решения вне переходного слоя. Это также непосредственно следует из уравнения (1.53), которое сохраняет свой вид при преобразовании $x' = Lx$, $t' = Lt$, $\mu' = \mu/L$.

При предельном переходе $L \to \infty$ и $\mu = \mathrm{const}$ на внешних границах переходного слоя будем иметь $\partial u_i/\partial x \to 0$, $\partial u_i/\partial t \to 0$.

Упомянутое в § 1.12 общее решение задачи Коши показывает, что и внутри переходного слоя зависимость решения от времени исчезает, а слой перемещается с постоянной скоростью.

Таким образом, для описания решения внутри переходного слоя в пределе получим следующую задачу: найти решение типа бегущей волны, т.е.решение, зависящее от $x' = x - Wt$, которое при $x \to \pm\infty$ стремилось бы к однородным не зависящим от времени состояниям $u_i^-$, $u_i^+$. Эта задача называется *задачей о структуре ударной волны.* Так как в рассматриваемом случае все функции $u_i$ предполагались выраженными через инвариант Римана $w$, а следовательно, через $c$, то для нахождения структуры надо найти нужное решение уравнения Бюргерса (1.53). Это решение легко находится и имеет вид (Рождественский и Яненко [1978], Уизем [1977])

$$c = c^- + (c^+ - c^-)\frac{1}{1+\exp(\zeta)}, \tag{1.54}$$

$$\zeta = \frac{c^+ - c^-}{2\mu}(x - Wt), \quad W = \frac{c^+ + c^-}{2}, \quad c^+ > c^-.$$

Здесь $c^-$ и $c^+$ – значения $c$ на $\pm\infty$. Разность $c^+ - c^-$ можно назвать амплитудой волны. Профиль функции $c(x)$ при $t = \text{const}$ представлен на рис. 1.15.

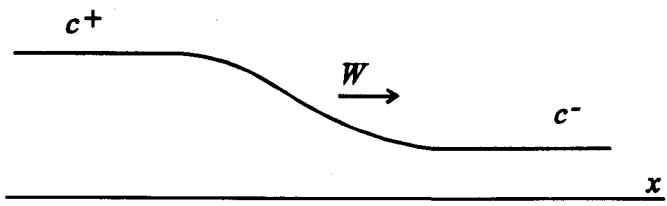



Рис. 1.15.

Ширина переходной зоны по переменной $\zeta$ всегда одна и та же, а в реальном масштабе по переменной $x$ она обратно пропор-

циональна амплитуде волны $c^+ - c^-$, что оправдывает при малых амплитудах сделанные при выводе уравнения (1.53) предположения о малости диссипативных членов в исходных уравнениях.

При $\mu \to 0$, $c^+ - c^- = \text{const}$ ширина переходного слоя убывает и решение в пределе обращается в разрывное, причем при таком предельном переходе в решении меняется только масштаб $x$ при сохранении вида решения. Скорость движения бегущей волны $W$ (см. равенство (1.54)) совпадает со скоростью, полученной в § 1.7 для слабых ударных волн.

Заметим, что решение (1.54) существует только при условии $c^+ > c^-$ и может рассматриваться в связи с этим как результат незавершенного опрокидывания волны Римана, остановленного диссипативным механизмом.

Поскольку по решению (1.54) можно достроить решение исходной системы (1.45), то таким образом *доказано существование структуры ударных волн малой амплитуды, для которых выполнены условия эволюционности.* Примыкающий к начальной точке эволюционный отрезок ударной адиабаты состоит из точек, каждая из которых соответствует разрыву, имеющему структуру, описываемую с помощью уравнений (1.45).

Задача о структуре ударной волны, подобная рассмотренной выше, может быть поставлена и непосредственно для полной системы уравнений (1.45) или для другой системы с диссипацией (без каких-либо дополнительных предположений о малости изменения величин в волне, сделанных при выводе уравнения (1.53)). При этом считается, что решение системы уравнений представляет собой бегущую волну $u_i = u_i(\xi)$, $\xi = -x + Wt$, такую, что искомые функции стремятся к постоянным различным наборам значений $u_i^+$ и $u_i^-$ при $\xi \to \pm\infty$.

Если полная система уравнений имеет вид (1.45), то для $u_i(x)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\xi}\mu_{ij}\frac{du_i}{d\xi} = -W\frac{df_j}{d\xi} + \frac{dg_j}{d\xi},$$

каждое из которых можно один раз проинтегрировать

$$\mu_{ij}\frac{du_i}{d\xi} = g_j(u_k) - Wf_j(u_k) - C_j, \qquad C_j = \text{const}. \tag{1.55}$$

*Особые точки* этой системы дифференциальных уравнений определяются системой уравнений

$$g_j(u_k) - Wf_j(u_k) = C_j, \qquad C_j = \text{const}. \tag{1.56}$$

Постоянные интегрирования $C_j$ при выбранном $W$ вычисляются по значениям $g_j$ и $f_j$ в состоянии $u_k^-$, принятом за начальное.

$$C_j = g_j(u_k^-) - Wf_j(u_k^-) = g_j^- - Wf_j^-.$$

Вычитая это равенство из выражения (1.56), видим, что для любой другой особой точки, отличающейся от начальной, ее координаты $u_i = u_i^+$ должны удовлетворять соотношениям

$$[g_i] - W[f_i] = 0, \qquad [g_i] = g_i^+ - g_i^-, \quad [f_i] = f_i^+ - f_i^-,$$

совпадающим с условиями на разрыве. Заметим, что в предыдущем рассуждении в качестве начальной и конечной особых точек может быть выбрана любая из особых точек, соответствующая принятому значению $W$.

Получение решения задачи о структуре разрыва сводится к нахождению интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.55) для функций $u_i(\xi)$, соединяющей в пространстве $u_i$ две особые точки: точку с координатами $u_i^-$, соответствующую $\xi = -\infty$, и точку с координатами $u_i^+$, соответствующую $\xi = \infty$. Если такая интегральная кривая существует, то говорят, что у соответствующего скачка из состояния $u_i^-$ в состояние $u_i^+$ имеется *стационарная структура* (стационарное решение в системе, движущейся со скоростью разрыва $W$). При этом вполне определенная точка соответствует состоянию перед разрывом и соответственно – за разрывом.

Для уравнений (1.45) доказано (Годунов [1961a], Куликовский [1961]) существование решений, представляющих структуру эволюционных ударных волн, т.е. существование соответствующей интегральной кривой системы (1.55), если изменение величин в волне невелико (однако, конечно). При несколько других предположениях относительно системы уравнений это утверждение также верно (Любарский [1961]).

Рассмотрим изменение энтропии в решении, представляющем структуру. Из уравнения (1.47) получим

$$\frac{d}{d\xi}\left(WF - Wq_iF_i - G + q_iG_i + q_i\nu_{ij}\frac{dq_j}{d\xi}\right) = \nu_{ij}\frac{dq_i}{d\xi}\frac{dq_j}{d\xi}.$$

Проинтегрируем его по $\xi$ от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом того, что $dq_i/d\xi \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$. При этом разность значений на $\pm\infty$ левой части полученного таким образом равенства представляет собой величину, названную в § 1.10 производством энтропии на разрыве $[P]$.

$$[P] = [W(F - q_iF_i) - G + q_iG_i] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu_{ij}\frac{dq_i}{d\xi}\frac{dq_j}{d\xi}\,dx.$$

Объемная плотность производства энтропии, представленная подынтегральным выражением (ср. с формулой (1.48)), сосредоточена главным образом в области, где $dq_i/d\xi$ не малы. Эта область сужается при $\nu_{ij} \to 0$, однако, суммарное производство энтропии $[P]$ при этом не меняется, поскольку определяется значениями функции $P$ в особых точках. Энтропийное неравенство $[P] \geq 0$ показывает, какая особая точка из заданной пары особых точек может быть принята за начальное состояние, а какая за конечное состояние в задаче о структуре разрыва, хотя и не гарантирует соединения их интегральной кривой.

## 1.14. Дополнительные соотношения на разрыве

Как следует из предыдущего параграфа, требованию существования структуры удовлетворяют все достаточно малые эволюционные разрывы и поэтому это требование не накладывает дополнительных ограничений на малые разрывы. Как будет видно из дальнейшего, конечные разрывы (даже эволюционные, с неубывающей энтропией) могут не иметь структуры. В качестве условий, обеспечивающих существование структуры, могут возникать неравенства (выделяющие части ударной адиабаты)

или равенства. Эти равенства будем называть *дополнительными соотношениями на разрыве*. В некоторых случаях считают, что разрывы, которые могут реально существовать, должны иметь одномерную стационарную структуру в виде бегущей волны (это не очевидное утверждение будет обсуждаться в конце следующего параграфа). Будем употреблять для таких разрывов термин *допустимые*. Часть ударной адиабаты, соответствующую допустимым разрывам, будем называть *действующей* ударной адиабатой.

Наряду с упомянутыми в § 1.11, существует еще достаточно много ситуаций, когда требование существования структуры разрыва приводит и к ограничениям типа неравенств, и к появлению дополнительных граничных условий, которые зависят от процессов, происходящих внутри структуры. Наиболее известны ограничения, возникающие в теории горения и детонации (Ландау и Лифшиц [1986], Льюис и Эльбе [1968], Зельдович и др. [1980]).

Пример зависимости множества допустимых разрывов от коэффициентов $\nu_{ij}$ для системы двух уравнений типа (1.46), выражающих законы сохранения, построен Годуновым (Годунов [1960]). Для иллюстрации ограничений, накладываемых требованием существования структуры, рассмотрим простой пример с одним законом сохранения (Куликовский [1984]). Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \tag{1.57}$$

где $\mu = \text{const} > 0$, $m = \text{const} \geq 0$. Отметим, что первое из этих неравенств обеспечивает устойчивость решения $u = \text{const}$ уравнения (1.57, в то время как второе неравенство взято для определенности, как один из возможных случаев. Функцию $\varphi(u)$ будем предполагать имеющей вид, изображенный на рис. 1.16

При $L \to \infty$ высшие производные убывают быстрее первых производных и уравнение (1.57) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0. \tag{1.58}$$

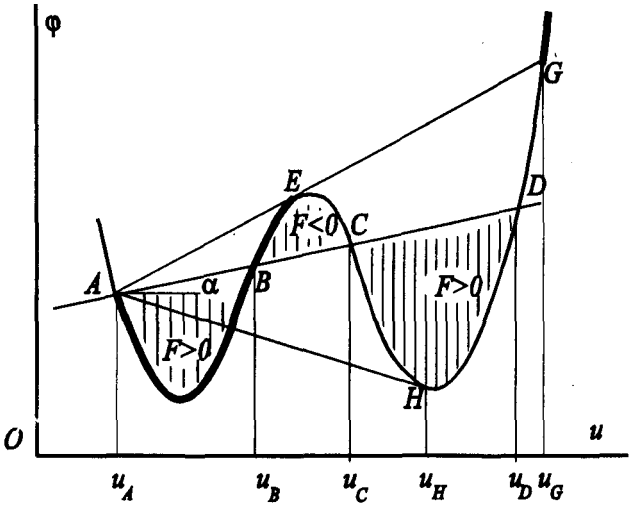



Рис. 1.16.

Соотношения на разрывах для этого уравнения будем получать, изучая структуру разрывов с помощью уравнения (1.57). Уравнение (1.58) – первого порядка и имеет характеристическую скорость $c(u) = d\varphi/du$. Решение этого уравнения с ростом $t$ не опрокидывается, если $c(u)$ убывает с ростом $t$ при $x = \text{const}$, т.е. если с ростом $t$ функция $u$ меняется так, что мы движемся по выпуклой части кривой $\varphi(u)$, где $\varphi'' < 0$, направо или по вогнутой части кривой $\varphi(u)$ (где $\varphi'' > 0$) налево.

Рассмотрим решение уравнения (1.57) вида $u = u(\xi)$, $\xi = Wt - x$, стремящееся при $\xi \to \pm\infty$ к постоянным значениям $u^+$, $u^-$. Подставляя $u = u(\xi)$ в уравнение (1.57) и интегрируя по $\xi$, получим

$$m\,\frac{d^2u}{d^2\xi^2} + \mu\,\frac{du}{d\xi} = F(u), \qquad F(u) = Wu - \varphi(u) + C. \tag{1.59}$$

Считая известным значение $u^-$, получим $C = \varphi(u^-) - Wu^-$ Для любого решения, стремящегося при $\xi \to \infty$ к постоянному значению $u^+$, получаем также выражение $C = \varphi(u^+) - Wu^+$.

Сравнение с предыдущим дает

$$[\varphi(u)] = W[u]. \tag{1.60}$$

Таким образом, уравнение (1.58) вместе с соотношением (1.60) обеспечивают выполнение закона сохранения для $u$ (функция $u$ выполняет роль плотности, $\varphi(u)$ – потока). Уравнению (1.60), кроме точки $u^-$, удовлетворяют абсциссы точек пересечения графика функции $\varphi(u)$ с секущей (рис. 1.16), проведенной через начальную точку $(u^-, \varphi(u^-))$ под углом $\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = W$. Таких точек может быть три (им соответствуют $u_B$, $u_C$, $u_D$ на рис. 1.16), одна или ни одной в зависимости от значений $u^-$ и $W$.

Если считать, что равенство (1.60) – единственное соотношение на разрыве, то скачки $u^- \to u_B$ и $u^- \to u_D$ эволюционны, а разрыв $u^- \to u_C$ неэволюционен, что видно из сравнения углов наклона секущей и касательной к линии $\varphi(u)$ в начальной и конечной точках.

Для качественного исследования решения заметим, что $F(u)$ в соотношении (1.59) представляет при заданном $u$ разность ординат на рис. 1.16 упомянутой выше секущей и кривой $\varphi(u)$. Если не интересоваться масштабом переменной $\xi$, то из вида уравнения (1.59) следует, что форма решения, т.е. вид функции $u(\xi)$, рассматриваемой с точностью до изменения масштаба переменной $\xi$, зависит только от комбинации $m/\mu^2$, а не от $m$ и $\mu$ в отдельности. Действительно, при изменении масштаба по оси $x$ происходит изменение коэффициентов $m$ и $\mu$ при неизменном отношении $m/\mu^2$. В частности, от этой же величины зависит и то значение $u^+$, к которому стремится решение при $\xi \to \infty$ (т.е. выбор в качестве $u^+$ одного из значений $u_B$, $u_C$ или $u_D$).

Если $m = 0$, $\mu \neq 0$, то $du/d\xi = F(u)/\mu$. Направление изменения $u$ определяется знаком $F(u)$ Это приводит к тому, что структуру имеет разрыв, заканчивающийся в точке $u_B$, ближайшей к $u^-$, при условии, что эта точка лежит правее $u^-$ на рис. 1.16. Множество точек с координатами $u, \varphi(u)$, которые могут представлять состояние за разрывом при некотором подходящем значении $W$, обозначено на рисунке жирными линиями. В рассматриваемом случае все разрывы, имеющие структуру,

эволюционны, но не все эволюционные разрывы имеют структуру. Не имеют структуры эволюционные разрывы, состояние за которыми соответствует точкам отрезка $HG$ кривой $\varphi(u)$ на рис. 1.16 (точки $H$ и $E$ – точки касания кривой $\varphi(u)$ с прямыми, проведенными из точки $A$). Дополнительные соотношения не возникают. Множество $u$, представляющее конечные состояния $u^+$, в структуре разрыва, имеет вид двух отрезков $[u^-, u_E]$ и $[u_G, \infty]$ (Олейник [1959], Калашников [1959]) и, следовательно, ограничения, накладываемые на состояния за допустимым разрывом, могут быть записаны в рассматриваемом случае как неравенства.

Рассмотрим теперь случай, когда $m > 0$ и $\mu > 0$. Тогда уравнение (1.59) можно рассматривать как уравнение движения тела массы $m$ под действием силы $F(u)$, зависящей от координаты $u$, при наличии трения, задаваемого выражением $\mu\, du/d\xi$, причем $\xi$ играет роль времени. При выборе начального состояния, изображенного точкой $A$ на рис. 1.16, при изменении $W$ в некотором интервале значений, имеется четыре положения равновесия, где $F(u) = 0$. Это сама начальная точка $A$ (неустойчивая, поскольку при малом отклонении точки от положения $A$ знак $F$ совпадает со знаком $u - u_A$), точка $B$ (устойчивая), точка $C$ (неустойчивая) и точка $D$ (устойчивая). Только одна из этих точек при заданных $u^-$ и $W$ представляет, в силу решения уравнения (1.59), состояние за разрывом, или в модельном рассмотрении точку остановки тела массы $m$.

Аналогия решений уравнения (1.59) с колебательными движениями тела позволяет, меняя $W$, качественно исследовать строение множества $\{u^+\}$. На рис. 1.17 жирными отрезками и точками изображено множество точек $u^+$, т.е. действующая ударная адиабата для некоторого умеренного значения $m/\mu^2$.

Действующая ударная адиабата состоит из интервалов $AR$, $JK$, $MN$ и $(Q, \infty)$, изображенных жирными линиями, и отдельных точек $I$, $L$ и $P$. Число отдельных интервалов при заданной функции $\varphi(u)$ зависит от отношения $m/\mu^2$ и неограниченно растет вместе с этой величиной).

Для того чтобы убедиться в справедливости сделанного утверждения, заметим, что при малых $W$ (соответствующих точкам

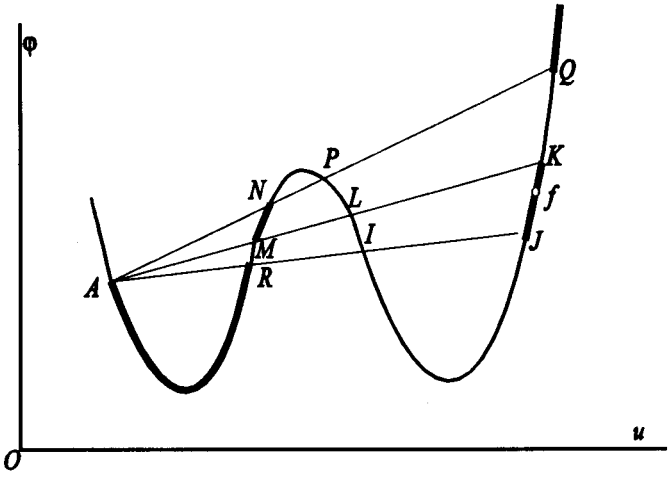



Рис. 1.17.

интервала $AR$ на рис. 1.17) тело массы $m$ разгоняется на отрезке $AB$ (рис. 1.16), где $F > 0$, двигаясь от $A$ к $B$, и при достаточно больших $m/\mu^2$, проскакивает точку равновесия $B$, попадая в область, где $F < 0$ (при меньших $m/\mu^2$ приближение к точке $B$ может быть монотонным). Если $W$ достаточно мало, то тело не может преодолеть отрезка, на котором $F < 0$, возвращается к точке $B$, лежащей на отрезке $AR$ графика $\varphi(u)$, и, поколебавшись около этой точки, останавливается в ней вследствие наличия трения $\mu > 0$.

При увеличении $W$ уменьшается по модулю сила $F$ на отрезке $BC$ (рис. 1.16) и уменьшается длина этого отрезка. Одновременно усиливается разгон тела массы $m$ на отрезке $AB$. Поэтому при достаточно малых $m/\mu^2$ найдется такое значение $W = W_I$, что тело, проскочив устойчивое положение равновесия $B$, будет при $t \to \infty$ приближаться к неустойчивой точке равновесия типа $C$ (точка $I$ на рис. 1.17). Эта точка при $W = W_I$ соответствует состоянию за допустимым разрывом.

Если еще увеличить $W$, то рассматриваемое тело массы $m$ перейдет через неустойчивую точку типа $C$ и окажется в обла-

сти притяжения устойчивой точки равновесия типа $D$ и, поколебавшись, остановится в ней. Нетрудно понять, что существует интервал значений $W$, таких, что состояния за допустимой ударной волной соответствуют таким точкам (интервал $JK$ на рис. 1.17).

При дальнейшем увеличении $W$, если $m/\mu^2$ достаточно велико, то найдется такое значение $W = W_L$, что тело, разогнавшись на отрезке $AB$, с такой скоростью проходит через точки $C$ и $D$ направо, что при возвратном движении будет при $t \to \infty$ неограниченно приближаться к неустойчивой точке равновесия типа $C$ справа. Эта точка $L$ принадлежит действующей ударной адиабате и соответствует $W = W_L$.

Если еще увеличить $W$, то тело перейдет справа налево через неустойчивую точку типа $C$ и при $t \to \infty$ будет стремиться к устойчивой точке равновесия типа $B$. Таким решениям соответствуют точки отрезка $MN$ на рис. 1.17.

Подобные рассуждения можно продолжать и дальше. При еще больших $W$ решения будут, очевидно, оканчиваться в устойчивых точках типа $D$ (интервал $(Q, \infty)$ на рис. 1.17). Число отрезков и отдельных точек на действующей ударной адиабате определяется тем, какое наибольшее число раз рассматриваемое тело массы $m$ может при заданном $m/\mu^2$ перейти через неустойчивую точку типа $C$ (максимум берется по $W$). Очевидно, что при уменьшении $\mu$ и $m = \text{const}$ трение уменьшается и максимально возможное число таких переходов увеличивается.

Приведенные выше рассуждения были основаны на аналогии уравнения (1.59) и уравнения движения материальной точки. Можно было бы провести качественное исследование поля интегральных кривых на плоскости переменных $u$ и $p = m\dfrac{du}{d\xi}$ и зависимости этого поля от $W$. В качестве иллюстрации на рис. 1.18 изображено упомянутое поле интегральных кривых, соответствующее случаю, когда конечной точкой является устойчивая точка $f$ типа $D$ на рис. 1.17.

Отдельные точки $I$, $L$, $P$ принадлежат действующей ударной адиабате и соответствуют некоторым *определенным значениям скорости разрыва $W$. Равенство $W$ одному из этих значений*

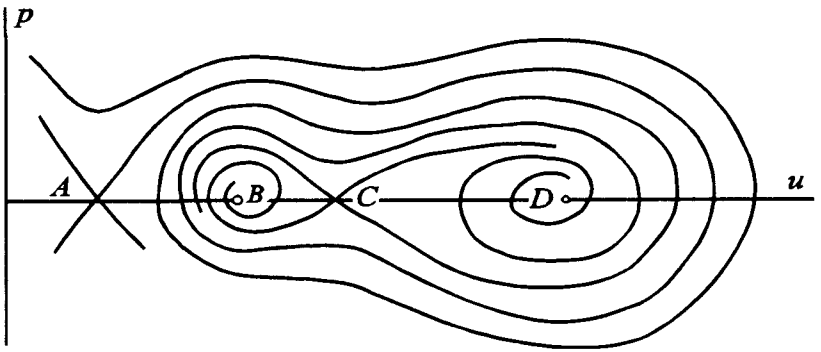



Рис. 1.18.

*представляет собой дополнительное граничное условие, или дополнительное соотношение на разрыве*, необходимое для эволюционности соответствующего разрыва и следующее из требования существования его структуры.

Для случая, когда $m < 0$, исследование действующей ударной адиабаты может быть проведено аналогично, если ввести новую независимую переменную $\eta = -\xi$ так, чтобы в уравнении (1.59) коэффициенты при первой и второй производной имели одинаковые знаки. При этом уравнение будет по-прежнему описывать движение точки при наличии трения под действием силы $-F(u)$.

Если $m$ и $\mu$ устремить к нулю, оставляя при этом отношение $m/\mu^2$ постоянным, или характерный линейный размер задачи устремить к бесконечности вместе с масштабом измерения длин, то получим, что решение, представляющее структуру, превратится в разрыв, допустимый для заданных $\varphi(u)$, $m/\mu^2$, $u^-$.

Не рассматривая сколько-нибудь подробно решения задач, содержащих такие разрывы при достаточно больших $m/\mu^2$, отметим очевидную неединственность решений автомодельных задач, полученных в случае пренебрежения длинами порядка ширины структуры ударной волны. Однако, будем при построении

решения использовать только допустимые (имеющие структуру) разрывы. Возьмем в качестве примера задачу о распаде начального разрыва с состоянием при $x > 0$ , задаваемым точкой $A$, и с состоянием при $x < 0$, задаваемым какой-нибудь точкой $f$ интервала $JK$ (рис. 1.17). Очевидно, существует решение, состоящее из одного разрыва $A \to f$. Кроме того, существует решение, состоящее из скачка $A \to L$ и движущегося с меньшей скоростью скачка $L \to f$. Еще одна подобная комбинация разрывов состоит из скачков $A \to P$ и $P \to f$. Нетрудно убедиться, что скачки $L \to f$ и $P \to f$ обладают структурой. Неединственность может иметь место и для других начальных условий, а также и при $m < 0$. Это показывает, что различные неавтомодельные задачи могут иметь различную автомодельную асимптотику при $t \to \infty$.

Обнаруженное при достаточно больших значениях $m/\mu^2$ сложное строение действующей ударной адиабаты обусловлено наличием нескольких особых точек, соответствующих одному и тому же значению $W$ и достаточно сложному строению интегральных кривых (вызванному в рассматриваемом случае наличием колебаний внутри структуры).

## 1.15. Еще о структуре и о числе дополнительных соотношений

Рассмотрим с общей точки зрения вопрос о разрывах, для описания которых требуется выполнение дополнительных граничных условий (Куликовский [1968]). Наряду с разрывами, по обе стороны от которых действует одна и та же система гиперболических уравнений, будут изучаться также разрывы, по разные стороны от которых действуют разные уравнения. Такие случаи встречаются, например, при изучении *фронтов фазовых переходов*.

Основное содержание этого параграфа заключается в оценке числа дополнительных соотношений на разрывах. Результат можно кратко выразить следующим образом. При некоторых

естественных и общих предположениях, сформулированных в пунктах а) и б), доказано, что из требования существования структуры разрыва следует столько дополнительных соотношений, что полное число условий на разрыве (вместе с основными соотношениями, выражающими законы сохранения, если они имеются) обеспечивает эволюционность этого разрыва.

Идея доказательства заключается в исследовании для обыкновенных уравнений, описывающих структуру, множеств решений, стремящихся к постоянным значениям переменных при $\xi \to \infty$ и $\xi \to -\infty$ ($\xi = -x + Wt$, как и ранее). Каждое из этих множеств решений зависит не только от скорости разрыва $W$ и от значений величин при $\xi = \infty$ или $\xi = -\infty$, но также и от некоторого количества произвольных постоянных $C_i^+$ или $C_i^-$, которые характеризуют то, как происходит изменение величин внутри структуры. Число этих постоянных оценивается в пункте в). Для получения решения, описывающего структуру и пригодного для всех значений $\xi$, решения, идущие из $\xi = \infty$ и из $\xi = -\infty$, должны быть сопряжены при конечном значении $\xi$, т.е. внутри структурью Простейший вариант сопряжения – это условия непрерывной склейки решений (возможны и другие варианты, которые обсуждаются в пункте б)).

Если из соотношений склейки исключить величины $C_i^+$ и $C_i^-$, то получившиеся соотношения будут связывать величины при $\xi = -\infty$, при $\xi = \infty$ и $W$ и будут представлять, тем самым, условия на разрыве. Подсчет числа полученных таким образом соотношений, проведенный в пункте г), приводит в случае общего положения к сформулированному выше результату. В пункте г) подробно обсуждается полученный результат и возможные случаи, когда он может оказаться несправедливым (например, когда число основных соотношений на разрыве больше, чем требуется для эволюционности разрыва). В пункте д) обсуждается возможность существования внутри структуры внутренних разрывов (что ранее исключалось сделанным в пункте а) предположением).

Далее следует подробное изложение и обсуждение этих кратко сформулированных результатов. При первом чтении можно ограничиться выше приведенным резюме, так как далее, в при-

ложениях к теории упругости, высказанные утверждения доказываются отдельно для каждого конкретного случая.

**а. Уравнения, описывающие структуру разрывов.** Прежде всего, рассмотрим вопрос об уравнениях, которые должны использоваться для описания структуры разрывов.

Существуют случаи, когда структура разрыва может быть описана той же гиперболической системой уравнений, решения которой терпят разрыв. Так обстоит дело для разрывов решений линейных уравнений или для разрывов, соответствующих волнам Римана, не изменяющим при движении своей формы. Однако, в общем случае для того, чтобы можно было построить решение задачи о структуре разрыва, система уравнений, описывающая структуру, должна отличаться от исходной гиперболической системы уравнений.

Уравнения для описания структуры разрыва, должны отражать физику явлений, происходящих в разрыве. Уравнения для структуры могут быть *различными* для одной и той же исходной гиперболической системы уравнений, разрывы решений которой изучаются (см. § 1.5). Однако, уравнения усложненной модели, описывающие структуру, должны быть определенным образом согласованы с гиперболическими уравнениями крупного масштаба.

Для этого будем предполагать, что, если характерные времена $T$ и длины $L$ велики, то уравнения, описывающие структуру, переходят в гиперболическую систему уравнений или соответственно в гиперболические системы уравнений, если эти системы различны по разные стороны от разрыва. Будет допускаться, что внутри структуры разрыва может существовать поверхность (для простоты считаем, что таких поверхностей не более одной), при переходе через которую могут терпеть разрыв или обращаться в нуль некоторые коэффициенты уравнений, описывающих структуру. В частности именно это может приводить к упомянутому выше различию гиперболических систем уравнений, действующих по разные стороны от разрыва.

Таким образом, будем считать, что существует и действует всюду некоторая *полная* система уравнений (которая будет

использоваться для описания структуры разрыва и которая переходит в соответствующие гиперболические системы вдали от разрыва), которую можно записать в виде системы первого порядка

$$A_{mj}\frac{\partial v_j}{\partial t} + B_{mj}\frac{\partial v_j}{\partial x} + C_m = 0, \qquad m, j = 1, 2, \cdots, N. \tag{1.61}$$

Коэффициенты $A_{mj}$, $B_{mj}$, $C_m$ считаются функциями $v_j$. Допускаются матрицы $\|A_{mj}\|$, ранг которых всюду меньше $N$. В частности, система (1.61) может быть параболической. Предполагается, что решения системы уравнений

$$C_m(v_k) = 0, \qquad m = 1, 2, \cdots, N \tag{1.62}$$

зависят от $n$ независимых величин $u_1$, $u_2$, ...$u_n$, т.е. среди уравнений (1.62) имеется $N - n$ независимых уравнений. Это означает, что систему (1.61) можно записать таким образом, что первые $n$ уравнений не содержат $C_m$ ($C_m \equiv 0$ при $m$=1,2...$n$).

При изучении фазовых переходов часто внутри структуры имеется упомянутая выше поверхность, которую будем называть критической, по разные стороны от которой число независимых уравнений (1.62) различно, т.е. по разные стороны число $n$ принимает разные значения $n_1$ и $n_2$. Соответственно, переменные $u_m$, вообще говоря, различны по разные стороны от критической поверхности: $u_m^{(1)}$, $m$=1,2,...$n_1$, $u_j^{(2)}$, $j$=1,2,...$n_2$.

Так например, при изучении фронтов в электромагнитном поле, на которых возникает (или исчезает) электропроводность среды (Бармин и Куликовский [1971]), используется закон Ома в виде (одномерный случай)

$$\frac{c}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right).$$

Электропроводность $\sigma$ зависит от температуры, причем $\sigma \equiv 0$ при температуре ниже критической $T \leq T^*$, ($T^*$ также может зависеть от плотности и других величин). Если внутри структуры происходит переход $T$ через $T^*$, то поверхность $T = T^*$ является критической поверхностью и с одной стороны от нее $\sigma \equiv 0$.

В непроводящей области величины $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ – независимые неизвестные величины, а в проводящей области при рассмотрении крупномасштабных явлений они, очевидно, связаны соотношением $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}/c$. Точно также при переходе упругого твердого тела в жидкое состояние (или обратно) исчезает (или возникает) упругий коэффициент отвечающий за упругость при сдвиге.

При рассмотрении явлений, характеризующихся медленными изменениями в пространстве и во времени, в частности, явлений вдали от переходной зоны (структуры) разрыва, в системе уравнений (1.61) можно пренебречь членами с производными по $x$ и $t$ в тех уравнениях, где $C_m \neq 0$. В оставшихся уравнениях это позволит выразить $v_j$ ($j$=1,2,...,$N$) через $u_m^{(\alpha)}$, $m$=1,2,...,$n_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. При этом возникнет система, содержащая $n_1$ уравнений, с $n_1$ неизвестными $u_m^{(1)}$ и система из $n_2$ уравнений с $n_2$ неизвестными $u_m^{(2)}$. Обе системы будем считать гиперболическими и отождествлять с системами гиперболических уравнений, действующих при $\alpha = 1$ с одной стороны и при $\alpha = 2$ с другой стороны от переходной зоны разрыва

$$a_{mj}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial t} + b_{mj}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial x} = 0, \qquad j, m = 1, 2, \cdots, n_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \tag{1.63}$$

где $a_{mj}^{(\alpha)}$ и В этих уравнениях $b_{mj}^{(\alpha)}$ зависят от $u_k^{(\alpha)}$. Полученная таким образом гиперболическая система уравнений может в общем случае иметь более высокий порядок $n$, чем имеется законов сохранения и мы откажемся от требования, что каждое уравнение выражает свой закон сохранения. Систему (1.63) будем далее называть *упрощенной* системой (по отношению к системе (1.61)).

Сделаем некоторые дополнительные предположения о системе (1.61). Первое предположение касается поведения решений линеаризованной полной системы (1.61) и, тем самым, накладывает ограничения на вид полной системы уравнений. Если уравнения (1.61) линеаризовать около постоянных значений $v_j^0$, удовлетворяющих соотношениям (1.62), то получим систему с постоянными коэффициентами. Для получившейся системы можно

разыскивать решения вида

$$v_j = v_j^0 + v_j^* e^{i(kx-\omega t)},$$

где $v_j^*$ – некоторые постоянные, $k$ – волновое число, $i = \sqrt{-1}$. Подстановка указанного вида решения в линеаризованную систему (1.61) приводит к равенствам

$$(-i\omega\, A_{mj}^0 + ik\, B_{mj}^0 + C_{mj}^0)\, v_j^* = 0,$$

где $A_{mj}^0$, $B_{mj}^0$ и $C_{mj}^0$ – значения $A_{mj}$, $B_{mj}$ и $\partial C_m/\partial v_j$ при $v_j = v_j^0$. Эта система имеет нетривиальное решение для $v_j^*$, если ее определитель равен нулю

$$|C_{mj}^0 - i\omega\, A_{mj}^0 + ik\, B_{mj}^0| = 0. \tag{1.64}$$

Это уравнение при заданных $v_j^0$ связывает $\omega$ и $k$ и называется *дисперсионным уравнением.* Для краткости левую часть уравнения (1.64) будем в некоторых случаях обозначать $D(\omega, k)$. Дисперсионное уравнение позволяет найти функции $\omega(k)$ или $k(\omega)$, которые представляют собой многозначные аналитические функции. Число ветвей этих функций определяется наивысшими степенями $k$ и $\omega$ в дисперсионном уравнении (1.64). Будем считать выполненным следующее условие, которое называется *условием диссипативности*: если $\omega$ и $k$ связаны дисперсионным уравнением, то $\operatorname{Im}\omega < 0$ для всех действительных $k$, отличных от нуля

$$\operatorname{Im}\omega < 0, \quad \text{для} \quad \operatorname{Im} k = 0, \quad k \neq 0. \tag{1.65}$$

Таким образом, *система диссипативна*, если любое решение линеаризованных относительно $v_j^0 = \text{const}$ уравнений (1.61), синусоидально зависящее от $x$, экспоненциально убывает со временем при любой конечной длине волны синусоиды.

Следующее предположение, как будет видно из дальнейшего, обеспечивает непрерывность решения задачи о структуре разрыва. Возможность отказа от него будет рассматриваться в дальнейшем. Если в системе (1.61) перейти к движущейся системе координат

$$x' = x - Wt, \qquad W = \text{const},$$

то получим

$$A_{mj}\frac{\partial v_j}{\partial t} + B'_{mj}\frac{\partial v_j}{\partial x'} + C_m = 0,$$
$$B'_{mj} = B_{mj} - W\,A_{mj}. \tag{1.66}$$

Далее всегда будем предполагать, что

$$|B'_{mj}| \neq 0 \tag{1.67}$$

в некоторой интересующей нас области значений $v_j$ и $W$. ($W$ в дальнейшем будет скоростью движения волны, представляющей структуру разрыва). Предположение (1.67) сделано для удобства. В п. д) будет показано, что отказ от этого предположения не меняет числа дополнительных соотношений на разрыве.

Очевидно, что, если система (1.61) диссипативна, то диссипативна и система (1.66). Действительно, решения вида $e^{i(kx-\omega t)}$ для линеаризованной системы (1.61) и решения вида $e^{i(k'x'-\omega' t')}$ для линеаризованной системы (1.66) представляют собой одни и те же решения, записанные в разных системах координат. Убывание со временем одних решений означает убывание со временем и других. Из совпадения показателей экспонент следует: $\omega' = \omega(k) - k\,W$ при $k' = k$, где функция $\omega(k)$ удовлетворяет дисперсионному уравнению (1.64).

**б. Постановка задачи о структуре и дополнительные предположения.**

Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи о стационарной структуре разрыва, т.е. о существовании решения системы (1.61) в виде бегущей волны, принимающего постоянные (различные) значения при $x \to \pm\infty$, $t = \text{const}$.

$$v_m = v_m(\xi), \qquad \xi = -x + Wt, \tag{1.68}$$

$$v_m = v_m^- \text{ при } \xi \to -\infty, \qquad v_m = v_m^+ \text{ при } \xi \to +\infty.$$

Очевидно, величины $v_m^-$, а также $v_m^+$ удовлетворяют системе (1.62) и, следовательно, им могут быть поставлены в соответствие наборы переменных $u_1^-, u_2^-, \cdots, u_{n_1}^-$, а также $u_1^+, u_2^+, \cdots, u_{n_2}^+$.

Вопрос, подлежащий изучению, заключается в том, сколько связей между переменными $u_m^-$ и $u_m^+$ накладывает требование существования решения вида (1.68). При изучении структуры разрывов будет предполагаться, что скорость разрыва $W$ не совпадает ни с одной из характеристических скоростей упрощенных гиперболических систем уравнений (1.63) при $u_m = u_m^-$, $m$=1,2,...,$n_1$ и при $u_j = u_j^+$, $j$=1,2,...,$n_2$. Это позволяет четко определить, сколько граничных условий требуется для эволюционности разрыва.

Помимо этого в дальнейшем будут всегда рассматриваться случаи общего положения.

Как уже отмечалось выше, будет предполагаться, что внутри структуры может существовать критическая поверхность (для простоты – одна, случай, когда их несколько, не приводит к изменению результата), на которой могут рваться или при переходе через которую могут обращаться в нуль некоторые из функций $A_{mj}$, $B_{mj}$, $C_m$, входящих в уравнение. Эта поверхность соответствует некоторому физическому превращению, происходящему в веществе, и ее положение должно определяться некоторым соотношением, связывающим переменные $v_j$, определяющие состояние среды

$$\Phi_0(v_j) = 0. \tag{1.69}$$

Уравнения, описывающие стационарную структуру разрыва, имеют вид

$$B'_{mj}\frac{dv_j}{d\xi} = C_m, \tag{1.70}$$

где $B'_{mj}$ определены равенствами (1.66).

В силу условия (1.67) решение должно быть всюду непрерывным (ограниченность $C_m$ предполагается), а на критической поверхности предполагается непрерывность всех $v_j$ ($N$ условий). Таким образом, полное число условий на критической поверхности (с учетом соотношения (1.69), определяющего ее положение) равно $N+1$. Эти $N+1$ условие далее будем называть *условиями склейки.* Если внутри структуры фактически нет критической поверхности, то при построении решения (которое будет строиться с двух сторон от состояний, соответствующих $\xi = \pm\infty$)

будем формально задавать некоторое соотношение (1.69), связывающее $v_j$ (не имеющее определенного физического смысла) и на поверхности, определяемой этим уравнением, будем требовать непрерывность всех $v_j$. Таким образом, случай отсутствия критической поверхности формально не отличается от случая, когда она есть.

Итак, были приняты следующие предположения:

(1) Полные системы уравнений для явлений больших масштабов переходят в гиперболические системы уравнений, для которых разыскиваются условия на разрыве.

(2) Выполнены условия диссипативности уравнений (1.58).

(3) Выполнено соотношение (1.61), обеспечивающее непрерывность решений уравнений структуры. В пункте д) будет рассмотрено, что происходит при отказе от этого предположения.

(4) Скорость разрыва $W$ не совпадает с какой-либо из характеристических скоростей перед или за разрывом.

Кроме того, принималось выполнение $N+1$ условия склейки решений, что, однако, настолько естественно, что это не следует считать предположением.

**в. Поведение решения при $\xi \to \pm\infty$.**

Линеаризуем систему (1.66) в окрестности постоянных значений, принимаемых решением при $\xi \to \pm\infty$ и получим некоторые следствия из предположений (1.65) и (1.67) (Любарский [1961]). Из них следует, что если $\operatorname{Im}\omega' > 0$, то у линеаризованной системы (1.66) не существует решений вида $e^{i(k'x'-\omega't)}$ с действительными $k'$. Обозначим через $p$ число (с учетом возможной кратности) корней $k'$ дисперсионного уравнения, соответствующего линеаризованной системе (1.66), лежащих в верхней полуплоскости комплексной плоскости $k'$ при $\operatorname{Im}\omega' > 0$, и через $q$ – число корней дисперсионного уравнения, лежащих в нижней полуплоскости $k'$ при $\operatorname{Im}\omega' > 0$.

Из условия (1.67) следует, что $p+q=N$. Если непрерывным образом менять параметры $v_j$, характеризующие состояние, около которого производится линеаризация, а также $W$, то $p$ и $q$ меняться не будут, если $\operatorname{Im}\omega$ остается в верхней полуплоскости $\omega$.

Действительно, никакой из корней $k'$ дисперсионного уравнения не может при таком изменении параметров в силу условия (1.65) пересечь действительную ось $k'$, а в силу требования (1.67) не может поменять знак $\operatorname{Im} k$, пройдя через бесконечность.

Будем предполагать, что множество всех возможных состояний $v_m^-$, $m$=1,2,...$N$ (соответствующих $\xi = -\infty$ и зависящих от $u_r^-$, где $r$=1,2,...$n_1$) и множество всех возможных состояний $v_j^+$, $j$=1,2,...$N$ (соответствующих $\xi = \infty$ и зависящих от $u_s^+$, где $s$=1,2,..$n_2$) пересекаются. Так например, в упоминавшемся случае, когда поверхность разрыва разделяет проводящую и непроводящую среды, в проводящей среде $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{v}$ связаны при $|\xi| = \infty$ соотношением $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{v}/c)$, а в непроводящей среде, где $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{v}$ независимы, имеется, однако, подмножество состояний, где $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{v}/c)$. Итак, если множество состояний $v_m^-$ пересекается с множеством состояний $v_j^+$, то $p$ и $q$ постоянны в объединении этих множеств, что и принимается в дальнейшем. Поскольку при $\operatorname{Im} \omega' > 0$ в диссипативной системе все возмущения затухают в направлении своего распространения, то $p$ и $q$ равны соответственно числу различных малых (линейных) возмущений, описываемых полной системой уравнений, которые распространяются направо и налево.

Оценим число корней $k_j'(\omega)$ дисперсионного уравнения линеаризованной системы (1.66), имеющих $\operatorname{Im} k' > 0$ при $\omega = 0$. Если $\omega' \to 0$, так что $\operatorname{Im} \omega' > 0$, то некоторые из корней $k'$ дисперсионного уравнения также будут стремиться к нулю из верхней полуплоскости $k'$ и в пределе обратятся в нуль. Найдем число таких корней. Заметим прежде всего, что если $\omega'$ и $k'$ одновременно стремятся к нулю, то для соответствующего решения временной и пространственный масштабы стремятся к бесконечности. Поэтому соответствующее экспоненциальное решение должно описываться упрощенной системой уравнений (1.63), а $\omega = \omega' + Wk'$ и $k = k'$ должны удовлетворять дисперсионному уравнению системы, которая получается линеаризацией уравнений (1.63). Поскольку система эта гипреболическая и не содержит членов без производных, то решение дисперсионного уравнения имеет вид

$$k^{(\alpha)} = \omega / c_j^{(\alpha)}, \qquad j = 1, 2, \cdots n_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

здесь $c_j^{(\alpha)}$ – характеристическая скорость упрощенной системы уравнений (1.63).

Соответственно этому получаем для асимптотического поведения корней $k'_j$, таких что $k'_j \to 0$ при $\omega' \to 0$ выражение

$$k_j'^{(\alpha)} = \omega'/c_j'^{(\alpha)}, \qquad c_j'^{(\alpha)} = c_j^{(\alpha)} - W, \quad j = 1, 2, \cdots n_\alpha. \tag{1.71}$$

Согласно сделанному выше предположению все $c_j'^{(\alpha)}$ отличны от нуля. Из сказанного следует, что у полной линеаризованной системы уравнений (1.66) имеется ровно $n_\alpha$ корней $k'(\omega')$, стремящихся к нулю при $\omega' \to 0$, причем из верхней полуплоскости стремится к нулю столько корней $k'_j$, сколько имеется характеристических скоростей у упрощенной системы (1.63), удовлетворяющих неравенствам $c_j^{(\alpha)} - W > 0$. Обозначим далее это число через $r_\alpha$.

Очевидно, $r_\alpha$ зависит от значений $v_j^{\pm}$, около которых произведена линеаризация системы уравнений, и от $W$. Из нижней полуплоскости $k'$ будут стремиться к нулю $l_\alpha = n_\alpha - r_\alpha$ корней при $\omega' \to 0$. Таким образом, в верхней полуплоскости при $\omega' = 0$ останется $p - r_\alpha$, а в нижней $q - l_\alpha$ корней $k'$дисперсионного уравнения линеаризованной полной системы уравнений (1.66).

Будем строить решение задачи о стационарной структуре ударной волны, представляющее решение системы (1.70), начиная с $\xi = \pm\infty$. При больших отрицательных $\xi$ и при фиксированных значениях $v_j^-$ решение должно мало отличаться от $v_j^-$ и поэтому добавки к $v_j^-$ могут находиться из линеаризованных уравнений. Решение этих уравнений в общем случае экспоненциально зависят от $\xi$. В свете изложенного выше удобно эти решения получать из решений вида $e^{i(k'x' - \omega' t)}$ (где $x' = x - Wt = -\xi$) предельным переходом при $\omega' \to 0$.

Поскольку эти решения линеаризованных уравнений должны стремиться к нулю при $\xi \to -\infty$, то экспоненты, из которых состоит решение, могут соответствовать только тем значениям $k' = k_m^{(1)}$, которые остаются в верхней полуплоскости после обращения $\omega'$ в нуль. Можно заключить, что разыскиваемое решение зависит от $p - r_1$ произвольных постоянных $C_m^-$, стоящих

при слагаемых, содержащих экспоненты $e^{-ik_m^{(1)}\xi}$. С ростом $\xi$ решения однозначно могут быть продолжены, что обеспечивается выполнением условия (1.67).

Таким образом, совокупность решений системы (1.70), стремящихся к постоянным значениям при $\xi \to -\infty$ при заданном $W$, определяется $p - r_1$ произвольными постоянными $C_m^-$ и состоянием при $\xi = -\infty$, которое определяется $n_1$ величинами $u_1^-$, $u_2^-$,...$u_{n_1}^-$. Аналогично, при том же $W$ совокупность решений, которые стремятся к постоянным значениям при $\xi \to \infty$, определяется $q - l_2$ произвольными постоянными $C_j^+$, которые стоят при экспонентах, убывающих с ростом $\xi$, и $n_2$ значениями $u_1^+$, $u_2^+$,... $u_{n_2}^+$. Напомним, что $p - r_1$ и $q - l_2$ равны разности числа малых возмущений, описываемых полной и упрощенной системами, которые распространяются соответственно вперед (в область $x > 0$) и назад (в область $x < 0$) от разрыва.

**г. Дополнительные соотношения на разрывах.**

Как было сказано выше, для того чтобы получить решение задачи о структуре разрыва, необходимо выполнить $N+1$ условие склейки. Условия склейки можно рассматривать как условия, связывающие параметры, от которых зависят решения по разные стороны от точки склейки

$$F_a(u_1^-, \cdots u_{n_1}^-, C_1^-, \cdots C_{p-r_1}^-, u_1^+, \cdots u_{n_2}^+, C_1^+, \cdots C_{q-l_2}^+, W) = 0,$$

$$a = 1, 2, \cdots N+1. \tag{1.72}$$

В число аргументов функций $F_a$ добавлена величина $W$, поскольку от $W$ зависит строение склеиваемых решений. Из этих соотношений в случае общего положения можно исключить $p - r_1 + q - l_2 = N - r_1 - l_2$ величин $C_i^-$ и $C_j^+$. Тогда в случае общего положения останутся $N+1-(N-r_1-l_2) = r_1+l_2+1$ соотношений вида

$$\Theta_b(u_1^-, \cdots u_{n_1}^-, u_1^+, \cdots u_{n_2}^+, W) = 0, \quad b = 1, 2, \cdots r_1 + l_2 + 1, \tag{1.73}$$

где $\Theta$ – некоторые функции своих аргументов. Поскольку сумма $r_1 + l_2$ представляет собой число различных типов характеристик гиперболических упрощенных систем уравнений, уходящих от разрыва в обе стороны, то число соотношений, получаемых из требования существования решения, представляющего структуру разрыва, соответствует требованию эволюционности разрыва с точки зрения упрощенных гиперболических систем уравнений, описывающих явления крупного масштаба.

Сделаем некоторые замечания, связанные с полученным результатом. Если уравнения (1.70) описывают стационарное движение сплошной среды, то они должны иметь в качестве следствий законы сохранения массы, импульса, энергии и, возможно, другие законы сохранения, о чем шла речь в § 1.1. Законам сохранения соответствуют первые интегралы рассматриваемой системы уравнений, позволяющие написать соответствующие соотношения, связывающие $u_i^-$, $u_j^+$ и $W$. Очевидно, они должны содержаться среди соотношений (1.73). Однако, для их написания можно не обращаться к изучению структуры. Соотношения на разрывах, выражающие законы сохранения, не зависят от процессов внутри структуры (если эти процессы не противоречат законам сохранения) и, как правило, известны заранее. Их будем называть *основными соотношениями* на разрыве.

Если кроме основных, система (1.73) содержит еще другие соотношения на разрыве, то их будем называть *дополнительными.* Дополнительные соотношения зависят от процессов, происходящих внутри структуры, т.е. от выбора полной системы уравнений (1.61) (в противном случае существовал бы физический закон типа закона сохранения).

Известным примером дополнительного соотношения является выражение для скорости движения фронта пламени в газе, которая определяется теплопроводностью, диффузией и химическими реакциями в узкой зоне, где происходит горение. На некоторых разрывах, например на фронтах ионизации и рекомбинации в газах, находящихся в магнитном поле, число дополнительных соотношений оказывается больше единицы (Бармин и Куликовский [1971]).

При выводе соотношений (1.73) предполагалось, что решение

задачи о структуре разрыва существует. Относительно существования решений, представляющих структуры разрывов, получены некоторые достаточно общие результаты только в том случае, когда по обе стороны от разрыва среда описывается одними и теми же уравнениями и когда число основных граничных условий равно числу уравнений упрощенной системы (Любарский [1962], Годунов [1961 б], [1962], Куликовский [1962], Gordon [1974], Smoller [1983]). При изучении волн малой амплитуды в общем случае можно провести разложение решения по амплитуде волны. При этом из полной системы уравнений достаточно общего вида при любом числе или отсутствии законов сохранения можно получить уравнение Бюргерса, обладающее переходными решениями (рассмотренными ранее в § 1.13), которые можно рассматривать как структуру разрыва. Эти решения дают $n = n_1 = n_2$ соотношений между $u_m^-$, $u_m^+$ и $W$. Кроме перечисленных общих результатов, исследовано большое число конкретных моделей структуры разрывов.

Требование существования решения может накладывать на $u_r^+$ и $u_s^-$ ограничения типа неравенств

$$\Psi_q(u_r^+, u_s^-, W) \geq 0. \tag{1.74}$$

В число таких неравенств должно входить, например, часто используемое условие неубывания энтропии на разрывах без подвода тепла, которое, очевидно, должно выполняться для разрывов, имеющих структуру.

Отметим еще одно важное обстоятельство. При получении соотношения (1.73) из (1.72) предполагалось, что часть равенств (1.70) можно использовать для нахождения величин $C_m^-$, $C_j^+$, а затем подставить их в оставшиеся выражения. Нахождение указанных функций возможно при условии невырожденности какого-нибудь минора, соответствующего этим величинам, в якобиане от левых частей соотношений (1.72). Если последнее условие не выполнено, то это означает, что величины $C_m^-$, $C_j^+$ входят в соотношения (1.72) не независимо, а в виде некоторых комбинаций. Тогда из системы (1.72) нужно исключить эти комбинации, чтобы получить соотношения (1.73), которых при этом будет

больше, чем $r_1 + l_2 + 1$. Этот случай, очевидно, соответствует неэволюционным разрывам.

Решение, представляющее структуру неэволюционных разрывов, если оно существует, определяется неоднозначно в силу неоднозначности нахождения величин $C_m^-$, $C_j^+$, задающих это решение. Вырождение всех миноров якобиана, соответствующих величинам $C_m^-$, $C_j^+$, как и всякое вырождение, можно считать исключительным случаем. Однако, если в качестве начальной и конечной особых точек при построении структуры разрыва выбираются точки, для которых $r_1 + l_2 + 1$ меньше числа основных соотношений, то, с учетом сказанного выше, вырождение упомянутых миноров якобиана будет предопределено. Примеры таких неэволюционных разрывов известны в магнитной гидродинамике, причем было показано (Germain [1959]), что их структура, если существует, то неединственна (содержит произвольные параметры).

**д. Основной результат и его обсуждение.**

Приведенные выше соображения позволяют сформулировать окончательный результат следующим образом. Если основных соотношений на разрыве меньше, чем требуется для его эволюционности, то из требования существования решения (разумеется, если такое решение существует), представляющего структуру разрыва, можно найти столько дополнительных соотношений, сколько необходимо, чтобы разрыв с учетом основных и дополнительных соотношений был эволюционным. Конкретный вид дополнительных соотношений зависит от уравнений, описывающих структуру разрыва.

Если число основных соотношений на разрыве соответствует условиям эволюционности, то из рассмотрения структуры разрыва не следует дополнительных соотношений типа равенств, однако, могут возникнуть неравенства, при выполнении которых существует (или не существует) решение, представляющее структуру разрыва.

Когда число основных соотношений больше, чем требуется для эволюционности, то такой разрыв при взаимодействии с малыми возмущениями должен распасться (см. § 4.13). Структура

таких неэволюционных разрывов, если существует, то неединственна (решение задачи о структуре содержит произвольные параметры).

Заметим, что наряду с нетривиальными разрывами фазовых переходов, в которых не все $C_m^-$ и $C_j^+$ одновременно равны нулю, возможны ситуации, когда все эти величины равны нулю. Это приводит к отсутствию в решении изменения величин с обеих сторон от поверхности раздела и соответствует непрерывным фронтам, по разные стороны от которых действуют различные упрощенные системы уравнений. Такие непрерывные фронты ионизации и рекомбинации известны, например, в магнитной гидродинамике (Butler [1965]), когда считается, что электропроводность газа отлична от нуля только при достаточно высокой температуре $T > T_*$.

В заключение отметим, что выше рассматривалась стационарная одномерная структура разрывов, однако, реальная структура может быть нестационарной и неодномерной, т.е. внутри узкой зоны разрыва возможны колебания и неодномерные течения. При этом решение, представляющее одномерную стационарную структуру, может вообще не существовать либо быть неустойчивым. Кроме того, как уже упоминалось выше, переходная зона разрыва может расширяться со временем, оставаясь, однако, узкой по сравнению с внешним размером задачи.

Поэтому, строго говоря, отсутствие решения, представляющего стационарную структуру разрыва, не означает, что такой разрыв не существует, поскольку у этого разрыва может существовать неодномерная нестационарная структура. (Вопрос о получении дополнительных соотношений в случае, когда структура в системе координат, движущейся со средней скоростью разрыва, периодична по времени и относительно координат, лежащих в плоскости волны, рассматривался А.Г.Куликовским с общих позиций (Куликовский [1988])). Существование стационарной структуры не гарантирует физической осуществимости разрыва. Для уверенности в физической осуществимости необходимо, кроме того, убедиться в устойчивости соответствующего решения. Это является трудной задачей и редко делается.

**е. Замечание о получении дополнительных соотношений при нарушении условия (1.67).**

При рассмотрении конкретных задач о структуре разрывов полная система уравнений иногда не удовлетворяет требованию (1.67), обеспечивающему непрерывность решения задачи о структуре разрыва. В большинстве случаев такой вид системы уравнений обусловлен переупрощением рассматриваемых диссипативных механизмов. Для многих задач, связанных с течениями сплошной среды, можно добиться выполнения требования (1.67), если включить в рассмотрение хотя бы малую вязкость среды. Если считать, что для описания структуры используется система уравнений с достаточно полным набором диссипативных механизмов, то условие (1.67) будет выполнено, а переход к более простой системе уравнений, для которой условие (1.67) не выполняется, можно произвести, устремляя часть диссипативных коэффициентов к нулю. При этом внутри структуры в пределе могут появляться разрывы, причем устремленные к нулю диссипативные коэффициенты будут существенны только в малой окрестности возникающих разрывов. Если соотношения на этих внутренних разрывах известны или получены путем указанного предельного перехода, то при построении структуры разрывов и нахождении дополнительных соотношений на них можно пользоваться и такими системами уравнений, которые допускают существование слабых и сильных разрывов, учитывая возможность их появления в структуре.

Рассмотрим вопрос о поведении решения задачи о структуре, если предположение (1.67) не выполняется, т.е. при каких-то значениях $W$ и $v_j$ имеет место равенство

$$|B_{mj} - WA_{mj}| = 0, \qquad m, j = 1, 2, \ldots N. \tag{1.75}$$

Будем предполагать, что это равенство выполняется для некоторого набора значений $W = c_j^*$, которые являются функциями $v_m$ и для простоты будут далее считаться однократными корнями уравнения (1.75). Величины $c_j^*$ являются характеристическими скоростями полной системы уравнений (1.61). Поскольку эта система не предполагается гиперболической, число корней

$c_j^*$ характеристического уравнения (1.75) может отличаться от порядка системы $N$.

Так как определитель $|ikB_{mj} - i\omega A_{mj}|$ содержит члены старших степеней по $\omega$ и $k$, входящие в дисперсионное уравнение, то, если $\omega$ и $k$ стремятся к бесконечности, оставаясь одного порядка, то связь $\omega$ и $k$, которая находится путем приравнивания этого определителя к нулю, дает главные члены асимптотической зависимости $\omega(k)$. Очевидно, значениям $c_j^*$ соответствуют равенства

$$k_j = \omega / c_j^*.$$

Поскольку предполагается, что $\operatorname{Im}\omega$ ограничено при действительных $k$, то из последнего равенства можно заключить, что все $c_j^*$ действительны.

В системе координат, движущейся со скоростью $W$, получим

$$k_j' = \frac{\omega'}{c_j^{*\prime}} = \frac{\omega'}{c_j^* - W}, \tag{1.76}$$

где $c_j^{*\prime}$ определяются как корни уравнения (1.75), в котором $B_{mj}$ заменено на $B_{mj}'$.

Из равенства (1.76) видно, что при $\operatorname{Im}\omega > 0$, если разность $c_j^* - W$ проходит через нуль от отрицательных значений к положительным, то соответствующий корень $k_j$ переходит из нижней полуплоскости комплексной плоскости $k'$ в верхнюю, проходя через бесконечность.

Это позволяет легко следить за числом корней $k_j'(0)$ дисперсионного уравнения, лежащих при $\omega = 0$ в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости $k'$, при изменении $W$ и $v_j$. Именно эти числа равны соответственно числу слагаемых в асимптотическом представлении решения задачи о структуре при $\xi \to \infty$ и $\xi \to -\infty$ (см. раздел (**в**) этого параграфа)). Обычно бывает нетрудно определить эти числа для очень больших значений $W$ (превосходящих все характеристические скорости и упрощенной и полной систем), а затем следить за их изменением при уменьшении $W$.

Таким образом, изменение числа корней $k_j'(0)$, лежащих в верхней и нижней полуплоскостях $k'$, согласно предыдущему и

результатам, полученным в разделе (**в**), происходит, когда $W$ переходит через характеристические скорости полной и упрощенной систем уравнений. При этом, согласно разделу (**в**), когда $W$ становится меньше некоторой характеристической скорости упрощенной системы, один корень $k'_j(0)$ исчезает в верхней полуплоскости (поскольку $k'_j(\omega) \to 0$ при $\omega \to 0$) и дополнительный корень $k_m(0)$ появляется в нижней полуплоскости (поскольку число корней $k'_m(\omega)$, стремящихся к нулю из нижней полуплоскости, уменьшается на единицу). Когда $W$ становится меньше характеристической скорости полной системы, то, согласно предыдущему, происходит обратное изменение числа корней $k'_m(0)$: число корней $k'_j(0)$ в верхней полуплоскости увеличивается на единицу, а число корней $k_m(\omega)$ в нижней полуплоскости уменьшается на единицу (корень проходит через бесконечность).

Не производя в общем виде подсчет параметров, от которых зависит решение задачи при $\xi \to \pm\infty$, необходимых для того, чтобы после выполнения условий склейки решений (см. раздел (**б**) этого параграфа) и исключения параметров, характеризующих внутреннее устройство структуры, получились соотношения, удовлетворяющие условию эволюционности, рассмотрим частный случай, когда внутри структуры только одна из разностей $c_j^* - W$ меняет знак, переходя от отрицательных значений к положительным. Сравнивая эту ситуацию с той, при которой не происходит изменения знаков разностей $c_m^* - W$, а в начальном состоянии (при $\xi = -\infty$) знаки разностей $c_m^* - W$ и $c_l^- - W$ те же самые, замечаем, что асимптотическое представление решения при $\xi \to \infty$ в случае изменения знака $c_j^* - W$ имеет на одну произвольную постоянную меньше, чем в случае, когда изменения знака разностей $c_m^* - W$ не происходит. Однако, при указанном изменении знака этой разности внутри структуры в случае общего положения должен присутствовать разрыв, характеризующийся одним произвольным параметром – амплитудой скачка. В совокупности имеем необходимое число параметров, чтобы после выполнения условий склейки получить соотношения вида (1.73), удовлетворяющих условиям эволюционности.

В случае, когда изменение знака одной из разностей $c_j^* - W$ происходит в противоположном направлении, от плюса перед

разрывом к минусу за ним, то в асимптотическую форму решения при $\xi \to \pm\infty$ входит на одну постоянную больше, чем в случае, когда знаки $c_m^* - W$ не меняются. Однако, при обращении в нуль $c_j^* - W$ система (1.70) имеет особую точку, условие прохождения интегральной кривой через которую даст необходимое условие для нахождения "лишней" произвольной постоянной.

## Резюме

Поскольку эта глава имеет вводный характер и содержит также общеизвестный материал, тематика которого хорошо видна из оглавления, упомянем здесь только некоторые из обсуждаемых в ней понятий и результатов.

При рассмотрении эволюционности разрывов (§ 1.6) введено понятие априорной эволюционности, т.е. эволюционности в предположении, что соотношения на разрыве даются только законами сохранения.

Наряду с изучением ударной адиабаты в окрестности начальной точки (§ 1.7) рассматривается ее поведение около точек Жуге, где скорость разрыва совпадает с одной из скоростей характеристик за разрывом (§ 1.8). При рассмотрении автомодельных задач с зависимостью решений от $x/t$ (§ 1.9), показано, что при наличии на ударной адиабате "не своей" точки Жуге нарушается непрерывная зависимость решения от параметров задачи, а при выполнении указанного в § 1.9 неравенства существует область параметров, при которых решение либо неединственно, либо не существует.

В § 1.10 показано, что при выполнении дополнительного предположения, которое здесь назовем предположением о существовании энтропии оказывается возможным привести уравнения, выражающие законы сохранения, к удобной специальной форме (см. уравнение (1.40)).

В § 1.11 с целью изучения разрывных решений гиперболических систем уравнений как пределов непрерывных решений, вводятся усложненные уравнения, которые обращаются в гиперболические при отбрасывании малых членов в случае медленно меняющихся решений.

Для волн малой амплитуды получено уравнение Бюргерса (§ 1.12) и с помощью него изучена непрерывная структура слабых ударных волн (§ 1.13). Рассмотрен пример уравнения, в котором при стремлении к нулю членов, определяющих ширину размазывания разрывов, возникают в пределе разрывные решения с дополнительными соотношениями.

В § 1.15 в общем виде рассмотрен вопрос о числе дополнительных соотношений, возникающих в результате требования существования решения, представляющего структуру разрыва.

# Глава 2.

# Постановка задачи о плоских волнах в упругой среде

## 2.1. Модель упругой среды. Система уравнений

В этой главе кратко излагаются основные представления, связанные с моделью упругой среды. Более подробно и широко эти вопросы освещены в книгах (Седов [1994], Бленд [1972], Жермен [1983], Грин и Адкинс [1965], Петрашень [1980] и др.).

В основе построения модели упругого тела лежат интегральные законы сохранения (изменения) массы, количества движения и энергии. Всюду в этой книге будет использован способ описания положения и движения частиц с помощью лагранжевых координат, т.е. координат, сохраняющих свои значения в частицах среды. В качестве лагранжевых координат используются декартовы прямоугольные координаты $x_i$, $i$=1,2,3 точек в некотором состоянии, принятом за начальное.

Координаты $x_i'$ индивидуальных частиц после смещения определяются формулами

$$x_i' = x_i + w_i(x_k, t), \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

где $w_i$ – компоненты вектора перемещения. Скорость и ускорение точки с лагранжевыми координатами $x_k$ определяются равенствами

$$v_i(x_k, t) = \frac{\partial w_i}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}.$$

Деформация характеризуется изменением длин материальных отрезков. Вектор, соединяющий две соседние точки среды в начальном состоянии, имеет компоненты $dx_i$ , а после деформации

$$dx_i' = dx_i + \frac{\partial w_i}{\partial x_k} dx_k = dx_k \left(\delta_{ik} + \frac{\partial w_i}{\partial x_k}\right).$$

Квадраты длины рассматриваемого отрезка до деформации и после определяются равенствами $dl_0^2 = dx_i dx_i$, $dl^2 = dx_j' dx_j'$. Изменение квадрата длины дается разностью

$$dl^2 - dl_0^2 = \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k.$$

Выражения в скобке представляют компоненты симметричного тензора второго ранга, которые с множителем $\frac{1}{2}$ принимаются за меру деформации. Этот тензор, отнесенный к системе координат начального (до деформации) состояния $x_i$, называется тензором конечных деформаций Грина. Его компоненты будем обозначать $\varepsilon_{ij}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}\right). \tag{2.1}$$

*Закон сохранения массы* утверждает, что масса индивидуального объема сохраняется. Если плотность среды определена и интегрируема, то

$$M = \int\limits_V \rho dV = \int\limits_{V_0} \rho_0 dV_0. \tag{2.2}$$

Здесь $V_0$ – произвольный объем, выделенный в начальном состоянии среды, $V$ – объем, занимаемый теми же частицами среды в произвольный момент времени, $\rho = \rho(x_i, t)$ – плотность в момент

времени $t$, $\rho_0 = \rho_0(x_i)$ – плотность той же частицы в начальном состоянии. Очевидно, для малой частицы

$$\rho dV = \rho_0 dV_0. \tag{2.3}$$

Это уравнение позволяет вычислить плотность $\rho$ в текущем состоянии, если известно изменение материального объема при деформации.

Следуя этому подходу, будем и для других физических величин (сила, энергия, приток тепла и т.д.) вводить плотности величин, отнесенные к объему частицы $dV_0$ в начальном состоянии. Плотность массовых сил, отнесенную к начальному объему, обозначим $\boldsymbol{F}$ . Тогда на малую частицу действует сила

$$d\boldsymbol{F}_m = \rho_0 \boldsymbol{F}\, dV_0.$$

Аналогично вводится плотность распределения поверхностных сил. Силу $d\boldsymbol{F}_\Sigma$, действующую на текущей площадке $d\Sigma$ (с нормалью $\boldsymbol{\nu}$), будем относить к той площадке $d\Sigma_0$ с нормалью $\boldsymbol{n}$, какой была $d\Sigma$ в начальном состоянии (рис. 2.1). Полученный таким образом вектор напряжения обозначим $\boldsymbol{\sigma}_n$. Тогда

$$d\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{\sigma}_n\, d\Sigma_0.$$

*Закон сохранения количества движения* в лагранжевых переменных, примененный к индивидуальному объему $V_0$ в начальном состоянии, записывается следующим образом

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} \rho_0 \boldsymbol{v}\, dV_0 = \int\limits_{V_0} \rho_0 \boldsymbol{F}\, dV_0 + \int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{\sigma}_n\, d\Sigma_0. \tag{2.4}$$

Здесь $\boldsymbol{v}(x_k, t) = \partial \boldsymbol{w}/\partial t$– скорость частицы с лагранжевыми координатами $x_k$.

В силу третьего закона Ньютона внутренние массовые силы не дают вклада в уравнение (2.4). Таким образом, это уравнение показывает, что изменение количества движения происходит только под действием внешних воздействий и в силу этого относится к интегральным законам сохранения, обсуждавшимся в § 1.1.

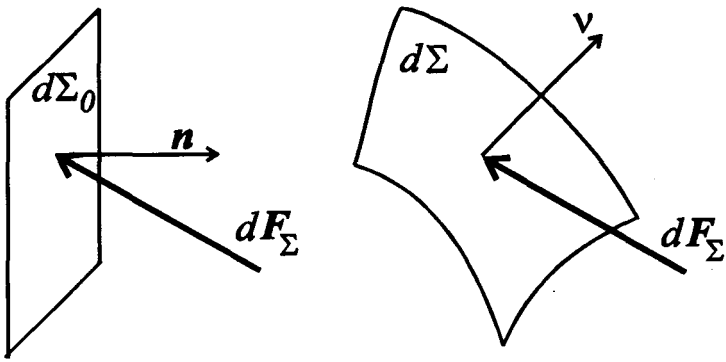



Рис. 2.1.

Применение уравнения (2.4) к малой частице, когда объемные интегралы становятся меньше поверхностных, позволяет выразить вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_n$ на произвольной площадке через напряжения $\boldsymbol{\sigma}_i$ на трех площадках, ортогональных осям $x_k$ декартовой системы начального состояния

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_j n_j = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i n_j, \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ – единичные векторы по осям $x_i$, $n_j$ – компоненты вектора $\boldsymbol{n}$ (направляющие косинусы нормали к $d\Sigma_0$). Соотношение (2.5) показывает, что $\sigma_{ij}$ представляют собой компоненты тензора второго ранга, называемого *тензором напряжений Пиолы—Кирхгоффа.*

Отметим, что если уравнение, выражающее изменение количества движения, записать в виде интегралов по текущему объему $V$, занятому средой, и по поверхности $\Sigma$ этого объема, то следует ввести другой вектор напряжения $\boldsymbol{p}_\nu$, отнесенный к текущей площадке $d\Sigma$ с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ и связанный с вектором $\boldsymbol{\sigma}_n$ материальных площадок при деформации

$$d\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{p}_\nu d\Sigma = \boldsymbol{\sigma}_n d\Sigma_0. \tag{2.6}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к симметричному *тензору напряжений Коши* с компонентами $p_{kl}$. Напряжение на площадке $d\Sigma$ с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ (и то и другое относится к актуальному состоянию) и связь его компонент с ранее введенными величинами $\sigma_{km}$ выражаются следующим образом (Бленд, [1972], Седов [1994])

$$\boldsymbol{p}_\nu = p_{kj}\nu_j \boldsymbol{e}_k$$
$$p_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\sigma_{kj}\left(\delta_{ik} - \frac{\partial w_i}{\partial x_k}\right).$$

Для непрерывных дифференцируемых функций $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\sigma}_n$ соотношение (2.5) позволяет написать *дифференциальное уравнение движения сплошной среды*, эквивалентное интегральному закону сохранения (2.4)

$$\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \rho_0\boldsymbol{F} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i},$$

или в проекциях на оси $x_k$

$$\rho_0\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} = \rho_0 F_k + \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j}, \qquad j,k = 1,2,3. \tag{2.7}$$

Это уравнения движения в форме Пиолы-Кирхгоффа.

Еще одно основное уравнение механики сплошной среды дает закон сохранения энергии. Согласно этому закону (первому закону термодинамики) изменение полной энергии индивидуального объема сплошной среды происходит за счет притока извне всех видов энергии, из которых мы ограничимся только притоками механической энергии (работой внешних сил) и тепловой.

Полную энергию объема среды представим в виде суммы кинетической и внутренней. Будем считать внутреннюю энергию аддитивной функцией массы и ее плотность, отнесенную к объему в начальном состоянии, назовем $U$. Поток тепла через площадку $d\Sigma_0$ с нормалью $\boldsymbol{n}$ обозначим $-q_n$ (напомним, что $\boldsymbol{n}$ – внешняя по отношению к рассматриваемому объему нормаль). Тогда в системе координат $x_i$, связанной с начальным состояни-

ем, *закон сохранения энергии* имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_0}\rho_0\left(\frac{v^2}{2}+U\right)dV=\int\limits_{V_0}\rho_0\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dV_0+\int\limits_{\Sigma_0}\boldsymbol{\sigma}_n\cdot\boldsymbol{v}d\Sigma_0-\int\limits_{\Sigma_0}q_n d\Sigma_0. \quad (2.8)$$

Объемные притоки тепла для простоты считаются отсутствующими. Это уравнение, примененное к бесконечно малому тетраэдру, позволяет показать, что $q_n$ представляет нормальную к площадке $d\Sigma_0$ компоненту вектора $\boldsymbol{q}$ , называемого *вектором потока тепла.* Доказательство аналогично упомянутому выше при получении формулы (2.5).

Когда все подинтегральные выражения непрерывны и дифференцируемы, интегральное уравнение (2.8) можно заменить эквивалентным дифференциальным, предварительно преобразовав поверхностные интегралы в объемные

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_0\left(\frac{v^2}{2}+U\right)=\rho_0F_iv_i+\frac{\partial(\sigma_{ij}v_i)}{\partial x_i}-\operatorname{div}\boldsymbol{q}. \quad (2.9)$$

Из этого уравнения можно исключить кинетическую энергию с помощью теоремы живых сил, которая получается скалярным умножением уравнения движения (2.7) на вектор $\boldsymbol{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_0\frac{v^2}{2}=\rho_0F_iv_i+v_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Вычитая последнее равенство из уравнения энергии (2.9), получим другую форму записи первого закона термодинамики, которую часто называют уравнением притока тепла

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{\rho_0}\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\operatorname{div}\boldsymbol{q}. \quad (2.10)$$

Это уравнение показывает, что изменение внутренней энергии материальной частицы $dU$ связано с притоком тепла к единице массы $dq=-(1/\rho_0)\operatorname{div}\boldsymbol{q}\,dt$ и плотностью работы внутренних сил $(1/\rho_0)\sigma_{ij}d\left(\partial w_j/\partial x_i\right)$.

Чтобы дифференциальные уравнения движения (2.7) и энергии (2.9), или притока тепла (2.10), составили замкнутую систему, способную описывать непрерывные движения сплошной среды, необходима конкретизация свойств среды и, в частности,

информация о функции $U$ и ее связи с другими параметрами состояния. Ограничимся рассмотрением упругой среды.

*Упругим телом* называют такую модель сплошной среды, в которой, во-первых, *внутренняя энергия является функцией только тензора деформаций $\varepsilon_{ij}$ и энтропии $S$*

$$U = U(\varepsilon_{ij}, S).$$

(Здесь и далее буквой $S$ обозначена энтропия единицы массы); во-вторых, для упругого тела принимается, что все *непрерывные механические процессы в малой частице обратимы.* Это значит, что второй закон термодинамики для малой частицы имеет вид

$$TdS = dq, \qquad \text{или} \quad \rho_0 T \frac{\partial S}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}, \tag{2.11}$$

где $T$ – температура.

Комбинация первого (2.10) и второго (2.11) законов термодинамики позволяет исключить внешний приток тепла $\operatorname{div} \boldsymbol{q}$ и иметь соотношение только между внутренними параметрами среды, называемое *тождеством Гиббса*

$$dU = \frac{1}{\rho_0}\sigma_{jk} d\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_k}\right) + TdS. \tag{2.12}$$

Этим равенством часто удобно заменять одно из уравнений (2.10) или (2.11).

Учитывая выражения для компонент деформации (2.1), внутреннюю энергию $U(\varepsilon_{ij}, S)$ можно рассматривать как функцию компонент тензора градиентов перемещения $\partial w_k/\partial x_i$ и энтропии $S$. Тогда соотношение (2.12) можно заменить двумя эквивалентными ему уравнениями состояния

$$\sigma_{jk} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \dfrac{\partial w_j}{\partial x_k}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}.$$

Отметим, что тензор напряжений $\sigma_{jk}$, вообще говоря, *не симметричен.* Однако, поскольку $U$ зависит от $\partial w_i/\partial x_k$ только через

тензор деформации $\varepsilon_{ij}$, то согласно уравнению (2.12) при поворотах элемента среды как твердого тела поверхностные силы не совершают работы.

Наряду с плотностью внутренней энергии $U$ можно ввести функцию $\Phi = \rho_0 U$, называемую *упругим потенциалом* и представляющую собой внутреннюю энергию единицы начального объема. Тогда уравнения состояния примут вид

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial w_i/\partial x_k)}, \quad T = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Phi}{\partial S}. \tag{2.13}$$

Упругий потенциал $\Phi(\partial w_i/\partial x_k, S)$ задает свойства конкретной среды и при решении задач *считается известным.* Как и у внутренней энергии зависимость $\Phi$ от $\partial w_i/\partial x_k$ определяется сложной функцией: $\Phi$ зависит от $\varepsilon_{ij}$, а $\varepsilon_{ij}$ от $\partial w_k/\partial x_l$ .

Кроме напряжений, в среде необходимо также задать поток тепла $\boldsymbol{q}$. Обычно в механике сплошной среды принимается закон теплопроводности Фурье

$$\boldsymbol{q} = -k \operatorname{grad} T, \tag{2.14}$$

где $k$ – коэффициент теплопроводности, характеризующий среду, а градиент берется по эйлеровым переменным. Однако, в теории упругости чаще всего полагают

$$\boldsymbol{q} = 0.$$

Это предположение для протяженных областей может быть обосновано тем, что в уравнениях (2.10) или (2.9), где содержится вектор $\boldsymbol{q}$, он входит под знаком дивергенции. Это приводит, с учетом закона теплопроводности (2.14), к тому, что соответствующий член, содержащий вторые производные от $T$ по координатам, будет зависеть от геометрического масштаба явления $L$ как $1/L^2$. Другие же члены в этом уравнении имеют порядок $1/L$ (порядок величин $v_i$, $\sigma_{ij}$ и $T$ считается не зависящим от $L$ ). Поэтому для явлений, характеризующихся достаточно большим геометрическим масштабом $L$, равенство $\boldsymbol{q} = 0$ можно считать приемлемым. В дальнейшем всюду будет полагаться

$\boldsymbol{q} = 0$ . Кроме того, будем считать отсутствующими массовые силы $\boldsymbol{F} = 0$ .

Напомним, что уравнения (2.9) и (2.10), выражающие закон сохранения энергии, эквивалентны, если принять во внимание теорему живых сил. Точно также при использовании уравнений состояния (2.13) будут эквивалентными уравнения (2.10) и (2.11). Подчеркнем, что эквивалентность уравнения энергии (2.9) или притока тепла (2.10) уравнению для энтропии (2.11) имеет место только для непрерывных гладких движений среды.

Полную систему уравнений теории упругости для непрерывных процессов можно записать при $\boldsymbol{q} = 0$ и $\boldsymbol{F} = 0$ в следующем виде (уравнения (2.7) и (2.11) с использованием равенств (2.13) и заданной функции $\Phi$ )

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial(\partial w_i/\partial x_k)}\right), \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad i,k = 1,2,3. \quad (2.15)$$

Во многих случаях вместо $w_i$ бывает удобно пользоваться переменными $v_i = \partial w_i/\partial t$ и $u_{ij} = \partial w_i/\partial x_j$. В этих переменных система уравнений принимает *дивергентный вид*

$$\frac{\partial \rho_0 v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial u_{ij}}, \qquad \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad (2.16)$$

где $\Phi = \Phi(u_{ij}, S)$ – известная функция своих аргументов. Вторая группа уравнений обеспечивает существование перемещений, соответствующих $v_i$ и $u_{ij}$ . Уравнения первой группы обычно называют динамическими, а второй – кинематическими уравнениями теории упругости.

Отметим, что уравнения (2.15) или (2.16) независимы от уравнений сохранения массы (2.2), так как $\rho$ в них не входит. Для нахождения $\rho$ после решения системы (2.16) служит уравнение (2.2), переписанное в виде

$$\rho = |\delta_{ij} + u_{ij}|^{-1}\rho_0.$$

Вертикальными прямыми здесь и далее обозначен определитель соответствующей матрицы.

Учитывая принятые выше условия и обозначения, в интегральной системе уравнений теории упругости (2.4) и (2.8) следует положить

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{ij}}, \quad v_i = \frac{\partial w_i}{\partial t}, \quad u_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}, \quad q = 0.$$

Можно использовать величины $v_i$ и $u_{ij}$ как искомые функции. Однако, при этом потребуются соотношения, аналогичные второй группе уравнений (2.16), но не предполагающие непрерывности и дифференцируемости функций $v_i$ и $u_{ij}$. Эти соотношения могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{d}{dt} \int\limits_A^B u_{ij} dx_j = v_{iB} - v_{iA}, \tag{2.17}$$

где $A$ и $B$ – две любые точки с координатами $x_i$, не зависящими от времени.

## 2.2. Уравнения теории упругости для одномерных движений в виде плоских волн. Условия на разрыве

В данной книге будут изучаться только *одномерные движения* упругой среды, когда все входящие в систему (2.16) функции $v_i$, $u_{ik}$, $S$, $T$ зависят только от одной пространственной переменной – декартовой координаты $x$ и времени $t$. Такие движения называются *плоскими волнами*. В качестве упомянутой пространственной переменной выберем $x = x_3$ декартовой системы координат $x_1, x_2, x_3 = x$ (рис. 2.2).

В этом случае, как видно из уравнений (2.16), из компонент тензора градиентов перемещения $u_{ik}$ будут изменяться со временем только $u_{i3} = \partial w_i / \partial x_3$. Будем в дальнейшем в обозначении этих величин опускать индекс 3

$$u_i(x,t) = \frac{\partial w_i}{\partial x}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

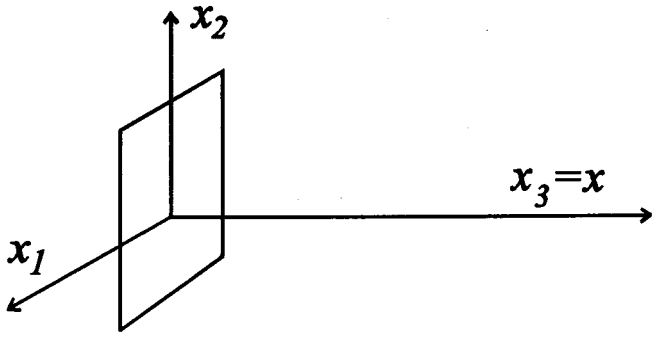



Рис. 2.2.

Остальные компоненты $u_{i\alpha} = \partial w_i/\partial x_\alpha$, $\alpha$=1,2. могут присутствовать в качестве постоянных параметров, задающих начальное состояние деформации.

Система одномерных дифференциальных уравнений теории упругости в лагранжевых переменных в декартовой системе осей начального состояния имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.18}$$

При этом упругий потенциал $\Phi(u_j, S)$ считается заданным. Первая группа уравнений называется *динамическими*, а вторая – *кинематическими* уравнениями теории упругости.

В несжимаемой среде при одномерных движениях должна отсутствовать продольная компонента деформаций $u_3 = 0$. При этом система уравнений (2.18) остается прежней, лишь следует считать, что $i = \alpha$=1,2.

Запишем систему (2.18) в форме уравнений Годунова (§ 1.10), хотя в дальнейшем эта форма использоваться не будет. Для этого уравнение $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$ в системе (2.18) следует заменить уравнением энергии (2.9), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi + \rho_0 \frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right) = 0.$$

В соответствии с § 1.10, множители, на которые следует домножить первые шесть уравнений системы (2.18) и уравнение энергии для получения уравнения $\dfrac{\partial s}{\partial t} = 0$ ($s = f$ – плотность энтропии по лагранжеву объему, поток энтропии $g = 0$), должны быть приняты в качестве переменных $q_i$. Ими являются величины

$$q_i = -\frac{v_i}{T}, \quad q_{i+3} = -\frac{\Phi_i}{T}, \quad q_7 = \frac{1}{T}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Функции $F$ и $G$ имеют вид

$$F = f - f_i q_i = -\frac{1}{T}(\Phi - u_i \Phi_i - sT),$$

$$G = -\frac{\Phi_j v_j}{T} = -\frac{1}{q_7}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6).$$

Для записи уравнений в форме (1.40) необходимо знать явную зависимость $F$ от $q_i$. Из выражения $F$, приведенного выше, ясно видно, что $F$ зависит только от термодинамических переменных $q_4$, $q_5$, $q_6$, $q_7$. Задание этой функции эквивалентно заданию внутренней энергии. Выражение $\Phi - u_i \Phi_i - sT$ представляет собой лагранжеву плотность термодинамического потенциала, в случае газа называемого химическим потенциалом. Выражение для $G$ через $q_i$ не зависит от свойств среды.

Соответствующая уравнениям (2.18) интегральная система законов сохранения для теории упругости в одномерном случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho_0 v_i \, dx + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right)_{x=x_1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right)_{x=x_2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u_i \, dx + (v_i)_{x=x_1} - (v_i)_{x=x_2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \left(\rho_0 \frac{v^2}{2} + \Phi\right) dx + \left(v_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right)_{x=x_1} - \left(v_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right)_{x=x_2} = 0.$$

Для непрерывных движений эта система переходит в систему (2.18), причем последнее уравнение (уравнение энергии) преобразуется в уравнение $\partial S/\partial t = 0$, как это описано в предыдущем параграфе.

Соотношения на разрывах получаются непосредственно из интегральных уравнений согласно правилам Главы 1. Они имеют вид

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right] + \rho_0 W[v_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$[v_i] + W[u_i] = 0, \tag{2.19}$$

$$\left[v_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right] + W\left[\rho_0 \frac{v^2}{2} + \Phi\right] = 0.$$

Здесь предполагается, что разрыв имеет место в точке $x = X(t)$, движущейся со скоростью $W = dX/dt$ ($W$ – *лагранжева скорость разрыва*). Квадратными скобками обозначен *скачок* заключенной в них величины, например

$$[u_i] = u_i^+ - u_i^-, \quad u_i^+ = \lim_{x \to X-0} u_i, \quad u_i^- = \lim_{x \to X+0} u_i.$$

Заметим, что обычно вторую группу соотношений (2.19) получают не из соответствующих интегральных уравнений, а из эквивалентного им условия непрерывности вектора перемещения на разрыве. При дифференцировании вектора перемещения вдоль линии разрыва с разных сторон от него в результате получим

$$\left[\frac{\partial w_i}{\partial t} + W \frac{\partial w_i}{\partial x}\right] = 0.$$

Это равенство обычно называют *кинематическим условием на разрыве.*

Используя вторую группу уравнений (2.19), можно исключить $[v_i]$ из остальных уравнений на скачке и система соотношений на

разрыве для упругого тела примет вид

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right] = \rho_0 W^2 [u_i],$$

$$[\Phi] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right][u_i] + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right)^+ [u_i], \tag{2.20}$$

$$[v_i] + W[u_i] = 0.$$

Последнее соотношение необходимо, чтобы найти $[v_i]$.

