

ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ СОЛИТОНЫ

Посвящена теории нелинейных интегрируемых уравнений Зля функций, зависящих от трех и более переменных, обладающих солитонными решениями нового тина — опрокидывающимися солитонами. Найдена новая алгебраическая конструкция интегрируемых уравнений, имеющих аттракторы в фазовом пространстве расширяющая известную конструкцию Лакса. Исследованы интегрируемые случаи динамики твердого тела в ньютоновских гравитационных полях и интегрируемые случаи уравнений Эйлера, на конечномерных коалгебрах Ли. Построенные нелинейные интегрируемые уравнения и динамические системы имеют применение в гидродинамике, физике плазмы и динамике твердого тела.

Для научных работников, математиков, специалистов в области нелинейных уравнений. Доступна студентам старших курсов соответствующих специальностей.

Содержание

Введение	7
ЧАСТЬ I	
ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ СОЛИТОНЫ	
Глава I. Интегрируемые уравнения с аттракторами	11
§ 1. Алгебраическая конструкция дифференциальных уравнений с аттракторами	11
§ 2. Динамические системы с аттракторами	16
§ 3. Одномерные интегрируемые уравнения	19
Глава II. Опрокидывающиеся солитоны в двумерных интегрируемых уравнениях	26
§ 1. Двумерное интегрируемое уравнение	27
§ 2. Основная лемма	31
§ 3. Опрокидывающиеся солитоны и N-солитонные решения	38
§ 4. Второе двумерное интегрируемое уравнение	46
§ 5. О связи с уравнением Кадомцева-Петвиашвили	49
§ 6. Динамика полюсов мероморфных решений	51
§ 7. Трехмерное интегрируемое уравнение	55
§ 8. Третье двумерное интегрируемое уравнение	56
§ 9. Интегрируемая двумеризация уравнения Бюргерса и динамика особенностей	58
Глава III. Двумерное модифицированное интегрируемое уравнение	61
§ 1. Двумерное модифицированное уравнение	61
§ 2. Счетное множество законов сохранения	65
§ 3. Представление Лакса для двумерного модифицированного уравнения (1.5)	68
§ 4. Представление Лакса для двумерных уравнений (1.5) и (1.6)	70
§ 5. Представление Лакса с эрмитовым оператором L	73

§ 6. Опрокидывающиеся солитоны	74
§ 7. Эволюция данных рассеяния	77
§ 8. Интегрируемые комплексификации уравнений КдФ и МКдФ	80
§ 9. Интегрируемые расширения уравнения КдФ с оператором L четвертого порядка. Модифицированная цепочка Тода	84
Глава IV. Трехмерное комплексное интегрируемое уравнение	91
§ 1. Представление Лакса для трехмерного комплексного уравнения	91
§ 2. Опрокидывающиеся солитоны двумерных редукций	96
§ 3. Двумерное матричное уравнение, допускающее представление Лакса	98
ЧАСТЬ II	
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	
Глава V. Интегрируемые дискретизации уравнения Кортевега-де Фриза	101
§ 1. Интегрируемые динамические системы с квадратичной нелинейностью	101
§ 2. Интегрируемые редукции динамических систем (1.3)	108
§ 3. Интегрируемые динамические системы с произвольной степенью нелинейности	112
§ 4. Интегрируемые редукции динамических систем (3.1)	118
§ 5. Интегрируемые дискретизации второго уравнения КдФ	121
§ 6. Общие конструкции интегрируемых дискретизаций уравнения КдФ	125
Глава VI. Интегрируемое интегро-дифференциальное уравнение	130
§ 1. Интегро-дифференциальное уравнение как континуальный предел семейства динамических систем	130
§ 2. Основные свойства интегро-дифференциального уравнения (1.3)	134
§ 3. Иерархия высших уравнений	140
Глава VII. Интегрируемые уравнения в алгебрах гладких функции и в непрерывных ассоциативных алгебрах	146
§ 1. Первые интегралы дифференциальных уравнений, связанных с автоморфизмами ассоциативных алгебр	146
§ 2. Алгебраические конструкции некоторых интегрируемых уравнений	149
§ 3. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в алгебрах функций	160
§ 4. Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения	167
§ 5. Применения к уравнениям Эйлера в прямой сумме алгебр Ли $gl(n, R)$ и $so(n, R)$	174
§ 6. Третья теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения	179
§ 7. Матричные уравнения, допускающие представление Лакса с несколькими спектральными параметрами	182
Глава VIII. Интегрируемые динамические системы, связанные с простыми алгебрами Ли	187
§ 1. Алгебраические обобщения цепочки Тода	187
§ 2. Алгебраические аналоги системы Вольтерра	191

§ 3. Интегрируемые гамильтоновы возмущения цепочки Тода и ее обобщении	199
§ 4. Представление нулевой кривизны для некоторых расширений обобщенных цепочек Тода и уравнения Синус Гордона	202
§ 5. Континуальные пределы пеночки Тода и ее двумеризации. Опрокидывающиеся решения	205
§ 6. Опрокидывающиеся решения в континуальных пределах систем Ферми-Паста-Улама и их двумеризаций	212

ЧАСТЬ III

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА КОАЛГЕБРАХ ЛИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Глава IX. Уравнения Эйлера на конечномерных коалгебрах Ли, возникающие в физических задачах	217
§ 1. Классические исследования уравнений Эйлера вращения n-мерного твердого тела	218
§ 2. Уравнения Эйлера на , коалгебрах Ли, связанные с динамикой твердого тела, имеющего неподвижную точку, и с движением тела в жидкости	220
§ 3. Алгебраическая и гамильтонова структура уравнений вращения спутника вокруг центра масс	226
Глава X. Интегрирование динамики произвольного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом	230
§ 1. История вопроса	230
§ 2. Интегрируемость по Лиувиллю уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижного центра масс в поле удаленных притягивающих объектов	233
§ 3. Интегрируемость по Лиувиллю уравнений поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с квадратичным потенциалом	236
§ 4. Интегрирование динамики в тэта-функциях Римана	241
§ 5. Динамика симметричного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с квадратичным потенциалом	250
§ 6. Интегрируемые случаи уравнений вращения твердого тела в нелинейных гравитационных полях	254
§ 7. Интегрируемость n-мерного аналога задачи о динамике твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом	256
Глава XI. Интегрируемые уравнения Эйлера на некоторых шестимерных коалгебрах Ли	260
§ 1. Уравнения Эйлера для двух классов шестимерных коалгебр Ли	260
§ 2. Интегралы J_4 четвертой степени	263
§ 3. Явное интегрирование некоторых уравнений Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$	267

§ 4. Интегралы J_4 второй степени	272
§ 5. Физические применения уравнений Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$	278
§ 6. Лагранжева структура уравнений Кирхгофа	284
Глава XII. Периодические решения в модели вращения пульсара	291
§ 1. Магнитогидродинамическая модель вращения пульсара	292
§ 2. Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью	294
§ 3. Первые интегралы динамической системы. Интегрируемые случаи	297
§ 4. Периодические решения	300
Дополнение. Системы гидродинамического типа, допускающие операторные представления	305
§ 1. Система гидродинамического типа, связанная с моделью Вольтерра	305
§ 2. Интегрируемое $2+1$ -мерное уравнение как континуальный предел систем гидродинамического типа	307
§ 3. Система гидродинамического типа, связанная с цепочкой Тода	308
Список литературы	311

ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие теории нелинейных интегрируемых уравнений началось с работы Дж. Грина, К. Гарднера, М. Крускала и Р. Миуры (1967), в которой был предложен метод обратной задачи рассеяния, и работы П. Лакса (1968), указавшего метод конструирования интегрируемых уравнений. Дальнейшее развитие этих методов и их многочисленные применения подробно представлены в книгах В. А. Марченко (1977), В. Е. Захарова, С. В. Манакова, С. П. Новикова и Л. П. Питаевского (1980), М. Абловица и Х. Сигура (1981), Ф. Калоджеро и А. Дегаспериса (1982), Р. Додда, Дж. Эйлбека, Дж. Гиббона и Х. Морриса (1982), А. Ньюэлла (1985), Л. А. Тахтаджяна и Л. Д. Фаддеева (1986).

В монографии излагаются результаты, полученные автором в 1984—1990 годах. В главе I изучается конструкция нелинейных интегрируемых уравнений и динамических систем, расширяющая конструкцию Лакса и основанная на уравнении

$$\dot{L} = P(L) + [L, A]$$

в пространстве линейных операторов. Уравнения, построенные по этой конструкции, имеют аттракторы в фазовом пространстве и вместе с тем обладают большим набором первых интегралов; их солитонные решения имеют нестандартную динамику.

Широко известно, что из уравнения Лакса $\dot{L} = [L, A]$, которое называют также уравнением изоспектральной деформации, следует сохранение собственных чисел оператора L . Однако это не верно в тех случаях, когда оператор L параметрически зависит от дополнительных переменных, дифференцирования по которым не входят в оператор L , но входят в оператор A . При этом собственные числа оператора L изменяются и удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка. Частным случаем последних является классическое уравнение опрокидывающейся волны Римана. Такое

поведение собственных чисел оператора L приводит к солитонным решениям нового типа — опрокидывающимся солитонам, которые изучаются в главах II—IV части I. Нелинейные дифференциальные уравнения, эквивалентные уравнению Лакса с указанными операторами L и A , интегрируются методом одномерной обратной задачи рассеяния. В специальном случае, когда оператор L является матричным оператором Шрёдингера, полученные уравнения вкладываются в класс уравнений, интегрируемых с помощью обратного спектрального преобразования, указанный в работах Ф. Калоджеро и А. Дегаспериса (1976, 1977). Нелинейное уравнение

$$v_t = 4vv_y + 2v \int_0^x v_y(t, \xi, y) d\xi - v_{xxy},$$

выведенное в главе II, имеет применения в гидродинамике и описывает двумерное взаимодействие волны Римана с поперечными длинными волнами. Несмотря на наличие опрокидывающихся солитонов, это уравнение, а также его модифицированное уравнение (глава III)

$$v_t = 4v^2v_y + 2v_x \int_0^x (v^2(t, \xi, y))_y d\xi - v_{xxy}$$

имеют счетное множество первых интегралов, определяемых явными локальными формулами.

Явление опрокидывания приводит к возникновению многозначности решений, которая, однако, в отличие от задач газовой динамики не означает ограничение области применимости выведенных уравнений, так как не связана с пересечением траекторий частиц. Другие применения многозначных функций и функционалов указаны в работах С. П. Новикова (1981, 1982).

В части II книги исследуются алгебраические конструкции нелинейных динамических систем и уравнений, допускающих эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром. Такие динамические системы и уравнения в большинстве случаев являются интегрируемыми в этета-функциях римановых поверхностей с помощью алгебро-геометрических методов (Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, 1976).

Счетное множество интегрируемых динамических систем, каждая из которых в континуальном пределе переходит в уравнение Кортевега — де Фриза, построено в гла-

ве V. В этом множестве содержится классическая модель Вольтерра (дискретное уравнение КдФ или лангмюровская цепочка). Полученные динамические системы так же, как модель Вольтерра, имеют применения в физике плазмы и в математической экологии. Континуальный предел всего построенного семейства динамических систем является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением, которое исследуется в главе VI. Это уравнение допускает представление Лакса, обладает счетным набором первых интегралов, определяющихся явными формулами и имеет применения в качестве кинетического уравнения в физике плазмы.

Алгебраические конструкции интегрируемых дифференциальных уравнений в алгебрах гладких функций на многообразиях и в произвольных непрерывных ассоциативных алгебрах исследованы в главе VII. С помощью этих конструкций построены интегрируемые уравнения Эйлера в прямых суммах алгебр Ли $gl(n, \mathbb{R})$ и $so(n, \mathbb{R})$, имеющие применения в динамике твердого тела с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью. Алгебраические аналоги цепочки Toda и системы Вольтерра, связанные с простыми алгебрами Ли, построены в главе VIII; все эти системы допускают представление Лакса со спектральным параметром. В главе VIII построены также опрокидывающиеся решения в уравнениях, являющихся континуальными пределами цепочки Toda, систем Ферми — Паста — Улама и их двумеризаций.

Часть III монографии посвящена изучению задач механики и математической физики, которые сводятся к уравнениям Эйлера на конечномерных коалгебрах Ли. К таким задачам относятся (глава IX): динамика твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости; вращение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием гравитационных и электромагнитных сил; вращение твердого тела, имеющего эллипсоидальные полости, заполненные идеальной несжимаемой или магнитной жидкостью; различные задачи, связанные с вращением спутника вокруг центра масс, движущегося по заданной орбите.

Глава X посвящена доказательству теоремы о том, что поступательно-вращательное движение произвольного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом является вполне интегрируемым по Лиувиллю и интегрируется в тэта-функциях римановых поверхностей. Эта задача ес-

тественно возникает при изучении динамики твердого тела в поле удаленных притягивающих объектов; ее интегрируемость является следствием фундаментального физического факта — равенства инертной и гравитационной масс.

В главе XI исследуются интегрируемые случаи уравнений Эйлера на некоторых шестимерных коалгебрах Ли. Указаны физические применения уравнений Эйлера на алгебре Ли $SO(4)$ и в прямой сумме алгебр Ли $SO(3)$, связанные с динамикой твердого тела, имеющего эллипсоидальные полости, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

Магнитогидродинамическая модель вращения пульсара, связанная с уравнениями Эйлера на алгебре Ли $SO(3) + E_3$, изучается в главе XII. Указаны конкретные применения этой модели, для которых предсказываемый период вращения пульсара согласуется с астрофизическими данными.

Мне приятно выразить свою признательность сотрудникам Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР за полезные дискуссии по результатам работы.

ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ СОЛИТОНЫ

Г Л А В А I

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ С АТТРАКТОРАМИ

Большинство интегрируемых нелинейных уравнений допускает, как известно, представление Лакса [4]

$$\dot{L} = [L, A]$$

с некоторыми линейными операторами L и A [4—11]. В данной главе изучаются динамические системы и нелинейные уравнения, зависящие от двух переменных t и x , построенные с помощью новой алгебраической конструкции, расширяющей конструкцию Лакса. Существенной особенностью построенных нелинейных уравнений является наличие аттракторов в их фазовом пространстве и нестандартное поведение их солитонных решений.

§ 1. Алгебраическая конструкция дифференциальных уравнений с аттракторами

I. Рассмотрим в алгебре конечномерных линейных операторов $gl(n, \mathbb{C})$ дифференциальное уравнение вида

$$\dot{L} = P(L) + [L, A], \quad (1.1)$$

где $P(x)$ — некоторая аналитическая функция с постоянными коэффициентами. Уравнение (1.1) при $P(L) = 0$ переходит в уравнение Лакса. Покажем, что при $P(L) \neq 0$ уравнение (1.1), так же как и уравнение Лакса, имеет набор первых интегралов, однако поведение его траекторий существенно отличается от поведения траекторий уравнения Лакса вследствие наличия аттракторов и неустойчивых инвариантных подмногообразий в пространстве матричных компонент оператора L .

Представим оператор L в виде

$$L = Q\Lambda Q^{-1}, \quad (1.2)$$

где оператор Q определяется из уравнения

$$Q = -AQ. \quad (1.3)$$

Вследствие формул (1.2), (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \dot{Q}AQ^{-1} + Q\dot{A}Q^{-1} - QAQ^{-1}\dot{Q}Q^{-1} = \\ &= -AQ\dot{A}Q^{-1} + QAQ^{-1}\dot{A} + Q\dot{A}Q^{-1} = Q\dot{A}Q^{-1} + [L, A]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (1.1) паходим

$$Q\dot{A}Q^{-1} = QP(\Lambda)Q^{-1}, \quad \dot{\Lambda} = P(\Lambda). \quad (1.4)$$

Предположим, что оператор Λ в начальный момент времени выбран диагональным. Это свойство сохраняется в силу системы (1.4), которая в этом случае распадается на независимые уравнения для собственных чисел λ_k оператора L :

$$\dot{\lambda}_k = P(\lambda_k), \quad \int_{c_k}^{\lambda_k} \frac{d\lambda}{P(\lambda)} = t - t_0. \quad (1.5)$$

В общем случае комплексных собственных чисел λ_k первыми интегралами динамической системы (1.4) — (1.5) являются многозначные функции

$$\int_{\lambda_k}^{\lambda_j} \frac{d\lambda}{P(\lambda)} = F(\lambda_k, \lambda_j),$$

где интеграл берется по произвольному пути γ на комплексной плоскости, не содержащему корней уравнения $P(\lambda) = 0$. В дальнейшем предполагается, что оператор L симметрический, A кососимметрический, $P(x)$ — вещественная аналитическая функция. Тогда уравнения (1.5) определены на вещественной оси $\mathbb{R}^1 (-\infty < \lambda < +\infty)$ и корни уравнения $P(\lambda) = 0$ делят ось $\mathbb{R}^1$ на инвариантные интервалы. Пусть каждая точка c_k находится в том же интервале, что и собственное значение λ_k . Следующие функции собственных чисел λ_i, λ_k матрицы L являются однозначными первыми интегралами уравнения (1.1):

$$F(\lambda_i, \lambda_k) = \int_{c_i}^{\lambda_i} \frac{d\lambda}{P(\lambda)} - \int_{c_k}^{\lambda_k} \frac{d\lambda}{P(\lambda)}. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.1) имеет набор инвариантных подмногообразий V_π , на каждом из которых все собственные числа матрицы L являются корнями уравнения $P(\lambda) = 0$. Каждое многообразие V_π является орбитой вида $Q\Lambda_\pi Q^{-1}$, где $\Lambda_{ij} = \lambda_i^\pi \delta_{ij}$, $P(\lambda_i^\pi) = 0$. Орбита V_π является устойчивым инвариантным подмногообразием — аттрактором уравнения (1.1) — если во всех точках λ_i^π имеем $P'(\lambda_i^\pi) < 0$. Многообразие V_π является неустойчивым, если хотя бы в одной точке λ_k^π имеем $P'(\lambda_k^\pi) > 0$.

Таким образом, конечномерная динамическая система, определенная уравнением (1.1), является системой типа Смейла: имеется набор устойчивых и неустойчивых инвариантных подмногообразий — орбит V_π : $L = S\Lambda_\pi S^{-1}$, на которых $P(L) = P(\Lambda_\pi) = 0$. Вне орбит V_π динамика траекторий системы (1.1) допускает полное качественное исследование, так как изменение собственных чисел λ_i матрицы L определяется уравнением $\dot{\lambda}_i = P(\lambda_i)$.

II. Покажем, что уравнение (1.1) является условием совместности следующих уравнений:

$$L\psi = k\psi, \quad \dot{\psi} + A\psi = \mu\psi, \quad \dot{k} = P(k), \quad (1.7)$$

где $\mu(t)$ — произвольная функция. Действительно, дифференцируя первое уравнение (1.7) по времени, получаем

$$\dot{L}\psi = k\dot{\psi} + (k - L)\dot{\psi}.$$

Подставляя в это уравнение выражения $\dot{k}$ и $\dot{\psi}$ из уравнений (1.7), находим

$$\dot{L}\psi = P(k)\psi + LA\psi - AL\psi, \quad (1.8)$$

что и приводит к уравнению (1.1).

Рассмотрим спектральную задачу, связанную с уравнением (1.1). Пусть $\psi(t, k_0)$ — спектральная функция оператора L , удовлетворяющая уравнению $L\psi(t, k_0) = k(t)\psi(t, k_0)$, где спектральное значение $k(t)$ изменяется в силу уравнения $\dot{k}(t) = P(k, t)$, $k(0) = k_0$. Дифференцируя спектральное уравнение по времени, в силу уравнения (1.1) получаем

$$P(L)\psi + (LA - AL)\psi + L\dot{\psi} = P(k)\psi + k\dot{\psi}.$$

Отсюда, используя определение спектральной функции $\psi(t, k_0)$, находим $L(\psi + A\psi) = k(t)(\psi + A\psi)$. Таким об-

разом, функция $\dot{\psi} + A\psi$ также является спектральной функцией оператора L и отвечает тому же собственному числу $k(t)$. Это обстоятельство делает возможным применение метода обратной задачи рассеяния к уравнениям вида (1.1) (см. ниже § 3).

Отметим следующее естественное обобщение уравнения (1.1):

$$\dot{L} = BP(L) + [L, A],$$

где B — некоторый оператор. Пусть k_0 — произвольный корень уравнения $P(k) = 0$ и $\psi(t, k_0)$ — соответствующая спектральная функция: $L\psi(t, k_0) = k_0\psi(t, k_0)$. Дифференцируя это равенство, в силу указанного уравнения получаем $BP(L)\psi + (LA - AL)\psi + L\dot{\psi} = k_0\dot{\psi}$. Отсюда очевидно следует уравнение $L(\dot{\psi} + A\psi) = k_0(\dot{\psi} + A\psi)$, показывающее, что функция $\dot{\psi} + A\psi$ также является спектральной функцией, отвечающей спектральному значению k_0 . В силу этого метод обратной задачи может быть применен к уравнению $\dot{L} = BP(L) + [L, A]$ на нескольких спектральных уровнях оператора L , являющихся корнями уравнения $P(k) = 0$ (а не на одном уровне, как в работах [27–29]).

III. Важный случай уравнений вида (1.1) возникает, если уравнение $\dot{L} = [L, A]$ на орбитах V_π является интегрируемым по Лиувиллю. В этом случае орбиты V_π расслоены на инвариантные торы, динамика траекторий по которым является квазипериодической. Такие уравнения (1.1) могут моделировать, например, возникновение квазипериодического движения жидкости (типа течения Куэтта) из ламинарного движения при росте числа Рейнольдса.

Укажем класс уравнений (1.1), которые на всех инвариантных подмногообразиях V_π являются интегрируемыми. Пусть $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — целые аналитические функции, K — постоянная матрица, $A(t)$ — произвольная матрица. Рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{L} = P(L) + [Q(L), K] + [R(P(L)), A(t)]. \quad (1.9)$$

Утверждение 1. Уравнение (1.9) принадлежит классу (1.1) и на каждой орбите V_π ($P(V_\pi) = 0$) допускает представление Лакса со спектральным параметром.

Действительно, справедливо тождество

$$[a_n L^n, K] = [L, a_n (L^{n-1}K + L^{n-2}KL + \dots + KL^{n-1})],$$

из которого в силу аналитичности функций $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ следует представимость уравнения (1.9) в виде (1.1). На орбитах $V_\pi(P(V_\pi)=0)$ уравнение (1.9) принимает вид $\dot{L}=[Q(L), K]$ и имеет следующее эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром E :

$$(L + KE)^* = [L + KE, -Q(L)E^{-1}]. \quad (1.10)$$

Отсюда следует наличие дополнительных первых интегралов, являющихся коэффициентами при степенях E^k в разложении многочлена $\text{Tr}(L + KE)^m$.

Утверждение 1 справедливо также и для более широкого класса уравнений вида

$$\dot{L} = P(L) + [Q(L), K] + \sum_{i=1}^N [R_i(P(L)), A_i(t)] + [L, K_1(t)] \quad (1.11)$$

при условии $[K, K_1(t)] = 0$. Действительно, на орбитах $V_\pi(P(L)=0)$ уравнения (1.11) допускают представление Лакса со спектральным параметром:

$$(L + KE)^* = [L + KE, K_1(t) - Q(L)E^{-1}].$$

Замечание 1. Произвольная динамическая система вида

$$\dot{L} = [Q(L), K_1] + [R(L), K_2]$$

в целом не является интегрируемой, однако на отдельных орбитах, определенных условиями $Q(V_\pi)=0$ или $R(V_\pi)=0$, имеет представление Лакса со спектральным параметром (1.10) и поэтому является интегрируемой.

IV. Более сложная, чем в уравнениях (1.5), динамика собственных чисел матрицы L реализуется в уравнениях вида

$$\dot{L} = R(L) + [L, A], \quad (1.12)$$

где $R(L)$ — аналитическая или мероморфная функция матрицы L , коэффициенты которой зависят от инвариантов матрицы L , т. е. от функций $I_k = \text{Tr } L^k$. Подстановка (1.2) приводит к уравнению

$$\dot{\Lambda} = R(\Lambda), \quad (1.13)$$

которое, вообще говоря, не распадается в систему одномерных уравнений и описывает динамику собственных чисел матрицы L . Устойчивым особым точкам или инвариантным подмногообразиям Λ_π системы (1.13) соот-

ветствуют устойчивые инвариантные подмногообразия уравнения (1.12) — аттракторы $V_\pi = Q\Lambda_\pi Q^{-1}$.

Например, определим функцию $R(L)$ формулой

$$R(L) = L^{k-1} \operatorname{Tr} L^m - L^{m-1} \operatorname{Tr} L^k. \quad (1.14)$$

Тогда уравнение (1.13) принимает вид системы

$$\dot{\lambda}_i = \lambda_i^{k-1} \sum_{j=1}^n \lambda_j^m - \lambda_i^{m-1} \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \quad (1.15)$$

и не распадается в отдельные одномерные уравнения. Уравнения (1.15) имеют первый интеграл $I_2 = \operatorname{Tr} L^2$.

§ 2. Динамические системы с аттракторами

1. Построим конкретные динамические системы, допускающие операторное представление вида (1.1):

$$\dot{L} = \alpha L^3 + \beta L + [L, A]. \quad (2.1)$$

Предположим, что матрицы L и A (размера $n \times n$) имеют только следующие ненулевые элементы:

$$L_{i,i+1} = L_{i+1,i} = b_i, \quad A_{i,i+2} = -A_{i+2,i} = x_i. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) эквивалентно системе алгебраических и дифференциальных уравнений:

$$\alpha b_k b_{k+1} b_{k+2} + b_k x_{k+1} - b_{k+2} x_k = 0, \quad (2.3)$$

$$\dot{b}_k = \alpha b_k (b_{k-1}^2 + b_k^2 + b_{k+1}^2) + \beta b_k + b_{k-1} x_{k-1} - b_{k+1} x_k. \quad (2.4)$$

Решение системы алгебраических уравнений (2.3) определяется формулами (m — произвольная постоянная)

$$x_k = -(m + k\alpha) b_k b_{k+1}. \quad (2.5)$$

Дифференциальные уравнения (2.4) после подстановки формул (2.5) и замены переменных $a_k = b_k^2$, $\tau = 2t$ принимают вид

$$\dot{a}_k = a_k [(m + k\alpha) (a_{k+1} - a_{k-1}) + \alpha (2a_{k-1} + a_k + a_{k+1}) + \beta]. \quad (2.6)$$

Построенная система уравнений (2.6) в силу вывода эквивалентна уравнениям (2.1), (2.2), (2.5) и поэтому, как показано в § 1, обязана иметь аттрактор. Динамическая система (2.6) вкладывается в общий класс уравнений, предложенных В. Вольтерра для описания дина-

мики численности популяций различных взаимодействующих видов [23]. Для таких задач (в математической экологии) характерны притягивающие устойчивые режимы динамики. Наличие аттрактора в системе (2.6) обуславливает существование притягивающих режимов, что является важным для применений. В специальном случае $\alpha = 0$, $\beta = 0$ система (2.6) переходит в интегрируемую гамильтонову систему Вольтерра

$$\dot{a}_k = m a_k (a_{k+1} - a_{k-1}).$$

Собственные числа λ_i матрицы L (2.2) в силу уравнений (2.1), (2.6) удовлетворяют уравнениям (см. (1.5))

$$\dot{\lambda}_i = \lambda_i (\alpha \lambda_i^2 + \beta). \quad (2.7)$$

Отсюда находим

$$\lambda_i^2 = -\frac{\beta}{\alpha} (1 - \exp(-2\beta t + c_i))^{-1}.$$

Система уравнений (2.7) имеет первые интегралы

$$F(\lambda_i, \lambda_j) = ((\alpha \lambda_i^2 + \beta) \lambda_j^2) / ((\alpha \lambda_j^2 + \beta) \lambda_i^2). \quad (2.8)$$

Если параметры α и β имеют одинаковый знак, то уравнение (2.7) имеет единственную особую точку $\lambda_i = 0$, которая при $\beta < 0$ является притягивающей, а при $\beta > 0$ — отталкивающей. Предположим, что $\beta > 0$, $\beta/\alpha = -\kappa^2$. Тогда уравнение $\dot{\lambda} = \lambda(\alpha \lambda^2 + \beta)$ имеет две притягивающие особые точки $\lambda = \pm \kappa$ и одну отталкивающую $\lambda = 0$. Собственные числа симметрической матрицы L вида (2.2) вещественны и симметричны относительно нуля. При $n = 2k$ система (2.1), (2.6) имеет единственный аттрактор — орбиту V_k , отвечающую собственным числам $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \kappa$, $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{2k} = -\kappa$, единственную отталкивающую особую точку $a_i = 0$ и $(k-1)$ неустойчивых инвариантных подмногообразий — орбит V_j , определенных условиями

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_j = \kappa, \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{2j} = -\kappa, \\ \lambda_{2j+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0, 1 \leq j \leq k-1.$$

Аналогично определяются инвариантные подмногообразия V_j при $n = 2k+1$, причем одно собственное число матрицы L — тождественный нуль.

Инвариантные подмногообразия V_j являются различными компонентами множества, определенного алгебраи-

ческим уравнением

$$P(L) = \alpha L^3 + \beta L = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) в силу (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$\alpha a_k a_{k+1} a_{k+2} = 0, \quad a_k (\alpha (a_{k-1} + a_k + a_{k+1}) + \beta) = 0. \quad (2.10)$$

При $\alpha \neq 0$ в силу первого уравнения (2.10) из трех последовательных величин a_i одна равна нулю. В силу второго уравнения (2.10) при $a_k \neq 0$ имеем $a_{k-1} + a_k + a_{k+1} = -\beta/\alpha = \kappa^2$. Поэтому на инвариантных подмногообразиях V_j система (2.6) распадается в одномерные уравнения вида

$$\dot{a}_k = a_k (m - k\alpha) (a_k - \kappa^2), \quad \dot{a}_k = a_k (m - (k-1)\alpha) (\kappa^2 - a_k).$$

Следовательно, все траектории системы (2.6) на подмногообразиях V_j стремятся к особым точкам, в которых выполнены соотношения (2.10) и $a_i = 0$ или $a_i = \kappa^2$.

II. Построим динамическую систему, допускающую операторное представление вида

$$\dot{L}_1 = \alpha L_1^2 + \beta L_1 + [L_1, A_1]. \quad (2.11)$$

Предположим, что матрицы L_1 и A_1 имеют только следующие ненулевые элементы:

$$L_{1ii} = p_i, \quad L_{1i,i+1} = L_{1i+1,i} = c_i, \quad A_{1i,i+1} = -A_{1i+1,i} = \kappa_i. \quad (2.12)$$

Уравнения (2.11) — (2.12) эквивалентны следующей системе алгебраических и дифференциальных уравнений:

$$\alpha c_k c_{k+1} + c_k x_{k+1} - x_k c_{k+1} = 0, \quad (2.13)$$

$$\dot{p}_k = \alpha (p_k^2 + c_k^2 + c_{k-1}^2) + \beta p_k + 2c_{k-1} x_{k-1} - 2c_k x_k, \quad (2.14)$$

$$\dot{c}_k = c_k (\alpha (p_k + p_{k+1}) + \beta) + x_k (p_k - p_{k+1}). \quad (2.15)$$

Решение системы алгебраических уравнений (2.13) определяется формулами

$$x_k = -(m + k\alpha) c_k. \quad (2.16)$$

После подстановки этих формул дифференциальные уравнения (2.14), (2.15) принимают вид

$$\dot{p}_k = \alpha p_k^2 + \beta p_k + (2m - (2k-3)\alpha) c_{k-1}^2 - (2m - (2k+1)\alpha) c_k^2, \quad (2.17)$$

$$\dot{c}_k = c_k ((m + (k+1)\alpha) p_{k+1} - (m + (k-1)\alpha) p_k + \beta).$$

Система (2.17) является негамильтоновым возмущением цепочки Тода, в которую она переходит при $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Собственные числа λ_i матрицы L_1 в силу уравнения (2.11) удовлетворяют уравнению

$$\dot{\lambda}_i = \lambda_i(\alpha\lambda_i + \beta). \quad (2.18)$$

Поэтому динамическая система (2.17), эквивалентная уравнению (2.11), (2.12), (2.16), имеет первые интегралы

$$F(\lambda_i, \lambda_j) = ((\alpha\lambda_i + \beta)\lambda_j) / ((\alpha\lambda_j + \beta)\lambda_i). \quad (2.19)$$

Уравнение $\dot{\lambda} = \lambda(\alpha\lambda + \beta)$ имеет две особые точки $\lambda = 0$ и $\lambda = -\beta/\alpha = \sigma$. Пусть $\beta > 0$; тогда особая точка $\lambda_i = \sigma$ является притягивающей. Динамическая система (2.17) имеет единственный аттрактор, которым является притягивающая особая точка $p_k = \sigma$, $c_k = 0$.

Уравнение $\alpha L_1^2 + \beta L_1 = 0$ определяет инвариантные подмногообразия системы (2.17) и сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha c_k c_{k+1} &= 0, \quad \alpha(p_k^2 + c_k^2 + c_{k-1}^2) = -\beta p_k, \\ c_k(\alpha(p_k + p_{k+1}) + \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В силу первого уравнения (2.20), если $c_k \neq 0$, то $c_{k+1} = 0$, $c_{k-1} = 0$. Поэтому в силу остальных уравнений получаем $p_k p_{k+1} = c_k^2$, $p_k + p_{k+1} = \sigma$. Уравнения (2.17) на инвариантных подмногообразиях (2.20) элементарно интегрируются.

Отметим, что уравнение (2.1) преобразуется в уравнение (2.11) с помощью отображения $L_1 = L^2$ и замены времени $\tau = 2t$. Поэтому динамическая система (2.6) отображается в динамическую систему (2.17) — точно так же, как модель Вольтерра отображается в цепочку Тода [30].

§ 3. Одномерные интегрируемые уравнения

I. Рассмотрим уравнение (1.1) в специальном случае

$$L = \alpha L^2 + \beta L + [L, A] \quad (3.1)$$

в пространстве дифференциальных операторов, причем

$$\begin{aligned} L &= -d_x^2 + u_x(t, x), \\ A &= \frac{1}{2} \alpha x d_x^3 + v d_x + w + \gamma(4d_x^3 - 6u_x d_x - 3u_{xx}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь α, β, γ — постоянные, а функции $v(t, x), w(t, x)$ необходимо найти из уравнения (3.1). Уравнение (3.1), (3.2) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений (коэффициенты при операторах $d_x^2, d_x, 1$):

$$\begin{aligned} v_x + \alpha u_x + \frac{3}{4} \alpha x u_{xx} + \frac{1}{2} \beta &= 0, \\ w_x + \frac{1}{2} v_{xx} + \alpha u_{xx} + \frac{3}{4} \alpha x u_{xxx} &= 0, \\ u_{tx} = \gamma (6u_x u_{xx} - u_{xxxx}) + \alpha (u_x^2 - u_{xxx}) + \beta u_x - \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} x u_{xxxx} - v u_{xx} - w_{xx}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из первых двух уравнений (3.3) находим

$$v = -\frac{1}{4} \alpha u - \frac{3}{4} \alpha x u_x - \frac{1}{2} \beta x, \quad w = \frac{1}{4} \alpha u_x - \frac{3}{8} \alpha x u_{xx}. \quad (3.4)$$

Третье уравнение (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} u_{tx} = \gamma (6u_x u_{xx} - u_{xxxx}) + \alpha u_x^2 + \beta u_x - \\ - \frac{1}{8} \alpha x u_{xxx} - \frac{1}{2} \alpha u_{xxx} + \frac{1}{4} u_{xx} (3\alpha x u_x + \alpha u + 2\beta x). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Новое дифференциальное уравнение (3.5) эквивалентно операторному уравнению (3.1), (3.2), (3.4) и при $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma \neq 0$ переходит в уравнение Кортевега — де Фриза.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнение (3.5) имеет следующее точное решение — солитон

$$u(t, x) = -2\lambda(t) \operatorname{th}(\lambda(t)x - \varphi(t)), \quad (3.6)$$

где $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — произвольные функции времени, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\lambda} = -\frac{1}{2} \alpha \lambda^3 + \frac{1}{2} \beta \lambda, \quad \dot{\varphi} = 4\gamma \lambda^3. \quad (3.7)$$

Из вида производной

$$u_x(t, x) = -2\lambda^2(t) \operatorname{ch}^{-2}(\lambda(t)x - \varphi(t)) \quad (3.8)$$

следует, что солитон (3.6), (3.8) движется по оси x с переменной скоростью, изменяя при этом свою «ширину» и «глубину». Только в единственном случае $\lambda(t) \equiv \sigma^{1/2}$, $\sigma = \beta/\alpha > 0$ солитон (3.6), (3.8) движется без изменения своей формы.

II. Уравнение (3.5) может быть решено методом обратной задачи рассеяния, однако применение этого метода здесь является весьма нестандартным. Выведем уравнения для данных рассеяния, полагая, что функция $u(t, x)$ имеет следующую асимптотику при $|x| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty: u(t, x) &\rightarrow g(t), \\ x \rightarrow +\infty: u(t, x) &\rightarrow h(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для таких функций имеем $u_x(t, x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Пусть $\psi_n(t, x)$ — собственная функция оператора Шрёдингера, отвечающего собственному числу f_n , и, следовательно, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + u_x \psi_n &= f_n \psi_n, \quad f_n = -\lambda_n^2, \quad \lambda_n > 0, \\ \psi_n(t, x) &= \exp(\lambda_n x) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \\ \psi_n(t, x) &= b_n(t) \exp(-\lambda_n x) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так же как и в § 1, доказывается, что собственные числа f_n в силу уравнения (3.1) удовлетворяют уравнению вида (1.5):

$$\dot{f}_n = \alpha f_n^2 + \beta f_n. \quad (3.11)$$

Отсюда находим

$$f_n = \beta (c_n \exp(-\beta t) - \alpha)^{-1}. \quad (3.12)$$

Функции

$$F(f_i, f_n) = (\alpha f_i + \beta)(\alpha f_n + \beta)^{-1} f_n f_i^{-1} \quad (3.13)$$

являются первыми интегралами уравнения (3.5). В силу уравнения (3.11) справедливо уравнение

$$\dot{\lambda}_n + \frac{1}{2} \alpha \lambda_n^3 - \frac{1}{2} \beta \lambda_n = 0. \quad (3.14)$$

Продифференцируем равенство $L\psi_n = f_n \psi_n$ по времени и используем уравнение (3.1); получим

$$L(\dot{\psi}_n + A\psi_n) = (\dot{f}_n - \alpha f_n^2 - \beta f_n) \psi_n + f_n (\dot{\psi}_n + A\psi_n). \quad (3.15)$$

Из асимптотики (3.10) и формул (3.2), (3.4) получаем асимптотику при $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_n + A\psi_n &= \\ &= \left(\left(\dot{\lambda}_n + \frac{1}{2} \alpha \lambda_n^3 - \frac{1}{2} \beta \lambda_n \right) x + 4\gamma \lambda_n^3 - \frac{1}{4} \alpha \lambda_n g \right) \exp(\lambda_n x) \times \\ &\quad \times (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

В силу уравнений (3.15), (3.11) функция $\dot{\psi}_n + A\psi_n$ является собственной функцией оператора L , отвечающей собственному числу f_n . Поэтому из асимптотики (3.16) и уравнения (3.14) следует равенство

$$\dot{\psi}_n + A\psi_n = \left(4\gamma\lambda_n^3 - \frac{1}{4}\alpha\lambda_n g\right)\psi_n. \quad (3.17)$$

Подставляя это равенство в асимптотику (3.10) при $x \rightarrow +\infty$ и снова используя уравнение (3.14), получаем уравнение

$$\dot{b}_n = \left(8\gamma\lambda_n^3 - \frac{1}{4}\alpha\lambda_n(g+h)\right)b_n, \quad (3.18)$$

определяющее динамику коэффициента $b_n(t)$.

III. Спектральные функции $\psi(k, t, x)$ оператора L удовлетворяют условиям

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u_x \psi = k^2 \psi, \quad k > 0, \quad (3.19)$$

$$\psi(k, t, x) = \exp(-ikx) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$\psi(k, t, x) = a(k, t)\exp(-ikx) + b(k, t)\exp(ikx) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

В дальнейшем мы полагаем, что спектральный параметр k зависит от времени в силу уравнения

$$k_t = \frac{1}{2}\alpha k^3 + \frac{1}{2}\beta k. \quad (3.20)$$

Продифференцируем уравнение

$$L\psi = k^2\psi \quad (3.21)$$

по времени и используем равенства (3.1), (3.20). Получим

$$L(\psi_t + A\psi) = k^2(\psi_t + A\psi). \quad (3.22)$$

В асимптотике (3.19) при $x \rightarrow -\infty$ находим

$$\begin{aligned} \psi_t + A\psi = & \left(-ix\left(k_t - \frac{1}{2}\alpha k^3 - \frac{1}{2}\beta k\right) + 4\gamma ik^3 + \frac{1}{4}\alpha ikg\right)\exp(-ikx) \times \\ & \times (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Поэтому из равенств (3.22), (3.23) и уравнения (3.20)

следует равенство

$$\psi_t + A\psi = \left(4\gamma ik^3 + \frac{1}{4} \alpha ik g\right) \psi. \quad (3.24)$$

Подставляя в (3.24) асимптотику (3.19) при $x \rightarrow +\infty$, получаем линейные уравнения в частных производных для функций $a(k, t)$, $b(k, t)$.

$$a_t + a_k \left(\frac{1}{2} \alpha k^3 + \frac{1}{2} \beta k \right) = \frac{1}{4} \alpha ik (g - h) a, \quad (3.25)$$

$$b_t + b_k \left(\frac{1}{2} \alpha k^3 + \frac{1}{2} \beta k \right) = \left(8\gamma ik^3 + \frac{1}{4} \alpha ik (g + h) \right) b. \quad (3.26)$$

Уравнения (3.14), (3.18), (3.25), (3.26) определяют эволюцию данных рассеяния, отвечающую уравнению (3.5). Однако асимптотические характеристики решения $g(t)$ и $h(t)$ (3.9) здесь остаются не определенными. Их можно точно определить в случае солитонных решений (см. ниже).

IV Потенциал $u_x(t, x)$ определяется по данным рассеяния следующими формулами [5]:

$$u_x(x) = -2 \frac{dK(x, x)}{dx}, \quad (3.27)$$

$$K(x, x_1) + F(x + x_1) + \int_x^\infty K(x, z) F(z + x_1) dz = 0, \quad (3.28)$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n \exp(-\lambda_n x)}{ia'(i\lambda_n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r(k) e^{ikx} dk, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)},$$

в которые переменная t входит в виде параметра. Из уравнения (3.27) получаем формулу

$$u(t, x) = -2K(x, x, t) + G(t), \quad (3.29)$$

где $G(t)$ — произвольная функция, выбор которой определяет асимптотические характеристики решения $g(t)$ и $h(t)$.

Построим точные N -солитонные решения уравнения (3.5). Пусть функция $b(k, t) \equiv 0$. Тогда функция $a(k, t)$ определяется уравнением

$$a(k, t) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\lambda_n}{k + i\lambda_n}. \quad (3.30)$$

Подставим эту формулу в уравнение (3.25) и учтем уравнения (3.14). После простых преобразований получим

равенство

$$g - h = 4 \sum_{n=1}^N \lambda_n. \quad (3.31)$$

Определим функции

$$\beta_n(t) = b_n(t) / (ia' (i\lambda_n)), \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.32)$$

В соответствии с формулами Хироты [5] и формулой (3.29) потенциал $u(t, x)$ имеет вид

$$u(t, x) = -2 \frac{d}{dx} \ln \det A(t, x) + G(t), \quad (3.33)$$

$$A_{ij}(t, x) = \delta_{ij} + (\lambda_i + \lambda_j)^{-1} \beta_i(t) \exp(-(\lambda_i + \lambda_j)x),$$

где $A_{ij}(t, x)$ — компоненты матрицы $A(t, x)$, $i, j = 1, \dots, N$. В силу условия $\lambda_i > 0$ асимптотика функции $u(t, x)$ (3.33) определяется формулами

$$x \rightarrow -\infty: u(t, x) \rightarrow 4 \sum_{n=1}^N \lambda_n + G(t), \quad (3.34)$$

$$x \rightarrow +\infty: u(t, x) \rightarrow G(t).$$

В силу (3.34) необходимое условие (3.31) выполнено при любой функции $G(t)$. При $t \rightarrow \pm\infty$ решение (3.33) распадается в сумму односолитонных решений (3.6), для которых справедливо равенство $g(t) + h(t) = 0$. Следовательно, это же равенство справедливо и для решения (3.33), что в силу (3.9) и (3.34) однозначно определяет вид функции $G(t)$:

$$G(t) = h(t) = -g(t) = -2 \sum_{n=1}^N \lambda_n(t). \quad (3.35)$$

При $N = 1$ формулы (3.33), (3.35) определяют солитон (3.6), (3.7). При $\beta/\alpha = \sigma > 0$ поведение N -солитонного решения (3.33), (3.35) существенно зависит от расположения чисел $\lambda_n(t)$, изменяющихся в силу уравнения (3.14) относительно точки $\sigma^{1/2}$. При $\lambda_n(0) < \sigma^{1/2}$ для всех t справедливы неравенства $0 < \lambda_n(t) < \sigma^{1/2}$; при $\lambda_n(0) > \sigma^{1/2}$ функция $\lambda_n(t)$ становится неограниченной при изменении t . Поэтому поведение N -солитонных решений уравнения (3.5) существенно отличается от N -солитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза, которое вкладывается в уравнение (3.5) при $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

V. Рассмотрим уравнение (3.1) в случае матричных операторов L и A вида

$$L = ip_0 dx + u_0, \quad A = (-1 - \alpha x) ip_0 d_x^2 - (u_0(1 + \alpha x) + \beta x) dx + w_0, \\ ip_0 = \begin{pmatrix} ip_1 & 0 \\ 0 & ip_2 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u} \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_4 & w_3 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

где $u(t, x)$ — неизвестная комплекснозначная функция, α, β, p_1, p_2 — вещественные постоянные. Из уравнения (3.1), (3.36) следует, что матричные элементы w_k должны иметь вид

$$w_1 = iq((1 + \alpha x)|u|^2 + \alpha v), \quad q = (p_1 - p_2)^{-1}, \\ v_x = |u|^2, \quad w_3 = -w_1, \quad (3.37)$$

$$w_2 = -q(p_1(1 + \alpha x)\bar{u}_x + \alpha p_2\bar{u}),$$

$$w_4 = q(p_2(1 + \alpha x)u_x + \alpha p_1u).$$

В этом случае операторное уравнение (3.1), (3.36) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$-iu_t = p_1 p_2 q((1 + \alpha x)u)_{xx} - i\beta(xu)_x + \\ + 2qu((1 + \alpha x)|u|^2 + \alpha v). \quad (3.38)$$

Это дифференциальное уравнение при $\alpha = 0, \beta = 0$ совпадает с нелинейным уравнением Шрёдингера. Предыдущие построения данного параграфа применимы также и к уравнению (3.38). Поэтому уравнение (3.38) является интегрируемым негамильтоновым возмущением нелинейного уравнения Шрёдингера.

З а м е ч а н и е. Аттракторы в нелинейных уравнениях, удовлетворяющих алгебраической конструкции (1.1), оказываются гладкими многообразиями (орбиты действия некоторой группы автоморфизмов) и поэтому не являются «странными аттракторами». Другой класс нелинейных уравнений с частными производными, обладающих аттракторами, изучался в большом цикле работ, начавшемся работой [90] (см. обзор [91]).

ГЛАВА II

ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ СОЛИТОНЫ В ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЯХ

Широко известно, что из уравнения Лакса

$$\dot{L} = [L, A],$$

которое называют также уравнением изоспектральной деформации, следует постоянство собственных чисел оператора L . Одним из следствий этого обстоятельства является простейшая динамика солитонных решений. Однако это не верно, если оператор L параметрически зависит от дополнительных переменных, дифференцирования по которым входят в оператор A , но не входят в оператор L . В данной главе изучается класс нелинейных уравнений, зависящих от трех (t, x, y) и более переменных, которые допускают представление Лакса. Тем не менее собственные числа $f(t, y)$ соответствующих операторов L изменяются и удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям [16], частным случаем которых является классическое уравнение для волны Римана

$$v_t + vv_y = 0.$$

В силу этих уравнений с течением времени происходит, как и для волны Римана $v(t, y)$, опрокидывание графиков собственных чисел $f(t, y)$, что приводит к возникновению их многозначности. Такое же опрокидывание происходит и в солитонных и N -солитонных решениях, которые мы будем называть в дальнейшем опрокидывающимися солитонами. Среди уравнений, обладающих указанными свойствами, содержится уравнение, возникающее в теории нелинейных волн и имеющее физические применения.

§ 1. Двумерное интегрируемое уравнение

I. Во многих задачах гидродинамики возникают одномерные волны Римана, которые определяются уравнением

$$v_t = kvv_y. \quad (1.1)$$

В работах [31, 32] изучались системы гидродинамического типа, включающие в себя уравнение (1.1) и возникающие при усреднении интегрируемых уравнений по методу Боголюбова — Уизема.

Исследуем вопрос о двумерном взаимодействии волны Римана (1.1), распространяющейся по оси y , с длинными волнами, распространяющимися по оси x . Подобное взаимодействие в некотором приближении наблюдается в волнах на поверхности моря. Какое уравнение может описывать это взаимодействие?

Естественным требованием к уравнению нелинейных волн является линейность по старшим производным и наличие у линеаризованного уравнения волновых решений вида $v(t, x, y) = a \cos(k_1 x + k_2 y - \omega t)$. Вследствие этого каждое слагаемое в линеаризованном уравнении должно содержать производные только нечетного порядка. Так же естественно предположить, что уравнение в целом имеет квадратичную нелинейность и для функций, не зависящих от x , переходит в уравнение волны Римана (1.1), а для функций, зависящих от одной пространственной переменной $z = x + cy$ (при произвольных постоянных c), переходит в уравнение длинных волн — в уравнение Кортевега — де Фриза

$$v_t = m_1 v_z + m_2 v v_z + m_3 v_{zzz}. \quad (1.2)$$

Разумеется, эти предположения означают наличие некоторой анизотропии среды по отношению к дисперсии волн. Уравнение с производными третьего порядка, удовлетворяющее перечисленным условиям, может иметь только следующий вид:

$$v_t = c_1 v_x + c_2 v v_x + c_3 v v_y + c_4 v_x \partial_x^{-1} v_y + c_5 v_{xxx} + c_6 v_{xxy} + c_7 v_{xyy} + c_8 v_x \partial_x^{-2} v_{yy} + c_9 v_x \partial_x^{-3} v_{yyy}. \quad (1.3)$$

В этом уравнении нет слагаемых

$$c_{10} v_y, \quad c_{11} v_y \partial_x^{-1} v_y, \quad c_{12} v_x \partial_y^{-1} v_x, \quad c_{13} v_y \partial_y^{-1} v_x, \quad c_{14} v_{yyy}, \\ c_{15} v_x^2, \quad c_{16} v_x v_y, \quad c_{17} v_y^2, \quad c_{18} v_x v_{xx}, \quad c_{19} v_y v_{xx} \text{ и т. д.},$$

так как они не удовлетворяют указанным условиям.

Всюду в дальнейшем операторы ∂_x^{-1} и ∂_y^{-1} однозначно определяются формулами

$$(\partial_x^{-1}v)(x, y) = \int_0^x v(\xi, y) d\xi, \quad (\partial_y^{-1}v)(x, y) = \int_0^y v(x, \xi) d\xi.$$

В уравнении (1.3) слагаемое c_1v_x устраняется с помощью замены координат

$$x' = x + c_1t, \quad y' = y, \quad t' = t. \quad (1.4)$$

Слагаемые c_2vv_x и c_5v_{xxx} устраняются по отдельности с помощью замены

$$x'' = x' + c_0y', \quad y'' = y', \quad t'' = t', \quad (1.5)$$

где $c_0 = -c_2/(c_3 + c_4)$ и $c_0 = -c_5/(c_6 + c_7)$, и одновременно если выполнено соотношение $c_2/(c_3 + c_4) = c_5/(c_6 + c_7)$. Другие линейные замены координат, отличные от (1.4), (1.5), приводят только к усложнению уравнения (1.3). Поэтому существенная, неустраняемая часть этого уравнения имеет вид

$$v_t = c_3vv_y + c_4v_x\partial_x^{-1}v_y + c_6v_{xxy} + c_7v_{xyy} + \\ + c_8v_x\partial_x^{-2}v_{yy} + c_9v_x\partial_x^{-3}v_{yyy}. \quad (1.6)$$

В дальнейшем рассматривается простейший случай уравнения (1.6), удовлетворяющий естественному условию, что уравнение, как и уравнение волны Римана (1.1), содержит минимальное возможное число производных по координате y , т. е. имеет вид

$$v_t = kvv_y + mv_x\partial_x^{-1}v_y - sv_{xxy}. \quad (1.7)$$

II. Перечислим некоторые свойства уравнения (1.7). Для функций $v(t, x, y)$, не зависящих от x , уравнение (1.7) переходит в уравнение волны Римана (1.1). Для функций $v(t, x, y)$ вида $v(t, x, y) = u(t, z)$, $z = x + c^{-1}y$, уравнение (1.7) переходит в уравнение КдФ

$$cu_t = (k + m)uu_z - su_{zzz}. \quad (1.8)$$

Для функций $v(t, x, y)$ вида

$$v(t, x, y) = u(\tau, x), \quad \tau = ct + y,$$

уравнение (1.7) переходит в уравнение

$$cu_\tau = kuu_\tau + mu_x\partial_x^{-1}u_\tau - su_{xxt}, \quad (1.9)$$

которое исследовалось в работах [33, 34] при дополнительных предположениях $k = 2m$ и $k = m$.

После замены $v = u_x$ уравнение (1.7) принимает вид

$$u_{xt} = ku_x u_{xy} + mu_y u_{xx} - su_{xxx}, \quad (1.10)$$

Нетрудно проверить, что производные по t от выражений

$$P_1(u) = u_x^2, \quad P_2(u) = \frac{3s}{k+m} u_{xx}^2 + u_x^3$$

в силу уравнения (1.10) имеют дивергентный вид. Поэтому уравнение (1.10) обладает двумя первыми интегралами

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx dy, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3s}{k+m} u_{xx}^2 + u_x^3 \right) dx dy,$$

которые аналогичны интегралам импульса и энергии для уравнения КдФ (1.8).

При $k = m$ уравнение (1.10) эквивалентно эволюционному уравнению

$$u_t = u_x u_y - u_{xy}. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.10) имеет следующие точные решения:

$$u(t, x, y) = -2\lambda \xi \left(\frac{\lambda(k+m)}{6s} x + \varphi(y + Vt) \right) + Vx, \quad (1.12)$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция, λ , V — произвольные постоянные, $\xi(x)$ — классическая ξ -функция Вейерштрасса, $\xi'(x) = -\wp(x)$. $\wp$ -функция Вейерштрасса является двоякопериодической и мероморфной; ξ -функция удовлетворяет соотношениям

$$\xi(z + 2\omega) = \xi(z) + 2\eta, \quad \xi(z + 2\omega') = \xi(z) + 2\eta'$$

и определяется сходящимся рядом

$$\xi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n} \left(\frac{1}{z - w_{mn}} + \frac{1}{w_{mn}} + \frac{z}{w_{mn}^2} \right), \quad (1.13)$$

где $w_{mn} = 2m\omega + 2n\omega'$ — векторы решетки периодов на комплексной плоскости. Доказательство того, что формула (1.12) определяет решение уравнения (1.10), следует из уравнения $\wp''' = 12\wp\wp'$ для $\wp$ -функции Вейерштрасса [176].

Уравнение (1.10) имеет автомодельные решения следующего вида:

$$u(t, x, y) = t^\alpha u(z, v), \quad z = xt^\alpha, \quad v = yt^{-1-2\alpha}, \quad (1.14)$$

где α — произвольный параметр. Уравнение (1.10) после подстановки выражений (1.14) принимает вид

$$2\alpha u_z + \alpha z u_{zz} - (1 + 2\alpha) v u_{zv} = k u_z u_{zv} + m u_v u_{zz} - s u_{zzzv}. \quad (1.15)$$

В двух специальных случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = -1/2$ уравнение (1.15) обладает трансляционной инвариантностью по одной из координат z, v . При $\alpha = -1/3$ уравнение (1.15) имеет одномерные автомодельные решения $u(z, v) = u(\xi)$, $\xi = z + v$, для которых сводится к уравнению

$$-\frac{1}{3}(2f + \xi f') = (k + m)ff' - sf''', \quad f = u',$$

известному из теории уравнения КдФ.

Предельными к решениям вида (1.14) являются автомодельные решения

$$u(t, x, y) = e^t u(z, v), \quad z = xe^t, \quad v = ye^{-2t},$$

для которых уравнение (1.10) сводится к уравнению

$$2u_z + z u_{zz} - 2v u_{zv} = k u_z u_{zv} + m u_v u_{zz} - s u_{zzzv}.$$

III. Уравнения (1.10) при различных значениях параметра k/m не эквивалентны — все масштабные преобразования сохраняют это отношение. Значение параметра $k/m = 2$ оказывается выделенным. В этом случае уравнение (1.10) гамильтоново и имеет вид

$$u_t = \partial_x^{-1} \delta H / \delta u,$$

где гамильтониан $H(u)$ определен формулой

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \left(\frac{s}{2} u_{xxx} - \frac{m}{2} u_x^2 \right) u_y dx dy.$$

При $k/m = 2$ уравнение (1.10) после масштабного преобразования $x' = \frac{m}{2s} x$, $y' = \frac{4s}{m^2} y$ принимает вид

$$u_{tx} = 4u_x u_{xy} + 2u_y u_{xx} - u_{xxx} u_y. \quad (1.16)$$

Именно это уравнение ввиду его выделенного характера и будет исследоваться в дальнейшем.

IV. Важным свойством уравнения (1.16) является наличие для него эквивалентного представления Лакса

$$L_t = [L, A], \quad (1.17)$$

где L — оператор Шрёдингера

$$L = -\partial_x^2 + u_x(t, x, y), \quad (1.18)$$

A — кососимметрический оператор

$$A = -2(\partial_v L + L\partial_v) - (u_v \partial_x + \partial_x u_v); \quad (1.19)$$

здесь $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_v = \partial/\partial v$.

Существенно, что в представлении Лакса (1.17) — (1.19) оператор L является одномерным дифференциальным оператором. Вследствие этого, как будет показано в дальнейшем (см. § 3), уравнение (1.16) является интегрируемым методом одномерной обратной задачи рассеяния. Поэтому уравнение (1.16) вкладывается в построенный в работах [13—15] класс нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью обратного спектрального преобразования, ассоциированного с матричным оператором Шрёдингера. Основным применением методов работ [13—15] было открытие интегрируемого одномерного «уравнения бумерона».

Уравнение Лакса (1.17) после добавления к оператору A (1.19) оператора

$$A_1 = \gamma(4\partial_x^3 - 3(u_x \partial_x + \partial_x u_x)) \quad (1.20)$$

приводит к нелинейному уравнению, которое относится к общему классу уравнений (1.3):

$$u_{tx} = 4u_x u_{xy} + 2u_y u_{xx} - u_{xxx} u + \gamma(6u_x u_{xx} - u_{xxx}). \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) эквивалентно уравнению (1.16) и преобразуется в него заменой координат $x' = x - \gamma y$, $y' = y$.

В заключение разумею: в данном параграфе показано, что двумерное уравнение

$$v_t = 4vv_y + 2v_x \partial_x^{-1} v_y - v_{xxy} + \gamma(6vv_x - v_{xxx}), \quad (1.22)$$

описывающее взаимодействие волны Римана, распространяющейся по оси y , с длинными волнами, распространяющимися по оси x , допускает эквивалентное представление Лакса (1.17) — (1.19). Подробное исследование уравнения (1.21) — (1.22) приведено ниже, в § 2 и 3.

§ 2. Основная лемма

I. Существование представления Лакса с операторами L и A вида (1.18), (1.19) приводит к возникновению у уравнения (1.16), (1.21) новых свойств, отличающих его от известных ранее интегрируемых нелинейных уравнений. К таким свойствам относится наличие опрокидывающихся солитонов и явление опрокидывания в поведе-

нии собственных чисел оператора L , рассматриваемого как одномерный дифференциальный оператор по x , зависящий от параметров t и y . Эти свойства присущи широкому классу многомерных нелинейных уравнений, включающему уравнения (1.16), (1.21), который и изучается в данном параграфе.

В предыдущей главе были построены нелинейные дифференциальные уравнения и динамические системы, допускающие эквивалентное представление в виде операторного уравнения

$$L_t = P(L) + [L, A]. \quad (2.1)$$

При этом было показано, что в рассмотренных случаях собственные числа f оператора L удовлетворяют уравнению $f_t = P(f)$.

В дальнейшем уравнение (2.1) рассматривается в более общей ситуации, когда L — самосопряженный (вообще говоря, матричный) дифференциальный оператор по одной переменной x_1 , параметрически зависящий от времени t и дополнительных переменных $x_2, \dots, x_n$. Например, L может иметь вид одномерного оператора Шрёдингера

$$L = -d_x^2 + u(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad d_i = \partial/\partial x_i,$$

или эрмитового матричного оператора первого порядка

$$L = \begin{pmatrix} ip_1 & 0 \\ 0 & ip_2 \end{pmatrix} d_x + \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}(t, x_i) \\ u(t, x_i) & 0 \end{pmatrix}.$$

Возможны и другие типы операторов L .

Предположим, что оператор A является кососимметрическим (или косоэрмитовым) оператором следующего вида:

$$A = \sum_{i=2}^n F_i(L) d_i + A_0, \quad F_i(L) = \sum_{h=1}^N \bar{c}_{ih} L^h, \quad (2.2)$$

где A_0 — дифференциальный оператор только по переменной x_1 , параметрически зависящий от $t, x_2, \dots, x_n$, $\bar{c}_{ih} = \bar{c}_{ih}(t, x_2, \dots, x_n)$ — произвольные гладкие функции. Оператор A (1.31), очевидно, имеет вид (2.2). Возможность применения операторов A вида (2.2) для построения (по методу Лакса) многомерных нелинейных уравнений отмечалась в работах [35, 36].

Предположим, что функция $P(L)$ имеет вид

$$P(L) = \sum_{k=0}^m a_k L^k, \quad (2.3)$$

где $a_k = a_k(t, x_2, \dots, x_n)$ — произвольные гладкие функции.

Лемма 1. В силу уравнения (2.1) — (2.3) собственные числа оператора L удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=2}^n F_i(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} = P(f). \quad (2.4)$$

Доказательство. Представим оператор L в виде

$$L = QL_0Q^{-1}, \quad (2.5)$$

где Q — некоторый унитарный оператор, действующий в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ функций от x_1 и параметрически зависящий от $t, x_2, \dots, x_n$. Выведем из уравнений (2.1) — (2.3), (2.5) уравнения, которым должны удовлетворять операторы L_0 и Q .

В силу тождества $L^j d_i L^{k-j} = L^k d_i + L^j d_i (L^{k-j})$ справедливо равенство

$$L^k d_i = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k L^j d_i L^{k-j} - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k L^j d_i (L^{k-j}).$$

Поэтому оператор A (2.2) можно представить в виде

$$A = \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N \left(c_{ik} \sum_{j=0}^k L^j d_i L^{k-j} + \sum_{j=0}^k L^j d_i L^{k-j} c_{ik} \right) + A_1, \quad (2.6)$$

$$A_1 = A_0 - \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N \left(2c_{ik} \sum_{j=0}^k L^j d_i (L^{k-j}) - L^k d_i (c_{ik}) \right),$$

где $c_{ik}(t, x_2, \dots, x_n) = \bar{c}_{ik}(2k+2)^{-1}$. Здесь использовано, что функции $c_{ik}(t, x_2, \dots, x_n)$ коммутируют с оператором L , который содержит только дифференцирование по переменной x_1 , но не коммутируют с операторами $d_i = \partial/\partial x_i$, $i = 2, \dots, n$. Первое слагаемое в кососимметрическом операторе A (2.6), очевидно, является кососимметрическим. Поэтому и оператор A_1 тоже кососимметрический; по построению это дифференциальный оператор только по одной переменной x_1 .

Справедливы тождества

$$\left[L, \sum_{j=0}^k L^j d_i L^{k-j} \right] = [L^{k+1}, d_i] = -d_i (L^{k+1}). \quad (2.7)$$

Поэтому из представления (2.6) в силу коммутативности оператора L и функций $c_{ik}(t, x_2, \dots, x_n)$ получаем формулу

$$[L, A] = -2 \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N c_{ik} d_i(L^{k+1}) + [L, A_1]. \quad (2.8)$$

Элементарное вычисление приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} d_i(L^{k+1}) &= d_i(QL_0^{k+1}Q^{-1}) = [d_i(Q)Q^{-1}, L^{k+1}] + \\ &+ Qd_i(L_0^{k+1})Q^{-1} = \left[\sum_{j=0}^k L^j d_i(Q)Q^{-1}L^{k-j}, L \right] + \\ &+ Qd_i(L_0^{k+1})Q^{-1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$d_t(L) = [d_t(Q)Q^{-1}, L] + Qd_t(L_0)Q^{-1}, \quad P(L) = QP(L_0)Q^{-1}.$$

Уравнение (2.1) после подстановки равенств (2.8), (2.9) принимает вид

$$\begin{aligned} [d_t(Q)Q^{-1}, L] + Qd_t(L_0)Q^{-1} &= QP(L_0)Q^{-1} + [L, A_1] - \\ &- 2 \left[\sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N c_{ik} \sum_{j=0}^k L^j d_i(Q)Q^{-1}L^{k-j}, L \right] - \\ &- 2 \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N c_{ik} Qd_i(L_0^{k+1})Q^{-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определим унитарный оператор Q как решение следующего дифференциального уравнения:

$$d_t(Q)Q^{-1} + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N c_{ik} \sum_{j=0}^k L^j d_i(Q)Q^{-1}L^{k-j} = -A_1. \quad (2.11)$$

(Все слагаемые в этом уравнении являются кососимметрическими операторами.) Тогда в силу уравнения (2.1), (2.10) оператор L_0 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d_t(L_0) + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N c_{ik} d_i(L_0^{k+1}) = P(L_0). \quad (2.12)$$

Укажем начальные данные для операторов Q и L_0 при $t \subset \bar{t}$ в уравнениях (2.11), (2.12). Для этого рассмотрим задачу на собственные значения для оператора L : $L\psi = f\psi$. Выделим непрерывные ветви собственных чисел $f(t, x_2, \dots, x_n)$. В окрестности точки $p = (\bar{t}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, в которой эти ветви не пересекаются (общее положение),

соответствующие им собственные функции $\psi_f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ортогональны в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ функций от x_1 . При $t = \bar{t}$ определим унитарный оператор $Q(\bar{t}, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности точки p так, чтобы

$$(Q^{-1}\psi_f)(\bar{t}, x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_f(\bar{t}, x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \quad (2.13)$$

где собственные функции ψ_f соответствуют одной ветви собственных чисел $f(\bar{t}, x_2, \dots, x_n)$. Функция $(Q^{-1}\psi_f)(\bar{t}, x_1, x_2, \dots, x_n)$ является собственной функцией оператора $L_0 = Q^{-1}LQ$ и в силу (2.13) не зависит от $x_2, \dots, x_n$. Такое построение определяет начальные данные для операторов Q и L_0 при $t = \bar{t}$ в уравнениях (2.11), (2.12).

При указанных начальных данных уравнение (2.12) имеет решение — оператор L_0 , который при всех $t, x_2, \dots, x_n$ в окрестности точки p имеет одно и то же множество собственных функций $\psi_f(\bar{t}, x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Соответствующие им собственные числа $f(t, x_2, \dots, x_n)$ в силу (2.12) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^N c_{ik}(k+1) f^k \frac{\partial f}{\partial x_i} = P(f) \quad (2.14)$$

с начальными значениями $f(\bar{t}, x_2, \dots, x_n)$. Унитарный оператор $Q(t, x_2, \dots, x_n)$ определяется из уравнения (2.11) при указанных начальных значениях $Q(\bar{t}, x_2, \dots, x_n)$. Уравнение (2.14) совпадает с уравнением (2.4), поскольку собственные числа операторов L и $L_0 = Q^{-1}LQ$ совпадают и $c_{ik} = \bar{c}_{ik}(2k+2)^{-1}$. Поэтому уравнение (2.4) справедливо в окрестности всех точек p общего положения (в смысле дискретного спектра оператора L). Лемма 1 доказана.

II. Важной областью применения леммы 1 являются уравнения, допускающие представление Лакса $L_t = [L, A]$ с оператором A вида (2.2). В этом случае собственные числа оператора L удовлетворяют уравнению (2.4) с $P(f) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=2}^n F_i(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) является законом сохранения: из него следует, что для любой области G с границей S в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ справедливы уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G f^h(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_S (\Phi_h, n) d\sigma, \quad (2.16)$$

где k — произвольное натуральное число, n — вектор нормали к поверхности S , Φ_k — вектор с компонентами $\Phi_{ki}(f)$, причем $d\Phi_{ki}(f)/df = -kf^{k-1}F_i(f)$. Если функция $f(t, x_2, \dots, x_n)$ убывает достаточно быстро при $|x_i| \rightarrow \infty$, то уравнение (2.15) имеет счетное множество сохраняющихся величин

$$I_k = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^k(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n. \quad (2.17)$$

Таким образом, в силу леммы 1 для уравнения Лакса $L_t = [L, A]$ сохраняются не собственные числа $f(t, x_2, \dots, x_n)$ оператора L , а интегралы I_k от их степеней (2.17).

Здесь возникает кажущееся противоречие с известным утверждением Лакса о сохранении собственных чисел оператора L в силу уравнения $L_t = [L, A]$. Объяснение этого парадокса состоит в следующем. Оператор L действует как в пространстве H_1 функций, зависящих только от одной переменной x_1 , так и в пространстве H_n функций, зависящих от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, в то время как оператор A действует только в пространстве функций H_n . При доказательстве теоремы Лакса операторы L и A рассматриваются в том пространстве, где они одновременно определены, т. е. в пространстве H_n . Собственные числа $f(t, x_2, \dots, x_n)$ оператора L определяются в пространстве H_1 и в общем случае не связаны с собственными числами оператора L в пространстве H_n , которые остаются неизменными в силу теоремы Лакса.

Простейший пример применения Основной леммы возникает, когда оператор L является диагональной матрицей с компонентами $L_{ij} = f_i(t, x)\delta_{ij}$, а оператор $A = -F(L)\partial/\partial x$. Соответствующее уравнение Лакса эквивалентно системе уравнений на собственные числа $f_i(t, x)$:

$$f_{it} = F(f_i)f_{ix}. \quad (2.18)$$

Замечание 1. В уравнении (2.4) функции $F_i(t)$, $P(f)$ являются многочленами от f с коэффициентами c_{ik} , a_k , которые являются произвольными гладкими функциями от $t, x_2, \dots, x_n$. Доказательство леммы 1 переносится и на более широкие классы функций $F_i(f)$, $P(f)$, например, аналитические или мероморфные. Поэтому практически любое квазилинейное уравнение вида (2.4); (2.15) возникает как уравнение на собственные числа оператора L в конструкции (2.1), (2.2).

Уравнение (2.15) для функций f вида

$$f(t, x_2, \dots, x_n) = f(t, x), \quad x = c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

после введения обозначения $v = c_2 F_2(f) + \dots + c_n F_n(f)$ и умножения на dv/df переходит в уравнение волны Римана

$$v_t + vv_x = 0. \quad (2.19)$$

Во всех не постоянных решениях уравнения (2.19) возникает явление опрокидывания (перехлеста) фронта волны $v(t, x)$ и решение становится многозначным.

Уравнение опрокидывающейся волны Римана (2.19) допускает представление Лакса $L_t = [L, A]$ со скалярным оператором $L = v(t, x)$ и дифференциальным оператором $A = v(t, x) \partial/\partial x$ и является простейшим примером применения леммы 1.

Важнейшим свойством квазилинейных дифференциальных уравнений (2.4) и (2.15) является возникновение многозначности решений, которую, однако, исходя из аналогии с газовой динамикой, часто исключают введением разрывных решений — ударных волн. Условия сшивки решений на разрыве обобщают известные условия Рэнкина — Гюгонио [169].

З а м е ч а н и е 2. Из теории одномерных интегрируемых уравнений известно, что структура солитонных решений таких уравнений связана с собственными числами соответствующего оператора L . Двумерные уравнения, допускающие операторное представление вида (2.1) — (2.2), и подобные им уравнения более высокой размерности также обладают солитонными решениями, структура которых связана с собственными числами $f(t, x_2, \dots, x_n)$ оператора L . Существенно, что ввиду указанного поведения собственных чисел многомерные солитоны, как и функции $f(t, x_2, \dots, x_n)$, являются опрокидывающимися (при $P(f) = 0$). Такие *опрокидывающиеся солитоны* будут построены ниже для нескольких двумерных уравнений. Следуя аналогии с газовой динамикой, можно рассматривать разрывные решения $f(t, x_2, \dots, x_n)$ квазилинейного уравнения (2.15). Соответствующие им солитонные решения также имеют разрывы, являющиеся ударными волнами, и поэтому будут называться в дальнейшем *ударными солитонами*.

III. Пусть $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — собственная функция оператора L , отвечающая собственному числу $f(t, x_2, \dots, x_n)$.

Л е м м а 2. В силу уравнений (2.1) — (2.3) справедливо уравнение

$$L(\psi_t + A\psi) = f(\psi_t + A\psi). \quad (2.20)$$

Доказательство. После дифференцирования равенства $L\psi = f\psi$ по времени находим

$$L_t\psi + L\psi_t = f_t\psi + f\psi_t.$$

Заменяя здесь L_t и f_t в силу уравнений (2.1), (2.4), получаем уравнение

$$L(\psi_t + A\psi) = - \sum_{i=2}^n F_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \psi + f\psi_t + A(f\psi). \quad (2.21)$$

Последнее слагаемое в силу формулы (2.2) и ввиду того, что функция $f(t, x_2, \dots, x_n)$ не зависит от x_1 , имеет вид

$$A(f\psi) = fA(\psi) + \sum_{i=2}^n F_i(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \psi. \quad (2.22)$$

Поэтому из равенств (2.21), (2.22) следует уравнение (2.20). Лемма 2 доказана.

Таким образом, функция $\psi_t + A\psi$ в силу операторного уравнения (2.1) также является собственной функцией оператора L . Лемма 2 в дальнейшем будет использоваться (так же, как она используется всегда для операторного уравнения Лакса) при применении метода одномерной обратной задачи рассеяния.

Замечание 3. Данные рассеяния для оператора L (в тех случаях, когда они определены) в силу уравнения (2.1) — (2.2) удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка по переменным $t, x_2, \dots, x_n$. Эти уравнения в ряде случаев допускают полное решение. Соответствующие уравнения, эквивалентные операторным уравнениям (2.1) — (2.2), интегрируются методом обратной задачи рассеяния, связанной с оператором L .

§ 3. Опрокидывающиеся солитоны и N -солитонные решения

I. Уравнение (1.21) — (1.22) допускает представление Лакса (1.17) с оператором A вида (1.19). Поэтому к уравнению (1.21) — (1.22) и собственным числам соответствующего оператора L (1.18) полностью применима лемма 1 из § 2, согласно которой собственные числа $f(t, y)$ удовлетворяют уравнению волны Римана

$$f_t - 4ff_y = 0. \quad (3.1)$$

Этот результат является весьма естественным, учитывая физический смысл уравнения (1.21) — (1.22) — взаимодействие волны Римана, распространяющейся по оси y , с длинными волнами, распространяющимися по оси x .

Построим солитонные решения уравнения (1.21), которые будем искать в виде бегущих волн

$$u(t, x, y) = \lambda(t, y)a(\xi), \quad \xi = \lambda(t, y)x - \varphi(t, y), \quad (3.2)$$

где $\lambda(t, y)$, $\varphi(t, y)$, $a(\xi)$ — неизвестные функции. После подстановки функции (3.2) в уравнение (1.21) нетрудно убедиться, что функции $\lambda(t, y)$ и $\varphi(t, y)$ обязаны удовлетворять уравнениям

$$\lambda_t = m\lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = m(\lambda^2\varphi_y - \gamma\lambda^3), \quad (3.3)$$

где m — некоторая постоянная. При выполнении этих условий уравнение (1.21) для функции $u(t, x, y)$ (3.2) сводится к следующим двум уравнениям относительно функции $a(\xi)$:

$$2a''' = aa'' + 4a'^2 - ma', \quad (3.4)$$

$$a^{IV} = 6a'a'' - ma''. \quad (3.5)$$

Покажем, что полученная система двух уравнений совместна и эквивалентна одному уравнению

$$2a' = a^2 + m. \quad (3.6)$$

Действительно, проинтегрируем уравнение (3.5) по ξ , получим

$$a''' = 3a'^2 - ma' - c_1. \quad (3.7)$$

Вычтем из уравнения (3.4) уравнение (3.7) и затем вычтем удвоенное уравнение (3.7), получим

$$a''' = (aa')' + c_1, \quad (3.8)$$

$$aa'' = 2a'^2 - ma' - 2c_1. \quad (3.9)$$

Интегрируя уравнение (3.8) два раза по ξ , находим

$$a'' = aa' + c_1\xi + c_2, \quad (3.10)$$

$$a' = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c_1\xi^2 + c_2\xi + c_3. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.9) после подстановки выражения (3.10) принимает вид

$$a'(2a' - a^2 - m) = a(c_1\xi + c_2) + 2c_1. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.11), (3.12), которые эквивалентны исходной системе (3.4), (3.5), являются совместными только при условиях $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = m/2$ и в этом случае совпадают с уравнением (3.6).

Таким образом, уравнение (1.21) для функции $u(t, x, y)$ (3.2) сводится к уравнениям (3.3) и (3.6). Решения уравнения (3.6) имеют вид:

$$\text{при } m = b^2 \quad a(\xi) = b \operatorname{tg} \left(\frac{b}{2} \xi + c \right), \quad (3.13)$$

$$\text{при } m = 0 \quad a(\xi) = -2(\xi - c)^{-1}, \quad (3.14)$$

$$\text{при } m = -b^2 \quad a(\xi) = -b \operatorname{cth} \left(\frac{b}{2} \xi + c \right), \quad (3.15)$$

$$a(\xi) = -b \operatorname{th} \left(\frac{b}{2} \xi + c \right). \quad (3.16)$$

Особые точки $a = \pm b$ уравнения (3.6) отражают наличие волны Римана (1.1) в решениях общего уравнения (1.3). Функции (3.13) — (3.15) имеют сингулярности на оси ξ , поэтому сингулярности имеют и соответствующие им решения (3.2). Функция (3.16) не имеет особенностей. Соответствующая формула (3.2) определяет гладкое решение уравнения (1.21) — (1.22). После замены $\lambda_1 = \frac{1}{2} b \lambda$, $\varphi_2 = \frac{1}{2} b \varphi$ приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 1. Уравнение (1.21) — (1.22) имеет точные опрокидывающиеся решения двух типов. Решения первого типа являются гладкими и определяются формулами

$$u(t, x, y) = -2\lambda(t, y) \operatorname{th}(\lambda(t, y)x - \varphi(t, y)), \quad (3.17)$$

где $\lambda(t, y)$, $\varphi(t, y)$ — произвольные решения уравнений

$$\lambda_t + 4\lambda^2 \lambda_y = 0, \quad \varphi_t + 4\lambda^2 \varphi_y = 4\gamma \lambda^3. \quad (3.18)$$

Решения второго типа являются сингулярными, имеют движущиеся полюсы первого порядка и определяются формулами

$$u_1(t, x, y) = 2\lambda(t, y) \operatorname{tg}(\lambda(t, y)x - \varphi(t, y)), \quad (3.19)$$

$$\lambda_t - 4\lambda^2 \lambda_y = 0, \quad \varphi_t - 4\lambda^2 \varphi_y = -4\gamma \lambda^3,$$

$$u_2(t, x, y) = -2\lambda(t, y) \operatorname{cth}(\lambda(t, y)x - \varphi(t, y)), \quad (3.20)$$

$$\lambda_t + 4\lambda^2 \lambda_y = 0, \quad \varphi_t + 4\lambda^2 \varphi_y = 4\gamma \lambda^3.$$

Уравнения (3.18) — (3.20) для функции $\lambda(t, y)$ после умножения на 8λ переходят в уравнение волны Римана (2.19) на функцию $v = 4\lambda^2$. Поэтому в решениях уравнений (3.18) — (3.20) также возникает явление опрокидывания фронта волны и функция $\lambda(t, y)$ становится многозначной при изменении времени t . Это приводит к опрокидыванию и многозначности графика функции $u(t, x, y)$, которые наступают при изменении t, y одновременно на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Динамика полюсов $x_0 = \psi(t, y) = \varphi(t, y)\lambda^{-1}(t, y)$ сингулярных солитонных решений (3.19), (3.20) определяется уравнениями

$$\psi_t + 4\sigma\gamma\lambda^2\psi_y = 4\sigma\gamma\lambda^2, \quad \lambda_t + 4\sigma\lambda^2\lambda_y = 0, \quad \sigma = \pm 1.$$

Далее мы будем рассматривать только гладкие опрокидывающиеся солитоны (3.17), не имеющие сингулярностей. Производные функции $u(t, x, y)$ определяются формулами

$$u_x(t, x, y) = -2\lambda^2 \operatorname{ch}^{-2}(\lambda x - \varphi), \quad (3.21)$$

$$u_y(t, x, y) = -2\lambda_y \operatorname{th}(\lambda x - \varphi) - 2\lambda(x\lambda_y - \varphi_y) \operatorname{ch}^{-2}(\lambda x - \varphi). \quad (3.22)$$

Асимптотики функций u, u_x, u_y при $|x| \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty: \quad u &\rightarrow 2\lambda, \quad u_x \rightarrow 0, \quad u_y \rightarrow 2\lambda_y, \\ x \rightarrow +\infty: \quad u &\rightarrow -2\lambda, \quad u_x \rightarrow 0, \quad u_y \rightarrow -2\lambda_y. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Формула (3.17) показывает, что опрокидывание (возникновение многозначности) графика функции $u(t, x, y)$ происходит одновременно с опрокидыванием графика функции $\lambda(t, y)$. Формула (3.21) при фиксированных t, y для каждой однозначной ветви значений $\lambda(t, y)$ совпадает с формулой солитона уравнения Кортевега — де Фриза. Поэтому каждому значению $\lambda(t, y)$ соответствует одно собственное значение $-\lambda^2(t, y)$ оператора Шрёдингера $L = -d_x^2 + u_x(t, x, y)$, где в функции $u_x(t, x, y)$ берется соответствующая однозначная ветвь. Таким образом, многозначность функции $\lambda(t, y)$ не означает появления новых собственных значений у оператора L , а соответствует многозначности функции $u_x(t, x, y)$, причем каждой однозначной ветви $u_x(t, x, y)$ отвечает прежнее число собственных значений. Это свойство верно также и для опрокидывающихся N -солитонных решений, указанных ниже.

Обнаруженное явление опрокидывания в решениях нелинейных уравнений (1.16), (1.21) — (1.22) является отражением поведения реальных физических объектов — например, динамики морских волн.

Формула опрокидывающегося солитона (3.17) и асимптотики (3.23) показывают, что в решениях уравнения (1.16), (1.21) нельзя ограничиться случаем функций $u(t, x, y)$, убывающих на бесконечности $|x|$ вместе с производными u_y , а именно их значения следует предполагать ограниченными при $|x| \rightarrow \infty$. При этом $|u_x| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Это обстоятельство существенно отражается на эволюции данных рассеяния.

II. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.21) в классе функций $u(t, x, y)$, имеющих следующую асимптотику при $|x| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty: \quad u(t, x, y) &\rightarrow g(t, y), \\ x \rightarrow +\infty: \quad u(t, x, y) &\rightarrow h(t, y). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для таких решений имеем $u_x(t, x, y) \rightarrow 0$, $u_{xy}(t, x, y) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $u_y(t, x, y) \rightarrow g_y, h_y$ при $x \rightarrow \mp \infty$. Применим к уравнению (1.21) метод одномерной обратной задачи рассеяния для оператора $L = -d_x^2 + u_x(t, x, y)$, где переменные t и y входят в виде параметров. Данными рассеяния являются собственные значения дискретного спектра $f_n(t, y)$, соответствующие им коэффициенты $b_n(t, y)$, и коэффициенты $a(k, t, y)$ и $b(k, t, y)$, характеризующие рассеяние в точках непрерывного спектра.