Если состояние $u_i$, $v_i$, $S$ фиксировано, то множество состояний, удовлетворяющих соотношениям на разрыве, называется *ударной адиабатой* (см. § 1.5). В случае общего положения это множество одномерно, т.е. представляет собой кривую, каждая точка которой $u_i^+$, $v_i^+$, $S$ соответствует некоторому значению $W$, которое и может быть принято в качестве параметра на этой кривой. Так как, согласно уравнениям (2.20), соотношения, связывающие $u_i$ и $S$, отделяются и могут рассматриваться независимо от соотношений для определения скоростей, то ударная адиабата может рассматриваться в пространстве $u_i$, $S$. В дальнейшем при изучении ударных волн малой амплитуды (Глава 4) ударная адиабата будет рассматриваться как кривая в пространстве $u_i$, а величина $S$ как функция на ней. Это удобно в случае малых изменений $S$.

Получим полезное следствие из соотношений на разрыве (2.19), выражающее изменение энтропии на ударной адиабате (Hanyga [1976]). Продифференцируем соотношения (2.19), рассматривая $u_i^-$, $v_i^-$ и $S$ как постоянные

$$\Phi_{ik} du_k + \rho_0 W dv_i + \rho_0 [v_i] dW = 0,$$

$$dv_i + W du_i + [u_i] dW = 0,$$

$$\Phi_i dv_i + v_i \Phi_{ik} du_k + W \Phi_i du_i + W \Phi_S dS +$$

$$\rho_0 v_i W dv_i + dW \left[\rho_0 \frac{v^2}{2} + \Phi\right] = 0.$$

Умножая эти равенства на $-v_i$, $-\Phi_i$ и 1 и складывая, получим

$$W\Phi_S dS + \left(\left[\Phi + \rho_0 \frac{v^2}{2}\right] - \rho_0 v_i [v_i] - \Phi_i [u_i]\right) dW = 0.$$

Так как $\Phi_S = \rho_0 T$, то, производя упрощения в скобках с учетом соотношений (2.19), будем иметь равенство

$$\frac{T}{W}\frac{dS}{dW} = \sum_{i=1}^{3} [u_i]^2. \tag{2.21}$$

В заключение приведем соотношения на поверхности разрыва в случае произвольной ее ориентации относительно системы координат.

$$\rho_0 W^2 [u_{ik}] n_k = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_{ik}}\right] n_k,$$

$$[\Phi] = \left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_{ik}}\right][u_{im}] + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{ik}}\right)^{+}[u_{im}]\right) n_k n_m,$$

$$[v_i] + W[u_{ik}] n_k = 0, \quad [u_{ik}] - [u_{im}] n_k n_m = 0.$$

Здесь $W$ – скорость разрыва (лагранжева) в направлении нормали, $n_k$ – компоненты вектора нормали (в лагранжевом представлении), $\Phi = \Phi(u_{ik}, S)$ – упругий потенциал среды, $u_{ik} = \partial w_i / \partial x_k$, $w_i$ – компоненты вектора перемещения. Последняя группа соотношений выражает непрерывность производных вектора перемещения, взятых вдоль направлений касательных к поверхности разрыва, поэтому $i$ принимает все три значения, но только для двух значений $k$ эти соотношения независимы.

## 2.3. Волновая изотропия и анизотропия. Внутренняя энергия среды с малой волновой анизотропией

Как следует из уравнений (2.18) и (2.21) поведение непрерывных и разрывных одномерных движений упругой среды определяется зависимостью упругого потенциала $\Phi$ от переменных $u_1$,

$u_2$, $u_3$ и $S$. Оставляя временно в стороне вопрос о физических причинах, приводящих к тем или иным функциям $\Phi(u_i, S)$, выделим некоторый класс упругих потенциалов вида

$$\Phi = \Phi(u_1^2 + u_2^2, u_3, S). \tag{2.22}$$

Такой упругий потенциал не зависит от направления вектора $u_1, u_2$, лежащего в плоскости фронта волны. Когда функцию $\Phi$ можно представить в виде (2.22), будем говорить о наличии *волновой изотропии.* При этом важно заметить, что среда демонстрирует изотропное поведение по отношению к изменениям $u_1$ и $u_2$ только тогда, когда ее начальное состояние соответствует $u_1^0 = 0$ и $u_2^0 = 0$. Для отличных от нуля начальных значений $u_1^0$, $u_2^0$ влияние дополнительной деформации будет зависеть от вектора $u_1^0$, $u_2^0$ и, следовательно, в общем случае будет иметь место анизотропия свойств среды, вызванная начальной деформацией. Тем не менее при волновой изотропии поведение волн обладает специфическими свойствами вследствие наличия определенной симметрии свойств указанной среды. Об этом будет рассказано в следующих главах.

Обсудим для каких сред справедливо равенство (2.22). Отметим прежде всего изотропные среды. Для них упругий потенциал должен зависеть от тензора компонент деформаций $\varepsilon_{ij}$ через его скалярные инварианты

$$\begin{gathered} \Phi = \Phi_0(I_1, I_2, I_3, S), \\ I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Если состояние, по которому распространяется волна, не подвергнуто предварительной деформации, то из общих соображений симметрии ясно, что зависимость $\Phi$ от $u_i$ будет удовлетворять условию (2.22). Это условие не будет нарушено, если в плоскостях параллельных фронту волны в качестве предварительной деформации допускается всестороннее сжатие: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_{12} = 0$. Зависимость $\Phi$ от $u_i$ будет подробно рассмотрена в следующем параграфе для случая малых деформаций путем разложения в ряды.

Упругий потенциал среды при описании плоских волн может иметь вид (2.22) и для некоторых анизотропных сред. Так будет выглядеть $\Phi$, например, для слоистой среды, если фронт волны параллелен слоям, а слои изотропны. То же верно и для волокнистой среды, если волокна ортогональны фронту. К этому же типу функции $\Phi$ относится хорошо изученный в магнитной гидродинамике частный случай волокнистой среды – идеально проводящий сжимаемый газ с вмороженным в него магнитным полем (Куликовский, Любимов [1962]). Подробнее об этом будет сказано в § 2.5.

Однако, соотношение (2.22) во многих случаях выполняется лишь приближенно. Учет же даже малой анизотропии, как будет показано в следующих главах, приводит к новым качественным особенностям в поведении волн.

Таким образом, наряду со случаем *волновой изотропии*, далее будет рассматриваться упругая среда с малой *волновой анизотропией* (слабоанизотропная). Для ее описания упругий потенциал $\Phi$ будем представлять суммой двух слагаемых, первое из которых имеет вид (2.22), а второе вносит малую поправку на наличие волновой анизотропии. Для указания на малость этого члена будем сопровождать анизотропную поправку малым положительным масштабным множителем $g$

$$\Phi = \Phi(u_1^2 + u_2^2, u_3, S) + gp(u_i, S). \tag{2.24}$$

Здесь $p$ – функция в общем случае произвольного вида. Однако, для многих моделей сред, обладающих разными формами симметрий упругих свойств, ее вид может быть конкретизирован. В частности, такая конкретизация проводится в следующем параграфе для сред с малыми деформациями и анизотропией. Параметр $g$ всюду в дальнейшем считается настолько малым, что членами порядка $g^2$ пренебрегается. При рассмотрении волн с малой (порядка $\varepsilon$) амплитудой членами $g\varepsilon$ также будем пренебрегать по сравнению с единицей. Таким образом, *эффекты анизотропии будут считаться малыми и будут учитываться только в главном порядке.*

Рассмотрим физические причины, приводящие к волновой анизотропии. Один из распространенных видов нарушения изо-

тропии – деформационная анизотропия. При этом материал считается естественно изотропным, но подвергнутым предварительной упругой деформации. Для задач с плоскими волнами отклонение от волновой изотропии вызывается отсутствием изотропии в плоскости фронта волны у тензора предварительной деформации. Волновая изотропия имеет место только в случае, когда $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta$=1,2 .

Второй причиной, приводящей к волновой анизотропии, является естественная анизотропия свойств среды. Она свойственна кристаллам, горным породам, а также другим материалам, в которых она могла быть вызвана предысторией и, в частности, произошедшими ранее пластическими деформациями, например, при технологической обработке. Анизотропия может характеризоваться некоторым набором тензоров и векторов. Тензоры, задающие анизотропию свойств различных сред в том числе кристаллических, выписаны в (Седов [1994]).

Очевидно, могут действовать обе причины, приводящие к анизотропии, одновременно. Внутренняя энергия и упругий потенциал как скалярные функции должны выражаться функциями всевозможных скалярных инвариантов, входящих в рассмотрение задачи тензоров. Наряду с инвариантами $I_1$, $I_2$, $I_3$ тензора $\varepsilon_{ij}$ имеются также смешанные инварианты тензора $\varepsilon_{ij}$ и тензоров, задающих анизотропию. Учет зависимости $\Phi$ от этих аргументов описывает анизотропию свойств среды.

## 2.4. Задание упругого потенциала для слабонелинейной среды

Рассмотрим задание упругого потенциала в области небольших деформаций, где будем пользоваться разложением всех функций в ряды по $\varepsilon_{ij}$ с оставлением конечного числа членов, причем будет считаться, что порядок величины $\varepsilon_{ij}$ не превышает $\varepsilon$.

Сначала будем изучать поведение упругого потенциала изотропной среды, когда его можно рассматривать как функцию инвариантов $I_1, I_2, I_3$ тензора деформаций, которую также будем разлагать в ряд по своим аргументам. Для линейных задач

разложение достаточно вести до квадратичных по $\varepsilon_{ij}$ членов, а для построения нелинейной модели следует добавить члены более высокого порядка. Будем при этом вести разложение до первого (главного для малых амплитуд) члена, который обнаружит в поведении волн отличие от линейного.

Как показано в (Бленд [1972]), для изотропного тела и, как будет подтверждено далее, для сред с малой анизотропией для того, чтобы обнаружить первое проявление нелинейности, для некоторых типов волн достаточно учесть в разложении $\Phi$ члены до третьего порядка по $\varepsilon_{ij}$, для других этого оказывается мало, т.е. нужны еще члены четвертого порядка. Поэтому примем для $\Phi$ следующее разложение

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + \delta I_1^3 + \xi I_2^2 \\ & + \eta I_1 I_3 + \zeta I_1^2 I_2 + \omega I_1^4 + \rho_0 T_0 (S - S_0) + \text{const}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Линейную изотропную среду представляют первые два слагаемые. В формуле (2.25) мы ограничились только первым (линейным) членом с изменением энтропии $S - S_0$. Это можно сделать при изучении волн, распространяющихся по однородному фону, поскольку изменение энтропии в слабых ударных волнах имеет порядок не менее третьего по величине скачка (см.§§ 1.7 и 1.11), а при непрерывных движениях упругой среды энтропия вообще не меняется. Поэтому учет членов с более высокими степенями $S - S_0$ или с произведением $S - S_0$ на инварианты тензора деформаций не повлияет на поведение $u_i$ и $v_i$ в упомянутых волнах в рассматриваемом диапазоне точности. Тем не менее иногда употребляют модели, в которых $\Phi$ содержит еще члены следующего порядка малости, а именно $I_1(S - S_0)$ и $I_2(S - S_0)$ (Bazer and Ericson [1974]). Эти слагаемые необходимы при вычислении зависимости температуры от деформации по формуле $\rho_0 T = \partial\Phi/\partial S$. Поскольку температура нас в дальнейшем интересовать не будет, то эти члены для краткости опустим.

Коэффициенты в разложении (2.25) определяются упругими свойствами конкретного материала и называются его *упругими*

*модулями.* Из требования устойчивости среды при малых деформациях следует, что всегда $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Имеются экспериментальные сведения, которые относятся к измерению упругих модулей вплоть до третьего порядка, причем результаты для упругих модулей $\beta$, $\gamma$, $\delta$ сильно различаются в зависимости от способа их определения (Гузь [1986]). О модулях четвертого порядка $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\omega$ сведения в литературе почти отсутствуют. Поэтому все исследования будем вести, не предполагая каких-либо ограничений относительно их величины и знаков.

Как будет показано в следующих главах, из упругих модулей четвертого порядка в решение задач о плоских волнах (с принятой точностью) войдет только $\xi$.

Заметим, что разложение (2.25) среди прочих содержит и те компоненты $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22}$, $\varepsilon_{12}$, которые не претерпевают изменения при прохождении плоской волны.

Для задач с плоскими волнами заменим в формуле (2.25) компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{kl}$ на компоненты тензора градиентов перемещений $\partial w_k/\partial x_l$ согласно равенствам (2.1). При этом исключим поворот тела как целого около оси $x$, т.е. положим

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 0$$

и для обеспечения ортогональности плоскостей фронта к оси $x_3$ примем

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_1} = \frac{\partial w_3}{\partial x_2} = 0.$$

Оси $x_1, x_2$ в плоскости фронта волны выберем так, чтобы

$$\varepsilon_{12} = 0.$$

Тогда получим

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right)^2 = \text{const},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)^2 = \text{const}, \quad \varepsilon_{12} = 0,$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}u_1\left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}u_2\left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right),$$

$$\varepsilon_{33} = u_3 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

В результате выражение (2.25) будет представлено разложением по $u_i$ с коэффициентами, зависящими от $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

В следующей главе будет показано, что волны малой интенсивности в слабоанизотропной среде можно разделить на *квазипродольные* (в которых изменение поперечных компонент деформации $u_1$ и $u_2$ на порядок меньше, чем продольной $u_3$) и *квазипоперечные* (в которых изменение продольной компоненты на порядок меньше, чем поперечных). Квазипродольные волны обнаруживают нелинейные свойства при учете кубичных по $u_3$ членов в разложении $\Phi$. Для квазипоперечных волн необходимы и члены четвертой степени, но учитывая, что изменение продольной компоненты в них на порядок меньше, в разложении $\Phi$ для обоих типов волн члены, содержащие $u_3$, достаточно иметь в суммарной (по всем $u_i$) степени не выше третьей.

Выделим отдельно в разложении $\Phi$ члены, соответствующие волновой изотропии, как было предложено в § 2.3.

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{1}{2}f\,(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g\,(u_2^2 - u_1^2) + \frac{1}{2}du_3^2 + au_3^3 + \\ b\,(u_1^2 + u_2^2)u_3 + \frac{1}{4}h\,(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0(S - S_0),\end{aligned} \tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned} f &= \mu + b(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + O(\varepsilon^2), \\ g &= (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})\left(\mu + \frac{3}{4}\gamma\right) + O(\varepsilon^2), \\ d &= \lambda + 2\mu + (\lambda + 2\beta + 6\delta)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + O(\varepsilon^2), \\ a &= \frac{1}{2}\lambda + \mu + \beta + \gamma + \delta, \qquad b = \frac{1}{2}\lambda + \mu + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{4}\gamma, \\ h &= \frac{1}{2}\lambda + \mu + \beta + \frac{3}{2}\gamma + \xi. \end{aligned} \tag{2.27}$$

В выражениях для $f$ и $d$ не выписаны в явном виде довольно сложные слагаемые порядка $O(\varepsilon^2)$, а учтены только главные по величине первые члены. Отсутствие в разложении (2.26) слагаемого вида $u_1u_2$ обусловлено указанным выше специальным выбором осей $x_1, x_2$ в плоскости фронта волны. Слагаемые $u_1u_3$ и $u_2u_3$ отсутствуют в пределах принятой точности.

Из выражения (2.26) для упругого потенциала в области малых деформаций видно, что волновая анизотропия среды представлена единственным слагаемым $\frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2)$, которое вызвано в рассматриваемом случае наличием предварительной деформации сжатия – растяжения в плоскости фронта волны. Сравнивая выражение (2.26) с общей формой задания функции $\Phi$ (2.24), видим, что в случае деформационной анизотропии в выражении (2.24) следует положить

$$g = (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})(\mu + \frac{3}{4}\gamma), \qquad p = \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2). \tag{2.28}$$

Если не делать дополнительных предположений относительно величины разности $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}$, то член $\Phi_1 = pg$ следует считать выражением не менее чем третьего порядка малости.

Пусть теперь среда обладает малой естественной анизотропией произвольного вида. Тогда в выражении (2.24) для упругого потенциала второе слагаемое, содержащее волновую анизотропию, может быть представлено степенным многочленом по $u_i$ общего вида. Поскольку волновая анизотропия предполагается малой, его коэффициенты будут предполагаться также малыми ($\leq g$), а потому можно ограничиться членами не более чем третьей степени

$$\begin{aligned} \Phi_1 = {} & B_1u_1^2 + B_2u_2^2 + B_3u_3^2 + B_4u_1u_2 + B_5u_1u_3 + B_6u_2u_3 \\ & + A_1u_1^3 + A_2u_2^3 + A_3u_1^2u_2 + A_4u_1u_2^2 = gp(u_i). \end{aligned} \tag{2.29}$$

В этом выражении, как и в (2.26), не выписаны члены четвертого по $\varepsilon$ порядка малости, содержащие множителем $u_3$, как оказывающие малое влияние на все виды волн. Очевидно, выражение

(2.26) для $\Phi$ в случае деформационной анизотропии входит сюда как частный случай.

Если считать, что все константы $A_i$, $B_k$ одного порядка малости $g$, то члены с коэффициентами $B_k$ будут на порядок больше, чем члены с $A_i$. Это значит, что квадратичные по $u_i$ члены выражают главный эффект анизотропии, а кубичные слагаемые с коэффициентом порядка $g$ можно не писать. В этом случае переносом начала координат в пространстве $u_i$ в точку $O^*$ с координатами

$$u_1^* = u_1 + B_5/(2b), \quad u_2^* = u_2 + B_6/(2b), \quad u_3^* = u_3 + B_3/(3a)$$

можно ликвидировать в выражении для функции $\Phi = F + \Phi_1$ квадратичные члены, содержащие $u_3$ ($a$ и $b$ – коэффициенты в выражении (2.26) для $\Phi$. Слагаемое $B_4 u_1 u_2$, как и ранее, можно уничтожить соответствующим поворотом осей $u_1, u_2$ в плоскости фронта волны.

Отметим, что при упомянутом преобразовании сдвига возникнут линейные по $u_i$ слагаемые, которые соответствуют постоянным напряжениям, не влияющим на динамику среды. В дальнейшем линейные слагаемые будут опускаться. В результате упругий потенциал среды с произвольной естественной анизотропией при сделанных предположениях совпадает с его видом для случая деформационной анизотропии (2.26) с измененными значениями коэффициентов.

Если не предполагать, что $A_i$ и $B_k$ одного порядка, то кубические члены в формуле (2.29) надо учитывать, если наибольший коэффициент из $A_i$ много больше всех $B_k$.

Для конкретных сред их анизотропия может задаваться включением в число определяющих параметров среды некоторого набора тензоров (Лохин и Седов [1963]). Тогда упругий потенциал среды может зависеть только от инвариантов, составленных из тензора деформаций и тензоров, задающих анизотропию.

Среди анизотропных сред наибольший интерес представляют часто используемые в приложениях среды, обладающие определенными свойствами симметрии. Рассмотрим *трансверсально изотропную и ортотропную.* В трансверсально изотропной среде имеется некоторое выделенное направление, а в плоскостях,

ортогональных ему, свойства среды изотропны. Это свойство среды может быть учтено включением в аргументы упругого потенциала тензорного квадрата вектора $\boldsymbol{l}$, т.е. симметричного тензора $d_{ij} = l_i l_j$, где компоненты $l_i$ пропорциональны направляющим косинусам оси $\boldsymbol{l}$.

Ортотропные среды обладают тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, что может быть задано симметричным тензором второго ранга $d_{ij}$. Модель трансверсально изотропной среды при математическом описании является частным случаем ортотропной среды.

Для этих двух сред $\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}, d_{ij}, S)$. Из двух симметричных тензоров второго ранга $\varepsilon_{ij}$ и $d_{kl}$ можно составить только шесть независимых скалярных инвариантов, содержащих компоненты тензоров деформации – инварианты $I_1$, $I_2$ и $I_3$, введенные выше, а также инварианты, содержащие кроме компонент тензора деформаций еще и компоненты тензора анизотропии

$$K_1 = d_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad K_2 = d_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}, \quad K_3 = d_{ij}d_{jk}\varepsilon_{ki}.$$

Для трансверсально изотропного материала независимых инвариантов только пять, так как $K_3$ пропорционален $K_1$.

Для указания на малость анизотропии примем, что компоненты тензора $d_{ij}$ имеют порядок малости $g \le \varepsilon$. Тогда инварианты $K_i$ имеют порядки – $K_1 \sim \varepsilon g \le \varepsilon^2$, $K_2 \sim \varepsilon^2 g \le \varepsilon^3$, $K_3 \sim \varepsilon g^2 \le \varepsilon^3$.

Представим анизотропный добавок $\Phi_1$ для ортотропного материала разложением по указанным инвариантам, ограничиваясь как и прежде четвертыми степенями по $\varepsilon$ (линейные по $\varepsilon_{ij}$ опускаем)

$$\begin{gathered}\Phi_1 = a_1 K_1^2 + a_2 K_2 + a_3 K_1 I_1 + a_4 K_1 I_2 + \\ a_5 K_1 I_1^2 + a_6 I_1 K_2 + a_7 K_3 I_1.\end{gathered} \tag{2.30}$$

Коэффициенты $a_k$ представляют собой упругие модули анизотропной среды. В трансверсально изотропном материале $a_7 = 0$. Оставляя в $\Phi_1$ только старшие члены, получим, что в выражении (2.30) для $\Phi_1$ следует оставить только сумму второго и третьего

членов. Сравнивая последнее представление функции $\Phi_1$ с ее разложением по $u_i$ (2.29), можно найти выражения коэффициентов разложения $A_i, B_k$.

Таким образом, при описании волн слабой интенсивности в материалах с малой естественной анизотропией вид представления упругого потенциала $\Phi$ разложением по $u_i$ в общем случае такой же, как для сред с деформационной анизотропией (2.26).

Итак, в случае малой нелинейности и малой анизотропии поведение плоских волн и разрывов описывается уравнениями (2.18) и (2.20) (или (2.19)) с упругим потенциалом $\Phi(u_i, S)$, представляемым равенством (2.26). Постоянные коэффициенты $f$, $g$, $d$, $a$, $b$, $h$ определяются свойствами упругой среды (в случае нелинейного изотропного материала эти коэффициенты зависят также от начальной деформации (2.27)).

Отметим здесь важный случай, когда рассматриваемая среда несжимаема. В этом случае $v_3 = \text{const}$ и $u_3 = \text{const}$. Эти постоянные значения без потери общности можно считать равными нулю. При этом, очевидно, уравнения (2.18) и (2.20) сохраняют свой вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}, \qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{2.31}$$

однако, $\alpha$ принимает значения 1 и 2, соответствующие поперечным (к направлению распространения волны) перемещениям. Функция $\Phi = \Phi(u_1, u_2, S)$ в случае малой анизотропии имеет вид (2.24) при $u_3 = 0$. В случае малых деформаций из (2.26) при $u_3 = \text{const} = 0$ имеем

$$\Phi = \frac{1}{2}f(u_1^2+u_2^2)+\frac{1}{2}g(u_2^2-u_1^2)+\frac{1}{4}h(u_1^2+u_2^2)^2+\rho_0 T_0(S-S_0). \tag{2.32}$$

Значительная часть дальнейшего содержания книги посвящена изучению волн малой амплитуды в слабоанизотропных средах, когда имеется два малых параметра: амплитуда волн $\varepsilon$ и параметр анизотропии $g$. Как уже говорилось, нелинейность и анизотропия будут учитываться только в главных членах. Подробно изучены нелинейные волны малой амплитуды при отсутствии волновой анизотропии (Бленд [1972]), а в случае конечной

анизотропии — (Весоловский [1981]). Изучены также линейные волны в анизотропных средах — (Гузь [1986]). Ниже, в Главах 3–8, изучаются волны в случае, когда эффекты нелинейности и анизотропии одного порядка. Это, как будет видно из дальнейшего, приводит к сложному взаимодействию этих эффектов и к нетривиальному поведению волн. Анизотропия приводит к более сложному поведению волн и в случае конечной амплитуды (Глава 9).

## 2.5. Распространение нелинейных волн в средах, взаимодействующих с электромагнитным полем

Рассмотрим здесь несколько различных случаев распространения нелинейных волн, описание которых дается той же системой уравнений, что и рассматривавшееся выше описание волн в упругих средах.

**а) Электромагнитные волны в непроводящей намагничивающейся и поляризующейся неподвижной среде.**

Будем считать, что внутренняя энергия единицы объема $\Phi$ неподвижной среды является функцией компонент векторов электрической и магнитной индукций (Ландау и Лифшиц [1992]):

$$\begin{gathered}\Phi = \Phi(D_k, B_k, S),\\ d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial D_k} dD_k + \frac{\partial \Phi}{\partial B_k} dB_k + \frac{\partial \Phi}{\partial S} dS.\end{gathered} \tag{2.33}$$

Уравнения Максвелла в одномерном случае при отсутствии токов и зарядов имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial D_1}{\partial t}+\frac{\partial H_2}{\partial \xi}=0, \qquad \frac{\partial D_3}{\partial \xi}=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial D_2}{\partial t}-\frac{\partial H_1}{\partial \xi}=0, \qquad \frac{\partial D_3}{\partial t}=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t}-\frac{\partial E_2}{\partial \xi}=0, \qquad \frac{\partial B_3}{\partial \xi}=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial B_2}{\partial t}+\frac{\partial E_1}{\partial \xi}=0, \qquad \frac{\partial B_3}{\partial t}=0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$\xi$ – эйлерова координата, которая здесь, в пункте а), совпадает с лагранжевой координатой $x$; $E_i$, $H_i$ – компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей. Домножая левые уравнения (2.34) на $\frac{c}{4\pi}E_1$, $\frac{c}{4\pi}E_2$, $\frac{c}{4\pi}H_1$ и $\frac{c}{4\pi}H_2$ соответственно и складывая, получим

$$\frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha\frac{\partial D_\alpha}{\partial t}+H_\alpha\frac{\partial B_\alpha}{\partial t}\right)=\frac{\partial G}{\partial \xi}, \quad G\equiv\frac{c}{4\pi}(H_1E_2-H_2E_1), \tag{2.35}$$
$$\alpha=1,2.$$

Здесь и в дальнейшем греческие индексы пробегают значения 1,2; по повторяющимся индексам, как всегда, проводится суммирование. Равенство (2.35) представляет теорему Пойнтинга, причем $G$ истолковывается как поток электромагнитной энергии, а левая часть этого равенства представляет приток электромагнитной энергии к единице объема.

Считая, что все процессы обратимы и что кроме притока электромагнитной энергии имеется приток тепла, равный $\rho T dS$, где $S$ – энтропия единицы массы, получим, используя выражения (2.33) и (2.35),

$$E_k=4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial D_k}, \qquad H_k=4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial B_k}, \qquad \rho T=\frac{\partial\Phi}{\partial S}. \tag{2.36}$$

В пустоте, когда $D_i=E_i$ и $H_i=B_i$, левая часть равенства (2.35) может рассматриваться как производная по $t$ от выражения $\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$, которое принимается в качестве плотности электромагнитной энергии в пустоте.

Если среда только *поляризуется, но не намагничивается*, т.е. имеет место равенство $H_k = B_k$, то уравнения (2.34), (2.36) приводятся к виду уравнений теории упругости (2.18) для несжимаемой среды (т.е. при $u_3 = 0$ и $i = 1, 2$) путем введения следующих переобозначений

$$\tau = ct, \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi}}B_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}H_1 = v_2, \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi}}B_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}H_2 = -v_1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}D_\alpha = u_\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi}}E_\alpha = \sigma_{\alpha 3}, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Аналогичное преобразование существует и в случае неполяризующейся среды, когда $E_k = D_k$, $H_k = H_k(B_i)$.

В случае уравнений состояния (2.36) общего вида возникает более сложная система уравнений. Нашей целью здесь было отметить возможность применения результатов теории упругости к распространению нелинейных электромагнитных волн.

**б) Упругие волны в идеально проводящей нетеплопроводной среде с магнитным полем. Случай магнитной гидродинамики.**

Будем рассматривать здесь движущиеся ненамагничивающиеся и неполяризующиеся среды, когда $H_i = B_i, D_i = E_i$, в которых может течь электрический ток, подчиняющийся закону Ома $\boldsymbol{j}' = \sigma \boldsymbol{E}'$, где $\boldsymbol{j}'$ и $\boldsymbol{E}'$ – плотность тока и напряженность электрического поля в системе отсчета, связанной с рассматриваемой частицей среды. Если коэффициент электропроводности среды $\sigma$ можно считать бесконечным (это верно при $R_m = 4\pi v L\sigma/c^2 \gg 1$, где $v$ и $L$ – соответственно характерная скорость среды и характерный линейный размер), то это означает выполнение равенства $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} = 0$. При этом имеет место *вмороженность магнитного поля в среду*, означающая сохранение потока магнитного поля через произвольную материальную поверхность (Ландау и Лифшиц [1992]). Это позволяет, зная напряженность магнитного поля в начальный момент времени и деформацию элемента среды, найти напряженность магнитного поля в текущий момент времени.

При отсутствии поляризации и намагничивания энергия среды в присутствии электромагнитного поля равна сумме энергии среды без влияния электромагнитного поля и энергии поля без влияния среды. Плотность последней в рассматриваемом случае, когда $E \gg B$, равна $B^2/8\pi$ и не зависит от выбора системы координат, поскольку можно считать не зависящим от выбора системы координат вектор $\boldsymbol{B}$ (в нерелятивистском приближении вектор $\boldsymbol{B}$ преобразуется по формуле $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E})/c \approx \boldsymbol{B}$).

В случае *бесконечной проводимости* через любой элемент материальной поверхности отсутствует поток энергии ($\boldsymbol{G}' = c\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{B}/4\pi = 0$ поскольку $\boldsymbol{E}' = 0$) в системе координат, связанной с этим элементом. Это позволяет, как обычно, считать, что приток энергии к малой частице среды через ее границу равен работе напряжений, (которые зависят и от магнитного поля) на поверхности частицы и притоку тепла.

Применительно к изучению бесконечно проводящих упругих сред в магнитном поле из предыдущего следует возможность записать уравнения движения в форме Пиолы–Кирхгоффа (Сибгатуллин [1984]). При этом, очевидно, к упругому потенциалу среды $\Phi_0(\partial w_i/\partial x_j, S)$ нужно добавить энергию магнитного поля, отнесенную к единице начального объема. Последняя, в силу вмороженности магнитного поля, выражается также через $\partial w_i/\partial x_j$ и напряженность начального магнитного поля (не меняющегося со временем).

Рассматривая плоские волны и выбирая в качестве начального состояния, соответствующего $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, состояние, в котором поле направлено по оси $x$, получим

$$B_\alpha = B^0 \frac{u_\alpha}{1 + u_3}, \quad \alpha = 1, 2, \qquad B_3 = B^0 = \text{const}. \tag{2.37}$$

Здесь было использовано условие, что вектор $\boldsymbol{B}$ вследствие вмороженности параллелен вектору $\{u_1, u_2, 1+u_3\}$. Энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу начального объема, имеет вид

$$\Phi_m = \frac{B^2}{8\pi}(1 + u_3) = \frac{(B^0)^2}{8\pi}\left[\frac{u_1^2 + u_2^2}{1 + u_3} + 1 + u_3\right]. \tag{2.38}$$

Множитель $(1 + u_3)$ задает отношение текущего объема к начальному. Если считать, что в начальном состоянии имеются все компоненты магнитного поля $B_i^0$, то формулы (2.37), (2.38) примут вид

$$B_\alpha = \frac{B_\alpha^0 + B_3^0 u_\alpha}{1 + u_3}, \quad B_3 = B_3^0,$$
$$\Phi_m = \frac{(B_1^0 + B_3^0 u_3)^2 + (B_2^0 + B_3^0 u_3)^2 + (B_3^0)^2(1 + u_3)^2}{8\pi(1 + u_3)}. \tag{2.39}$$

Таким образом, для случая *бесконечнопроводящей упругой среды в магнитном поле* при записи уравнений для плоских волн в форме Пиолы–Кирхгоффа (2.18) упругий потенциал должен быть записан в виде суммы упругого потенциала среды без поля $\Phi_0(u_i, S)$ и добавки $\Phi_m(u_i)$, представленной равенством (2.38) или (2.39), происходящей от влияния вмороженного магнитного поля

$$\Phi(u_i, S) = \Phi_0(u_i, S) + \Phi_m(u_i). \tag{2.40}$$

Если $\Phi_0 = \Phi_0(u_1^2 + u_2^2, u_3, S)$, т.е. для среды выполняется свойство волновой изотропии, а $B_1^0$ и $B_2^0$ не равны нулю одновременно, то выражение (2.40), в котором $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ взято из представления (2.39), *не будет обладать свойством волновой анизотропии.*

Область механики, занимающаяся изучением движения бесконечно проводящей упругой среды в магнитном поле, называется *магнитоупругостью.* Магнитоупругие волны при некоторых частных видах функции $\Phi_0$ подробно рассмотрены в (Bazer and Ericson [1974]).

В частном случае, когда $\Phi_0 = \Phi(u_3, S)$, мы имеем *магнитную гидродинамику* (среда не сопротивляется деформации сдвига, задаваемой при распространении плоских волн величинами $u_1$ и $u_2$ ). В этом случае для $\Phi_m$ можно пользоваться выражением (2.38), и представление (2.40) будет соответствовать случаю *волновой изотропии.* Волны малой амплитуды при волновой изотропии будут изучаться в последуюших главах. Результаты относительно магнитогидродинамических волн конечной амплитуды содержатся в книге (Куликовский и Любимов [1962]).

**в) Упругие волны в непроводящей поляризующейся и намагничивающейся упругой среде в электромагнитном поле.**

Выражения для напряжений в поляризующейся и намагничивающейся среде получены во многих работах (см., например, Седов [1994], Donato and Fusco [1977], Novacki [1986], Maugin [1991], Партон и Кудрявцев [1988]). Однако, приведем здесь получение этих выражений применительно к рассмотрению плоских упругих волн с использованием уравнений в форме Пиолы–Кирхгоффа. Поскольку скорость электромагнитных волн обычно на много порядков превышает скорость упругих волн, описание электромагнитного поля будем проводить в квазистатистическом приближении.

Рассмотрим однородный слой упругой непроводящей поляризующейся и намагничивающейся среды $0 \leq x \leq 1$ ($x$, как всегда, лагранжева координата). Пусть этот слой подвергнут однородной деформации, соответствующей некоторым значениям $u_i$. Для определенности будем считать, что частицы, соответствующие $x = 0$, при этой деформации не переместились, а перемещения частиц, соответствующих $x = 1$, определяются вектором с компонентами $u_i$. Вследствие деформации среды или из-за изменения внешнего поля в рассматриваемом слое могут измениться векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$. Изменение поля, поскольку отсутствуют токи и заряды, описывается системой (2.34). Уравнение Пойнтинга (2.35) показывает, что изменение $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ сопровождается возникновением потока электромагнитной энергии вне слоя и притоком электромагнитной энергии к слою, занятому средой. Это отличает рассматриваемую ситуацию от того, что обычно имеет место в механике сплошной среды и в магнитоупругости.

Проинтегрируем уравнение (2.35), записанное для одномерного случая по эйлеровой переменной, обозначенной $\xi$. Интегрирование ведется по не зависящему от времени интервалу, включающему в себя рассматриваемый слой (внутри слоя $d\xi = (1 + u_3)\, dx$). Получим

$$G_1 - G_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\left(E_\alpha\frac{\partial D_\alpha}{\partial t} + H_\alpha\frac{\partial B_\alpha}{\partial t}\right)d\xi, \qquad \alpha = 1, 2. \quad (2.41)$$

Левая часть равенства представляет собой приток в единицу времени электромагнитной энергии к рассматриваемой области, заключенной между $\xi_1$ и $\xi_2$.

Преобразуем правую часть равенства (2.41), предполагая, что процесс квазистационарен. Это означает, что в уравнениях (2.34) можно пренебречь производными по времени. Тогда из уравнений (2.34) следует, что величины $E_1, E_2, H_1, H_2$ не зависят от пространственной координаты, и равенство (2.41) может быть переписано в виде

$$G_1 - G_2 = \frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha\frac{d}{dt}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} D_\alpha\, d\xi + H_\alpha\frac{d}{dt}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} B_\alpha\, d\xi\right). \quad (2.42)$$

Знак дифференцирования по времени вынесен из под знака интеграла, поскольку интегрирование проводится в не зависящих от времени пределах.

Удобно ввести энергию собственно среды как всю энергию, заключенную в объеме, занятом средой, за вычетом энергии электромагнитного поля $\frac{1}{8\pi}(\xi_2-\xi_1)(E^2+B^2)$ в том же объеме при отсутствии в нем вещества. Плотность этой энергии по лагранжевому объему обозначим через $\Phi$. Точно так же из выражения (2.42) для притока электромагнитной энергии можно выделить ту часть, которая передается среде, вычитая ту часть притока энергии, которая пошла бы на увеличение энергии поля в том же объеме при отсутствии среды.

$$G = E_\alpha\frac{d}{dt}\int P_\alpha\, d\xi + H_\alpha\frac{d}{dt}\int M_\alpha\, d\xi,$$
$$4\pi P_\alpha = D_\alpha - E_\alpha, \qquad 4\pi M_\alpha = B_\alpha - H_\alpha.$$

Здесь $P_\alpha$ и $M_\alpha$ – компоненты векторов поляризации и намагничивания среды, отличные от нуля только в объеме, занятом

телом. В рассматриваемом случае однородного тела, занимающего область $0 < \xi < 1 + u_3$ имеем

$$G\,dt = E_\alpha\,d[(1+u_3)P_\alpha] + H_\alpha\,d[(1+u_3)M_\alpha], \tag{2.43}$$

где $u_3$, $E\alpha$, $P_\alpha$, $H_\alpha$ и $M_\alpha$ – функции времени.

Баланс энергии собственно среды может быть записан в виде

$$d\Phi = \sigma_{3i}\,du_i + dQ + G\,dt. \tag{2.44}$$

Первый член в правой части представляет собой приток механической энергии в виде работы, второй – приток тепла, а третий – приток электромагнитной энергии.

Считая, что $\Phi$ зависит от $u_i$, $P_i$, $M_i$, $i$=1,2,3 и $S$ (энтропии единицы массы), равенство (2.34) с учетом выражения (2.43) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\,du_i + \frac{\partial\Phi}{\partial P_i}\,dP_i + \frac{\partial\Phi}{\partial S}\,dS \\ = \sigma_{3\alpha}\,du_\alpha + \rho_0 T\,dS + E_\alpha(1+u_3)\,dP_\alpha \\ + H\alpha(1+u_3)\,dM_\alpha + [\sigma_{33} + E_\alpha P_\alpha + H_\alpha M_\alpha]\,du_3.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Здесь было использовано предположение об обратимости процесса, а именно, что $dQ = \rho_0 T\,dS$. Напомним, что $\Phi$ – внутренняя энергия массы $\rho_0$ среды (т.е. массы, соответствующей единице объема среды до деформации, при $u_i = 0$), $\Phi = \rho_0 U$. Пользуясь независимостью дифференциалов в выражении (2.45), получим

$$\begin{gathered}\sigma_{3\alpha} = \frac{\partial\Phi}{\partial u_\alpha}, \qquad \sigma_{33} + E_\alpha P_\alpha + H_\alpha M_\alpha = \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}, \\ (1+u_3)E_\alpha = \frac{\partial\Phi}{\partial P_\alpha}, \qquad (1+u_3)H_\alpha = \frac{\partial\Phi}{\partial M_\alpha}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial P_3} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial M_3} = 0, \qquad \rho_0 T = \frac{\partial\Phi}{\partial S}.\end{gathered} \tag{2.46}$$

Эти равенства позволяют при заданных внешних параметрах (или "силах"), к которым можно отнести $E_\alpha$, $H_\alpha$, $D_3$, $B_3$, $\sigma_{3i}$

и $T$, найти в состоянии равновесия внутренние параметры, характеризующие среду, $P_\alpha$, $M_\alpha$, $u_\alpha$ и $S$ (разумеется, разделение параметров на внешние и внутренние условно). В частности, третье и четвертое равенства могут быть использованы для нахождения $P_\alpha$ и $M_\alpha$, после чего из второго равенства находится $\sigma_{33}$. Удобно преобразовать формулы (2.46), чтобы $P_\alpha$, $M_\alpha$ и $\sigma_{33}$ находились явно. Для этого введем вместо $\Phi$ другую функцию $\Phi^*$ по формуле

$$\Phi^* = \Phi - (1 + u_3)(E_\alpha P_\alpha + H_\alpha M_\alpha) \tag{2.47}$$

и будем рассматривать эту величину как функцию $u_i$, $E_\alpha$, $P_3$, $H_\alpha$, $M_3$ и $S$.

Тогда уравнение баланса энергии (2.44), с учетом выражения для $G$ (2.43) и равенства (2.47), запишется в виде

$$\begin{aligned} d\Phi^* &\equiv \frac{\partial \Phi^*}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial \Phi^*}{\partial E_\alpha} dE_\alpha + \frac{\partial \Phi^*}{\partial H_\alpha} dH_\alpha \\ &+ \frac{\partial \Phi^*}{\partial P_3} dP_3 + \frac{\partial \Phi^*}{\partial M_3} dM_3 + \frac{\partial \Phi^*}{\partial S} dS \\ &= \sigma_{3i} du_i + \rho_0 T\, dS - (1 + u_3) P_\alpha\, dE_\alpha - (1 + u_3) M_\alpha\, dH_\alpha. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Отсюда следуют уравнения состояния

$$\begin{gathered} \sigma_{3i} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial u_i}, \quad T = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi^*}{\partial S}, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial P_3} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial M_3} = 0, \\ P_\alpha = -\frac{1}{1 + u_3} \frac{\partial \Phi^*}{\partial E_\alpha}, \qquad M_\alpha = -\frac{1}{1 + u_3} \frac{\partial \Phi^*}{\partial H_\alpha}, \\ \Phi^* = \Phi^*(u_\alpha, E_\alpha, H_\alpha, D_3, B_3, S). \end{gathered} \tag{2.49}$$

Функция $\Phi^*$, наряду с аргументами $u_i$, $E_\alpha$, $P_3$, $H_\alpha$, $M_3$ и $S$, зависит также от величин $D_3$ и $B_3$, которые постоянны при одномерных процессах и входят в $\Phi^*$ как параметры.

Как отмечалось выше $E_\alpha$ и $H_\alpha$ в принятом приближении не зависят от $x$. Если они не зависят и от $t$, то эти величины, так же как $D_3$ и $B_3$, войдут в $\Phi^*$ как параметры, а уравнение состояния

для $\sigma_{3i}$ и, соответственно, уравнения движения, приобретают формально тот же вид, что и при отсутствии поля с заменой $\Phi$ на $\Phi^*$. Если $E_\alpha$, $H_\alpha$ и $D_3$, $B_3$ меняются со временем (величины $D_3$, $B_3$ могут меняться за счет слабой неодномерности), то в уравнениях, связывающих $\sigma_{3i}$ и $u_i$, необходимо учитывать влияние этих изменений. Таким образом появляется возможность изменять механические свойства среды в процессе ее движения, управляя электромагнитным полем.

Следует заметить, что $P_3$ и $M_3$ представляют собой внутренние параметры, изменение которых приводит к притокам энергии. Поэтому при равновесных процессах они являются функциями остальных аргументов, от которых зависят $\Phi$ и $\Phi^*$, и могут быть исключены из числа аргументов этих функций (или не включаться с самого начала в число аргументов). Формально это сводится к нахождению $P_3$ и $M_3$ из уравнений $\partial\Phi/\partial P_3 = 0$ и $\partial\Phi/\partial M_3 = 0$, или из аналогичных равенств с $\Phi^*$, и подстановке найденных значений в $\Phi$ или $\Phi^*$. При этом в левых частях равенств (2.45) и (2.48) не будет членов с $dP_3$ и $dM_3$, а все остальные члены не изменятся.

## Резюме

Дается описание поведения упругой сплошной среды, когда искомыми функциями являются скорости и перемещения частиц среды относительно неподвижной системы координат или градиенты перемещений (§ 2.1). Свойства упругой среды могут быть полностью заданы упругим потенциалом $\Phi$, представляющим внутреннюю энергию, отнесенную к единице объема среды до деформации, причем $\Phi$ считается функцией градиентов перемещений $u_{ij} = \partial w_i/\partial x_j$ и энтропии $S$. Поведение среды при отсутствии притоков тепла в декартовой системе координат описывается системой (2.15) (см. также равенства равенства (2.13), выражающие тензор напряжений Пиолы-Кирхгоффа и температуру). В случае движений в виде плоских волн (§ 2.2), когда искомые величины зависят от одной из декартовых координат $x \equiv x_3$ и времени $t$, система уравнений записывается в виде (2.18), а

условия на разрывах – в виде (2.19) (или (2.20)). Рассматривается влияние изотропии или анизотропии среды на задание ее упругого потенциала как функции переменных $u_i = \partial w_i/\partial x$, где $u_i$ – изменяющиеся при одномерных движениях компоненты тензора градиентов перемещений (§ 2.3). Делается предположение (2.24) о малости волновой анизотропии, т.е. о малости анизотропии свойств среды в фазовых плоскостях волн $x = \text{const}$. Для нелинейных волн малой амплитуды проводится разложение (2.26) упругого потенциала по степеням $u_i$ и $S - S_0$ с оставлением главных членов, ответственных за проявления нелинейности и анизотропии (§ 2.4). Причинами, приводящими к волновой анизотропии, являются естественная анизотропия свойств самой упругой среды и предварительная деформация изотропной нелинейно упругой среды. Для изотропной среды коэффициенты разложения по $u_i$ упругого потенциала выражены через его коэффициенты разложения по инвариантам тензора деформации и начальную деформацию (2.26). Рассмотрен случай несжимаемой среды и выписаны уравнения (2.31) и вид упругого потенциала (2.32) при малой анизотропии и деформации. В § 2.5 рассмотрены различные физические случаи распространения волн с учетом электромагнитного поля, которые сводятся к исследованию тех же уравнений, что и уравнения, описывающие упругие волны.

# Глава 3.

# Волны Римана

## 3.1. Малые возмущения. Линейные волны

Во всех последующих разделах данной книги, кроме Главы 9, предполагается *малость деформаций*, как предварительных, которыми обладает среда в начальном состоянии (фон), так и возникающих при прохождении волны. Это позволяет, как при задании свойств среды упругим потенциалом так и при исследовании задач, пользоваться *разложением в ряды*. Упругий потенциал $\Phi$ нелинейной слабоанизотропной среды задается формулой (2.26)

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \tfrac{1}{2}f(u_1^2+u_2^2)+\tfrac{1}{2}g(u_2^2-u_1^2)+\tfrac{1}{2}d\,u_3^2+a\,u_3^3 \\ & +\frac{1}{4}h(u_1^2+u_2^2)^2+\rho_0T_0(S-S_0).\end{aligned} \tag{3.1}$$

В случае изотропной предварительно деформированной среды коэффициенты этого разложения имеют вид

$$\begin{gathered} f=\mu+b(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}), \qquad g=(\mu+\frac{3}{4}\gamma)(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}) \\ d=\lambda+2\mu+(\lambda+2\beta+6\delta)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \end{gathered} \tag{3.2}$$

Коэффициенты $a$, $b$, $h$ – постоянные комбинации упругих модулей среды.

$$a = \frac{1}{2}\lambda+\mu+\beta+\gamma+\delta, \quad b = \frac{1}{2}\lambda+\mu+\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{4}\gamma, \quad h = \frac{1}{2}\lambda+\mu+\beta+\frac{3}{2}\gamma+\xi.$$

Упругие модули изотропной среды $\lambda$, $\mu$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\xi$ определены как коэффициенты разложения (2.25). Параметром волновой анизотропии служит коэффициент $g$, выражающий отсутствие симметрии свойств среды по отношению к осям $x_1$ и $x_2$.

Будем всюду в дальнейшем изучать распространение волн по однородной среде, свойства которой не меняются в зависимости от лагранжевой переменной $x$. Тогда все коэффициенты в разложении (3.1) можно считать постоянными. При написании равенства (3.1) использовано также то обстоятельство, что энтропия частиц среды также меняется мало, что позволило зависимость $\Phi$ от энтропии учитывать только одним членом $\rho_0 T(S-S_0)$ (см. § 2.4). Выражение (3.1) может содержать также линейные по $u_i$ члены, которые выписывать не будем, поскольку вызванные ими добавочные напряжения постоянны и не влияют на распространение волн.

Будем изучать непрерывные решения системы дифференциальных уравнений (2.18), которую в дальнейшем удобнее записывать в виде

$$\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x},$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad i,j = 1,2,3. \tag{3.3}$$

где $\Phi = \Phi(u_i, S)$ – известная функция своих аргументов.

Для упругого потенциала, заданного формулой (3.1), выпишем выражения для производных $\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial u_i \partial u_j$ в явном виде с точностью до $\varepsilon^2$

$$\Phi_{11} = f - g + 2bu_3 + h(3u_1^2 + u_2^2),$$

$$\Phi_{22} = f + g + 2bu_3 + h(u_1^2 + 3u_2^2),$$

$$\Phi_{33} = d + 6au_3, \quad \Phi_{13} = \Phi_{31} = 2bu_1, \quad \Phi_{23} = \Phi_{32} = 2bu_2, \tag{3.4}$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = 2hu_1u_2.$$

Чтобы выяснить влияние нелинейности и анизотропии на процесс распространения упругих волн, рассмотрим сначала поведение *линейных волн в линейной изотропной среде без предварительных деформаций.* В этом случае можно считать, что

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda J_1^2 + \mu J_2 + \rho_0 T_0(S - S_0),$$

где

$$J_1 = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33}, \qquad J_2 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}$$

– инварианты тензора линейных деформаций

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right).$$

Это равносильно тому, что в разложении (3.1) следует считать $f = \mu$, $g = 0$, $d = \lambda + 2\mu$, а члены порядка выше второго не учитывать. При этом $\Phi_{11} = \Phi_{22} = \mu$, $\Phi_{33} = \lambda + 2\mu$, а остальные $\Phi_{ij} = 0$, $i \neq j$. Коэффициенты $\lambda$ и $\mu$ – упругие постоянные среды (коэффициенты Ламе), которые, как обычно, будем считать положительными (для дальнейшего необходимо $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$).

*Решением системы уравнений (3.3) с постоянными коэффициентами*, согласно § 1.3, являются *бегущие волны*

$$u_i = u_i(x - ct), \qquad v_i = v_i(x - ct), \qquad S = S(x - ct),$$

распространяющиеся с *характеристическими скоростями* $c$. Для отыскания величин скоростей малых возмущений $c$ (см. § 1.2)

служит характеристическое уравнение. Для системы (3.3) оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\rho_0 c & 0 & 0 & \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & 0 \\ 0 & -\rho_0 c & 0 & \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_0 c & \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \end{vmatrix} = -c\left|\Phi_{ij} - \rho_0 c^2 \delta_{ij}\right| = 0. \qquad (3.5)$$

Один из корней этого уравнения $c = c_s = 0$ (принятое для него обозначение будет ясно из дальнейшего). При отыскании остальных воспользуемся новой величиной $\alpha = \rho_0 c^2$, для которой имеем кубическое уравнение

$$|\Phi_{ij} - \alpha\delta_{ij}| = 0.$$

Учитывая приведенные выше выражения $\Phi_{ij}$ для линейной изотропной среды, получаем: $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$, $\alpha_3 = \lambda + 2\mu$. Корнями уравнения (3.5) являются

$$c_1 = c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \qquad c_3 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \qquad c_s = 0. \qquad (3.6)$$

и те же величины с обратными знаками. Все характеристические скорости системы уравнений (3.3) — действительные числа, что соответствует гиперболичности рассматриваемой системы.

Если не оговорено противное, будем в дальнейшем рассматривать только волны, распространяющиеся в положительную сторону оси $x$.

Вследствие второй группы уравнений (3.3), в бегущей волне функции $v_i$ $(i = 1, 2, 3)$ пропорциональны $u_i$, поэтому будем обсуждать далее решение только для компонент деформации $u_i$. Заметим, что можно было сразу исключить из системы (3.3) все другие функции, кроме $u_i$. Тогда для $u_i$ имели бы систему уравнений, каждое из которых второго порядка. Решение в виде бегущей волны для этой системы привело бы к тому же характеристическому уравнению $|\Phi_{ij} - \alpha\delta_{ij}| = 0$, где $\alpha = \rho_0 c^2$.

Из-за диагональности матрицы $\|\Phi_{ij}\|$ можно считать, что в каждой из волн, соответствующей своей характеристической скорости, меняется лишь одна компонента вектора $u_i$. Две первые волны, у которых в линейной изотропной среде характеристические скорости одинаковы $(c_1 = c_2)$, являются *чисто поперечными*, в каждой из них будем считать, что меняется только одна компонента ($u_1$ или $u_2$) деформации сдвига в плоскости фронта волны. Третья волна – *чисто продольная*, в ней $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$ и меняется только $u_3$. Ее скорость $c_3$ отличается от скорости поперечных волн *на конечную величину*, определенную свойствами материала.

Волну, соответствующую характеристической скорости $c_S$, обычно называют *энтропийной*. В ней $u_i$ и $v_i$ не меняются, а энтропия, согласно последнему уравнению системы (3.3), вморожена в частицы $S = S(x)$ и переносится вместе со средой.

В качестве первого усложнения приведенного выше решения рассмотрим влияние *малой анизотропии на линейные волны*. Для этого *линеаризуем* систему уравнений (3.3) около некоторого состояния (фона) $u_i = U_i = \text{const}$, полагая $\Phi_{ik}(u_j) = \Phi_{ik}(U_j)$ и учитывая при этом, что $g = 0$. Сначала рассмотрим случай $U_i = 0$. Решение, как и прежде, ищем в виде бегущих волн. Матрица коэффициентов $\Phi_{ij}$ остается диагональной, а волны чисто продольными и чисто поперечными. Характеристические скорости, получающиеся из уравнения (3.5), имеют вид

$$c_1 = \sqrt{\frac{f-g}{\rho_0}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{f+g}{\rho_0}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{d}{\rho_0}}, \quad c_S = 0. \tag{3.7}$$

Предварительная деформация вносит поправки в величины характеристических скоростей поперечных волн, которые стано-

вятся *различными* между собой. Это отличие пропорционально малому параметру анизотропии ($c_2 - c_1 \sim g$) в то время, как отличие скоростей поперечных волн $c_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ от скорости продольной волны $c_3$ конечно.

Когда состояние предварительной деформации (фона) таково, что $U_i \neq 0$, матрица коэффициентов $\Phi_{ij}$ перестает быть диагональной. будем считать, что $U_i \sim \varepsilon$. Одним из корней уравнения (3.5), как и прежде, служит $c_S = 0$ (энтропийная волна), а другие корни $\alpha = \rho_0 c^2$ находятся как решения кубического уравнения. Одновременно каждый из собственных векторов матрицы $\|\Phi_{ij}\|$, пропорциональный изменениям деформаций $u_i$ в волне, обладает в общем случае всеми тремя компонентами, что указывает на то, что *волны перестают быть чисто продольными и чисто поперечными, а становятся смешанными.*

Однако, выражения (3.4) для $\Phi_{ik}$ показывают, что диагональные члены матрицы $\|\Phi_{ik}\|$ имеют конечную величину в то время, как недиагональные являются малыми порядка $\varepsilon$ или меньше. Это значит, что в одной волне изменение компоненты $u_3$ будет главным, а изменения других имеют величины на порядок (по $\varepsilon$) меньше, чем у основной. Такие волны принято называть *квазипродольными* В двух других волнах изменение $u_3$ на порядок меньше, чем у сдвиговых компонент $u_1, u_2$. Такие волны называются *квазипоперечными.* Вычисление характеристических скоростей из уравнения (3.5) можно проводить, используя малые поправки к решению (3.7). Это будет сделано в следующих параграфах.

Заметим, что матрица коэффициентов $\Phi_{ik}(U_j)$ остается симметричной, что обеспечивает действительность ее собственных значений $\alpha_k$. Это значит, что характеристические скорости $c_k$ могут быть только либо действительными, либо чисто мнимыми, но не комплексными. В то же время величины $\alpha_k$ приобретают за счет присутствия $\Phi_{ij} \neq 0, \quad i \neq j$ лишь малые добавки к своим основным значениям (3.6) и, следовательно, $\alpha_k = \rho_0 c_k^2$ остаются положительными, а $c_k$ – действительными. Это значит, что *система уравнений (3.3) нелинейной теории упругости при малых деформациях является гиперболической.* Задачи с малыми возмущениями были подробно рассмотрены в (Гузь [1986]).

## 3.2. Уравнения для волн Римана

Теперь будем изучать нелинейные волны в среде с упругим потенциалом, заданным выражением (3.1). Для системы уравнений (3.3) ищем частные решения, названные в § 1.4 *волнами Римана*, или *простыми волнами*, (Свешникова [1982]), т.е. решения вида

$$u_i = u_i(\theta(x,t)), \quad v_i = v_i(\theta(x,t)), \quad S = S(\theta(x,t)), \tag{3.8}$$

где $\theta(x,t)$ – некоторая функция, удовлетворяющая уравнению (1.20)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + c(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0.$$

Здесь $c(\theta)$ – пока неизвестная функция, которую предстоит найти. Линии $\dfrac{dx}{dt} = c(\theta)$ на плоскости $x, t$ представляют характеристики последнего уравнения (и одновременно – одно из семейств характеристик исходной системы уравнений (3.3)). Вдоль этих линий $\theta = \text{const}$, т.е. характеристиками служит семейство прямых, направление которых определено функцией $c(\theta)$ (характеристическая скорость).

Подстановка решения (3.8) в уравнения (3.3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho_0 c\,\frac{dv_i}{d\theta} = \Phi_{ik}\frac{du_k}{d\theta}, \quad \frac{dv_i}{d\theta} = c\,\frac{du_i}{d\theta}, \quad c\,\frac{dS}{d\theta} = 0, \quad i,k = 1,2,3. \tag{3.9}$$

Из последнего уравнения при $\dfrac{dS}{d\theta} \neq 0$ находим $c = c_S = 0$, откуда $\theta = x$. Согласно остальным уравнениям, в этой волне $v_i(x) = \text{const}$, $u_i(x) = \text{const}$ и начальные значения энтропии $S(x,0)$, сохраняются в частицах (энтропийная волна) точно также, как это было в линейном случае. Отметим, что постоянство $u_i$ связано со сделанным ранее предположением об аддитивном вкладе в упругий потенциал члена, содержащего энтропию. В общем случае вместо этого в энтропийной волне будут иметь

место равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \sigma_{i3}(u_k, S) = \text{const},$$

которые обеспечивают неизменность скорости.

Для других волн Римана, соответствующих $c \neq 0$, из последнего уравнения (3.9) следует *постоянство в них энтропии* $S = \text{const}$. Из этих уравнений легко исключить все неизвестные, кроме $du_i/d\theta$.

$$\begin{aligned}
&(\Phi_{11} - \alpha)\frac{du_1}{d\theta} + \Phi_{12}\frac{du_2}{d\theta} + \Phi_{13}\frac{du_3}{d\theta} = 0,\\
&\Phi_{21}\frac{du_1}{d\theta} + (\Phi_{22} - \alpha)\frac{du_2}{d\theta} + \Phi_{23}\frac{du_3}{dte} = 0,\\
&\Phi_{31}\frac{du_1}{d\theta} + \Phi_{32}\frac{du_2}{d\theta} + (\Phi_{33} - \alpha)\frac{du_3}{d\theta} = 0,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\alpha(\theta) = \rho_0 c^2(\theta)$, а функции $\Phi_{ik}(u_j)$ определены выражениями (3.4). Чтобы эта система уравнений относительно неизвестных $\dfrac{du_k}{d\theta}$ имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы

$$|\Phi_{ik} - \alpha(\theta)\delta_{ik}| = 0. \tag{3.11}$$

Корни этого уравнения $\alpha_i(\theta)$, $i$=1,2,3 можно находить приближенно, пользуясь тем, что диагональные элементы матрицы $\|\Phi_{ik}\|$ имеют конечную величину в то время, как все остальные члены содержат малыми множителями функции $u_1$ и $u_2$ или их произведение. За нулевое приближение возьмем решение линейной задачи (3.6) или (3.7). В силу симметрии матрицы $\|\Phi_{ik}\|$ ее собственные значения действительны, как было сказано в § 3.1, положительны. Поэтому характеристические скорости $c_k = \sqrt{\alpha_k/\rho_0}$, $k = 1, 2, 3$ соответствуют трем парам волн Римана, распространяющимся в обе стороны оси $x$ (из которых ранее условились рассматривать только те, которые движутся в положительную сторону оси $x$).

Учет малых недиагональных элементов делает волны *квазипоперечными и квазипродольными.* Однако, в отличие от линейных волн, и характеристические скорости, и приращения деформаций $du_i$ зависят от текущего состояния $u_i$, что приводит к *деформированию профиля начального возмущения* при движении и представляет главный предмет дальнейшего исследования. Из-за качественного различия целесообразно дальнейшее изучение квазипродольных и квазипоперечных волн проводить отдельно.

## 3.3. Квазипродольные волны Римана

*Квазипродольными* называют такие волны, в которых изменение продольной компоненты деформации $du_3$ много больше (насколько будет видно далее), чем изменение поперечных компонент $du_1$, $du_2$. Примем это во внимание при дальнейших оценках.

В третьем уравнении системы (3.10) члены с $\dfrac{du_1}{d\theta}$ и $\dfrac{du_2}{d\theta}$ имеют при себе малые коэффициенты $\Phi_{13}$, $\Phi_{23}$ (согласно выражениям (3.4), пропорциональные $u_1$ и $u_2$). Поэтому из этого уравнения следует, что соответствующее квазипродольной волне характеристическое число имеет величину

$$\alpha_3 = \Phi_{33} + o(\varepsilon).$$

В двух других уравнениях системы (3.10), куда подставим найденное выражение для $\alpha$, слагаемыми с коэффициентом $\Phi_{12}$ (который пропорционален произведению $u_1 u_2$) можно пренебречь. Тогда изменения поперечных компонент в квазипродольной волне вычисляются с помощью равенств

$$du_1 = \frac{2bu_1}{d-f+g+2(3a-b)u_3}du_3, \quad du_2 = \frac{2bu_2}{d-f-g+2(3a-b)u_3}du_3,$$

в которых использованы выражения (3.4) для $\Phi_{ik}$. Отсюда видно, что изменение каждой из поперечных компонент возможно лишь в том случае, если состояние, по которому идет волна, уже обладает отличной от нуля соответствующей поперечной компонентой деформации. Если же предварительная деформация

сдвига отсутствует ($U_1 = U_2 = 0$), то волна всегда далее останется чисто продольной.

Второе, что видно непосредственно из уравнений для $du_\alpha$, это то, что изменение поперечных компонент $du_\alpha$, по крайней мере, на порядок (по $\varepsilon$) меньше, чем изменение продольной компоненты $du_3$, что подтверждает законность использованных оценок и пренебрежений.

После интегрирования равенств для $du_\alpha$, пренебрегая в знаменателях малыми по сравнению с $d - f$ (для изотропного тела $d-f \simeq \lambda+\mu$) членами, получим простые приближенные формулы для поперечных компонент деформации

$$u_1 - U_1 = \frac{2bU_1}{d-f}(u_3 - U_3)\left(1 - \frac{6a-2b}{d-f}U_3 - \frac{g}{d-f} + \frac{2b-3a}{d-f}(u_3 - U_3)\right)$$
$$u_2 - U_2 = \frac{2bU_2}{d-f}(u_3 - U_3)\left(1 - \frac{6a-2b}{d-f}U_3 + \frac{g}{d-f} + \frac{2b-3a}{d-f}(u_3 - U_3)\right) \tag{3.12}$$

Постоянные интегрирования выражены через компоненты начальной деформации $U_i$. Эти формулы демонстрируют приведенные выше утверждения, что при $U_1 = U_2 = 0$ волна будет чисто продольной, а при $U_\alpha \neq 0$ изменение поперечных компонент $u_\alpha - U_\alpha \sim \varepsilon^2$. Главная часть решения получается, если в последних скобках пренебречь всеми членами по сравнению с единицей.

Эти главные члены показывают, что в принятом приближении интегральная кривая, изображающая в пространстве $u_i$ состояния, последовательно с ростом $t$ осуществляющиеся в рассматриваемой волне Римана, расположена в принятом приближении в плоскости, проходящей через ось $u_3$ и точку, представляющую начальное состояние $U_i$. Таким образом, *квазипродольная волна является приблизительно плоскополяризованной.*

Для характеристической скорости квазипродольной волны с учетом равенств (3.2) получаем выражение

$$\rho_0 c_3^2 = \alpha_3 = d + 6au_3 + O(\varepsilon^2), \tag{3.13}$$

т.е.

$$c_3 = \sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\,(1 + 3au_3 + O(\varepsilon))\,.$$

Нелинейность проявляется в том, что $c_3$ зависит от амплитуды возмущения $u_3$. Можно сказать, что в задачах о квазипродольных волнах коэффициент $a$ служит параметром нелинейности среды.

Из теории волн Римана (§ 1.4) известно, что для возмущения, движущегося в положительную сторону оси $x$, при $dc/dx < 0$ характеристики на плоскости $x, t$ сходятся и эволюция начального возмущения вызывает укручение, а затем и *опрокидывание профиля возмущения (опрокидывание волны Римана)*. Это ведет к потере непрерывности решения и необходимости вводить в рассмотрение разрывы. Для квазипродольной волны

$$\frac{\partial c_3}{\partial x} = \frac{\partial c_3}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x} = 6a\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

В средах с $a > 0$ тенденцией к опрокидыванию обладают те волны, распространяющиеся направо, у которых $\partial u_3/\partial x < 0$ (*волна разрежения*), в средах с $a < 0$ могут опрокидываться волны с $\partial u_3/\partial x > 0$ (*волны сжатия*). В случае противоположных неравенств характеристики с ростом $x$ и $t$ расходятся и протяженность области, занятой возмущением, увеличивается. В этом случае при всех временах существует непрерывное решение в виде *расширяющейся волны Римана.*

Для иллюстрации применим наши рассуждения к частному виду нелинейной упругой среды – совершенному газу. Величина $u_3 = \dfrac{\partial w_3}{\partial x}$ характеризует в одномерном движении изменение материального объема, $u_3 = \frac{V - V_0}{V_0}$, где $V = 1/\rho$. Внутренняя энергия единицы массы совершенного газа задается формулой (Седов [1994])

$$U = c_V T_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1-\gamma} e^{\frac{S - S_0}{c_V}},$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1$ – отношение теплоемкостей. Разложим $\Phi = \rho_0 U(u_3, S)$ в ряд по малым деформациям $u_3$. При этом первый

член, учитывающий нелинейность среды, т.е. кубический по $u_3$, имеет вид

$$au_3^3 = -\frac{1}{6}\rho_0 c_V \gamma(\gamma^2 - 1)u_3^3.$$

Так как $\gamma > 1$, то $a < 0$ и, согласно изложенному выше правилу, в совершенном газе опрокидываются волны сжатия.

Итак, поведение квазипродольных волн в среде с малой анизотропией и малой нелинейностью качественно не отличается от поведения волн сжимаемости в газах. Анизотропия среды в принятом приближении в главных членах не проявляется. Малые поперечные компоненты деформации (на порядок меньше продольных) появляются лишь при наличии предварительной деформации сдвига. Проявление нелинейности качественно такое же, как у газов с произвольным уравнением состояния. По этой причине в дальнейшем изложении мы уделяем главное внимание поперечным и квазипоперечным волнам. Но квазипродольные волны Римана будут необходимы для построения решения автомодельных задач.

## 3.4. Квазипоперечные волны Римана

Рассмотрим теперь решения уравнений (3.10), называемые квазипоперечными волнами, в которых главное изменение претерпевают компоненты $u_1$ и $u_2$. Малость коэффициентов $\Phi_{ij}$ при $i \neq j$ позволяет пользоваться при решении приближенным методом. В качестве нулевого приближения для характеристических скоростей квазипоперечных волн возьмем решение (3.6) линейной задачи, в котором $\rho_0 c_{1,2}^2 = \alpha^0 = f$. Это позволяет выразить из последнего уравнения (3.10) $du_3$ через $du_1$ и $du_2$. Ограничиваясь только главными членами, получим

$$\begin{aligned} du_3 = -\frac{\Phi_{13}du_1 + \Phi_{23}du_2}{\Phi_{33} - \alpha} &\simeq -\frac{2b}{d-f}(u_1 du_1 + u_2 du_2) \\ &= -\frac{b}{d-f}d(u_1^2 + u_2^2). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Величины $d$, $f$ и $b$ – коэффициенты в разложении упругого потенциала (3.2), причем $d/\rho_0$ и $f/\rho_0$ являются квадратами

скоростей продольных и поперечных линейных волн при отсутствии начальной деформации. Погрешность в последнем равенстве обусловлена тем, что в знаменателе опущены малые слагаемые. Погрешности в этом и некоторых последующих равенствах будут оценены позднее.

Соотношение (3.14) можно проинтегрировать

$$u_3 = -\frac{b}{d-f}(u_1^2 + u_2^2) + C, \qquad C = \text{const}. \tag{3.15}$$

Постоянная интегрирования $C$ определена, если задана какая-нибудь точка $u_i = U_i$ на интегральной кривой

$$C = U_3 + \frac{b}{d-f}R^2, \qquad R^2 = U_1^2 + U_2^2.$$

Если считать, что $u_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ и их изменения в волне имеют порядок $\varepsilon$, то из равенства (3.15) видно, что изменение продольной компоненты $u_3 - U_3$ в квазипоперечных волнах есть малая величина порядка $\varepsilon^2$, на порядок меньше, чем изменение поперечных компонент.

Существование выражения (3.15) для $u_3$ позволяет для квазипоперечных волн все решение представлять через две функции, характеризующие состояние, $u_1$ и $u_2$, т.е. считать среду двухпараметрической (аналогично тому, как это делается при описании несжимаемой упругой среды). Исключая с помощью равенств (3.14) и (3.15) $u_3$ из двух уравнений (3.10), получим

$$\begin{aligned} (H_{11} - \alpha)\frac{du_1}{d\theta} + H_{12}\frac{du_2}{d\theta} &= 0, \\ H_{12}\frac{du_1}{d\theta} + (H_{22} - \alpha)\frac{du_2}{d\theta} &= 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

где обозначено

$$
\begin{gathered}
H_{11} = \Phi_{11} - \frac{\Phi_{13}^2}{d-f} = f_1 - g - \left(\frac{2b^2}{d-f} - h\right)(3u_1^2 + u_2^2), \\
H_{22} = \Phi_{22} - \frac{\Phi_{23}^2}{d-f} = f_1 + g - \left(\frac{2b^2}{d-f} - h\right)(u_1^2 + 3u_2^2), \\
H_{12} = H_{21} = \Phi_{12} - \frac{\Phi_{13}\Phi_{23}}{d-f} = \left(2h - \frac{4b^2}{d-f}\right) u_1 u_2, \\
f_1 = f + 2b\left(U_3 + \frac{b}{d-f} R^2\right).
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

При этом были использованы выражения (3.4) для $\Phi_{ij}$. Равенства (3.17) показывают, что можно ввести некоторую функцию $H(u_1, u_2)$, такую, что

$$
\frac{\partial^2 H}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = H_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2.
$$

Функция $H(u_1, u_2)$ для квазипоперечных волн играет роль упругого потенциала. Выражение для нее нетрудно получить из равенств (3.17)

$$
H(u_1, u_2) = \frac{1}{2} f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4} \varkappa (u_1^2 + u_2^2)^2, \tag{3.18}
$$

где

$$
\varkappa = \frac{2b^2}{d-f} - h. \tag{3.19}
$$

Функция $H(u_1, u_2)$ может рассматриваться как упругий потенциал некоторой *эквивалентной несжимаемой упругой среды*, в которой волны Римана являются чисто поперечными. Об этом подробнее в § 7.1. В равенстве (3.18) и далее индекс "1" у коэффициента $f$ опущен. Для изотропных сред, у которых упругий потенциал выражается через инварианты тензора деформаций и представлен в виде (2.25),

$$
d - f = \lambda + \mu, \qquad \varkappa = \frac{\mu}{2} + \frac{(\mu + \beta - 3\gamma/2)^2}{2(\lambda + \mu)} - \xi.
$$

В формуле (3.18) для функции $H$ оставлены только главные члены, а все слагаемые с коэффициентами, пропорциональными $\varepsilon_{\alpha\beta}$, и меньше отброшены как малые (коэффициент $\varkappa$ стоит при члене четвертой степени по $u_\alpha$).

Полученное выражение для $H$ согласуется с изложенными в Главе 2 представлениями о потенциалах слабоанизотропных сред. При $g = 0$ функция $H$ зависит только от $u_1^2 + u_2^2$ и соответствующие слагаемые в равенстве (3.18) представляют разложение $H$ по этому аргументу. Первое слагаемое соответствует линейной изотропной среде. *Член с $\varkappa$ учитывает нелинейные свойства материала.* Коэффициент $\varkappa$ является *единственным параметром*, характеризующим в принятом приближении *нелинейные свойства среды в квазипоперечной волне.* Он выражается через упругие модули среды, в общем случае конечен и может быть как положительным, так и отрицательным. В частности, будем считать, когда это потребуется, что в материале, где квазипоперечные волны ведут себя, как линейные в рассматриваемом приближении, $\varkappa = 0$. Как будет видно далее, знак $\varkappa$ существенно влияет на качественные особенности поведения волн Римана.

Волновую анизотропию среды (т.е. анизотропию в плоскости фронта волны) представляет в выражении для $H(u_1, u_2)$ второе слагаемое. Оно квадратично по $u_\alpha$, т.е. такое же, каким было в линейной постановке. По принятой в Главе 2 договоренности следующие члены разложения по $u_i$, которые тоже могли бы нести анизотропию, мы не учитываем, поскольку они меньше по порядку величины по сравнению с написанным.

Наиболее интересное поведение квазипоперечных волн следует ожидать в том случае, когда *члены, содержащие анизотропию и содержащие нелинейность, имеют одинаковый порядок.* Тогда вызываемые ими эффекты могут взаимодействовать при движении волн. Сравнивая второе и третье слагаемые в выражении для $H$, видим, что для этого нужно, чтобы параметр анизотропии $g$ имел порядок малости $\varepsilon^2$.

Вернемся к уравнениям (3.16). Чтобы система могла иметь нетривиальное решение для $du_\beta/d\theta$, величина $\alpha = \rho_0 c^2$ должна

быть корнем характеристического уравнения матрицы $\|H_{\beta\gamma}\|$

$$\alpha^2 - (H_{11} + H_{22})\alpha + H_{11}H_{22} - H_{12}^2 = 0.$$

Для собственных значений $\alpha$ матрицы $\|H_{\beta\gamma}\|$ находим два действительных корня

$$\alpha_{1,2} = \rho_0 c_{1,2}^2 = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H_{22} - H_{11}}{2}\right)^2 + H_{12}^2},$$

или, учитывая выражения (3.17),

$$\alpha_{1,2} = f - 2\varkappa(u_1^2 + u_2^2) \mp |\varkappa|\sqrt{\left(u_2^2 - u_1^2 - \frac{g}{\varkappa}\right)^2 + 4u_1^2u_2^2}. \qquad (3.20)$$

Отсюда получаем формулы для характеристических скоростей квазипоперечных волн

$$c_{1,2} = \sqrt{\frac{f}{\rho_0}}\left(1 - \frac{\varkappa}{f}(u_1^2 + u_2^2) \mp \frac{1}{2}\left|\frac{\varkappa}{f}\right|\sqrt{\left(u_2^2 - u_1^2 - \frac{g}{\varkappa}\right)^2 + 4u_1^2u_2^2}\right) \qquad (3.21)$$

В случае изотропной предварительно деформированной среды, согласно выражениям (3.2), входящие сюда коэффициенты имеют вид

$$f = \mu + b(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2b\left(U_3 + \frac{b}{\lambda + \mu}(U_1^2 + U_2^2)\right),$$

$$g = (\mu + \frac{3}{4}\gamma)(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}), \qquad \varkappa = \frac{2b^2}{\lambda + \mu} - h.$$

Для линейных волн ($\varkappa = 0$) получаем $\alpha_{1,2} = f \pm g$, как было ранее в формуле (3.7). Нелинейность (зависимость характеристических скоростей от $u_1$ и $u_2$) проявляется в дополнительном изменении $c_{1,2}$ и $\alpha_{1,2}$ на величину порядка $\varepsilon^2$. Это — особенность квазипоперечных волн, для квазипродольных нелинейность проявляется членами порядка $\varepsilon$.

Этим оправдана необходимость иметь в разложении упругого потенциала $\Phi$ (см. § 2.4) члены до четвертой степени по $u_\alpha$

включительно, поскольку именно эти члены и определяют зависимость $c_{1,2}$ от $u_\alpha$. В то же время изменение $u_3$ в квазипоперечных волнах имеет порядок $\varepsilon^2$, и поэтому в разложении $\Phi$ достаточно ограничиться членами с $u_3$ с показателем степени на единицу меньше.

Согласно формуле (3.20), относительное различие характеристических скоростей $c_1$ и $c_2$ имеет порядок величины

$$\chi = \max\left\{\frac{g}{f}, \frac{\varkappa\varepsilon^2}{f}\right\}$$

и сравнимо с изменением каждой из $c_1$, $c_2$ в области $u_\alpha \sim \varepsilon$. Характеристическая скорость квазипродольной волны $c_3$ превышает $c_1$ и $c_2$ на конечную величину $d - f = \lambda + \mu + O(\varepsilon)$.

Условимся нумерацию характеристических скоростей выбирать так, что $c_3 > c_2 > c_1$.В соответствии с величинами $c_i$ *квазипоперечные волны Римана будем называть быстрыми($c_2$) и медленными ($c_1$).*

Сделаем замечание относительно точности используемых приближений. Относительная ошибка в равенстве (3.14) обусловлена заменой величины $\Phi_{33} - \alpha$ на $d - f$ и по порядку величины не превышает $\max\{g/f, (\varkappa\varepsilon^2)/f\}$. Поскольку изменение $u_3$ в квазипоперечных волнах согласно (3.15) имеет порядок $\varepsilon^2$, то упомянутую относительную ошибку можно считать порядка $\chi = \max\{g/f, (\varkappa\varepsilon^2)/f\}$. Учет такой погрешности мог бы привести в выражениях для $H_{\alpha\beta}$ (3.17) к несущественным поправкам порядка $\chi\varepsilon^2$.

## 3.5. Изменение величин в квазипоперечных волнах

Для изучения поведения деформаций сдвига $u_\beta$ ($\beta = 1, 2$) в квазипоперечных волнах Римана служат уравнения (3.16), которые при $\alpha = \alpha_{1,2}$ становятся линейно зависимыми. Одно из уравнений может быть отброшено, а оставшееся записывается в

виде

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2^2 - u_1^2 - G \pm \sqrt{(u_2^2 - u_1^2 - G)^2 + 4u_1^2 u_2^2}}{2u_1 u_2}, \quad G = \frac{g}{\varkappa} \qquad (3.22)$$

Расположение знаков $\pm$ в этой формуле соответствует их расположению в равенстве (3.20). Уравнения представляют на плоскости $u_1 u_2$ *два взаимно ортогональных* (что следует из симметрии матрицы $\|H_{\alpha\beta}\|$) *семейства интегральных кривых для быстрой и медленной квазипоперечных волн.* Они касаются собственных направлений матрицы $\|H_{\alpha\beta}\|$ и изображены на рис. 3.1. В отсутствии анизотропии ($g = 0$) одно из семейств представлено концентрическими окружностями с центром в точке $u_1 = u_2 = 0$, второе семейство — лучи, расходящиеся из начала координат.

Из (3.22) видно, что это уравнение, а следовательно, и картина интегральных кривых зависит от единственного параметра

$$G = g/\varkappa.$$

Как отмечалось ранее: знак $g$ меняется при переименовании осей $u_1$ и $u_2$ (поскольку в выражении для упругого потенциала $g$ представляет множитель при $u_2^2 - u_1^2$). Величина $\varkappa$ при этом не меняется. Поэтому для определенности *всегда будем считать величину $G$ положительной.*

У интегральных кривых, представленных уравнением (3.22), имеются две особые точки с координатами $u_1 = 0$, $u_2 = \pm\sqrt{G}$. В этих особых точках совпадают значения собственных значений матрицы $H_{\alpha\beta}$ и, следовательно, совпадают характеристические скорости. Совпадение собственных значений и является причиной неопределенности направления собственных векторов в особых точках.

Одно из семейств интегральных кривых, соответствующее знаку "–" в формуле (3.22), представляет собой замкнутые овалы (на рис. 3.1 они изображены сплошными линиями), содержащие внутри себя особые точки. Второе семейство (изображенное на том же рисунке штриховыми линиями) состоит из кривых, концы которых уходят в бесконечность. Оба семейства симметричны относительно осей координат. С увеличением $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

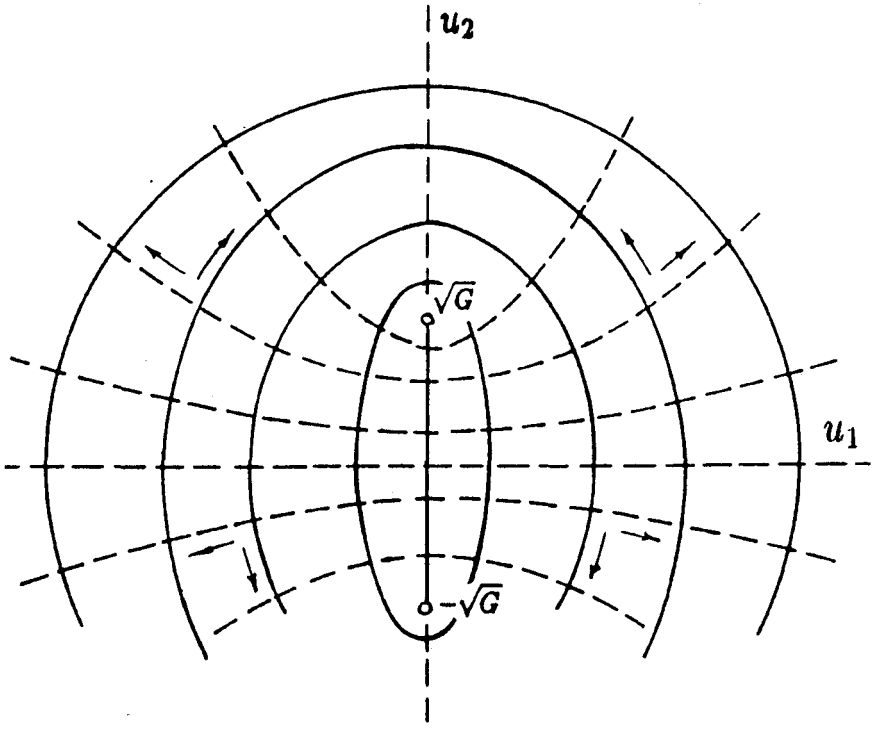



Рис. 3.1.

овалы стремятся к окружности, второе семейство — к лучам. Сама ось $u_1$ принадлежит к интегральным кривым второго семейства. Отрезок оси $u_2$ между точками $\sqrt{G}$ и $-\sqrt{G}$ (особые точки) представляет интегральную кривую из семейства овалов, а ось $u_2$ вне указанного отрезка принадлежит семейству интегральных кривых, уходящих в бесконечность.

При $\varkappa > 0$ семейство овалов соответствует верхнему знаку в формулах (3.20) и (3.22), т.е. представляет интегральные кривые *быстрых волн* Римана. В средах с $\varkappa < 0$ быстрым волнам соответствуют незамкнутые интегральные линии.

Заметим, что если ввести новые переменные, отличающиеся от $u_1$ и $u_2$ масштабным множителем, то при таком преобразовании можно получить уравнение того же вида, что и (3.22) с про-

извольным значением $G = g/\varkappa$, например, равным единице. Это указывает на универсальность полученных выражений и позволяет легко пересчитывать результаты для сред, различающихся числовыми значениями постоянных коэффициентов $g$ и $\varkappa$. Мы, однако, этого делать не будем.

## 3.6. Эволюция квазипоперечных волн Римана

Так как характеристические скорости зависят от $u_1, u_2$, которые изменяются в волне, то *профиль возмущения деформируется со временем*, становится более крутым (и через некоторое время опрокидывается) или выполаживается и растягивается.

В § 1.4 было показано, что этот процесс зависит от знака производной $\dfrac{\partial c}{\partial x}$. Проследим изменение характеристической скорости каждой из волн Римана вдоль ее интегральной кривой.

В качестве параметра вдоль интегральной кривой возьмем одну из компонент деформаций, например $u_1$. Интегральную кривую уравнения (3.22) можно тогда рассматривать как выражение $u_2$ через $u_1$ вдоль этой линии. Вычисление изменения $c_1$ и $c_2$ вдоль интегральных линий (3.22) приводит к выражению

$$\begin{aligned}\frac{dc_{1,2}}{du_1} &= \frac{\partial c_{1,2}}{\partial u_1} + \frac{\partial c_{1,2}}{\partial u_2}\frac{du_2}{du_1} \\ &= -\frac{3\varkappa}{2\rho_0 c_{1,2}}\frac{u_1^2 + u_2^2 - G \pm \sqrt{(u_2^2 - u_1^2 - G)^2 + 4u_1^2u_2^2}}{\sqrt{(u_2^2 - u_1^2 - G)^2 + 4u_1^2u_2^2}}.\end{aligned}$$

Верхний знак в этой формуле относится к *быстрым волнам, если $\varkappa > 0$, и медленным при $\varkappa < 0$*. На рис. 3.1 изображено стрелками направление убывания характеристических скоростей вдоль соответствующих им интегральных кривых для среды с $\varkappa > 0$.

Решению в виде волны Римана соответствует одна из интегральных кривых на плоскости $u_1, u_2$. Каждой точке этой

кривой на плоскости $x, t$ соответствует характеристика, представляющая собой прямую, наклон которой $\dfrac{dx}{dt}$ равен характеристической скорости в рассматриваемой точке. Если при $t = \text{const}$ в некотором интервале значений $x$ выполнено неравенство $\partial c/\partial x > 0$, то характеристики, пересекающие этот интервал, расходятся при увеличении времени, а соответствующая часть волны Римана расширяется. На интервале, где $\partial c/\partial x < 0$, характеристики сходятся с ростом $t$, а затем пересекаются, решение становится неоднозначным, волна Римана *опрокидывается*.

Учитывая симметрию формул (3.20) и (3.22) относительно осей координат, можно утверждать, что и при $\varkappa > 0$ и при $\varkappa < 0$ могут опрокидываться быстрые волны, в которых $|u_1|$ со временем растет, и медленные, в которых $|u_1|$ убывает.

В автомодельных задачах с зависимостью решений от $x/t$ (а такие задачи будут дальше подробно рассматриваться) волны Римана должны быть в силу этого *расширяющимися*. Поэтому в автомодельных задачах могут быть использованы только такие волны Римана, в которых изменение деформаций со временем происходит в средах с $\varkappa > 0$ в направлениях вдоль интегральных кривых, указанных стрелками на рис. 3.1, и в противоположных направлениях в средах с $\varkappa < 0$.

## 3.7. Волны Римана в случае волновой изотропии

Особо следует сказать о волнах Римана при $g = 0$. Так как параметр $g$, согласно равенствам (3.12), слабо влияет на описание квазипродольных волн, то все сказанное о них выше (см. § 3.3) остается в силе и при $g = 0$.

Для интегральных кривых двух квазипоперечных волн Римана (3.22) теперь получаем уравнения

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{u_1}{u_2}, \qquad \frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2}{u_1}.$$

В результате интегрирования они дают семейство концентрических окружностей с центром в точке $u_1 = u_2 = 0$ и семейство

ортогональных к ним лучей. Две особые точки, существующие при $g \neq 0$, слились в одну $u_1 = u_2 = 0$.

Для характеристической скорости $c_r$ вдоль луча из формулы (3.20) получаем

$$\rho_0 c_r^2 = f - 3\varkappa r^2.$$

Величина $r^2 = u_1^2 + u_2^2$ характеризует модуль деформации сдвига в плоскости фронта волны. Изменение продольной компоненты $u_3$ описывается по-прежнему равенствами (3.14) и (3.15), в которые $g$ не входит. Эти волны являются *плоскополяризованными.*

Второе семейство интегральных кривых (3.22) при $g = 0$ состоит из окружностей $r = \text{const}$ в плоскости $u_1 u_2$. Формула (3.14) указывает, что на этих линиях отсутствует изменение продольной компоненты деформации $du_3 = 0$, и волны являются *чисто поперечными.* Для характеристической скорости $c_\theta$ этого семейства получаем выражение

$$\rho_0 c_\theta^2 = \alpha_\theta = f - \varkappa r^2,$$

из которого видно, что $c_\theta = \text{const}$ вдоль интегральных кривых. *Профиль возмущения не деформируется* при движении, так что рассматриваемое решение представляет собой *бегущую волну.* Вследствие того что в ней выполнено равенство $|r| = \text{const}$, эти волны называют *вращательными.*

Приведенные выражения для характеристических скоростей $c_r$ и $c_\theta$ показывают, что при $\varkappa > 0$ вращательные волны являются быстрыми, при $\varkappa < 0$ — медленными.

Как любая бегущая волна, вращательная волна может нести разрыв функций, существующий в начальных данных. Но *он не сопровождается ростом энтропии.* В то же время, из непрерывных начальных функций *в процессе эволюции решения не может образоваться разрыв, соответствующий этому типу волн.*

Вращательная волна, обусловленная изотропией среды, представляет собой определенное вырождение волны Римана. Присутствие даже малой анизотропии снимает указанную вырожденность. При $g \neq 0$ возникает отличие интегральных кривых этого

семейства от окружностей и происходит изменение характеристической скорости вдоль них и, следовательно, деформирование профиля возмущений. Это может привести к образованию разрывов, сопровождающихся диссипацией (ростом энтропии). Таким образом, именно вращательные волны приобретают существенно новые качества в результате учета даже очень малой анизотропии среды.

Волны Римана малой интенсивности в изотропных упругих средах без предварительной деформации (что соответствует $g = 0$) подробно описаны в (Бленд [1972]). Исследование волн Римана в магнитной гидродинамике (где внутренняя энергия, как показано в § 2.5, тоже обладает волновой изотропией) приведено в (Куликовский и Любимов [1962]).

## Резюме

Рассматриваются одномерные волны (независимые переменные $x$ и $t$) малых возмущений, описываемые дифференциальными уравнениями теории упругости. Находятся скорости характеристик этой системы уравнений, относящейся к гиперболическому типу. В рассматриваемом случае малой волновой анизотропии линейные волны и волны Римана разделяются на квазипродольные и квазипоперечные.

Квазипродольные волны, распространяющиеся в положительную (или отрицательную) сторону оси $x$, связаны с одним семейством характеристик, обладающих наибольшей скоростью. В этих волнах происходит в основном сжатие среды в направлении распространения. Это сжатие характеризуется изменением величины $u_3$ (напомним, что $u_i = \partial w_i/\partial x$, $w_i$ – компоненты вектора перемещения среды). Изменения поперечных деформаций сдвига в этой волне малы и даются равенствами (3.12). Скорость характеристик и ее изменение в волне Римана представлены равенством (3.13). Поведение квазипродольных волн типично для волн, связанных с одним семейством характеристик, и изучалось ранее во многих физических ситуациях, начиная с волн в газах.

Квазипоперечные волны соответствуют двум семействам характеристик с близкими характеристическими скоростями (раз-

ница имеет порядок $\chi = \max\{\varepsilon^2, g\}$, где $\varepsilon$ характеризует отклонение от ненапряженного состояния, а $g$ – параметр волновой анизотропии), отличающимися при этом от скорости квазипродольной волны на конечную величину. В квазипоперечных волнах основное изменение претерпевают величины $u_1$ и $u_2$, в то время как изменение продольной компоненты $u_3$ мало и величина $u_3$ может с удовлетворительной точностью быть выражена формулой (3.15) через $u_1$ и $u_2$ и их начальные значения. Это позволяет исключить из уравнений $u_3$ и поведение произвольной среды в изучаемых квазипоперечных волнах заменить поведением некоторой эквивалентной несжимаемой среды, параметры которой легко находятся, а упругий потенциал задается выражением (3.18).

Характеристические скорости квазипоперечных волн даются равенством (3.20). В зависимости от знака перед корнем квазипоперечные волны разделяются на быстрые и медленные. Изменение $u_1$ и $u_2$ в каждой из квазипоперечных волн Римана описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (3.22). Интегральные кривые волн Римана представлены на рис. 3.1, где стрелками обозначено направление уменьшения характеристических скоростей вдоль интегральных кривых в средах, у которых упругий модуль ответственный за нелинейность $\varkappa > 0$. (Для сред $\varkappa < 0$ эти направления указывают увеличение характеристических скоростей.) Изменение $u_1$ и $u_2$ в частицах среды с ростом времени в неопрокидывающихся волнах Римана совпадает с направлением уменьшения характеристических скоростей вдоль интегральных кривых (при $\varkappa > 0$ вдоль стрелок). Как частный случай рассмотрены волны Римана при отсутствии волновой анизотропии. При этом оказалось, что одна из волн Римана является плоскополяризованной (значения $u_1$, $u_2$, $u_3$ в такой волне лежат в некоторой плоскости, проходящей через ось $u_3$), а другая волна является вращательной ($u_1$, $u_2$, $u_3$ принадлежат окружности $u_1^2 + u_2^2 = \text{const}$, лежащей в плоскости $u_3 = \text{const}$). Вращательная волна является бегущей волной, т.е. перемещается не изменяя со временем своей формы.

# Глава 4.

# Ударные волны

## 4.1. Условия на слабых ударных волнах

Будем теперь изучать разрывные решения в упругой среде, заданной своим упругим потенциалом $\Phi(u_k, S)$. Динамические и термодинамическое условия на скачке были получены в § 2.2 и записаны в виде равенств (2.20)

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\right] = \rho_0 W^2[u_k], \quad [\Phi] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\right][u_k] + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\right)^+[u_k], \qquad (4.1)$$
$$[v_i] + W[u_i] = 0,$$

Здесь $W$–лагранжева скорость фронта разрыва, квадратными скобками обозначены скачки соответствующих функций, например, $[u_k] = u_k^+ - u_k^-$, индекс "–" относится к состоянию перед разрывом, индекс "+" — за разрывом. Далее для компонент деформации перед скачком $u_k^-$ обычно будут еще использоваться обозначения $u_k^- = U_k$, а для компонент за разрывом индекс "+" часто будет опускаться, $u_k^+ = u_k$. Последняя группа кинематических соотношений служит, очевидно, для вычисления скачка скорости среды $[v_i]$.

В этой главе рассматриваются скачки слабой интенсивности в упругой среде со слабой нелинейностью, что позволяет воспользоваться представлением упругого потенциала $\Phi(u_k, S)$ в ви-

де разложения (2.26), полученного в Главе 2, с учетом главных нелинейных слагаемых.

$$\Phi = \frac{1}{2}f(u_1^2+u_2^2)+\frac{1}{2}g(u_2^2-u_1^2)+\frac{1}{2}du_3^2+a^3u_3^3+$$
$$+\,b(u_1^2+u_2^2)u_3+\frac{1}{4}h(u_1^2+u_2^2)^2+\rho_0T_0(S-S_0),$$

где коэффициенты разложения $a, b, d, h, f, g$ – некоторые константы, описывающие свойства среды. Для изотропного материала их выражения через упругие модули среды и компоненты предварительной деформации приведены в формулах (3.2). Было показано в Главе 3, что выражение $\sqrt{f/\rho_0}$ является скоростью линейных поперечных волн, а малый параметр $g$ характеризует волновую анизотропию среды.

Считаем,что скачки $[u_k]$ функций $u_k$ имеют тот же порядок величин, что и сами функции, т.е. порядок $\varepsilon$. упругий потенциал $\Phi$ разложим по малым величинам скачков деформации $[u_k]$ и энтропии $[S]$, ограничиваясь их четвертыми степенями по $[u_k]$ и первой по $[S]$. Введем для удобства вспомогательную функцию $\Psi([u_k])$, такую что

$$\Phi = \Phi^- + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\right)^- [u_k] + \rho_0T_0[S] + \Psi([u_k]).$$

Очевидно, функция $\Psi$ представляет собой разложение $\Phi$ по степеням $[u_k]$, начиная со второй и выше, с коэффициентами, зависящими от состояния перед скачком

$$\Psi = \frac{1}{2}\Phi_{ik}^-[u_i][u_k] + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial\Phi_{ik}}{\partial u_j}\right)^-[u_i][u_j][u_k]$$
$$+\,\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2\Phi_{ik}}{\partial u_j\partial u_l}\right)^-[u_i][u_j][u_k][u_l].$$

Коэффициенты разложения вычисляются по формулам (2.26) или, что удобнее, (3.4). В них следует положить $u_k = u_k^- = U_k$.

Получим

$$\begin{aligned}\Psi = {} & \frac{1}{2}(\Phi_{11}^{-}[u_1]^2 + \Phi_{22}^{-}[u_2]^2 + \Phi_{33}^{-}[u_3]^2) + \\ & + \Phi_{12}^{-}[u_1][u_2] + \Phi_{13}^{-}[u_1][u_3] + \Phi_{23}^{-}[u_2][u_3] \\ & + (hU_1[u_1] + hU_2[u_2] + b[u_3])([u_1]^2 + [u_2]^2) \\ & + a[u_3]^3 + \frac{1}{4}h([u_1]^2 + [u_2]^2)^2,\end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}&\Phi_{11}^{-} = f - g + 2bU_3 + h(3U_1^2 + U_2^2), \qquad \Phi_{13}^{-} = 2bU_1, \\ &\Phi_{22}^{-} = f + g + 2bU_3 + h(U_1^2 + 3U_2^2), \qquad \Phi_{23}^{-} = 2bU_2, \\ &\Phi_{33}^{-} = d + 6aU_3, \qquad \Phi_{12}^{-} = 2hU_1U_2.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Функция $\Psi$ выбрана таким образом, чтобы $\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_k}\right] = \dfrac{\partial\Psi}{\partial[u_k]}$. С использованием функции $\Psi$ условия на скачке записываются следующим образом

$$\frac{\partial\Psi}{\partial[u_k]} = \rho_0 W^2[u_k], \qquad k = 1, 2, 3, \tag{4.4}$$

$$\rho_0 T_0[S] = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial[u_k]}[u_k] - \Psi \tag{4.5}$$

Функция $\Psi$ не содержит энтропию. Поэтому уравнения (4.4), выражающие сохранение массы и импульса на разрыве, при заданных деформациях $u_k = U_k$ начального состояния позволяют для каждого значения скорости разрыва $W$ найти состояние $u_i$ за скачком. Если исключить из этих уравнений скорость разрыва $W$, получим соотношения между компонентами деформации $u_k = u_k^+$ за скачком при фиксированных значениях $U_k = u_k^-$ перед

ним. Найденное таким образом однопараметрическое множество в пространстве состояний $u_k$ за скачком называется *ударной адиабатой* точки $U_k$ (см.§ 1.5). В газовой динамике ее называют также *адиабатой Гюгонио.*

Уравнение (4.5), представляющее закон сохранения энергии на разрыве, служит для вычисления изменения энтропии по найденным ранее $[u_k]$. Возможность отделения уравнений для нахождения $[u_k]$ от соотношения, выражающего $[S]$, связана с отсутствием в разложении $\Phi$ перекрестных членов, зависящих от $u_j$ и $S$. Последнее, как уже говорилось, может быть принято с достаточной точностью для не очень сильных разрывов, где $[S]$ мало.

Если изменения деформаций в скачке $[u_k]$ настолько малы, что их квадратами можно пренебречь, то уравнения (4.4) дают линейную систему для $[u_k]$, полностью совпадающую с линеаризованной системой (3.10) волн Римана, в которой $\Phi_{ik}^- = \Phi_{ik}(U_j)$ определены формулами (4.3) и $\alpha = \rho_0 W^2$.

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}^-[u_1] + \Phi_{12}^-[u_2] + \Phi_{13}^-[u_3] &= \alpha[u_1],\\
\Phi_{12}^-[u_1] + \Phi_{22}^-[u_2] + \Phi_{23}^-[u_3] &= \alpha[u_2],\\
\Phi_{13}^-[u_1] + \Phi_{23}^-[u_2] + \Phi_{33}^-[u_3] &= \alpha[u_3].
\end{aligned}$$

Очевидно, в линейном приближении скачки $[u_k]$, определяющие касательные к ударной адиабате, пропорциональны собственным векторам симметричной матрицы $\Phi_{ij}$. *Скорости малых скачков совпадают с соответствующими характеристическими скоростями.* При $U_k = 0$ имеют место равенства

$$\alpha_{1,2} = f \pm g, \qquad \alpha_3 = d.$$

При $U_k \neq 0$ в волне, соответствующей $\alpha_3$, величины $[u_1]/[u_3]$ и $[u_2]/[u_3]$ малы, порядка $\varepsilon$; в волнах, соответствующих $\alpha_{1,2}$ малы величины $[u_3]/\sqrt{[u_1]^2 + [u_2]^2}$. При переходе к нелинейным скачкам слабой интенсивности это свойство сохраняется. Поэтому, как и волны Римана, будем различать *квазипродольные и квазипоперечные разрывы* и изучать их раздельно.

Рассматриваемые скачки предполагают возможность изменения энтропии. Поэтому мы будем называть их также *ударными волнами.*

## 4.2. Квазипродольные ударные волны

Квазипродольными названы волны, для которых имеет место неравенство $[u_\beta] \ll [u_3]$, $\beta = 1, 2$ (Буренин, Нгуен Ткан, Чернышов [1973], Буренин, Чернышов [1978]). Принимая это во внимание, можно сократить число членов в разложении (4.2) функции $\Psi$. Далее будет видно, что для квазипродольных волн проявление нелинейных свойств обнаруживается уже в членах третьей степени по начальным и приобретенным в скачке деформациям в разложении функции $\Psi$. Они (эти члены) дают основной вклад в нелинейные свойства решения, а слагаемые четвертой степени в таком случае можно опустить и функцию $\Psi$ задать разложением

$$\Psi = \frac{1}{2}(\Phi_{11}^-[u_1]^2 + \Phi_{22}^-[u_2]^2 + \Phi_{33}^-[u_3]^2)$$
$$+ b[u_3](2U_1[u_1] + 2U_2[u_2] + [u_1]^2 + [u_2]^2) + a[u_3]^3,$$

где $\Phi_{ij}^-$ определены выражениями (4.3). Система (4.4) условий на скачке примет вид

$$(f - g + 2bU_3)[u_1] + 2bU_1[u_3] + 2b[u_1][u_3] = \alpha[u_1]$$
$$(f + g + 2bU_3)[u_2] + 2bU_2[u_3] + 2b[u_2][u_3] = \alpha[u_2]$$
$$2b(U_1[u_1] + U_2[u_2]) + (d + 6aU_3)[u_3] + 3a[u_3]^2 = \alpha[u_3].$$

Используя для оценки в первых двух уравнениях в качестве нулевого приближения значение $\alpha_3^0 = d$ (полученное в предыдущем параграфе для линейной продольной волны при $U_i = 0$), видим, что $[u_\beta] \sim \varepsilon[u_3]$. Это позволяет в последнем соотношении на скачке опустить первое слагаемое и получить приближенное выражение для *скорости квазипродольной ударной волны*

$$\rho_0 W^2 = \alpha_3 = d + 6aU_3 + 3a[u_3]. \tag{4.6}$$

Из первых двух уравнений находим

$$\begin{aligned} [u_1] &= \frac{2b}{d-f}U_1[u_3]\left(1 - \frac{6a-2b}{d-f}U_3 - \frac{g}{d-f} - \frac{3a-2b}{d-f}[u_3]\right), \\ [u_2] &= \frac{2b}{d-f}U_2[u_3]\left(1 - \frac{6a-2b}{d-f}U_3 + \frac{g}{d-f} - \frac{3a-2b}{d-f}[u_3]\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

В пространстве $u_i$ эти равенства представляют *одну из ветвей ударной адиабаты, соответствующую квазипродольной волне.* Очевидно, что в отсутствии $g$ это парабола, проходящая через начальную точку $U_i$ и расположенная в плоскости, проведенной через ось $u_3$ и точку $U_i$.

Касательная к ней в начальной точке совпадает с касательной к интегральной кривой квазипродольной волны Римана (3.12) что согласуется с теоремой Лакса (§ 1.7).

Из полученных для $[u_\alpha]$ выражений видно, что в данной волне изменение продольной компоненты $[u_3]$ вызывает также изменение поперечных компонент, но из-за малости начальной деформации $U_\beta$ ($\beta$=1,2) они на порядок меньше, чем у продольной. Если же $U_\beta = 0$, то волна остается *чисто продольной.* Заметим, что, если свойства материала таковы, что $b = 0$, то рассматриваемые волны будут чисто продольными всегда.

Из равенства (4.5) находим изменение энтропии на разрыве

$$2\rho_0 T_0[S] = a[u_3]^3 + O(\varepsilon^4).$$

Третья степень у $[u_3]$ находится в соответствии с общим случаем теории малых скачков (§ 1.7) и оправдывает пренебрежение перекрестными членами разложения $\Phi$ по $[S]$ и $[u_i]$, сделанное выше, при учете членов по $[u_i]$ не выше третьей степени.

Термодинамическое *условие неубывания энтропии* требует выполнения неравенства

$$a[u_3] \geq 0. \tag{4.8}$$

В средах, где $a > 0$, возможны только такие скачки, в которых $[u_3] > 0$, т.е. *скачки разрежения*, в средах с $a < 0$ – только *скачки сжатия* ($a = 0$ соответствует линейной среде). Сравнение с результатами Главы 3 показывает,что (§ 3.5) ударные волны могут присутствовать тогда, когда соответствующие волны Римана опрокидываются.

Как указано в Главе 1, чтобы поверхность разрыва могла существовать на ней должны быть выполнены еще условия эволюционности скачка (§ 1.6). Для квазипродольной ударной волны они имеют вид системы неравенств

$$c_3^- \leq W \leq c_3^+.$$

Характеристические скорости $c_3^+$ и $c_3^-$ вычисляют по формуле (3.13)

$$\rho_0(c_3^-)^2 = d + 6aU_3, \qquad \rho_0(c_3^+)^2 = d + 6au_3.$$

Сравнивая эти величины для $c_3^-$ и $c_3^+$ с выражением (4.6) для скорости скачка $W$, видим, что условия эволюционности выполнены, если $a[u_3] \geq 0$, т.е. *для квазипродольной ударной волны требования эволюционности и неубывания энтропии совпадают.*

Легко проверить, что с принятой точностью для рассматриваемых разрывов выполнено соотношение $W = \frac{1}{2}(c_3^- + c_3^+)$, как и положено по теореме Лакса в общей теории малых скачков (§ 1.7).

Выражения для скорости ударной волны и для скачка энтропии, проявление нелинейности в членах третьего порядка, совпадение условий эволюционности и неубывания энтропии — все это делает квазипродольные нелинейные волны, как непрерывные, так и скачки, очень похожими на достаточно хорошо изученные аналогичные волны в газовой динамике. Поэтому в дальнейшем квазипродольным волнам достаточно большого внимания уделяться не будет.

## 4.3. Квазипоперечные ударные волны. Ударная адиабата

Волны, в которых изменение продольной компоненты $u_3$ много меньше, чем поперечных $u_1$ и $u_2$. названы *квазипоперечными* (см.§ 4.1). Известно (Бленд [1972]), что в изотропном материале во втором приближении по интенсивности скачка такие волны не обнаруживают нелинейных проявлений, как это имеет место для квазипродольных волн. Далее будет видно, что этот факт сохраняется в присутствии малой анизотропии (Куликовский и Свешникова [1980]). Поэтому в разложении (4.2) функции $\Psi$ следует сохранить члены до четвертого порядка по $\varepsilon$ включительно, но пользуясь тем, что на квазипоперечных раз-

рывах $[u_3] \ll \sqrt{[u_1]^2 + [u_2]^2}$, некоторые слагаемые можно опустить (а именно, содержащие $a[u_3]^3$ и $O(\varepsilon)[u_3]^2$). В результате для $\Psi$ имеем выражение

$$\begin{aligned}\Psi = &\frac{1}{2}\left(\Phi_{11}^-[u_1]^2 + \Phi_{22}^-[u_2]^2 + d[u_3]^2\right) + 2hU_1U_2[u_1][u_2] \\ &+ \left(hU_1[u_1] + hU_2[u_2] + b[u_3]\right)\left([u_1]^2 + [u_2]^2\right) \\ &+ 2b\left(U_1[u_1] + U_2[u_2]\right)[u_3] + \frac{1}{4}h\left([u_1]^2 + [u_2]^2\right)^2,\end{aligned} \tag{4.9}$$

где постоянные коэффициенты $\Phi_{11}^-$ и $\Phi_{22}^-$ вычисляются по формулам (4.3).

Условия на скачке (4.4) принимают вид

$$\begin{aligned}&h\left([u_1]+U_1\right)\left([u_1]^2+[u_2]^2\right) + 2h[u_1]\left(U_1[u_1]+U_2[u_2]\right) \\ &\quad +\Phi_{11}^-[u_1] + 2hU_1U_2[u_2] + 2bU_1[u_3] + 2b[u_1][u_3] = \alpha[u_1], \\ &h\left([u_2]+U_2\right)\left([u_1]^2+[u_2]^2\right) + 2h[u_2]\left(U_1[u_1]+U_2[u_2]\right) \\ &\quad +\Phi_{22}^-[u_2] + 2hU_1U_2[u_1] + 2bU_2[u_3] + 2b[u_2][u_3] = \alpha[u_2], \\ &\quad d[u_3] + b\left([u_1]^2 + [u_2]^2 + 2U_1[u_1] + 2U_2[u_2]\right) = \alpha[u_3],\end{aligned} \tag{4.10}$$

где $\alpha = \rho_0 W^2$. При исключении из этих уравнений $\alpha$ получится соотношение между состоянием $U_i$ $(i = 1, 2, 3)$ перед скачком и возможными состояниями $u_i$ за ним. При фиксированных $U_i$ это одномерное множество – кривая в пространстве $u_i$, которая называется *ударной адиабатой*. Дальнейшее исследование ее удается свести к изучению ее проекции на плоскость сдвиговых деформаций $u_1u_2$.

Действительно, из последнего уравнения (4.10) можно выразить $[u_3]$ через $[u_1]$ и $[u_2]$. При этом с принятой точностью для $\alpha$ достаточно взять лишь главную (конечную) часть его значения, найденную из линейного приближения, т.е. $\alpha_{1,2}^0 = f + O(\varepsilon)$.

Тогда получим

$$[u_3] = -\frac{b}{d-f}\left([u_1]^2 + [u_2]^2 + 2U_1[u_1] + 2U_2[u_2]\right). \qquad (4.11)$$

В знаменателе стоит величина $d - f$, пропорциональная разности квадратов скоростей продольных и поперечных линейных волн, т.е. величина конечная (в изотропном материале $d - f \simeq \lambda + \mu + O(\varepsilon)$). Поэтому изменение продольной компоненты в рассматриваемом скачке имеет второй порядок малости по $\varepsilon$.

Учитывая, что $[u_i] = u_i - U_i$, находим выражение для продольной компоненты

$$u_3 = U_3 - \frac{b}{d-f}(u_1^2 + u_2^2 - R^2), \qquad R^2 = U_1^2 + U_2^2. \qquad (4.12)$$

Видно, что оно совпадает с аналогичным выражением (3.15) для $u_3 - U_3$ в квазипоперечной волне Римана. Заменим теперь $[u_3]$ в первых двух уравнениях (4.10) полученным для него выражением. Как и в Главе 3, будем пользоваться введенным ранее формулой (3.19) коэффициентом $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{2b}{d-f} - h.$$

Уравнения приобретут вид

$$\begin{aligned} (f-g)[u_1] - \varkappa\left(R^2[u_1] + ([u_1]+U_1)\,(u_1^2 + u_2^2 - R^2)\right) &= \alpha[u_1] \\ (f+g)[u_2] - \varkappa\left(R^2[u_2] + ([u_2]+U_2)\,(u_1^2 + u_2^2 - R^2)\right) &= \alpha[u_2]. \end{aligned} \qquad (4.13)$$

В этих уравнениях буква $f$ употреблена для обозначения постоянного коэффициента $f_1$, определенного (как и в § 3.4 для волн Римана) формулой

$$f_1 = f + 2b\left(U_3 + \frac{b}{d-f}R^2\right),$$

но индекс у $f_1$ опущен.

Прежде чем продолжить исследование уравнений (4.13), сделаем некоторое полезное дополнение, чтобы подчеркнуть единство подхода в изучении ударных волн и волн Римана. При рассмотрении квазипоперечных разрывов, так же как и аналогичных волн Римана, можно ввести некоторую вспомогательную среду, упругий потенциал которой содержит только две компоненты деформаций $u_1$ и $u_2$ и задан той же функцией $H(u_1, u_2)$, что и в § 3.4 (см. формулу (3.18)), а зависимость от энтропии $S$ принята в виде дополнительного аддитивного члена, как это имеет место в исходном упругом потенциале $\Phi$

$$H = \frac{1}{2}f(u_1^2+u_2^2)+\frac{1}{2}g(u_2^2-u_1^2)-\frac{1}{4}\varkappa(u_1^2+u_2^2)^2+\rho_0 T_0(S-S_0). \quad (4.14)$$

Изменение продольной компоненты $u_3$ и продольные волны в такой вспомогательной среде отсутствуют и она может рассматриваться как некоторая *эквивалентная несжимаемая среда.* Соотношения на скачке (2.20), записанные через функцию $H$

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial H}{\partial u_\beta}\right] = \rho_0 W^2[u_\beta], \qquad [v_\beta] + W[u_\beta] = 0,\\ [H] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H}{\partial u_\beta}\right][u_\beta] + \left(\frac{\partial H}{\partial u_\beta}\right)^+[u_\beta], \quad \beta = 1,2\end{gathered} \quad (4.15)$$

приводят к тем же уравнениям (4.13), что и выше. Тот же результат получим, если сначала построим функцию $\Psi_H([u_1],[u_2])$, соответствующую потенциалу $H$,

$$\begin{aligned}\Psi_H &= \frac{1}{2}(f-g)[u_1]^2 + \frac{1}{2}(f+g)[u_2]^2\\ &- \varkappa\left(\frac{1}{2}R^2\left([u_1]^2+[u_2]^2\right) + (U_1[u_1]+U_2[u_2])^2\right)\\ &+ \left((U_1[u_1]+U_2[u_2])\left([u_1]^2+[u_2]^2\right) + \frac{1}{4}\left([u_1]^2+[u_2]^2\right)^2\right),\end{aligned}$$

и затем воспользуемся соотношениями на разрыве (4.4) и (4.5) при $k = 1, 2$.

В результате исключения величины $\alpha = \rho_0 W^2$ из уравнений (4.13) получаем соотношение между $u_\beta$ и $U_\beta$ $(\beta = 1, 2)$, т.е. *проекцию ударной адиабаты на плоскость* $u_1 u_2$. Ее уравнение имеет вид

$$(u_1^2 + u_2^2 - R^2)(U_1 u_2 - U_2 u_1) + 2G(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) = 0. \quad (4.16)$$

Здесь, как и в § 3.4, использовано обозначение $G = g/\varkappa$, и параметр анизотропии $G$ будет считаться всегда неотрицательным. Построение ударной адиабаты в пространстве $u_i$ состоит в нахождении кривой (4.16), после чего продольная компонента $u_3$ вычисляется в каждой точке этой линии по формуле (4.11). В дальнейшем обычно термином ударная адиабата мы будем называть ее проекцию на плоскость $u_1 u_2$.

Упругие свойства материала входят в уравнение (4.16) только через коэффициент $G$. При $G \neq 0$ можно перейти к новым переменным $\bar{u}_\beta = u_\beta/\sqrt{G}$, в результате чего коэффициент при последнем слагаемом станет единицей, и уравнение ударной адиабаты примет универсальный для всех сред вид

$$(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 - \bar{R}^2)(\bar{U}_1 \bar{u}_2 - \bar{U}_2 \bar{u}_1) + 2(\bar{u}_1 - \bar{U}_1)(\bar{u}_2 - \bar{U}_2) = 0.$$

Если на плоскости $u_1 u_2$ у двух ударных адиабат точки $(U_1, U_2)$, изображающие состояния перед скачком, расположены симметрично относительно осей координат $u_1$ или $u_2$, то и сами их ударные адиабаты представлены кривыми тоже симметричными относительно этих осей. Это обстоятельство позволяет изучать свойства ударной адиабаты только для начальных состояний, изображенных точками $(U_1, U_2)$ в первой четверти плоскости $u_1 u_2$, т.е. далее мы будем считать $U_1 \geq 0$, $U_2 \geq 0$.

Кривая (4.16) проходит через начальную точку $A(U_1, U_2)$ и две симметричные с ней относительно координатных осей $u_1$ и $u_2$ точки $N(-U_1, U_2)$ и $N'(U_1, -U_2)$. Ударные волны в состояния, представленные точками $N$ и $N'$, были указаны Бурениным и Чернышовым [1978]. Как будет видно из дальнейшего (§ 4.7), эти ударные волны неэволюционны. В начальной точке $A$ кривая имеет самопересечение и касается двух взаимно ортогональных

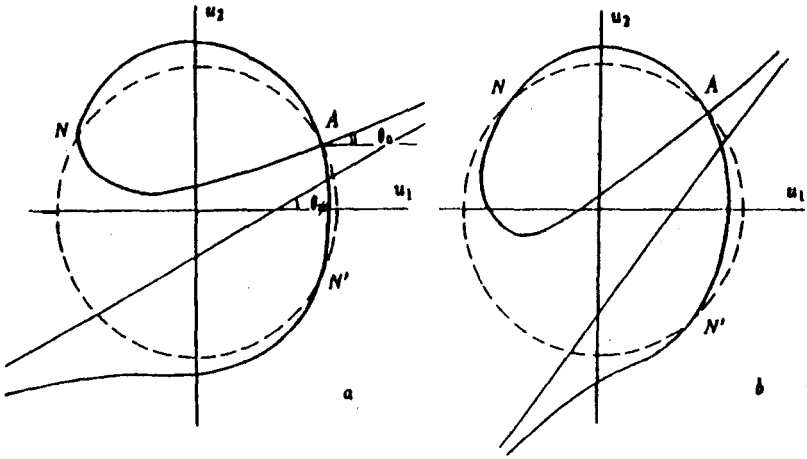



Рис. 4.1.

интегральных кривых волн Римана. Эти кривые составляют с осью $u_1$ углы $\theta_0$ и $(\theta_0 + \pi/2)$, где

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{U_2^2 - U_1^2 - G + \sqrt{\left(U_1^2 - U_2^2 + G\right)^2 + 4U_1^2U_2^2}}{2U_1U_2}. \qquad (4.17)$$

Кривая (4.16) на плоскости $u_1u_2$ представляет собой петлю с "хвостами", уходящими в бесконечность вдоль асимптоты

$$u_2 = U_2\left(\frac{u_1}{U_1} - \frac{2G}{R^2}\right),$$

направление которой, очевидно, параллельно радиусу-вектору начальной точки $A$. Угол наклона асимптоты к оси $u_1$ всегда больше $\theta_0$. Один из хвостов пересекает асимптоту. Возможные положения кривой (4.16) по отношению к осям координат изображены на рис. 4.1

Кривая (4.16) всегда имеет три точки пересечения с осью $u_2$. Это корни уравнения

$$u_2(u_2^2 - R^2) - 2G(u_2 - U_2) = 0.$$

При $G \neq 0$ они расположены на оси $u_2$ так, что

$$u_2^{(1)} < -R, \quad 0 < u_2^{(2)} < \min\{\sqrt{G}, U_2\}, \quad u_2^{(3)} > \max\{\sqrt{G}, R\}.$$

Точка с координатами $O, \sqrt{G}$ (одна из особых точек интегральных кривых волн Римана, § 3.4) всегда лежит внутри петли ударной адиабаты, вторая особая точка $O, -\sqrt{G}$ лежит выше $u_2^{(1)}$, т.е. $-\sqrt{G} > u_2^{(1)}$.

Точки пересечения кривой (4.16) с осью $u_1$ определяются корнями кубического уравнения

$$u_1(u_1^2 - R^2) + 2G(u_1 - U_1) = 0.$$

Оно обязательно имеет один действительный положительный корень в диапазоне $U_1 < u_1^{(1)} < R$. Существование других действительных корней определяется знаком выражения $q = U_1^2 G^2 - (R^2 - 2G)^3/27$. На плоскости начальных деформаций $U_1 U_2$ уравнение

$$q \equiv U_1^2 G^2 - \left(\frac{R^2 - 2G}{3}\right)^3 = 0 \tag{4.18}$$

представлено замкнутой линией, симметричной относительно осей координат и проходящей через точки $O, \pm\sqrt{2G}$ и $\pm 2\sqrt{2G}, O$ (ее изображение будет дано позднее). Когда $q > 0$ (начальная точка $U_\beta$ внутри линии $q = 0$), ударная адиабата имеет с осью $u_1$ только одну, упомянутую выше, точку пересечения $u_1^{(1)} > 0$. Этот случай изображен на рис. 4.1 *a*. Когда $q < 0$ (точки $U_\beta$, соответствующие состоянию перед скачком, расположены вне кривой (4.18)), ударная адиабата имеет еще две, расположенные на петле, точки пересечения с осью $u_1$ на отрицательной части оси. Вид ударной адиабаты в этом случае дан на рис. 4.1 *b*. Если $q = 0$, петля касается оси $u_1$ в точке $u_* = -\sqrt{(R^2 - 2G)/3}$.

Ударная адиабата представляет собой одномерное множество, и для дальнейшего исследования часто бывает полезно записать ее уравнение (4.16) в разрешенном виде через переменную, монотонно меняющуюся вдоль линии. В качестве такой величины возьмем полярный угол $\theta$ в системе координат с центром в начальной точке $A(U_1, U_2)$. Переход к полярным координатам $r, \theta$ осуществляется по формулам

$$u_1 - U_1 = r\cos\theta, \quad u_2 - U_2 = r\sin\theta.$$

Угол $\theta$ отсчитываем от направления оси $u_1$. *Уравнение ударной адиабаты в полярных координатах* имеет вид

$$r = B\frac{\sin 2(\theta - \theta_0)}{U_2\cos\theta - U_1\sin\theta}, \tag{4.19}$$

$$B = \frac{2U_1U_2}{\sin 2\theta_0} = \sqrt{(U_1^2 - U_2^2 + G)^2 + 4U_1^2U_2^2}. \tag{4.20}$$

Здесь $\theta_0$ – наименьший угол между касательной к одной из ветвей ударной адиабаты в точке $A$ и осью $u_1$. Он определен ранее формулой (4.17). Очевидно, каждый луч, проведенный на плоскости $u_1u_2$ из точки $A$, пересекает ударную адиабату лишь один раз.

Для некоторых областей изменения $\theta$ правая часть равенства (4.19) становится отрицательной. Однако, это равенство обладает таким свойством, что $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$. Это позволяет рассматривать изменение $\theta$ только на отрезке $0 \le \theta \le \pi$, приписывая направлениям, соответствующим $r(\theta + \pi)$ отрицательные значения $r(\theta)$ и откладывая их на рисунках в отрицательных направлениях.

## 4.4. Условие неубывания энтропии

Реально осуществляющимся разрывам могут отвечать не все состояния на ударной адиабате, а только те, для которых выполнено *условие неубывания энтропии.* Закон сохранения энергии на разрыве в виде уравнения (4.5) позволяет вычислить изменение энтропии при переходе скачком из начального состояния $U_1, U_2$ в любое состояние $u_1, u_2$. Подставив в это равенство функцию $\Psi$ (4.9) для квазипоперечных волн и учитывая выражение (4.11) для $[u_3]$ , получим

$$4\rho_0T_0(S - S^-) = -\varkappa\left((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2\right)(u_1^2 + u_2^2 - R^2),$$
$$R^2 = U_1^2 + U_2^2.$$

Это же выражение получится, если в равенстве (4.5) сразу использовать введенную выше функцию $\Psi_H$.

Второму закону термодинамики не противоречат только такие ударные переходы, в которых $S - S^- \geq 0$, т.е.

$$-\varkappa(u_1^2 + u_2^2 - R^2) \geq 0. \tag{4.21}$$

Знак равенства в этом выражении дает на фазовой плоскости $u_1 u_2$ окружность

$$u_1^2 + u_2^2 = R^2, \tag{4.22}$$

которую далее будем называть *энтропийной окружностью или $S$-окружностью.* В средах с $\varkappa > 0$ росту энтропии в скачке отвечают точки ударной адиабаты, оказавшиеся внутри этой окружности, а в средах с $\varkappa < 0$ – вне ее.

Энтропийная окружность (4.22), на которой $S = S^-$, пересекает ударную адиабату в трех точках – начальной $A(U_1, U_2)$ и двух симметричных с ней относительно осей координат точках $N(-U_1, U_2)$ и $N'(U_1, -U_2)$. На рис. 4.1*а*, *в* она изображена штриховой линией. Ее уравнение не зависит от упругих свойств материала, а только от начального состояния. Знак коэффициента $\varkappa$ для конкретной среды указывает, какой части ударной адиабаты (внутри или вне $S$– окружности) принадлежат термодинамически пригодные скачки.

Сравнение указанных областей существования скачков с эволюцией волн Римана того же типа (3.6) показывает, что интегральные кривые, идущие из начальной точки в область, где $[S] \geq 0$, соответствует волнам Римана, обладающим тенденцией к опрокидыванию и образованию разрыва; интегральные линии расширяющихся волн Римана проходят в область, где $[S] < 0$.

Таким образом, по любому состоянию с $R^2 \neq 0$ могут распространяться как расширяющиеся волны Римана, так и ударные волны. Если $U_\beta = 0$, как это принималось в (Бленд [1972]), то в средах с $\varkappa < 0$ могли существовать одномерные нестационарные решения только в виде ударных волн, а в средах с $\varkappa > 0$ – только непрерывные решения.

Тот факт, что ударная адиабата (4.16) при монотонном движении вдоль нее четырежды пересекает окружность, на которой

энтропия имеет постоянное значение $S = S^-$, указывает, что на ударной адиабате имеется не менее трех точек экстремума энтропии. Далее будет показано, что их ровно три.

Полезно отметить, что условие неубывания энтропии наряду с неравенством (4.21) может быть выражено так же неравенством $\varkappa|u_2| \leq |U_2|$, что иногда при исследовании оказывается более удобным для проверки. Эквивалентность неравенств определяется формой ударной адиабаты.

## 4.5. Условия эволюционности скачка. Точки Жуге

Кроме неубывания энтропии, для существования ударной волны должны быть удовлетворены еще *условия ее эволюционности* (необходимые условия устойчивости фронта по отношению к малым одномерным возмущениям, (см.§ 1.6). Согласно им число уходящих от разрыва в обе стороны характеристик должно быть на единицу меньше числа граничных условий на разрыве. Будем здесь и ниже предполагать (обоснование этого предположения будет дано в Главе 8), что на разрывах не выставляется никаких других граничных условий, кроме тех, которые даются законами сохранения. Эволюционность при таком предположении была названа в Главе 1 априорной. В дальнейшем слово "априорная" будет опускаться во всех случаях, когда это не может вызвать недоразумений.

Для упругих волн, распространяющихся в положительную сторону оси $x$, условия эволюционности состоят из трех систем неравенств (по числу положительных характеристических скоростей)

$$\begin{aligned} &(a) \quad c_1^- \leq W \leq c_2^-, \quad 0 \leq W \leq c_1^+ \\ &(b) \quad c_2^- \leq W \leq c_3^-, \quad c_1^+ \leq W \leq c_2^+ \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$(c) \quad c_3^- \leq W \leq c_3^+, \quad c_2^+ \leq W \leq \infty. \tag{4.24}$$

Здесь $c_i^+$, $c_i^-$ – характеристические скорости по состоянию непосредственно за и перед скачком соответственно, пронумерованные так, что $0 \le c_1 \le c_2 < c_3$. Значение $c_S = 0$ – представляет характеристическую скорость энтропийной волны (§ 3.1).

Приведенные выше системы неравенств соответствуют *двум квазипоперечным волнам* (4.23) и *одной квазипродольной* (4.24). Условия (4.24) уже обсуждались в § 4.2. Системы неравенств (4.23) ($a$) и ($b$) делят квазипоперечные волны на *медленные* ($a$) и *быстрые* ($b$).

Выражения для характеристических скоростей $c_{1,2}$ были получены в § 3.4

$$\begin{aligned} \rho_0(c_{1,2}^+)^2 &= f - 2\varkappa\left(u_1^2 + u_2^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(u_1^2 - u_2^2 + G)^2 + 4u_1^2u_2^2}\right) \\ \rho_0(c_{1,2}^-)^2 &= f - 2\varkappa\left(U_1^2 + U_2^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(U_1^2 - U_2^2 + G)^2 + 4U_1^2U_2^2}\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Скорость скачка $W$ находится из условий на разрыве (4.13), что будет сделано ниже.

Условия (4.23) выделяют на ударной адиабате отрезки, границами которых служат точки, в которых скорость скачка совпадает с одной из характеристических скоростей по состояниям впереди или сзади разрыва. Ударные волны, соответствующие таким точкам, по аналогии с теорией детонации, будем называть *ударными волнами Жуге*, а сами точки на ударной адиабате – *точками Жуге*. В теории детонации существуют детонационные волны Жуге, у которых скорость фронта совпадает с характеристической скоростью за ним ($W = c^+$). В теории упругости могут присутствовать и такие ударные волны Жуге, у которых $W = c^-$. Иногда, когда это важно для понимания, будем называть соответствующие им точки Жуге *передними*.

Для определения положения точек Жуге на ударной адиабате полезно знать свойства изучаемых функций в окрестности этих точек (см.§ 1.8). Напомним некоторые из них. Для разрывных решений гиперболических систем, выражающих законы сохранения (к их числу относится система уравнений модели упругого тела), точки Жуге по состоянию за скачком (где $W = c^+$) явля-

ются одновременно точками экстремума скорости скачка $W$ и производства энтропии на разрыве. Для модели упругой среды можно доказать большее, а именно – *точки максимума $W$ на ударной адиабате совпадают с точками максимума энтропии $S$* (то же самое относится к минимуму этих функций). Это немедленно следует из равенства (2.21).

Другое важное для нас свойство ударной адиабаты в окрестности точек Жуге $W = c^+$ состоит в том, что в этих точках ударная адиабата *касается интегральной кривой волны Римана*, медленной или быстрой в зависимости от значения $c^+$. И обратно, если ударная адиабата касается интегральной кривой соответствующей волны Римана, то точка касания есть точка Жуге по состоянию за разрывом. Доказательство этих утверждений в общем виде изложено в § 1.8.

## 4.6. Скорость квазипоперечных ударных волн

Скорость $W$ квазипоперечных ударных волн находится из условий на разрыве (4.13)

$$\rho_0 W^2 = f - \varkappa\Bigg(u_1^2 + u_2^2 - R^2 + U_1 u_1 + U_2 u_2 \tag{4.26}$$

$$+ \frac{G(u_1 - U_1)^2 - G(u_2 - U_2)^2 + 2(U_1(u_1 - U_1) + U_2(u_2 - U_2))^2}{(u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2}\Bigg).$$

Отсюда видно, что зависимость скорости ударной волны от ее интенсивности (т.е. нелинейные эффекты) обнаруживается в членах второго порядка по $\varepsilon$.

Перейдем к полярной системе координат $r, \theta$, введенной в § 4.3, с центром в начальной точке

$$u_1 - U_1 = r\cos\theta, \qquad u_2 - U_2 = r\sin\theta.$$

Вычисляя $W$ в точках ударной адиабаты, заданной уравнением (4.19), получим скорость скачка как функцию полярного угла $\theta$

или некоторой переменной $y(\theta)$, монотонно меняющейся вдоль ударной адиабаты

$$\begin{aligned}\rho_0 W^2 &= f - 2\varkappa(R^2 - B/2)\\ &+ 2\varkappa B\frac{3y(my+n)(ny-m) - (ny-m)^2 - 2B^2y^2}{(1+y^2)(ny-m)^2},\end{aligned} \tag{4.27}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}R^2 = U_1^2 + U_2^2, \qquad B = \sqrt{(U_1^2 - U_2^2 + G)^2 + 4U_1^2U_2^2},\\ y = \operatorname{tg}(\theta - \theta_0), \qquad \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{U_2^2 - U_1^2 - G + B}{2U_1U_2},\\ m = U_2\cos\theta_0 - U_1\sin\theta_0, \qquad n = U_1\cos\theta_0 + U_2\sin\theta_0.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Зависимость $W(\theta)$, очевидно, имеет асимптоту при $y = m/n$, т.е. при $\theta = \theta_* = \operatorname{arctg}(U_2/U_1)$, где $\theta_*$ – угол, определяющий направление асимптоты хвостов ударной адиабаты на плоскости $u_1u_2$. Графики функции $W(\theta)$ для сред с $\varkappa > 0$ и $\varkappa < 0$ изображены на рис. 4.2 *a* и *b* соответственно.

Начальной точке $A$, где ударная адиабата имеет самопересечение, на кривой $W(\theta)$ соответствуют две точки. В каждой из них скорость скачка $W$ совпадает с одной из характеристических скоростей $c_1^-$ или $c_2^-$ перед разрывом. Участок кривой между начальными точками соответствует петле ударной адиабаты, на нем $-\infty < y \le 0$. Остальная область изменения $\theta$ соответствует хвостам. Вертикальные асимптоты проведены через точки $\theta_*$ и $\theta_* - \pi$.

Очевидно, линия, изображающая функцию $W(\theta)$, представленную равенством (4.27), имеет не более четырех точек пересечения с любой прямой $W = \text{const}$ и, следовательно, функция $W(\theta)$ имеет не более трех точек экстремума. Как было сказано в § 1.8 и § 4.5, эти точки совпадают с точками экстремума энтропии, а их на ударной адиабате, как найдено в § 4.4, не менее трех. Значит на ударной адиабате всегда имеется ровно

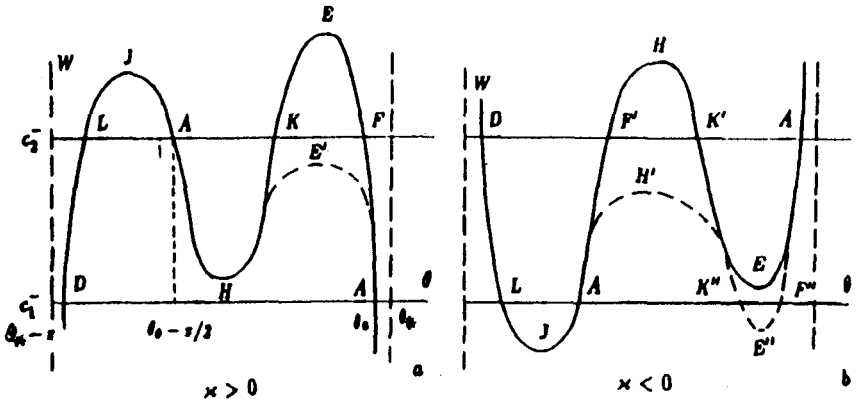



Рис. 4.2.

три точки, где функции $W(\theta)$ и $S(\theta)$ одновременно достигают максимума или минимума. В этих точках скорость разрыва $W$ совпадает с одной из характеристических скоростей за ним $c_\beta^+$. На рис. 4.2 они обозначены буквами $E, J, H$.

Точки Жуге по состоянию перед скачком это точки пересечения графика $W(\theta)$ с прямыми $W = c_{1,2}^-$. Среди них две точки $A$, представляющих начальное состояние. При отыскании остальных надо раздельно исследовать среды с $\varkappa > 0$ и $\varkappa < 0$, у которых значения $c_1^-$ и $c_2^-$ различаются выбором знака в формуле (4.25). Однако, можно провести все исследование для случая $\varkappa > 0$, а для другой среды поменять $c_1^-$ и $c_2^-$ ролями. Так мы и сделаем. Принимаем $\varkappa > 0$ в качестве основного варианта, а выводы для $\varkappa < 0$ будем давать в скобках.

Решениями уравнения $W - c_2^- = 0$, кроме начальной точки $\theta = \theta_0 - \pi/2$, являются еще корни кубического уравнения

$$F(y) = 3mny^3 + (2n^2 - 3m^2 - 2B)y^2 - mny - m^2 = 0 \qquad (4.29)$$

(в обозначениях, принятых равенствами (4.28)). Оно обязательно имеет один действительный корень в области положительных $y$ – точку $L$ на хвосте ударной адиабаты (она же будет точкой $W = c_1^-$ для среды с $\varkappa < 0$), рис. 4.2 *a* и *b*.

Для существования еще двух действительных корней у функции $F(y)$ необходимо, чтобы был отрицательным дискриминант $\Delta$ кубического уравнения (4.29)

$$\begin{aligned}\Delta \equiv\ & \bar{B}(\bar{R},\omega)\bar{R}^2(\bar{R}^4-6\bar{R}^2\omega+11)-\bar{R}^8+5\bar{R}^6\omega \\ & +6\bar{R}^4\omega^2-13\bar{R}^4+3\bar{R}^2\omega+16,\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\bar{R}^2=R^2/G,\quad \omega=\frac{U_1^2-U_2^2}{R^2},\quad \bar{B}(\bar{R},\omega)=B/G=\sqrt{\bar{R}^4+2\bar{R}^2\omega+1}.$$

При $\Delta<0$ уравнение (4.29) имеет еще два действительных корня – точки $F$ и $K$ пересечения графика $W(\theta)$ с прямой $W=c_2^-$, а в точке $E$ между ними $W$ достигает максимума. Все они лежат на петле ударной адиабаты. Эта часть графика изображена на рис. 4.2 *a* сплошной линией. (При $\varkappa<0$ график $W(\theta)$ имеет такие же точки $F''$ и $K''$ пересечения с прямой $W=c_1^-$ и минимум в точке $E''$. Это изображено на рис. 4.2 *b* штриховой линией.)

Когда $\Delta>0$, точка $E$ максимума функции $W$ не достигает прямой $W=c_2^-$. Этот случай изображен на рис. 4.2*a* штриховой линией. Обращение $\Delta$ в нуль означает слияние точек $F, E, K$.

Уравнение $\Delta=0$ определяет на плоскости начальных деформаций $\bar{U}_1=U_1/\sqrt{G}$, $\bar{U}_2=U_2/\sqrt{G}$ замкнутую линию, симметричную относительно осей координат и проходящую через точки $(0,\pm1)$ и $(\pm2\sqrt{2},0)$. Она имеет вертикальную касательную при пересечении оси $U_1$ и угловые точки на оси $U_2$. Горизонтальные касательные проходят при $U_2=\pm\sqrt{2}$. На рис. 4.3 эта кривая проведена по точкам, найденным численно.

На том же рис. 4.3 штриховой линией изображена кривая $q=0$, введенная ранее формулой (4.18) и служащая для ударной адиабаты указателем пересечения ее петли с осью $u_1$ (если $q<0$). Линия $q=0$ содержит область $\Delta>0$ целиком внутри себя, а это значит, что отсутствие точек Жуге $F$ и $K$ возможно только тогда, когда петля ударной адиабаты не пересекает ось $u_1$. Это условие является необходимым, но не достаточным, точки $F$ и $K$ могут существовать и на петле, целиком лежащей в верхней полуплоскости.

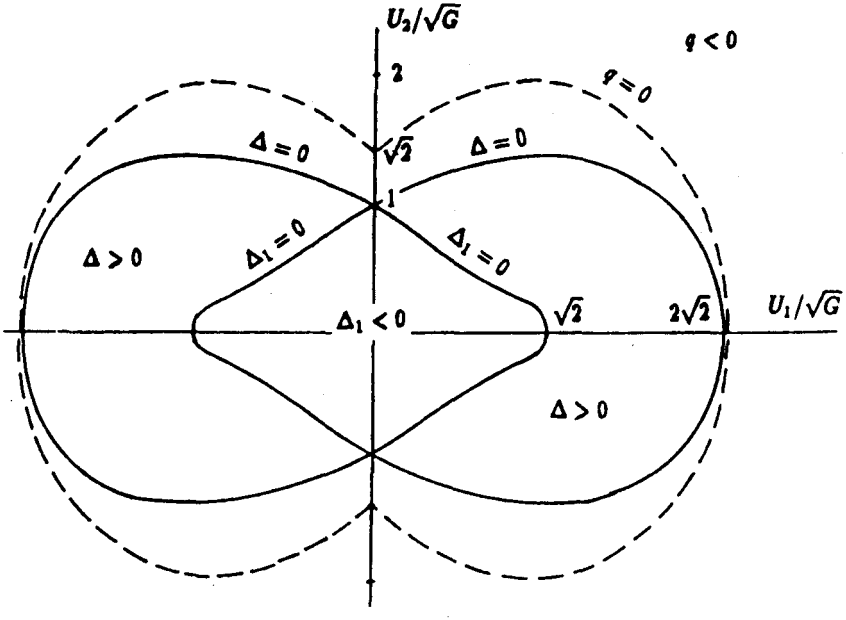



Рис. 4.3.

Одно из пересечений графика $W(\theta)$ с линией $W = c_1^-$ происходит в начальной точке $\theta = \theta_0$ (т.е. $y = 0$), другие определяются корнями кубического уравнения

$$F_1(y) = n^2y^3 + mny + (3n^2 - 2m^2 - 2b)y - 3mn = 0. \qquad (4.31)$$

О количестве действительных корней этого уравнения судим по знаку его дискриминанта

$$\begin{aligned}\Delta_1 = {} & \bar{B}\bar{R}^2(\bar{R}^4 - 6\bar{R}^2\omega + 11) + \bar{R}^8 - 5\bar{R}^6\omega \\ & - 6\bar{R}^4\omega^2 + 13\bar{R}^4 - 3\bar{R}^2\omega - 16.\end{aligned} \qquad (4.32)$$

Линия $\Delta_1 = 0$ тоже изображена на рис. 4.3. Она замкнутая, симметричная относительно осей координат, проходит через точки $(0, \pm 1)$ и$(\pm\sqrt{2}, 0)$. Сравнивая выражения (4.30) и (4.32),

можно увидеть, что кривые $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = 0$ являются двумя ветвями одной и той же аналитической кривой с самопересечением в точках $(0, \pm 1)$. Когда $\Delta_1 > 0$ (снаружи от линии $\Delta_1 = 0$), уравнение (4.31) имеет лишь один действительный корень – точку $D$ на хвосте ударной адиабаты. При $\Delta < 0$ появятся еще два корня по разные стороны от точки $H$ (экстремума $W$). Для сред с $\varkappa > 0$ этот случай на рис. 4.2 *a* не изображен, так как далее будет видно, что он интереса не представляет.

Для среды с $\varkappa < 0$ зависимость $W(\theta)$ при $\Delta_1 < 0$ представлена сплошной линией на рис. 4.2 *b*. На петле ударной адиабаты точки Жуге $W = c_2^-$ отмечены буквами $F'$ и $K'$, в точке $H$ между ними $W$ имеет максимум. Если же $\Delta_1 > 0$, то график $W(\theta)$ не достигает линии $c_2^-$ и точки $F'$ и $K'$ отсутствуют. Этот вариант для соответствующего участка петли ударной адиабаты изображен штриховой линией. При $\Delta_1 = 0$ точки $F', H, K'$ сливаются в одну.

Так как вся область $\Delta_1 < 0$ на рис. 4.3 целиком лежит внутри линии $q = 0$, то точки Жуге $F'$ и $K'$ могут существовать только тогда, когда петля ударной адиабаты целиком лежит в верхней полуплоскости.

## 4.7. Типы эволюционных ударных волн и их количество

Чтобы сравнивать между собой величины $W$ и $c_i^\pm$ в точках ударной адиабаты, воспользуемся *диаграммой эволюционности*, т.е. схематическим изображением ударной адиабаты на плоскости, где по двум взаимно ортогональным осям отложены величины скорости скачка $W$ и отмечены точки $W = c_i^-$ на горизонтальной оси и $W = c_i^+$ на вертикальной. При этом на горизонтальной оси $W$ откладывается в реальном масштабе, а по вертикальной лишь соблюдается выполнение неравенств между величинами $c_1^+ \le c_2^+ < c_3^+$ и $W$. Использование такой плоскости было описано в § 1.6.

Через точки $W = c_i^-$ проведем вертикальные прямые, на которых $W = c_i^- = \text{const}$. Горизонтальные линии проведем через

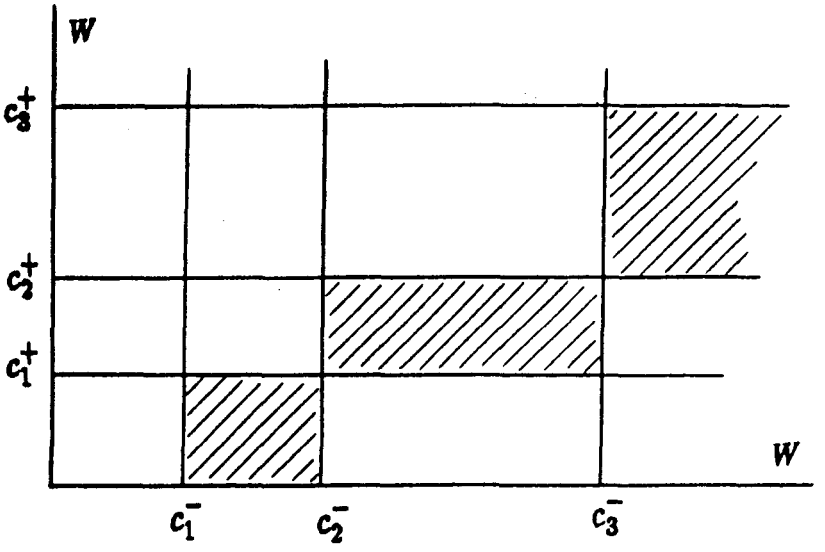



Рис. 4.4.

точки $W = c_i^+$. Тогда вся плоскость будет разбита на прямоугольники, в каждом из которых $W$ подчиняется определенным системам неравенств. Легко видеть, что условиям эволюционности (4.23) и (4.24) отвечают значения $W$ в заштрихованных на рис. 4.4 эволюционных прямоугольниках, расположенных *на одну клетку правее биссектрисы координатного угла.*

Правая верхняя заштрихованная полоса, где $c_2^+ \leq W < c_3^+$, $W > c_3^-$, соответствует условиям эволюционности (4.24) для *квазипродольных волн*, которые уже были исследованы. К тому же из-за большой разницы в скоростях они не могут эффективно взаимодействовать с остальными (квазипоперечными) волнами. Поэтому область эволюционности квазипродольных волн в дальнейшем указывать и обсуждать не будем.

Две другие заштрихованные на рис. 4.4 области отвечают неравенствам (4.23), т.е. эволюционным *квазипоперечным волнам.* Те из них, чьи скорости попали в нижний левый прямоугольник, были ранее (в § 4.5) названы *медленными* ударными волнами, а

те, у которых $W$ лежит в следующем эволюционном прямоугольнике, – *быстрыми.*

Выражение (4.27) для $W$ через параметр $\theta$ вдоль ударной адиабаты можно мыслить как схематическое представление ударной адиабаты на рассматриваемой плоскости скоростей $W$. График этого выражения изображен на рис. 4.5 *a* для среды с $\varkappa > 0$ и на рис. 4.5 *b* для среды с $\varkappa < 0$.

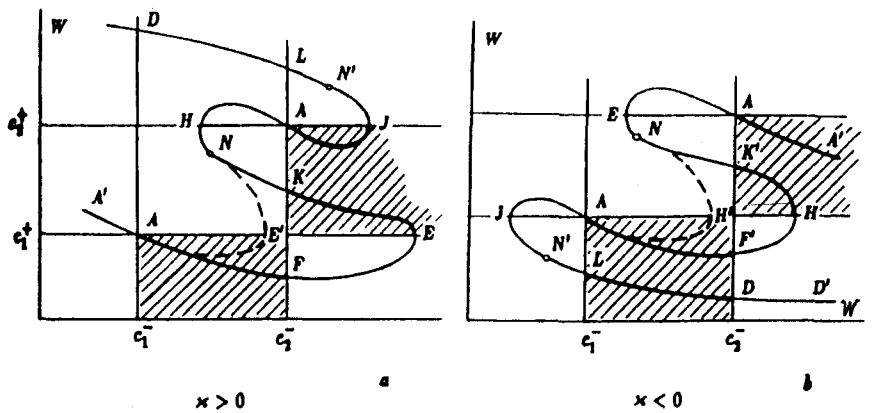



Рис. 4.5.

Начальному состоянию, также как и на рис. 4.2, соответствуют две точки $A$, в которых $W = c_1^- = c_1^+$ и $W = c_2^- = c_2^+$, т.е. они расположены на пересечении соответствующих линий сетки. Согласно теореме Лакса (§ 1.7), к каждой из этих начальных точек с одной стороны обязательно примыкает *эволюционный участок* ударной адиабаты. Это значит, что линия, изображающая ее на рис. 4.5 *a* и *b*, в каждой из точек $A$ идет *вправо-вниз в заштрихованные зоны* (и имеет гладкое продолжение в противоположную от точек $A$ сторону). Участок между точками $A$ соответствует петле ударной адиабаты. Кривая пересекает горизонтальные линии $W = c_{1,2}^+$ в трех точках экстремума $E$, $J$ и $H$ и имеет в них вертикальные касательные. В этих точках $W_E = c_1^+$, $W_J = c_2^+$, $W_H = c_2^+$ (при $\varkappa > 0$) и $W_E = c_2^+$, $W_J = c_1^+$,

$W_H = c_1^+$ (при $\varkappa < 0$).

Форма кривой на рис. 4.5 повторяет график скорости $W(\theta)$ на рис. 4.2. Линия, соединяющая точки $A$, (петля ударной адиабаты) пересекается с вертикальной прямой $W = c_2^-$ в точках $F$ и $K$, если $\Delta < 0$ для сред с $\varkappa > 0$, и в точках $F'$ и $K'$, если $\Delta_1 < 0$ для сред с $\varkappa < 0$. Эти случаи изображены на рис. 4.5 *a* и *b* сплошной линией. При $\Delta > 0$ (для $\varkappa > 0$) и $\Delta_1 > 0$ (для $\varkappa < 0$) вид кривой на участке, где отличие от предыдущего случая существенно, представлен штриховой линией.

На участках ударной адиабаты, попавших в заштрихованные зоны, выполнены условия эволюционности. Будем называть их для краткости *эволюционными отрезками (участками)* ударной адиабаты. На рис. 4.5 они выделены жирными линиями. Наличие на ударной адиабате точек $F''$, $K''$, в которых $W = c_1^-$ (см. рис. 4.2 *b*), для любых сред не влияет на количество эволюционных отрезков.

Для существования разрывов нужно, чтобы на них, кроме эволюционности, одновременно выполнялось еще *условие неубывания энтропии.* Проследим за изменением энтропии $S(\theta)$ вдоль линии ударной адиабаты на рис. 4.5. Энтропия имеет постоянное значение $S^- = S(A)$ на окружности $u_1^2 + u_2^2 = R^2$, проходящей через начальную точку $A$ ($S$ –окружность). На ударной адиабате $S = S^-$ в двух точках $A$ на рис. 4.5 и еще в двух точках $N$ и $N'$ пересечения ударной адиабаты с $S$–окружностью. Выясним, где на рис. 4.5 лежат точки $N$ и $N'$. Непосредственное вычисление скорости скачка $W$ в точках $N(-U_1, U_2)$ и $N'(U_1, -U_2)$ дает

$$\rho_0 W_N^2 = f - \varkappa(R^2 + G), \quad \rho_0 W_{N'}^2 = f - \varkappa(R^2 - G).$$

В то же время в этих точках $c_\beta^+ = c_\beta^-$, $\beta$=1,2 (см. выражения (4.25)). Сравнение этих величин показывает, что

$$c_2^\pm > W_N > c_1^\pm, \quad W_{N'} > c_2^\pm \qquad \text{для среды с } \varkappa > 0,$$
$$c_2^\pm > W_N > c_1^\pm, \quad W_{N'} < c_1^\pm \qquad \text{для среды с } \varkappa < 0.$$

Отсюда видно, что в обоих случаях точки $N$ и $N'$ лежат вне заштрихованных областей. Их положение указано на рис. 4.5 в соответствии с последними неравенствами. Таким образом, в

область где $[S] \geq 0$ попадают участки ударной адиабаты $AEN$ и $AJN'$ для среды с $\varkappa > 0$ (внутри $S$–окружности) и для среды с $\varkappa < 0$ (вне $S$–окружности) участок $AHN$ и хвосты $N'LDD'$ и $AA'$. Все это указывает на то, что эволюционные отрезки ударной адиабаты целиком лежат внутри областей, где $[S] \geq 0$, и *условия эволюционности оказались более сильными, чем условие неубывания энтропии.* Поэтому всюду далее будем следить только за выполнением условий эволюционности, не вспоминая про энтропию.

Итак, показано, что могут существовать несколько различных квазипоперечных ударных волн. Всегда существует одна быстрая (верхний эволюционный прямоугольник) и одна медленная (нижний прямоугольник) ударные волны, эволюционные отрезки которых *примыкают к начальной точке и которые при уменьшении своей интенсивности переходят в бесконечно слабые скачки*, совпадающие с волнами Римана. Кроме этого в упругой среде могут существовать ударные волны, интенсивность которых не может быть как угодно малой, и их эволюционные отрезки $EK$ (при $\varkappa > 0$), а также $LD$ и $HK'$ (при $\varkappa < 0$) на ударной адиабате отделены от начальной точки $A$ областями неэволюционности. Будем далее называть их *ударными волнами второго типа.* Наличие аналогичных волн отмечалось ранее в газовой динамике в средах с усложненным уравнением состояния (Галин [1959]).

Существование ударных волн второго типа для каждой конкретной среды зависит от начального состояния, вернее от знака функций $\Delta(U_1, U_2, G)$ при $\varkappa > 0$ и, соответственно, функции $\Delta_1(U_1, U_2, G)$ при $\varkappa < 0$. Для среды с $\varkappa > 0$ имеются быстрые ударные волны второго типа, если $\Delta < 0$, их эволюционный участок $EK$. Для среды с $\varkappa < 0$ медленные ударные волны (с эволюционным участком $LD$) существуют всегда, а быстрые (соответствующие отрезку $HK'$) – при $\Delta_1 < 0$.

Обсудим еще вопрос о существовании чисто поперечных ударных волн. Чтобы волна была чисто поперечной, необходимо, чтобы в ней не менялась продольная компонента деформации, т.е. $[u_3] = 0$. Это требование всегда выполнено в несжимаемой среде, для которой в одномерном случае определение несжимае-

мости состоит в отсутствии изменений $u_3$. В сжимаемых средах изменение $u_3$ вычисляется по формуле (4.12) и, следовательно, отсутствует на окружности $u_1^2 + u_2^2 = R^2$. Ударная адиабата имеет с этой окружностью, кроме начальной точки, еще общие точки $N$ и $N'$. Однако, соответствующие им ударные волны оказались *неэволюционными*, что хорошо видно на рис. 4.5.

Чисто поперечные разрывы существуют в материале, когда в нем $G = 0$, т.е. в изотропной среде в отсутствии предварительных деформаций. В этом случае соответствующая им часть ударной адиабаты совпадает $S$–окружностью $u_1^2 + u_2^2 = R^2$. Такие разрывы называем *вращательными*. На всей окружности скорость разрыва постоянна и равна характеристической скорости по обе стороны от разрыва. *Энтропия на вращательных разрывах не меняется* $[S] = 0$. Такие разрывы представляют собой вырожденный вид ударных волн, обсуждавшийся в Главе 1 (§ 1.5), они названы там обратимыми. Рассмотрение вращательных разрывов будет продолжено в § 4.11.

При $G \neq 0$ чисто поперечные ударные волны могут существовать только в таких анизотропных средах, у которых в представлении упругого потенциала разложением (3.1) отсутствует член с коэффициентом $b$ (т.е. $b = 0$). В этом случае чисто поперечными будут и волны Римана соответствующего семейства (см. формулу (3.4)). Равенство $b = 0$ является условием существования также чисто продольных ударных волн и волн Римана. Нетрудно заметить, что $b = 0$ соответствует независимости реакции среды на продольную и поперечную деформации.

## 4.8. Положение участков эволюционности на ударной адиабате

Найдем положение участков эволюционности на ударной адиабате на плоскости $u_1u_2$. В силу свойств симметрии положения ударной адиабаты относительно осей $u_1, u_2$ и выражений для скорости разрыва и $W$ и характеристических скоростей $c_1$ и $c_2$ относительно переменных $u_1$ и $u_2$ достаточно брать начальную точку $A(U_1, U_2)$ всегда в первой четверти плоскости $u_1u_2$ (т.е.

$U_1 > 0$, $U_2 > 0$). Для начальных состояний в других областях картина эволюционных участков получается зеркальным отражением относительно соответствующей координатной оси.

Сначала укажем положение точек $E$, $J$, $H$ – экстремумов скорости скачка и энтропии на ударной адиабате на плоскости $u_1u_2$ (рис. 4.1). Оно не зависит от знака $\varkappa$. Поэтому для определенности примем $\varkappa > 0$ (при $\varkappa < 0$ точки экстремума сохраняют свое место на ударной адиабате, но максимумы меняются местами с минимумами).

Очевидно, точка $E$ (максимум $W$ и $S$) на рис. 4.1 должна лежать на нижней части петли на отрезке от $A$ до $N$, точка $H$ (минимум) – на внешней стороне петли на отрезке от $A$ до $N$, третья точка $J$ (максимум) – на отрезке хвоста от $A$ до $N'$. Покажем, что ни одна из них не лежит в том же квадранте, что и начальная точка (т.е. в первом). Для этого достаточно определить знак изменения энтропии $S$ вдоль дуги ударной адиабаты в точках ее пересечения с осями $u_1$ и $u_2$.

Вычислим производную от энтропии, принимая в качестве параметра вдоль кривой величину $u_2$, монотонно меняющуюся вдоль ударной адиабаты в некоторой области вблизи оси $u_1$

$$\frac{dS}{du_2} = \frac{\partial S}{\partial u_1}\frac{du_1}{du_2} + \frac{\partial S}{\partial u_2},$$

где $\partial S/\partial u_1$, $\partial S/\partial u_2$ вычисляются дифференцированием выражения для $S$ из § 4.4, в то время как $du_1/du_2$ находится из уравнения ударной адиабаты (4.16). В точках пересечения ударной адиабаты с осью $u_1$ получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_1}\right)_{u_2=0} = -2\varkappa(U_1(R^2 - u_1^2) - 2u_1^2(U_1 - u_1)),$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_2}\right)_{u_2=0} = 2\varkappa U_2(u_1^2 - R^2), \qquad R^2 = U_1^2 + U_2^2,$$

$$\left(\frac{du_1}{du_2}\right)_{u_2=0} = \frac{(u_1^2 - R^2)(U_1 - u_1)}{2U_2(u_1^2 + GU_1/u_1)}.$$

Координата точки пересечения оси $u_1$ с хвостом ударной

адиабаты находится в диапазоне $U_1 < u_1 < R$ и из приведенных формул видно, что в этой точке $dS/du_2 < 0$. Это значит, что возрастающая при движении от $A$ к $J$ вдоль кривой функция $S$ не достигает своего максимума в первой четверти и, следовательно, точка $J$ лежит в четвертой четверти.

Аналогично, при вычислении изменения энтропии вдоль ударной адиабаты в точках пересечения ее петли с осью $u_2$ используем в качестве параметра вдоль дуги величину $u_1$.

$$\frac{dS}{du_1} = \frac{\partial S}{\partial u_1} + \frac{\partial S}{\partial u_2}\frac{du_2}{du_1}.$$

В точках на оси $u_2$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_1}\right)_{u_1=0} = 4\varkappa U_1(u_2^2 - R^2),$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_2}\right)_{u_1=0} = -4\varkappa\left(U_1^2 U_2 + (u_2 - U_2)^2(2u_2 + U_2)\right),$$

$$\left(\frac{du_2}{du_1}\right)_{u_1=0} = \frac{(u_2^2 - R^2)(U_2 - u_2)}{U_1(2(u_2^2 - G) + u_2^2 - R^2)}.$$

В точках пересечения верхней ветви петли с осью $u_2$, где $u_2 > \max\{\sqrt{G}, R\}$ (см.§4.3), имеем $\partial S/\partial u_1 > 0$, $\partial S/\partial u_2 < 0$ и $\partial u_2/\partial u_1 < 0$, так что в этой точке $dS/du_1 > 0$. Таким образом, при движении вдоль кривой от $A$ к $H$ энтропия продолжает убывать при переходе во вторую четверть и ее минимальное значение (точка $H$) находится во второй четверти. При $\varkappa > 0$ функция $S$ имеет на петле ударной адиабаты только один минимум и он лежит во второй четверти.

В точке пересечения нижней ветви петли с осью $u_2$, в которой $u_2 < \min\{\sqrt{G}, U_2\}$, получим $\partial S/\partial u_1 > 0$, $\partial S/\partial u_2 < 0$ и $du_2/du_1 > 0$, так что в этой точке $dS/du_1 < 0$. Это значит, что точка $E$ максимума энтропии не может находиться в первом квадранте, а только во втором или в третьем.

Если ударная адиабата не заходит в третий квадрант, то точка $E$, очевидно, лежит во второй четверти. Если же часть петли

заходит в третью четверть, то именно на ней лежит точка экстремума $E$. Действительно среди интегральных кривых волн Римана (см.§ 3.5) присутствует ось $u_1$. Эта интегральная линия, а значит и другие близкие к ней, расположенные в третьей четверти плоскости $u_1u_2$ на рис. 3.1, пересекают петлю ударной адиабаты дважды. Поле интегральных кривых не имеет особенностей внутри третьего квадранта, поэтому на отрезке петли ударной адиабаты в этой области должна быть точка касания ее с интегральной кривой указанного семейства. Точка касания $E$, как было показано в § 1.8, является точкой Жуге, где $W_E = c_1^+$. Когда ударная адиабата касается оси $u_1$, точка $E$ совпадает с точкой касания.

В точках $F$ и $K$ на петле ударной адиабаты выполняется условие $W = c_2^-$. Покажем, что обе эти точки всегда лежат во втором квадранте. Для этого рассмотрим ударную адиабату, проходящую через какую-нибудь из этих точек как через начальную. В силу симметрии соотношений на разрыве (4.15) относительно состояний за разрывом и перед ним, эта ударная адиабата пройдет через точку $A$. При этом в точке $A$ будет выполнено условие Жуге $W = c_2(A) = c_2^+$. Тогда в этой точке должен быть экстремум энтропии, который может быть только минимумом. Действительно, так как точки $F$ и $K$ лежат внутри $S$–окружности (условие неубывания энтропии при $\varkappa > 0$), то $S(F) > S(A)$, $S(K) > S(A)$. Однако, выше было показано, что точка, где достигается минимум энтропии, всегда лежит в квадранте соседнем с начальной точкой. Следовательно обе точки $F$ и $K$ лежат во второй четверти. Все упомянутые выше точки Жуге отмечены на рис. 4.6 *a* и *b*.

Таким образом, при $\varkappa > 0$ один эволюционный отрезок $(AJ)$ ударной адиабаты, соответствующий быстрым волнам, простирается от начальной точки $A$ в первой четверти до точки Жуге $J$ в четвертой. Если выполнено неравенство $\Delta(U_1, U_2, G) < 0$ (см. § 4.6), то на петле ударной адиабаты имеются два эволюционных отрезка. Один из них, соответствующий медленным ударным волнам, расположен между начальной точкой $A$ и точкой Жуге $F$ во втором квадранте, причем $W_F = c_2^-$. Второй участок содержит состояния за быстрыми ударными волнами

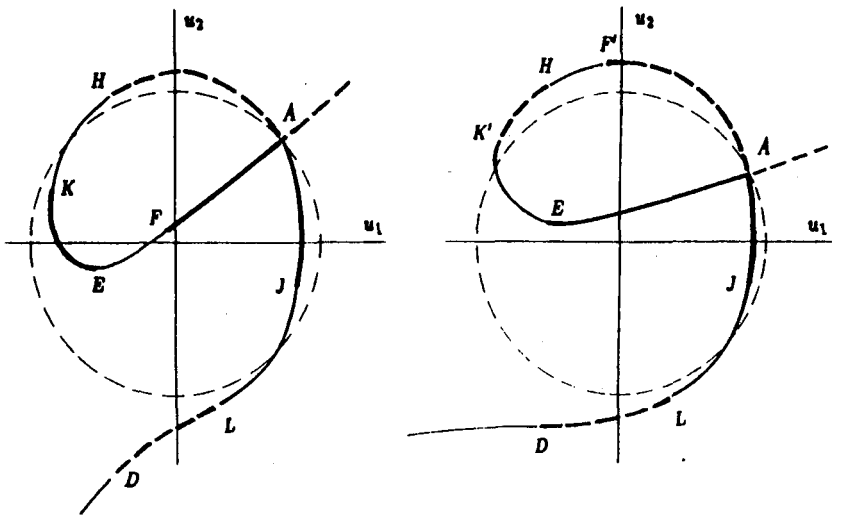



Рис. 4.6.

*второго типа.* Он начинается в точке $K$ во втором квадранте ($W_K = c_2^-$) и кончается в точке $E$ ($W_E = c_1^+$). Точка Жуге $E$ лежит во втором или третьем квадранте в зависимости от того, заходит ли петля в третий квадрант. Указанные эволюционные участки для среды с $\varkappa > 0$ выделены на ударной адиабате на рис. 4.6 *a* сплошной жирной линией.

Если начальная точка $A(U_1, U_2)$ лежит в области, где выполнено неравенство $\Delta > 0$, то на петле ударной адиабаты имеется лишь один эволюционный участок, дающий медленные ударные волны, оканчивающийся точкой $E$ во втором квадранте. Эволюционные участки для сред с $\varkappa > 0$ в этом случае изображены жирными линиями на рис. 4.6 *b*.

Рассмотрим теперь среды, у которых $\varkappa < 0$. Точки Жуге $E$, $J$ и $H$ сохраняют свое положение на ударной адиабате, но соответствующие им ударные волны Жуге теперь имеют скорости $W_E = c_2^+$, $W_J = c_1^+$, $W_H = c_1^+$. Положение точек $D$, $F'$ и $K'$, для которых $W = c_2^-$, и точки $L$, где $W_L = c_1^-$, определяется также же, как это делалось ранее при $\varkappa > 0$. Точки $F'$ и $K'$ (если

они есть) лежат на верхней стороне петли между точками $A$ и $N$ по разные стороны от точки $H$. Поэтому точка $K'$ заведомо лежит во второй четверти, так как там находится весь отрезок $HN$. Точка $F'$ (между $A$ и $H$) может лежать или в первой, или во второй четверти. Выясним в какой.

Построим ударную адиабату, у которой начальной будет точка $F'$. Точка $A$ принадлежит этой кривой и служит на ней точкой Жуге, для которой скорость разрыва $W_{F'A} = c_2^+$. Значит точка $A$ в этой ситуации является аналогом точки $E$, где достигается минимум $W$ (рис. 4.5 *b*). Такая точка, как показано выше, не может лежать в одной четверти с начальной. Значит точки $A$ и $F'$ не могут быть в одной четверти и, следовательно, точка $F'$ обязательно лежит во второй четверти.

Точки $L$ и $D$ лежат на хвосте ударной адиабаты там, где она выходит за пределы энтропийной окружности, т.е. в третьей или четвертой четверти. Выясним, в какой именно. На ударной адиабате, у которой состояние $L$ принято за начальное, в точке $A$ имеем точку Жуге, для которой $W_{LA} = c_1^+$ (аналог точки $J$). Такая точка должна находиться в квадранте соседнем с начальным. Значит, точка $L$ лежит в четвертой четверти.

Теперь уточним положение точки $D$. Для этого построим ударную адиабату с началом в точке $D$. На ней $A$ есть точка Жуге, в которой $W_{DA} = c_2^+$. Эта точка аналог $E$ и должна лежать на петле ударной адиабаты. Если бы точка $D$ находилась в четвертой четверти, то точка $A$ должна была бы попасть либо во вторую, либо в третью четверть, что не так. Поэтому точка $D$ не может оказаться в четвертой четверти и, следовательно, ее место в третьей четверти.

Итак, для сред с $\varkappa < 0$ одним из участков эволюционности будет весь верхний хвост ударной адиабаты $AA'$, начиная от точки $A$. Он соответствует быстрым ударным волнам. На рис. 4.6 этот участок и все прочие эволюционные отрезки для сред с $\varkappa < 0$ изображены жирными штриховыми линиями. Эволюционный участок $LD$ находится на другой ветви хвоста в нижней полуплоскости и представляет состояния за медленными ударными волнами второго типа.

Участки эволюционности имеются еще на внешней части пе-

тли. Если начальное состояние $A(U_1, U_2)$ таково, что выполнено неравенство $\Delta_1(U_1, U_2, G) > 0$, то имеется лишь один эволюционный отрезок $AH$, соответствующий медленной ударной волне (рис. 4.6 *a*). Когда $\Delta_1 < 0$, на петле существуют два эволюционных участка: $AF'$ (медленные ударные волны) и $HK'$ (быстрые ударные волны второго типа), причем $W_{F'} = W_{K'} = c_2^-$ (рис. 4.6 *b*). Они разделены конечным отрезком $F'H$, на котором условия эволюционности нарушены.

## 4.9. Ударные переходы в заданное состояние

Укажем еще одно свойство точек плоскости состояний $u_1u_2$, связанных ударной адиабатой. Найдем те состояния, из которых как из начальных можно скачком попасть в фиксированное состояние $A(U_1, U_2)$. Во-первых, вследствие симметрии соотношений на разрыве (4.15) относительно состояний за и перед скачком, эти состояния должны лежать на ударной адиабате с начальной точкой $A$. Во-вторых, так как точка $A$ представляет теперь состояние за скачком, то энтропия $S$ в искомых состояниях перед скачком должна быть меньше, чем $S(A)$. Значит эти состояния лежат на рассматриваемой плоскости $u_1u_2$ вне окружности $u_1^2 + u_2^2 = R^2$ для сред с $\varkappa > 0$ и внутри этой окружности для сред с $\varkappa < 0$ (§ 4.4).

Для проверки выполнения требований эволюционности (4.23) в обратном скачке в заданное состояние $A$ надо поменять ролями $c_\beta^-$ и $c_\beta^+$ в этих неравенствах. Для иллюстрации этого надо, например, на рис. 4.5 взаимно поменять оси, сохранив кривую, изображающую ударную адиабату. Тогда для скачков в состояние $A$ эволюционными станут части кривой, попавшие в прямоугольники, симметричные с ранее заштрихованными на рис. 4.5 относительно биссектрисы координатного угла. Они изображены также заштрихованными на рис. 4.7 *a* для сред с $\varkappa > 0$ и рис. 4.7 *b* для сред с $\varkappa < 0$.

Легко видеть, что для сред с $\varkappa > 0$ эволюционными будут такие скачки в состояние $A$, у которых начальные точки пред-

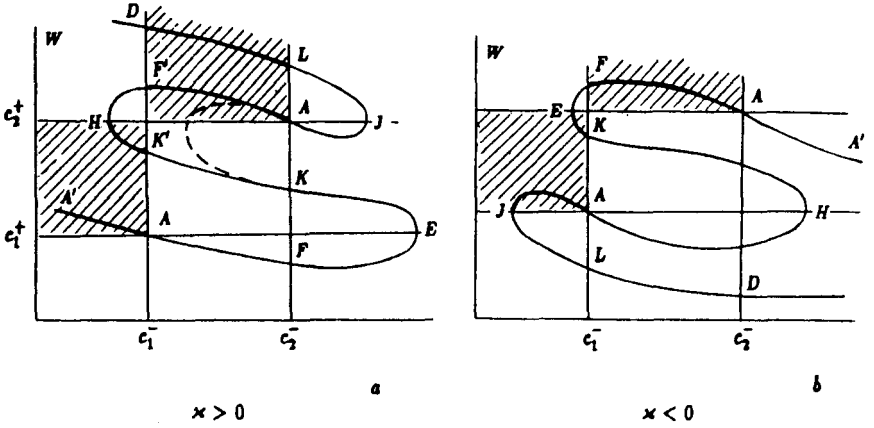



Рис. 4.7.

ставлены на ударной адиабате отрезками $AA'$, $DL$ и $AH$ или $AA'$, $DL$, $AF'$ и $HK'$ (рис. 4.7 *a*), которые ранее ( в скачке из состояния $A$ как начального) изображали состояния за эволюционными скачками в средах с $\varkappa < 0$ (рис. 4.5 *b*). Аналогично, для $\varkappa < 0$ эволюционные скачки в точку $A$ начинаются из состояний на участках $AJ$, $AE$ или $AJ$, $AF$ и $KE$ (рис. 4.7 *b*), которые были эволюционными для скачка из точки $A$ как начальной в средах с $\varkappa > 0$ (рис. 4.5 *a*).

## 4.10. Частные виды начальной деформации

До сих пор всегда считали, что начальная точка $A(U_1, U_2)$ на плоскости $u_1u_2$ лежит внутри первой четверти, так что $U_1 > 0$, $U_2 > 0$. Из вида уравнений (4.13) на разрыве следует, что свойства ударных волн, у которых начальное состояние представлено точкой $A$ в любой другой четверти плоскости $u_1u_2$, получаются зеркальным отражением ударной адиабаты и эволюционных отрезков на ней относительно осей $u_1$ или $u_2$. Особого рассмотрения требуют случаи, когда начальная точка $A$ лежит на од-

ной из осей $u_1$ или $u_2$. Очевидно, такое ее положение приведет к определенной симметрии самой формы ударной адиабаты.

Будем считать, что в анизотропной среде ($G \neq 0$) отсутствует какая-нибудь одна из компонент начальной деформации сдвига ($U_1 = 0$ или $U_2 = 0$). Построение ударной адиабаты и эволюционных участков на ней в применении к этому частному случаю можно вести двумя способами. Первый путь состоит в том, что в построенном выше решении для общего случая устремим к нулю компоненту $U_2$ (или $U_1$) и получим частный вид решения предельным переходом. Другой способ предполагает положить сразу $U_2$ (или соответственно $U_1$) равным нулю непосредственно в уравнениях на разрыве (4.13) и далее вести отыскание эволюционных отрезков по общим правилам (§ 1.6). Увидим, что результат окажется разным, и это будет предметом обсуждения.

Пусть сначала $U_2 = 0$. При этом $U_1 > 0$ и $G > 0$ (последнее неравенство можно считать выполненным всегда, когда $g \neq 0$). Уравнение ударной адиабаты (4.16) распадается на два

$$u_2 = 0, \qquad \left(u_1 + \frac{G}{U_1}\right)^2 + u_2^2 = \left(U_1 + \frac{G}{U_1}\right)^2. \tag{4.33}$$

На плоскости $u_1 u_2$ (рис. reff4.8) это ось абсцисс и окружность с центром в точке $O_1(-\frac{G}{U_1}, 0)$. Ее радиус $R_a = U_1 + \frac{G}{U_1}$ больше радиуса $R = U_1$ энтропийной окружности (4.22). Обе окружности проходят через начальную точку $A(U_1, 0)$ и энтропийная лежит целиком внутри. На рис. 4.8 энтропийная окружность $u_1^2 + u_2^2 = U_1^2$ изображена штриховой линией.

Сравнивая приведенную картину с общим случаем рис. 4.6, можно сказать, что полуокружность в верхней полуплоскости (или, в равной мере из-за симметрии, в нижней) вместе со своим диаметром играет роль петли ударной адиабаты. Другая полуокружность составляет тогда часть одного из хвостов, уходящих в бесконечность вдоль оси абсцисс.