В силу леммы 1 и формулы (1.19) собственные числа $f_n(t, y) = -\lambda_n^2$ удовлетворяют уравнению волны Римана

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} - 4f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_n}{\partial t} + 4\lambda_n^2 \frac{\partial \lambda_n}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

и поэтому становятся многозначными функциями от t, y . Многозначными становятся и соответствующие собственные функции дискретного спектра $\psi_n(t, x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$-\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + u_x \psi_n = f_n \psi_n, \quad f_n = -\lambda_n^2, \quad \lambda_n > 0, \quad (3.26)$$

$$\psi_n(t, x, y) = \exp(\lambda_n x) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$\psi_n(t, x, y) = b_n(t, y) \exp(-\lambda_n x) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Используя явный вид оператора A (1.19), (1.20)

$$A = 4d_x^2 d_y - 2u_y d_x - 4u_x d_y - 3u_{xy} + \gamma (4d_x^3 - 6u_x d_x - 3u_{xx}) \quad (3.27)$$

и уравнение (3.25), находим асимптотику при $x \rightarrow -\infty$:

$$(\psi_n)_t + A(\psi_n) = (-2g_y \lambda_n + 8\gamma \lambda_n^3) \exp(\lambda_n x) (1 + o(1)). \quad (3.28)$$

В силу леммы 2 § 2 функция $(\psi_n)_t + A(\psi_n)$ является собственной функцией оператора L , отвечающей собственному числу f_n . Поэтому из асимптотик при $x \rightarrow -\infty$ (3.26), (3.28) следует равенство

$$(\psi_n)_t + A(\psi_n) = (-2g_y \lambda_n + 8\gamma \lambda_n^3) \psi_n. \quad (3.29)$$

Подставим в это равенство асимптотику (3.26) при $x \rightarrow +\infty$ и используем формулы (3.24), (3.25), (3.27); получим уравнение

$$(b_n)_t + 4\lambda_n^2 (b_n)_y = (-2\lambda_n (g_y + h_y) + 8\gamma \lambda_n^3) b_n. \quad (3.30)$$

Это — линейное уравнение с переменными коэффициентами, поскольку λ_n , g и h — функции от t , y .

III. Спектральные функции $\psi(k, t, x, y)$ удовлетворяют условиям

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u_x \psi = k^2 \psi, \quad k > 0, \quad (3.31)$$

$$\psi(k, t, x, y) = \exp(-ikx) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$\psi(k, t, x, y) =$$

$$= a(k, t, y) \exp(-ikx) + b(k, t, y) \exp(ikx) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Из уравнения Лакса (1.17) — (1.20) следует уравнение $(L - k^2)(\psi_t + A\psi) = 0$. Отсюда, используя двумерность пространства собственных функций $\psi(k, t, x, y)$ (3.31) при фиксированных k , t , y и асимптотику (3.31) при $x \rightarrow -\infty$, получаем уравнение

$$\psi_t + A\psi = (2ikg_y + 4\gamma ik) \psi. \quad (3.32)$$

Подставляя в это уравнение асимптотику (3.31) при $x \rightarrow +\infty$ и используя формулу (3.27), получаем уравнения для данных рассеяния

$$a_t - 4k^2 a_y = 2ik(g_y - h_y)a, \quad (3.33)$$

$$b_t - 4k^2 b_y = (2ik(g_y + h_y) + 8\gamma ik^3)b. \quad (3.34)$$

Таким образом, эволюция данных рассеяния, соответствующих решению $u(t, x, y)$ уравнения (1.21), полностью определяется уравнениями (3.25), (3.30), (3.33), (3.34).

IV. Выше мы показали, что применение метода обратной задачи к уравнению (1.21) имеет две особенности. Во-первых, это не постоянство и возникновение многозначности собственных чисел $f_n = -\lambda_n^2$. Во-вторых, дифференциальные уравнения для данных рассеяния (3.30), (3.33), (3.34) содержат асимптотические характеристики $g(t, y)$ и $h(t, y)$ неизвестного решения $u(t, x, y)$.

Если данные рассеяния известны, то потенциал $u_x(t, x, y)$ определяется по формулам [5]

$$u_x(x) = -2 \frac{dK(x, x)}{dx}, \quad (3.35)$$

$$K(x, x_1) + F(x + x_1) + \int_x^\infty K(x, z) F(z + x_1) dz = 0, \quad (3.36)$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n \exp(-\lambda_n x)}{ia'(i\lambda_n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r(k) e^{ikx} dk, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)},$$

в которые переменные t, y входят в виде параметров. Из уравнения (3.35) получаем формулу

$$u(t, x, y) = -2K(x, x, t, y) + G(t, y), \quad (3.37)$$

где $G(t, y)$ — произвольная функция, выбор которой необходимо согласовать с асимптотическими характеристиками $g(t, y)$ и $h(t, y)$.

V. Укажем точные N -солитонные решения уравнения (1.21). Пусть функция $b(k, t, y) \equiv 0$. Тогда функция $a(k, t, y)$ определяется уравнением [5]

$$a(k, t, y) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\lambda_n}{k + i\lambda_n}. \quad (3.38)$$

Подставим эту формулу в уравнение (3.33) и учтем уравнения (3.25), получим следующее необходимое условие для асимптотических характеристик $g(t, y)$ и $h(t, y)$:

$$\left(g - h - 4 \sum_{n=1}^N \lambda_n \right)_y = 0. \quad (3.39)$$

Пусть коэффициенты $b_n(t, y)$ определены из уравнений (3.30) при $g + h = 0$, а функция $a_k(k, t, y)$ задана

формулой (3.38). Определим функции

$$\beta_n(t, y) = \frac{b_n(t, y)}{ia'(i\lambda_n)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.40)$$

Тогда в соответствии с формулами Хироты [37] и формулой (3.37) потенциал $u(t, x, y)$ имеет вид

$$u(t, x, y) = -2 \frac{d}{dx} \ln \det A(t, x, y) + G(t, y), \quad (3.41)$$

$$A_{ij}(t, x, y) = \delta_{ij} + (\lambda_i + \lambda_j)^{-1} \beta_i(t, y) \exp(-(\lambda_i + \lambda_j)x),$$

где $A_{ij}(t, x, y)$ — компоненты матрицы A , $i, j = 1, \dots, N$. Асимптотика функции $u(t, x, y)$ при $|x| \rightarrow \infty$ в силу (3.41) и $\lambda_i > 0$ имеет вид:

$$\text{при } x \rightarrow -\infty \quad u(t, x, y) \rightarrow 4 \sum_{n=1}^N \lambda_n + G(t, y), \quad (3.42)$$

$$\text{при } x \rightarrow +\infty \quad u(t, x, y) \rightarrow G(t, y).$$

Поэтому необходимое условие (3.39) выполнено при произвольной функции $G(t, y)$.

При $t \rightarrow \pm\infty$ решение (3.41) распадается в сумму односолитонных решений (3.17), имеющих асимптотику (3.23), удовлетворяющую условию $g(t, y) + h(t, y) = 0$. Следовательно, это же условие должно быть выполнено и для решения (3.41), что в силу (3.42) однозначно определяет вид функции $G(t, y)$:

$$G(t, y) = h(t, y) = -g(t, y) = -2 \sum_{n=1}^N \lambda_n(t, y). \quad (3.43)$$

При $N = 1$ формулы (3.41), (3.43) переходят в опрокидывающийся солитон (3.17). В силу того что функции $\lambda_n(t, y)$ удовлетворяют уравнению (3.25), эквивалентному уравнению волны Римана, в решениях (3.41), (3.43) также возникает явление опрокидывания графика функции $u(t, x, y)$, одновременное на всей оси $-\infty < x < +\infty$. Поэтому формулы (3.41), (3.43) вместе с уравнениями (3.25) определяют опрокидывающиеся N -солитонные решения уравнения (1.21).

Опрокидывание графика функции $u(t, x, y)$ происходит одновременно с опрокидыванием графика одной из функций $\lambda_n(t, y)$. При этом каждому выбору однозначных ветвей функций $\lambda_n(t, y)$ (и соответствующих $\beta_n(t, y)$) соответствует однозначная ветвь функции $u(t, x, y)$, причем производная $u_x(t, x, y)$ для каждой ветви является N -солитонным решением уравнения КдФ.

§ 4. Второе двумерное интегрируемое уравнение

1. В данном параграфе мы построим двумерное уравнение для функции $u(t, x, y)$, допускающее операторное представление вида (2.1):

$$\dot{L} = \alpha L^2 + \beta L + [L, A], \quad (4.1)$$

где $\alpha(t, y)$, $\beta(t, y)$ — произвольные функции от t, y .

Пусть L — оператор Шрёдингера (1.18), оператор A является суммой оператора (1.19) и оператора (3.2) главы I:

$$A = -2(d_y L + L d_y) - (u_y d_x + d_x u_y) + \gamma(4d_x^3 - 6u_x d_x - 3u_{xx}) + \\ + \frac{1}{2} \alpha x d_x^3 - \frac{1}{4} (3\alpha x u_x + \alpha u + 2\beta x) d_x + \frac{1}{4} \alpha u_x - \frac{3}{8} \alpha x u_x. \quad (4.2)$$

В этом случае операторное уравнение (4.1) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$u_{tx} = 4u_x u_{xy} + 2u_y u_{xx} - u_{xxx} u_y + \gamma(6u_x u_{xx} - u_{xxxx}) + \\ + \alpha u_x^2 + \beta u_x - \frac{1}{8} \alpha x u_{xxxx} - \frac{1}{2} \alpha u_{xxx} + \\ + \frac{1}{4} u_{xx} (3\alpha x u_x + \alpha u + 2\beta x). \quad (4.3)$$

Это новое двумерное дифференциальное уравнение, так же как и уравнение (1.21), может быть решено методом одномерной обратной задачи рассеяния.

К уравнению (4.1) — (4.3) применима лемма 1, и поэтому собственные числа $f(t, y)$ оператора Шрёдингера $L = -d_x^2 + u_x$ в силу (4.3) удовлетворяют уравнению ($f = -\lambda^2$)

$$f_t - 4ff_y = \alpha f^2 + \beta f, \quad \lambda_t + 4\lambda^2 \lambda_y + \frac{1}{2} \alpha \lambda^3 - \frac{1}{2} \beta \lambda = 0. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4), как и уравнение волны Римана (2.16), имеет решения с опрокидыванием графика функции $f(t, y)$; но имеет также и всюду однозначные гладкие решения. Например, решение типа бегущей волны (здесь α и β постоянны)

$$f(t, y) = c \exp\left(\beta t - \frac{1}{4} \alpha y\right). \quad (4.5)$$

Утверждение 2. Уравнение (4.3) имеет точное решение — солитон, который определяется формулой

$$u(t, x, y) = -2\lambda(t, y) \operatorname{th}(\lambda(t, y)x - \varphi(t, y)), \quad (4.6)$$

где $\lambda(t, y)$, $\varphi(t, y)$ — произвольные решения уравнений

$$\lambda_t + 4\lambda^2\lambda_y + \frac{1}{2}\alpha\lambda^3 - \frac{1}{2}\beta\lambda = 0, \quad \varphi_t + 4\lambda^2\varphi_y = 4\gamma\lambda^3. \quad (4.7)$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1 из § 3 и может быть заменено прямой подстановкой в уравнение (4.3).

Первое уравнение (4.7) является следствием уравнения (4.4) после подстановки $f = -\lambda^2$. Простейший вид солитона (4.6) определяется следующими явными решениями уравнений (4.7):

$$\lambda = c \exp\left(\frac{1}{2}\beta t - \frac{1}{8}\alpha y\right), \quad \varphi = -\frac{8\gamma}{\alpha}\lambda - \frac{4\gamma\beta}{c\alpha^2} \ln|\alpha\lambda^2 - \beta|, \quad (4.8)$$

где α и β постоянны.

II. Предположим, что функция $u(t, x, y)$ при $|x| \rightarrow \infty$ имеет асимптотики (3.24); собственные функции $\psi_n(t, x, y)$ оператора Шрёдингера удовлетворяют условиям (3.26). В асимптотике (3.26) при $x \rightarrow -\infty$ находим

$$\begin{aligned} \psi_{n,t} + A\psi_n = & \left[x \left(\lambda_{n,t} + 4\lambda_n^2\lambda_{n,y} + \frac{1}{2}\alpha\lambda_n^3 - \frac{1}{2}\beta\lambda_n \right) + \right. \\ & \left. + 4\gamma\lambda_n^3 - 2g_y\lambda_n - \frac{1}{4}\alpha\lambda_n g \right] \exp(\lambda_n x) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из леммы 2 § 2 следует, что функция $(\psi_n)_t + A(\psi_n)$ является собственной функцией, отвечающей собственному числу $f_n(t, y)$. Поэтому из асимптотики (4.9) и уравнения (4.4) получаем равенство

$$(\psi_n)_t + A(\psi_n) = \left(4\gamma\lambda_n^3 - 2g_y\lambda_n - \frac{1}{4}\alpha\lambda_n g \right) \psi_n. \quad (4.10)$$

Подставив в это равенство асимптотику (3.26) при $x \rightarrow +\infty$ и используя формулы (3.24), (4.2), (4.4), получим уравнение

$$(b_n)_t + 4\lambda_n^2(b_n)_y = \left(8\gamma\lambda_n^3 - 2\lambda_n(g_y + h_y) - \frac{1}{4}\alpha\lambda_n(g + h) \right) b_n, \quad (4.11)$$

определяющее динамику коэффициента $b_n(t, y)$.

III. В силу уравнения (4.3) спектральные функции $\psi(k, t, x, y)$ оператора Шрёдингера L удовлетворяют условиям (3.31) при дополнительном предположении, что параметр k изменяется в силу уравнения

$$k_t = \frac{1}{2}\alpha k^3 + \frac{1}{2}\beta k. \quad (4.12)$$

Дифференцирование уравнения $L\psi = k^2\psi$ по времени и подстановка равенств (4.1), (4.2), (4.12) приводят к уравнению

$$L(\psi_t + A\psi) = k^2(\psi_t + A\psi). \quad (4.13)$$

В асимптотике (3.31) при $x \rightarrow -\infty$ находим (в силу уравнения (4.12))

$$\psi_t + A\psi = \left(4\gamma i k^3 + ik \left(2g_y + \frac{1}{4} \alpha g \right) \right) \exp(-ikx) (1 + o(1)). \quad (4.14)$$

Поэтому из (4.13) и (4.14) следует равенство

$$\psi_t + A\psi = \left(4\gamma i k^3 + ik \left(2g_y + \frac{1}{4} \alpha g \right) \right) \psi. \quad (4.15)$$

Подставляя в это равенство асимптотику (3.31) при $x \rightarrow +\infty$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} a_t - 4k^2 a_y + \left(\frac{1}{2} \alpha k^3 + \frac{1}{2} \beta k \right) a_k = \\ = ik \left(2(g_y - h_y) + \frac{1}{4} \alpha (g - h) \right) a, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} b_t - 4k^2 b_y + \left(\frac{1}{2} \alpha k^3 + \frac{1}{2} \beta k \right) b_k = \\ = ik \left(8\gamma k^2 + 2(g_y + h_y) + \frac{1}{4} \alpha (g + h) \right) b. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Уравнения (4.4), (4.11), (4.16), (4.17) полностью определяют эволюцию данных рассеяния, соответствующую дифференциальному уравнению (4.3).

IV. Обратное преобразование рассеяния определяется формулами (3.35) — (3.36). При построении N -солитонных решений полагаем $b(k, t, y) = 0$. В этом случае функция $a(k, t, y)$ определяется при всех t, y формулой (3.38). Подставляя эту формулу в уравнение (4.16) и учитывая, что все функции $\lambda_n(t, y)$ удовлетворяют уравнению (4.4), получим следующее уравнение:

$$2(g - h)_y + \frac{1}{4} \alpha (g - h) = \sum_{n=1}^N (8(\lambda_n)_y + \alpha \lambda_n). \quad (4.18)$$

Так же как и в § 3, полагаем $g + h = 0$; тогда из уравнения (4.18) по-прежнему следуют равенства (3.43). Поэтому N -солитонные решения уравнения (4.3) определяются формулами (4.4), (4.11), (3.40) — (3.43). Простей-

шее односолитонное решение определяется формулами (4.6) — (4.8).

Явление опрокидывания реализуется в некоторых решениях уравнения (4.4). Построенные по таким функциям $f_k(t, y)$ N -солитонные решения уравнения (4.3) обладают всеми свойствами опрокидывающихся N -солитонных решений, указанных в § 3.

V. Укажем интегрируемый матричный аналог двумерного уравнения (1.16). Пусть $U(t, x, y)$ — матрица размера $n \times n$, $L = -\partial_x^2 + U_x(t, x, y)$ — матричный оператор Шрёдингера, оператор A определим формулой

$$-\frac{1}{2}A = d_y L + L d_y + U_y d_x + \frac{1}{2}U_{xy} + W. \quad (4.19)$$

Уравнение Лакса $L_t = [L, A]$ при условии

$$W_x = \frac{1}{2}[U_x, U_y] \quad (4.20)$$

эквивалентно уравнению

$$U_{tx} = 2(U_x^2)_y + U_y U_{xx} + U_{xx} U_y - U_{xxx} U_y - 2[U_x, W]. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) и является интегрируемым матричным аналогом уравнения (1.16). Уравнение (4.21) оставляет инвариантным множество симметрических и эрмитовых матриц и на множестве диагональных матриц переходит в уравнение (1.16). Собственные числа $f(t, y)$ оператора L в силу леммы 1 и вида оператора A (4.19) удовлетворяют уравнению волны Римана (3.1). Уравнение (4.21) также интегрируется методом обратной задачи рассеяния (в ее матричном варианте [38]).

§ 5. О связи с уравнением Кадомцева — Петвиашвили

I. В данном параграфе мы покажем, что двумерное интегрируемое уравнение (1.21) — (1.22) косвенно связано с уравнением Кадомцева — Петвиашвили [39]

$$(v_t - 6vv_x + v_{xxx})_x = \sigma^2 v_{yy}. \quad (5.1)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Двумерное уравнение

$$(u_{tx} - \beta(4u_x u_{xy} + 2u_{xx} u_y - u_{xxx}) - \gamma(6u_x u_{xx} - u_{xxx}))_x = -\alpha^2(\beta u_{yyy} + 3\gamma u_{xyy}) \quad (5.2)$$

допускает представление Лакса (α^2, β, γ — произвольные вещественные постоянные).

Доказательство. Рассмотрим уравнение Лакса $L = [L, A]$, где операторы L и A имеют вид

$$\begin{aligned} L &= L_1 + \alpha \partial_y, \quad L_1 = -\partial_x^2 + u_x(t, x, y), \\ A &= \beta A_1 + \gamma A_2 - 2\alpha\beta \partial_y^2 + \alpha w(t, x), \\ A_1 &= -2(\partial_y L_1 + L_1 \partial_y) - u_y \partial_x - \partial_x u_y, \\ A_2 &= 4\partial_x^3 - 3(u_x \partial_x + \partial_x u_x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Операторы A_1, A_2 совпадают с операторами (1.19), (1.20). Из результатов § 1 следует, что коммутатор операторов L и A имеет вид

$$\begin{aligned} [L, A] &= \beta(4u_x u_{xy} + 2u_{xx} u_y - u_{xxx} u) + \gamma(6u_x u_{xx} - u_{xxxx}) - \\ &\quad - \alpha(b \partial_x + \partial_x b) + \alpha^2 w_y, \quad b = w_x + \beta u_{yy} + 3\gamma u_{xy}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Поэтому уравнение Лакса (1.17) с операторами L и A вида (5.3) эквивалентно двум уравнениям

$$\begin{aligned} u_{tx} &= \beta(4u_x u_{xy} + 2u_{xx} u_y - u_{xxx} u) + \gamma(6u_x u_{xx} - u_{xxxx}) + \alpha^2 w_y, \\ w_x &= -\beta u_{yy} - 3\gamma u_{xy}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Исключая из этих двух уравнений функцию $w(t, x, y)$, приходим к уравнению (5.2). Следовательно, уравнение (5.2) эквивалентно уравнению Лакса (1.17), (5.3).

Косвенная связь уравнений (1.21) — (1.22) и уравнения Кадомцева — Петвиашвили (5.1) состоит в том, что оба эти уравнения представляют собой специальные случаи при $\alpha = 0$ и при $\beta = 0$ двумерного интегрируемого уравнения (5.2) (уравнение (5.1) вкладывается в (5.2) подстановкой $v = u_x$).

II. Укажем дополнительно явный вид оператора A (5.3):

$$\begin{aligned} A &= \beta(4\partial_x^2 \partial_y - 2u_y \partial_x - 4u_x \partial_y - 3u_{xy}) - 2\alpha\beta \partial_y^2 + \\ &\quad + \gamma(4\partial_x^3 - 6u_x \partial_x - 3u_{xx}) + \alpha w. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При вещественных α, β и чисто мнимом α оператор A косоэрмитов, а оператор L (5.3) эрмитов.

В представлении Лакса для уравнения (5.2) при $\alpha \neq 0$ оператор A можно заменить на оператор $A_0 = A + 2\alpha^{-1}\beta L^2$, так как $[L, A] = [L, A_0]$. Оператор A_0 имеет следующий вид

$$A_0 = 2\alpha^{-1}\beta L_1^2 - \beta(u_y \partial_x + \partial_x u_y) + \gamma A_2 + \alpha w. \quad (5.7)$$

Этот оператор, в отличие от оператора A (5.6), не содержит дифференциальных операторов ∂_y, ∂_y^2 . Поэтому уравнение (5.2) может быть отнесено к иерархии уравнения КП [171].

Представление Лакса для уравнения (5.2) с оператором $L = L_1 + \alpha \partial_y$ и оператором A_0 (5.7) не допускает предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$, а с оператором A (5.6) допускает такой предельный переход.

Отметим, что несмотря на указанную связь, свойства двумерного уравнения (1.21) — (1.22) и уравнений (5.1), (5.2) существенно различны. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили (5.1) и уравнение (5.2) вообще не имеют никаких опрокидывающихся солитонов; все их решения при изменении времени остаются однозначными, в отличие от решений уравнения (1.21) — (1.22).

З а м е ч а н и е. Уравнение (5.2) после применения линейного преобразования координат

$$\begin{aligned} x' &= x - \beta^{-1} \gamma y - 2\alpha^2 \beta^{-2} \gamma^3 t, \\ y' &= y + 3\alpha^2 \beta^{-1} \gamma^2 t, \quad t' = \beta t \end{aligned} \quad (5.8)$$

принимает вид (штрихи у координат x', y', t' опущены)

$$(u_{1x} - 4iu_x u_{xy} - 2u_y u_{xx} + u_{xxx})_x = -\alpha^2 u_{yyy}. \quad (5.9)$$

Поэтому уравнения (5.2) при различных ненулевых значениях параметров β, γ эквивалентны одному уравнению (5.9). Уравнение (5.9) с помощью вещественной замены координат $t' = \lambda t, y' = \lambda y, x' = x, \lambda = |\alpha|^{-1}$ приводится к одному из двух различных неэквивалентных уравнений, соответствующих знаку величины α^2 .

§ 6. Динамика полюсов мероморфных решений

I. В известной работе [170] указаны решения уравнения Кортевега — де Фриза и уравнения Буссинеска, имеющие вид

$$u(t, x) = 2 \sum_{j=1}^n \wp(x - a_j(t)), \quad (6.1)$$

где $\wp(x)$ — двоякопериодическая мероморфная функция Вейерштрасса. Применение методов работы [170] к другим нелинейным уравнениям отражено в работах [6, 7, 20].

Обозначим $\wp_1(x)$ любую из функций

$$x^{-2}, \sin^{-2}x, \operatorname{sh}^{-2}x, \quad (6.2)$$

которые отличаются на постоянную 0, $1/3$, $-1/3$ от предельных случаев $\wp$ -функции Вейерштрасса.

Функции $\xi_1(x)$ удовлетворяют соотношению $\xi_1'(x) = -\wp_1(x)$ и соответственно имеют вид

$$x^{-1}, \operatorname{ctg} x, \operatorname{cth} x. \quad (6.3)$$

Функции $\wp_1(x)$ (6.2) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\wp_1''' = 12\wp_1\wp_1' + 4q\wp_1', \quad (6.4)$$

где коэффициент q в трех случаях (6.2) принимает соответственно значения 0, -1 , 1 .

Лемма 1. *Функции (6.2), (6.3) удовлетворяют следующей формуле сложения:*

$$\begin{aligned} \wp_1(a)\wp_1'(b) &= \wp_1(a-b)\wp_1'(b) - 2\wp_1'(a-b)\wp_1(b) - \\ &- \wp_1'(a-b)\wp_1(a) + \wp_1''(a-b)(\xi_1(a) - \xi_1(b)). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Доказательство леммы 1 состоит в прямой проверке, использующей стандартные свойства элементарных функций (6.2).

Нетрудно проверить, используя четность функции $\wp_1(x)$, что из формулы (6.5) следует формула сложения

$$\begin{aligned} \wp_1(a)\wp_1'(b) + \wp_1'(a)\wp_1(b) &= \\ &= \wp_1(a-b)[\wp_1'(a) + \wp_1'(b)] + \wp_1'(a-b)[\wp_1(a) - \wp_1(b)]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Формула (6.6) справедлива для $\wp$ -функции Вейерштрасса [172], однако формула (6.5) для нее не справедлива, так как ξ -функция Вейерштрасса (1.13) $\xi'(x) = -\wp(x)$ не является двоякопериодической. Поэтому при построении мероморфных решений уравнения (5.2) мы используем элементарные функции (6.2), (6.3).

II. Рассмотрим решения уравнения (5.2), имеющие вид

$$u(t, x, y) = -2\lambda \sum_{j=1}^n \xi_1(\lambda x - a_j(t, y)). \quad (6.7)$$

Уравнение (5.2) после подстановки формулы (6.7) и использования уравнения (6.4) и формулы сложения (6.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\xi_1(\lambda x - a_j) \beta A_{jy} + 3\wp_1(\lambda x - a_j) (\beta a_{jy} - \lambda y) A_j + \\ + \wp_1'(\lambda x - a_j) B_j) = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где использованы обозначения

$$A_j = -\alpha^2 a_{jyy} + 4\lambda^4 \sum_{k \neq j}^n \wp_1'(a_j - a_k), \quad (6.9)$$

$$B_j = \lambda^2 a_{jt} - \gamma \left(4\lambda^5 q + 3\alpha^2 \lambda a_{jy}^2 - 12\lambda^5 \sum_{k \neq j}^n \wp_1(a_j - a_k) + \right. \\ \left. + \beta \left(4\lambda^4 q a_{jy} + \alpha^2 a_{jy}^3 - 4\lambda^4 \sum_{k \neq j}^n (2a_{jy} + a_{ky}) \wp_1(a_j - a_k) \right) \right). \quad (6.10)$$

Из уравнения (6.8) следуют $2n$ уравнений $A_j = 0$, $B_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Эти уравнения после подстановки

$$a_j(t, y) = \bar{a}_j(t, y) + 4\lambda^3 \gamma q t \quad (6.11)$$

и замены координат

$$\bar{y} = -2\lambda^2 y + 8\lambda^4 \beta q t, \quad \bar{t} = \lambda^4 t \quad (6.12)$$

принимают вид (черту над буквами опускаем)

$$\alpha^2 a_{jyy} = \sum_{k \neq j}^n \wp_1'(a_j - a_k), \quad (6.13)$$

$$a_{jt} = 12\gamma \lambda^{-1} \left(\alpha^2 a_{jy}^2 - \sum_{k \neq j}^n \wp_1(a_j - a_k) \right) + \\ + 4\beta \left(\alpha^2 a_{jy}^3 - \sum_{k \neq j}^n (2a_{jy} + a_{ky}) \wp_1(a_j - a_k) \right). \quad (6.14)$$

Докажем, что уравнения (6.13), (6.14) являются совместными. Для этого, следуя работам [30, 170, 173], рассмотрим матрицы L и A со следующими компонентами:

$$L = L_1 + P_1, \quad L_{1ij} = \alpha^{-1} f(a_i - a_j), \quad P_{1ii} = p_i \delta_{ij},$$

$$A = A_1 + A_2, \quad A_{1ij} = \alpha^{-1} f'(a_i - a_j),$$

$$A_{2ij} = -\frac{\alpha^{-1}}{2} \sum_{k \neq i}^n \wp_1(a_i - a_k) \delta_{ij}. \quad (6.15)$$

Здесь $f(x)$ — любая из нечетных функций x^{-1} , $\sin^{-1}x$, $\operatorname{sh}^{-1}x$; очевидно, что $f^2(x) = \wp_1(x)$. Используя кососимметричность матрицы L_1 и симметричность матрицы P_1 , получаем

$$H_2 = \operatorname{Tr} L^2 = \operatorname{Tr} (P_1^2 + L_1^2) = \sum_{i \neq j}^n (p_i^2 - \alpha^{-2} \wp_1(a_i - a_j)),$$

$$H_3 = \text{Tr} L^3 = \text{Tr} (P_1^3 + 3P_1 L_1^2) = \sum_{i \neq j}^n (p_i^3 - 3\alpha^{-2} p_i \otimes_1 (a_i - a_j)),$$

$$H_4 = \text{Tr} L^4 = \text{Tr} (P_1^4 + 4P_1^2 L_1^2 + 2L_1 P_1 L_1 P_1) = \\ = \sum_{i \neq j}^n (p_i^4 - 4\alpha^{-2} p_i^2 \otimes_1 (a_i - a_j) - 2\alpha^{-2} p_i p_j \otimes_1 (a_i - a_j)).$$

Из результатов работ [30, 173] следует, что уравнение Лакса $L_t = [L, A]$ эквивалентно гамильтоновой системе с гамильтонианом $\frac{1}{2} H_2$ и что гамильтоновы потоки с гамильтонианами H_2, H_3, H_4 коммутируют. Поток с гамильтонианом $\frac{1}{2} H_2$ совпадает с уравнением (6.13), где время обозначено через y и $p_i = a_{iy}$. Уравнения (6.14) являются второй частью гамильтоновой системы уравнений (для a_{jt}).

$$p_{jt} = -\partial H / \partial a_j, \quad a_{jt} = \partial H / \partial p_j, \quad H = 4\gamma\lambda^{-1}\alpha^2 H_3 + \beta\alpha^2 H_4,$$

которая совместна с уравнениями (6.13) в силу инволютивности гамильтонианов H_2, H_3, H_4 . Это и доказывает совместность системы (6.13) — (6.14).

Система уравнений (6.13) — (6.14) включает в себя при $\beta = 0$ некоторые системы, указанные в работах [6, 7, 20] для уравнения Кадомцева — Петвиашвили, которое является специальным случаем уравнения (5.2) при $\beta = 0$.

При $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$ уравнение (5.2) переходит в уравнение (1.16). Это уравнение также имеет решения вида (6.7). Совместная система уравнений (6.13) — (6.14) при $\alpha = 0, \gamma = 0$ принимает вид

$$\sum_{k \neq j}^n \otimes'_1 (a_j - a_k) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.16)$$

$$a_{jt} = -4\beta \sum_{k \neq j}^n (2a_{jy} + a_{ky}) \otimes_1 (a_j - a_k). \quad (6.17)$$

Уравнения (6.16) выделяют непустое подмногообразие при $n = d(d+1)/2$ [170]. Система уравнений (6.17) относится к классу систем гидродинамического типа, изучавшихся в работах [31, 32, 92, 174, 175], и является интегрируемой по крайней мере на инвариантном подмногообразии, определенном условиями (6.16).

§ 7. Трехмерное интегрируемое уравнение

Укажем трехмерное уравнение для функции $v(t, x, y, z)$, которое включает в себя уравнение взаимодействия волны Римана с длинными волнами

$$v_t = 4vv_x + 2v_x\partial_x^{-1}v_y - v_{xxy}; \quad (7.1)$$

оператор L имеет вид

$$L = -\partial_x^2 + v(t, x, y, z). \quad (7.2)$$

Оператор A выберем кососимметрическим:

$$\begin{aligned} A &= \alpha A_1 + \beta A_2, \\ A_1 &= -2(\partial_y L + L\partial_y) - (a\partial_x + \partial_x a), \\ A_2 &= \frac{1}{2}(\partial_z L^2 + L^2\partial_z) - \frac{1}{4}(b\partial_x^3 + \partial_x^3 b) + c\partial_x + \partial_x c. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Из уравнения Лакса $\dot{L} = [L, A]$ следуют формулы для неопределенных коэффициентов $a(t, x, y, z)$, $b(t, x, y, z)$, $c(t, x, y, z)$:

$$a = \partial_x^{-1}v_y, \quad b = \partial_x^{-1}v_z, \quad c = -\frac{3}{16}v_{xz} + \frac{3}{8}v\partial_x^{-1}v_z + \frac{1}{8}\partial_x^{-1}(vv_z).$$

При выполнении этих соотношений уравнение Лакса с операторами (7.2), (7.3) эквивалентно следующему трехмерному уравнению:

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha(4vv_y + 2v_x\partial_x^{-1}v_y - v_{xxy}) + \\ &+ \beta\left(\frac{3}{4}vv_{xz} + \frac{1}{2}v_zv_{xx} + \frac{1}{2}vv_{xxz} - v^2v_z + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{8}v_{xx} - \frac{3}{4}vv_x\right)\partial_x^{-1}v_z - \frac{1}{4}v_x\partial_x^{-1}(vv_z) - \frac{1}{16}v_{xxxxx}\right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) для функций v , не зависящих от переменной z , переходит в уравнение (7.1). Для функций

$$v(t, x, y, z) = u(t, r), \quad r = x + k_1y + k_2z$$

уравнение (7.4) принимает вид

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha k_1(6uu_r - u_{rrr}) - \\ &- \frac{1}{16}\beta k_2(10u^3 - 5(u_r)^2 - 10uu_{rr} + u_{rrrr})r. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) является линейной комбинацией первого и второго уравнений Кортевега — де Фриза.

В силу уравнения (7.4) собственные числа $f(t, y, z)$ оператора L (7.2), согласно основной лемме § 2, удовлетворяют уравнению

$$f_t = 4\alpha f f_y - \beta f^2 f_z. \quad (7.6)$$

Решения уравнения (7.6) обладают тем же свойством опрокидывания графика функции $f(t, y, z)$, что и классическая волна Римана.

Эволюция данных рассеяния $a(k, t, y, z)$, $b(k, t, y, z)$ и $b_n(t, y, z)$ для оператора L (7.2) в силу уравнения (7.4) описывается линейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка по t, y, z , которые в принципе могут быть решены. В этом смысле трехмерное уравнение (7.4) является интегрируемым методом одномерной обратной задачи рассеяния, связанной с оператором L (7.2).

§ 8. Третье двумерное интегрируемое уравнение

1. Выведем из уравнения Лакса

$$L_t = [L, A_1] \quad (8.1)$$

двумерное эволюционное уравнение для функции $u(t, x, y)$, которое при отсутствии зависимости от y переходит в уравнение [166, 167]

$$u_t = u^3 u_{xxx}, \quad (8.2)$$

известное под названием «уравнение Гарри Дима». Операторы L и A_1 выберем в виде [167]

$$L = u(\partial_x^2 - a^2)u, \quad A_1 = LA + AL. \quad (8.3)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} L_t &= u_t u^{-1} L + L u_t u^{-1}, \\ [L, A_1] &= L[L, A] + [L, A]L. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Поэтому уравнение Лакса (8.1), (8.3) является следствием уравнения

$$u_t u^{-1} = [L, A]. \quad (8.5)$$

Пусть оператор A имеет вид

$$A = -\alpha(u\partial_x + \partial_x u) + \beta(2\partial_y + g\partial_x + \partial_x g), \quad (8.6)$$

где функцию $g(t, x, y)$ необходимо найти из уравнения (8.5). Несложное вычисление приводит к следующей

формуле

$$[L, A] = \beta V \partial_x^2 + \beta V_x \partial_x + \alpha u^2 (u_{xxx} - 4a^2 u_x) + \\ + \beta ((u^2 g_{xx})_x - 2g(uu_{xx})_x - 2(uu_{xx})_y + 4a^2 u(gu_x + u_y)), \quad (8.7)$$

где функция $V(t, x, y)$ имеет вид

$$V = 4u(ug_x - gu_x - u_y). \quad (8.8)$$

Из уравнения (8.5), (8.7) следует условие $V = 0$. Поэтому в силу уравнения (8.8) получаем выражение для функции $g(t, x, y)$:

$$g(t, x, y) = -u(t, x, y) \int_0^x (u^{-1})_y(t, \xi, y) d\xi = -u \partial_x^{-1} (u^{-1})_y. \quad (8.9)$$

Операторное уравнение (8.5) после подстановки формул (8.7) — (8.9) переходит в эволюционное уравнение

$$u_t = \alpha u^3 (u_{xxx} - 4a^2 u_x) + \\ + u\beta (u_x u_{xy} - u_y u_{xx} - uu_{xy} - g u u_{xxx} + 4a^2 u(gu_x + u_y)). \quad (8.10)$$

Наиболее простой вид это уравнение принимает при $a = 0$:

$$u_t = \alpha u^3 u_{xxx} + u\beta (u_x u_{xy} - u_y u_{xx} - uu_{xy} + u^2 u_{xxx} \partial_x^{-1} (u^{-1})_y). \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) для функций вида $u(t, x, y) = u(t, z)$, где $z = x + cy$, сводится к уравнению (8.2).

Уравнение (8.11) (и уравнение (8.10)) в силу проведенного выше вывода допускает эквивалентное представление Лакса (8.1). К этому уравнению в силу вида операторов L и A (8.3), (8.6) применима основная лемма § 2. Поэтому в силу уравнения (8.11) собственные числа $f(t, y)$ оператора L (8.3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$f_t + 4\beta f f_y = 0,$$

эквивалентному уравнению опрокидывающейся волны Римана. Уравнения (8.11), (8.10) так же, как и другие уравнения, исследованные в данной главе, обладают опрокидывающимися решениями.

II. Рассмотрим уравнение

$$L_t = 8\alpha L^2 + 2\beta L + [L, A], \quad (8.12)$$

которое для операторов (8.3) эквивалентно уравнению

$$u_t u^{-1} L + L u_t u^{-1} = 8\alpha L^2 + 2\beta L + L[L, A] + [L, A]L$$

или

$$u_t u^{-1} = 4\alpha L + \beta + [L, A]. \quad (8.13)$$

Возьмем оператор A в виде

$$A = g\partial_x + \partial_x g, \quad g = cu - \alpha u \partial_x^{-1}(u^{-1}).$$

Тогда уравнение (8.13) принимает следующий вид:

$$u_t = \alpha u (2u u_{xx} - u_x^2) + \beta u + u^3 u_{xxx} (\alpha \partial_x^{-1}(u^{-1}) - c). \quad (8.14)$$

Существенно, что полученное уравнение (8.14), в отличие от (4.3), является трансляционно инвариантным.

§ 9. Интегрируемая двумеризация уравнения Бюргерса и динамика особенностей

1. Уравнение Бюргерса

$$v_t = vv_x + \mu v_{xx} \quad (9.1)$$

преобразуется в уравнение теплопроводности с помощью замены $v = 2\mu\phi_x\phi^{-1}$ [176—178]. Рассмотрим следующую естественную двумеризацию уравнения (9.1):

$$v_t = vv_y + v_x \partial_x^{-1} v_y + \mu v_{xy}. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.2) для функций v вида $v(t, x, y) = v(t, z)$, $z = x + cy$ сводится к уравнению (9.1).

Уравнение (9.2) после подстановки $v = u_x$ принимает вид

$$u_{xt} = u_x u_{xy} + u_y u_{xx} + \mu u_{xxy}. \quad (9.3)$$

Интегрируя это уравнение по x , находим

$$u_t = u_x u_y + \mu u_{xy} + \mu c(t, y), \quad (9.4)$$

где $c(t, y)$ — произвольная функция. Уравнение (9.4) после подстановки $u = \mu \ln \phi_1$ переходит в линейное уравнение

$$\phi_{1t} = \mu \phi_{1xy} + c(t, y) \phi_1. \quad (9.5)$$

Если произвольная функция $c(t, y)$ зависит только от t , то уравнение (9.5) после замены $\phi = \phi_1 \exp \int_0^t c(\xi) d\xi$ преобразуется к виду $\phi_t = \mu \phi_{xy}$. Таким образом, уравнение

(9.2) — (9.3) линеаризуется с помощью преобразования $v = \mu \varphi_x \varphi^{-1}$.

II. Рассмотрим решение уравнения (9.3) с логарифмическими особенностями вида

$$u(t, x, y) = \mu \ln \prod_{j=1}^n (x - a_j(t, y)). \quad (9.6)$$

Соответствующие функции $v = u_x$ имеют полюсы первого порядка:

$$v(t, x, y) = \mu \sum_{j=1}^n (x - a_j(t, y))^{-1}. \quad (9.7)$$

Для функции $f(x) = x^{-1}$ справедливы уравнения

$$f'' = -2ff', \quad f(a)f'(b) = f(a-b)f'(b) + f'(a-b)(f(a) - f(b)). \quad (9.8)$$

Из последнего уравнения в силу нечетности функции $f(x)$ следует формула сложения

$$f(a)f'(b) + f'(a)f(b) = -f(a-b)(f'(a) - f'(b)). \quad (9.9)$$

Уравнение (9.3) для функций вида (9.6) после применения формул (9.8), (9.9) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{jt} - \mu \sum_{k \neq j}^n (a_j - a_k)^{-1} (a_{jy} + a_{ky}) \right) (x - a_j)^{-2} = 0. \quad (9.10)$$

Отсюда получаем, что уравнение (9.3) для функций (9.6) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$a_{jt} = \mu \sum_{k \neq j}^n \frac{a_{jy} + a_{ky}}{a_j - a_k}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.11)$$

Система (9.11) имеет простой закон сохранения

$$(a_1(t, y) + \dots + a_n(t, y))_t = 0. \quad (9.12)$$

Система уравнений (9.11), так же как и система (6.17), относится к классу систем гидродинамического типа [174] и, видимо, является интегрируемой.

III. Пусть функция $u(t, x_1, \dots, x_m)$ зависит от $m+1$ переменной, причем $x_1 = x$. Многомерное интегрируемое обобщение уравнения Бюргерса определим формулой

$$u_{xt} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n b_{\alpha\beta} (u_{xx_\alpha} u_{x_\beta} + u_{xx_\beta} u_{x_\alpha} + \mu u_{xx_\alpha} x_\beta), \quad (9.13)$$

где $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ — произвольные постоянные.

Уравнение (9.13) линеаризуется с помощью замены $u = \mu \ln \varphi$. Уравнение (9.13) для решений вида (9.6), где $a_j = a_j(t, x_2, \dots, x_m)$, эквивалентно системе уравнений

$$a_{jt} = \mu \sum_{\alpha, \beta=1}^m \sum_{k \neq j}^n b_{\alpha\beta} (a_{jx_\alpha} x_\beta - (a_j - a_k)^{-1} (a_{kx_\alpha} a_{jx_\beta} + a_{kx_\beta} a_{jx_\alpha})), \quad (9.14)$$

где принято условное обозначение $a_{jx_1} = a_{jx} = -1$, $a_{jxx_\beta} = 0$. Функция $a = a_1 + \dots + a_n$ в силу системы (9.14) удовлетворяет линейному уравнению

$$a_t = \mu \sum_{\alpha, \beta=2}^m b_{\alpha\beta} a_{x_\alpha} x_\beta. \quad (9.15)$$

Уравнения (9.14), (9.15) являются обобщениями уравнений (9.11), (9.12).

ГЛАВА III

ДВУМЕРНОЕ МОДИФИЦИРОВАННОЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ

В работах [2, 3] была установлена важная роль в теории уравнения Кортевега — де Фриза двух преобразований Миуры и преобразования Гарднера. С помощью этих преобразований было выведено модифицированное уравнение КдФ. В данной главе преобразования Миуры и Гарднера применены для вывода двумерного модифицированного интегрируемого уравнения, имеющего две вещественно-неэквивалентные формы. Показано, что двумерное уравнение, выведенное в гл. II, и его модифицированное уравнение, несмотря на наличие опрокидывающихся солитонов, обладают счётным множеством первых интегралов. Указаны три различные представления Лакса для двумерного модифицированного уравнения, в которых оператор L является соответственно симметрическим, кососимметрическим и эрмитовым. Эти три представления Лакса отражают связь двумерного модифицированного уравнения с интегрируемым уравнением (1.21) — (1.22) гл. II, с уравнением Синус Гордона и уравнением МКдФ (соответствующие операторы L совпадают). Выведены уравнения эволюции данных рассеяния. Установлено, что стационарное модифицированное уравнение включает в себя ряд интегрируемых случаев уравнения Клейна — Гордона.

§ 1. Двумерное модифицированное уравнение

I. В данной главе мы продолжим изучение двумерного уравнения

$$u_{xt} = 4u_x u_{xy} + 2u_y u_{xx} - su_{xxx}, \quad (1.1)$$

интегрируемость которого доказана в гл. II. Применим к уравнению (1.1) преобразование Миуры, которое выберем в виде

$$u_x = v^2 + \sigma v_x, \quad u = \partial_x^{-1}(v^2) + \sigma v, \quad (1.2)$$

где $\sigma = \text{const}$. Вторая формула (1.2) определяет связь первообразной $\partial_x^{-1}(v^2)$ с функцией $u(t, x, y)$.

Прямая проверка доказывает, что при выполнении соотношений (1.2) справедливо тождество

$$\begin{aligned} u_{xt} - ku_x u_{xy} - mu_y u_{xx} + su_{xxx} &= \\ &= (2v + \sigma \partial_x)(v_t - kv^2 v_y - mv_x \partial_x^{-1}(v^2)_y + sv_{xxy}) + \\ &+ (4s - \sigma^2 k)v_x v_{xy} + (2s - \sigma^2 m)v_y v_{xx}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эта формула показывает, что значение параметра $k/m = 2$ приводит к выделенным свойствам соответствующих уравнений. В силу тождества (1.3) при $k = 4$, $m = 2$, $\sigma^2 = s$ получаем, что из уравнения

$$v_t = 4v^2 v_y + 2v_x \partial_x^{-1}(v^2)_y - sv_{xxy} \quad (1.4)$$

при преобразованиях Миуры (1.2) следует уравнение (1.1). При $s > 0$ имеем $\sigma = \pm s^{1/2}$ и преобразование (1.2) устанавливает вещественную эквивалентность уравнений (1.4) и (1.1). При $s < 0$ имеем $\sigma = \pm i|s|^{1/2}$ и преобразование (1.2) отображает вещественные решения уравнения (1.4) в комплексные решения уравнения (1.1).

Все уравнения (1.1) при $s \neq 0$ эквивалентны, так как преобразование $u = su_1$, $t = s^{-1}t_1$ приводит уравнение (1.1) к виду с $s = 1$. Напротив, никакие вещественные масштабные преобразования не меняют знак параметра s в уравнении (1.4). При $s > 0$ это уравнение отображается в уравнение (1.1) с помощью вещественного преобразования Миуры и поэтому будет называться его двумерным модифицированным уравнением. При $s < 0$ имеем другое, вещественно не эквивалентное ему уравнение.

Уравнение (1.4) для функций $v(t, x, y)$, не зависящих от x , имеет вид $v_t = 4v^2 v_y$. Это уравнение эквивалентно уравнению опрокидывающейся волны Римана; во всех его непостоянных решениях происходит опрокидывание графика функции $v(t, y)$.

При $s > 0$ достаточно рассмотреть случай $s = 1$; тогда уравнение (1.4) имеет вид

$$v_t = (2v \partial_x^{-1}(v^2)_y - v_{xy})_x. \quad (1.5)$$

При $s < 0$ достаточно положить $s = -1$, тогда из (1.4) получаем уравнение

$$v_t = (2v \partial_x^{-1}(v^2)_y + v_{xy})_x. \quad (1.6)$$

Первообразную $\partial_x^{-1}(v^2)_y$ в уравнениях (1.4) — (1.6) можно определить, например, формулой

$$\partial_x^{-1}(v^2)_y(t, x, y) = \int_0^x v_y^2(t, \xi, y) d\xi.$$

Уравнения (1.5), (1.6) для функций $v(t, x, y)$ вида

$$v(t, x, y) = v(t, z), \quad z = x + c^{-1}y,$$

переходят в два вещественно не эквивалентные модифицированные уравнения Кортевега — де Фриза

$$cv_t = 6v^2v_x - sv_{xxx}, \quad s = \pm 1. \quad (1.7)$$

II. Выделим в уравнении (1.4) первообразную $\partial_x^{-1}(v^2)_y$ и продифференцируем по x ; получим уравнение, не содержащее первообразной:

$$(v_x^{-1}(v_t - 4v^2v_y + sv_{xxy}))_x = 4vv_y. \quad (1.8)$$

Теорема 1. Любое решение уравнения Клейна — Гордона

$$\varphi_{xy} = f(\varphi), \quad (1.9)$$

где функция $f(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$sf''(\varphi) = f(\varphi), \quad (1.10)$$

определяет решение уравнения (1.8) по формуле

$$v(t, x, y) = \frac{1}{2} \varphi_x(x + c(t), y), \quad (1.11)$$

где $c(t)$ — произвольная функция.

Доказательство. Уравнение (1.8) после подстановки выражения (1.11) принимает вид

$$(\varphi_{xx}^{-1}(c'(t)\varphi_{xx} - \varphi_x^2\varphi_{xy} + s\varphi_{xxxxy}))_x = \varphi_x\varphi_{xy}. \quad (1.12)$$

Это равенство после подстановки формулы (1.9) и в силу $(c'(t))_x = 0$ преобразуется к виду

$$(\varphi_{xx}^{-1}(-\varphi_x^2f(\varphi) + s\varphi_x^2f''(\varphi) + s\varphi_{xx}f'(\varphi)))_x = \varphi_xf(\varphi). \quad (1.13)$$

Равенство (1.13) тождественно справедливо в силу уравнения (1.10). Теорема 1 доказана.

III. При $s = +1$ уравнения (1.9) — (1.10) принимают вид

$$\varphi_{xy} = C_1e^\varphi + C_2e^{-\varphi}. \quad (1.14)$$

С помощью масштабных преобразований уравнение (1.14)

сводится к трем неэквивалентным видам:

$$\varphi_{xy} = e^{\varphi}, \quad \varphi_{xy} = \operatorname{sh} \varphi, \quad \varphi_{xy} = \operatorname{ch} \varphi. \quad (1.15)$$

Первое уравнение (1.15) является уравнением Лиувилля и допускает полное решение в виде

$$\varphi(x, y) = \ln 2 \frac{a'(x) b'(y)}{(a(x) + b(y))^2}, \quad (1.16)$$

где $a(x)$ и $b(y)$ — произвольные функции. Поэтому согласно теореме 1 уравнение (1.8) имеет следующие точные решения:

$$v(t, x, y) = \frac{1}{2} \frac{a''(x + c(t))}{a'(x + c(t))} - \frac{a'(x + c(t))}{a(x + c(t)) + b(y)}, \quad (1.17)$$

зависящие от трех произвольных функций $a(x)$, $b(y)$, $c(t)$.

Связь уравнений (1.4) и (1.8) означает, что можно так выбрать первообразную $\partial_x^{-1}(v^2)_y$, что функция (1.17) является также решением уравнения (1.4) при $s = 1$. При этом функция $u(t, x, y)$, определенная любым из двух равенств $u = \partial_x^{-1}(v^2) \pm v$ (1.2), удовлетворяет уравнению (1.1) (в силу тождества (1.3)).

При $s = -1$ уравнения (1.9) — (1.10) принимают вид

$$\varphi_{xy} = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi.$$

Это уравнение с помощью масштабных преобразований сводится к уравнению Синус Гордона

$$\varphi_{xy} = \sin \varphi. \quad (1.18)$$

Любые точные решения интегрируемых уравнений Клейна — Гордона (1.15), (1.18) определяют в силу теоремы 1 по формуле (1.11) точные решения уравнений (1.8), (1.4), (1.1).

IV. Укажем периодические по x нестационарные решения уравнения (1.4), имеющие вид

$$v(t, x, y) = a(\xi), \quad \xi = x + \varphi(\alpha t + y), \quad (1.19)$$

где $\varphi(\xi)$ — произвольная дифференцируемая функция. Уравнение (1.4) для функции (1.19) принимает вид

$$\alpha a' = 6a^2 a' - sa'''. \quad (1.20)$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$sa'' = -\frac{\partial}{\partial a} \left(ca + \frac{\alpha}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^4 \right), \quad (1.21)$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение (1.21) является лагранжевым и имеет интеграл энергии

$$\frac{s}{2} a'^2 + ca + \frac{\alpha}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^4 = E. \quad (1.22)$$

Поэтому функция $a(\xi)$ определяется обращением следующего интеграла:

$$\int_{a_0}^a (s^{-1} (2E - 2ca_1 - \alpha a_1^2 + a_1^4))^{-1/2} da_1 = \xi - \xi_0. \quad (1.23)$$

При $s > 0$ и при определенных значениях параметров α, c, E функция (1.23) является периодической. При $s < 0$ функция (1.23) при любых значениях параметров α, c, E является периодической (кроме сепаратисных решений). Соответствующие решения (1.19) уравнения (1.4) являются периодическими функциями от x , зависимость которых от переменных t, y определяется произвольной функцией $\varphi(\alpha t + y)$.

§ 2. Счетное множество законов сохранения

I. Пусть функции $u(t, x, y)$ и $w(t, x, y, \varepsilon)$ связаны соотношением Гарднера

$$u_x = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2. \quad (2.1)$$

Отсюда следует

$$(u - \varepsilon w)_{xy} = (w + \varepsilon^2 w^2)_y. \quad (2.2)$$

Определим функцию $b(t, x, y, \varepsilon)$ формулой

$$b = (u - \varepsilon w)_y. \quad (2.3)$$

Функция $b(t, x, y, \varepsilon)$ является первообразной правой части (2.2):

$$b_x = (w + \varepsilon^2 w^2)_y. \quad (2.4)$$

Прямая проверка доказывает справедливость следующего тождества:

$$\begin{aligned} u_{xt} - k u_x u_{xy} - m u_y u_{xx} + u_{xxx} = \\ = (1 + \varepsilon \partial_x + 2\varepsilon^2 w) (w_t - k(w + \varepsilon^2 w^2) w_y - m b w_x + w_{xy}) + \\ + (4 - k) \varepsilon^2 w_x w_{xy} + (2 - m) \varepsilon^2 w_y w_{xx}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из тождества (2.5) при $k = 4, m = 2$ следует, что если

функция $w(t, x, y, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t = 4(w + \varepsilon^2 w^2)w_y + 2bw_x - w_{xy}, \quad (2.6)$$

где $b(t, x, y, \varepsilon)$ определена условием (2.4), то функция $u(t, x, y)$, заданная равенствами (2.1), (2.3) (которые в силу (2.4) совместны), удовлетворяет уравнению (1.1).

Уравнение (2.6) в силу (2.4) представляется в следующем дивергентном виде:

$$w_t = 2(bw)_x + (w^2 - w_{xx})_y. \quad (2.7)$$

После подстановки формулы (2.3) уравнение (2.6), (2.7) принимает вид

$$w_t = 2(w(u_y - \varepsilon w_y))_x + (w^2 - w_{xx})_y. \quad (2.8)$$

Соотношение Гарднера (2.1) разрешается с помощью формального степенного ряда

$$\begin{aligned} w(t, x, y, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t, x, y) \varepsilon^n = \\ &= u_x - u_{xx}\varepsilon + (u_{xxx} - u_x^2)\varepsilon^2 - (u_{xxx} - 2u_x^2)_x \varepsilon^3 + \\ &\quad + ((u_{xxx} - 3u_x^2)_{xx} + u_{xx}^2 + 2u_x^3)\varepsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Явные формулы для коэффициентов ряда (2.9) указаны в работе [3] (см. также [6]).

Уравнение (2.8) после подстановки вместо $w(t, x, y, \varepsilon)$ ряда (2.9) превращается в равенство двух формальных степенных рядов, из которого следует счетное множество законов сохранения

$$\frac{\partial P_n(u_x)}{\partial t} = \frac{\partial Q_n(u_x, u_y)}{\partial x} + \frac{\partial R_n(u_x)}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Законы сохранения (2.10) приводят к первым интегралам уравнения (1.1):

$$I_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int P_n(u_x) dx dy, \quad \frac{dI_n(u)}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

при условии сходимости выражений (2.11). Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. Двумерное нелинейное уравнение (1.1) имеет счетное множество законов сохранения (2.10) и первых интегралов (2.11), где дифференциальные многочлены $P_n(u_x)$ определены теми же формулами, что и для уравнения Кортевега — де Фриза.

Первый из законов сохранения (2.10), ($n = 0$) имеет вид

$$u_{tx} = 2(u_x u_y)_x + (u_x^2 - u_{xxx})_y, \quad (2.12)$$

совпадающий с уравнением (1.1). Простейшие первые интегралы (2.11) в силу разложения (2.9) определяются формулами

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx dy, \quad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_{x^2}^2 + 2u_x^3) dx dy, \\ I_6 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xxx}^2 - 5u_x^2 u_{xx} + 5u_x^4) dx dy. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Проведенный вывод первых интегралов (2.11) основан на применении к уравнению (1.1) преобразования Гарднера (2.1). Другой метод построения локальных и нелокальных первых интегралов для уравнений, допускающих представление нулевой кривизны, развит в работах [80, 81].

II. Если в формулах (2.11), (2.13) сделать замену

$$u_x = v^2 + \sigma v_x, \quad \sigma = \pm 1, \quad (2.14)$$

то первые интегралы (2.11), (2.13) перейдут в первые интегралы двумерного модифицированного уравнения (1.5). Преобразование Миуры (2.14) после подстановки

$$v = \sigma \epsilon w + (2\sigma \epsilon)^{-1}, \quad \sigma = \pm 1, \quad (2.15)$$

переходит в преобразование

$$u_x = w + \epsilon w_x + \epsilon^2 w^2 + (4\epsilon^2)^{-1}, \quad (2.16)$$

отличающееся от преобразования Гарднера (2.1) на постоянное слагаемое. Уравнение (2.6) при преобразовании (2.15)

$$w = (\sigma \epsilon)^{-1} v - (2\epsilon^2)^{-1}$$

переходит в уравнение

$$v_t = 4v^2 v_y + 2v_x \partial_x^{-1} (v^2)_y - v_{xx} v_y - \epsilon^{-2} v_y. \quad (2.17)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (1.5) после замены $t_1 = t$, $x_1 = x$, $y_1 = y - \epsilon^{-2} t$. Поэтому двумерные уравнения (2.6) и (1.5) эквивалентны. В частности, уравнение (2.6) также обладает счетным множеством первых интегралов.

§ 3. Представление Лакса для двумерного модифицированного уравнения (1.5)

Дальнейшая конструкция основана на следующем разложении на множители (факторизации) оператора Шрёдингера [74]:

$$L_0 = -d_x^2 + u_x = L^t L = (-d_x + v)(d_x + v) = -d_x^2 + v^2 - v_x \quad (3.1)$$

$$L_0 = -d_x^2 + u_x = L L^t = (d_x + v)(-d_x + v) = -d_x^2 + v^2 + v_x. \quad (3.2)$$

Здесь $L = d_x + v$ — простейший дифференциальный оператор. В силу разложений (3.1), (3.2) наиболее естественно появляются преобразования Миуры $u_x = v^2 - v_x$, $u_x = v^2 + v_x$. Факторизации различных дифференциальных операторов использовались в работах [75—79].

В ряде случаев уравнение Лакса для оператора L_0 является следствием операторного уравнения [27—29, 74]

$$L_t = LA + BL \quad (3.3)$$

для оператора L , которое и приводит к модифицированному уравнению для функции v . Более того, уравнение (3.3) само оказывается эквивалентным некоторому другому уравнению Лакса.

Пусть $L = d_x + v$, A и B являются кососимметрическими операторами третьего порядка

$$A = 4d_x^2 d_y + a_1 d_x + a_2 d_y + \frac{1}{2} a_{1x} + \frac{1}{2} a_{2y}, \quad (3.4)$$

$$B = -4d_x^2 d_y + b_1 d_x + b_2 d_y + \frac{1}{2} b_{1x} + \frac{1}{2} b_{2y}.$$

Простое вычисление приводит к формуле

$$\begin{aligned} LA + BL = & (a_1 + b_1 - 4v_y) d_x^2 + (a_2 + b_2 - 8v_x) d_x d_y + \\ & + \left(a_{1x} + \frac{1}{2} (a_1 + b_1)_x + \frac{1}{2} (a_2 + b_2)_y + v(a_1 + b_1) - 8v_{xy} \right) d_x + \\ & + (a_{2x} + v(a_2 + b_2) - 4v_{xx}) d_y + \frac{1}{2} v(a_1 + b_1)_x + \\ & + \frac{1}{2} v(a_2 + b_2)_y + b_1 v_x + b_2 v_y + \frac{1}{2} a_{1xx} + \frac{1}{2} a_{2xy} - 4v_{xx}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.3) в силу $L_t = v_t$ приводит к условию равенства нулю коэффициентов при четырех дифференциальных операторах d_x^2 , $d_x d_y$, d_x , d_y в полученном выраже-

нии для $LA + BL$. Эти четыре условия эквивалентны следующим равенствам:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= 2(v_x - v^2)_v, \quad a_2 = 4(v_x - v^2) + c_2, \\ b_1 &= 4v_y - a_1, \quad b_{1x} = 2(v_x + v^2)_v, \quad b_2 = 4(v_x + v^2) - c_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Функции a_1, a_2 согласно (3.5) выражаются через преобразование Миуры $u_x = v^2 - v_x$, а функции b_1, b_2 выражаются через преобразование Миуры $u_x = v^2 + v_x$.

После подстановки формул (3.5) в скалярную часть выражения $LA + BL$ операторное уравнение (3.3) сводится к следующему уравнению

$$v_t = 4v^2v_y + bv_x - v_{xy} - c_2v_y, \quad b_x = 2(v^2)_y.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (1.5), так как слагаемое $-c_2v_y$ устраняется после замены переменных $t_1 = t, x_1 = x, y_1 = y + c_2t$. В дальнейшем полагаем $c_2 = 0$.

Таким образом, уравнение (1.5) эквивалентно операторному уравнению (3.3) — (3.4). Представление Лакса для уравнения (1.5) следует из операторного уравнения (3.3) в силу следующего утверждения.

Утверждение 1. Если операторы A и B кососимметрические, то уравнение (3.3) эквивалентно уравнению Лакса

$$\dot{L}_1 = [L_1, A_1], \quad (3.6)$$

где операторы L_1 и A_1 действуют на двухкомпонентные вектор-функции и имеют вид

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & L^t \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Действительно, уравнение (3.6), (3.7) эквивалентно двум уравнениям

$$\dot{L} = LA + BL, \quad \dot{L}^t = -AL^t - L^tB. \quad (3.8)$$

Второе уравнение (3.8) эквивалентно первому, так как получается из него сопряжением (транспонированием) с учетом условий $A^t = -A, B^t = -B$. Поэтому уравнения (3.3) и (3.6) — (3.7) эквивалентны.

Из представления Лакса (3.6) получаем следствие

$$(L_1^2)^{\cdot} = [L_1^2, A_1], \quad L_1^2 = \begin{pmatrix} L^tL & 0 \\ 0 & LL^t \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

которое в силу формул (3.7) эквивалентно двум уравнениям

$$(L^tL)^{\cdot} = [L^tL, A], \quad (LL^t)^{\cdot} = [LL^t, -B]. \quad (3.10)$$

В случае $L = d_x + v$ справедливы формулы (3.1), (3.2). Поэтому в силу формул (3.5) получаем, что оба оператора A и $-B$ (3.4) имеют одинаковый вид

$$A_0 = 4d_x^2 d_y - 2u_y d_x - 4u_x d_y - 3u_{xy}, \quad (3.11)$$

где $u_x = v^2 - v_x$ для оператора A и $u_x = v^2 + x_x$ для оператора $-B$. Оператор (3.11) совпадает с оператором, указанным в гл. II в представлении Лакса для уравнения (1.1) (см. формулу (1.19) предыдущей главы). Поэтому два представления Лакса (3.10) совпадают с представлением Лакса для уравнения (1.1), полученным в гл. II.

Тем самым получено второе, независимое доказательство того, что из уравнения (1.5) при двух преобразованиях Миуры следует уравнение (1.1).

Обозначим $u_{1x} = v^2 - v_x$ и $u_{2x} = v^2 + v_x$. Оператор A_1 в силу формул (3.4), (3.5), (3.7) имеет следующий вид:

$$A_1 = -2(L_1^2 d_y + d_y L_1^2) - \begin{pmatrix} u_{1y} & 0 \\ 0 & u_{2y} \end{pmatrix} d_x - d_x \begin{pmatrix} u_{1y} & 0 \\ 0 & u_{2y} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Поэтому в рассматриваемом случае уравнение Лакса (3.6) и эквивалентное ему двумерное модифицированное уравнение (1.5) относятся к классу уравнений с опрокидывающимися солитонами, изучавшемуся в § 2 гл. II. Согласно лемме 1 § 2 собственные числа $f(t, y)$ самосопряженного оператора

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v(t, x, y) \quad (3.13)$$

в силу уравнения (1.5) удовлетворяют уравнению

$$f_t - 4f^2 f_y = 0, \quad (3.14)$$

которое, очевидно, приводит к опрокидыванию графика функции $f(t, y)$.

§ 4. Представление Лакса для двумерных уравнений (1.5) и (1.6)

I. В данном параграфе мы выведем двумерные уравнения (1.5) и (1.6) из следующего уравнения Лакса:

$$L_y = [L, AL^{-1} + (p d_x - \alpha d_t) L^{-2}]. \quad (4.1)$$

Здесь α — произвольная постоянная, $p(t, x, y)$ — неизвестная функция. Одномерный дифференциальный оператор L имеет тот же вид, что и в работах [40, 41], посвященных уравнению Синус Гордона:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & v \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где u и v — неизвестные функции от t, x, y . Оператор A является матрицей, зависящей от t, x, y :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.1) после умножения справа на L^2 принимает вид

$$L_y L^2 = (LA - AL)L + Lp\partial_x - p\partial_x L + \alpha L_t. \quad (4.4)$$

Для указанных операторов справедливы равенства

$$L_y = \begin{pmatrix} 0 & v_y \\ u_y & 0 \end{pmatrix}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^2 + \begin{pmatrix} uv & -v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix},$$

$$LA - AL = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} cv - bu - a_x & (d - a)v - b_x \\ (a - d)u + c_x & bu - cv - d_x \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$Lp\partial_x - p\partial_x L = p_x \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x - p \begin{pmatrix} 0 & v_x \\ u_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторное уравнение (4.4) после подстановки выражений (4.5) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$v_y = -2b, \quad u_y = -2c, \quad (4.6)$$

$$b_x = (d - a)v, \quad c_x = (d - a)u, \quad (4.7)$$

$$a_x - p_x = bu + cv, \quad d_x + p_x = -bu - cv, \quad (4.8)$$

$$uvv_y = cv^2 + buv - a_x v + \alpha v_t - pv_x, \quad (4.9)$$

$$uvv_y = bu^2 - cuv + d_x u + \alpha u_t - pu_x. \quad (4.10)$$

Уравнения (4.8) эквивалентны уравнениям

$$(a - p)_x = bu + cv, \quad (a + d)_x = 0. \quad (4.11)$$

Уравнения (4.9), (4.10) после подстановки уравнений (4.6) и (4.8) принимают вид

$$\alpha v_t = (pv)_x, \quad \alpha u_t = (pu)_x. \quad (4.12)$$

В итоге получаем, что уравнение (4.4) эквивалентно системе уравнений (4.6), (4.7), (4.11), (4.12). Эта система уравнений при предположении

$$u = kv, \quad c = kb, \quad k = \text{const} \quad (4.13)$$

сводится к пяти уравнениям

$$\begin{aligned} v_y &= -2b, \quad b_x = (d - a)v, \quad (a - p)_x = 2kbv, \\ (a + d)_x &= 0, \quad \alpha v_t = (pv)_x. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из первых четырех уравнений (4.14) получаем выражение функций a , b , d , p через функцию v :

$$\begin{aligned} a &= (4v)^{-1} v_{xy} + \gamma, \quad b = -\frac{1}{2} v_y, \quad d = -(4v)^{-1} v_{xy} + \gamma, \\ p &= k\partial_x^{-1} (v v_y) + (4v)^{-1} v_{xy} + \gamma, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где γ — произвольная функция от t , y . Подставляя выражение для функции p (4.15) в последнее уравнение (4.14), получаем окончательное уравнение для функции $v(t, x, y)$:

$$\alpha v_t = k(v\partial_x^{-1}(v v_y))_x + \frac{1}{4} v_{xxy} + \gamma(t, y) v_x. \quad (4.16)$$

Проведенные построения доказывают, что уравнение (4.16) эквивалентно операторному уравнению (4.1) — (4.3) при условиях (4.13), (4.15). При $k > 0$ уравнение (4.16) эквивалентно уравнению (1.6). В этом случае формулы (4.1) — (4.3) определяют представление Лакса для уравнения (1.6). При $k < 0$ уравнение (4.16) эквивалентно уравнению (1.5). Таким образом, для модифицированного двумерного уравнения (1.5) получено второе представление Лакса (4.1) — (4.3). При $k = 0$ уравнение (4.16) является линейным:

$$\alpha v_t = \frac{1}{4} v_{xxy} + \gamma(t, y) v_x. \quad (4.17)$$

При $k = -1$ оператор L (4.2) является кососимметрическим. При $k = 1$ оператор L (4.2) не обладает симметрией. В следующем параграфе указано представление Лакса с эрмитовым оператором L для уравнений (1.5), (1.6), (4.16).

§ 5. Представление Лакса с эрмитовым оператором L

Возьмем эрмитов оператор L в виде

$$L = \begin{pmatrix} ip_1 & 0 \\ 0 & ip_2 \end{pmatrix} \partial_x + v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где $v(t, x, y)$ — вещественная функция, p_1 и p_2 — вещественные постоянные. Косоэрмитов оператор A выберем в виде

$$A = -\alpha(\partial_y L^2 + L^2 \partial_y) + \frac{1}{2}(A_0 \partial_x + \partial_x A_0) + iw \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

где α — вещественная постоянная, $w(t, x, y)$ — неизвестная вещественная функция, A_0 — эрмитова матрица, зависящая от t, x, y :

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & -ic \\ ic & b \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Предположим, что операторы L и A удовлетворяют уравнению Лакса

$$\dot{L} = [L, A]. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) в силу тождества

$$-[L, \partial_y L^2 + L^2 \partial_y] = L_y L^2 + L^2 L_y \quad (5.5)$$

является равенством двух эрмитовых операторов, содержащих только дифференциальные операторы ∂_x^2, ∂_x . Приравняв в уравнении (5.4) коэффициенты при операторах ∂_x^2, ∂_x , получаем формулы, выражающие функции a, b, c, w через функцию v :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{2p_1\alpha}{p_1 - p_2} \partial_x^{-1}(v^2)_y, & b &= \frac{2p_2\alpha}{p_1 - p_2} \partial_x^{-1}(v^2)_y, \\ c &= \alpha \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 - p_2} v_y, \\ w &= \alpha \frac{(p_1 + p_2)(4p_1 p_2 - p_2^2 - p_1^2)}{2(p_1 - p_2)^2} v_{xy} + 2\alpha \frac{p_1 + p_2}{(p_1 - p_2)^2} v \partial_x^{-1}(v^2)_y. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При выполнении условий (5.6) операторное уравнение (5.4) эквивалентно следующему уравнению на функцию

$v(t, x, y):$

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha_1 (v_{xxy} + \beta (v \partial_x^{-1} (v^2)_y)_x), \\ \alpha_1 &= -\frac{2p_1^2 p_2^2 \alpha}{(p_1 - p_2)^2}, \quad \beta = \frac{2}{p_1 p_2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Таким образом, уравнение (5.7) допускает эквивалентное представление Лакса с эрмитовым оператором L (5.1).

Уравнение (5.7), очевидно, эквивалентно уравнению (4.16). При $p_1 p_2 > 0$ уравнение (5.7) эквивалентно уравнению (1.6), при $p_1 p_2 < 0$ уравнение (5.7) эквивалентно модифицированному уравнению (1.5). Поэтому оба уравнения (1.5), (1.6) допускают представление Лакса (5.4) с эрмитовым оператором L (5.1).

При $y = x$ уравнение (5.7) переходит в уравнение МКдФ (1.7). При этом оператор L совпадает с оператором L из работы [42], но оператор A (5.2) после замены ∂_y на ∂_x не совпадает с оператором A из работы [42].

З а м е ч а н и е. Рассмотрим уравнение

$$L = \gamma L + [L, A - \gamma x \partial_x], \quad (5.8)$$

где операторы L и A определены формулами (5.1), (5.2), (5.6), γ — произвольная функция от t и y . Используя вывод уравнения (5.7), нетрудно получить, что операторное уравнение (5.8) эквивалентно уравнению

$$v_t = \alpha_1 (v_{xxy} + \beta (v \partial_x^{-1} (v^2)_y)_x) + \gamma (xv)_x. \quad (5.9)$$

Все формулы для решений уравнения (5.7) (см. ниже § 6, 7) после простых изменений переносятся на решения уравнения (5.9).

§ 6. Опрокидывающиеся солитоны

I. Запишем уравнение (5.7) в следующем эквивалентном виде:

$$v_t = (2v \partial_x^{-1} (v^2)_y - s v_{xy})_x, \quad (6.1)$$

который переходит в уравнения (1.5), (1.6) при $s = 1$ и $s = -1$. Представим уравнение (6.1) в виде, не содержащем операции ∂_x^{-1} :

$$(v_x^{-1} (v_t - 4v^2 v_y + s v_{xxy}))_x = 4v v_y. \quad (6.2)$$

Опрокидывающиеся солитоны уравнения (6.1) — (6.2) будем искать в виде бегущих волн

$$v(t, x, y) = \lambda(t, y) a(\xi), \quad \xi = \lambda(t, y) x - \varphi(t, y). \quad (6.3)$$

После подстановки формул (6.3) в уравнение (6.2) и приведения подобных членов получаем, что функции $\lambda(t, y)$, $\varphi(t, y)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\lambda_t = m\lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = m\lambda^2\varphi_y, \quad (6.4)$$

где m — некоторая постоянная. При этом уравнение (6.2) сводится к следующим двум уравнениям для функции $a(\xi)$:

$$F' = 4aa', \quad F = (ma' - 4a^2a' + sa''')/a', \quad (6.5)$$

$$((ma - 4a^3 + 3sa'')/a')' + F = 4a^2. \quad (6.6)$$

Покажем, что система этих двух уравнений совместна и эквивалентна одному уравнению, которое имеет вид

$$sa'^2 = a^4 - ma^2. \quad (6.7)$$

Принтегрировав уравнение (6.5) по ξ , находим

$$F = 2a^2 + c_1, \quad sa''' = 6a^2a' + (c_1 - m)a'. \quad (6.8)$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$sa'' = 2a^3 + (c_1 - m)a + c_2. \quad (6.9)$$

Это уравнение лагранжево и имеет интеграл энергии E :

$$sa'^2 = a^4 + (c_1 - m)a^2 + 2c_2a + 2E. \quad (6.10)$$

Таким образом, уравнения (6.5), (6.9), (6.10) эквивалентны.

Уравнение (6.6) после подстановки выражений для F (6.8) и sa'' (6.9) и проведения дифференцирования принимает вид

$$4\left(a^2 + c_1 - \frac{1}{2}m\right)a'^2 = (2a^3 + (3c_1 - 2m)a + 3c_2)a''. \quad (6.11)$$

После подстановки в (6.11) выражений (6.9), (6.10) получаем равенство двух многочленов шестой степени. Это равенство является тождеством, если произвольные постоянные удовлетворяют условиям $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $E = 0$. В этом случае уравнение (6.10) принимает вид (6.7). При этом, согласно проведенным преобразованиям, оба уравнения (6.5), (6.6) удовлетворены. Следовательно, система двух уравнений (6.5) — (6.6) эквивалентна уравнению (6.7).

II. Решения уравнения (6.7) при $s = 1$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} \text{при } m = b^2 > 0 \quad a(\xi) &= b \cos^{-1}(b\xi + c), \\ \text{при } m = -b^2 < 0 \quad a(\xi) &= b \operatorname{sh}^{-1}(b\xi + c), \\ \text{при } m = 0 \quad a(\xi) &= (\xi - c)^{-1}. \end{aligned}$$

При $s = -1$ необходимо предположить, что $m = b^2 > 0$; при этом уравнение (6.7) определено в полосе $|a| \leq |b|$ и все его решения имеют вид

$$a(\xi) = b \operatorname{ch}^{-1}(b\xi + c). \quad (6.12)$$

Особые точки уравнения (6.7) $a = \pm b$ соответствуют точным решениям уравнения (6.1), не зависящим от переменной x :

$$v(t, x, y) = \lambda(t, y), \quad \lambda_t = 4\lambda^2\lambda_y. \quad (6.13)$$

Решение (6.13) эквивалентно опрокидывающейся волне Римана.

Уравнения (6.1), (6.7) инвариантны относительно замены знака у функций $v(t, x, y)$ и $a(\xi)$, поэтому во всех формулах решений можно изменить знак.

Проведенные рассуждения после подстановки в формулах (6.3), (6.4) $\lambda_1 = b\lambda$, $\varphi_1 = b\varphi$ доказывают следующее утверждение.

Утверждение 2. Уравнение (6.1) при $s = 1$ имеет точные опрокидывающиеся решения, определенные формулами

$$v_1 = \lambda \cos^{-1}(\lambda x - \varphi), \quad \lambda_t = \lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = \lambda^2\varphi_y, \quad (6.14)$$

$$v_2 = \lambda \operatorname{sh}^{-1}(\lambda x - \varphi), \quad \lambda_t = -\lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = -\lambda^2\varphi_y. \quad (6.15)$$

Уравнение (6.1) при $s = -1$ имеет точное решение — опрокидывающийся солитон

$$v = \frac{\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda x - \varphi)}, \quad \lambda_t = \lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = \lambda^2\varphi_y. \quad (6.16)$$

Солитонное решение (6.16) является гладким по x и быстро убывает при $|x| \rightarrow \infty$. Решения (6.14), (6.15) имеют сингулярности на оси x . При преобразовании Миуры $u_x = v^2 + v_x$ солитон (6.15) переходит в функцию

$$u_x = -\frac{\lambda^2}{\operatorname{ch}(\lambda x - \varphi) + 1} = -\frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2(\mu x - \eta)}, \quad (6.17)$$

где $\mu = \lambda/2$, $\eta = \varphi/2$. Формула (6.17) определяет опрокидывающийся солитон интегрируемого уравнения (1.1)

(см. гл. II. § 3). Применение преобразований Миуры $u_x = v^2 \pm v_x$ к функции (6.14) приводит к сингулярным опрокидывающимся решениям уравнения (1.1).

§ 7. Эволюция данных рассеяния

Уравнение на собственные функции

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

для оператора (5.1) эквивалентно системе двух уравнений

$$ip_1\psi_{1x} + v\psi_2 = \lambda\psi_1, \quad ip_2\psi_{2x} + v\psi_1 = \lambda\psi_2. \quad (7.2)$$

Система (7.2) после замены

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{p_2} \exp(-i\lambda x/p_1 p_2) v_2, \\ \psi_2 &= \sqrt{p_1} \exp(-i\lambda x/p_1 p_2) v_1 \end{aligned} \quad (7.3)$$

принимает вид

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\lambda \frac{p_1 - 1}{p_1 p_2} v_1 &= \frac{iv}{\sqrt{p_1 p_2}} v_2, \\ v_{2x} + i\lambda \frac{p_2 - 1}{p_1 p_2} v_2 &= \frac{iv}{\sqrt{p_1 p_2}} v_1. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Далее предположим, что выполнены соотношения

$$p_1 + p_2 = 2, \quad p_1 p_2 > 0. \quad (7.5)$$

В этом случае в уравнении (5.7) параметр $\beta > 0$, и уравнение вещественно не эквивалентно уравнению (1.1).

Система (7.4) после введения обозначений

$$\zeta = \lambda \frac{p_1 - 1}{p_1 p_2} = -\lambda \frac{p_2 - 1}{p_1 p_2}, \quad q = \frac{iv}{\sqrt{p_1 p_2}}, \quad \bar{q} = -q \quad (7.6)$$

переходит в систему

$$v_{1x} + i\zeta v_1 = qv_2, \quad v_{2x} - i\zeta v_2 = qv_1, \quad (7.7)$$

которая подробно изучалась в работе [67] в связи с нелинейным уравнением Шрёдингера.

В дальнейшем рассматриваются решения $v(t, x, y)$ уравнения (5.7), имеющие следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty: \quad \partial_x^{-1}(v^2)_y(t, x, y) &\rightarrow g(t, y), \quad v(t, x, y) \rightarrow 0, \\ x \rightarrow +\infty: \quad \partial_x^{-1}(v^2)_y(t, x, y) &\rightarrow h(t, y), \quad v(t, x, y) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

При этом потенциал $q = i\nu/\sqrt{p_1 p_2} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Согласно работе [67] преобразование

$$\tau \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = 1 \quad (7.9)$$

переводит решение системы (7.7) при вещественном ξ снова в решение. Функции Йоста φ , ψ при вещественном ξ определены как решения системы (7.7), имеющие асимптотики

$$\varphi_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \quad \varphi_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (7.10)$$

Функция $\tau(\psi)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет асимптотику

$$\tau(\varphi_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}. \quad (7.11)$$

Функции φ_2 и $\tau(\varphi_2)$ образуют базис в двумерном пространстве решений системы (7.7). Поэтому справедливо равенство

$$\varphi_1 = a(\xi, t, y) \tau(\varphi_2) + b(\xi, t, y) \varphi_2. \quad (7.12)$$

Для спектральной функции $\psi(\lambda, t, x, y)$ (7.1) ($\lambda = \text{const}$) в силу уравнения Лакса $\bar{L} = [L, A]$ справедливо уравнение

$$L(\psi_t + A\psi) = \lambda(\psi_t + A\psi), \quad (7.13)$$

т. е. функция $\psi_t + A\psi$ является линейной комбинацией двух функций Йоста (7.10), (7.11).

В силу формул (5.2), (5.6) и асимптотик (7.8) при $x \rightarrow -\infty$ получаем

$$\begin{aligned} (\psi_t + A\psi)_1 &= \psi_{1t} + 2\alpha p_1^2 \psi_{1xxy} - \frac{2\alpha p_1}{p_1 - p_2} g \psi_{1x}, \\ (\psi_t + A\psi)_2 &= \psi_{2t} + 2\alpha p_2^2 \psi_{2xxy} + \frac{2\alpha p_2}{p_1 - p_2} g \psi_{2x}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

При $x \rightarrow +\infty$ в формулах (7.14) необходимо заменить функцию $g(t, y)$ на $h(t, y)$.

Обозначим через T преобразование (7.3): $T(v_1, v_2) = (\psi_1, \psi_2)$ и через B — преобразование

$$B = T^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) T. \quad (7.15)$$

Если функции (v_1, v_2) удовлетворяют системе (7.7), то в силу (7.13) функции $B(v_1, v_2)$ также удовлетворяют системе (7.7).

При $x \rightarrow -\infty$ в силу формул (7.14), (7.15) и (7.3) получаем $B(v_1, v_2) = (Bv_1, Bv_2)$, где

$$\begin{aligned} Bv_1 = v_{1t} + 2\alpha p_2^2 \left(v_{1xxy} - \frac{2i\xi}{p_1 - 1} v_{1xy} - \left(\frac{\xi}{p_1 - 1} \right)^2 v_{1y} \right) + \\ + \frac{2\alpha p_2}{p_1 - p_2} g \left(v_{1x} - \frac{i\xi}{p_1 - 1} v_1 \right), \\ Bv_2 = v_{2t} + 2\alpha p_1^2 \left(v_{2xxy} - \frac{2i\xi}{p_1 - 1} v_{2xy} - \left(\frac{\xi}{p_1 - 1} \right)^2 v_{2y} \right) - \\ - \frac{2\alpha p_1}{p_1 - p_2} g \left(v_{2x} - \frac{i\xi}{p_1 - 1} v_2 \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Применяя формулы (7.16) к функции Йоста φ_1 (7.10) при $x \rightarrow -\infty$, получаем точное равенство

$$B(\varphi_1) = - \frac{2i\alpha p_1 p_2 g}{(p_1 - p_2)(p_1 - 1)} \varphi_1. \quad (7.17)$$

Представим функцию φ_1 в виде (7.12) и применим аналог формул (7.16) при $x \rightarrow +\infty$, при этом функция $g(t, y)$ заменяется на $h(t, y)$. Используя асимптотики (7.10), (7.11) при $x \rightarrow +\infty$, находим

$$\begin{aligned} B(\varphi_1) = B(a(\xi, t, y) \tau(\varphi_2) + b(\xi, t, y) \varphi_2) = \\ = \left(a_t - \frac{2\alpha p_1^2 p_2^2 \xi^2}{(p_1 - 1)^2} a_y - \frac{2i\alpha p_1 p_2 \xi}{(p_1 - p_2)(p_1 - 1)} h a \right) \tau(\varphi_2) + \\ + \left(b_t - \frac{2\alpha p_1^2 p_2^2 \xi^2}{(p_1 - 1)^2} b_y + \frac{2i\alpha p_1 p_2 \xi}{(p_1 - p_2)(p_1 - 1)} h b \right) \varphi_2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Подставляя в равенство (7.17) выражение $\varphi_1 = a\tau(\varphi_2) + b\varphi_2$ и используя формулу (7.18), получаем уравнения для функций $a(\xi, t, y)$ и $b(\xi, t, y)$:

$$\begin{aligned} a_t - m\xi^2 a_y &= il\xi(g - h)a, \\ b_t - m\xi^2 b_y &= il\xi(g + h)b, \\ m &= \frac{2\alpha p_1^2 p_2^2}{(p_1 - 1)^2}, \quad l = \frac{2\alpha p_1 p_2}{(p_1 - p_2)(1 - p_1)}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Параметр α в формулах (5.2), (5.6) является произвольным. Исходя из вида уравнения (5.7) выберем $\alpha = -(p_1 - p_2)^2 / 2p_1^2 p_2^2$; тогда $\alpha_1 = 1$ и коэффициенты m и l в силу $p_1 + p_2 = 2$ принимают вид $m = -4$, $l = \beta = 2/p_1 p_2$.