На участках ударной адиабаты, расположенных вдоль оси $u_1$, представлены состояния за ударными волнами, в которых не меняется (отсутствует) компонента деформации $u_2$. Эти волны

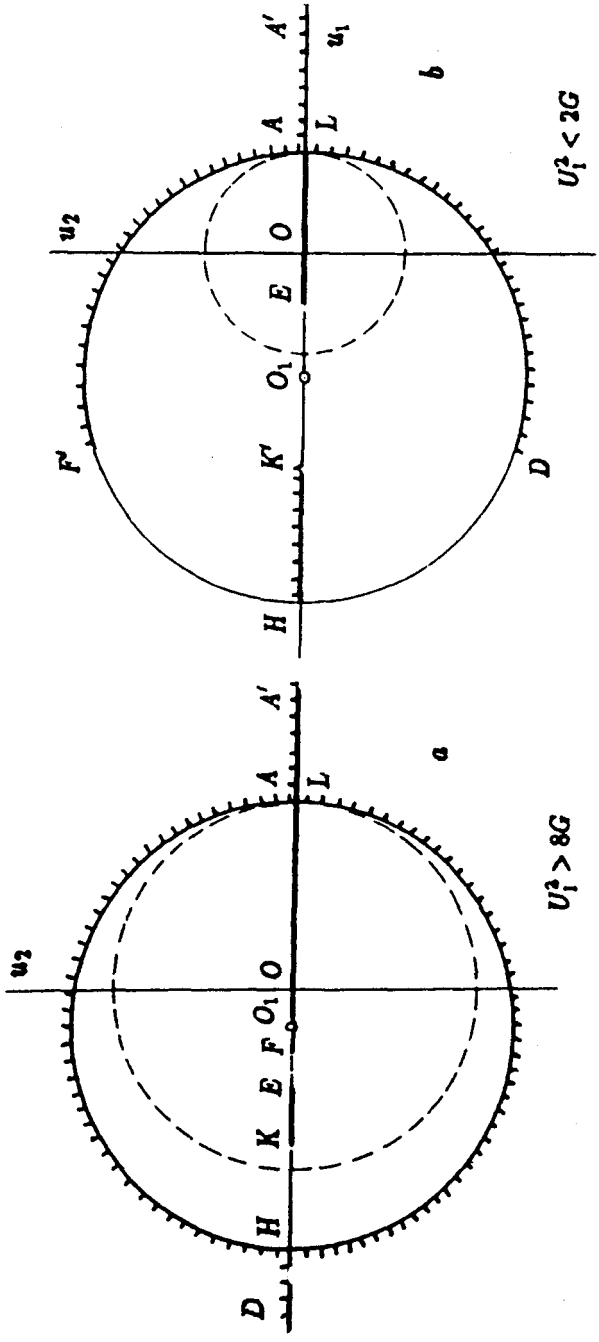



Рис. 4.8.

являются, таким образом, *плоскополяризованными*. Укажем положение точек Жуге на ударной адиабате. Для их обозначения используем те же буквы, что и в общем случае (рис. 4.6). Имеет смысл рассматривать отдельно каждую из ветвей кривой (4.33), составляющих ударную адиабату. На прямой $u_2 = 0$ скорость скачка определяется формулой

$$\rho_0 W^2 \equiv \rho_0 W_r^2 = f - \varkappa(u_1^2 + U_1 u_1 + U_1^2 + G). \tag{4.34}$$

Место экстремума $W$ находится из условия

$$\frac{d}{du_1}(\rho_0 W^2) = -2\varkappa\left(u_1 + \frac{1}{2}U_1\right) = 0$$

и дает точку Жуге $E$ с координатами $(-\frac{1}{2}U_1, 0)$. В этой точке $W_E = c_1^+$ при $\varkappa > 0$ (максимум) и $W_E = c_2^+$ при $\varkappa < 0$ (минимум).

Для отыскания экстремума $W$ на окружности (4.33) перейдем к полярным координатам с центром в точке $O_1$ и полярным углом $\psi$, так что

$$u_1 = R_a \cos\psi - \frac{G}{U_1}, \qquad u_2 = R_a \sin\psi.$$

Для скорости разрыва $W$ получим

$$\rho_0 W^2 = f - \varkappa\left(U_1^2 - G + 2R_a\frac{G}{U_1}(1 - \cos\psi)\right). \tag{4.35}$$

Экстремумы $W$ на окружности находятся из уравнения

$$\frac{d}{d\psi}(\rho_0 W^2) = -2\varkappa R_a \frac{G}{U_1}\sin\psi = 0.$$

Ими будут значения $\psi = 0$ и $\psi - \pi$. Первое дает начальную точку $A$, второе – точку $H$ на пересечении окружности с осью $u_1$ в точке $u_1 = -(R_a + \frac{G}{U_1})$. Наличие экстремума на окружности в точке $A$ означает, что с ней совпала точка Жуге, которая в общем случае обозначалась $J$ и несла максимум $W$ и $S$ при $\varkappa > 0$ и минимум при $\varkappa < 0$. График скорости на рис. 4.5 показывает, что в таком случае с точкой $A$ совпала еще и точка Жуге $L$.

Теперь укажем место точек Жуге, где $W = c_1^-$ и $W = c_2^-$. Для характеристических скоростей $c_{1,2}^-$ при $U_2 = 0$ получаются выражения $f - \varkappa(3U_1^2 + G)$ и $f - \varkappa(U_1^2 - G)$. При $\varkappa > 0$ эти величины равны соответственно $c_1^-$ и $c_2^-$, при $\varkappa < 0$ – наоборот $c_2^-$ и $c_1^-$. Достаточно указать положение точек Жуге для $\varkappa > 0$.

Пусть $\varkappa > 0$. Точки Жуге, где $W = c_1^-$, на оси $u_1$ находятся из уравнения

$$\rho_0 W_r^2 = f - \varkappa(u_1^2 + U_1 u_1 + U_1^2 + G) = f - \varkappa(3U_1^2 + G).$$

Это начальная точка $A$ и еще точка с координатой $u_1 = 2U_1$. Сопоставление с общим случаем (рис. 4.6) подсказывает, что это аналог точки $D$, если она оказалась за пределами окружности-адиабаты радиуса $R_a$. Это происходит, если $U_1^2 > 2G$. В противном случае найденная точка есть точка $K'$ на петле ударной адиабаты (рис. 4.8 *b*).

Точки $F$ и $K$, где $W = c_2^-$, на оси $u_1$ находятся из квадратного уравнения

$$u_1^2 + U_1 u_1 + 2G = 0.$$

Оно имеет два действительных отрицательных корня

$$u_{1\,F,K} = \frac{1}{2}\left(-U_1 \pm \sqrt{U_1^2 - 8G}\right),$$

если $U_1^2 > 8G$ (что совпадает с требованием $\Delta(U_1, 0, G) < 0$ из общей теории, где $\Delta$ определено формулой (4.30)). Эти точки отсутствуют, если $U_1^2 < 8G$. Точки $F$ и $K$ (если они есть) лежат по разные стороны от точки Жуге $E$, в которой $W = W_{\max}$ (рис. 4.8 *a*).

На окружности (4.33) скорость скачка $W$, вычисленная по формуле (4.35), совпадает с $c_2^-$ лишь в начальной точке $\psi = 0$. Равенство $W = c_1^-$ на этой окружности приводит к уравнению $\cos\psi = 1 - U_1^2/G$. Оно имеет решение, только если $U_1^2 < 2G$ (частный случай условия $\Delta_1 < 0$, где $\Delta_1(U_1, 0, G)$ дано формулой (4.32)), и это решение определяет две точки на окружности адиабаты, симметричные относительно оси $u_1$ и имеющие горизонтальную координату $u_1 = -U_1^3/G$ (точки $F'$ и $D$ на рис. 4.8 *b*).

Если неравенство $U_1^2 < 2G$ не выполнено, точек Жуге $W = c_1^-$ на окружности нет (рис. 4.8 *a*).

Для сред с $\varkappa < 0$ все точки Жуге находятся в тех же местах ударной адиабаты, только значения характеристических скоростей быстрых и медленных возмущений меняются ролями. Это следует учесть при выделении эволюционных отрезков.

Все сделанное до сих пор не зависит от того, считаем ли мы, что $U_2 = 0$ или что $U_2 \to 0$ с принятой степенью точности. Другое дело условия эволюционности, которые получаются при наложении малых возмущений на систему соотношений на разрыве (4.13) и последующей линеаризации полученной системы. Для эволюционности линеаризованная система должна иметь однозначное решение.

Рассмотрим сначала, что даст исследование разрывов на эволюционность в случае $U_2 \to 0$. Для этого достаточно взять решение для общего случая (рис. 4.6) и поместить концы эволюционных участков в только что найденное их положение. Расположение эволюционных участков ударных волн примет вид, изображенный на рис. 4.8 *a* и *b*. Как обычно, тонкой штриховой линией проведена для ориентира энтропийная окружность радиуса $U_1$. Жирной сплошной линией выделены эволюционные участки для сред с $\varkappa > 0$ и отштрихованной жирной линией – для сред с $\varkappa < 0$.

Из рисунка видно, что в средах с $\varkappa > 0$ существуют только плоскополяризованные ударные волны. Если $U_1^2 > 8G$, то отрезок $AF$ оси $u_1$ соответствует эволюционным медленным ударным волнам, а отрезок $EK$ – быстрым (рис. 4.8 *a*). Когда $U_1^2 < 8G$, возможны только медленные разрывы и положение их эволюционного отрезка $AE$ такое, как на рис. 4.8 *b*. Для сред с $\varkappa < 0$ эволюционные участки ударной адиабаты лежат снаружи энтропийной окружности. Отрезок $AA'$ оси $u_1$ соответствует быстрым ударным волнам. Если $U_1^2 > 2G$, эволюционная область медленных ударных волн занимает всю окружность ударной адиабаты и еще отрезок $DH$ на оси $u_1$ (рис. 4.8 *a*). Если же $U_1^2 < 2G$ (рис. 4.8 *b*), то кроме уже названного отрезка $AA'$, существуют еще быстрые плоскополяризованные волны (отрезок $HK'$),

а эволюционные участки медленных ударных волн занимают дуги окружности $AF'$ и $AD$.

Теперь положим $U_2 = 0$ непосредственно в соотношениях на разрыве (4.15), получим

$$\begin{gathered}(f-g)(u_1-U_1)-\varkappa u_1(u_1^2+u_2^2)+\varkappa U_1^3=-W(v_1-V_1),\\ (f+g)u_2-\varkappa u_2(u_1^2+u_2^2)=-W(v_2-V_2),\\ (v_1-V_1)=-W(u_1-U_1),\quad (v_2-V_2)=-Wu_2.\end{gathered}\tag{4.36}$$

Напомним, что $v_\alpha$ и $V_\alpha$ – компоненты скорости частиц за и перед разрывом соответственно. Уравнение сохранения энергии отщепилось от системы и может не рассматриваться.

Накладываем на эту систему малые возмущения состояний за волной $\delta u_\alpha = \delta u_\alpha^+$, $\delta v_\alpha = \delta v_\alpha^+$ и перед волной $\delta U_\alpha = \delta u_\alpha^-$, $\delta V_\alpha = \delta v_\alpha^-$, а также возмущение скорости скачка $\delta W$. После линеаризации уравнений около невозмущенного состояния получим

$$\begin{aligned}&(f-g-\varkappa(3u_1^2+u_2^2))\,\delta u_1-(f-g-3\varkappa U_1^2)\delta U_1-2\varkappa u_1u_2\delta u_2\\ &=-W(\delta v_1-\delta V_1)-(v_1-V_1)\delta W,\\ &-2\varkappa u_1u_2\delta u_1+(f+g-\varkappa(u_1^2+3u_2^2))\,\delta u_2-(f+g-\varkappa U_1^2)\delta U_2\\ &=-W(\delta v_2-\delta V_2)-(v_2-V_2)\delta W,\\ &\delta v_1-\delta V_1=-W(\delta u_1-\delta U_1)-(u_1-U_1)\delta W,\\ &\delta v_2-\delta V_2=-W\delta u_2-u_2\delta W.\end{aligned}\tag{4.37}$$

В этой системе уравнений заданы амплитуды *приходящих* к разрыву возмущений, а амплитуды *уходящих* подлежат определению. Из четырех уравнений системы (4.37), кроме $\delta W$, могут быть определены еще три неизвестные амплитуды, остальные должны быть заданы. Только в этом случае при малых амплитудах приходящих возмущений и уходящие тоже будут малыми, обеспечив эволюционность разрыва (§ 1.6). Таким образом, уходящих возмущений должно быть ровно три, что записано в виде неравенств (4.23) и изображено на рис. 4.5 заштрихованными областями.

Заметим, что в случае, когда $U_2 = 0$, часть ударных волн является плоскополяризованными, в которых $u_2 = U_2 = 0$. Тогда из последнего уравнения на разрыве (4.36) видно, что $v_2 - V_2 = 0$ и уравнения (4.37) упрощаются

$$\begin{aligned}
&(f-g-3\varkappa u_1^2)\delta u_1-(f-g-3\varkappa U_1^2)\delta U_1+W(\delta v_1-\delta V_1)=(V_1-v_1)\delta W,\\
&W(\delta u_1-\delta U_1)+\delta v_1-\delta V_1=(U_1-u_1)\delta W,\\
&(f+g-\varkappa u_1^2)\delta u_2-(f+g-\varkappa U_1^2)\delta U_2+W(\delta v_2-\delta V_2)=0, \qquad (4.38)\\
&\delta v_2-\delta V_2+W\delta u_2=0.
\end{aligned}$$

Система распадается на две независимые подсистемы. Два последних уравнения содержат только возмущения $\delta u_2$, $\delta U_2$, $\delta v_2$ в направлении поперечном к линии изменения деформаций в плоскополяризованных ударных волнах и не содержат $\delta W$. В то же время эти возмущения не входят в первую пару уравнений (4.10) и не могут повлиять на плоскополяризованные волны. В § 1.6 было показано, что в таком случае, кроме уже учтенных условий эволюционности (4.23) для всей системы соотношений на разрыве (4.10), одновременно должны быть выполнены такие же условия для подсистемы, не содержащей $\delta W$.

Малые возмущения с изменениями $v_2$ и $u_2$ являются быстрыми в средах с $\varkappa > 0$ и медленными в средах с $\varkappa < 0$. Поэтому дополнительная система условий эволюционности для второй подсистемы имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\text{При}\,\varkappa>0:\ (a)\ W\le c_2^-,\ W\le c_2^+,\quad (b)\ W\ge c_2^-,\ W\ge c_2^+,\\
&\text{При}\,\varkappa<0:\ (a)\ W\le c_1^-,\ W\le c_1^+,\quad (b)\ W\ge c_1^-,\ W\ge c_1^+.
\end{aligned} \qquad (4.39)$$

Расщепление системы (4.37) происходит только для плоскополяризованных ударных волн, представленных на ударной адиабате осью $u_1$. Поэтому на выделенных на рис. 4.8 участках оси абсцисс надо потребовать дополнительно выполнения условий (4.39). В результате из выделенных участков следует исключить как неэволюционные отрезки $KE$ для $\varkappa > 0$ и $HD$ для $\varkappa < 0$ (рис. 4.8 *a*). Для случая $U_1^2 < 2G$ (рис. 4.8 *b*) никаких изменений не будет.

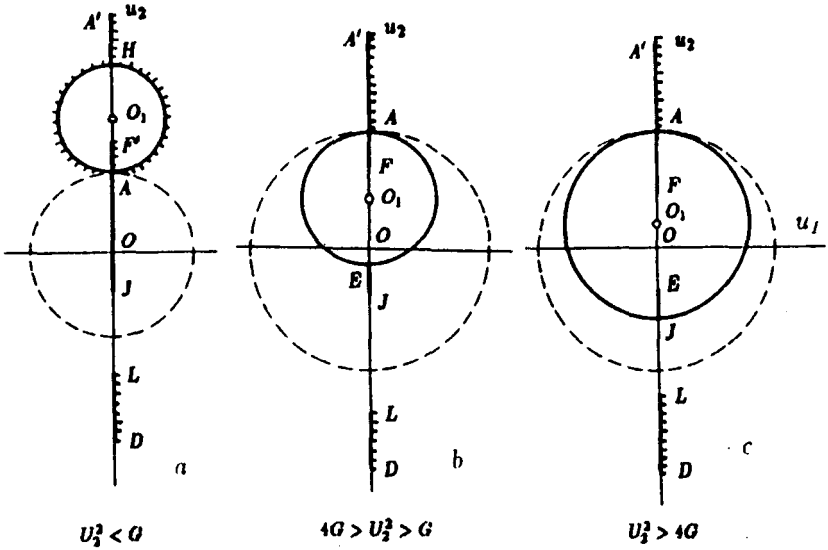



Рис. 4.9.

Рассмотрим теперь другой частный вид начальной деформации $U_1 = 0$ и при этом $U_2 > 0$ и $G > 0$. Уравнение ударной адиабаты опять распадается на два

$$u_1 = 0, \qquad u_1^2 + \left(u_2 - \frac{G}{U_2}\right)^2 = \left(U_2 - \frac{G}{U_2}\right)^2. \tag{4.40}$$

Это ось ординат и окружность радиуса $R_a = \left|U_2 - \frac{G}{U_2}\right|$ с центром в точке $O_1(0, \frac{G}{U_2})$, проходящая через начальную точку $A(0, U_2)$ и касающаяся в ней энтропийной окружности $u_1^2 + u_2^2 = U_2^2$. Ось $u_2$ представляет плоскополяризованные ударные волны, а окружность (4.40) симметрична относительно этой прямой. Возможные варианты расположения ударной адиабаты на плоскости $u_1 u_2$ приведены на рис. 4.9 $a, b, c$. Штриховой линией отмечена энтропийная окружность.

При определении положения точек Жуге на оси ординат надо учесть, что на ней лежат особые точки $u_2 = \pm\sqrt{G}$, в которых

характеристические скорости $c_1$ и $c_2$ совпадают. При изменении $u_2$ вдоль оси в этих точках характеристические скорости быстрых и медленных возмущений меняются ролями. Для среды с $\varkappa > 0$ при $U_2^2 < G$ мы имеем

$$\rho_0(c_1^-)^2 = f - \varkappa(U_2^2 + G), \qquad \rho_0(c_2^-)^2 = f - \varkappa(3U_2^2 - G).$$

Если же $U_2^2 > G$, то

$$\rho_0(c_1^-)^2 = f - \varkappa(3U_2^2 - G), \qquad \rho_0(c_2^-)^2 = f - \varkappa(U_2^2 + G).$$

Для $\varkappa < 0$ – наоборот.

Определение места точек Жуге на ударной адиабате проводится так же, как для случая $U_2 = 0$. Для плоскополяризованных ударных волн (когда $U_1 = u_1 = 0$)

$$\rho_0 W^2 = \rho_0 W_r^2 = f - \varkappa(u_2^2 + U_2 u_2 - U_2^2 - G).$$

Экстремум $W$ на оси $u_2$ достигается в точке $u_2 = -\frac{1}{2}U_2$. Это точка Жуге $J$ или $E$ в зависимости от указанного выше соотношения между $U_2$ и $G$. Другие точки Жуге на оси $u_2$ находятся из уравнений

$$\rho_0 W_r^2 = f - \varkappa(3U_2^2 - G) \qquad \text{и} \qquad \rho_0 W_r^2 = f - \varkappa(U_2^2 + G).$$

Первое дает $u_2 = -2U_2$. Это точка $L$ или $D$. Второе всегда имеет два действительных корня

$$u_{2\,F,L} = \frac{1}{2}\left(-U_2 \pm \sqrt{U_2^2 + 8G}\right).$$

Верхнему знаку соответствует точка $F$ или $F'$, нижнему – точка $L$ или $D$. Положение всех точек на оси $u_2$ указано на рис. 4.9 *a*, если $U_2^2 < G$, и на рис. 4.9 *b* и *c* для $U_2^2 > G$.

На окружности ударной адиабаты

$$\rho_0 W^2 = f - \varkappa\left(U_2^2 + G - 2\frac{R_0 G}{U_2}(1 + \sin\psi)\right), \quad \text{если } G > U_2^2$$

$$\rho_0 W^2 = f - \varkappa\left(U_2^2 + G - 2\frac{R_0 G}{U_2}(1 - \sin\psi)\right), \quad \text{если } G < U_2^2.$$

Здесь $R_a = |U_2 - \frac{G}{U_2}|$ и $\psi$ – полярный угол системы с центром в точке $O_1$. Экстремумы $W$ находятся в точках пересечения окружности с осью ординат. Одна из них – начальная точка $A$, другая – $H$, если она оказалась снаружи энтропийной окружности (рис. 4.9 *a*), или точки $E$ и $J$ внутри этой окружности (рис. 4.9 *b* и *c*). На окружности ударной адиабаты нет точек Жуге, где $W = c^-_{1,2}$.

При $U \to 0$ эволюционные отрезки, ограниченные указанными точками Жуге, получаем в результате предельного перехода из общего решения, представленного на рис. 4.6. Они выделены жирными линиями на рис. 4.9 для сред с $\varkappa > 0$ и заштрихованными линиями для $\varkappa < 0$. Когда $U_2^2 < G$, в средах с $\varkappa > 0$ существуют только быстрые плоскополяризованные волны (отрезок $AJ$, $U_2 \geq u_2 \geq -\frac{1}{2}U_2$), в средах с $\varkappa < 0$ могут существовать три ударные волны: медленная (отрезок $AF'$ : $U_2 \leq u_2 \leq \frac{1}{2}\left(-U_2 + \sqrt{U_2^2 + 8G}\right)$), медленная волна второго типа (отрезок $LD$ : $-\frac{1}{2}\left(U_2 - \sqrt{U_2^2 - 8G}\right) \leq u_2 \leq -2U_2$) и быстрая волна, которая представлена всей окружностью (4.40) и положительной частью оси ординат от точки $H$ и далее вверх (рис. 4.9).

Если $U_2^2 > G$, то вся окружность ударной адиабаты лежит внутри энтропийной окружности. Для сред с $\varkappa > 0$ существуют медленные плоскополяризованные волны (отрезок $AF$) и быстрые, представленные всей окружностью (4.40) и еще отрезком $EJ$ оси ординат от этой окружности до точки $u_2 = -\frac{1}{2}U_2$. При $4G > U_2^2 > G$ точка $u_2 = -\frac{1}{2}U_2$ лежит вне окружности и служит точкой $J$ (рис. 4.9 *b*), если же $U_2^2 > 4G$, то это точка $E$ внутри окружности (рис. 4.9 *c*). При $U_2^2 = 4G$ окружность проходит через особую точку, в которой совпадают характеристические скорости $c_1^+ = c_2^+$ и, следовательно, совпадают точки $E$ и $J$. Для сред с $\varkappa < 0$ при $U_2^2 > G$ эволюционным для быстрых ударных волн является участок положительной оси ординат $AA'$ от начальной точки и далее, а для медленных ударных волн отрезок $DL$ (рис. 4.9 *b*, *c*).

Если положить $U_1 = u_1 = 0$ сразу в соотношениях на разрыве, т.е. рассматривать плоскополяризованные ударные волны, то

(подобно тому, как это было при $U_2 = u_2 = 0$) система уравнений для малых амплитуд возмущений распадается на две независимые подсистемы, в одну из которых входят только возмущения $\delta v_1$ и $\delta u_1$. Другая подсистема содержит $\delta W$ и возмущения $\delta v_2$ и $\delta u_2$. Вследствие этого плоскополяризованные ударные волны в средах с $\varkappa > 0$ при $U_2^2 < G$ должны дополнительно удовлетворять неравенствам $W \geq c_1^-$, $W \geq c_1^+$, что не меняет картину эволюционных участков. При том же неравенстве $U_2^2 < G$ в средах с $\varkappa < 0$ дополнительными условиями эволюционности будут $W \leq c_2^-$, $W \leq c_2^+$, что делает неэволюционной область на оси $u_2$ от точки $H$ и выше (рис. 4.9 *a*).

При $U_2^2 > G$ в средах с $\varkappa > 0$ дополнительно для плоскополяризованных волн следует требовать $W \leq c_2^-$, $W \leq c_2^+$ или $W \geq c_2^-$, $W \geq c_2^+$, вследствие чего отрезок $EJ$ становится неэволюционным. При $\varkappa < 0$ дополнительными служат неравенства $W \geq c_1^-$, $W \geq c_1^+$ и неэволюционными становятся участки $AF'$ и $LD$ (рис. 4.9 *b* и *c*).

Когда $U_1 = U_2 = 0$ одновременно, уравнение ударной адиабаты (4.16) вырождается в две прямые, совпадающие с осями координат $u_1$ и $u_2$, а энтропийная окружность – в точку $O$. Состояние перед разрывом соответствует началу координат. Очевидно, для сред с $\varkappa > 0$ в этом случае эволюционных квазипоперечных ударных волн вообще не существует. В средах с $\varkappa < 0$ эволюционными на ударной адиабате будет вся ось абсцисс (быстрая ударная волна) и отрезок оси ординат $-\sqrt{2G} \leq u_2 \leq \sqrt{2G}$ (медленная волна).

Заметим, что в отсутствии анизотропии ($G = 0$) в средах с $\varkappa < 0$ эволюционными будут ударные переходы из точки $O(U_1 = 0, U_2 = 0)$ в любое состояние на плоскости $u_1 u_2$. Эта ситуация подробно исследована в (Бленд [1972]).

Таким образом, оказалось, что предельный переход $U_2 \to 0$ (или $U_1 \to 0$) дает более широкую область реализующихся ударных волн, чем при строгом равенстве $U_2 = 0$ (или $U_1 = 0$).

Расщепление уравнений (4.37) и появление дополнительных условий эволюционности, очевидно, вызвано симметрией ударной адиабаты и условий эволюционности на ней относительно прямой, представляющей плоскополяризованные волны. Такую

же ситуацию следует ожидать всякий раз при появлении симметрии. Очевидно симметрия отсутствует при сколь угодно малых отличных от нуля $U_1$ и $U_2$ и ударная волна остается эволюционной пока одна из этих величин не обратится в нуль.

Эволюционность означает конечность коэффициентов преломления и отражения малых возмущений на ударной волне. Эти коэффициенты могут расти при уменьшении $U_1$ или $U_2$ и стать бесконечными, когда одна из этих величин обратится в нуль. Соответствующая ударная волна станет неэволюционной. Это будет видно при рассмотрении автомодельных решений в следующей главе.

## 4.11. Квазипоперечные ударные волны при $G/R^2 \ll 1$ и $G/R^2 \gg 1$

Параметры $G = g/\varkappa$ и $R^2$ характеризуют влияние анизотропии и нелинейности на поведение волн при конечном $\varkappa$. Покажем, что присутствие даже *исчезающе малой анизотропии* вносит существенные отличия в свойства ударных волн по сравнению с изотропной средой. Напомним, что в естественно изотропных средах величина $G$ связана с наличием предварительной деформации сжатия-растяжения материала в плоскости фронта волны, $G \sim \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}$, и условие $G = 0$ в этом случае означает $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$.

Сначала рассмотрим случай $G = 0$, что характеризует наличие волновой изотропии. Считаем при этом, что хотя бы одна из компонент предварительной деформации сдвига $U_1$ и $U_2$ отлична от нуля. Пусть как всегда $U_1 > 0$ и $U_2 > 0$.

Уравнение ударной адиабаты (4.16) распадается на два

$$u_1^2 + u_2^2 = R^2, \qquad u_2 = \frac{U_2}{U_1} u_1. \tag{4.41}$$

На плоскости $u_1 u_2$ это окружность радиуса $R = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$ с центром в начале координат точке $O$, пересеченная прямой, проходящей через центр $O$ и начальную точку $A(U_1, U_2)$ (рис. 4.10).

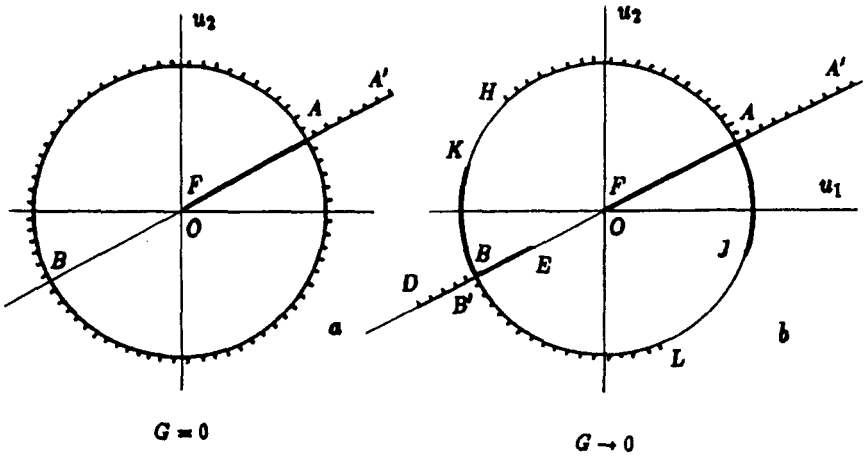



Рис. 4.10.

Окружность ударной адиабаты проходит через начальную точку и совпадает с энтропийной окружностью, поэтому всюду на ней $S = S(A) = \text{const}$.

Скорость ударных волн определяется уравнением (4.6) и при $G = 0$ имеет величину

$$\rho_0 W^2 = f - \varkappa \left[ u_1^2 + u_2^2 + R^2 + \frac{\left(u_1^2 + u_2^2 - R^2\right)^2}{\left(u_1 - U_1\right)^2 + \left(u_2 - U_2\right)^2} \right].$$

На окружности ударной адиабаты она равна

$$\rho_0 W^2 = f - \varkappa R^2,$$

т.е. скорость ударной волны на всей окружности одна и та же и совпадает с характеристической скоростью $c_2^- = c_2^+$ для среды с $\varkappa > 0$ или с $c_1^- = c_1^+$ для среды с $\varkappa < 0$.

В § 3.7 было показано, что при $G = 0$ одно из семейств интегральных кривых волн Римана представлено концентрическими окружностями с центром в точке $O$. Одна из них, проходящая через точку $A$, совпадает с окружностью ударной адиабаты.

Эти волны Римана обладают постоянной характеристической скоростью $\rho_0 c_\theta^2 = f - \frac{1}{2}\varkappa R^2$, не расширяются со временем и их профиль не деформируется при движении.

Из сказанного следует, что при $G = 0$ разрывные решения, не сопровождающиеся изменением энтропии, совпадают с недеформирующимися волнами Римана, у которых профиль возмущения имеет вид ступеньки. Равенство $u_1^2 + u_2^2 = R^2$ показывает, что в этих волнах не меняется модуль сдвиговых деформаций, т.е. волна обладает *круговой поляризацией.* Так же как в магнитной гидродинамике, назовем эти решения *вращательными волнами*, или *вращательными разрывами.* Как показывают формулы (3.15) для волн Римана и (4.12) для разрывов, вращательные волны являются *чисто поперечными.*

Вследствие того, что на окружности $S = S(A) = \text{const}$ и $W = c_\theta = \text{const}$, вся эта часть ударной адиабаты удовлетворяет условию неубывания энтропии и условиям эволюционности (4.23) для любых сред ($\varkappa > 0$ и $\varkappa < 0$). Однако, эти разрывы представлены границей области эволюционности (соответствуют знакам равенства в соотношениях (4.23)), а потому малейшее изменение формы ударной адиабаты или скорости скачка на ней, которые вызваны появлением даже очень незначительной анизотропии, нарушают равенства в ту или другую сторону.

Прямолинейная часть ударной адиабаты $u_2 = \frac{U_2}{U_1} u_1$ представляет плоскополяризованные ударные волны. Их скорость $W$ можно записать в виде

$$\rho_0 W^2 = f - \varkappa \frac{R^2}{U_1^2}(u_1^2 + U_1 u_1 + U_1^2).$$

Точка $E$, где $W$ имеет экстремум на рассматриваемой прямой, имеет координаты $-U_1/2, -U_2/2$. Для среды с $\varkappa > 0$ там, где

$$W = \sqrt{\frac{f - \varkappa R^2}{\rho_0}} = c_2^- \qquad \text{и} \qquad W = \sqrt{\frac{f - 3\varkappa R^2}{\rho_0}} = c_1^-,$$

получим точки Жуге $F(0,0)$ и $D(-2U_1, -2U_2)$.

Симметрия уравнения ударной адиабаты (4.41), а следовательно и соотношений на разрыве, относительно прямой, представляющей плоскополяризованные волны, указывает на то, что

для этих волн при исследовании эволюционности возникает ситуация такая же, как была, например, при $U_2 = 0$. К прежнему случаю ($U_2 = 0$) можно придти непосредственным поворотом осей в плоскости $u_1 u_2$ так, чтобы ось $u_1$ пошла по линии $OA$. Тогда система уравнений, аналогичная (4.37) для бесконечно малых плоскополяризованных и поперечнополяризованных возмущений разделятся. Взаимодействие разрывов с этими возмущениями происходит независимо. В результате для плоскополяризованных ударных волн, кроме условий эволюционности (4.23) для полной системы соотношений на разрыве, необходимо выполнить еще условия эволюционности относительно поперечнополяризованных малых возмущений. Они являются быстрыми для сред с $\varkappa > 0$ и медленными при $\varkappa < 0$. Поэтому эти дополнительные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &\varkappa > 0: \ W \geq c_2^-, W \geq c_2^+ \quad \text{или} \quad W \leq c_2^-, W \leq c_2^+, \\ &\varkappa < 0: \ W \geq c_1^-, W \geq c_1^+ \quad \text{или} \quad W \leq c_1^-, W \leq c_1^+. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Объединяя эти требования для плоскополяризованных волн с условиями (4.23), получим при $\varkappa > 0$ эволюционный отрезок $AF$ для медленных ударных волн и при $\varkappa < 0$ луч $AA'$ от точки $A$ и далее в направлении удаления от начала координат для быстрых волн. На рис. 4.10 *а* они выделены соответственно жирной линией (для $\varkappa > 0$) и заштрихованной (для $\varkappa < 0$). Добавив окружность ударной адиабаты для обоих типов сред, получим все эволюционные отрезки при $G = 0$.

Рассмотрим теперь предельный переход при $G \to 0$. Для этого введем малый параметр $\delta = \frac{G}{R^2}$ и представим все величины разложением по $\delta$.

Во-первых, отметим изменение формы ударной адиабаты. Новые координаты трех точек пересечения ее с осью ординат:

$$-R - (R + U_2)\delta, \quad 2U_2\delta, \quad R + (R - U_2)\delta.$$

Координаты трех точек пересечения с осью абсцисс:

$$-R + (R + U_1)\delta, \quad -2U_1\delta, \quad R - (R - U_1)\delta.$$

Ударная адиабата уже не проходит через начало координат, а идет немного выше. В точке $B$, где при $G = 0$ окружность пересекалась с прямолинейной частью ударной адиабаты, кривая размыкается, приобретая в окрестности этой точки вид гиперболы.

Таким образом, ударная адиабата перестает совпадать с энтропийной окружностью, имея с ней лишь две точки пересечения, отличные от начальной. Скорость скачка вдоль этой линии уже не постоянна и совпадает с характеристической лишь в отдельных точках. Используем процедуру отыскания этих точек, описанную в § 4.6, с помощью вспомогательной переменной $y = \operatorname{tg}(\theta - \theta_0)$, введенной ранее формулой (4.28) и меняющейся монотонно вдоль линии ударной адиабаты. Коэффициенты $B$, $m$ и $n$, входящие в эту формулу, при малых $\delta$ принимают выражения:

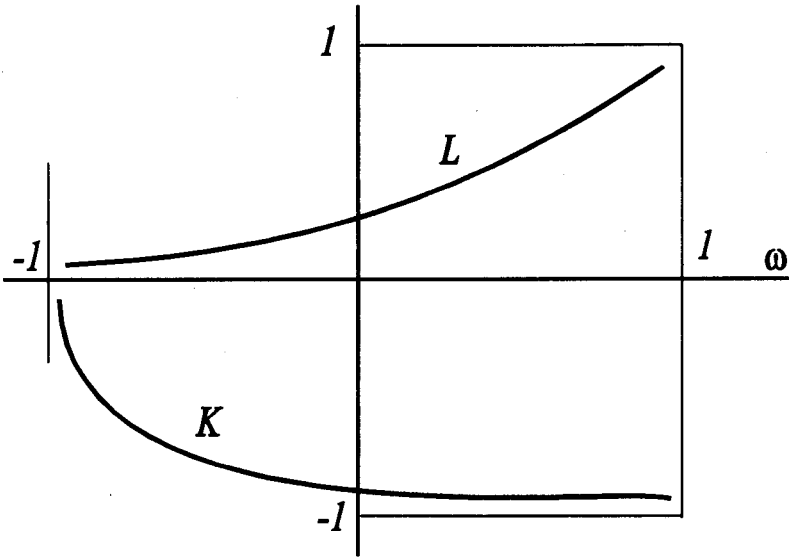
$$B = R^2 - (U_2^2 - U_1^2)\delta,$$

$$m = U_1 U_2 \delta / R, \quad n = R.$$

Это позволяет найти точки Жуге $K$ и $L$, в которых $W = c_{1,2}^-$, на той части ударной адиабаты, которая прежде была окружностью. Их координаты

$$y_{K,L} = \frac{U_1^2 - U_2^2 \pm \sqrt{R^2 - U_1^2 U_2^2}}{3U_1 U_2} + O(\delta).$$

Уже нулевого приближения ($\delta = 0$) достаточно, чтобы обнаружить появление изолированных точек Жуге $K$ и $L$, чего не было при $G = 0$. Простой анализ показывает, что при $U_1 \to 0$ обе точки $K$ и $L$ приближаются к оси абсцисс, при $U_2 \to 0$ – к оси ординат. Это согласуется с рис. 4.8 и 4.9 для случаев $U_2 = 0$ и $U_1 = 0$ соответственно. Положение точек $J$ и $H$, в которых достигается экстремум скорости скачка, найдено численно как функции $U_1$ и $U_2$. Графики перемещения всех точек Жуге при изменении начальной деформации приведены на рис. 4.11, на котором по оси абсцисс отложена величина $\omega = \frac{U_1^2 - U_2^2}{R^2}$.



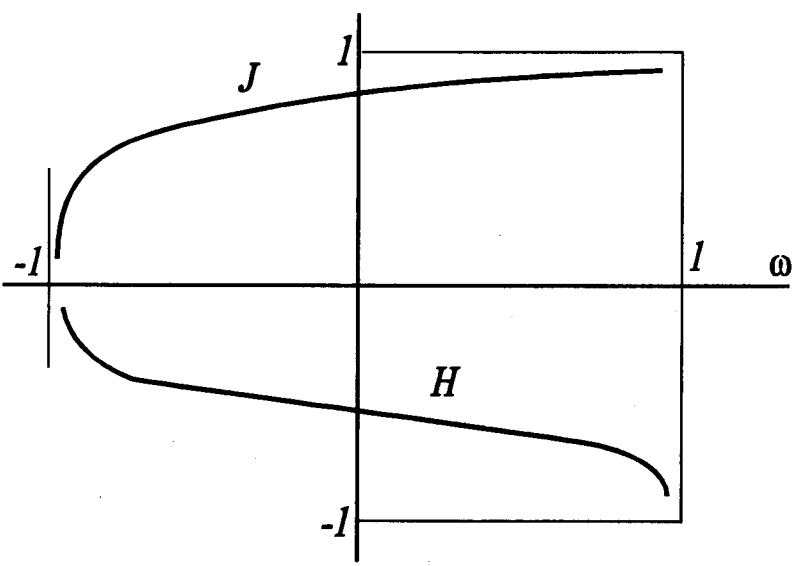




Рис. 4.11.

Точки Жуге $E$, $F$, $D$ на части ударной адиабаты, которая прежде была прямолинейной, получают небольшое смещение от своего прежнего положения при $G = 0$. Их координаты с точностью до членов порядка $\delta$:

$$u_{1E} = -\frac{U_1}{2}\left(1 + 12\frac{U_2^2}{R^2}\delta\right), \quad u_{2E} = -\frac{U_2}{2}\left(1 - 12\frac{U_1^2}{R^2}\delta\right),$$

$$u_{1F} = -2\frac{U_1^2}{R^2}U_1\delta, \quad u_{2F} = 2\frac{U_2^2}{R^2}U_2\delta,$$

$$u_{1D} = -2U_1\left(1 - 3\frac{U_2^2}{R^2}\delta\right), \quad u_{2D} = -2U_2\left(1 + 3\frac{U_1^2}{R^2}\delta\right).$$

Эти волны перестают быть плоскополяризованными и с них сняты дополнительные условия (4.42). В результате эволюционными на линии, близкой к диаметру окружности, становятся отрезки $AF$ и $EB$ для $\varkappa > 0$ (жирная линия на рис. 4.10 *b* и участки $AA'$ и $DB'$ для $\varkappa < 0$ (заштрихованная линия на рис. 4.10 *b*). В то же время не вся часть ударной адиабаты, близкая к окружности, отвечает реализующимся ударным волнам (как это было при $G = 0$), а лишь дуги $AJ$ и $BK$ для $\varkappa > 0$ и дуги $AH$ и $B'L$ для $\varkappa < 0$.

Очевидно раздвоившаяся точка $B - B'$ с позиций общего случая, представленного на рис. 4.6, принадлежит эволюционным отрезкам $KL$ и $LD$ ударных волн второго типа. Если теперь перейти к пределу при $\delta \to 0$, то ударная адиабата примет прежний вид окружности, пересеченной прямой. Но эволюционные участки на ней займут лишь указанные дуги окружности.

Таким образом, так же как и в § 4.10, обнаруживается существенное различие между решением задачи при $G = 0$ и полученным предельным переходом при $G \to 0$.

Рассмотрим другой предельный случай $G \gg R^2$. При малых $R^2/G$ размер петли ударной адиабаты становится по порядку величины равным $G/R$. Если считать, что $R \to 0$ при фиксированном $G$, то в рассматриваемой области порядка $\varepsilon$ ударная адиабата вырождается в две прямые линии $u_1 = U_1$ и $u_2 = U_2$, пересекающиеся в начальной точке. На них условиям эволюционности удовлетворяют отрезки, указанные на рис. 4.12: для ма-

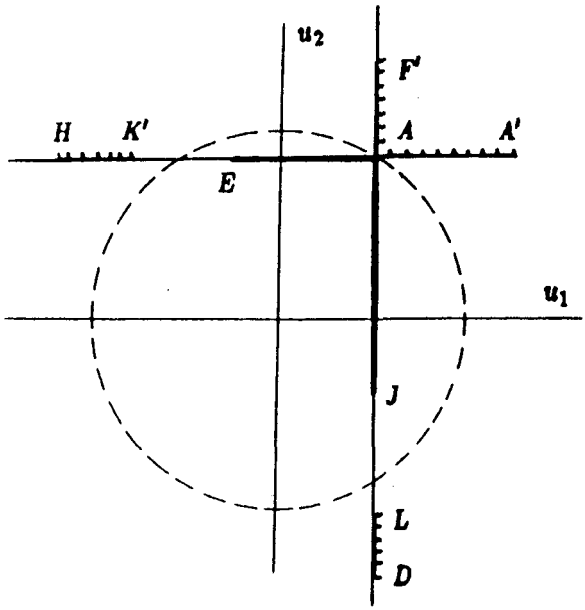



Рис. 4.12.

териалов с $\varkappa > 0$ отрезок $AE$ ($U_1 \geq u_1 \geq -U_1/2$) на прямой $u_2 = U_2$ (медленная волна) и отрезок $AJ$ ($U_2 \geq u_2 \geq -U_2/2$) на прямой $u_1 = U_1$ (быстрая волна); для материалов с $\varkappa < 0$ участки $HK'$ ($-\infty < u_1 \leq -2U_1$) и $AA'$ ($U_1 \leq u_1 < \infty$) на прямой $u_2 = U_2$ (быстрые волны) и участки $DL$ ($-\infty < u_2 \leq -2U_2$) и $AF'$ ($U_2 \leq u_2 < \infty$) на прямой $u_1 = U_1$ (медленные волны). Они изображены на рис. 4.12 для $\varkappa > 0$ жирной линией и для $\varkappa < 0$ – заштрихованной.

## 4.12. Волны в несжимаемых средах

Этот раздел невелик по объему, но тем не менее выделен в отдельный параграф просто, чтобы подчеркнуть,что все полученные в этой главе результаты годятся и для несжимаемых упругих сред.

В качестве условия несжимаемости упругой среды обычно

принимается отсутствие в ней объемной деформации. Относительное изменение объема для изотропной среды вычисляется с помощью инвариантов тензора деформации по формуле (см. например, Седов [1984])

$$\Theta = \sqrt{1 + 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 + \tfrac{4}{3}I_1^3 - 4I_1I_2 + \tfrac{8}{3}I_3} - 1,$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}, \qquad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Это выражение содержит и компоненты предварительной деформации, через которую, как было показано в § 2.4, можно учесть малую анизотропию достаточно произвольного вида.

Прямое вычисление $\Theta$ через компоненты $u_i$, $U_i$, $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22}$ в случае одномерных движений и подстановка этого выражения в условие несжимаемости $\Theta = 0$ приводит к равенству $u_3 = \text{const}$, что конечно, легко получить и из непосредственного вычисления изменения объема, представленного в одномерном случае слоем, ортогональным оси $u_3$.

Описание как волн Римана, так и ударных волн в несжимаемой упругой среде получится из общего случая, если всюду в формулах положить $u_3 = U_3 = \text{const}$. Это равносильно тому, что упругий потенциал $\Phi$ несжимаемой среды не зависит от компоненты $u_3$, а его представление (3.1) не содержит членов с компонентой $u_3$. Если же мы хотим получить несжимаемую среду предельным переходом, используя общее выражение (3.1), то достаточно устремить $d \to \infty$ ($d = \partial^2\Phi/\partial u_3^2$ характеризует жесткость среды по отношению к ее сжатию по оси $x$).

Как следует из общей теории, получается, что скорость продольных волн должна бы быть равна $\sqrt{d/\rho_0} + O(\varepsilon) \to \infty$, как и положено для объемных волн в несжимаемой среде. Другие волны (как непрерывные, так и скачки) являются чисто поперечными, так как изменение $u_3$ в них отсутствует, и описываются прежними формулами, если в них положить $b/(d - f) = 0$. Упругий потенциал $\Phi$ совпадает с двумерным своим аналогом – функцией $H$, введенной формулой (4.14), причем в ней следует считать $\varkappa = 2b/(d - f) - h = -h$. Анизотропия по-прежнему

характеризуется величиной $g$ (или $G$). Вид интегральных кривых волн Римана, ударной адиабаты и эволюционных участков на ней остаются теми же.

## 4.13. Представление неэволюционного разрыва двумя эволюционными, идущими с одинаковой скоростью

В этом параграфе будет показано, что разрывы, соответствующие точкам некоторых неэволюционных отрезков ударной адиабаты квазипоперечных волн, представляют последовательность двух эволюционных ударных волн, движущихся с *одинаковой скоростью.* Это относится к отрезкам ударной адиабаты, удовлетворяющим требованию неубывания энтропии, но не удовлетворяющим условиям эволюционности вследствие того, что число граничных условий превышает число неизвестных функций в линеаризованной задаче взаимодействия малых возмущений с разрывом.

**Случай** $\varkappa > 0$.

Покажем, что неэволюционная часть $FE$ ударной адиабаты (рис. 4.13 *а*), лежащая в правом нижнем (неэволюционном) прямоугольнике (условия ее существования указаны в § 4.7), соответствует разрывам, которые могут быть представлены как последовательность двух эволюционных ударных волн – быстрой и медленной, движущихся одна за другой с одной и той же скоростью. При этом для всех точек дуги $FE$ существует комбинация, содержащая быструю волну второго типа и, кроме того, для всех точек дуги $FE$, в которых $W \leq \min\{W_E, W_J\}$, существует комбинация с быстрой волной первого типа.

Очевидно, что на разрыве, состоящем из двух последовательных ударных волн, движущихся с одной скоростью, выполнены все законы сохранения с теми же значениями потоков массы, импульса и энергии через единицу площади поверхности разрыва, что и на первой ударной волне. Поэтому состояние за таким составным разрывом лежит на ударной адиабате, отнесенной к начальному состоянию перед первой ударной волной.

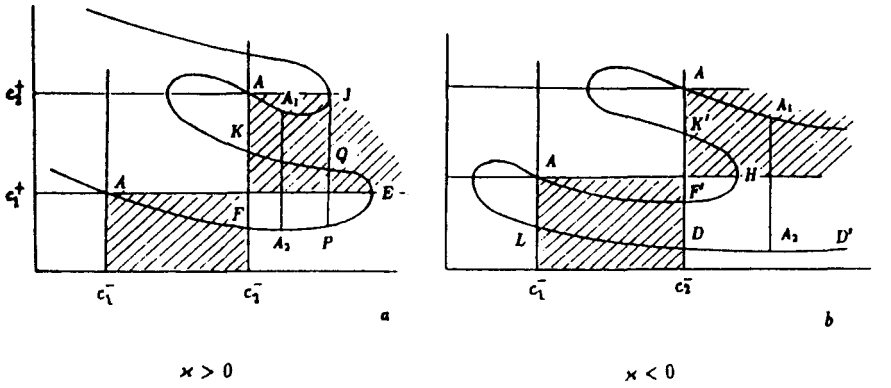



Рис. 4.13.

Рассмотрим две ударные волны – первую быструю, распространяющуюся со скоростью $W_1$, и вторую медленную, движущуюся со скоростью $W_2$ по состоянию за первой волной. Величины, относящиеся к состоянию за первой ударной волной, будем снабжать индексом 1, а к состоянию за второй волной – индексом 2. Этим состояниям на плоскости $u_1u_2$ соответствуют на рис. 4.13 *a* точки $A_1$ и $A_2$, причем, если $W_1 = W_2$, то, согласно сказанному выше, обе точки $A_1$ и $A_2$ лежат на первой, исходной ударной адиабате, проведенной через точку $A$ как начальную.

Если быстрая волна будет волной первого типа (соответствующего отрезку $AJ$) и

$$W_1 \leq \min\{W_E, W_J\} \tag{4.43}$$

(здесь $W_E$, $W_J$ – скорости в точках $E$ и $J$ первой ударной адиабаты), то всегда найдется медленная ударная волна, движущаяся по состоянию за первой волной с той же скоростью $W_2 = W_1$.

Чтобы показать это, предположим сначала, что быстрая ударная волна в точку $A_1$ имеет достаточно малую интенсивность. Состояние за ней мало отличается от начального. Тогда скорость медленной волны $W_2$, идущей следом по состоянию $A_1$, может принимать любые значения между характеристическими скоростями $c_1^{(1)}$ и $c_2^{(1)}$ перед этой волной. Это вытекает из того,

что при малом изменении начального состояния ударная адиабата изменится мало и на рис. 4.13 *а*, построенного для второй (медленной) волны, ее скорость будет удовлетворять строгим неравенствам $c_1^{(1)} < W < c_2^{(1)}$. Так как $W$ достигает максимума в точке $E$, то для разрыва, представленного точкой внутри указанного прямоугольника, на той же ударной адиабате, на которой эта точка лежит, найдутся еще состояния, соответствующие медленным ударным волнам со скоростями меньше и больше выбранной.

Если теперь непрерывно изменять (увеличивать) $W_1$, то всегда можно найти медленную ударную волну со скоростью $W_2$, равной $W_1$, до тех пор пока точка, изображающая медленную волну, не выйдет на границу прямоугольника, содержащего область эволюционности медленных волн. Если при этом выполняется равенство $W = c_2^{(1)}$ (правая граница прямоугольника), то быстрая ударная волна должна соответствовать точке $J$; если же выполняется равенство $W = c_2^{(2)}$ (верхняя граница эволюционного прямоугольника), то результат последовательности двух скачков дает точку $E$, так как только в этой точке исходной ударной адиабаты имеет место равенство $W = c_1^+$. До тех пор пока выполняется неравенство (4.43), всегда можно найти медленную ударную волну, идущую вслед за быстрой, такую, что $W_2 = W_1$.

Если неравенство (4.43) выполняется для всей дуги $FE$, а это возможно, когда $W_J > W_E$, то комбинация двух эволюционных волн – быстрой первого типа и медленной, *движущихся с одинаковой скоростью*, существует для каждой точки этого отрезка. Если же $W_J < W_E$, то указанному неравенству удовлетворяют только точки дуги $FP$, где точка $P$ определена равенством $W_P = W_J$. В этом случае точки отрезка $FP$ дают разрывы, представляемые в виде последовательности ударных волн: быстрой первого типа и медленной.

На дуге $KE$ ударной адиабаты имеется точка $Q$, отличная от точки $P$, такая, что $W_Q = W_P = W_J = c_2^-$ (рис. 4.13 *а*). Когда $W_J = W_E$, точки $E$, $P$ и $Q$ сливаются и ударные адиабаты первой (с началом в точке $A$) и второй (с началом в точке $J$) волн

касаются одна другой а этой точке (рис. 4.14 *a*). Если $W_J < W_E$, то все ударные адиабаты с начальными точками на отрезке $AJ$ пересекают начальную адиабату на плоскости $u_1u_2$ дважды – на отрезках $FE$ и $EK$.

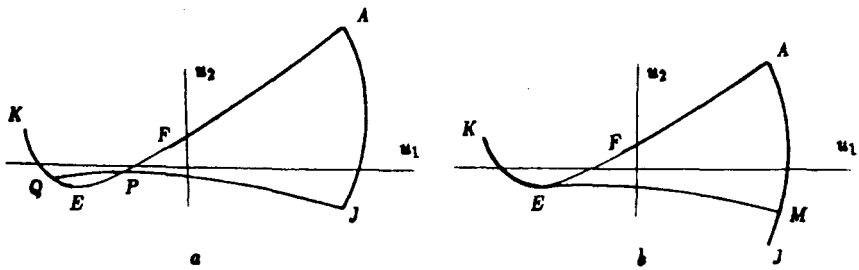



Рис. 4.14.

Если $W_J > W_E$, неравенство (4.43) выполняется для всей дуги $FE$, и комбинация эволюционных волн (быстрой волны первого типа и медленной) существует для любой точки этой дуги. В этом случае на отрезке $AJ$ может быть найдена точка $M$ такая, что $W_M = W_E$. Ударная адиабата, выходящая из точки $M$, касается начальной адиабаты в точке $E$ (рис. 4.14 *b*). Все ударные адиабаты, начинающиеся из точек дуги $AM$, пересекают начальную адиабату дважды по обе стороны от точки $E$, в то время как начинающиеся из точек отрезка $MJ$, не пересекают начальной адиабаты точки $A$.

Рассмотрим теперь последовательность быстрой ударной волны второго типа и медленной волны. Начнем с быстрой, соответствующей состоянию, достаточно близкому к точке $E$. Тогда разность $W_1 - c_1^{(1)} > 0$ и может быть взята достаточно малой. Для состояния за первой волной (как и для любого другого состояния) можно указать достаточно слабую медленную ударную волну, скорость которой $W_2$ на заданную малую величину превосходит характеристическую скорость $c_1^{(1)}$ перед ней, так что будет выполнено равенство $W_2 = W_1$. Точка, изображающая эту

слабую медленную ударную волну, будет находиться внутри эволюционного прямоугольника медленных волн (рис. 4.13 *a*). Подобно предыдущему, при изменении (уменьшении) $W_1$ можно всегда подобрать медленную ударную волну со скоростью $W_2$, равной $W_1$, до тех пор пока точка, изображающая эту медленную ударную волну, остается внутри прямоугольника, соответствующего медленным эволюционным волнам. Нетрудно проверить, что выход за границу этого прямоугольника происходит только тогда, когда точка, представляющая состояние за быстрой волной, совпадает с точкой $E$. Таким образом , неэволюционный разрыв, соответствующий любой из точек дуги $FE$, может быть представлен в виде последовательности быстрой ударной волны второго типа и медленной ударной волны, движущейся следом за первой с той же скоростью.

**Случай** $\varkappa < 0$.

Аналогично предыдущему, все точки дуги $F'H$ (рис. 4.13 *b*) могут быть представлены последовательностью двух эволюционных волн двумя разными способами. Одна комбинация состоит из быстрой волны первого типа и медленной волны первого типа. Другая комбинация состоит из быстрой волны второго типа и медленной волны первого типа. Все доказательства в точности повторяют выше приведенные для случая, когда $W_J > W_E$, рассуждения. Они наглядно продемонстрированы на рис. 4.13 *b*.

Все точки дуги $DD'$ соответствуют разрывам, которые могут быть представлены в виде последовательности быстрой волны первого типа и медленной волны второго типа. Рассуждения приводящие к такому заключению, можно проводить, увеличивая интенсивность быстрой ударной волны. При нулевой интенсивности быстрой ударной волны состояние за медленной волной представлено точкой $D$. Затем точка, изображающая состояние за медленной ударной волной, уходит внутрь правого нижнего прямоугольника и при дальнейшем увеличении интенсивности быстрой волны не выходит за границы этого прямоугольника, что доказывает представимость разрывов, соответствующих всем точкам отрезка $DD'$, в виде указанной последовательности эволюционных ударных волн.

Приведенное выше представление неэволюционного разрыва

последовательностью эволюционных ударных волн, движущихся с одинаковой скоростью, необходимо для построения решений различных автомодельных задач, содержащих разрывы.

## Резюме

Из предполагаемой малости анизотропии и амплитуды разрывов, подчиняющихся законам сохранения (4.1), следует, как и для непрерывных волн, разделение разрывов (ударных волн) на квазипродольные и квазипоперечные § 4.1.

Для квазипродольных волн (§ 4.2) путем стандартного разложения в ряд по амплитуде (в качестве которой принимается скачок на разрыве продольной компоненты деформации $[u_3]$) найдены скорость разрыва $W$ (равенство (4.6)) и изменения на разрыве поперечных компонент деформаций $u_1$ и $u_2$ (4.7), а также энтропии $S$. Как и соответствует общей теории малых разрывов (§ 1.7), первые два члена разложения изменений величин в ударных волнах совпадают с соответствующими членами разложения изменений тех же величин в волнах Римана (Глава 3), а условия неубывания энтропии и эволюционности разрыва выполнены для ударных волн, которые близки опрокидывающимся волнам Римана.

Для квазипоперечных волн найдено (§ 4.2) явное выражение (4.12) для изменения продольной деформации $u_3$, которое выполняется для всех квазипоперечных ударных волн и совпадает с аналогичным выражением, полученным в Главе 3 для волн Римана. Исключение $u_3$ из общих соотношений на разрыве приводит к соотношениям (4.15) на разрыве для эквивалентной несжимаемой среды, той же, которая была введена при изучении квазипоперечных волн Римана (§ 4.3).

Получена и исследована ударная адиабата квазипоперечных ударных волн (§ 4.3) на плоскости $u_1u_2$. Это кривая, представляющая множество состояний $u_1$, $u_2$ за возможными ударными волнами, распространяющимися по заданному состоянию $u_1 = U_1$, $u_2 = U_2$, $u_3 = U_3$. Уравнение ударной адиабаты дается равенством (4.16) или (4.19). Типичная форма этой кривой на плоскости $u_1u_2$ представлена на рис. 4.1. Проведено обсуждение ва-

риации формы ударной адиабаты в зависимости от входящих в уравнение параметров $U_1$, $U_2$, $G = g/\varkappa$. Показано, что параметр $G$ всегда может быть обращен в единицу путем изменения масштаба для $u_1$ и $u_2$. Найдено условие неубывания энтропии (4.21), которое зависит от знака $\varkappa$, и участки ударной адиабаты, которые этому условию удовлетворяют (§ 4.4).

Исследованы ограничения, накладываемые на разрывы требованием эволюционности. При этом предполагается, что соотношения на разрывах даются только законами сохранения (априорная эволюционность), а какие-либо дополнительные соотношения отсутствуют.

Условия эволюционности позволяют разделить квазипоперечные эволюционные ударные волны на быстрые и медленные (§ 4.5) Исследована скорость ударных волн (§ 4.6),представленная равенством (4.6). Указано расположение на ударной адиабате в зависимости от параметров $U_1$, $U_2$ и $G$ эволюционных отрезков, т.е. отрезков состоящих из точек, представляющих состояния за эволюционными разрывами. Имеется два существенно различающихся варианта расположения эволюционных отрезков: при $\varkappa > 0$ и при $\varkappa < 0$.

Показано, что выполнение требования эволюционности для слабых квазипоперечных ударных волн обеспечивает и неубывание энтропии.

Если фиксировано состояние $(U_1, U_2)$ за разрывом, то множество состояний перед разрывом также лежит на ударной адиабате точки$(U_1, U_2)$, однако, отрезки эволюционности будут другими (§ 4.9).

Изучена форма ударной адиабаты и расположение эволюционных отрезков при наличии дополнительных симметрий в условиях на ударных волнах, которые имеют место при частных видах начальной деформации, при отсутствии волновой анизотропии или при наличии очень большой анизотропии.

В отсутствии анизотропии, когда $G = 0$, существуют вращательные разрывы, совпадающие с вращательными волнами Римана и не сопровождающиеся изменением энтропии.

Обсуждены поперечные ударные волны в несжимаемых средах (§ 4.12).

# Глава 5.

# Нестационарные автомодельные задачи для волн малой амплитуды

## 5.1. Предварительные замечания

Рассмотренные в Главах 3 и 4 решения одномерных нестационарных уравнений для непрерывных или разрывных движений с плоскими волнами могут быть использованы при отыскании решений начально-краевых задач теории упругости для уравнений (2.18)

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

при заданной функции $\Phi(u_i, S)$. Эти уравнения допускают введение *автомодельной переменной* $x/t$. Если таким же свойством обладают граничные и начальные условия, то *задача является автомодельной.*

Для этого достаточно, чтобы начальные и граничные условия были заданы набором постоянных, например, при однородном начальном состоянии граничные условия заданы в виде ступеньки $u_i(t = 0) = U_i^0 = \text{const}, u_i(t > 0) = u_i^* = \text{const}$.

Решениями таких задач для дифференциальных уравнений (5.1) являются автомодельные, или центрированные, волны Римана (§ 1.4),в которых в качестве переменной $\theta$ выбрана функция $\theta = x/t$. Их характеристики на плоскости $x, t$ представляют собой *расходящийся пучок прямых*, существующий при условии $\partial c/\partial x > 0$, где $c(u_i)$ – характеристическая скорость. Это условие задает вполне определенное направление изменения величин в автомодельных волнах Римана, которое отмечено на рис. 3.1 стрелками на интегральных линиях для сред с $\varkappa > 0$ (и противоположное при $\varkappa < 0$). Волна представляет собой непрерывное решение, расширяющееся со временем. Ее передний фронт движется с характеристической скоростью, соответствующей состоянию перед волной, а задний – с характеристической скоростью состояния за волной. Кроме волн Римана решение может содержать также разрывы, которые, очевидно, тоже представляют собой автомодельные решения.

Таким образом, решения автомодельных задач могут строиться в виде *комбинаций эволюционных ударных волн и расширяющихся со временем волн Римана разных типов*. Построение таких решений служит, кроме того, одним из критериев для разрешения вопроса о реализуемости тех или иных типов скачков. До сих пор при отборе реально осуществимых ударных волн к ним предъявлялись три требования: во-первых, выполнение законов сохранения массы, импульса, энергии, во-вторых, неубывание энтропии и, в-третьих, выполнение условий эволюционности. По условию одновременного соблюдения этих трех требований в Главе 4 был найден некоторый набор ударных волн разных типов, которые будут считаться физически допустимыми (дальнейшее обсуждение этого вопроса будет проводиться в Главе 8). Использование таких разрывов в конструкции решений автомодельных задач выясняет, достаточен ли этот набор, чтобы можно было получить решение при любых начально-граничных данных и, в то же время, все ли указанные ударные волны необходимы в решении задач, или без некоторых можно обойтись. Для этой цели наилучшим образом служит задача,которая является аналогом *задачи о поршне* в газовой динамике.

## 5.2. Задача о внезапном изменении нагрузки на границе полупространства ("задача о поршне")

Рассмотрим автомодельную задачу о внезапном изменении напряжений (и следовательно деформаций) на границе упругого полупространства. Нелинейная упругая среда задана своим упругим потенциалом, представленным в виде разложения (2.26), полученного в предположении малости $u_i$ ($u_i \sim \varepsilon$)

$$\begin{aligned}\Phi = &\frac{1}{2}f(u_1^2+u_2^2)+\frac{1}{2}g(u_2^2-u_1^2)+\frac{1}{2}du_3^2+au_3^3\\ &+b(u_1^2+u_2^2)u_3+\frac{1}{4}h(u_1^2+u_2^2)^2+\rho_0T_0(S-S_0).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Упругая среда занимает полупространство $x_3 = x \geq 0$ и находится в однородном, вообще говоря, напряженном состоянии $\sigma_{ij} = \text{const}$, $u_i = U_i = \text{const}$, $(i,j{=}1{,}2{,}3)$ (рис. 5.1). В момент времени $t = 0$ на границе среды $x = 0$ изменяется и далее остается постоянным приложенное к ней напряжение. При этом имеются три почти эквивалентных постановки задачи, когда при $t > 0$, $x = 0$ задаются новые напряжения на границе $\sigma_{i3}^*$ или скорости точек границы $v_i^*$, или компоненты тензора градиентов перемещения $u_i = u_i^*$ (те компоненты, которые в одномерных задачах могут изменяться). Мы примем последнюю формулировку задачи как наиболее удобную при наличии результатов Главы 3 и Главы 4.

Поставленная задача автомодельна, решение зависит от $x/t$. Возмущения от границы в область $x \geq 0$ распространяются в виде плоских волн деформации. Решение конструируется из *последовательности автомодельных (центрированных) волн Римана и ударных волн, разделенных промежутками с постоянными значениями параметров среды.* Порядок следования волн определен величинами скоростей: впереди идет самая быстрая, далее в порядке убывания скоростей.

*Первой* всегда будет *квазипродольная волна*, ударная или волна Римана, так как ее скорость на конечную величину $d - f$

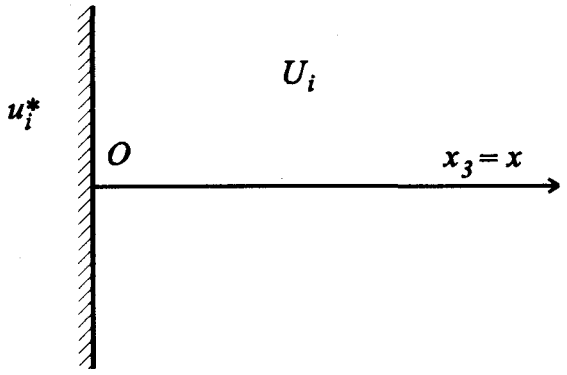



Рис. 5.1.

(близкую в изотропном случае к $\lambda + \mu$) превосходит скорости любых квазипоперечных волн. За квазипродольной волной после некоторого промежутка с однородными параметрами следует система квазипоперечных волн.

Если известно состояние $u_i$ между квазипродольной и квазипоперечными волнами, то задача об определении этих волн разделяется. Это состояние нетрудно найти, если для квазипродольной волны воспользоваться соотношениями (3.12) или (4.7), выражающими изменение $u_1$ и $u_2$ в квазипродольной волне и соотношениями (3.15) или (4.12) для изменений $u_3$ в квазипоперечных волнах. Эти все соотношения не зависят от того ударные это волны или волны Римана, а соотношения для квазипоперечных волн одни и те же для быстрых и медленных волн, что упрощает вычисления.

Покажем, что в рассматриваемом случае задачи об определении амплитуд квазипродольных и квазипоперечных волн с точностью до $\chi$ разделяются. Действительно, в квазипродольной волне такой порядок имеет изменение величин $u_\alpha$, $\alpha$=1,2, а в квазипоперечных волнах – изменение компоненты $u_3$. Если пренебречь этими изменениями, то можно считать, что перед системой квазипоперечных волн выполняются равенства $u_\alpha = U_\alpha$. Будем далее пользоваться этими значениями начальной дефор-

мации, хотя при необходимости можно находить их уточнения, производя учет изменений $u_\alpha$ в квазипродольной волне и $u_3$ – в квазипоперечных.

Квазипродольная волна полностью характеризуется начальным состоянием $U_i$, $i$=1,2,3 и изменением $u_3$ в ней. Эта волна всегда одна (в зависимости от знака $U_3 - u_{3*}$ это может быть ударная волна или волна Римана) и ее исследование уже проведено в Главах 3 и 4. Отличие величин $u_\alpha$ за квазипродольной волной от их начальных значений $U_\alpha$ составляет величину порядка $\varepsilon^2$. В дальнейшем состояние перед системой квазипоперечных волн будем считать известным и сохраним для него обозначение $U_\alpha$, $\alpha$=1,2.

Таким образом, получаем задачу для квазипоперечных волн, которая формулируется следующим образом: найти последовательность квазипоперечных волн, в которой величины $u_\alpha$ изменяются от $U_1, U_2$ впереди до $u_1^*, u_2^*$ позади. Построение решения сводится к указанию на фазовой плоскости $u_1, u_2$ пути, соединяющего начальное состояние $A(U_\alpha)$ с конечным $B(u_\alpha^*)$, с использованием при этом интегральных кривых неопрокидывающихся волн Римана и эволюционных участков ударных адиабат при соблюдении правила скоростей.

Точку $A$, представляющую начальное состояние, достаточно всегда помещать в первой четверти плоскости $u_1u_2$. В силу симметрии постановки относительно осей $u_1$ и $u_2$, решение задачи для начальных состояний в других четвертях находится зеркальным отражением относительно соответствующей оси. При этом в качестве конечного состояния $u_\alpha^*$ следует испытать любую точку этой плоскости.

При построении решения следует обратить внимание на то, что центрированные волны Римана не могут изменить знак деформации сдвига. Важное значение при конструировании последовательностей волн имеют ударные волны Жуге (§ 1.6, § 4.5), для которых скорости движения фронта $W$ совпадают с одной из характеристических скоростей $c_\alpha^\pm$ за или перед фронтом разрыва, т.е. в условиях эволюционности выполняются знаки равенства.

Если $W = c^+$, то вслед за ударной волной Жуге может ид-

ти волна Римана того же типа, у которой скорость переднего фронта совпадает с $W$, и следовательно, она вплотную примыкает к ударной волне. Если $W = c^-$, то ударная волна Жуге идет непосредственно за волной Римана того же типа, сливаясь с ее задним фронтом. В точках, где $W = c^+$, ударная адиабата касается соответствующей интегральной кривой волны Римана.

В дальнейшем будем обозначать буквами $R_1$ и $R_2$ соответственно медленную и быструю волны Римана, буквами $S_1$ и $S_2$ – медленную и быструю ударные волны первого типа (те, для которых эволюционный участок ударной адиабаты примыкает к начальной точке), $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$ – медленную и быструю ударные волны второго типа (у которых эволюционный участок ударной адиабаты отделен от начальной точки неэволюционной областью). Ударные волны Жуге (см. § 1.6, § 4.5) будем отмечать верхней буквой, соответствующей состоянию за ударной волной, например, $S_2^K$ – быстрая ударная волна в состояние, изображаемое точкой $K$. (При этом считаем, что характер точки Жуге и приписываемый ударной волне верхний индекс не меняются при одновременной перемене знаков у $u_1^-$ и $u_1^+$ или у $u_2^-$ и $u_2^+$ либо у всех этих величин одновременно.)

Каждая следующая волна идет по новому начальному состоянию, созданному впереди идущими волнами. Это состояние изображается своей начальной точкой, которая может находиться, вообще говоря, в любом месте плоскости $u_1u_2$. При построении ударных адиабат и интегральных кривых для этих новых состояний будем пользоваться свойством симметрии этих линий относительно осей координат при симметричных начальных точках. Скачки Жуге из новых начальных состояний будем отмечать теми же верхними буквами, какие они имели при начальной точке $A$, например, $S_2^K$ – ударная волна того же типа, что из точки $A$ в точку $K$.

У скорости скачка $W$, когда это необходимо для понимания, будем указывать его начальную и конечную точки на плоскости $u_1u_2$, например, $W_{JM}$ – скорость ударной волны, идущей по состоянию $J$ и переводящей его в состояние, изображаемое точкой $M$. Обычно, когда начальным состоянием служит состояние $A$, скорость скачка будет обозначаться только одной буквой конеч-

ного состояния.

Выше, в Главах 3 и 4, было отмечено существенное различие в поведении рассматриваемых волн в зависимости от знака коэффициента $\varkappa$ (3.19), входящего в функцию $H(u_1, u_2)$ (см. равенства (3.18) и (4.14)), через которую записываются уравнения волн Римана и соотношения на разрывах

$$H(u_1, u_2) = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\varkappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0 (S - S_0). \tag{5.3}$$

Коэффициент $\varkappa$, как неоднократно указывалось ранее, отвечает за нелинейные свойства среды. Естественно, что последовательности волн, представляющие решение, при разных знаках $\varkappa$ тоже будут отличаться и составом волн, и порядком их следования. Рассмотрим построение решения автомодельной задачи о плоских волнах в полупространстве для каждой из этих сред отдельно.

## 5.3. Построение решения в средах с $\varkappa > 0$

Рассмотрим сначала упругую среду, у которой в формуле (5.2) коэффициент $\varkappa$, характеризующий нелинейность среды, положителен, $\varkappa > 0$ (Куликовский, Свешникова [1985 а]). Точку $A(U_1, U_2)$ на плоскости $u_1 u_2$, представляющую начальное состояние среды в области перед системой квазипоперечных волн, без потери общности можно считать находящейся в первой четверти фазовой плоскости $u_1 u_2$. Построим для нее ударную адиабату (рис. 4.6) и проведем интегральные линии быстрой и медленной волн Римана, определяемые уравнением (3.1).

В соответствии с результатами § 3.4, быстрая автомодельная волна Римана, идущая по заданному состоянию $A(U_1, U_2)$, может перевести среду в новое состояние, принадлежащее той ветви интегральной кривой быстрых волн (овал), которая находится в первой четверти плоскости $u_1 u_2$ выше точки $A$. Медленная волна Римана создает за собой новую деформацию, представленную

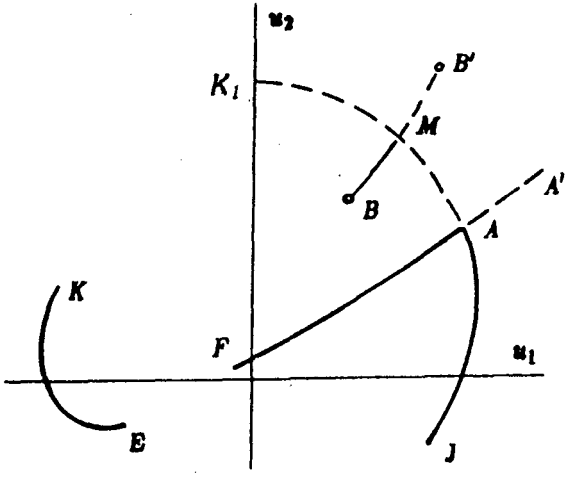



Рис. 5.2.

частью другой интегральной кривой, уходящей от точки $A$ в бесконечность. Эти участки интегральных кривых соответствуют неопрокидывающимся волнам Римана, что указано стрелками на рис. 3.1. На рис. 5.2 эти участки интегральных кривых изображены штриховой линией.

Если заданное на границе $x = 0$ состояние $u_\alpha^*$ принадлежит какому-нибудь из указанных участков, то решением будет одна расширяющаяся быстрая или медленная волна Римана. Скорость ее переднего фронта равна соответствующей характеристической скорости в точке $A$, т.е. $c_1(A)$ для медленной волны и $c_2(A)$ для быстрой. Это решение схематически изображено на рис. 5.3 *а*. На рисунке внизу на плоскости $x, t$ пучок характеристик, расходящихся из точки $x = 0$, $t = 0$, соответствует центрированной волне Римана. На верхней схеме дан вид профиля функций $u_\alpha(x)$ в медленной волне Римана $R_1$ в некоторый момент времени $t'$, отмеченный на оси $t$.

Одной ударной волной из начального состояния $A$ можно перевести среду в новое состояние $u_\alpha^*$ в том случае, если на плоскости $u_1u_2$ точка $B(u_1^*, u_2^*)$, представляющая состояние на гра-

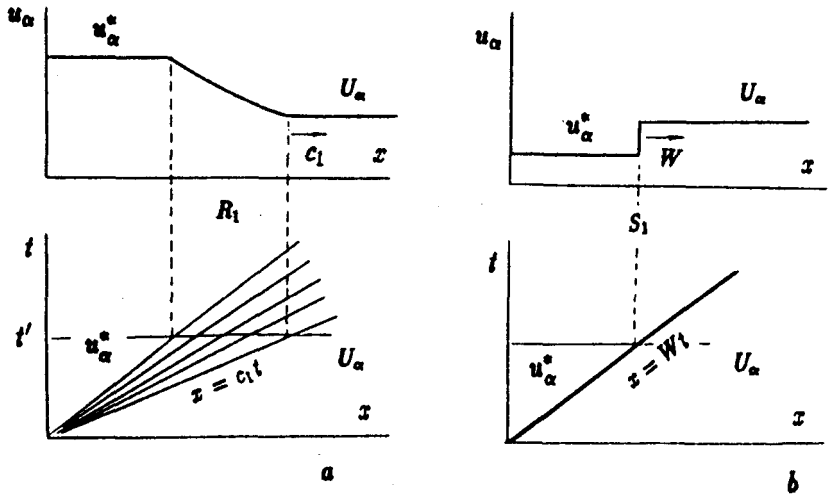



Рис. 5.3.

нице, принадлежит эволюционным участкам ударной адиабаты (рис. 4.6). Как показано в § 4.6, количество и положение этих отрезков зависит от соотношения между компонентами начальной деформации $U_\alpha$ и параметром анизотропии $G = g/\varkappa$, а именно, от знака функции $\Delta(U_1, U_2, G)$, введенной формулой (4.30). Поэтому дальнейшее описание решения следует проводить раздельно для случаев $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$.

На рис. 5.2 жирной линией изображены эволюционные участки $AJ$, $AF$ и $EK$ ударной адиабаты с начальным состоянием в точке $A$, когда $\Delta(A) < 0$. Если граничное состояние $B(u_\alpha^*)$ принадлежит отрезку $AJ$ или $EK$, то от границы $x = 0$ в область $x > 0$ идет одна быстрая ударная волна $S_2$ или $\hat{S}_2$, скорость которой $W$ зависит от положения точки $u_\alpha^*$ на ударной адиабате. Если же состояние $u_\alpha^*$ принадлежит отрезку $AF$, то от границы в область $x > 0$ идет одна медленная ударная волна $S_1$. Изменение деформаций в такой волне дано на рис. 5.3 *b*.

Пусть теперь точка $u_\alpha^*$ занимает какое-нибудь другое произвольное положение на плоскости $u_1 u_2$. Очевидно, для решения понадобится система волн. Каждая следующая идет по новому

состоянию, которое является для нее начальным и для которого тоже необходимо знать знак функции $\Delta$.

Линия $\Delta = 0$ (рис. 4.3) делит всю плоскость начальных данных на две области – внутри этой линии $\Delta > 0$ и вне ее $\Delta < 0$. Надо знать в какой из областей находится не только точка $A$, но дуга интегральной кривой $AK_1$ и эволюционный участок ударной адиабаты $AJ$ быстрых волн, которые в решении будут идти первыми, и состояния за ними будут служить фоном для следующих волн. Напомним, что точка Жуге $J$ находится в четвертой четверти и ее координаты всегда подчиняются неравенству $|u_\alpha(J)| < |u_\alpha(A)|$. Можно указать несколько вариантов положения точек $A$ и $J$ относительно линии $\Delta = 0$, которые дадут качественно различные решения. Они приведены на рис. 5.4.

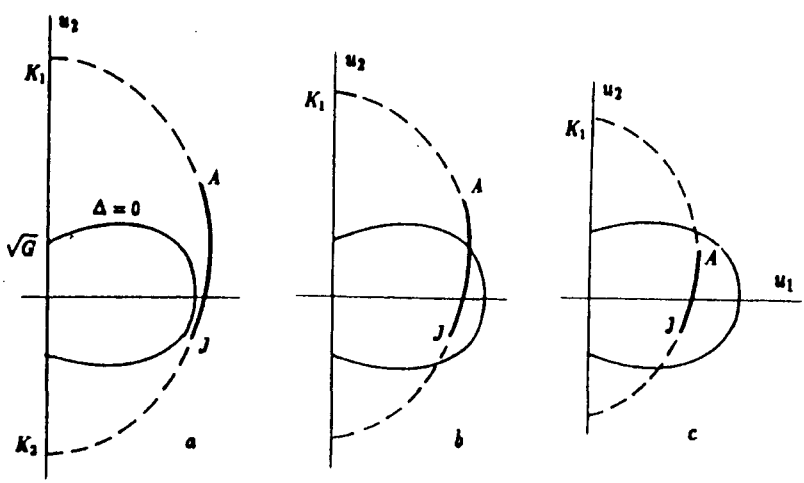



Рис. 5.4.

Тонкой сплошной линией на рис. 5.4 изображена интересующая нас часть линии $\Delta = 0$, жирной линией – эволюционный участок ударной адиабаты и штриховой – интегральные кривые быстрых волн Римана, проходящие через точки $A$ и $J$.

Рассмотрим построение решения из последовательности волн в зависимости от положения точки $A$, представляющей началь-

ное состояние. Начнем со случая, когда не только точка $A$, но и весь отрезок $AJ$ лежит в области $\Delta < 0$ (рис. 5.4 *а*). Для этого, очевидно, надо, чтобы $G/R^2 \ll 1$, где $R^2 = U_1^2 + U_2^2$. Покажем, как строится решение в этом случае.

Пусть граничное состояние $u_\alpha^*$ представлено точкой $B'$ на рис. 5.2. Начальную точку $A$ можно соединить с точкой $B'$, используя отрезки интегральных кривых двух волн Римана, сначала быстрой $(AM)$, затем медленной $(MB')$. Это значит, что по начальному состоянию $U_\alpha$ от границы в область $x > 0$ идет сначала быстрая волна Римана $R_2$, скорость ее переднего фронта $c_2(A)$, состояние за ней $u_\alpha(M)$. За этой волной имеется расширяющаяся по автомодельному закону область постоянных значений $u_\alpha(M)$. Затем идет вторая, медленная волна Римана со скоростью переднего фронта $c_1(M)$. Такую последовательность волн записываем в виде $R_2R_1$. Порядок написания символов соблюдаем тот же, что и порядок следования волн от границы в область $x > 0$ — впереди идет быстрая волна Римана $R_2$, затем медленная волна Римана $R_1$.

Иллюстрация этого решения дана на рис. 5.5 *а*. На плоскости $x, t$ пучками прямолинейных характеристик представлены автомодельные волны Римана, быстрая и медленная. В верхней части рисунка приведен качественный вид профилей компонент $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в некоторый момент времени $t'$, отмеченный на характеристической плоскости $x, t$. Если взять другой момент времени $t''$, то легко представить, как будут расширяться со временем области $AM$ и $MB$, соответствующие волнам Римана, и область постоянных параметров $MM$. Такую форму имеет решение, если точка $u_\alpha^*$, представляющая состояние на границе, оказалась на плоскости $u_1u_2$ в области между линиями $A'A$, $AK_1$ и $K_1K_1'$, представляющих участки интегральных кривых волн Римана. На общей картине на рис. 5.6 область с таким видом решения $R_2R_1$ отмечена цифрой $1'$.

Если же состояние $u_\alpha^*$ представлено на рис. 5.2 точкой $B$, то за первой быстрой волной Римана $R_2$, переводящей состояние $A(U_1, U_2)$ в состояние $M(u_1^M, u_2^M)$, идет медленная ударная волна $S_1$. Отрезок $MB$ на рис. 5.2 является эволюционной частью ударной адиабаты, построенной для точки $M$ как начальной.

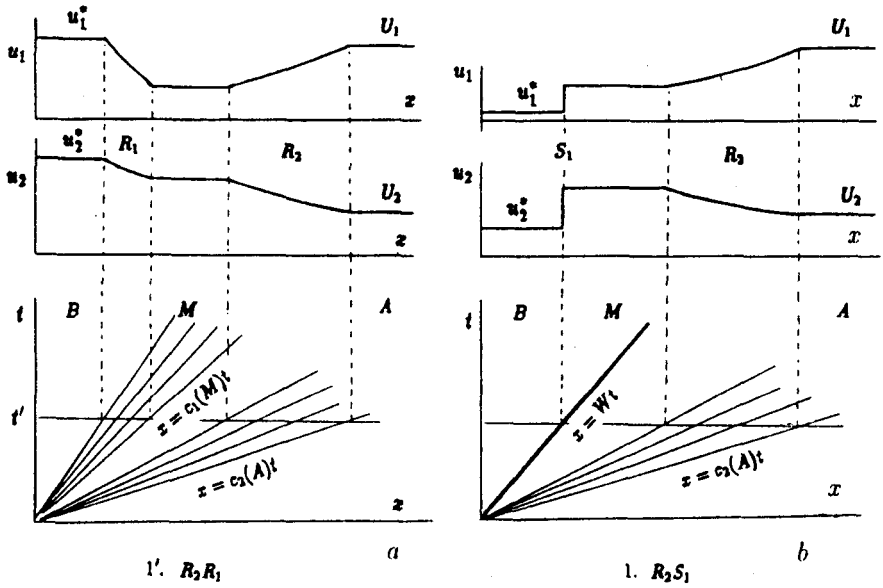



Рис. 5.5.

Решение состоит из двух волн $R_2S_1$ и представлено на рис. 5.5 *b*. Закон движения фронта разрыва на характеристической плоскости $x, t$ выделен жирной линией. Так будем изображать ударные волны на всех последующих рисунках этой главы.

Теперь укажем на плоскости $u_1u_2$ границы области для значений $u_\alpha^*$, которые дают решение найденного вида. Обратимся к рис. 5.6, на котором дана общая картина областей с разными решениями, которые нам предстоит обсудить ниже.

На рис. 5.6 и всех последующих в этой главе, части *интегральных кривых волн Римана*, входящие в состав границ областей, будем изображать *штриховой линией, эволюционные части ударных адиабат* при любых начальных точках – жирной сплошной линией. Прочие части границ, которые будут оговариваться особо, – пунктирной линией.

Найденное решение $R_2S_1$ пригодно для всех значений $u_\alpha^*$ из области 1 на рис. 5.6. Одной из границ для нее служит дуга

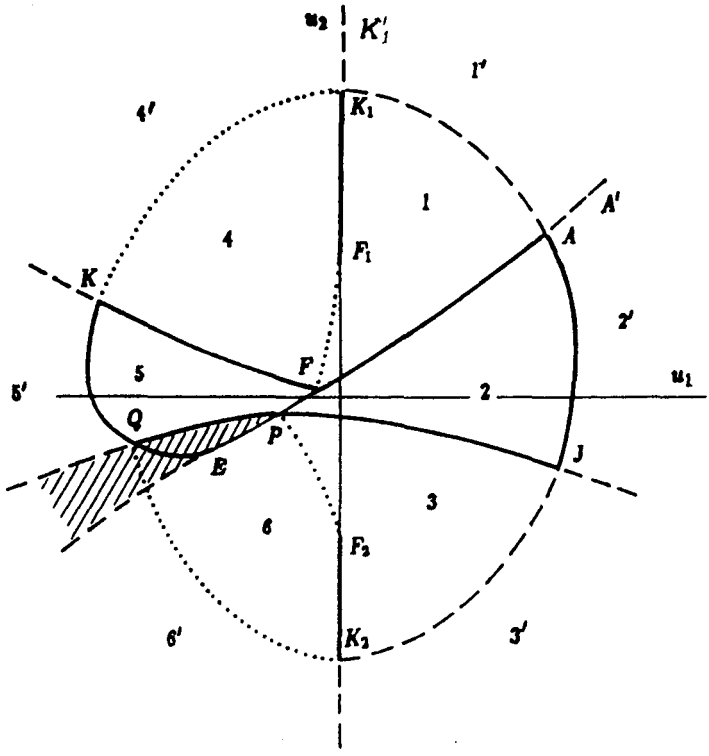



Рис. 5.6.

$AK_1$ интегральной кривой идущей впереди быстрой волны Римана. Эволюционные отрезки ударных адиабат идущих следом медленных волн начинаются из точек дуги $AK_1$ и заканчиваются точками Жуге типа $F$ во второй четверти. Их концы составляют линию $FF_1$ и в них $W = c_2^- = c_2(M)$. Эволюционный отрезок из точки $K_1$ идет вдоль оси $u_2$ и его концом является точка $F_1$. Таким образом, эволюционные отрезки медленных волн заметают область, ограниченную дугой $AK_1$ с одной стороны и линией $FF_1$ с другой. В состав границы входят отрезки $AF$ и $K_1F_1$ ударных адиабат.

Таким же образом строятся решения для других областей $u_\alpha^*$ на рис. 5.6. За быстрой ударной волной $S_2$ из состояния $A$ в

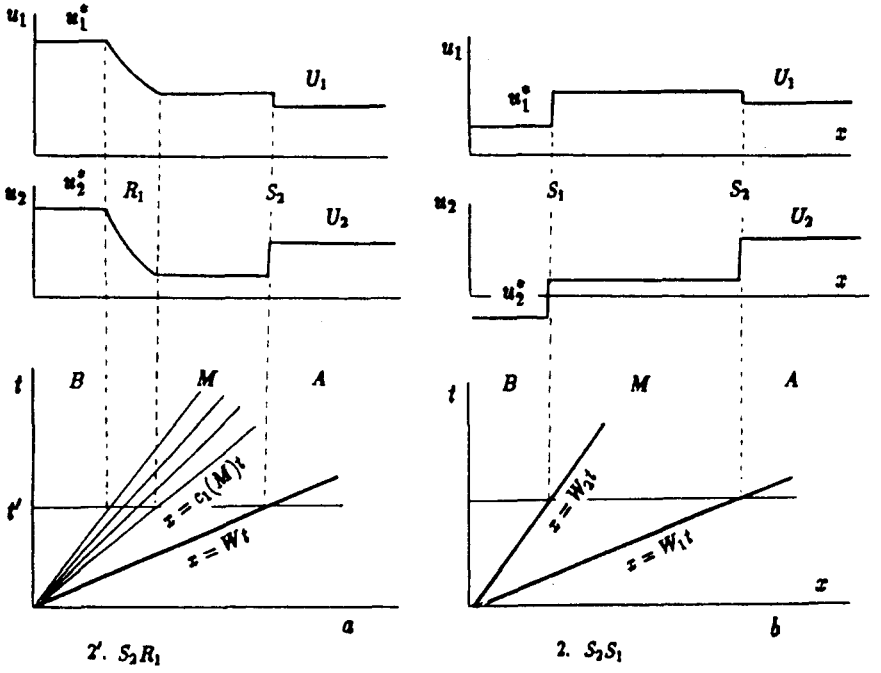



Рис. 5.7.

точки отрезка $AJ$ может идти медленная волна Римана $R_1$, что позволяет получить решение, когда состояние $u_\alpha^*$ находится в области $2'$. Решение имеет вид $S_2R_1$ и представлено на рис. 5.7 *a*. Граница области $2'$ снизу проходит по интегральной кривой медленных волн, проведенной через точку $J$ в бесконечность. Сверху область $2'$ соприкасается с областью $1'$ вдоль интегральной кривой $AA'$.

За первой быстрой ударной волной $S_2$, переводящей состояние $A$ в какое либо положение $M$ на отрезке $AJ$, следом может идти вторая, медленная, ударная волна $S_1$, переводящая состояние $M$ в точки области 2 (рис. 5.6). Решение имеет вид $S_2S_1$ и приведено на рис. 5.7 *b*.

Для выяснения границ области 2 рассмотрим эту ситуацию более подробно. С этой целью на рис. 5.8 *a* изображена часть

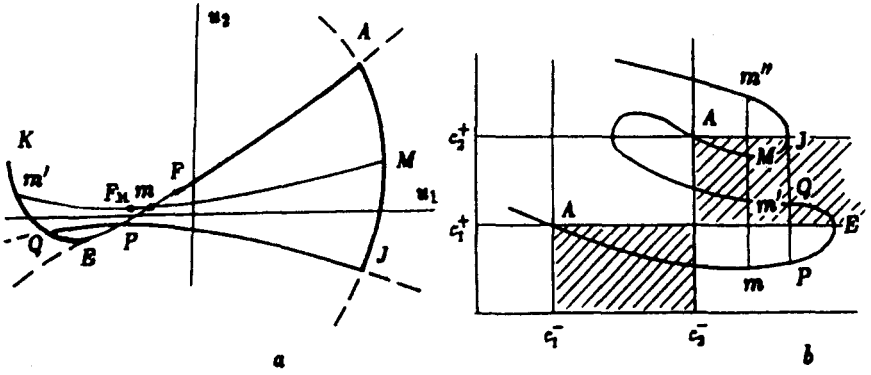



Рис. 5.8.

ударной адиабаты точки $A$, содержащая эволюционные участки $AJ$, $AF$ и $EK$, выделенные жирной линией.

Условием $\Delta(A) < 0$ предопределено существование двух типов быстрых волн (отрезки $AJ$ и $KE$) и точек Жуге $F$ и $K$. Точка $M$ – какая-нибудь точка отрезка $AJ$ – представляет состояние за первой, быстрой ударной волной $S_2$. Из нее как из начальной проведена дуга ударной адиабаты медленной волны $S_1$. На рис. 5.8 *b* дана диаграмма эволюционности (см. §§ 1.8 и 4.7) ударных волн из точки $A$. Из нее видно, что для первой, быстрой волны (верхняя заштрихованная область) $W_1 \leq c_2^+ = c_2(M)$. Идущая следом медленная ударная волна из точки $M$ имеет эволюционный отрезок, который заканчивается точкой Жуге $F_M$. Так как вся дуга $AJ$ находится в области $\Delta < 0$, то $W_2(F_M) = c_2^- = c_2(M)$.

Сравнивая последнее равенство с условием эволюционности для $W_1$, мы видим, что на конце $F_M$ эволюционного отрезка скорость второй волны превышает $W_1$. Такая волна не может быть использована в автомодельном решении, в котором должно соблюдаться правило $W_2 \leq W_1$ (кроме единственной точки, где в обоих условиях одновременно действует знак равенства, о чем будет речь ниже). Из-за монотонности изменения скорости $W_2$

вдоль эволюционного отрезка $MF_M$, можно утверждать, что где-то внутри этого отрезка имеется точка, где $W_2 = W_1 = W_{AM}$. Эта точка служит на отрезке $MF_M$ границей, до которой пригодно решение $S_2S_1$. Такую комбинацию двух эволюционных ударных волн, у которых $W_2 = W_1$, т.е. движущихся с одинаковой скоростью, можно рассматривать как один скачок и состояние за ним принадлежит одновременно ударной адиабате из точки $A$ и эволюционному участку второго скачка из состояния $M$. О таких комбинациях скачков, движущихся с одинаковой скоростью, подробно рассказано в § 4.13.

Таким образом, две ударные адиабаты пересекаются и в точке пересечения $W_2 = W_1 = W_{AM}$. Из графика скоростей на рис. 5.8 *b* видно, что на ударной адиабате имеется три таких точки, где $W = W_{AM}$ (точки $m$, $m'$ и $m''$ на вертикали $W = W_{Am}$). Одна из них ($m$) лежит на отрезке $FE$ (рис. 5.8 *a* и *b*). Именно она служит концом участка $MN$, на котором решение автомодельной задачи о поршне имеет обсуждаемый сейчас вид $S_2S_1$. Ударный переход в состояние $m$ непосредственно из точки $A$ одним скачком является неэволюционным и не входит в решение задачи.

Вторая точка пересечения $m'$ находится на эволюционном участке $KE$ первой адиабаты. Поэтому для точки $m'$ решением задачи является один скачок $\hat{S}_2$ из начального состояния $A$.

На ударной адиабате есть еще одна точка $m''$, для которой $W_{Am''} = W_{AM}$. Однако, не существует эволюционного скачка в это состояние ни из точки $A$, ни из точки $M$. Решение для граничного состояния, представленного точкой $m''$, имеет другой вид.

Будем теперь увеличивать интенсивность первой ударной волны, перемещая точку $M$ по отрезку $AJ$ от $A$ к $J$. При этом точка $m$ перемещается по линии $FE$ от $F$ в сторону $E$ (рис. 5.8), а эволюционные отрезки $Mm$ покрывают всю область 2, начиная от линии $AF$; последний из них идет из точки Жуге $J$ в точку $P$ пересечения двух ударных адиабат. При скачке из состояния $A$ в точку Жуге $J$ первая ударная волна имеет максимальную скорость $W_1 = c_2^+ = c_2(J)$. Такую же скорость имеет идущая следом ударная волна со скачком параметров из $J$ в $P$. Для нее

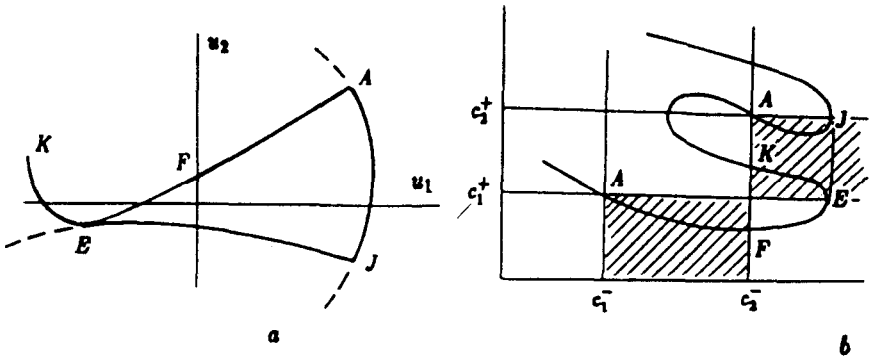



Рис. 5.9.

$W_2 = W_{JP} = c_2(J) = c_2^-$. Таким образом, точка $P$ для второй волны является точкой Жуге того же типа, что $F$ у первой. Так как $\Delta(J) < 0$, то на второй адиабате есть еще одна точка Жуге, где $W = c_2^- = c_2(J)$ (того же вида, что $K$).

Это точка $Q$ – вторая точка пересечения ударных адиабат. Наличие двух точек $P$ и $Q$ с равными скоростями $c_2(J)$ по разные стороны от точки максимума скоростей $E$ хорошо видно на графике скорости на рис. 5.8 *b*. Эти рассуждения показывают, что условие $\Delta(J) < 0$ (существование двух точек Жуге $P$ и $Q$) равносильно условию $W_J < W_E$ (рис. 5.8*b*), и пока оно выполнено, точка $P$ является внутренней для отрезка $FE$.

Итак, границей области 2, где решение имеет вид $S_2S_1$, служат эволюционные отрезки $AJ$, $AF$ и $JP$ и часть $FP$ неэволюционного отрезка первой ударной адиабаты.

Если окажется,что $W_{AJ} = W_{AE}$, то $c_2(J) = c_1(E)$. Для ударной адиабаты точки $J$ это означает $c_2^- = c_1^+$ и точки $P$, $E$ и $Q$ сливаются в одну точку $E$, в которой ударные адиабаты двух волн касаются одна другой. Так как точка $E$ является точкой Жуге по состоянию за разрывом, то обе адиабаты касаются в этой точке интегральной кривой медленных волн Римана.

Совпадение точек $P$, $E$ и $Q$ означает, что $\Delta(J) = 0$. Вследствие монотонности изменения $W$ вдоль $AJ$ ясно, что отрезок

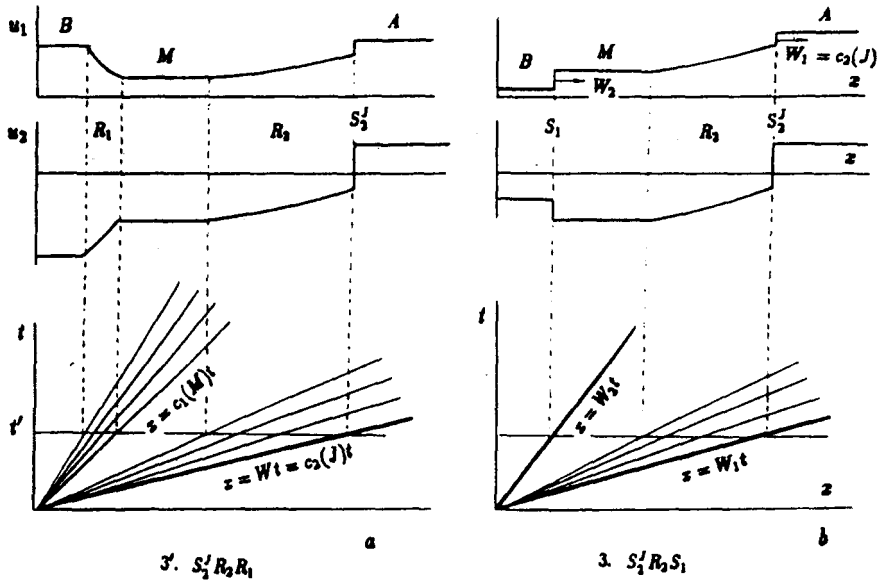



Рис. 5.10.

$AJ$ может пересечься с линией $\Delta = 0$ только в одной точке. Таким образом, точка $J$ первая из отрезка $AJ$, которая, перейдя через линию $\Delta = 0$, может попасть из области $\Delta < 0$ в область $\Delta > 0$. Это предельная ситуация, когда на всем отрезке $AJ$ выполнено условие $\Delta \leq 0$. Граница области 2 для этого случая состоит из дуг $AE$, $AJ$ и $JE$ двух ударных адиабат волн $S_2$ и $S_1$ (рис. 5.9 *a*).

Теперь укажем решение для областей 3 и 3′ на рис. 5.6. Первой идет быстрая ударная волна Жуге $S_2^J$ в состояние $J$. Непосредственно за ней может идти тоже быстрая волна Римана, так как скорость ее переднего фронта совпадает со скоростью скачка Жуге. Интегральная кривая этой волны касается ударной адиабаты в точке $J$. За этой волной можно получить любое состояние на дуге интегральной кривой $JK$ (рис. 5.6) вплоть до оси ординат. Далее решение строится так же, как для областей 1 и 1′ с использованием медленной ударной волны или медленной волны Римана. Для области 3′ решение имеет вид $S_2^J R_2 R_1$

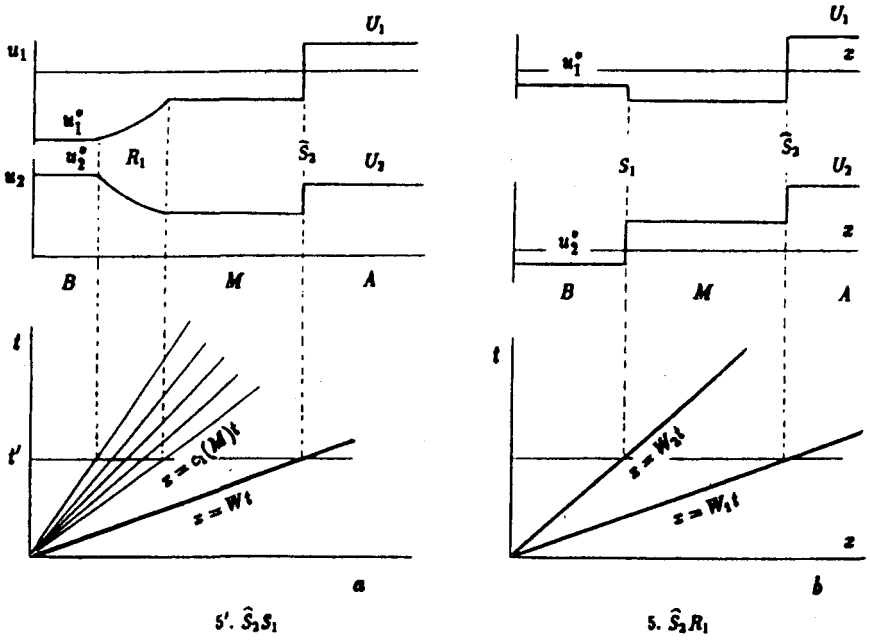



Рис. 5.11.

(рис. 5.10 $a$), для области 3 — $S_2^J R_2 S_1$ (рис. 5.10 $b$).

По верхней границе области 3 и 3′ примыкают соответственно к областям 2 и 2′. Левой границей области 3′ служит интегральная кривая, идущая вниз от точки $K_2$ до минус бесконечности вдоль оси ординат. Для области 3 это эволюционный участок $F_2K_2$ медленной ударной волны $S_1$ и линия $F_2P$, состоящая из точек Жуге (типа $F$), в которых $W_2 = c_2(M) = c_2^-$.

Теперь построим решение для значений $u_\alpha^*$ из левой полуплоскости $u_1u_2$. Ни волнами Римана, ни обычными ударными волнами (первого типа), чьи эволюционные участки примыкают к начальной точке, этого сделать нельзя. Решение всегда содержит быструю ударную волну второго типа $\hat{S}_2$. Одним скачком $\hat{S}_2$ из состояния $A$ можно перевести среду в какое-нибудь состояние $M$ на эволюционном участке $KE$. Точкой $M$, которую на рис. 5.6

не изображаем, все время пользуемся для обозначения промежуточного состояния за первой волной (см. рис. 5.2 или 5.8). Если вслед за этой волной идет медленная волна Римана $R_1$, то эта последовательность $S_2R_1$ переводит начальное состояние в точки области $5'$. Вид решения представлен на рис. 5.11 *a*.

Верхней и нижней границами области $5'$ служат интегральные кривые медленных волн, уходящие из точек Жуге $K$ и $E$, причем из точки $E$ – по касательной к ударной адиабате в этой точке.

Для решения в области 5 за первой быстрой ударной волной $\hat{S}_2$ должна идти медленная ударная волна $S_1$. Решение $\hat{S}_2S_1$ приведено на рис. 5.11 *b*.

Скорость скачка из точки $A$ в точки Жуге $F$ и $K$ одинаковы $W_{AK} = W_{AF} = c_2^- = c_2(A)$. Поэтому состояние $F$ достигается из начального либо одним медленным скачком $A \to F$, либо последовательностью двух скачков $\hat{S}_2^K S_1^F$ (сначала $A \to K$, затем $K \to F$), идущих с одинаковой скоростью $W = c_2(A)$. Эволюционный отрезок $KF$ ударной адиабаты, построенной для точки $K$, является верхней границей области 5.

Скорость первой ударной волны из состояния $A$ во внутренние точки $M$ отрезка $KE$ имеет величину $W_1 > c_2(A)$. Кроме того, согласно условиям эволюционности (4.23) быстрых волн

$$c_1^+ \le W_1 \le c_2^+, \quad \text{т.е.} \quad c_1(M) \le W_1 \le c_2(M).$$

Для второго (медленного) скачка, идущего по состоянию $M$, условия эволюционности требуют

$$c_1^- \le W_2 \le c_2^-, \quad \text{т.е.} \quad c_1(M) \le W_2 \le c_2(M).$$

Сравнивая области, выделенные этими неравенствами для скоростей первой и второй ударных волн, видим, что $W_1$ и $W_2$ имеют один и тот же диапазон изменения, а потому для каждой быстрой ударной волны обязательно найдется такая медленная, идущая следом, что $W_2 = W_1$ и, значит, состояние за ней принадлежит и первой ударной адиабате тоже. Так как в автомодельной задаче должно быть $W_2 \le W_1$, то в решении могут использоваться эволюционные участки медленных волн от своих начальных точек на $KE$ до пересечения с ударной адиабатой

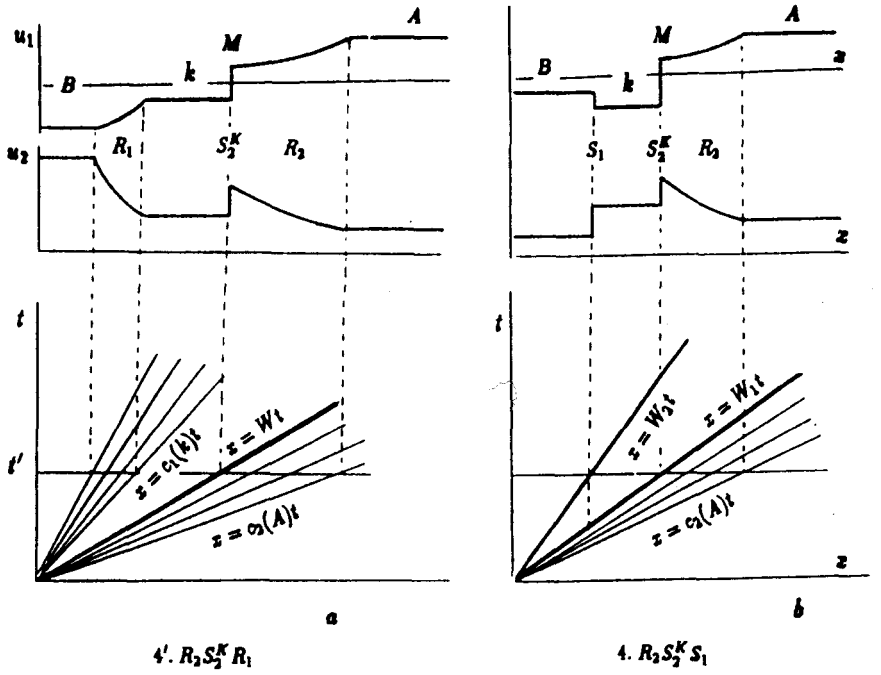



Рис. 5.12.

первого скачка. Точки пересечения пробегают отрезок $EF$, который и служит нижней границей области 5.

Для областей 4 – 4′ решение строится следующим образом. Быстрая волна Римана $R_2$ из начального состояния $A$ приводит в любую точку $M$ дуги $AK_1$. За ней идет быстрая ударная волна Жуге второго типа $\hat{S}_2^K$ со скоростью $W = c_2^- = c_2(M)$, т.е. она вплотную примыкает к волне Римана. Ранее было показано (§ 4.11), что, чем ближе к вертикальной оси начальная точка ударной волны, тем ближе со своей стороны к вертикальной оси соответствующая ей точка Жуге $K$. Поэтому, выбирая соответствующим образом точки $M$ на дуге $AK_1$, волной типа $\hat{S}_2^K$ можно придти в любую точку дуги $KK_1$. Идущая за ней медленная простая волна $R_1$ завершает решение для области 4′. Оно имеет вид $R_2\hat{S}_2^K R_1$ и представлено на рис. 5.12 *a*.

По интегральным линиям, выходящим из точек $K$ и $K'$ область $4'$ граничит с $1'$ и $5'$.

Если за $\hat{S}_2^K$ идет медленная ударная волна $S_1$, то ее эволюционные участки идут в область 4. Согласно условиям эволюционности для быстрой волны выполнено условие $W_1 = c_2(M) < c_2(k)$, где точка $k$ представляет состояние за этой волной; для медленной волны, идущей по состоянию $k$, $W_2 \leq c_2(k)$. В решение могут быть включены только те медленные волны, у которых $W_2 \leq W_1$. Сравнивая неравенства для $W_1$ и $W_2$, видим, что для каждой фиксированной скорости $W_1$ на эволюционном отрезке второй, медленной, волны вследствие монотонности изменения скорости можно указать точку, где $W_1 = W_2$. Но скорость первой волны известна, а потому $W_2 = W_1 = c_2(M)$.

Точки, где выполнено это условие, находятся на концах эволюционных отрезков медленных волн, идущих по состояниям $M$ (точки типа $F$). Эти точки составляют дугу $FF_1$ на рис. 5.6 и уже фигурировали в решении в качестве границы для области 1. По этой дуге области 1 и 4 примыкают одна к другой. Другими частями границы с областями 1 и 5 являются эволюционные отрезки медленных волн из пограничных точек $K$ и $K_1$. Решение $R_2\hat{S}_2^K S_1$ для области 4 представлено на рис. 5.12 *b*.

Подобным же образом строится решение для областей 6 и $6'$. Первой идет быстрая ударная волна Жуге $S_2^J$ в точку $J$. Затем быстрая волна волна Римана $R_2$, примыкающая к ударной, в любое состояние $M$ на интегральной линии $JK_2$ вплоть до оси ординат. Затем быстрая ударная волна Жуге $\hat{S}_2^K$ в соответствующую точку $k$ дуги $QK_2$ (напомним, что точка $Q$ – точка Жуге для быстрого скачка второго типа из точки $J$, т.е. точка типа $K$). Когда за $\hat{S}_2^K$ идет медленная волна Римана, получаем решение для области $6'$: $S_2^J R_2 \hat{S}_2^K R_1$ (рис. 5.13 *a*). Если за $\hat{S}_2^K$ идет медленная ударная волна $S_1$, то ее эволюционные участки могут быть использованы для решения вплоть до линии $PF_2$, на которой $W_3 = W_2(M) = c_2(M)$. Решение $S_2^J R_2 \hat{S}_2^K S_1$ найдено для области 6 (рис. 5.6), ограниченной дугой $QP$ ударной адиабаты, построенной для точки $J$, и линией $PF_2K_2Q$. Вид решения изображен на рис. 5.13 *b*.

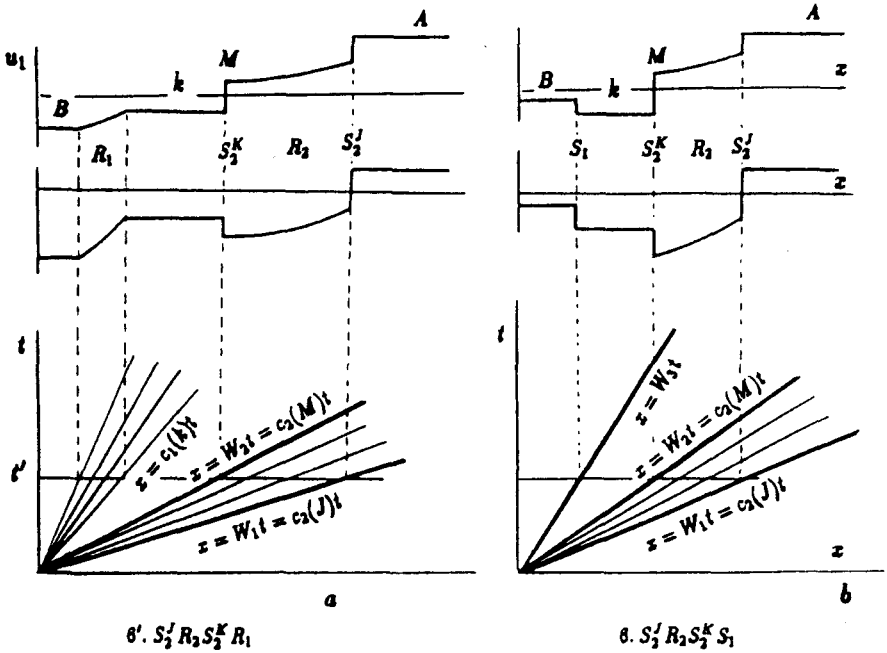



Рис. 5.13.

Таким образом, нижняя граница областей 5 – 5′ оказалась внутри областей 6 – 6′ (рис. 5.6). Области 5 и 6 имеют пересечение. Сектор перекрытия $Q'QPEE'$ заштрихован на рис. 5.6 и решение автомодельной задачи для значений $u_\alpha^*$ из заштрихованной области неединственно (двузначно).

При $G/R^2 \to 0$ точки $P$ и $F$ стремятся к началу координат, форма всех границ приближается к окружностям и лучам, но область неоднозначности не исчезает, а превращается в угловой сектор с вершиной в точке $O$.

Будем теперь увеличивать $G/R^2$, сохраняя требование $\Delta(A) < 0$, так чтобы начальная точка $A$ оставалась вне кривой $\Delta = 0$. С некоторого момента изменения $G/R^2$ точка $J$ и часть эволюционного отрезка $AJ$ оказываются внутри области $\Delta > 0$. Пересечение начальной ударной адиабаты с линией $\Delta = 0$ происходит в

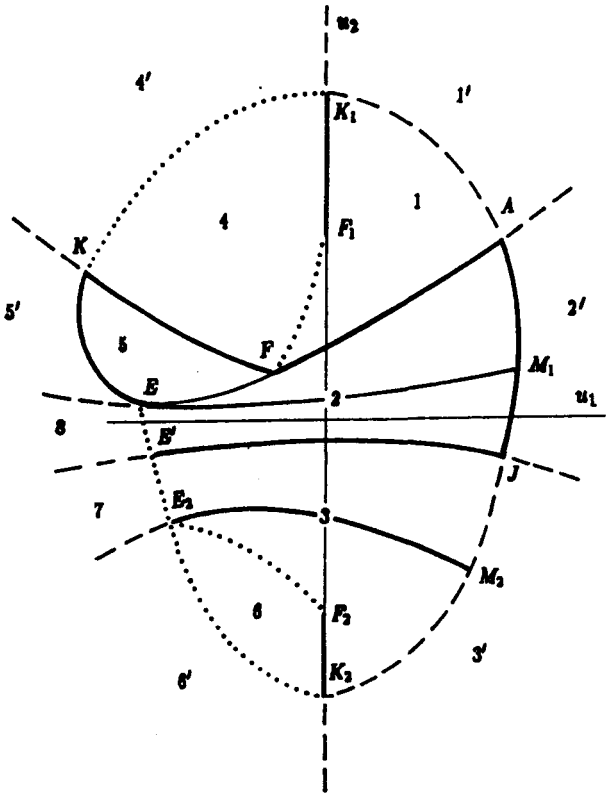



Рис. 5.14.

некоторой точке $M_1$ отрезка $AJ$ (рис. 5.14). Для медленной ударной волны, идущей по состоянию $M_1$, $c_2^- = c_1^+ = W_{AM_1} < W_{AJ}$ и ударная адиабата этой волны касается начальной в точке $E$. Выше линии $M_1E$ решение строится так же как раньше. Ниже этой линии эволюционные участки ударных адиабат из состояний $M_1J$ (внутри $\Delta = 0$) кончаются точками Жуге типа $E$, которые составляют дугу $EE'$. В этих точках $W = c_1^+$ и, следовательно, ударные адиабаты медленных волн касаются в них интегральных кривых $R_1$. Вид решения $S_2S_1$ справедлив во всей области и выше, и ниже линии $M_1E$, область ограничена линией $AFEE'J$. Левее этой линии решение продолжается медленной

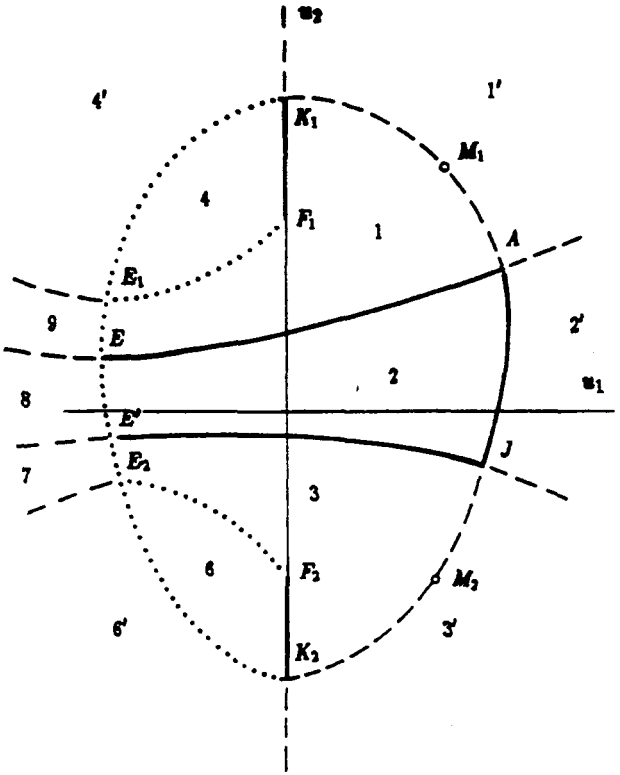



Рис. 5.15.

волной Римана $R_1$, которая идет сразу за ударной волной Жуге $S_1^E$. В области 8 между линией $EE'$ и двумя интегральными кривыми из точек $E$ и $E'$ решение имеет вид $S_2 S_1^E R_1$.

Во всех областях 1–6, 1′–6′ решения строятся так же как и раньше и имеют тот же вид, что в областях с теми же номерами на рис. 5.6. В отличие от предыдущего на рис. 5.14 появляются две новые области 7 и 8. Точка $E_2$ получена как конец эволюционного участка ударной адиабаты, идущей из точки $M_2$ – точки пересечения интегральной кривой быстрой волны Римана, проходящей через точку $J$, с линией $\Delta = 0$. Вся дуга $EE_2$ составлена из концов эволюционных участков медленных ударных волн $S_1^E$,

идущих из точек линии $M_1M_2$. Через линию $E'E_2$ решение продолжается в область 7 из области 3 медленной волной Римана и имеет вид $S_2^J R_2 S_1^E R_1$.

Пусть теперь сама начальная точка $A$ лежит в области, где $\Delta(A) > 0$. Тогда там же находится весь участок $AJ$ ударной адиабаты и служащие его продолжением отрезки $M_1A$ и $JM$ интегральных кривых семейства $R_2$ (рис. 5.15).

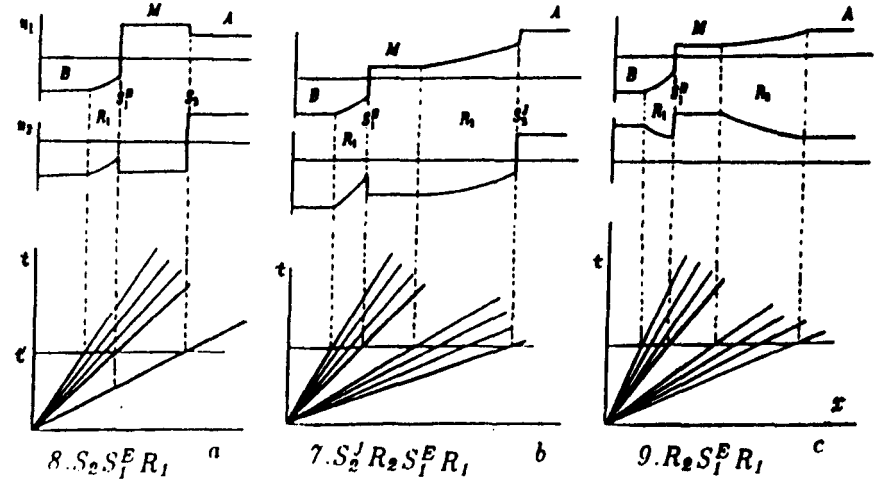



Рис. 5.16.

Дуги $K_1M_1$ и $K_2M_2$ интегральных кривых лежат в области $\Delta < 0$. Так как кривая $\Delta = 0$ проходит через точку $u_1 = 0, u_2 = \sqrt{G}$, а интегральные кривые $R_2$ пересекают ось $u_2$ выше этой точки, то такие отрезки интегральной кривой $R_2$, где $\Delta < 0$, имеются всегда. Точки $E_1$ и $E_2$ являются концами эволюционных участков медленных ударных волн $S_1^E$, идущих из пограничных точек $M_1$ и $M_2$ соответственно. В точках $E_1$ и $E_2$ и всех остальных точках дуги $E_1E_2$ скорость скачка $W = c_1^+$ и вслед за такими ударными волнами Жуге могут непосредственно идти волны Римана $R_1$. Интегральные кривые из точек $E_1$ и $E_2$ являются соответственно верхней границей области 9 и нижней для области 7 (рис. 5.15). Решение в области 9 имеет вид $R_2S_1^ER_1$. В остальных областях на рис. 5.15 решения такие же

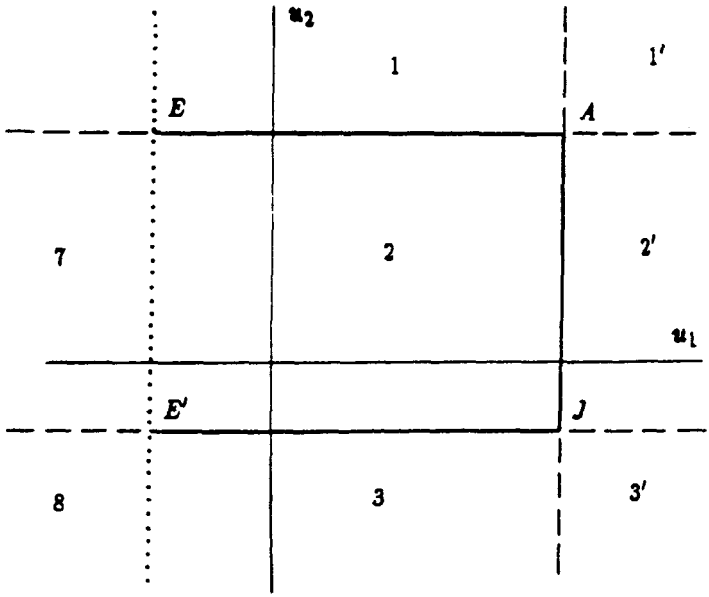



Рис. 5.17.

как в одноименных областях на рис. 5.6 и 5.14. Строение решений в областях 7, 8, 9 приведены на рис. 5.16.

При дальнейшем уменьшении величины $R^2/G$ области 4, 4' и 6, 6' уходят в бесконечность. В пределе, когда $R^2 \ll G$ и $u_1^{*2} + u_2^{*2} \ll G$, интегральные кривые волн Римана и используемые в решении части ударных адиабат близки к прямым, параллельным осям $u_1$ и $u_2$ (рис. 5.17).

## 5.4. Построение решения в средах с $\varkappa < 0$

Для сред с $\varkappa < 0$ процедура построения решения аналогична предыдущему, только вместо функции $\Delta(U_1, U_2, G)$ в такой же роли выступает функция $\Delta_1(U_1, U_2, G)$, введенная выражением (4.32), и линия $\Delta_1 = 0$ на рис. 4.3 также разделяет плоскость начальных состояний на две части с разным способом построения решений (Куликовский, Свешникова [1985 б]).

Через начальную точку $A$ в первой четверти плоскости $u_1 u_2$

проходят две интегральные кривые волн Римана, только теперь быструю неопрокидывающуюся волну дает участок линии, идущей в сторону центра, а медленная волна представлена частью овала от точки $A$ до оси $u_1$ (рис. 3.1 *b*). В эти состояния переход из начальной точки совершается одной волной Римана.

Пусть сначала точка $A$ расположена вне кривой $\Delta_1 = 0$. Из состояния $A$ возможны следующие скачки: быстрая ударная волна первого типа в точки участка $AA'$ ударной адиабаты, медленная ударная волна первого типа в точки отрезка $AH$ и медленная ударная волна второго типа в состояния на дуге $LD$ (рис. 5.18). Как и прежде, на всех рисунках интегральные кривые волн Римана изображаем штриховой линией, эволюционные участки ударных адиабат – сплошной жирной линией.

Для произвольного положения точки $(u_1^*, u_2^*)$, изображающей на плоскости $u_1u_2$ состояние на границе полуплоскости, решение имеет вид последовательности волн. Области с разной структурой решения определяются так же как в предыдущем параграфе и представлены на рис. 5.18. Опишем особенности построения решения в некоторых областях. Первой всегда идет либо быстрая ударная волна $S_2$, в которой $|u_\alpha|$ растут, либо быстрая волна Римана, в которой $|u_\alpha|$ убывают. За первой волной получим некоторое промежуточное состояние $M$ на дуге $AA'$ (за ударной волной $S_2$) или на дуге $AP$ (за волной Римана $R_2$). Интегральная кривая $AP$ в точке $M_1$ пересекает линию $\Delta_1 = 0$. Поэтому, хотя решение во всей области 2 $(APF_1H_1HA)$ имеет одинаковую структуру $(R_2S_1)$, однако для точек дуги $AM_1$, так же как для точек дуги $AA'$ (обе дуги находятся в области $\Delta_1 > 0$), эволюционные отрезки ударной волны $S_1$ кончаются точками $h$ линии $H_1H'$, в которых $W = c_1^+ = c_1(h)$. Вслед за медленной волной Жуге $S_1^H$ по состояниям $h$, принадлежащим отрезку $H_1H'$, может идти тоже медленная волна Римана $R_1$. Это дает решение в виде последовательности $R_2S_1^HR_1$ в областях 3 и 3′ вплоть до оси $u_1$.

Эволюционные участки медленных ударных волн $S_1$, идущих по начальным состояниям $M$, принадлежащим отрезку $M_1P$, кончаются точками Жуге типа $F$, в которых $W = c_2^- = c_2(M)$. Они составят дугу $M_1F_1$. Точка $F_1$ – конец эволюционного отрезка

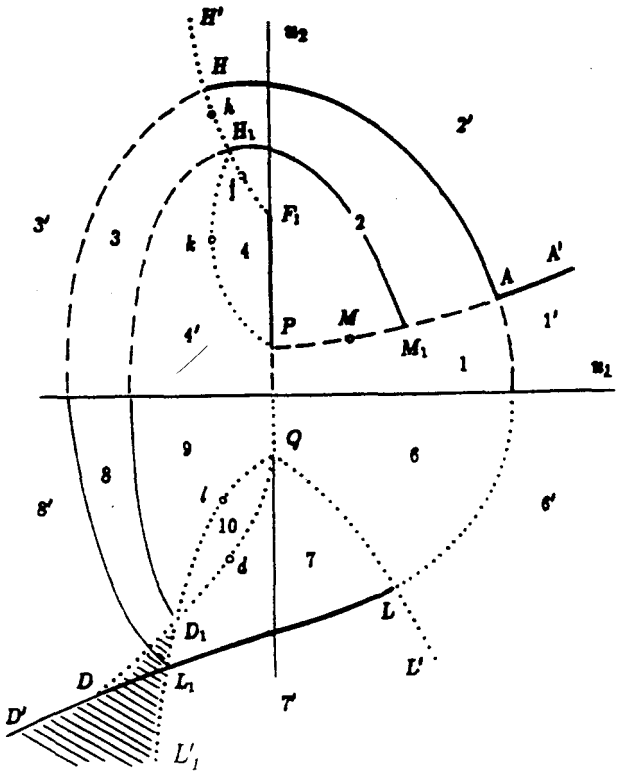



Рис. 5.18.

ударных волн, идущих по состоянию $P$, – находится на оси $u_2$ (§ 4.11). По состояниям $H_1F_1$ никакая еще одна медленная волна идти не может. Но для построения решения в области ниже дуги $H_1F_1$ для начальных точек $M$ из отрезка $M_1P$ (внутри линии $\Delta_1 = 0$) существует быстрая ударная волна Жуге второго типа $\hat{S}_2^K$ со скоростью $W = c_2^- = c_2(M)$, которая может идти сразу за быстрой волной Римана $R_2$. Эти волны позволяют из состояний дуги $M_1P$ попасть в точки Жуге типа $K$, которые составят линию $H_1kP$ (рис. 5.18).

Если за этими быстрыми волнами по состоянию $k$ идут медленные волны Римана $R_1$, то получается решение $R_2\hat{S}_2^K R_1$ в обла-

сти $4'$, ограниченной дугой $H_1kP$ и тремя отрезками интегральных кривых.

Вслед за волной $\hat{S}_2^K$ может идти медленная ударная волна $S_1$. Так как ее скорость не должна превышать $W_1 = c_2(M)$, то для автомодельного решения годятся только те части ударных адиабат $S_1$, которые кончаются точками, для которых $W_2 = c_2(M)$, т.е. точками дуги $H_1F_1$. По этой дуге область 4 с решением $R_2\hat{S}_2^K S_1$ граничит с областью 2.

Для построения решения в нижней полуплоскости используем медленную ударную волну второго типа $\hat{S}_1$. Из начального состояния $A$ она позволяет попасть на эволюционный отрезок $DL$ ударной адиабаты. Если впереди нее идет волна Римана в любое состояние $M$ отрезка $AP$, то двумя этими волнами получаем решение $R_2\hat{S}_1$ в области 7, ограниченной линией $LDD_1dQlL$ на рис. 5.18. В точку $Q$ приводит ударная волна из состояния $P$ на оси ординат (§ 4.11). Левая граница $DdQ$ состоит из точек $d$ типа $D$, в которых $W_{MD} = c_2^- = c_2(M)$. На правой границе (в точках $l$ типа $L$) $W_{ML} = c_1^- = c_1(M)$. Вся область 7 покрыта эволюционными отрезками $ld$ медленных ударных волн $\hat{S}_1$, причем их скорость монотонно растет от точки $l$ к $d$.

Пусть теперь по начальному состоянию $A$ первой идет быстрая ударная волна $S_2$ в состояния $M$ на дуге $AA'$, затем, как и прежде, медленная ударная волна $\hat{S}_1$. Получим решение $S_1\hat{S}_1$ для области $7'$. Ее правая граница $LL'$, как и прежде, содержит точки типа $L$. В точках $d$ (типа $D$) на левых концах эволюционных участков должно быть $W_2 = W_{Md} = c_2^- = c_2(M)$. Но следует помнить, что скорость первой, быстрой, волны $S_2$ вследствие условий эволюционности подчиняется неравенству $W_1 = W_{AM} < c_2^+ = c_2(M)$. Поэтому для автомодельного решения пригодны только те волны $S_1$, у которых $W_2 \le W_1 \le c_2(M)$. В результате левой границей области $7'$ должен быть неэволюционный участок $DD'$ начальной ударной адиабаты, на котором скорости обеих волн одинаковы $W_2 = W_1$.

Решение для областей 6, $6'$ и 8, $8'$, 9 строятся одинаковым способом. В областях, прилежащих к оси абсцисс сверху, решение заканчивается медленной волной Римана. Следом может идти

медленная ударная волна Жуге типа $S_1^L$, у которой скорость совпадает со скоростью последней характеристики из пучка волны Римана, $W = c_1^-$. Эта волна переводит состояние в нижнюю полуплоскость. При приближении начальной точки этой волны к оси $u_1$ конечная точка (типа $L$) приближается к оси $u_1$ со своей стороны. Самые удаленные от оси $u_1$ точки получаются, когда ударная волна $S_1^L$ идет по состояниям, принадлежащих дугам $A'AP$, $PkH_1$ и $H_1hH'$. Состояния с дуги $A'AP$ ударная волна типа $S_1^L$ переводит в точки уже полученной ранее линии $QLL'$. Эта линия служит, таким образом, границей областей 7 и 7′ с одной стороны и 6 и 6′ с другой. В области 6 решение состоит из последовательности волн $R_2R_1S_1^L$, в области 6′ – $S_2R_1S_1^L$.

Из состояний дуги $H'hH_1$ вслед за медленной ударной волной Жуге $S_1^H$, у которой скорость $W_1$ удовлетворяет соотношениям $c_1(M) < W_1 = c_1^+ = c_1(h) < c_2(M)$, может идти либо медленная волна Римана в область 3 или 3′ (что уже получено), либо медленная ударная волна Жуге типа $S_1^L$ с той же скоростью $W_2 = W_1 = c_1(h)$. В частности, из точки $H$ на начальной ударной адиабате медленным скачком типа $S_1^L$ со скоростью $W_2 = W_1 = c_1(H)$ придем в некоторую точку $L_1$ той же адиабаты, лежащую между точками $D$ и $L$ , так как $W_{AL} = c_1(A) < W_1 = W_2 = W_{HL_1} < c_2(A) = W_{AD}$. Из других точек $h$ дуги $H_1hH'$ ударная волна типа $S_1^L$ приводит в состояния линии $D_1L_1L_1'$. В точку $D_1$ эта волна приходит из состояния $H_1$, где $c_1^+(H_1) = c_2^-(M_1)$ (так как точка $M_1$ принадлежит линии $\Delta_1 = 0$). Поэтому точка $D_1$ принадлежит одновременно линиям $DD_1$ и $L_1D_1$, т.е. в этой точке происходит их пересечение.

Для точек дуги $H_1kP$ было уже получено решение в виде последовательности волн $R_2S_2^K$ (волна Римана $R_2$ из $A$ в $M$, затем ударная волна типа $S_2^K$ из $M$ в $k$). Скорость последней $W_1 = W_{Mk} = c_2(M) \geq c_1(k)$ согласно условиям эволюционности быстрой ударной волны. Вслед за ударной волной $S_2^K$ может идти медленная ударная волна второго типа $\hat{S}_1$ с эволюционными участками, которые начинаются в третьей четверти на линии $D_1lQ$ точками типа $L$, где $W_2 = c_1^- = c_1(k) < W_1$, и простираются до четвертой четверти. Вдоль них слева направо скорость скачка $W_2$ растет. Но она не может стать больше, чем скорость

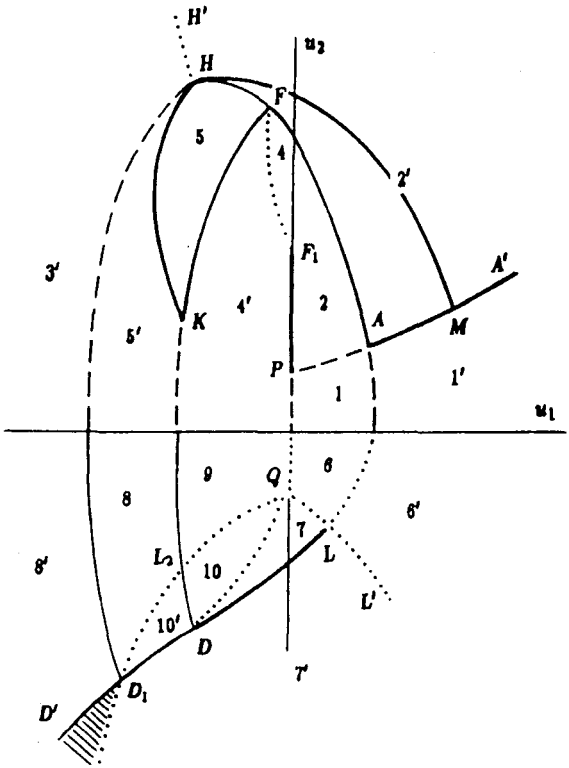



Рис. 5.19.

идущей впереди волны $W_1 = c_2(M)$. Отсюда видно, что, во-первых, линия $D_1lQ$ лежит левее линии $D_1dQ$ и, во-вторых, что использовать для решения можно только части эволюционных отрезков ударных волн $S_1$ до линии $D_1dQ$, где $W_2 = W_1 = c_2(M)$, т.е. до границы с областью 7. Так получается решение $R_2S_2^K\hat{S}_1$ для области 10 между дугами $QlD_1$ и $QdD_1$ (рис. 5.18).

В результате решение построено для всех точек плоскости $u_1u_2$. В секторе $D'DD_1L_1L_1'$, заштрихованном на рис. 5.18, автомодельное решение оказалось неоднозначным (неединственность решения) из-за пересечения областей $7-7'$ и $8-8'$. Если $G/R^2 \to 0$, то границы всех областей стремятся к окружностям

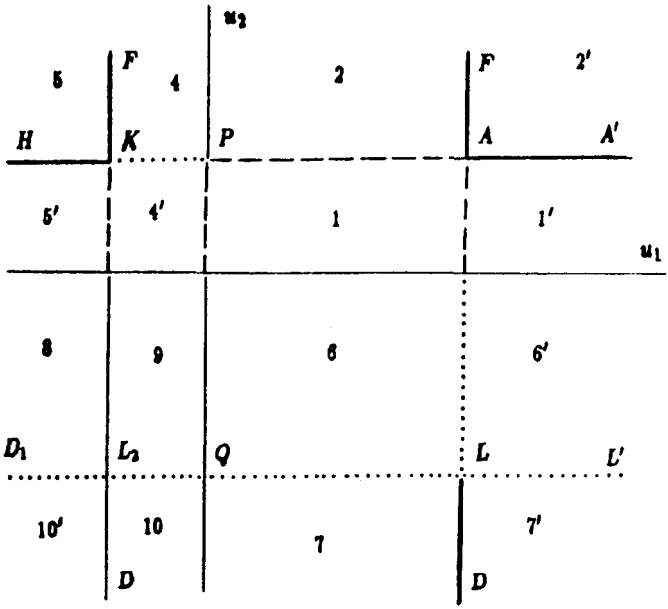



Рис. 5.20.

и лучам. Точки $P$, $Q$, $H_1$, $D_1$ стремятся к началу координат, а сектор неединственности решения $D'D_1L_1'$ сохраняется и имеет конечный угол с вершиной в точке $O$.

Пусть теперь точка, изображающая на плоскости $u_1u_2$ начальное состояние $A$, находится в области внутри линии $\Delta_1 = 0$ т.е. $\Delta_1(A) < 0$. Структура решений в областях, изображенных на рис. 5.19, та же, что в областях с такими же номерами на рис. 5.18.

Отличие состоит в том, что место области 3 теперь занимают области 5 и 5', в которых решение строится следующим образом. Так как $\Delta_1(A) < 0$, то для точки $A$ существует быстрая ударная волна второго типа $\hat{S}_2$ с эволюционным участком в виде дуги $HK$. Эволюционные отрезки идущей следом медленной ударной волны $S_1$ заполняют всю область 5 внутри линии $FHK$ вплоть до отрезка $FH$ начальной ударной адиабаты, в точках которого $W_2 = W_1$. Решение в этой области составляет последователь-

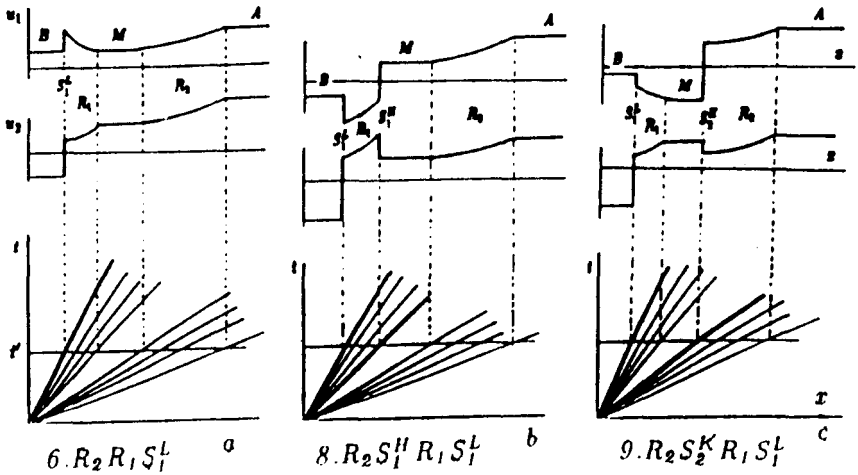



Рис. 5.21.

ность $\hat{S}_2 S_1$. В области $5'$ ниже линии $KH$ решение завершается медленной волной Римана и имеет вид $\hat{S}_2 R_1$.

В области $2'$ решение имеет одну и ту же структуру $S_2 S_1$, но медленные волны $S_1$ обладают различными свойствами по разные стороны от линии $MH$. Точка $M$ – пересечение начальной ударной адиабаты с линией $\Delta_1 = 0$. Ударные адиабаты медленных волн, начинающиеся из состояний $m$ на линии $AM$, пересекают дугу $FHK$ начальной адиабаты два раза по разные стороны от точки $H$, причем в точках пересечения $c_2(A) \leq W_2 = W_1 \leq c_1(H)$. Отрезок $FH$ ударной адиабаты, состоящий из таких точек, представляет границу области $2'$ с областью 5. Для ударной адиабаты, идущей из точки $M$, согласно определению функции $\Delta_1$ (4.32), $W_2 = c_2^- = c_1^+ = c_1(H)$ и обе точки пересечения сливаются в одну точку касания $H$. Эволюционные участки медленных волн, идущих по состояниям $m$ с линии $MA'$, кончаются точками $h$ (типа $H$), в которых $W = c_1(H)$. Точки составляют линию $HH'$ – границу областей $2'$ и $3'$.

В рассматриваемом случае (при $\Delta_1(A) < 0$) от области 10 отделилась часть $10'$ ($DD_1L_2$), где решение имеет вид $\hat{S}_2\hat{S}_1$.

Когда $G/R^2 \to \infty$, все интегральные кривые и используемые в решении участки ударных адиабат в конечной части плоскости $u_1 u_2$ приближаются к прямым, параллельным осям координат. Точка $D_1$ – вершина сектора неединственности – уходит в бесконечность (рис. 5.20).

Так же как в предыдущем параграфе, для каждой из последовательностей волн можно привести качественный вид профиля возмущений. На рис. 5.21 приведены решения с наиболее сложной структурой для областей 6, 8 и 9.

## 5.5. Распад произвольного начального разрыва. Соударение ударных волн

Рассмотрим еще одну классическую автомодельную задачу – задачу о распаде произвольного начального разрыва – в изотропной и анизотропной упругой среде. Два упругих тела, обладающих каждое своими упругими свойствами и разными параметрами напряженного и деформированного состояний, в начальный момент времени приведены в соприкосновение по плоскости $x = 0$. Надо найти возмущения, распространяющиеся от границы контакта в обе среды (Куликовский, Свешникова [1988 б]). Исследование, как и прежде, будем вести в лагранжевых переменных, так что плоскость $x_3 = x = 0$ все время остается границей контакта. Одна среда, будем называть ее $A$, занимает полупространство $x > 0$, другая среда $B$ – полупространство $x < 0$ (рис. 5.22).

Считаем, что на границе раздела проскальзывания не происходит, она является контактным разрывом, на котором непрерывны векторы скорости и напряжения

$$\boldsymbol{v}_\tau^A = \boldsymbol{v}_\tau^B, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\tau 3}^A = \boldsymbol{\sigma}_{\tau 3}^B, \tag{5.4}$$

$$v_3^A = v_3^B, \qquad \sigma_{33}^A = \sigma_{33}^B. \tag{5.5}$$

Здесь индекс $\tau$ означает проекцию соответствующего векто-

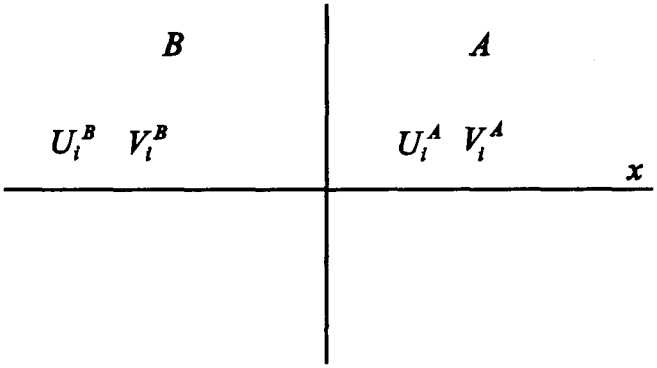



Рис. 5.22.

ра на плоскость контактного разрыва. Эти граничные условия предполагаются выполненными при $x = 0$ и $t > 0$. При $t = 0$ каждая из сред находится в состоянии однородной деформации и движения, характеризующихся начальными градиентами перемещений $U_i^A$ и $U_i^B$, а также скоростями $V_i^A$ и $V_i^B$. Упругие свойства каждой из сред, как обычно, задаем упругим потенциалом (5.2), учитывая то, что коэффициенты в этих разложениях, вообще говоря, различны для сред $A$ и $B$. Отметим также, что запись члена, несущего анизотропию, в виде $g(u_2^2 - u_1^2)$ предполагает специальный выбор координат $u_i$ в каждой из сред (§ 2.3). При этом оси координат $u_\alpha^A$ и $u_\alpha^B$ могут оказаться различно ориентированными, повернутыми относительно друг друга, а начала координат – соответствовать различным напряжениям.

В рассматриваемой задаче о распаде произвольного разрыва, в силу ее автомодельности, скорости и напряжения в точках контактного разрыва не меняются со временем при $t > 0$. Если бы были известны, например, напряжения (или деформации) на контактном разрыве, то это позволило бы свести задачу нахождения волн в каждой из сред к задаче о волнах в полупространстве, рассмотренной в предыдущих параграфах.

Точные значения этих напряжений можно найти, построив решение задачи. Однако, это весьма сложная задача. Гораз-

до проще применить приближенный подход, используя уже принятую точность. Легко найти приближенные значения напряжений на контактном разрыве, если воспользоваться нулевым приближением, соответствующим отсутствию нелинейности и анизотропии. После этого в каждом из полупространств можно построить систему нелинейных волн и, используя соотношения на разрывах и дифференциальные уравнения, найти скорости каждой из сред, в том числе скорости после прохождения всех волн, т.е. в области, примыкающей к контактному разрыву. Поскольку напряжения на контакте были определены приближенно, скорости сред $A$ и $B$ в областях, примыкающих к поверхности контакта, в общем случае не совпадут. Произведя корректировку амплитуд всех входящих в решение волн, можно добиться совпадения как напряжений так и скоростей.

Можно заметить, что в силу предполагаемой малости напряжений и деформаций упомянутое нулевое приближение довольно хорошо (с относительной погрешностью не превышающей по порядку величины $\chi = \max\{\varepsilon^2, g\}$) описывает связь величин в рассматриваемых волнах. Поэтому напряжения на контакте, определяемые по нулевому приближению, имеют такую же относительную погрешность. При качественных рассмотрениях такую точность можно считать приемлемой. Целью качественного изучения является указание возможных комбинаций волн, дающих решение задачи, и нахождение в пространстве параметров, определяющих постановку задачи, областей, соответствующих тем или другим комбинациям волн. Если при определении напряжений на контакте допускается малая ошибка, то это приведет к смещению границ между областями, соответствующими разным комбинациям волн, также на малую величину. Поскольку границы упомянутых областей при качественном изучении определяются тоже качественно, то такая поправка несущественна.

Поэтому будем определять напряжения на контакте с помощью нулевого приближения. С той же точностью можно считать, что задачи нахождения продольных и поперечных волн разделены (как это обычно делалось ранее), причем поперечные волны определяются с помощью граничных условий (5.4), а продольные с помощью граничных условий (5.5). Уже неоднократно

отмечалось, что задача о поперечных волнах представляет наибольший интерес и только она будет далее обсуждаться.

В нулевом приближении имеем закон Гука, который в обозначениях формулы (5.2) следует записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{A} + \sigma_{\alpha 3}^{A_0} &= f^A u_\alpha, \\ \sigma_{\alpha 3}^{B} + \sigma_{\alpha 3}^{B_0} &= f^B u_\alpha. \end{aligned} \tag{5.6}$$

В последних равенствах слагаемые $\sigma_{\alpha 3}^{A_0}$ и $\sigma_{\alpha 3}^{B_0}$ представляют напряжения в средах $A$ и $B$, соответствующие $u_\alpha = 0$. Во многих случаях эти напряжения отсутствуют, например, при деформационной анизотропии (см. § 2.4) и в дальнейшем они учитываться не будут. Скорости поперечных волн определяются равенствами

$$c^A = \sqrt{f^A/\rho_0^A} \quad \text{в среде } A, \qquad c^B = \sqrt{f^B/\rho_0^B} \quad \text{в среде } B.$$

Из кинематических соотношений для непрерывных волн или, соответственно, для разрыва

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \qquad [v_\alpha] = -W[u_\alpha] \qquad \alpha = 1, 2$$

получим, выражения для изменений скорости во всей системе квазипоперечных волн (независимые от их природы, непрерывные они или разрывы)

$$v_\alpha - V_\alpha^A = -c^A(u_\alpha - U_\alpha), \qquad v_\alpha - V_\alpha^B = c^B(u_\alpha - U_\alpha). \tag{5.7}$$

Здесь учтено, что волны в средах $A$ и $B$ движутся от границы в противоположных направлениях.

Подстановка выражений (5.7) в граничные условия (5.4) с учетом закона Гука (5.6) дает

$$\begin{aligned} -c^A(\boldsymbol{u}_\tau^{*A} - \boldsymbol{U}_\tau^A) + \boldsymbol{V}_\tau^A &= c^B(\boldsymbol{u}_\tau^{*B} - \boldsymbol{U}_\tau^B) + \boldsymbol{V}_\tau^B, \\ f^A \boldsymbol{u}_\tau^{*A} + \boldsymbol{\sigma}_{\tau 3}^{A_0} &= f^B \boldsymbol{u}_\tau^{*B} + \boldsymbol{\sigma}_{\tau 3}^{B_0}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Разрешая соотношения (5.8) относительно $\boldsymbol{u}_\tau^*$, получим

$$f^A\boldsymbol{u}_\tau^{*A} = f^B\boldsymbol{u}_\tau^{*B} = \frac{f^A f^B}{f^A c^B + f^B c^A}\Big(c^A\boldsymbol{U}_\tau^A + c^B\boldsymbol{U}_\tau^B + \Delta\boldsymbol{V}\Big),$$
$$c^A = \sqrt{f^A/\rho_0^A}, \quad c^B = \sqrt{f^B/\rho_0^B}, \quad \Delta\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_\tau^A - \boldsymbol{V}_\tau^B. \tag{5.9}$$

Когда по обе стороны от плоскости $x = 0$ среда одна и та же, т.е. $\rho_0$ и $f$ одинаковы, а различие состоит только в начальных состояниях деформации $\boldsymbol{U}_\tau^A$ и $\boldsymbol{U}_\tau^B$ и скоростях $\boldsymbol{V}_\tau^A$ и $\boldsymbol{V}_\tau^B$, векторы $\boldsymbol{u}_\tau^*$ на границе непрерывны и вместо равенства (5.9) имеем

$$\boldsymbol{u}_\tau^{*A} = \boldsymbol{u}_\tau^{*B} = \boldsymbol{U}^0 + \frac{\Delta\boldsymbol{V}}{2c}, \qquad \boldsymbol{U}^0 = \frac{(\boldsymbol{U}_\tau^A + \boldsymbol{U}_\tau^B)}{2}. \tag{5.10}$$

Оси $u_1$ и $u_2$ для обеих сред совпадают и последние равенства справедливы и для компонент входящих в них векторов.

Теперь для каждого из полупространств справа и слева от плоскости $x = 0$ имеем автомодельную задачу, рассмотренную в предыдущих параграфах: при $t = 0$, $x > 0$ и $x < 0$ известна начальная поперечная деформация каждой из сред, которая характеризуется величинами $U_\alpha^A$ и $U_\alpha^B$ ($\alpha$=1,2) соответственно. В момент $t = 0$ на границе $x = 0$ деформации приобретают значения $u_\alpha^{*A}$ и $u_\alpha^{*B}$, определяемые из соотношения (5.9), и далее не меняются. Для любого заданного таким образом состояния $u_\alpha^*$, согласно результатам предшествующих параграфов, находится система нелинейных волн, дающая решение.

В качестве примера рассмотрим решение задачи, когда среда с двух сторон от границы контакта одна и та же, и анизотропия (в данном случае деформационная) в ней отсутствует ($g^A = g^B$). Тогда решение задачи в каждой из сред состоит из вращательного разрыва и плоскополяризованной волны (ударной или непрерывной). При $\varkappa > 0$ впереди идет вращательная волна, а при $\varkappa < 0$ – наоборот.

Пусть для конкретности $\varkappa > 0$. Какая волна идет следом за вращательным разрывом зависит от того, в какую область плоскости $u_1u_2$ попала точка $u_\alpha^*$, изображающая состояние на поверхности контакта. На рис. 5.23 на фазовой плоскости $u_1u_2$

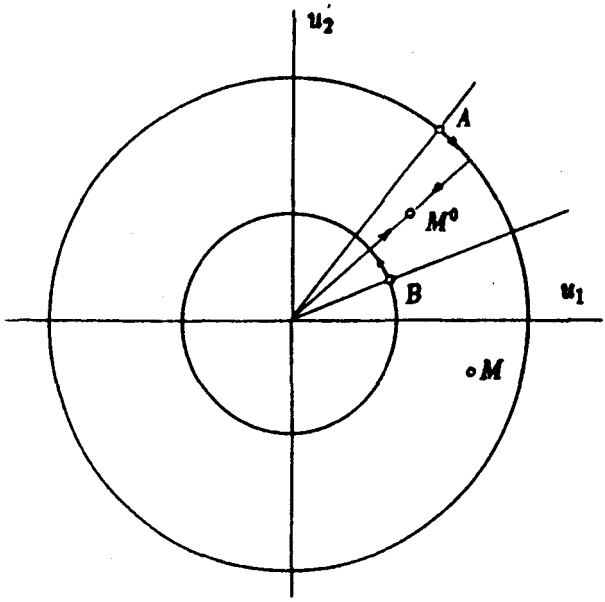



Рис. 5.23.

начальные состояния $\boldsymbol{U}_A$ и $\boldsymbol{U}_B$ в двух средах представлены точками $A$ и $B$. При $\Delta\boldsymbol{V} = 0$ значение $\boldsymbol{u}_\tau^*$ определяется вектором $\boldsymbol{U}_0$, представляющим среднее арифметическое векторов $\boldsymbol{U}^A$ и $\boldsymbol{U}^B$. Если же $\Delta\boldsymbol{V} \neq 0$, то для получения вектора $\boldsymbol{u}_\tau^*$ к вектору $U^0$ нужно прибавить вектор $\dfrac{\Delta\boldsymbol{V}}{2c}$. Распоряжаясь вектором $\Delta\boldsymbol{V}$, можно поместить состояние $u_\alpha^*$ в любую точку плоскости $u_1u_2$.

Две концентрические окружности, проходящие через начальные точки $A(U_\alpha^A)$ и $B(U_\alpha^B)$, и лучи из начала координат, проведенные через эти точки (рис. 5.23) делят плоскость $u_1u_2$ на три области. Попадание состояния $M(u_\alpha^*)$ в ту или иную область ведет к различным типам решения задачи о распаде разрыва.

Когда точка $M(u_\alpha^*)$ лежит внутри кольцевой области, направо (по состоянию $A$) распространяется сначала вращательный

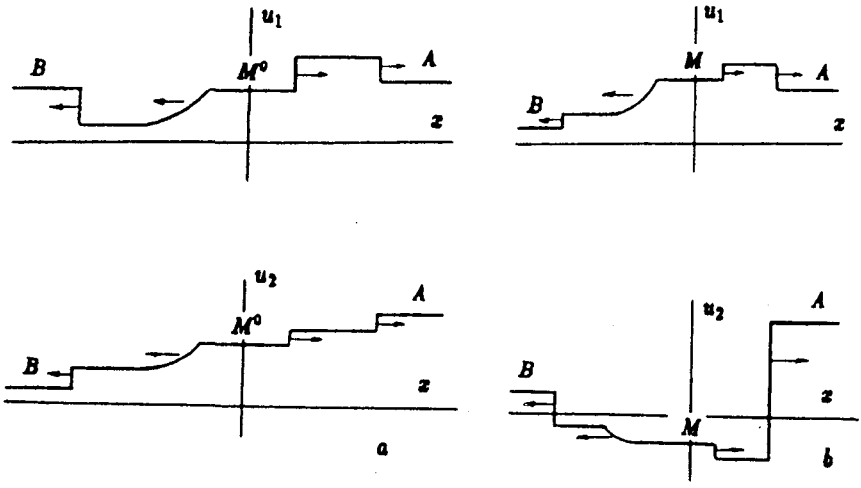



Рис. 5.24.

разрыв, за ним медленная ударная волна. Налево (по состоянию $B$) – вращательный разрыв, за ним медленная волна Римана (рис. 5.24 $a, b$).

Если точка $M(u_\alpha^*)$ находится внутри малой окружности, то в обе стороны за вращательными разрывами идут ударные волны, а если вне большой окружности, то волны Римана.

Влияние анизотропии на решение задачи о распаде разрыва продемонстрировано на рис. 5.25 для случая, когда анизотропия одна и та же по обе стороны от контакта, и на рис. 5.26 $b$ для случая, когда анизотропия различна, вследствие чего в средах $A$ и $B$ оси координат $u_1$, $u_2$ имеют различную ориентацию, что показано на рис. 5.26 $a$. Начальные состояния в средах $A$ и $B$ и состояние $M$ на границе взяты такими же как на рис. 5.24 $b$. Из решения видно, что наличие анизотропии изменяет конструкцию решения, по крайней мере, может увеличить количество волн в последовательности.

Среди задач, сводящихся к задаче о распаде произвольного разрыва, имеются такие важные как *взаимодействие удар-*

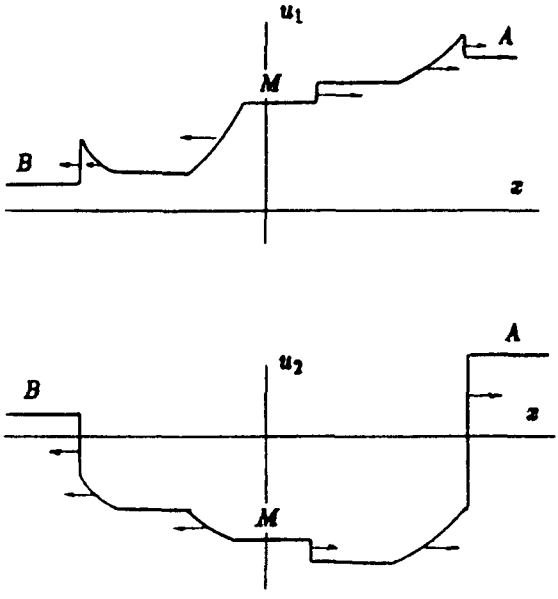



Рис. 5.25.

*ных волн при их столкновении*, а также задача об отражении ударных волн от неподвижной стенки. Задача о взаимодействии ударных волн, одна из которых догоняет другую также сводится к задаче о распаде произвольного разрыва. Однако, при взаимодействии распространяющихся в одну сторону квазипоперечных волн малой амплитуды не возникает волн других типов (см. Главу 7), поэтому можно считать, что от плоскости начального разрыва волны уходят только в одну сторону и что $\boldsymbol{u}_\tau^*$ совпадает с $\boldsymbol{u}_\tau$ за второй волной, так что рассмотрения изменений скорости в волнах не требуется.

Во всех задачах о распаде произвольного разрыва присутствует решение для каждой из сред автомодельной задачи о волнах в упругом полупространстве. Поэтому сделанные ранее выводы о неединственности решения относятся также и к решению задач о распаде произвольного разрыва и, в частности, к задаче о столкновении ударных волн. Существуют такие ударные

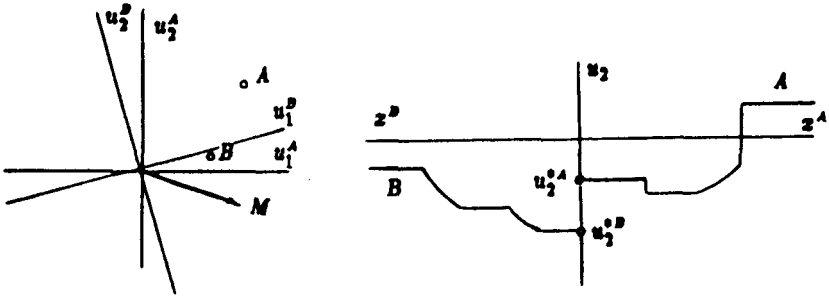



Рис. 5.26.

волны (некоторые примеры будут даны в Главе 8), что задача о распаде разрыва, возникающая при их взаимодействии имеет неединственное решение. Это значит, что в рамках общих подходов теории упругости невозможно однозначно предсказать, что будет после возникновения такого разрыва. В Главе 8 для выделения единственного решения будет производиться детализация модели среды – упругая среда будет рассматриваться как предел вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта при вязкости стремящейся к нулю.

## Резюме

Исследованы одномерные автомодельные задачи с решениями, зависящими от $x/t$. Решения должны состоять из центрированных волн Римана, ударных волн и областей постоянных значений параметров. При построении решений подобных задач в этой главе используются только априорно эволюционные (Глава 4) ударные волны (на них энтропия не убывает). Простейшая задача возникает при внезапном изменении граничных условий на границе упругого полупространства с однородными начальными деформациями $u_i = U_i$.

При малой нелинейности и анизотропии задачи нахождения квазипродольных и квазипоперечных волн с достаточной точностью разделяются (§ 5.2), причем нахождение квазипродольной

волны (она в решении всегда одна) происходит без каких-либо трудностей. В § 5.3 производится построение и качественное исследование решения задачи нахождения квазипоперечных волн в полупространстве для сред с $\varkappa > 0$. Эта задача совпадает с задачей о волнах в эквивалентной несжимаемой среде, введенной в Главах 3 и 4 для волн Римана и ударных волн. При заданных начальных условиях $u_1 = U_1$, $u_2 = U_2$ решение задачи о квазипоперечных волнах зависит от граничных значений (при $x = 0$) компонент деформаций сдвига $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$, которые определяют строение решения. Вся плоскость значений $u_1^*$, $u_2^*$ делится на области и для каждой из областей указывается последовательность волн, дающая решение задачи. Типичные картины таких областей при $\varkappa > 0$ представлены на рис. 5.6, 5.14 и 5.15 и для $\varkappa < 0$ на рис. 5.18 и 5.19.

Характерной особенностью представленных решений, как для $\varkappa > 0$, так и для $\varkappa < 0$, является существование некоторого множества параметров $U_1$, $U_2$, $G$, для которого на плоскости $u_1^* u_2^*$ имеются области граничных значений деформации, для которых существуют два различных автомодельных решения и на этом этапе нет оснований предпочесть какое-нибудь одно из них.

Интересно отметить, что в одном из двух решений в случае неединственности содержится ударная волна, которая сама по себе представляет решение некоторой автомодельной задачи, причем существует другое решение той же задачи в виде системы автомодельных волн. При $\varkappa > 0$ эта ударная волна соответствует одной из точек отрезка $QE$ на рис. 5.6 (будем говорить, что это ударная волна типа $QE$). Дальнейшее обсуждение вопроса о неединственности будет продолжено в Главе 8.

В § 5.5 рассматривается задача о распаде произвольного разрыва, когда автомодельные системы волн распространяются в упругой среде в обе стороны от плоскости $x = 0$. Задача приближенно, пользуясь малостью анизотропии и нелинейных эффектов, сводится к двум задачам о волнах в полупространстве. К задачам о распаде произвольного разрыва относятся также важные задачи о взаимодействии ударных волн. Все эти задачи могут иметь неединственные решения.

# Глава 6.

# Двумерные стационарные нелинейные волны и автомодельные решения

## 6.1. Простые волны

Будем рассматривать волны в упругих средах аналогичные волнам Прандтля-Майера в газовой динамике, а также автомодельные стационарные решения, зависящие от отношения двух декартовых координат или, что то же самое, от полярного угла на плоскости (Чугайнова [1991]. В магнитной гидродинамике подобные решения исследовались в работах (Пушкарь [1983], Бармин и Пушкарь [1991]). Некоторые численные решения для упругих сред были получены в работе Буренина, Лапыгина и Чернышова [1978].

Как и прежде, будут рассматриваться нелинейные волны малой амплитуды, а среда, по которой они распространяются, будет предполагаться однородной. Относительно упругого потенциала среды $\Phi = \rho_0 U(\varepsilon_{ij}, S)$, $\rho_0 = \text{const}$ сделаем предположения, аналогичные тем, которые принимались при изучении одномерных нестационарных волн.

Предполагаем, что

$$\Phi = \Phi_0 + g\Phi_1,$$

причем $\Phi_0$ – основная, *изотропная*, часть упругого потенциала, как и ранее, выражается в виде ряда через инварианты тензора деформаций

$$\Phi_0 = (I_1, I_2, I_3, S) + \rho_0 T_0(S - S_0),$$
$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki},$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}\right).$$

Здесь $w_i$ – компоненты вектора перемещений в декартовой системе координат $x_i$, принимаемой в качестве лагранжевой. Часть $\Phi_1$ упругого потенциала отвечает за анизотропию среды и предполагается зависящей в степенях не более второй от производных $\partial w_i/\partial x_j$ с малым коэффициентом $g \ll 1$, что соответствует предположению о малой анизотропии. Члены с более высокими степенями $\partial w_i/\partial x_j$ в $\Phi_1$ не включены ввиду их малости.

Уравнения, описывающие движение и состояние среды, имеют вид (2.15)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial(\partial w_i/\partial x_j)}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Введем систему координат $\xi_i$, движущуюся относительно исходной системы $x_i$ с постоянной скоростью $V$ (рис. 6.1)

$$\xi_1 = x_1$$
$$\xi_2 = x_2 - tV\cos\varphi$$
$$\xi_3 = x_3 - tV\sin\varphi.$$

В этой системе координат левая часть приведенных выше уравнений движения запишется в виде

$$\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} - V\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \xi_2} - V\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \xi_3}\right)^2 w_i. \tag{6.1}$$

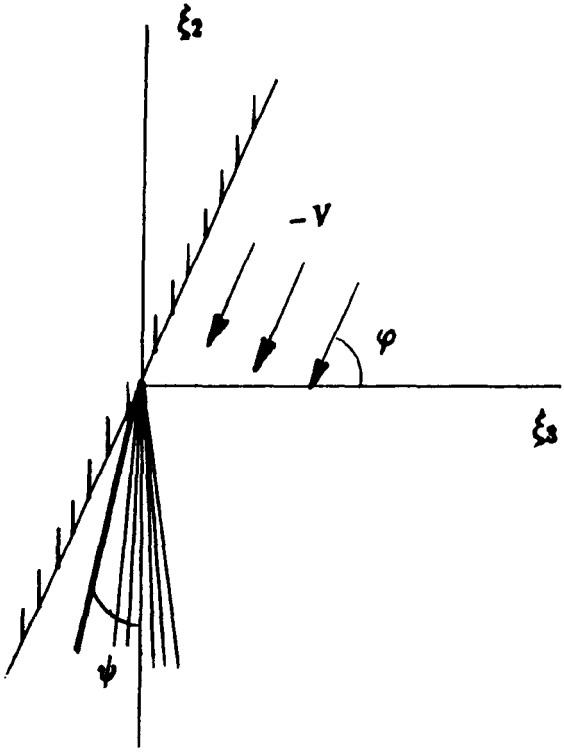



Рис. 6.1.

В этом выражении частная производная берется при $\xi = \text{const}$. Будем рассматривать решение вида

$$w_i = w_i^0 + w_i'(\xi_2, \xi_3), \tag{6.2}$$

причем под $w_i^0$ понимаются смещения, линейно зависящие от $x_i$ и не зависящие от времени, которые соответствуют однородной предварительной деформации среды. При постоянных $\xi_i$ величины $w_i^0$ линейно зависят от времени $t$. Перемещения $w_i'$ приобретаются средой в изучаемых ниже волнах. В невозмущенном состоянии $w_i' \equiv 0$, а после прохождения волн $w_i'$ могут линейно зависеть от $\xi_i$, что соответствует приобретенной однородной деформации среды. При фиксированных $x_i$ величины $w_i'$ зависят

от времени. Очевидно, $w_i'$ не дают вклада в левую часть уравнений движения и поэтому в выражении (6.1) в соответствии с равенством (6.2) можно опустить частную производную по времени. При этом в левой части уравнений движения будет стоять комбинация вторых производных по $\xi_2$ и $\xi_3$, которые можно рассматривать как первые производные от новых величин

$$l_i = \frac{\partial w_i}{\partial \xi_3}, \qquad m_i = \frac{\partial w_i}{\partial \xi_2},$$

причем $l_i$ и $m_i$ зависят только от $\xi_2$ и $\xi_3$. В невозмущенном состоянии $l_i$ и $m_i$ имеют значения, определяемые как производные от $w_i^0$. Производные $a = \partial w_i/\partial \xi_1 = \partial w_i^0/\partial \xi_1$, очевидно, постоянны и могут быть включены в число постоянных параметров, характеризующих свойства среды.

Уравнения движения для новых неизвестных функций $l_i(\xi_2, \xi_3)$, $m_k(\xi_2, \xi_3)$ приобретают вид

$$\begin{gathered}\rho_0 V^2 \left(\sin^2\varphi \frac{\partial l_i}{\partial \xi_3} + 2\sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial l_i}{\partial \xi_2} + \cos^2\varphi \frac{\partial m_i}{\partial \xi_2}\right) \\ = r_{ik}\frac{\partial l_k}{\partial \xi_3} + d_{ik}\frac{\partial m_k}{\partial \xi_3} + d_{ki}\frac{\partial l_k}{\partial \xi_2} + s_{ik}\frac{\partial m_k}{\partial \xi_2},\end{gathered} \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial m_i}{\partial \xi_3}, \tag{6.4}$$

$$r_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial l_i \partial l_k}, \quad d_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial l_i \partial m_k}, \quad s_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m_i \partial m_k},$$
$$i, k = 1, 2, 3.$$

Коэффициенты $r_{ik}$, $d_{ik}$ и $s_{ik}$ являются функциями от $l_j$ и $m_j$. В линейном случае эти коэффициенты постоянны.

Определение и построение решений, описывающих стационарные простые волны, аналогичны тому как это делалось в Главе 3 для волн Римана. *Стационарные двумерные (косые) простые волны* представляют собой решения уравнений (6.3), (6.4),в которых $l_i$ и $m_i$ зависят от некоторой функции $\gamma(\xi_2, \xi_3)$

$$l_i = l_i\{\gamma(\xi_2, \xi_3)\}, \qquad m_i = m_i\{\gamma(\xi_2, \xi_3)\}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (6.3) и (6.4), получим

$$(b_{ik} - \beta\delta_{ik})\frac{dl_k}{d\gamma} = 0, \qquad i,k = 1,2,3, \tag{6.5}$$

$$\frac{dm_i}{d\gamma} = -\psi\frac{dl_i}{d\gamma},, \tag{6.6}$$

где обозначено

$$\beta = \rho_0 V^2 \sin^2\varphi - 2\psi\rho_0 V^2 \sin\varphi\cos\varphi + \psi^2\rho_0 V^2\cos^2\varphi$$

$$\varphi = \text{const}, \qquad b_{ik} = r_{ik} - f_{ik}\psi + s_{ik}\psi^2, \qquad f_{ik} = d_{ik} + d_{ki},$$

$$\psi = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_2}\Big/\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_3} = -(d\xi_3/d\xi_2)_\gamma.$$

Из уравнений (6.5) следует, что для того чтобы $\dfrac{dl_k}{d\gamma}$ не все были равны нулю, $\beta$ должно быть собственным значением симметричной матрицы $\|b_{ik}\|$. Это позволяет найти $\psi$ как функцию $l_k$ и $m_k$, которые сами, согласно предположению, являются функциями $\gamma$. В силу определения величины $\psi$ имеем

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_2} + \psi(\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_3} = 0.$$

Характеристики этого уравнения – семейство прямых линий на плоскости $\xi_1\xi_2$, на которых $\gamma$, $l_i$ и $m_i$ принимают постоянные значения. Это семейство характеристик, очевидно, является в то же время одним из семейств характеристик исходной системы уравнений (6.3), (6.4).

Изменение $l_k$ и $m_k$ определяется системой уравнений (6.5), (6.6). В силу того, что $\beta$ является собственным значением матрицы $\|b_{ik}\|$, система (6.5) оказывается линейно зависимой и в случае, когда $\beta$ – однократный корень, одно из уравнений может быть отброшено. Остальные уравнения (6.5) и уравнения (6.6) позволяют выразить $l_k$ и $m_k$ через один параметр, обозначенный ранее $\gamma$. В пространстве $l_k$, $m_k$ эта связь представляется в виде *интегральной кривой стационарной простой волны.*

В *линейном* случае семейство характеристик простой волны представляет собой семейство параллельных прямых, поскольку

$b_{ik} = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Тогда поворотом осей $\xi_2$, $\xi_3$ в их плоскости можно добиться, чтобы решение зависело только от $\xi_3$. При этом $\psi = 0$, $b_{ik} = r_{ik}$, $\beta = \rho_0 V^2 \sin^2\varphi$. Сравнивая системы уравнений (6.5) и (3.10), получаем, что $V^2 \sin^2\varphi = c^2$, где $c$ – характеристическая скорость плоской волны с фронтом параллельным плоскости $\xi_1$,$\xi_2$. Уравнения (6.6) показывают, что $m_k = \text{const}$, а согласно уравнениям (6.5), $l_k$ меняются как в изученных ранее линейных плоских волнах (§ 3.1). Соответственно этому двумерные стационарные волны малых возмущений можно разделить на *квазипродольные и квазипоперечные, быстрые и медленные*. Это деление естественным образом распространяется и на волны малой, но конечной амплитуды.

В нелинейном случае удобно выбрать направление осей $\xi_2$, $\xi_3$ так, чтобы $\psi = 0$ на одной из характеристик в изучаемой волне, например, на первой. Тогда для волн с малой нелинейностью $\psi$ будет малым ($\psi$ не превосходит по порядку величины $\varepsilon$, где $\varepsilon$ характеризует изменение величин в волне) всюду в рассматриваемой волне. Поэтому изменения $m_k$ будут малы по сравнению с изменениями $l_k$. Из этого следует, что проекция интегральной кривой на подпространство $l_k$ близка к интегральной кривой, задающей изменение величин в одномерной нестационарной волне Римана, которая получается, если рассмотреть систему (6.5), положив в ней $b_{ik} = r_{ik}$ и $m_j = \text{const}$ в аргументах функций $r_{ik}(l_j, m_j)$. В начальной точке, где $\psi = 0$, эти кривые имеют общую касательную.

Как уже отмечалось, рассматриваемые волны малой амплитуды, так же как и плоские нестационарные волны, делятся на квазипродольные и квазипоперечные. Все сказанное выше относится к обоим типам волн, однако, для квазипоперечных волн можно сделать более сильные утверждения. А именно, при описанном выше выборе осей $\xi_2$, $\xi_3$ во всей системе квазипоперечных волн (быстрых и медленных) $\psi$ имеет порядок $\chi$ (как и ранее, $\chi = \max\{g, \varepsilon^2\}$), изменение $m_k$ имеет порядок $\chi\varepsilon$, а проекции интегральных кривых системы (6.5), (6.6) на подпространство $l_k$ не отличается от интегральных кривых для одномерных нестационарных волн Римана в пределах той точности, с которой эти волны исследовались в Главе 3.