§ 8. Интегрируемые комплексификации уравнений КдФ и МКдФ

I. Конструкции интегрируемых комплексных расширений уравнений КдФ и МКдФ будут основаны на исследовании некоторых операторных уравнений вида

$$\dot{L} = LA + BL. \quad (8.1)$$

Укажем в дополнение к § 3 еще три случая, когда уравнение (8.1) оказывается эквивалентным уравнению Лакса. Пусть L, A, B — комплексные операторы и черта $\bar{L}$ означает комплексное сопряжение.

Утверждение 3. Если $B = -\bar{A}$, то уравнение (8.1) эквивалентно уравнению Лакса

$$\dot{L}_1 = [L_1, A_1] \quad (8.2)$$

с операторами

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{L} \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Действительно, уравнение (8.2), (8.3) эквивалентно двум уравнениям

$$\dot{L} = LA + BL, \quad \dot{\bar{L}} = -A\bar{L} - \bar{L}B. \quad (8.4)$$

Второе уравнение (8.4) эквивалентно первому, так как получается из него комплексным сопряжением с учетом условия $B = -\bar{A}$.

Из уравнения Лакса (8.2) следует уравнение

$$(L_1^2)^{\cdot} = [L_1^2, A_1], \quad (8.5)$$

которое в случае (8.3) эквивалентно уравнению

$$(\bar{L}L)^{\cdot} = [\bar{L}L, A]. \quad (8.6)$$

Утверждение 4. Если операторы A и B коссоэрмитовы, $\bar{A}^t = -A$, $\bar{B}^t = -B$, то уравнение (8.1) эквивалентно уравнению Лакса (8.2) с операторами

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{L}^t \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Доказательство аналогично.

Из уравнения (8.5) в случае (8.7) следуют два уравнения

$$(\bar{L}^t L)^* = [\bar{L}^t L, A], \quad (L \bar{L}^t)^* = [L \bar{L}^t, -B] \quad (8.8)$$

с эрмитовыми операторами $\bar{L}^t L$ и $L \bar{L}^t$.

Утверждение 5. Если оператор A кососимметричен, а оператор B косоэрмитов, $\bar{A}^t = -A$, $\bar{B}^t = -B$, то уравнение (8.1) эквивалентно уравнению Лакса (8.2), где операторы L_1 и A_1 действуют на четырехкомпонентные вектор-функции и имеют вид

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{L}^t \\ 0 & \bar{L} & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Действительно, уравнение (8.2), (8.9) эквивалентно четырем уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{L} &= LA + BL, & \dot{\bar{L}} &= \bar{L}A + \bar{B}\bar{L}, \\ \dot{L}^t &= -L^t \bar{B} - AL^t, & \dot{\bar{L}}^t &= -\bar{L}^t B - \bar{A}\bar{L}^t. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Три последних уравнения (8.10) эквивалентны первому в силу условий $\bar{A}^t = -A$, $\bar{B}^t = -B$. Поэтому уравнения (8.1) и (8.2), (8.9) эквивалентны.

Из уравнения (8.2) следует

$$(L_1^4)^* = [L_1^4, A_1], \quad (8.11)$$

которое в силу формул (8.9) эквивалентно двум уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= [M_1, A], \quad M_1 = L^t \bar{L} \bar{L}^t L, \\ \dot{M}_2 &= [M_2, -B], \quad M_2 = L L^t \bar{L} \bar{L}^t, \end{aligned} \quad (8.12)$$

и уравнениям, комплексно сопряженным к ним.

II. Рассмотрим уравнение

$$\dot{L} = BL - L\bar{B}, \quad (8.13)$$

где операторы L и B имеют вид

$$L = -\partial_x^2 + u(t, x), \quad B = -4\partial_x^3 + 4b(t, x)\partial_x + 4\partial_x \bar{b}(t, x), \quad (8.14)$$

$u(t, x)$, $b(t, x)$ — комплекснозначные функции. Уравнение (8.13), (8.14) сводится к системе двух дифференци-

альных уравнений

$$3u_x = \bar{b}_x + 3b_x, \quad u_t/4 = (b + \bar{b})u_x + u(\bar{b} - b_x) + (b - u)_{xxx}. \quad (8.15)$$

Из первого уравнения находим равенство

$$b = \frac{3}{8}(3u - \bar{u}) + c, \quad (8.16)$$

где c — произвольная постоянная. Второе равенство (8.15) после подстановки выражения (8.16) принимает вид

$$u_t = 6\bar{u}_x u + 3(\bar{u} - u)u_x + \frac{1}{2}(u - 3\bar{u})_{xxx}, \quad (8.17)$$

где опущено несущественное слагаемое $(c + \bar{c})u_x$, которое устраняется заменой координат $t_1 = t$, $x_1 = x + (c + \bar{c})t$.

Уравнение (8.17) эквивалентно операторному уравнению (8.13). Поэтому в силу утверждения 3 уравнение (8.17) допускает эквивалентное представление Лакса (8.2), (8.3). Следовательно, уравнение (8.17) интегрируемо методом обратной задачи рассеяния.

Соответствующий (8.14) оператор L_1 (8.3) является дифференциальным оператором второго порядка, действующим на двухкомпонентные вектор-функции:

$$L_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_{2xx} + \bar{u}\psi_2 \\ -\psi_{1xx} + u\psi_1 \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

Из уравнения (8.17) в силу утверждения 3 следует также уравнение Лакса

$$(L\bar{L})^* = [L\bar{L}, -B],$$

где оператор $L\bar{L}$ имеет вид

$$L\bar{L} = d_x^4 - u d_x^3 - d_x^2 \bar{u} + |u|^2. \quad (8.19)$$

Собственные числа эрмитовых операторов (8.18), (8.19) сохраняются в силу уравнения (8.17).

Уравнение (8.17) для вещественных функций $u(t, x)$ переходит в уравнение КдФ и является, следовательно, его нетривиальной интегрируемой комплексификацией.

Уравнение (8.17) эквивалентно системе двух вещественных уравнений на вещественную и мнимую части функции $u(t, x) = f(t, x) + ih(t, x)$:

$$f_t = 6ff_x - f_{xxx} + 12hh_x, \quad h_t = -6fh_x + 2h_{xxx}. \quad (8.20)$$

Из последнего уравнения находим $f = (2h_{xxx} - h_t)/6h_x$.

После подстановки этого выражения в первое уравнение (8.20) получается некоторое интегрируемое дифференциальное уравнение второго порядка по t для одной функции $h(t, x)$.

Из уравнения (8.17) следуют соотношения

$$\begin{aligned}(u + \bar{u})_t &= -\frac{3}{2}(u^2 + \bar{u}^2 - 6u\bar{u})_x - (u + \bar{u})_{xx}, \\ (u^2 + \bar{u}^2 - 6u\bar{u})_t &= \\ &= -6\operatorname{Re}\left[2i\bar{u}^2 + 2i\bar{u}_{xx} - u_x\bar{u}_x - \frac{10}{3}iu_{xx} + \frac{5}{3}u_x^2\right]_x. \quad (8.21)\end{aligned}$$

В силу этих равенств уравнение (8.17) в классе функций $u(t, x)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \rightarrow \infty$, имеет следующие первые интегралы:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (u + \bar{u}) dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \bar{u}^2 - 6u\bar{u}) dx. \quad (8.22)$$

III. Рассмотрим операторное уравнение

$$\dot{L}_2 = L_2 A + B L_2, \quad (8.23)$$

$$L_2 = d_x + v(t, x), \quad \frac{A}{4} = d_x^3 + a(t, x) d_x + d_x a(t, x),$$

$$\frac{B}{4} = -d_x^3 + b(t, x) d_x + d_x \bar{b}(t, x), \quad A^t = -A, \quad \bar{B}^t = -B,$$

где $a(t, x)$, $b(t, x)$, $v(t, x)$ — комплекснозначные функции. Уравнение (8.23) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned}2a + b + \bar{b} &= 3v_x, \quad 3a_x + \bar{b}_x + (2a + b + \bar{b})v = 3v_{xx}, \\ v_t &= 4(a_{xx} + (a_x + \bar{b}_x)v + (b + \bar{b})v_x - v_{xxx}).\end{aligned} \quad (8.24)$$

Из первых двух уравнений (8.24) следуют равенства

$$\begin{aligned}a &= \frac{3}{8}(3v_x - v^2 - v_x - \bar{v}^2) - \frac{1}{2}(c + \bar{c}), \\ b &= \frac{3}{8}(3v_x + 3v^2 - v_x - \bar{v}^2) + c.\end{aligned} \quad (8.25)$$

Третье уравнение (8.24) после подстановки формул (8.25) принимает вид

$$v_t = \left(3v\bar{v}^2 - v^3 + 3\bar{v}_x(v - \bar{v}) + \frac{1}{2}(v - 3\bar{v})_{xx}\right)_x, \quad (8.26)$$

где опущено несущественное слагаемое $(c + \bar{c})v_x$.

Уравнение (8.26) эквивалентно операторному уравнению (8.23), где $\bar{A} = -A$, $\bar{B}^t = -B$. Следовательно, в си-

лу утверждения 5 уравнение (8.26) допускает эквивалентное представление Лакса (8.2), (8.9). Поэтому уравнение (8.26) интегрируемо методом обратной задачи рассеяния.

Уравнение (8.26) для вещественных функций $v(t, x)$ совпадает с уравнением МКДФ

$$v_t = 6v^2v_x - v_{xxx} \quad (8.27)$$

и поэтому является его нетривиальной интегрируемой комплексификацией. После подстановки $v(t, x) = f(t, x) + ih(t, x)$ уравнение (8.26) переходит в интегрируемую систему двух вещественных уравнений:

$$\begin{aligned} f_t &= (6hh_x + 2f^3 + 6fh^2 - f_{xxx})_x, \\ h_t &= (6hf_x - 2h^3 - 6f^2h + 2h_{xxx})_x. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Из уравнения (8.23) следует уравнение

$$(L_2 L_2^t)' = B L_2 L_2^t - L_2 L_2^t B, \quad L_2 L_2^t = -d_x^2 + v^2 + v_x = L,$$

совпадающее с уравнением (8.13) при $u = v^2 + v_x$. Формулы (8.16) и (8.25) для коэффициента $b(t, x)$ совпадают. Поэтому уравнение (8.26) при преобразовании Мигуры $u = v^2 + v_x$ переходит в уравнение (8.17), т. е. уравнение (8.26) является модифицированным по отношению к уравнению (8.17).

В силу утверждения 5 уравнение (8.26) допускает еще два представления Лакса вида (8.12). Соответствующие операторы Лакса имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= L_2^t \bar{L}_2 \bar{L}_2^t L = d_x^4 + d_x^3 v - v d_x^3 - v d_x^2 v - d_x (\bar{v}_x + \bar{v}^2) d_x + \\ &\quad + v (\bar{v}_x + \bar{v}^2) d_x - d_x (\bar{v}_x + \bar{v}^2) v + v^2 (\bar{v}_x + \bar{v}^2), \\ M_2 &= L_2 L_2^t \bar{L}_2 \bar{L}_2^t = d_x^4 - (v_x + v^2) d_x^2 - d_x^2 (\bar{v}_x + \bar{v}^2) + |v_x + v^2|^2. \end{aligned}$$

Оператор M_1 симметрический, оператор $M_2 = L \bar{L}$ эрмитов. Собственные числа этих операторов являются первыми интегралами уравнения (8.26).

§ 9. Интегрируемые расширения уравнения КДФ с оператором L четвертого порядка. Модифицированная цепочка. Тогда

И. В данном параграфе мы выведем систему двух уравнений, допускающую эквивалентное представление Лакса

$$\dot{L}_1 = [L_1, A] \quad (9.1)$$

с самосопряженным оператором L_1 четвертого порядка. Оператор L_1 представим в виде

$$L_1 = L^2 + v = \partial_x^4 - u\partial_x^2 - \partial_x^2 u + u^2 + v, \quad (9.2)$$

где L — оператор Шрёдингера

$$L = -\partial_x^2 + u(t, x), \quad (9.3)$$

$u(t, x)$ и $v(t, x)$ — неизвестные функции. Выберем оператор A в виде

$$A = 4\partial_x^3 - 3(u\partial_x + \partial_x u). \quad (9.4)$$

Справедливо известное равенство

$$[L, A] = K(u) = 6uu_x - u_{xxx}. \quad (9.5)$$

Уравнение Лакса (9.1) в силу формул (9.2) — (9.5) имеет вид

$$\begin{aligned} -u_t\partial_x^2 - \partial_x^2 u_t + 2uu_t + v_t &= L[L, A] + [L, A]L + [v, A] = \\ &= -K(u)\partial_x^2 - \partial_x^2 K(u) + 2uK(u) - 6(v_x\partial_x^2 + \partial_x^2 v_x) + \\ &\quad + 6uv_x + 2v_{xxx}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Это операторное уравнение эквивалентно следующим двум дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} u_t &= K(u) + 6v_x, \\ 2uu_t + v_t &= 2uK(u) + 6uv_x + 2v_{xxx}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Исключая из второго уравнения (9.7) в силу первого уравнения производную u_t и подставляя выражение (9.5), приходим к системе эволюционных уравнений

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} + 6v_x, \quad v_t = -6uv_x + 2v_{xxx}. \quad (9.8)$$

В силу проведенного построения система (9.8) эквивалентна уравнению Лакса (9.1) с оператором L_1 четвертого порядка (9.2) и оператором A третьего порядка (9.4). Следовательно, система (9.8) интегрируема методом обратной задачи рассеяния, связанной с оператором L_1 . Теория прямой и обратной задач рассеяния для общих самосопряженных операторов L четвертого порядка развита в работах [84—85].

Из первого уравнения (9.8) находим

$$6v = \partial_x^{-1} u_t - 3u^2 + u_{xx}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (9.8) и дифференцируя по x , получаем интегрируемое дифферен-

циальное уравнение второго порядка по t :

$$u_{tt} = (3u^2 - u_{xx})_{xt} + 2(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_{xx} - 6(u(u_t - 6uu_x + u_{xxx}))_x. \quad (9.9)$$

Уравнение (9.9) может быть представлено также в виде

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} + w, \quad w_t = -6(uw)_x + 2w_{xxx}. \quad (9.10)$$

Решения уравнения КдФ определяют инвариантное подмногообразие $w = 0$ уравнений (9.9) — (9.10).

Система уравнений (8.20), допускающая представление Лакса с эрмитовым оператором четвертого порядка LL (8.19), после переобозначений $f = u$, $h = v$ принимает вид

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} + 6(v^2)_x, \quad v_t = -6uv_x + 2v_{xxx}. \quad (9.11)$$

Системы (9.8), (9.11) при всем своем очевидном сходстве являются двумя различными интегрируемыми расширениями уравнения КдФ, которое выделяется условием $v(t, x) = \text{const}$.

II. Уравнение КдФ и уравнение МКдФ связаны, как известно, двумя преобразованиями Миуры, обусловленными двумя различными разложениями на множители оператора Шрёдингера L (9.3). Покажем, что в полной аналогии с этими свойствами существует некоторая система двух уравнений, модифицированная по отношению к системе (9.8), также связанная с ней двумя нелинейными преобразованиями, обусловленными двумя различными разложениями на множители оператора четвертого порядка L_1 (9.2).

Оператор L_1 разложим на множители двумя способами:

$$L_1 = L_2^t L_2, \quad L_1 = \tilde{L}_2 \tilde{L}_2^t, \quad (9.12)$$

где операторы L_2 , $\tilde{L}_2$ имеют вид

$$L_2 = -\partial_x^2 + b\partial_x + \partial_x b + a, \quad \tilde{L}_2 = -\partial_x^2 + \tilde{b}\partial_x + \partial_x \tilde{b} + \tilde{a} \quad (9.13)$$

с неизвестными функциями $a(t, x)$, $b(t, x)$, $\tilde{a}(t, x)$, $\tilde{b}(t, x)$. В силу первого разложения (9.12) получаем

$$L_1 = L_2^t L_2 = \partial_x^4 - (a + 2(b^2 + b_x))\partial_x^2 - \partial_x^2(a + 2(b^2 + b_x)) + a^2 - 2a_x b + 2bb_{xx} + 3b_x^2 + b_{xxx}. \quad (9.14)$$

Отсюда находим связь функций u , v и a , b :

$$u = a + 2(b^2 + b_x), \quad v = a^2 - 2a_x b + 2bb_{xx} + 3b_x^2 + b_{xxx} - u^2. \quad (9.15)$$

В силу второго разложения на множители (9.12) получаем

$$L_1 = \tilde{L}_2 \tilde{L}_2^t = \partial_x^4 - (\tilde{a} + 2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}_x)) \partial_x^3 - \partial_x^2 (\tilde{a} + 2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}_x)) + \\ + \tilde{a}^2 + 2\tilde{a}_x \tilde{b} + 2\tilde{b} \tilde{b}_{xx} + 3\tilde{b}_x^2 - \tilde{b}_{xxx}. \quad (9.16)$$

Отсюда следуют формулы

$$u = \tilde{a} + 2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}_x), \quad v = \tilde{a}^2 + 2\tilde{a}_x \tilde{b} + 2\tilde{b} \tilde{b}_{xx} + 3\tilde{b}_x^2 - \tilde{b}_{xxx} - u^2. \quad (9.17)$$

Дифференциальные уравнения на переменные $a(t, x)$, $b(t, x)$ мы выведем из операторного уравнения

$$L_2 = L_2 A_1 + B_1 L_2 \quad (9.18)$$

и после этого покажем, что из (9.18) при двух преобразованиях, определенных формулами (9.12), следует уравнение Лакса (9.1). Операторы A_1 и B_1 (9.18) являются кососимметрическими и определены формулами

$$A_1 = 4\partial_x^3 - u_1 \partial_x - \partial_x u_1, \quad -B_1 = 4\partial_x^3 - u_2 \partial_x - \partial_x u_2 \quad (9.19)$$

с неизвестными функциями $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$. Уравнение (9.18) после подстановки формул (9.13), (9.19) сводится к следующим дифференциальным уравнениям для функций a , b , u_1 , u_2 :

$$u_1 - u_2 = 12b_x, \quad (5u_1 - u_2)_x = 12(a_x + 4bb_x + 3b_{xx}), \quad (9.20)$$

$$a_t + b_{tx} = u_{1xxx} - 4a_{xxx} - 4b_{xxx} - 2bu_{1xx} - \\ - (a + b_x)(u_{1x} - u_{2x}) + 2(a_x + b_{xx})u_2, \quad (9.21)$$

$$b_t = 2u_{1xx} - 6a_{xx} - 10b_{xxx} - a(u_1 - u_2) - \\ - b(3u_{1x} - u_{2x}) - b_x(u_1 - 3u_2). \quad (9.22)$$

Уравнения (9.20) разрешаются относительно функций $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$:

$$u_1 = 3(a + 2(b^2 + b_x)), \quad u_2 = 3(a + 2(b^2 - b_x)). \quad (9.23)$$

Уравнения (9.21), (9.22) после подстановки формул (9.23) переходят в систему двух эволюционных уравнений

$$a_t = 6aa_x - a_{xxx} + 12a_x b^2 + 12b_x b_{xx}, \\ b_t = 2b_{xxx} - 12b^2 b_x - 6(ab)_x. \quad (9.24)$$

Система уравнений (9.24) в силу проведенного вывода эквивалентна операторному уравнению (9.18). Поэтому

му согласно утверждению 1 из § 3 система (9.24) допускает эквивалентное представление Лакса с матричными операторами

$$\dot{L}_3 = [L_3, A_3], \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2^t \\ L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -B_1 \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Из уравнения (9.18) следуют также два уравнения Лакса

$$(L_2^t L_2)' = [L_2^t L_2, A_1], \quad (L_2 L_2^t)' = [L_2 L_2^t, -B_1]. \quad (9.26)$$

Оператор $L_2^t L_2$ в силу формул (9.14), (9.15) совпадает с оператором L_1 . Оператор A_1 (9.19) в силу формулы (9.23) для функции $u_1(t, x)$ и формулы (9.15) для функции $u(t, x)$ совпадает с оператором A (9.4). Поэтому первое уравнение (9.26) эквивалентно уравнению Лакса (9.1), из которого следует система (9.8). Ввиду этого из системы уравнений (9.24) при преобразовании (9.15) следует система (9.8).

Аналогично оператор $L_2 L_2^t$ в силу формул (9.16), (9.17) совпадает с оператором L_1 . Оператор $-B_1$ (9.19) в силу формулы (9.23) для функции $u_2(t, x)$ и формулы (9.17) для функции $u(t, x)$ совпадает с оператором A (9.4). Поэтому второе уравнение (9.26) эквивалентно уравнению Лакса (9.1), из которого следует система (9.8). Ввиду этого из системы уравнений (9.24) при преобразовании (9.17) также следует система (9.8).

Два преобразования T_1 (9.15) и T_2 (9.17) получаются друг из друга заменой $a \rightarrow \tilde{a}$, $b \rightarrow -\tilde{b}$, которая соответствует инвариантности системы (9.24) относительно изменения знака переменной b (такая же инвариантность имеется и у модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза). Преобразование $T_2 T_1^{-1}$ или $T_1 T_2^{-1}$ является преобразованием Беклунда для системы (9.24).

Уравнения (9.24) при $b(t, x) = 0$ сводятся к уравнению Кортевега — де Фриза и поэтому также являются его интегрируемым расширением. По-видимому, системы уравнений (9.8) и (9.24) обладают счетными множествами локальных законов сохранения.

III. Укажем операторное представление вида (9.18) для уравнений модифицированной цепочки Тода [49]

$$\dot{a}_k = a_k(b_k^2 - b_{k+1}^2), \quad \dot{b}_k = b_k(a_{k-1}^2 - a_k^2). \quad (9.27)$$

Пусть L , A , B — бесконечные или периодические (modulo n) матрицы, имеющие только следующие ненулевые

элементы:

$$L_{i,i+1} = a_i, \quad L_{i,i} = b_i, \quad (9.28)$$

$$A_{i,i+1} = -A_{i+1,i} = x_i, \quad B_{i,i+1} = -B_{i+1,i} = y_i.$$

Тогда уравнение (9.18) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$a_i x_{i+1} = -y_i a_{i+1}, \quad b_{i+1} x_i = -y_i b_i, \quad (9.29)$$

$$\dot{a}_i = b_i x_i + y_i b_{i+1}, \quad \dot{b}_i = -a_i x_i - y_{i-1} a_{i-1}. \quad (9.30)$$

Решение алгебраических уравнений (9.29) определяется формулами

$$x_i = \gamma a_i b_i, \quad y_i = -\gamma a_i b_{i+1}. \quad (9.31)$$

В дальнейшем произвольную постоянную γ полагаем равной 1. Дифференциальные уравнения (9.30) после подстановки формул (9.31) принимают вид динамической системы (9.27). Таким образом система (9.27) допускает эквивалентное операторное представление (9.18) с кососимметрическими матрицами A и B . Поэтому в силу утверждения 1 из § 3 система (9.27) допускает также эквивалентное представление Лакса (9.25). Следствиями системы (9.27) являются два уравнения Лакса (9.26).

Симметрические матрицы $L^t L$ и LL^t в силу формул (9.28) имеют следующие ненулевые элементы:

$$(L^t L)_{ii} = a_{i-1}^2 + b_i^2, \quad (L^t L)_{i,i+1} = (L^t L)_{i+1,i} = a_i b_i, \quad (9.32)$$

$$(LL^t)_{ii} = a_i^2 + b_i^2, \quad (LL^t)_{i,i+1} = (LL^t)_{i+1,i} = a_i b_{i+1}.$$

Определим два отображения переменных a_i, b_j в переменные p_i, c_k :

$$p_i = a_{i-1}^2 + b_i^2, \quad c_i = a_i b_i, \quad (9.33)$$

$$p_i = a_i^2 + b_i^2, \quad c_i = a_i b_{i+1}. \quad (9.34)$$

Уравнения (9.26) в силу формул (9.28), (9.31)–(9.34) совпадают с уравнениями цепочки Тода

$$\dot{p}_i = 2(c_{i-1}^2 - c_i^2), \quad \dot{c}_i = c_i(p_i - p_{i+1}). \quad (9.35)$$

Следовательно, формулы (9.33), (9.34) определяют два отображения модифицированной цепочки Тода (9.27) в классическую цепочку Тода (9.35).

Уравнения (9.27) после подстановки

$$a_i = \exp(q_i - q_{i+1}), \quad b_i = \exp(\bar{p}_i/2) \quad (9.36)$$

преобразуются в гамильтонову систему уравнений

$$\dot{\bar{p}}_i = 2(\exp 2(q_{i-1} - q_i) - \exp 2(q_i - q_{i+1})), \quad \dot{q}_i = \exp \bar{p}_i, \quad (9.37)$$

имеющую гамильтониан

$$H = \sum \exp \bar{p}_i + \sum \exp 2(q_i - q_{i+1}). \quad (9.38)$$

Кинетическая энергия в гамильтониане (9.38) имеет нестандартный вид суммы экспонент от импульсов. Проведенные построения доказывают также, что «экспоненциальная цепочка Тода» (9.37) отображается в классическую цепочку Тода (9.35) с помощью двух отображений (9.33), (9.34).

ТРЕХМЕРНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ

В данной главе построено уравнение на комплекснозначную функцию $v(t, x, y, z)$, допускающее представление Лакса с эрмитовым оператором L , содержащим только дифференциальный оператор ∂_x . Собственные числа $f(t, y, z)$ оператора L в силу уравнения Лакса удовлетворяют квазилинейному дифференциальному уравнению первого порядка, выведенному в общем виде в гл. II. Полученное трехмерное уравнение в специальных случаях оказывается связанным с нелинейным уравнением Шрёдингера, с двумерным модифицированным уравнением, выведенным в гл. III и (для стационарных решений) с различными интегрируемыми случаями уравнения Клейна — Гордона. Указаны опрокидывающиеся солитоны двумерных редукций построенного уравнения.

§ 1. Представление Лакса для трехмерного комплексного уравнения

I. Рассмотрим уравнение Лакса

$$\dot{L} = [L, A] \quad (1.1)$$

с эрмитовым оператором L вида

$$L = \begin{pmatrix} ip_1 & 0 \\ 0 & ip_2 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & \bar{v} \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где $v(t, x, y, z)$ — неизвестная комплекснозначная функция, p_1, p_2 — вещественные постоянные. Оператор A выберем косоэрмитовым следующего вида:

$$A = \frac{p_1 - p_2}{2p_1 p_2} \alpha_1 A_1 + \frac{(p_1 - p_2)^2}{2p_1^2 p_2^2} \alpha_2 A_2, \quad (1.3)$$

где оператор A_1 содержит дифференциальный оператор ∂_y :

$$A_1 = -(\partial_y L + L \partial_y) + \begin{pmatrix} iw_1 & -\bar{w}_2 \\ w_2 & -iw_1 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

а оператор A_2 содержит дифференциальный оператор ∂_z :

$$A_2 = -(\partial_z L^2 + L^2 \partial_z) + \frac{1}{2}(a \partial_x + \partial_x a) + w, \quad (1.5)$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & \bar{a}_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} iw_3 & -\bar{w}_5 \\ w_5 & iw_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь α_1, α_2 — вещественные постоянные (но их можно считать также и произвольными вещественными функциями переменных t, y, z). Функции w_i, a_i от четырех переменных t, x, y, z выражаются через функцию $v(t, x, y, z)$ в силу уравнения Лакса (1.1) следующими формулами:

$$w_1 = \frac{2}{p_1 - p_2} \partial_x^{-1} |v|_y^2, \quad w_2 = \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} v_y, \quad (1.6)$$

$$a_1 = -\frac{2p_1}{p_1 - p_2} \partial_x^{-1} |v|_z^2, \quad a_2 = -\frac{p_2}{p_1} a_1, \quad a_3 = i \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 - p_2} v_z,$$

$$w_3 = u_1 + p_2 u_2, \quad w_4 = -u_1 - p_1 u_2,$$

$$u_1 = i \frac{2p_1 p_2}{(p_1 - p_2)^2} \partial_x^{-1} (v_x \bar{v}_z - \bar{v}_x v_z),$$

$$u_2 = i \frac{p_1 + p_2}{(p_1 - p_2)^2} (\bar{v} v_z - v \bar{v}_z),$$

$$w_5 = -i \frac{p_1 + p_2}{2(p_1 - p_2)^2} ((p_1^2 + p_2^2 - 4p_1 p_2) v_{xz} - 4v \partial_x^{-1} |v|_z^2).$$

В силу соотношений (1.6) уравнение Лакса (1.1) — (1.5) эквивалентно следующему трехмерному уравнению:

$$v_t = \alpha_1 (iv_{xy} + i\beta v \partial_x^{-1} |v|_y^2) -$$

$$- \alpha_2 \left[v_{xxz} + \beta (v \partial_x^{-1} |v|_z^2)_x + \beta v \partial_x^{-1} (v_x \bar{v}_z - \bar{v}_x v_z) + \right.$$

$$+ \frac{1}{8} \beta^2 (p_1 + p_2)^2 v (\bar{v} v_z - v \bar{v}_z) +$$

$$\left. + \frac{1}{8} \beta^2 (p_1 - p_2)^2 (v |v|_z^2 - 2v_z |v|^2) \right], \quad (1.7)$$

где $\beta = 2/(p_1 p_2)$.

К уравнению (1.7) ввиду структуры операторов A_1 (1.4) и A_2 (1.5) применима основная лемма (гл. II), согласно которой собственные числа $f(t, y, z)$ оператора L (1.2) в силу уравнения (1.7) удовлетворяют квазилинейному уравнению

$$f_t = \alpha_1 p f f_v + \alpha_2 p^2 f^2 f_z, \quad (1.8)$$

где $p = (p_1 - p_2)/(p_1 p_2)$. В силу уравнения (1.8) при изменении времени происходит опрокидывание графиков собственных чисел $f(t, y, z)$.

II. Уравнение (1.7) для функций $v(t, x, y, z)$ вида

$$v(t, x, y, z) = u(t, r), \quad r = x + k_1 y + k_2 z \quad (1.9)$$

переходит в уравнение

$$\begin{aligned} u_t = & \alpha_1 k_1 (i u_{rr} + i \beta u |u|^2) - \alpha_2 k_2 \left[u_{rrr} + \beta (u |u|^2)_r + \right. \\ & + \frac{1}{8} \beta^2 (p_1 + p_2)^2 u (\bar{u} u_r - u \bar{u}_r) + \\ & \left. + \frac{1}{8} \beta^2 (p_1 - p_2)^2 (u |u|_r^2 - 2 u_r |u|^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) является линейной комбинацией нелинейного уравнения Шрёдингера ($\alpha_2 = 0$) и второго уравнения из его иерархии ($\alpha_1 = 0$). Уравнение (1.10) при $\alpha_1 = 0$ можно рассматривать так же, как интегрируемую комплексификацию уравнения МКдФ, поскольку для вещественных функций $u(t, r)$ это уравнение ($\alpha_1 = 0$) переходит в МКдФ.

III. Уравнение (1.7) при $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$ имеет первый интеграл полной вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int \int |v(t, x, y, z)|^2 dx dy dz = \text{const}. \quad (1.11)$$

Действительно, в силу уравнения (1.7) находим

$$\begin{aligned} |v|_t^2 = & v_t \bar{v} + \bar{v} v_t = i \alpha_1 (v_{xy} \bar{v} - \bar{v} v_{xy}) - \\ & - \alpha_2 [v_{xxz} \bar{v} + \bar{v} v_{xxz} + \beta (v \partial_x^{-1} |v|_z^2)_x \bar{v} + \beta \bar{v} (\bar{v} \partial_x^{-1} |v|_z^2)_x] = \\ = & i \alpha_1 ((v_x \bar{v})_y - (\bar{v} v_y)_x) - \alpha_2 \left[(v_{xx} \bar{v})_z - (v_x \bar{v}_z)_x + (v \bar{v}_{xz})_x + \right. \\ & \left. + \beta (|v|^2 \partial_x^{-1} |v|_z^2)_x + \frac{1}{2} \beta |v|_z^4 \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Правая часть в полученном выражении является полной дивергенцией. Поэтому если $|v(t, x, y, z)| \rightarrow 0$ достаточ-

но быстро при $|x|, |y|, |z| \rightarrow \infty$, то из равенства (1.12) следует сохранение интеграла (1.11).

IV. Уравнение (1.7) для стационарных решений вида

$$v(t, x, y, z) = u(x, y, z) \exp(iE(t)), \quad (1.13)$$

где $u(x, y, z)$ и $E(t)$ — вещественные функции, сводится к двум уравнениям

$$u_{xy} + 2\beta i \partial_x^{-1}(u u_y) = u \dot{E}(t) \alpha_1^{-1}, \quad u_{xz} + 2\beta i \partial_x^{-1}(u u_z) = 0. \quad (1.14)$$

Разделим равенства (1.14) на u и продифференцируем по x , получим уравнения

$$(u^{-1} u_{xy})_x + 2\beta i u u_y = 0, \quad (u^{-1} u_{xz})_x + 2\beta i u u_z = 0. \quad (1.15)$$

Покажем, что уравнения (1.15) имеют решения вида

$$u(x, y, z) = \varphi_x(x, r), \quad r = k_1 y + k_2 z, \quad (1.16)$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x, r)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\varphi_{xr} = f(\varphi), \quad (1.17)$$

причем функция $f(\varphi)$ является некоторым решением линейного уравнения

$$f''(\varphi) + 2\beta f(\varphi) = 0. \quad (1.18)$$

Равенства (1.17), (1.18) определяют различные интегрируемые случаи уравнения Клейна — Гордона (см. § 1 гл. III).

Действительно, уравнения (1.15) после замены (1.16) сводятся к одному соотношению

$$(\varphi_x^{-1} \varphi_{xxr})_x + 2\beta \varphi_x \varphi_{xr} = 0,$$

которое в силу равенства (1.17) эквивалентно уравнению (1.18), а оно предполагается выполненным.

Уравнения (1.14) также имеют решения (1.16) — (1.18) в силу произвола вида $F(t, y, z)$ в выборе аддитивных постоянных в первообразных $\partial_x^{-1}(u u_y)$, $\partial_x^{-1}(u u_z)$. Окончательно получаем, что уравнение (1.7) имеет точные решения вида

$$v(t, x, y, z) = \varphi_x(x, k_1 y + k_2 z) \exp(iE(t)), \quad (1.19)$$

где функция $\varphi(x, r)$ удовлетворяет любому интегрируемому уравнению Клейна — Гордона (1.17) — (1.18), а вещественная функция $E(t)$ произвольна.

V. Укажем простейшие точные решения уравнения (1.7), имеющие вид

$$v(t, x, y, z) = a(\xi) \exp(ib), \quad (1.20)$$

$$\xi = k_1 x + k_2 y + k_3 z - k_0 t, \quad b = m_1 x + m_2 y + m_3 z - m_0 t,$$

где $a(\xi)$ — вещественная функция переменной ξ . Уравнение (1.7) после подстановки (1.20) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$a'' = -\beta k_1^{-2} a^3 + c_1 a + c_2, \quad (1.21)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, и двум соотношениям для коэффициентов k_i, m_j :

$$\begin{aligned} k_0 &= \alpha_1 (m_1 k_2 + m_2 k_1) + \alpha_2 (c_1 k_1^2 k_3 - m_1 (m_1 k_3 + 2m_3 k_1)), \\ \alpha_1 k_2 &= \alpha_2 (2m_1 k_3 + k_1 m_3). \end{aligned} \quad (1.22)$$

При $\alpha_2 = 0$ остается только первое соотношение (1.22) при этом $c_2 = 0$.

Уравнение (1.21) имеет лагранжев вид

$$a'' = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\beta}{4k_1^2} a^4 - \frac{c_1}{2} a^2 - c_2 a \right)$$

и поэтому обладает интегралом энергии

$$a'^2 + \frac{\beta}{2k_1^2} a^4 - c_1 a^2 - 2c_2 a = 2E. \quad (1.23)$$

Следовательно, функция $a(\xi)$ находится путем обращения интеграла

$$\int_{a_0}^a \left(2E + c_1 a_1^2 + 2c_2 a_1 - \frac{\beta}{2k_1^2} a_1^4 \right)^{-1/2} da_1 = \xi - \xi_0. \quad (1.24)$$

Из вида интеграла энергии (1.23) следует, что все решения (1.24) при $\beta > 0$ являются периодическими, кроме сепаратрисных решений, которые реализуются при $E = 0$. При $\beta > 0, c_1 > 0, c_2 = E = 0$ решение уравнения (1.23) имеет вид

$$a(\xi) = \frac{k_1 (2c_1/\beta)^{1/2}}{\operatorname{ch} (c_1^{1/2} \xi + \xi_0)}. \quad (1.25)$$

Этому решению соответствует точное, быстро убывающее при $|\xi| \rightarrow \infty$ решение (1.20), (1.22) трехмерного уравнения (1.7).

§ 2. Опрокидывающиеся солитоны двумерных редукций

I. Уравнение (1.7) для вещественных функций v , не зависящих от переменной y , переходит в двумерное модифицированное уравнение, изучавшееся в гл. III:

$$v_t = -\alpha_2 (v_{xz} + 2\beta v \partial_x^{-1} (v v_z))_x. \quad (2.1)$$

Полное комплексное уравнение (1.7) при $\alpha_1 = 0$ является, таким образом, интегрируемой комплексификацией уравнения (2.1).

Из результатов гл. III следует, что уравнение (2.1) при $\beta > 0$ имеет точное быстроубывающее при $|x| \rightarrow \infty$ решение — опрокидывающийся солитон

$$v = \lambda (2/\beta)^{1/2} \text{ch}(\lambda x - \varphi), \quad (2.2)$$

где функции $\lambda(t, z)$ и $\varphi(t, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_t = -\alpha_2 \lambda^2 \lambda_z, \quad \varphi_t = -\alpha_2 \lambda^2 \varphi_z.$$

При $\beta < 0$ уравнение (2.1) имеет два типа опрокидывающихся решений, определенных формулами

$$v_1 = \lambda (2/|\beta|)^{1/2} / \cos(\lambda x - \varphi), \quad \lambda_t = -\alpha_2 \lambda^2 \lambda_z, \quad \varphi_t = -\alpha_2 \lambda^2 \varphi_z, \quad (2.3)$$

$$v_2 = \lambda (2/|\beta|)^{1/2} / \text{sh}(\lambda x - \varphi), \quad \lambda_t = \alpha_2 \lambda^2 \lambda_z, \quad \varphi_t = \alpha_2 \lambda^2 \varphi_z. \quad (2.4)$$

Решения (2.3), (2.4) являются сингулярными и имеют движущиеся полюса первого порядка.

II. Уравнение (1.7) для комплекснозначных функций v , не зависящих от переменной z , переходит в уравнение ($\alpha_1 = 1$)

$$v_t = i v_{xy} + i \beta v \partial_x^{-1} |v|_y^2. \quad (2.5)$$

Имеется два неэквивалентных уравнения (2.5), отвечающих значениям параметра $\beta > 0$ и $\beta < 0$ (масштабные преобразования сохраняют знак параметра β). При $\beta = -2$ для уравнения (2.5) в работе [35] было указано представление Лакса (однако само уравнение не исследовалось). При этом оператор L имел вид

$$L = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. в отличие от оператора L (1.2) не являлся эрмитовым. Представление Лакса (1.1) — (1.4) при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 =$

$= 0$ приводит к уравнению (2.5) с произвольным значением параметра $\beta = 2/(p_1 p_2)$.

Уравнение (2.5) после деления на iv и дифференцирования по x принимает вид

$$\left(i \frac{v_t}{v} + \left(\frac{v_x}{v}\right)_y + \frac{v_x}{v} \frac{v_y}{v}\right)_x = -\beta |v|_y^2. \quad (2.6)$$

После подстановки в уравнение (2.6) $v = a \exp ib$ (где функции $a(t, x, y)$ и $b(t, x, y)$ вещественны) и разделения на вещественную и мнимую части получаем систему двух уравнений

$$\left(-b_t + \left(\frac{a_x}{a}\right)_y + \frac{a_x}{a} \frac{a_y}{a} - b_x b_y\right)_x = -\beta (a^2)_y, \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{a_t}{a} + b_{xy} + \frac{a_x}{a} b_y + \frac{a_y}{a} b_x\right)_x = 0. \quad (2.8)$$

Пусть функции a и b имеют вид

$$\begin{aligned} a(t, x, y) &= \lambda_1(t, y) a(\xi), \quad b = m\xi, \\ \xi &= \lambda_1(t, y)x - \varphi_1(t, y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\lambda_1(t, y)$ и $\varphi_1(t, y)$ — не известные пока функции переменных t, y ; m — произвольная постоянная. Подстановка выражений (2.9) в уравнение (2.8) приводит к уравнениям для функций $\lambda_1(t, y)$, $\varphi_1(t, y)$:

$$\lambda_{1t} + 2m\lambda_1\lambda_{1y} = 0, \quad \varphi_{1t} + 2m\lambda_1\varphi_{1y} = 0. \quad (2.10)$$

Подстановка выражений (2.9) в уравнение (2.7) при учете соотношений (2.10) приводит к двум уравнениям

$$a'' = -\beta a^3 + ca, \quad (2.11)$$

$$a'^2 = -\frac{1}{2}\beta a^4 + \frac{1}{2}(3c + m^2)a^2, \quad (2.12)$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение (2.11) является лагранжевым и имеет интеграл энергии

$$a'^2 + \frac{1}{2}\beta a^4 - ca^2 = 2E. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.12) и (2.13) совместны, если $c = -m^2$ и $E = 0$ и в этом случае сводятся к одному уравнению

$$a'^2 + \frac{1}{2}\beta a^4 + m^2 a^2 = 0. \quad (2.14)$$

Ненулевые решения этого уравнения существуют только при $\beta < 0$ и имеют вид

$$a(\xi) = m(2/|\beta|)^{1/2} / \cos(m\xi - \xi_0). \quad (2.15)$$

Этому решению соответствует опрокидывающийся солитон уравнения (2.5), который после обозначения $\lambda = m\lambda_1$, $\varphi = m\varphi_1$ определяется формулами

$$v(t, x, y) = \lambda \frac{(2/|\beta|)^{1/2} \exp(i(\lambda x - \varphi))}{\cos(\lambda x - \varphi)}, \quad (2.16)$$

$$\lambda_t + 2\lambda\lambda_y = 0, \quad \varphi_t + 2\lambda\varphi_y = 0.$$

Солитон (2.16) является периодической функцией по x с периодом $T(t, y) = 2\pi/\lambda(t, y)$, имеющей движущиеся полюсы первого порядка с координатами

$$x_n(t, y) = \left(\varphi(t, y) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right) / \lambda(t, y).$$

Во всех параметрах солитона (2.16) происходит явление опрокидывания, поскольку функция $\lambda(t, y)$ удовлетворяет уравнению волны Римана.

Замечание. Если в формулах (2.9) $b = b(\xi)$ — неизвестная функция, то после подстановки (2.9) в уравнения (2.7), (2.8) с необходимостью следует, что функция $b(\xi)$ является линейной. Поэтому опрокидывающийся солитон вида (2.16) для уравнения (2.5) является единственным в классе (2.9) и существует только при $\beta < 0$.

§ 3. Двумерное матричное уравнение, допускающее представление Лакса

I. Рассмотрим уравнение Лакса (1.1), где матричные операторы L и A имеют вид

$$L = ip\partial_x + u(t, x, y), \quad (3.1)$$

$$A = -(\partial_y L + L\partial_y) + w(t, x, y). \quad (3.2)$$

Здесь p — постоянная диагональная матрица с компонентами $p_{kj} = p_k \delta_{kj}$, $p_k \neq p_j$; $u(t, x, y)$ и $w(t, x, y)$ — неизвестные матрицы размера $n \times n$, ∂_y — некоторый дифференциальный оператор. Справедливы равенства

$$[L, -\partial_y L - L\partial_y] = (L^2)_y = i(pu_y + u_y p)\partial_x + ipu_{xy} + (u^2)_y, \quad (3.3)$$

$$[L, w] = i(pw - wp)\partial_x + ipw_x + [u, w].$$

Уравнение (1.1) после подстановки выражений (3.1) — (3.3) принимает вид

$$u_t = i(pu_y + u_y p + pw - wp)\partial_x + ipu_{xy} + ipw_x + (u^2)_y + [u, w]. \quad (3.4)$$

Из уравнения (3.4) следует, что коэффициент при операторе ∂_x равен нулю. Отсюда получаем соотношения

$$w_{kj} = -\frac{p_k + p_j}{p_k - p_j} (u_{kj})_y, \quad k \neq j, \quad p_k (u_{kk})_y = 0. \quad (3.5)$$

Далее полагаем, в соответствии со второй группой уравнений (3.5), что величины $u_{kk} = q_k$ постоянны и вещественны. Уравнение (3.4) после подстановки формул (3.5) переходит в систему уравнений

$$(u_{kk})_t = 0 = ip_k (w_{kk})_x + \sum_{s=1}^n ((u_{ks} u_{sk})_y + u_{ks} w_{sk} - w_{ks} u_{sk}), \quad (3.6)$$

$$(u_{kj})_t = ip_k ((u_{kj})_y + w_{kj})_x + \sum_{s=1}^n ((u_{ks} u_{sj})_y + u_{ks} w_{sj} - w_{ks} u_{sj}). \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.6) после подстановки формул (3.5) находим

$$w_{kk} = 2i\partial_x^{-1} \sum_{m \neq k}^n \frac{1}{p_k - p_m} (u_{km} u_{mk})_y. \quad (3.8)$$

Формулы (3.5) и (3.8) полностью определяют матрицу $w(t, x, y)$ через матрицу $u(t, x, y)$.

Уравнение (3.7) после подстановки выражений (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned} (u_{kj})_t = & -i \frac{2p_k p_j}{p_k - p_j} (u_{kj})_{xy} + u_{kj} (w_{jj} - w_{kk}) + \frac{2(q_j p_k - q_k p_j)}{p_k - p_j} (u_{kj})_y - \\ & - 2 \sum_{m \neq k, j}^n \left(\frac{p_j}{p_m - p_j} u_{km} (u_{mj})_y + \frac{p_k}{p_m - p_k} (u_{km})_y u_{mj} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, двумерное матричное уравнение (3.9), (3.8) эквивалентно уравнению Лакса (1.1), (3.1), (3.2).

II. Уравнение (3.9), (3.8) при вещественных p_k, q_i имеет инвариантное подмногообразие эрмитовых матриц u : $u_{kj} = \bar{u}_{jk}$; в этом случае матрица w , определенная соотношениями (3.5), (3.8) является косоэрмитовой. Для матриц u, w размера 2×2 указанная конструкция приводит после обозначения $v = u_{21}$ к уравнению, эквивалентному (2.5). При $y = x$ уравнение (3.9), (3.8) является интегрируемым обобщением нелинейного уравнения Шрёдингера в эрмитовых матрицах u размера $n \times n$.

Уравнение (3.9), (3.8) при чисто мнимых $p_k = ib_k$ и вещественных q_k имеет вещественные решения $u_{kj}(t, x, y)$. В простейшем случае $n = 2$, $q_1 = q_2 = 0$ уравнение (3.9), (3.8) сводится после замены времени

$$d\tau/dt = 2b_1b_2/(b_1 - b_2)$$

к системе двух уравнений для вещественных функций $u = u_{12}$ и $v = u_{21}$:

$$u_\tau = u_{xy} - \beta u \partial_x^{-1}(uv)_y, \quad v_\tau = -v_{xy} + \beta v \partial_x^{-1}(uv)_y, \quad (3.10)$$

где $\beta = 2/(b_1b_2)$.

Полученную систему двух уравнений (3.10) можно записать так же, как одно уравнение на комплекснозначную функцию $f(t, x, y) = u(t, x, y) + iv(t, x, y)$:

$$f_t = \bar{f}_{xy} + \frac{1}{4} i \beta \bar{f} \partial_x^{-1}(f^2 - \bar{f}^2)_y. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10) для функций u, v вида $u(t, x, y) = w(x, y) \exp(Et)$,

$$v(t, x, y) = Cw(x, y) \exp(-Et) \quad (3.12)$$

сводятся к одному уравнению

$$w_{xy} - 2C\beta w \partial_x^{-1}(w w_y) = Ew. \quad (3.13)$$

Это уравнение после замены

$$w = \varphi_x, \quad \varphi_{xy} = f'(\varphi) \quad (3.14)$$

эквивалентно следующим интегрируемым случаям уравнения Клейна — Гордона:

$$\varphi_{xy} = f'(\varphi), \quad f''(\varphi) - 2C\beta f(\varphi) = E. \quad (3.15)$$

Поэтому любому точному решению уравнения Клейна — Гордона (3.15) соответствует по формулам (3.12), (3.14) точное решение системы уравнений (3.10).

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г Л А В А V

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Широко известна интегрируемая динамическая система — модель Вольтерра, возникшая впервые в математической теории борьбы за существование биологических видов [23]. Система Вольтерра возникает также при изучении тонкой структуры спектров ленгмюровских колебаний в плазме [43, 44]. В континуальном пределе система Вольтерра переходит в уравнение Кортевега — де Фриза. Исследованию системы Вольтерра, имеющей и другие названия — «дискретное уравнение КдФ» и «ленгмюровская цепочка», посвящены работы [30, 43—45]. В данной главе изучается счетное множество интегрируемых динамических систем, которые также переходят в уравнение КдФ в континуальном пределе. Построенные динамические системы, как и модель Вольтерра, имеют применения в математической экологии и в физике плазмы.

§ 1. Интегрируемые динамические системы с квадратичной нелинейностью

I. Интегрируемая система Вольтерра определяется уравнениями

$$\dot{a}_i = a_i(a_{i+1} - a_{i-1}). \quad (1.1)$$

Одним из важнейших свойств системы Вольтерра является то, что в континуальном пределе уравнения (1.1) переходят в уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \quad (1.2)$$

и тем самым являются его интегрируемой дискретизацией.

Теорема 1. При любом целом $p \geq 2$ динамическая система

$$a_i = a_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right) \quad (1.3)$$

допускает представление Лакса с произвольным спектральным параметром и в континуальном пределе переходит в уравнение КдФ (1.2).

Доказательство. Рассмотрим уравнение Лакса $\dot{L} = [L, A]$ вида

$$(a + mE)' = [a + mE, -b - m^p E], \quad (1.4)$$

где E — произвольный параметр, матрицы a и b имеют только один ненулевой элемент в каждой строке и каждом столбце, которые определяются формулами

$$a_{i,i+1-p} = a_i, \quad m_{i,i+1} = 1. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) эквивалентно системе трех матричных уравнений (коэффициенты при степенях спектрального параметра E):

$$\begin{aligned} E^0: \dot{a} &= -[a, b], & E^1: [m, b] &= [m^p, a], \\ & & E^2: [m, m^p] &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Второе уравнение (1.6) удовлетворено, если матрица b имеет вид

$$b = \sum_{j=0}^{p-1} m^{p-1-j} a m^j. \quad (1.7)$$

При этом в силу (1.5) матрица b является диагональной со следующими ненулевыми элементами:

$$b_{ii} = b_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+p-1}. \quad (1.8)$$

Первое уравнение (1.6) эквивалентно уравнениям $\dot{a}_i = -a_i(b_i - b_{i+1-p})$, которые после подстановки формул (1.8) принимают вид (1.3). Поэтому динамическая система (1.3) эквивалентна уравнению Лакса (1.4), (1.5), (1.7).

Для получения континуального предела динамической системы (1.3) предположим, что справедливы равенства

$$a_j(t) = 1 - \varepsilon^2 u(t, x_j), \quad x_j = j\varepsilon, \quad (1.9)$$

где $u(t, x)$ — некоторая гладкая функция. Система (1.3)

после подстановки (1.9) переходит в систему

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) = (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j)) \left(\sum_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j + k\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j - k\varepsilon)) \right). \quad (1.10)$$

После подстановки разложения функции $u(t, x_j \pm k\varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке (t, x_j) находим $\left(\mu = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p-1} k^3 \right)$

$$u_t = \varepsilon p(p-1)u_x + \varepsilon^2(-p(p-1)uu_x + \mu u_{xxx}) + O(\varepsilon^5). \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) после перехода к новым переменным $t' = t, x' = x + p(p-1)\varepsilon t$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \varepsilon^2 \left(-p(p-1)u \frac{\partial u}{\partial x'} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x'^3} \right) + O(\varepsilon^5). \quad (1.12)$$

После замены переменных

$$\tau = -\varepsilon^3 \kappa t', \quad x = \sigma x', \quad \sigma = (p(p-1)/6\mu)^{1/2}, \quad \kappa = \mu \sigma^3$$

и перехода к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (1.12) преобразуется в уравнение Кортевега — де Фриза $u_\tau = 6uu_x - u_{xxx}$. Теорема 1 доказана.

Динамическую систему (1.3) можно представить в виде

$$\dot{a}_k = a_k \left(\int T_{kk'} a_{k'} dk' \right),$$

где ядро $T_{kk'}$ антисимметрично и определяется формулами

$$T_{kk'} = \sum_{s=1}^{p-1} (\delta(k - k' + s) - \delta(k - k' - s)).$$

Поэтому система (1.3) является кинетическим уравнением, описывающим перенос энергии ленгмюровских колебаний в случае, когда спектр (в k -пространстве) имеет струйную структуру [43].

II. Важным следствием представления Лакса (1.4) для системы (1.3) является существование первых интегралов этой системы

$$I_n = \text{Tr}(a + mE)^{np}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Простое вычисление приводит к следующим формулам:

$$I_{k+1} = \sum_{i=1}^n \sum_{s_1, \dots, s_k} C(s) \prod_{m=0}^k a_{i-mr+s_1+\dots+s_m}, \quad (1.14)$$

где $s_i \geq 0$, $s_0 = 0$, $C(s) = (k+1)r + 1 - s_1 - \dots - s_k$, $s_1 + \dots + s_k \leq (k+1)r$. Интегралы I_k определены при условиях: 1) периодичности, $a_i \equiv a_{i+n}$; 2) непериодичности, при $a_k = 0$ для $k \leq p-1$ и $k > n$. Интеграл $I_k(a)$ является однородным многочленом степени k . Разумеется, между интегралами I_k ($k = 1, 2, \dots$) имеются некоторые функциональные соотношения. Простейший интеграл I_1 имеет

вид $I_1 = \sum_{i=1}^n a_i$. В периодическом случае имеется еще

один первый интеграл $J_1 = \prod_{i=1}^n a_i$.

С динамической системой (1.3) в периодическом случае ($a_{i+n} \equiv a_i$) связана риманова поверхность Γ , определенная уравнением

$$R(E, w) = \det(a(t) + mE - w \cdot 1) = 0. \quad (1.15)$$

Коэффициенты уравнения (1.15) также являются первыми интегралами динамической системы (1.3).

III. Укажем гамильтонову структуру динамических систем (1.3). После замены переменных $a_i = \exp u_i$ система (1.3) принимает вид

$$\dot{u}_i = \sum_{h=1}^{p-1} \exp u_{i+h} - \sum_{h=1}^{p-1} \exp u_{i-h} = \sum I_{im} \frac{\partial H}{\partial u_m}, \quad (1.16)$$

где $H = \sum_m \exp u_m$. Оператор I_{im} является кососимметрическим и имеет следующие ненулевые компоненты:

$$I_{i,i+k} = 1, \quad I_{i,i-k} = -1, \quad k = 1, 2, \dots, p-1. \quad (1.17)$$

В силу представления (1.16) динамическая система (1.3) является гамильтоновой с гамильтонианом H . По-видимому, интегралы I_k (1.14) инволютивны относительно скобок Пуассона $\{F, G\} = \sum_{i,m} I_{im} \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial G}{\partial u_m}$, и система (1.3)

является вполне интегрируемой по Лиувиллю. Из представления Лакса (1.4) со спектральным параметром E следует интегрируемость системы (1.3) в периодическом случае $a_{i+n} \equiv a_i$ в тэта-функциях римановой поверхности Γ (1.15).

IV. Динамические системы (1.3) входят в общий класс систем, выделенных В. Вольтерра в математической теории борьбы за существование биологических видов [23]. При этом величина $a_k(t)$ является численностью популяции k -го вида (или ее плотностью); предполагается, что пищей для i -го вида являются особи видов $i+1, i+2, \dots, i+p-1$.

В работе [46] рассматривался, независимо от работ [12, 21, 47], специальный случай конечномерных динамических систем (1.3) в периодическом случае $a_{i+n} \equiv a_i$ и при условии $n=2p-1$. В этом случае любые два вида a_i, a_j «взаимодействуют» друг с другом (как хищник и жертва). В работе [46] при $n=2p-1$ с помощью комбинаторных методов найдены формулы для p первых интегралов рассматриваемой динамической системы. Формулы (1.14) в специальном случае $n=2p-1$ отличаются от формул первых интегралов, полученных в работе [46]. В частности, все первые интегралы, указанные в работе [46], имеют нечетные степени a_j : 1, 3, ..., $2p-1$. Совпадают только первые интегралы I_1 и J_1 .

V. Рассмотрим задачу рассеяния, связанную с уравнением Лакса (1.4) при $E=1$ и динамической системой (1.3). Предположим, что функции $a_j(t)$ имеют асимптотику $a_j(t) \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \pm\infty$. Собственные функции $\varphi(k, t)$ оператора $L(t, 1) = a + m$ (1.4) удовлетворяют уравнению $(L\varphi(k, t))_n = a_n\varphi(k, t)_{n+1-p} + \varphi(k, t)_{n+1} =$

$$= k\varphi(k, t)_n, \quad (1.18)$$

где $k \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Линейное пространство решений уравнений (1.18) имеет размерность p . Выделим в этом пространстве два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_i(k, t)$, которые имеют следующие асимптотики при $n \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} (\varphi_i(k, t))_n &= z_i^n, \quad n \rightarrow -\infty, \\ (\psi_j(k, t))_n &= z_j^n, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Числа $z_i(k), z_j(k)$ являются корнями уравнения

$$z^p - kz^{p-1} + 1 = 0. \quad (1.20)$$

Два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t), \psi_j(k, t)$ связаны линейным соотношением

$$\varphi_i(k, t) = \sum_{j=1}^p B_{ij}(k, t) \psi_j(k, t). \quad (1.21)$$

Матрица $B_{ij}(k, t)$ называется матрицей рассеяния.

Покажем, что функции $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_i(k, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i = -(p + z^p)\varphi_i, \quad A = -b - m^n. \quad (1.22)$$

Действительно, из уравнения Лакса, как известно, следует уравнение

$$L(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)) = k(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)), \quad (1.23)$$

в силу которого функция $\varphi = \dot{\varphi}_i + A\varphi_i$ является собственной функцией оператора L и поэтому имеет представление в виде $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_p\varphi_p$. В силу асимптотики (1.19) имеем

$$(\dot{\varphi}_i + A\varphi_i)_n = (\dot{\varphi}_i)_n - b_{nn}(\varphi_i)_n - (\varphi_i)_{n+p} = -(p + z_i^p)(\varphi_i)_n.$$

Поэтому $c_j = -(p + z_i^p)\delta_{ij}$, и уравнение (1.22) доказано.

Подставим соотношения (1.24) в уравнения (1.22), получим равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p (\dot{B}_{ij}(k, t) - (p + z_j^p)B_{ij})\psi_j(k, t) = \\ = -(p + z_i^p) \sum_{j=1}^n B_{ij}\psi(k, t). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Отсюда находим уравнения, определяющие динамику компонент $B_{ij}(k, t)$:

$$\dot{B}_{ij}(k, t) = (z_j^p - z_i^p)B_{ij}(k, t). \quad (1.25)$$

Поэтому динамика компонент матрицы рассеяния полностью интегрируется:

$$B_{ij}(k, t) = B_{ij}(k, 0) \exp((z_j^p - z_i^p)t). \quad (1.26)$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} B_{ii}(k, t) &= B_{ii}(k, 0), \\ B_{ij}(k, t)B_{ji}(k, t) &= B_{ij}(k, 0)B_{ji}(k, 0). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Решение системы уравнений (1.3) по методу обратной задачи рассеяния состоит из трех этапов:

$$a_n(0) \xrightarrow{I} B_{ij}(k, 0) \xrightarrow{II} B_{ij}(k, t) \xrightarrow{III} a_n(t). \quad (1.28)$$

Этап I состоит в нахождении начальных данных рассеяния по известной начальной матрице $L(0)$, т. е. сводит-

ся к решению задачи на собственные значения для бесконечной матрицы L . Этап II заключается в исследовании динамики компонент матрицы рассеяния. Решение этой задачи получено выше и определяется формулами (1.26). Этап III состоит в восстановлении коэффициентов $a_n(t)$ по найденным данным рассеяния $B_{ij}(k, t)$. Эта задача, видимо, будет исследована в дальнейшем. Заведомо ясно, что полная матрица рассеяния $B_{ij}(k, t)$, зависящая от произвольного комплексного параметра k , содержит избыточную информацию. Если ограничиться вещественными значениями параметра k , то множество корней уравнения (1.20) разбивается на пары комплексно сопряженных корней и между коэффициентами $B_{ij}(k, t)$ появляются тождественные соотношения. Лишь при исключительном значении параметра $k=0$ все решения уравнений (1.18) являются ограниченными при $n \rightarrow \pm\infty$, т. е. все корни z_i уравнения (1.20) удовлетворяют условию $|z_i|=1$; при этом $z_i^p = -1$.

VI. Динамическая система (1.3) допускает еще одно представление Лакса со спектральным параметром, не эквивалентное представлению (1.4). Пусть матрицы $L(t, E)$ и $A(t, E)$ имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} L_{i,i+p} &= -E^p a_i^{-1}, & L_{i,i+p-1} &= -E^{p-1} a_i^{-1}, \\ A_{i,i+p} &= E^p a_i^{-1} \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k}, & A_{i,i+p-1} &= E^{p-1} a_i^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} a_{i-k}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Система (1.3) эквивалентна второму матричному уравнению со спектральным параметром E , имеющему вид

$$\dot{L}L = [L, A], \quad (1.30)$$

где компоненты матриц $L(t, E)$ и $A(t, E)$ определены формулами (1.29). Уравнение (1.30) имеет набор первых интегралов $I_k = \text{Tr}(L(t, E))^k$, $k=1, 2, \dots$, поэтому собственные числа матрицы $L(t, E)$ являются первыми интегралами динамической системы (1.3). В случае обратимых матриц L уравнение (1.30) эквивалентно уравнению $\dot{L} = [L, AL^{-1}]$. При этом матрица AL^{-1} имеет весьма сложную структуру: все ее элементы, вообще говоря, являются ненулевыми.

VII. Динамическая система (1.3) допускает представление Лакса (1.4), (1.30) как в случае вещественных, так и в случае комплексных переменных $a_i(t)$. Укажем

аналог системы (1.3) в случае комплексных переменных $a_i(t)$, также допускающий представление изоспектральной деформации.

Рассмотрим уравнение Лакса

$$(A + KE)' = [A + KE, B - KE], \quad (1.31)$$

где матрицы A, B, K имеют размер $n \times n$ и их ненулевые матричные элементы являются двумерными блоками следующего вида:

$$K_{i,i+1} = k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{ii} = B_i = \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & \tau(b_i) \end{pmatrix},$$

$$p = 2s + 1: A_{i,i+1-p} = A = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & \tau(a_i) \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

$$p = 2s: A_{i,i+1-p} = A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ \tau(a_i) & 0 \end{pmatrix},$$

где коэффициенты a_i, b_i — комплексные числа и $\tau(a) = \bar{a}$. Уравнение (1.31) является следствием уравнений

$$\dot{A} = [A, B], \quad B = - \sum_{j=0}^{p-1} K^{p-1-j} A K^j, \quad \dot{K} = 0. \quad (1.33)$$

Из формул (1.32), (1.33) получаем

$$B_i = - \sum_{j=0}^{p-1} k^{p-1-j} A_{i+p-1-j} k^j, \quad b_i = - \sum_{k=0}^{p-1} \tau^k(a_{i+k}). \quad (1.34)$$

Первое уравнение (1.33) после подстановки формул (1.34) принимает вид динамической системы

$$\dot{a}_i = a_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} \tau^k(a_{i+k}) - \sum_{k=1}^{p-1} \tau^k(a_{i-k}) \right). \quad (1.35)$$

Следствие 1. Динамическая система (1.35) допускает представление Лакса (1.31), (1.32) со спектральным параметром и имеет поэтому набор первых интегралов $I_m = \text{Tr}(A + KE)^m$.

§ 2. Интегрируемые редукции динамических систем (1.3)

Рассмотрим динамическую систему (1.3) в конечно-мерном непериодическом случае, матрицы a и m имеют вид (1.5) при $a_1, \dots, a_{p-1} = 0, a_j = 0$ при $j > n$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \psi^1, \dots, \psi^n$ — собственные числа и собственные функции оператора $L = a + mE, e_1, \dots, e_n$ — векторы с

координатами $(e_i)_j = \delta_{ij}$. Пусть $e_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi^k$. Введем резольвенту $R(\lambda) = (\lambda - L)^{-1}$ оператора L . Справедливы равенства

$$R(\lambda) \psi^k = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \psi^k, \quad R(\lambda) e_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k} \psi^k. \quad (2.1)$$

Из уравнения Лакса (1.4) следует дифференциальное уравнение

$$\dot{R}(\lambda) = [R(\lambda), A], \quad A = -b - m^p E. \quad (2.2)$$

Определим функцию

$$f(\lambda) = (R(\lambda) e_1, e_1) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k (\psi^k, e_1)}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad (2.3)$$

где $\rho_k = \alpha_k (\psi^k, e_1)$.

Пусть Q — диагональная матрица с элементами $Q_{kk} = z^k$, где $z = \exp(2\pi i/p)$, $z^p = 1$.

Лемма 1. Матрица $L = a + mE$, ее характеристический многочлен $P(\lambda) = \det(L - \lambda I)$, матрица $R(\lambda)$ и функция $f(\lambda)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} QLQ^{-1} &= z^{-1}L, & P(\lambda) &= z^{-n}P(z\lambda), \\ QR(\lambda)Q^{-1} &= zR(z\lambda), & f(\lambda) &= zf(z\lambda). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Действительно, ненулевые элементы матрицы QLQ^{-1} имеют вид

$$\begin{aligned} (QLQ^{-1})_{k,k+1} &= z^k L_{k,k+1} z^{-k-1} = z^{-1} L_{k,k+1}, \\ (QLQ^{-1})_{k,k+1-p} &= z^k L_{k,k+1-p} z^{-k+p-1} = z^{p-1} L_{k,k+1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поэтому первое равенство (2.4) выполнено в силу $z^p = 1$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(L - \lambda \cdot I) = \det(QLQ^{-1} - \lambda \cdot I) = \\ &= z^{-n} \det(L - \lambda z \cdot I), \end{aligned}$$

что доказывает второе равенство (2.4).

Умножим тождество $(\lambda - L)R(\lambda) = 1$ на матрицы Q и Q^{-1} и используем первое равенство (2.4), получим

$$(\lambda - QLQ^{-1})QR(\lambda)Q^{-1} = (z\lambda - L)z^{-1}QR(\lambda)Q^{-1} = 1.$$

Следовательно, $QR(\lambda)Q^{-1} = zR(z\lambda)$. В силу диагональности матрицы Q имеем

$$f(\lambda) = (QR(\lambda)Q^{-1}e_1, e_1) = (zR(z\lambda)e_1, e_1) = zf(z\lambda). \quad (2.6)$$

Лемма 1 доказана.

Из второго равенства (2.4) следует, что матрица L вместе с любым собственным числом λ имеет p собственных чисел $z^k \lambda$, $k = 1, 2, \dots, p$, где $z = \exp(2\pi i/p)$. Поэтому число функционально независимых собственных чисел матрицы L не превосходит $[n/p]$ и по крайней мере $l = n - p[n/p]$ собственных чисел $\lambda_i = 0$. Подставляя разложение (2.3) в равенство (2.6), находим

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{\lambda - \lambda_k} = z \sum \frac{\rho_k}{z\lambda - \lambda_k} = \sum \frac{\rho_k}{\lambda - z^{-1}\lambda_k}.$$

Отсюда следует равенство коэффициентов ρ_k, ρ_j , для которых собственные числа λ_k, λ_j связаны соотношением $\lambda_k = z^m \lambda_j$. Нулевым собственным числом λ_k соответствует одно слагаемое $l\rho_k/\lambda$. Переменные ρ_k удовлетворяют связи $\rho_1 + \dots + \rho_n = 1$, которая следует из асимптотики резольвенты $R(\lambda) = \lambda^{-1} \text{id}$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и формулы (2.3). Поэтому число независимых коэффициентов ρ_k , как и число собственных чисел λ_j , не превосходит $[n/p]$. В силу указанной связи существуют такие координаты r_k , что $\rho_k = r_k \left(\sum_{j=1}^n r_j \right)^{-1}$.

Покажем, что переменные r_k, λ_j определяют интегрируемую редукцию системы (1.3). Для этого продифференцируем функцию $f(\lambda)$ (2.3) по времени, используя равенство (2.2), получим

$$\begin{aligned} \dot{f}(\lambda) &= (\dot{R}(\lambda) \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = ((RA - AR) \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \\ &= (RA \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) - (R \mathbf{e}_1, A' \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из формул (1.5), (1.8) получаем $A \mathbf{e}_1 = -b_{11} \mathbf{e}_1$, $A' \mathbf{e}_1 = -b_{11} \mathbf{e}_1 - E \mathbf{e}_{p+1}$; поэтому из формул (2.7) следует равенство

$$\dot{f}(\lambda) = (R(\lambda) \mathbf{e}_1, E \mathbf{e}_{p+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k E(\psi^k, \mathbf{e}_{p+1})}{\lambda - \lambda_k}. \quad (2.8)$$

Обозначим $(\psi^k, \mathbf{e}_i) = \psi_i^k$. В силу определения $L\psi^k = \lambda_k \psi^k$ имеем систему уравнений

$$E\psi_2^k = \lambda_k \psi_1^k, \dots, E\psi_p^k = \lambda_k \psi_{p-1}^k, \quad a_p \psi_1^k + E\psi_{p+1}^k = \lambda_k \psi_p^k, \quad (2.9)$$

из которой следует соотношение

$$\psi_{p+1}^k = (\lambda_k^p E^{-p} - a_p E^{-1}) \psi_1^k. \quad (2.10)$$

После подстановки этого выражения в формулу (2.8) получаем

$$\dot{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k (\lambda_k^p E^{1-p} - a_p) \psi_1^k}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda_k^p E^{1-p} - a_p) \rho_k}{\lambda - \lambda_k}. \quad (2.11)$$

Дифференцируя разложение (2.3) по времени и сравнивая с формулой (2.11), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_k = (\lambda_k^p E^{1-p} - a_p) \rho_k. \quad (2.12)$$

Покажем, что справедливо равенство $a_p = \sum_{k=1}^n \lambda_k^p E^{1-p} \rho_k$. Действительно, в силу определений имеем

$$(R(\lambda) L^p e_1, e_1) = \left(R(\lambda) L^p \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi^k, e_1 \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^p \rho_k}{\lambda - \lambda_k}. \quad (2.13)$$

Для оператора $L = a + mE$ справедлива формула $(L^p e_1, e_1) = a_p E^{p-1}$. Асимптотика резольвенты при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет вид $R(\lambda) = \lambda^{-1} \text{id}$. Поэтому из (2.13) следует, что

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^p \rho_k = a_p E^{p-1}. \quad (2.14)$$

В силу равенства (2.14) и уравнений (2.12) получаем систему дифференциальных уравнений для переменных r_k :

$$\dot{r}_k = \lambda_k^p E^{1-p} r_k, \quad \dot{\lambda}_k = 0. \quad (2.15)$$

Полученные уравнения представляют собой интегрируемую редукцию динамической системы (1.3), в силу которой

$$r_k(t) = r_k^0 \exp(-\lambda_k^p E^{1-p} t), \quad \lambda_k = \text{const}. \quad (2.16)$$

Число независимых переменных r_k , λ_k равно $2[n/p]$ в силу тождеств (2.4). При $p=2$ система (1.3) сводится к системе Вольтерра (1.1). В этом случае переменные r_k , λ_k образуют систему координат в пространстве неизвестных $a_1, \dots, a_{n-1}$ и формулы (2.16) определяют интегрирование системы Вольтерра, осуществленное в работе [30].

§ 3. Интегрируемые динамические системы с произвольной степенью нелинейности

1. В данном параграфе изучается второе счетное множество интегрируемых дискретизаций уравнения Кортевега — де Фриза, которые, в отличие от динамических систем (1.3), имеют произвольную степень нелинейности.

Теорема 2. При любом целом $p \geq 2$ динамические системы

$$\dot{a}_i = a_i \left(\prod_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \prod_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right), \quad (3.1)$$

$$\dot{a}_i = a_i^2 \left(\prod_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \prod_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right) \quad (3.2)$$

допускают представление Лакса и в континуальном пределе переходят в уравнение КдФ (1.2).

Доказательство. Рассмотрим уравнение Лакса следующего вида:

$$(a + tE)^{\cdot} = [a + tE, a^p E^{-1}], \quad (3.3)$$

где матрицы a и t имеют только по одному ненулевому элементу в каждом столбце, которые определяются формулами

$$a_{i,i+1} = a_i, \quad m_{i,i+1-p} = -1. \quad (3.4)$$

В этом случае матрица a^p имеет следующие ненулевые элементы:

$$(a^p)_{i,i+p} = \prod_{k=0}^{p-1} a_{i+k}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.3) сводится к трем матричным уравнениям

$$\dot{a} = [m, a^p], \quad [a, a^p] \equiv 0, \quad \dot{m} \equiv 0. \quad (3.6)$$

Первое уравнение (3.6) в силу (3.4), (3.5) эквивалентно динамической системе (3.1).

Представление Лакса для системы (3.2) имеет вид

$$(a + tE)^{\cdot} = [a + tE, a^{1-p} E^{-1}], \quad (3.7)$$

где ненулевые элементы матриц a , t , a^{1-p} определяются формулами

$$a_{i,i+1} = a_i^{-1}, \quad m_{i,i+p} = -1, \quad (a^{1-p})_{i,i-p+1} = \prod_{k=1}^{p-1} a_{i-k}. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.7) сводится к трем матричным уравнениям

$$\dot{a} = [m, a^{1-p}], \quad [a, a^{1-p}] = 0, \quad \dot{m} = 0. \quad (3.9)$$

Первое уравнение (3.9) в силу формул (3.8) эквивалентно динамической системе (3.2).

Переходя к выводу континуального предела динамических систем (3.1), (3.2), предположим, что справедливы равенства $a_j = 1 - \varepsilon^2 u(t, x_j)$, $x_j = j\varepsilon$, где $u(t, x)$ — некоторая гладкая функция. Тогда системы (3.1), (3.2) принимают вид

$$- \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) = (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j))^m \times \\ \times \left(\prod_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j + k\varepsilon)) - \prod_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j - k\varepsilon)) \right), \quad (3.10)$$

где $m = 1$ и $m = 2$ в случае систем (3.1) и (3.2) соответственно. Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) = (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j))^m \left[\sum_{k=1}^{p-1} (u(t, x_j + k\varepsilon) - u(t, x_j - k\varepsilon)) - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 \left(\sum_{k \neq l}^{p-1} (u(t, x_j + k\varepsilon)u(t, x_j + l\varepsilon) - u(t, x_j - k\varepsilon)u(t, x_j - l\varepsilon)) \right) + \right. \\ \left. + O(\varepsilon^4) \right].$$

После подстановки разложения функции $u(t, x_j \pm k\varepsilon)$ в ряд Тейлора находим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) = \left(2\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} k \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \varepsilon^3 \left[-2 \left(m \sum_{k=1}^{p-1} k + \sum_{k \neq l}^{p-1} k + l \right) u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p-1} k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + O(\varepsilon^5).$$

Вычисляя указанные суммы, получаем систему $\left(\mu = \right.$

$$\left. = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p-1} k^3 \right):$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) = \varepsilon p(p-1) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \varepsilon^3 \left(-p(p-1)(p+m-2) u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + O(\varepsilon^5). \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) после перехода к новым переменным $t' = t$, $x' = x + p(p-1)\varepsilon t$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \varepsilon^3 \left(-p(p-1)(p+m-2)u \frac{\partial u}{\partial x'} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x'^3} \right) + O(\varepsilon^5). \quad (3.12)$$

После замены переменных

$$\tau = -\varepsilon^3 \kappa t', \quad x_1 = \sigma x',$$

$$\sigma = (p(p-1)(p+m-2)/6\mu)^{1/2}, \quad \kappa = \mu\sigma^3$$

и перехода к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (3.12) преобразуется в уравнение Кортевега — де Фриза (1.2). Теорема 2 доказана.

II. Динамические системы (3.1), (3.2) после введения обозначений

$$b_i = \prod_{k=0}^{p-2} a_{i+k}, \quad c_i = \prod_{k=0}^{p-1} a_{i+k} \quad (3.13)$$

принимают вид

$$\dot{a}_i = a_i(b_{i+1} - b_{i-p+1}), \quad (3.14)$$

$$\dot{c}_i = c_i(c_i - c_{i-p+1}). \quad (3.15)$$

Из этих уравнений в силу (3.13) следуют динамические системы

$$\dot{b}_i = b_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} b_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} b_{i-k} \right), \quad \dot{c}_i = c_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} c_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} c_{i-k} \right). \quad (3.16)$$

Таким образом, системы (3.1), (3.2) с помощью отображений (3.13) преобразуются в одну динамическую систему (3.16), имеющая вид (1.3).

Отображения (3.13) вида

$$b_i = a_i a_{i+1} \dots a_{i+q-1}, \quad (3.17)$$

вообще говоря, необратимы и преобразуют системы (3.1) и (3.2) на некоторые инвариантные подмногообразия системы (1.3). Рассмотрим периодический случай $a_{i+n} \equiv a_i$. Пусть числа n и q не являются взаимно простыми, т. е. $n = sd$, $q = gd$. Тогда в силу формул (3.17) при любых i и j справедливы соотношения

$$\prod_{k=1}^s b_{i+kd} = \prod_{k=1}^s b_{j+kd}, \quad (3.18)$$

среди которых имеется $d - 1$ функционально независимых соотношений. Формулы (3.18) определяют инвариантное подмногообразие — образ отображения (3.17).

Пусть числа n и q взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа k и l , что $kn = lq - 1$. В этом случае отображение (3.17) обратимо, причем обратное отображение определяется формулами

$$\ln a_i = \sum_{m=0}^{l-1} \ln b_{i+mq} - \frac{k}{q} \sum_{m=0}^{n-1} \ln b_{i+m}. \quad (3.19)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. В периодическом случае $a_{i+n} \equiv a_i$ динамические системы (3.1) и (1.3) эквивалентны, если $(n, p - 1) = 1$. Системы (3.2) и (1.3) эквивалентны, если $(n, p) = 1$. Системы (3.1) и (3.2) взаимно эквивалентны, если $(n, p) = 1$ и $(n, p - 1) = 1$.

III. Из представления Лакса (3.3) следует наличие у динамической системы (3.1) первых интегралов $I_k = \text{Tr } L^{k,p}$, где $L = a + mE$. Прямое вычисление приводит к следующим явным формулам:

$$(-1)^{k+1} I_{k+1} = \sum_{i=1}^n \sum_{s_1, \dots, s_q} C(q) \prod_{j=1}^q \prod_{m=0}^{s_j-1} a_{i+m+c_j}, \quad (3.20)$$

$$s_j \geq 1, \quad s_1 + \dots + s_q \leq (k+1)r, \quad 1 \leq q \leq k+2,$$

$$C(q) = k+3-q, \quad (3.21)$$

$$c_j = s_1 + \dots + s_{j-1} - (j-1)r.$$

Эти формулы справедливы в периодическом случае $a_i \equiv a_{i+n}$ и в непериодическом случае при $a_j = 0$ для $j < 1$, $j \geq n$.

IV. Рассмотрим задачу рассеяния, связанную с уравнением Лакса (3.3) и динамической системой (3.1), в классе финитных решений с асимптотикой $a_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \pm\infty$. Собственные функции оператора $L(t, 1) = a + m$ (3.3) удовлетворяют уравнению

$$(L\psi(k, t))_n = -\psi(k, t)_{n+1-p} + a_n \psi(k, t)_{n+1} = k\psi(k, t)_n, \quad (3.22)$$

где $k \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Пространство решений уравнения (3.22) имеет размерность p . Выделим в этом пространстве два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_j(k, t)$, которые имеют следующие асимпто-

тики при $n \rightarrow \pm\infty$:

$$(\varphi_i(k, t))_n = z_i^n, \quad n \rightarrow -\infty; \quad (\psi_j(k, t))_n = z_j^n, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3.23)$$

Числа $z_i(k)$, $z_j(k)$ являются корнями уравнения

$$z^p - kz^{p-1} - 1 = 0. \quad (3.24)$$

При $p=2$ уравнение (3.24) имеет два корня z_1 , z_2 , связанных соотношениями $z_2 = -z_1^{-1}$, $k = z_1 + z_1^{-1}$. Это — случай дискретного уравнения КдФ, подробно рассмотренный в работах [30, 44, 45].

Покажем, что функции $\varphi_i(k, i)$ и $\psi_i(k, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i = z_i^p \varphi_i, \quad A = a^p. \quad (3.25)$$

Действительно, из уравнения Лакса, как известно, следует уравнение

$$L(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)) = k(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)), \quad (3.26)$$

в силу которого функция $\varphi = \dot{\varphi}_i + A\varphi_i$ является собственной функцией оператора L и поэтому имеет представление в виде $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_p\varphi_p$. В силу асимптотики (3.23) имеем

$$\begin{aligned} (\varphi_i + A\varphi_i)_n &= (\dot{\varphi}_i)_n + \prod_{k=0}^{p-1} a_{n+k} (\varphi_i)_{n+p} = \\ &= z_i^{n+p} = z_i^p (\varphi_i)_n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Поэтому $c_j = z_i^p \delta_{ij}$ и справедливость уравнения (3.25) доказана.

Два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_j(k, t)$ связаны линейным соотношением

$$\varphi_i(k, t) = \sum_{j=1}^p B_{ij}(k, t) \psi_j(k, t). \quad (3.28)$$

Подставив разложения (3.28) в уравнения (3.25), получим равенства

$$\sum_{j=1}^p (\dot{B}_{ij}(k, t) + z_j^p B_{ij}(k, t)) \psi_j(k, t) = z_i^p \sum_{j=1}^p B_{ij}(k, t) \psi_j.$$

Отсюда находим уравнения, определяющие динамику компонент матрицы рассеяния

$$\dot{B}_{ij}(k, t) = (z_i^p - z_j^p) B_{ij}(k, t). \quad (3.29)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$B_{ij}(k, t) = B_{ij}(k, 0) \exp((z_i^p - z_j^p)t). \quad (3.30)$$

В частности, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} B_{ii}(k, t) &= B_{ii}(k, 0), \\ B_{ij}(k, t) B_{ji}(k, t) &= B_{ij}(k, 0) B_{ji}(k, 0). \end{aligned}$$

V. Рассмотрим задачу рассеяния в случае полубесконечных матриц $L = a + m$ и $A = a^p$, для индексов которых j, n имеем $j, n \geq 1$. В этом случае в первых $p - 1$ строках матрицы L имеется только по одному ненулевому элементу $L_{i,i+1} = a_i$. Поэтому уравнение $L\psi = k\psi$ при $n < p$ имеет вид

$$a_n \psi(k, t)_{n+1} = k \psi(k, t)_n,$$

а при $n \geq p$ имеет вид (3.22). Следовательно, все компоненты $\psi(k, t)_n$ определяются из уравнения $L\psi = k\psi$ по компоненте $\psi(k, t)_1$, т. е. пространство собственных функций $\psi(k, t)$ одномерно. Нормируем собственную функцию $\psi(k, t)$ условием

$$\dot{\psi}_1(k, t) + \left(\prod_{i=1}^p a_i(t) \right) \psi_{p+1}(k, t) = 0. \quad (3.31)$$

В силу уравнения (3.26) справедливо равенство

$$\dot{\psi}(k, t) + A\psi(k, t) = c(t)\psi(k, t). \quad (3.32)$$

Вычисляя первую компоненту уравнения (3.32), убеждаемся, что при условии нормировки (3.31) функция $c(t) \equiv 0$, поэтому справедливо уравнение

$$\dot{\psi}(k, t) + A\psi(k, t) = 0. \quad (3.33)$$

При условии финитности решений системы (3.1) ($a_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$) функция $\psi(k, t)$ имеет следующее асимптотическое разложение при $n \rightarrow \infty$:

$$\psi(k, t)_n = \sum_{j=1}^p B_j(k, t) z_j^n, \quad (3.34)$$

где z_j — корни уравнения (3.24). Подставляя это разложение в уравнение (3.33) и переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, получаем уравнение

$$\sum_{j=1}^p (B_j(k, t) z_j^n + B_j(k, t) z_j^{n+p}) = 0.$$

Отсюда находим уравнения для изменения данных рассеяния

$$\begin{aligned}\dot{B}_j(k, t) &= -z_j^p B_j(k, t), \\ B_j(k, t) &= B_j(k, 0) \exp(-z_j^p t).\end{aligned}\quad (3.35)$$

Таким образом, в двух рассмотренных случаях эволюция данных рассеяния, связанных с динамической системой (3.1), полностью интегрируется.