Проверим сделанное утверждение. В квазипоперечных волнах изменение $\beta$ за счет изменения $l_k$ и за счет перехода от быстрой волны к медленной не превосходят $\chi$. Действительно, величина $\psi$ может быть оценена из линеаризованной связи $\beta$ и $\psi$

$$2\psi\cos\varphi\sin\varphi = \sin^2\varphi - \frac{\beta}{\rho_0 V^2}, \qquad \varphi = \text{const}.$$

С учетом того, что на одной из характеристик $\psi = 0$, можно заключить, что $\psi \sim \chi$. Согласно уравнениям (6.6) получим, что изменение $m_k$ имеет порядок $\chi\varepsilon$. Учет этого изменения привел бы в уравнениях (6.5) к появлению пренебрежимо малых членов порядка $\chi\varepsilon^2$ (при изучении волн Римана в Главе 3 в уравнениях не учитывались члены меньше,чем $\chi\varepsilon$). На первый взгляд может показаться существенным вклад в уравнения (6.5) изменения $b_{ik}$, за счет члена $f_{ik}\psi$. Как и выражение для $\Phi$, величины $f_{ik}$ разлагаются в ряды по $\varepsilon_{ml}$. Конечная часть $f_{ik}$ (не связанная с деформацией или анизотропией) может быть вычислена из квадратичной по $\varepsilon$ части функции $\Phi_0$, равной $\frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2$. Несложные вычисления показывают, что конечное значение имеют только $f_{23} = f_{32} = 2d_{23} = 2d_{32} = 1$. В первом уравнении (6.5) слагаемого с $f_{23}$ нет. В третьем уравнении для продольной компоненты $l_3$ будет присутствовать член $\psi\, dl_2/d\gamma$, имеющий порядок $\chi\varepsilon$. При изучении волн Римана уравнение для продольной компоненты решалось приближенно и члены такого порядка малости не учитывались (учитывались члены порядка $\varepsilon^2$). Во втором уравнении (6.5) соответствующий член будет присутствовать в виде $\psi\, dl_3/d\gamma$. Поскольку $l_3$ соответствует продольной компоненте, которая в квазипоперечной волне меняется мало, так что $l_3 \sim \varepsilon^2$, $dl_3/d\gamma \sim \varepsilon$, то приведенный выше член имеет порядок малости $\chi\varepsilon^2$, более высокий, чем учитываемые при изучении поперечных волн члены.

Таким образом, при предположениях, принятых в этом разделе, изменение величины в стационарных двумерных простых волнах в случае квазипоперечных волн совпадает с изменением величин в одномерных волнах Римана.

Стационарные простые волны рассматриваются в полупространстве, например, в области $\xi_3\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi > 0$ (рис. 6.1).

Поэтому представляет интерес вопрос о пересечении характеристик, соответствующих этим волнам, или об *опрокидывании* простых волн. Не обсуждая этого вопроса подробно, отметим, что при переходе от расхождения характеристик в полупространстве к их пересечению критическая ситуация заключается в параллельности характеристик, соответствующих двум бесконечно близким состояниям в простой волне. Это означает равенство характеристических скоростей в этих состояниях, так что критические условия, определяющие переход от неопрокидывания к опрокидыванию одни и те же для стационарных двумерных и нестационарных одномерных волн. В квазипоперечных волнах, где изменение величин $l_i$ происходит одинаково в стационарных двумерных волнах и в волнах Римана, изменение наклона волны пропорционально изменению характеристической скорости.

Отметим, что для существования рассмотренных выше стационарных простых волн необходима гиперболичность стационарной системы уравнений (6.3), (6.4), что обеспечивает наличие соответствующего семейства характеристик. Для этого, в свою очередь, нужно, чтобы скорость $V$ движения среды относительно волны была бы достаточно большой.

## 6.2. Стационарные ударные волны в движущейся среде

Будем рассматривать плоские ударные волны, которые неподвижны в системе координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, введенной в предыдущем параграфе, относительно которой упругая среда движется со скоростью, заданной своими компонентами $0, -V\cos\varphi, -V\sin\varphi$. Имея ввиду рассмотрение двумерных решений, не зависящих от $\xi_1$, будем предполагать, что фронт ударной волны параллелен оси $\xi_1$. Выберем специальным образом угол $\varphi = \varphi'$, определяющий направления двух других осей, которые будем обозначать $\xi_2', \xi_3'$ так, чтобы ось $\xi_3'$ была нормальна фронту волны. Тогда соотношения (2.20) на ударной волне запишутся в виде

$$\rho_0 V^2 [l_k] = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial l'_k}\right], \quad [m'_k] = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$
$$W^2 = V^2 \sin^2 \varphi'. \tag{6.7}$$

Штрихи у $l'_k$ и $m'_k$ означают, что эти величины относятся к осям $\xi'_2, \xi'_3$.

Последняя группа соотношений выражает непрерывность перемещений $w_k$ на ударной волне. Уравнение энергии, служащее для вычисления скачка энтропии, здесь не выписано, поскольку условие неубывания энтропии, как показано в Главе 4, слабее, чем условия эволюционности разрыва.

Перенесение результатов, полученных в Главе 4 , на *стационарные косые* ударные волны затруднено тем, что заранее неизвестно направление стационарной ударной волны. Для волн малой амплитуды это направление близко к направлению характеристики. Если считать заданным состояние перед ударной волной, то меняя амплитуду ударной волны (задаваемую, например, углом $\psi$ между ней и соответствующей характеристикой, рассчитанной по состоянию перед ударной волной), можно в пространстве переменных $l_k$, $m_k$, относящихся к некоторой заранее выбранной системе координат, построить кривую – множество, состоящее из точек, соответствующих состояниям за ударной волной. Эту кривую по аналогии с газовой динамикой будем называть *ударной полярой.*

Если направить ось $\xi_2$ по характеристическому направлению перед разрывом, то для слабых ударных волн ввиду малости угла $\psi$ между ударной волной и характеристикой, рассчитанной по состоянию перед ударной волной, ударная поляра будет близка к ударной адиабате (в которой изменяются только $l_k$). Эти кривые касаются одна другой в начальной точке (при $\psi = 0$, $c^2 = V^2 \sin^2 \varphi$). Поэтому в начальной точке совпадают производные, взятые вдоль этих кривых, от скорости ударной волны относительно вещества и от характеристической скорости за разрывом. Из этого можно сделать вывод о соответствии участков эволюционности (и неэволюционности) в окрестности начальной точки у ударной поляры и ударной адиабаты.

Стационарные ударные волны разделяются на квазипродольные и квазипоперечные. Уравнение ударной поляры квазипродольных ударных волн в области малых амплитуд может успешно строиться в виде ряда по амплитуде. Для квазипоперечных волн такая процедура неэффективна. Однако, как и для квазипоперечных стационарных двумерных простых волн, можно показать, что верны следующие утверждения. Углы, задающие направления квазипоперечных ударных волн (быстрых и медленных) на плоскости $\xi_2, \xi_3$, лежат в интервале, не превосходящем по порядку величины $\chi$ ($\chi = \max\{\varepsilon^2, g\}$), $[m_k] \sim \chi\,[l_k]$, а проекция ударной поляры на подпространство $l_k$ совпадает с ударной адиабатой с точностью до членов порядка $\varepsilon\chi$ включительно (т.е. с той же точностью, с которой ударная адиабата была построена в Главе 4).

Для доказательства этих утверждений рассмотрим еще одну систему координат в которой ось $\xi_1$ остается прежней, а оси $\xi_2$ и $\xi_3$ пусть будут расположены так, чтобы ось $\xi_2$ была направлена по характеристике перед ударной волной. Это означает, что $V\sin\varphi = c^-$, $V\cos\varphi = kc^-$, где $c^-$ – характеристическая скорость, $k = \operatorname{ctg}\varphi$.Такая система координат не зависит от изучаемой ударной волны. Предположим, что наклон ударной волны относительно оси $\xi_2$, определяемый величиной $\psi = d\xi_3/d\xi_2$, имеет порядок $\chi$ (ниже это будет проверено) и поэтому можно пренебрегать величиной $\psi^2$ по сравнению с единицей.

В системе координат $\xi_i$ уравнения (6.7) примут вид

$$\begin{aligned}
\rho_0 W^2[l_1] &= \left[\frac{\partial\Phi}{\partial l_1}\right] + \psi\left[\frac{\partial\Phi}{\partial m_1}\right],\\
\rho_0 W^2([l_2] + \psi[l_3]) &= \left[\frac{\partial\Phi}{\partial l_2}\right] + \psi\left[\frac{\partial\Phi}{\partial m_2}\right],\\
\rho_0 W^2([l_3] + \psi[l_2]) &= \left[\frac{\partial\Phi}{\partial l_3}\right] + \psi\left[\frac{\partial\Phi}{\partial m_3}\right],
\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$[m_i] - \psi[l_i] = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.9}$$

Левые части уравнений (6.8) представляют преобразованные к новым переменным $\xi_i$ левые части первой группы уравнений (6.7) с использованием второй группы этих уравнений. Правая

часть уравнений (6.7) и (6.8) представляют разрыв напряжений на плоскости ударной волны с нормалью $\{0, -\psi, 1\}$. Величиной $\psi^2$ всюду пренебрегалось по сравнению с 1.

В левой части второго уравнения (6.8) можно пренебречь членом $\psi[l_3]$ поскольку в квазипоперечных ударных волнах $[l_3] \sim \varepsilon^2$ (Глава 4). В левой части третьего уравнения (6.8) можно пренебречь членом $\psi[l_2] \sim \chi\varepsilon$ по сравнению с $[l_3] \sim \varepsilon^2$, поскольку третье уравнение при исследовании квазипоперечных ударных волн решается в самом грубом приближении.

Поскольку все вычисления ведутся с относительной погрешностью много меньшей $\chi$, то для $\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial m_i}\right]$ достаточно ограничиться линейным изотропным приближением, согласно которому

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial m_i}\right] = d^0_{ki}[l_k] + s^0_{ik}[m_k], \quad d^0_{ki} = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial l_k \partial m_i}, \quad s^0_{ik} = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial m_i \partial m_k}.$$

Последним членом можно пренебречь ввиду малости $[m_k]$, а из производных $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial m_i \partial l_k}$, согласно предыдущему параграфу, конечную величину будут иметь только производные с индексами $2, 3$ и $3, 2$. Этому соответствует присутствие во втором уравнении (6.8) члена $\psi\, d_{32}[l_3]$, а в третьем – члена $\psi\, d_{23}[l_2]$. Первый из этих членов в случае квазипоперечных ударных волн имеет порядок $\chi\varepsilon^2$ и пренебрежимо мал (члены такого порядка не учитывались в Главе 4), а второй имеет порядок $\chi\varepsilon$, однако, при изучении квазипоперечных волн уравнение для изменения квазипродольной компоненты (в данном случае для $[l_3]$) решалось в грубом приближении и члены порядка $\chi\varepsilon$ не учитывались. Таким образом, соотношения на квазипоперечных ударных волнах в системе координат, связанной с одной из характеристик невозмущенного потока, могут быть записаны в виде

$$\rho_0 W^2[l_i] = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right], \quad [m_i] = \psi[l_i], \qquad i = 1, 2, 3, \tag{6.10}$$

$$V\sin\varphi = c^- \quad W = V\sin(\varphi - \psi) = c^-(1 - k\psi), \quad k = \operatorname{ctg}\varphi.$$

В первой группе соотношений на разрыве (6.10) можно не учитывать влияние на правую часть малых изменений величин $m_i$. Действительно, вклад этих изменений проявится в наличии членов $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial l_i \partial m_k}[m_k] = -d_{ik}[l_k]$. Возможность пренебрежения такими членами была показана выше. Таким образом, первая группа уравнений (6.10), хотя она записана в системе координат, ориентированной по характеристике впереди ударной волны, не отличается от соотношений, записанных в системе координат, связанной с ударной волной. Эти соотношения независимы от последующих. Далее из последнего уравнения (6.10) можно найти значение $\psi$, имеющее порядок величины $\chi$, поскольку такой порядок имеет разность $W - c^-$ в рассматриваемой области изменения параметров. Затем из второй группы уравнений можно найти $[m_i]$, имеющие порядок $\varepsilon\chi$.

Отметим, что результаты остаются верными при любом направлении осей $\xi_2, \xi_3$, при котором порядок величины $\psi$ по-прежнему не превосходит $\chi$.

## 6.3. Задача о бегущей нагрузке

Рассмотрим в качестве примера автомодельных стационарных задач следующую задачу (Чугайнова [1991]). Упругая среда расположена в области $x \equiv x_3 > 0$ и на границе ее $x = 0$ происходит смена напряжений. Пусть напряжения на границе заданы следующим образом: $\sigma_{3i} = \Sigma_3$ при $x_2 > a + bt$ и $\sigma_{3i} = \sigma_3^*$ при $x_2 < a + bt$. Подобная задача возникает, например, в окрестности движущейся точки контакта двух тел при их соударении. Если $b = \infty$, то изменение напряжений происходит мгновенно и имеет место нестационарная автомодельная задача, рассмотренная в Главе 5. При конечных скоростях $b$ можно разыскивать стационарное решение в системе координат $x_1$, $\eta \equiv x_2 - a - bt$, $x \equiv x_3$. В этой системе координат, в которой среда движется со скоростью $\{0, -b, 0\}$, задача становится автомодельной и решение будет зависеть от $x/\eta$ (рис. 6.2).

Если скорость $b$ достаточно велика, то уравнения в системе

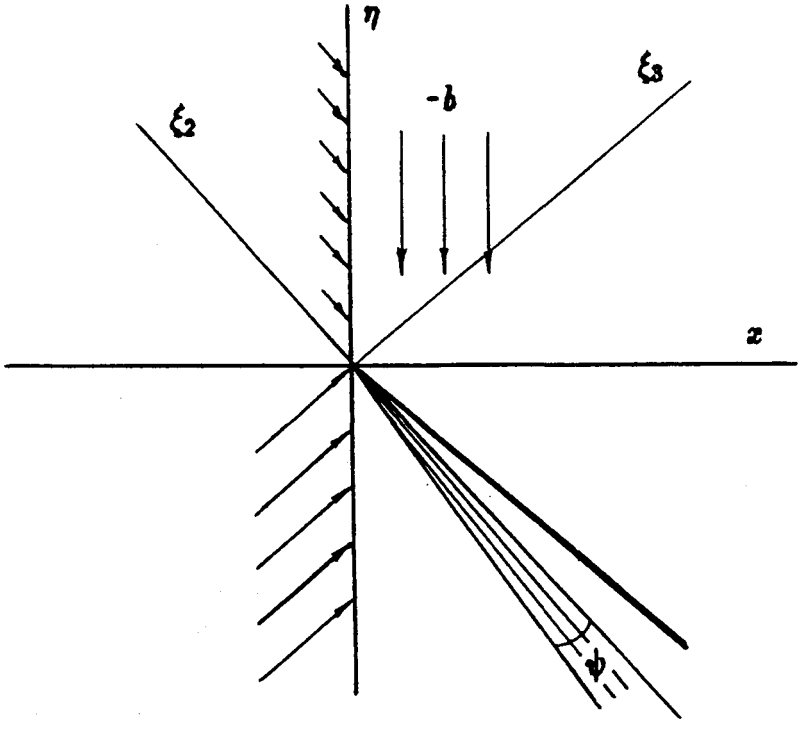



Рис. 6.2.

координат $x_1, \eta, x$ будут гиперболическими и решение задачи будет представляться системой косых волн. В простейшем случае (в частности, в линейном приближении) решение будет представлено тремя волнами: одной квазипродольной и двумя квазипоперечными. Распоряжаясь амплитудами этих трех волн, можно добиться выполнения трех граничных условий.

В случае задач с малыми изменениями всех величин для построения решения можно использовать метод, примененный ранее в § 5.5 при решении задачи о распаде начального разрыва. Нулевое приближение соответствует решению в линейном приближении при отсутствии анизотропии. В последующем по очереди предлагается производить уточнение решения для квази-

поперечных и квазипродольных волн, удовлетворяя на каждом шаге соответствующим этим волнам граничным условиям по переменным, испытывающим наибольшее изменение, и откладывая до следующего шага устранение невязок по другим переменным.

При этом для построения первого приближения для квазипоперечных волн следует выбрать систему координат $\xi_2, \xi_3$, связанную с направлением квазипоперечной волны в нулевом приближении. В этой системе координат, используя результаты предыдущих параграфов, сначала можно найти изменение $l_i$, так же как это делается при решении нестационарной автомодельной задачи. Затем по характеристическим скоростям или по скорости ударной волны находятся соответствующие значения $\psi$. Затем с помощью уравнений (6.6) или второй группы уравнений (6.10) находятся $m_i$.

## Резюме

Рассмотрены автомодельные решения уравнений теории упругости при малой нелинейности и анизотропии, зависящие от отношения декартовых координат $x/y$ в случае, когда упругая среда движется относительно этой системы координат со "сверхзвуковой" скоростью. Доказано, что для квазипоперечных волн в силу того, что нелинейные члены в уравнениях, описывающих эти волны, имеют порядок $\varepsilon^3$ (величина $\varepsilon$ характеризует отклонение от ненапряженного состояния), изменения величин в непрерывных волнах (§ 6.1) и на разрывах (§ 6.2) не отличаются с принятой в книге точностью описания от изменений в плоских волнах с некоторой заранее выбранной ориентацией.

Обсуждено решение задачи о волнах, возбуждаемых в полупространстве при изменении нагрузки на его границе, когда это скачкообразное изменение происходит не мгновенно на всей плоскости, как принималось в Главе 5, а на прямой линии, которая достаточно быстро движется по плоскости, ограничивающей полупространство (задача о бегущей нагрузке).

# Глава 7.

# Упрощенные уравнения теории упругости. Неавтомодельные задачи

## 7.1. Эквивалентная несжимаемая среда при описании квазипоперечных волн

В предыдущих главах, где изучались волны малой амплитуды, делались приближенные вычисления и пренебрежения малыми членами как при написании упругого потенциала, так и при построении решений, описывающих волны Римана и разрывы. Подобные упрощения можно произвести с системой уравнений теории упругости и получить более простые уравнения в частных производных (Энгельбрехт и Нигул [1981], Куликовский [1986]), пригодные не только для изучения упомянутых частных решений, но и в более сложных случаях. В магнитной гидродинамике подобные уравнения были получены в работе (Cohen and Kulsrud [1974]) для описания волн малой амплитуды, распространяющихся в направлении близком к направлению магнитного поля. Использование упрощенных уравнений позволяет существенно сократить вычисления при построении числен-

ных решений. Уравнения, которые предполагается получить, будут приближенно описывать квазипоперечные волны так же, как уравнения Хопфа описывают волны в газе или квазипродольные волны в упругой среде.

Идея получения упрощенных уравнений заключается в том, что возмущения, распространяющиеся с существенно различающимися скоростями, в случае волн малой амплитуды слабо взаимодействуют между собой. Это позволяет в качестве искомых функций выбрать инварианты Римана линейного приближения и рассматривать ситуации, когда определяющую роль играют только некоторые из них. Остальные инварианты Римана предполагаются малыми и для них строятся приближенные решения.

При рассмотрении квазипоперечных волн, если эффекты нелинейности и анизотропии сравнимы, оказывается необходимым учитывать взаимодействие двух квазипоперечных волн, распространяющихся с близкими скоростями. Соответственно будет предположено, что определяющую роль будут играть два инварианта Римана (линейного приближения), которые связаны с соответствующими семействами характеристик. Однако, остальные инварианты Римана не могут быть положены равными нулю, поскольку нелинейность приводит к их появлению внутри волны даже при нулевых начальных условиях. Для этих инвариантов будет получено приближенное *вынужденное* решение, учет которого необходим для правильного описания основных инвариантов в принятом приближении. В результате в следующем параграфе получим систему двух уравнений в частных производных для описания квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону.

Упрощение уравнений теории упругости проведем в два этапа: сначала, в этом параграфе, исключим продольные возмущения и получим систему уравнений для квазипоперечных волн. Эта система совпадает с системой уравнений, описывающей поперечные волны в некоторой *(эквивалентной) несжимаемой среде*, упругий потенциал которой находится по исходному упругому потенциалу. В следующем параграфе будет получена система из двух уравнений для описания квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону.

Итак, одномерные уравнения теории упругости (2.18)

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Первую группу уравнений будем называть *динамическими уравнениями*, а вторую – *кинематическими*. Как и ранее, упругий потенциал будем записывать в виде (2.26)

$$\Phi = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) + \frac{1}{2}du_3^2 + au_3^3 + b(u_1^2 + u_2^2)u_3 + \frac{1}{4}h(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0(S - S_0).$$

Коэффициенты разложения $f$, $d$, $b$ и $h$ имеют величины порядка единицы, а $g$ считается малым параметром. Будем интересоваться квазипоперечными волнами, в которых $u_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ не превосходят по порядку величины $\varepsilon \ll 1$, а изменение $u_3$ в волне предполагается не превосходящим по порядку величины $\chi = \max\{\varepsilon^2, g\}$. Последнее предположение находится в соответствии со свойствами ударных и римановских волн, изученных ранее (§§ 3.4 и 4.3). Это предположение будет в дальнейшем проверено для решений изучаемого типа в общем случае, если начальные и граничные условия обладают теми же свойствами.

В силу малости амплитуды изучаемая волна близка к линейной поперечной бегущей волне. В системе координат, движущейся со скоростью $\sqrt{f/\rho_0}$, изменения решения, представляющего квазипоперечную волну, будут обусловлены нелинейными членами или членами, содержащими $g$. Пренебрегая этими малыми членами, можно с относительной погрешностью, не превосходящей по порядку величины $\chi$, записать, что решение в исходной системе координат является *бегущей волной*. В частности, с указанной точностью имеем

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + \sqrt{f/\rho_0}\,\frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial t} + \sqrt{f/\rho_0}\,\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0.$$

Последние равенства означают рассмотрение только *вынужденного* решения для продольных скорости $v_3$ и деформации $u_3$ в

квазипоперечной волне и отсутствие *свободной* квазипродольной волны, движущейся со скоростью $\sqrt{d/\rho_0}$. С учетом соответствующего кинематического уравнения имеем

$$\rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} = f \frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

Подставляя полученное соотношение в третье динамическое уравнение исходной системы, получим

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -\frac{1}{d-f}\left(\Phi_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \Phi_{23}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right).$$

Здесь $\Phi_{ij} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}$. Если воспользоваться приведенным выше выражением для $\Phi$, то

$$\Phi_{13} = 2bu_1, \qquad \Phi_{23} = 2bu_2.$$

Таким образом, при сделанных предположениях получаем

$$u_3 = -\frac{b}{d-f}(u_1^2 + u_2^2) + u_3^0. \tag{7.1}$$

где $u_3^0$ – постоянная интегрирования. При более частных предположениях это равенство было получено ранее (уравнения (3.15) и (4.12)). Изменение $u_3$ в квазипоперечных волнах, согласно равенству (7.1), не превосходит по порядку величины $\varepsilon^2$, что находится в соответствии с исходными предположениями.

Используя последнее выражение, первые два динамических уравнения и два кинематических уравнения можно переписать в виде

$$\rho_0 \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial u_\alpha}\right), \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{7.2}$$

Функция $H = H(u_1, u_2)$ определяется через функцию $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ из условия

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_\alpha \partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

где производная $\partial u_3/\partial u_\beta$ вычисляется согласно формуле (7.1). Отсюда нетрудно найти, что

$$\frac{\partial H}{\partial u_\alpha} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}\right)_{u_3} = -b(u_1^2 + u_2^2)/(d - f) + u_3^0$$

Таким образом, с учетом разложения (2.26) упругого потенциала изучаемой среды $\Phi(u_i,)$, $i$=1,2,3, можно ввести функцию $H$ с помощью равенства

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2} f_1 (u_1^2 + u_2^2) + Q, \\ Q = \frac{1}{2} g (u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4} \varkappa (u_1^2 + u_2^2)^2, \\ f_1 = f + 2bu_3^0, \qquad \varkappa = \frac{2b^2}{d - f} - h, \end{gathered} \tag{7.3}$$

что совпадает с выражениями (3.18) и (4.14), принятыми для функции $H$ ранее.

Уравнения (7.2) представляют, очевидно, систему уравнений для описания движений несжимаемой упругой среды. Функция $H(u_\alpha)$, $\alpha$=1,2, заданная выражением (7.3), выступает в качестве упругого потенциала этой вспомогательной (*эквивалентной*) несжимаемой упругой среды. Описание квазипоперечных волн с помощью системы (7.2) совпадает с описанием, получаемым из полной системы уравнений исходной сжимаемой среды (2.18).

## 7.2. Упрощенные уравнения для описания квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону

Получим теперь уравнения, описывающие квазипоперечные волны, распространяющиеся направо, при условии, что начальные и граничные условия таковы, что волны, распространяющиеся налево, не возбуждаются (или возбуждаются в достаточно малой степени). Введем в качестве новых переменных четыре

инварианта Римана уравнений (7.2) для квазипоперечных волн в случае, когда $Q \equiv 0$

$$\mathrm{w}_\alpha^+ = \frac{1}{2}\left(u_\alpha - v_\alpha\sqrt{f_1/\rho_0}\right), \qquad \mathrm{w}_\alpha^- = \frac{1}{2}\left(u_\alpha + v_\alpha\sqrt{f_1/\rho_0}\right).$$

Индексом "+" обозначены инварианты, соответствующие волнам, распространяющимся направо, а индексом "–" – налево.

Домножив динамические уравнения (7.2) на $1/\sqrt{\rho_0 f_1}$ и взяв их полуразности и полусуммы с соответствующими кинематическими уравнениями, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathrm{w}_\alpha^+}{\partial t} + \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}}\frac{\partial \mathrm{w}_\alpha^+}{\partial x} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{w}_\beta^+ + \mathrm{w}_\beta^-) = 0,\\ \frac{\partial \mathrm{w}_\alpha^-}{\partial t} - \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}}\frac{\partial \mathrm{w}_\alpha^-}{\partial x} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{w}_\beta^+ + \mathrm{w}_\beta^-) = 0,\\ Q_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 Q}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}.\end{gathered} \tag{7.4}$$

Если считать, что отрезок оси $x$, занятый волной, распространяющейся направо, равен $L$, а производная $\partial \mathrm{w}_\beta/\partial x$ по порядку величины совпадает с изменением $\mathrm{w}_\beta$, деленным на $L$, то из уравнений для $\mathrm{w}_\alpha^-$ можно получить, что та часть изменения $\mathrm{w}_\alpha^-$, которая обязана своим происхождением наличию члена $\partial \mathrm{w}_\beta^+/\partial x$ в уравнениях, имеет по отношению к изменению $\mathrm{w}_\beta^+$ порядок величины, определяемый $Q_{\alpha\beta}$, т.е. $\chi$. Это позволяет пренебречь в уравнениях для $\mathrm{w}_\alpha^+$ членами с $\partial \mathrm{w}_\beta^-/\partial x$, поскольку эти малые производные умножаются на малые коэффициенты $Q_{\alpha\beta}$. Тогда уравнения для $\mathrm{w}_\alpha^+$ приобретают вид

$$\frac{\partial \mathrm{w}_\alpha^+}{\partial t} + \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}}\frac{\partial \mathrm{w}_\alpha^+}{\partial x} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}\frac{\partial \mathrm{w}_\alpha^+}{\partial x} = 0. \tag{7.5}$$

Можно приближенно выразить $\mathrm{w}_\alpha^-$ через $\mathrm{w}_\alpha^+$, если в последнем малом члене второго уравнения (7.4) пренебречь слагаемым $\partial \mathrm{w}_\beta^-/\partial x$, а член $\dfrac{\partial \mathrm{w}_a^-}{\partial t}$ заменить на $-\sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}}\dfrac{\partial \mathrm{w}_\alpha^-}{\partial x}$. Проинтегрировав

полученное равенство по $x$, получим выражение, которое не будем выписывать явно и которое позволяет связать изменения $u_\alpha$ и $v_\alpha$ в волне, распространяющейся направо. Главные члены этой связи соответствуют равенствам $\mathrm{w}_\alpha^- = 0$, имеющим место в линейном случае. В нелинейном случае якобиан преобразования от переменных $u_1$, $u_2$ к переменным $\mathrm{w}_1^+$, $\mathrm{w}_2^+$ отличается от единичной матрицы (которая соответствует $\mathrm{w}_\alpha^- = 0$) наличием членов порядка $\chi$. Производя в уравнениях (7.5) указанное преобразование переменных и пренебрегая членами порядка $\chi^2$, получим те же самые уравнения, но уже для $u_\alpha$. Перепишем их в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha}\right) = 0, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}(f_* - g_*)u_1^2 + \frac{1}{2}(f_* + g_*)u_2^2 - \frac{\varkappa_*}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}f_*(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2\rho_0 f_*}Q(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$f_* = \sqrt{\frac{f_1}{\rho_0}}, \quad g_* = \frac{g}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}, \quad \varkappa_* = \frac{\varkappa}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}.$$

Система (7.6) упрощенных уравнений теории упругости состоит из двух связанных уравнений и служит для описания *двух квазипоперечных волн, распространяющихся с близкими скоростями в одном направлении* и взаимодействующих между собой. Уравнения (7.6), так же как и исходные уравнения (7.2) для поперечных движений среды, выражают сохранение поперечных компонент импульса и имеют дивергентную форму. Это позволяет написать соотношения на разрывах

$$\left[\frac{\partial R}{\partial u_\alpha}\right] - W[u_\alpha] = 0, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{7.8}$$

В уравнения (7.6) входят постоянные коэффициенты $f_*$, $g_*$ и $\varkappa_*$ (через задание $R$). Путем перехода к системе координат, движущейся со скоростью $f_*$, можно обратить в нуль коэффициент $f_*$. Выбирая масштабы измерения для $t$ или $x$, а также масштаб для $u_\alpha$, можно обратить оставшиеся коэффициенты по модулю

в единицы. Таким образом, можно принять в качестве канонических форм запись уравнений (7.6) с $f_* = 0$, $g_* = 1$ и $\varkappa_* = \pm 1$. В дальнейшем каноническая форма уравнений (7.6), почти не будет применяться, но важно отметить, что все результаты, полученные для этих уравнений, имеют универсальный характер, т.е. решение уравнений (7.6) и (7.7) с заданными $f_*$, $g_*$ и $\varkappa_*$ можно преобразовать в некоторое решение тех же уравнений с произвольными $f_*$, $g_*$ и $\varkappa_*$.

Отметим, что уравнения несжимаемой среды (7.2), (7.3), которые также характеризуются тремя параметрами $f$, $g$ и $\varkappa$, не преобразуются к одной или нескольким каноническим формам, поскольку вид этих уравнений не допускает преобразования Галлилея. Из указанных трех параметров только два можно превратить по модулю в единицы.

## 7.3. Описание волн Римана и разрывов с помощью упрощенных уравнений теории упругости

В этом параграфе будет показано, что волны Римана и ударные волны, служащие решениями соответственно уравнений (7.6) и (7.8), совпадают с приближенным описанием тех же волн, полученным в Главах 3 и 4 на базе истинных точных уравнений теории упругости, в пределах точности вычислений, использованных там.

Для волн Римана достаточно проверить совпадение характеристических скоростей и направлений на плоскости $u_1 u_2$, определяющих малые изменения величин в этих волнах. Рассматривая решения, представляющие волны Римана, $u_\alpha = u_\alpha(\theta)$, где $\theta$ – заранее не известная функция $x$ и $t$, получим из уравнений (7.6)

$$(R_{\alpha\beta} - c\delta_{\alpha\beta})du_\beta = 0, \quad R_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 R}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}, \quad c = -\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big/\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Таким образом, $c$ – собственное значение, а $\{du_1, du_2\}$ – собственный вектор матрицы $\|R_{ij}\|$. При подходе, изложенном в

§ 3.4, квадрат характеристической скорости находился как собственное значение матрицы $\rho_0^{-1}\|H_{\alpha\beta}\|$, где $\|H_{\alpha\beta}\|$ – матрица вторых производных функции $H(u_1, u_2)$, определенной равенством (3.18) или (7.3). Направления изменения величин в волнах Римана определялись собственными векторами указанной матрицы.

Для того чтобы имело место совпадение результатов при обоих подходах, достаточно, чтобы матрица $\rho_0^{-1}\|H_{\alpha\beta}\|$ представляла бы квадрат матрицы $\|R_{\alpha\beta}\|$, поскольку в этом случае собственные векторы симметричной матрицы $\|R_{\alpha\beta}\|$ совпадают с собственными векторами ее квадрата, а собственные числа при возведении в квадрат матрицы $\|R_{\alpha\beta}\|$ также возводятся в квадрат. Возведение матрицы $\|R_{\alpha\beta}\|$, представленной равенством (7.7), в квадрат позволяет убедиться в справедливости высказанного утверждения

$$\|R_{\alpha\beta}\|^2 \approx f_*^2\|\delta_{\alpha\beta}\| + \frac{1}{\rho_0}\|Q_{\alpha\beta}\| = \frac{1}{\rho_0}\|H_{\alpha\beta}\| \tag{7.9}$$

(в этом равенстве $f_*$ конечно, а $Q_{\alpha\beta}$ имеет порядок $\chi$, ввиду чего квадратичный по $Q_{\alpha\beta}$ член не выписан, как малый). Характеристические скорости системы (7.6) совпадают, таким образом, с выражениями(3.21). В результате простые волны и малые возмущения, описываемые системой (7.6), с принятой нами точностью соответствуют исходной системе уравнений теории упругости.

Доказанное выше совпадение характеристических скоростей и собственных направлений на самом деле означает совпадение произвольных решений, состоящих из квазипоперечных быстрых и медленных волн, распространяющихся направо. Получение уравнений (7.6) для квазипоперечных волн, распространяющихся направо, можно было бы с самого начала свести к извлечению квадратного корня из матрицы производных $\|\rho_0^{-1}H_{\alpha\beta}(u_1, u_2)\|$, хотя такой подход был бы более формальным.

Соотношения (7.8) на ударных волнах с использованием равенства (7.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\rho_0 f_*}\left[\frac{\partial Q}{\partial u_\alpha}\right] = (W - f_*)[u_\alpha].$$

При этом соотношения (4.15) с использованием равенства (7.3) имеют вид

$$\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial Q}{\partial u_\alpha}\right] = (W^2 - f_*^2)[u_\alpha].$$

Поскольку $W^2 \approx 2f_*(W - f_*)$, то указанные соотношения с принятой точностью совпадают. Поэтому все полученные в Главах 4 и 5 результаты относятся в равной мере к разрывам, описываемым равенствами (7.8).

## 7.4. Инварианты Римана. Уравнения в плоскости годографа. Неавтомодельные задачи

Система уравнений (7.6), как гиперболическая из двух уравнений, может быть приведена к системе уравнений для инвариантов (§ 1.2). В этом случае она имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I_1}{\partial t} + c_1(I_1, I_2)\frac{\partial I_1}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial I_2}{\partial t} + c_2(I_1, I_2)\frac{\partial I_2}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Функции $I_1 = I_1(u_1, u_2)$ и $I_2 = I_2(u_1, u_2)$ представляют собой инварианты Римана. Это произвольные функции $x$ и $t$, принимающие постоянные значения на интегральных кривых волн Римана: $I_2 = \text{const}$ на интегральной кривой, соответствующей характеристической скорости $c_1$ и $I_1 = \text{const}$ на интегральной кривой, соответствующей $c_2$. На плоскости $x, t$ для волны Римана, соответствующей $c_1$, величина $I_1$, согласно уравнениям (7.10), остается постоянной на каждой характеристике и меняется при переходе от одной характеристики к другой. Величина же $I_2$ в этой волне принимает постоянное значение, поскольку все характеристики, соответствующие $c_2$, начинаются из одного и того же однородного состояния. Аналогичное верно для волны Римана, соответствующей $c_2$. Поскольку интегральные кривые волн Римана в общем случае не были найдены в явном

виде, явные выражения для $I_1(u_1, u_2)$ и $I_2(u_1, u_2)$ в общем случае также отсутствуют.

При $g = 0$ можно принять

$$I_1 = \theta \equiv \operatorname{arctg}(u_2/u_1), \qquad I_2 = r \equiv \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

При этом $c_1$ и $c_2$ зависят только от $I_2$: $c_1 = c_1(r)$, $c_2 = c_2(r)$. Это приводит к тому, что уравнение для $I_2 = r$ становится независимым от уравнения для $I_1 = \theta$.

Нелинейность в уравнениях (7.10) проявляется только зависимостью $c_1$ и $c_2$ от $I_1$ и $I_2$, которая в линейном случае отсутствует. При этом легко сказать, каково будет решение в точке пересечения двух характеристик разных семейств с заданными значениями $I_1$ и $I_2$ на них, но труднее указать точку на плоскости $x, t$, где это пересечение будет иметь место. Для отыскания таких точек приходится последовательно (в общем случае – численно) решать нелинейные уравнения.

Уравнения (7.10) могут быть приведены к линейному виду, если сделать преобразования годографа, поменяв зависимые и независимые переменные. Такое преобразование во многих случаях оказывается полезным. Для этой замены переменных запишем уравнения (7.10) как соотношения на характеристиках

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= 0, \qquad \frac{dx}{dt} = c_1(I_1, I_2); \\ \frac{dI_2}{dt} &= 0, \qquad \frac{dx}{dt} = c_2(I_1, I_2). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Будем теперь рассматривать первые уравнения в этих системах как уравнения, задающие характеристические направления на плоскости новых независимых переменных $I_1$ и $I_2$, а вторые уравнения этих систем – как соотношения между зависимыми переменными $x$ и $t$ на этих характеристиках. Возвращаясь к записи уравнений в виде уравнений в частных производных, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial I_2} - c_1(I_1, I_2)\frac{\partial t}{\partial I_2} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial I_1} - c_2(I_1, I_2)\frac{\partial t}{\partial I_1} = 0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Первое уравнение соответствует первому семейству характеристик, второе – второму. Эти уравнения линейны (относительно искомых функций $x$ и $t$), но обладают переменными коэффициентами, поскольку $c_1$ и $c_2$ зависят от независимых переменных $I_1$ и $I_2$.

Пусть, например, заданы начальные условия в виде $I_1(s)$, $I_2(s)$, $x(s)$, $t(s)$, где $s$ – некоторый параметр. Это позволяет в общем случае решать задачу Коши, как относительно переменных $I_1$, $I_2$ на плоскости $x, t$, так и относительно переменных $x$, $t$ на плоскости $I_1, I_2$ или $u_1, u_2$. В последнем случае на некоторой кривой $u_1(s)$, $u_2(s)$ заданы $x(s)$ и $t(s)$ (в частности, может быть $t(s) = t_0 = \text{const}$). Через точки этой кривой на плоскости $u_1, u_2$ проводятся характеристики $I_1 = \text{const}$ и $I_2 = \text{const}$ и, используя соотношения на характеристиках $dx = c_1\,dt$ и $dx = c_2\,dt$ и двигаясь малыми шагами по плоскости $u_1, u_2$, можно найти функции $x(u_1, u_2)$ и $t(u_1, u_2)$. На этой плоскости можно изобразить систему линий $t(u_1, u_2) = t_i$. Поскольку в каждой точке такой линии определено значение $x$, то можно считать, что линия задана параметрически с параметром $x$. При этом $u_1(x)$ и $u_2(x)$ при $t = t_i$ можно рассматривать как проекцию на плоскость $u_1, u_2$ трехмерной кривой $u_1 = u_1(x, t_i)$, $u_2 = u_2(x, t_i)$, заданной в пространстве $u_1, u_2, x$.

На плоскости $u_1u_2$ линия $u_1(x), u_2(x)$, соответствующая $t = t_0$, пересекает линии $I_1(u_1, u_2) = \text{const}$, $I_2(u_1, u_2) = \text{const}$ (являющиеся характеристиками системы (7.12) так, как это показано на рис. 7.1.

Рассмотрим на этой линии близкие точки $A$ и $B$, считая, что $x_A > x_B$. При этом предполагаем, что на некотором конечном отрезке кривой $u_1(x), u_2(x)$, включающем точки $A$ и $B$, сохраняется такое же направление изменения $x$. Двигаясь по линиям $I_1 = \text{const}$ и $I_2 = \text{const}$ из уравнения (7.12) (или (7.11)) находим для точек $C$ и $D$

$$C: \quad x_C - x_A = c_1(t_C - t_0), \qquad x_C - x_B = c_2(t_C - t_0),$$

$$D: \quad x_D - x_B = c_1(t_D - t_0), \qquad x_D - x_A = c_2(t_D - t_0).$$

Из первой пары уравнений получим $x_A - x_B = (c_2 - c_1)(t_C - t_0)$, а из второй $x_A - x_B = (c_1 - c_2)(t_D - t_0)$. Если $c_1 < c_2$, то $t_D < t_0 < t_C$ и кривая $u_1(x), u_2(x)$ с ростом времени перемещается на рис. 7.1 вверх направо, проходя сначала через точку $D$, затем через $A$ и $B$, а затем через точку $C$. При обратном направлении изменения $x$ на линии $u_1(x), u_2(x)$ эта кривая с течением времени будет перемещаться в противоположном направлении. Подобные рассмотрения позволяют в некоторых случаях качественно исследовать изменение функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ с течением времени.

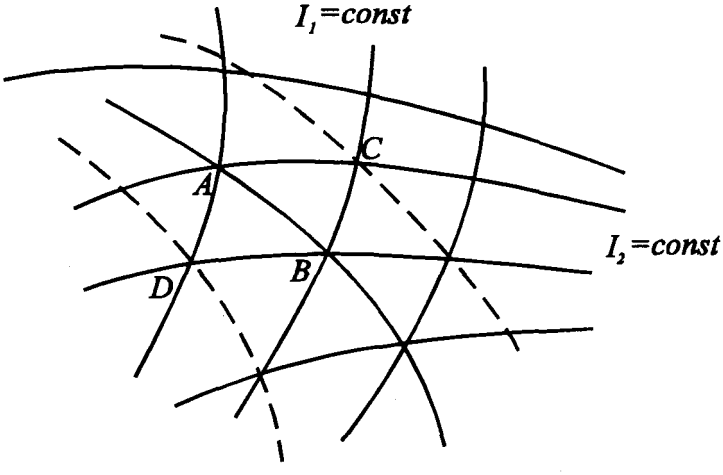



Рис. 7.1.

На плоскости $u_1 u_2$, используя метод характеристик, можно качественно рассматривать также взаимодействие ударных волн с малыми возмущениями. Для каждой из ударных волн, описываемых уравнениями (7.8), согласно условиям эволюционности, три

характеристики являются приходящими, а одна, соответствующая волне другого типа, – уходящей. Рассмотрим в качестве примера поведение быстрой ударной волны. Состояние перед быстрой ударной волной определяется приходящими к ней спереди характеристиками. Перемещение точки, представляющей состояние перед ударной волной, по плоскости $u_1, u_2$ может быть найдено с учетом того, что $dx = W\,dt$. За ударной волной известен только один инвариант $I_1$, соответствующий приходящей характеристике, а другой инвариант $I_2$ определяется точкой на ударной адиабате, где $I_1$ принимает заданное значение. Изменение $I_1$ со временем за ударной волной определяется с учетом того, что скорость ударной волны равна $W$, а скорость характеристики, приносящей $I_1$, равна $c_1$. Пример качественного рассмотрения подобной задачи дан в следующем параграфе.

## 7.5. Эволюция при малой анизотропии волн, близких к вращательным. Катастрофическая перестройка

Ниже рассматривается решение, в котором влияние анизотропии, даже если она мала, очень ярко проявляется в поведении волн, близких к вращательным (Куликовский [1989]). При отсутствии анизотропии (при $g = 0$, например, в магнитной гидродинамике) обсуждаемый ниже эффект отсутствует.

Рассмотрим для определенности случай $\varkappa > 0$. Еще предположим, что в рассматриваемых волнах отношение $g/\varkappa r^2$ достаточно мало ($r^2 = u_1^2 + u_2^2$). Это неравенство характеризует соотношение между параметрами анизотропии и нелинейности. Малость $g/\varkappa r^2$ необходима для существования отдельного эволюционного отрезка ударной адиабаты (для ударных волн второго типа), который нужен для рассматриваемого явления. При $\varkappa > 0$ этот отрезок соответствует быстрым ударным волнам.

При малых $g/\varkappa r^2$ интегральные кривые быстрых волн Римана близки к окружностям. Соответствующий инвариант Римана близок к величине полярного угла $\theta = \operatorname{arctg}(u_2/u_1)$. Быстрая характеристическая скорость на этой кривой меняется на вели-

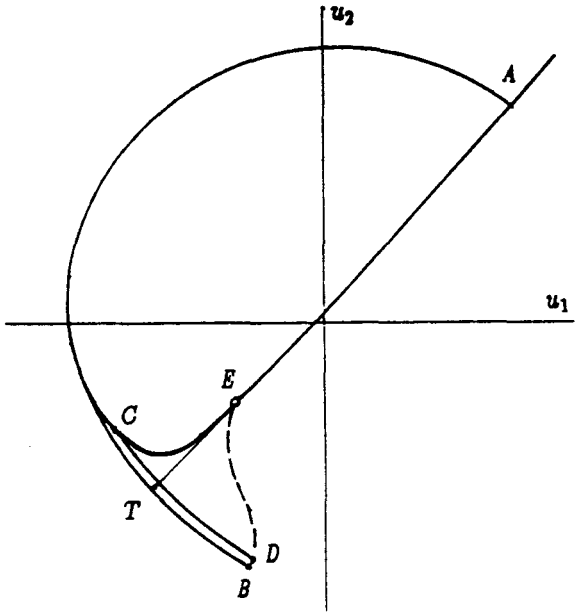



Рис. 7.2.

чину порядка $g$, в то время как разность быстрой и медленной характеристической скоростей имеет порядок $\varkappa r^2$. Изменение $u_1$ и $u_2$ в медленной волне в области $\varkappa r^2 \gg g$ происходит приблизительно по лучу, выходящему из начала координат. Соответствующий инвариант Римана $I_2$ близок к $r$.

Рассмотрим быструю волну Римана при $\varkappa > 0$, в которой полярный угол монотонно увеличивается от некоторого начального значения $\theta_A < \pi/2$, соответствующего точке $A$ на рис. 7.2, до значения $\theta_B > \theta_A + \pi$, соответствующего точке $B$ на том же рисунке. Линия, проходящая через точки $A$ и $B$, изображает на рис. 7.2 часть интегральной кривой быстрой волны Римана. В такой волне за счет малого различия характеристических скоростей $c_2$ начнется медленный процесс ее деформации и образования ударной волны. До тех пор, пока изменение полярного угла в ударной волне не приблизится к $\pi$, скорость ударной волны остается близкой к $c_2$. При этом изменение состояний перед

и за ударной волной, так же как и деформация волны Римана, происходит медленно. Если считать характерную разность скоростей величиной порядка $g$, то характерные времена изменений будут порядка $L/g$, где $L$ – характерный для волны Римана пространственный масштаб.

Изменение (скачок) величин в ударной волне, в которой полярный угол меняется на величину существенно меньшую, чем $\pi$, близко к изменению в волне Римана, так как начальная и конечная точки скачка лежат приблизительно на одной и той же окружности с центром в начале координат. Некоторое различие компенсируется *излучением медленной волны*, которая движется в ту же сторону со скоростью, отличающейся от быстрой на величину порядка $\varkappa r^2$. Поэтому за время $L/\varkappa r^2$, значительно меньшее, чем $L/g$, медленное возмущение проходит сквозь быструю волну и отстает от нее. Таким образом, можно считать, что сзади к ударной волне примыкает быстрая волна Римана, растянутая по оси $x$ на расстояние порядка $L$.

Рассмотрим момент времени, когда уже сформировалась быстрая ударная волна $A \to C$, за ней следует быстрая волна Римана $CD$ и затем медленная волна Римана $DB$ (все волны движутся в одну сторону).

Будем предполагать, что в приходящей сзади к ударной волне быстрой волне Римана (которая управляет всем процессом) угол $\theta$ меняется монотонно и приблизительно с постоянной производной $\partial\theta/\partial x$, так что $\theta$ меняется на конечную величину на расстояниях порядка $L$. При дальнейшем увеличении времени точка $C$ смещается по ударной адиабате в сторону точки $E$. Скорость этого движения пропорциональна разности $c_2^+ - W$, поскольку эта разность определяет скорость прихода к ударной волне возмущений из волны Римана. Как уже отмечалось, сначала движение точки $C$ по ударной адиабате происходит медленно, поскольку разность $c_2^+ - W$ мала. Затем по мере приближения к точке $E$ она увеличивается и в точке $E$ оказывается равной $c_2^+ - c_1^+$. Соответственно ускоряется движение точки $C$ к $E$.

По мере удаления точки $C$ от интегральной кривой $AB$, соответствующей быстрой волне Римана, за ударной волной увеличивается амплитуда излучаемой медленной волны. Вначале,

при медленном движении точки $C$, на плоскости $u_1u_2$ происходит медленное смещение точки $D$ к центру, а отрезок $CD$ можно было рассматривать как отрезок быстрой интегральной кривой. Когда движение точки $C$ становится достаточно быстрым, описанное выше разделение быстрой и медленной волн не успевает происходить. Кривая $CD$ перестает быть интегральной кривой и на ней изменяются оба инварианта.

Когда точка $C$ достигает точки точки $E$, то при дальнейшем приходе сзади быстрых малых возмущений ударная волна становится неэволюционной и распадается с образованием автомодельного решения второго типа (см. Главу 5). Происходит *катастрофическая перестройка решения.* Непосредственно после распада вместо скачка $AE$ будет существовать бесконечно узкая сложная быстрая волна, состоящая из двух ударных волн Жуге с волной Римана между ними и бесконечно близко расположенная медленная ударная волна. Состояние между быстрой и медленной волнами изображается на плоскости $u_1u_2$ точкой $T$, лежащей вблизи интегральной кривой $AB$. Таким образом, в момент распада медленная непрерывная волна, излученная ранее, ограничивается спереди медленной ударной волной $T \to E$.

Далее, в течение сравнительно короткого времени медленный импульс отстает от быстрых волн. Этот импульс имеет конечную амплитуду: при малых $g/\varkappa r^2$ максимальное изменение второго инварианта $I_2$, приблизительно равного $r$, достигается в передней точке непосредственно за ударной волной и определяется положением точки $E$. В момент образования ударной волны изменение $r$ в ней составляет приблизительно половину радиуса $R$ начальной точки $R - r_E \approx R/2$. Форма импульса определяется законом движения точки $C$ по ударной адиабате. Как уже было сказано, если скорость изменения $\theta$ в приходящей быстрой волне приблизительно постоянна, то происходит ускорение со временем движения точки $C$ и соответствующее ускорение изменения величины $r$. Поэтому можно считать, что форма медленной волны будет иметь вид, качественно изображенный на рис. 7.3.

С дальнейшим ростом времени оставшаяся часть быстрой волны Римана будет догонять и взаимодействовать со сложной быстрой волной, которая расширяется за счет содержащейся в

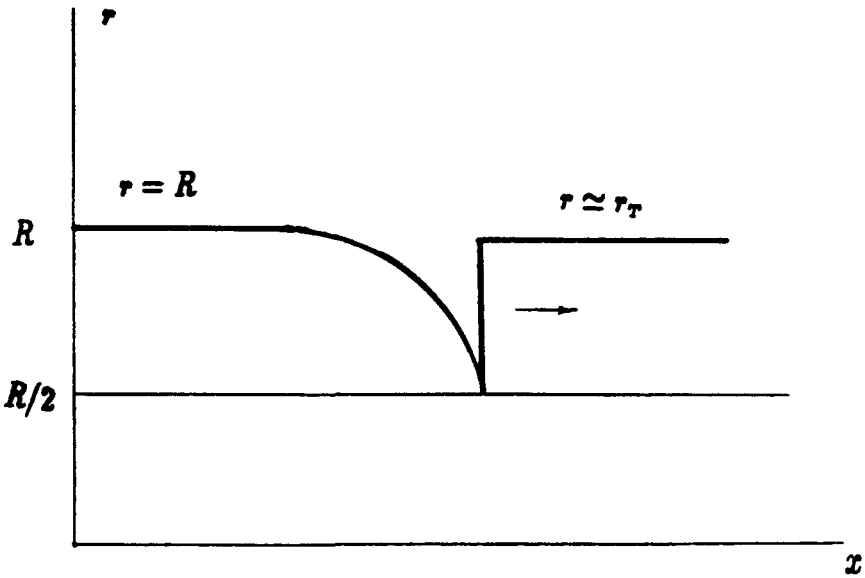



Рис. 7.3.

ней волны Римана, что приведет к постепенному приближению точки $T$ к точке $B$ и установлению автомодельного решения второго типа. Решение будет содержать сложную быструю волну из точки $A$ в некоторую точку $T'$, лежащую в окрестности точки $B$, и медленную волну малой интенсивности $T' \to B$, в которую превратится ранее излученная медленная волна из-за нелинейного затухания (поглощения волны Римана ударной волной).

Наибольший интерес в описанном процессе представляет *излучение волны* конечной интенсивности, обладающей почти плоской поляризацией, при эволюции волны с почти круговой поляризацией. Это явление происходит не во всех волнах такого типа, а только в волнах, в которых $\theta$ меняется в положительном направлении (это направление определяется неравноправием осей $u_1$ и $u_2$ и положением начальной точки), причем на угол больший, чем $\pi$. Если изменение угла в волне Римана происходит на величину, существенно большую, чем $\pi$, то описанное явление

может произойти несколько раз.

При $g = 0$ и, в частности, в магнитной гидродинамике, никакой эволюции вращательных волн не происходит и, соответственно, не образуется плоскополяризованных волн.

Если рассмотреть эволюцию одной и той же быстрой волны для различных значений $g$, то нетрудно понять, что ширина излучаемой медленной волны будет стремиться к нулю при $g \to 0$. Соответственно будет стремиться к нулю и время, необходимое для нелинейного затухания такого импульса. Однако, если вместе с $g \to 0$ в исходной волне Римана устремить некоторым подходящим образом характерный линейный размер $L$ к бесконечности, то ширину изучаемой волны можно иметь конечной при сколь угодно малых $g$, не равных нулю.

Необходимо отметить, что при рассмотрении взаимодействия ударной волны с малыми возмущениями все время предполагалось, что такое взаимодействие приводит к малым же возмущениям в решении, пока ударная волна не достигнет границы отрезка эволюционности $E$, после чего происходит нелинейный распад ударной волны. Вообще говоря, распад ударной волны мог бы произойти не в точке $E$, а в другой точке, поскольку существует автомодельное решение для распада волн, соответствующих точкам отрезка $QE$ ударной адиабаты.

Проведенное в следующей главе исследование волн в вязкоупругих средах и численные решения рассматриваемой задачи для вязко-упругой среды подтверждают справедливость сделанной гипотезы и результаты этого параграфа.

## Резюме

Рассмотрено получение вариантов упрощенных уравнений, которые служат для описания квазипоперечных волн малой амплитуды при малой анизотропии. В § 7.1 проведено исключение продольной переменной $u_3$ в сжимаемой среде для произвольных движений квазипоперечных волн (считается, что квазипродольные волны отсутствуют или достаточно малы). Найдено явное выражение (7.1) для компоненты $u_3$ в этом случае. Исключение

$u_3$ из уравнений одномерных движений приводит к полученной ранее для волн Римана (Глава 3) и ударных волн (Глава 4) модели эквивалентной несжимаемой среды.

В § 7.2 рассмотрены квазипоперечные волны, распространяющиеся в положительном (для определенности) направлении оси $x$ (волны, распространяющиеся в противоположную сторону, считаются отсутствующими). Это позволяет, как и в § 7.1, оставить в качестве неизвестных только переменные, характеризующие эти волны. Система уравнений для квазипоперечных волн, распространяющихся в сторону $x > 0$, состоит из двух уравнений (7.6). Эти уравнения, содержащие три постоянных коэффициента, преобразованием Галлилея и изменением масштабов могут быть приведены к одной из двух стандартных форм, соответствующих $\varkappa > 0$ или $\varkappa < 0$. Проверено (§ 7.3), что упрощенные (приближенные) уравнения (7.6) с принятой при рассмотрении квазипоперечных волн малой амплитуды точностью дают описание волн Римана и ударных волн, не отличающееся от описания, полученного ранее (в Главах 3 и 4) при отыскании приближенного решения точных уравнений.

Введены инварианты Римана систем упрощенных уравнений и, с помощью смены независимых и зависимых переменных, уравнения приводятся к системе линейных уравнений. Обсуждена возможность качественного исследования неавтомодельных решений (§ 7.4).

Проведено качественное исследование поведения быстрых волн Римана при $\varkappa > 0$ в случае, когда эффекты нелинейности существенно превышают эффекты анизотропии, $\varkappa r^2 > g$ (§ 7.5). Показано, что, если изменение $u_1$ и $u_2$ в быстрой волне представляется на плоскости $u_1 u_2$ отрезком кривой, описывающим вокруг начала координат угол больший, чем $\pi$, то при эволюции эта волна проходит катастрофическую фазу (перестройку), сопровождающуюся излучением короткой, но интенсивной медленной волны и распадом образовавшейся ранее быстрой ударной волны на систему волн. Эти результаты затем (см. Главу 8) подтверждены численным счетом. При уменьшении $g$ время перестройки и длина излучаемой волны уменьшаются, а при $g = 0$ описанное явление не имеет места.

# Глава 8.

# Движения вязкоупругих сред

## 8.1. Модель Кельвина-Фойхта. Уравнения одномерных движений

Как было выяснено ранее, задачи теории упругости могут иметь не одно решение. В частности, невозможно однозначно предсказать поведение решения после распада произвольного разрыва, возникшего, например, в результате взаимодействия ударных волн. Можно заметить, что неединственность имеет место при наличии в решениях разрывов, и можно надеяться, что неединственности не будет, если рассматривать усложненную модель среды, которая не допускает разрывов. В связи с этим необходимо сразу отметить, что выделение единственного решения с помощью использования усложненных моделей среды выводит нас за рамки теории упругости, поскольку отбор тех или других решений зависит от используемой усложненной модели.

В качестве усложненной модели будет рассмотрена одна из простейших моделей, в которой разрывы отсутствуют, а именно, *модель вязкоупругой среды* Кельвина-Фойхта (Germain [1983]). Согласно этой модели, напряжения $p_{ij}$ в вязкоупругой среде представляют собой сумму двух слагаемых $p_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij}$. Одно из них

выражает *упругие напряжения* $\sigma_{ij}$ , которые определяются точно так же, как в модели упругого тела, заданием зависимости внутренней энергии от компонент *тензора деформации* и энтропии. При лагранжевом описании эта часть тензора напряжений определяется равенствами (2.13).

Второе слагаемое в выражении для тензора напряжений представляет собой *вязкие напряжения.* В модели Кельвина-Фойхта они предполагаются линейно зависящими от *тензора скоростей деформации.* Коэффициенты пропорциональности (коэффициенты вязкости) зависят от свойств среды и, в частности, могут зависеть от текущего значения тензора деформации.

При рассмотрении одномерных движений необходимо знать три компоненты тензора вязких напряжений $\tau_{3i}$, $i = 1, 2, 3$, которые, согласно предположению, должны линейно зависеть от производных от компонент скорости по координате $x$, т.е. от $\partial v_i/\partial x = \partial u_i/\partial t$. Сделаем дополнительные упрощающие предположения, которые могут быть оправданы для задач о волнах малой амплитуды. А именно, предположим, что связь между $\tau_{3i}$ и $\partial v_i/\partial x$ не зависит от тензора деформации, а также каких-либо других тензоров и векторов. Это предположение исходит из малости тензора деформации и, кроме того, в дальнейшем предполагается рассматривать явления, в которых вязкие напряжения малы (они не будут превышать по порядку величины нелинейных поправок к напряжениям). Поэтому малые относительные погрешности в малых членах можно считать несущественными.

Из сделанных предположений следует

$$\tau_{3\alpha} = \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \tau_{33} = \mu_\perp \frac{\partial v_3}{\partial x}, \tag{8.1}$$

где коэффициенты вязкости $\mu \geq 0$ и $\mu_\perp \geq 0$ – постоянные. Уравнения движения вязкоупругой среды в лагранжевых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}\right) + \mu \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\right) + \mu_\perp \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial v_3}{\partial x}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Уравнение энергии в отсутствии притоков тепла может быть записано в виде

$$\rho_0 T\frac{dS}{dt} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + \mu_\perp\left(\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\rho_0 T = \frac{\partial \Phi}{\partial S}\right). \quad (8.3)$$

Эти уравнения будут использованы в качестве *полной системы усложненной модели.* Если в них коэффициенты вязкости $\mu$ и $\mu_\perp$, определяющие диссипативность процесса, положить равными нулю, то получим гиперболическую систему уравнений теории упругости, которую (в соответствии с § 1.15) можем считать *упрощенной* по отношению к полной системе (8.2), (8.3). Как нам известно, уравнения теории упругости обладают разрывными решениями. Однако, при любых отличных от нуля значениях $\mu$ и $\mu_\perp$ решения системы (8.2), (8.3) будут непрерывными, поскольку наличие разрывов привело бы к бесконечным вязким напряжениям.

Следуя методу описания движений, предложенному в § 7.2, наряду с системой уравнений (8.2), (8.3) может быть получена упрощенная (по другому принципу) система уравнений теории упругости для описания квазипоперечных волн в вязкоупругой среде, распространяющихся в одном направлении. Эта система уравнений (аналогичная уравнениям (7.6) для упругих волн) имеет вид

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha}\right) = \nu\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}, \qquad \alpha = 1, 2. \qquad (8.4)$$

Функция $R(u_1, u_2)$ определяется, как и прежде, выражением (7.7).

$$R = \frac{1}{2}(f_* - g_*)u_1^2 + \frac{1}{2}(f_* + g_*)u_2^2 - \frac{\varkappa_*}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2$$

$$f_* = \sqrt{f_1/\rho_0}, \quad g_* = \frac{g}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}$$

$$\varkappa_* = \frac{\varkappa}{2\sqrt{\rho_0 f_1}}, \quad \nu = \frac{\mu}{2\rho_0}.$$

Действительно, можно повторить вычисления, которые приводят от исходных уравнений теории упругости (2.18) к упрощенным уравнениям (7.6), но исходя теперь из уравнений (8.2),

которые отличаются от уравнений (2.18) наличием вязких членов в правых частях. Учет этих членов привел бы к появлению добавочного члена $-\mu_\perp \dfrac{\partial u_3}{\partial x}/(d-f)$ в правой части равенства (7.1). В динамических уравнениях (7.2) это слагаемое даст несущественный вклад (порядка $\chi^2$), а влияние вязкости будет представлено в правой части членом $\mu\,\dfrac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2}$, перешедшим в уравнения (7.2) из исходных уравнений (8.2). Воспользовавшись кинематическими уравнениями и тем, что в самом грубом приближении решение представляет собой бегущую волну, движущуюся со скоростью $f_*$, этот член можно переписать в виде $-\mu f_* \dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}$. С множителем $\frac{1}{2}\sqrt{\rho_0 f_1}$ это слагаемое войдет в первое уравнение (7.4), а во втором уравнении, которое используется только в самом грубом приближении, вязким членом можно пренебречь, что позволяет получить уравнения (8.4).

Вид вязкого члена в уравнениях (8.4) можно было бы написать сразу и даже связать коэффициенты $\mu$ и $\nu$, если потребовать совпадения соответствующих корней дисперсионных уравнений для квазипоперечных волн при малой вязкости у исходной системы (8.2) и упрощенной (8.4).

Выбирая масштабы для измерения $x$, $t$ и $u_\alpha$ и переходя к системе координат, движущейся со скоростью $f_*$, можно добиться того, что уравнения (8.4) сохранят свой вид, причем в новой системе измерений одновременно будут выполнены равенства $f_* = 0$, $g_* = 1$, $\varkappa_* = 1$, $\nu = 1$. Это означает возможность пересчета решений, полученных для уравнений (8.4) с некоторым набором постоянных $f_*$, $g_*$, $\varkappa_*$ и $\nu$, к решениям тех же уравнений с любым набором этих постоянных.

## 8.2. Задача о структуре квазипоперечных ударных волн

Рассмотрим *задачу о структуре* квазипоперечных ударных волн (Куликовский и Свешникова [1987]). Для описания струк-

туры будут использованы уравнения вязкоупругой среды в форме системы упрощенных уравнений теории упругости для волн, распространяющихся в одну сторону, (8.4). Одной из целей рассмотрения этой задачи является желание произвести строгий отбор разрывов, например, оставить только такие (допустимые – см. §§ 1.14, 1.15) разрывы, которые обладают *стационарной структурой* в виде бегущей волны. Хотелось бы, чтобы после этого дополнительного отбора у автомодельных задач, рассмотренных в Главе 5, решения для всех граничных состояний $u_1^*$, $u_2^*$ продолжали бы существовать, но стали бы единственными.

Наилучшим, в некотором смысле, было бы отбрасывание как нереальных ударных волн, соответствующих при $\varkappa > 0$ отрезку $QE$ ударной адиабаты (см. § 4.12). Ударная волна, для которой состояние за скачком представлено точкой отрезка $QE$, может распасться на систему волн (см. Главу 5). Комбинации волн, не содержащие таких разрывов, обеспечили бы существование и единственность решения. Если бы оказались отброшенными другие части ударной адиабаты, то в какой-то области на плоскости $u_1^* u_2^*$ решения (во всяком случае те, которые построены в Главе 5) перестали бы существовать.

Как будет показано ниже, как раз для ударных волн, соответствующих точкам отрезка $QE$, существование решения, представляющего стационарную структуру ударных волн, строго доказывается. Остальные ударные волны тоже обладают структурой. Этот вывод сделан на основании – расчетов на ЭВМ некоторых вариантов полей интегральных кривых, а также нестационарных задач (см. следующий параграф), в которых происходит в процессе эволюции волн установление структуры разрывов. Этим, вообще говоря, полностью не исключается возможность отсутствия стационарной структуры, описываемой уравнениями (8.4), у некоторых эволюционных разрывов.

В Главе 1 отмечалось что, отсутствие стационарной структуры не означает, строго говоря, несуществования соответствующего разрыва, поскольку структура может быть нестационарной. Однако, оказывается, и это более важно, что, если бы у некоторых эволюционных разрывов структура перестала существовать, то одновременно с этим должны были бы появиться

стационарные структуры других, ранее неэволюционных разрывов. Эти структуры существуют при выполнении некоторого дополнительного соотношения, наличие которого делает существующий разрыв эволюционным. В случае появления таких разрывов появились бы другие решения автомодельных задач, содержащие эти разрывы.

Как было сказано выше, повидимому всего этого не происходит, если для описания структуры используются уравнения (8.4), или, что полностью эквивалентно, система уравнений (8.2), (8.3) (в следующем параграфе будет рассмотрена структура тех же ударных волн но при другом описании мелкомасштабных явлений, что приводит к другому множеству допустимых разрывов).

Итак, предположим, что $u_\alpha = u_\alpha(\xi)$, $\xi = -x + Wt$. Тогда уравнения (8.4) становятся системой обыкновенных дифференциальных уравнений и из них после однократного интегрирования получим

$$\nu \frac{du_\alpha}{d\xi} = N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{8.5}$$

$$\nu > 0, \quad N_\alpha = \frac{\partial N}{\partial u_\alpha},$$

$$\begin{aligned} N &= -R(u_1, u_2) + \frac{1}{2}W(u_1^2 + u_2^2) + A_1 u_1 + A_2 u_2 \\ &= A_1 u_1 + A_2 u_2 + \frac{1}{2}(W - f_* + g_*)u_1^2 \\ &+ \frac{1}{2}(W - f_* - g_*)u_2^2 + \frac{\varkappa_*}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2. \end{aligned}$$

Здесь $A_1$ и $A_2$ – постоянные интегрирования, представляющие собой потоки импульса в направлениях $x_1$ и $x_2$. Эти величины могут быть найдены, если, например, известно состояние далеко перед волной (при $\xi = -\infty$), где $u_\alpha = U_\alpha$, $du_\alpha/d\xi = 0$.

$$\begin{aligned} A_1 &= -(W - f_* + g_*)U_1 - \varkappa_*(U_1^2 + U_2^2)U_1, \\ A_2 &= -(W - f_* - g_*)U_2 - \varkappa_*(U_1^2 + U_2^2)U_2. \end{aligned}$$

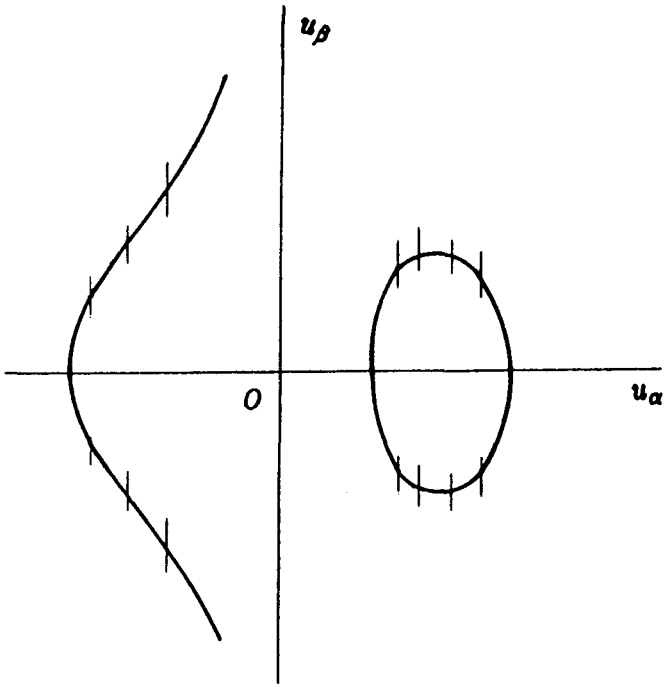



Рис. 8.1.

Отметим, что система (8.5) обладает свойством весьма полезным при изучении структуры разрывов (Годунов [1978], [1960], [1961]), а именно

$$\frac{dN}{d\xi} = \frac{\partial N}{\partial u_\alpha}\frac{du_\alpha}{d\xi} = \nu\left(\frac{du_1}{d\xi}\right)^2 + \nu\left(\frac{du_2}{d\xi}\right)^2 \geq 0, \tag{8.6}$$

причем равенство имеет место только в особых точках. Выражение для $dN/d\xi$ позволяет заключить, что функция $N$ пропорциональна потоку энтропии, или самой энтропии, поскольку поток массы постоянен.

Уравнения (8.5) показывают, что интегральные кривые пересекают линии уровня $N(u_1, u_2) = \text{const}$ в направлении увеличения $N$ и ортогональны им.

Чтобы задача о структуре имела решение, у системы (8.5) должны существовать интегральные кривые, соединяющие на плоскости $u_1u_2$ точку $A(U_1, U_2)$, представляющую состояние перед разрывом ($\xi = -\infty$), с точкой $(u_1, u_2)$, изображающей состояние за скачком ($\xi = +\infty$), в которой $(du_\alpha/d\xi)_\infty = 0$. Поэтому прежде всего найдем стационарные точки системы (8.5), где $du_\alpha/d\xi = 0$. Одна из них соответствует состоянию перед скачком, остальные – возможным состояниям за скачком при заданном значении $W$, так как они соответствуют тем же потокам импульса в направлении осей $x_1$ и $x_2$. На линиях, где выполняется одно из равенств $N_1(u_1, u_2) = 0$, $N_2(u_1, u_2) = 0$ (*изоклинах*), касательные к интегральным кривым параллельны осям $u_1$ и $u_2$ соответственно. Исследование вида этих кривых показывает, что для фиксированного состояния перед разрывом в зависимости от величины скорости скачка $W$ изоклина $du_\alpha/d\xi = 0$ может состоять из одной или или двух ветвей, пересекающих ось $u_\alpha$ под прямым углом и симметричных относительно нее.

На рис. 8.1 представлено одно из возможных положений изоклины $du_\alpha/d\xi = 0$. В зависимости от величины $W$ овал и незамкнутая ветвь могут меняться местами. Овал может вообще отсутствовать. Пересечение линий $N_1 = 0$ и $N_2 = 0$ дает положение особых точек уравнений (8.5), которые являются стационарными точками функции $N(u_1, u_2)$.

При заданном состоянии с одной стороны разрыва $u_1 = U_1$, $u_2 = U_2$ и произвольной величине скорости разрыва $W$ все возможные состояния по другую сторону разрыва были найдены ранее в Главе 4 в виде ударной адиабаты, которая изображается на плоскости $u_1u_2$ кривой (рис. 8.2 *a*). Зависимость $W$ от точек на адиабате, изображенная горизонтальной координатой на кривой на рис. 8.2 *b*, указывает соответствие между значением $W$ и состоянием за скачком. Поведение ударной волны существенно зависит от знака упругой константы среды $\varkappa$. Для определенности на рис. 8.2 и во всех дальнейших рассуждениях принято $\varkappa > 0$. Отмеченные на рис. 8.2 *b* на горизонтальной оси величины $c_\alpha^-$ ($\alpha = 1, 2$) – характеристические скорости медленных и быстрых квазипоперечных волн по состоянию перед скачком, т.е. при $u_\alpha = U_\alpha$. Жирной линией на рис. 8.2 *b* отмечены те

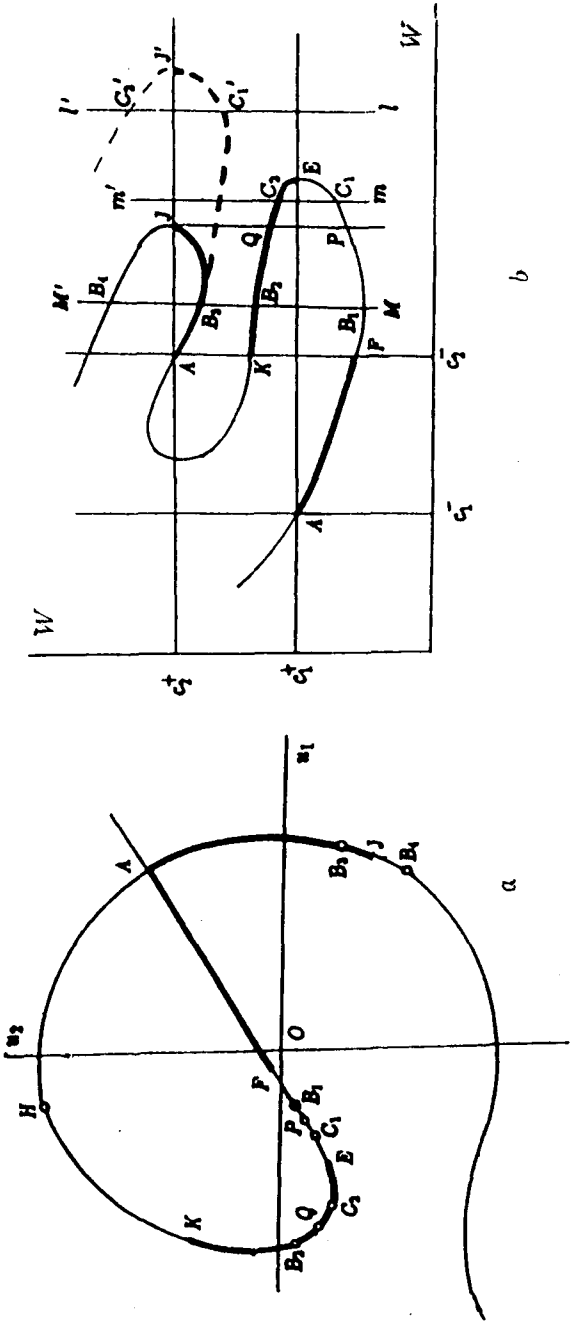



Рис. 8.2

участки ударной адиабаты и графика скоростей, которые соответствуют эволюционным ударным волнам.

Знание ударной адиабаты и графика для скорости разрыва $W$ помогает установить положение особых точек уравнения (8.5). Выбирая то или иное значение $W = \text{const}$, проводим тем самым на рис. 8.2 *b* вертикальные прямые $MM'$ или $mm'$, пересекающие график скоростей в некоторых точках. Как видно из рисунка, таких точек может оказаться две ($C_1$ и $C_2$ на линии $mm'$), четыре ($B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ на линии $MM'$) или ни одной. На ударной адиабате (рис. 8.2 *a*) указанным точкам соответствуют состояния за скачком, обозначенные теми же буквами $C_i$ или $B_i$. Эти точки вместе с точкой $A$ и будут стационарными точками системы (8.5) при заданном значении $W$. Чтобы знать, какие ударные переходы из начального состояния возможны, надо среди особых точек указать те, в которые приходят при возрастании $\xi$ интегральные кривые, вышедшие из точки $A$. Для этого надо выяснить тип особых точек $A$, $B_i$ и $C_i$ и исследовать поле направлений $\{N_1, N_2\}$.

Очевидно, в силу положительности производной $dN/d\xi$, если в особой точке функция $N(u_1, u_2)$ имеет максимум или минимум, то для системы дифференциальных уравнений (8.5) эта особая точка является узлом. Если функция $N(u_1, u_2)$ имеет седловую стационарную точку, то эта точка будет также седлом и для системы дифференциальных уравнений (8.5).

Согласно результатам Главы 3, при $\varkappa > 0$ на ударной адиабате в точках, лежащих ближе к началу координат, или (что то же самое) ближе к оси $u_1$, чем начальная точка, энтропия больше, чем в начальной точке. Поскольку любая из особых точек может быть принята за начальную, то энтропия и функция $N(u_1, u_2)$ больше в тех точках, которые ближе к началу координат или к оси $u_1$. Только в этом порядке эти особые точки могут соединяться интегральными кривыми.

Качественная картина интегральных кривых (в случае, когда для скорости разрыва выполнены неравенства $W_J < W < W_E$, что соответствует положению точек $C_1$ и $C_2$, указанному на рис. 8.2) изображена на рис. 8.3 *a*. Точки $A$ и $C_1$ – узлы, точка $C_2$ – седло. Переход $A \to C_2$ представляет собой быструю

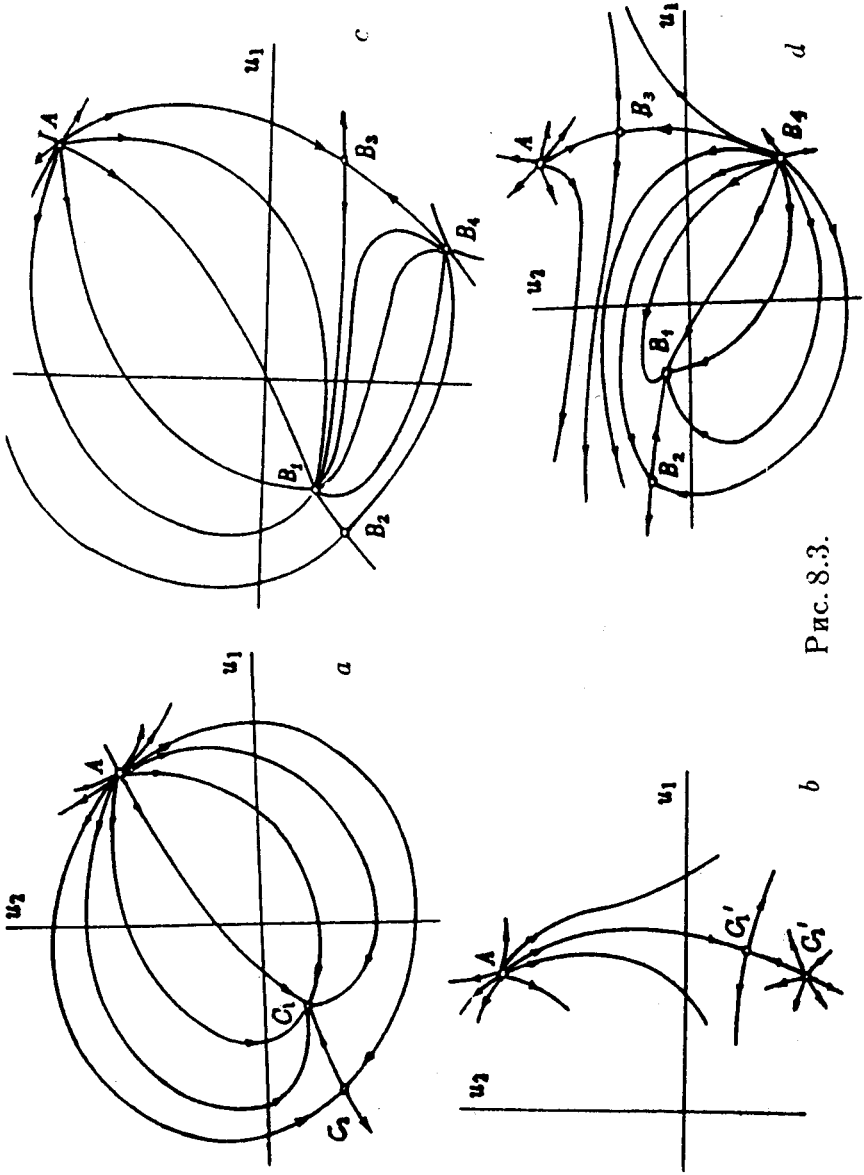



Рис. 8.3.

ударную волну, соответствующую некоторой точке отрезка $EQ$ ударной адиабаты. Очевидно, стационарная структура этого разрыва существует всегда. Интересно заметить, что существуют два решения, описывающих структуру этого разрыва. Переход $A \to C_1$ соответствует неэволюционному разрыву. Как это видно из рис. 8.3 *a* и следует из упомянутых в § 1.13 общих соображений, решения, представляющие структуру подобного разрыва, неединственны и зависят от произвольного параметра. Неэволюционность разрыва означает его разрушение при взаимодействии с малыми возмущениями.

Интегральные кривые в случае, когда $W_E < W < W_J$, изображены на рис. 8.3 *b*. Кроме точки $A$, имеются еще две особые точки $C_1'$ и $C_2'$ (лежащие на прямой $ll'$ на рис. 8.2 *b*). Переход $A \to C_1'$ представляет быструю ударную волну, соответствующую точке отрезка $AJ$ ударной адиабаты. Как это следует из того, что $N(C_1)$ ближайшее к $N(A)$ стационарное значение функции $N$, а также из того, что особая точка $A$ – узел, а точка $C_1'$ – седло, всегда существует одна интегральная кривая, соединяющая точки $A$ и $C_1'$. В то же время точки $A$ и $C_2'$ не соединяются, поскольку обе эти точки являются узлами и соответствуют максимуму $N$.

В случае выполнения неравенств $c_2^- < W < \min\{W_J, W_E\}$ (линия $MM'$ на рис. 8.2 *b*) имеются пять особых точек $A$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ и $B_4$. Их положение и типичная картина интегральных кривых на плоскости $u_1u_2$ изображены на рис. 8.3 *c*. Линии уровня функции $N$ изображены на рис. 8.4. Поскольку точка $A$ – узел с выходящими из него интегральными кривыми, очевидно, эта точка обязательно соединяется интегральной кривой с той из точек $B_2$ или $B_3$ (на рис. 8.4 это точка $B_3$), в которой функция $N$ принимает большее значение, более близкое к $N(A)$. Соединяется ли точка $A$ с другими особыми точками, зависит от поведения сепаратрис этой седловой точки. Сепаратрисы, образованные интегральными кривыми, выходящими из этой точки, могут отделить оставшиеся точки от точки $A$, как это изображено на рис. 8.3 *d*. Однако, во всех проведенных расчетах (их было около 10) картина интегральных кривых качественно совпадала с изображенной на рис. 8.3 *c*.

Переход $A \to B_3$ соответствует быстрой ударной волне первого типа (отрезок $AJ$ ударной адиабаты), переход $A \to B_2$ – быстрой ударной волне второго типа (в точки отрезка $QK$ ударной адиабаты), а переход $A \to B_1$ – неэволюционному разрыву. Обратим внимание на то, что в структуре разрыва $A \to B_3$ имеется максимум на кривой изменения величины $u_1$, а в структуре разрыва $A \to B_2$ – максимум у величины $u_2$. Эти максимумы будут обнаружены в численных экспериментах, результаты которых представлены в § 8.3.

В случае, когда $c_1^- < W < c_2^-$ и имеется пять особых точек, их расположение и картина интегральных кривых остаются прежними (рис. 8.3 *c*), за исключением того, что на рисунках буквы $A$ и $B_3$ следует поменять местами (для того, чтобы точка $A$ при этом находилась в первом квадранте, картину интегральных кривых следует зеркально отразить относительно оси $u_1$). Соединение особых точек описано в предыдущем абзаце. Единственный в этом случае эволюционный разрыв представляет собой медленную ударную волну и соответствует переходу между начальной седловой точкой $A$ (которая должна сейчас занимать положение, обозначенное на рис. 8.4 буквой $B_3$) и точкой $B_1$, представляющей собой узел с входящими в него интегральными кривыми. Во всех рассчитанных случаях такая интегральная кривая уравнений (8.5) существует.

Таким образом, проведенные расчеты позволяют предположить, что все эволюционные разрывы имеют структуру, описываемую уравнениями (8.5), а структура априорно неэволюционных (по законам сохранения) разрывов с переходом седло - седло (на рис. 8.3 *b* это $B_2 \to B_3$ или $B_3 \to B_2$) отсутствует. Это позволяет с доверием относиться к решениям задач, рассмотренных в Главе 5.

Расчеты структуры ударных волн в упругих средах с $\varkappa < 0$ с изотропной вязкостью, проведенные А.П.Чугайновой, привели к тем же результатам. Во всех рассчитанных случаях имеется структура всех эволюционных ударных волн и не появляется никаких решений, соответствующих неэволюционным разрывам с дополнительным условием.

Вместе с тем нужно еще раз подчеркнуть, что полученные

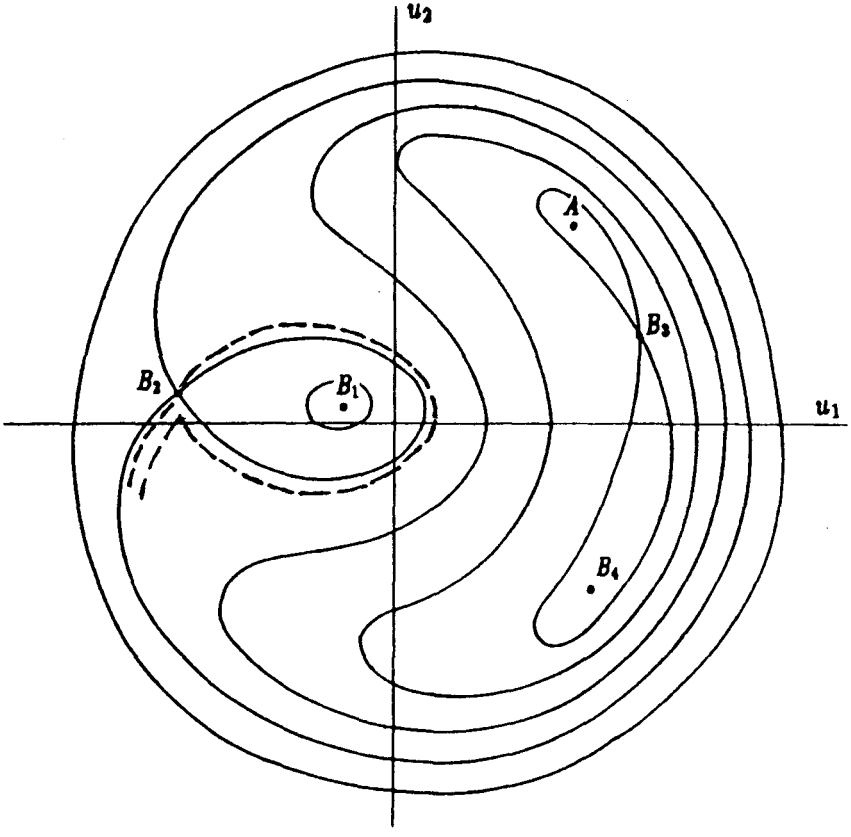



Рис. 8.4.