VI. Укажем аналог динамической системы (3.1) в случае комплексных величин a_i . Рассмотрим уравнение Лакса следующего вида:

$$(A + ME)' = [A + ME, A^p E^{-1}]. \quad (3.36)$$

Здесь A и M — блочные матрицы, ненулевые элементы которых имеют вид $A_{i,i+1} = a_i$, $M_{i,i+1-p} = m_i$, где a_i и m_i являются двумерными блоками, которые определяются формулами

$$\begin{aligned}a_i &= \begin{pmatrix} 0 & u_i \\ \bar{u}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad m_i = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = 2s; \\ m_i &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = 2s + 1.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Уравнение (3.36) сводится к матричному уравнению $\dot{A} = [M, A^p]$, эквивалентному динамической системе

$$\dot{u}_i = u_i \left(\prod_{k=1}^{p-1} \tau^k(u_{i+k}) - \prod_{k=1}^{p-1} \tau^k(u_{i-k}) \right), \quad \tau(u) = \bar{u}. \quad (3.38)$$

Следовательно, динамическая система (3.38) при любом целом $p \geq 2$ допускает представление Лакса (3.36) со спектральным параметром E и поэтому имеет набор первых интегралов $I_k = \text{Tr}(A + ME)^k$. Указанная конструкция (3.36) — (3.37) при отрицательных p приводит к уравнениям вида (3.38) с множителем u_i^2 вместо u_i , являющимися аналогами динамических систем (3.2).

§ 4. Интегрируемые редукции динамических систем (3.1)

Построения данного параграфа во многом аналогичны построениям § 2 и в случае $p = 2$ (модель Вольтерра) переходят в построение работы [30]. Рассмотрим динамическую систему (3.1) в конечномерном неперiodиче-

ском случае, т. е. при $a_0 = a_n = 0$. В представлении Лакса $L = [L, A]$ (3.3) матрицы L и A размера $n \times n$ имеют следующие ненулевые элементы:

$$\begin{aligned} L_{k,k+1} &= a_k, \quad L_{k,k+1-p} = -1, \\ A_{k,k+p} &= x_k = a_{k+1} \dots a_{k+p-1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из представления Лакса (3.3) следует, что собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы L являются первыми интегралами динамической системы (3.1). Пусть $\psi^1, \dots, \psi^n$ — соответствующие им собственные функции, $e_1, \dots, e_n$ —

векторы с координатами $(e_i)_j = \delta_{ij}$. Пусть $e_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi^k$.

В дальнейшем, как и в § 2, существенно используется резольвента $R(\lambda) = (\lambda - L)^{-1}$ оператора L ; очевидно, справедливы равенства

$$R(\lambda) \psi^k = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \psi^k, \quad R(\lambda) e_1 = \sum \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k} \psi^k \quad (4.2)$$

и дифференциальное уравнение

$$\dot{R}(\lambda) = [R(\lambda), A]. \quad (4.3)$$

Определим функцию

$$f(\lambda) = (R(\lambda) e_1, e_1) = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \rho_k = \alpha_k (\psi^k, e_1). \quad (4.4)$$

Матрица L (4.1) имеет ненулевые элементы в тех же клетках, что и матрица L из § 2. Поэтому в рассматриваемом случае также справедливы лемма 1 § 2 и все равенства (2.4). Следовательно, матрица L (4.1) вместе с любым собственным числом λ имеет p собственных чисел $z^k \lambda$, $k = 1, 2, \dots, p$, где $z = \exp(2\pi i/p)$, $z^p = 1$. Так же как и в § 2, из равенства $f(\lambda) = z f(z\lambda)$ следует, что величины ρ_k и ρ_j совпадают, если соответствующие собственные числа λ_k, λ_j связаны соотношением $\lambda_k = z^m \lambda_j$. Периодические ρ_k удовлетворяют связи $\rho_1 + \dots + \rho_n = 1$, которая следует из асимптотики резольвенты $R(\lambda) = \lambda^{-1} \text{id}$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому число независимых коэффициентов ρ_k , как и число собственных чисел λ_j , не превосходит $[n/p]$.

Продифференцируем функцию $f(\lambda)$ (4.4) по времени; в силу уравнения (4.3) имеем

$$\begin{aligned} \dot{f}(\lambda) &= (\dot{R}(\lambda) e_1, e_1) = ((RA - AR) e_1, e_1) = \\ &= (RA e_1, e_1) - (R e_1, A' e_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из формул (4.1) следует $Ae_1 = 0$, $A^t e_1 = x_1 e_{p+1}$, поэтому

$$\dot{f}(\lambda) = -(\operatorname{Re}_1, A^t e_1) = - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k x_1}{\lambda - \lambda_k} (\psi^k, e_{p+1}). \quad (4.6)$$

Обозначим $\psi_i^k = (\psi^k, e_i)$. В силу определения $L\psi^k = \lambda_k \psi^k$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_1 \psi_2^k &= \lambda_k \psi_1^k, \dots, a_{p-1} \psi_p^k = \lambda_k \psi_{p-1}^k, \\ -\psi_1^k + a_p \psi_{p+1}^k &= \lambda_k \psi_p^k, \end{aligned}$$

из которой следует соотношение

$$\psi_{p+1}^k = - \frac{\lambda_k^p - a_1 a_2 \dots a_{p-1}}{a_1 a_2 \dots a_p} \psi_1^k.$$

После подстановки этого выражения в формулу (4.6) и сокращения на $x_1 = a_1 a_2 \dots a_p$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{f}(\lambda) &= \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda_k^p - a_1 a_2 \dots a_{p-1})}{\lambda - \lambda_k} (\alpha_k \psi^k, e_1) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda_k^p - a_1 a_2 \dots a_{p-1}) \rho_k}{\lambda - \lambda_k}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Дифференцируя разложение (4.4) функции $f(\lambda)$, находим

$$\dot{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\rho}_k}{\lambda - \lambda_k}. \quad (4.8)$$

Из равенств (4.7), (4.8) следует система дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_k = (\lambda_k^p - a_1 a_2 \dots a_{p-1}) \rho_k. \quad (4.9)$$

Покажем, что справедливо равенство

$$a_1 a_2 \dots a_{p-1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^p \rho_j. \quad (4.10)$$

Действительно, в силу определений имеем

$$(R(\lambda) L^p e_1, e_1) = \left(R(\lambda) L^p \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi^j, e_1 \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^p \rho_j}{\lambda - \lambda_j}. \quad (4.11)$$

Асимптотика резольвенты при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет вид $R(\lambda) = \lambda^{-1} \operatorname{id}$. Для оператора L (4.1) справедлива формула

$(L^p e_1, e_1) = a_1 a_2 \dots a_{p-1}$. Поэтому приравнявая асимптотики обеих частей равенства (4.11) при $\lambda \rightarrow \infty$, получаем выражение (4.10).

Как отмечалось выше, справедливо равенство $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n = 1$. Вследствие этого можно ввести эффективные координаты r_k , для которых

$$\rho_k = r_k \left(\sum_{j=1}^n r_j \right)^{-1}. \quad (4.12)$$

Переменные r_k определены с точностью до общего множителя. Система уравнений (4.9) в силу равенства (4.10) эквивалентна системе уравнений

$$\dot{r}_k = \lambda_k^p r_k, \quad \dot{\lambda}_k = 0. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.13) являются интегрируемой редукцией динамической системы (3.1). Их решения имеют вид

$$r_k(t) = r_k^0 \exp(\lambda_k^p t), \quad \lambda_k = \text{const.}$$

Эти формулы, очевидно, сохраняют равенство переменных r_k, r_j , для которых $\lambda_k = z^n \lambda_j$, так как $z^p = 1$.

Переменные r_k как функции от $a_1, \dots, a_{n-1}$ строятся с помощью операций линейной алгебры (вычисление резольвенты), которые вполне эффективны. Полное число независимых переменных в системе (4.13) не превосходит $2[n/p]$. При $p=2$ переменные r_k, λ_j образуют систему координат в пространстве $a_1, \dots, a_{n-1}$. В силу этого обстоятельства в работе [30] было проинтегрировано дискретное уравнение КдФ (уравнения (3.1) при $p=2$ совпадают с дискретным КдФ). В общем случае $p>2$ из проведенных рассуждений следует, что система (3.1) в некоторых координатах r_k, λ_j, b_i имеет эквивалентный вид

$$\dot{r}_k = \lambda_k^p r_k, \quad \dot{\lambda}_k = 0, \quad \dot{b}_i = f_i(r_k, \lambda_j, b_1, \dots, b_d). \quad (4.14)$$

Здесь число координат b_i равно $d = n - 1 - 2[n/p]$.

§ 5. Интегрируемые дискретизации второго уравнения КдФ

I. С каждой динамической системой вида (1.3), (3.1) или (3.2) связана бесконечная иерархия интегрируемых динамических систем, допускающих представление Лакса с той же матрицей L , но с более сложными матрицами A . Операторы Лакса L и A_k для иерархии «высших» дина-

мических систем, связанных с (4.3), определяются формулами

$$L = a + mE, \quad A_k = b + \sum_{j=1}^{k-1} c_j E^j + \beta_k m^{kp} E^k, \quad (5.1)$$

где матрицы a , m , b , c_j имеют только следующие ненулевые элементы:

$$a_{i,i+1-p} = a_i, \quad m_{i,i+1} = 1, \quad b_{ii}, \quad (c_j)_{i,i+pj}. \quad (5.2)$$

Уравнение Лакса $\dot{L} = [L, A_k]$ со спектральным параметром E сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= [a, b], \quad [a, c_1] + [m, b] = \dot{m} = 0, \\ [a, c_j] + [m, c_{j-1}] &= 0, \quad [a, \beta_k m^{kp}] + [m, c_{k-1}] = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $j = 2, \dots, k-1$. Решения последних двух уравнений (5.3) имеют следующий алгебраический вид:

$$\begin{aligned} c_{k-1} &= \beta_{k-1} m^{(k-1)p} + \beta_k \sum_{j=0}^{kp-1} m^j a m^{kp-1-j}, \\ c_{k-2} &= \beta_{k-2} m^{(k-2)p} + \beta_{k-1} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} m^j a m^{(k-1)p-1-j} + \\ &\quad + \beta_k \sum_{j=0}^{kp-1} \sum_{i=0}^{j-1} m^i a m^{kp-1-j} a m^{j-i-1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

После подстановки этих формул последние два уравнения (5.3) обращаются в тождества.

При $k=2$ из (5.3), (5.4) получаем вторую динамическую систему в рассматриваемой иерархии

$$\begin{aligned} \dot{a} &= [a, b], \\ b &= \beta_1 \sum_{i=0}^{p-1} m^i a m^{p-1-i} + \beta_2 \sum_{j=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^{j-1} m^i a m^{2p-1-j} a m^{j-i-1}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

которая при $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = -1$ переходит в систему (1.3).

II. Операторы Лакса L и A_k для иерархии интегрируемых динамических систем, связанных с системой (3.1), определяются формулами

$$L = a + mE, \quad A_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j E^{-j} + \beta_k a^{kp} E^{-k}. \quad (5.6)$$

Здесь матрицы a , m , c_j имеют следующие ненулевые элементы:

$$a_{i,i+1} = a_i, \quad m_{i,i+1-p} = -1, \quad (c_j)_{i,i+pj}. \quad (5.7)$$

Уравнение Лакса $\dot{L} = [L, \Lambda_k]$ при этом сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= [m, c_1], \quad [a, c_j] + [m, c_{j+1}] = 0, \\ [a, c_{k-1}] + [m, \beta_k a^{kp}] &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Решения последних двух уравнений (5.8) имеют вид

$$\begin{aligned} c_{k-1} &= \beta_{k-1} a^{(k-1)p} + \beta_k \sum_{j=0}^{kp-1} a^j m a^{kp-1-j}, \\ c_{k-2} &= \beta_{k-2} a^{(k-2)p} + \beta_{k-1} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} a^j m a^{(k-1)p-1-j} + \\ &\quad + \beta_k \sum_{j=1}^{kp-1} \sum_{i=0}^{j-1} a^i m a^{kp-1-j} m a^{j-i-1}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

При $k=2$ и $k=3$ формулы (5.8), (5.9) определяют вторую и третью динамические системы в иерархии, порожденной системой (3.1), которой соответствует $k=1$.

III. Рассмотрим динамическую систему (5.8) в простейшем случае $k=2$, $p=2$. В силу формул (5.9), (5.7) получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= \beta_1 a^2 + \beta_2 (m a^3 + a m a^2 + a^2 m a + a^3 m), \quad (5.10) \\ (c_1)_{i,i+2} &= \beta_1 a_i a_{i+1} - \\ &\quad - \beta_2 (a_{i-1} a_i a_{i+1} + a_i^2 a_{i+1} + a_i a_{i+1}^2 + a_i a_{i+1} a_{i+2}). \end{aligned}$$

Первое уравнение (5.8) $\dot{a} = [m, c_1]$ в силу формул (5.7) сводится к динамической системе

$$\dot{a}_i = (c_1)_{i,i+2} - (c_1)_{i-1,i+1},$$

которая после подстановки формул (5.10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= a_i (\beta_1 (a_{i+1} - a_{i-1}) - \\ &\quad - \beta_2 (a_{i+1} (a_i + a_{i+1} + a_{i+2}) - a_{i-1} (a_i + a_{i-1} + a_{i-2}))). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Эта система включает в себя при $\beta_2 = 0$ систему Вольтерра или дискретное уравнение КдФ, определена в пространстве произвольной размерности и имеет те же первые интегралы, что и система Вольтерра, так как операторы L для этих систем совпадают.

Исследуем континуальный предел системы (5.11). Пусть $a_k(t) = 1 - \varepsilon^2 u(t, x_k)$, $u(t, x)$ — некоторая гладкая функция и $x_k = k\varepsilon$. После подстановки этих выражений уравнения (5.11) в точке (t, x_k) принимают вид

$$u_t = 2\varepsilon(\beta_1 - 6\beta_2)u_x + 2\varepsilon^3\left(\frac{\beta_1}{6} - 2\beta_2\right)(u_{xxx} - 6uu_x) + \\ + 2\varepsilon^5\left[\frac{1}{5!}(\beta_1 - 36\beta_2)u_x^V - \left(\frac{\beta_1}{6} - 4\beta_2\right)uu_{xxx} + \right. \\ \left. + 4\beta_2u_xu_{xx} - 6\beta_2u^2u_x\right] + o(\varepsilon^6). \quad (5.12)$$

При $\beta_1 \neq 12\beta_2$ стандартные преобразования (см. § 1, 3) приводят уравнение (5.12) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ к уравнению Кортевега — де Фриза $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$. Пусть $\beta_1 = 12\beta_2$; сделаем последовательно замену координат $t_1 = t$, $x_1 = x + 12\beta_2 \varepsilon t$, замену времени $\tau = -2\beta_2 \varepsilon^5 t_1$ и затем перейдем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда уравнение (5.12) перейдет в уравнение

$$u_{t_1} = \frac{1}{5} u^V - 2uu''' - 4u'u'' + 6u^2u'. \quad (5.13)$$

Это уравнение представляется в виде

$$u_{t_1} = \frac{d}{dx_1} \cdot \frac{\delta I_2}{\delta u}, \quad 10I_2 = (u'')^2 - 5u^2u'' + 5u^4 \quad (5.14)$$

и поэтому совпадает со «вторым» уравнением КдФ (см., например, [5]). Таким образом, доказано следующее

Утверждение 2. *Бесконечная система уравнений (5.11) допускает представление Лакса со спектральным параметром и в континуальном пределе переходит в уравнение КдФ, если $\beta_k \neq 12\beta_2$, и «второе» уравнение КдФ (5.14), если $\beta_1 = 12\beta_2$.*

Замечание 1. В утверждении 2 существенно используется то нетривиальное обстоятельство, что в разложении (5.12) произвольные постоянные β_1 и β_2 входят в коэффициент при ε^3 в виде общего множителя $\beta_1 - 12\beta_2$. Вероятно, утверждение 2 справедливо также и для всех динамических систем (5.8) при $k=2$, $p>2$ и соответствующем специальном соотношении между коэффициентами β_1 и β_2 . Возможно, что и все высшие уравнения КдФ имеют интегрируемые дискретизации вида (5.3) и (5.8) при некоторых специальных соотношениях между коэффициентами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$.

§ 6. Общие конструкции интегрируемых дискретизаций уравнения КдФ

I. В данном параграфе мы покажем, что динамические системы (1.3) и (3.1) являются специальными случаями некоторых общих динамических систем, которые также допускают представление Лакса и в континуальном пределе переходят в уравнение Кортевега — де Фриза. Предварительно выясним, к каким динамическим системам (с точностью до эквивалентности) приводят уравнения Лакса вида

$$\dot{L} = [L, A], \quad L = aE_0^\alpha + kE_0^\beta, \quad A = xE_0^\gamma + yE_0^\delta \quad (6.1)$$

с произвольным спектральным параметром E_0 , где матрицы a и k функционально независимы, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные действительные числа. Покажем, что нетривиальные уравнения Лакса (6.1) эквивалентны трем различным случаям, определенным условиями $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ и $(\gamma, \delta) = (0, 1), (-1, -2), (1, -1)$. Умножим оператор L на $E_0^{-\alpha}$ и перейдем к параметру $E = E_0^{\beta-\alpha}$; тогда $(\alpha_1, \beta_1) = (0, 1)$. Если из трех пар чисел $(0, 1), (\gamma_1, \gamma_1 + 1), (\delta_1, \delta_1 + 1)$ некоторая пара не пересекается ни с одной другой, то из уравнения (6.1) следует либо тривиальная динамика ($\dot{a} = 0, \dot{k} = 0$), либо функциональная зависимость матриц a и k (если, например, из (6.1) следует, что $[a, x] = 0, [k, x] = 0$). Поэтому нетривиальные уравнения (6.1) соответствуют следующим значениям пар (γ_1, δ_1) : 1) $(1, -1)$; 2) $(0, 1)$; 3) $(0, -1)$; 4) $(1, 2)$; 5) $(-1, -2)$. Случаи 2) и 3), а также 4) и 5) эквивалентны после умножения оператора L на E^c и перемены местами матриц a и k .

Окончательно получаем следующие уравнения:

$$(\gamma_1, \delta_1) = (1, -1); \quad (a + kE)^\cdot = [a + kE, xE + yE^{-1}], \quad (6.2)$$

$$(\gamma_1, \delta_1) = (0, 1); \quad (a + kE)^\cdot = [a + kE, x + yE], \quad (6.3)$$

$$(\gamma_1, \delta_1) = (-1, -2); \quad (a + kE)^\cdot = [a + kE, xE^{-1} + yE^{-2}], \quad (6.4)$$

которые эквивалентны соответственно системам уравнений

$$\dot{a} = [k, y], \quad \dot{k} = [a, x], \quad [a, y] = 0, \quad [k, x] = 0, \quad (6.5)$$

$$\dot{a} = [a, x], \quad \dot{k} = [k, x] + [a, y], \quad [k, y] = 0, \quad (6.6)$$

$$\dot{a} = [k, x], \quad \dot{k} = 0, \quad [a, x] + [k, y] = 0, \quad [a, y] = 0. \quad (6.7)$$

Системы (6.5), (6.6), (6.7), очевидно, попарно не эквивалентны.

Из алгебраических связей (6.5) следует, что $y = P(a)$, $x = Q(k)$; соответствующие динамические системы в случае матриц a и k ленточного вида рассмотрены в работе [12].

Уравнения (6.6) и (6.7) далее рассматриваются в пространстве матриц ленточного вида, ненулевые элементы которых определяются формулами

$$a_{i,i-r} = a_i, \quad k_{i,i+q} = 1. \quad (6.8)$$

Необходимо предположить, что в случае (6.6) $y = \beta k^p$, а в случае (6.7) $y = \beta a^p$.

II. Рассмотрим следующие уравнения Лакса, отвечающие случаям (6.3) и (6.4):

$$(a^m + kE)' = [a^m + kE, -b - k^p E], \quad (6.9)$$

$$(a + kE)' = [a + kE, cE^{-1} + \beta a^p E^{-2}]. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.9) является следствием уравнений

$$\dot{a} = [a, b], \quad b = k^{p-1}a^m + k^{p-2}a^mk + \dots + a^mk^{p-1}, \quad \dot{k} = 0. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.10) является следствием уравнений

$$\dot{a} = [k, c], \quad c = \alpha a^{p/2} + \beta (a^{p-1}k + a^{p-2}ka + \dots + ka^{p-1}), \quad \dot{k} = 0. \quad (6.12)$$

Для разрешимости уравнений (6.11) в матрицах вида (6.8) необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$rm = (p-1)q. \quad (6.13)$$

Для аналогичной разрешимости уравнений (6.12) необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$2q = r(p-2), \quad (6.14)$$

причем $\alpha = 0$, если p — нечетное число.

Динамические системы, определенные условиями (6.11) и (6.12), являются эквивалентными при $m=1$, $p=3$ (в этом случае уравнения отличаются только знаком); тогда в силу (6.13), (6.14) имеем $r=2q$. При других значениях параметров r, m, p, q уравнения Лакса (6.9) и (6.10) приводят к существенно различным динамическим системам.

III. При условиях (6.13) матрица b (6.11) является диагональной с элементами $(r, m, q, p-1 > 0)$

$$b_{ii} = \sum_{j=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i+qj-kr}. \quad (6.15)$$

Первое уравнение (6.11) принимает вид динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{a}_{i,i-r} &= a_{i,i-r} (b_{i,i} - b_{i-r,i-r}) = \\ &= a_i \left(\sum_{j=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i+qj-kr} - \sum_{j=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i+qj-kr-r} \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

В последнем слагаемом (6.16) преобразуем индекс, используя соотношение (6.13):

$$\begin{aligned} i + qj - r(1+k) &= i + (p-1-s)q - r(m-l) = \\ &= i - sq + rl, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где $s = 0, \dots, p-1$, $l = 0, \dots, m-1$. Меняя в (6.17) обозначения, получаем окончательный вид уравнений (6.16)

$$\dot{a}_i = a_i \left(\sum_{j=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i+qj-kr} - \sum_{j=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i-qj+kr} \right). \quad (6.18)$$

Уравнения (6.18), очевидно, представляются в виде

$$\dot{a}_i = a_i (F(a_{i+l}) - F(a_{i-l})), \quad (6.19)$$

где $-(p-1)q \leq l \leq (p-1)q$ и F — функция многих переменных, указанная в (6.18).

При $q=1$, $rm=p-1$ ряд слагаемых в уравнениях (6.16), (6.18) сокращается, и эти уравнения принимают вид

$$\dot{a}_i = a_i \left(\sum_{j=1}^r \prod_{k=0}^{m-1} a_{i+j+kr} - \sum_{j=1}^r \prod_{k=0}^{m-1} a_{i-j-kr} \right). \quad (6.20)$$

Динамические системы (6.20) при $r=p-1$, $m=1$ и $r=1$, $m=p-1$ переходят в системы уравнений

$$\dot{a}_i = a_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right), \quad (6.21)$$

$$\dot{a}_i = a_i \left(\prod_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \prod_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right), \quad (6.22)$$

совпадающие с динамическими системами (1.3) и (3.1).

Наиболее важной является динамическая система (6.21); все системы (6.18) с помощью отображения $\alpha_i = \prod_{k=0}^{m-1} a_{i-kr}$ преобразуются в систему

$$\dot{a}_i = \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{i+qj} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{i-qj} \right), \quad (6.23)$$

очевидно, эквивалентную системе (6.21).

Система (6.18) после подстановки

$$a_k(t) = 1 - \varepsilon^2 u(t, x_k), \quad x_k = k\varepsilon, \quad (6.24)$$

принимает в силу формул (6.13) вид (в точке (t, x_k))

$$\ddot{u} = (1 - \varepsilon^2 u) (c_1 \varepsilon u_x + c_2 \varepsilon^3 u_{xxx} + o(\varepsilon^4)) \quad (6.25)$$

с некоторыми постоянными c_1 и c_2 . Применим к уравнению (6.25) преобразования $t' = t$, $x' = x + c_1 \varepsilon t$ и $\tau = \varepsilon^3 \kappa t'$, $x_1 = \sigma x'$, где $\kappa = -c_2 \sigma^3$, $\sigma = (c_1/6c_2)^{1/2}$. После этих преобразований и перехода к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (6.25) преобразуется в уравнение Кортевега — де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 6u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}. \quad (6.26)$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 3. *Динамические системы (6.18), зависящие от четырех целочисленных параметров r, m, p, q , связанных соотношением (6.13), допускают представление Лакса (6.9), (6.8), зависящее от спектрального параметра E , и в континуальном пределе переходят в уравнение Кортевега — де Фриза. Специальными случаями систем (6.18) являются динамические системы (6.20), (6.21) и (6.22).*

IV. При выполнении условий (6.14) матрица c (6.12) имеет следующие ненулевые элементы:

$$c_{i, i-r-q} = \alpha \prod_{k=0}^{p/2-1} a_{i-kr} + \beta \sum_{j=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{p-2-j} a_{i-kr} \prod_{s=0}^{j-1} a_{i-q+sr}. \quad (6.27)$$

Первое уравнение (6.12) определяет динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{a}_i = c_{i+q, i-r} - c_{i, i-r-q} = & \alpha a_i \left(\prod_{k=1}^{p/2-1} a_{i+kr} - \prod_{k=1}^{p/2-1} a_{i-kr} \right) + \\ & + \beta a_i \sum_{j=1}^{p-1} \left(\prod_{k=0}^{p-2-j} a_{i+q-kr} \prod_{s=1}^{j-1} a_{i+sr} - \prod_{k=0}^{p-2-j} a_{i-q+kr} \prod_{s=1}^{j-1} a_{i-sr} \right). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Здесь сокращены два совпадающих слагаемых, соответствующих $j = 0$.

Динамическая система (6.28) имеет вид (6.19). Поэтому аналогично доказанному выше система (6.28) после подстановки (6.25) и перехода к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ преобразуется в уравнение КдФ (6.26). Тем самым доказана следующая

Теорема 4. Динамические системы (6.28), зависящие от трех целочисленных параметров r, p, q , удовлетворяющих соотношению (6.14), допускают представление Лакса (6.10), (6.8) и в континуальном пределе переходят в уравнение Кортевега — де Фриза.

ГЛАВА VI

ИНТЕГРИРУЕМОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

В данной главе исследуется интегро-дифференциальное уравнение, являющееся континуальным пределом семейства интегрируемых динамических систем, построенных в гл. V. Показано, что это уравнение допускает эквивалентное представление Лакса и обладает счетным набором первых интегралов, представимых в явном аналитическом виде. Построенное интегро-дифференциальное уравнение имеет применения в физике плазмы — в теории кинетических уравнений, описывающих перенос энергии ленгмюровских колебаний по спектру.

§ 1. Интегро-дифференциальное уравнение как континуальный предел семейства динамических систем

I. В гл. V показано, что каждая динамическая система вида (1.3), (3.1), (3.2), (6.20) в континуальном пределе при фиксированном p переходит в уравнение Кортвега — де Фриза. В данном параграфе мы рассмотрим континуальный предел всего семейства динамических систем (1.3) и семейств (3.1), (3.2), (6.20) при $p \rightarrow \infty$.

Динамическая система (1.3) (гл. V) после замены времени $dt/dt_1 = \varepsilon$ принимает вид

$$\frac{da_i}{dt_1} = a_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a_{i-k} \right). \quad (1.1)$$

Предположим, что $p-1 = c/\varepsilon$ и существует такая гладкая функция $a(t, x)$, что $a_k(t) = a(t, x_k)$, $x_k = k\varepsilon$. Тогда система (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial a(t, x_i)}{\partial t} = a(t, x_i) \left(\sum_{k=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon a(t, x_i + k\varepsilon) - \sum_{k=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon a(t, x_i - k\varepsilon) \right). \quad (1.2)$$

Система (1.2) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x) \left(\int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi - \int_{x-c}^x a(t, \xi) d\xi \right). \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} T(x, x') a(x') dx' \right),$$

где ядро $T(x, x')$ антисимметрично и определяется формулами

$$T(x, x') = T(x' - x), \quad T(\xi) = -T(-\xi), \\ T(\xi) = 1, \quad 0 < \xi \leq c, \quad T(\xi) = 0, \quad \xi > c.$$

Поэтому уравнение (1.3) согласно [43] является кинетическим уравнением, описывающим перенос энергии ленгмюровских колебаний в плазме по спектру в x -пространстве.

II. Динамическая система (3.1) (гл. V) после замены координат и замены времени

$$a_k = \exp \varepsilon u_k, \quad \frac{dt}{dt_1} = \varepsilon \quad (1.4)$$

принимает вид

$$\frac{du_i}{dt_1} = \exp \left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u_{i+k} \right) - \exp \left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u_{i-k} \right). \quad (1.5)$$

Предположим, что $p-1 = c/\varepsilon$ и существует такая гладкая функция $u(t, x)$, что $u(t, x_k) = u_k(t)$, $x_k = k\varepsilon$. Тогда система (1.5) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \exp \int_x^{x+c} u(t, \xi) d\xi - \exp \int_{x-c}^x u(t, \xi) d\xi. \quad (1.6)$$

Динамическая система (3.2) после замены (1.4) принимает вид (1.5) с заменой нижнего предела суммирования на $k=0$. Поэтому в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ система (3.2), (1.5) также переходит в уравнение (1.6).

Динамическая система (6.20) гл. V после замены времени $dt/dt_1 = \varepsilon$ принимает вид

$$\frac{da_i}{dt_1} = a_i \left(\varepsilon \sum_{j=1}^r \prod_{k=0}^{m-1} a_{i+j+kr} - \varepsilon \sum_{j=1}^r \prod_{k=0}^{m-1} a_{i-j-kr} \right). \quad (1.7)$$

Предположим, что число m фиксировано, $r = c/\varepsilon$ и существует такая гладкая функция $a(t, x)$, что $a_k(t) = a(t, x_k)$, $x_k = k\varepsilon$. Тогда уравнение (1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(t, x_i)}{\partial t} = a(t, x_i) & \left(\sum_{j=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon \prod_{k=0}^{m-1} a(t, x_i + j\varepsilon + kc) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon \prod_{k=0}^{m-1} a(t, x_i - j\varepsilon - kc) \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система (1.8) после перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ преобразуется в интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x) & \left(\int_x^{x+c} \prod_{k=0}^{m-1} a(t, \xi + kc) d\xi - \right. \\ & \left. - \int_{x-c}^x \prod_{k=0}^{m-1} a(t, \xi - kc) d\xi \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) при $m = 1$ очевидно переходит в уравнение (1.3).

III. Исследуем взаимные связи уравнений (1.3), (1.6) и (1.9). Проинтегрируем уравнение (1.6) в пределах от $x - c$ до x и обозначим

$$v(t, x) = \int_{x-c}^x u(t, \xi) d\xi. \quad (1.10)$$

Получим уравнение

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \int_x^{x+c} \exp v(t, \xi) d\xi - \int_{x-c}^x \exp v(t, \xi) d\xi, \quad (1.11)$$

которое после замены

$$a(t, x) = \exp v(t, x), \quad a(t, x) = \exp \int_{x-c}^x u(t, \xi) d\xi \quad (1.12)$$

принимает вид (1.3).

Уравнение (1.9) после подстановки

$$u(t, x) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \quad (1.13)$$

преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = e^{\varphi(t, x+c) - \varphi(t, x)} - e^{\varphi(t, x) - \varphi(t, x-c)}. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) после дифференцирования по x принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = e^{v(t, x+c)} - 2e^{v(t, x)} + e^{v(t, x-c)} \quad (1.15)$$

и получается из уравнения (1.14) с помощью замены (1.10)

$$v(t, x) = \varphi(t, x) - \varphi(t, x - c).$$

Уравнение (1.14) по своей структуре напоминает двумеризованную цепочку Toda

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t \partial x} = e^{\varphi_{k+1}(t, x) - \varphi_k(t, x)} - e^{\varphi_k(t, x) - \varphi_{k-1}(t, x)}, \quad (1.16)$$

которая является системой счетного числа уравнений на функции φ_k , $-\infty < k < +\infty$. Уравнения (1.16) на инвариантном подмногообразии, определенном счетным числом условий

$$\varphi_k(t, x) = \varphi(t, x + kc), \quad (1.17)$$

совпадают с уравнением (1.14). Однако все известные решения двумеризованной цепочки Toda (1.16) не принадлежат инвариантному подмногообразию (1.17) и поэтому ничего не дают для исследования уравнения (1.14).

Уравнение (1.14) на инвариантном подмногообразии $\varphi(t, x+c) = -\varphi(t, x)$ сводится к гиперболическому уравнению Синус Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}(t, x) = 2 \operatorname{sh}(-2\varphi(t, x)). \quad (1.18)$$

Покажем, что уравнение (1.9) с помощью отображения

$$b(t, x) = \prod_{k=0}^{m-1} a(t, x + kc)$$

преобразуется в уравнение вида (1.3). Действительно, из уравнения (1.9) в точках $x, x+c, \dots, x+(m-1)c$ следует уравнение

$$\frac{\partial b(t, x)}{\partial t} = b(t, x) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \int_{x+kc}^{x+(k+1)c} b(t, \xi) d\xi - \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x+(k-1)c}^{x+kc} b(t, \xi - (m-1)c) d\xi \right).$$

Это уравнение после сложения интегралов принимает вид

$$\frac{\partial b(t, x)}{\partial t} = b(t, x) \left(\int_x^{x+mc} b(t, \xi) d\xi - \int_{x-mc}^x b(t, \xi) d\xi \right),$$

совпадающий с (1.3) после замены mc на c .

Таким образом, интегро-дифференциальные уравнения (1.6), (1.9) и уравнение (1.14) вкладываются в более общее интегро-дифференциальное уравнение (1.3). Поэтому в дальнейшем мы будем изучать именно это уравнение.

§ 2. Основные свойства интегро-дифференциального уравнения (1.3)

I. Уравнение (1.3) является континуальным пределом при $p \rightarrow \infty$ всего семейства динамических систем (1.3) из гл. V. Важнейшие свойства этих динамических систем сохраняются также и у уравнения (1.3).

Теорема 1. *Интегро-дифференциальное уравнение (1.3) обладает следующими свойствами: 1) является гамильтоновым; 2) допускает эквивалентное представление Лакса; 3) имеет счетный набор первых интегралов I_n , которые определяются явными формулами.*

Доказательство. 1) Уравнение (1.3) представляется также в виде

$$v_t(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - x) \exp v(t, \xi) d\xi,$$

$$\varphi(y) = 1, \quad 0 < y < c; \quad \varphi(y) = 0, \quad y > c, \quad \varphi(-y) = -\varphi(y). \quad (2.1)$$

В силу представления (2.1) имеем

$$v_t(t, x) = I \frac{\delta H}{\delta v},$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \exp v(t, \xi) d\xi, \quad (I(f))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - x) f(\xi) d\xi. \quad (2.2)$$

Оператор I трансляционно инвариантен и в силу нечетности функции $\varphi(x)$ является кососимметрическим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(f)(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} I(g)(x) f(x) dx.$$

Поэтому представление (2.2) определяет гамильтонов вид уравнения (2.1).

2) Пусть P_c — оператор сдвига графика функции $\varphi(x)$ на c : $(P_c \varphi)(x) = \varphi(x + c)$, d/dx — оператор дифференцирования. Очевидно справедливы равенства

$$[P_c, \psi P_b] = (\varphi P_c(\psi) - \psi P_b(\varphi)) P_{c+b}, \quad \left[\frac{d}{dx}, P_c \right] = 0. \quad (2.3)$$

Рассмотрим уравнение Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [L, A], \quad L = \frac{d}{dx} + a(t, x) P_{-c}, \quad A = - \int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi - P_c, \quad (2.4)$$

где L и A — линейные операторы, действующие в пространстве функций на оси $\mathbb{R}^1$ ($-\infty < x < +\infty$). Используя равенства (2.3), нетрудно проверить, что уравнение (2.4) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (1.3).

Уравнение Лакса (2.4) можно представить также в алгебре Ли интегральных операторов на прямой $\text{Int}(\mathbb{R}^1, \mu)$, ядра которых являются обобщенными функциями. Пусть обобщенные функции $L(t, x, y)$ и $A(t, x, y)$ имеют вид

$$L(t, x, y) = a(t, x) \delta(x - c - y) + \delta'(x - y),$$

$$A(t, x, y) = - \left(\int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi \right) \delta(x - y) - \delta(x + c - y). \quad (2.5)$$

По определению обобщенных функций $\delta(x - y)$ и

$\delta'(x-y)$ имеем [48]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z-x) f(z) dz = f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(z-x) f(z) dz = -f'(x). \quad (2.6)$$

В силу этих равенств нетрудно проверить, что уравнение Лакса

$$\frac{\partial L(t, x, y)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} (L(t, x, z) A(t, z, y) - A(t, x, z) L(t, z, y)) dz \quad (2.7)$$

эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (1.3).

3) Для вывода формул первых интегралов уравнения (1.3) определим следующие линейные операторы, действующие в пространстве функций на оси $\mathbb{R}^1$:

$$L_1 = \varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon} + P_\varepsilon, \quad A_1 = -\varepsilon \sum_{k=0}^{p-1} a(t, x + k\varepsilon) - P_{p\varepsilon}, \quad (2.8)$$

где p — целое число. Уравнение Лакса $\dot{L}_1 = [L_1, A_1]$ в силу равенств (2.3) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x) \left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x + k\varepsilon) - \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x - k\varepsilon) \right). \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, $p-1 = [c/\varepsilon] \rightarrow \infty$ переходит в интегро-дифференциальное уравнение (1.3). Поэтому первые интегралы уравнения (2.9) в пределе переходят в первые интегралы уравнения (1.3).

Лемма 1. *Уравнение Лакса вида*

$$\dot{L} = [L, A], \quad L = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x) P_{c_i}, \quad A = \sum_{i=1}^m \psi_i(t, x) P_{b_i} \quad (2.10)$$

имеет первый интеграл

$$I = \text{Tr}(L) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t, x) dx, \quad (2.11)$$

где индекс k определен условием $c_k = 0$.

Доказательство. Уравнение Лакса (2.10) после приравнивания коэффициентов при различных сдвигах

P_{c_k} в операторах L и $[L, A]$ в силу формул (2.3) переходит в систему уравнений

$$\frac{\partial \varphi_k(t, x)}{\partial t} = \sum (\varphi_i(t, x) \psi_j(t, x + c_i) - \psi_j(t, x) \varphi_i(t, x + b_j)), \quad (2.12)$$

где суммирование осуществляется по всем индексам i, j , удовлетворяющим условию $c_i + b_j = c_k$. Если $c_k = 0$, то уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_k(t, x)}{\partial t} = \sum (\varphi_i(t, x) \psi_j(t, x + c_i) - \psi_j(t, x) \varphi_i(t, x - c_i)). \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.13) следует, что при $c_k = 0$

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}(L) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t, x) dx = 0.$$

Лемма 1 доказана.

Из уравнения Лакса (2.8) следуют уравнения $(L_1^N)' = [L_1^N, A_1]$, поэтому уравнение (2.9) имеет счетное множество первых интегралов вида $\text{Tr}(L_1^N)$. Ненулевые интегралы возникают только если в разложение оператора L_1^N входит оператор нулевого сдвига P_0 , т. е. если существуют такие целые числа k и l , $k + l = N$, что $k(1 - p) + l = 0$. Отсюда находим $N = k + l = kp$. Поэтому счетное множество ненулевых первых интегралов I_n уравнения (2.9) определяется формулами

$$I_n = \text{Tr}(L_1^{np}) = \text{Tr}(\varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon} + P_\varepsilon)^{np}. \quad (2.14)$$

Согласно определению (2.11) для вычисления интеграла I_n необходимо вычислить коэффициент при операторе P_0 в разложении L_1^{np} . Оператор P_0 возникает в L_1^{np} от умножения в произвольном порядке n раз оператора $\varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon}$ и $n(p - 1)$ раз оператора P_ε . При $n = 1$ интеграл I_1 имеет вид

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon a(t, x + k\varepsilon) dx$$

и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, $p - 1 = [c/\varepsilon]$ переходит в интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{x+c} a(t, x_1) dx_1 = c \int_{-\infty}^{\infty} a(t, x) dx. \quad (2.15)$$

При произвольном n первый интеграл I_n определяется формулой

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{k_1, \dots, k_n} \varepsilon^n \prod_{m=1}^n a \left(t, x + \sum_{i=1}^m k_i \varepsilon + (m-1)(1-p)\varepsilon \right) \right), \quad (2.16)$$

где суммирование осуществляется по всем наборам из n целых неотрицательных чисел k_i , удовлетворяющих условию $k_1 + \dots + k_n = n(p-1)$. Формулы (2.16) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, $p-1 = [c/\varepsilon] \rightarrow \infty$ переходят в формулы для первых интегралов уравнения (1.3)

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{x+nc} dx_1 \int_{x_1-c}^{x+(n-1)c} dx_2 \dots \dots \int_{x_{n-2}-c}^{x+2c} dx_{n-1} \int_{x_{n-1}-c}^{x+c} \left(\prod_{m=1}^n a(t, x_m) \right) dx_n. \quad (2.17)$$

Простейший из этих интегралов I_1 определен формулой (2.15) и связан с гамильтонианом H (2.2) соотношением $I_1 = cH$. Теорема 1 доказана.

Все интегралы (2.17) сходятся, если функция $|a(t, x)|$ при $|x| \rightarrow \infty$ убывает как $|x|^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$.

II. Рассмотрим задачу рассеяния для оператора L (2.4). Пусть $\varphi(k, t, x)$ — собственная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\varphi}{dx}(k, t, x) + a(t, x) \varphi(k, t, x - c) = k\varphi(k, t, x). \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) является линейным уравнением со сдвигом аргумента. В простейшем случае $a(t, x) = \alpha = \text{const}$ пространство комплекснозначных решений уравнения (2.18) является бесконечномерным и порождается решениями вида $\varphi(k, t, x) = \exp \lambda_i x$, где показатель λ_i удовлетворяет уравнению

$$\lambda + \alpha \exp(-\lambda c) = k. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) при любом k имеет счетное множество комплексных решений λ_i .

Пусть функция $a(t, x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ имеет асимптотику $a(t, x) \rightarrow \alpha$. Обозначим $\varphi_i(k, t, x)$ и $\psi_j(k, t, x)$ решения уравнения (2.18), имеющие асимптотики

$$\begin{aligned} \varphi_i(k, t, x) &= \exp(\lambda_i x), & x \rightarrow -\infty; \\ \psi_j(k, t, x) &= \exp(\lambda_j x), & x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где λ_i, λ_j — корни уравнения (2.19). Предположим, что функции $\varphi_i(k, t, x)$ и $\psi_i(k, t, x)$ образуют два базиса в линейном пространстве решений уравнения (2.28). В этом случае справедливы равенства

$$\varphi_i(k, t, x) = \sum_j B_{ij}(k, t) \psi_j(k, t, x), \quad (2.21)$$

где $B_{ij}(k, t)$ — матрица рассеяния.

Собственная функция $\varphi_i(k, t, x)$ в силу уравнения Лакса (2.4) удовлетворяет уравнению

$$(L - k)(\dot{\varphi}_i + A\varphi_i) = 0, \quad \dot{\varphi}_i + A\varphi_i = \sum_j c_{ij}\varphi_j. \quad (2.22)$$

В силу асимптотики (2.20), формул (2.4) и того, что $a(t, x) \rightarrow \alpha$ при $|x| \rightarrow \infty$, получаем асимптотические равенства

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i \cong -(\alpha c + \exp \lambda_i c) \exp \lambda_i x,$$

из которых следуют, ввиду линейной независимости функций φ_i , точные равенства

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i = -(\alpha c + \exp \lambda_i c) \varphi_i. \quad (2.23)$$

Подставляя в уравнения (2.23) выражения (2.21), получаем

$$\sum_j (\dot{B}_{ij}\varphi_j - B_{ij}(\alpha c + \exp \lambda_j c) \varphi_j) = -(\alpha c + \exp \lambda_i c) \sum_j B_{ij}\varphi_j.$$

Отсюда находим уравнения, определяющие эволюцию данных рассеяния:

$$\dot{B}_{ij}(k, t) = B_{ij}(k, t) (\exp \lambda_j c - \exp \lambda_i c). \quad (2.24)$$

Поэтому в рассматриваемом случае динамика данных рассеяния полностью интегрируется:

$$\begin{aligned} B_{ij}(k, t) &= B_{ij}(k, 0) \exp(t(\exp \lambda_j c - \exp \lambda_i c)), \\ B_{ij}(k, t) B_{ji}(k, t) &= B_{ij}(k, 0) B_{ji}(k, 0), \\ B_{ii}(k, t) &= B_{ii}(k, 0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Проведенные построения допускают очевидное обобщение на случай двух различных асимптотик $a(t, x) \rightarrow \alpha_{\pm}$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

III. Покажем, что бесконечная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_i(t, x)}{\partial t \partial x} &= \exp(\varphi_{i+1}(t, x + c) - \varphi_i(t, x)) - \\ &- \exp(\varphi_i(t, x) - \varphi_{i-1}(t, x - c)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

вкладывается в систему, допускающую представление Лакса. Система (2.26) после подстановки

$$v_i(t, x) = \varphi_{i+1}(t, x+c) - \varphi_i(t, x) \quad (2.27)$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_i(t, x)}{\partial t \partial x} = \exp v_{i+1}(t, x+c) - 2 \exp v_i(t, x) + \exp v_{i-1}(t, x-c). \quad (2.28)$$

Эта система эквивалентна системе уравнений ($a_i(t, x) = \exp v_i(t, x)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i(t, x)}{\partial t} &= a_i(t, x)(b_i(t, x) - b_{i-1}(t, x-c)), \\ \frac{\partial b_i(t, x)}{\partial x} &= a_{i+1}(t, x+c) - a_i(t, x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Система (2.29) эквивалентна уравнению Лакса $\dot{L} = [L, A]$, где операторы L и A действуют в пространстве вектор-функций $\psi_i(t, x)$:

$$\begin{aligned} (L\psi)_i(t, x) &= \frac{\partial \psi_i(t, x)}{\partial x} + a_i(t, x)\psi_{i-1}(t, x-c), \\ (A\psi)_i(t, x) &= -b_i(t, x)\psi_i(t, x) - \psi_{i+1}(t, x+c). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Система уравнений (2.26) включает в себя в виде частного случая при $c=0$ двумеризованную цепочку Toda (1.16). На инвариантном подмногообразии $\varphi_i(t, x) = \varphi_i(t, x)$ система (2.26) совпадает с уравнением (1.14).

§ 3. Иерархия высших уравнений

I. Интегро-дифференциальные уравнения, «высшие» по отношению к уравнению (1.3), допускают представление Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [L, A_n],$$

$$L = \frac{d}{dx} + a(t, x)P_{-c}, \quad A_n = - \sum_{k=0}^n b_k(t, x)P_{kc}. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) в силу формул (2.3) эквивалентно системе уравнений, которые возникают из разложения оператора $[L, A_n]$ в сумму по операторам P_{sc} , $s=n$, $n-$

— 1, ..., 0, —1:

$$\begin{aligned}(b_n)_x(t, x) &= 0, \\ (b_k)_x(t, x) &= a(t, x + (k+1)c) b_{k+1}(t, x) - \\ &\quad - a(t, x) b_{k+1}(t, x - c), \\ a_2(t, x) &= a(t, x) (b_0(t, x) - b_0(t, x - c)).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Из уравнений (1.20) последовательно при $k = n - 1, \dots, 0$ находим коэффициенты $b_k(t, x)$ как функции от $a(t, x)$ и окончательно из последнего уравнения (3.2) находим искомое «высшее уравнение», отвечающее произвольному натуральному числу n . При $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned}b_2(t, x) &= \beta_2 = \text{const}, \quad b_1(t, x) = \beta_2 \int_x^{x+2c} a(t, \xi) d\xi + \beta_1, \\ b_0(t, x) &= \beta_2 \int_x^{x+c} a(t, \zeta) d\zeta \int_{\zeta-c}^{\zeta+c} a(t, \xi) d\xi + \beta_1 \int_x^{x+c} a(t, \zeta) d\zeta.\end{aligned}$$

Поэтому второе интегро-дифференциальное уравнение определяется формулами

$$\begin{aligned}a_t(t, x) &= a(t, x) \left[\beta_1 \left(\int_x^{x+c} a(t, \zeta) d\zeta - \int_{x-c}^x a(t, \zeta) d\zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_2 \left(\int_x^{x+c} a(t, \zeta) d\zeta \int_{\zeta-c}^{\zeta+c} a(t, \xi) d\xi - \int_{x-c}^x a(t, \zeta) d\zeta \int_{\zeta-c}^{\zeta+c} a(t, \xi) d\xi \right) \right].\end{aligned}\quad (3.3)$$

При $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ из (3.3) получаем уравнение (1.3).

Уравнение (3.3) может быть представлено также в виде, аналогичном (2.1):

$$\begin{aligned}v_t(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta - x) \left(\beta_1 \exp v(t, \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_2 \exp v(t, \zeta) \int_{\zeta-c}^{\zeta+c} \exp v(t, \xi) d\xi \right) d\zeta,\end{aligned}$$

где $\exp v(t, x) = a(t, x)$.

Уравнение (3.3) и все «высшие» уравнения (3.1) являются континуальными пределами уравнений, «высших» по отношению к уравнению (2.9), для которых оператор L остается неизменным (см. (2.8)), а операторы A_n

определяются формулами

$$A_n = -\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t, x) P_{kp\varepsilon} - P_{np\varepsilon}.$$

Поэтому все «высшие» интегро-дифференциальные уравнения (3.1) имеют тот же набор первых интегралов, что и уравнение (1.3), определенный явными формулами (2.17).

II. Рассмотрим уравнение Лакса вида

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= [L, A], \quad L = \frac{d}{dx} + a(t, x) P_{-c} + b(t, x) P_{-2c}, \\ A &= - \int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi - P_c. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь в отличие от (3.1) оператор A тот же, что и в (2.4), а оператор L изменен. Уравнение (3.4) в силу формул (2.3) эквивалентно следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(t, x)}{\partial t} &= a(t, x) \left(\int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi - \int_{x-c}^x a(t, \xi) d\xi \right) + \\ &\quad + b(t, x+c) - b(t, x), \\ \frac{\partial b(t, x)}{\partial t} &= b(t, x) \left(\int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi - \int_{x-2c}^{x-c} a(t, \xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения (3.5), очевидно, обобщают уравнение (1.3), соответствующее $b(t, x) \equiv 0$. Уравнения (3.5) являются континуальным пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$, $p-1 = [c/\varepsilon] \rightarrow \infty$ системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(t, x)}{\partial t} &= a(t, x) \left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x+k\varepsilon) - \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x-k\varepsilon) \right) + \\ &\quad + b(t, x+p\varepsilon) - b(t, x), \\ \frac{\partial b(t, x)}{\partial t} &= b(t, x) \left(\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon a(t, x+k\varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon a(t, x-(p+k)\varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.6) эквивалентны уравнению Лакса

$$\begin{aligned} L_1 &= [L_1, A_1], \\ L_1 &= P_\varepsilon + \varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon} + \varepsilon b(t, x) P_{(1-2p)\varepsilon}, \\ A_1 &= -\varepsilon \sum_{k=0}^{p-1} a(t, x + k\varepsilon) - P_{p\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поэтому уравнения (3.6) в силу леммы 1 § 2 имеют счетное множество ненулевых первых интегралов

$$I_n = \text{Tr}(L^{np}). \quad (3.8)$$

Интегралы I_n в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, $p-1 = [c/\varepsilon] \rightarrow \infty$ определяют счетное множество первых интегралов уравнений (3.5). Аналогичные результаты справедливы для всех уравнений, допускающих представление Лакса с операторами L_1, A_1 вида

$$L_1 = \frac{d}{dx} + \sum_{k=1}^n a_k(t, x) P_{-k\varepsilon}, \quad A_1 = -\sum_{i=0}^m b_i(t, x) P_{i\varepsilon}.$$

Система уравнений (3.5) может быть представлена также в виде одного интегро-дифференциального уравнения. Действительно, второе уравнение (3.5) после замены

$$b(t, x) = k \exp \beta(t, x), \quad a(t, x) = \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial t}$$

принимает вид

$$\beta(t, x) = \int_x^{x+c} \alpha(t, \xi) d\xi - \int_{x-2c}^{x-c} \alpha(t, \xi) d\xi.$$

Первое уравнение (3.5) после указанных подстановок переходит в интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial t} \left(\int_x^{x+c} \frac{\partial \alpha(t, \xi)}{\partial t} d\xi - \int_{x-c}^x \frac{\partial \alpha(t, \xi)}{\partial t} d\xi \right) + \\ &+ k \exp \left(\int_{x+c}^{x+2c} \alpha(t, \xi) d\xi - \int_{x-c}^x \alpha(t, \xi) d\xi \right) - \\ &- k \exp \left(\int_x^{x+c} \alpha(t, \xi) d\xi - \int_{x-2c}^{x-c} \alpha(t, \xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

III. Выведем явные формулы для первых интегралов уравнений (1.6) и (1.14). Уравнение (1.6) является

континуальным пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$, $p-1 = [c/\varepsilon] \rightarrow \infty$ уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u(t, x + k\varepsilon)\right) - \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u(t, x - k\varepsilon)\right). \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) эквивалентно уравнению Лакса вида

$$\begin{aligned} L_2 &= [L_2, A_2], \quad L_2 = \varepsilon P_{(1-p)\varepsilon} + \exp(\varepsilon u(t, x)) P_\varepsilon, \\ A_2 &= -\exp\left(\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon u(t, x + k\varepsilon)\right) P_{p\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поэтому в силу леммы 1 § 2 уравнение (3.9) имеет счетное множество первых интегралов

$$I_n = \text{Tr}(L_2^{np}) = \text{Tr}(\varepsilon P_{(1-p)\varepsilon} + \exp(\varepsilon u(t, x)) P_\varepsilon)^{np}.$$

Вычисляя эту величину согласно определению (2.11), получаем формулу

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{k_1, \dots, k_n} \varepsilon^n \exp \varepsilon \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{k_m-1} u(t, x + (m-1)(1-p)\varepsilon + j\varepsilon) \right), \quad (3.11)$$

где суммирование осуществляется по всем наборам из n неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$, удовлетворяющих условию $k_1 + \dots + k_n = n(p-1)$. Выражения (3.11) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, $p-1 = [c/\varepsilon] \rightarrow \infty$ переходят в формулы для первых интегралов уравнения (1.6):

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{x+nc} dx_1 \int_{x_1-c}^{x+(n-1)c} dx_2 \dots \\ &\dots \int_{x_{n-2}-c}^{x+2c} dx_{n-1} \int_{x_{n-1}-c}^{x+c} Z(t, x, x_1, \dots, x_n) dx_n, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} Z(t, x, x_1, \dots, x_n) &= \exp \left(\int_x^{x_1} u(t, \xi_1) d\xi_1 + \right. \\ &\left. + \int_{x_1-c}^{x_2} u(t, \xi_2) d\xi_2 + \dots + \int_{x_{n-1}-c}^x u(t, \xi_{n+1}) d\xi_{n+1} \right). \end{aligned}$$

Простейший из этих интегралов I_1 имеет вид

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{x+c} dx_1 \exp \left(\int_{x_1-c}^{x_1} u(t, \xi_1) d\xi_1 \right) = \\ = c \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left(\int_x^{x+c} u(t, \xi_1) d\xi_1 \right).$$

Уравнение (1.14) следует из уравнения (1.6) после подстановки $u(t, x) = \partial \varphi(t, x) / \partial x$. При этом подынтегральная функция в (3.12) принимает вид

$$Z = \exp \sum_{k=1}^n (\varphi(t, x_k) - \varphi(t, x_k - c)) = \prod_{k=1}^n a(t, x_k),$$

где использована связь (1.12). Поэтому формулы (3.12), определяющие первые интегралы уравнений (1.6), (1.14), после преобразования (1.12) переходят в формулы (2.17) первых интегралов интегро-дифференциального уравнения (1.3).

ГЛАВА VII

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И В НЕПРЕРЫВНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

В данной главе изучаются конструкции дифференциальных уравнений в алгебрах гладких и непрерывных функций на многообразиях и в произвольных непрерывных ассоциативных алгебрах. Построенные дифференциальные уравнения связаны с автоморфизмами ассоциативных алгебр и допускают эквивалентное представление Лакса (зависящее от спектрального параметра) в пространстве линейных операторов, действующих на рассматриваемой ассоциативной алгебре. Полученные дифференциальные уравнения обладают счетными наборами первых интегралов. Найденные алгебраические конструкции для коммутативных алгебр функций на дискретном множестве точек и на прямой приводят к динамическим системам и интегро-дифференциальным уравнениям, изучавшимся в гл. V, VI. Применения этих конструкций в некоммутативных алгебрах матричнозначных функций приводят, в частности, к новым интегрируемым случаям уравнений Эйлера в прямых суммах произвольного числа алгебр Ли $gl(n, \mathbb{R})$ и $so(n, \mathbb{R})$.

§ 1. Первые интегралы дифференциальных уравнений, связанных с автоморфизмами ассоциативных алгебр

I. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная непрерывная (вещественная или комплексная) ассоциативная алгебра, $H: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — произвольный ее автоморфизм:

$$\begin{aligned} H(k_1 a + k_2 b) &= k_1 H(a) + k_2 H(b), \\ H(ab) &= H(a)H(b), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $a, b \in \mathfrak{A}$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В дальнейшем рассматриваются следующие примеры:

1) $\mathfrak{A} = gl(n, \mathbb{R})$ — алгебра матриц $H(a) = QaQ^{-1}$ — внутренний автоморфизм.

2) $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathcal{M})$ — алгебра гладких или непрерывных функций на произвольном многообразии $\mathcal{M}$, H — оператор сдвига: $H(a(x)) = a(h(x))$, где $x \in \mathcal{M}$, $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — некоторое обратимое отображение (возможно, сохраняющее меру).

3) $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathcal{M}, \text{gl}(n, \mathbb{R}))$ — алгебра матричнозначных функций на многообразии $\mathcal{M}$ (гладких или непрерывных). Наиболее общие автоморфизмы H имеют вид

$$H(a)(x) = Q(x)a(h(x))Q^{-1}(x),$$

где $Q(x)$ — обратимая матрица, зависящая от точки $x \in \mathcal{M}$.

4) $\mathfrak{A} = \mathbb{R}[\pi]$ или $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[\pi]$ — групповая алгебра некоторой группы π , ее элементы — функции на группе $a(g)$, $g \in \pi$. Автоморфизмы H определены формулой $H(a)(g) = a(h(g))$, где $h: \pi \rightarrow \pi$ — произвольный автоморфизм группы π .

В дальнейшем предполагается, что на алгебре $\mathfrak{A}$ определена линейная функция $t: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ или $t: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами:

$$t(ab) = t(ba), \quad t(H(a)) = t(a), \quad (1.2)$$

где H — произвольный автоморфизм из некоторой фиксированной допустимой группы автоморфизмов Γ . Если $\mathfrak{A} = \text{gl}(n, \mathbb{C})$, $H(a) = QaQ^{-1}$, то функция $t(a)$ является следом $\text{Tr}(a)$ матрицы a . Если $\mathfrak{A} = \mathcal{F}_n(\mathcal{M})$ — алгебра матричнозначных функций на $\mathcal{M}$, то группа Γ автоморфизмов определяется преобразованиями $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, сохраняющими меру μ : $H(a)(x) = Q(h(x))a(h(x))Q^{-1}(h(x))$. При этом функция $t(a)$ определяется формулой

$$t(a) = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}(a(x)) d\mu(x). \quad (1.3)$$

В случае групповой алгебры $\mathbb{R}[\pi]$ функция $t(a)$ имеет вид $t(a) = a(1)$.

Пусть $L(t)$ и $A(t)$ — линейные операторы, действующие на алгебре $\mathfrak{A}$, заданные формулами

$$L(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) H_i, \quad A(t) = \sum_{j=1}^m b_j(t) H_j, \quad (1.4)$$

где $a_i(t)$, $b_j(t) \in \mathfrak{A}$, H_i , H_j — постоянные автоморфизмы из допустимой группы Γ . Предполагается, что разложение операторов $L(t)$, $A(t)$, $[L(t), A(t)]$ в прямую сумму (1.4) определено однозначно. Это свойство выполнено,

например, если $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ — алгебра непрерывных функций на многообразии $\mathcal{M}$, а автоморфизмы H_i, G_j являются степенями автоморфизма сдвига H_0 , который не является периодическим. Определим числовую функцию

$$T(L) = t(a_k), \quad H_k = \text{id}. \quad (1.5)$$

Здесь элемент a_k определен условием $H_k = \text{id}$ — тождественный автоморфизм. Если тождественного автоморфизма нет в разложении (1.4) оператора L , то полагаем $T(L) = 0$. Покажем, что функция $T(L)$ обладает следующим свойством:

$$T(LA) = T(AL), \quad T([L, A]) = 0. \quad (1.6)$$

Действительно, коммутатор операторов L и A (1.4) имеет вид

$$LA - AL = \sum_{i,j}^{n,m} (a_i H_i(b_j) H_i G_j - b_j G_j(a_i) G_j H_i). \quad (1.7)$$

Согласно определению (1.5) имеем

$$T(LA - AL) = \sum_{i,j} (t(a_i H_i(b_j)) - t(b_j G_j(a_i))), \quad (1.8)$$

где индексы i и j определены условиями $H_i G_j = \text{id}$. Поэтому используя формулы (1.2), получаем

$$T(LA - AL) = \sum_{i,j} (t(a_i H_i(b_j)) - t(G_j(H_i(b_j) a_i))) = 0. \quad (1.9)$$

Свойством (1.6) обладает также след $\text{Tr}(L)$ оператора L . Однако функция $T(L)$, очевидно, не совпадает со следом оператора L даже в простейшем случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ конечномерна. Если алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечномерна — например $\mathfrak{A} = \mathcal{F}_n(\mathcal{M})$, то след линейных операторов на $\mathfrak{A}$ не определен. Однако функция $T(L)$ определена формулами (1.5), (1.3) для всех операторов вида (1.4).

Рассмотрим операторное уравнение типа Лакса

$$\dot{L} = LA - AL. \quad (1.10)$$

В силу (1.4), (1.7) уравнение (1.10) эквивалентно некоторой системе дифференциальных и алгебраических уравнений для коэффициентов $a_i(t), b_j(t)$.

Лемма 1. Уравнение (1.10) и эквивалентная ему система уравнений в пространстве коэффициентов a_i, b_j

имеют счетное множество первых интегралов I_n , определенных формулами

$$I_n = T(L^n). \quad (1.11)$$

Доказательство. Из уравнения (1.10) при любом n следуют уравнения

$$(L^n)' = L^n A - A L^n. \quad (1.12)$$

Поэтому в силу формулы (1.6) получаем

$$I_n' = T((L^n)') = 0,$$

т. е. функции I_n являются первыми интегралами уравнения (1.10).

Отметим, что в случае конечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ уравнение (1.10) имеет еще набор первых интегралов

$$J_k = \text{Tr}(L^k), \quad (1.13)$$

которые, вообще говоря, не совпадают с первыми интегралами (1.11). Существенно, что в случае бесконечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ (при условии однозначности разложения (1.4)) первые интегралы (1.11) корректно определены, а интегралы (1.13) — нет.

§ 2. Алгебраические конструкции некоторых интегрируемых уравнений

1. Теорема 1. Следующие пять дифференциальных уравнений в произвольной непрерывной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ допускают представление Лакса (со спектральным параметром) в алгебре линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$ (здесь $H: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — произвольный автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, p — произвольное целое число, $p \geq 2$):

$$\dot{a} = \left(\sum_{k=1}^{p-1} H^k(a) \right) a - a \left(\sum_{k=1}^{p-1} H^{-k}(a) \right), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} = & a(H(a)H^2(a)\dots H^{p-1}(a)) - \\ & - (H^{1-p}(a)H^{2-p}(a)\dots H^{-1}(a))a, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} = & aH(a)H^2(a)\dots H^{p-1}(a)a - \\ & - aH^{1-p}(a)H^{2-p}(a)\dots H^{-1}(a)a, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\dot{a} = ba - aH^{-r}(b),$$

$$b = \sum_{k=0}^{p-1} H^{kq}(aH^{-r}(a)\dots H^{-(m-1)r}(a)), \quad (2.4)$$

$$\dot{a} = H^q(c) - c,$$

$$c = \sum_{k=0}^{p-1} aH^{-r}(a) \dots \dots H^{-r(p-2-k)}(a) H^{-q}(H^{(k-1)r}(a) H^{(k-2)r}(a) \dots a). \quad (2.5)$$

В случаях (2.4) и (2.5) целочисленные параметры $r, p \geq 2, q, m$ связаны соответственно соотношениями

$$(p-1)q = rm, \quad (2.6)$$

$$2q = r(p-2). \quad (2.7)$$

Доказательство теоремы 1 состоит в явном указании соответствующих представлений Лакса

$$\frac{dL(t, \lambda)}{dt} = [L(t, \lambda), A(t, \lambda)], \quad (2.8)$$

где операторы $L(t, \lambda)$ и $A(t, \lambda)$ имеют вид (1.4), λ — спектральный параметр. В силу представления (2.8) из леммы 1 следует наличие счетного множества первых интегралов (1.11) у уравнений (2.1) — (2.5).

1) Операторы L и A имеют вид

$$L = aH^{1-p} + \lambda H, \quad A = -b - \lambda H^p.$$

Используя основные свойства автоморфизмов (1.1), нетрудно проверить равенство

$$\begin{aligned} [L, A] &= LA - AL = \\ &= (ba - aH^{1-p}(b))H^{1-p} + \lambda(b - H(b) + H^p(a) - a)H. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициент при операторе H равен нулю, если

$$b = \sum_{k=0}^{p-1} H^k(a).$$

В этом случае уравнение Лакса (2.6) в силу равенства (2.9) эквивалентно уравнению (2.1). Ненулевые первые интегралы уравнения (2.1) определяются формулами (см. § 1)

$$I_k = T(aH^{1-p} + \lambda H).$$

2) Операторы L и A имеют вид

$$L = aH + \lambda H^{1-p},$$

$$A = -\lambda^{-1}(aH)^p = -\lambda^{-1}aH(a) \dots H^{p-1}(a)H^p. \quad (2.10)$$

Очевидно, что операторы aH и A коммутируют, поэтому из уравнений (2.8), (2.10) следует уравнение (2.2). Его

ненулевые первые интегралы определяются по формулам

$$I_k = T(aH + \lambda H^{1-p})^{kp}.$$

3) Операторы L и A имеют вид

$$L = aH^{1-p} + \lambda aH, \quad A = -b - \lambda(aH)^p. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.8), (2.11) следуют два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= ba - aH(b) + aH(a) \dots H^{p-1}(a)H^p(a) - \\ &\quad - aH^{1-p}(a) \dots H^{-1}(a)a, \\ \dot{a} &= ba - aH^{1-p}(b). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вектор b определяется из условия совпадения уравнений (2.12) и имеет вид

$$b = aH(a) \dots H^{p-1}(a).$$

При этом уравнения (2.12) принимают вид (2.3). Первые интегралы уравнения (2.3) определяются формулами

$$I_k = T(aH^{1-p} + \lambda aH)^{kp}.$$

Отметим, что в специальном случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является коммутативной алгеброй функций на множестве целых чисел, уравнение (2.3) переходит в уравнение (3.2) гл. V. В § 3 гл. V указано другое представление Лакса для этого уравнения.

4) Операторы L и A имеют вид

$$L = (aH^{-r})^m + \lambda H^q, \quad A = -b - \lambda H^{pq} \quad (2.13)$$

при условии (2.6). Справедливо равенство

$$\begin{aligned} [L, A] &= -[(aH^{-r})^m, b] + \lambda(b - H^q(b) + H^{pq}(aH^{-r}(a) \dots \\ &\quad \dots H^{-(m-1)r}(a)) - aH^{-r}(a) \dots H^{-(m-1)r}(a))H^q. \end{aligned}$$

Коэффициент при операторе H^q обращается в нуль, если элемент b определен равенством (2.4). В этом случае уравнение Лакса (2.8), (2.13) принимает вид

$$((aH^{-r})^m)' = -[(aH^{-r})^m, b]$$

и является следствием уравнения $(aH^{-r})' = -[aH^{-r}, b]$, которое эквивалентно первому уравнению (2.4). Ненулевые интегралы уравнения (2.4) определяются формулами

$$I_k = T((aH^{-r})^m + \lambda H^q)^{kp}.$$

При $q = 1$, $m = 1$, $r = p - 1$ уравнение (2.4) совпадает

с уравнением (2.1). При $q = 1$, $m = p - 1$, $r = 1$ уравнение (2.4) имеет вид

$$\dot{a} = (H^{p-1}(a) \dots H(a))a - a(H^{-1}(a) \dots H^{1-p}(a)) - \\ - \left[a, \sum_{k=0}^{p-2} H^k(aH^{-1}(a) \dots H^{-(p-2)}(a)) \right]. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) и (2.2) совпадают, если алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна, и различны в случае некоммутативной алгебры $\mathfrak{A}$.

5) Операторы L и A имеют вид

$$L = \lambda aH^{-r} + H^q, \quad A = cH^{-r-q} + \lambda(aH^{-r})^p$$

при условии (2.7). Справедливо равенство

$$[L, A] = (H^q(c) - c)H^{-r} + \lambda[aH^{-r}, cH^{-r-q}] - \\ - \lambda[(aH^{-r})^p, H^q]. \quad (2.15)$$

Последний коммутатор имеет вид

$$[(aH^{-r})^p, H^q] = \left[aH^{-r}, \sum_{k=0}^{p-1} (aH^{-r})^{p-1-k} H^q (aH^{-r})^k \right].$$

Поэтому разность двух коммутаторов в (2.15) обращается в нуль, если элемент c определен равенством (2.5). В этом случае уравнение Лакса (2.8) эквивалентно первому уравнению (2.5). Ненулевые первые интегралы уравнения (2.5) определяются по формулам

$$I_k = T(\lambda aH^{-r} + H^q)^{kp/2}$$

при условии, что $kp/2$ — целое число. Теорема 1 доказана.

Все уравнения (2.1) — (2.5) имеют вид $\dot{a} = Ba - aC$, где $a, B, C \in \mathfrak{A}$. В случае алгебры матриц $gl(n, R)$ эти уравнения являются примерами $L - A - B$ троек [27, 28]. Согласно теореме 1 эти уравнения допускают представления Лакса в матрицах L размера $n^2 \times n^2$ и имеют наряду с первыми интегралами I_k , указанными в Лемме 1, еще и первые интегралы λ_j — собственные числа матрицы $L(t, \lambda)$. Поэтому число первых интегралов уравнений (2.1) — (2.5) имеет порядок n^2 . В силу наличия спектрального параметра λ в уравнениях Лакса (2.7), уравнения (2.1) — (2.5) интегрируются в тэта-функциях римановых поверхностей, заданных уравнением

$$R(\lambda, w) = \det(L(t, \lambda) - w \cdot 1) = 0.$$

II. Пусть ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ обладает некоторыми дифференцированиями $d_1, d_2: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$,

$$d(k_1 a_1 + k_2 a_2) = k_1 d(a_1) + k_2 d(a_2),$$

$$d(ab) = d(a)b + ad(b),$$

причем $[d_1, d_2] = 0$, $[d_i, H] = 0$. Простейшими примерами дифференцирований являются отображения

$$d_x = ad_x, \quad d_x(a) = xa - ax, \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Теорема 2. Следующие четыре группы уравнений в непрерывной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ допускают представление Лакса (со спектральным параметром) в алгебре линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$:

$$\dot{a} = ba - aH^{-1}(b), \quad d_1(b) = H(a) - a, \quad (2.16)$$

$$\dot{a} = kd_1(a) + pa - aH(p), \quad \dot{p} = H^{-1}(a) - a, \quad (2.17)$$

$$\dot{a} = ab - ba, \quad d_1(b) = d_2(a), \quad (2.18)$$

$$\dot{a} = ab - ba - d_2(c), \quad \dot{c} = cb - bc, \quad d_1(b) = d_2(a). \quad (2.19)$$

Доказательство. 1) Определим линейные операторы

$$L = d_1 + \lambda^{-1}aH^{-1}, \quad A = -b - \lambda H. \quad (2.20)$$

Справедливо равенство

$$[L, A] = -d_1(b) + H(a) - a + \lambda^{-1}(ba - aH^{-1}(b))H^{-1}.$$

Поэтому уравнения (2.16) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.20).

2) Введем линейные операторы

$$L = kd_1 + \lambda aH + \lambda^{-1}H^{-1} + p, \quad A = \lambda aH. \quad (2.21)$$

Справедливо равенство

$$[L, A] = H^{-1}(a) - a - \lambda(kd_1(a) + pa - aH(p))H.$$

Следовательно, уравнения (2.17) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.21).

3) Рассмотрим линейные операторы

$$L = a + \lambda d_1, \quad A = b + \lambda d_2. \quad (2.22)$$

Справедливо равенство

$$[L, A] = ab - ba + \lambda(d_1(b) - d_2(a)) + \lambda^2[d_1, d_2]. \quad (2.23)$$

При условии коммутативности дифференцирований d_1, d_2 уравнения (2.18) в силу (2.23) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.22).

4) Для линейных операторов

$$L = c + \lambda a + \lambda^2 d_1, \quad A = b + \lambda d_2 \quad (2.24)$$

справедливо равенство

$$[L, A] = cb - bc + \lambda(ab - ba - d_2(c)) + \\ + \lambda^2(d_1(b) - d_2(a)) + \lambda^3[d_1, d_2].$$

Поэтому при условии коммутативности операторов d_1, d_2 уравнения (2.19) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.24). Теорема 2 доказана.

III. Пусть $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$ — алгебра матричнозначных функций $a(t, x)$, операторы H и d определены формулами

$$(Ha)(t, x) = a(t, x + c), \quad da(t, x) = \frac{\partial a(t, x)}{\partial x}. \quad (2.25)$$

Из второго уравнения (2.16) в силу (2.25) получаем

$$b(t, x) = \int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi.$$

Поэтому первое уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = \left(\int_x^{x+c} a(t, \xi) d\xi \right) a(t, x) - a(t, x) \left(\int_{x-c}^x a(t, \xi) d\xi \right). \quad (2.26)$$

Таким образом, матричное интегро-дифференциальное уравнение (2.26) допускает представление Лакса (2.7), (2.20), (2.25). В частном случае $n = 1$ уравнение (2.26) переходит в интегро-дифференциальное уравнение, изучавшееся в гл. VI.

Уравнение (2.26) является континуальным пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ матричного уравнения

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = \left(\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} a(t, x + k\varepsilon) \right) a(t, x) - \\ - a(t, x) \left(\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} a(t, x - k\varepsilon) \right), \quad (2.27)$$

где $\varepsilon(p-1) = c$. Уравнение (2.27) относится к типу

(2.1) и допускает представление Лакса с операторами

$$L = \varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon} + P_\varepsilon, \quad A = -\varepsilon \sum_{k=0}^{p-1} a(t, x + k\varepsilon) - P_{p\varepsilon}, \quad (2.28)$$

где $(P_\alpha a)(t, x) = a(t, x + \alpha)$. Поэтому уравнение (2.27) обладает счетным множеством первых интегралов

$$I_n = T(\varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon} + P_\varepsilon)^{np}. \quad (2.29)$$

Континуальные пределы интегралов (2.29) при $p \rightarrow 1 = c/\varepsilon \rightarrow \infty$ определяют первые интегралы уравнения (2.26). Явные формулы для этих интегралов имеют вид

$$I_n = \text{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{x+nc} a(t, x_1) dx_1 \int_{x_1-c}^{x+(n-1)c} a(t, x_2) dx_2 \dots \\ \dots \int_{x_{n-2}-c}^{x+2c} a(t, x_{n-1}) dx_{n-1} \int_{x_{n-1}-c}^{x+c} a(t, x_n) dx_n. \quad (2.30)$$

Формулы (2.30) являются обобщением на матричнозначные функции $a(t, x)$ формул (2.17) гл. VI.

IV. Рассмотрим конкретный вид уравнения (2.17) в коммутативных алгебрах, например, в алгебре функций $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. Первое уравнение (2.17) после подстановки $a = \exp(q - H(q))$ разрешается в виде $p = \dot{q} - kd_1(q)$. Вследствие этого второе уравнение (2.17) принимает вид

$$\ddot{q} - kd_1(\dot{q}) = \exp(H^{-1}(q) - q) - \exp(q - H(q)). \quad (2.31)$$

При $k=0$ уравнение (2.31) является обобщением цепочки Тода в произвольной коммутативной алгебре с автоморфизмом H , которое впервые было указано в работе [49].

Пусть $k \neq 0$, $\mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$, $d_1 = d/dx$, $H(a(t, x)) = a(t, x - kc)$. Тогда уравнение (2.31) принимает вид

$$(q_{tt} - kq_{tx})(t, x) = \exp(q(t, x + kc) - q(t, x)) - \\ - \exp(q(t, x) - q(t, x - kc)).$$

Это уравнение после замены координат

$$\bar{x} = x/k, \quad \bar{t} = t + x/k \quad (2.32)$$

переходит в уравнение

$$-q_{\bar{t}\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}) = \exp(q(\bar{t} + c, \bar{x} + c) - q(\bar{t}, \bar{x})) - \\ - \exp(q(\bar{t}, \bar{x}) - q(\bar{t} - c, \bar{x} - c)). \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) впервые было указано в работе [50].

Это уравнение существенно отличается от уравнения (1.14) гл. VI; оно не эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (1.3) гл. VI.

Пусть $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$, $d_1 = d/dx$, $H(a(t, x, y)) = a(t, x, y - c)$. Тогда уравнение (2.31) после замены координат (2.32) принимает вид

$$-q_{ix}(\bar{t}, \bar{x}, y) = \exp(q(\bar{t}, \bar{x}, y + c) - q(\bar{t}, \bar{x}, y)) - \\ - \exp(q(\bar{t}, \bar{x}, y) - q(\bar{t}, \bar{x}, y - c)). \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) после замены

$$q(\bar{t}, \bar{x}, y) = c^{-1}\varphi(\bar{t}, \bar{x}, y), \quad t = -c^2\bar{t}$$

и перехода к пределу при $c \rightarrow 0$ преобразуется в дифференциальное уравнение

$$\varphi_{ix} = (\exp \varphi_y)_y. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.34) в случае, когда переменная y пробегает счетное множество точек вида nc , где n — целые числа, совпадает с двумеризованной цепочкой Тода [51].

V. Уравнение (2.18) в алгебре матриц $gl(n, \mathbb{R})$ при $d_1 = ad_a$, $d_2 = dd_b$ приводит к уравнению, описывающему известные интегрируемые случаи n -мерных уравнений Эйлера [52]. Аналогично уравнения (2.19) в алгебре $gl(n, \mathbb{R})$ переходят в интегрируемые случаи [26] динамики твердого тела в ньютоновском поле с квадратичным потенциалом.

Если $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных $(n \times n)$ функций от трех переменных t, x, y с дифференцированиями $d_1 = d/dx$ и $d_2 = d/dy$, то из третьего уравнения (2.19) следует существование такой матричной функции $S(t, x, y)$, что $a = S_x$, $b = S_y$. При этом первые два уравнения (2.19) принимают вид

$$S_{xt} = [S_x, S_y] - c_y, \quad c_t = [c, S_y]. \quad (2.36)$$

Следовательно, уравнения (2.36) и их частный случай при $c = 0$ — уравнение $S_{xt} = [S_x, S_y]$ — допускают представление Лакса со спектральным параметром.

Замечание. С каждым из построенных в этом параграфе уравнений связана бесконечная иерархия дифференциальных уравнений, допускающих представление Лакса с тем же оператором L , но с более сложным оператором A , являющимся многочленом Лорана от автоморфизма H .

VI. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна и обладает инволютивным автоморфизмом τ , коммутирующим с автомор-

физмом H , $\tau^2 = \text{id}$. Укажем алгебраические конструкции уравнений, которые в частных случаях переходят в уравнения нелинейной автодуальной сети и дискретное нелинейное уравнение Шрёдингера [53, 54].

Теорема 3. Следующие три группы уравнений в непрерывной ассоциативной коммутативной алгебре $\mathfrak{A}$ допускают представление Лакса (со спектральным параметром) в алгебре линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$:

$$\dot{a} = a\tau(a)(H(a) - H^{-1}(a)), \quad (2.37)$$

$$\dot{a} = a\tau(a)(H^{-1}(b) - b), \quad \dot{b} = b\tau(b)(a - H(a)), \quad (2.38)$$

$$-i\dot{a} = H(a) + H^{-1}(a) - 2a + a\tau(a)(H(a) + H^{-1}(a)). \quad (2.39)$$

Уравнения (2.37) — (2.39) обладают счетным множеством первых интегралов.

В случае (2.39) алгебра $\mathfrak{A}$ является комплексной и $\tau(ia) = -i\tau(a)$.

Доказательство. 1) Из уравнения (2.37) следует уравнение

$$(\tau H^{-1}(a))' = \tau H^{-1}(a) H^{-1}(a) (\tau(a) - \tau H^{-2}(a)). \quad (2.40)$$

Обозначим $a_1 = a\tau H^{-1}(a)$; из уравнений (2.37), (2.40) получаем $\dot{a}_1 = a_1(H(a_1) - H^{-1}(a_1))$. Это уравнение, очевидно, эквивалентно системе Вольтерра и поэтому допускает представление Лакса, например, с операторами (2.10) при $p = 2$.

2) Введем обозначения

$$a_1 = a\tau(a)H^{-1}(b)\tau(b), \quad p_1 = -a\tau(b) - bH\tau(a). \quad (2.41)$$

В силу уравнений (2.38) получаем систему уравнений

$$\dot{a}_1 = a_1(p_1 - H^{-1}(p_1)), \quad \dot{p}_1 = H(a_1) - a_1.$$

Эти уравнения допускают представление Лакса (2.7), (2.21) при $k = 0$.

3) Пусть v , p , b , c , J — матрицы размера 2×2 с элементами из комплексной алгебры $\mathfrak{A}$ следующего вида:

$$v = (1 + H^{-1}(a)\tau H^{-1}(a)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} 0 & i(\tau(a) - \tau H^{-1}(a)) \\ i(a - H^{-1}(a)) & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = i(H^{-1}(a)\tau(a) - \tau H^{-1}(a)a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - J, \quad (2.42)$$

$$J = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -\tau H(a) - \tau H^{-1}(a) \\ H(a) + H^{-1}(a) & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение Лакса (2.7) с операторами L и A вида

$$L = v\lambda^{-1}H^{-1} + p + \lambda H, \quad A = b + c\lambda H + \lambda^2 J H^2 \quad (2.43)$$

эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v} &= vH^{-1}(b) - bv, \quad \dot{p} = pb - bp + vH^{-1}(c) - cH(v), \\ H(b) - b + pc - cH(p) + vH^{-1}(J) - JH^2(v) &= 0, \\ H(c) - c + pJ - JH^2(p) &= 0, \quad H(J) - J = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Дополнительно предположим, что $H(1) = 1$, $H(i) = i$, тогда $H(J) = J$. Непосредственно проверяется, что при условиях (2.42) три последних алгебраических уравнения (2.44) выполнены тождественно. Два дифференциальных уравнения (2.44) при условиях (2.42) являются следствием уравнения (2.39). Поэтому уравнение (2.39) допускает представление Лакса с операторами (2.43).

Указанные выше операторы L и A относятся к классу операторов (1.4), поэтому существование счетного множества первых интегралов $I_n = T(L^n)$ для уравнений (2.37) — (2.39) следует из леммы 1 § 1. Теорема 3 доказана.

VII. Укажем некоторые следствия из теоремы 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — комплексная алгебра и τ — комплексное сопряжение. Пусть

$$a = 1 + \frac{1}{2}(\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2})a_1, \quad \text{где } \tau(a_1) = a_1.$$

Тогда уравнение (2.37) принимает вид

$$\dot{a}_1 = (1 + \alpha a_1 + \beta a_1^2)(H(a_1) - H^{-1}(a_1)). \quad (2.45)$$

После аналогичной подстановки уравнения (2.38) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= (1 + \alpha a_1 + \beta a_1^2)(H^{-1}(b_1) - b_1), \\ \dot{b}_1 &= (1 + \alpha b_1 + \beta b_1^2)(a_1 - H(a_1)). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Уравнения (2.38) инвариантны относительно преобразования дуальности σ :

$$\sigma(a) = a_1 = H^{-1}(b), \quad \sigma(b) = b_1 = a, \quad \sigma^2 = H^{-1}. \quad (2.47)$$

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра функций на дискретном множестве Z , то уравнение (2.46) в случае автоморфизма — сдвига

$(H(a))_k = a_{k+1}$ — переходит в уравнение автодуальной сети [53].

Если множество Z разбито на два дискретных набора точек a_k и b_k и $(\tau(a))_k = b_k$, $(H(a))_k = a_{k+1}$, $(H(b))_k = b_{k+1}$, то уравнение (2.37) переходит в систему двух уравнений

$$\dot{a}_k = a_k b_k (a_{k+1} - a_{k-1}), \quad \dot{b}_k = a_k b_k (b_{k+1} - b_{k-1}).$$

Если множество Z состоит из $2n$ точек и $(\tau(a))_k = a_{k+n}$, то уравнение (2.37) принимает вид

$$\dot{a}_k = a_k a_{k+n} (a_{k+1} - a_{k-1}).$$

Уравнение (2.39) является аналогом дискретного нелинейного уравнения Шрёдингера [54] в произвольной комплексной коммутативной алгебре $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра гладких функций на произвольном многообразии $\mathcal{M}$, $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — сохраняющей меру μ диффеоморфизм и $(H(a))(x) = a(\alpha(x))$, $x \in \mathcal{M}$, то уравнение (2.39) имеет вид

$$-i \frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, \alpha(x)) + a(t, \alpha^{-1}(x)) - 2a(t, x) + \\ + |a(t, x)|^2 (a(t, \alpha(x)) + a(t, \alpha^{-1}(x))) \quad (2.48)$$

и обладает счетным множеством первых интегралов.

VII. Утверждение 1. Дифференциальное уравнение

$$(\dot{a}a^{-1})' = c_1 H^{-1}(a) a^{-1} - aH(a^{-1})H(c_1), \quad \dot{c}_1 = 0, \quad (2.49)$$

определенное на множестве обратимых элементов произвольной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$, допускает эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Операторы $L(t, \lambda)$ и $A(t, \lambda)$ определим формулами

$$L = \lambda aH(a^{-1})H + \lambda^{-1}c_1 H^{-1} + \dot{a}a^{-1}, \quad A = \lambda aH(a^{-1})H. \quad (2.50)$$

Оператор $\dot{L}$ при $c_1 = \text{const}$ имеет вид

$$\dot{L} = \lambda(\dot{a}H(a^{-1}) - aH(a^{-1})H(\dot{a})H(a^{-1}))H + (\dot{a}a^{-1})'. \quad (2.51)$$

Коммутатор операторов L и A определяется формулой

$$[L, A] = \lambda(\dot{a}H(a^{-1}) - aH(a^{-1})H(\dot{a})H(a^{-1}))H + \\ + c_1 H^{-1}(a)a^{-1} - aH(a^{-1})H(c_1). \quad (2.52)$$

Подстановка формул (2.51), (2.52) в уравнение Лакса (2.8) приводит к уравнению (2.49). В силу леммы 1 § 1 уравнение (2.49) обладает счетным набором первых интегралов

$$I_k = T(\lambda a N(a^{-1})N + \lambda^{-1}c_1 N^{-1} + \dot{a}a^{-1})^k. \quad (2.53)$$

Утверждение 1 доказано.

Если алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных функций на множестве целых чисел и $N(a)(k) = a(k+1)$, то уравнение (2.49) совпадает с «некоммутативной цепочкой Тода» [55]. В случае коммутативной алгебры скалярных функций уравнение (2.49) с помощью подстановки $a(t, x) = \exp q(t, x)$ преобразуется в уравнение цепочки Тода (2.31).

В случае алгебры матриц $gl(n, \mathbb{R})$ и внутреннего автоморфизма N : $N(a) = QaQ^{-1}$ уравнение (2.49) принимает вид

$$(\dot{a}a^{-1})' = [c, aQa^{-1}], \quad c = c_1Q^{-1}. \quad (2.54)$$

Первыми интегралами уравнения (2.54) являются собственные числа соответствующего оператора L (2.50).

§ 3. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в алгебрах функций

I. В данном параграфе рассматриваются ассоциативные алгебры функций следующих двух классов. К первому классу относятся алгебры гладких (или непрерывных) функций $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ на произвольном многообразии $\mathcal{M}$ (с поточечными операциями сложения и умножения функций). Ко второму классу относятся алгебры гладких или непрерывных функций $f(x, y)$ на произведении $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, где на многообразии $\mathcal{M}$ задана гладкая мера $\mu(x)$. Сложение функций является поточечным, а умножение определяется формулой

$$f \circ g(x, y) = \int_{\mathcal{M}} f(x, z) g(z, y) d\mu(z). \quad (3.1)$$

Каждой функции $f(x, y)$ поставим в соответствие интегральный оператор F , действующий на функциях $\varphi(x)$ из $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$:

$$(F\varphi)(x) = \int_{\mathcal{M}} f(x, y) \varphi(y) d\mu(y). \quad (3.2)$$

Произведению функций $f \circ g$ соответствует произведение интегральных операторов $F \cdot G$. Поэтому ассоциативные алгебры второго класса будут обозначаться $\text{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Если множество $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_n$ состоит из n точек, то алгебра $\text{Int}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{R})$ совпадает с алгеброй матриц $\text{gl}(n, \mathbb{R})$.

В алгебре $\text{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ естественно определяется структура бесконечномерной алгебры Ли

$$[f, g](x, y) = f \circ g - g \circ f = \int_{\mathcal{M}} (f(x, z)g(z, y) - g(x, z)f(z, y)) d\mu(z). \quad (3.3)$$

Интегральный оператор, соответствующий функции $[f, g]$, является коммутатором интегральных операторов F и G .

II. Пусть $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — диффеоморфизм многообразия $\mathcal{M}$, сохраняющий меру μ . Тогда отображение $H: \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M})$, определенное формулой $(Hf)(x) = f(h(x))$, очевидно, является автоморфизмом алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. В алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ определен функционал

$$t(f) = \int_{\mathcal{M}} f(x) d\mu(x), \quad (3.4)$$

удовлетворяющий свойствам (1.2). Теорема 1 из § 2 полностью применима к алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. Дифференциальные уравнения (2.1) — (2.3) в этой алгебре принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = f(t, x) \left(\sum_{k=1}^{p-1} f(t, h^k(x)) - \sum_{k=1}^{p-1} f(t, h^{-k}(x)) \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = f^c(t, x) \left(\prod_{k=1}^{p-1} f(t, h^k(x)) - \prod_{k=1}^{p-1} f(t, h^{-k}(x)) \right), \quad (3.6)$$

где $c=1$ отвечает уравнению (2.2) и $c=2$ отвечает уравнению (2.3). Операторы Лакса, соответствующие этим уравнениям, имеют вид

$$L_1 = f(t, x)H^{1-p} + \lambda H, \quad L_2 = f(t, x)H + \lambda H^{1-p}, \\ L_3 = f(t, x)(H^{1-p} + \lambda H). \quad (3.7)$$

Уравнения (3.5), (3.6) согласно теореме 1 и лемме 1 имеют счетное множество первых интегралов, определенных формулой

$$I_k = T(L_i^{kp}) = \int_{\mathcal{M}} \varphi_{ik}(x) d\mu(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

где k — произвольное натуральное число и функция $\varphi_{ik}(x)$ является коэффициентом при H^0 в разложении оператора L_i^{kp} по степеням автоморфизма H .

Уравнение (2.17), (2.31) при $k=0$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial t^2} = \exp(q(t, h^{-1}(x)) - q(t, x)) - \\ - \exp(q(t, x) - q(t, h(x))) \quad (3.9)$$

и является обобщением цепочки Toda в алгебре функций $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Оператор Лакса для уравнения (3.9) имеет вид

$$L = \lambda a(t, x) H + \lambda^{-1} H^{-1} + p(t, x), \\ a(t, x) = \exp(q(t, x) - q(t, h(x))), \\ p(t, x) = \frac{\partial q(t, x)}{\partial t}.$$

Уравнение (3.9) обладает счетным множеством первых интегралов, которые определяются формулами

$$I_k = T((\lambda a(t, x) H + \lambda^{-1} H^{-1} + p(t, x))^k).$$

Простейшие из этих интегралов имеют вид

$$I_1 = \int_{\mathcal{M}} p(t, x) d\mu(x), \quad I_2 = \int_{\mathcal{M}} (p^2(t, x) + 2a(t, x)) d\mu(x), \\ I_3 = \int_{\mathcal{M}} (p^3(t, x) + 3p(t, x)a(t, x) + \\ + 3p(t, x)a(t, h^{-1}(x))) d\mu(x).$$

Уравнение (3.9) является следствием принципа наименьшего действия

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} \right)^2 - \right. \\ \left. - \exp(q(t, h^{-1}(x)) - q(t, x)) \right) d\mu(x) dt = 0 \quad (3.10)$$

при произвольных вариациях $\delta q(t, x)$. Интеграл $\frac{1}{2} I_2$ является интегралом энергии, соответствующим вариационному принципу (3.10).

III. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй гладких матричнозначных функций $\mathcal{F}(\mathcal{M}, M(n, \mathbb{R}))$ на произволь-

ном многообразии $\mathcal{M}$ и автоморфизм H определен формулой

$$(H(a))(x) = Q(h(x))a(h(x))Q^{-1}(h(x)),$$

где $Q(x)$ — обратимая матрица, не зависящая от времени. В этом случае уравнение (2.49) принимает вид

$$(a_t(t, x)a^{-1}(t, x))_t = c(x)a(t, h^{-1}(x))Q(x)a^{-1}(t, x) - \\ - a(t, x)Q(h(x))a^{-1}(t, h(x))c(h(x)), \quad (3.11)$$

где $c(x) = c_1(x)Q^{-1}(x)$. Согласно утверждению 1 уравнение (3.11) обладает счетным множеством первых интегралов (2.53). Два простейших интеграла I_k имеют вид

$$I_1 = \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} a_t(t, x)a^{-1}(t, x)d\mu(x),$$

$$I_2 = \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} ((a_t(t, x)a^{-1}(t, x))^2 + \\ + 2a(h^{-1}(x))Q(x)a^{-1}(x)c(x))d\mu(x).$$

Уравнение (3.11) в случае скалярных функций $a(t, x)$ при $cQ = 1$ сводится к уравнению (3.9) с помощью замены $a(t, x) = \exp q(t, x)$.

Укажем некоторые предельные случаи уравнения (3.11). Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ и $h(x) = x + \varepsilon$. Уравнение (3.11) при $Q(x) = k \cdot 1$ представляется в виде

$$(a_t a^{-1})_t = k\varepsilon([a_x a^{-1}, c] - c_x) + \\ + k\varepsilon^2 \left(c a_{xx} a^{-1} - a_x a^{-1} a_{xx} a^{-1} c + a_x a^{-1} c_x \frac{1}{2} c_{xx} \right) + o(\varepsilon^2). \quad (3.12)$$

Рассмотрим два случая.

1) Функция $c(x)$ — произвольная гладкая матрично-значная функция на $\mathbb{R}$. Положим $k = \varepsilon^{-1}$. Уравнение (3.12) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение

$$(a_t a^{-1})_t = [a_x a^{-1}, c] - c_x.$$

2) Функция $c(x) = \mu \cdot 1 = \text{const}$. Положим $k = \varepsilon^{-2}$. Уравнение (3.11) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение

$$(a_t a^{-1})_t = \mu(a_x a^{-1})_x. \quad (3.13)$$

Тип уравнения (3.13) определяется знаком μ . При $\mu = +1$ уравнение (3.13) в новых переменных $\xi = t + x$ и

$\eta = t - x$ принимает вид $(a_{\xi} a^{-1})_{\eta} + (a_{\eta} a^{-1})_{\xi} = 0$, т. е. совпадает с уравнением главного кирального поля на группе Ли $GL(n, \mathbb{R})$. При $\mu = -1$ переход к новым переменным ξ и η сохраняет вид уравнения (3.13).

IV. Рассмотрим в алгебре $\text{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ интегро-дифференциальное уравнение, имеющее вид уравнения Эйлера

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = [f, g] = \int_{\mathcal{M}} (f(t, x, z) g(t, z, y) - g(t, x, z) f(t, z, y)) d\mu(z). \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) всегда имеет бесконечный набор первых интегралов. Действительно, из уравнения (3.14) по индукции нетрудно получить уравнения ($k = 1, 2, \dots$)

$$\frac{\partial f^k(t, x, y)}{\partial t} = [f^k, g], \quad (3.15)$$

где $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_k$ в соответствии со структурой ассоциативной алгебры (3.1). Из уравнений (3.15), очевидно, следует, что функционалы

$$I_k = \int_{\mathcal{M}} f^k(t, x, x) d\mu(x) \quad (3.16)$$

являются первыми интегралами уравнения (3.14).

В дальнейших построениях существенно используется δ -функция $\delta(x - y)$, определенная условиями [48]

$$\begin{aligned} (\delta \circ f)(x, y) &= \int_{\mathcal{M}} \delta(x - z) f(z, y) d\mu(z) = f(x, y), \\ (f \circ \delta)(x, y) &= \int_{\mathcal{M}} f(x, z) \delta(z - y) d\mu(z) = f(x, y). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для обобщенной функции $a(x, y) = \alpha(x) \delta(x - y)$ в силу (3.17) имеем

$$(a \circ f)(x, y) = \int_{\mathcal{M}} \alpha(x) \delta(x - z) f(z, y) d\mu(z) = \alpha(x) f(x, y), \quad (3.18)$$

$$(f \circ a)(x, y) = \int_{\mathcal{M}} f(x, z) \alpha(z) \delta(z - y) d\mu(z) = f(x, y) \alpha(y).$$

Утверждение 2. Интегро-дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = (\alpha(y) - \alpha(x)) \int_{\mathcal{M}} f(t, x, z) f(t, z, y) d\mu(z), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} &= \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\beta(t, y) - \beta(t, z)}{\alpha(y) - \alpha(z)} - \frac{\beta(t, x) - \beta(t, z)}{\alpha(x) - \alpha(z)} \right) f(t, x, z) f(t, z, y) d\mu(z) \end{aligned}$$

имеют дополнительный к набору (3.16) бесконечный набор первых интегралов $\alpha(x)$ и $\beta(t, x)$ — произвольные функции на множестве $\mathcal{M}$ из рассматриваемого функционального пространства).

Действительно, определим две обобщенные функции $a(x, y) = \alpha(x)\delta(x - y)$ и $b(t, x, y) = \beta(t, x)\delta(x - y)$. По определению имеем

$$\begin{aligned} (a \circ b)(t, x, y) &= \int_{\mathcal{M}} \alpha(x) \delta(x - z) \beta(t, z) \delta(z - y) d\mu(z) = \\ &= \alpha(x) \beta(t, y) \delta(x - y) = \alpha(x) \beta(t, x) \delta(x - y). \end{aligned}$$

Очевидно, $a \circ b = b \circ a$ и $[a, b] = 0$. Рассмотрим в алгебре $\text{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ следующее дифференциальное уравнение с произвольным спектральным параметром E :

$$(f + aE)' = [f + aE, g + bE]. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) эквивалентно уравнению (3.14) $f' = [f, g]$ и двум условиям (коэффициенты в уравнении (3.20) при E^1 и E^2):

$$[f, b] + [a, g] = 0, \quad [a, b] = 0. \quad (3.21)$$

Второе условие (3.21), как показано выше, выполнено. Первое условие (3.21) в силу формул (3.18) эквивалентно соотношению

$$g(t, x, y) = \frac{\beta(t, x) - \beta(t, y)}{\alpha(x) - \alpha(y)} f(t, x, y). \quad (3.22)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.14), приходим ко второму уравнению (3.19). Первое уравнение (3.19) является специальным случаем второго при $\beta(t, x) = \alpha^2(x)$. Уравнения (3.19) имеют инвариантное подмногообразие кососимметрических функций $f(t, x, y) = -f(t, y, x)$.

Проведенные рассуждения доказывают, что уравнения (3.19) эквивалентны уравнению (3.20) со спектральным параметром E . Поэтому уравнения (3.19) имеют бесконечный набор дополнительных первых интегралов $J_{N,h}$, являющихся коэффициентами при E^h в разложении многочлена

$$J_N = \int_{\mathcal{M}} (f + aE)^N(t, x, x) d\mu(x), \quad J_N = \sum_{h=0}^N J_{N,h} E^h \quad (3.23)$$

по степеням спектрального параметра E . При вычислении интегралов (3.23) и общих интегралов вида (3.16) используется определение

$$\int_{\mathcal{M}} f(t, x, y) \delta(x, y)|_{x=y} d\mu(x) = \int_{\mathcal{M}} f(t, x, x) d\mu(x).$$

Простейшие из интегралов $J_{N,h}$ имеют следующий вид:

$$J_{N,1} = N \int_{\mathcal{M}} \alpha(x_1) f(t, x_1, x_2) f(t, x_2, x_3) \dots \\ \dots f(t, x_{N-1}, x_1) dx_1 \dots dx_{N-1},$$

$$J_{N,2} = N \int_{\mathcal{M}} \alpha^2(x_1) f(t, x_1, x_2) f(t, x_2, x_3) \dots \\ \dots f(t, x_{N-2}, x_1) dx_1 \dots dx_{N-2} + \int_{\mathcal{M}} \left[\sum_{k,n}^{N-2} f(t, x_1, x_2) \dots \right. \\ \left. \dots f(t, x_{k-1}, x_k) \alpha(x_k) f(t, x_k, x_{k-1}) \dots f(t, x_{m-1}, x_m) \times \right. \\ \left. \times \alpha(x_m) f(t, x_m, x_{m+1}) \dots f(t, x_{N-2}, x_1) \right] dx_1 \dots dx_{N-2}.$$

Интегро-дифференциальные уравнения вида (3.19) могут иметь применения в теории уравнения Больцмана и теории общих кинетических уравнений.

Наряду с уравнением (3.20) рассмотрим также в алгебре $\text{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ уравнение $(aE^2 + fE + h)' = [aE^2 + fE + h, g + bE]$, которое при выполнении условий (3.21), (3.22) эквивалентно двум интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\beta(t, y) - \beta(t, z)}{\alpha(y) - \alpha(z)} - \frac{\beta(t, x) - \beta(t, z)}{\alpha(x) - \alpha(z)} \right) \times \\ \times f(t, x, z) f(t, z, y) d\mu(z) + h(t, x, y) (\beta(t, y) - \beta(t, x)),$$

$$\frac{\partial h(t, x, y)}{\partial t} = \int_{\mathcal{M}} \left[h(t, x, z) \frac{\beta(t, z) - \beta(t, y)}{\alpha(z) - \alpha(y)} f(t, z, y) - \right. \\ \left. - \frac{\beta(t, x) - \beta(t, z)}{\alpha(x) - \alpha(z)} f(t, x, z) h(t, z, y) \right] d\mu(z).$$

Полученная система интегро-дифференциальных уравнений также имеет бесконечный набор первых интегралов J_{Nh} типа (3.23). Рассматривая уравнение $(aE^2 + fE + h) = [aE^2 + fE + h, f + aE]$, приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = (\alpha(y) - \alpha(x)) h(t, x, y), \\ \frac{\partial h(t, x, y)}{\partial t} = \int_{\mathcal{M}} (h(t, x, z) f(t, z, y) - \\ - f(t, x, z) h(t, z, y)) d\mu(z),$$

которая, очевидно, эквивалентна одному интегро-дифференциальному уравнению с производными второго порядка по t и также обладает бесконечным набором первых интегралов типа J_{Nh} .

§ 4. Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения

I. В данном параграфе предлагается общая конструкция дифференциальных уравнений в произвольной непрерывной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$, которые допускают эквивалентное представление Лакса в пространстве линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$. Пусть G, H — два произвольных коммутирующих автоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. (Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах.) *Дифференциальное уравнение в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ вида*

$$\frac{da_1}{dt} = a_1 G(b) - b a_1, \quad (4.1)$$

где элементы a_1 и b алгебры $\mathfrak{A}$ связаны соотношением

$$H(b) - b = H G^{-1}(a_1) - a_1, \quad (4.2)$$

допускает эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Определим следующие линейные операторы L и Λ , действующие на ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$:

$$L(t, \lambda) = a_1(t) G + \lambda H, \quad \Lambda(t, \lambda) = b(t) + \lambda H G^{-1}, \quad (4.3)$$

где λ — произвольный спектральный параметр. Уравнение Лакса

$$\dot{L} = LA - AL \quad (4.4)$$

с операторами (4.3) эквивалентно следующей системе уравнений, которые являются коэффициентами при степенях параметра λ :

$$\lambda^2: H^2 G^{-1} - HG^{-1}H = 0,$$

$$\lambda^1: H(b)H - bH + a_1 G H G^{-1} - H G^{-1}(a_1)H = 0, \quad (4.5)$$

$$\lambda^0: \dot{a}_1 = a_1 G(b) - b a_1.$$

В силу коммутативности автоморфизмов G и H первое уравнение (4.5) тождественно справедливо. Второе уравнение (4.5) в силу $G H G^{-1} = H$ сводится к уравнению (4.2), третье уравнение (4.5) совпадает с уравнением (4.1). Поэтому уравнение (4.1), (4.2) эквивалентно уравнению Лакса со спектральным параметром (4.4).

Из уравнения (4.4), как показано в § 2, следует, что функции $I_k(\lambda) = T(L(t, \lambda)^k)$ являются первыми интегралами дифференциального уравнения (4.1), (4.2). В случае конечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ первыми интегралами являются также функции $J_k(\lambda) = \text{Tr}(L(t, \lambda)^k)$. Теорема доказана.

Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах имеет многочисленные применения, которые возникают при конкретном выборе ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$ и автоморфизмов G и H . Перечислим важнейшие из этих применений.

II. Пусть $G = H^{1-p}$, где p — целое число. Тогда уравнение (4.2) принимает вид

$$H(b) - b = H^p(a_1) - a_1. \quad (4.6)$$

При $p > 0$ решение уравнения (4.6) имеет вид

$$b = \sum_{k=0}^{p-1} H^k(a_1). \quad (4.7)$$

При $p < 0$ решение уравнения (4.6) определяется формулой

$$b = - \sum_{k=1}^{-p} H^{-k}(a_1). \quad (4.8)$$

Дифференциальное уравнение (4.1) после подстановки

формулы (4.7), (4.8) принимает вид

$$p > 0: \dot{a}_1 = a_1 \left(\sum_{k=1}^{p-1} H^{-k}(a_1) \right) - \left(\sum_{k=1}^{p-1} H^k(a_1) \right) a_1, \quad (4.9)$$

$$p < 0: \dot{a}_1 = -a_1 \left(\sum_{k=1}^{-p} H^k(a_1) \right) + \left(\sum_{k=1}^{-p} H^{-k}(a_1) \right) a_1. \quad (4.10)$$

Полученные уравнения (4.9), (4.10), очевидно, переходят одно в другое после замены H на H^{-1} и замены $p-1$ на $-p$. Поэтому достаточно рассматривать только уравнение (4.9). В частном случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй функции на множестве целых чисел $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, оператор H является сдвигом на 1: $H(a(t, k)) = a(t, k+1)$ и целое число $p=2$, уравнение (4.9) переходит в систему Вольтерра

$$\dot{a}_i = a_i(a_{i+1} - a_{i-1}). \quad (4.11)$$

При произвольном натуральном $p > 2$ уравнение (4.9) в алгебре $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ принимает вид

$$\dot{a}_i = a_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right). \quad (4.12)$$

Системы (4.12) подробно изучались в гл. V.

III. Пусть ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй комплексных матриц $gl(n, \mathbb{C})$ и автоморфизмы H и G являются внутренними:

$$H(x) = \alpha x \alpha^{-1}, \quad G(x) = \beta_1^{-1} x \beta_1, \quad (4.13)$$

где α и β_1 — некоторые обратимые матрицы. Условие коммутативности $GH = HG$ принимает вид

$$\beta_1^{-1} \alpha x \alpha^{-1} \beta_1 = \alpha \beta_1^{-1} x \beta_1 \alpha^{-1}. \quad (4.14)$$

Обозначим $\alpha^{-1} \beta_1 \alpha \beta_1^{-1} = \mu$, тогда условие (4.14) имеет вид $\mu x \mu^{-1} = x$, что при произвольной матрице x возможно лишь, если матрица μ является скалярной: $\mu_{ij} = m \delta_{ij}$. Вычисляя определитель матрицы $\mu = \alpha^{-1} \beta_1 \alpha \beta_1^{-1}$, находим, что $m^n = 1$. Таким образом, условие коммутативности двух автоморфизмов (4.13) сводится к условию

$$\alpha \beta_1^{-1} = m \beta_1^{-1} \alpha, \quad m^n = 1. \quad (4.15)$$

Уравнения (4.1), (4.2) при условиях (4.13) принимают вид

$$\dot{a}_1 = a_1 \beta_1^{-1} b \beta_1 - b a_1, \quad a b \alpha^{-1} - b = \alpha \beta_1 a_1 \beta_1^{-1} \alpha^{-1} - a_1. \quad (4.16)$$

Введем обозначения $a = a_1 \beta_1^{-1}$, $\beta = \alpha \beta_1$. Уравнения (4.16) после умножения первого уравнения справа на β_1^{-1} , а второго уравнения справа на α принимают вид

$$\dot{a} = [a, b], \quad \alpha b - b\alpha = \alpha \beta_1 a - a \beta_1 \alpha. \quad (4.17)$$

Из равенства (4.15) следуют равенства

$$\beta_1 \alpha = m \alpha \beta_1, \quad \alpha \beta = m^{-1} \beta \alpha. \quad (4.18)$$

Поэтому уравнения (4.17) принимают вид

$$\dot{a} = [a, b], \quad [\alpha, b] = \beta a - m \alpha \beta. \quad (4.19)$$

Согласно проведенному выводу уравнения (4.19) при условии, что матрицы α , β удовлетворяют соотношению (4.18): $\alpha \beta = m^{-1} \beta \alpha$, $m^n = 1$, эквивалентны уравнению Лакса со спектральным параметром (4.4), (4.3), (4.13).

Уравнения (4.19) принимают простейший вид при $m = 1$:

$$\dot{a} = [a, b], \quad [\alpha, b] = [\beta, a], \quad [\alpha, \beta] = 0. \quad (4.20)$$

В этом случае, как показано впервые в работе [52], уравнения $\dot{a} = [a, b]$ допускают представление Лакса со спектральным параметром вида

$$(a + \lambda \alpha)' = [a + \lambda \alpha, b + \lambda \beta]. \quad (4.21)$$

Выше указано еще одно представление Лакса со спектральным параметром для уравнений (4.20) — в пространстве линейных операторов над матричной алгеброй $gl(n, \mathbb{C})$.

Укажем явный вид связи матриц b и a в силу соотношений (4.19) при $m \neq 1$. Пусть матрица α диагональна с элементами α_{kk} , матрица β имеет в каждой строке и каждом столбце только один ненулевой элемент $\beta_{k,k+1}$. Тогда соотношение (4.18) сводится к системе уравнений

$$\alpha_{kk} \beta_{k,k+1} = m^{-1} \beta_{k,k+1} \alpha_{k+1,k+1}.$$

Эти уравнения тождественно справедливы при произвольных $\beta_{k,k+1}$ и $\alpha_{kk} = m^k$, $m^n = 1$. Поэтому уравнения (4.19) принимают вид

$$\dot{a} = [a, b], \quad b_{kj} = (m^k - m^j)^{-1} (\beta_{k,k+1} a_{k+1,j} - m a_{k,j-1} \beta_{j-1,j}). \quad (4.22)$$

Согласно проведенному выводу уравнения (4.22) при произвольных числах $\beta_{k,k+1}$ и произвольном m — примитивном корне n -й степени из 1 ($m^k \neq m^j$ при $k \neq j \leq n$) —

допускают представление Лакса со спектральным параметром вида (4.4), (4.3), (4.13) и поэтому обладают большим набором дополнительных первых интегралов. Уравнения (4.22), очевидно, имеют квадратичную нелинейность.

IV. Разберем подробнее специальный случай $m = -1$. При этом необходимо $n = 2k$, так как $m^n = 1$. Используем стандартное обозначение для антикоммутатора $\{x, y\} = xy + yx$. Уравнения (4.19) при $m = -1$ принимают вид

$$\dot{a} = [a, b], \quad [\alpha, b] = \{\beta, a\}, \quad \{\alpha, \beta\} = 0. \quad (4.23)$$

Уравнения (4.23) существенно отличаются от уравнений (4.20) [52] и являются новыми условиями интегрируемости уравнения $\dot{a} = [a, b]$ в пространстве матриц.

Покажем, что уравнения (4.23) так же, как и уравнения (4.20), имеют смысл и в вещественном случае (в отличие от общих уравнений (4.22)), причем дифференциальное уравнение (4.23) определено в алгебре кососимметрических матриц $so(2n, \mathbb{R})$. Пусть матрицы a, b, α кососимметрические и разбиты на двумерные блоки, которые являются матрицами размера 2×2 и обозначаются $a_{ij}, b_{ij}, \alpha_{ij}$. Матрица β является диагональной и также разбита на двумерные блоки. При этом в матрицах α и β отличны от нуля только диагональные блоки, которые имеют вид

$$\alpha_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{ii} = \begin{pmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & -\beta_i \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

В этом случае соотношение $\{\alpha, \beta\} = 0$ выполнено тождественно при любых α_i, β_i . Соотношение $[\alpha, b] = \{\beta, a\}$ является равенством двух кососимметрических матриц, причем в этих матрицах все диагональные двумерные блоки тождественно равны нулю. Для недиагональных двумерных блоков получаем уравнения

$$\alpha_{ii} b_{ij} - b_{ij} \alpha_{jj} = \beta_{ii} a_{ij} + a_{ij} \beta_{jj}. \quad (4.25)$$

Введем обозначения для матричных элементов двумерных блоков

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} X_{ij} & Z_{ij} \\ U_{ij} & Y_{ij} \end{pmatrix}, \quad b_{ij} = \begin{pmatrix} x_{ij} & z_{ij} \\ u_{ij} & y_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Матричное уравнение (4.25), (4.24) распадается на две

линейные системы из двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_i x_{ij} - \alpha_j y_{ij} &= -(\beta_i - \beta_j) U_{ij}, \\ \alpha_j x_{ij} - \alpha_i y_{ij} &= (\beta_i - \beta_j) Z_{ij}, \\ \alpha_i u_{ij} + \alpha_j z_{ij} &= -(\beta_i + \beta_j) X_{ij}, \\ \alpha_j u_{ij} + \alpha_i z_{ij} &= -(\beta_i + \beta_j) Y_{ij}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Решения этих уравнений имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned}x_{ij} &= -\frac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} (\alpha_i U_{ij} + \alpha_j Z_{ij}), \\ y_{ij} &= -\frac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} (\alpha_j U_{ij} + \alpha_i Z_{ij}), \\ z_{ij} &= \frac{\beta_i + \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} (\alpha_j X_{ij} - \alpha_i Y_{ij}), \\ u_{ij} &= -\frac{\beta_i + \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} (\alpha_i X_{ij} - \alpha_j Y_{ij}).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Нетрудно проверить, что если матрица a была кососимметрической, то матрица b , определенная формулами (4.26), (4.28), также является кососимметрической и поэтому уравнение $\dot{a} = [a, b]$ определено в алгебре Ли $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{R})$. Это уравнение не является гамильтоновым в стандартной симплектической структуре, так как линейное отображение $a \rightarrow b$, определенное формулами (4.28), не является самосопряженным относительно метрики Киллинга — Картана в алгебре Ли $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{R})$.

V. Укажем вторую конструкцию дифференциальных уравнений в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$, связанную с коммутирующими автоморфизмами G и H .

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ вида*

$$\frac{da}{dt} = H(b) - b + aG(\beta) - \beta a,\tag{4.29}$$

где элементы $a(t)$, $b(t)$ и $\beta(t)$ алгебры $\mathfrak{A}$ связаны соотношениями

$$aG(b) = bGH^{-1}(a), \quad H(\beta) = \beta,\tag{4.30}$$

допускает эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Определим линейные операторы L и A формулами

$$L = aG + \lambda H, \quad A = \lambda^{-1} bGH^{-1} + \beta.\tag{4.31}$$

Уравнение Лакса $\dot{L} = [L, A]$, очевидно, эквивалентно уравнениям (4.29), (4.30).

Укажем применения теоремы 2. Пусть автоморфизм $H = G^{1-p}$, $p \geq 2$, $\beta = 0$. Тогда алгебраическое уравнение (4.30) принимает вид $aG(b) = bG^p(a)$ и имеет решение

$$b = aG(a) \dots G^{p-1}(a). \quad (4.32)$$

Дифференциальное уравнение (4.29) после подстановки формулы (4.32) переходит в уравнение

$$\frac{da}{dt} = G^{1-p}(a) G^{2-p}(a) \dots G^{-1}(a) a - aG(a) \dots G^{p-1}(a). \quad (4.33)$$

Таким образом, уравнение (4.33) в произвольной ассоциативной алгебре допускает представление Лакса. Уравнение (4.33) в алгебрах функций на многообразиях и на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ исследовалось в § 3 и в гл. V.

Конструкция теоремы 2 с автоморфизмами G и H вида $G(x) = x$, $H(x) = \alpha x \alpha^{-1}$, $\alpha \beta = \beta \alpha$, где α — постоянный обратимый элемент алгебры $\mathfrak{A}$, приводит к уравнению

$$\frac{da}{dt} = [P(a), \alpha] + [a, \beta]. \quad (4.34)$$

Здесь $P(a)$ — произвольный многочлен от элемента a . При этом операторы L и A имеют вид

$$L = a + \lambda H, \quad A = -\lambda^{-1} P(a) \alpha H^{-1} + \beta.$$

Уравнение (4.34) допускает также представление Лакса в самой алгебре $\mathfrak{A}$ с операторами $L_1 = a + \lambda \alpha$, $A_1 = -\lambda^{-1} P(a) + \beta$ и имеет поэтому большой набор первых интегралов. В частном случае $P(a) = a^2$, $\beta = 0$ уравнение (4.34) переходит в интегрируемый случай работы [52].

З а м е ч а н и е. Формулировки теорем 1 и 2 можно несколько расширить, рассматривая вместо операторов (4.3) и (4.31) соответственно операторы вида

$$L = aG + \lambda d_1 H, \quad A = A_1 = b + \lambda d_2 H G^{-1}, \\ A = A_2 = \lambda^{-1} b G H^{-1} + \beta,$$

где d_1 — постоянный элемент алгебры $\mathfrak{A}$. Однако такое расширение во многих случаях приводит к дифференциальным уравнениям, эквивалентным случаю $d_1 = 1$.

§ 5. Применения к уравнениям Эйлера в прямой сумме алгебр Ли $gl(n, \mathbb{R})$ и $so(n, \mathbb{R})$

I. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных функций на множестве целых чисел $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, gl(n, \mathbb{R}))$. Автоморфизмы G и H определим формулами

$$Gf(k) = \beta(k)^{-1}f(k)\beta(k),$$

$$Hf(k) = \alpha(k+1)f(k+1)\alpha(k+1)^{-1}. \quad (5.1)$$

Обратимые матрицы α_k, β_k определены с точностью до произвольного скалярного множителя. Условие коммутативности $GH = HG$ принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)\beta^{-1}(k+1)f(k+1)\beta(k+1)\alpha^{-1}(k+1) = \\ = \beta(k)^{-1}\alpha(k+1)f(k+1)\alpha(k+1)^{-1}\beta(k). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отсюда находим соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)^{-1}\beta(k)\alpha(k+1)\beta(k+1)^{-1} &= \mu(k), \\ \beta(k+1)^{-1} &= \mu(k)\alpha(k+1)^{-1}\beta(k)^{-1}\alpha(k+1), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\mu(k)$ — произвольная скалярная матрица.

Уравнения (4.1), (4.2) принимают вид

$$\dot{a}_1(k) = a_1(k)\beta(k)^{-1}b(k)\beta(k) - b(k)a_1(k), \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)b(k+1)\alpha(k+1)^{-1} - b(k) = \\ = \alpha(k+1)\beta(k+1)a_1(k+1)\beta(k+1)^{-1} \times \\ \times \alpha(k+1)^{-1} - a_1(k). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Введем обозначения $a(k) = a_1(k)\beta(k)^{-1}$. Уравнение (5.4) после умножения справа на $\beta(k)^{-1}$ принимает вид

$$\dot{a}(k) = [a(k), b(k)]. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.5) после умножения справа на $\alpha(k+1)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)b(k+1) - b(k)\alpha(k+1) = \\ = \alpha(k+1)\beta(k+1)a(k+1) - a(k)\beta(k)\alpha(k+1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Это уравнение после подстановки формул (5.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)b(k+1) - b(k)\alpha(k+1) = \\ = \mu(k)^{-1}\beta(k)\alpha(k+1)a(k+1) - \\ - a(k)\beta(k)\alpha(k+1). \end{aligned} \quad (5.8)$$

В периодическом случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных функций на конечном множестве точек $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_N, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$, соотношения (5.3) приводят к условиям

$$\alpha(k+N)\alpha(k+N-1)\dots\alpha(k+1)\beta(k)^{-1} = \mu\beta(k)^{-1}\alpha(k+1)\dots\alpha(k+N), \quad (5.9)$$

где $\mu = \mu(1)\mu(2)\dots\mu(N)$. Вычисляя определитель обеих частей равенства (5.9), находим $\mu^n = 1$. Соотношения (5.9) при $\mu \neq 1$, $\mu^n = 1$ можно разрешить аналогично п. III и п. IV предыдущего параграфа. В дальнейшем предполагается, что $\mu = 1$; тогда можно считать, что все $\mu(k) = 1$ (так как $\beta(k)$ определены с точностью до произвольного множителя). Без ограничения общности можно считать, что все матрицы $\alpha(k)$ являются диагональными. Тогда в случае общих диагональных матриц $\alpha(k)$ условие (5.9) при $\mu = 1$ означает, что матрица $\beta(k)$ коммутирует с диагональной матрицей $\alpha(k+1)\dots\alpha(k+N)$ общего вида, поэтому матрица $\beta(k)$ также является диагональной. Тогда из условий (5.3) следует, что $\beta(k) = \beta(j) = \beta$, где β — произвольная диагональная матрица.

II. Проведенные выше рассуждения показывают, что случай произвольных диагональных матриц $\alpha(1), \dots, \alpha(N)$ и $\beta(k) = \beta$, $\mu(k) = 1$ является достаточно общим в рассматриваемой конструкции. Обозначим $\alpha_i(k) = \alpha_{ii}(k)$, $\beta_i = \beta_{ii}$. Уравнения (5.8) при $\mu(k) = 1$, $\beta(k) = \beta$ принимают вид

$$\alpha_i(k+1)b_{ij}(k+1) - \alpha_j(k+1)b_{ij}(k) = \beta_i\alpha_i(k+1)a_{ij}(k+1) - \beta_j\alpha_j(k+1)a_{ij}(k). \quad (5.10)$$

Система (5.10), очевидно, распадается на n^2 линейных систем из N уравнений, связывающих элементы $a_{ij}(k)$, $b_{ij}(k)$ с постоянными i, j и переменным k . Уравнения (5.10) для диагональных элементов имеют вид

$$b_{ii}(k+1) - b_{ii}(k) = \beta_i(a_{ii}(k+1) - a_{ii}(k))$$

и разрешаются в виде

$$b_{ii}(k) = \beta_i a_{ii}(k) + c_i,$$

где c_i — произвольные постоянные. Обозначим

$$\pi(\alpha_i) = \prod_{r=1}^N \alpha_i(r). \quad (5.11)$$

Необходимым условием разрешимости системы (5.10) для недиагональных элементов является условие $\pi(\alpha_i) \neq \pi(\alpha_j)$. Решение определяется следующими формулами:

$$b_{ij}(k) = a_{ij}(k) \frac{\beta_i \pi(\alpha_i) - \beta_j \pi(\alpha_j)}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} + \\ + \frac{(\beta_i - \beta_j) \pi(\alpha_i)}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \frac{\prod_{r=0}^{s-1} \alpha_j(k-r)}{\prod_{r=0}^{s-1} \alpha_i(k-r)}, \quad (5.12)$$

которые легко проверяются прямой подстановкой в уравнения (5.10). Формулы (5.12) зависят от $(N+1)$ -й произвольной диагональной матрицы $\alpha(1), \dots, \alpha(N), \beta$.

Конструкция динамической системы (5.6), (5.12) является весьма общей и содержит в виде специальных случаев интегрируемые системы, указанные в работе [52] ($N=1$), в работе [56] ($N=2$ и $\alpha(1)=\alpha(2)$), в работе [57] ($\alpha(1)=\alpha(2)=\dots=\alpha(N)=\alpha$). В последнем случае формулы (5.12) принимают вид

$$b_{ij}(k) = a_{ij}(k) \frac{\beta_i \alpha_i^N - \beta_j \alpha_j^N}{\alpha_i^N - \alpha_j^N} + \\ + \frac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_i^N - \alpha_j^N} \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \alpha_i^{N-s} \alpha_j^s. \quad (5.13)$$

Формулы (5.13) после подстановки $\beta_i = b_i \alpha_i^{-1}$ совпадают с формулами (2.11), (2.12) работы [57].

III. Система уравнений (5.6), (5.12) определена в прямой сумме N алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Согласно проведенному выводу эта система допускает представление Лакса со спектральным параметром в пространстве линейных операторов над алгеброй $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_N, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$, имеющей размерность $n^2 N$. При этом в пространстве матриц размера $n^2 N \times n^2 N$ представление Лакса (4.3), (4.4) относится к классу уравнений, исследованному в работе [58]. Поэтому согласно [58] уравнения (5.6), (5.12) интегрируются в тэта-функциях римановой поверхности

$$R(\lambda, w) = \det(a_1(t)G + \lambda H - w \cdot 1) = 0.$$

Покажем, что линейный оператор, определенный формулами (5.12) в алгебре Ли $\mathfrak{A} = \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, является

самосопряженным относительно скалярного произведения

$$(x, y) = \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n x_{ij}(k) y_{ji}(k). \quad (5.14)$$

Первое слагаемое формулы (5.12), очевидно, определяет самосопряженный оператор. Второе слагаемое определяет оператор

$$b = Aa, \quad b_{ij}(k) = \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \prod_{i=0}^{s-1} \alpha_j(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_i(k-r), \quad (5.15)$$

где $c_{ij} = (\beta_i - \beta_j) (\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j))^{-1}$. Рассмотрим два скалярных произведения

$$(x, Ay) = \sum_{i,j,k,s} x_{ij}(k) c_{ji} y_{ji}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_i(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_j(k-r), \quad (5.16)$$

$$(Ax, y) = \sum_{i,j,k,s} c_{ij} x_{ij}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_j(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_i(k-r) y_{ji}(k). \quad (5.17)$$

Сделаем в формуле (5.16) замену $s = N - s_1$, $s_1 = 1, \dots, N-1$, а в формуле (5.17) сделаем замену $k = k_1 + s$ и воспользуемся условием периодичности $z(k+N) = z(k)$; получим

$$(x, Ay) = \sum_{i,j,k,s} x_{ij}(k) c_{ji} y_{ji}(k+s_1) \times \\ \times \prod_{r=0}^{N-s_1-1} \alpha_i(k-r) \prod_{r=N-s_1}^{N-1} \alpha_j(k-r), \quad (5.18)$$

$$(Ax, y) = \sum_{i,j,k_1,s} x_{ij}(k_1) c_{ij} y_{ji}(k_1+s) \times \\ \times \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_i(k_1+s-r) \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_j(k_1+s-r).$$

В силу условия периодичности для $\alpha_j(k)$ и симметрии $c_{ij} = c_{ji}$ два выражения (5.18) совпадают. Следовательно, справедливо равенство

$$(x, Ay) = (Ax, y), \quad (5.19)$$

т. е. оператор A является самосопряженным относительно скалярного произведения (5.14). Поэтому уравнения (5.6), (5.12) являются уравнениями Эйлера в прямой сумме N алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и гамильтоновы на орбитах

присоединенного представления с гамильтонианом

$$H(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} a_{ij}(k) a_{ji}(k) \frac{\beta_i \pi(\alpha_i) - \beta_j \pi(\alpha_j)}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j,h,s} a_{ij}(k) \frac{\beta_i - \beta_j}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} a_{ji}(k-s) \times \\ \times \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_i(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_j(k-r). \quad (5.20)$$

IV. Коэффициенты при $a_{ij}(k-s)$ в формулах (5.12) являются симметричными относительно i, j при $N=2$ и $\alpha(1)=\alpha(2)$. В этом случае уравнения редуцируются на алгебру Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ [56]. В общем случае $N > 2$ коэффициенты при $a_{ij}(k-s)$, вообще говоря, не симметричны относительно i, j и поэтому уравнения (5.6), (5.12) не редуцируются на прямую сумму алгебр Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$. Однако в некоторых предельных случаях такая симметрия имеет место и соответствующая редукция возможна. Сделаем следующие подстановки:

$$\alpha_i(k) = \sigma_i(k) + \varepsilon \sigma_i(k) \zeta_i(k), \quad \sigma_i^2(k) = 1, \quad \beta_i = \beta + \varepsilon \lambda_i, \quad (5.21)$$

где $|\varepsilon| \ll 1$. Справедливы формулы

$$\pi(\alpha_i) = \pi(\sigma_i) + \varepsilon \pi(\sigma_i) \rho_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \rho_i = \zeta_i(1) + \dots + \zeta_i(N).$$

Предположим дополнительно, что $\pi(\sigma_i) = \pi(\sigma_j)$. Формулы (5.12) после подстановки (5.21) и перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ принимают вид

$$b_{ij}(k) = a_{ij}(k) \left(\beta + \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\rho_i - \rho_j} \right) + \\ + \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\rho_i - \rho_j} \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \sigma_i^{-1}(k-r) \sigma_j(k-r). \quad (5.22)$$

Коэффициент β не влияет на уравнения (5.6). Поэтому при условиях $\sigma_i(k) = \pm 1$ и $\pi(\sigma_i) = \pi(\sigma_j)$ формулы (5.22) принимают эквивалентный вид

$$b_{ij}(k) = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\rho_i - \rho_j} \sum_{s=1}^N a_{ij}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \sigma_i(k-r) \sigma_j(k-r). \quad (5.23)$$

Здесь коэффициенты при $a_{ij}(k-s)$, очевидно, симметричны относительно i, j . Поэтому соответствующие урав-

нения (5.6) допускают редукцию в прямую сумму N алгебр Ли $so(n, \mathbb{R})$. В пункте III показано, что общее отображение (5.12) является симметрическим относительно скалярного произведения (5.14). Поэтому линейное отображение (5.23), являющееся предельным случаем отображения (5.12), также является самосопряженным.

Таким образом, уравнения (5.6), (5.23) при условиях $\sigma_i(k) = \pm 1$, $\pi(\sigma_i) = \pi(\sigma_j)$ являются уравнениями Эйлера в прямой сумме N алгебр Ли $so(n, \mathbb{R})$ и гамильтоновы на орбитах присоединенного представления в стандартной симплектической структуре. Эти уравнения являются предельным случаем уравнений (5.6), (5.12), допускающих представление Лакса со спектральным параметром (5.3), (5.4), и поэтому имеют набор первых интегралов, которые являются пределами при $\varepsilon \rightarrow 0$ первых интегралов уравнений (5.6), (5.12).

§ 6. Третья теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения

I. Так же, как и в § 4, предполагаем, что G и H — два произвольных коммутирующих автоморфизма в произвольной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$.

Теорема 3. *Дифференциальные уравнения в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ вида*

$$\dot{c}_1 = c_1 H(b) - b c_1 + a_1 - H G^{-1}(a_1), \quad \dot{a}_1 = a_1 G(b) - b a_1, \quad (6.1)$$

где элементы b , c_1 связаны соотношением ($d_1 = \text{const}$)

$$d_1 H^2 G^{-1}(b) - b d_1 = H G^{-1}(c_1) - c_1, \quad d_1 = H G^{-1}(d_1), \quad (6.2)$$

допускают эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Определим следующие линейные операторы L и A , действующие в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$:

$$L = a_1 G + \lambda c_1 H + \lambda^2 d_1 H^2 G^{-1}, \quad A = b + \lambda H G^{-1}. \quad (6.3)$$

Уравнение Лакса $\dot{L} = LA - AL$ эквивалентно следующей системе уравнений (коэффициенты при λ^0 , λ^1 , λ^2 , λ^3):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1 G(b) - b a_1, \quad \dot{c}_1 = c_1 H(b) - b c_1 + a_1 - H G^{-1}(a_1), \\ \dot{d}_1 &= 0 = d_1 H^2 G^{-1}(b) - b d_1 - H G^{-1}(c_1) + c_1, \\ 0 &= d_1 - H G^{-1}(d_1). \end{aligned} \quad (6.4)$$

При выводе уравнений (6.4) из уравнения Лакса существенно используется, что G и H — коммутирующие автоморфизмы. Уравнения (6.4), очевидно, совпадают с дифференциальными уравнениями (6.1) и алгебраическими связями (6.2). Из представления Лакса следует наличие первых интегралов $I_k = T(L(t, \lambda)^k)$. Теорема 3 доказана.

Первая теорема о двух коммутирующих автоморфизмах (§ 4) является частным случаем теоремы 3 при $d_1 = 0$, $c_1 = 1$. В этом случае первое дифференциальное уравнение (6.1) превращается в алгебраическую связь (4.2), а алгебраические уравнения (6.2) выполнены тождественно.

II. Укажем некоторые применения конструкции теоремы 3. В дальнейшем предполагается, что $d_1 = 1$, тогда алгебраические уравнения (6.2) принимают вид

$$H^2 G^{-1}(b) - b = H G^{-1}(c_1) - c_1. \quad (6.5)$$

Предположим, что $H = \text{id}$. Тогда $c_1 = b$ является решением уравнений (6.5) и уравнения (6.1) принимают вид

$$\dot{b} = a_1 - G^{-1}(a_1), \quad \dot{a}_1 = a_1 G(b) - b a_1. \quad (6.6)$$

Важнейшим применением уравнений (6.6) является цепочка Тода. Пусть $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ — коммутативная алгебра функций на множестве целых чисел; автоморфизм G является сдвигом: $(Gf)(k) = f(k+1)$. Тогда уравнения (6.6) принимают вид

$$\dot{b}(k) = a_1(k) - a_1(k-1), \quad \dot{a}_1(k) = a_1(k)(b(k+1) - b(k)). \quad (6.7)$$

Уравнения (6.7) после подстановки

$$a_1(k) = \exp(q(k+1) - q(k)), \quad b(k) = \dot{q}(k)$$

принимают вид уравнений цепочки Тода

$$\ddot{q}(k) = \exp(q(k+1) - q(k)) - \exp(q(k) - q(k-1)). \quad (6.8)$$

Уравнение (6.5) разрешается в общем виде, если

$$H G^{-1} = (H^2 G^{-1})^p, \quad G = H^{(2p-1)/(p-1)}, \quad p \geq 2. \quad (6.9)$$

Обозначим $F = H^2 G^{-1} = H^{1/(1-p)}$; в силу (6.9) имеем

$$H = F^{1-p}, \quad G = F^{1-2p}, \quad H G^{-1} = F^p.$$

Уравнение (6.5) разрешается в виде $b = c_1 + F(c_1) + \dots + F^{p-1}(c_1)$. Уравнения (6.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= c_1 \left(\sum_{h=1}^{p-1} F^{-h}(c_1) \right) - \left(\sum_{h=1}^{p-1} F^h(c_1) \right) c_1 + a_1 - F^p(a_1), \\ \dot{a}_1 &= a_1 \left(\sum_{h=p}^{2p-1} F^{-h}(c_1) \right) - \left(\sum_{h=0}^{p-1} F^h(c_1) \right) a_1.\end{aligned}\quad (6.10)$$

III. Пусть алгебра $\mathfrak{A} = \text{gl}(n, \mathbb{C})$ — алгебра комплексных матриц и автоморфизмы G и H определяются формулами

$$G(x) = \beta_1^{-1} x \beta_1, \quad H(x) = \alpha_1 x \alpha_1^{-1}, \quad (6.11)$$

где α_1 и β_1 — обратимые матрицы. Условие коммутативности автоморфизмов G и H имеет вид $\alpha_1 \beta_1^{-1} = \mu \beta_1^{-1} \alpha_1$, $\mu^n = 1$ (см. § 4, формула (4.15)). Уравнения (6.1), (6.5) в силу определений (6.11) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= c_1 \alpha_1 b \alpha_1^{-1} - b c_1 + a_1 - \alpha_1 \beta_1 a_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1}, \\ \dot{a}_1 &= a_1 \beta_1^{-1} b \beta_1 - b a_1, \\ \alpha_1^2 \beta_1 b \beta_1^{-1} \alpha_1^{-2} - b &= \alpha_1 \beta_1 c_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1} - c_1.\end{aligned}\quad (6.12)$$

Умножим первое уравнение (6.12) справа на α_1 , второе — на β_1^{-1} , третье — на $\alpha_1^2 \beta_1$ и обозначим $a = a_1 \beta_1^{-1}$, $c = c_1 \alpha_1$; получим уравнения

$$\begin{aligned}\dot{c} &= [c, b] + a \beta_1 \alpha_1 - \alpha_1 \beta_1 a, \quad \dot{a} = [a, b], \\ [\alpha_1^2 \beta_1, b] &= \alpha_1 \beta_1 c \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \beta_1 - c \alpha_1 \beta_1.\end{aligned}\quad (6.13)$$

В силу уравнения (4.15) имеем $\beta_1 \alpha_1 = \mu \alpha_1 \beta_1$, $\alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \beta_1 = \mu^{-1}$. Обозначим $\alpha = \alpha_1^2 \beta_1$, $\beta = \alpha_1 \beta_1$; тогда справедливо соотношение

$$\alpha \beta = \mu^{-1} \beta \alpha, \quad \mu^n = 1, \quad (6.14)$$

и уравнения (6.13) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{c} &= [c, b] + \mu a \beta - \beta a, \quad \dot{a} = [a, b], \\ [\alpha, b] &= \mu^{-1} \beta c - c \beta.\end{aligned}\quad (6.15)$$

Таким образом, в силу теоремы 3 уравнения (6.15) при условиях (6.14) допускают представление Лакса и поэтому обладают большим набором первых интегралов.

При $\mu = 1$ матрицы α , β можно считать диагональными. В этом случае уравнения (6.15) принимают вид

$$\dot{c} = [c, b] + [a, \beta], \quad \dot{a} = [a, b], \quad [\alpha, b] = [\beta, c]. \quad (6.16)$$

Эти уравнения в случае симметрической матрицы a и кососимметрических матриц b и c описывают интегрируемый случай вращения N -мерного твердого тела в «ньютоновском гравитационном поле с однородным квадратичным потенциалом», указанный в работе [26].

При $\mu = -1$ уравнения (6.15) принимают вид

$$\dot{c} = [c, b] - \{a, \beta\}, \quad \dot{a} = [a, b], \quad [\alpha, b] = -\{\beta, c\}. \quad (6.17)$$

Пусть матрицы a, b, c принадлежат алгебре Ли $so(2n, \mathbb{R})$. Антиккоммутирующие матрицы α, β выберем в виде (4.24). Тогда алгебраическое уравнение (6.17) разрешается аналогично п. IV § 4. Поэтому дифференциальные уравнения (6.17) корректно определены в алгебре Ли $so(2n, \mathbb{R}) \oplus so(2n, \mathbb{R})$, допускают представление Лакса и обладают большим набором первых интегралов.

§ 7. Матричные уравнения, допускающие представление Лакса с несколькими спектральными параметрами

I. Рассмотрим в алгебре матриц $gl(n, \mathbb{R})$ или $gl(n, \mathbb{C})$ дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{a} = [\dot{a}, a]. \quad (7.1)$$

Очевидно, собственные числа матрицы $\dot{a}$ или функции $I_k = \text{Tr}(\dot{a})^k$ являются первыми интегралами уравнения (7.1). В силу (5.1) имеем

$$(\text{Tra}^2)'' = 2\text{Tr}(a\ddot{a} + \dot{a}^2) = 2\text{Tr}(\dot{a}^2) = \text{const}.$$

Поэтому справедливо равенство

$$\text{Tr} a^2(t) = \text{Tr}(\dot{a}^2)t^2 + c_1(a)t + c_2(a), \quad (7.2)$$

где $T(\dot{a}^2)$, $c_1(a)$ и $c_2(a)$ — первые интегралы уравнения (7.1).

Покажем, что уравнение (7.1) имеет большое количество других первых интегралов. Пусть $P(\dot{a}, [\dot{a}, a])$ — произвольный многочлен от некоммутирующих образующих $\dot{a}$ и $[\dot{a}, a]$, например

$$P(\dot{a}, [\dot{a}, a]) = \lambda_0 \dot{a} + \lambda_1 [\dot{a}, a] + \lambda_2 \dot{a} [\dot{a}, a] + \lambda_3 [\dot{a}, a]^2. \quad (7.3)$$

Утверждение 1. В силу уравнения (7.1) справедливо уравнение

$$P(\dot{a}, [\dot{a}, a])' = [P(\dot{a}, [\dot{a}, a]), a]. \quad (7.4)$$

Собственные числа матрицы $P(\dot{a}[\dot{a}, a])$ являются первыми интегралами уравнения (7.1).

Доказательство. Уравнение (7.1) после дифференцирования по t принимает вид $\ddot{a} = [\dot{a}, a]$. Подставляя сюда в силу (7.1) $\ddot{a} = [\dot{a}, a]$, находим

$$[\dot{a}, a]^{\cdot} = [[\dot{a}, a], a]. \quad (7.5)$$

Из двух уравнений

$$\dot{b} = [b, a], \quad \dot{c} = [c, a] \quad (7.6)$$

следует уравнение

$$(bc)^{\cdot} = [bc, a], \quad (7.7)$$

также имеющее вид (7.6). Поэтому если $P(b, c)$ — любой многочлен от матриц b и c , то в силу уравнений (7.6) получаем

$$P(b, c)^{\cdot} = [P(b, c), a]. \quad (7.8)$$

Уравнения (7.1) и (7.5) имеют вид (7.6). Поэтому в силу (7.8) справедливо уравнение изоспектральной деформации (7.4). Следовательно, собственные числа матрицы $P(\dot{a}, [\dot{a}, a])$ являются первыми интегралами уравнения (7.1). Утверждение 1 доказано.

Уравнение (7.4) с функциями $P(\dot{a}, [\dot{a}, a])$ вида (7.3) является представлением Лакса с произвольным числом спектральных параметров $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ для уравнения (7.1). Как известно, с уравнением Лакса, зависящим от одного спектрального параметра λ , связано семейство римановых поверхностей, заданных уравнением

$$\det(L(\lambda) - \mu \cdot 1) = 0. \quad (7.9)$$

Уравнение (7.1) в силу представления (7.4) оказывается связанным с алгебраическими многообразиями произвольной размерности, определенными уравнением

$$\det(P(\dot{a}, [\dot{a}, a], \lambda_0, \dots, \lambda_n) - \mu \cdot 1) = 0. \quad (7.10)$$

Все коэффициенты уравнения (7.10) являются первыми интегралами уравнения (7.1).

II. Предположим, что матрица $a(t, x)$ зависит от двух переменных t и x и удовлетворяет уравнению

$$a_{xt} = [a_x, a]. \quad (7.11)$$

Дифференцируя уравнение (7.11) по x , приходим к уравнению

$$a_{xxt} = [a_{xx}, a]. \quad (7.12)$$

Уравнения (7.11), (7.12) имеют вид (7.6). Поэтому из них также следуют уравнения вида (7.8). Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. В силу уравнения (5.11) справедливо уравнение

$$P(a_x, a_{xx})' = [P(a_x, a_{xx}), a], \quad (7.13)$$

где $P(a_x, a_{xx})$ — произвольный многочлен от матриц a_x, a_{xx} . Функции $\text{Tr}(P^k(a_x, a_{xx}))$, где $k = 1, 2, \dots$, не зависят от времени и являются поточечными первыми интегралами уравнения (7.11).

С уравнением (7.11) связано зависящее от параметра x семейство алгебраических многообразий произвольной размерности, заданных уравнением

$$\det(P(a_x, a_{xx}, \lambda_0, \dots, \lambda_n) - \mu \cdot 1) = 0. \quad (7.14)$$

Все коэффициенты уравнения (7.14) в силу уравнения Лакса (7.13) не зависят от времени t и являются поточечными первыми интегралами уравнения (7.11).

Уравнение (7.11) для матриц a размера 2×2 вида

$$a = \begin{pmatrix} r & p \\ q & -r \end{pmatrix}$$

эквивалентно системе уравнений

$$r_{xt} = p_x q - p q_x, \quad p_{xt} = 2(pr_x - p_x r), \quad q_{xt} = 2(q_x r - q r_x).$$

Эта система имеет поточечные первые интегралы следующего вида:

$$\frac{1}{2} \text{Tra}_x^2 = p_x q_x + r_x^2 = C_1(x), \quad \frac{1}{2} \text{Tra}_{xx}^2 = p_{xx} q_{xx} + r_{xx}^2 = C_2(x).$$

III. Покажем, что дифференциальное уравнение

$$\ddot{a} = [\dot{a}, a + c] + [[c, a], a], \quad (7.15)$$

где c — постоянная матрица, так же как и уравнение (7.1), допускает представление Лакса с произвольным числом спектральных параметров. Уравнение (7.15) представляется в виде

$$(D_1 a)_t = [D_1 a, a], \quad D_1 a = a_t + [c, a], \quad (7.16)$$

где D_1 — оператор дифференцирования

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + ad_c. \quad (7.17)$$

Из уравнения (7.16) после применения оператора D_1 получаем уравнение

$$(D_1^2 a)_t = [D_1^2 a, a], \quad D_1^2 a = \ddot{a} + 2[c, \dot{a}] + [c, [c, a]]. \quad (7.18)$$

Уравнения (7.16) и (7.18) имеют вид (7.6). Поэтому в силу (7.8) произвольный многочлен $P(D_1 a, D_1^2 a)$ удовлетворяет уравнению

$$P(D_1 a, D_1^2 a)' = [P(D_1 a, D_1^2 a), a]. \quad (7.19)$$

Это уравнение и является представлением Лакса с произвольным числом спектральных параметров — коэффициентов многочлена $P(D_1 a, D_1^2 a)$. Уравнение (7.16) было впервые указано в работе [16].

IV. Уравнение в частных производных

$$a_{xt} = [a_x, a] + [a_t, c] + [[c, a], a] \quad (7.20)$$

представляется в виде ($c = \text{const}$)

$$(D_2 a)_t = [D_2 a, a], \quad D_2 a = a_x + [c, a], \quad (7.21)$$

где D_2 — оператор дифференцирования

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + ad_c.$$

Применяя к уравнению (7.21) оператор D_2 , получаем

$$(D_2^2 a)_t = [D_2^2 a, a], \quad D_2^2 a = a_{xx} + 2[c, a_x] + [c[c, a]]. \quad (7.22)$$

Из уравнений (7.21), (7.22) аналогично (7.19) следует, что для произвольного многочлена $P(D_2 a, D_2^2 a)$ функции

$$I = \text{Tr} P(D_2 a, D_2^2 a)$$

являются поточечными первыми интегралами уравнения (7.20).

З а м е ч а н и е. Уравнения (7.1), (7.11), (7.15) и (7.20) естественно обобщаются в произвольной алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Уравнения (7.16) и (7.18) по-прежнему являются их следствиями. Уравнения вида (7.4), (7.13), (7.19) также справедливы, если многочлен $P(Da, D^2 a)$ является произвольной суммой любого числа коммутаторов элементов $Da, D^2 a$. Поэтому если $f(x)$ — любой инвариант алгебры Ли $\mathfrak{G}$, т. е. функция, постоянная на орбитах присоединенного представления, то функции

$$f(P(Da, D^2 a))$$

являются первыми интегралами уравнений (7.1), (7.11), (7.15), (7.20).

V. Пусть $c_1, \dots, c_n$ — некоторые постоянные матрицы, $\mathfrak{G}_1$ — их совместный аннулятор, т. е. множество матриц

x таких, что $[c_k, x] = 0$, $k = 1, \dots, n$. Множество $\mathfrak{G}_1$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Обозначим через φ некоторое отображение алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ в $\mathfrak{G}_1$.

Утверждение 3. Матричное уравнение

$$\dot{a} = [a, \varphi(a)] \quad (7.23)$$

допускает представление Лакса с несколькими спектральными параметрами.

Доказательство. Введем обозначения

$$b_k = a + \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n, \quad b_k = [c_k, a], \quad (7.24)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — произвольные параметры. Из уравнения (7.23) в силу определения отображения φ следуют уравнения

$$\dot{b}_k = [b_k, \varphi(a)], \quad \dot{b}_k = [b_k, \varphi(a)]. \quad (7.25)$$

Поэтому для произвольного многочлена $P(b_k, b_1, \dots, b_n)$ в силу (7.24) справедливо уравнение

$$P(b_k, b_1, \dots, b_n)' = [P(b_k, b_1, \dots, b_n), \varphi(a)]. \quad (7.26)$$

Очевидно, уравнение (7.26) содержит произвольное число спектральных параметров. Собственные числа матрицы $P(b_k, b_1, \dots, b_n)$ являются первыми интегралами уравнения (7.23). Утверждение 3 доказано.

Утверждение 3 без изменения переносится в произвольную алгебру Ли.

Пусть $h: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ произвольный гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в себя, $\mathfrak{G}_h$ — неподвижная подалгебра: $h(x) = x$, $x \in \mathfrak{G}_h$. Обозначим через ψ произвольное отображение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}_h$.

Покажем, что матричное уравнение

$$\dot{a} = [a, \psi(a)] \quad (7.27)$$

допускает представление Лакса с несколькими спектральными параметрами.

Действительно, из уравнения (7.27) следуют уравнения ($k = 1, 2, \dots$)

$$h^k(a)' = [h^k(a), \psi(a)]. \quad (7.28)$$

Пусть $P(a, h(a), \dots, h^n(a))$ — произвольная сумма коммутаторов любого числа элементов $a, h(a), \dots, h^n(a)$. Из уравнений (7.28) следуют уравнения

$$P(a, h(a), \dots, h^n(a))' = [P(a, h(a), \dots, h^n(a)), \psi(a)]. \quad (7.29)$$

Уравнения (7.29), очевидно, содержат произвольное число спектральных параметров.

ГЛАВА VIII

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

В данной главе приводится конструкция алгебраических обобщений цепочки Тода, предложенная впервые в работе [59]. Построенные динамические системы и их связи с теорией простых алгебр Ли подробно исследовались в литературе [60—62]. С цепочкой Тода тесно связана система Вольтерра [30, 44]. Поэтому естественно предположить, что система Вольтерра, наряду с обобщениями в произвольных непрерывных ассоциативных алгебрах, построенными в гл. V и VII, имеет также аналоги и в простых алгебрах Ли. Такие алгебраические аналоги указаны в данной главе. Полученные динамические системы допускают представление Лакса со спектральным параметром в соответствующей простой алгебре Ли. Указаны интегрируемые расширения обобщенных цепочек Тода и двумеризованных цепочек Тода. Исследованы континуальные пределы цепочки Тода и динамических систем Ферми — Паста — Улама.

§ 1. Алгебраические обобщения цепочки Тода

I. В 1970 году М. Тода при численном исследовании различных моделей взаимодействия атомов в кристаллической решетке обнаружил отсутствие стохастизации в системе частиц единичной массы на прямой, взаимодействие которых определяется потенциалом

$$V = \sum_i \exp(q_i - q_{i+1}), \quad (1.1)$$

где q_i — отклонение i -й частицы от положения равновесия [63]. В дальнейшем в этой задаче был построен полный набор первых интегралов [64], найдена $L-A$ пара и доказана интегрируемость по Лиувиллю [44, 65] цепочки Тода, которая в периодическом случае имеет гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 + \sum_{i=1} \exp(q_i - q_{i+1}) + \exp(q_{n+1} - q_1). \quad (1.2)$$

Периодическая цепочка Тода изучалась также в работе [19] с помощью алгебро-геометрических методов.

В данном параграфе приводятся алгебраические обобщения цепочки Тода, связанные с простыми алгебрами Ли, которые были впервые построены в работе [59]. Воспользуемся классификацией Картана [66] простых алгебр Ли. Пусть H — картановская подалгебра простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$, $\alpha_i \in H$ — набор корней, $e_{\alpha_i} \in \mathfrak{G}$ — корневые векторы. В базисе Картана — Вейля справедливы коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [h, e_{\alpha}] &= (h, \alpha) e_{\alpha}, & [e_{\alpha}, e_{-\alpha}] &= \alpha, \\ [\alpha_i, h] &= 0, & [e_{\alpha}, e_{\beta}] &= N_{\alpha, \beta} e_{\alpha + \beta}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $h \in H$ и (h, α) — скалярное произведение Киллинга — Картана:

$$(x, y) = \text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y), \quad \text{ad } x(z) = [x, z].$$

Назовем набор корней $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ допустимым, если для всех $i, j \leq N$ вектор $\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем; тогда

$$[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = 0.$$

В каждой простой алгебре Ли имеется один важный допустимый набор корней

$$\omega_0 = -\Omega, \quad \omega_1, \dots, \omega_n, \quad (1.4)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_n$ — простые корни (все корни α_i являются целочисленными линейными комбинациями ω_k), а $\Omega = k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n$ — так называемый максимальный корень ($\Omega + l_1\omega_1 + \dots + l_n\omega_n$ не является корнем при всех $l_i \geq 0$). Допустимыми являются также все подмножества набора корней (1.4). Справедливо равенство

$$k_0\omega_0 + k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0, \quad (1.5)$$

где все $k_i > 0$ и являются целыми числами, $k_0 = 1$. Допустимый набор корней (1.4) образует набор вершин пополненного графа Дынкина Γ .

Из определения допустимого набора корней и тождества Якоби в силу (1.3) получаем следствия

$$\begin{aligned} i \neq j, k: [e_{\omega_i}, e_{-\omega_j}] &= 0, & [[e_{\omega_k}, e_{\omega_j}] e_{-\omega_i}] &= 0, \\ [[e_{\omega_j}, e_{\omega_i}], e_{-\omega_j}] &= (\omega_i, \omega_j) e_{\omega_i}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

II. В дальнейшем в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ будут рассматриваться уравнения вида

$$\dot{L} = [L, A] \quad (1.7)$$

с различными векторами $L(t)$, $\Lambda(t) \in \mathfrak{G}$. К алгебраическим обобщениям цепочки Тода приводят следующие две конструкции.

1) Пусть векторы $L(t)$ и $\Lambda(t)$ имеют вид

$$L(t) = \sum_{i=0}^n l_i(t) (e_{\omega_i} + e_{-\omega_i}) + p(t), \quad (1.8)$$

$$\Lambda(t) = \sum_{i=0}^n l_i(t) (e_{\omega_i} - e_{-\omega_i}),$$

где вектор $p(t)$ принадлежит картановской подалгебре H . Используя коммутационные соотношения (1.3) и определение допустимого набора корней, находим, что уравнение (1.7), (1.8) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{p} = -2 \sum_{i=0}^n l_i^2 \omega_i, \quad \dot{l}_i = l_i(p, \omega_i). \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) после подстановки

$$l_i = c_i \exp(q, \omega_i), \quad (1.10)$$

где вектор $q(t)$ принадлежит картановской подалгебре H , принимают гамильтонов вид

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ H &= \frac{1}{2} (p, p) + \sum_{i=0}^n c_i^2 \exp 2(q, \omega_i). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) эквивалентны уравнению Лакса (1.7), (1.8) и называются обобщенной цепочкой Тода, связанной с данной простой алгеброй Ли.

2) Пусть векторы $L(t)$ и $\Lambda(t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{i=0}^n a_i(t) e_{-\omega_i} + E p(t) + E^2 \sum_{i=0}^n c_i e_{\omega_i}, \\ \Lambda(t) &= -E^{-1} \sum_{i=0}^n a_i(t) e_{-\omega_i}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $p(t) \in H$, c_i — постоянные, E — произвольный параметр. Уравнение (1.7), (1.12) в силу (1.3) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{p} = -\sum_{i=0}^n c_i a_i \omega_i, \quad \dot{a}_i = a_i(p, \omega_i). \quad (1.13)$$

Эти уравнения после подстановки $a_i = f_i \exp(q, \omega_i)$ принимают гамильтонов вид с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p, p) + \sum_{i=0}^n c_i f_i \exp(q, \omega_i). \quad (1.14)$$

Гамильтонианы (1.11) и (1.14), очевидно, эквивалентны.

Из представления в виде $L - A$ пары (1.7) следует, что уравнения обобщенных цепочек Toda (1.11) имеют первые интегралы

$$I_k = F_k(L), \quad J_k = \text{Tr}(T(L))^k, \quad (1.15)$$

где F_k — любые инварианты алгебры Ли $\mathfrak{G}$, а T — любое ее линейное представление, например, присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Уравнения обобщенных цепочек Toda (1.11) могут быть проинтегрированы в тэта-функциях римановых поверхностей в силу того, что представление Лакса (1.7), (1.12) содержит произвольный спектральный параметр E .

III. Приведем конкретные примеры систем (1.11). Воспользуемся классификацией простых алгебр Ли и стандартной записью корней алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$ (см. [66]). Для алгебр Ли типа A_n, E_6, E_7, G_2 удобно расширить картановскую подалгебру элементом, коммутирующим со всей алгеброй; в этом расширении имеем базис $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$. В качестве допустимого набора корней берем набор (1.4).¹⁾ Соответствующий гамильтониан (1.11) имеет эквивалентный вид¹⁾

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p_i^2 + V_{\mathfrak{G}}(q_i). \quad (1.16)$$

Здесь $m = n + 1$ для алгебр Ли типа A_n, E_6, E_7, G_2 и $m = n$ для остальных типов (n — ранг алгебры Ли $\mathfrak{G}$).

Введем обозначение $V_k = \sum_{i=1}^k \exp(q_i - q_{i+1})$. Явный вид потенциалов $V_{\mathfrak{G}}(q_i)$ в зависимости от типа $\mathfrak{G}$ следующий:

$$V_{A_n} = V_n + \exp(q_{n+1} - q_1), \quad n \geq 2,$$

$$V_{E_n} = V_{n-1} + \exp(q_n) + \exp(-(q_1 + q_2)), \quad n \geq 2,$$

$$V_{G_2} = V_{n-1} + \exp(2q_n) + \exp(-2q_1), \quad n \geq 3,$$

¹⁾ Другой класс вполне интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с простыми алгебрами Ли, указан в работе [68], где используется конструкция $L - A$ пары Мозера — Калоджеро [30, 69].

$$\begin{aligned}
V_{D_n} &= V_{n-1} + \exp(q_{n-1} + q_n) + \exp(-q_1 - q_2), \quad n \geq 4, \\
V_{E_6} &= V_5 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + q_6)\right) + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} q_7 + \exp(-\sqrt{2} q_7), \\
V_{E_7} &= V_5 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 + q_2 + \dots + q_7 - q_8)\right) + \\
&\quad + \exp(-q_1 - q_2) + \exp(-q_7 - q_8), \\
V_{E_8} &= V_6 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 + q_2 + \dots + q_7 - q_8)\right) + \\
&\quad + \exp(-q_1 - q_2) + \exp(q_7 + q_8), \\
V_{F_4} &= \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2 - q_3) + \exp(q_3) + \\
&\quad + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4)\right) + \exp(-q_1 - q_4), \\
V_{G_2} &= \exp(q_1 - q_2) + \exp(-2q_1 + q_2 + q_3) + \\
&\quad + \exp(q_1 + q_2 - 2q_3).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Используя стандартные линейные представления простых алгебр Ли, можно показать, что гамильтоновы системы с гамильтонианами (1.16) имеют ровно m первых интегралов. В работах [61, 62] доказано, что все первые интегралы находятся в инволюции.

Для алгебры Ли типа $A_n(\text{SL}(n+1))$ гамильтониан (1.16) определяет периодическую цепочку Toda, для остальных типов получаем новые цепочки частиц, имеющие большое число интегралов движения (отметим, однако, что система (1.16) для типа C_n вкладывается в цепочку Toda из $2n$ частиц).

Для системы двух частиц из (1.17) получаем кроме цепочки Toda еще две интегрируемые системы с потенциалами

$$\begin{aligned}
V_{B_2} &= \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2) + \exp(-q_1 - q_2), \\
V_{G_2} &= \exp(q_1) + \exp(\sqrt{3} q_2) + \exp\left(-\frac{3}{2} q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} q_2\right).
\end{aligned}$$

§ 2. Алгебраические аналоги системы Вольтерра

I. В предыдущих главах были найдены весьма общие алгебраические конструкции интегрируемых нелинейных уравнений, которые в простейших случаях переходят в систему Вольтерра

$$\dot{u}_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}). \tag{2.1}$$

В данном параграфе мы укажем конструкцию интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с простыми алгебрами Ли, которая в случае алгебры Ли типа A_n приводит к системе (2.1).

Рассмотрим в простой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ уравнение (1.7), где векторы $L(t)$, $A(t)$ определяются формулами

$$L(t) = E \sum_{i=0}^n b_i(t) e_{\omega_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n m_{ij}(t) [e_{\omega_i}, e_{\omega_j}],$$

$$A(t) = E \sum_{i=0}^n k_i b_i^{-1} \cdot e_{\omega_i}.$$
(2.2)

Здесь $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ — допустимый набор корней (1.4), положительные целые числа k_i определены из условия (1.5), $m_{ij}(t) = -m_{ji}(t)$, E — произвольный параметр. В силу равенств (1.6) уравнение (1.7), (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$\sum_{i=0}^n k_i [e_{\omega_i}, e_{-\omega_i}] = \sum_{i=0}^n k_i \omega_i = 0,$$

$$\dot{m}_{ij}(t) [e_{\omega_i}, e_{\omega_j}] = 0,$$
(2.3)

$$\dot{b}_i(t) e_{\omega_i} = \sum_{s=0}^n m_{si}(t) k_s b_s^{-1}(t) [[e_{\omega_s}, e_{\omega_i}], e_{-\omega_s}] =$$

$$= \sum_{s=0}^n m_{si}(t) k_s b_s^{-1}(t) (\omega_i, \omega_s) e_{\omega_i}.$$
(2.4)

Первое уравнение (2.3) справедливо тождественно в силу равенства (1.5). Из второго уравнения следует, что $m_{ij}(t) = \text{const}$. Уравнение (2.4) эквивалентно динамической системе

$$\dot{b}_i = \sum_{j=0}^n m_{ji}(\omega_i, \omega_j) k_j b_j^{-1},$$
(2.5)

которая имеет гамильтонов вид

$$\dot{b}_i = \sum_{j=0}^n \mu_{ij} \frac{\partial H}{\partial b_j}, \quad H = \ln \prod_{j=0}^n b_j^{k_j},$$
(2.6)

где $\mu_{ij} = m_{ji}(\omega_i, \omega_j)$, $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$. Постоянная матрица μ_{ij} является кососимметрической, и ее ненулевые элементы отвечают ребрам дополненного графа Дынкина Γ соответствующей простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Если все $\mu_{ij} \neq 0$ при $(\omega_i, \omega_j) \neq 0$, то матрица μ имеет максимальный возмож-

ный ранг. Поэтому динамическая система (2.5) гамильтонова и гамильтониан H (2.6) является ее простейшим первым интегралом. Согласно проведенному выводу система (2.5) имеет эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром (1.7), (2.2) и, следовательно, обладает большим набором первых интегралов вида (1.15) и интегрируется в тэта-функциях римановых поверхностей.

Уравнения (2.5) после замены переменных $a_i(t) = b_i^{-1}(t)$ принимают эквивалентный вид

$$\dot{a}_i(t) = a_i^2(t) \sum_{s=0}^n m_{is}(\omega_i, \omega_s) k_s a_s(t). \quad (2.7)$$

Как известно, вершины ω_i, ω_s пополненного графа Γ соединены ребрами только в том случае, если $(\omega_i, \omega_s) \neq 0$. Введем произвольные постоянные $\mu_{is} = m_{is}(\omega_i, \omega_s)$, соответствующие ребрам графа Γ с фиксированным порядком вершин: $\mu_{is} = -\mu_{si}$. Тогда система (2.7) принимает вид

$$\dot{a}_i(t) = a_i^2(t) \left(\sum \mu_{is} k_s a_s(t) \right), \quad (2.8)$$

где суммирование осуществляется по всем вершинам ω_s графа Γ , соединенным с вершиной ω_i одним или несколькими ребрами.

Введем новые переменные

$$x_{ij}(t) = \mu_{ij} a_i(t) a_j(t), \quad (2.9)$$

которые отвечают ребрам графа Γ с указанием порядка вершин ω_i, ω_j , причем $x_{ij}(t) = -x_{ji}(t)$; ребрам, соединяющим одинаковые вершины, соответствуют одни и те же переменные $x_{ij}(t)$. Из систем уравнений (2.7) — (2.9) следует динамическая система в координатах $x_{ij}(t)$:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left(\sum_{s=0}^n k_s (x_{is} + x_{js}) \right). \quad (2.10)$$

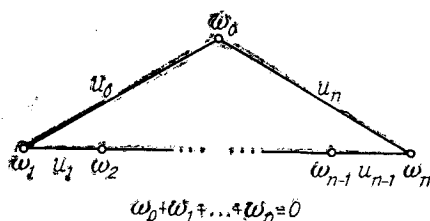
Здесь $x_{is} = 0$, если нет ребра, соединяющего вершины ω_i и ω_s графа Γ .

Число ребер графа Γ (без кратностей) на 1 меньше числа вершин (для алгебры Ли типа A_n эти два числа совпадают). Поэтому число независимых переменных $x_{ij}(t)$ равно n и на 1 меньше числа переменных $a_i(t)$. Динамическая система (2.10) является редукцией системы (2.7) — (2.8), допускающей матричное представление (1.7), (2.2). Поэтому система (2.10) также имеет набор первых интегралов; их число на 1 меньше числа неза-

висимых интегралов (1.15) $I_k = \text{Tr}(T(L))^k$ системы (2.7) — (2.8).

Укажем явный вид динамических систем (2.8), (2.10), соответствующих девяти типам простых алгебр Ли по классификации Картана. Используем стандартную нумерацию вершин графа Γ и введем переменные $u_k(t) = x_{ij}(t)$, $\mu_k = \mu_{ij}$, соответствующие ребрам графа Γ с возрастающим порядком вершин ($i < j$). Для каждого типа простых алгебр Ли укажем также соответствующий граф Γ и линейное соотношение (1.5) (см. [66]).

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа A_n имеют вид



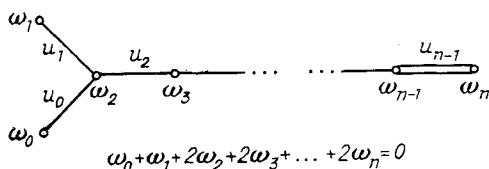
Соответствующие динамические системы определяются формулами

$$\dot{a}_k = a_k^2 (\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1} a_{k-1}), \quad (2.11)$$

$$\dot{u}_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}), \quad (2.12)$$

где $u_k = \mu_k a_k a_{k+1}$, $a_{n+1} = a_0$, $u_{n+1} = u_0$. Динамическая система (2.12) совпадает с системой Вольтерра (2.1) в периодическом случае.