выводы относятся только к случаю, когда уравнения теории упругости дополнены членами, описывающими изотропную вязкость. При других механизмах мелкомасштабных явлений результаты оказываются другими. Так например, распространение нелинейных электромагнитных волн в магнетиках (Гвоздовская и Куликовский [1997]) описывается системой уравнений, которая для явлений крупного масштаба приводится к виду, совпадающему с системой уравнений нелинейной теории упругости (это относится и к соотношениям на разрывах, следующих из законов сохранения). Для мелкомасштабных явлений действуют

уравнения Ландау и Лифшица (Ландау и Лифшиц [1992]), описывающие изменение вектора намагничивания. Вектор намагничивания в мелкомасштабных явлениях испытывает прецессию вокруг магнитного поля с очень малым затуханием.

Если принять в качестве переменных $u_i$ тангенциальные компоненты вектора намагничивания, то уравнения, описывающие структуру, приводятся к виду (8.5), однако, в их левой части вместо $\nu\, du_\alpha/d\xi$ будет стоять сумма $\nu_{\alpha\beta}\, du_\beta/d\xi$. Коэффициент $\nu_{11} = \nu_{22} = \nu$ отвечает за диссипацию, а коэффициент $\nu_{12} = -\nu_{21}$ – за прецессию. Для известных материалов отношение $\nu/nu_{12}$ принимает значения от $10^{-2}$ до $10^{-5}$. Правые части уравнений (8.5) для электромагнитных волн малой амплитуды сохраняют свой вид, причем для электромагнитных волн $\varkappa_* < 0$. Качественная картина линий уровня $N(u_1, u_2) = \text{const}$ сохраняет свой вид, изображенный на рис. 8.4, однако, направление изменения $N$ и направления пересечения линий уровня интегральными кривыми меняются вместе с изменением знака $\varkappa_*$ на противоположные. Начальными состояниями в зависимости от значения $W$ будут точки $B_1$ или $B_2$ на рис. 8.4.

При малых значениях отношения $\nu/\nu_{12}$ интегральные кривые пересекают линии уровня под малым углом (порядка $\nu/\nu_{12}$). Если $W > c_2^-$,то начальной точкой является $B_1$, а интегральные кривые, выходящие из точки $B_1$, заполняют область, ограниченную линиями уровня точки $B_2$. Поэтому всегда есть интегральная кривая, соединяющая точки $B_1$ и $B_3$ и представляющая быстрые ударные волны первого типа, (т.е. соответствующие отрезку ударной адиабаты, примыкающему к начальной точке). Быстрая ударная волна второго типа является результатом перехода $B_1 \to B_3$, а переходы $B_1 \to A$ и $B_1 \to B_4$ дают неэволюционные ударные волны.

Интегральные кривые, выходящие из точки $B_1$, после пересечения линии уровня, соответствующей точке $B_2$, в дальнейшем собираются в узкую полоску, ограниченную сепаратрисами точки $B_2$ (на рис. 8.4 сепаратрисы изображены штриховыми линиями). Ширина этой полоски тем меньше, чем меньше петля линии уровня, выходящей из точки $B_2$ и охватывающая точку $B_1$, т.е. чем меньше разность $W - c_2^-$. Эта узкая полоска интегральных

кривых в зависимости от значений параметров может входить либо в точку $A$, либо в точку $B_4$, либо может раздваиваться в точке $B_3$ и входить и в $A_1$ и в $B_4$ ($A_1$ и $B_4$ – фокусы с входящими интегральными кривыми). При малых $\nu/\nu_{12}$ полоска, прежде чем достичь линии уровня точки $B_3$, делает много оборотов и малое изменение параметров, таких как $W$ или начальное состояние, приводит к существенному перемещению отрезка, на котором полоска пересекает линию уровня точки $B_3$, по этой линии уровня. Если полоска достаточно узкая, то при изменении $W$ она то входит в точку $B_3$, то не входит.

Вследствие этого участок ударной адиабаты, соответствующий быстрым ударным волнам второго типа, который был априорно эволюционным, во всяком случае при малых $W - c_2^-$, разбивается на короткие чередующиеся отрезки, для точек одних из которых существует структура ударной волны, а для точек других отрезков – не существует.

Если же начальной является точка $B_2$, что имеет место при $W < c_2^-$, то структура медленной ударной волны первого (второго) типа существует, если хотя бы одна из сепаратрис, выходящих из точки $B_2$, приходит в точку $A$ (точку $B_4$). Из предыдущего следует, что, в зависимости от параметров задачи, либо обе упомянутые сепаратрисы приходят – одна в точку $A$, другая – в $B_4$, либо обе они приходят в одну из этих точек, либо одна из сепаратрис входит в точку $B_3$. С изменением параметров, задающих ударную волну (например, скорость ударной волны $W$) эти варианты сменяют один другой.

В результате некоторые отрезки ударной адиабаты, соответствующие медленным ударным волнам, распадаются на последовательность чередующихся коротких отрезочков, длина которых стремится к нулю при$\nu/\nu_{12} \to 0$, для одних из которых структура ударной волны существует, а для других – не существует.

Вместе с тем при специальных значениях $W$ появляется структура априорно неэволюционного разрыва $B_2 \to B_3$, который становится эволюционным в силу дополнительного соотношения на разрыве, задающего значение $W$. На диаграмме эволюционности (рис. 8.2 *b*) эти разрывы соответствуют точкам на части

ударной адиабаты, попавшей в прямоугольник, лежащий на одну клетку выше прямоугольника медленных ударных волн. Значения скорости ударной волны в этих волнах, очевидно, соответствуют одному из концов отрезочка на медленной части ударной адиабаты, а расстояние на ударной адиабате между точками, соответствующими этим ударным волнам, имеет тот же порядок, что и длина указанных отрезочков.

Таким образом, в случае, когда в уравнениях (8.5) слева появляется матрица диссипативных коэффициентов $\nu_{\alpha\beta}$, причем $\nu_{11} = \nu_{22} = \nu$, $\nu_{12} = -\nu_{21}$, $\nu/\nu_{12} \ll 1$, допустимые разрывы заполняют некоторые из априорно эволюционных отрезков ударной адиабаты не целиком, а выделяют на них нечто вроде штриховой линии с короткими штрихами и промежутками между ними. В то же время на априорно неэволюционных участках ударной адиабаты появляется множество отдельных точек, соответствующих допустимым разрывам.

Можно отметить, что описанная ситуация при несимметричной матрице $\|\nu_{\alpha\beta}\|$ очень похожа на то, что имеет место при рассмотрении решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

в случае, когда имеется одновременно четыре особых точки (Куликовский [1984]), а решение в пределах структуры испытывает колебания.

## 8.3. Численные решения задач о вязкоупругих волнах, имеющие автомодельную асимптотику

В этом параграфе излагаются результаты расчетов на ЭВМ нестационарных задач о вязкоупругих волнах, которые при больших временах имеют в качестве асимптотики решения, рассмотренные в Главе 5. Эта работа была проделана для выяснения, какое из автомодельных решений является асимптотикой в случае появления неединственности (Чугайнова [1988], [1990],

[1993]), поскольку результаты исследования структуры разрывов, изложенные в § 8.2, не приводят к каким-либо основаниям для предпочтения одного из автомодельных решений, когда этих решений несколько.

Отметим, что ситуации с неединственностью автомодельных решений уже встречались в механике. При исследовании автомодельных задач в магнитной гидродинамике при наличии фронтов рекомбинации были обнаружены случаи неединственности решений и даже отсутствия автомодельных решений (Бармин и Куликовский [1975]). Результаты расчетов неавтомодельных задач магнитной гидродинамики с автомодельной асимптотикой содержатся в работе Бармина и Успенского [1986].

Итак, рассмотрим одномерные квазипоперечные движения вязкоупругой среды. При организации численного счета использовалась упрощенная система уравнений теории упругости (8.4) для квазипоперечных волн, распространяющихся в одном направлении,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha}\right) = \nu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

$$R = \frac{1}{2}(f_* - g_*)u_1^2 + \frac{1}{2}(f_* + g_*)u_2^2 - \frac{\varkappa_*}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2,$$

(где $f_*$, $g_*$, $\nu$ и $\varkappa_*$ –постоянные) рассмотрим начально-краевую задачу, в которой заданы

$$u_1 = U_1, \ u_2 = U_2 \quad \text{при } t = 0, \ x > 0$$

и

$$u_1 = u_1(t), \ u_2 = u_2(t) \quad \text{при } x = 0, \ t > 0.$$

При этом будем предполагать, что $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$ при $t > t_*$, где $t_*$ – некоторая положительная величина, и $u_1^* = \text{const}$, $u_2^* = \text{const}$.

Из анализа размерностей следует, что решение этой задачи можно рассматривать как функцию безразмерных переменных

$$x/f_*t, \quad t_*/t, \quad \nu_*/f_*^2 t, \quad u_1^*, \quad u_2^*, \quad g_*/f_*, \quad \varkappa_*/f_*.$$

Оно зависит также от безразмерных функций

$$u_1(t/t_*)/u_1^*, \quad u_2(t/t_*)/u_2^*,$$

которые заданы при $t/t_* < 1$. Можно ожидать, что при $t \to \infty$ влияние аргументов $t_*/t$ и $\nu/f_*^2 t$ (которые стремятся к нулю), а также всего того, что происходило при $t < t_*$, будет убывать и в пределе получится автомодельное решение, зависящее от $x/t$ (в переменных $x$ и $t$ ударные волны имеют конечную ширину при $t \to \infty$, а в переменных $x/t$ они превращаются в разрыв).

В большинстве задач механики именно так все и происходит. То же самое имеет место и в описываемых ниже численных решениях, с той, однако, особенностью, что в случае неединственности решение поставленной выше задачи может стремиться к той или другой автомодельной асимптотике в зависимости от вида функций $u_1(t/t_*)/u_1^*$ и $u_2(t/t_*)/u_2^*$. Такой выбор автомодельной асимптотики и будет рассматриваться ниже.

Будем, как и в задаче о структуре разрывов, рассматривать случай $\varkappa_* > 0$, отсылая к упомянутым работам А.П.Чугайновой, где рассмотрены задачи также для $\varkappa_* < 0$.

Напомним некоторые результаты Главы 5. На рис. 8.5 на плоскости $u_1 u_2$ изображена построенная численно ударная адиабата $APEQAC$. Ее начальная точка $A$ имеет координаты $u_1 = U_1 = 1$, $u_2 = U_2 = 1$. Точки $J$ и $E$ являются точками Жуге по состоянию за скачком, соответственно быстрым и медленным. Точки $Q$ и $P$ изображают состояния за такими ударными волнами $A \to Q$ и $A \to P$, скорости распространения которых равны скорости ударной волны $A \to J$. На рисунке заштрихована область *неединственности автомодельного решения* задачи о волнах в полупространстве, когда при $t = 0$ для всего полупространства $x > 0$ заданы величины $u_1 = U_1$, $u_2 = U_2$, а при $x = 0$ заданы $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$ при всех $t > 0$ (при расчетах принято $2g/\varkappa_* = 0.1$). Область неединственности ограничена дугой $PE$ ударной адиабаты, построенной для начальной точки $A$, эволюционным отрезком $QP$ (медленные ударные волны) ударной адиабаты, построенной для начальной точки $Q$ и участками $EZ_1$ и $QZ_2$ интегральных кривых неопрокидывающихся волн Римана.

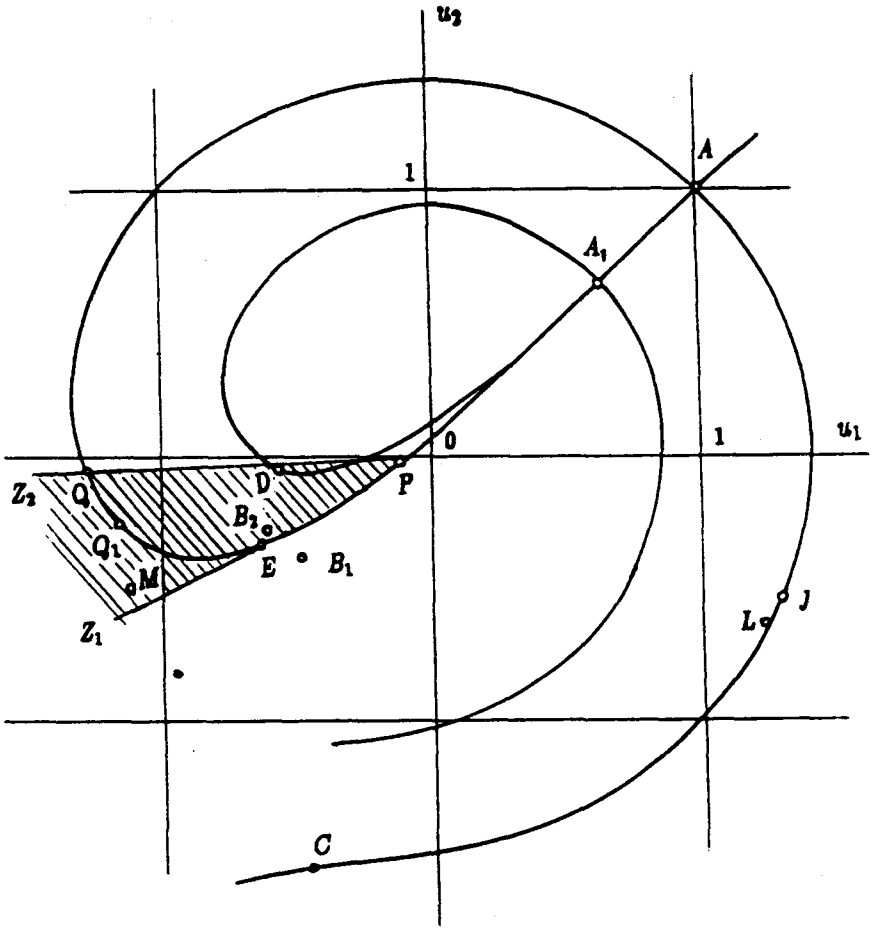



Рис. 8.5.

Если представляющая граничное состояние точка $(u_1^*, u_2^*)$ принадлежит области неединственности, то теоретически были получены (Глава 5) два автомодельных решения. Решение первого типа состоит из быстрой ударной волны из точки $A$ в точку эволюционного отрезка $QE$ и следующей за ней медленной ударной волны или медленной волны Римана. Решение второго типа содержит сложную быструю волну, состоящую из быстрой ударной волны Жуге $A \to J$, примыкающей к ней сзади быстрой волны

Римана $J \to L$, быстрой ударной волны Жуге (по состоянию впереди) $L \to M$. За сложной быстрой волной в решении второго типа с меньшей скоростью идет медленная волна – ударная или простая (волна Римана).

Далее приводятся результаты численного решения для ряда начально-краевых задач для уравнений (8.4), для которых упомянутые выше автомодельные решения могут представлять асимптотики при $t \to \infty$. Уравнения (8.4) были переписаны в виде неявных нелинейных разностных уравнений, к которым сначала применен метод Ньютона, а затем метод матричной прогонки. Расчет проводился в области на плоскости $x, t$, ограниченной некоторым отрезком оси $x$, который двигался с подходящим образом подобранной скоростью. Шаг вычислений по оси $x$ выбран таким образом, чтобы вязкость расчетной схемы и другие погрешности счета оставались пренебрежимо малыми по сравнению с вязкими членами уравнений.

Волны, содержащиеся в решении, обладают различными скоростями распространения, поэтому с увеличением расчетного времени между отдельными волнами будут появляться отрезки с постоянными значениями $u_1$ и $u_2$ и длина этих отрезков увеличивается со временем, а структура ударной волны будет стремиться к стационарной. Поэтому для идентифицирования волн, получающихся при численном счете, с волнами, входящими в состав автомодельных решений первого и второго типов, нужно получить разностное решение при больших временах, чтобы упомянутые выше процессы успели завершиться. С другой стороны, с увеличением расчетного времени разностное решение распространяется на большее число расчетных точек. В связи с этим требуется брать достаточно большой отрезок оси $x$, чтобы влияние границ не исказило решение. Величину отрезка можно уменьшить подходящим выбором коэффициента $f_*$.

Численный счет проводился для различных значений коэффициентов $f_*$, $g_*$, $\varkappa_*$ и $\nu$. Однако, как уже было сказано в § 8.1, если перейти к подвижной системе координат и ввести соответственное изменение масштабов для величин $u_1$, $u_2$, $x$, и $t$, то систему уравнений (8.4) можно привести к каноническому виду с $f_* = 0$, $g_* = \varkappa_* = \nu = 1$. Поэтому полученные и описанные

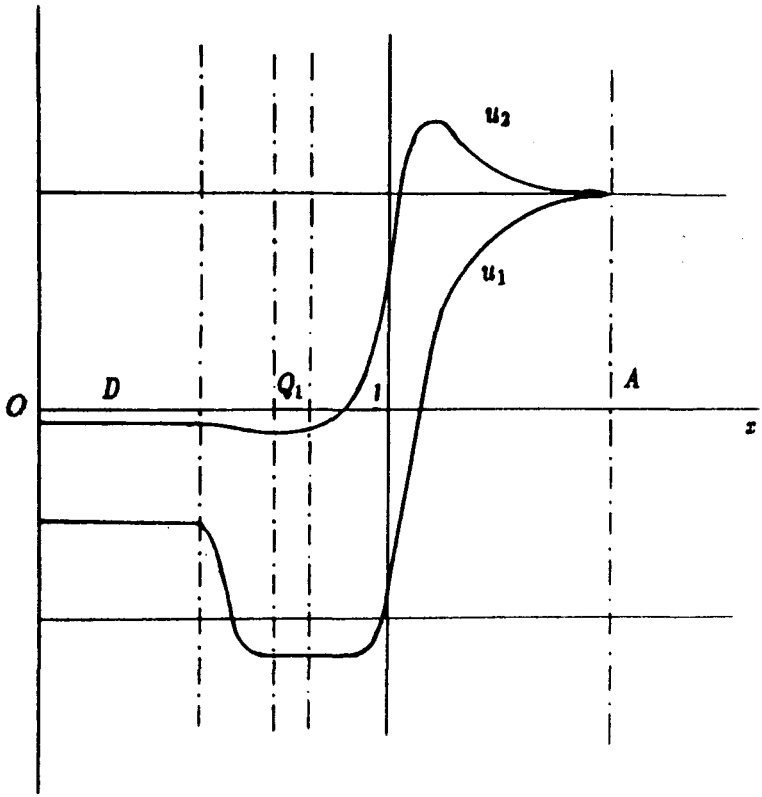



Рис. 8.6.

ниже решения могут быть пересчитаны в решения канонических уравнений и в решения уравнений с произвольными значениями коэффициентов.

Для одного из вариантов численного расчета начальные условия ($t = 0$) и правое граничное условие ($x = l$, $t > 0$), были взяты в виде $U_1 = 1$, $U_2 = 1$ (точка $A$ на рис. 8.5). На левой границе ($x = 0$, $t > 0$) принято $u_1^* = -0.574$, $u_2^* = -0.038$ (точка $D$ из области неединственности решения, заштрихованной на рис. 8.5). Результаты расчета для некоторого момента времени приведены на рис. 8.6. На нем можно выделить волны, которые идентифицируются с ударными волнами, полученными ра-

нее аналитически: последовательность двух ударных волн (с их структурой) – быстрой (переход из состояния $A$ в состояние $Q_1$) и медленной (из точки $Q_1$ в точку $D$ на рис. 8.5 и 8.6). Точкам $A$, $D$, $Q_1$ на рис. 8.5 соответствуют участки оси $x$ (выделенные штрихпунктирными линиями на рис. 8.6), на которых величины $u_1$, $u_2$ принимают постоянные значения, представляющие состояния перед и за ударными волнами $A \to Q_1$ и $Q_1 \to D$. Они с хорошей степенью точности удовлетворяют уравнениям соответствующих ударных адиабат. Следует обратить внимание на то, что внутри структуры, отвечающей ударному переходу из состояния $A$ в состояние $Q_1$, величина $u_2$ имеет локальный максимум, что видно на рис. 8.6. Это согласуется с качественно найденным поведением решений, представляющих структуру соответствующих ударных волн (см. рис. 8.3).

Аналогичные расчеты были проведены и для других значений $u_1, *$, $u_2, *$ на левой границе области переменных $x, t$, соответствующих точкам из области неединственности. Для них выбирались следующие значения:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1^*$ | $-0.3$ | $-0.4$ | $-0.5$ | $-0.6$ | $-0.7$ | $-0.8$ | $-1.0$ | $-1.0$ | $-1.1$ |
| $u_2^*$ | $-0.1$ | $-0.2$ | $-0.2$ | $-0.3$ | $-0.35$ | $-0.3$ | $-0.3$ | $-0.34$ | $-0.25$ |

Во всех случаях реализовывалось решение первого типа.

Решение второго типа для значений $u_1$, $u_2$ на левой границе, соответствующих точке области неединственности, тоже оказалось возможным получить, если действовать следующим образом. Сначала нужно полностью сформировать решение второго типа для значений $u_1$ и $u_2$ на левой границе, соответствующих точке из области, где существует решение только второго типа. Для этого в качестве левого граничного условия брались координаты $u_1^*$, $u_2^*$ точки, не принадлежащей области неединственности, но расположенной достаточно близко к границе этой области (например, точка $B_1$ на рис. 8.5. Затем, в некоторый более поздний момент времени на левой границе значения $u_1^*$ и $u_2^*$ заменялись на значения координат точки, принадлежащей области неединственности (точка $B_2$ на рис. 8.5). Это приводит к тому,

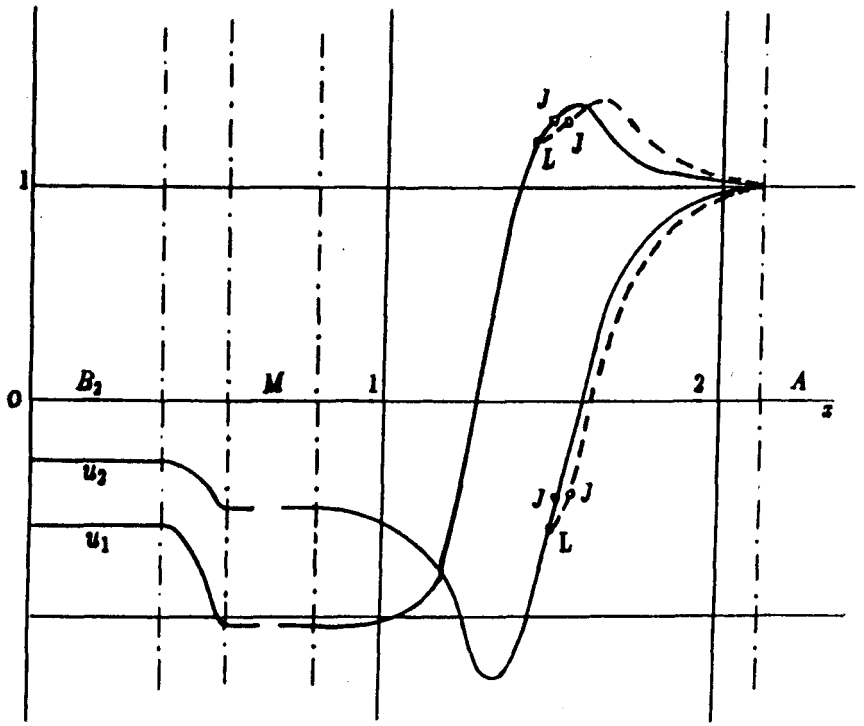



Рис. 8.7.

что от левой границы направо распространяются возмущения. После взаимодействия ранее образованных волн с этими возмущениями решение при больших временах должно выйти на автомодельную асимптотику. Расчет показал, что решение при этом не меняет своего типа, т.е. остается решением второго типа, но теперь уже в области неоднозначности.

Результаты численного счета для достаточно больших $t$, когда решение уже сформировалось, представлены на рис. 8.7 (см. также рис. 8.5), на котором можно выделить последовательность простых и ударных волн, соответствующих решению второго типа: быстрая ударная волна Жуге – скачок из состояния $A$ в состояние $J$, затем идет быстрая волна Римана, представленная

отрезком $JL$ интегральной кривой, затем быстрая ударная волна Жуге – скачок из $L$ в $M$, затем скачок из $M$ в $B_2$ в медленной ударной волне. Участок $JL$, соответствующий волне Римана, выявлен на рис. 8.7 путем сравнения на нем решений в два последующих момента времени.

График решения для момента времени $t_1$ изображен сплошной линией, а для момента времени $t_2 > t_1$ – штриховой линией в той части линии, где графики в моменты времени $t_1$ и $t_2$ не совпадают, и сплошной линией, где они совпадают. Видно, что участок $JL$ расширяется с течением времени, а участки, соответствующие структурам скачков $A \to J$ и $L \to M$, не изменяются.

Точкам $A$, $M$, $B_2$ на рис. 8.5 соответствуют на рис. 8.7 участки оси $x$ с постоянными значениями $u_1$ и $u_2$. Отрезки прямых $u_1 = u_1(M) = \text{const}$ и $u_2 = u_2(M) = \text{const}$, соответствующих координатам точки $M$, изображены на приведенном графике с разрывом, так как представляют собой достаточно протяженные вдоль оси $x$ участки. При этом часть полученных расчетных точек с постоянными значениями $u_\alpha^M$ на рисунок не попала.

Из тех же полученных в расчете, графиков видно, что внутри структуры скачка, происходящего из начальной точки $A$ в точку $J$, величина $u_1$ имеет локальный максимум, в структуре скачка из точки $M$ в точку $L$ величина $u_2$ имеет локальный минимум. Это согласуется с видом интегральных кривых на рис. 8.3 *c*.

В другой серии расчетов было изучено, как меняется асимптотика решения в зависимости от положения точки $B = B_2$ (или $B_1$), изображающей левое граничное условие. Точки $B_2$ (или $B_1$) выбирались вблизи линии $EP$, разделяющей области, в которых сверху имеются асимптотики первого и второго типа, а снизу только второго типа. С этой целью получено решение для ряда значений $u_1$ и $u_2$ на левой границе, часть из которых соответствует точкам, лежащим сверху от линии $EP$, а часть – снизу.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1^*$ | $-0.5$ | $-0.5$ | $-0.5$ | $-0.5$ | $-0.5$ | $-0.5$ | $-0.5$ |
| $u_2^*$ | $-0.2$ | $-0.25$ | $-0.3$ | $-0.33$ | $-0.34$ | $-0.345$ | $-0.35$ |

Счет показал, что для точек, изображающих состояние на левой границе и расположенных на плоскости $u_1u_2$ выше точки с координатами (-0.5,-0.34), реализуется решение первого типа, а для остальных точек – решение второго типа. Это соответствует разделению точек $B_1$ и $B_2$ границей области неоднозначности.

Таким образом, полученные решения показывают, что решение неавтомодельной задачи может стремиться при $t \to \infty$ к разным решениям предельной автомодельной задачи (если это решение неединственно), в зависимости от деталей постановки и граничных условий, соответствующих ограниченным значениям времени.

Разделить явным образом все начальные и граничные условия на два класса, соответствующих различному асимптотическому поведению при $t \to \infty$, невозможно. Однако, можно заметить, что автомодельные асимптотики первого типа (последовательность быстрой ударной волны и медленной волны Римана или ударной волны) в области неоднозначности образуются более устойчиво (обладают в некотором смысле большей областью притяжения), чем автомодельные асимптотики второго типа.

Если ограничиться рассмотрением постановок задач, в которых используются непрерывные функции с ограниченными производными, то при $\nu \to 0$ для однозначного продолжения решений по времени нужно уметь решать задачи *о взаимодействии двух ударных волн или ударной волны и малого возмущения* (столкновение большего числа волн – случай исключительный). При этом, конечно, интерес представляют ситуации, когда соответствующее автомодельное решение неединственно.

В связи с этим численно решались задачи о взаимодействии двух ударных волн или ударной волны и малого возмущения. Рассмотрена в качестве примера задача о взаимодействии двух ударных волн, идущих в одном направлении, одна из которых

(быстрая) догоняет другую (медленную). Была сформирована структура медленной ударной волны, соответствующей эволюционному скачку из состояния, изображенного на рис. 8.5 точкой $A$, в точку $A_1$, и структура догоняющей ее быстрой ударной волны, соответствующей эволюционному скачку из точки $A_1$ в точку $D$ (на том же рисунке). Точка $D$ расположена на ударной адиабате, проведенной из точки $A_1$ как начальной, и принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке $A$ как начальной.

Счет показал, что в результате взаимодействия этих ударных волн образуются две другие ударные волны: впереди идет быстрая, за ней медленная, так что решение выходит на автомодельную асимптотику первого типа.

Так же была рассмотрена задача о взаимодействии быстрой ударной волны, соответствующей эволюционному скачку из точки $A$ в точку $Q_1$ (или любую другую точку эволюционного участка $EQ$), и быстрого малого возмущения. Малое возмущение сформировалось предварительно перед быстрой ударной волной или за ней. Проведенные расчеты показали, что в результате взаимодействия образуется одна ударная волна.

Кроме того, рассматривалась задача о взаимодействии двух ударных волн, движущихся навстречу одна другой. Для этого исследования должна, вообще говоря, использоваться полная система уравнений вязкоупругости (8.2), (8.3), описывающая волны, движущиеся в противоположных направлениях. Однако, в случае малой нелинейности задачу можно существенно упростить и необходимые расчеты проводить, используя упрощенную систему уравнений (8.4).

Очевидно, что встречные волны взаимодействуют в течение ограниченного промежутка времени $\tau$, определяемого шириной структуры этих волн. Поэтому влиянием слабой нелинейности и слабой анизотропии в период взаимодействия встречных волн можно пренебречь, так что волны за время $\tau$ ведут себя как линейные, т.е. не меняют своей формы, и лишь потом, при существенно больших временах, происходит их изменение за счет действия малых нелинейных членов. Причиной этих изменений является то, что каждая из волн после времени $\tau$ начинает дви-

гаться по измененному фону (рис. 8.9). Это приводит к распаду волн, возникших после встречи двух исходных волн.

Таким образом, в результате взаимодействия двух ударных волн, движущихся навстречу одна другой, образуются при временах существенно больших, чем $\tau$, две системы волн, движущихся в противоположные стороны. Для изучения образования и эволюции каждой из этих двух систем волн использовались приближенные уравнения (8.4). Задача о взаимодействии ударных волн, движущихся навстречу одна другой, наиболее интересна в том случае, когда состояние перед и за одной из систем образовавшихся волн соответствует неединственности решения автомодельной задачи.

Приведем два примера проведенных расчетов. Рассмотрим следующую задачу о взаимодействии быстрых ударных волн, движущихся навстречу одна другой. По-прежнему принимаем $\varkappa_* > 0$. Ударная адиабата $A_1P_1E_1Q_1K_1A_1J_1M_1$ с начальной точкой $A_1(0.76, 1.22)$, построенная численно при $2g_*/\varkappa_* = 0.1$, изображена на рис. 8.8 . На этой ударной адиабате отрезки $A_1J_1$ и $K_1E_1$ соответствуют эволюционным быстрым ударными волнам, а отрезок $A_1F_1$ – медленным.

С целью исследовать процесс взаимодействия встречных ударных волн была сформирована структура быстрой ударной волны, движущейся налево и соответствующей скачку из точки $A_1$ на рис. 8.8 в точку $A_1'(1, 1)$, и структура движущейся ей навстречу быстрой ударной волны, соответствующей скачку из точки $A_1$ в точку $D_1(-1.28, -0.2)$.

В результате описанного выше линейного взаимодействия структур ударных волн $A_1 \to A_1'$ и $A_1 \to D_1$, движущихся навстречу, вправо будет распространяться возмущение $A_1' \to D_1'$ (рис. 8.9), влево – возмущение $D_1 \to D_1'$. Точка $D_1'$ определяется из условия, что разность значений величин $u_1$ и $u_2$ за и перед возмущением $A_1' \to D_1'$ ($\Delta u_1$ и $\Delta u_2$) равна разности этих же величин за и перед скачком $A_1 \to D_1$.

Согласно предыдущему можно считать, что скачок $A_1 \to D_1$ после взаимодействия со скачком $A_1 \to A_1'$ сохранил свою структуру, но распространяется по новому начальному состоянию среды, соответствующему точке $A_1'$.

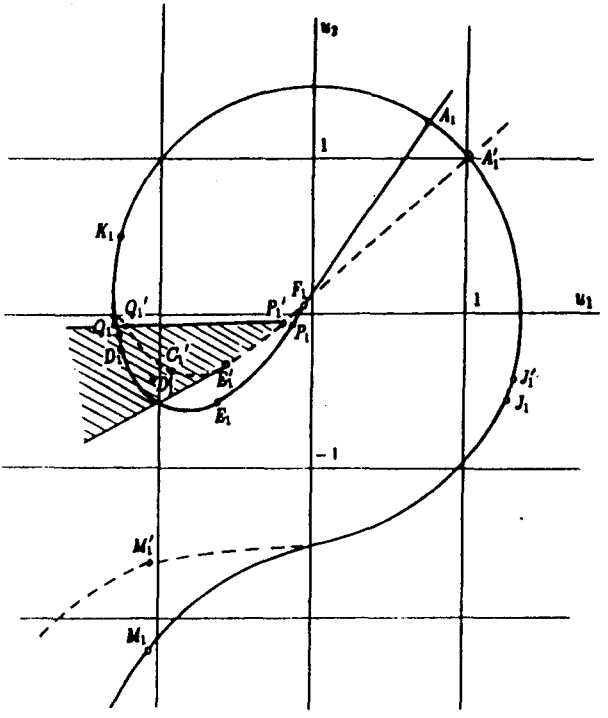



Рис. 8.8.

Исследуем эволюцию возмущения $A_1' \to D_1'$. Из точки $A_1'$ как начальной проведена ударная адиабата $A_1'P_1'E_1'C_1'Q_1'A_1'M_1'$, изображенная на рис. 8.8 пунктирной линией. Заштрихованная на этом рисунке область является областью неединственности решения задачи для точки $A_1'$ как начальной. Точка $D_1'$ принадлежит этой области неединственности.

Для исследования эволюции возмущения $A_1' \to D_1'$ поставлена следующая начально-краевая задача для системы уравнений (8.4). В качестве начальных условий ($t = 0$) задана структура скачка $A_1 \to D_1$, распространяющегося по состоянию $A_1'$. Правое граничное условие ($t > 0$, $x = l$) взято в виде $U_1 = U_2 = 1$ (точка $A_1'$ на рис. 8.8). На левой границе ($t > 0$, $x = 0$) принято $u_1^* = -1.04$, $u_2^* = -0.42$ (точка $D_1'$ на том же рисунке). Численное решение поставленной начально-краевой задачи при достаточно

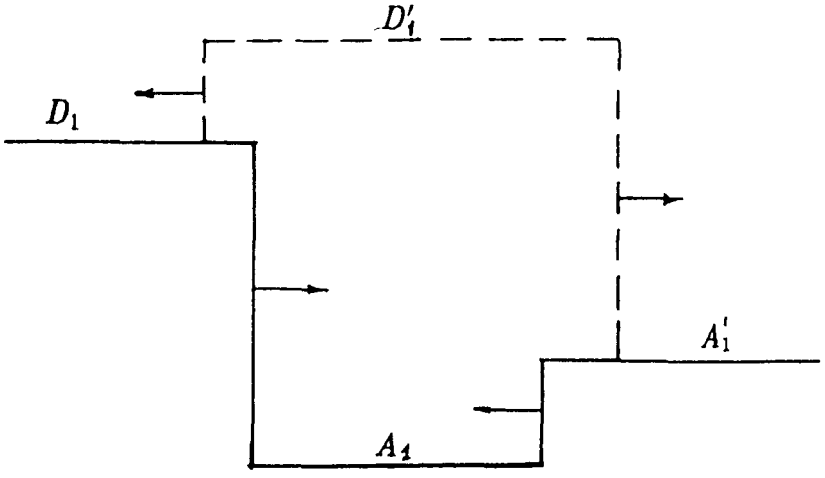



Рис. 8.9.

больших временах представляет собой последовательность распространяющихся направо быстрой ударной волны $A_1' \to C_1'$ и медленной волны Римана $C_1' \to D_1'$, т.е. автомодельную асимптотику первого типа.

Влево будет распространяться возмущение $D_1 \to D_1'$. Точка $D_1'$ не является точкой области неединственности решения автомодельной задачи для начальной точки $D_1$. Поэтому система волн, движущихся после взаимодействия налево, определяется однозначно.

При тех же значениях $\varkappa_* > 0$, $2g_*/\varkappa_* = 0.1$ рассмотрено взаимодействие медленной ударной волны $A_2 \to A_2'$, движущейся налево, и быстрой ударной волны, движущейся направо $A_2 \to B_2$ (начальное и конечные состояния заданы координатами точек: $A_2(1,1)$, $A_2'(0.86, 0.87)$, $B_2(-1.1, -0.3)$). На рис. 8.10 изображена ударная адиабата $A_2F_2P_2E_2Q_2K_2A_2J_2M_2$, проведенная из точки $A_2$ как начальной, и ударная адиабата $A_2'E_2'C_2'Q_2'A_2'J_2'M_2'$, проведенная из точки $A_2'$ как начальной. В результате линейного взаимодействия встречных ударных волн $A_2 \to A_2'$ и $A_2 \to B_2$ направо будет распространяться возмущение $A_2' \to D_2'$, налево –

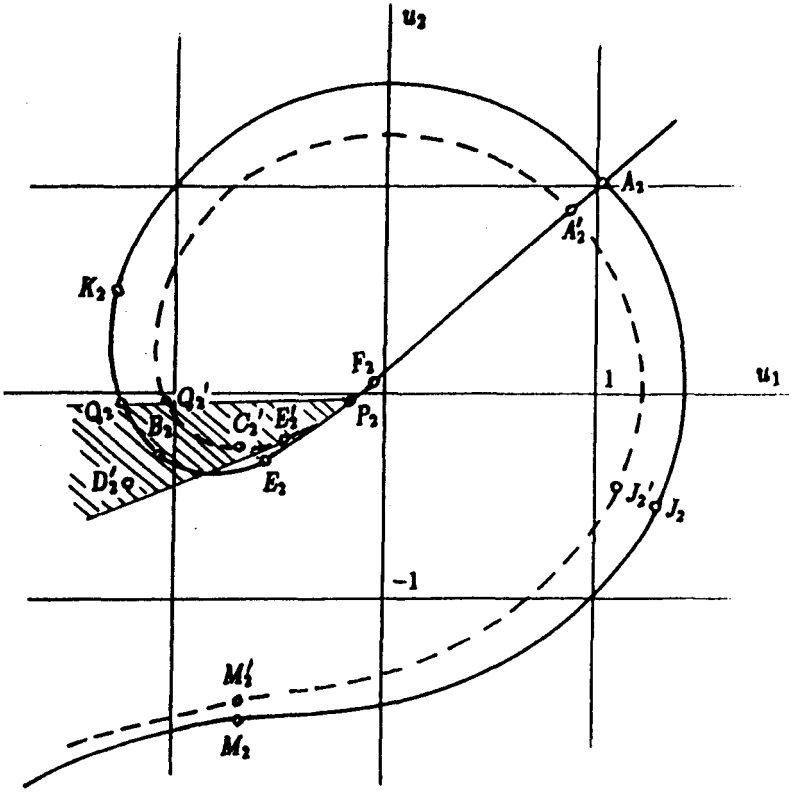



Рис. 8.10.

возмущение $B_2 \to D_2'$. Точка $D_2'$ принадлежит заштрихованной на рис. 8.10 области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке $A_2'$ как начальной.

Для системы уравнений (8.4) численно решалась начально-краевая задача с начальными данными (при $t = 0$), соответствующими структуре скачка $A_2 \to B_2$, распространяющегося по состоянию $A_2'$, и граничными условиями: на правой границе (при $t > 0$, $x = l$) $U_1 = 0.86$, $U_2 = 0.87$, что соответствует точке $A_2'$, и $u_1^* = -1.24$, $u_2^* = -0.43$ на левой границе (при $t > 0$, $x = 0$), соответствующей точке $D_2'$ (рис. 8.10). Счет показал, что при достаточно больших временах решение состоит из быстрой

ударной волны $A_2' \to C_2'$ и медленной простой волны $C_2' \to D_2'$, т.е. выходит на автомодельную асимптотику первого типа.

Система движущихся налево волн, которая получилась в результате взаимодействия быстрых ударных волн $A_2 \to A_2'$ и $A_2 \to B_2$, определяется однозначно, так как точка $D_2'$ не принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи для точки $B_2$ как начальной.

Аналогичные результаты в задачах взаимодействия ударных волн были получены также при $\varkappa_* < 0$. Во всех рассчитанных случаях решение задачи о взаимодействии ударных волн выходит на асимптотику первого типа, которая содержит только одну волну каждого типа и не содержит сложных волн, представляющих две ударные волны, для первой из которых выполняется условие Жуге сзади, а для второй – спереди, с волной Римана между ними (все три волны одного типа: для $\varkappa_* > 0$ – быстрые).

Как уже было отмечено, это означает, что при решении задач об упругих волнах, в которых начальные и граничные условия непрерывны, а произвольные разрывы возникают в решении в результате взаимодействия двух ударных волн, можно забыть о существовании решений второго типа в области неоднозначности. При этом оказывается, что оставшееся решение автомодельной задачи имеет разрыв по одной из границ области неоднозначности (для $\varkappa_* > 0$ эта граница на плоскости $u_1 u_2$ дается на рис. 8.5 отрезком ударной адиабаты $PE$ и интегральной кривой волны Римана, проведенной из точки $E$).

На существовании этого разрыва основаны заключения, сделанные в Главе 7, о перестройке решения, содержащего быструю волну Римана, с излучением медленной и распадом быстрой ударной волны типа $QE$ на систему волн. Рассмотрение перестройки было проведено в предположении, что ударные волны, соответствующие внутренним точкам отрезка $QE$ ударной адиабаты, при взаимодействии с одномерными возмущениями ведут себя устойчивым образом, т.е. не распадаются на систему нелинейных волн (эта система волн может быть только автомодельным решением второго типа).

Это утверждение справедливо, если состояние за ударной

волной не совпадает с точкой $E$. В противном случае можно указать сколь угодно малые возмущения, которые приведут к тому, что решение с одной быстрой ударной волной (решение первого типа) перестанет существовать, а единственным решением задачи будет решение, содержащее сложную быструю волну (решение второго типа). В этом случае происходит мгновенная перестройка решения (распад волны $A \to E$).

Предположение о существовании ударных волн, соответствующих внутренним точкам интервала $QE$ ударной адиабаты и распад ударной волны, соответствующей точке $E$, были проверены прямыми расчетами поведения волн, основанными на использовании уравнений (8.4).

Ниже приводятся результаты численного исследования взаимодействия ударной волны с возмущением, которое представлено как маленький скачок-ступенька. Сначала в области неединственности была поставлена начально-краевая задача для системы уравнений (8.4). Начальные условия (при $t = 0$) и правое граничное условие (при $t > 0$, $x = l$) взяты в виде $U_1 = U_2 = 1$ (точка $A$ на рис. 8.11), для левого граничного условия (при $t > 0$, $x = 0$) принято $u_1^* = -0.6$, $u_2^* = -0.2$ (точка $D_2$ на том же рисунке). В решении этой начально-краевой задачи при достаточно больших временах $t$ можно различить последовательность быстрой ударной волны (скачок $A \to Q_1$) и медленной ударной волны (скачок $Q_1 \to D_2$), хорошо видные на рис. 8.12, т.е. автомодельную асимптотику первого типа. Точкам $A$, $D_2$ и $Q_1$ на рис. 8.11 соответствуют на рис. 8.12 участки оси $x$, выделенные штрихпунктирными линиями, на которых величины $u_1$ и $u_2$ принимают постоянные значения.

Для рассмотрения процесса взаимодействия уже образованных ранее волн (соответствующих автомодельному решению первого типа) с малым возмущением, которое распространяется направо, значения $u_1^*$ и $u_2^*$ на левой границе были изменены на значения $u_1^* = -0.5$ и $u_2^* = -0.4$ (точка $D_1$ на рис. 8.11). Значения $u_1$ и $u_2$ на правой границе расчетной области оставлены без изменения. В результате в возмущенную область распространяется еще одно возмущение, соответствующее волне Римана $D_2 \to D_1$. Точка $D_1$ принадлежит области, где реализуется решение толь-

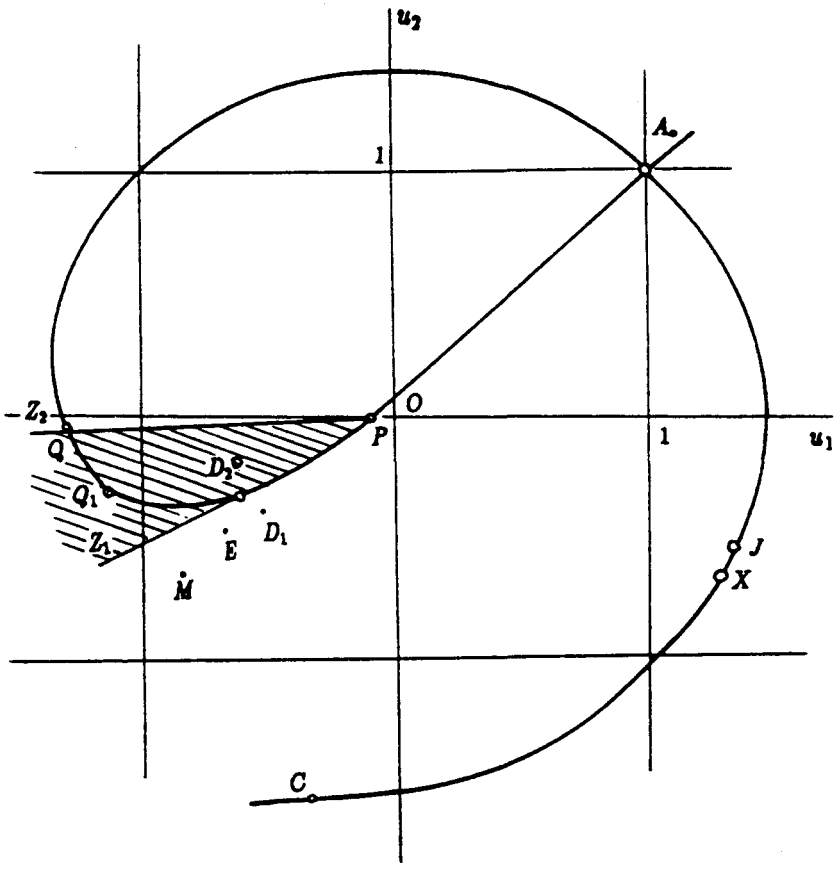



Рис. 8.11.

ко второго типа. Поэтому для измененной постановки начально-краевой задачи решение должно перестроиться и выйти на асимптотику, соответствующую решению второго типа.

Результат численного расчета поставленной задачи для момента времени $t_1$, когда взаимодействие медленной ударной волны и возмущения закончено, представлен на рис. 8.13. Медленная ударная волна изменилась и на рис. 8.11 и 8.13 теперь имеет вид скачка $M \to D_1$ . Точкам $D_1$ и $M$ на рис. 8.13 соответствуют участки оси $x$, выделенные штрихпунктирными линиями. При более длительных временах происходит взаимодействие быстрой

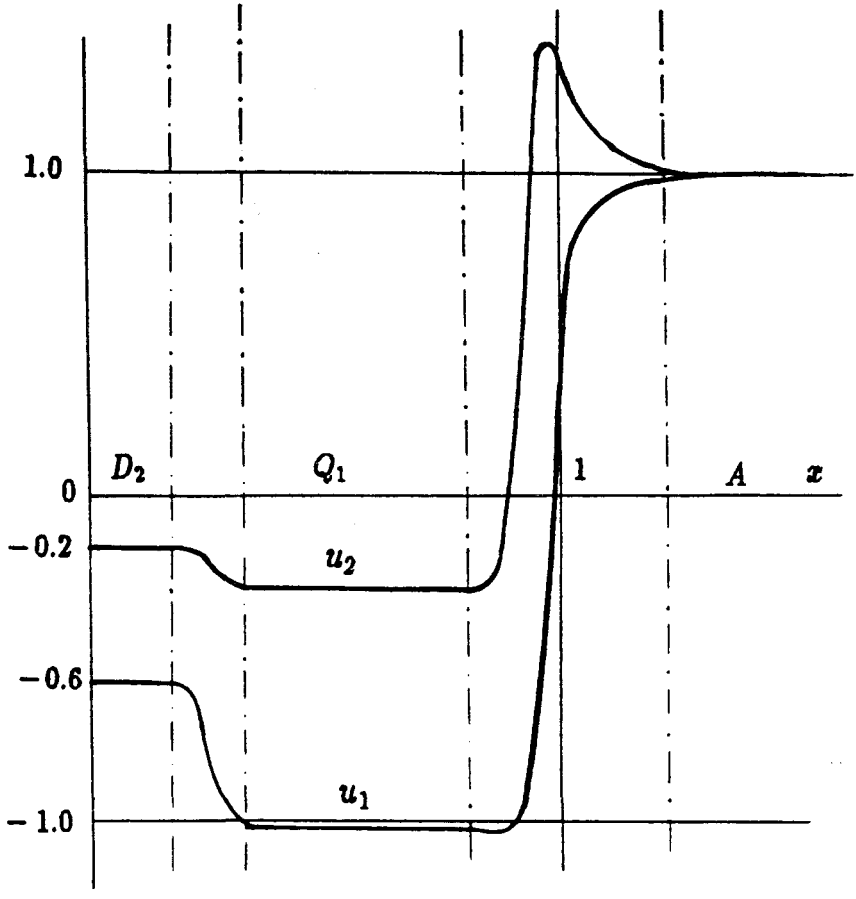



Рис. 8.12.

ударной волны с прошедшим сквозь медленную ударную волну возмущением.

В процессе этого взаимодействия происходит расщепление быстрой ударной волны на систему волн, движущихся с близкими скоростями. Это можно видеть на рис. 8.14, где приведен результат расчета для момента времени $t_2 > t_1$. На графике можно различить последовательность волн, составляющих быструю сложную волну. Это скачок $A \to J$, быстрая волна Римана $J \to X$, быстрая ударная волна $X \to M$ (рис. 8.11 и 8.14).

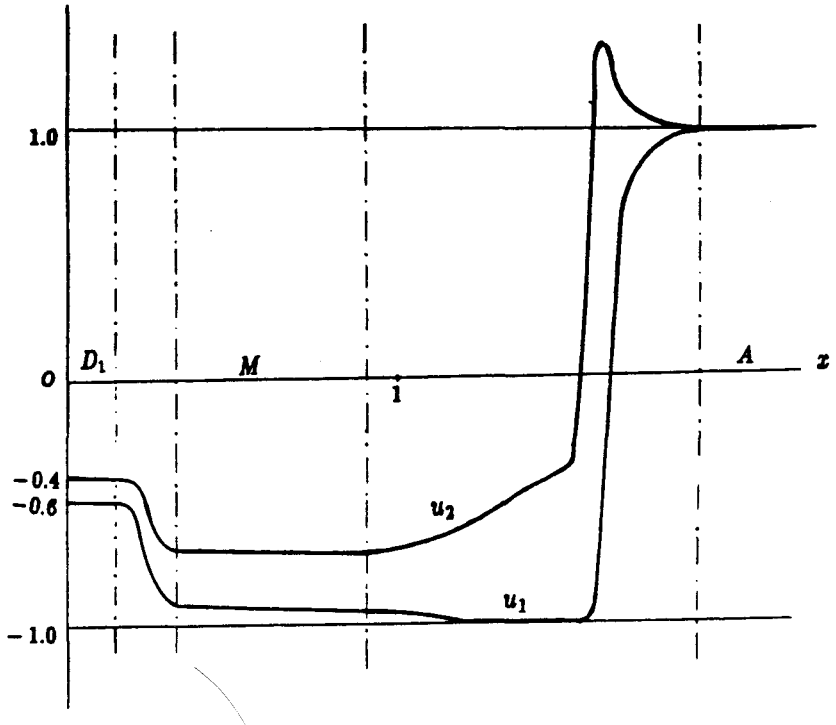



Рис. 8.13.

Участок $JX$, соответствующий волне Римана, расширяется при дальнейшем росте времени, а участки, соответствующие структурам скачков $A \to J$ и $X \to M$ не изменяют своей длины. Точкам $A$, $M$ и $D_1$ на рис. 8.11 соответствуют участки оси $x$ постоянных значений $u_1$ и $u_2$, отмеченные на рис. 8.14.

Таким образом, показано, что возможны случаи такие, что при взаимодействии ударных волн, соответствующих решению первого типа, с быстрым возмущением, распространяющимся направо, решение поставленной начально-краевой задачи изменяет свой тип и выходит на автомодельную асимптотику второго типа.

Рассмотрим теперь случай $\varkappa_*(u_1^2 + u_2^2) \gg g > 0$ (при $\varkappa_* > 0$), когда эффекты нелинейности превалируют над эффектами ани-

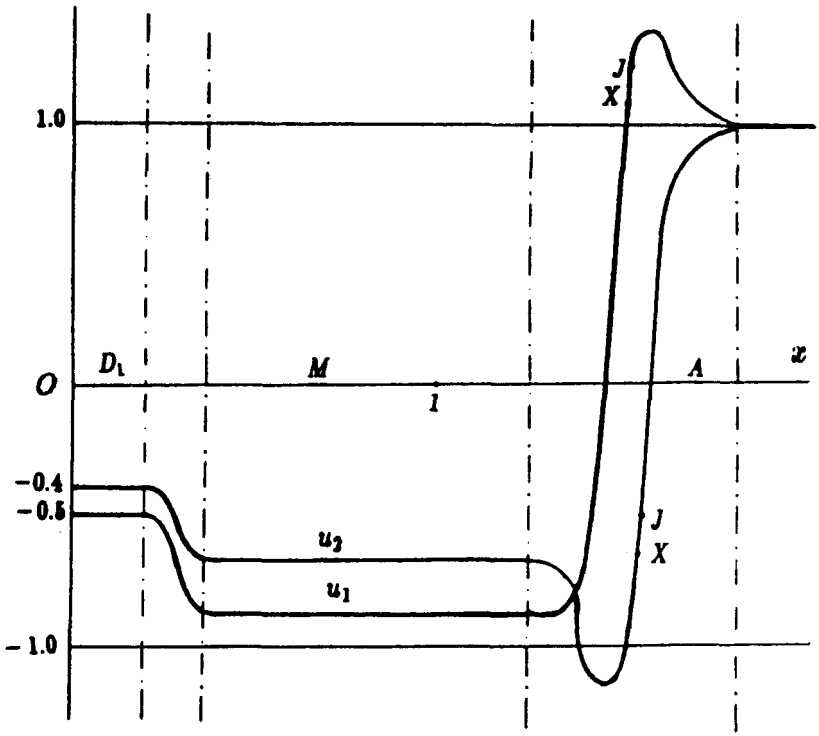



Рис. 8.14.

зотропии, и приведем здесь результаты прямого расчета задачи о перестройке быстрой волны Римана, рассмотренной качественно в § 7.4. Отметим, что связь величин в быстрой волне Римана задается кривой, симметричной относительно осей $u_1$ и $u_2$ и близкой к окружности $r = \text{const}$, и что имеется слабая зависимость характеристической скорости $c_1$ от $\theta$ (здесь $r$ и $\theta$ – полярные координаты на плоскости $u_1$, $u_2$). Это приводит к очень медленной деформации быстрой волны Римана, которая происходит вследствие совместного влияния на величину $c_1$ анизотропии и нелинейности.

Для численного исследования взаимодействия быстрой ударной волны (соответствующей какой-либо точке отрезка $QE$) с быстрой неавтомодельной волной Римана была поставлена сле-

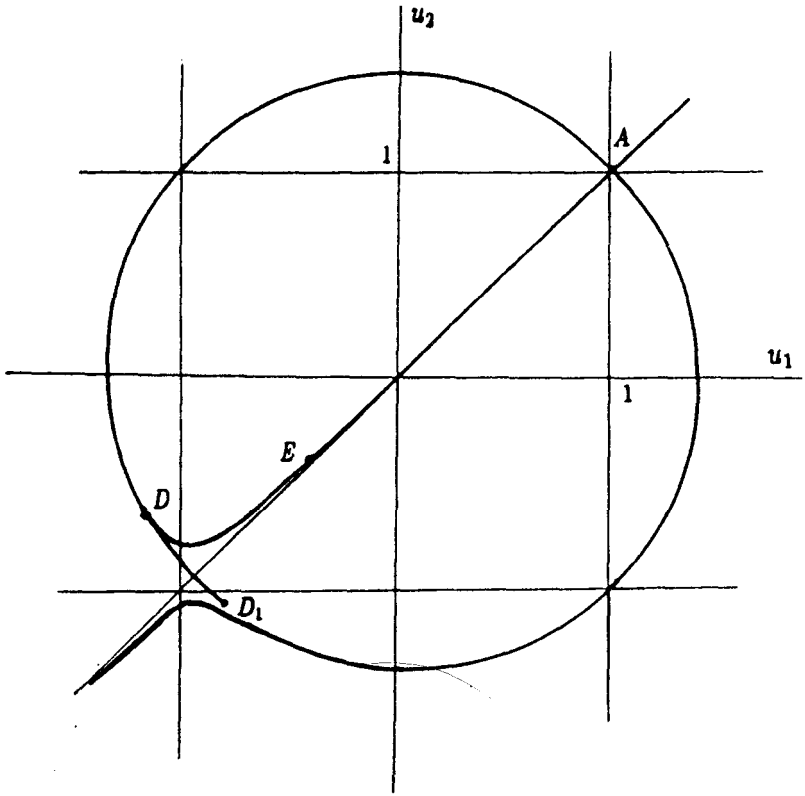



Рис. 8.15.

дующая задача. Сначала была сформирована быстрая ударная волна $A \to D$ (рис. 8.15). Для этого начальное и правое граничное условия были заданы в виде $U_1 = U_2 = 1$ (точка $A$), для левого граничного условия принято $u_1^* = -1.15$, $u_2^* = -0.79$ (точка $D$). Затем, непосредственно за ударной волной $A \to D$ задано распределение величин $u_1$ и $u_2$, соответствующее их изменению в быстрой волне Римана вдоль участка $DD_1$ интегральной кривой. Зависимость $\theta$ от $x$ была взята линейной $\theta = (3\pi/4000)x + \text{const}$. На левой границе заданы значения $u_1^* = -0.9$, $u_2^* = -1.15$ (точка $D_1$ на рис. 8.15). Отметим, что полярные углы точек $A(1,1)$ и $D_1(-0.9, -1.15)$ различаются более, чем на $\pi$.

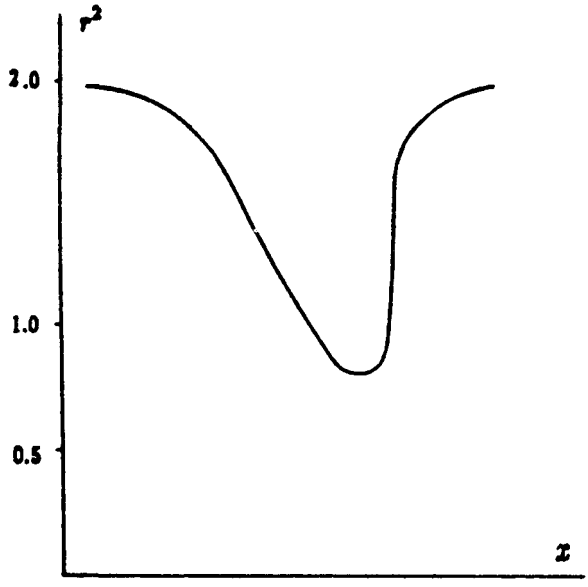



Рис. 8.16.

В результате численного решения поставленной начально-краевой задачи обнаружено, что поглощение рассматриваемой ударной волной $A \to D$ быстрых возмущений, соответствующих отрезку $DD_1$ интегральной кривой, приводит к излучению интенсивных медленных волн Римана. При этом состояние за ударной волной приближается к точке $E$.

Далее происходит перестройка решения с нелинейным распадом волны, соответствующей точке $E$. После этого излучение медленной волны Римана почти полностью прекращается. В момент прекращения излучения возникает медленная ударная волна, которая становится передней границей излученной ранее и находящейся сзади волны Римана. Форма излученной медленной волны изображена на рис. 8.16, где приведен график зависимости $r^2(x)$. Как было отмечено в § 7.4, максимальная амплитуда излученной волны Римана определяется положением точки $E$ ($r_E \approx 0.5$) и остается конечной при малых значениях $g$.

Следует подчеркнуть, что, если полярный угол точки, соответствующей левому граничному условию, меньше полярного угла точки $E$, то описанного выше распада с излучением медленной волны не происходит. Если исходная быстрая волна Римана соответствовала изменению полярного угла на плоскости $u_1u_2$ на величину, превышающую $3\pi$, то описанный выше распад произойдет два или более раз.

Аналогичные эффекты перестройки решения обнаруживаются в упругой среде с $\varkappa_* < 0$ при численном исследовании эволюции взаимодействия медленной ударной волны и неавтомодельной медленной волны Римана (это волны близкие к вращательным).

Таким образом, расчеты на ЭВМ подтвердили результаты качественного исследования эволюции быстрых волн при малых $g_*/\varkappa_* r^2$, полученные в § 7.4.

## Резюме

Рассмотрено влияние вязких напряжений на распространение упругих волн. В § 8.1 приведена модель Кельвина-Фойхта упруго-вязкой среды в одномерной постановке. Выписаны упрощенные уравнения для одномерных квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону в вязкоупругой среде. Эти уравнения, несмотря на появление дополнительных (по сравнению с уравнениями, полученными в Главе 7) вязких членов, приводятся к двум стандартным формам, когда все коэффициенты в уравнениях по модулю равны единице.

С целью нахождения дополнительных правил отбора допустимых ударных волн, в § 8.2 исследована структура квазипоперечных ударных волн на основе модели вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта. Оказалось, что все априорно эволюционные волны обладают структурой, а неэволюционные – не обладают. В частности, при $\varkappa > 0$ структурой всегда обладают ударные волны типа $QE$ (см. Главу 5), существование которых может подозреваться в качестве причины неединственности решения автомодельных задач. С одной стороны, полученный результат

служит обоснованием всех решений, построенных ранее с использованием эволюционных ударных волн. С другой стороны, осталось не выясненным, какое же из решений осуществляется в случае неединственности.

Для разрешения этого вопроса проведена серия численных экспериментов, в которых отыскивались движения вязкоупругой среды, выходящие на автомодельные асимптотики. В случае неединственности решения соответствующей автомодельной задачи выход неавтомодельного решения на определенную асимптотику может позволить сформулировать правило отбора автомодельных решений.

Результаты численных расчетов показали следующее.

Во-первых, в задаче о волнах, возбуждаемых в вязкоупругом полупространстве путем подходящего выбора граничных условий в течение конечного промежутка времени, близкого к началу процесса, можно добиться установления любого из двух автомодельных решений в качестве асимптотики при больших $t$. Это означает, что оба решения задачи об упругих волнах физически оправданы как асимптотики соответствующих решений для вязкоупругой среды. Эти решения обнаруживают устойчивость к малым возмущениям, в том числе к тем, которые всегда возникают при численном счете. В частности, устойчиво существуют многократно упоминавшиеся ударные волны, соответствующие отрезку $EQ$ ударной адиабаты, которые могут распасться на систему волн, движущихся с разными скоростями. Этого, однако, не происходит.

Во-вторых, результаты расчетов многих вариантов показывают, что одна из автомодельных асимптотик, а именно, содержащая быструю ударную волну, соответствующую отрезку $EQ$ ударной адиабаты, осуществляется чаще, чем вторая асимптотика. Для получения этой, второй, асимптотики, содержащей комбинацию быстрых волн, приходилось идти на некоторые ухищрения в задании граничных или начальных условий. Это значит, что в функциональном пространстве, соответствующем начальным и граничным условиям, область притяжения первой асимптотики в каком-то смысле больше, чем у второй. В частности, все решения задач о взаимодействии двух ударных волн

(каждая из них была представлена своей структурой) выходят на асимптотику первого типа. Это говорит о том, что во многих случаях в качестве решений, соответствующих предельному переходу "исчезающей вязкости", следует использовать только решения автомодельных задач теории упругости первого типа с простой быстрой ударной волной. В этих случаях имеет место однозначное продолжение решений задач теории упругости по времени.

Здесь необходимо сделать два замечания. Первое, что сформулированные выше выводы получены на основании ограниченного числа расчетов и, вообще говоря, требуют дополнительных обоснований и проверки. В настоящее время эти заключения следует рассматривать скорее как гипотезы. Второе, что в качестве усложненной модели использовалась модель вязкоупругой среды (для других способов введения диссипации выводы могут быть другими).

Численно подтверждено (§ 8.3) проведенное в § 7.5 качественное исследование катастрофической перестройки квазивращательной волны в среде с малой анизотропией.

# Глава 9.

# Волны конечной амплитуды в слабоанизотропных упругих средах

## 9.1. Введение. Случай волновой изотропии

В этой главе будут рассматриваться плоские волны конечной амплитуды в случаях близких к волновой изотропии, когда для упругого потенциала справедливо представление (2.24)

$$\Phi = F(r^2, u_3, S) + gp(u_i, S), \quad r^2 = u_1^2 + u_2^2, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (9.1)$$

где $g > 0$ – малый параметр и $F$, $p$ и $u_i$ – величины порядка единицы. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые особенности распространения волн в случае волновой изотропии, когда $g = 0$, а изучение влияния малой волновой анизотропии ($g \neq 0$) на поведение волн Римана и ударных волн будет представлено в последующих параграфах.

Повидимому, первым законченным исследованием нелинейных волн конечной амплитуды в случае волновой изотропии является исследование волн в магнитной гидродинамике, проведенное многими авторами (см. Куликовский и Любимов [1962], Bazer

and Ericson [1974], Germain [1983] и библиографию в них). Нелинейные упругие волны изучены для случая малых амплитуд Блендом [1972], а для случая конечных амплитуд при различных предположениях об упругом потенциале в ряде работ, из которых здесь упомянем работы (Hanyga [1975], [1976], Ленский [1981], [1983]), а также работу (Bazer и Ericson [1974]), в которой рассмотрены волны в идеально проводящей упругой среде в присутствии магнитного поля (в этом параграфе среда, соответствующая $g \neq 0$, хотя и упомянута, но исследован только случай волновой изотропии). Из названных работ видно, что при $g = 0$ для волн произвольной амплитуды, как и в случае волн малой амплитуды, рассмотренных в § 3.7 и § 4.11, имеет место разделение волн на вращательные и плоскополяризованные, играющие важную роль в изучаемых задачах.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Малые возмущения и волны Римана могут быть описаны (см. § 3.1) уравнениями (3.10)

$$(\Phi_{ij} - \alpha\delta_{ij})du_j = 0, \qquad \Phi_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i \partial u_j}, \tag{9.2}$$

где $\alpha = \rho_0 c^2$ – собственное значение матрицы $\|\Phi_{ij}\|$, $c$ – характеристическая скорость. В рассматриваемом случае, когда $g = 0$, функция $\Phi$ представлена своим первым слагаемым

$$\Phi = F(r^2, u_3, S).$$

В силу строения своих аргументов функция $\Phi = F$ симметрична по отношению к любой плоскости, проходящей через ось $u_3$ (т.е. принимает равные значения в точках, симметричных относительно упомянутой плоскости). Все такие плоскости равноправны для рассматриваемой функции, и поэтому при изучении малых возмущений в качестве исходного можно взять состояние, в котором $u_2 = u_2^0 = 0$.

Очевидно, при $u_2 = 0$, в силу четности функции $F$ по переменной $u_2$, имеем $F_{12} = F_{23} = 0$. Отсюда следует, что одно из собственных значений имеет вид

$$\alpha = F_{22} = \frac{1}{r}F_r, \qquad F_r = \frac{\partial F}{\partial r},$$

а соответствующий ему собственный вектор направлен по оси $u_2$, так что в соответствующей волне Римана

$$du_1 = 0, \qquad du_2 \neq 0, \qquad du_3 = 0.$$

Из симметрии матрицы $\|\Phi_{ij}\|$ и ортогональности собственных векторов следует, что два других собственных вектора лежат в плоскости $u_1u_3$. Отсюда, а также из упомянутого выше равноправия плоскостей, проходящих через ось $u_3$, вытекает, что два семейства интегральных кривых волн Римана представляют собой плоские кривые, лежащие в этих плоскостях, а третье семейство – окружности с центрами на оси $u_3$, лежащие в плоскостях $u_3 = \text{const}$. Первые два семейства соответствуют *плоскополяризованным* волнам Римана, а последнее – *вращательным* волнам Римана. Очевидно, что $\alpha = F_r/r = \text{const}$ на окружностях, представляющих интегральные кривые вращательных волн. Поэтому вращательные волны распространяются как *бегущие волны с неизменной формой профиля*. Этим волнам Римана соответствуют движущиеся с той же скоростью *обратимые разрывы* (§ 1.3). В этих обратимых вращательных разрывах все величины меняются так же, как в непрерывных вращательных волнах.

Соотношения на разрывах (2.20) имеют вид

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right] = \rho_0 W^2[u_i], \qquad [\Phi] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right][u_i] + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right)^+[u_i],$$
$$[v_i] + W[u_i] = 0, \qquad [u_i] = u_i^+ - u_i^-. \tag{9.3}$$

В рассматриваемом в этом параграфе случае отсутствует волновая анизотропия, так что $g = 0$ и в этих формулах $\Phi = F$. Так как $F$ зависит от $u_1$ и $u_2$ только через $r^2$, то соотношения на разрыве в пространстве $u_i$ обладают симметрией по отношению к плоскости, проведенной через начальную точку $u_i^-$ (представляющую состояние перед разрывом) и ось $u_3$. Эту плоскость будем называть *начальной плоскостью*. Если при заданных $u_i^-$, $S^-$ какая-либо точка $u_i$ удовлетворяет приведенным выше соотношениям на разрыве (при $g = 0$) при некоторых значениях $W$ и $S$, то точка, симметричная ей в пространстве $u_i$ относительно начальной плоскости, также удовлетворяет соотношениям на

разрыве с теми же $W$ и $S$ (то же самое верно, если поменять местами начальную и конечную точки).

Через начальную точку $A(u_i^-)$ проходят *три ветви ударной адиабаты.* Согласно § 1.7, малые разрывы описываются с ошибкой меньшей или порядка $\sigma^3$ ($\sigma$ – амплитуда скачка) уравнениями для волн Римана. Поэтому две ветви ударной адиабаты в окрестности точки $A$ лежат в начальной плоскости и соответствуют плоскополяризованным разрывам, а третья – ортогональна к ней и, очевидно, представляет окружность, лежащую в плоскости $u_3 = u_3^-$, соответствующую вращательному разрыву с начальной точкой $A$. Обозначим эту окружность через $L_A$.

Для плоскополяризованной части ударной адиабаты, выбрав систему координат так, что $u_2^- = u_2 = 0$, можно получить систему из трех уравнений, отбросив из приведенной выше системы второе уравнение, которое в рассматриваемом случае выполняется автоматически.

Если двигаться из начальной точки $A$ по одной из плоскополяризованных ветвей ударной адиабаты, то на ней может найтись точка $B$, в которой скорость плоскополяризованного разрыва $W_{AB}$ совпадает со скоростью вращательного разрыва с начальным состоянием, представленным точкой $B$. Тогда ударной адиабате будет принадлежать также окружность $L_B$, изображающая *множество состояний за вращательным разрывом из начального состояния* $B$. Ударную волну $A \to B$ и вращательный разрыв вследствие совпадения их скоростей можно рассматривать как один разрыв. Такой *составной разрыв* будем далее называть *поворотным* (в отличие от *вращательного*, в нем меняются все три компоненты $u_i$ и $S$). Таким образом, окружность $L_B$ принадлежит ударной адиабате и представляет состояния за поворотными скачками из точки $A$, причем вся окружность соответствует *одной и той же скорости разрыва* $W$ и *одной и той же энтропии за разрывом.* Ударная адиабата может содержать несколько окружностей, соответствующих поворотным разрывам, или только одну, проходящую через начальную точку $A$.

Покажем, что, если некоторая точка $C$ в пространстве $u_i$, не лежащая в начальной плоскости, удовлетворяет соотношениям на разрыве (9.3) с некоторыми значениями $W$ и $S^+$, то к удар-

ной адиабате принадлежит вся окружность $L_C$, соответствующая вращательным разрывам с начальным состоянием $(C, S^+)$. Для этого достаточно показать, что скорость движения скачка $A \to C$ совпадает со скоростью вращательного разрыва с начальным состоянием $(C, S)$. Действительно, согласно упомянутому выше свойству симметрии, наряду с состоянием $(C, S)$, ударной адиабате принадлежит также симметричная относительно начальной плоскости точка $C'$ с теми же значениями $S$ и $W$. Если на ударной адиабате имеются две точки, соответствующие одному и тому же значению $W$, то существует удовлетворяющий законам сохранения скачок из одной точки в другую, движущийся с той же скоростью $W$. В рассматриваемом случае скачок из состояния $C, S^+$ в $C', S^+$ представляет собой, очевидно, вращательный разрыв, так что скорость скачка $A \to C$ совпадает со скоростью вращательного разрыва, идущего по состоянию $C, S^+$. Отсюда следует принадлежность всей окружности $L_C$ ударной адиабате.

Покажем, что скорость поворотного скачка $A \to C$ совпадает также со скоростью вращательного разрыва, идущего по состоянию $A, S^-$. Действительно, симметрия ударной адиабаты имеет место и по отношению к плоскости, проведенной через ось $u_3$ и точку $C$. Поэтому наряду с состоянием $A, S^-$, соотношениям на разрыве с заданным конечным состоянием $C, S^+$ удовлетворяет также точка $A'$, симметричная точке $A$ относительно упомянутой плоскости, с теми же значениями $S^-$ и $W$.

Итак, любой неплоскополяризованный разрыв (т.е. вращательный или поворотный) движется со скоростью, совпадающей со скоростью вращательных волн по состоянию перед разрывом и по состоянию за разрывом.

Таким образом, ударная адиабата при $g = 0$ состоит из *плоской кривой*, лежащей в начальной плоскости, две ветви которой пересекаются в точке $A$, *и некоторого количества окружностей*, лежащих в плоскостях $u_3 = \text{const}$, соответствующих *вращательному и поворотным разрывам* (рис. 9.7). Точки пересечения этих окружностей с начальной плоскостью удовлетворяют тем же уравнениям, что и кривая, представляющая часть ударной адиабаты, соответствующей плоскополяризованным волнам,

и, следовательно, точки пересечения окружностей с начальной плоскостью принадлежат этой кривой. Очевидно, что на каждой из окружностей, соответствующих вращательной и поворотным волнам, энтропия постоянна. При $g = 0$ условие неубывания энтропии на разрыве выполняется или не выполняется для всей окружности сразу.

Как и для случая ударных волн малой амплитуды (§§ 4.10, 4.11), при рассмотрении условий эволюционности следует принимать во внимание, что при $g = 0$ система линеаризованных соотношений на плоскополяризованных разрывах (ударных волнах) распадается на две независимые подсистемы линейных однородных алгебраических уравнений. Если $u_2^- = u_2 = 0$ (чего всегда можно добиться поворотом системы координат вокруг оси $u_3$), то $F_{12} = F_{23} = 0$ и из (9.3) видно, что одна из подсистем состоит из двух уравнений, выражающих сохранение проекции потока импульса на ось $x_2$ и непрерывность $w_2$. Эти уравнения связывают $\delta v_2^-$, $\delta u_2^-$, $\delta v_2^+$, $\delta u_2^+$. Оставшиеся четыре уравнения связывают $\delta v_1^-$, $\delta v_3^-$, $\delta u_1^-$, $\delta u_3^-$, $\delta S_-$, $\delta v_1^+$, $\delta v_3^+$, $\delta u_1^+$, $\delta u_3^+$, $\delta S_+$, $\delta W$. Поскольку первая группа переменных изменяется во вращательных волнах малой амплитуды и только в них, то указанное распадение системы уравнений на подсистемы приводит к тому, что наряду с общими условиями эволюционности, требующими, чтобы число уходящих от разрыва характеристик было равно 7-1=6, появляется дополнительное требование, чтобы число уходящих от разрыва вращательных волн было равно двум. Это означает, что скорость ударной волны либо с обеих сторон больше, либо с обеих сторон меньше скорости вращательной волны, движущейся в ту же сторону.

Сами вращательные разрывы являются граничными с точки зрения условий эволюционности и условия неубывания энтропии, поскольку их скорость по обе стороны совпадает со скоростями вращательных малых возмущений, а $[S] = 0$. Как следует из предыдущего, граничными с точки зрения эволюционности являются все неплоскополяризованные (т.е. вращательные и поворотные) разрывы.

Конкретное поведение интегральных кривых, соответствующих плоскополяризованным волнам Римана, изменение характе-

ристических скоростей на них, вид ударной адиабаты и положение на ней участков эволюционности определяется функцией $F(r^2, u_3, S)$, задающей упругий потенциал в случае $g = 0$. Все это может быть весьма сложным даже при сравнительно простых вариантах задания функции $F$ (Ленский [1981], [1983]). Мы не будем рассматривать этих вопросов и последующие параграфы посвятим изучению влияния на эти волны малой анизотропии, т.е. малых, но отличных от нуля, значений параметра $g$, считая, что все относящееся к случаю $g = 0$ нам известно.

## 9.2. Волны Римана в несжимаемой среде при $g \ll 1$

Рассмотрим упругую среду, у которой выражение для упругого потенциала (9.1) содержит второе слагаемое, задающее волновую анизотропию, в виде произвольной функции $p(u_i, S)$, с малым множителем $g$ (Куликовский и Свешникова [1993]).

Волны Римана представляют собой непрерывные решения вида $u_i = u_i(\theta)$, где $\theta$ – некоторая функция переменных $x$ и $t$ (Глава 1). В непрерывных решениях $\partial S/\partial t = 0$ и, следовательно, в движущихся волнах Римана $S = \text{const}$, поэтому в этом параграфе не будем указывать $S$ в числе аргументов функций. Поскольку $g$ мало, то в уравнениях ( 9.2) появятся малые члены, содержащие $g$ множителем. Добавление этих малых членов мало изменит по сравнению со случаем $g = 0$ поведение интегральных кривых всюду, кроме малых окрестностей тех точек, в которых совпадают два собственных значения матрицы $\|F_{ij}\|$. Одной из таких точек в пространстве $u_i$ всегда является начало координат, где при $g = 0$ совпадают характеристические скорости двух поперечных волн. В зависимости от вида функции $F$ могут появиться и другие точки, обладающие указанным свойством, и даже целые поверхности.

Кроме того, в присутствии анизотропии, даже малой, интегральные кривые квазивращательных волн (волн, которые при $g = 0$ были вращательными) перестают быть окружностями и, что более важно, соответствующие им характеристические ско-

рости $c_\theta$ вдоль них уже не будут постоянными. На интегральных кривых квазивращательных волн будем разыскивать точки экстремума скоростей $c_\theta$. Для этих волн деформация их профиля целиком обусловлена анизотропией ($g \neq 0$), даже если она мала.

Исследование нелинейных волн малой интенсивности (вблизи начала координат в пространстве $u_i$) показало (Глава 3), что большее разнообразие и качественно новое поведение вносит анизотропия в поведение квазипоперечных волн. Поэтому можно ожидать, что главные эффекты присутствия анизотропии проявят себя уже на модели *несжимаемой упругой среды*, где нет продольной компоненты деформации ($u_3 = 0$) и, соответственно, нет квазипродольных волны. Этот параграф посвящен изучению волн в несжимаемых средах. Отсутствие компоненты $u_3$ позволяет вести дальнейшее исследование на плоскости $u_1 u_2$.

Упругий потенциал и уравнение, описывающее волны Римана, для рассматриваемой среды имеют вид

$$\begin{gathered} \Phi = F(r^2) + gp(u_1, u_2), \qquad r^2 = u_1^2 + u_2^2, \\ (\Phi_{\beta\gamma} - \alpha\delta_{\beta\gamma})du_\gamma = 0, \qquad \Phi_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}, \qquad \beta, \gamma = 1, 2. \end{gathered} \tag{9.4}$$

Здесь $\alpha = \rho_0 c^2$, где $c$ – характеристическая скорость.

При отсутствии анизотропии ($g = 0$) интегральные кривые на плоскости $u_1 u_2$ представляют собой два взаимно ортогональных семейства: лучей (*плоскополяризованные волны*) и окружностей (*вращательные волны*). Собственные значения матрицы $\|F_{ij}\|$ определяются формулами

$$\alpha_r^0 = \frac{d^2F}{dr^2} = f', \qquad \alpha_\theta^0 = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{f}{r}, \qquad f = \frac{dF}{dr}.$$

Здесь и далее принято обозначение $dF/dr = f(r)$, $r$ и $\theta$ – полярные координаты на плоскости $u_1 u_2$. Индекс "0" здесь и всюду дальше относится к случаю отсутствия анизотропии. Очевидно, функция $f(r)$ представляет зависимость модуля касательного напряжения

$$\sigma_\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^2} = f(r)$$

от модуля сдвиговых деформаций $\varepsilon_\tau = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = r$. Функция $F(r^2)$ – четная функция $r$, поэтому $f(r)$ – нечетная. Полагаем, что в окрестности точки $r = 0$ она представляется разложением

$$f(r) = f_0' r + \frac{1}{6} f_0''' r^3.$$

Как уже было сказано, малая анизотропия может привести к качественному изменению поля интегральных кривых в окрестности точек, где совпадают собственные числа матрицы $\|F_{ij}\|$. Введем для удобства дальнейших рассуждений функцию

$$d^0(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{f}{r} - f'\right).$$

В точках, где совпадают интересующие нас собственные значения, $\frac{1}{2}(f/r - f') = 0$. Уравнение $d^0 = 0$ всегда имеет решение $r = 0$. Кроме того, у него могут быть и другие решения. Они соответствуют точкам, в которых луч, проведенный из начала координат, касается графика $f(r)$.

Рассмотрим для определенности вид зависимости $f(r)$, изображенный на рис. 9.1, когда $f_0''' < 0$ и имеется один ненулевой корень $r = r_*$ у функции $d^0(r)$, причем считаем, что $f''(r_*) > 0$. При этом на графике функции $f(r)$ при $r = r^\sim < r_*$ имеется точка перегиба, где $f''(r^\sim) = 0$. Полагаем, что других точек перегиба у кривой $f(r)$ нет. В точке $r^\sim$ величина собственного значения $\alpha_r^0 = f'(r)$ имеет минимум. Очевидно, для функции $d^0(r)$ выполнены неравенства: $d^0(r) > 0$ при $r < r_*$ и $d^0(r) < 0$ при $r > r_*$. Вид зависимости $f(r)$, подобный изображенному на рис. 9.1, встречается у материалов, допускающих большие упругие деформации, а также при активном нагружении многих металлов в области пластичности.

Не потребует больших усложнений рассмотрение волн в материалах с противоположным изменением направления выпуклости графика $f(r)$ или с двумя и большим числом корней у функции $d^0(r)$.

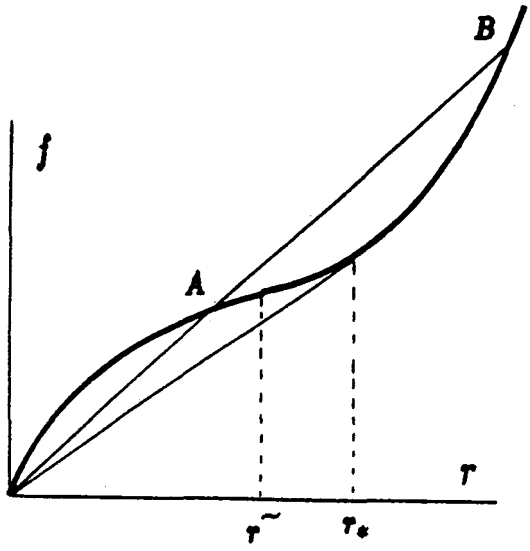



Рис. 9.1.

По величинам характеристических скоростей $c_\beta$ будем различать волны *медленные* $c = c_1$ и *быстрые* $c = c_2$, $c_2 > c_1$. Очевидно, при выбранном на рис. 9.1 виде функции $f(r)$ при $r < r_*$ радиальные волны являются медленными ($c_r^0 = c_1$), вращательные – быстрыми ($c_\theta^0 = c_2$), при $r > r_*$ – наоборот.

Для исследования интегральных кривых и характеристических скоростей при $g \neq 0$ на фазовой плоскости $u_1 u_2$ введем вспомогательную систему координат $y_1, y_2$. Это декартова система с началом координат в заданной точке $r, \theta$, у которой оси направлены по радиусу-вектору и нормали к нему. В этих переменных уравнения (9.4) сохранят свой вид, если по-прежнему принять обозначения $\Phi_{\beta\gamma} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\beta \partial y_\gamma}$.

При $y_1 = y_2 = 0$ матрица $\|\Phi_{\beta\gamma}\|$ имеет вид:

$$\Phi_{11} = f' + gp_{11}, \qquad \Phi_{12} = gp_{12}, \qquad \Phi_{22} = f/r + gp_{22},$$

где $p_{\beta\gamma} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial y_\beta \partial y_\gamma}$. Корни характеристического уравнения

$$|\Phi_{\beta\gamma} - \alpha\delta_{\beta\gamma}| = 0$$

дают собственные значения

$$\alpha_{1,2} = f' + d + gp_{11} \mp \sqrt{d^2 + g^2 p_{12}^2}, \tag{9.5}$$

$$d = d^0 + \frac{1}{2}g(p_{22} - p_{11}), \quad d^0(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{f}{r} - f'\right),$$

а из системы (9.4) находим направления собственных векторов, касательных в каждой точке к интегральным кривым волн Римана

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{d \mp \sqrt{d^2 + g^2 p_{12}^2}}{gp_{12}}. \tag{9.6}$$

Направления собственных векторов не определены в точках, где $\alpha_1 = \alpha_2$. Это особые точки, в которых, согласно выражению (9.5), одновременно выполняются два равенства

$$d(r, \theta) = 0, \qquad p_{12}(r, \theta) = 0.$$

Очевидно, *особые точки* расположены в областях, где $d^0(r)$ имеет порядок величины, равный $g$. Это выполнено, в частности, около начала координат.

При исследовании интегральных кривых в окрестности начала координат, т.е. при малых $u_1$ и $u_2$, ранее было показано (Глава 3), что имеется пара симметрично расположенных относительно начала координат особых точек на расстоянии порядка $\sqrt{g}$ от начала координат. Другие особые точки могут находиться вблизи окружности $r = r_*$, которую будем называть *критической*, для них

$$d^0(r) = -\frac{1}{2}f''_*(r - r_*) + \ldots, \qquad f''_* = f''(r_*).$$

Многоточием заменены члены второй и более высоких степеней по $r - r_*$. Положение особых точек определяется пересечением

линии $p_{12} = 0$ с линией $d = 0$, уравнение которой с использованием последнего выражения для $d_0$ можно записать в виде

$$r = r_{**}(\theta) \equiv r_* + g(p_{22} - p_{11})/f_*''. \tag{9.7}$$

Эта линия, очевидно, близка к критической окружности $r = r_*$, если $f_*'' \neq 0$, что будет предполагаться.

Собственный вектор медленных волн, соответствующих $\alpha_1$ (верхний знак в формулах (9.5) и (9.6)),вдали от критической окружности, т.е. при $|d^0| \gg g$, для $r < r_*$ имеет направление, близкое к радиусу-вектору, так как там $dy_2/dy_1 \sim g$. Эту волну будем называть *квазирадиальной*, для нее $\alpha_1 = \alpha_r$. При $r > r_*$ для тех же медленных волн $dy_2/dy_1 \sim g^{-1}$, и собственный вектор этого семейства близок направлению оси $y_2$, ортогональному радиусу-вектору. Это *квазивращательная* волна, для нее $\alpha_1 = \alpha_\theta$. Таким образом, происходит *поворот интегральных кривых* медленных волн на угол $\pi/2$, причем этот процесс разворота концентрируется *в узком слое* $\sim g$ *около критической окружности.*

Интегральные кривые быстрых волн в каждой точке ортогональны собственным векторам описанного семейства медленных волн и, следовательно, при $g \ll |d^0|$ в области $r < r_*$ волны являются квазивращательными ($\alpha_2 = \alpha_\theta$), а при $r > r_*$ – квазирадиальными ($\alpha_2 = \alpha_r$) и также меняют направление на угол $\pi/2$ в узкой зоне около критической окружности.

Направление поворота линий того и другого семейства определяется функцией $dy_2/dy_1$, заданной формулой (9.6). В выражении (9.6) числитель всегда отрицателен для семейства медленных волн и положителен для быстрых. Поэтому при $p_{12} > 0$ интегральные кривые медленных волн в упомянутой узкой зоне при увеличении $r$ поворачивают направо, а при $p_{12} < 0$ – налево. Это сопровождается соответствующим изменением направления интегральных кривых быстрых волн. Интегральные кривые медленных волн всюду при $r < r_*$ и быстрых волн при $r > r_*$ пересекают линии $p_{12} = 0$ вдоль радиуса-вектора ($dy_2/dy_1 = 0$); для медленных волн при $r > r_*$ и быстрых волн при $r < r_*$ интегральные линии пересекают линию $p_{12} = 0$ перпендикулярно радиусу.

Для изучения поведения интегральных кривых *вблизи особых точек* было использовано разложение с точностью до линейных членов функций $d(r,\theta)$ и $p_{12}(r,\theta)$, входящих в уравнение (9.6). Для собственных значений получилось уравнение третьей степени, которое может иметь одно или три действительные решения в зависимости от знака функции $\partial p_{12}/\partial\theta$.

Если в особой точке $\partial p_{12}/\partial\theta > 0$, то имеется только одно собственное направление, близкое к радиусу-вектору (под углом $\varphi \approx g\,\partial p_{12}/\partial r$ к нему), вдоль которого идет квазирадиальная интегральная кривая медленных волн при $r < r_{**}$, и ее продолжает при $r > r_{**}$ интегральная кривая быстрых волн. Если же в особой точке $\partial p_{12}/\partial\theta < 0$, то, кроме указанного радиального направления, имеются еще два собственных направления, каждое из которых идет под малым углом наклона соответственно к положительной и отрицательной оси $y_2$ (касательной к окружности).

Поведение интегральных кривых медленных и быстрых волн вблизи особых точек $A$ и $B$ изображено на рис. 9.2 для случая $\partial p_{12}/\partial\theta > 0$ ($a$ и $b$) и для случая $\partial p_{12}/\partial\theta < 0$ ($c$ и $d$).

Как уже было сказано ранее, для изучения *деформации профиля волны* со временем следует вычислить производные от характеристических скоростей, или, что одно и то же, от собственных значений матрицы $\|\Phi_{\beta\gamma}\|$, вдоль соответствующих им интегральных кривых. При дифференцировании функций $\alpha(u_\beta)$ будем пользоваться полярной системой координат $r,\theta$. Как было показано выше, на достаточном удалении от начала координат и критической окружности интегральные кривые мало отличаются от лучей и окружностей.

Для квазирадиальных линий изменение $\alpha$ будем характеризовать производной

$$\frac{d\alpha_r(r,\theta)}{dr} = \frac{\partial\alpha_r}{\partial r} + \frac{\partial\alpha_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dr},$$

где $d\theta/dr = (1/r)(dy_2/dy_1)$ определяется уравнением интегральной кривой (9.6). С ошибкой порядка $g^2$ имеем

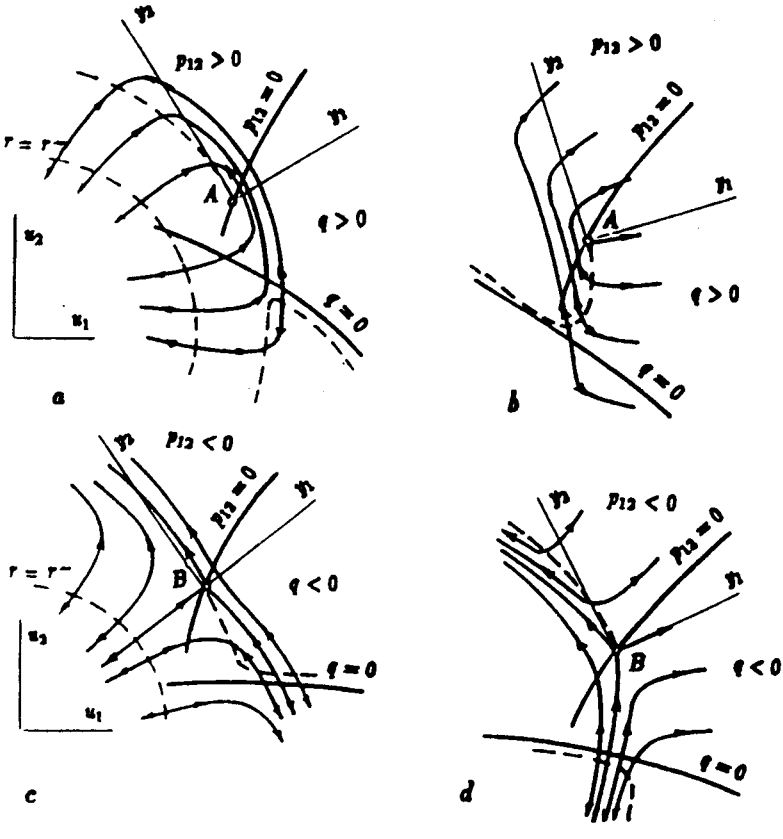



Рис. 9.2.

$$\frac{d\alpha_r}{dr} = \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} = f''(r) + g\frac{\partial p_{11}}{\partial r}. \tag{9.8}$$

Так как согласно сделанному предположению $f''$ может обратиться в нуль только в точке $r = r^{\sim} < r_*$, то только у медленных квазирадиальных волн на каждой интегральной кривой имеется точка экстремума $\alpha_1$, лежащая на линии, близкой к окружности $r = r^{\sim}$ внутри критической окружности.

Для квазивращательных волн изменение $\alpha$ будем характеризовать производной

$$\frac{d\alpha_\theta(r,\theta)}{d\theta} = \frac{\partial\alpha_\theta}{\partial r}\frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial\alpha_\theta}{\partial\theta}.$$

Учитывая, что в рассматриваемой области $\|d^0\| \gg g$, и, вследствие этого, при вычислении производных слагаемыми, содержащими множитель $g$ в более высоких степенях, можно пренебречь, получим

$$\frac{d\alpha_\theta}{d\theta} = gq(r,\theta), \qquad q(r,\theta) = \frac{\partial p_{22}}{\partial\theta} - \frac{p_{12}}{r}. \tag{9.9}$$

Поэтому точки экстремума функции $\alpha_\theta$ при $|r-r_*| \gg g$ лежат на линии $q(r,\theta) = 0$ как для быстрых волн (внутри критической окружности $r = r_*$), так и для медленных волн (вне ее).

Таким образом, равенства (9.8) и (9.9) указывают направление, в котором происходит увеличение характеристической скорости вдоль интегральных кривых вне узкой окрестности критической окружности $r = r_*$. Это позволяет определить, изменяется или не изменяется это направление, когда интегральная кривая быстрого или медленного семейства пересекает окрестность критической окружности. Из равенств (9.8) и (9.9) с учетом неравенства $f''(r_*) > 0$ и того, что при пересечении интегральной кривой окрестности критической окружности, направление ее поворота определяется знаком $p_{12}$, можно сделать следующие выводы. Если на некотором отрезке критической окружности знаки $q$ и $p_{12}$ противоположны, то в результате пересечения интегральными кривыми медленных волн (идущих при $r < r_* - O(g)$ почти по радиусу, а при $r > r_* + O(g)$ почти по окружности) окрестности критической окружности не происходит изменения знака производной от величины $\alpha_1$, взятой вдоль интегральной кривой. В этом же случае для быстрых волн происходит изменение знака производной от величины $\alpha_2$. Если знаки $q$ и $p_{12}$ совпадают, то знак производной от величины $\alpha$ меняется для медленных волн и не меняется для быстрых. Изменение знака производной означает, что внутри окрестности критической окружности на интегральной кривой имеется один (или нечетное число) экстремум величины $\alpha$. Сохранение знака производной означает, что экстремумов нет (или их четное

число). Более детальное исследование поведения величин характеристических скоростей вблизи критической окружности показывает, что возможности, указанные выше в скобках, не осуществляются.

На рис. 9.2 линии экстремумов величин $\alpha$ нанесены штрихами, стрелками указаны направления роста величины $\alpha$.

## 9.3. Волны Римана в несжимаемой среде при анизотропии частного вида

Очевидно, количество и расположение особых точек интегральных кривых и линий экстремумов величин $\alpha$ существенно зависит от вида функции $p(u_1, u_2)$, задающей волновую анизотропию среды. В исследовании интегральных кривых на плоскости $u_1u_2$ при $g \neq 0$ в малой окрестности начала координат использовалось разложение в ряды по $u_1$, $u_2$ (Глава 3). Оказалось, что, если разложение функции $p(u_\beta)$ содержит квадратичные члены, то при малых $u_1$, $u_2$ эта функция может быть взята в виде $p = u_2^2 - u_1^2$. Примем эту же конкретную функцию $p(u_\beta)$ и для волн конечной интенсивности. Это дает возможность представить в этом случае более наглядно поведение интегральных кривых на всей плоскости $u_1u_2$.

Итак, пусть несжимаемая среда имеет упругий потенциал

$$\Phi = F(r^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2),$$

где $dF/dr = f(r)$ – функция, изображенная на рис. 9.1. Это означает, что в уравнениях (9.5) и (9.6) следует положить

$$p_{12} = \sin 2\theta, \qquad \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11}) = \cos 2\theta, \qquad p_{11} + p_{22} = 0.$$

Интегральные кривые на плоскости $u_1u_2$ оказываются симметричными относительно осей координат.

Особые точки обоих семейств интегральных кривых совпадают и лежат на осях координат (так как $p_{12} = \sin 2\theta = 0$) там, где $d^0(r) + g\cos 2\theta = 0$. Это дает три пары точек:

на оси $u_2$ точки $C$, в которых

$$u_1^C = 0, \qquad u_2^C = \pm\sqrt{-2g/f_0'''},$$

и точки $B$, в которых

$$u_1^B = 0, \qquad u_2^B = \pm(r_* - 2g/f_*''),$$

и на оси $u_1$ точки $A$, где

$$u_1^A = \pm(r_* + 2g/f_*''), \qquad u_2^A = 0.$$

Интегральные кривые волн Римана в окрестности точки $C$ на плоскости $u_1u_2$ изучены в Главе 3. Исследование интегральных кривых в окрестности точки $B$ показывает, что через нее проходят три интегральные кривые каждого семейства – луч вдоль оси $u_2$ и две линии, направление которых в точке $B$ составляет малые углы $\pm\varphi = \pm\sqrt{2g/r_*f_*''}$ с осью $u_1$. Через точку $A$ проходит одна интегральная кривая – луч вдоль оси $u_1$. Поведение интегральных кривых в окрестности точек $A$ и $B$ с точностью до поворота совпадает с изображенным на рис. 9.2.

Интегральные кривые волн Римана пересекают критическую окружность $r = r_*$ в направлениях, параллельных осям координат $u_1$ и $u_2$. Вблизи окружности $r = r_*$ линии обоих семейств поворачиваются на угол $\pi/2$ в направлении, определяемом знаком отношения $p_{12}/(\partial p_{12}/\partial\theta) = \operatorname{tg} 2\theta$. Интегральные кривые медленных и быстрых волн Римана изображены на рис. 9.3 *a* и *b* сплошными линиями.

Изменение собственных значений $\alpha$ вдоль соответствующих им интегральных кривых определяется производной

$$\frac{d\alpha}{dl} = \frac{g\sin 2\theta}{2}\left(f'' - \frac{6d^0}{r} \mp \frac{(f'' + 6d^0/r)(d^0 + g\cos 2\theta)}{\sqrt{(d^0 + g\cos 2\theta)^2 + g^2\sin^2 2\theta}}\right) \qquad (9.10)$$

Здесь, как и ранее, $d^0 = d^0(r) = \dfrac{1}{2}(f/r - f')$. Из-за симметрии достаточно рассмотреть выражение для производной $d\alpha/dl$

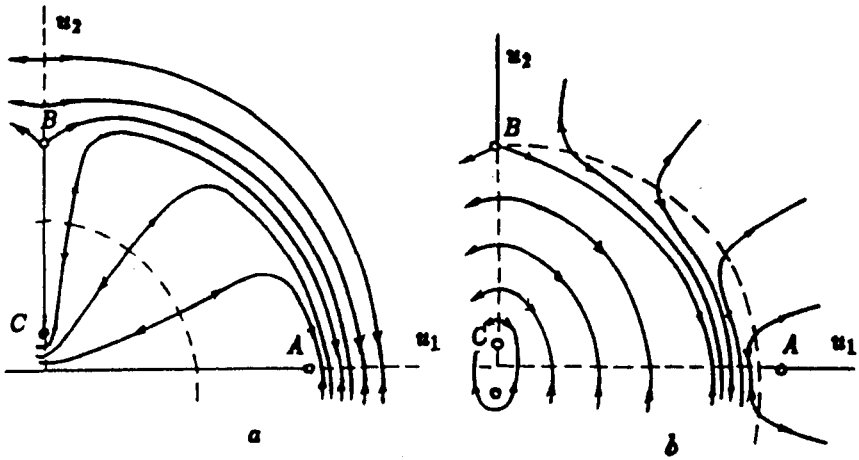



Рис. 9.3.

только в первой четверти плоскости $u_1u_2$, при $0 \leq \theta \leq \pi/2$, а направление отсчета $l$ вдоль интегральной кривой выбрано в сторону увеличения $r$. Очевидно, $d\alpha/dl$ меняет знак на осях координат, где $\sin 2\theta = 0$ (что соответствует обращению в нуль функции $q = -3\sin 2\theta/r$). Кроме того, для медленных волн экстремумы функции $\alpha_1$ составляют линию, близкую к окружности $r = r^{\sim}$ (напомним, что $f''(r^{\sim}) = 0$). Линия экстремумов $\alpha_1$ изображена на рис. 9.3 *а* штриховой линией.

Совпадение линий $p_{12} = 0$ и $q = 0$ вносит в эту задачу определенную симметрию и некоторую вырожденность. В частности, функции $q$ и $p_{12}$ всегда имеют разные знаки, поэтому, согласно предыдущему, дополнительная точка экстремума $\alpha$ в окрестности критической окружности имеется только для быстрых волн. Эта часть линии экстремумов $\alpha$ представляет собой симметричный относительно осей координат овал, близкий к критической окружности и целиком лежащий внутри нее. Он проходит через особую точку $B$ и точку с координатами $u_1 = r_*$, $u_2 = 0$. Вся линия экстремумов величины $\alpha_2$ состоит из этого овала и тех участков осей координат, которые пересекаются интеграль-

ными кривыми быстрых волн. На рис. 9.3 *b* на плоскости $u_1u_2$ линии экстремумов величины $\alpha_2$ изображены штриховыми линиями; стрелками на интегральных кривых указано направление роста величины $\alpha$.

## 9.4. Волны Римана в сжимаемой среде

Рассмотрим теперь величины характеристических скоростей и поведение интегральных кривых волн Римана для сжимаемой среды с малой анизотропией. Основная изотропная часть упругого потенциала $F$ является функцией $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ и $u_3$. В фазовом пространстве $u_i$, $i = 1, 2, 3$ оси декартовой локальной системы координат $y_i$ направим по касательным к координатным линиям цилиндрической системы с осью $y_3$ параллельной оси $u_3$. Индексом 1 всюду далее обозначено дифференцирование по $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, индексом 3 – дифференцирование по $y_3$, или, что то же самое, по $u_3$, а индексом 2 – дифференцирование по касательной к окружности радиуса $r$, лежащей в плоскости $u_3 = \text{const}$. В такой системе $F_2 = F_{12} = F_{32} = 0$, $F_{22} = F_1/r$. Здесь и далее обозначено $F_1 = \partial F/\partial r$.

В области, где все собственные значения матрицы $\|F_{ij}\|$ различаются на конечную величину, интегральные кривые при $g \neq 0$ близки к соответствующим интегральным кривым, получающимся при $g = 0$. Ранее было показано, что при $g = 0$ одно из семейств интегральных кривых в пространстве $u_i$ представлено окружностями в плоскостях $u_3 = \text{const}$ (*вращательные волны*), их характеристическая скорость определяется собственным значением $\alpha_\theta^0 = F_1/r$. Два другие семейства волн являются при этом *плоскополяризованными*, их интегральные кривые лежат в плоскостях, проходящих через ось $u_3$, и соответствуют собственным значениям

$$\alpha_{r,3}^0 = \frac{1}{2}\left(F_{11} + F_{33} \pm \sqrt{(F_{11} - F_{33})^2 + 4F_{13}^2}\right).$$

Условие совпадения собственных значений двух плоскополяризованных волн требует одновременного выполнения двух равенств: $F_{11} = F_{33}$ и $F_{13} = 0$, которые в общем случае могут

выполняться только в отдельных точках этой плоскости. В пространстве $u_i$ собственные значения совпадают на окружностях, полученных вращением этих особых точек вокруг оси $u_3$.

Чтобы обнаружить в общем случае сжимаемой среды те свойства волн, которые наблюдались в несжимаемом материале, будем считать, что и в сжимаемой среде при $g = 0$ в рассматриваемой области в некоторых состояниях возможно совпадение двух собственных значений, одно из которых соответствует вращательной волне $\alpha = \alpha_\theta^0$, другое – той из плоскополяризованных волн, которая при малых $u_\beta$ ($\beta$=1,2) переходит в поперечную волну $\alpha = \alpha_r^0$. Для определенности будем считать, что третье собственное значение $\alpha_3$ больше, чем оба других. В силу того, что собственные значения матрицы $\|F_{ij}\|$, соответствующие вращательной и плоскополяризованным волнам, определяются из независимых уравнений, требование их совпадения приводит, в отличие от предыдущего случая, к одному уравнению, представляющему кривую на плоскости $u_1u_3$ или поверхность вращения в пространстве $u_i$. Ее уравнение имеет вид

$$D^0 \equiv (F_{11} - F_1/r)(F_{33} - F_1/r) - F_{13}^2 = 0.$$

*Эта поверхность вращения с осью симметрии $u_3$ играет для рассматриваемой сжимаемой среды ту же роль, что и критическая окружность $r = r_*$ в случае несжимаемого материала*, а функция $D^0(r, u_3)$ аналогична функции $d^0(r)$, использованной при описании волн в несжимаемой среде.

Рассмотрим поверхность $\Sigma^0$, полученную вращением около оси $u_3$ некоторой интегральной кривой "первого" семейства, соответствующего $\alpha_r^0$.

Эту поверхность можно считать состоящей из кривых первого семейства, каждая из которых лежит в плоскости, проходящей через ось $u_3$. На этой же поверхности лежат интегральные кривые "второго" семейства, соответствующие $\alpha_\theta^0$, – окружности $r = \text{const}$. В точке с координатами $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ эта поверхность $\Sigma^0$ касается плоскости $u_3 = \text{const}$ и при малых $u_1$ и $u_2$ соответствует квазипоперечным волнам. Проекции обоих семейств интегральных кривых на плоскость $u_3 = \text{const}$ совпа-

дают с интегральными линиями для несжимаемой среды – лучами и окружностями. Собственный вектор третьего семейства, соответствующий $\alpha_3^0$, вследствие симметрии матрицы $\|F_{ij}\|$ направлен по нормали к собственным векторам других семейств и, следовательно, по нормали к поверхности $\Sigma^0$.

Таким образом, при $g = 0$ *каждая из поверхностей* $\Sigma^0$ состоит из интегральных кривых первого и второго семейств и *играет ту же роль, что и плоскость* $u_3 = 0$ *в случае несжимаемой среды.* Разница заключается только в том, что поверхностей $\Sigma^0$ много и они заполняют все пространство $u_i$.

При малом $g \neq 0$ интегральные кривые первого и второго семейств остаются близкими к соответствующим поверхностям $\Sigma^0$, а качественное поведение их проекций на поверхность $\Sigma^0$ совпадает с поведением интегральных кривых в случае несжимаемой среды на плоскости $u_3 = 0$ .

Первое из этих утверждений вытекает из того, что интегральные кривые ортогональны в каждой точке собственному вектору третьего семейства, который при малых $g \neq 0$ мало отличается от нормали к поверхности $\Sigma^0$. Всюду вдали от поверхности $D^0 = 0$ и от оси $u_3$ интегральные кривые рассматриваемых двух семейств мало отклоняются от интегральных кривых при $g = 0$.

Поведение интегральных кривых при малых $u_1$ и $u_2$, соответствующее квазипоперечным волнам, качественно совпадает с рассмотренным ранее поведением интегральных кривых при малых $u_1$ и $u_2$ в случае несжимаемой среды. В окрестности поверхности $D^0 = 0$, на которой $\alpha_r^0 = \alpha_\theta^0$, интегральные кривые обоих семейств, оставаясь каждая вблизи своей поверхности $\Sigma^0$, претерпевают качественные изменения своего поведения. Поверхность $D^0 = 0$ представляет собой поверхность вращения, а ее пересечение с поверхностью $\Sigma^0$ – окружность – аналог критической окружности $r = r_*$ в случае несжимаемой среды.

В окрестности поверхности $D^0 = 0$ при $g \neq 0$ собственные значения, соответствующие рассматриваемым семействам, можно представить формулой

$$\alpha_{1,2} = \Phi_{22} + \frac{1}{2G}\left(D \mp \sqrt{D^2 + 4g^2(p_{12}G - p_{23}\Phi_{13})^2}\right),$$
$$D = (\Phi_{11} - \Phi_{22})G - \Phi_{13}^2, \qquad G = \Phi_{33} - F_1/r,$$
$$\Phi = F + gp.$$

Равенство $\alpha_1 = \alpha_2$, определяющее положение особых точек приводит, как и в случае несжимаемой среды, к двум соотношениям

$$D(r, \theta, u_3) = 0, \qquad p_{12}G - p_{23}\Phi_{13} = 0. \tag{9.11}$$

Видно, что особые точки составляют линию, расположенную вблизи поверхности $D^0 = 0$. На каждой из поверхностей $\Sigma^0$ лежат отдельные точки, представляющие пересечение линии (9.11) с этой поверхностью. Поведение первых двух семейств интегральных кривых в окрестности особых точек качественно не отличается от случая несжимаемой среды.

Если пересечь узкую зону, где величина функции $D^0$ имеет порядок $g$, не проходя при этом через особую точку, то на всем пути $\alpha_1$ остается отличным от $\alpha_2$. Однако, $\alpha_1$ с одной стороны этой узкой зоны соответствует *квазиплоскополяризованным* волнам, а с другой – *квазивращательным*. Это означает, что интегральные кривые, соответствующие $\alpha_1$, поворачиваются в этой зоне на угол $\pi/2$, как и в случае несжимаемой среды. Интегральные кривые, соответствующие $\alpha_2$, ортогональны первым и также разворачиваются на угол $\pi/2$.

Производные от $\alpha$ вдоль соответствующих им интегральных кривых для квазиплоскополяризованных волн конечны и близки к их значениям при $g = 0$. Для квазивращательных волн эта производная мала и полностью определяется анизотропией среды

$$\frac{d\alpha_\theta}{d\theta} = g\left(\frac{\partial p_{22}}{\partial \theta} - \frac{p_{12}}{r}\right) \equiv gQ(r, \theta, u_3). \tag{9.12}$$

Приравниванием нулю выражения (9.12) получаем уравнение поверхности , при пересечении которой $\alpha_\theta$ на своей интегральной кривой достигает экстремума. Пересечение этой поверхности с поверхностью $\Sigma^0$ дает кривую, аналогичную линии $q = 0$

в прежнем случае несжимаемой среды. Так же как и прежде можно показать, что в малой окрестности поверхности $D^0 = 0$ на одном из семейств интегральных кривых, соответствующих $\alpha_1$ и $\alpha_2$, также происходит изменение знака производной от величины $\alpha$ вдоль интегральной кривой.

Таким образом, в случае сжимаемой среды картина интегральных кривых, подобная рассмотренной выше для несжимаемой среды, повторяется вблизи каждой поверхности $\Sigma^0$, получающейся вращением вокруг оси $u_3$ интегральной кривой, соответствующей $\alpha_r^0$ (при $g = 0$).

## 9.5. Ударные волны в несжимаемой среде

Как и при изучении волн Римана, рассмотрение ударных волн начнем со случая несжимаемого материала, для которого следует положить $u_3 = 0$ (Свешникова [1994]). Упругий потенциал возьмем в виде

$$\Phi = F(r^2) + gp(u_1, u_2) + \varphi(S), \qquad r^2 = u_1^2 + u_2^2. \tag{9.13}$$

Условия, когда такое представление приемлемо, будут обсуждаться ниже, в конце текущего параграфа. Как и в § 9.2, для задания свойств среды будем использовать функцию $f(r) = dF/dr$. Напомним, что $F$ – четная, а $f(r)$ – нечетная функции от $r$, причем в дальнейшем в некоторых случаях будем для удобства придавать $r$ и отрицательные значения.

Вид функции $f(r)$ для определенности примем таким же как в § 9.2, она представлена на рис. 9.1. Если использовать для функции $\Phi$ выражение (9.13), то соотношения (9.3), представляющие сохранение импульса и энергии на разрыве, запишутся в виде

$$\begin{gathered} f\frac{u_\alpha}{r} - f_0\frac{U_\alpha}{R} + g(p_\alpha - p_\alpha^-) = \rho_0 W^2(u_\alpha - U_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, \\ [\varphi(S)] = -[F] + \frac{1}{2}\left(f\frac{u_\alpha}{r} + f_0\frac{U_\alpha}{R}\right)[u_\alpha] - g[p] + \frac{g}{2}(p_\alpha - p_\alpha^-)[u_\alpha]. \end{gathered} \tag{9.14}$$

Здесь

$$U_\alpha = u_\alpha^-, \quad u_\alpha = u_\alpha^+, \quad R^2 = U_1^2 + U_2^2, \quad f_0 = f(R),$$

$$p_\alpha = \partial p/\partial u_\alpha, \quad p_\alpha^- = p_\alpha(U_1, U_2), \quad [u_\alpha] = u_\alpha - u_\alpha^-.$$

Рассмотрим сначала случай $g = 0$.

Исключая из первых двух соотношений $W$, получим уравнение ударной адиабаты

$$\left(\frac{f}{r} - \frac{f_0}{R}\right)(U_1 u_2 - U_2 u_1) = 0. \tag{9.15}$$

Ударная адиабата на плоскости $u_1 u_2$ состоит из прямой $U_1 u_2 - U_2 u_1 = 0$ (которую будем называть *начальной прямой*), точки которой представляют состояния за *плоскополяризованными ударными волнами*, и окружностей $f/r - f_0/R = 0$. Одна из этих окружностей проходит через точку $(U_1, U_2)$, задающую начальное состояние (будем называть ее также *начальной окружностью*), и соответствует *вращательным разрывам*. Из системы уравнений (9.14) находятся скорости плоскополяризованных ударных волн и вращательных разрывов

$$\rho_0 W_r^2 = \frac{f(r) - f_0}{r - R}, \qquad \rho_0 W_\theta^2 = \frac{f_0}{R}. \tag{9.16}$$

Если на начальной прямой имеется точка, где эти скорости совпадают, т.е. где $f/r = f_0/R$, то через эту точку проходит еще окружность (с центром, как и первая, в начале координат), принадлежащая ударной адиабате. Как легко понять из рис. 9.1, для принятой функции $f(r)$ может быть не более двух окружностей, принадлежащих ударной адиабате. На рис. 9.4 изображена ударная адиабата с двумя окружностями, причем каждая из точек $A$ или $B$ (их расположение показано также на рис. 9.1) может быть принята за начальную.

Скорость скачка в любую точку второй, не содержащей начальное состояние, окружности равна $\rho_0 W_\theta^2 = f/r = f_0/R$ и, таким образом, совпадает с характеристическими скоростями вращательных волн по состоянию до и после разрыва, так же как это свойственно вращательным разрывам. Такие разрывы, в которых, аналогично вращательным, скорость скачка, модуль деформации сдвига $\varepsilon_\tau = r$ и изменение энтропии одинаковы для

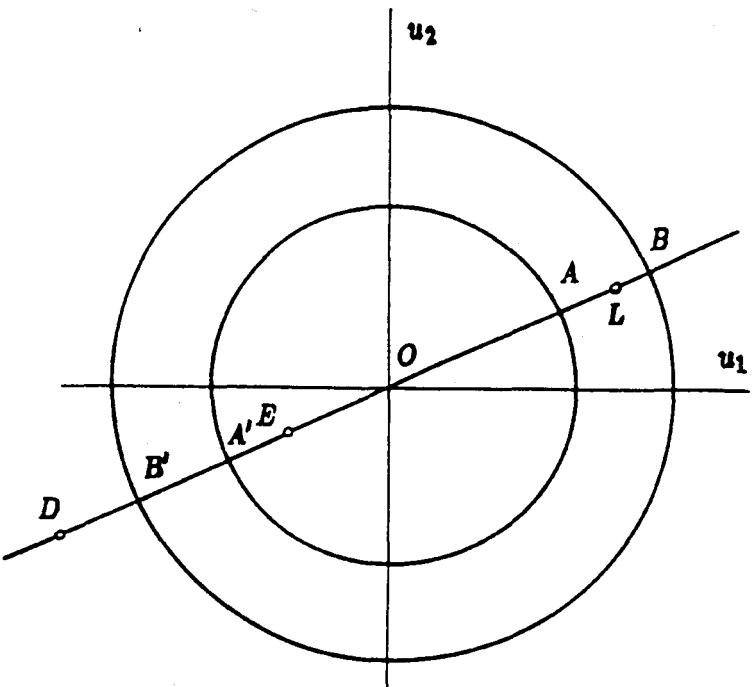



Рис. 9.4.

всех точек окружности, однако, $\varepsilon_\tau$ и $S$ отличны от их значений в начальном состоянии, в § 9.1 названы *поворотными*.

Рассмотрим сначала эволюционность разрывов, выделенных ударной адиабатой (9.15) . Напомним, что скорости малых возмущений определяются равенствами

$$\rho_0 c_r^2 = \frac{df}{dr}, \qquad \rho_0 c_\theta^2 = \rho W_\theta^2 = \frac{f}{r}. \tag{9.17}$$

Как и в § 9.2, введем понятия скоростей медленных ($c_1$) и быстрых ($c_2$) волн

$$c_1 = \min\{c_r, c_\theta\}, \qquad c_2 = \max\{c_r, c_\theta\}.$$

Общие условия эволюционности, остающиеся справедливыми и при $g \neq 0$, требуют, чтобы была выполнена одна из двух систем неравенств

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad c_1^- \leq W \leq c_2^-, \quad W \leq c_1^+; \\ &\text{(b)} \quad c_2^- \leq W, \quad c_1^+ \leq W \leq c_2^+. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Система неравенств a) определяет медленные ударные волны, а система b) – быстрые. Кроме этого, при $g = 0$ должны быть выполнены еще дополнительные условия эволюционности, сводящиеся к требованию существования двух типов уходящих от разрыва вращательных волн (см. §§ 9.1, 4.10). Эти условия требуют выполнения одной из двух систем неравенств (они отсутствуют при $g \neq 0$):

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \; W \leq c_\theta^-, \quad W \leq c_\theta^+; \\ &\text{(b)} \; c_\theta^- \leq W, \quad c_\theta^+ \leq W. \end{aligned} \tag{9.19}$$

В рассматриваемом случае эти неравенства сводятся к требованию отсутствия перемены знака $r$ на разрыве.

На рис. 9.5 жирными линиями обозначены отрезки графиков, соответствующих разрывам, удовлетворяющим только общим условиям эволюционности (9.18): *a*) при начальной точке $A$ и *b*) при начальной точке $B$. Концы эволюционных отрезков соответствуют точкам Жуге, где скорость разрыва совпадает с какой-нибудь из сторон разрыва с характеристической скоростью. Ветви ударной адиабаты в виде окружностей, проходящих через точки $A$ и $B$, находятся на границе эволюционности, поскольку для соответствующих разрывов $W = c_\theta^- = c_\theta^+$. Дополнительные условия (9.19) требуют исключить из множества эволюционных участков отрезок $A'E$ на рис. 9.5 *a* и отрезок $OE$ на рис. 9.5 *b*, соответствующие изменению знака $r$.

Для исследования изменения энтропии на разрыве используем второе уравнение (9.14). Из него сразу видно, что для вращательных разрывов ($r = R$) изменение энтропии отсутствует, $[S] = 0$. Для поворотных – скачок энтропии $[S]$ есть функция

от $r$, и значит он одинаков для всех точек второй окружности, в том числе для точки пересечения с начальной прямой, т.е. он такой же как и в плоскополяризованном скачке в упомянутую точку пересечения. Для плоскополяризованных разрывов при $g = 0$ имеем следующее соотношение

$$[\varphi(S)] = \frac{1}{2}(f + f_0)(r - R) - \int\limits_R^r f(r)\,dr. \tag{9.20}$$

Последний член в правой части равенства представляет собой $[F(r)]$ – скачок функции $F(r)$. Так как $d\varphi/dS = \partial\Phi/\partial S = \rho T > 0$, где $T$ – температура, то знак изменения функции $[\varphi]$ совпадает со знаком скачка энтропии [S] на разрыве. Поэтому условие неубывания энтропии на разрыве требует положительности площади, заключенной между отрезком секущей, идущей из начальной точки в конечную, и графиком функции $f(r)$ на том же отрезке изменения $r$ (*правило площадей*) (рис. 9.1). Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяют все участки, где одновременно выполнены условия (9.18) и (9.19).

Если выполнены только основные неравенства эволюционности (9.18), то энтропийное условие в случае $a$) выполнено на всем отрезке $A'E$ (рис.9.5 $a$), а в случае $b$) это условие выполняется для всего отрезка $OE$ на рис. 9.5 $b$, пока начальная точка $B$ достаточно близка к $r = r_*$, а по мере удаления точки $B$ энтропийное условие будет сначала выполняться на части этого отрезка, примыкающей к точке $E$, затем эта часть будет сокращаться и потом совсем исчезнет.

Обратимся теперь к учету анизотропии среды, т.е. считаем далее $g \neq 0$. Для случая малых значений $g$ из соотношений на разрыве (9.14) нетрудно получить уравнение ударной адиабаты и выражение для скорости разрыва $W$ вдоль нее

$$\begin{gathered}\left(\frac{f}{r} - \frac{f_0}{R}\right)(U_1 u_2 - U_2 u_1) = gH, \\ H = (p_2 - p_2^-)(u_1 - U_1) - (p_1 - p_1^-)(u_2 - U_2),\end{gathered} \tag{9.21}$$

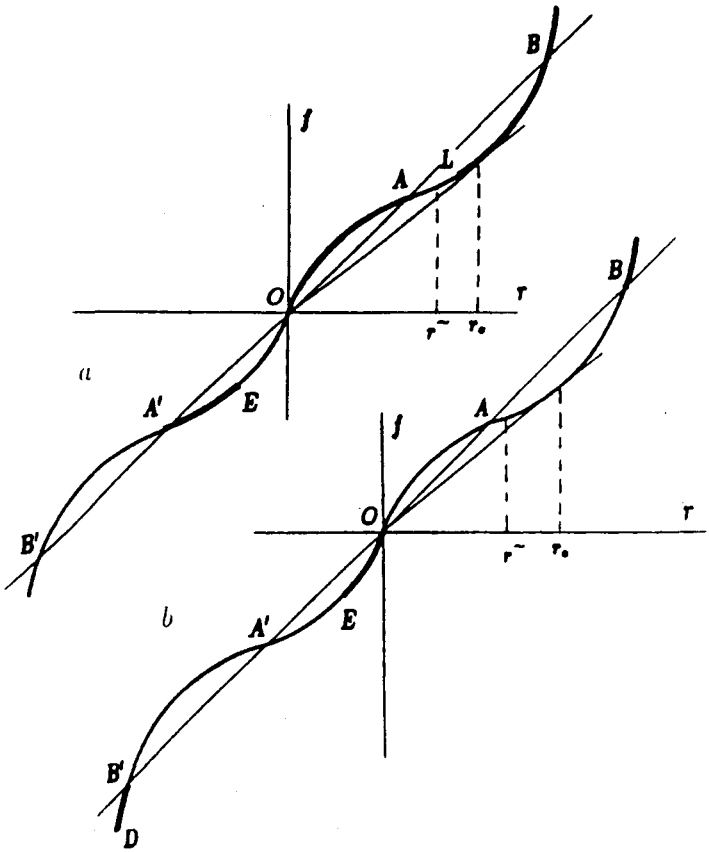



Рис. 9.5.

$$\rho_0 W^2 = \frac{f}{r} + g\frac{(p_2 - p_2^-)U_1 - (p_1 - p_1^-)U_2}{U_1 u_2 - U_2 u_1}. \qquad (9.22)$$

Учитывая малость $g$, значения функций стоящих при $g$ множителями, можно вычислять в точках ударной адиабаты, соответствующих $g = 0$. Линеаризируя соотношение (9.21). получим для точек, близких к прямолинейной части ударной адиабаты, и для точек, близких к окружностям, соответственно следующие

равенства

$$U_1u_2 - U_2u_1 = \frac{gH}{f/r - f_0/R}, \quad \Delta r = \frac{gHr}{(U_2u_1 - U_1u_2)(f/r - f')}. \quad (9.23)$$

Левые части этих равенств характеризуют отклонения точек ударной адиабаты (9.21) от ударной адиабаты, соответствующей $g = 0$, т.е. от начальной прямой $U_1u_2 - U_2u_1 = 0$ и от окружностей $r = r_A$ и $r = r_B$. Правые части в этих равенствах вычисляются на ударной адиабате с $g = 0$. Если $H \neq 0$, то, как видно из уравнения (9.21), при приближении к точке пересечения окружности и прямой отклонения стремятся к бесконечности, а сама ударная адиабата в окрестности этой точки ведет себя *подобно гиперболе.* Это заключение не относится к окрестности начальной точки, где $H = 0$ и где всегда имеется точка самопересечения ветвей ударной адиабаты.

Часть ударной адиабаты, близкая к окружности $r = R$, проходящей через начальную точку, представляет *квазивращательные разрывы.* Для них характерны малые величины скачков модуля деформаций $r - R \sim g$ и энтропии $S - S^- \sim g$. Ветвь ударной адиабаты, которая близка ко второй окружности $r = \text{const} \neq R$, соответствует скачкам с изменением $r$ и $S$ на конечную величину. Такие разрывы близки к разрывам, названным выше поворотными. Будем называть их *квазиповоротными.*

При рассмотрении условий эволюционности при $g \neq 0$ нужно прежде всего отметить, что в этом случае они сводятся только к неравенствам (9.18), а условия (9.19) выставляться не должны. В силу малости $g$, в общем случае положение концов эволюционных отрезков ударной адиабаты, а также отрезков, удовлетворяющих условию неубывания энтропии $[S] \geq 0$, мало изменится по сравнению со случаем $g = 0$ на той части ударной адиабаты, которая остается близкой к начальной прямой.

Все выше сказанное не относится к вращательным разрывам, соответствующим окружности, проходящей через начальную точку, и поворотным разрывам, соответствующим второй окружности. И те и другие разрывы, как уже было сказано ранее, соответствуют границе эволюционности, а вращательные разрывы также границе энтропийного условия, на них $[S] = 0$.

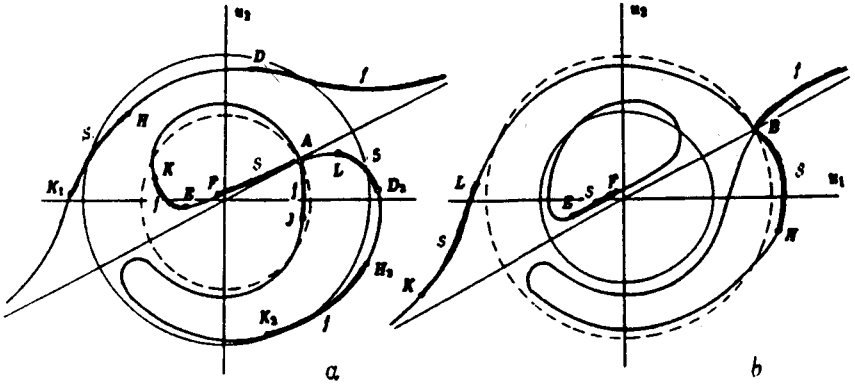



Рис. 9.6.

Поэтому влияние даже малой анизотропии скажется на выполнении этих условий для квазивращательных и квазиповоротных разрывов нетривиальным образом. В этом параграфе ниже будет рассмотрено влияние анизотропии на эти разрывы в случае частного вида функции $p(u_1, u_2)$, задающей анизотропию. В следующем параграфе будут даны общие формулы при малой анизотропии произвольного вида и для сжимаемой среды. Это позволит судить об эволюционности квазивращательных и квазиповоротных разрывов и об изменении в них энтропии среды в самом общем случае.

Примем для функции $p$ выражение $p = \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2)$. В качестве оправдания такого выбора можно сказать, что такой вид имеет функция $p$ при малой анизотропии в области малых деформаций (Глава 2). Для этого же вида функции $p$ в § 9.3 подробно рассмотрены волны Римана. Уравнение ударной адиабаты (9.21) примет вид

$$\left(\frac{f}{r} - \frac{f_0}{R}\right)(U_1 u_2 - U_2 u_1) = g(u_1 - U_1)(u_2 - U_2). \qquad (9.24)$$

Эта кривая изображена на рис. 9.6 $a$, когда начальное состояние представлено точкой $A$, при этом $R = r_A < r_*$, и на рис. 9.6 $b$,

когда $R = r_B > r_*$. Квазиплоскополяризованным волнам соответствуют участки ударной адиабаты, близкие к начальной прямой $U_1u_2 - U_2u_1 = 0$, которая на $\pm\infty$ служит им асимптотой. Отклонение ударной адиабаты от окружностей $r = r_A$ и $r = r_B$ определяется величиной $\delta r$ согласно формуле (9.23), где для выбранной функции $p(u_1, u_2)$ следует положить $H = (u_1 - U_1)(u_2 - U_2)$. Пересечение ударной адиабаты с указанными окружностями и перемена знака $\delta r$ происходит в точках с координатами $u_1 = U_1$ и $u_2 = U_2$. При этом из-за противоположных знаков у функции $d^0 = \frac{1}{2}(f/r - f')$ на окружностях $r = r_A$ и $r = r_B$ и отклонение $\delta r$ на этих окружностях в соответствующих точках имеет противоположное направление.

При вычислении скачка энтропии коэффициент при $g$ в формуле (9.14), выражающей $[\varphi(S)]$, для выбранного вида функции $p(u_\alpha)$ оказался равным нулю, так что изменение энтропии в такой среде по-прежнему находится по правилу площадей (9.20). При $R = r_A < r_*$ в начальной точке (рис. 9.5 *a*) выполнено неравенство $d^0(R) > 0$ и скачок энтропии неотрицателен для частей ударной адиабаты, лежащих внутри окружности $r = R$ на плоскости $u_1u_2$ (рис. 9.6 *a*). К этому добавляется вся эволюционная часть ударной адиабаты, в том числе ветвь близкая к окружности $r = r_B$, и участок, уходящий в $+\infty$ вдоль асимптоты.

Для начального состояния, заданного точкой $B$ (рис. 9.5 *b*), когда $R = r_B > r_*$, имеет место неравенство $d^0(R) < 0$ и условию $[S] \geq 0$ удовлетворяют участки ударной адиабаты на плоскости $u_1u_2$ (рис. 9.6 *b*) вне начальной окружности $r = R = r_B$, т.е. $|u_2| \geq U_2$. К ним добавляются ветви, уходящие в $\pm\infty$ вдоль асимптоты, и некоторый участок в окрестности начала координат, примыкающий к точке $E$ (рис. 9.5 *b*), существование которого оговорено выше и зависит от вида функции $f(r)$ и от того насколько далеко от начала координат расположена начальная точка $B$.

Для проверки условий эволюционности (9.18) используем выражения (9.5) для характеристических скоростей $c_1$ и $c_2$, которые запишем в полярных координатах $r$ и $\theta$ плоскости $u_1u_2$

$$\rho_0 c_{1,2}^2 = f' + d \mp \sqrt{d^2 + 2gd\cos 2\theta + g^2}.$$

В силу малости $g$ получим для скоростей $c_\theta$ квазивращательных малых возмущений выражения в виде

$$\rho_0 c_\theta^2 = \frac{f}{r} + g\cos\theta, \qquad \rho_0 (c_\theta^-)^2 = \frac{f_0}{R} + g\cos\theta_0,$$

где угол $\theta_0$ соответствует состоянию перед скачком. Скорость $W$ разрыва того же типа вычисляется по формуле (9.22)

$$\rho_0 W^2 = \frac{f}{r} + g\frac{U_1 u_2 + U_2 u_1 - 2U_1 U_2}{U_1 u_2 - U_2 u_1},$$

или в полярных координатах

$$\begin{aligned} \rho_0 W^2 &= \frac{f}{r} + g\frac{\sin(\theta+\theta_0) - \dfrac{R}{r}\sin 2\theta_0}{\sin(\theta-\theta_0)} \\ &= \frac{f_0}{R} - g\frac{\sin(\theta+\theta_0) - \dfrac{r}{R}\sin 2\theta}{\sin(\theta-\theta_0)}. \end{aligned}$$

Условия эволюционности (9.18) для областей ударной адиабаты, близких к окружностям, требуют

$$\begin{aligned} W^2 - c_\theta^2 &= \frac{g}{\rho_0}\frac{3\sin(\theta+\theta_0) - \sin(3\theta-\theta_0) - 2\dfrac{R}{r}\sin 2\theta_0}{2\sin(\theta-\theta_0)} \le 0, \\ W^2 - c_\theta^{-2} &= \frac{g}{\rho_0}\frac{\dfrac{r}{R}\sin 2\theta - \sin(\theta+\theta_0) - \cos 2\theta_0 \sin(\theta-\theta_0)}{\sin(\theta-\theta_0)} \ge 0. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Коэффициенты при малом $g$ в этих формулах достаточно вычислять в точках соответствующих окружностей, т.е. следует положить $r = R$ для квазивращательных волн, а для квазиповоротных ветвей ударной адиабаты положить в формулах $r = r_B > R$ для случая, изображенного на рис. 9.6 *a*, и $r = r_A < R$ для случая, изображенного на рис. 9.6 *b*. При $d^0 > 0$ характеристическая скорость $c_\theta$ принадлежит быстрым волнам, т.е. $c_\theta = c_2$, а при $d^0 < 0$ скорость $c_\theta$ соответствует медленным

волнам, $c_\theta = c_1$. Исследование неравенств (9.25) дает положение эволюционных участков ударной адиабаты, изображенных на рис. 9.6 жирными линиями. Точки Жуге, ограничивающие эти отрезки обозначены буквами $F$, $K$, $K_1$, $K_2$, $D_1$, $D_2$ ($W = c_2^-$); $L$ ($W = c_1^-$); $E$, $H$, $H_2$ ($W = c_1^+$); $J$ ($W = c_2^+$). Буквами $f$ и $s$ помечены отрезки, принадлежащие состояниям за быстрыми и медленными волнами соответственно.

В заключение следует сказать, что аналогичное исследование нетрудно провести и для функций $f(r)$ другого вида. Наличие дополнительных точек перегиба на графике $f(r)$ добавит новые части ударной адиабаты, близкие к окружностям.

Предположенная в формуле (9.13) аддитивность зависимости упругого потенциала от энтропии фактически не влияет на полученные выше результаты. Предположение (9.13) означает, что изменение энтропии не влияет на напряжения в среде. Если рассматривается квазивращательная или квазиповоротная волна, в которой $r \approx \text{const}$, то при достаточно малом $g$ это предположение можно считать справедливым вследствие малости изменения $[S]$ на каждой из окружностей.

## 9.6. Ударные волны в сжимаемой среде

Как уже говорилось, при малой волновой анизотропии, т.е. при малой величине параметра $g \neq 0$, плоская часть ударной адиабаты, а также величины $W$ и $[S]$, соответствующие этим разрывам, получают малые изменения порядка $g$, причем на величины порядка $g$ могут сдвинуться также концы отрезков эволюционности ("точки Жуге") и отрезков, где $[S] \geq 0$.

Наибольший интерес представляет влияние малого параметра $g$ на те части ударной адиабаты, которые при $g = 0$ переходят в окружности, проходящие или не проходящие через начальную точку, так как малое изменение, связанное с $g$, может повлиять на эволюционность этих разрывов, а для окружности, проходящей через начальную точку, также и на знак $[S]$.

Для малых $g$ произведем линеаризацию по $g$ уравнений (9.3) с учетом выражения (9.1) для функции $\Phi$ , не возмущая при этом

начальное состояние и считая возмущения всех величин $\delta u_k$ ($k = 1, 2, 3$), $\delta S$ и $\delta W^2$ порядка $g$. Оси $u_1$ и $u_2$ повернем вокруг оси $u_3$ и введем тем самым новые переменные $u_1'$, $u_2'$, $u_3' = u_3$ таким образом, чтобы $u'_2 = 0$ (при этом $u'^-_2 \neq 0$ в общем случае). Обозначим $F_S = \dfrac{\partial F}{\partial S}$, $F_{iS} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u_i' \partial S}$, $F_{ij} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u_i' \partial u_j'}$. Тогда, с учетом равенств $F_{12} = 0$, $F_{23} = 0$, $F_{2S} = 0$, $F_S = \rho T$, $W^2 = F_{22} = F_1/r$ и считая, для определенности $\delta u_2' = 0$, получим

$$
\begin{aligned}
(F_{11} - \rho_0 W^2)\delta u_1' + F_{13}\delta u_3' + F_{1S}\delta S - \rho_0[u_1']\delta W^2 &= -g[p_1'],\\
- \rho_0[u_2']\delta W^2 &= -g[p_2'],\\
F_{13}\delta u_1' + (F_{33} - \rho_0 W^2)\delta u_3' + F_{3S}\delta S - \rho_0[u_3']\delta W^2 &= -g[p_3'], \qquad (9.26)\\
\frac{1}{2}\left([F_1] - F_{1k}[u_k']\right)\delta u_1' + \frac{1}{2}\left([F_3] - F_{3k}[u_k']\right)\delta u_3'&\\
+ \left(\rho_0 T - \frac{1}{2}F_{Sk}[u_k']\right)\delta S &= g\left(-[p] + \frac{1}{2}(p_k' + p'^-_k)[u_k']\right).
\end{aligned}
$$

Здесь обозначено $p_i' = \partial p/\partial u_i'$. Это система уравнений для возмущений $\delta u_i'$, $\delta S$ и $\delta W^2$. Коэффициенты и правые части уравнений считаются известными из нулевого приближения. Система уравнений (9.26) позволяет выписать явно решение для $\delta u_1'$, $\delta u_3'$, $\delta S$ и $\delta W^2$. Особенно простой вид имеет выражение для $\delta W^2$, следующее из второго уравнения

$$\rho_0 \delta W^2 = g\frac{[p_2']}{[u_2']}. \qquad (9.27)$$

Величины $\delta u_1'$ и $\delta u_3'$ характеризуют в пространстве $u_1'$, $u_2'$, $u_3'$ искажение окружности, происходящее от влияния анизотропии.

Не пытаясь дать полное исследование этого искажения, отметим, что, если при$[u_2'] \to 0$ (т.е. при приближении скачка к плоскополяризованному) величина $[p_2']$ не стремится к нулю, то, согласно второму уравнению системы (9.26), $\delta W^2 \to \infty$, т.е. по порядку величины становятся больше $g$. Последнее утверждение неверно в окрестности начальной точки $A$, где $[p_2']/[u_2']$ имеет конечный предел; для других точек пересечения окружностей с

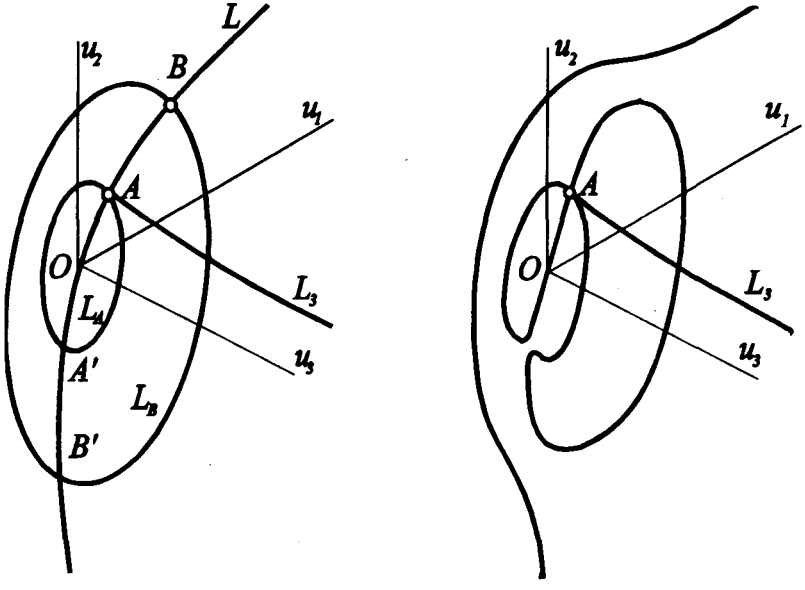



Рис. 9.7.

плоскополяризованной частью ударной адиабаты это утверждение является случаем общего положения. Таким образом, во всех уравнениях системы (9.26), кроме второго, при $\delta W^2 \to \infty$ можно пренебречь правыми частями, а влияние анизотропии скажется в этих уравнениях только через $\delta W^2$, определенное выражением (9.27). Если принять такое приближение, то первое, третье и четвертое уравнения системы (9.26) будут давать изменение положения точки на ударной адиабате такое же, какое было бы при $g = 0$ на плоскополяризованной части ударной адиабаты при том же значении $\delta W^2$.

Если при $g = 0$ точка самопересечения ударной адиабаты не соответствовала экстремуму $W^2$, то при $g \neq 0$ приближение по пространственной части ударной адиабаты точки, изображающей состояние за скачком, к плоскости начального состояния сопровождается движением вдоль плоскополяризованной части

ударной адиабаты (соответствующей $g = 0$). Направление этого движения определяется знаком $\delta W^2$ и различно при приближении к этой плоскости с разных сторон, если $[p_2'] \neq 0$. Пересечения окружностей и плоскополяризованной части ударной адиабаты, имеющие место при $g = 0$, размыкаются при $g \neq 0$, и при малых $g$ в окрестностях этих точек ударная адиабата напоминает гиперболу, расположение ветвей которой определяется знаком $[p_2']$ и направлением изменения $W^2$ вдоль плоскополяризованной части ударной адиабаты при $g = 0$ (рис. 9.7).

Напомним, что равенства (9.26) и (9.27) написаны в системе координат $u_1'$, $u_2'$, $u_3'$, в которой $u_2' = 0$. В другой системе координат $u_1$, $u_2$, $u_3$, отличающейся от использованной выше поворотом вокруг оси $u_3$, компоненты векторов с индексами 1 и 2 будут испытывать ортогональное преобразование, связанное с этим поворотом.

Если принять, что в системе координат $u_1$, $u_2$, $u_3$ выполнено равенство $u_2^- = 0$, то уравнение (9.27) примет вид

$$\rho_0\,\delta W^2 = g\frac{[p_1]\cos\theta + [p_2]\sin\theta}{R\sin\theta},$$
$$R^2 = (u_1^-)^2 + (u_2^-)^2, \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}. \tag{9.28}$$

Если домножить первое уравнение системы (9.26) на $\frac{1}{2}[u_1']$, третье на $\frac{1}{2}[u_3']$ и сложить с четвертым, то получим

$$\rho_0 T\delta S = g\left(-[p] + p'^-_1[u_1'] + p'^-_3[u_3']\right) + \frac{1}{2}\rho_0\delta W^2([u_1']^2 + [u_3']^2). \tag{9.29}$$

Для той части ударной адиабаты, которая при $g = 0$ обращается в окружность, не проходящую через начальную точку $A$, вычисляемая с помощью этого равенства величина $\delta S$, дает лишь малую поправку к изменению энтропии $[S]$ в ударной волне и поэтому не может повлиять на знак этого изменения.

Для квазивращательной волны (в которой в пределах принятой точности можно в равенстве (9.29) положить $[u_3'] = [u_3] = 0$) с поворотом вектора $\{u_1, u_2\}$ на угол $\theta$ вокруг оси $u_3$ против

часовой стрелки, получим

$$\begin{aligned}\rho_0 T\delta S = g\left(-[p] + (p_1^- \cos\theta + p_2^- \sin\theta)(1-\cos\theta)R\right) \\ + \frac{1}{2}\rho_0 \delta W^2 R^2 (1-\cos\theta)^2.\end{aligned} \tag{9.30}$$

Это равенство записано в той же самой системе координат, связанной с начальным состоянием, что и равенство (9.28). Требование $\delta S \geq 0$ выделяет физически допустимые разрывы. При заданной функции $p(u_i, S)$, которую в равенстве (9.30) следует брать на окружности $L_A$, проходящей через начальную точку, т.е. при $S = S^-$, это неравенство легко может быть исследовано и отрезки ударной адиабаты, где $\delta S \geq 0$, найдены.

Для получения дополнительных сведений о значениях энтропии в точках ударной адиабаты полезно также общее соотношение (2.21), не связанное с малостью $g$,

$$\frac{T}{W}\frac{dS}{dW} = \sum_{i=1}^{3}[u_i]^2. \tag{9.31}$$

Здесь производная берется на ударной адиабате по скорости ударной волны $W$. При малых $g$ для части ударной адиабаты, переходящей при $g \to 0$ в окружность, множитель $T/W$ можно считать постоянным.

При формулировании условий эволюционности разрыва при $g \neq 0$ будем считать, что и в начальном и в конечном состоянии характеристические скорости различаются между собой на величины, не обращающиеся в нуль при $g = 0$. Тогда при малых $g$ условия эволюционности для части ударной адиабаты, близкой к окружности, можно сформулировать в виде условий, накладываемых на знаки величины $\delta W^2 - \delta c_\theta^2$ по обе стороны от разрыва.

Под $c_\theta$ понимается характеристическая скорость волны, которая при $g = 0$ становится вращательной. Считаем, как и прежде, что перед и за скачком характеристические скорости пронумерованы в порядке возрастания их величины, так что $c_\theta$ может оказаться $c_1$, $c_2$ или $c_3$ в зависимости от соотношений между характеристическими скоростями. Тогда условия эволюционности записываются в виде одной из трех систем неравенств

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} \qquad (\delta W^2 - \delta c_\theta^2)^- \geq 0, \qquad (\delta W^2 - \delta c_\theta^2)^+ \leq 0, \\
&\text{(II)} \qquad (\delta W^2 - \delta c_\theta^2)^-(\delta W^2 - \delta c_\theta^2)^+ \geq 0, \\
&\text{(III)} \qquad (\delta W^2 - \delta c_\theta^2)^- \leq 0, \qquad (\delta W^2 - \delta c_\theta^2)^+ \leq 0.
\end{aligned}
\tag{9.32}
$$

Система двух неравенств (I) дает условия эволюционности, если $c_\theta$ имеет один и тот же номер ("1", "2" или "3") по разные стороны от разрыва; неравенство (II) относится к случаю, когда номер $c_\theta$ за разрывом на единицу меньше ее номера перед разрывом; и наконец, система (III) относится к случаю, когда $c_\theta^- = c_3^-$, $c_\theta^+ = c_1^+$. Если номер $c_\theta$ за разрывом больше соответствующего номера перед ней, то рассматриваемая ударная волна неэволюционна. Поскольку при $g = 0$ перед и за разрывом имеет место равенство $W^2 = c_\theta^2$, то знаки $\delta$ в выражениях, стоящих в левых частях неравенств (9.32), можно не писать, что и будет дальше делаться.

Рассмотрим бесконечно малый квазивращательный разрыв в начальной точке $A$. Согласно равенству (9.27), получим

$$\rho_0(\delta c_\theta^2)^- = g(dp_2/du_2)_A.$$

Здесь производная взята в начальной точке вдоль квазивращательной ветви ударной адиабаты. Это выражение, а также равенства (9.27) или (9.28) позволяют легко определить знак величины $(W^2 - c_\theta^2)^-$ в каждой точке рассматриваемой части ударной адиабаты. Для завершения рассмотрения неравенств (9.32) отметим, что величина $(W^2 - c_\theta^2)^+$ обращается в нуль и меняет знак на ударной адиабате в точках, в которых $W$ достигает экстремума (точки Жуге, см. § 1.8). На квазивращательной части, где $W = \delta W + \text{const}$, знак величины $(W - c_\theta)^+$ определяется знаком производной от $\delta W$, взятой вдоль ударной адиабаты. Чтобы узнать, совпадают ли эти знаки или противоположны, достаточно их определить в какой-нибудь точке ударной адиабаты, например, вблизи начальной плоскости.

Для определения знака разности $W - c_\theta$ можно также воспользоваться следующим соображением, основанным на равенстве (9.31). Вблизи максимумов и минимумов скорости существуют пары близко расположенных точек, соответствующих одному и тому же значению $W$ (близкому к экстремальному). Эти точки могут представлять начальное и конечное состояния для разрыва со скачком малой амплитуды, соответствующего скорости $W$, причем из двух этих точек начальное состояние соответствует меньшему значению энтропии $S$, а конечное – большему значению $S$. Используя результаты § 1.7, можно утверждать, что, если в малом эволюционном разрыве меняется знак $W - c_\theta$, то в начальном состоянии $W - c_\theta > 0$, а в конечном $W - c_\theta < 0$. Воспользовавшись видом правой части равенства (9.31), можно заключить, что знак $\delta W - \delta c_\theta$ меняется при переходе через минимум $W$ (совпадающий с минимумом $S$) с минуса на плюс, если двигаться по ударной адиабате в сторону увеличения $\sum\limits_1^3 [u_i]^2$. В окрестности максимума $W$ (и $S$) происходит противоположное изменение знака разности $W - c_\theta$.

Таким образом, легко могут быть определены знаки величин, входящих в соотношения (9.32), что позволяет судить об эволюционности изучаемых разрывов.

## Резюме

Проведено исследование волн конечной амплитуды в средах с малой анизотропией. В § 9.1 приводятся некоторые сведения о волнах конечной амплитуды при условии волновой изотропии. Характерной особенностью волн при волновой изотропии является существование неискажающихся со временем вращательных волн Римана и соответствующих им вращательных разрывов. При учете малой волновой анизотропии, характеризующейся параметром $g \ll 1$, по которому проводится линеаризация уравнений. изучены волны Римана сначала в несжимаемой среде (§§ 9.2, 9.3) и затем в сжимаемой (§ 9.4). Наибольшее влияние малый параметр оказывает на волны, которые при $g = 0$ являют-

ся вращательными. Исследовано изменение деформации среды в волнах Римана и условия опрокидывания этих волн.

При тех же условиях изучены ударные волны в несжимаемой (§ 9.5) и сжимаемой (§ 9.6) среде. Так же как при изучении волн Римана, наибольшее внимание уделено ударным волнам, которым при $g = 0$ соответствуют вращательные разрывы. Для таких ударных волн получены в явном виде формулы для ударной адиабаты и изменения энтропии. Исследована эволюционность этих ударных волн.

# Литература


**Ахиезер, А.И., Любарский, Г.Я., Половин, Р.В.**

[1958] Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. — *ЖЕТФ*, Т. **35**, № 3, С. 731–737.

**Бармин А.А., Куликовский А.Г.**

[1971] Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле. — *Итоги науки. Гидромеханика*, Т. **5**, М.:, С. 5–31.

[1975] Задача о поршне при наличии волн рекомбинации в магнитном поле. — *Известия АН СССР, МЖГ*, Т. **10**, № 4, С. 136-142.

**Бармин А.А., Пушкарь Е.А.**

[1991] Пересечение ударных волн в магнитной гидродинамике. — *Известия АН СССР, МЖГ*, Т. **26**, № 3, С. 132–143.

**Бармин А.А. и Успенский В.С.**

[1986] Развитие пульсационных режимов в одномерных нестационарных МГД-течениях с выключением электропроводности. — *Известия АН СССР, МЖГ*, Т. **26**, № 4, С. 115–122.

**Бленд Д.Р.**

[1972] *Нелинейная динамическая теория упругости.* — М:, Мир, 183 с.

**Буренин А.А., Нгуен Кхи Тхань, Чернышов А.Д.**

[1973] О распространении ударных волн в упругой среде при плоской конечной деформации. — *ПММ*, Т. **37**, вып. 5, С. 854–858.

**Буренин А.А., Чернышов А.Д.**

[1978] Ударные волны в изотропном упругом пространстве. — *ПММ*, Т. **42**, вып. 4, С. 711–717.

**Буренин А.А., Лапыгин В.В., Чернышов А.Д.**

[1978] К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости. — *Материалы II-го Симпозиума по нелинейным волнам деформации.* Таллинн.

**Весоловский З.**

[1981] *Динамические задачи нелинейной теории упругости.* — Киев:, Наукова думка, 216 с.

**Галин Г.Я.**

[1959] К теории ударных волн. — *ДАН СССР*, Т. **127**, № 1, С. 55–58.

**Гвоздовская Н.И., Куликовский А.Г.**

[1997] Об электромагнитных ударных волнах и их структуре в анизотропных магнетиках. — *ПММ*, Т. **61**, вып. 1, С. 139–148.

**Годунов С.К.**

[1960] О понятии обобщенного решения. — *ДАН СССР*, Т. **134**, № 6, С. 1279–1281.

[1961 а] Интересный класс квазилинейных систем. — *ДАН СССР*, Т. **139**, № 3, С. 521–523.

[1961 б] О неединственности "размазывания" разрывов в решениях квазилинейных систем. — *ДАН СССР*, Т. **136**, № 2, С. 272–273.

[1962] Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике. — *УМН*, Т. **17**, № 3(105), С. 147–158.

[1978] *Элементы механики сплошной среды.* — М.:, Наука, 303 с.

**Грин А. и Адкинс Дж.**

[1965] *Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.* — М.:, Мир, 465 с.

**Гузь А.Н.**

[1986] *Упругие волны в телах с начальными напряжениями.* — т. **1,2**, Киев:, Наукова думка, т.1 372 с., т.2 535 с.

**Де Гроот С.Р. и Мазур П.**

[1964] *Неравновесная термодинамика.* — М.:, Мир, 456 с.

**Жермен П.**

[1983] *Курс механики сплошных сред.* — М.:, Высшая школа, 400 с.

**Зельдович Я.Б. и др.**

[1980] *Математическая теория горения и взрыва.* — М.:, Наука.

**Калашников А.С.**

[1959] Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром. — *ДАН СССР*, Т. **127**, № 1, С. 27–30.

**Карпман В.И.**

[1973] *Нелинейные волны в диспергирующих средах.* – М:, Наука, 175с.

**Куликовский А.Г.**

[1962] О структуре ударных волн. — *ПММ*, Т. **26**, вып. 4, С. 631–643.

[1968] О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации. — *ПММ*, Т. **32**, вып. 6, С. 1125–1131.

[1979] О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге. — *Известия АН СССР, МЖГ*, Т. **14**, № 2, С. 317–319.

[1984] О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов. — *ДАН СССР*, Т. **275**, № 6, С. 1349–1352.

[1986] Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропном упругом теле. — *ПММ*, Т. **50**, вып. 4, С. 597–604.

[1988] Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура. — *Труды МИАН СССР*, Т. **182**, С. 261–291.

[1989] Особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде при малой анизотропии. — *Труды МИАН СССР*, Т. **186**, С. 132–139.

[1995 a] О нелинейных волнах малой амплитуды в анизотропном упругом теле. — *Труды МИРАН*, Т. **211**, С. 268–303.

[1995 б] Влияние малой анизотропии на свойства ударных волн в сжимаемой упругой среде. — *ПММ*, Т. **59**, вып. 5, С. 793–798.

**Куликовский А.Г. и Любимов Г.А.**

[1962] *Магнитная гидродинамика.* — М.:, Физматгиз, 246 с.

**Куликовский А.Г. и Свешникова Е.И.**

[1980] Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах. — *ПММ*, Т. **44**, вып. 3, С. 523–534.

[1982] Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде. — *ПММ*, Т. **46**, вып. 5, С. 831–840.

[1984] О некоторых свойствах ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн. — *ПММ*, Т. **48**, вып. 5, С. 793–798.

[1985 а] Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства. — *ПММ*, Т. **49**, вып. 2, С. 284–291.

[1985 б] Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства. — *Вопросы нелинейной механики сплошной среды.* Таллинн:, Валгус, С. 133–145.

[1986] Нелинейные плоские волны в изотропном упругом теле при наличии начальных деформаций. — *Математические методы механики деформируемого твердого тела.* М.:, Наука, С. 85–91.

[1987] О структуре квазипоперечных упругих ударных волн. — *ПММ*, Т. **51**, вып. 6, С. 926–932.

[1988 а] Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах. — *ПММ*, Т. **52**, вып. 1, С. 410–415.

[1988 б] О распаде произвольного начального разрыва в упругой среде. — *ПММ*, Т. **52**, вып. 6, С. 1007–1012.

[1993] Волны Римана в упругой среде при малой анизотропии. — *ПММ*, Т. **57**, вып. 3, С. 90–101.

[1996] О существовании и единственности автомодельных решений при наличии точек Жуге на ударной адиабате. — *ПММ*, Т. **60**, вып. 1, С. 66–71.

**Курант Р.**

[1964] *Уравнения в частных производных.* — М.:, Мир, 830 с.

**Ландау Л.В. и Лмфшиц Е.М.**

[1986] *Теоретическая физика, т.6. Гидродинамика.* — М:, Наука, 730с.

[1992] *Теоретическая физика, т.8. Электродинамика сплошных сред.* — М.:, Наука, 661 с.

**Ленский Э.В.**

[1981] Об ударной адиабате плоского ударно-сдвигового разрыва. — *Вестник МГУ, серия Математика, Механика*, Т. **36**, № 1, С. 94–96.

[1982] Распространение плоских волн двухкомпонентного деформированного состояния в нелинейно-упругой сжимаемой среде. — *Вестник МГУ, серия Математика, Механика*, Т. **37**, № 6, С. 101–106.

[1983 а] Плоские волны сжатия-сдвига в нелинейноупругой несжимаемой среде. — *Известия АН СССР, МТТ*, Т. **18**, № 6, С. 90–98.

[1983 б] Простые волны в нелинейно упругой среде. — *Вестник МГУ, серия Математика, Механика*, Т. **38**, № 3, С. 80–86.

**Лохин В.В., Седов Л.И.**

[1963] Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. — *ПММ*, Т. **27**, вып. 3, С. 597–629.

**Любарский Г.Я.**

[1961] О структуре ударных волн. — *ПММ*, Т. **25**, вып. 6, С. 1041–1049.

[1962] О существовании ударных волн малой интенсивности. — *ПММ*, Т. **26**, вып. 3, С.511–519.

**Льюис Б. и Эльбе Г.**

[1968] *Горение, пламя и взрывы в газах.* — М.:, Мир, 592 с.

**Можен Ж.**

[1991] *Механика электромагнитных сплошных сред.* – М:, Мир, 560с.

**Новацкий В.**

[1986] *Электромагнитные явления в твердых телах.* — М:, Мир, 159с.

**Олейник О.А.**

[1959] О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. — *УМН*, Т. **14**, № 2(86), С. 159–164.

**Партон В.З., Кудрявцев Б.А.**

[1988] *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.* — М.:, Наука, 472 с.

**Петрашень Г.И.**

[1980] *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* — Л.:, Наука, 280 с.

**Пушкарь Е.А.**

[1983] Обтекание непроводящего клина в магнитной гидродинамике. — *Известия АН СССР, МЖГ*, Т. **18**, № 2, С. 102–112.

**Рождественский Б.Л. и Яненко Н.Н.**

[1978] *Системы квазилинейных уравнений.* — М.:, Наука, 687 с.

**Свешникова Е.И.**

[1982] Простые волны в нелинейно упругой среде. — *ПММ*, Т. **46**, вып. 4, С. 642–646.

[1983] Квазипоперечные ударные волны в упругой среде при специальных видах начальной деформации. — *ПММ*, Т. **47**, вып. 4, С. 673–678.

[1994] Ударные волны в слабоанизотропном упругом несжимаемом материале. — *ПММ*, Т. **58**, вып. 3, С. 144–153.

**Седов Л.И.**

[1994] *Механика сплошной среды.* — т.т. **1, 2**, М.:, Наука, т.1 526 с., т.2 560 с.

**Сибгатуллин Н.Р.**

[1984] *Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях.* — М.:, Наука, 351 с.

**Чугайнова А.П.**

[1988] О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве. — *ПММ*, Т. **52**, вып. 4, С. 692–697.

[1990] О выходе нелинейных волн на автомодельный режим в задаче о действии внезапного изменения нагрузки на границе упругого полупространства. — *Известия АН СССР, МТТ*, Т. **25**, № 3, С. 187–189.

[1991] Стационарные квазипоперечные простые и ударные волны в слабоанизотропной упругой среде. — *ПММ*, Т. **55**, вып. 3, С. 486–492.

[1993 а] О взаимодействии нелинейных волн в слабоанизотропной вязкоупругой среде. — *ПММ*, Т. **57**, вып. 2, С. 149–156.

[1993 б] Автомодельная задача о действии бегущей нагрузки на границу нелинейно упругого слабоанизотропного полупространства. — *ПММ*, Т. **57**, вып. 3, С. 102–109.

**Уизем Дж.Б.**

[1977] *Линейные и нелинейные волны.* — М.:, Мир, 622 с.

**Энгельбрехт Ю.К. и Нигул У.К**

[1981] *Нелинейные волны деформации.* — М.:, Наука, 256 с.

**Bazer, J. and Ericson, W.B.**

[1974] Nonlinear wave motion in magnetoelasticity. — *Arch. Rat. Mech. Anal.*, V. **55**, № 2, P. 124–192.

**Cohen, R.H. and Kulsrud, R.M.**

[1974] Nonlinear evolution of parallel-propagating hydromagnetic waves. — *Phys. Fluids*, V. **17**, № 12, P. 2215–2225.

**Collins, W.D.**

[1966] One-dimensional non-linear wave propagation in incompressible elastic materials. — *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, V. **19**, P. 259–328.

**Donato, A. and Fusco, D.**

[1977] Sulla propagazione di onde di discontinuita con un modello magneto-elastico completamente on linear. — *Acad naz. Lincei Rend Cl. sci. fis. mat. e natur*, № 6, P. 529–537.

**Gordon P.**

[1974] Path connectingelementary critical points of dynamical system. — *SIAM, J.Appl.Math.*, V. 26, № 1, P. 35–102.

**Hanyga, A.**

[1976] On the solution to the Riemann problem for arbitrary hyperbolic system of conservation laws. — *Polish Acad. Sci., Publications of Institute of Geophysics*, A-1(98), Warszawa: Panstwowe wydanistwo naukowe.

**Howard, I.C.**

[1966] Finite simple waves in a compressible transversely isotropic elastic solid. — *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, V. **19**, P. 329–341.

**Jeffrey, A. and Taniuty, T.**

[1964] *Nonlinear Wave Propagation.* New York: Academic Press.

**Kulikovskii A.G. and Sveshnikova E.I.**

[1995] *Nonlinear Waves in Elastic Media.* Boca Raton, New York, London, Tokyo: CRC Press.

**Lax, P.D.**

[1957] Hyperbolic systems of conservation laws. — *Comm. Pure Appl. Math.*, V. **10**, P. 537–566.

**Smoller J.**

[1983] *Shock waves and reaction-diffusion equations.* — N.Y. etc.: Springer, 581 p.

**Williams, F.A.**

[1965] *Combustion Theory.* — Addison Wesley, Reading, MA.

# Предметный указатель

автомодельная волна Римана, 36, 240
автомодельная задача, 61, 173, 239
адиабата Гюгонио, 180
априорная эволюционность, 44, 332

бегущая волна, 23, 83, 102, 155, 174, 299, 361
бесконечная проводимость, 145
быстрая волна, 193, 367
быстрая волна Римана, 169, 171, 367
быстрая ударная волна, 200, 384

вектор напряжения на площадке, 119
вектор потока тепла, 122
взаимодействие ударных волн, 342, 346
вмороженность магнитного поля, 144
внутренняя энергия, 121, 142
волна разрежения, 163
волна Римана, 31, 159, 365
волна сжатия, 163
волна круговой поляризации, 225
волновая анизотропия, 133, 138, 167, 365, 374
волновая изотропия, 132, 137, 173, 359
вращательная волна, 174, 225, 361
вращательный разрыв, 204, 225, 382
второй закон термодинамики, 123

гиперболическая система уравнений, 18, 19, 79, 158

действующая ударная адиабата, 89
деформационная анизотропия, 138
деформация профиля волны, 33, 163, 371
диаграмма эволюционности, 49, 55, 57, 199

дивергентный вид уравнения, 16, 125
динамические уравнения теории упругости, 125, 127, 299
дисперсионное уравнение, 101, 104
диссипативная система, 101
диссипативные коэффициенты, 80, 112, 319, 333
диссипативный процесс, 79, 319
дополнительные соотношения на разрыве, 44, 89, 95, 108, 332
допустимые разрывы, 89

задача Коши, 20
задача о поршне, 62, 240
задача о структуре разрыва, 85, 102, 319
закон сохранения количества движения, 119
закон сохранения массы, 118
закон сохранения энергии, 122, 180
закон теплопроводности Фурье, 124
законы сохранения, 14, 16, 40, 119, 128

изотропная среда, 132, 134, 153, 166
инварианты Римана, 23, 26, 83, 302, 306
интегральная кривая простой волны, 287
интегральные законы сохранения, 14, 119
интегральные кривые волн Римана, 32, 170, 369
интегральные уравнения теории упругости, 125, 128

квазилинейная система уравнений, 17
квазиповоротный разрыв, 387
квазипоперечная волна, 137, 158, 164, 183, 193
квазипоперечный разрыв, 180
квазипродольная волна, 137, 158, 181, 193
квазипродольный разрыв, 180
кинематические уравнения теории упругости, 125, 127, 299
кинематическое условие на разрыве, 129
комбинация двух эволюционных волн, 234, 254
контактный разрыв, 273
круговая поляризация волны, 225

лагранжева скорость разрыва, 129

линеаризация уравнений, 23, 30, 100, 104, 157
линейная изотропная среда, 135, 167
линейная система уравнений, 17, 22
линейные волны, 23, 155

магнитная гидродинамика, 146
магнитоупругость, 146
малые возмущения, 23, 81, 153, 360
малый разрыв, 50, 60
медленная волна, 193, 367
медленная волна Римана, 169, 367
медленная ударная волна, 200, 384
модель Кельвина-Фойхта, 317

напряженность магнитного поля, 143
напряженность электрического поля, 143
начальная окружность, 382
начальная плоскость, 361
начальная прямая, 382
начально-краевая задача, 27, 334, 347
неединственность автомодельного решения, 261, 270, 280, 335
несжимаемая среда, 127, 230, 366
неустойчивость решения, 31

область неединственности, 261, 270, 335
обратимые разрывы, 43, 361
опрокидывание волны, 36, 163, 173
ортотропная среда, 139
основные соотношения на разрыве, 40, 108

параметр волновой анизотропии, 154, 187
параметр нелинейности, 163, 167
передняя точка Жуге, 193
перестройка решения, 313, 348, 355
плоские волны, 14, 126
плоскополяризованная волна, 174, 212, 361
поворотный разрыв, 362, 382
полная система уравнений, 79, 99, 319
поперечная волна, 157, 174, 203, 225, 231
правило площадей, 385
приходящие малые возмущения, 217
приходящие характеристики, 27
продольная волна, 157, 182
производство энтропии, 75, 80, 88

простая волна, 31, 159, 286

разрыв Жуге, 45
распад разрыва, 61, 64, 273
расширяющаяся волна Римана, 36, 64, 163, 173

семейство характеристик, 159, 287
сильный разрыв, 38
система уравнений теории упругости, 125
скачок величины, 40, 129
скачок разрежения, 182
скачок сжатия, 182
скорость малых возмущений, 23, 156, 382
скорость разрыва лагранжева, 129
скорость ударной волны, 194, 382, 385
скорость характеристики, 19, 22, 25, 168
слабоанизотропная среда, 133
слабый разрыв, 20, 38
собственные значения, 19, 360
собственный вектор, 19, 369
соотношение на характеристике, 20, 83
соотношения на разрывах, 40, 129, 361
столкновение ударных волн, 279
структура разрыва, 78, 87, 98, 102, 321

тензор градиентов перемещения, 123, 136
тензор конечных деформаций, 118, 136
тензор напряжений Коши, 121
тензор напряжений Пиолы-Кирхгоффа, 120
теорема о кинетической энергии, 82
теорема Пойнтинга, 143
термодинамически обратимые разрывы, 75
тождество Гиббса, 123
точка Жуге, 49, 55, 193, 391
трансверсально изотропная среда, 139

ударная адиабата, 42, 130, 180, 184, 187, 362, 363, 385
ударная волна, 31, 75, 180
ударная волна второго типа, 203
ударная волна Жуге, 45, 59, 193
ударная поляра, 291
упрощенная система для волн в одном направлении, 303, 319, 334
упрощенная система уравнений, 100, 319

упрощенные уравнения теории упругости, 298, 303, 319
упругая среда, 123
упругие волны в магнитном поле, 144
упругие волны в электромагнитном поле, 147
упругие модули среды, 136, 140
упругий потенциал, 124, 132, 134, 359
уравнение Бюргерса, 84
уравнение в дивергентной форме, 16
уравнение притока тепла, 122
уравнения в форме Годунова, 72, 127
уравнения в форме Пиолы--Кирхгоффа, 121, 146
уравнения теории упругости, интегральные, 128
условие диссипативности, 101
условие Жуге, 31
условие неубывания энтропии, 76, 182, 190, 202
условия Лакса, 46
условия эволюционности, 43, 48, 182, 192, 364, 396
усложненная модель, 78, 98, 317, 319
устойчивость разрыва, 46
уходящие малые возмущения, 217
уходящие характеристики, 27, 43

фронт в электромагнитном поле, 99
фронт разрыва, 37
фронт фазового перехода, 96

характеристика, 19, 22, 159
характеристики приходящие, 27
характеристики уходящие, 27, 43
характеристическая скорость, 19, 22, 25, 106, 168, 180, 193, 360, 366
характеристическая форма системы уравнений, 19
характеристическое направление, 19
характеристическое уравнение, 18, 156, 168, 368

центрированная волна Римана, 36, 240

эволюционная граница, 28, 30
эволюционные граничные условия, 28, 30
эволюционный отрезок, 48, 54, 202, 384, 391
эволюционный прямоугольник, 47, 55, 200
эволюционный разрыв, 45
эволюционный участок, 202, 204

эквивалентная несжимаемая среда, 186, 298
электромагнитные волны, 142
энергия электромагнитного поля, 145
энтропийная волна, 157, 159
энтропийная окружность, 191
энтропия, 16, 72, 79, 123, 190, 364

Формат 60x90 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная. Ф. печ. л. 25,75. Тир. 2 000 экз.
Заказ 12930.

Отпечатано в типографии издательско-полиграфического предприятия
"Янтарный сказ". 236000, г. Калининград, ул. К. Маркса, 18.

# Содержание

**Предисловие** **7**

**1. Математическое введение** **13**

1.1. Законы сохранения и соответствующие им дифференциальные уравнения . . . . . 13

1.2. Гиперболические системы. Линейные и линеаризованные уравнения. Слабые разрывы. Инварианты Римана . . . . . 18

1.3. Граничные условия. Эволюционность . . . . . 26

1.4. Волны Римана . . . . . 31

1.5. Разрывы и соотношения на них. Ударная адиабата 38

1.6. Условия эволюционности разрывов . . . . . 43

1.7. Разрывы малой интенсивности . . . . . 50

1.8. Поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге . . . . . 55

1.9. Распад произвольного разрыва и другие автомодельные задачи . . . . . 61

1.10. Уравнения законов сохранения в форме Годунова. Энтропия . . . . . 71

1.11. Решения с разрывами как предел непрерывных решений уравнений усложненной модели . . . . . 77

1.12. Малые возмущения в среде с диссипацией . . . . . 81

1.13. Структура ударных волн . . . . . 84

1.14. Дополнительные соотношения на разрыве . . . . . 88

1.15. Еще о структуре и о числе дополнительных соотношений . . . . . 96

**2. Постановка задачи о плоских волнах в упругой среде** **117**
2.1. Модель упругой среды. Система уравнений . . . . . 117
2.2. Уравнения теории упругости для одномерных движений в виде плоских волн. Условия на разрыве . . . . . 126
2.3. Волновая изотропия и анизотропия. Внутренняя энергия среды с малой волновой анизотропией . . . 131
2.4. Задание упругого потенциала для слабонелинейной среды . . . . . 134
2.5. Распространение нелинейных волн в средах, взаимодействующих с электромагнитным полем . . 142

**3. Волны Римана** **153**
3.1. Малые возмущения. Линейные волны . . . . . 153
3.2. Уравнения для волн Римана . . . . . 159
3.3. Квазипродольные волны Римана . . . . . 161
3.4. Квазипоперечные волны Римана . . . . . 164
3.5. Изменение величин в квазипоперечных волнах . . . 169
3.6. Эволюция квазипоперечных волн Римана . . . . . 171
3.7. Волны Римана в случае волновой изотропии . . . . 173

**4. Ударные волны** **177**
4.1. Условия на слабых ударных волнах . . . . . 177
4.2. Квазипродольные ударные волны . . . . . 181
4.3. Квазипоперечные ударные волны. Ударная адиабата 183
4.4. Условие неубывания энтропии . . . . . 190
4.5. Условия эволюционности скачка. Точки Жуге . . . 192
4.6. Скорость квазипоперечных ударных волн . . . . . 194
4.7. Типы эволюционных ударных волн и их количество 199
4.8. Положение участков эволюционности на ударной адиабате . . . . . 204
4.9. Ударные переходы в заданное состояние . . . . . 210
4.10. Частные виды начальной деформации . . . . . 211
4.11. Квазипоперечные ударные волны при $G/R^2 \ll 1$ и $G/R^2 \gg 1$ . . . . . 223
4.12. Волны в несжимаемых средах . . . . . 230

4.13. Представление неэволюционного разрыва двумя эволюционными, идущими с одинаковой скоростью . . 232

**5. Нестационарные автомодельные задачи для волн малой амплитуды 239**

5.1. Предварительные замечания . . . . . 239
5.2. Задача о внезапном изменении нагрузки на границе полупространства ("задача о поршне") . . 241
5.3. Построение решения в средах с $\varkappa > 0$ . . . . . 245
5.4. Построение решения в средах с $\varkappa < 0$ . . . . . 265
5.5. Распад произвольного начального разрыва. Соударение ударных волн . . . . . 273

**6. Двумерные стационарные нелинейные волны и автомодельные решения 283**

6.1. Простые волны . . . . . 283
6.2. Стационарные ударные волны в движущейся среде 290
6.3. Задача о бегущей нагрузке . . . . . 294

**7. Упрощенные уравнения теории упругости. Неавтомодельные задачи 297**

7.1. Эквивалентная несжимаемая среда при описании квазипоперечных волн . . . . . 297
7.2. Упрощенные уравнения для квазипоперечных волн, распространяющихся в одну сторону . . . . . 301
7.3. Описание волн Римана и разрывов с помощью упрощенных уравнений теории упругости . . . . . 304
7.4. Инварианты Римана. Уравнения в плоскости годографа. Неавтомодельные задачи . . . . . 306
7.5. Эволюция при малой анизотропии волн, близких к вращательным. Катастрофическая перестройка . . 310

**8. Движения вязкоупругих сред 317**

8.1. Модель Кельвина-Фойхта. Уравнения одномерных движений . . . . . 317
8.2. Задача о структуре квазипоперечных ударных волн 320

8.3. Численные решения задач о вязкоупругих волнах, имеющие автомодельную асимптотику . . . . . 333

**9. Волны конечной амплитуды в слабоанизотропных упругих средах 359**

9.1. Введение. Случай волновой изотропии . . . . . 359
9.2. Волны Римана в несжимаемой среде при $g \ll 1$ . . . 365
9.3. Волны Римана в несжимаемой среде при анизотропии частного вида . . . . . 374
9.4. Волны Римана в сжимаемой среде . . . . . 377
9.5. Ударные волны в несжимаемой среде . . . . . 381
9.6. Ударные волны в сжимаемой среде . . . . . 392

**Литература 399**

**Предметный указатель 407**