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа B_n , $n \geq 3$, имеют вид



Система (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= 2a_0^2 \mu_0 a_2, & \dot{a}_1 &= 2a_1^2 \mu_1 a_2, \\ \dot{a}_2 &= a_2^2 (2\mu_2 a_3 - \mu_0 a_0 - \mu_1 a_1), \\ \dot{a}_k &= 2a_k^2 (\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1} a_{k-1}), & \dot{a}_n &= -2a_n^2 \mu_{n-1} a_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Переменные u_k связаны с переменными a_j формулами ($1 \leq k \leq n-1$):

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_2, \quad u_k = \mu_k a_k a_{k+1}.$$

Соответствующая система (2.10) имеет вид ($3 \leq k \leq n-2$)

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= u_0(2u_2 - u_1 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(2u_2 - u_0 + u_1), \\ \dot{u}_2 &= u_2(2u_3 - u_1 - u_0), \\ \dot{u}_k &= 2u_k(u_{k+1} - u_{k-1}), \quad \dot{u}_{n-1} = -2u_{n-1}u_{n-2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа C_n , $n \geq 2$, имеют вид

$$\omega_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2 + \dots + 2\omega_{n-1} + \omega_n = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) принимает вид ($2 \leq k \leq n-2$)

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= 2a_0^2 \mu_0 a_1, \quad \dot{a}_1 = a_1^2 (2\mu_1 a_2 - \mu_0 a_0), \\ \dot{a}_k &= 2a_k^2 (\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1} a_{k-1}), \\ \dot{a}_{n-1} &= a_{n-1}^2 (\mu_{n-1} a_n - 2\mu_{n-2} a_{n-2}), \quad \dot{a}_n = -2a_n^2 \mu_{n-1} a_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В переменных $u_k = \mu_k a_k a_{k+1}$ получаем динамическую систему вида (2.10) ($2 \leq k \leq n-3$)

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= u_0(2u_1 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(2u_2 - u_0), \\ \dot{u}_k &= 2u_k(u_{k+1} - u_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\dot{u}_{n-2} = u_{n-2}(u_{n-1} - 2u_{n-3}), \quad \dot{u}_{n-1} = -u_{n-1}(u_{n-1} + 2u_{n-2}).$$

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа D_n , $n \geq 3$, имеют вид

$$\omega_0 + \omega_1 + 2\omega_2 + \dots + 2\omega_{n-2} + \omega_{n-1} + \omega_n = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) принимает

вид $(3 \leq k \leq n-3)$

$$\begin{aligned}\dot{a}_0 &= 2a_0^2\mu_0a_2, & \dot{a}_1 &= 2a_1^2\mu_1a_2, & \dot{a}_2 &= a_2^2(2\mu_2a_3 - \mu_0a_0 - \mu_1a_1), \\ \dot{a}_k &= 2a_k^2(\mu_ka_{k+1} - \mu_{k-1}a_{k-1}), \\ \dot{a}_{n-2} &= a_{n-2}^2(\mu_{n-2}a_{n-1} + \mu_{n-1}a_n - 2\mu_{n-3}a_{n-3}), \\ \dot{a}_{n-1} &= -2a_{n-1}^2\mu_{n-2}a_{n-2}, & \dot{a}_n &= -2a_n^2\mu_{n-1}a_{n-2}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Переменные u_i определены формулами $(1 \leq k \leq n-2)$

$$u_0 = \mu_0a_0a_2, \quad u_k = \mu_ka_ka_{k+1}, \quad u_{n-1} = \mu_{n-1}a_{n-2}a_n.$$

Динамическая система (2.10) в этих переменных имеет вид $(3 \leq k \leq n-4)$

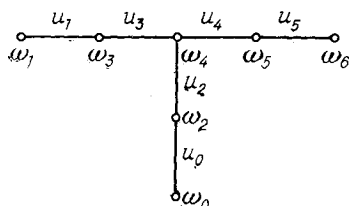
$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= u_0(2u_2 - u_1 + u_0), & \dot{u}_1 &= u_1(2u_2 - u_0 + u_1), \\ \dot{u}_2 &= u_2(2u_3 - u_0 - u_1),\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\dot{u}_k = 2u_k(u_{k+1} - u_{k-1}), \quad \dot{u}_{n-3} = u_{n-3}(u_{n-2} + u_{n-1} - 2u_{n-4}),$$

$$\dot{u}_{n-2} = u_{n-2}(-u_{n-2} + u_{n-1} - 2u_{n-3}),$$

$$\dot{u}_{n-1} = u_{n-1}(-u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3}).$$

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа E_6 имеют вид



$$\omega_0 + \omega_7 + 2\omega_2 + 2\omega_3 + 3\omega_4 + 2\omega_5 + \omega_6 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) определена формулами

$$\begin{aligned}\dot{a}_0 &= 2a_0^2\mu_0a_2, & \dot{a}_1 &= 2a_1^2\mu_1a_3, & \dot{a}_2 &= a_2^2(3\mu_2a_4 - \mu_0a_0), \\ \dot{a}_3 &= a_3^2(3\mu_3a_4 - \mu_1a_1), & \dot{a}_4 &= a_4^2(2\mu_4a_5 - 2\mu_3a_3 - 2\mu_2a_2), \\ \dot{a}_5 &= a_5^2(\mu_5a_6 - 3\mu_4a_4), & \dot{a}_6 &= -2a_6^2\mu_5a_5.\end{aligned}\quad (2.19)$$

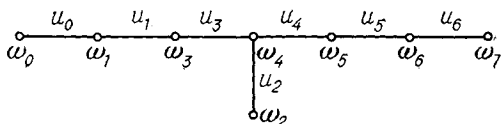
Переменные u_i заданы выражениями $(k=3, 4, 5)$

$$u_0 = \mu_0a_0a_2, \quad u_1 = \mu_1a_1a_3, \quad u_2 = \mu_2a_2a_4, \quad u_k = \mu_ka_ka_{k+1}.$$

Динамическая система (2.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= u_0(3u_2 + u_0), & \dot{u}_1 &= u_1(3u_3 + u_1), \\ \dot{u}_2 &= u_2(2u_4 - 2u_3 + u_2 - u_0), \\ \dot{u}_3 &= u_3(2u_4 + u_3 - 2u_2 - u_1), & \dot{u}_4 &= u_4(u_5 - u_4 - 2u_3 - 2u_2), \\ \dot{u}_5 &= -u_5(u_6 + 3u_4).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа E_7 имеют вид



$$\omega_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 + 4\omega_4 + 3\omega_5 + 2\omega_6 + \omega_7 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{a}_0 &= 2a_0^2\mu_0a_1, & \dot{a}_1 &= a_1^2(3\mu_1a_3 - \mu_0a_0), & \dot{a}_2 &= 4a_0^2\mu_2a_4, \\ \dot{a}_3 &= a_3^2(4\mu_3a_4 - 2\mu_1a_1), & \dot{a}_4 &= a_4^2(3\mu_4a_5 - 3\mu_3a_3 - 2\mu_2a_2), \\ \dot{a}_5 &= a_5^2(2\mu_5a_6 - 4\mu_4a_4), & \dot{a}_6 &= a_6^2(\mu_6a_7 - 3\mu_5a_5), \\ \dot{a}_7 &= -2a_7^2\mu_6a_6.\end{aligned}\quad (2.21)$$

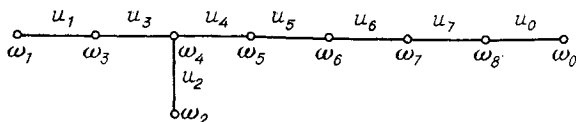
Переменные u_i связаны с a_j , a_k формулами ($k = 3, 4, 5, 6$)

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_1, \quad u_1 = \mu_1 a_1 a_3, \quad u_2 = \mu_2 a_2 a_4, \quad u_k = \mu_k a_k a_{k+1}.$$

В этих переменных динамическая система (2.10) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= u_0(3u_1 + u_0), & \dot{u}_1 &= u_1(4u_3 + u_1 - u_0), \\ \dot{u}_2 &= u_2(3u_4 - 3u_3 + 2u_2), \\ \dot{u}_3 &= u_3(3u_4 + u_3 - 2u_2 - 2u_1), & \dot{u}_4 &= u_4(2u_5 - u_4 - 3u_3 - 2u_2), \\ \dot{u}_5 &= u_5(u_6 - u_5 - 4u_4), & \dot{u}_6 &= -u_6(u_6 + 3u_5).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа E_8 имеют вид



$$\omega_0 + 2\omega_1 + 3\omega_2 + 4\omega_3 + 6\omega_4 + 5\omega_5 + 4\omega_6 + 3\omega_7 + 2\omega_8 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) задана уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -2a_0^2\mu_0a_8, & \dot{a}_1 &= 4a_1^2\mu_1a_3, \\ \dot{a}_2 &= 6a_2^2\mu_2a_4, & \dot{a}_3 &= a_3^2(6\mu_3a_4 - 2\mu_1a_1), \\ \dot{a}_4 &= a_4^2(5\mu_4a_5 - 4\mu_3a_3 - 3\mu_2a_2), & \dot{a}_5 &= a_5^2(4\mu_5a_6 - 6\mu_4a_4), \\ \dot{a}_6 &= a_6^2(3\mu_6a_7 - 5\mu_5a_5), & \dot{a}_7 &= a_7^2(2\mu_7a_8 - 4\mu_6a_6), \\ \dot{a}_8 &= a_8^2(\mu_0a_0 - 3\mu_7a_7). \end{aligned} \quad (2.23)$$

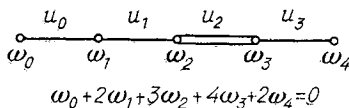
Переменные u_i определены формулами ($3 \leq k \leq 7$)

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_8, \quad u_1 = \mu_1 a_1 a_3, \quad u_2 = \mu_2 a_2 a_4, \quad u_k = \mu_k a_k a_{k+1}.$$

Динамическая система (2.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= -u_0(u_0 + 3u_7), & \dot{u}_1 &= u_1(2u_1 + 4u_3), \\ \dot{u}_2 &= u_2(3u_2 + 5u_4 - 4u_3), & \dot{u}_3 &= u_3(-2u_1 - 3u_2 + 2u_3 + 5u_4), \\ \dot{u}_4 &= u_4(-3u_2 - 4u_3 - u_4 + 4u_5), & \dot{u}_5 &= u_5(-6u_4 - u_5 + 3u_6), \\ \dot{u}_6 &= u_6(-5u_5 - u_6 + 2u_7), & \dot{u}_7 &= u_7(-4u_6 - u_7 + u_0). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа F_4 имеют вид



$$\omega_0 + 2\omega_1 + 3\omega_2 + 4\omega_3 + 2\omega_4 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) определена формулами

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= 2a_0^2\mu_0a_1, & \dot{a}_1 &= a_1^2(3\mu_1a_2 - \mu_0a_0), & \dot{a}_2 &= a_2^2(4\mu_2a_3 - 2\mu_1a_1), \\ \dot{a}_3 &= a_3^2(2\mu_3a_4 - 3\mu_2a_2), & \dot{a}_4 &= -4a_4^2\mu_3a_3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В переменных $u_k = \mu_k a_k a_{k+1}$ динамическая система (2.10) принимает вид

$$\dot{u}_0 = u_0(3u_1 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(4u_2 + u_1 - u_0), \quad (2.26)$$

$$\dot{u}_2 = u_2(2u_3 + u_2 - 2u_1), \quad \dot{u}_3 = -u_3(2u_3 + 3u_2).$$

Граф Γ и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа G_2 имеют вид

$$\omega_0 + 3\omega_1 + 2\omega_2 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) задана уравнениями

$$\dot{a}_0 = -2a_0^2\mu_0a_2, \quad \dot{a}_1 = 2a_1^2\mu_1a_2, \quad \dot{a}_2 = a_2^2(\mu_0a_0 - 3\mu_1a_1). \quad (2.27)$$

В переменных $u_0 = \mu_0 a_0 a_2$ и $u_1 = \mu_1 a_1 a_2$ получаем двумерную динамическую систему

$$\dot{u}_0 = -u_0(u_0 + 3u_1), \quad \dot{u}_1 = u_1(u_0 - u_1). \quad (2.28)$$

Построенные динамические системы (2.13)–(2.28) и являются алгебраическими аналогами системы Вольтерра (2.1), связанными с простыми алгебрами Ли.

§ 3. Интегрируемые гамильтоновы возмущения почтки Тола и ее обобщений

1. Покажем, что интегрируемые гамильтоновы системы (1.11) (обобщенные цепочки Тода) вкладываются в некоторые гамильтоновы системы большей размерности, которые также допускают представление Лакса со спектральным параметром. Рассмотрим уравнение (1.7) в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ с векторами $L(t)$ и $A(t)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} L(t) = & \sum_{i=0}^n a_i(t) e_{-\omega_i} + E p(t) + E^2 \sum_{i=0}^n c_i(t) e_{\omega_i} + \\ & + \frac{1}{2} E^3 \sum_{i,j=0}^n m_{ij}(t) [e_{\omega_i}, e_{\omega_j}], \quad (3.1) \\ A(t) = & -E^{-1} \sum_{i=0}^n a_i(t) e_{-\omega_i}, \end{aligned}$$

где вектор $p(t) \in H$ (картановская подалгебра), $m_{ij} = -m_{ji}$, E — спектральный параметр. Уравнение Лакса (1.7),

(3.1) эквивалентно динамической системе

$$\begin{aligned}\dot{a}_i &= a_i(p, \omega_i), & \dot{p} &= - \sum_{i=0}^n c_i a_i \omega_i, & \dot{c}_i &= \sum_{j=0}^n m_{ij}(\omega_i, \omega_j) a_j, \\ \dot{m}_{ij} &= 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Система (3.2) при $m_{ij}=0$ совпадает с системой (1.13), описывающей обобщенные цепочки Тода. При $m_{ij} = \text{const} \neq 0$ система (3.2) с помощью замены $a_i = \exp(q, \omega_i)$ преобразуется к гамильтонову виду

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{c}_i = \sum_{j=0}^n \mu_{ij} \frac{\partial H}{\partial c_j}, \quad (3.3)$$

где гамильтониан H определяется формулой

$$H = \frac{1}{2}(p, p) + \sum_{i=0}^n c_i(t) \exp(q, \omega_i) \quad (3.4)$$

и $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$, $\mu_{ij} = m_{ij}(\omega_i, \omega_j)$. Симплектическая 2-форма, сохраняемая системой (3.3), является суммой стандартной 2-формы $\sum dp_i \wedge dq_i$ в пространстве переменных p_i, q_i и 2-формы, определенной постоянной кососимметрической матрицей μ_{ij} в подпространстве переменных c_i . Простейшим первым интегралом системы (3.3) является гамильтониан H (3.4). Гамильтонова система (3.3) является интегрируемой в этета-функциях Римана, так как она допускает представление Лакса со спектральным параметром (1.7), (3.1).

Укажем явный вид динамической системы (3.3) в случае алгебры Ли типа A_n , где корни $\omega_i = e_{i+1} - e_i$. Ненулевые элементы матрицы μ_{ij} имеют вид $\mu_{i, i+1} = \alpha_i$, $\mu_{i+1, i} = -\alpha_i$. Гамильтонова система (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned}\ddot{q}_i &= c_i \exp(q_{i+1} - q_i) - c_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1}), \\ \dot{c}_i &= \alpha_i \exp(q_{i+2} - q_{i+1}) - \alpha_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1}).\end{aligned}\quad (3.5)$$

При $\alpha_i = 0$ получаем обычную цепочку Тода, где $c_i = \text{const}$. С помощью преобразований

$$q_i \rightarrow \bar{q}_i + \ln d_i, \quad c_i \rightarrow \bar{c}_i = c_i d_i / d_{i+1}, \quad \alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}_i = \alpha_i d_i / d_{i+2},$$

сохраняющих вид системы (3.5), и замены времени t все коэффициенты α_i (ненулевые) можно сделать равными 1.

II. Покажем, что алгебраические аналоги системы Вольтерра (§ 2) также вкладываются в некоторые динамические системы большей размерности, допускающие

представление Лакса со спектральным параметром. Пусть векторы $L(t)$, $A(t) \in \mathfrak{G}$ определяются формулами

$$L(t) = \sum_{i,j,k} \left(a_i^{-1}(t) e_{\omega_i} + \frac{1}{2} E m_{ij}(t) [e_{\omega_i}, e_{\omega_j}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} E^2 l_{ijk}(t) \cdot [[e_{\omega_i}, e_{\omega_j}], e_{\omega_k}] \right), \quad (3.6)$$

$$A(t) = E^{-1} \sum_s k_s a_s(t) e_{-\omega_s},$$

где $\omega_0, \dots, \omega_n$ — допустимый набор корней, k_s — константы, удовлетворяющие соотношению $k_0 \omega_0 + k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0$, $k_0 = 1$. В формулах (3.6) $m_{ij} = -m_{ji}$, $l_{ijk} = -l_{jik}$ и $m_{ij} \neq 0$ только если вектор $\omega_i + \omega_j$ является корнем, т. е. если $(\omega_i, \omega_j) \neq 0$; коэффициенты $l_{ijk} \neq 0$ только если $(\omega_i, \omega_j) \neq 0$ и вектор $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ является корнем. Уравнение Лакса (1.7), (3.6) эквивалентно условиям $k_0 \omega_0 + \dots + k_n \omega_n = 0$, $l_{ijk} = \text{const}$ и следующей системе уравнений:

$$\dot{m}_{ij} = \sum_s (l_{sij}(\omega_s, \omega_i) - l_{sji}(\omega_s, \omega_j) - l_{ijs}(\omega_s, \omega_i + \omega_j)) k_s a_s, \quad (3.7)$$

$$\dot{a}_i = a_i^2 \sum_s m_{is}(\omega_s, \omega_i) k_s a_s.$$

В новых переменных $x_{ij} = m_{ij} a_i a_j(\omega_i, \omega_j)$ система (3.7) принимает вид ($x_{ij} = -x_{ji}$):

$$x_{ij} = (\omega_i, \omega_j) \sum_s k_s (l_{sij}(\omega_s, \omega_i) - l_{sji}(\omega_s, \omega_j) - \\ - l_{ijs}(\omega_s, \omega_i + \omega_j)) a_i a_j a_s + x_{ij} \left(\sum_s k_s (x_{is} + x_{js}) \right), \quad (3.8) \\ \dot{a}_i = a_i \left(\sum_s k_s x_{is} \right).$$

При $l_{ijs} = 0$ динамические системы (3.7), (3.8) эквивалентны системам (2.7), (2.10). Система (3.8) после подстановки

$$a_i = \exp \left(\sum_s k_s q_{is} \right), \quad \dot{q}_{is} = -q_{si}, \quad \dot{q}_{is} = x_{is}$$

переходит в систему уравнений второго порядка

$$\ddot{q}_{ij} = (\omega_i, \omega_j) \sum_s k_s (l_{sij}(\omega_s, \omega_i) - l_{sji}(\omega_s, \omega_j) - l_{ijs}(\omega_s, \omega_i + \omega_j)) \times \\ \times \exp \left(\sum_m k_m (q_{im} + q_{jm} + q_{sm}) \right) + \dot{q}_{ij} \left(\sum_s k_s (\dot{q}_{is} + \dot{q}_{js}) \right). \quad (3.9)$$

III. Построенные динамические системы (3.2) и (3.7) включаются в два класса T_k и B_k динамических систем, допускающих представление Лакса в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ со спектральным параметром E . Для динамических систем класса T_k , содержащего алгебраические обобщения цепочки Тода, вектор $A(t)$ имеет вид (3.1), а вектор $L(t)$ наряду с (3.1) включает разложения по коммутаторам всех корневых векторов e_{ω_i} в количестве, не превосходящем k . Например, алгебраические обобщения цепочки Тода (1.13) ($m_{ij}=0$) принадлежат классу T_1 . Системы (3.2), (3.3) принадлежат классу T_2 .

Для динамических систем класса B_k , содержащего системы (3.7), вектор $A(t)$ имеет вид (3.6), а вектор $L(t)$ содержит дополнительно к формулам (3.6) еще коммутаторы корневых векторов e_{ω_i} в количестве, не превосходящем k . Например, гамильтонова система (2.5) принадлежит в силу (2.2) классу B_2 ; динамическая система (3.7) принадлежит классу B_3 и т. д.

Динамические системы из двух указанных классов T_k и B_k в силу существования представления Лакса со спектральным параметром E являются интегрируемыми в тэта-функциях Римана соответствующих римановых поверхностей $\det(L(t, E) - w \cdot 1) = 0$.

§ 4. Представление нулевой кривизны для некоторых расширений обобщенных цепочек Тода и уравнения Синус Гордона

I. Рассмотрим в простой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ уравнение нулевой кривизны [5, 11].

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial x} = [L, A], \quad (4.1)$$

где векторы $L(t, x, E)$, $A(t, x, E) \in \mathfrak{G}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} L(t, x, E) = & p(t, x) + E \sum_{i=0}^n b_i(t, x) e_{\omega_i} + \\ & + \frac{1}{2} E^2 \sum_{i,j=0}^n m_{ij}(t, x) [e_{\omega_i}, e_{\omega_j}], \quad (4.2) \\ A(t, x, E) = & - E^{-1} \sum_{i=0}^n a_i(t, x) e_{-\omega_i}. \end{aligned}$$

Здесь $p(t, x) \in H$ (картановская подалгебра), $\omega_0, \dots, \omega_n \in H$ — допустимый набор корней, e_{ω_i} — корневые векторы. Уравнения (4.1), (4.2) эквивалентны системе уравнений

$$p_t = - \sum_{i=0}^n b_i a_i \omega_i, \quad (b_i)_t = \sum_{j=0}^n m_{ij} (\omega_i, \omega_j) a_j, \\ (a_i)_x = (p, \omega_i) a_i, \quad (m_{ij})_t = 0. \quad (4.3)$$

После подстановки $a_i = \exp(q, \omega_i)$, $\mu_{ij} = m_{ij}(\omega_i, \omega_j)$ система уравнений (4.3) принимает вид ($p = q_x$)

$$q_{tx} = - \sum_{i=0}^n b_i \omega_i \exp(q, \omega_i), \quad (b_i)_t = \sum_{j=0}^n \mu_{ij} \exp(q, \omega_j). \quad (4.4)$$

Эти уравнения представляются также в виде

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t \partial x} = - \frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\partial b_i}{\partial t} = \sum_{j=0}^n \mu_{ij} \frac{\partial V}{\partial b_j}, \quad V = \sum_{i=0}^n b_i(t, x) \exp(q, \omega_i). \quad (4.5)$$

Ненулевые постоянные $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$ соответствуют ребрам пополненного графа Дынкина простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Система уравнений (4.4) является интегрируемым расширением двумеризованных обобщенных цепочек Toda, которые определяются условиями $\mu_{ij} = 0$; при этом $b_i = \text{const}$ [62].

В случае алгебры Ли типа A_{2n+1} из системы (4.4) при $\omega_i = e_{i+1} - e_i$, $\alpha_i = \mu_{i, i+1}$ получаем

$$(q_i)_{tx} = b_i \exp(q_{i+1} - q_i) - b_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1}), \\ (b_i)_t = \alpha_i \exp(q_{i+2} - q_{i+1}) - \alpha_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1}). \quad (4.6)$$

II. В периодическом случае с периодом 2 ($b_{i+2} = b_i$, $\alpha_{i+1} = \alpha_i$, $q_{i+1} = q_i$) из системы (4.6) следует система уравнений

$$(q_1)_{tx} = b_1 \exp(q_2 - q_1) - b_2 \exp(q_1 - q_2), \\ (q_2)_{tx} = b_2 \exp(q_1 - q_2) - b_1 \exp(q_2 - q_1), \\ (b_1)_t = \alpha \exp(q_1 - q_2), \quad (b_2)_t = -\alpha \exp(q_2 - q_1), \quad (4.7)$$

где $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Из уравнений (4.7) находим

$$(q_1)_{tx} = -\alpha^{-1} (b_1 b_2)_t, \quad (q_1 + q_2)_{tx} = 0. \quad (4.8)$$

Отсюда следуют равенства

$$(q_1)_x + \alpha^{-1} b_1 b_2 = P(x), \quad q_1 + q_2 = F(x) + G(t). \quad (4.9)$$

В специальном случае $q_1 + q_2 = 0$, $q_1 = q$ из (4.7) получаем

$$\begin{aligned} q_{tx} &= b_1 \exp(-2q) - b_2 \exp(2q), \\ (b_1)_t &= \alpha \exp(2q), \quad (b_2)_t = -\alpha \exp(-2q). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Эти уравнения в переменных $u_1 = b_1 + b_2$, $u_2 = b_1 - b_2$ принимают вид

$$\begin{aligned} q_{tx} &= -u_1 (\exp(2q) - \exp(-2q))/2 + \\ &\quad + u_2 (\exp(2q) + \exp(-2q))/2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} (u_1)_t &= \alpha_0 (\exp(2q) - \exp(-2q)), \\ (u_2)_t &= \alpha_0 (\exp(2q) + \exp(-2q)). \end{aligned}$$

В случае вещественных функций q , u_1 , u_2 обозначим $\varphi = 2q$, $\tau = 2t$; тогда уравнения (4.11) принимают вид

$$\varphi_{\tau x} = -u_1 \operatorname{sh} \varphi + u_2 \operatorname{ch} \varphi, \quad (u_1)_\tau = \alpha_0 \operatorname{sh} \varphi, \quad (u_2)_\tau = \alpha_0 \operatorname{ch} \varphi. \quad (4.12)$$

В случае чисто мнимых q , u_2 , α_0 и вещественном u_1 обозначим $2q = i\varphi$, $u_1 = v_1$, $u_2 = -iv_2$, $\alpha_0 = -i\alpha$, $\tau = 2t$; тогда из (4.11) находим

$$\varphi_{tx} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad (v_1)_\tau = \alpha \sin \varphi, \quad (v_2)_\tau = \alpha \cos \varphi. \quad (4.13)$$

Очевидно, уравнения (4.12), (4.13) являются расширениями уравнения Синус Гордон, которое получается из них при $\alpha = 0$. Из уравнений (4.12) находим

$$\varphi_x + (u_1^2 - u_2^2)/2\alpha_0 = f(x). \quad (4.14)$$

Из уравнений (4.13) следует

$$\varphi_x - (v_1^2 + v_2^2)/2\alpha = g(x). \quad (4.15)$$

Уравнения (4.12), (4.14) после подстановки $u_1 = r \operatorname{sh} \psi$, $u_2 = r \operatorname{ch} \psi$ принимают вид

$$r_\tau = \alpha_0 \operatorname{ch}(\varphi - \psi), \quad \psi_\tau = \alpha_0 \operatorname{sh}(\varphi - \psi) r^{-1}, \quad \varphi_x = f(x) + r^2/2\alpha_0. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.13), (4.15) с помощью подстановки $v_1 = r \cos \psi$, $v_2 = r \sin \psi$ преобразуются к виду

$$r_t = \alpha \sin(\varphi + \psi), \quad \psi_t = \alpha \cos(\varphi + \psi) r^{-1}, \quad \varphi_x = g(x) + r^2/2\alpha. \quad (4.17)$$

III. С помощью растяжения координат q_i , t , x введем в уравнение (4.6) параметр ε :

$$(q_i)_{tx} = \varepsilon^{-1} (b_i \exp(q_{i+1} - q_i)/\varepsilon - b_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1})/\varepsilon), \quad (4.18)$$

$$(b_i)_t = \varepsilon^{-1} (\alpha_i \exp(q_{i+2} - q_{i+1})/\varepsilon - \alpha_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1})/\varepsilon).$$

Предположим, что $\alpha_k = \alpha = \text{const}$, $q_k(t, x) = q(t, x, y_k)$, $b_k(t, x) = b(t, x, y_k)$, где $y_k = k\varepsilon$, $q(t, x, y)$ и $b(t, x, y)$ — гладкие функции. Уравнения (4.18) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходят в уравнения

$$q_{tx} = (b \exp q_v)_v, \quad b_t = 2\alpha (\exp q_v)_v. \quad (4.19)$$

Продифференцировав первое уравнение по y и обозначив $v = q_v$, получаем систему

$$v_{tx} = (b \exp v)_{vv}, \quad b_t = 2\alpha (\exp v)_v. \quad (4.20)$$

Из последнего уравнения (4.20) находим $b = u_v$, $\exp v = u_t/2\alpha$; после подстановки в первое уравнение (4.20) получаем

$$(\ln u_t)_{tx} = \frac{1}{2\alpha} (u_t u_v)_{vv}. \quad (4.21)$$

Таким образом, уравнение (4.21) является континуальным пределом уравнений (4.18), допускающих представление нулевой кривизны.

§ 5. Континуальные пределы цепочки Тода и ее двумеризации. Опрокидывающиеся решения

I. Бесконечная (по индексу k) цепочка Тода

$$\ddot{q}_k = \exp(q_{k+1} - q_k) - \exp(q_k - q_{k-1}) \quad (5.1)$$

в определенном континуальном пределе переходит в уравнение нелинейной струны [70]

$$u_{tt} = c_0^2 \left((1 - bhu_x) u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} \right),$$

которое оказывается связанным с уравнением КдФ [70].

Укажем другой континуальный предел цепочки Тода. Введем в систему (5.1) путем растяжения функций q_k и времени t параметр ε :

$$\ddot{q}_k = \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon} - \exp \frac{q_k - q_{k-1}}{\varepsilon} \right). \quad (5.2)$$

Предположим, что существует гладкая функция $u(t, x)$ такая, что $q_k(t) = u(t, x_k)$, где $x_k = k\varepsilon$. После указанной подстановки система (5.2) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение

$$u_{tt} = (e^{u_x})_x. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) лагранжево с лагранжианом

$$L = \iint \left(\frac{1}{2} u_t^2 - \exp u_x \right) dt dx. \quad (5.4)$$

Эквивалентная форма уравнения (5.3) имеет вид

$$v_{it} = v_i v_{xx}. \quad (5.5)$$

Здесь функции $u(t, x)$ и $v(t, x)$ связаны соотношениями

$$u_t = v_x, \quad v_t = \exp u_x, \quad (5.6)$$

которые разрешимы в силу уравнения (5.3).

Утверждение 1. Уравнение (5.5) для решений, имеющих асимптотику $v(t, x) \rightarrow c_{\pm}$ при $x \rightarrow \pm\infty$, имеет счетное множество первых интегралов ($m = 1, 2, \dots$)

$$I_m = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{(m-2k)! (k!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^{m-2k} v_t^k dx. \quad (5.7)$$

Доказательство. Рассмотрим в алгебре линейных операторов на пространстве гладких функций на прямой уравнение Лакса со спектральным параметром E :

$$\frac{\partial L(E, t)}{\partial t} = [L(E, t), A(E, t)], \quad (5.8)$$

где линейные операторы $L(E, t)$ и $A(E, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} L(E, t) &= E a(t, x) P_{\varepsilon} + b(t, x) + E^{-1} P_{-\varepsilon}, \\ A(E, t) &= -E^{-1} \varepsilon^{-1} a(t, x) P_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь $a(t, x)$, $b(t, x)$ — некоторые гладкие функции, P_{ε} — оператор сдвига

$$P_{\varepsilon}(\varphi)(x) = \varphi(x + \varepsilon), \quad (5.10)$$

являющийся автоморфизмом в алгебре функций на прямой. Уравнение (5.8), (5.9) эквивалентно уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(t, x)}{\partial t} &= a(t, x) \frac{b(t, x + \varepsilon) - b(t, x)}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial b(t, x)}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} (a(t, x) - a(t, x - \varepsilon)). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Уравнения (5.11) после перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ принимают вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial x}. \quad (5.12)$$

В силу второго уравнения (5.12) существует функция $v(t, x)$, удовлетворяющая равенствам

$$a = v_t, \quad b = v_x. \quad (5.13)$$

Первое уравнение (5.12) после подстановки формул (5.13) переходит в уравнение (5.5). Уравнения (5.11) при любом ε эквивалентны уравнению Лакса (5.8), (5.9), к которому применима лемма 1 из § 1 гл. VII. Поэтому уравнения (5.11) имеют счетный набор первых интегралов I_m , которые являются интегралами по x от коэффициента при нулевом сдвиге в операторе

$$L(E, t)^m = (Ea(t, x)P_\varepsilon + b(t, x) + E^{-1}P_-)^m. \quad (5.14)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнения (5.11) переходят в уравнение (5.5). Поэтому первые интегралы I_m уравнений (5.11) при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходят в первые интегралы уравнения (5.5). Коэффициент при нулевом сдвиге в операторе (5.14) при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в коэффициент c_m при E^0 в разложении функции

$$(Ea(t, x) + b(t, x) + E^{-1})^m$$

по степеням параметра E . Этот коэффициент c_m определяется формулой

$$c_m = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{(m-2k)! (k!)^2} a^k b^{m-2k}. \quad (5.15)$$

Поэтому после подстановки (5.13) получаем первые интегралы (5.7) уравнения (5.5). Утверждение 1 доказано.

Первые нетривиальные интегралы I_m имеют вид

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + 2v_t) dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^3 + 6v_x v_t) dx,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^4 + 12v_x^2 v_t + 6v_t^2) dx.$$

Простейшее автомодельное решение уравнения (5.3) имеет вид

$$u(t, x) = 2x \ln(x/et).$$

II. Покажем, что уравнения (5.3), (5.5) имеют решения, которые с течением времени становятся многозначными. Уравнение (5.3) после дифференцирования по x и замены $u_x = w$ принимает вид

$$w_{tt} = (\exp w)_{xx}. \quad (5.16)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$w_t = \varepsilon (\exp w/2) w_x, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (5.17)$$

Дифференцируя уравнение (5.17) по t и подставляя выражение w_t , в силу (5.17) получаем

$$w_{tt} = (\exp w) w_x^2 + (\exp w) w_{xx} = (\exp w)_{xx}.$$

Поэтому любое решение уравнения (5.17) является также решением уравнения (5.16). Уравнение (5.17) после замены $f = \exp(w/2)$ переходит в классическое уравнение опрокидывающейся волны Римана

$$f_t = \varepsilon f f_x, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (5.18)$$

В силу уравнения (5.18) каждая точка графика функции $f(t, x)$ перемещается при изменении времени t горизонтально со скоростью εf . Такое изменение графика приводит к явлению «перехлеста» — возникновению неоднозначности функции $f(t, x)$. В газовой динамике это явление служит формальной причиной возникновения ударных волн. Таким образом, уравнение (5.16) (и следовательно, уравнения (5.3), (5.5)) имеет решения, удовлетворяющие уравнению (5.17) — (5.18), которые при изменении времени t становятся многозначными.

III. Укажем континуальный предел [12] двумеризованной цепочки Тода [51]. Для этого введем в ее уравнения (с помощью растяжения функций $q_k(t, x)$ и времени t) параметр ε :

$$\frac{\partial^2 q_k}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\exp \frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon} - \exp \frac{q_k - q_{k-1}}{\varepsilon} \right). \quad (5.19)$$

Предположим, что существует гладкая функция $u(t, x, y)$ такая, что $q_k(t, x) = u(t, x, y_k)$, где $y_k = k\varepsilon$. После указанной подстановки и перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнения (5.19) переходят в уравнение

$$u_{tx} = (e^{uy})_y. \quad (5.20)$$

Уравнение (5.20) является лагранжевым с лагранжианом

$$L = \int \int \int \left(\frac{1}{2} u_t u_x - \exp u_y \right) dt dx dy. \quad (5.21)$$

Эквивалентная форма уравнения (5.20) имеет вид

$$v_{tx} = v_t v_{yy}. \quad (5.22)$$

Здесь функции $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ связаны соотношениями

$$u_x = v_y, \quad v_t = \exp u_y, \quad (5.23)$$

которые разрешимы в силу уравнения (5.20).

Уравнение (5.20) после подстановки

$$u(t, x, y) = y(\varphi(t, x) + \ln y^2 - 2 - \ln 2) \quad (5.24)$$

переходит в уравнение Лиувилля для функции $\varphi(t, x)$:

$$\varphi_{tx} = \exp \varphi. \quad (5.25)$$

Замена (5.24) после использования точных формул для решений уравнения Лиувилля приводит к следующим точным решениям уравнения (5.20):

$$u(t, x, y) = y \ln \frac{y^2 A'(x) B'(t)}{(A(x) + B(t))^2} + C(x) + D(t) - 2y, \quad (5.26)$$

где $A(x)$, $B(t)$, $C(x)$, $D(t)$ — произвольные функции.

Уравнение (5.20) после подстановки

$$u(t, x, y) = \varphi(t, x) + y(\ln(by) - 1)$$

переходит в неоднородное волновое уравнение $\varphi_{tx} = b$. Поэтому уравнение (5.20) имеет следующие точные решения:

$$u(t, x, y) = A(x) + B(t) + bxt + y(\ln(by) - 1), \quad (5.27)$$

где $A(x)$ и $B(t)$ — произвольные функции.

Уравнение (5.20) для функций $u(t, x, y)$ вида $u(t, x, y) = u(z, y)$, где $z = x + ct$, сводится к уравнению

$$cu_{zz} = (\exp u_y)_y,$$

очевидно эквивалентному уравнению (5.3).

Уравнение (5.20) после дифференцирования по y и обозначения $w = u_y$ принимает вид

$$w_{tx} = (\exp w)_{yy}. \quad (5.28)$$

Уравнение (5.20), (5.28) впервые было выведено в 1987 году в работе [12]. Оно существенно отличается от уравнения

$$w_{xx} + w_{yy} = (\exp w)_{zz}, \quad (5.29)$$

которое возникло при изучении автодуальных решений уравнений Эйнштейна для положительно определенных метрик [82, 83]. Связь уравнений вида

$$\partial^2 y(t)/\partial z_+ \partial z_- = \int dt' K(t, t') \exp y(t')$$

с континуальными алгебрами Ли изучалась в работах [86, 87].

IV. Покажем, что уравнение (5.28) имеет решения, которые с течением времени становятся многозначными. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$w_t = f(w)w_y, \quad w_x = g(w)w_y, \quad (5.30)$$

где $f(w)$, $g(w)$ — некоторые функции. Продифференцировав первое уравнение (5.30) по x , а второе по t и подставив выражения w_t и w_x , в силу уравнений (5.30) находим

$$w_{tx} = w_{xt} = (fg)'_w w_y^2 + fg w_{yy} = (fg w_y)_y. \quad (5.31)$$

Поэтому уравнения (5.30) совместны.

Уравнение (5.31) совпадает с уравнением (5.28), если $f(w)g(w) = \exp w$. В этом случае любое решение совместной системы уравнений (5.30) является также решением уравнения (5.28). Из уравнений (5.30) следует уравнение

$$w_t = \frac{f(w)}{g(w)} w_x. \quad (5.32)$$

Из уравнений (5.30), (5.32) следуют уравнения

$$ft = ff_y, \quad gx = gg_y, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_t = \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{f}{g}\right)_x. \quad (5.35)$$

Каждое из этих уравнений совпадает с уравнением опрокидывающейся волны Римана. Поэтому непостоянные решения уравнений (5.33) и, следовательно, соответствующие им решения уравнения (5.28) при изменении времени t становятся многозначными.

В простейшем случае $f(w) = c_1 \exp(w/2)$, $g(w) = c_2 \exp(w/2)$ из уравнений (5.30) находим

$$w(t, x, y) = w(\tau, y), \quad \tau = c_1 t + c_2 x,$$

и уравнения (5.30) сводятся к одному уравнению опрокидывающейся волны Римана $f_\tau = ff_y$.

З а м е ч а н и е. Уравнение (5.29) для функций вида $w(x, y, z) = w(\tau, x)$, $\tau = \alpha x + \beta y$ переходит в уравнение $(\alpha^2 + \beta^2) w_{\tau\tau} = (\exp w)_{zz}$, эквивалентное уравнению (5.3), (5.16). Поэтому уравнение (5.29) для решений вида $w(\tau, z)$ имеет счетное множество первых интегралов и может быть линеаризовано с помощью преобразования годографа (см. § 6).

V. Укажем вывод уравнения (5.20), (5.22) как предельного случая из уравнения нулевой кривизны

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial x} + [L, A] = 0. \quad (5.34)$$

Пусть $L(E, t, x)$ и $A(E, t, x)$ — линейные операторы, действующие на пространстве функций $\varphi(y)$, определенные формулами

$$\begin{aligned} L(E, t, x) &= E a(t, x, y) P_\varepsilon + b(t, x, y) + E^{-1} P_{-\varepsilon}, \\ A(E, t, x) &= E \varepsilon^{-1} a(t, x, y) P_\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где P_ε — оператор сдвига по y : $P_\varepsilon(\varphi)(y) = \varphi(y + \varepsilon)$; E, ε — произвольные параметры. Уравнение (5.34), (5.35) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(t, x, y)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial a(t, x, y)}{\partial x} &= \\ &= a(t, x, y) \frac{1}{\varepsilon} (b(t, x, y + \varepsilon) - b(t, x, y)), \quad (5.36) \\ \frac{\partial b(t, x, y)}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} (a(t, x, y) - a(t, x, y - \varepsilon)). \end{aligned}$$

Уравнения (5.36) после замены $t_1 = t + x_1$, $x = \varepsilon^{-1} x_1$ и перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ преобразуются в уравнения

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = a \frac{\partial b}{\partial y}, \quad \frac{\partial b}{\partial t_1} = \frac{\partial a}{\partial y}. \quad (5.37)$$

В силу второго уравнения (5.37) существует функция $v(t, x, y)$ такая, что $a = v_{t_1}$, $b = v_y$. После подстановки этих выражений первое уравнение (5.37) переходит в уравнение (5.22).

§ 6. Опрокидывающиеся решения в континуальных пределах систем Ферми — Паста — Улама и их двумеризаций

I. В классической работе [71] численно изучалась динамика частиц на прямой с лагранжианом

$$L = \sum_k \left(\frac{1}{2} \dot{q}_k^2 - V(q_{k+1} - q_k) \right), \quad (6.1)$$

где потенциальная функция имела вид

$$V_1(u) = \frac{1}{2} u^2 + \frac{\alpha}{3} u^3, \quad V_2(u) = \frac{1}{2} u^2 + \frac{\beta}{4} u^4. \quad (6.2)$$

Основным результатом работы [71] является открытие аномально большого времени стохастизации рассматриваемых систем при числе частиц порядка ста.

В данном параграфе показано, что нелинейное дифференциальное уравнение, являющееся континуальным пределом систем (6.1) — (6.2), может быть линеаризовано с помощью специального преобразования. Это обстоятельство является еще одним объяснением (см. [72]) отсутствия стохастизации в системах Ферми — Паста — Улама (6.1) — (6.2).

II. Уравнения движения, соответствующие лагранжиану (6.1), после растяжения координат q_k и времени t могут быть представлены в виде

$$\ddot{q}_k = \frac{1}{\varepsilon} \left(V' \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon} \right) - V' \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\varepsilon} \right) \right), \quad (6.3)$$

где ε — произвольный параметр. Предположим, что существует гладкая функция $u(t, x)$ такая, что $q_k(x) = u(t, x_k)$, где $x_k = k\varepsilon$. Уравнения (6.3) после указанной подстановки при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходят в уравнение

$$u_{tt} = (V'(u_x))_x. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) лагранжево с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} u_t^2 - V(u_x). \quad (6.5)$$

Динамика общей цепочки частиц (6.3) в отличие от цепочки Тода (1.1), где $V(u) = \exp u$, не интегрируема. Однако ниже мы докажем, что соответствующий континуальный предел — уравнение (6.4) — всегда (при произвольной функции $V(u)$) эквивалентен некоторому линейному уравнению. Это утверждение справедливо также

и для всех лагранжевых систем с лагранжианами $L(u_t, u_x)$, не зависящими явно от функции $u(t, x)$. Соответствующее уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} = 0. \quad (6.6)$$

Утверждение 2. Уравнение Лагранжа (6.6) для произвольной невырожденной функции Лагранжа $L(u_t, u_x)$ эквивалентно некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. В случае лагранжиана (6.5) эквивалентное линейное уравнение также является лагранжевым и имеет лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} v_r^2 - \frac{1}{2} V''(r) v_p^2. \quad (6.7)$$

Доказательство. Обозначим $p = u_t$, $r = u_x$; условие совместности $u_{tx} = u_{xt}$ переходит в уравнение

$$p_x - r_t = 0. \quad (6.8)$$

Уравнение Лагранжа (6.6) принимает вид

$$L_{pp}p_t + L_{pr}r_t + L_{rp}p_x + L_{rr}r_x = 0. \quad (6.9)$$

Нелинейная система уравнений (6.8) — (6.9) эквивалентна уравнению Лагранжа (6.6). Следуя классическим работам Римана по газовой динамике [73], применим к системе (6.8), (6.9) преобразование годографа, т. е. сделаем нелинейное преобразование

$$p(t, x), r(t, x) \rightarrow t(p, r), x(p, r). \quad (6.10)$$

Частные производные функций (6.10) связаны соотношениями

$$p_t = Dx_r, \quad r_t = -Dx_p, \quad p_x = -Dt_r, \quad r_x = Dt_p, \quad (6.11)$$

где $D = (t_p x_r - t_r x_p)^{-1} \neq 0$. В силу равенств (6.11) уравнения (6.8), (6.9) после преобразования годографа (6.10) принимают вид

$$t_r - x_p = 0, \quad L_{pp}x_r - L_{pr}(x_p + t_r) + L_{rp}t_p = 0. \quad (6.12)$$

Из первого уравнения (6.12) находим $t = v_p$, $x = v_r$. Поэтому второе уравнение (6.12) принимает вид

$$L_{pp}v_{rr} - 2L_{pr}v_{pr} + L_{rr}v_{pp} = 0. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.13), очевидно, является линейным относительно функции $v(p, r)$.

В случае лагранжиана L (6.5) уравнение (6.13) переходит в уравнение

$$v_{rr} - V''(r)v_{pp} = 0, \quad (6.14)$$

которое является лагранжевым уравнением, отвечающим лагранжиану (6.7). Утверждение 2 доказано.

З а м е ч а н и е. Если лагранжиан L имеет вид

$$L(u_t, u_x) = A(u_t) + B(u_x), \quad (6.15)$$

то соответствующее линейное уравнение (6.13) является лагранжевым с лагранжианом

$$L_1 = \frac{1}{2} A''(p)v_r^2 + \frac{1}{2} B''(r)v_p^2.$$

В случае лагранжианов (6.5), (6.15) соответствующие линейные уравнения (6.13) могут быть решены методом Фурье разделения переменных. С помощью преобразования годографа [73] произвольное нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$A(u_t, u_x)u_{tt} + B(u_t, u_x)u_{tx} + C(u_t, u_x)u_{xx} = 0$$

преобразуется в линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$A(p, r)v_{rr} - B(p, r)v_{pr} + C(p, r)v_{pp} = 0.$$

III. Для систем Ферми — Паста — Улама (6.1) — (6.2) предельные дифференциальные уравнения (6.4) имеют вид

$$u_{tt} = (u_x + \alpha u_x^2), \quad u_{tt} = (u_x + \beta u_x^3)_x. \quad (6.16)$$

Эквивалентные им линейные дифференциальные уравнения (6.13) принимают вид

$$v_{rr} = (1 + 2\alpha r)v_{pp}, \quad v_{rr} = (1 + 3\beta r^2)v_{pp}. \quad (6.17)$$

Первое уравнение (6.17) является уравнением смешанного типа и после замены $s = -(2\alpha)^{-1/3}(r + 1/2\alpha)$ переходит в классическое уравнение Трикоми

$$v_{ss} + sv_{pp} = 0. \quad (6.18)$$

Второе уравнение (6.17) всюду является уравнением гиперболического типа.

В случае цепочки Тода $V(u) = e^u$; уравнение (6.14) принимает вид

$$v_{rr} - e^r v_{pp} = 0 \quad (6.19)$$

и имеет всюду гиперболический тип.

Решения уравнений (6.13) — (6.14) обладают достаточно хорошими свойствами. Однако соответствующее им обратное отображение годографа (6.10) является, вообще говоря, многозначным, что соответствует возникновению особенностей в решениях уравнения Лагранжа (6.4).

Укажем конструкции некоторых решений уравнения (6.4). Продифференцируем уравнение (6.4) по x и обозначим $r = u_x$; получим уравнение

$$r_{tt} = (V'(r))_{xx}. \quad (6.20)$$

Рассмотрим два уравнения первого порядка

$$r_t + \varepsilon (V''(r))^{1/2} r_x = 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (6.21)$$

Дифференцируя уравнение (6.21) по t и подставляя выражение для r_t из (6.21), получаем уравнение

$$r_{tt} = V'''(r) r_x^2 + V''(r) r_{xx} = (V''(r) r_x)_x = (V'(r))_{xx}.$$

Поэтому решение каждого из уравнений (6.21) является также решением уравнения (6.20) и определяет решение уравнения (6.4) в силу равенства $u_x = r$. Обозначим $f = (V''(r))^{1/2}$. В силу уравнений (6.21) получаем

$$f_t + \varepsilon f f_x = 0. \quad (6.22)$$

Уравнения (6.22) совпадают с классическими уравнениями опрокидывающейся волны Римана (см. § 5, п. II). Поэтому все лагранжевы уравнения (6.4) имеют решения, удовлетворяющие уравнениям (6.21), (6.22), которые при изменении времени t становятся многозначными.

IV. Двумеризацию систем Ферми — Паста — Улама определим системой уравнений

$$\frac{\partial^2 q_k}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(V' \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon} \right) - V' \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\varepsilon} \right) \right), \quad (6.23)$$

где ε — произвольный параметр. Предположим, что существует гладкая функция $u(t, x, y)$ такая, что $q_k(t, x) = u(t, x, y_k)$, где $y_k = k\varepsilon$. Система уравнений (6.23) при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение

$$u_{tx} = (V'(u_y))_y. \quad (6.24)$$

Уравнение (6.24) лагранжево с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} u_{tx}^2 - V(u_y). \quad (6.25)$$

Покажем, что уравнение (6.24) при произвольной функции $V'(u_y)$ имеет решения, которые при изменении

времени t становятся многозначными. Уравнение (6.24) после дифференцирования по y и обозначения $u_y = r$ принимает вид

$$r_{tx} = (V'(r))_{yy}. \quad (6.26)$$

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$r_t = f(r)r_y, \quad r_x = g(r)r_y, \quad (6.27)$$

где $f(r)$, $g(r)$ — некоторые функции. Дифференцируя первое уравнение (6.27) по x , а второе по t и подставляя выражения r_t и r_x из этих уравнений, получаем равенства

$$r_{tx} = r_{xt} = (fg)'r_y^2 + fgr_{yy} = (fgr_y)_y. \quad (6.28)$$

Поэтому уравнения (6.27) совместны. Пусть функции $f(r)$ и $g(r)$ удовлетворяют равенству $f(r)g(r) = V''(r)$. Тогда уравнение (6.28) совпадает с уравнением (6.26). Поэтому любое решение совместной системы уравнений (6.27) при $f(r)g(r) = V''(r)$ определяет решение уравнения (6.26). Из уравнений (6.27) следует уравнение

$$r_t = \frac{f(r)}{g(r)} r_x. \quad (6.29)$$

Из уравнений (6.27), (6.29) следуют уравнения

$$f_t = ff_y, \quad g_x = gg_y, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_t = \frac{f}{g} \left(\frac{f}{g}\right)_x, \quad (6.30)$$

каждое из которых совпадает с уравнением опрокидывающейся волны Римана. Поэтому любое непостоянное решение уравнений (6.27), (6.29) при изменении независимых переменных становится многозначным. Следовательно, и соответствующие решения уравнений (6.24), (6.26) многозначны.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА КОАЛГЕБРАХ ЛИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ КОАЛГЕБРАХ ЛИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

До недавнего времени считалось, что уравнения Эйлера на конечномерных коалгебрах Ли, возникающие в физических задачах, обязаны обладать малой размерностью (вследствие трехмерности физического пространства). Были известны примеры таких уравнений, связанные с трехмерной алгеброй Ли $SO(3)$ (собственно уравнения Эйлера вращения свободного твердого тела) и шестимерными алгебрами Ли $SO(3) \oplus SO(3) = SO(4)$ и E_3 (уравнения Лэмба — Жуковского — Пуанкаре, уравнения Кирхгофа, уравнения Эйлера — Пуассона (см. [116, 117])).

В данной главе показано, что уравнения Эйлера на конечномерных коалгебрах Ли сколь угодно большой размерности возникают в следующих двух группах физических задач:

— вращение твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием различных физических полей и при наличии в твердом теле произвольного числа эллипсоидальных полостей, заполненных идеальной несжимаемой (магнитной) жидкостью, совершающей однородное вихревое движение (§ 2);

— вращение спутника Земли вокруг центра масс, движущегося по круговой орбите, при учете воздействия неоднородности гравитационного поля Земли и ее магнитного поля, а также при наличии на спутнике емкостей эллипсоидальной формы, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью (§ 3).

В § 1 приведен краткий исторический обзор классических работ, в которых исследовались уравнения Эйлера вращения n -мерного твердого тела.

§ 1. Классические исследования уравнений Эйлера вращения n -мерного твердого тела

Классические уравнения вращения свободного трехмерного твердого тела вокруг центра масс были выведены Леонардом Эйлером в 1758 году [93]:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\omega}$ — векторы момента количества движения и угловой скорости твердого тела во вращающейся системе отсчета, координаты которых связаны соотношениями $M_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \omega_k$, где I_{ik} — компоненты тензора инерции твердого тела.

Постановка вопроса о n -мерных обобщениях уравнений Эйлера была дана Артуром Кэли в 1846 году в работе «О свойствах косых детерминантов» [94].

В 1875 году В. Фрам в работе [95] построил n -мерные обобщения уравнений (1.1) и представил их в виде

$$T_{ik} \frac{dr_{ik}}{dt} = \sum_{\mu} (T_{k\mu} - T_{i\mu}) r_{i\mu} r_{k\mu}, \quad (1.2)$$

где переменные величины r_{ik} кососимметричны ($r_{ik} = -r_{ki}$), а постоянные T_{ik} симметричны ($T_{ik} = T_{ki}$), $i, k, \mu = 1, 2, \dots, n$. В. Фрам нашел ряд первых интегралов уравнений (1.2) и указал их вывод из принципа наименьшего действия. Также В. Фрам отметил, что при $n = 4$ для интегрируемости уравнений (1.2) достаточно найти еще один дополнительный первый интеграл.

В 1891 году Ф. Шоттки в работе [96] открыл первый интегрируемый случай динамики четырехмерного твердого тела. В этом случае коэффициенты T_{ik} (1.2) удовлетворяют условиям

$$T_{ik} = A_i + A_k. \quad (1.3)$$

Ф. Шоттки удалось свести интегрирование системы (1.2), (1.3) при $n = 4$ к квадратурам.

В 1901 году Анри Пуанкаре в работе [97] вывел следующие уравнения в сопряженном пространстве к произвольной алгебре Ли:

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\eta_s} = \sum_{k,i} C_{sk,i} \frac{dT}{d\eta_i} \eta_k + \Omega_s, \quad (1.4)$$

где $C_{sk,i}$ — структурные константы в коммутационных со-

отношениях дифференциальных операторов, представляющих рассматриваемую алгебру Ли

$$X_i X_k - X_k X_i = \sum_s C_{ik,s} X_s. \quad (1.5)$$

А. Пуанкаре вывел уравнения (1.4) из принципа наименьшего действия и отметил, что уравнения Эйлера вращения твердого тела являются частным случаем уравнений (1.4), причем величины Ω_s определяют момент сил, действующих на твердое тело.

В 1923 году Герман Вейль в книге «Пространство, Время, Материя» вывел «в качестве упражнения по тензорному исчислению» уравнения свободного вращения n -мерного твердого тела:

$$(T_i + T_k) \frac{dv_{ik}}{dt} = (T_k - T_i) (v v)_{ik}, \quad (1.6)$$

где v_{ik} — компоненты кососимметричной матрицы v .

Уравнения вращения четырехмерного твердого тела были выведены с помощью алгебры кватернионов в 1942 году В. Бляшке в книге «Неевклидова геометрия и механика» [99].

В 1951 году О. Боттемой и Х. Бефом в работе [100] были переоткрыты уравнения вращения n -мерного твердого тела, которые были представлены ими в виде

$$\dot{\omega}_{ij} (A_i + A_j) + (A_i - A_j) \omega_{im} \omega_{jm} = 0, \quad (1.7)$$

где $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. О. Боттема и Х. Беф указали простейшие первые интегралы уравнений (1.7) и исследовали в работе [101] стационарные вращения четырехмерного твердого тела, не зная, что в 1891 году Ф. Шоттки была решена общая задача (при $n = 4$).

В 1966 году В. И. Арнольд в работе [102] определил уравнения Эйлера в сопряженном пространстве L^* к произвольной алгебре Ли L в виде

$$\dot{M} = \text{ad}_{a(M)}^* M, \quad (1.8)$$

где вектор $M \in L^*$ и $a(M)$ — линейный самосопряженный оператор из пространства L^* в L . В работе [102] показано, что гидродинамические уравнения Эйлера представляются в виде уравнений (1.8) в коалгебре Ли группы Ли диффеоморфизмов евклидова пространства.

После работы [102] появилось большое количество работ, в которых изучались уравнения вида (1.8) (их библиография имеется в обзорах [164, 165]). При этом

результаты В. Фрама [95], Ф. Шоттки [96], А. Пуанкаре [97], Г. Вейля [98] оказались в определенной степени забытыми, были вновь перестроены и существенно продвинуты.

§ 2. Уравнения Эйлера на коалгебрах Ли, связанные с динамикой твердого тела, имеющего неподвижную точку, и с движением тела в жидкости

1. В данном параграфе указаны физические задачи, связанные с динамикой твердого тела, имеющего неподвижную точку, в которых возникают уравнения Эйлера на коалгебрах Ли сколь угодно большой конечной размерности. Связь исследуемых уравнений с алгебрами Ли приводит к их гамильтоновости и существованию ряда первых интегралов динамики, что является крайне важным для нахождения интегрируемых случаев. Отыскание интегрируемых случаев в различных задачах динамики твердого тела является классической проблемой математической физики, имеющей большую и яркую историю. Важнейшие интегрируемые случаи были открыты Л. Эйлером [93], Ж. Лагранжем [103], С. В. Ковалевской [104], В. А. Стекловым [105, 106], А. М. Ляпуновым [107], С. А. Чаплыгиным [108, 109], Д. Н. Горячевым [110], А. Клебшем [111], Ф. Бруном [112] и др. Все перечисленные интегрируемые случаи найдены в задачах, описываемых системами из шести обыкновенных дифференциальных уравнений; динамика их траекторий происходит на двумерных инвариантных торах.

В данном параграфе показано, что классические уравнения Эйлера [93] вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в произвольном ньютоновском поле связаны с некоторой двенадцатимерной алгеброй Ли. При исследовании вращения пульсаров (нейтронных звезд) выведена динамическая система, связанная с девятимерной алгеброй Ли $SO(3) \oplus E_3$. Показано, что динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, описывается уравнениями Эйлера на алгебре Ли $L = SO(3) \oplus \dots \oplus SO(3)$ размерности $3n + 3$; при наличии в полостях магнитной жидкости размерность возникающей алгебры Ли $L = SO(3) \oplus E_3 \oplus \dots \oplus E_3$ равна $6n + 3$.

При исследовании этих примеров было обнаружено, что определение (1.8) не охватывает ряда важных физи-

ческих уравнений, связанных с алгебрами Ли: например, классические уравнения вращения твердого тела в общем потенциальном поле сил, выведенные Эйлером в работе [93], не могут быть представлены в виде (1.8). Поэтому в дальнейшем используется другое, более широкое определение уравнений Эйлера, данное Анри Пуанкаре в работе [97] (см. (1.4)).

Пусть L — это n -мерная алгебра Ли, L^* — ее сопряженное пространство, $x_1, \dots, x_n$ — координаты на L^* . Линейные функции $x_1, \dots, x_n$ по определению принадлежат алгебре Ли L и образуют базис; пусть C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли L в базисе $x_1, \dots, x_n$. В пространстве функций на L^* , как известно, определена скобка Пуассона — Ли

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad (2.1)$$

которая естественно связана с симплектической структурой Березина, Костанта, Кириллова. Пусть $H(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция на сопряженном пространстве L^* .

Определение. Уравнения Эйлера в пространстве L^ называется система уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = \{x_i, H\} = \sum_{j,k=1}^n C_{ij}^k x_k \frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) очевидно совпадают с уравнениями (1.4) при $\Omega_s = 0$ после преобразования Лежандра. Уравнения (2.2) в специальном случае, когда гамильтониан $H(x_1, \dots, x_n)$ является однородным многочленом второй степени, переходят в уравнения вида (1.8).

II. Перечислим важнейшие физические задачи, приводящие к уравнениям Эйлера в смысле (2.2), которые ранее исследовались в цикле работ автора [121—127].

1) *Вращение твердого тела T вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с потенциалом $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.*

Пусть α, β, γ — три орта неподвижной системы координат, отнесенные к системе отсчета S , жестко связанной с твердым телом. Уравнения вращения твердого тела в системе S имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \omega + \frac{\partial U}{\partial \alpha} \times \alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \times \gamma, \quad (2.3)$$

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega,$$

где $U(\alpha, \beta, \gamma)$ — потенциальная функция,

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \int_T \rho(\mathbf{r}) \varphi((\mathbf{r}, \alpha), (\mathbf{r}, \beta), (\mathbf{r}, \gamma)) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3,$$

и r_1, r_2, r_3 — координаты в системе отсчета S .

Уравнения (2.3) являются уравнениями Эйлера вида (2.2) в пространстве L_{12}^* и имеют гамильтониан

$$H = 2^{-1}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - U(\alpha, \beta, \gamma), \quad M_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \omega_k.$$

Соответствующая алгебра Ли L_{12} является полупрямой суммой $SO(3) + \mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3$ с базисом $X_i, Y_j^\alpha, i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3$, в котором коммутационные соотношения имеют вид

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \quad [X_i, Y_j^\alpha] = \varepsilon_{ijk} Y_k^\alpha, \quad [Y_i^\alpha, Y_j^\beta] = 0. \quad (2.4)$$

В силу уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ потенциальная функция $U(\alpha, \beta, \gamma)$ удовлетворяет трем уравнениям ($i = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_i^2} = 0.$$

Очевидно, что нелинейность функции $U(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть сколь угодно сложной, поэтому в общем случае уравнения Эйлера (2.3) нельзя представить в виде уравнений (1.8) (для которых гамильтониан H необходимо квадратичен). В простейшем случае, когда потенциал φ является линейной функцией координат $\varphi = a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3$, уравнения (2.3) эквивалентны уравнениям Эйлера — Пуассона и также не могут быть представлены в виде (1.8).

2) *Динамика твердого тела с распределенным электрическим зарядом в идеальной несжимаемой жидкости при наличии постоянного гравитационного и электрического полей и при условии равенства выталкивающей силы и силы тяжести и нулевом суммарном заряде тела.*

Уравнения движения в связанной с твердым телом системе отсчета S , центр которой совпадает с центром масс твердого тела, при условии безвихревого обтекания имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{u} + m \mathbf{g} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma} + E \mathbf{d} \times \boldsymbol{\delta}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ω — угловая скорость, u — скорость твердого тела в жидкости, p — полный импульс, M — полный момент импульса (в системе отсчета S), m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, γ — направление силы тяжести, вектор r определяет положение центра масс вытесненного объема жидкости, E — напряженность электрического поля, d — вектор дипольного момента, δ — направление электрического поля. Уравнения (2.5) являются уравнениями Эйлера в пространстве L_{12}^* и имеют гамильтониан

$$H = 2^{-1} \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} M_i M_j + 2c_{ij} M_i p_j + b_{ij} p_i p_j) - \\ - mg(r, \gamma) - E(d, \delta), \\ \omega_i = \frac{\partial H}{\partial M_i}, \quad u_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

где a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} — произвольные постоянные коэффициенты, обеспечивающие положительную определенность указанной квадратичной формы.

При $E=0$ уравнения (2.5) являются уравнениями Эйлера в пространстве L_9^* , где алгебра Ли L_9 имеет коммутаторы вида (2.4) при $\alpha, \beta = 1, 2$. При $E=0$, $g=0$ уравнения (2.5) переходят в уравнения Кирхгофа (уравнения Эйлера в пространстве E_3^* [116]).

3) *Вращение намагниченного твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном гравитационном и магнитном поле.*

Уравнения динамики в системе отсчета S имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega + mgt \times \gamma + h\mathfrak{M} \times \delta, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad \dot{\delta} = \delta \times \omega, \quad (2.6)$$

где $\mathfrak{M}$ — вектор магнитного момента твердого тела, δ — направление магнитного поля, h — его напряженность. Уравнения (2.6) являются уравнениями Эйлера в пространстве L_9^* с гамильтонианом

$$H = 2^{-1} (M, \omega) - m\bar{g}(r, \gamma) - h(\mathfrak{M}, \delta), \quad M_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \omega_k.$$

При $\mathfrak{M}=0$ уравнения (2.6) переходят в классические уравнения Эйлера — Пуассона, которые являются уравнениями Эйлера в пространстве E_3^* в смысле (2.2).

4) Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение (модель вращения пульсара).

Уравнения динамики в системе отсчета S имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{M}$ — суммарный момент количества движения твердого тела и жидкости относительно общего центра масс, $\mathbf{A}$ — угловая скорость вращения твердого тела, $\mathbf{B}$ — угловая скорость внутреннего вращения жидкости, $\mathbf{K}$ — вектор вихря скорости жидкости, векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ связаны с магнитным полем, вмороженным в жидкость. Координаты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ линейно выражаются через координаты векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$, координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ также связаны линейными соотношениями. Уравнения (2.7) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли $SO(3) \oplus E_3$ и имеют гамильтониан

$$H = 2^{-1}((\mathbf{M}, \mathbf{A}) + (\mathbf{K}, \mathbf{B}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})).$$

5) Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

Уравнения динамики в системе отсчета S имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{K}}_\alpha = \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha, \quad (2.8)$$

где $\alpha = 1, \dots, n$, $\mathbf{M}$ — суммарный момент количества движения (относительно неподвижного общего центра масс) твердого тела и жидкости во всех эллипсоидальных полостях, $\mathbf{A}$ — угловая скорость вращения твердого тела, вектор $\mathbf{K}_\alpha$ определяет ротор (вихрь) скорости движения жидкости в α -полости. Векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ связаны с векторами $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_n$ линейным преобразованием, коэффициенты которого зависят от компонент тензора инерции твердого тела, параметров эллипсоидальных полостей и плотности жидкости в них. Обозначим через $A_{k,0} = SO(3) \oplus \dots \oplus SO(3)$ прямую сумму k экземпляров алгебры Ли $SO(3)$. Уравнения (2.8) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли $A_{n+1,0}$ и имеют гамильтониан

$$H = 2^{-1} \left((\mathbf{M}, \mathbf{A}) + \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{K}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha) \right). \quad (2.9)$$

Уравнения (2.8) имеют $n + 1$ геометрических первых интегралов

$$J_0 = (M, M), \quad J_\alpha = (K_\alpha, K_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Совместные (ненулевые) уровни этих интегралов определяют симплектические подмногообразия M^{2n+2} , являющиеся произведениями $n + 1$ двумерной сферы S^2 , $M^{2n+2} = S^2 \times \dots \times S^2$, на которых уравнения (2.8) гамильтоновы с гамильтонианом H (2.9).

Уравнения (2.8) при $n = 1$ переходят в уравнения Лэмба — Жуковского — Пуанкаре, которые являются уравнениями Эйлера на алгебре Ли $SO(3) + SO(3) = SO(4)$.

6) *Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными идеальной несжимаемой сверхпроводящей магнитной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.*

Уравнения динамики в системе отсчета S имеют вид

$$\dot{M} = M \times A, \quad \dot{K}_\alpha = K_\alpha \times B_\alpha + u_\alpha \times w_\alpha, \quad \dot{u}_\alpha = u_\alpha \times B_\alpha, \quad (2.10)$$

где $\alpha = 1, \dots, n$, M — суммарный момент количества движения (относительно общего центра масс) твердого тела и жидкости во всех эллипсоидальных полостях, A — угловая скорость вращения твердого тела, векторы K_α , B_α , u_α , w_α характеризуют движение жидкости и замороженное магнитное поле в α -полости. Координаты векторов A , $B_1, \dots, B_n$ линейно выражаются через координаты векторов M , $K_1, \dots, K_n$, координаты векторов u_α и w_α связаны линейными соотношениями; коэффициенты этих линейных связей зависят от компонент тензора инерции твердого тела и параметров эллипсоидальных полостей. Обозначим через $A_{k,m} = SO(3) \oplus \dots \oplus SO(3) \oplus E_3 \oplus \dots \oplus E_3$ прямую сумму k экземпляров алгебры Ли $SO(3)$ и m экземпляров алгебры Ли E_3 . Уравнения (2.10) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли $L = A_{1,n}$ и имеют гамильтониан

$$H = 2^{-1} \left((M, A) + \sum_{\alpha=1}^n ((K_\alpha, B_\alpha) + (u_\alpha, w_\alpha)) \right). \quad (2.11)$$

При отсутствии магнитного поля в k полостях ($u_\alpha = w_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, k$) алгебра Ли L редуцируется к алгебре Ли $A_{k+1, n-k}$.

7) *Вращение твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью, вокруг не-*

подвижной точки в ньютоновском поле с потенциалом $\Phi(x_1, x_2, x_3)$.

Динамика в системе отсчета S определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \mathbf{A} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} \times \alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \times \gamma, \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \mathbf{A}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \mathbf{A}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \mathbf{A}, \\ \dot{\mathbf{K}}_\alpha &= \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{w}_\alpha, \quad \dot{\mathbf{u}}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha,\end{aligned}\quad (2.12)$$

которые являются нераспадающейся комбинацией уравнений (2.3) и (2.10). Уравнения (2.12) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли $L = L_{12} \oplus A_{0,n}$ и имеют гамильтониан

$$H = 2^{-1}(\mathbf{M}, \mathbf{A}) + 2^{-1} \sum_{\alpha=1}^n ((\mathbf{K}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha) + (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha)) - U(\alpha, \beta, \gamma).$$

При отсутствии магнитного поля в k полостях алгебра Ли L редуцируется к алгебре Ли $L_{12} \oplus A_{k,n-k}$.

Комбинируя условия задач 2) и 5), получаем уравнения Эйлера, связанные с алгеброй Ли $L = L_{12} \oplus A_{k,0}$. При отсутствии электрического поля алгебра Ли L редуцируется к алгебре Ли $L_9 \oplus A_{k,0}$. При отсутствии и электрического и гравитационного полей алгебра Ли L редуцируется к алгебре Ли $E_3 \oplus A_{k,0} = A_{k,1}$. Алгебры Ли $L_9 \oplus A_{k,0}$ и $A_{k,1}$ связаны также с уравнениями, получающимися комбинацией условий задач 3) и 5).

§ 3. Алгебраическая и гамильтонова структура уравнений вращения спутника вокруг центра масс

1. Рассмотрим вращение спутника Земли по круговой орбите радиуса R , в предположении, что гравитационное поле Земли является сферически симметричным с потенциалом $\Phi = -Gmr^{-1}$, где G — гравитационная постоянная, m — масса Земли. Предположим, что центр масс спутника движется по круговой орбите радиуса R , т. е. вращение спутника вокруг центра масс не влияет на орбиту. Угловая скорость Ω вращения спутника по орбите определяется формулой $\Omega^2 = GmR^{-3}$. Пусть $\mathbf{M}$ — вектор кинетического момента спутника в неподвижной системе отсчета F , вектор γ является радиус-вектором центра масс, вектор $\mathbf{n}$ является постоянным вектором нормали к орбите, единичный вектор α является касательным к ор-

бите по направлению движения спутника, $\alpha = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma}$. В дальнейшем все векторы рассматриваются во вращающейся системе отсчета S , жестко связанной со спутником T ; в системе S тензор инерции является диагональным: $I_{ik} = I_i \delta_{ik}$.

Момент K гравитационных сил ньютоновского потенциала $\phi = -Gmr^{-1}$, действующих на спутник T , в главном приближении определяется формулой [130]

$$\mathbf{K} = 3\Omega^2 \boldsymbol{\gamma} \times I \boldsymbol{\gamma}, \quad \Omega^2 = GmR^{-3}. \quad (3.1)$$

Уравнения вращения спутника вокруг центра масс в системе отсчета S имеют вид [130]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + 3\Omega^2 \boldsymbol{\gamma} \times I \boldsymbol{\gamma}, & \boldsymbol{\omega} &= I^{-1} \mathbf{M}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} - \Omega \mathbf{n}), & \dot{\mathbf{n}} &= \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим алгебру Ли L_9 , являющуюся полупрямой суммой алгебр Ли $SO(3) + \mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3$ (см. (2.4)). Векторы сопряженного пространства L_9^* в соответствии с указанным разложением представим в виде $\mathbf{M} + \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n}$. Уравнения Эйлера с гамильтонианом $H(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n})$ в пространстве L_9^* имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{n} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, & \dot{\mathbf{n}} &= \mathbf{n} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Возьмем гамильтониан $H(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n})$ в виде

$$H(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, I^{-1} \mathbf{M}) + \frac{1}{2} 3\Omega^2 (\boldsymbol{\gamma}, I \boldsymbol{\gamma}) - \Omega (\mathbf{M}, \mathbf{n}). \quad (3.4)$$

Справедливы равенства

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} = I^{-1} \mathbf{M} - \Omega \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} - \Omega \mathbf{n}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} = -\Omega \mathbf{M}. \quad (3.5)$$

Уравнения (3.3) с гамильтонианом (3.4) в силу равенств (3.5) совпадают с уравнениями (3.2). Следовательно, уравнения (3.2) являются уравнениями Эйлера в коалгебре Ли L_9 .

Уравнения Эйлера (3.2) — (3.4) в силу общей теории [120] являются гамильтоновыми с гамильтонианом (3.4) на шестимерных симплектических подмногообразиях $M^6 = SO(3) \times \mathbb{R}^3$, определяемых в пространстве L_9^* тремя геометрическими условиями

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}) = 0. \quad (3.6)$$

Поэтому для интегрируемости по Лиувиллю общей системы (3.3) в принципе достаточно иметь два инволютивных первых интеграла, не зависящих от гамильтониана H (3.4). В случае симметричного тензора инерции $I_1 = I_2$ имеется один дополнительный первый интеграл $J_1 = M_3$.

II. При учете несферичности Земли момент $\mathbf{K}$ гравитационных сил, действующих на спутник, определяется формулой

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \quad (3.7)$$

где $U(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n})$ — некоторая потенциальная функция. Уравнения вращения спутника в системе S принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} - \Omega \mathbf{n}), \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) также являются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли L_9^* и имеют гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, I^{-1} \mathbf{M}) + U(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}) - \Omega (\mathbf{M}, \mathbf{n}). \quad (3.9)$$

III. Для учета воздействия магнитного поля Земли предположим, что вдоль орбиты спутника магнитное поле имеет напряженность $h\boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\beta}$ — единичный вектор, имеющий постоянные координаты в базисе $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — вектор магнитного момента спутника (постоянный в системе отсчета S). Тогда уравнения вращения спутника в системе S имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + h \mathfrak{M} \times \boldsymbol{\beta}, \quad (3.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} - \Omega \mathbf{n}), \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\omega} - \Omega \mathbf{n}).$$

Эти уравнения являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве L_{12}^* к алгебре Ли L_{12} , являющейся полупрямой суммой алгебр Ли: $L_{12} = \text{SO}(3) + \mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3$ (см. (2.4)) и имеют гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, I^{-1} \mathbf{M}) + U(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}) - \Omega (\mathbf{M}, \mathbf{n}) - h (\mathfrak{M}, \boldsymbol{\beta}). \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10) являются гамильтоновыми на симплектических подмногообразиях $M^6 = \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, определенных условиями (3.6) и условиями

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 1, \quad (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = c_1, \quad (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n}) = c_2.$$

IV. Предположим, что на спутнике имеется n емкостей эллипсоидальной формы, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью. В первом приближении можно считать, что жидкость в каждой емкости совершает однородное вихревое движение. Уравнения вращения спутника вокруг центра масс при учете воздействия несферичности Земли и ее магнитного поля принимают вид (в системе отсчета S)

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A} + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + h \mathfrak{M} \times \beta,$$

$$\dot{\mathbf{K}}_\alpha = \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times (\omega - \Omega \mathbf{n}), \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \omega, \quad (3.12)$$

$$\dot{\beta} = \beta \times (\omega - \Omega \mathbf{n}).$$

Здесь $\mathbf{M}$ — полный момент количества движения спутника (вместе с жидкостью в n эллипсоидальных емкостях), $\mathbf{A}$ — угловая скорость вращения спутника вокруг центра масс, вектор $\mathbf{K}_\alpha$ определяет ротор (вихрь) скорости движения жидкости в α -емкости. Векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ связаны с векторами $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_n$ линейным преобразованием, коэффициенты которого зависят от тензора инерции спутника, размеров и расположения эллипсоидальных емкостей и плотности жидкости в них.

Уравнения (3.12) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли $L = L_{12} \otimes A_{n,0}$ (см. § 2, п. 5) и имеют гамильтониан

$$H = 2^{-1}(\mathbf{M}, \mathbf{A}) + 2^{-1} \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{K}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha) + U(\gamma, \mathbf{n}) - \Omega(\mathbf{M}, \mathbf{n}) - h(\mathfrak{M}, \beta).$$

При отсутствии магнитного момента спутника ($\mathfrak{M} = 0$) уравнения (3.12) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли $L = L_9 \oplus A_{n,0}$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В данной главе доказана теорема о том, что уравнения поступательно-вращательного движения произвольного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю и интегрируются явно в эта-функциях римановых поверхностей. При этом динамика центра масс твердого тела и его вращение вокруг центра масс разделяются и не взаимодействуют друг с другом. Доказана интегрируемость уравнений вращения произвольного твердого тела вокруг неподвижного центра масс в ньютоновском поле произвольных удаленных притягивающих объектов (в главном приближении). Показано, что в случае осесимметричного твердого тела рассматриваемая задача связана с классическим интегрируемым случаем Клебша для уравнений Кирхгофа. Указаны интегрируемые случаи уравнений вращения твердого тела в нелинейных гравитационных полях и доказана интегрируемость n -мерного аналога исследуемой задачи.

§ 1. История вопроса

I. Классической задачей механики является исследование поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с некоторым потенциалом $\varphi(x^1, x^2, x^3)$. В общем случае динамика центра масс твердого тела и его вращение вокруг центра масс не разделяются и определяются лагранжевой системой уравнений с шестью степенями свободы. Известным исключением является динамика однородного шара или динамика произвольного числа притягивающихся по закону Ньютона шаровых тел с однородным распределени-

ем плотности [129, 130]. В этом случае потенциальная энергия системы не зависит от поворотов любого шарового тела вокруг его центра. Следовательно, динамика центров масс тел определяется той же системой уравнений, что и динамика притягивающихся материальных точек, а вращение каждого тела вокруг его центра происходит по инерции и независимо от других тел.

В случае линейного потенциала $\varphi = a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3$ (постоянное поле сил) движение центра масс твердого тела происходит равноускоренно по прямой. Вращение твердого тела вокруг центра масс происходит независимо по инерции и определяется классическим интегрируемым случаем Эйлера.

Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в некотором поле сил является модельной задачей, так как в природе нет неподвижных точек и неподвижных тел. В случае вращения твердого тела вокруг точки, неподвижной в лабораторной системе отсчета, правильные уравнения движения должны учитывать неинерциальность этой системы отсчета (например, на поверхности Земли или на борту спутника).

Основной результат данной главы состоит в доказательстве теоремы 2 о том, что уравнения поступательно-вращательного движения произвольного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным потенциалом, являющимся многочленом второй степени

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i < j}^3 (a_{ij}x^i x^j + b_i x^i), \quad (1.1)$$

вполне интегрируемы по Лиувиллю [125 — 127]. В этом случае движение центра масс и вращение твердого тела вокруг центра масс оказываются независимыми. Динамика центра масс эквивалентна динамике гармонического осциллятора и поэтому интегрируется в элементарных функциях. Вращения твердого тела вокруг центра масс эквивалентно вращению вокруг неподвижной точки $O(x^i = 0)$ в гравитационном поле с однородным квадратичным потенциалом

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i < j}^3 a_{ij}x^i x^j. \quad (1.2)$$

Соответствующие уравнения динамики интегрируются явно в θ -функциях Римана от четырех переменных, ог-

раниченных на некоторое трехмерное подмногообразие (многообразие Прима).

II. Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с линейным потенциалом $\varphi = a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3$ (уравнения Эйлера — Пуассона) в общем случае не интегрируемы [114]. Только в трех исключительных случаях, найденных Эйлером [93], Лагранжем [103] и Ковалевской [104], возможно интегрирование динамики, при этом в первых двух случаях уравнения интегрируются в эллиптических функциях, а в случае Ковалевской — в эта-функциях Римана от двух переменных.

Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки O в ньютоновском поле с квадратичным потенциалом (1.2) является классической задачей механики. В этой задаче был известен единственный интегрируемый случай Бруна [112], в котором ньютоновское поле (потенциал φ (1.2)) обладает осевой симметрией (ось проходит через точку O); при этом квадратичный потенциал φ эквивалентен потенциалу $\varphi = a(x^1)^2$ и уравнения, описывающие вращение твердого тела T , сводятся к интегрируемому случаю Клебша [111] для уравнений Кирхгофа. При этом динамика траекторий является квазипериодической на двумерных торах T^2 . В малоизвестных работах Бруна [128] указаны два дополнительных интеграла уравнений вращения твердого тела в поле с общим квадратичным потенциалом вида (1.2); в работе Горячева [140] переоткрыт один из этих интегралов и в случае потенциала $\varphi = a((x^1)^2 - (x^2)^2)$ найдены два дополнительных первых интеграла. В названных работах гамильтонова структура уравнений динамики и вопрос об их интегрируемости по Лиувиллю не рассматривались. В исследуемой задаче совместный уровень всех первых интегралов является трехмерным многообразием, как и в самом общем случае уравнений Эйлера — Пуассона. Поэтому в отличие от интегрируемых случаев уравнений Эйлера — Пуассона и всех классических интегрируемых случаев [114, 119] здесь метод последнего множителя Якоби, который использовали классики для доказательства интегрируемости, неприменим. По рассматриваемой задаче выполнена также работа [149].

III. В данной главе показано, что уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с квадратичным потенциалом являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к не-

которой девятимерной алгебре Ли L_9' и, следовательно, гамильтоновы на шестимерных орбитах M^6 . Возникающие гамильтоновы системы на симплектических многообразиях имеют три первых интеграла J_1, J_2, J_3 , которые находятся в инволюции (J_1 — гамильтониан), и поэтому вполне интегрируемы по Лиувиллю.

Теорема 2 является отражением фундаментального физического факта — равенства инертной и гравитационной масс, вследствие чего кинетическая энергия вращения твердого тела и его потенциальная энергия в ньютоновском поле с потенциалом (1.2) зависят от одних и тех же параметров — моментов инерции твердого тела. Уравнения вращения электрически заряженного твердого тела вокруг неподвижной точки в электрическом поле с квадратичным потенциалом вида (1.2) в общем случае неинтегрируемы.

В условиях теоремы 2 нет никаких дополнительных предположений, кроме предположения о квадратичном виде ньютоновского гравитационного потенциала $\varphi(x)$. Доказательство интегрируемости динамики твердого тела не зависит от того, удовлетворяет ли потенциал $\varphi(x)$ уравнению Лапласа. При выполнении уравнения Лапласа $\Delta\varphi(x) = 0$ имеем $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$, поэтому общая траектория центра масс является трехмерной неограниченной кривой. В этом случае существуют также и ограниченные (при всех t) траектории центра масс, которые необходимо являются плоскими (задача о гармоническом осцилляторе).

Теорема 2 применима для описания поступательно-вращательного движения произвольного твердого тела в окрестности точек экстремума (внешнего) ньютоновского потенциала, где квадратичное приближение (1.1) является достаточно точным. Другой областью применений теоремы 2 является исследование динамики твердого тела в поле притяжения произвольных удаленных объектов при условии, что расстояние до этих объектов R много больше характерного размера тела l .

§ 2. Интегрируемость по Лиувиллю уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижного центра масс в поле удаленных притягивающих объектов

1. Известной задачей механики является задача о вращении произвольного твердого тела T вокруг его неподвижного центра масс в сферически-симметричном

ньютоновском поле материальной точки P , имеющей массу m . Если расстояние R от точки P до точки O много больше линейных размеров l твердого тела T , то уравнения вращения в главном приближении по l/R имеют вид [119, 130, 159]

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + 3GmR^{-3} \mathbf{p} \times I \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — векторы кинетического момента и угловой скорости тела в системе отсчета S , жестко связанной с вращающимся твердым телом, в которой тензор инерции тела диагонален: $I_{ik} = I_i \delta_{ik}$, G — гравитационная постоянная. Уравнения (2.1) проинтегрированы в явном виде [119, 130] и определяют интегрируемый случай Бруна, совпадающий с интегрируемым случаем Клебша.

II. Рассмотрим более общую задачу о вращении твердого тела T вокруг неподвижного центра масс O в ньютоновском гравитационном поле произвольного объекта V (который может состоять из нескольких отдельных тел) при условии, что размеры тела T много меньше расстояния до V . Пусть $R(x)$ — расстояние от точки x , принадлежащей V , до точки O , $\rho(x)$ — плотность массы объекта V , $\mathbf{p}(x)$ — единичный вектор, направленный из точки x в точку O . Уравнения вращения твердого тела являются естественным обобщением уравнений (2.1) и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \int_V 3G\rho(x) R^{-3}(x) (\mathbf{p}(x) \times I \mathbf{p}(x)) dx, \\ \dot{\mathbf{p}}(x) &= \mathbf{p}(x) \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Докажем следующую теорему [125].

Теорема 1. *Вращение произвольного твердого тела T вокруг неподвижного центра масс O в ньютоновском гравитационном поле любого удаленного объекта V описывается некоторой универсальной вполне интегрируемой динамической системой, не зависящей от параметров объекта V .*

Воспользуемся известным изоморфизмом векторов с компонентами v^i в $\mathbb{R}^3$ и кососимметрических (3×3) матриц с компонентами V_{jk} :

$$v^i \rightarrow V_{jk} = - \sum_{i=1}^3 v^i \varepsilon_{ijk}, \quad (2.3)$$

при котором векторное произведение $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ переходит в коммутатор матриц $[X, Y] = XY - YX$. После этого изоморфизма векторам $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{p}(x)$ соответствуют кососим-

метрические матрицы M , ω , $\dot{p}(x)$. Справедливо соотношение $\omega_{ij} = I_k^{-1} M_{ij}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$). Система уравнений (2.2) после изоморфизма (2.3) принимает вид

$$\dot{M} = [M, \omega] + \int_V 3G\rho(x) R^{-3}(x) [p(x), Cp(x) + p(x)C] dx, \\ \dot{p}(x) = [p(x), \omega], \quad (2.4)$$

где матрица C имеет компоненты $C_{ij} = (2^{-1}(I_1 + I_2 + I_3) - I_i)\delta_{ij}$. Введем симметрическую матрицу

$$u = \int_V 3G\rho(x) R^{-3}(x) p^2(x) dx. \quad (2.5)$$

В силу системы (2.4) и очевидных тождеств

$$[p, Cp + pC] = [p^2, C] = -[p^2, I]$$

получаем редукцию

$$\dot{M} = [M, \omega] - [u, I], \quad \dot{u} = [u, \omega]. \quad (2.6)$$

Система (2.6) полностью определяет вращение твердого тела T . Здесь матрица u записана во вращающейся системе отсчета S , ее собственные числа в силу второго уравнения (2.6) постоянны и согласно формуле (2.5) определяются характеристиками притягивающего объекта V . В неподвижной системе отсчета F матрица (2.5) постоянна.

Уравнения (2.6) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли L'_9 , элементы которой l представляются в виде $l = M + u$, где M и u — трехмерные матрицы, $M^t = -M$, $u^t = u$; коммутаторы определены условиями

$$[M, u] = Mu - uM, \quad [M_1, M_2] = M_1 M_2 - M_2 M_1, \\ [u_1, u_2] = 0. \quad (2.7)$$

Орбиты O действия соответствующей группы Ли G'_9 в сопряженном пространстве L'^{*}_9 являются симплектическими подмногообразиями $M^6 = \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) = T(\text{SO}(3))$ — касательный пучок к группе Ли $\text{SO}(3)$. Многообразия M^6 определяются условиями $\lambda_j(u) = \text{const}$, где $\lambda_j(u)$ — собственные числа матрицы u ; если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то орбита $O = M^5 = \mathbb{R}^3 \times S^2$, и если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то $O = \mathbb{R}^3$.

Скобки Пуассона функций на L'^{*}_9 определяются по

формулам

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k} C_{ij}^k x^k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad (2.8)$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли L_9' в базисе x^i (линейные функции на $L_9'^*$, например x^i , по определению принадлежат алгебре Ли L_9'). Функции $\lambda_j(u)$ или $\text{Tr}(u)$, $\text{Tr}(u^2)$, $\text{Tr}(u^3)$ являются аннуляторами скобок Пуассона (2.8), т. е. для любой функции f на $L_9'^*$ имеем $\{f, \lambda_j(u)\} = 0$. Ограничение скобок Пуассона (2.8) на подмногообразии $M^6(\lambda_j(u) = c_j)$ невырождено.

Уравнения (2.6) имеют гамильтонов вид

$$M_{ij} = \{M_{ij}, H\}, \quad \dot{u}_{ij} = \{u_{ij}, H\}, \quad (2.9)$$

где гамильтониан $H = J_1 = \text{Tr}\{2^{-1}M \cdot \omega - uI\}$.

Введем матрицу B с компонентами $B_{ij} = I_1 I_2 I_3 I_i^{-1} \delta_{ij}$. Система (2.6) имеет два дополнительных первых интеграла:

$$J_2 = \text{Tr}(2^{-1}M^2 + Bu), \quad J_3 = \text{Tr}(M^2 u + Bu^2). \quad (2.10)$$

Интегралы J_1, J_2, J_3 очевидно функционально независимы. В силу уравнений (2.9) имеем $J_2 = \{J_2, J_1\} = 0$, $J_3 = \{J_3, J_1\} = 0$. Прямое вычисление в силу формул (2.7), (2.8) показывает, что скобка Пуассона $\{J_2, J_3\} = 0$, т. е. три интеграла J_1, J_2, J_3 находятся в инволюции. Поэтому гамильтонова система (2.6), (2.9) на шестимерных симплектических подмногообразиях M^6 является вполне интегрируемой по Лиувиллю и динамика траекторий является квазипериодической на трехмерных торах T^3 в $L_9'^*$, определенных условиями $J_i = c_i$, $\lambda_j(u) = k_j$.

В следующих параграфах приводится другой вывод системы (2.6) и доказывается ее интегрируемость в тэта-функциях Римана.

§ 3. Интегрируемость по Лиувиллю уравнений поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с квадратичным потенциалом

1. В § 3 и § 4 доказывается следующая теорема [125—127].

Теорема 2. Поступательно-вращательное движение произвольного твердого тела T в ньютоновском гравита-

ционном поле с произвольным квадратичным потенциалом

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} x^i x^j + b_i x^i) \quad (3.1)$$

определяется гамильтоновой системой, вполне интегрируемой по Лиувиллю. Динамика центра масс O интегрируется в элементарных функциях; вращение твердого тела вокруг центра масс интегрируется в тэта-функциях Римана.

Пусть в системе неподвижного наблюдателя F центр масс O твердого тела T имеет координаты $q^i(t)$. Определим систему отсчета S с координатами r^1, r^2, r^3 , жестко связанную с твердым телом T , в которой тензор инерции твердого тела диагонален и имеет компоненты $I_{ik} = I_i \delta_{ik}$; центр системы S совпадает с центром масс O . Координаты x^i и r^j связаны преобразованием

$$x^i = \sum_{j=1}^3 Q_j^i(t) r^j + q^i(t), \quad (3.2)$$

где $Q_j^i(t)$ — компоненты ортогональной матрицы $Q(t)$. По определению ньютоновского гравитационного потенциала сила f , действующая на частицу массы m в поле с потенциалом φ (3.1), равна $-m \text{ grad } \varphi$.

Функция Лагранжа твердого тела T в неподвижной системе отсчета F является интегралом по объему тела T от функций Лагранжа составляющих его точек:

$$L = \frac{1}{2} \int_T \rho(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \dot{Q}_j^i r^j + \dot{q}^i \right)^2 d^3\mathbf{r} - \int_T \rho(\mathbf{r}) \varphi \left(\sum_{j=1}^3 Q_j^1 r^j + q^1, \sum_{j=1}^3 Q_j^2 r^j + q^2, \sum_{j=1}^3 Q_j^3 r^j + q^3 \right) d^3\mathbf{r}, \quad (3.3)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — плотность массы твердого тела. В силу определения тензора I_{ik} и определения центра масс твердого тела справедливы формулы

$$\int_T \rho(\mathbf{r}) r^i r^j d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \text{Tr}(I) \delta_{ij} - I_{ij} = J_{ij}, \quad \int_T \rho(\mathbf{r}) r^i d^3\mathbf{r} = 0. \quad (3.4)$$

Выражение (3.3) после подстановки формулы (3.1) и интегрирования по объему тела в силу формул (3.4)

принимает вид

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \dot{Q}_j^i J_{jk} \dot{Q}_k^i + \varphi(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij} Q_\alpha^i Q_\beta^j J_{\alpha\beta}, \quad (3.5)$$

где m — полная масса твердого тела T . Второе слагаемое в формуле (3.5) имеет вид $\text{Tr}(\dot{Q}J\dot{Q}')$. Используя формулы $Q' = Q^{-1}$, $(Q^{-1})' = -Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}$, получаем

$$\text{Tr}(\dot{Q}J\dot{Q}') = -\text{Tr}(JQ^{-1}\dot{Q}Q^{-1}\dot{Q}). \quad (3.6)$$

Из выражения (3.5) следует, что переменные q^i и Q_k^j в лагранжиане L разделяются. Это важное свойство характерно только для ньютоновского гравитационного потенциала и является следствием равенства инертной и гравитационной масс. Динамика центра масс O (переменные q^i) описывается лагранжевой системой в евклидовом пространстве R^3 с лагранжианом

$$L_1 = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} q^i q^j + b_i q^i). \quad (3.7)$$

Вращение твердого тела относительно центра масс O описывается лагранжевой системой на группе Ли $\text{SO}(3)$ с лагранжианом

$$L_2 = -\frac{1}{2} \text{Tr}(JQ^{-1}\dot{Q}Q^{-1}\dot{Q}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij} Q_\alpha^i Q_\beta^j I_{\alpha\beta}. \quad (3.8)$$

При этом $L = L_1 + L_2 - \frac{1}{4} \text{Tr} a \cdot \text{Tr} I$.

Лагранжевы уравнения, соответствующие лагранжиану L_1 (3.7), являются линейными, распадаются на три лагранжевых уравнения с одной степенью свободы и интегрируются в элементарных функциях.

Лагранжиан L_2 (3.8) описывает также вращение твердого тела вокруг неподвижной точки (которая может не совпадать с центром масс) в ньютоновском гравитационном поле с однородным квадратичным потенциалом

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x^i x^j. \quad (3.9)$$

Матрица ω угловой скорости твердого тела, отнесенная к системе отсчета S , определяется формулой $\omega = Q^{-1}\dot{Q}$.

Матрица кинетического момента M в системе S имеет компоненты $M_{ij} = I_k \omega_{ij}$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Уравнения Эйлера вращения твердого тела, эквивалентные лагранжевой системе с лагранжианом L_2 (3.8), имеют вид

$$\dot{M} = [M, \omega] + K, \quad \dot{Q} = Q\omega, \quad (3.10)$$

где K — кососимметрическая матрица моментов сил, действующих на твердое тело, имеющая компоненты

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial U}{\partial Q_\beta^s} Q_\alpha^s - \frac{\partial U}{\partial Q_\alpha^s} Q_\beta^s \right). \quad (3.11)$$

Потенциальная функция $U(Q)$ в силу (3.8) определяется формулой

$$U(Q) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(IQ^t a Q). \quad (3.12)$$

Матрица K в силу выражений (3.11), (3.12) имеет вид

$$K = IQ^t a Q - Q^t a Q I = -[u, I], \quad u = Q^t a Q. \quad (3.13)$$

Симметрическая матрица $u = Q^t a Q$ определяет вид потенциала (3.9) во вращающейся системе отсчета S . Матрицы u и a подобны, их собственные числа $\lambda_i(u)$ и $\lambda_i(a)$ совпадают.

Уравнения (3.10) в силу формул (3.13) отображаются в систему уравнений

$$\dot{M} = [M, \omega] - [u, I], \quad \dot{u} = [u, \omega], \quad (3.14)$$

совпадающую с системой (2.6). Уравнения (3.14) на инвариантном подмногообразии M^6 , определенном условиями $\lambda_i(u) = \lambda_i(a)$, эквивалентны лагранжевой системе на группе Ли $SO(3)$ с лагранжианом (3.8). Из теоремы 1 (§ 2) следует, что система (2.6), (3.14) на симплектических подмногообразиях M^6 вполне интегрируема по Лиувиллю. Следовательно, это же справедливо и для лагранжевой системы с лагранжианом L_2 (3.8).

Доказательство интегрируемости системы (2.6), (3.14) в тэта-функциях Римана будет дано ниже в § 4.

II. Укажем еще один вывод системы (3.14), использующий векторную форму уравнений Эйлера (3.10). Выберем орты α, β, γ неподвижной системы отсчета F совпадающими с главными осями квадратичной формы (3.9); после такого преобразования имеем $2\varphi(x) = a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 + a_3(x^3)^2$. Далее все векторы $\alpha, \beta, \gamma, M, \omega$ представлены во вращающейся системе отсчета S ,

жестко связанной с твердым телом T , в которой тензор инерции диагонален, $I_{ik} = I_i \delta_{ik}$. Потенциальная энергия твердого тела в ньютоновском гравитационном поле в силу формул (3.4) имеет вид

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \int_T \rho(r) \varphi((r, \alpha), (r, \beta), (r, \gamma)) dr^1 dr^2 dr^3 = \\ = U_0 - \frac{1}{2} a_1 (I_1 \alpha_1^2 + I_2 \alpha_2^2 + I_3 \alpha_3^2) - \frac{1}{2} a_2 (I_1 \beta_1^2 + I_2 \beta_2^2 + I_3 \beta_3^2) - \\ - \frac{1}{2} a_3 (I_1 \gamma_1^2 + I_2 \gamma_2^2 + I_3 \gamma_3^2), \quad (3.15)$$

где $U_0 = (a_1 + a_2 + a_3)(I_1 + I_2 + I_3)/4$.

Уравнения вращения твердого тела T в ньютоновском поле с потенциалом $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ в системе отсчета S имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega + \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) \times \alpha + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right) \times \beta + \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma} \right) \times \gamma, \quad (3.16)$$

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega.$$

Уравнения (3.16) после подстановки формул (3.15) и применения отображения (2.3) принимают вид

$$\dot{M} = [M, \omega] + a_1 [\alpha, C\alpha + \alpha C] + a_2 [\beta, C\beta + \beta C] + \\ + a_3 [\gamma, C\gamma + \gamma C], \quad (3.17)$$

$$\dot{\alpha} = [\alpha, \omega], \quad \dot{\beta} = [\beta, \omega], \quad \dot{\gamma} = [\gamma, \omega],$$

где матрица C имеет компоненты $C_{ij} = (2^{-1}(I_1 + I_2 + I_3) - I_i) \delta_{ij}$, $M_{ij} = I_k \omega_{ij}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$). В силу уравнений (3.17) имеем

$$(\alpha^2)^{\cdot} = [\alpha^2, \omega], \quad (\beta^2)^{\cdot} = [\beta^2, \omega], \quad (\gamma^2)^{\cdot} = [\gamma^2, \omega]. \quad (3.18)$$

Введем симметрическую матрицу $u = a_1 \alpha^2 + a_2 \beta^2 + a_3 \gamma^2$. Из уравнений (3.17), (3.18) в силу тождеств

$$[x, Cx + xC] = [x^2, C], \quad [u, C] = -[u, I]$$

получаем следствие

$$\dot{M} = [M, \omega] - [u, I], \quad \dot{u} = [u, \omega]. \quad (3.19)$$

Система уравнений (3.19) очевидно совпадает с системами (2.6) и (3.14).

§ 4. Интегрирование динамики в τ -функциях Римана

I. Покажем, что уравнения (3.14) допускают эквивалентное представление в виде уравнения Лакса, зависящего от произвольного параметра E :

$$\dot{L} = [L, A], \quad L = BE^2 + ME + u, \quad A = \omega - EI. \quad (4.1)$$

Действительно, уравнение (4.1) является многочленом третьей степени по E ; условие равенства нулю коэффициентов при E^k приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} E^3: [B, I] &= 0, \quad E^2: [B, \omega] - [M, I] = 0, \\ E^1: \dot{M} &= [M, \omega] - [u, I], \quad E^0: \dot{u} = [u, \omega]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Первые два уравнения (4.2) выполнены в силу определения матрицы B и $M_{ij} = I_k \omega_{ij}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$); последние два уравнения (4.2) совпадают с системой (2.6), (3.14).

Интегралы (2.10) являются коэффициентами при E^2 в разложении функций $\text{Tr}(L^2(E))$ и $\text{Tr}(L^3(E))$ (которые в силу (4.1) не зависят от t) по степеням E .

Собственные числа w_1, w_2, w_3 матрицы L являются интегралами системы (4.1) и удовлетворяют уравнению

$$R(w, E) = \det(BE^2 + ME + u - w \cdot 1) = 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, с уравнением (4.1) естественно связана риманова поверхность Γ , заданная уравнением (4.3). Все коэффициенты уравнения (4.3) являются первыми интегралами системы (3.14) и выражаются через шесть независимых интегралов:

$$J_1 = \text{Tr}(2^{-1}M \cdot \omega - u \cdot I), \quad J_2 = \text{Tr}(2^{-1}M^2 + Bu), \quad (4.4)$$

$$J_3 = \text{Tr}(M^2u + Bu^2), \quad J_4 = \text{Tr}(u), \quad J_5 = \text{Tr}(u^2), \quad J_6 = \det(u).$$

Явный вид уравнения (4.3) следующий:

$$\begin{aligned} R(w, E) &= k_6 E^6 + k_4 E^4 + k_2 E^2 + l_4 w E^4 + l_2 w^2 E^2 + \\ &\quad + m_2 w E^2 + n_3 w^3 + n_2 w^2 + n_1 w + n_0 = 0, \end{aligned}$$

$$k_6 = k^2, \quad k = I_1 I_2 I_3, \quad k_4 = -kJ_1, \quad l_4 = -k \text{Tr}(I), \quad (4.5)$$

$$k_2 = J_3 - J_4 J_2 + 2^{-1}k \text{Tr}(I^{-1})(J_4^2 - J_5), \quad l_2 = k \text{Tr}(I^{-1}),$$

$$\begin{aligned} m_2 &= J_2 - k \text{Tr}(I^{-1})J_4, \quad n_3 = -1, \quad n_2 = J_4, \\ n_1 &= (J_5 - J_4^2)/2, \quad n_0 = J_6. \end{aligned}$$

Уравнения (4.3) — (4.5) имеют при $E \rightarrow \infty$ три корня:

$w_i = B_i E^2 (1 + 0|E|^{-1})$. Поэтому поверхность Γ трехлистно (и разветвленно) покрывает комплексную прямую E . Проективное замыкание кривой Γ имеет особую точку с координатами $x_0 = w^{-1} = 0$, $x_1 = Ew^{-1} = 0$, в которой пересекаются три листа поверхности Γ при $E \rightarrow \infty$. Для разрешения этой особенности введем новые координаты $z = E^{-1}$, $W = wE^{-2}$, в которых уравнение (4.5) принимает вид

$$k_6 + k_4 z^2 + k_2 z^4 + l_4 W + l_2 W^2 + m_2 W z^2 + n_3 W^3 + \\ + n_2 W^2 z^2 + n_1 W z^4 + n_0 z^6 = 0. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) при $z = 0$ имеет три корня: $W_i = = I_1 I_2 I_3 I_i^{-1} = B_i$, которые определяют три точки P_1^0 , P_2^0 , P_3^0 , осуществляющие неособое замыкание поверхности Γ на бесконечности.

Поверхность Γ , определенная уравнением (4.5), очевидно, допускает инволюцию $\sigma: (w, E) \rightarrow (w, -E)$. Рассмотрим отображение $f: (w, E) \rightarrow (w, E_1 = E^2)$ поверхности Γ в поверхность $\Gamma_1 = \Gamma/\sigma$, заданную уравнением

$$R_1(w, E_1) = k_6 E_1^3 + k_4 E_1^2 + k_2 E_1 + l_4 w E_1^2 + l_2 w^2 E_1 + \\ + m_2 w E_1 + n_3 w^3 + n_2 w^2 + n_1 w + n_0 = 0. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) имеет степень 3, поэтому род поверхности Γ_1 $g(\Gamma_1) = 1$ и ее эйлерова характеристика $\chi(\Gamma_1) = = 0$ ($\Gamma_1 = T^2$). С помощью отображения f несложно вычислить род римановой поверхности Γ . Отображение f является разветвленным двулистным накрытием и имеет 6 точек ветвления $f(P_i^0)$, $f(w_i)$; $i = 1, 2, 3$, где w_i — три корня (в общем случае) уравнения (4.5) при $E = 0$. Поэтому по формуле Римана — Гурвица получаем:

$$\chi(\Gamma) = 2\chi(\Gamma_1) - 6 = -6, \quad g(\Gamma) = 1 - \chi(\Gamma)/2 = 4.$$

Отметим, что таким образом для рассматриваемой интегрируемой динамической системы (2.6), (3.14) род соответствующей римановой поверхности $g(\Gamma) = 4$ больше размерности $d = 3$ инвариантных торов T^3 , на которых, как показано в § 2, происходит квазипериодическая динамика.

II. Для полного описания вращения твердого тела необходимо знать зависимость компонент угловой скорости от времени, поэтому нашей целью является получение явных формул для компонент $\omega_i^j(t)$. Применяемый метод [131, 19, 58] заключается в построении некоторых ана-

литических (кроме конечного числа точек) функций на римановой поверхности Γ (функций типа Бейкера — Ахиезера [137, 138]), которые, с одной стороны, зависят от параметров системы (3.14), (4.1), а с другой стороны, в силу теоремы единственности однозначно выражаются через θ -функцию Римана поверхности Γ . Такая связь и позволяет найти выражение компонент $\omega_i^j(t)$ через θ -функцию Римана.

Выполнение уравнения (4.1) эквивалентно коммутативности матричных операторов $F = \partial/\partial t + A$ и L . Рассмотрим совместные собственные вектор-функции этих операторов, удовлетворяющие условиям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)\psi_k = 0, \quad L\psi_k = w_k\psi, \quad R(w_k, E) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

Три вектор-функции $\psi_k(t, E)$ образуют трехмерную матрицу $\psi(t, E)$ с компонентами $\psi_k^j(t, E)$. Пусть $\varphi_i^h(t, E)$ — компоненты обратной матрицы $\varphi(t, E)$. Определим матричнозначную функцию $g_i^j(t, P_k)$ от точки $P_k = (w_k, E)$ на римановой поверхности Γ формулами

$$g_i^j(t, P_k) = \psi_k^j(t, E) \varphi_i^h(t, E). \quad (4.9)$$

Матрицы ψ , φ и g в силу (4.8) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -A\psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi A, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = [g, A]. \quad (4.10)$$

Три вектор-функции $\psi_k(t, E)$ с компонентами $\psi_k^j(t, E)$ естественно также рассматривать как одну вектор-функцию $\psi(t, P_k)$ с компонентами $\psi^j(t, P_k)$, зависящую от точки $P_k = (w_k, E)$ на римановой поверхности Γ : $\psi^j(t, P_k) = \psi_k^j(t, E)$. Аналогично определяются вектор-функция $\varphi(t, P_k)$ с компонентами $\varphi_i(t, P_k) = \varphi_i^h(t, E)$. Функции $\psi^j(t, P_k)$ являются целыми на аффинной части римановой поверхности Γ , функции $\varphi_i(t, P_k)$ являются мероморфными, дивизоры их нулей и полюсов в аффинной части Γ имеют вид:

$$(\psi^j(t, P))_a = d^j(t), \quad (\varphi_i(t, P))_a = d_i(t) - D_r, \quad (4.11)$$

где D_r — дивизор точек ветвления римановой поверхности над комплексной E -плоскостью. По формуле Римана — Гурвица имеем $\chi(\Gamma) = 3\chi(S^2) - \deg(D_r)$. В силу $\chi(\Gamma) = -6$, $\chi(S^2) = 2$ получаем $\deg(D_r) = 12$.

Из последнего уравнения (4.10) в силу определения $\Lambda = w - z^{-1}I$ получаем, что при $P \rightarrow P_k^0$ ($z = E^{-1} \rightarrow 0$, $W \rightarrow B_k$) матрица $g(t, P)$ имеет асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} g &= g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots, \quad (g_0)_i^j = \delta_k^j \delta_i^k, \quad (4.12) \\ (g_1)_i^j &= (I_i - I_j)^{-1} (\delta_k^j \omega_i^k - \delta_i^k \omega_k^j), \quad (I_i - I_j) (g_2)_i^j = \\ &= -(\dot{g}_1)_i^j + (I_s - I_i)^{-1} (\delta_k^j \omega_s^k \omega_i^s - \omega_k^j \omega_i^k) + \\ &\quad + (I_i - I_s)^{-1} (\delta_i^k \omega_s^j \omega_k^s - \omega_k^j \omega_i^k). \end{aligned}$$

Функция $g_i^j(t, P)$ в силу определения (4.9) и асимптотики (4.12) является мероморфной на всей поверхности Γ , ее дивизор представляется в виде [58]

$$(g_i^j(t, P)) = d_i(t) + d^j(t) - D_r + 2(P_1^0 + P_2^0 + P_3^0) - P_i^0 - P_j^0. \quad (4.13)$$

Для мероморфной функции $g_i^j(t, P)$ имеем $\deg(g_i^j(t, P)) = 0$. Отсюда в силу $\deg(D_r) = 12$ следует $\deg d_i(t) = \deg d^j(t) = 4 = g(\Gamma)$.

Определим функции

$$\psi^j(t, \tau, P) = \frac{\Psi^j(t, P)}{\Psi^j(\tau, P)}, \quad \psi_i(t, \tau, P) = \frac{\varphi_i(t, P)}{\varphi_i(\tau, P)}. \quad (4.14)$$

Функции $\psi^j(t, \tau, P)$, $\psi_i(t, \tau, P)$ не зависят от нормировки собственных функций (4.8) и являются мероморфными в аффинной части Γ , их дивизоры имеют вид

$$\begin{aligned} (\psi^j(t, \tau, P))_a &= d^j(t) - d^j(\tau), \\ (\psi_i(t, \tau, P))_a &= d_i(t) - d_i(\tau). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Используя определения (4.9) — (4.14), получаем:

$$\frac{\partial \ln g_i^j(t, P)}{\partial t} = \frac{\partial \ln \psi^j(t, 0, P)}{\partial t} + \frac{\partial \ln \psi_i(t, 0, P)}{\partial t}.$$

Отсюда, используя асимптотику (4.12) при $P \rightarrow P_j^0$, на ходим:

$$\omega_i^j(t) = C_i^j \lim_{P \rightarrow P_j^0} \psi^j(t, 0, P) \psi_i(t, 0, P), \quad (4.16)$$

где C_i^j — некоторые константы.

Формулы (4.16) позволяют выразить угловые скорости $\omega_i^j(t)$ через θ -функции римановой поверхности Γ . Для этого необходимо установить аналитические свойства функций ψ^j , ψ_i , в силу которых эти функции однозначно выражаются через θ -функции Римана. Покажем, что в трех точках P_k^0 , имеющих координаты $z = E^{-1} = 0$, $W = wE^{-2} = B_k$, функции $\psi^j(t, \tau, P)$ и $\psi_i(t, \tau, P)$ имеют существенные особенности с асимптотиками

$$\begin{aligned}\psi^j(t, \tau, P) &= \alpha^j(t, \tau, P) \exp((t - \tau)I_k z^{-1}), \\ \psi_i(t, \tau, P) &= \alpha_i(t, \tau, P) \exp(-(t - \tau)I_k z^{-1}),\end{aligned}\quad (4.17)$$

где функции α^j и α_i мероморфны в окрестности точек P_k^0 . Функции $\psi^j(t, \tau, P)$, $\psi_i(t, \tau, P)$ в силу (4.8) — (4.14) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\partial \ln \psi^j(t, \tau, P) / \partial t &= \dot{\psi}^j(t, P) / \psi^j(t, P) = \\ &= -Q_s^j \psi^s(t, P) / \psi^j(t, P) = z^{-1} I_j - \omega_s^j(t) \psi^s(t, P) / \psi^j(t, P) = \\ &= z^{-1} I_j - \omega_s^j(t) g_x^s(t, P) / g_x^j(t, P), \\ \partial \ln \psi_i(t, \tau, P) / \partial t &= \dot{\psi}_i(t, P) / \psi_i(t, P) = \\ &= Q_s^i \varphi_s(t, P) / \varphi_i(t, P) = -z^{-1} I_i + \omega_s^i(t) \varphi_s(t, P) / \varphi_i(t, P) = \\ &= -z^{-1} I_i + \omega_s^i(t) g_x^s(t, P) / g_x^i(t, P).\end{aligned}\quad (4.18)$$

В формулах (4.18) (значения которых не зависят от x) положим $x = k$ и используем асимптотику (4.12); получим, что при $P \rightarrow P_k^0$

$$\begin{aligned}\partial \ln \psi^j(t, \tau, P) / \partial t &= z^{-1} I_k + f_{jk}^1(t, z), \\ \partial \ln \psi_i(t, \tau, P) / \partial t &= -z^{-1} I_k + f_{ik}^2(t, z),\end{aligned}\quad (4.19)$$

где функции $f_{jk}^1(t, z)$, $f_{ik}^2(t, z)$ голоморфны в окрестности точки P_k^0 . Из формул (4.19) и тождества $\psi^j(t, t, P) = \psi_i(t, t, P) = 1$ следуют асимптотики (4.17). Из формул (4.18) при $j = k = x$ в силу антисимметричности ω_i^j следует $f_{jj}^1(t, P_j^0) = 0$ и $f_{ii}^2(t, P_i^0) = 0$, поэтому

$$\alpha^j(t, \tau, P_j^0) = 1, \quad \alpha_i(t, \tau, P_i^0) = 1. \quad (4.20)$$

Функции $\psi^j(t, \tau, P)$ и $\psi_i(t, \tau, P)$ являются трехточечными функциями типа Бейкера — Ахиезера с существенными особенностями в точках P_k^0 и дивизорами полюсов $d^j(\tau)$ и $d_i(\tau)$ соответственно. Функции $\psi^j(t, \tau, P)$ и $\psi_i(t, \tau, P)$ при нормировке (4.20) определены одно-

значно на основе следующих конструкций. Пусть $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4$ — базис циклов на римановой поверхности Γ с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$; $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ — голоморфные дифференциалы на Γ с условием нормировки $\oint_{a_h} \omega_j = 2\pi i \delta_j^h$. Матрица Римана $B(\Gamma)$ с компонентами B_{ij} определяется формулами $B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i$. Классическая θ -функция Римана, отвечающая поверхности Γ , определяется своим рядом Фурье вида

$$\theta(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^4} \exp(2^{-1}(BN, N) + (N, z)). \quad (4.21)$$

Отображение Абеля $A: \Gamma \rightarrow \text{Яс } \Gamma$, где $\text{Яс } \Gamma$ — многообразие Якоби кривой Γ ($\text{Яс } \Gamma = \mathbb{T}^8 = \mathbb{C}^4 / \{2\pi i N + BM\}$), определяется формулами $A(P) = (A_1(P), \dots, A_4(P))$, где $A_j(P) = \int_{P_0}^P \omega_j$. Для дивизора $D = c_1 P_1 + \dots + c_s P_s$ отображение Абеля $A(D) = c_1 A(P_1) + \dots + c_s A(P_s)$. Пусть Ω_k ($k = 1, 2, 3$) — абелев дифференциал второго рода на Γ с главной частью в точке P_k^0 вида $-dz/z^2$, нормированный условиями $\oint_{a_j} \Omega_k = 0$, $j = 1, \dots, 4$. Векторы U_k имеют компоненты

$$U_k^j = \int_{b_j} \Omega_k, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, 3.$$

Обозначим $\Omega = I_1 \Omega_1 + I_2 \Omega_2 + I_3 \Omega_3$ и $U = I_1 U_1 + I_2 U_2 + I_3 U_3$. Трехточечные функции Бейкера — Ахизера ψ^j и ψ_i определяются формулами

$$\begin{aligned} \psi^j(t, \tau, P) &= \\ &= c^j \exp \left((t - \tau) \int_{P_0}^P \Omega \right) \frac{\theta(A(P) - A(d^j(\tau)) + (t - \tau)U - K)}{\theta(A(P) - A(d^j(\tau)) - K)}, \\ \psi_i(t, \tau, P) &= \\ &= c_i \exp \left(-(t - \tau) \int_{P_0}^P \Omega \right) \frac{\theta(A(P) - A(d_i(\tau)) - (t - \tau)U - K)}{\theta(A(P) - A(d_i(\tau)) - K)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь вектор римановых констант $\mathbf{K}$ имеет компоненты

$$K_j = \pi i + \frac{1}{2} B_{jj} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{h \neq j} \oint_{a_h} \left(\omega_h(P) \int_{P_0}^P \omega_j \right), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Множители c^j и c_i определяются нормировками (4.20) и имеют вид

$$c^j = \exp((\tau - t) \xi^j) \frac{\theta(\mathbf{A}(P_j^0) - \mathbf{A}(d^j(\tau)) - \mathbf{K})}{\theta(\mathbf{A}(P_j^0) - \mathbf{A}(d^j(\tau)) + (t - \tau) \mathbf{U} - \mathbf{K})},$$

$$c_i = \exp(-(t - \tau) \xi^i) \frac{\theta(\mathbf{A}(P_i^0) - \mathbf{A}(d_i(\tau)) - \mathbf{K})}{\theta(\mathbf{A}(P_i^0) - \mathbf{A}(d_i(\tau)) - (t - \tau) \mathbf{U} - \mathbf{K})},$$
(4.23)

где константы ξ^l ($l = 1, 2, 3$) определяются формулами $\xi^l = I_1 \xi_1^l + I_2 \xi_2^l + I_3 \xi_3^l$, причем

$$\xi_k^l = (1 - \delta_k^l) \int_{P_0}^{P_1^0} \Omega_k + \delta_k^l \lim_{P \rightarrow P_k^0} \left(\int_{P_0}^P \Omega_k - z^{-1} \right).$$

Обозначим через σf образ функции f при инволюции кривой Γ : $\sigma(w, E) = (w, -E)$; σD — образ дивизора D .

Лемма 1. На многообразии Якоби $\text{Jac } \Gamma$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(d^j(t) + \sigma d^j(t)) &= \mathbf{A}(d^j(\tau) + \sigma d^j(\tau)), \\ \mathbf{A}(d_i(t) + \sigma d_i(t)) &= \mathbf{A}(d_i(\tau) + \sigma d_i(\tau)). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Действительно, рассмотрим функции $\sigma \psi^j(t, \tau, P)$ и $\sigma \psi_i(t, \tau, P)$. По определению $\sigma f(W, z) = f(W, -z)$, $\sigma(P_k^0) = P_k^0$, поэтому асимптотика функций $\sigma \psi^j$ и $\sigma \psi_i$ при $z \rightarrow 0$, $P \rightarrow P_k^0$ отличается от (4.17) только знаком в аргументе экспоненты. Следовательно, произведения $\psi^j \cdot \sigma \psi^j(t, \tau, P)$ и $\psi_i \cdot \sigma \psi_i(t, \tau, P)$ являются мероморфными функциями на Γ , их дивизоры в силу (4.15) имеют вид

$$\begin{aligned} (\psi^j \cdot \sigma \psi^j(t, \tau, P)) &= d^j(t) + \sigma d^j(t) - d^j(\tau) - \sigma d^j(\tau), \\ (\psi_i \cdot \sigma \psi_i(t, \tau, P)) &= d_i(t) + \sigma d_i(t) - d_i(\tau) - \sigma d_i(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда по теореме Абеля и получаем равенства (4.24).

Выберем точку P_0 в определении отображения Абеля так, чтобы $A(d^1(0) + \sigma d^1(0)) = 0$, тогда из (4.24) следует:

$$A(d^1(t) + \sigma d^1(t)) = 0. \quad (4.25)$$

В силу (4.25) вектор $A(d_1(t))$ принадлежит многообразию Прима $\text{Prym}_\sigma \Gamma \subset \text{Jac } \Gamma$ (некоторые свойства и приложения многообразий Прима обсуждаются в [134, 136]). Комплексное многообразие $\text{Prym}_\sigma \Gamma$ является абелевым тором в $\text{Jac } \Gamma$, размерность $\dim_c(\text{Prym}_\sigma \Gamma) = g(\Gamma) - g(\Gamma_1) = 3$ равна размерности инвариантных торов T^3 интегрируемой системы (3.14) (торы T^3 определены фиксированными значениями интегралов (4.4), что определяет также и риманову поверхность Γ). Согласно вышеизложенным конструкциям определено отображение $f: T^3 \rightarrow \text{Prym}_\sigma \Gamma \subset \text{Jac } \Gamma$:

$$f(\omega_i^j(t), u_i^j(t)) = A(d^1(t)). \quad (4.26)$$

При этом отображении динамика системы (3.14) линеаризуется на многообразии $\text{Prym}_\sigma \Gamma$. Действительно, в силу (4.15) дивизор нулей функции $\psi^1(t, 0, P)$ есть $d^1(t)$; согласно явной формуле (4.22) и свойствам θ -функции Римана, образ дивизора $d^1(t)$ при отображении Абеля имеет вид

$$A(d^1(t)) = A(d^1(0)) - tU. \quad (4.27)$$

Отсюда, в частности, следует, что вектор $U \in \text{Prym}_\sigma \Gamma$ и траектория tU в общем случае заполняет всюду плотно трехмерный (вещественный) тор T_1^3 в многообразии Прима $\text{Prym}_\sigma \Gamma$. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. Динамика системы (3.14) с помощью отображения (4.26) линеаризуется на многообразии Прима $\text{Prym}_\sigma \Gamma \subset \text{Jac } \Gamma$.

Векторы $A(d_i(t))$, $A(d^j(t))$ однозначно определяются векторами $A(d^1(t))$ [58]. Действительно, ввиду мероморфности функций $g_i^j(t, P)$ из теоремы Абеля следует $A((g_i^j(t, P))) = 0$. Поэтому из (4.13) получаем:

$$\begin{aligned} A(d_i(t)) &= A(D_r - P_1^0 - 2P_2^0 - 2P_3^0 + P_i^0 - d^1(t)), \\ A(d^j(t)) &= A(P_j^0 - P_1^0 + d^1(t)). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из (4.28) и (4.27) следует $A(d_i(t)) - A(d_i(0)) = tU$ и $A(d^j(t)) - A(d^j(0)) = -tU$, т. е. при разных i, j определяются тождественные обмотки многообразия Прима $\text{Prym}_\sigma \Gamma$.

Для получения явных формул для $\omega_i^j(t)$ перемножим формулы (4.22) и (4.23), получим:

$$\lim_{P \rightarrow P_j^0} \psi^j(t, 0, P) \psi_i(t, 0, P) = \exp(t(\xi^i - \xi^j)) \times \\ \times \frac{\theta(A(P_j^0) - A(d_i(0)) - tU - K) \cdot \theta(A(P_i^0) - A(d_i(0)) - K)}{\theta(A(P_i^0) - A(d_i(0)) - tU - K) \cdot \theta(A(P_j^0) - A(d_i(0)) - K)}. \quad (4.29)$$

Используя четность θ -функции Римана, формулы (4.28) при $i \neq j$ и подставляя (4.29) в (4.16), получаем:

$$\omega_i^j(t) = A_i^j \exp(t(\xi^i - \xi^j)) \frac{\theta(A(P_i^0) - A(P_j^0) + tU + z_0)}{\theta(tU + z_0)}, \quad (4.30)$$

$$z_0 = A(D_r - d^1(0) - P_1^0 - 2P_2^0 - 2P_3^0) + K.$$

Формулы (4.30) и дают представление решений системы (3.14) через θ -функцию Римана поверхности Γ , определенной уравнением (4.3) — (4.5). По начальным значениям искомого решения $\omega_i^j(0)$, $u_i^j(0)$ однозначно определяется риманова поверхность Γ и все указанные выше аналитические конструкции, в частности, дивизор $d^1(0)$ и вектор z_0 , после этого из формул (4.30) при $t=0$ однозначно определяются коэффициенты A_i^j . Тем самым по начальным данным $\omega_i^j(0)$, $u_i^j(0)$ в силу (4.30) определяется зависимость от времени всех угловых скоростей $\omega_i^j(t)$.

В силу формул (4.30) функции $\omega_i^j(t)$ являются мероморфными функциями на всей комплексной плоскости переменного t . Также мероморфными являются функции $M_i^j(t) = I_k \omega_i^j(t)$ ($i, j, k = 1, 2, 3$). Из формул (4.30) следует, что все эти функции имеют общие полюсы первого порядка в комплексных точках t , удовлетворяющих уравнению

$$\theta(tU + z_0) = 0. \quad (4.31)$$

III. Покажем, что компоненты симметрической матрицы $u_i^j(t)$ являются мероморфными функциями t с полюсами второго порядка в точках (4.31). Недиagonальные компоненты $u_i^j(t)$ определяются из первого уравнения (3.14):

$$u_i^j(t) = (I_i - I_j)^{-1} \left(\dot{M}_i^j - \sum_{k=2}^3 (M_i^k \omega_k^j - \omega_i^k M_k^j) \right) \quad (4.32)$$

и в силу (4.30) являются мероморфными функциями t с полюсами второго порядка. Диагональные компоненты $u_i^i(t)$ определяются из второго уравнения (3.14):

$$\dot{u}_i^i = \sum_{k=1}^3 (u_i^k \omega_k^i - \omega_i^k u_k^i). \quad (4.33)$$

Вследствие кососимметричности матрицы $\omega_k^i(t)$ ($\omega_i^i(t) = 0$) в правую часть уравнения (4.33) входят только недиагональные компоненты $u_i^k(t)$, которые определены выражениями (4.32). Поэтому диагональные компоненты $u_i^i(t)$ определяются квадратурами — интегрированием по t уже известных правых частей уравнений (4.33), которые в точках (4.31) имеют полюсы третьего порядка. Следовательно, диагональные компоненты матрицы $u_i^i(t)$ также являются мероморфными функциями t и имеют в точках (4.31) полюсы второго порядка.

Для вычисления ортогональной матрицы $Q(t)$, определяющей ориентацию твердого тела, воспользуемся формулой (3.13): $u = Q^t a Q$. Пусть e_1, e_2, e_3 — собственные векторы постоянной матрицы a , определяющей квадратичный потенциал (3.9): $a(e_k) = a_k e_k$. Векторы $g_k = Q^t(e_k)$ являются собственными векторами матрицы u :

$$u(g_k) = a_k g_k, \quad g_k = Q^t(e_k). \quad (4.34)$$

Координаты ортонормированных собственных векторов $g_1(t), g_2(t), g_3(t)$ выражаются через компоненты $u_i^j(t)$ (4.32), (4.33) матрицы $u(t)$ с помощью арифметических операций. Координаты векторов $g_k(t)$ в силу формул $g_k = Q^t(e_k)$ являются столбцами матрицы $Q(t)$. Следовательно, все компоненты матрицы $Q(t)$ определяются через компоненты матрицы $u(t)$ с помощью арифметических операций и поэтому выражаются через θ -функции Римана в силу формул (4.30) — (4.34). Теорема 2 полностью доказана.

§ 5. Динамика симметричного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с квадратичным потенциалом

В данном параграфе мы покажем, что в случае симметричного твердого тела ($I_1 = I_2$) интегрируемый случай, исследованный в § 2—4, оказывается связанным с классической системой Неймана [160] на сфере S^2 и ин-

тегрируемым случаем Клебша [411] для уравнений Кирхгофа. При этом динамика твердого тела выражается в этих функциях Римана от двух переменных $\theta(z_1, z_2)$.

Пусть x^1, x^2, x^3 — координаты в неподвижной системе отсчета F , в которой квадратичная форма (3.9) диагональна; r^1, r^2, r^3 — координаты в системе отсчета S , жестко связанной с вращающимся твердым телом, в которой тензор инерции твердого тела диагонален; $I_{ik} = I_i \delta_{ik}$. Пусть $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ — орты неподвижной системы отсчета F , рассматриваемые в системе S .

В § 3 показано, что поступательно-вращательное движение произвольного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом разделяется на независимое движение центра масс в поле с данным потенциалом и на вращение твердого тела вокруг неподвижного центра масс в поле с однородным квадратичным потенциалом. Далее рассматривается только вращение твердого тела вокруг центра масс.

Функция Лагранжа, описывающая вращение твердого тела вокруг неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ в ньютоновском гравитационном поле с однородным потенциалом (3.9), имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) - U(\alpha, \beta, \gamma), \quad (5.1)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости вращения твердого тела (в системе отсчета S); потенциальная энергия $U(\alpha, \beta, \gamma)$ в силу (3.15) определяется формулой

$$2U(\alpha, \beta, \gamma) = -a_1 (I_1 \alpha_1^2 + I_2 \alpha_2^2 + I_3 \alpha_3^2) - \\ - a_2 (I_1 \beta_1^2 + I_2 \beta_2^2 + I_3 \beta_3^2) - a_3 (I_1 \gamma_1^2 + I_2 \gamma_2^2 + I_3 \gamma_3^2). \quad (5.2)$$

Пусть $\mathbf{q}(t)$ — единичный вектор, направленный по оси симметрии тензора инерции тела (и соответствующий собственному значению I_3). Ориентацию твердого тела в системе F определим углами Эйлера θ, ψ, φ , причем θ — угол между векторами $\mathbf{q}(t)$ и β , ψ — угол прецессии, φ — угол поворота твердого тела вокруг оси $\mathbf{q}(t)$. Вектор $\mathbf{q}(t)$ в системе отсчета F имеет координаты

$$q_1 = (\mathbf{q}, \alpha) = \sin \theta \sin \psi, \quad q_2 = (\mathbf{q}, \beta) = -\sin \theta \cos \psi, \\ q_3 = (\mathbf{q}, \gamma) = \cos \theta. \quad (5.3)$$

В системе отсчета S вектор $\mathbf{q}$ является постоянным и

имеет координаты $(0, 0, 1)$; поэтому справедливы равенства

$$q_1 = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_3, \quad q_2 = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_3, \quad q_3 = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\gamma}) = \gamma_3. \quad (5.4)$$

Функция $U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ (5.2) для симметричного твердого тела ($I_1 = I_2$) в силу ортонормированности векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ и формул (5.4) имеет вид

$$2U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = c_1 + (I_1 - I_3)(a_1\alpha_3^2 + a_2\beta_3^2 + a_3\gamma_3^2) = \\ = c_1 + (A\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad (5.5)$$

где оператор A имеет компоненты $A_{ij} = (I_1 - I_3)a_i\delta_{ij}$ и $c_1 = -I_1(a_1 + a_2 + a_3)$.

Функция Лагранжа (5.1) для симметричного твердого тела в силу (5.5) принимает вид

$$L_1 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2} (A\mathbf{q}, \mathbf{q}). \quad (5.6)$$

Лагранжиан L_1 по физическому смыслу и вследствие формул (5.3), (5.6) не зависит от поворотов вокруг оси симметрии, т. е. L_1 не зависит от угла φ . Поэтому соответствующий импульс p_φ сохраняется:

$$p_\varphi = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\varphi}} = I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}). \quad (5.7)$$

Функция Рауса $L_2 = L_1 - p_\varphi \dot{\varphi}$, представленная в координатах вектора $\mathbf{q}(t)$ ($(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 1$), имеет вид

$$L_2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + p_\varphi \dot{\psi} \cos \theta - \frac{1}{2} (\mathbf{q}, A\mathbf{q}) - \frac{1}{2I_3} p_\varphi^2. \quad (5.8)$$

Лагранжиан L_2 при $p_\varphi = 0$ совпадает с лагранжианом системы Неймана [160] на сфере S^2 . В общем случае лагранжевы уравнения, соответствующие лагранжиану (5.8), имеют вид

$$I_1 \ddot{\mathbf{q}} = -A\mathbf{q} - p_\varphi (\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q}) + \lambda \mathbf{q}. \quad (5.9)$$

Здесь $\lambda(t) = (A\mathbf{q}, \mathbf{q}) - I_1 (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ — множитель Лагранжа, определяемый из условия сохранения системой (5.9) связи $(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 1$.

Слагаемое $-p_\varphi (\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q})$ в (5.9) описывает силы, аналогичные воздействию на электрический заряд монополя Дирака [161], и возникает из вариации слагаемого $p_\varphi \dot{\psi} \cos \theta$ в лагранжиане (5.8), который связан с редук-

цией лагранжиана (5.6) по группе симметрии, соответствующей циклической координате φ .

Интегрируемость системы (5.9) по Лиувиллю и в тэта-функциях от двух переменных $\theta(z_1, z_2)$ при $p_\varphi = 0$ следует из интегрируемости классической системы Неймана [160]. При $p_\varphi \neq 0$ уравнения (5.9) совпадают с уравнениями, возникшими из совершенно другой задачи — динамики бегущих волн для вектора намагниченности в уравнении Ландау — Лифшица. Эти уравнения, как показано в [162], сводятся к интегрируемому случаю Клебша для уравнения Кирхгофа. С помощью отображения

$$\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{M} = \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q} - I_1^{-1} p_\varphi \mathbf{q} \quad (5.10)$$

уравнения (5.9) преобразуются к виду

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{q} \times I_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \times \mathbf{M} \quad (5.11)$$

и описывают специальный интегрируемый случай Клебша на уровне первого интеграла $(\mathbf{M}, \mathbf{q}) = -p_\varphi I_1^{-1}$. Приведем явные формулы, описывающие динамику траекторий системы (5.11) в тэта-функциях $\theta(z_1, z_2)$ [105, 163]. Гамильтониан H и интеграл Клебша J_4 имеют вид

$$\begin{aligned} 2H &= (\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{q}, I_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{q}), \\ J_4 &= (\mathbf{M}, I_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}) - I_1^{-3} A_1 A_2 A_3 (\mathbf{q}_1, I_1 A^{-1} \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Обозначим через s_1, s_2, s_3, s_4 корни уравнения $f(s) = 0$,

$$\begin{aligned} f(s) &= [s^2 - s(\text{Tr}(I_1^{-1} \mathbf{A}) - 2H) - J_4]^2 - \\ &\quad - 4I_1^{-2} p_\varphi^2 (s - I_1^{-1} A_1)(s - I_1^{-1} A_2)(s - I_1^{-1} A_3). \end{aligned}$$

Введем риманову поверхность Γ рода 2, заданную уравнением

$$y^2 = P(z), \quad P(z) = z(z - d_1^2)(z - d_2^2)(z - d_3^2)(z - d_1^2 d_2^2 d_3^2), \quad (5.13)$$

где величины d_1, d_2, d_3 определены равенствами

$$\begin{aligned} d_h &= \left(\sqrt{\frac{s_3 - I_1^{-1} A_h}{f'(s_3)}} + i \sqrt{\frac{s_4 - I_1^{-1} A_h}{f'(s_4)}} \right) \left(\sqrt{\frac{s_1 - I_1^{-1} A_h}{f'(s_1)}} + \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{\frac{s_2 - I_1^{-1} A_h}{f'(s_2)}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Формулы, описывающие динамику траекторий системы (5.11), имеют вид [105, 163]

$$q_k = i_k \frac{\theta[r_k](z_0 + Ut) \theta[m_k](w_0) - \theta[r_k](w_0) \theta[m_k](z_0 + Ut)}{\theta[n_k](z_0 + Ut) \theta[p_k](w_0) - \theta[n_k](w_0) \theta[p_k](z_0 + Ut)}. \quad (5.14)$$

Здесь тэта-функции $\theta(z_1, z_2)$ и вектор U построены по кривой Γ (5.13), их характеристики r_k, m_k, n_k, p_k зависят от взаимного расположения корней многочлена (5.13), постоянные векторы z_0, w_0 определяются по начальным условиям (см. [105]).

Формулы (5.14) определяют в силу (5.3) зависимость от времени углов Эйлера θ, ψ . Зависимость от времени угла Эйлера ϕ определяется интегрированием соотношения (5.7).

§ 6. Интегрируемые случаи уравнений вращения твердого тела в нелинейных гравитационных полях

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в гравитационном поле с потенциалом вида

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha\beta}(|x|) x^\alpha x^\beta, \quad |x| = ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}, \quad (6.1)$$

где $a_{\alpha\beta}(|x|)$ — произвольные дифференцируемые функции переменной $|x|$. Ньютоновские потенциалы вида (6.1), удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, определяются формулами

$$\varphi = |x|^{-5} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^3 c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \right) + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 b_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + c |x|^{-1},$$

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = 0, \quad b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0.$$

Введем следующий четырехкомпонентный тензор, симметричный по двум парам индексов α, β и i, k и обобщающий тензор инерции I_{ik} (3.4):

$$T_{\alpha\beta ik} = \int_T \rho(r) a_{\alpha\beta}(|r|) \left(\delta_{ik} \sum_{l=1}^3 (r^l)^2 - r^i r^k \right) dr^1 dr^2 dr^3. \quad (6.2)$$

Теорема 3. Если тензор $T_{\alpha\beta ik}$ допускает представление

$$T_{\alpha\beta ik} = A_{\alpha\beta} I_{ik} + B_{\alpha\beta} \delta_{ik} + \delta_{\alpha\beta} C_{ik}, \quad (6.3)$$

где A, B, C — произвольные симметрические матрицы, то вращение твердого тела T в гравитационном поле с потенциалом (6.1) вокруг неподвижной точки $O(x^i=0)$ является вполне интегрируемым по Лиувиллю и интегрируется в θ -функциях римановых поверхностей.

Если $a_{\alpha\beta}(|x|) = \text{const}$, то условия (6.3) очевидно выполнены, поэтому теорема 3 является обобщением теоремы 2. Если твердое тело T является шаром, плотность которого имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_1(\mathbf{r}/|\mathbf{r}|)\rho_2(|\mathbf{r}|),$$

то условия (6.3) выполнены при произвольных функциях $a_{\alpha\beta}(|x|)$ (при этом $B_{\alpha\beta} = C_{ik} = 0$), поэтому вращение такого твердого тела в поле с произвольным потенциалом вида (6.1) является вполне интегрируемым по Лиувиллю.

Пусть ортогональная матрица $Q(t)$ определяет преобразование из лагранжевых координат r^k , связанных с системой отсчета S , в эйлеровы координаты x^i : $x^i = \sum_{k=1}^3 Q_k^i(t) r^k$. По определению $\dot{Q} = Q\omega$, где ω — матрица угловой скорости. В системе S потенциал (6.1) имеет вид

$$\varphi = 2^{-1} \sum_{\alpha, \beta, n, l} a_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}|) Q_n^\alpha Q_l^\beta r^n r^l. \quad (6.4)$$

Компоненты момента гравитационных сил, действующих на твердое тело в поле с потенциалом φ (6.4), определяются формулами (всюду по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$K_i = \int_T \left(\mathbf{r} \times \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right)_i dr^1 dr^2 dr^3 = \int_T \varepsilon_{imn} r^m \rho(\mathbf{r}) a_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}|) Q_n^\alpha Q_l^\beta r^l dr^1 dr^2 dr^3. \quad (6.5)$$

Кососимметрическая матрица K , соответствующая в силу изоморфизма (2.3) вектору момента сил (6.5), имеет следующие компоненты:

$$K_{jh} = -\varepsilon_{ijh} K_i = T_{\alpha\beta jl} Q_h^\alpha Q_l^\beta - T_{\alpha\beta hl} Q_j^\alpha Q_l^\beta. \quad (6.6)$$

После подстановки выражения (6.3) в формулу (6.6) и суммирования по α, β находим, что слагаемые, включающие матрицы $B_{\alpha\beta}, C_{ik}$, сокращаются в силу

симметричности этих матриц. В итоге получаем равенство

$$K_{jk} = I_{jl} A_{\alpha\beta} Q_k^\alpha Q_l^\beta - I_{kl} A_{\alpha\beta} Q_j^\alpha Q_l^\beta. \quad (6.7)$$

Введем матрицу $u = Q^i A Q$. Равенство (6.7) в матричном виде означает $K = Iu - uI = -[u, I]$. Поэтому уравнения (3.10), определяющие изменение матрицы кинетического момента и матрицы u (в силу $\dot{Q} = Q\omega$), имеют вид, совпадающий с системой уравнений (3.14). Эти уравнения полностью определяют вращение твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с потенциалом (6.1) при выполнении условий (6.3). Поэтому теорема 3 следует из теорем 1 и 2.

§ 7. Интегрируемость n -мерного аналога задачи о динамике твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом

В дальнейшем n -мерным твердым телом мы будем называть некоторый объем n -мерного евклидова пространства с распределением плотности $\rho(x)$, который перемещается без изменения расстояний между его точками. Система S координат $r^1, \dots, r^n$ жестко связана с твердым телом T и ее центр $O(r^k = 0)$ совпадает с центром масс, т. е. в системе S имеем ($d\mathbf{r}$ — элемент объема)

$$\int_T \rho(\mathbf{r}) r^k d\mathbf{r} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.1)$$

Координаты $x^1, \dots, x^n$ относятся к неподвижной системе отсчета F . Силовое поле с потенциалом $\Phi(x^1, \dots, x^n)$ называется ньютоновским, если плотность силы, действующей на частицы среды, пропорциональна плотности массы: $f_i(x) = -\rho(x) \partial \Phi / \partial x^i$.

Теорема 4. Динамика произвольного n -мерного тела в ньютоновском поле с произвольным квадратичным потенциалом

$$\Phi(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} x^i x^j + b_i x^i) \quad (7.2)$$

определяется гамильтоновой системой, интегрируемой по Лиувиллю. Динамика центра масс O интегрируется в элементарных функциях, вращение твердого тела вокруг центра масс интегрируется в тэта-функциях Римана.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теорем 1 и 2 в трехмерном случае; поэтому мы укажем только основные моменты доказательства. Координаты $x^1, \dots, x^n$ точек движущегося твердого тела T определяются преобразованием

$$x^i = \sum_{j=1}^n Q_j^i(t) r^j + q^i(t), \quad (7.3)$$

где $Q_j^i(t)$ — компоненты ортогональной матрицы, $q^i(t)$ — координаты центра масс. Функция Лагранжа твердого тела T определена на конфигурационном пространстве $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ и имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \int_T \rho(\mathbf{r}) (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) d\mathbf{r} - \int_T \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{r}. \quad (7.4)$$

Подставляя в интегралы (7.4) формулы (7.2) и (7.3) и дважды используя равенства (7.1), получаем

$$L = L_1 + L_2, \quad L_1 = \frac{m}{2} \left((\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} q^i \dot{q}^j + b_{ij} \dot{q}^i) \right),$$

$$m = \int_T \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (7.5)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^n (\dot{Q}_\alpha^i \dot{Q}_\beta^j J^{\alpha\beta} - a_{ij} Q_\alpha^i Q_\beta^j J^{\alpha\beta}), \quad J^{\alpha\beta} = \int_T \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta d\mathbf{r}.$$

Отсюда следует, что поступательное и вращательное движения n -мерного твердого тела в ньютоновском поле с произвольным квадратичным потенциалом разделяются.

Поступательное движение центра масс описывается лагранжианом гармонического осциллятора L_1 и поэтому интегрируется в элементарных функциях.

Вращательное движение n -мерного твердого тела определяется лагранжевой системой на группе Ли $SO(n)$ с лагранжианом L_2 , который можно представить также в виде

$$L_2 = -\frac{1}{2} \text{Tr}(JQ^{-1}\dot{Q}Q^{-1}\dot{Q}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(Q^{-1}aQJ), \quad (7.6)$$

где a и J — симметрические матрицы с компонентами a_{ij} , $J^{\alpha\beta}$. Введем кососимметрические матрицы ω , M и симметрическую матрицу u :

$$\omega = Q^{-1}\dot{Q}, \quad M = J\omega + \omega J, \quad u = Q^{-1}aQ. \quad (7.7)$$

Уравнения Лагранжа с лагранжианом (7.6) преобразуются в уравнения

$$\dot{M} = [M, \omega] - [u, J], \quad \dot{u} = [u, \omega]. \quad (7.8)$$

Матрицу J можно сделать диагональной с помощью ортогональной замены координат в системе отсчета S : $J^{\alpha\beta} = J^{\alpha} \delta_{\alpha\beta}$. В дальнейшем вместо связи $M = J\omega + \omega J$ (7.7) мы будем рассматривать более общую связь

$$M_{ik} = (b_i - b_k) (J^k - J^i)^{-1} \omega_{ik}. \quad (7.9)$$

Прямая проверка показывает, что уравнения (7.8) — (7.9) эквивалентны следующему матричному уравнению Лакса, зависящему от спектрального параметра E :

$$\dot{L} = [L, A], \quad L = BE^2 + ME + u, \quad A = \omega - JE,$$

где B — диагональная матрица с элементами $B_{ik} = b_i \delta_{ik}$.

Уравнения (7.8) являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли L_{n^2} , элементы которой l представляются в виде $l = M + u$, а коммутаторы имеют вид (2.7). Орбиты O действия соответствующей группы Ли G_{n^2} в $L_{n^2}^*$ являются симплектическими многообразиями размерности $n^2 - n$ и определяются n условиями $\lambda_1(u) = c_1, \dots, \lambda_n(u) = c_n$, где $\lambda_i(u)$ — собственные числа матрицы u . Система (7.1) на орбитах O является гамильтоновой с гамильтонианом $H = \text{Tr}(2^{-1} M \cdot \omega - Ju)$. При выполнении условий (7.9) система (7.8) на O является вполне интегрируемой по Лиувиллю. Инволютивными интегралами этой системы являются коэффициенты уравнения

$$R(w, E) = \det(BE^2 + ME + u - w \cdot 1) = 0. \quad (7.10)$$

Вычислим род $g(\Gamma)$ римановой поверхности Γ , определенной уравнением (7.10) (особая точка в бесконечности $|E|$ разрешается в координатах $z = E^{-1}$, $W = wE^{-1}$). Вследствие определения $M^t = -M$, $u^t = u$, имеем:

$$R(w, E) = \det(L - w \cdot 1) = \det(L^t - w \cdot 1) = R(w, -E).$$

Поэтому в уравнение (7.10) входят только четные степени E и на поверхности Γ действует инволюция σ : $\sigma(w, E) = (w, -E)$. Обозначим $E_1 = E^2$, и пусть $\Gamma_1 = \Gamma/\sigma$ — риманова поверхность, определенная уравнением $R(w, E_1^{1/2}) = 0$. Поверхность Γ_1 имеет степень n , при $b_i \neq b_j$; поверхность Γ_1 не имеет особенностей в бесконечности, поэтому ее род $g(\Gamma_1) = (n-1)(n-2)/2$ [139]. Ото-

бражение $f: \Gamma \rightarrow \Gamma_1$, $f(w, E) = (w, E_1 = E^2)$ является разветвленным двулистным накрытием и в общем случае имеет $2n$ точек ветвления: n точек при $E = 0$ и n точек при $z = E^{-1} = 0$. Поэтому для эйлеровой характеристики $\chi(\Gamma)$ и рода $g(\Gamma)$ по формуле Римана — Гурвица получаем:

$$\chi(\Gamma) = 2\chi(\Gamma_1) - 2n, \quad g(\Gamma) = 2g(\Gamma_1) + n - 1 = (n - 1)^2.$$

Интегрирование системы (7.8) в θ -функциях Римана поверхности Γ (7.10) проводится аналогично § 4. Аналитический вид окончательных формул для $\omega_i^j(t)$ внешне тождественен (4.30). В n -мерном случае также справедливы лемма 1 и лемма 2 из § 4 — после отображения (4.26) динамика системы (7.8) линеаризуется на многообразии Прима $\text{Prim}_\sigma \Gamma \subset \text{Jac } \Gamma$. Комплексная размерность многообразия Прима $\text{Prim}_\sigma \Gamma$ равна вещественной размерности инвариантных торов системы (7.8):

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}(\text{Prim}_\sigma \Gamma) &= g(\Gamma) - g(\Gamma_1) = n(n - 1)/2 = \\ &= \dim_{\mathbb{R}} O/2 = \dim_{\mathbb{R}} T. \end{aligned}$$

В силу явных формул вида (4.30) решения системы (7.8) являются мероморфными функциями на всей плоскости комплексного переменного t .

ГЛАВА XI

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА НЕКОТОРЫХ ШЕСТИМЕРНЫХ КОАЛГЕБРАХ ЛИ

В данной главе построены уравнения Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$ (и некоторых других шестимерных коалгебрах Ли), обладающие дополнительным интегралом четвертой степени и являющиеся алгебраически интегрируемыми (в эллиптических функциях) на однопараметрическом множестве орбит. Найдены интегрируемые уравнения Эйлера, обладающие дополнительным интегралом второй степени и обобщающие интегрируемый случай В. А. Стеклова. Выведены уравнения вращения твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Показано, что полученные уравнения являются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли группы Ли $G_{n+1} = SO(3) \times \dots \times SO(3)$, и найдены новые физические применения уравнений Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$. Указана лагранжева структура уравнений Кирхгофа.

§ 1. Уравнения Эйлера для двух классов шестимерных коалгебр Ли

Рассмотрим два класса А и В шестимерных алгебр Ли L , для которых коммутаторы в некотором базисе X_i, Y_k ($i, j, k = 1, 2, 3$) имеют следующий вид:

в классе А $\mathfrak{X}$:

$$\begin{aligned} [X_i, Y_j] &= \varepsilon_{ijk} n_k X_k, & [X_i, Y_j] &= \varepsilon_{ijk} n_k Y_k, \\ [Y_i, Y_j] &= \varepsilon_{ijk} n_k \mathfrak{X} X_k, \end{aligned} \quad (1.1)$$

в классе В

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} n_k X_k, \quad [X_i, Y_j] = 0, \quad [Y_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} m_k Y_k. \quad (1.2)$$

Здесь ε_{ijk} — антисимметричный тензор, $n_k, m_k, \mathfrak{X}$ — структурные константы. В классе А содержатся алгебры Ли: $SO(4)$ ($n_i = 1, \mathfrak{X} = 1$), $SO(3.1)$ ($n_1 = n_2 = 1, n_3 = -1, \mathfrak{X} = -1$), $SO(2.2)$ ($n_1 = n_2 = 1, n_3 = -1, \mathfrak{X} = 1$),

$E_3(n_i = 1, \kappa = 0)$, $L_3(n_1 = n_2 = 1, n_3 = -1, \kappa = 0)$ и др. Алгебры Ли E_3 и L_3 соответствуют группам Ли движений трехмерного евклидова и псевдоевклидова пространства. В классе В содержатся алгебры Ли $SO(4) = SO(3) \oplus SO(3)$ ($n_i = 1, m_i = 1$), $SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R})$ ($n_1 = m_1 = n_2 = m_2 = 1, n_3 = m_3 = -1$), $SO(3) + SL(2, \mathbb{R})$ ($n_i = 1, m_1 = m_2 = 1, m_3 = -1$) и др.

Пусть X_j^*, Y_i^* — базис в сопряженном пространстве L^* , двойственный базису X_i, Y_i . Векторы из L^* представляем в виде $\mathbf{I}(t) = \sum_{i=1}^3 (M_i(t) X_i^* + K_i(t) Y_i^*)$. Уравнения

Эйлера определены в пространстве L^* и имеют вид:
в классе А

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \bar{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} \times \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}} \times \boldsymbol{\omega} + \kappa \bar{\mathbf{M}} \times \mathbf{u}, \\ \omega_i &= \frac{\partial H}{\partial M_i}, \quad u_i = \frac{\partial H}{\partial K_i}, \quad \bar{M}_i = n_i M_i, \quad \bar{K}_i = n_i K_i, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $X \times Y$ означает векторное произведение трехмерных векторов,

в классе В

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \bar{\mathbf{M}} \times \mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}} \times \mathbf{B}, \\ A_i &= \frac{\partial H}{\partial M_i}, \quad B_i = \frac{\partial H}{\partial K_i}, \quad \bar{M}_i = n_i M_i, \quad \bar{K}_i = m_i K_i. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения Эйлера (1.3), (1.4) имеют следующие первые интегралы:

$$\text{А: } J_1 = H, \quad J_2 = \sum_{i=1}^3 (\kappa n_i M_i^2 + n_i K_i^2), \quad J_3 = \sum_{i=1}^3 n_i M_i K_i, \quad (1.5)$$

$$\text{В: } J_1 = H, \quad J_2 = \sum_{i=1}^3 n_i M_i^2, \quad J_3 = \sum_{i=1}^3 m_i K_i^2.$$

Пусть G — группа Ли, имеющая алгебру Ли L , и O — орбиты коприсоединенного представления G в L^* . Орбиты O определяются условиями $J_2 = C_2, J_3 = C_3$ и являются четырехмерными симплектическими многообразиями, инвариантными относительно уравнений Эйлера (1.3), (1.4). Системы (1.3), (1.4) на орбитах O гамильтоновы с гамильтонианом $H(M_i, K_i)$. В дальнейшем рассматриваются гамильтонианы H вида

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (a_i M_i^2 + 2c_i M_i K_i + b_i K_i^2 + 2r_i K_i + 2q_i M_i). \quad (1.6)$$

Уравнения Эйлера (1.3) для алгебры Ли $E_3(n_i = 1, \kappa = 0)$ совпадают с уравнениями Кирхгофа движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости; их частным случаем являются уравнения вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [116]: известны классические интегрируемые случаи этих уравнений, найденные В. А. Стекловым [105], А. М. Ляпуновым [107], С. В. Ковалевской [104] и С. А. Чаплыгиным [108].

Для интегрируемости гамильтоновой системы (1.3) (или системы (1.4)) на орбитах O по Лиувиллю достаточно указать дополнительный первый интеграл J_4 . Метод построения интеграла J_4 , используемый в данной главе, состоит в отыскании условий на коэффициенты гамильтониана H , при которых из системы уравнений (1.3) (соответственно (1.4)) следуют два уравнения

$$\dot{z}_+ = w_+ z_+ + v_+ J_3, \quad \dot{z}_- = w_- z_- + v_- J_3, \quad (1.7)$$

где функции z_+ , z_- являются (комплекснозначными) многочленами первой или второй степени и $w_+ = -w_-$. При выполнении уравнений (1.7) система (1.3) на уровне $J_3 = 0$ (т. е. на однопараметрическом множестве орбит $O(J_2 = c_2, J_3 = 0)$) имеет дополнительный интеграл второй или четвертой степени $J_4 = z_+ z_-$; если же $v_+ = v_- = 0$, то система (1.3) имеет первый интеграл J_4 во всем пространстве L^* . С помощью этой конструкции получаются все названные классические интегрируемые случаи [103—108] уравнений Эйлера на алгебре Ли E_3 и их обобщения на другие алгебры Ли (1.1), (1.2).

В § 2 показано, что существуют два семейства уравнений Эйлера (1.3) на алгебрах Ли класса A (в частности, на $SO(4)$), которые алгебраически интегрируемы на уровне $J_3 = 0$. Эти два семейства определяются условиями:

$$\frac{\kappa b_1}{n_1} = \frac{2a_2}{n_2} - \frac{a_3}{n_3}, \quad \frac{\kappa b_2}{n_2} = \frac{2a_1}{n_1} - \frac{a_3}{n_3}, \quad \frac{2b_3}{n_3} = \frac{b_1}{n_1} + \frac{b_2}{n_2}, \quad (1.8)$$

$$\frac{2\kappa b_i}{n_i} = \frac{a_i}{n_j} + \frac{a_k}{n_k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1.9)$$

причем $c_i = r_i = q_i = 0$. При этом дополнительный интеграл J_4 является многочленом четвертой степени и интегрирование уравнений Эйлера на уровне $J_3 = 0$ проводится (в § 3) явно в эллиптических функциях (для алгебры Ли $SO(4)$). Отметим, что в работе [144] показано, что алгебраическая интегрируемость уравнений Эйлера на

$SO(4)$ (при $c_i = r_i = q_i = 0$) во всем пространстве L^* возможна только при специальных условиях [52]; новые интегрируемые случаи (1.8), (1.9) не удовлетворяют условиям работы [52] и поэтому являются алгебраически интегрируемыми только на уровне $J_3 = 0$. Интегрируемый случай (1.8) при $n_i = 1$, $\kappa \rightarrow 0$ переходит в классический случай С. А. Чаплыгина [108]; обобщение случая (1.8) при $r_i \neq 0$ и $a_1 = a_2$ при $n_i = 1$, $\kappa \rightarrow 0$ переходит в классический случай С. В. Ковалевской [104]. Интегрируемый случай (1.9) не имеет классических аналогов.

Частным случаем уравнений Эйлера на алгебре Ли $SO(4) = SO(3) \oplus SO(3)$ являются уравнения вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [145—148]. Эти уравнения исследовал В. А. Стеклов [106] в качестве модели вращения Земли; В. А. Стеклов анонсировал интегрируемые случаи, обладающие дополнительным квадратичным первым интегралом J_4 . С современной точки зрения интегрируемые случаи [106] образуют трехпараметрическое семейство интегрируемых уравнений Эйлера на алгебре Ли $SO(4)$ (отметим, что параметр M в [106, п. 3, п. 42] является несущественным и устраняется растяжением параметров A, B, C, a, b, c , которые связаны тремя соотношениями п. 42). В данной главе мы указываем (в § 4) более широкое шестипараметрическое семейство интегрируемых уравнений Эйлера на $SO(4)$, а также его обобщения, содержащие линейные члены в гамильтониане H . В § 5 указаны новые физические применения интегрируемых случаев на алгебре Ли $SO(4)$.

§ 2. Интегралы J_4 четвертой степени

I. Предположим, что для уравнений Эйлера (1.3) на алгебрах Ли класса А константы гамильтониана H (1.6) удовлетворяют условиям $c_i = q_i = 0$. Рассмотрим решения уравнений (1.7), для которых функции $z_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon$ имеют вид ($\varepsilon = \pm 1$)

$$z_\varepsilon = \alpha_1 M_1^2 + 2\varepsilon \alpha_3 M_1 M_2 + \alpha_2 M_2^2 + \beta K_3^2 + 2\gamma_1 K_1 + 2\gamma_2 K_2 + \sigma, \quad (2.1)$$

$$w_\varepsilon = 2\varepsilon x M_3, \quad v_\varepsilon = 2\varepsilon y K_3.$$

Уравнения (1.7) после подстановки производной $\dot{z}_\varepsilon$ (2.1) в силу системы (1.3) и ввиду произвольности значений M_i, K_i приводят к следующей системе

алгебраических связей на коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_3(n_3a_1 - n_1a_3) &= x\alpha_1, \quad \alpha_3(n_2a_3 - n_3a_2) = x\alpha_2, \\ \alpha_1(n_2a_3 - n_3a_2) + \alpha_2(n_3a_1 - n_1a_3) &= 2x\alpha_3, \quad x\beta = -yn_3, \\ \alpha_1(n_2b_3 - n_3b_2) + \beta(\kappa n_1b_2 - n_2a_1) &= 0, \quad \alpha_3(n_3b_1 - n_1b_3) = yn_1, \\ \alpha_2(n_3b_1 - n_1b_3) + \beta(n_1a_2 - \kappa n_2b_1) &= 0, \quad \alpha_3(n_2b_3 - n_3b_2) = yn_2, \\ \varepsilon\alpha_3n_3r_1 + (n_1\beta\kappa - n_3\alpha_1)r_2 &= \gamma_2(\kappa n_1b_3 - n_3a_1), \\ (n_3\alpha_2 - n_2\beta\kappa)r_1 - \varepsilon n_3\alpha_3r_2 &= \gamma_1(n_3a_2 - \kappa n_2b_3), \\ \gamma_2(\kappa n_3b_1 - n_1a_3) &= 2x\gamma_1, \quad \gamma_1(n_2a_3 - \kappa n_3b_2) = 2x\gamma_2, \\ \kappa n_3(\gamma_2r_1 - \gamma_1r_2) &= \varepsilon x\sigma. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Первые три уравнения системы (2.2) образуют замкнутую подсистему, из которой легко находятся коэффициенты x и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, определенные с точностью до несущественного общего множителя. Затем из следующих пяти уравнений находятся коэффициенты y, β и три связи на коэффициенты b_i, b_j , которые имеют вид

$$\frac{\kappa b_1}{n_1} = \frac{2a_2}{n_2} - \frac{a_3}{n_3}, \quad \frac{\kappa b_2}{n_2} = \frac{2a_1}{n_1} - \frac{a_3}{n_3}, \quad \frac{2b_3}{n_3} = \frac{b_1}{n_1} + \frac{b_2}{n_2}. \quad (2.3)$$

Из оставшихся пяти уравнений (2.2) находятся коэффициенты r_i, γ_i, σ . Окончательно система (2.2) сводится к трем связям (2.3) и соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n_3a_1 - n_1a_3, \quad \alpha_2 = n_2a_3 - n_3a_2, \quad \alpha_3 = (\alpha_1\alpha_2)^{1/2}, \quad x = \alpha_3, \\ \beta &= -n_3^2 \left(\frac{b_1}{n_1} - \frac{b_3}{n_3} \right), \quad y = -\frac{x\beta}{n_3}, \quad \sigma = \sigma_1 + 2\varepsilon\sigma_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\kappa n_3^2 (n_1n_2\alpha_1\alpha_2)^{-1} (n_2^2\alpha_1r_1^2 + n_1^2\alpha_2r_2^2), \quad \sigma_2 = -\frac{\kappa n_3^2 r_1r_2}{x}, \\ \gamma_1 &= n_3r_1 + \frac{\varepsilon n_1n_3xr_2}{n_2\alpha_1}, \quad \gamma_2 = -n_3r_2 - \frac{\varepsilon n_2n_3xr_1}{n_1\alpha_2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты α, β, x, y определены с точностью до общего множителя. При выполнении условий (2.3) система (1.3) на уровне $J_3 = 0$ имеет дополнительный интеграл

$$\begin{aligned} J_4 &= (\alpha_1M_1^2 + \alpha_2M_2^2 + \beta K_3^2 + 2n_3(r_1K_1 - r_2K_2) + \sigma_1)^2 - \\ &\quad - 4\alpha_1\alpha_2N^2, \\ N &= M_1M_2 + (n_1^2n_3\alpha_2r_2K_1 - n_2^2n_3\alpha_1r_1K_2)/n_1n_2\alpha_3^2 - \\ &\quad - n_3^2\kappa r_1r_2\alpha_3^{-2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

и поэтому вполне интегрируема на однопараметрическом множестве орбит $O(J_2 = c_2, J_3 = 0)$. Во всем пространстве $L^*(M_i, K_i)$ функция J_4 удовлетворяет уравнению

$$J_4 = 8\alpha_1\alpha_2n_3(b_1/n_1 - b_3/n_3)NK_3J_3. \quad (2.6)$$

Если $a_1/n_1 = a_2/n_2$, то в силу (2.3) $b_i/n_i = b_j/n_j$, следовательно, $J_4 = 0$ и система (3) интегрируема при любых значениях интеграла J_3 . При $\kappa = 0$, $b_i = 0$ получаем классический случай С. В. Ковалевской [104], а при $\kappa = 0$, $b_i \neq 0$ — случай С. А. Чаплыгина [108] для уравнений Кирхгофа.

Если $a_1/n_1 \neq a_2/n_2$, то функция J_4 при $|J_3| \ll 1$ является адиабатическим инвариантом системы (1.3). В полученном семействе уравнений Эйлера, интегрируемых при $J_3 = 0$, пять коэффициентов a_1, a_2, a_3, r_1, r_2 гамильтониана H (1.6) произвольны.

II. Второе семейство интегрируемых случаев уравнений Эйлера (1.3) получается при условиях ($\varepsilon = \pm 1$)

$$z_\varepsilon = \alpha_1 K_1^2 + 2\varepsilon\alpha_3 K_1 K_2 + \alpha_2 K_2^2 + \beta K_3^2, \\ w_\varepsilon = \varepsilon x M_3, \quad v_\varepsilon = \varepsilon y K_3. \quad (2.7)$$

После подстановки $\dot{z}_\varepsilon$, в силу системы (1.3), уравнения (1.7) сводятся к системе алгебраических связей на коэффициенты

$$\alpha_3(\kappa n_3 b_1 - n_1 a_3) = x\alpha_1, \quad \alpha_3(n_2 a_3 - \kappa n_3 b_2) = x\alpha_2, \\ \alpha_1(n_2 a_3 - \kappa n_3 b_2) + \alpha_2(\kappa n_3 b_1 - n_1 a_3) = 2x\alpha_3, \\ \kappa\beta = -yn_3, \quad \beta(n_1 a_2 - \kappa n_2 b_1) - \alpha_1(n_3 a_2 - \kappa n_2 b_3) = 0, \\ \alpha_3(n_3 a_1 - \kappa n_1 b_3) = yn_1, \quad (2.8) \\ \beta(\kappa n_1 b_2 - n_2 a_1) + \alpha_2(n_3 a_1 - \kappa n_1 b_3) = 0, \\ \alpha_3(\kappa n_2 b_1 - n_3 a_2) = yn_2.$$

Система (2.8) решается аналогично системе (2.2) и сводится к трем связям на коэффициенты a_i, b_i ($i, j, k = 1, 2, 3$):

$$2\kappa b_i/n_i = a_j/n_j + a_k/n_k \quad (2.9)$$

и соотношениям

$$\alpha_1 = \kappa n_3 b_1 - n_1 a_3, \quad \alpha_2 = n_2 a_3 - \kappa n_3 b_2, \quad \alpha_3 = (\alpha_1 \alpha_2)^{-2}, \quad (2.10)$$

$$x = \alpha_3, \quad 2\beta = n_3^2(a_2/n_2 - a_1/n_1), \quad y = -x\beta/n_3.$$

Система (1.3) при выполнении условий (2.7) и $J_2 = 0$ имеет дополнительный интеграл

$$J_4 = (\alpha_1 K_1^2 + \alpha_2 K_2^2 + \beta K_3^2)^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 K_1^2 K_2^2 \quad (2.11)$$

и является поэтому вполне интегрируемой (при $J_3 = 0$). Во всем пространстве L^* функция J_4 удовлетворяет уравнению

$$J_4 = 4n_3(a_2/n_2 - a_1/n_1)K_1K_2K_3J_3$$

и является адиабатическим инвариантом при $|J_3| \ll 1$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Существуют два семейства (2.3), (2.9) уравнений Эйлера (1.3) на алгебрах Ли класса А ($\kappa \neq 0$), которые вполне интегрируемы по Лиувиллю на однопараметрическом множестве орбит $O(J_2 = c_2, J_3 = 0)$ и имеют дополнительные интегралы четвертой степени (2.5), (2.11). При $a_1/n_1 = a_2/n_2$ полученные уравнения Эйлера интегрируемы во всем пространстве L^* .*

Для алгебр Ли $SO(4)$ и $SO(3,1)$ уравнения (2.3), (2.9) имеют открытое множество положительных решений $a_i > 0, b_i > 0$. Семейство интегрируемых случаев (2.9) не допускает включения линейных слагаемых в гамильтониан H (1.6) и при $\kappa \rightarrow 0$ приводит к вырожденным уравнениям. Интегрируемость во всем пространстве L^* при $a_1/n_1 = a_2/n_2$ для семейства (2.9) очевидна, а для семейства (2.3) при $r_i \neq 0$ следует только из существования интеграла (2.5), как и в случае Ковалевской [104].

Отметим, что уравнения Эйлера (1.3) при условиях $c_i = r_i = q_i = 0$ и

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{n_1} - \kappa \frac{b_3}{n_3}\right) \left(\frac{a_2}{n_2} - \kappa \frac{b_1}{n_1}\right) \left(\frac{a_3}{n_3} - \kappa \frac{b_2}{n_2}\right) = \\ = \left(\frac{a_1}{n_1} - \kappa \frac{b_2}{n_2}\right) \left(\frac{a_2}{n_2} - \kappa \frac{b_3}{n_3}\right) \left(\frac{a_3}{n_3} - \kappa \frac{b_1}{n_1}\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

имеют дополнительный первый интеграл

$$J_4 = y_1 K_1^2 + y_2 K_2^2 + y_3 K_3^2, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{n_1} &= \left(\frac{a_2}{n_2} - \kappa \frac{b_1}{n_1}\right) \left(\frac{a_3}{n_3} - \kappa \frac{b_1}{n_1}\right), \\ \frac{y_2}{n_2} &= \left(\frac{a_2}{n_2} - \kappa \frac{b_1}{n_1}\right) \left(\frac{a_3}{n_3} - \kappa \frac{b_2}{n_2}\right), \\ \frac{y_3}{n_3} &= \left(\frac{a_2}{n_2} - \kappa \frac{b_3}{n_3}\right) \left(\frac{a_3}{n_3} - \kappa \frac{b_1}{n_1}\right), \end{aligned}$$

и поэтому вполне интегрируемы по Лиувиллю (существование интеграла (2.13) проверяется прямым вычислением).

Для алгебры Ли $SO(4)$ ($n_i = \kappa = 1$) условие (2.12) приводит к интегрируемому случаю С. В. Манакова [52]. Два семейства уравнений Эйлера, определенные условиями (2.3) и (2.9), не принадлежат пятимерному множеству (2.12) и пересекаются с ним по двумерным подмногообразиям (осесимметричные метрики). Поэтому из результатов работы [144] следует, что уравнения Эйлера (1.3) при условиях (2.3) и (2.9) не являются алгебраически интегрируемыми во всем пространстве L^* . Однако, как показано в следующем параграфе, на уровне $J_3 = 0$ алгебраическая интегрируемость все же имеет место.

§ 3. Явное интегрирование некоторых уравнений Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$

I. В данном параграфе уравнения Эйлера (1.3) при условиях (2.3), (2.9), рассматриваемые на инвариантных двумерных торах, определенных постоянными значениями интегралов $J_1, J_2, J_3 = 0, J_4$, интегрируются явно в эллиптических функциях времени. Конструкция координат s_1, s_2 навеяна классической работой С. А. Чаплыгина [108], посвященной уравнениям Кирхгофа.

При условиях (2.3) интеграл J_4 (2.5) принимает только неотрицательные значения $J_4 = h^2$ и при $n_i = \kappa = 1$ ($SO(\mathbb{N})$) имеет вид

$$J_4 = ((a_3 - a_1) M_1^2 + (a_2 - a_3) M_2^2 + (b_1 - b_3) K_3^2)^2 + 4(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) M_1^2 M_2^2. \quad (3.1)$$

Координаты s_1 и s_2 при $h > 0$ определим формулами

$$s_1 = (u + h)/v, \quad s_2 = (u - h)/v, \quad (3.2)$$

$$u = (a_3 - a_1) M_1^2 + (a_3 - a_2) M_2^2, \quad v = (b_1 - b_3) K_3^2, \quad s = a_3 M_3^2.$$

Отсюда получаем:

$$v = 2h/(s_1 - s_2), \quad u = (s_1 + s_2)h/(s_1 - s_2). \quad (3.3)$$

Укажем явное выражение координат M_i, K_i через координаты s_1, s_2 и константы J_k . В силу (3.1) имеем:

$$u^2 + 2((a_3 - a_1) M_1^2 - (a_3 - a_2) M_2^2)v + v^2 = h^2.$$

Отсюда и из (3.2) находим:

$$\begin{aligned} 2(a_3 - a_1) M_1^2 &= (h^2 - (u - v)^2)/2v, \\ 2(a_3 - a_2) M_2^2 &= ((u + v)^2 - h^2)/2v. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.4) и (3.2) формулы (3.3), получаем выражения для координат M_1, M_2, K_3 через s_1, s_2, h :

$$\begin{aligned} 2(a_3 - a_1)^{1/2} M_1 &= \left(\frac{h(1-s_2)(s_1-1)}{s_1-s_2} \right)^{1/2}, \\ 2(a_3 - a_2)^{1/2} M_2 &= \left(\frac{h(s_1+1)(s_2+1)}{s_1-s_2} \right)^{1/2}, \\ (b_1 - b_2)^{1/2} K_3 &= -2(h/(s_1 - s_2))^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Перейдем к нахождению выражений координат K_1, K_2, M_3 через значения интегралов J_i и s_1, s_2 . Подставляя выражения (3.2) для M_3, K_3 через v и s и выражения (3.4) в интегралы J_1, J_2 (1.5), получаем:

$$\begin{aligned} (b_1 - b_2) K_1^2 &= -u - v + J_1 - b_2 J_2 + \\ &+ \left(\frac{a_1 - a_2}{a_3 - a_2} \right) \frac{(u+v)^2 - h^2}{2v} - \frac{2(a_3 - a_1)}{a_3} s, \\ (b_1 - b_2) K_2^2 &= u - v - J_1 + b_1 J_2 + \\ &+ \left(\frac{a_1 - a_2}{a_3 - a_1} \right) \frac{h^2 - (u-v)^2}{2v} + \frac{2(a_3 - a_2)}{a_3} s. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, остается найти выражение для s через s_1, s_2, J_k . Отметим, что из интеграла $J_3 = 0$ (1.5) следует:

$$M_3^4 K_3^4 - 2(M_1^2 K_1^2 + M_2^2 K_2^2) M_3^2 K_3^2 + (M_1^2 K_1^2 - M_2^2 K_2^2)^2 = 0. \quad (3.7)$$

Подставляя в (3.7) полученные выше выражения, находим, что переменная s удовлетворяет уравнению

$$\frac{4h^2 v^2}{a_3^2} s^2 - \frac{2v}{a_3} P_s + \frac{Q^2}{4} = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma P &= (h^2 - u^2 - v^2)(X_1 - X_2 - h^2(a_1 - a_2)) + \\ &+ 2uv(X_1 + X_2 - h^2(2a_3 - a_1 - a_2)), \\ \gamma Q &= (h^2 - u^2 - v^2)(Y_1 + Y_2) + 2uv(Y_1 - Y_2), \\ X_1 &= (a_3 - a_2)(u + v)(J_1 - b_2 J_2), \\ X_2 &= (a_3 - a_1)(u - v)(J_1 - b_1 J_2), \\ Y_1 &= (a_3 - a_2)(-u - v + J_1 - b_2 J_2), \\ Y_2 &= (a_3 - a_1)(u - v - J_1 + b_1 J_2) \\ \gamma &= 2(a_3 - a_1)(a_3 - a_2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.8) находим:

$$4h^2vs/a_3 = P \pm (P^2 - h^2Q^2)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Отсюда получаем ($s/a_3 = M_3^2$):

$$2h(2v)^{1/2}M_3 = (P + hQ)^{1/2} \pm (P - hQ)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Используя формулы (3.9), находим:

$$\begin{aligned} \gamma(P - hQ) &= ((h - u)^2 - v^2)(\alpha_1 v - \beta_1(u + h)), \\ \gamma(P + hQ) &= ((h + u)^2 - v^2)(\alpha_2 v - \beta_2(u - h)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= m_1(J_1 + h) - m_2J_2, & \alpha_2 &= m_1(J_1 - h) - m_2J_2, \\ \beta_1 &= (a_1 - a_2)(J_1 + h) - m_3J_2, & \beta_2 &= (a_1 - a_2)(J_1 - h) - m_3J_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 2a_3 - a_1 - a_2, & m_2 &= (a_3 - a_2)b_2 + (a_3 - a_1)b_1, \\ m_3 &= (a_3 - a_2)b_2 - (a_3 - a_1)b_1. \end{aligned}$$

После подстановки (3.12) в формулу (3.11) и использования соотношений (3.2) получаем:

$$\begin{aligned} M_3 &= (((s_1^2 - 1)(\alpha_2 - \beta_2 s_2))^{1/2} + \\ &+ ((s_2^2 - 1)(\alpha_1 - \beta_1 s_1))^{1/2}) / (s_1 - s_2)(2\gamma)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отсюда получаем выражение для величины s .

После подстановки в формулы (3.6) обозначений (3.13) для α_i , β_i находим:

$$(b_1 - b_2)K_1^2 = \frac{(\beta_1 s_1 - \alpha_1)(s_2 + 1) - (\beta_2 s_2 - \alpha_2)(s_1 + 1)}{2(a_3 - a_2)(s_1 - s_2)} - \frac{2(a_3 - a_1)s_1}{a_3}, \quad (3.15)$$

$$(b_1 - b_2)K_2^2 = \frac{(\beta_1 s_1 - \alpha_1)(1 - s_2) + (\beta_2 s_2 - \alpha_2)(s_1 - 1)}{2(a_3 - a_1)(s_1 - s_2)} + \frac{2(a_3 - a_2)s_2}{a_3}.$$

Подставляя в (3.15) величину $s/a_3 = M_3^2$, в силу (3.14) находим:

$$\begin{aligned} (b_1 - b_2)^{1/2}K_1 &= (2(a_3 - a_2))^{-1/2}(s_1 - s_2)^{-1}(((1 + s_1) \times \\ &\times (1 - s_2)(\alpha_2 - \beta_2 s_2))^{1/2} - ((1 - s_1)(1 + s_2)(\alpha_1 - \beta_1 s_1))^{1/2}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} (b_1 - b_2)^{1/2}K_2 &= (2(a_3 - a_1))^{-1/2}(s_1 - s_2)^{-1}(((1 + s_1) \times \\ &\times (s_2 - 1)(\alpha_1 - \beta_1 s_1))^{1/2} + ((s_1 - 1)(1 + s_2)(\alpha_2 - \beta_2 s_2))^{1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, формулы (3.5), (3.14) и (3.16) дают выражение всех координат M_i , K_i через координаты s_1 , s_2 и постоянные J_1 , J_2 , $J_4 = h^2$ (на уровне $J_3 = 0$). Отметим,

что в этих формулах допускается одновременное изменение знака у каждой пары координат M_i, K_i .

Перейдем к преобразованию уравнений Эйлера (1.3) в координаты s_1, s_2 . Продифференцировав выражения s_1, s_2 (3.2) в силу системы (1.3), получим:

$$\dot{s}_1/2 = (a_3 - a_1)(s_1 + 1)M_1K_2/K_3 + (a_3 - a_2)(1 - s_1)M_2K_1/K_3, \quad (3.17)$$

$$\dot{s}_2/2 = (a_3 - a_1)(s_2 + 1)M_1K_2/K_3 + (a_3 - a_2)(1 - s_2)M_2K_1/K_3.$$

После подстановки в уравнения (3.17) выражений (3.5), (3.16) для координат M_i, K_i получаем два замкнутых уравнения

$$\dot{s}_1 = -((1 - s_1^2)(\alpha_1 - \beta_1 s_1))^{1/2}, \quad \dot{s}_2 = -((1 - s_2^2)(\alpha_2 - \beta_2 s_2))^{1/2}. \quad (3.18)$$

В силу уравнений (3.18) $s_i(t)$ являются эллиптическими функциями времени t . Подставляя $s_i(t)$ в формулы (3.5), (3.14), (3.16), получаем явное выражение динамики уравнений Эйлера (1.3) через эллиптические функции. Вырожденный случай $J_4 = 0$ интегрируется в элементарных функциях.

II. Проведем интегрирование уравнений Эйлера (1.3) при условиях (2.9): $b_i = (a_j + a_k)/2$. Интеграл J_4 имеет вид:

$$J_4 = h^2 = ((a_3 - a_2)K_1^2 + (a_1 - a_3)K_2^2 + (a_1 - a_2)K_3^2)^2 + 4(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)K_1^2K_2^2. \quad (3.19)$$

Введем координаты s_1, s_2 :

$$\begin{aligned} s_1 &= (u + h)/v, & s_2 &= (u - h)/v, \\ u &= (a_3 - a_2)K_1^2 + (a_3 - a_1)K_2^2, & v &= (a_1 - a_2)K_3^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Так же как и в п. I, найдем выражение координат M_i, K_i через координаты s_1, s_2 и константы J_k . Используя (3.19), получаем:

$$\begin{aligned} 2(a_3 - a_2)K_1^2 &= (h^2 - (u - v)^2)/2v, \\ 2(a_3 - a_1)K_2^2 &= ((u + v)^2 - h^2)/2v. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставляя сюда выражения u, v через s_1, s_2 (3.3), находим:

$$(2(a_3 - a_2))^{1/2}K_1 = (h(1 - s_2)(s_1 - 1)(s_1 - s_2)^{-1})^{1/2}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} (2(a_3 - a_1))^{1/2}K_2 &= (h(s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_1 - s_2)^{-1})^{1/2}, \\ (a_1 - a_2)^{1/2}K_3 &= -(2h(s_1 - s_2)^{-1})^{1/2}. \end{aligned}$$

Обозначим $s = a_3 M_3^2$; из формул (1.5) после подстановки (3.20) — (3.21) получаем:

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2) M_1^2 &= J_1 - a_2 J_2 - \frac{u+v}{2} - \\ &\quad - \frac{(a_1 - a_2)}{2(a_3 - a_1)} \left(\frac{(u+v)^2 - h^2}{2v} \right) - \frac{a_3 - a_2}{a_3} s, \\ (a_1 - a_2) M_2^2 &= -J_1 + a_1 J_2 + \frac{u-v}{2} - \\ &\quad - \frac{a_1 - a_2}{2(a_3 - a_2)} \left(\frac{h^2 - (u-v)^2}{2v} \right) - \frac{a_1 - a_3}{a_3} s.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Подставив полученные выражения координат M_i , K_j в уравнение (3.7) ($J_3 = 0$), получаем уравнение для определения s :

$$\frac{4v^2 h^2}{a_3^2} s^2 - \frac{2vs}{a_3} P_1 + \frac{Q_1^2}{4} = 0, \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 P_1 &= (h^2 - u^2 - v^2) (x_1 + x_2 + h^2(a_1 - a_2)/2) + \\ &\quad + 2uv(x_1 - x_2 - h^2(2a_3 - a_1 - a_2)/2), \\ \gamma_1 Q_1 &= (h^2 - u^2 - v^2) (y_1 + y_2) + 2uv(y_1 - y_2), \\ x_1 &= (a_3 - a_1) (u + v) (J_1 - a_2 J_2), \\ x_3 &= (a_3 - a_2) (u - v) (a_1 J_2 - J_1), \\ y_1 &= (a_3 - a_1) (J_1 - a_2 J_2 - (u + v)/2), \\ y_2 &= (a_3 - a_2) (a_1 J_2 - J_1 + (u - v)/2), \\ \gamma_1 &= (a_3 - a_1) (a_3 - a_2).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Из уравнения (3.24) получаем:

$$4vh^2 s/a_3 = P_1 \pm (P_1^2 - h^2 Q_1^2)^{1/2},$$

и, после подстановки $M_3^2 = s/a_3$, находим:

$$2(2v)^{1/2} h M_3 = (P_1 + h Q_1)^{1/2} \pm (P_1 - h Q_1)^{1/2}. \quad (3.26)$$

Из формул (3.25) следует

$$\begin{aligned}P_1 - h Q_1 &= ((u - h)^2 - v^2) (v \alpha_1^0 - (u + h) \beta_1^0) / \gamma_1, \\ P_1 + h Q_1 &= ((u + h)^2 + v^2) (v \alpha_2^0 - (u - h) \beta_2^0) / \gamma_1,\end{aligned}\quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_1^0 &= (J_1 + h/2) n_1 + J_2 n_2, & \alpha_2^0 &= (J_1 - h/2) n_1 + J_2 n_2, \\ \beta_1^0 &= (a_1 - a_2) (J_2 a_3 - J_1 - h/2), & \beta_2^0 &= (a_1 - a_2) (J_2 a_3 - J_1 + h/2),\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$n_1 = 2a_3 - a_1 - a_2,$$

$$n_2 = 2a_1 a_2 - a_3 (a_1 + a_2).$$

Используя формулы (3.3), преобразуем (3.26) к виду

$$M_3 = (((s_1^2 - 1)(\alpha_2^0 - \beta_2^0 s_2))^{1/2} + ((s_2^0 - 1)(\alpha_1^0 - \beta_1^0 s_1))^{1/2}) / (s_1 - s_2)(2\gamma_1)^{1/2}. \quad (3.29)$$

После подстановки соответствующего выражения для $s = a_3 M_3^2$ в (3.23) получаем:

$$(a_1 - a_2)^{1/2} M_1 = (2(a_3 - a_1))^{-1/2} (s_1 - s_2)^{-1} (((1 + s_1) \times \\ \times (1 - s_2)(\alpha_2^0 - \beta_2^0 s_2))^{1/2} - ((1 - s_1)(1 + s_2)(\alpha_1^0 - \beta_1^0 s_1))^{1/2}). \quad (3.30)$$

$$(a_1 - a_2)^{1/2} M_2 = (2(a_3 - a_2))^{-1/2} (s_1 - s_2)^{-1} (((1 + s_1) \times \\ \times (s_2 - 1)(\alpha_1^0 - \beta_1^0 s_1))^{1/2} + ((s_1 - 1)(s_2 + 1)(\alpha_2^0 - \beta_2^0 s_2))^{1/2}).$$

Формулы (3.22), (3.29) и (3.30) дают выражение всех координат M_i , K_j через координаты s_1 , s_2 и константы J_h ; знаки каждой пары координат M_i , K_i можно одновременно изменить на противоположные.

Дифференцируя координаты s_1 , s_2 (3.20), в силу уравнений Эйлера (1.3) получаем:

$$\dot{s}_1 = (a_3 - a_1)(1 - s_1)M_1K_2/K_3 + (a_3 - a_2)(s_1 + 1)M_2K_1/K_3, \\ \dot{s}_2 = (a_3 - a_1)(1 - s_2)M_1K_2/K_3 + (a_3 - a_2)(s_2 + 1)M_2K_1/K_3.$$

Подставляя в эти уравнения выражения M_i , K_j через s_1 , s_2 , получаем динамическую систему с разделенными переменными

$$\dot{s}_1 = -((1 - s_1^2)(\alpha_1^0 - \beta_1^0 s_1)/2)^{1/2}, \\ \dot{s}_2 = -((1 - s_2^2)(\alpha_2^0 - \beta_2^0 s_2)/2)^{1/2}. \quad (3.31)$$

Таким образом, уравнения Эйлера (1.3) при условиях (2.9) также интегрируются явно в эллиптических функциях времени (см. [155]).

§ 4. Интегралы J_4 второй степени

В данном параграфе изучаются уравнения Эйлера (1.3), (1.4) с общими гамильтонианами (1.6). Выведем условия на коэффициенты a_i , b_i , c_i , r_i , q_i , при которых из уравнений Эйлера следуют два уравнения (см. (1.7)):

$$\dot{z}_+ = w_+ z_+, \quad \dot{z}_- = w_- z_-, \\ z_\pm = \alpha_1 M_1 + \varepsilon \alpha_2 M_2 + \beta_1 K_1 + \varepsilon \beta_2 K_2 + n_3 \gamma_1 + \varepsilon n_3 \gamma_2, \quad (4.1) \\ w_\pm = \varepsilon x M_3 + \varepsilon y K_3, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

В этом случае многочлен второй степени $J_4 = z_+ z_-$ является интегралом уравнений (1.3) или (1.4). Специальный случай уравнений (4.1) получается, если $z = z_+$ — комплекснозначная функция, w_+ — чисто мнимая функция; тогда $z_- = \bar{z}_+$, $w_- = \bar{w}_+$ и интеграл $J_4 = z\bar{z}$.

1. Для алгебр Ли класса A (1.1) уравнения (4.1) после подстановки $\dot{z}_i$ в силу системы (1.3) и ввиду произвольности значений M_i , K_i приводят к системе алгебраических связей на коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_1(n_2 a_3 - n_3 a_2) + \kappa \beta_1(n_2 c_3 - n_3 c_2) &= x \alpha_2, \\ \alpha_1(n_2 b_3 - n_3 b_2) + \beta_1(n_2 c_3 - n_3 c_2) &= y \beta_2, \\ \alpha_1(n_2 c_3 - n_3 c_2) + \beta_1(\kappa n_2 b_3 - n_3 a_2) &= y \alpha_2, \\ \alpha_1(n_2 c_3 - n_3 c_2) + \beta_1(-\kappa n_3 b_2 + n_2 a_3) &= x \beta_2, \\ \alpha_2(n_3 a_1 - n_1 a_3) + \kappa \beta_2(n_3 c_1 - n_1 c_3) &= x \alpha_1, \\ \alpha_2(n_3 b_1 - n_1 b_3) + \beta_2(n_3 c_1 - n_1 c_3) &= y \beta_1, \\ \alpha_2(n_3 c_1 - n_1 c_3) + \beta_2(-\kappa n_1 b_3 + n_3 a_1) &= y \alpha_1, \\ \alpha_2(n_3 c_1 - n_1 c_3) + \beta_2(\kappa n_3 b_1 - n_1 a_3) &= x \beta_1, \\ \alpha_1 q_2 + \kappa \beta_1 r_2 &= -x \gamma_2, \quad \alpha_1 r_2 + \beta_1 q_2 = -y \gamma_2, \\ \alpha_2 q_1 + \kappa \beta_2 r_1 &= x \gamma_1, \quad \alpha_2 r_1 + \beta_2 q_1 = y \gamma_1, \quad r_3 = q_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Укажем явное разрешение системы (4.2) относительно коэффициентов a_i , b_i , c_i , r_i , q_i . Исключим из первых четырех пар уравнений (4.2) (эти восемь уравнений образуют замкнутую подсистему) неизвестные вида $n_i c_j - n_j c_i$; получим четыре замкнутых уравнения относительно трех неизвестных σ_1 , σ_2 , σ_3 , $\sigma_i = a_i - \kappa b_i$. Разрешая эти уравнения, получаем одну связь на коэффициенты α_i , β_i :

$$\alpha_1 \beta_1 n_2 + \alpha_2 \beta_2 n_1 = 0, \quad (4.3)$$

и выражения для σ_i через α_j , β_k , x , y :

$$\begin{aligned} n_3(a_1 - \kappa b_1) &= (xC + yB)(2\alpha_2 \beta_2)^{-1}, \\ n_3(a_2 - \kappa b_2) &= (xC - yB)(2\alpha_1 \beta_1)^{-1}, \\ n_1(a_3 - \kappa b_3) &= (-xA + yD)(2\alpha_2 \beta_2)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$A = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1, \quad B = \alpha_1 \alpha_2 - \kappa \beta_1 \beta_2; \quad C = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1,$$

$$D = \alpha_1 \alpha_2 + \kappa \beta_1 \beta_2.$$

Рассмотрим следующие две пары уравнений (4.2): первое и третье, пятое и седьмое; после подстановки в

них $\kappa b_i = a_i - c_i$ в силу (4.4) легко находим выражения

$$\begin{aligned} n_2 a_3 - n_3 a_2 &= (x \alpha_1 \alpha_2 - \kappa \beta_1 (xA + yB) / 2 \alpha_1) (\alpha_1^2 - \kappa \beta_1^2)^{-1}, \\ n_3 a_1 - n_1 a_3 &= (x \alpha_1 \alpha_2 - \kappa \beta_2 (xA + yB) / 2 \alpha_2) (\alpha_2^2 - \kappa \beta_2^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} n_2 c_3 - n_3 c_2 &= (xC + yB) 2^{-1} (\alpha_1^2 - \kappa \beta_1^2)^{-1} \\ n_3 c_1 - n_1 c_3 &= (-xC + yB) 2^{-1} (\alpha_2^2 - \kappa \beta_2^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Из оставшихся двух пар уравнений выражаем r_i, q_i через параметры $\gamma_i, \alpha_i, \beta_i, x, y$:

$$\begin{aligned} r_1 &= \gamma_1 \frac{\alpha_2 y - \beta_2 x}{\alpha_2^2 - \kappa \beta_2^2}, & r_2 &= -\gamma_2 \frac{\alpha_1 y - \beta_1 x}{\alpha_1^2 - \kappa \beta_1^2}, \\ q_1 &= \gamma_1 \frac{\alpha_2 x - \kappa \beta_2 y}{\alpha_2^2 - \kappa \beta_2^2}, & q_2 &= -\gamma_2 \frac{\alpha_1 x - \kappa \beta_1 y}{\alpha_1^2 - \kappa \beta_1^2}, & r_3 &= q_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Уравнения (4.4) — (4.5) не меняются при преобразовании $\alpha_i \rightarrow C \alpha_i, \beta_i \rightarrow C \beta_i$, поэтому их правые части на уровне связи (4.3) зависят от четырех свободных параметров. Коэффициенты a_i, b_i, c_i при $\kappa \neq 0$ определены уравнениями (4.4) — (4.5) с точностью до преобразований с двумя параметрами T_1, T_2 :

$$a_i \rightarrow a_i + n_i \kappa T_1, \quad b_i \rightarrow b_i + n_i T_1, \quad c_i \rightarrow c_i + n_i T_2.$$

Поэтому 9 коэффициентов a_i, b_i, c_i , удовлетворяющих связям (4.3) — (4.5), имеют 6 свободных параметров. Параметры $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ принимают произвольные вещественные значения, параметры $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, x, y$ могут быть либо одновременно вещественными, либо одновременно мнимыми — при этом выражения (4.4) — (4.6) являются вещественными; значения параметров γ_1, γ_2 в остальном произвольны.

В результате проведенных рассуждений доказана

Теорема 2. Уравнения Эйлера (1.3) на алгебрах Ли класса А при $\kappa \neq 0$, для которых коэффициенты a_i, b_i, c_i, r_i, q_i выражаются в силу (4.4) — (4.6) через параметры $\alpha_i, \beta_i, x, y, \gamma_i$, удовлетворяющие одной связи (4.3), имеют дополнительный первый интеграл

$$J_4 = z_+ z_- = (\alpha_1 M_1 + \beta_1 K_1 + n_3 \gamma_1)^2 - (\alpha_2 M_2 + \beta_2 K_2 + n_3 \gamma_2)^2 \quad (4.7)$$

и являются поэтому вполне интегрируемыми по Лиувиллю на орбитах $O(J_2 = c_2, J_3 = c_3)$.

Если $\kappa = 0$, то из уравнений (3.2) следует, что коэффициенты a_i, b_i, c_i должны удовлетворять следующим

связям ($i, j, k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} n_j (n_i a_i^{-1} - n_j a_j^{-1}) (n_j c_i - n_i c_j)^{-1} = \\ = n_k (n_i a_i^{-1} - n_k a_k^{-1}) (n_k c_i - n_i c_k)^{-1}, \quad (4.8) \\ n_i n_j^2 n_k^2 b_i - n_i^3 (n_j c_k - n_k c_j)^2 a_i^{-1} = \\ = n_i^2 n_j n_k^2 b_j - n_j^3 (n_i c_k - n_k c_i)^2 a_j^{-1}. \end{aligned}$$

При этом коэффициенты α_i, β_i, x, y имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 = C(n_3 a_1 - n_1 a_3)^{1/2}, \quad \alpha_2 = C(n_2 a_3 - n_3 a_2)^{1/2}, \quad x = \alpha_1 \alpha_2 C^{-2}, \\ y = (n_1 a_2 + n_2 a_1) (n_3 c_1 - n_1 c_3)^{1/2} (n_2 c_3 - n_3 c_2)^{1/2} (n_1 n_2 a_1 a_2)^{-1/2}, \\ \beta_1 = -y \alpha_2 n_1 n_3^{-1} (n_1 a_2 + n_2 a_1)^{-1}, \quad \beta_2 = -\beta_1 \alpha_1 n_2 \alpha_2^{-1} n_1^{-1}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

При выполнении соотношений (4.8) — (4.9) уравнения (4.3) имеют дополнительный интеграл (4.7) и являются поэтому вполне интегрируемыми. Связи (4.8) при $n_i = 1$ определяют интегрируемые случаи В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова для уравнений Кирхгофа.

II. Для алгебр Ли класса В (1.2) уравнения (4.1) в силу уравнений Эйлера (1.4) приводят к следующей системе алгебраических связей на коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_2 (n_3 a_1 - n_1 a_3) = x \alpha_1, \quad \alpha_1 (n_2 a_3 - n_3 a_2) = x \alpha_2, \\ \beta_2 (m_3 b_1 - m_1 b_3) = y \beta_1, \quad \beta_1 (m_2 b_3 - m_3 b_2) = y \beta_2, \quad (4.10) \\ \alpha_2 n_3 c_2 - \beta_2 m_1 c_3 = x \beta_1, \quad -\alpha_2 n_1 c_3 + \beta_2 m_3 c_1 = y \alpha_1, \\ -\alpha_1 n_3 c_2 + \beta_1 m_2 c_3 = x \beta_2, \quad \alpha_1 n_2 c_3 - \beta_1 m_3 c_2 = y \alpha_2, \end{aligned}$$

и уравнениям, явно выражающим коэффициенты r_i, q_i :

$$\begin{aligned} r_1 = y n_3 \gamma_1 / m_3 \beta_2, \quad r_2 = -y n_3 \gamma_2 / m_3 \beta_1, \\ q_1 = x \gamma_1 / \alpha_2, \quad q_2 = -x \gamma_2 / \alpha_1, \quad r_3 = q_3 = 0. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Из первых двух пар уравнений (4.10) легко находятся коэффициенты x, y и $\alpha_i, \tau \beta_i$ (с неизвестным множителем τ). После этого из третьей и четвертой пары уравнений (4.10) находятся величины c_i и множитель τ . Окончательно получаем, что коэффициенты a_i, b_i, c_i связаны тремя соотношениями:

$$\begin{aligned} c_i = (n_i \varphi_i - m_i \varphi_i^{-1}) q \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3, \quad i = 1, 2, 3, \\ \varphi_i = ((n_j a_k - n_k a_j) / (m_j b_k - m_k b_j))^{1/2}, \quad (4.12) \\ q = (m_i b_j - m_j b_i) (n^j m_i \varphi_j^2 - n_i m_j \varphi_i^2)^{-1} \end{aligned}$$

(легко проверить, что q не зависит от индексов $i, j, i \neq j$).

Остальные коэффициенты с точностью до общего множителя при α_i, β_i имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (n_3 a_1 - n_1 a_3)^{1/2}, \quad \alpha_2 = (n_2 a_3 - n_3 a_2)^{1/2}, \quad x = \alpha_1 \alpha_2, \\ \beta_1 &= n_3 m_3^{-1} \varphi_3 (m_3 b_1 - m_1 b_3)^{1/2}, \quad \beta_2 = n_3 m_3^{-1} \varphi_3 (m_2 b_3 - m_3 b_2)^{1/2}, \\ y &= (m_3 b_1 - m_1 b_3)^{1/2} (m_2 b_3 - m_3 b_2)^{1/2}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Таким образом, при a_i, b_i, c_i , удовлетворяющих связям (4.12), и r_i, q_i , заданных соотношениями (4.11), уравнения (4.1) имеют решения z_e, w_e , определенные формулами (4.13).

Проведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Теорема 3. Уравнения Эйлера (1.4) для алгебр Ли класса В при выполнении связей (4.12), (4.11) имеют дополнительный первый интеграл $J_4 = z_+ z_-$ вида (4.7) и являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю на орбитах O .

III. Интегрируемый случай (4.12) для алгебры Ли $SO(4)$ ($n_i = m_i = 1$), содержащий шесть произвольных параметров a_i, b_i , является обобщением трехпараметрического семейства интегрируемых случаев В. А. Стеклова [106, п. 42]. Формулы работы [106, п. 42] настолько сложны, что никакое исследование этого интегрируемого случая не было проведено. Укажем некоторые свойства более общего интегрируемого случая (4.12) (при $r_i = q_i = 0$).

Из условия вещественности коэффициентов c_i , удовлетворяющих соотношениям (4.12), следует, что при $a_i > a_j > a_k$ либо $b_i > b_j > b_k$, либо $b_i < b_j < b_k$. Пусть $a_1 > a_2 > a_3$, тогда в силу (4.13) α_1, β_1 вещественны, α_2, β_2, x, y мнимые. Интеграл J_4 при этом имеет вид

$$\begin{aligned}J_4 &= \left((a_1 - a_3)^{1/2} M_1 + \left(\frac{(a_1 - a_2)(b_1 - b_3)}{b_1 - b_2} \right)^{1/2} K_1 \right)^2 + \\ &+ \left((a_2 - a_3)^{1/2} M_2 + \left(\frac{(a_1 - a_2)(b_2 - b_3)}{b_1 - b_2} \right)^{1/2} K_2 \right)^2.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Условия (4.12) ($n_i = m_i = 1$) не меняются при перенумерации осей. Поэтому уравнения (4.1) при тех же значениях коэффициентов a_i, b_i, c_i имеют еще две другие пары решений, отвечающие перенумерациям переменных $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, которым соответствуют два других

интеграла уравнений Эйлера (1.4):

$$\begin{aligned}
 J_5 &= \left((a_1 - a_2)^{1/2} M_1 + \left(\frac{(a_1 - a_3)(b_1 - b_2)}{b_1 - b_3} \right)^{1/2} K_1 \right)^2 - \\
 &\quad - \left((a_2 - a_3)^{1/2} M_3 + \left(\frac{(a_1 - a_3)(b_2 - b_3)}{b_1 - b_3} \right)^{1/2} K_3 \right)^2, \\
 J_6 &= \left((a_1 - a_2)^{1/2} M_2 + \left(\frac{(a_2 - a_3)(b_1 - b_2)}{b_2 - b_3} \right)^{1/2} K_2 \right)^2 + \\
 &\quad + \left((a_1 - a_3)^{1/2} M_3 + \left(\frac{(a_2 - a_3)(b_1 - b_3)}{b_2 - b_3} \right)^{1/2} K_3 \right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Интегралы J_5 и J_6 линейно выражаются через интегралы J_1, J_2, J_3, J_4 : при выполнении связей (4.12) справедлив тождества:

$$\begin{aligned}
 2J_1 - (a_2 - c_2\varphi_1\varphi_3^{-1})J_2 - (b_2 - c_2\varphi_3\varphi_1^{-1})J_3 - \\
 - p_1(c_2\varphi_3^{-1}J_4 - c_3\varphi_2^{-1}J_5) = 0, \\
 2J_1 - (a_1 - c_1\varphi_2\varphi_3^{-1})J_2 - (b_1 - c_1\varphi_3\varphi_2^{-1})J_3 - \\
 - p_2(c_1\varphi_3^{-1}J_4 + c_3\varphi_1^{-1}J_6) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$p_1 = ((a_2 - a_3)(b_2 - b_3))^{-1/2}, \quad p_2 = ((a_1 - a_3)(b_1 - b_3))^{-1/2}.$$

Орбиты $O(J_2 = c_2, J_3 = c_3)$ в случае алгебры Ли $SO(4)$ являются компактными многообразиями $\mathcal{M}^4 = S^2 \times S^2$. Множества минимумов интегралов J_4, J_6 и седел интеграла J_5 определяются двумя условиями и образуют на многообразии $\mathcal{M}^4$ три двумерных тора T_i^2 . Пересечения этих торов с поверхностью уровня гамильтониана $J_1 = \text{const}$ являются замкнутыми траекториями уравнений (1.4), которые могут быть проинтегрированы явно в эллиптических функциях времени. Эти траектории на трехмерном многообразии $\mathcal{M}^3$ совместного уровня интегралов J_1, J_2, J_3 являются в силу тождеств (4.16) множествами минимумов, максимумов и седел функции J_4 .

В предельной ситуации $b_1 = b_2 = b_3 = b$ существуют интегрируемые случаи, определяемые двумя связями

$$c_1 c_2 c_3 (c_3^{-2} - c_1^{-2}) = a_1 - a_3, \quad c_1 c_2 c_3 (c_2^{-2} - c_3^{-2}) = a_3 - a_2 \tag{4.17}$$

и содержащие поэтому пять свободных параметров: Коэффициенты α_i, x имеют вид (4.13), $\beta_1 = c_3 \alpha_1 / c_2$, $\beta_2 = c_3 \alpha_2 / c_1$, $y = 0$. Аналогично предыдущему уравнения Эйлера (1.4)

при выполнении связей (4.17) имеют дополнительный интеграл

$$J_4 = (a_1 - a_3) (M_1 + c_3 K_1 / c_2)^2 + (a_2 - a_3) (M_2 + c_3 K_2 / c_1)^2 \quad (4.18)$$

и являются поэтому вполне интегрируемыми по Лиувиллю (на орбитах O).

§ 5. Физические применения уравнений Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$

I. Рассмотрим уравнения Эйлера (1.4) на алгебре Ли $SO(4) = SO(3) \oplus SO(3)$ ($n_i = m_i = 1$) с квадратичным гамильтонианом общего вида

$$2H = \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} M_i M_j + 2c_{ij} M_i K_j + b_{ij} K_i K_j). \quad (5.1)$$

Гамильтониан (5.1) зависит от 21 параметра a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} .

Специальным случаем уравнений Эйлера (1.4) являются классические уравнения движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [145—148]. Эти уравнения в самом общем случае содержат 12 параметров, определяющих компоненты тензора инерции твердого тела I_{ik} и расположение эллипсоидальной полости (D_{ik}). В частности, в случае диагональных матриц a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} (заполняющих девятимерное пространство V^9) гамильтонианы, описывающие динамику рассматриваемого объекта, образуют шестимерное подмногообразие V^6 в V^9 . Новые интегрируемые случаи, найденные в § 2 ((2.3) и (2.9)), зависят от трех произвольных параметров, и их пересечение с многообразием V^6 тривиально, т. е. эти случаи не соответствуют указанной физической задаче. Интегрируемые случаи (4.12) зависят от шести произвольных параметров, поэтому их пересечение с подмногообразием V^6 не более чем трехмерно. Это трехмерное семейство интегрируемых случаев и было указано В. А. Стекловым в работе [106].

II. Для нахождения физических применений более широкого класса уравнений Эйлера на алгебре Ли $SO(4)$ рассмотрим динамику твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью. Выделим систему отсчета S , жестко связанную с твердым телом, центр которой O находится в цент-

ре масс. Занумеруем эллипсоидальные полости индексом $\alpha = 1, \dots, n$; пусть $r_\alpha^1, r_\alpha^2, r_\alpha^3$ — координаты их центров, D_α — симметрические операторы, преобразующие единичный шар в эллипсоидальную α -полость. Собственные числа $d_{\alpha 1}, d_{\alpha 2}, d_{\alpha 3}$ оператора D_α являются полуосями соответствующей полости, $d_\alpha = \det D_\alpha = d_{\alpha 1} d_{\alpha 2} d_{\alpha 3}$. Каждая полость целиком заполнена идеальной несжимаемой жидкостью с постоянной плотностью ρ_α и полной массой $m_\alpha = 4\pi\rho_\alpha d_\alpha/3$.

Вращение твердого тела вокруг центра масс определяется ортогональной матрицей $Q(t)$. Движение жидкости в каждой полости удовлетворяет уравнениям гидродинамики

$$\rho \, dv/dt = -\operatorname{grad} p, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (5.2)$$

где ρ — плотность жидкости, v — скорость жидкости, p — давление. В дальнейшем предполагается, что движение жидкости в каждой полости является движением с однородной деформацией (см. [158]), т. е. определяется следующим преобразованием из лагранжевых координат a^k (пробегающих единичный шар $(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \leq 1$) в эйлеровы координаты x^i :

$$x^i = \sum_{k=1}^3 (F_{\alpha k}^i(t) a^k + Q_{\alpha k}^{i,k}), \quad F_\alpha = Q D_\alpha Q_\alpha, \quad (5.3)$$

где $Q_\alpha(t)$ — ортогональная матрица, определяющая вращение жидкости в α -полости относительно твердого тела.

Уравнениями движения твердого тела с n полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, являются уравнения гидродинамики (4.2) в каждой полости и закон сохранения полного момента импульса. Введем обозначение

$$\dot{Q} = Q A_0, \quad \dot{Q}_\alpha = -B_{0\alpha} Q_\alpha \quad (5.4)$$

и воспользуемся изоморфизмом векторов с компонентами v^i в $\mathbb{R}^3$ и кососимметрических (3×3) матриц с компонентами V_{jk} :

$$v^i \rightarrow V_{jk} = - \sum_{i=1}^3 v^i \varepsilon_{ijk}, \quad (5.5)$$

при котором векторное произведение векторов $x \times y$ переходит в коммутатор матриц $[X, Y] = XY - YX$. После этого изоморфизма кососимметрическим матрицам A_0 и $B_{0\alpha}$ отвечают векторы с компонентами $A^i, B_\alpha^i, i = 1, 2, 3$.

Момент количеств движения жидкости в α -полости (относительно центра масс O) имеет вид (всюду интеграл берется по объему полости)

$$\begin{aligned} M_{\alpha}^i &= \rho_{\alpha} \int (\mathbf{x} \times \mathbf{v})^i dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{\alpha jk} + Q_j^i I_{\alpha jk} A^k \right), \\ M_{\alpha} &= \mu_{\alpha}^{-1} (\dot{F}_{\alpha} F_{\alpha}^t - F_{\alpha} \dot{F}_{\alpha}^t) = \\ &= \mu_{\alpha}^{-1} Q (D_{\alpha}^2 A_0 + A_0 D_{\alpha}^2 - 2D_{\alpha} B_{0\alpha} D_{\alpha}) Q^t, \quad (5.6) \\ I_{\alpha jk} &= m_{\alpha} \left(\delta_{jk} \sum_{l=1}^3 (r_{\alpha}^l)^2 - r_{\alpha}^j r_{\alpha}^k \right), \quad \mu_{\alpha}^{-1} = m_{\alpha}/5. \end{aligned}$$

Из формул (5.6) после перехода к векторным обозначениям в силу (5.5) получаем, что вектор $\mathbf{M}$ полного момента количества движения рассматриваемого объекта в системе отсчета S имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} + \sum_{\alpha=1}^n \mu_{\alpha}^{-1} (C_{\alpha} \mathbf{A} - 2d_{\alpha} D_{\alpha}^{-1} \mathbf{B}_{\alpha}), \quad (5.7)$$

$$I_{ik} = I_{0ik} + I_{1ik} + \dots + I_{nik}, \quad C_{\alpha} = \text{Tr}(D_{\alpha}^r) E - D_{\alpha}^2,$$

где I_{0ik} — тензор инерции твердого тела в системе S .

Закон сохранения полного момента количеств движения в системе отсчета S имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}. \quad (5.8)$$

Для движений жидкости с однородной деформацией (5.3) уравнение неразрывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ (5.2) выполнено тождественно; уравнение динамики $\rho d\mathbf{v}/dt = -\text{grad } p$ (5.2) эквивалентно закону Гельмгольца о вмерзженности вихря $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$, т. е. $d\omega/dt = 0$ вдоль траекторий жидкости. Вектор вихря в α -полости ω_{α} отвечает в силу изоморфизма (5.5) матрице

$$\begin{aligned} K_{0\alpha} &= \dot{F}_{\alpha}^t F_{\alpha} - F_{\alpha}^t \dot{F}_{\alpha} = Q_{\alpha}^t K_{1\alpha} Q_{\alpha}, \\ K_{1\alpha} &= D_{\alpha}^2 B_{0\alpha} + B_{0\alpha} D_{\alpha}^2 - 2D_{\alpha} A_0 D_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Закон Гельмгольца ($\dot{K}_{0\alpha} = 0$) имеет вид

$$\dot{K}_{1\alpha} = [K_{1\alpha}, B_{0\alpha}]. \quad (5.10)$$

Отсюда после изоморфизма (5.5) $K_{1\alpha} \rightarrow K_{\alpha}$ и домножения на μ_{α}^{-1} получаем:

$$\dot{K}_{\alpha} = K_{\alpha} \times B_{\alpha}, \quad K_{\alpha} = \mu_{\alpha}^{-1} (C_{\alpha} B_{\alpha} - 2d_{\alpha} D_{\alpha}^{-1} A). \quad (5.11)$$

Уравнения (5.8), (5.11) полностью описывают динамику твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Эти уравнения после преобразования Лежандра $A, B_\alpha \rightarrow M, K_\alpha$ (которое очевидно является симметрическим) переходят в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times A, \quad \dot{K}_\alpha = K_\alpha \times B_\alpha, \\ A^i &= \partial H / \partial M^i, \quad B_\alpha^i = \partial H / \partial K_\alpha^i, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где гамильтониан H является полной кинетической энергией вращения твердого тела и жидкости в каждой из полостей и имеет вид

$$\begin{aligned} 2H &= (M, A) + \sum_{\alpha=1}^n (K_\alpha, B_\alpha) = (G^{-1}N, N) + \sum_{\alpha=1}^n \mu_\alpha (K_\alpha, C_\alpha^{-1}K_\alpha), \\ N &= M + \sum_{\alpha=1}^n 2d_\alpha C_\alpha^{-1} D_\alpha^{-1} K_\alpha, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$G = I + \sum_{\alpha=1}^n \mu_\alpha^{-1} C_\alpha^{-1} (C_\alpha^2 - 4d_\alpha^2 D_\alpha^{-2}).$$

Уравнения (5.12) определены в пространстве R^{3n+3} и являются специальным случаем уравнений Эйлера в сопряженном пространстве L_{n+1}^* к алгебре Ли группы $G_{n+1} = SO(3) \times \dots \times SO(3)$ ($n+1$ сомножитель). Гамильтониан H содержит $6n+6$ независимых параметров (компоненты симметрических матриц $I, D_1, \dots, D_n$); отметим, что параметры μ_α (или плотности ρ_α) несущественны и устраняются путем замены $\bar{D}_\alpha = \mu_\alpha^{-1/2} D_\alpha$. В квадратичную форму H (5.13) входят скалярные произведения между всеми парами K_α, K_β и K_α, M , т. е. в указанном естественном базисе форма H существенно диагональна.

Уравнения (5.12) имеют кроме гамильтониана H еще $n+1$ геометрический интеграл

$$J_0 = (M, M), \quad J_\alpha = (K_\alpha, K_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (5.14)$$

где J_0 — квадрат полного момента количеств движения. Поверхности уровня интегралов (5.14) являются орбитами O коприсоединенного представления группы Ли G_{n+1} в L_{n+1}^* . Многообразия $O = S^2 \times \dots \times S^2$ ($n+1$ сомножитель) имеют стандартную симплектическую структуру, в которой уравнения (5.12) гамильтоновы с гамильтонианом H (5.13).

III. Уравнения Эйлера на алгебре Ли $SO(4) = SO(3) \oplus SO(3)$ получаются из уравнений (5.12) в двух случаях. Первый случай, классический, соответствует $n = 1$ и содержит 12 свободных параметров (компоненты I_{ik}, D_{ik}). Второй случай соответствует $n = 2$ и $J_0 = 0$ ($M = 0$); при этом уравнения (5.12) принимают вид

$$\dot{K} = K_1 \times V_1, \quad \dot{K}_2 = K_2 \times V_2. \quad (5.15)$$

Уравнения (5.15) (с гамильтонианом (5.13) при $M = 0$) содержат 18 свободных параметров (компоненты I_{ik}, D_{1ik}, D_{2ik}) и, очевидно, являются уравнениями Эйлера на $SO(4)$. В случае диагональных матриц I, D_1, D_2 , таким образом, получается девятимерная область однородных гамильтонианов вида (1.6) ($r_i = q_i = 0$).

Исследуем возможность указанной физической интерпретации интегрируемых случаев (2.3) и (2.9). Алгебры Ли класса А при $\kappa = 1$ после преобразования $\bar{X}_i = (X_i + Y_i)/2$, $\bar{Y}_i = (X_i - Y_i)/2$ переходят в алгебры Ли класса В с $n_i = m_i$. Таким образом получаем разложение алгебры Ли $SO(4) = SO(3) \oplus SO(3)$ ($n_i = 1, \kappa = 1$); при этом уравнения Эйлера (1.3) переходят в уравнения вида (1.4) — (5.15), где $K_1^i = M^i + K^i$, $K_2^i = M^i - K^i$. Гамильтонианы H (1.6) при $c_i = r_i = q_i = 0$, рассматривавшиеся в § 2, после указанного преобразования принимают вид

$$2H = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i ((K_1^i)^2 + (K_2^i)^2) + 2\beta^i K_1^i K_2^i),$$

$$4\alpha_i = a_i + b_i, \quad 4\beta_i = a_i - b_i. \quad (5.16)$$

Интегрируемые случаи (2.3) и (2.9) в новых координатах определяются соответственно условиями

$$\beta_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\beta_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \quad (5.17)$$

$$\beta_i = 3\alpha_i - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3. \quad (5.18)$$

Соответствующие уравнения Эйлера (5.15) интегрируемы по Лиувиллю на уровне первых интегралов ($K_1, K_1 = (K_2, K_2)$ (т. е. $J_3 = (M, K) = 0$).

Рассмотрим твердое тело с двумя эллипсоидальными полостями, оси симметрии которых параллельны главным осям тензора инерции I_{ik} , т. е. в системе отсчета S , связанной с осями тензора I_{ik} , три матрицы I, D_1, D_2 диагональны. Допустим, что плотности жидкостей ρ_1, ρ_2 и

полуоси эллипсоидальных полостей удовлетворяют условию подобия

$$d_{1i}/d_{2i} = (\rho_2/\rho_1)^{1/5}; \quad (5.19)$$

тогда $\mu_1^{-1/2}d_{1i} = \mu_2^{-1/2}d_{2i} = d_i$. Соответствующий гамильтониан H (5.13) имеет вид (5.16), где

$$\beta_i = 4d_j^2 d_k^2 (d_j^2 + d_k^2)^{-2} (I_i + 2(d_j^2 - d_k^2)^2 (d_j^2 + d_k^2)^{-1})^{-1} > 0, \quad (5.20)$$

$$\alpha_i = \beta_i + (d_j^2 + d_k^2)^{-1}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Интегрируемый случай (2.9) — (5.18) не удовлетворяет физическим условиям (5.20), так как из (5.18) следует $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, а согласно (5.20) имеем $\beta_i > 0$.

Условия существования интегрируемого случая (2.3) — (5.17) после подстановки (5.20) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} d_1^4 + d_2^4 &= 2d_3^4, \\ R_2 I_2 &= I_1 (d_1^2 + d_3^2)^{-1} (16d_1^2 d_3^2 (d_2^2 + d_3^2) + \\ &+ 6(d_1^2 - d_3^2)^2 (d_2^2 - d_1^2)) + (d_2^2 - d_1^2) \left(12 \frac{(d_1^2 - d_3^2)^2 (d_2^2 - d_3^2)^2}{(d_1^2 + d_3^2)(d_2^2 + d_3^2)} + \right. \\ &\left. + 32 \frac{d_3^2 (2d_1^2 d_2^2 - d_3^2 (d_1^2 + d_2^2))}{d_1^2 + d_2^2} \right), \quad (5.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 I_3 &= I_1 (d_1^2 + d_2^2)^{-1} (8d_1^2 d_2^2 (d_3^2 + d_3^2) + \\ &+ 6(d_1^2 - d_2^2)^2 (d_3^2 - d_1^2)) + \\ &+ 6 \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2^2 + d_3^2} \left(12 \frac{(d_2^2 - d_3^2)^2 (d_2^2 - d_1^2) (d_3^2 - d_1^2)}{d_1^2 + d_2^2} + \right. \\ &\left. + 8d_2^2 (d_1^2 d_2^2 + d_3^2 (3d_1^2 - 4d_2^2)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_j &= 16 \frac{d_2^2 d_3^2}{d_3^2 + d_3^2} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - d_j^2) + 3I_1 (d_1^2 - d_j^2) + \\ &+ 6(d_2^2 - d_3^2)^2 \frac{d_1^2 - d_j^2}{d_2^2 + d_3^2}. \end{aligned}$$

Условия (5.21) определяют связь параметров d_1, d_2, d_3 и выражают компоненты тензора инерции I_2, I_3 через I_1, d_1, d_2, d_3 . При $d_1 \approx d_2$ из (5.21) следует $d_1 \approx d_2 \approx d_3$,

$I_1 \approx I_2 \approx 2I_3$, поэтому необходимое физическое условие $I_1 + I_2 > I_3$ выполнено.

Таким образом, интегрируемый случай (2.3) — (5.17) описывает вращение твердого тела с двумя эллипсоидальными полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью при условиях (5.19) — (5.21) и на уровне первых интегралов $(M, M) = 0$, $(K_1, K_1) = (K_2, K_2)$. При этом, как показано в § 3, уравнения Эйлера (1.3) — (5.15) интегрируются явно в эллиптических функциях времени.

Замечание. В § 5 гл. VII указана конструкция интегрируемых уравнений Эйлера в прямой сумме любого числа алгебр Ли $gl(n, \mathbb{R})$ и $so(n, \mathbb{R})$. При $n = 3$ эти интегрируемые случаи (в прямой сумме $k + 1$ алгебр Ли $so(3, \mathbb{R})$) могут быть применены для описания динамики твердого тела с k полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью.

§ 6. Лагранжева структура уравнений Кирхгофа

I. В § 5 гл. X указана связь некоторой лагранжевой интегрируемой системы на группе Ли $SO(3)$, обладающей однопараметрической группой симметрий, и интегрируемого случая Клебша для уравнений Кирхгофа. В данном параграфе мы установим связь уравнений Кирхгофа (и некоторых более общих уравнений Эйлера) с лагранжевыми уравнениями на группе Ли $SO(3)$ (соответственно $SO(n)$).

В работах [116, 117] показано, что уравнения Кирхгофа

$$\dot{M} = M \times \omega + p \times u, \quad \dot{p} = p \times \omega, \quad \omega_i = \frac{\partial H_1}{\partial M_i}, \quad u = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \quad (6.1)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (a_i M_i^2 + 2c_{ij} M_i p_j + b_{ij} p_i p_j)$$

совпадают с уравнениями Эйлера на алгебре Ли E_3 и являются гамильтоновыми с гамильтонианом $J_1 = H$ на орбитах $\mathcal{M}^4 = T^*(S^2)$, определяемых постоянными значениями первых интегралов $J_2 = (M, p)$, $J_3 = (p, p)$. В работах [116, 117] доказано, что уравнения Кирхгофа на многообразиях $\mathcal{M}^4$ «сводятся к системе, математически эквивалентной классической заряженной частице, движу-

щейся по сфере S^2 с римановой метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ в потенциальном поле $U(x)$, а также в эффективном магнитном поле $H_{12}(x)$ », т. е. сводятся к лагранжевым системам на сфере S^2 , зависящим от параметров $J_2 = c_2$, $J_3 = c_3$. Этот результат справедлив также [117, 89] для гамильтонианов общего вида

$$H = \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{1}{2} a_i M_i^2 + c_{ij} M_i p_j + d_i M_i \right) + V(p). \quad (6.2)$$

В данном параграфе показано, что уравнения Кирхгофа (6.1), (6.2) во всем фазовом пространстве $\mathbb{R}^6$ с координатами M_i , p_j являются редукцией некоторой лагранжевой системы на группе Ли $SO(3)$, обладающей однопараметрической группой симметрий, причем лагранжиан системы (6.1), (6.2) на инвариантном подмногообразии $\mathcal{M}^4 = T^*(S^2)$ получается из лагранжиана на группе Ли $SO(3)$ понижением порядка по Раусу. Лагранжева система на группе Ли $SO(3)$, отвечающая гамильтониану общего вида (6.2), имеет следующий физический смысл: эта система описывает вращение электрически заряженного твердого тела — гиростата в осесимметричном силовом поле и в постоянном магнитном поле, направленном параллельно оси симметрии. Поэтому любой интегрируемый случай уравнений Кирхгофа определяет некоторый интегрируемый случай динамики твердого тела в указанных выше полях. Основная теорема 4 доказана для уравнений Эйлера (на специальных алгебрах Ли), обобщающих уравнения Кирхгофа в n -мерном случае.

II. Пусть матрица Q принадлежит группе $GL(n, \mathbb{R})$, матрицы J , C , D , x являются постоянными. Рассмотрим на группе Ли $GL(n, \mathbb{R})$ лагранжиан вида

$$L = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (J\omega + \omega J)\omega + (C\omega + \omega C)S + D\omega \right] - V(S), \quad (6.3)$$

где $\omega = Q^{-1}\dot{Q}$, $S = Q^{-1}xQ$.

Утверждение 1. *Группа Ли ортогональных матриц $SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ является инвариантным многообразием лагранжевой системы с лагранжианом L (6.3) на полной линейной группе $GL(n, \mathbb{R})$, если матрицы J , C симметрические, а матрицы D , x кососимметрические.*

Это утверждение означает, что экстремали функционала действия $S_1 = \int L dt$ на ортогональной группе Ли $SO(n)$ являются также экстремалиями относительно произвольных вариаций всех матричных компонент.

Прямое вычисление приводит к формулам

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial Q_{\beta}^{\alpha}} &= \left\{ \left(-\omega M + \left[C\omega + \omega C - \frac{\partial V}{\partial S}, S \right] \right) Q^{-1} \right\}_{\alpha}^{\beta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\beta}^{\alpha}} &= \{ M Q^{-1} \}_{\alpha}^{\beta},\end{aligned}\quad (6.4)$$

$$M = J\omega + \omega J + CS + SC + D, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial V}{\partial S_{\beta}^{\alpha}}.$$

Поэтому уравнения Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\beta}^{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial Q_{\beta}^{\alpha}} &= \left\{ \left(\dot{M} - [M, \omega] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[C\omega + \omega C - \frac{\partial V}{\partial S}, S \right] \right) Q^{-1} \right\}_{\alpha}^{\beta} = 0.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Эти уравнения эквивалентны матричному уравнению

$$\dot{M} = [M, \omega] + \left[C\omega + \omega C - \frac{\partial V}{\partial S}, S \right], \quad (6.6)$$

где матрица M определена формулой (6.4).

Если матрицы J и C симметрические, а матрицы D и x кососимметрические, то алгебра Ли кососимметрических матриц $SO(n)$ является инвариантным подмногообразием для уравнения (6.6), что и доказывает утверждение 1.

Предположим, что все собственные числа матрицы x различны. Тогда стационарная подгруппа Γ_x матрицы x в присоединенном представлении группы Ли $SO(n)$ является тором T^r размерности $r = \text{rang } SO(n) = [n/2]$. По определению элементов $Q_x \in \Gamma_x$ имеем $Q_x^{-1} x Q_x = x$. Группа Ли Γ_x действует на группе Ли $SO(n)$ левыми сдвигами: $Q \rightarrow Q_x Q$; при этом действии матрицы $\omega = Q^{-1} \dot{Q}$ и $S = Q^{-1} x Q$ не меняются. Поэтому коммутативная группа Ли $\Gamma_x = T^r$ является группой симметрий лагранжиана (6.3). Орбита O_x матрицы x в присоединенном представлении группы Ли $SO(n)$ является факторпространством $SO(n)/\Gamma_x$.

Выделим однопараметрические подгруппы в Γ_x , имеющие вид $Q_k(s) = \exp(sx^{2k-1})$. Интегралы Нётер определяются по формулам [120]

$$J_k(Q, \dot{Q}) = \text{Tr} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\beta}^{\alpha}} \left(\frac{dQ_k(s)}{ds} Q \right) \Big|_{s=0} \right)_{\alpha}^{\beta}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.7)$$

Используя формулы (6.4), получаем

$$J_k(Q, Q) = \text{Tr}(MQ^{-1}x^{2k-1}Q) = \text{Tr}(MS^{2k-1}). \quad (6.8)$$

Вследствие коммутативности группы Ли Γ_x возможно понижение порядка лагранжиана (6.3) по Раусу при фиксированных значениях интегралов J_k . В результате получаем

Утверждение 2. *Лагранжева система с лагранжианом (6.3) на группе Ли $SO(n)$ эквивалентна семейству лагранжевых систем на орбите O_x , зависящему от значений первых интегралов $J_1, \dots, J_r$.*

В локальных координатах $q_1, \dots, q_n$ на орбите O_x лагранжиан редуцированной системы имеет стандартный вид $L_1 = T_2 + T_1 + U$, где T_2 — квадратичная функция от $\dot{q}_i$, T_1 — линейная функция от $\dot{q}_i$, $U(q)$ — потенциальная функция.

III. Определим алгебру Ли A , $\dim A = 2 \dim SO(n) = n(n-1)$. Элементами алгебры Ли A являются пары кососимметрических матриц $\{M, S\}$ со следующими коммутационными соотношениями:

$$\{[M_1, S_1], [M_2, S_2]\} = \{[M_1, M_2], [M_1, S_2] + [S_1, M_2]\}. \quad (6.9)$$

В частности, пары $\{0, S\}$ образуют коммутативный идеал A . Пусть G — группа Ли, соответствующая алгебре Ли A .

Следующие $2r$ функции являются аннуляторами скобок Пуассона в пространстве функций на сопряженном пространстве A^* :

$$J_k = \text{Tr}(MS^{2k-1}), \quad J_{r+k} = \text{Tr}(S^{2k-1}), \quad k = 1, \dots, r. \quad (6.10)$$

Поверхность постоянного уровня аннуляторов (6.10) определяет орбиту $O\{M, S\}$ присоединенного представления группы Ли G . Используя интегралы (10), несложно показать, что $O\{M, S\} = T^*O_x$ (см. также [149]).

IV. Дополнив уравнение (6.6) уравнением, следующим из определения матрицы S , получим замкнутую систему уравнений

$$\dot{M} = [M, \omega] + \left[C\omega + \omega C - \frac{\partial V}{\partial S}, S \right], \quad \dot{S} = [S, \omega], \quad (6.11)$$

где матрица M определена формулой (6.4). Уравнения (6.11) являются уравнениями Эйлера в сопряженном

пространстве A^* к алгебре Ли A (6.9) и имеют гамильтониан

$$H = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (J\omega + \omega J) \omega \right] + V(S). \quad (6.12)$$

Орбиты $O\{M, S\}$ инвариантны относительно системы (6.11). Нетрудно проверить, что аннуляторы $J_1, \dots, J_{2r}$ являются первыми интегралами системы (6.11). Согласно общей теории [120] уравнения (6.11) гамильтоновы на орбитах $O\{M, S\} = T^*O_x$ в симплектической структуре, определенной структурой алгебры Ли A (всюду $S = Q^{-1}xQ$).

Теорема 4. Уравнения Эйлера (6.11), (6.12) в сопряженном пространстве A^* при фиксированных значениях интегралов $J_{r+1}, \dots, J_{2r}$ (6.10) (т. е. фиксированы матрица x и орбита O_x) являются редукцией лагранжевой системы на группе Ли $SO(n)$ с лагранжианом (6.3). Уравнения Эйлера (6.11), (6.12) на орбитах $O\{M, S\} = T^*O_x$ эквивалентны лагранжевым уравнениям на орбитах O_x , причем соответствующий лагранжиан L_1 получается из лагранжиана L (6.3) понижением порядка по Раусу в силу наличия группы симметрий $\Gamma_x = T^r$.

Доказательство основано на вычислениях п. II и на совпадении интегралов Нётер (6.8) и первых r интегралов (6.10). Справедливы обобщения теоремы 4, где группа на Ли $SO(n)$ заменяется на произвольную полупростую группу Ли.

V. В трехмерном случае перейдем к векторной записи уравнений Кирхгофа (6.1). Воспользуемся изоморфизмом векторов $\omega \in R^3$ и матриц $\omega \in \mathfrak{so}(3)$:

$$\begin{aligned} M^i &\rightarrow M_{jk} = -M^i \varepsilon_{ijk}, \quad (M, \omega) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\widehat{M}\widehat{\omega}), \\ I\omega &\rightarrow J\widehat{\omega} + \widehat{\omega}J, \quad J = \frac{1}{2}(\text{Tr}I)E - I, \quad Q^{-1}e \rightarrow Q^{-1}\widehat{e}Q. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь I — симметричный оператор, Q — ортогональный оператор. В силу (6.13) лагранжиан $-L/2$ имеет вид (см. (6.3), (6.4))

$$L_2 = \frac{1}{2}(M, \omega) + (C\omega, q) + (d, \omega) - V(q), \quad (6.14)$$

где $M = I\omega + Cq + d$, q — вектор Пуассона, соответствующий матрице S , $q = Q^{-1}e$; d и e — постоянные векторы, I и C — операторы. Уравнения Эйлера (6.11) принимают

вид уравнений Кирхгофа

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q} \times \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{u} = -C\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}, \quad (6.15)$$

$$H = \frac{1}{2} (I^{-1}(\mathbf{M} - C\mathbf{q}), (\mathbf{M} - C\mathbf{q})) - (I^{-1}(\mathbf{M} - C\mathbf{q}), \mathbf{d}) + V(\mathbf{q}).$$

VI. Рассмотрим вращение электрически заряженного твердого тела T (с плотностью электрических зарядов $\sigma(\mathbf{r})$) вокруг неподвижной точки в постоянном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}$ и в некотором осесимметричном силовом поле (например гравитационном), ось симметрии которого $\mathbf{q}$ параллельна вектору $\mathbf{H}$, $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{q}$. Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$L_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{c} \int_T (\mathbf{A}, \mathbf{v}) \sigma(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} - V(\mathbf{q}), \quad (6.16)$$

где c — скорость света, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, вектор-потенциал $\mathbf{A} = \frac{1}{2} H_0 \mathbf{q} \times \mathbf{r}$. Вычисляя интеграл в (6.16), получаем

$$L_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2c} H_0 (\boldsymbol{\omega}, I_e \mathbf{q}) - V(\mathbf{q}), \quad (6.17)$$

где тензор I_e имеет компоненты

$$I_{eik} = \int_T \left(\delta_{ik} \sum_{l=1}^3 (r^l)^2 - r_i r_k \right) \sigma(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}.$$

Лагранжиан (6.17), очевидно, относится к типу (6.14). Поэтому в силу теоремы 1 соответствующие уравнения Лагранжа эквивалентны уравнениям Эйлера на алгебре Ли E_3 с гамильтонианом вида (6.15).

В работе [150] путем прямого сопоставления уравнений движения установлено, что уравнения вращения электрически заряженного твердого тела в постоянном магнитном поле являются специальным вырожденным случаем уравнений Кирхгофа. Этот факт получает простое объяснение после доказательства теоремы 1 о лагранжевой структуре уравнений Эйлера на алгебре Ли E_3 . Действительно, уравнения вращения твердого тела в рассматриваемом случае являются лагранжевыми на группе Ли $SO(3)$ с лагранжианом L_3 (6.17) при $V(\mathbf{q}) = 0$, а этот лагранжиан является специальным случаем общих лагранжианов (6.14) уравнений Эйлера на E_3 (уравнений Кирхгофа).

Лагранжев подход показывает, что уравнения Кирхгофа с произвольным потенциалом $V(\mathbf{q})$ в (6.16) имеют важный физический смысл — это уравнения вращения электрически заряженного тела (являющегося гиостатом при $\mathbf{d} \neq 0$) в постоянном магнитном поле и осесимметричном силовом поле. В случае квадратичного невырожденного потенциала $V(\mathbf{q})$ получаем классические уравнения Кирхгофа с однородным квадратичным гамильтонианом $H_2(\mathbf{M}, \mathbf{q})$ вида (6.1), где p_i заменено на q_i . Никаких физических ограничений и связей на коэффициенты гамильтониана H_2 нет, кроме известных ограничений на компоненты тензора инерции $I_k = a_k^{-1}$. Вследствие этого все классические интегрируемые случаи для уравнений Кирхгофа [119] реализуются также в задаче о вращении электрически заряженного твердого тела в постоянном магнитном и осесимметричном силовом поле с квадратичной потенциальной функцией $V(\mathbf{q})$ (некоторые интегрируемые случаи найдены в [151]).

ГЛАВА XII

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЯ ПУЛЬСАРА

Пульсары (нейтронные звезды) согласно современным представлениям [152] имеют твердую оболочку и жидкое ядро, которое обладает высокой проводимостью (жидкость является плазмой) и имеет сильное вмороженное магнитное поле; основная масса пульсара заключена в жидком ядре. Периодически происходят «звездотрясения» пульсара, наблюдаемые в виде сбоя периода его вращения. В промежутке времени между двумя такими явлениями реализуется асинхронное вращение ядра и оболочки пульсара. Время релаксации для пульсара Вела (PSR 0833-45) $\tau \approx 6$ лет, тогда как период вращения $P = 0,089$ с. Поэтому влияние вязкости крайне мало и в качестве модели ядра можно рассматривать идеальную несжимаемую магнитную жидкость.

В данной главе предлагается модель вращения пульсара, учитывающая магнитные свойства ядра и асинхронное вращение ядра и оболочки (§ 1). Модель применима в течение конечного отрезка времени t : $P \leq t < \tau$ в интервале между двумя «звездотрясениями», когда можно пренебречь потерями энергии на вязкое трение и электромагнитное излучение.

Динамическая система, описывающая вращение модели пульсара, выведена в § 2 и состоит из девяти обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих простую векторную запись (2.12). Эта система имеет четыре первых интеграла J_k , причем J_1 является интегралом полной энергии пульсара, J_2 является квадратом полного момента импульса, J_3 определяет величину вмороженного магнитного поля, а J_4 определяет скалярное произведение вектора вихря скорости жидкости и вектора напряженности магнитного поля (§ 3).

Важнейшим математическим вопросом в исследуемой модели является наличие периодических решений, поскольку вращение пульсара в течение длительного вре-

мени является периодическим с высокой точностью. В § 4 показано, что на многообразиях уровня первых интегралов $J_i = k_i$, $k_4 = 0$ существуют 12 замкнутых траекторий динамической системы (для целой области значений констант k_i). Эти траектории проинтегрированы в явном виде в эллиптических функциях времени. В рассматриваемой модели обнаружены магниторотационные колебания, для которых угловая скорость вращения пульсара периодически меняет знак; такие колебания принципиально связаны с наличием магнитного поля. Выведена формула (4.12), выражающая минимальный период вращения и магниторотационных колебаний пульсара через его физические параметры. Для реальных значений параметров предсказываемый период вращения $T_0 \approx 1$ с, что хорошо согласуется с астрофизическими данными.

Динамика модели пульсара обладает важными математическими свойствами: динамическая система (2.12) является специальным случаем уравнений Эйлера в сопряженном пространстве L^* к алгебре Ли группы $G_3 \times \times SO(3)$, где G_3 — группа движений трехмерного евклидова пространства. Эта система на инвариантных многообразиях уровня интегралов $J_2 = k_2$, $J_3 = k_3$, $J_4 = k_4$ гамильтонова с гамильтонианом J_1 ; в § 3 указаны некоторые интегрируемые случаи.

§ 1. Магнитогидродинамическая модель вращения пульсара

В рассматриваемой модели пульсара предполагается:

1. Оболочка пульсара является абсолютно твердой и обладает бесконечной проводимостью. Жидкое ядро с постоянной плотностью ρ заполняет эллипсоидальную полость с полуосями d_1, d_2, d_3 . Выделена система отсчета S , жестко связанная с оболочкой, начало которой находится в центре масс пульсара, а оси параллельны главным осям эллипсоида. В системе S центр эллипсоида O имеет координаты r^1, r^2, r^3 .

2. Вращение оболочки пульсара определяется ортогональной матрицей $Q_1(t)$. Движение жидкости в полости описывается уравнениями магнитной гидродинамики [453]:

$$\begin{aligned} \rho \, dv/dt &= -\text{grad } p + (\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H})/4\pi - \rho \, \text{grad } \Phi, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \partial \mathbf{H}/\partial t = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости, p — давление, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, Φ — ньютоновский гравитационный потенциал внутри жидкости. Движение жидкости является движением с однородной деформацией [154, 158], причем преобразование из лагранжевых координат a^k в эйлеровы координаты x^i имеет вид

$$x^i = \sum_{k=1}^3 (F_k^i a^k + (Q_1)_k^i a^k), \quad F = Q_1 D Q_2. \quad (1.2)$$

Здесь $Q_2(t)$ — ортогональная матрица, $D_{ij} = d_i \delta_{ij}$; лагранжевы координаты a^k пробегает единичный шар $(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \leq 1$.

3. Напряженность магнитного поля H^i в точке (1.2) имеет вид

$$H^i = \sum_{k,j=1}^3 F_k^i h_j^k a^j, \quad (1.3)$$

где $\|h_j^k\|$ — постоянная кососимметрическая матрица.

4. Электромагнитное поле имеет разрыв на границе раздела Φ_1 — жидкость-оболочка, с обеих сторон которой магнитное поле касается поверхности эллипсоида и встроено в среду.

Покажем, что на границе эллипсоидальной полости (поверхность разрыва) выполнены все необходимые граничные условия. Пусть $H_n, H_\tau, E_n, E_\tau, v_n, v_\tau$ — нормальные и касательные составляющие магнитного поля, электрического поля и скорости жидкости на поверхности эллипсоида. Условия на разрыве в магнитной гидродинамике имеют вид [153] (теплопроводностью пренебрегаем):

$$\{E_\tau\} = 0, \quad \{E_n\} = 4\pi\theta, \quad \{H_n\} = 0, \quad \{H_\tau\} = 4\pi c^{-1}(\mathbf{i} \times \mathbf{n}), \quad (1.4)$$

$$\{\rho v_n\} = 0, \quad \{s_n - (P \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} + \rho v_n(\varepsilon + \mathbf{v}^2/2)\} = 0, \quad (1.5)$$

$$\{\rho v_n \mathbf{v} - P \cdot \mathbf{n} - T \cdot \mathbf{n}\} = 0, \quad (1.6)$$

$$s = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/4\pi, \quad P_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad T_{ij} = (H_i H_j - \mathbf{H}^2 \delta_{ij}/2)/4\pi.$$

Здесь $\{X\} = X_+ - X_-$ — скачок величины X на поверхности разрыва, θ — поверхностный заряд, $\mathbf{i}$ — поверхностный ток, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности разрыва, s — вектор плотности потока электромагнитной энергии, P и T — матрицы с компонентами P_{ij}, T_{ij} ; ε — плотность внутренней энергии жидкости.

В силу (1.2), (1.3) имеем $v_n = 0$, $H_n = 0$. В приближении магнитной гидродинамики $\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{H})/c$, поэтому $E_\tau = 0$. Внутри оболочки $\mathbf{v} = 0$, поэтому здесь электрическое поле $\mathbf{E} = 0$. Следовательно, условия (1.4) выполнены и определяют поверхностный ток и поверхностный заряд, при этом со стороны оболочки $H_n = 0$, $E_\tau = 0$, $E_n = 0$. Условия (1.5) выполнены в силу $v_n = 0$, $s_n = 0$.

Условия (1.6) в силу $v_n = 0$, $H_n = 0$ приводят к условию $\{p + \mathbf{H}^2/8\pi\} = 0$. Это условие определяет давление со стороны оболочки и поэтому в случае абсолютно твердой оболочки также выполнено.

5. Электромагнитное поле имеет разрыв на внешней границе раздела Φ_2 — оболочка-вакуум. Электромагнитное поле в окружающем вакууме может быть, например, полем магнитного диполя. Предполагается, что это поле вращается вместе с пульсаром; излучение электромагнитных волн не учитывается. Условия (1.4), (1.6) определяют поверхностный ток и давление в оболочке на границе Φ_2 (поверхностный заряд $\theta = 0$, так как в силу бесконечности проводимости оболочки имеем $\mathbf{E} = 0$ и, следовательно, $\{E_n\} = 4\pi\theta = 0$). Граничные значения магнитного поля, определенные на двух поверхностях Φ_1 и Φ_2 , сшиваются некоторым магнитным полем $\mathbf{H}_0$ внутри оболочки. Уравнения Максвелла внутри оболочки сводятся к условию вмерзнутости поля $\mathbf{H}_0$ и к определению объемного тока $\mathbf{j} = c(4\pi)^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_0$, при этом никаких дополнительных ограничений не возникает.

Динамика модели пульсара рассматривается в течение промежутка времени, когда влиянием вязкости жидкости и потерями энергии на электромагнитное излучение можно пренебречь.

§ 2. Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью

Уравнениями движения (относительно центра масс) твердого тела с полостью, заполненной магнитной жидкостью, являются уравнения магнитной гидродинамики (1.1) и закон сохранения полного момента импульса. Введем обозначения:

$$\dot{Q}_1 = Q_1 A, \quad \dot{Q}_2 = -B Q_2 \quad (2.1)$$

и воспользуемся изоморфизмом векторов с компонентами

v^i в R^3 и кососимметрических (3×3) матриц с компонентами V_{jk} :

$$v^i \rightarrow V_{jk} = - \sum_{i=1}^3 v^i \varepsilon_{ijk}, \quad (2.2)$$

при котором векторное произведение векторов $x \times y$ переходит в коммутатор матриц $[X, Y] = XY - YX$. После этого изоморфизма кососимметрическим матрицам A и B отвечают векторы с компонентами $A^i, B^i, i = 1, 2, 3$.

Момент количества движения жидкости в полости (относительно центра масс) имеет вид (всюду интеграл берется по объему полости)

$$\begin{aligned} M_0^i &= \rho \int (x \times v)^i dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk} + (Q_1)_j^i I_{jk}^0 A^k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= m_1 (\dot{F} F^t - F \dot{F}^t) = m_1 Q_1 (D^2 A + A D^2 - 2 D B D) Q_1^t, \\ I_{jk}^0 &= m \left(\delta_{jk} \sum_{l=1}^3 (r^l)^2 - r^j r^k \right), \quad m = 4\pi \rho d_1 d_2 d_3 / 3, \quad m_1 = m/5, \end{aligned}$$

где m — полная масса жидкости, индекс t означает транспонирование, M_{jk} — компоненты матрицы M .

Вектор $\bar{M} = m_1 \mathbf{M}$ полного момента количества движения твердого тела и жидкости в системе отсчета S имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} M^i &= \sum_{k=1}^3 I_{ik} A^k - \gamma_i B^i, \quad (2.3) \\ I_{ik} &= g_i \delta_i^k + m_1^{-1} (I_{ik}^0 + I_{ik}^1), \quad g_i = d_j^2 + d_i^2, \quad \gamma_i = 2d_j d_i, \end{aligned}$$

где I_{ik}^1 — тензор инерции твердой оболочки в системе S ; $i, j, l = 1, 2, 3$.

Закон сохранения полного момента количества движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}. \quad (2.4)$$

Три последних уравнения магнитной гидродинамики (1.1) выполнены тождественно в силу определений (1.2) и (1.3). Переходя к преобразованию первого уравнения (1.1), отметим, что гравитационные силы в случае идеальной несжимаемой жидкости эквивалентны переопределению давления $p_1 = p + \rho \Phi$ и поэтому не оказывают

влияния на динамику рассматриваемой модели. Эффективное давление p_1 для движений с однородной деформацией является квадратичной функцией координат:

$$p_1 = p_0(t) + \sum_{i,j=1}^3 (p_{ij}(t) a^i a^j + p_i(t) a^i),$$

где $p_{ij}(t)$ — компоненты симметрической матрицы $P_0(t)$. Подставляя указанную формулу и формулы (1.2), (1.3) в первое уравнение (1.1), получаем, что это уравнение эквивалентно следующим матричному и векторному уравнениям:

$$\begin{aligned} \rho \dot{F} &= -(F^{-1})' P_0 + ((F^{-1})' h F' F h + F h^2) / 4\pi, \\ p_i(t) &= - \sum_{k,l=1}^3 F_i^k (\dot{Q}_1)_{l'}^{k'} l'. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим $K_0 = \dot{F}' F - F' \dot{F}$; очевидно, $\dot{K}_0 = \dot{F}' F - F' \ddot{F}$ — антисимметричная часть матрицы $\dot{F}' F$. Симметричная часть этой матрицы определяет матрицу $P_0(t)$: $2P_0 = -\rho(F'' F + \ddot{F}' F) +$

$$+ (2\pi)^{-1} h F' F h + (4\pi)^{-1} (F' F h^2 + h^2 F' F). \quad (2.6)$$

В силу (2.5) имеем

$$\rho \dot{K}_0 = (4\pi)^{-1} (h^2 F' F - F' F h^2). \quad (2.7)$$

Используя определение (2.1), получаем:

$$K_0 = Q_2^t K Q_2, \quad K = D^2 B + B D^2 - 2 D A D, \quad F' F = Q_2^t D^2 Q_2. \quad (2.8)$$

При помощи этих формул уравнение (2.7) преобразуем к эквивалентному виду:

$$\dot{K} = [K, B] + \kappa [Q_2 h^2 Q_2^t, D^2], \quad \kappa = (4\pi\rho)^{-1}, \quad (2.9)$$

где квадратные скобки означают коммутатор матриц. Обозначим $u = Q_2 h Q_2^t$; тогда в силу (2.1) получаем

$$\dot{u} = [u, B], \quad [u^2, D^2] = [u, u D^2 + D^2 u]. \quad (2.10)$$

После изоморфизма (2.2) кососимметрической матрице u отвечает вектор $\mathbf{u}$ с компонентами u^1, u^2, u^3 ; матрице K и матрице $\kappa(u D^2 + D^2 u)$ отвечают векторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{w}$, имеющие следующие компоненты:

$$K^i = g_i B^i - \gamma_i A^i, \quad w^i = \kappa g_i u^i, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

(здесь нет суммирования по i). В векторных обозначениях (2.3), (2.11) уравнения (2.4), (2.9) и (2.10) определяют полную систему уравнений, описывающих динамику твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (2.12)$$

Уравнения (2.12) полностью определяют зависимость матрицы F от времени, поэтому уравнение (2.6) и второе уравнение (2.5) позволяют найти матрицу $P_0(t)$ и коэффициенты $p_i(t)$, т. е. вычислить давление внутри жидкости (с точностью до несущественной аддитивной постоянной).

Уравнения (2.12) являются обобщением классических уравнений движения тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью [148], и выведены впервые в работах [123, 124]. Классический случай соответствует отсутствию магнитного поля и получается из (2.12) при $\mathbf{u} = 0$.

§ 3. Первые интегралы динамической системы. Интегрируемые случаи

1. Важнейшим интегралом динамической системы (2.12) является интеграл полной энергии E (без постоянной гравитационной энергии), который складывается из кинетической энергии жидкости E_1 , внутренней энергии магнитного поля E_2 и кинетической энергии вращения твердого тела E_3 :

$$E_1 = \int \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{1}{2} m_1 \text{Tr} (\dot{F} \dot{F}^t) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 I_{ik}^0 A^i A^k, \quad (3.1)$$

$$E_2 = \int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{1}{30} \text{Tr} (h^t F^t F h) d_1 d_2 d_3,$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij}^1 A^i A^j, \quad E = E_1 + E_2 + E_3.$$

Используя в этих формулах обозначения § 2, получаем:

$$2H = 2E/m_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{A}) + (\mathbf{K}, \mathbf{B}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w}) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^3 (I_{ik} A^i A^k - 2\gamma_i A^i B^i + g_i (B^i)^2 + \kappa g_i (u^i)^2), \quad (3.2)$$

$$g_i = d_j^2 + d_h^2, \quad \gamma_i = 2d_j d_h, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Очевидно, $M^i = \partial H / \partial A^i$, $K^i = \partial H / \partial B^i$, $w^i = \partial H / \partial u^i$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция $J_1 = H$ — первый интеграл системы (2.12). Эта система имеет также еще следующие три первых интеграла:

$$J_2 = (M, M), \quad J_3 = (u, u), \quad J_4 = (K, u). \quad (3.3)$$

С точностью до множителя интеграл J_2 есть квадрат полного момента количества движения, J_3 — квадрат вектора h напряженности магнитного поля в лагранжевых координатах, J_4 — скалярное произведение вектора вихря скорости жидкости и вектора h . Совместный уровень трех интегралов (3.3) определяет шестимерное многообразие $\mathcal{M}^6 = T(S^2) \times S^2$ — произведение касательного пучка к двумерной сфере на двумерную сферу S^2 .

Система (2.12) представляет собой специальный случай уравнений Эйлера в сопряженном пространстве L^* к алгебре Ли L , являющейся суммой алгебры Ли группы G_3 движений трехмерного евклидова пространства и алгебры Ли $SO(3)$. Многообразия $\mathcal{M}^6$ являются орбитами коприсоединенного представления группы Ли $G = G_3 \times SO(3)$ в пространстве L^* , поэтому на этих многообразиях стандартным образом [120] определяется симплектическая структура; система (2.12) на $\mathcal{M}^6$ гамильтонова с гамильтонианом H .

В случае шаровой полости ($d_1 = d_2 = d_3$) магнитное поле не влияет на динамику системы и уравнения (2.12) сводятся к обычным уравнениям Эйлера вращения некоторого эффективного твердого тела. В случае осевой симметрии твердого тела и полости

$$d_1 = d_2, \quad r^i = (0, 0, r^3), \quad I_{ik} = I_i \delta_i^k, \quad I_1 = I_2$$

уравнения (2.12) имеют дополнительный первый интеграл $J_5 = M^3 + K^3$ и инвариантны относительно группы одновременных поворотов в плоскостях (M^1, M^2) , (K^1, K^2) и (u^1, u^2) . Поэтому система (2.12) на совместном уровне первых интегралов (3.3) и J_5 и после факторизации по указанной группе сводится к гамильтоновой системе на четырехмерном многообразии, которая, вообще говоря, неинтегрируема.

II. Рассмотрим важный случай нулевого полного момента количества движения системы $J_2 = 0$. Предположим, что центр масс находится в центре эллипсоида ($r^i = 0$) и тензор инерции твердого тела диагонален: $I_{ik}^1 = I_i \delta_i^k$.

Тогда в силу (2.3) $A^i = \gamma_i B^i (g_i + m_1^{-1} I_i)^{-1}$ и система (2.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{K}}} &= \bar{\mathbf{K}} \times \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}, & \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \\ B^i &= \partial \bar{H} / \partial \bar{K}^i, & w^i &= \partial \bar{H} / \partial u^i, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$2\bar{H} = \sum_{i=1}^3 (f_i^{-1}(\bar{K}^i)^2 + \kappa g_i (u^i)^2), \quad f_i = g_i - \gamma_i^2 (g_i + I_i m_1^{-1})^{-1}.$$

Уравнения (3.4) аналогичны классическим уравнениям Кирхгофа движения твердого тела, имеющего три плоскости симметрии, в идеальной несжимаемой жидкости. Из теории уравнений Кирхгофа известно, что система (3.4) при выполнении условия Клебша [144]

$$f_1(g_2 - g_3) + f_2(g_3 - g_1) + f_3(g_1 - g_2) = 0 \quad (3.5)$$

имеет дополнительный первый интеграл

$$J = (\bar{K}^1)^2 + (\bar{K}^2)^2 + (\bar{K}^3)^2 + \kappa f_2 (g_1 - g_3) (u^1)^2 + \kappa f_1 (g_2 - g_3) (u^2)^2 \quad (3.6)$$

и поэтому полностью интегрируется.

Покажем, что при любых значениях полуосей эллипсоидальной полости d_1, d_2, d_3 существует двухпараметрическое семейство значений тензора инерции твердого тела I_i , для которых соотношение (3.5) выполнено, т. е. динамика системы интегрируема на уровне $J_2 = 0$. Пусть $d_3 > d_1 > d_2$; введем следующие обозначения:

$$\beta_i = 1 + m_1^{-1} I_i g_i^{-1} > 1, \quad x_1 = d_1 d_3^{-1}, \quad x_2 = d_2 d_3^{-1}, \quad x_2 < x_1 < 1, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2x_2 (1 + x_1^2)^{-1}, \quad \alpha_2 = 2x_1 (1 + x_2^2)^{-1}, \quad \alpha_3 = \\ &= 2x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Из формул (3.4) получаем $f_i = g_i (1 - \alpha_i^2 \beta_i^{-1})$. Уравнение (3.5) после подстановки (3.7) и несложного преобразования принимает вид

$$\frac{x_1^2 (1 - x_1^2)}{\beta_2 (1 + x_1^2)} + \frac{x_2^2 (x_2^2 - 1)}{\beta_1 (x_2^2 + 1)} + \frac{x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - x_2^2)}{\beta_3 (x_1^2 + x_2^2)} = 0. \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) при $0 < x_2 < x_1 < 1$ и двух произвольных параметрах $\beta_2, \beta_3 > 0$ находим $\beta_1 > 0$. Решения уравнения (3.8) допускают преобразование $\beta_i \rightarrow \lambda \beta_i$, поэтому

при достаточно большом λ получаем двухпараметрическое семейство решений с $\beta_i = \lambda \beta_i > 1$. После этого из (3.7) находим соответствующие компоненты тензора инерции твердого тела I_i . В частности, уравнение (3.8) имеет решения, для которых $x_1 \approx x_2 \approx 1$ и $\beta_1 \approx \beta_2 \approx \beta_3$; в этом случае при больших λ выполнены также и необходимые условия $I_i < I_j + I_k$.

Известный интегрируемый случай С. А. Чаплыгина [108] для уравнений Кирхгофа также приводит к интегрируемому случаю рассматриваемой системы. Уравнения (3.4) при условиях

$$f_1 = f_2 = 2f_3, \quad g_3 = (g_1 + g_2)/2, \quad J_4 = 0 \quad (3.9)$$

имеют дополнительный первый интеграл

$$J_5 = (((K^2)^2 - (K^1)^2) f_3^{-1} + \kappa (d_1^2 - d_2^2) (u^3)^2)^2 + 4f_3^{-2} (K^1)^2 (K^2)^2$$

и поэтому полностью интегрируются. После подстановки выражений (3.4), (3.7) легко убедиться, что уравнения (3.9) имеют трехпараметрическое семейство решений d_i, I_k , удовлетворяющее всем необходимым условиям.

§ 4. Периодические решения

I. Матрицы $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ для периодических вращений модели пульсара являются периодическими функциями времени с одинаковым периодом. Таким решениям соответствуют замкнутые траектории системы (2.12); обратно, если замкнутые траектории системы (2.12) образуют трехмерное множество, то некоторое его всюду плотное подмножество соответствует периодическим вращениям $Q_1(t)$, что и приводит к периодическому изменению внешнего электромагнитного поля пульсара.

Покажем, что при выполнении условий $I_{ik} = (g_i + I_i) \delta_{ik}$ и $J_4 = 0$ на открытом множестве поверхностей уровня интегралов $J_1 = k_1$, $J_2 = k_2$, $J_3 = k_3$ существует 12 замкнутых траекторий системы (2.12).

Интеграл $J_1 = H$ (3.2) при $I_{ik} = (g_i + I_i) \delta_{ik}$ имеет вид

$$2J_1 = \sum_{i=1}^3 (a_i M_i^2 + 2c_i M_i K_i + b_i K_i^2 + \kappa g_i u_i^2), \quad (4.1)$$

$$a_i = g_i s_i, \quad c_i = \gamma_i s_i, \quad b_i = (g_i + I_i) s_i, \quad s_i = ((g_i + I_i) g_i - \gamma_i^2)^{-1}.$$

Система (2.12) на уровне $J_4 = 0$ имеет три инвариантных подмногообразия V_k^4 : $u_k = M_i = M_j = K_i = K_j = 0$ ($i, j, k = 1, 2, 3$). На многообразии V_1^4 уравнения (2.12) и интегралы (3.2) — (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{K}_3 &= \kappa(g_2 - g_1)u_1u_2, \quad \dot{u}_1 = u_2B_3, \quad \dot{u}_2 = -u_1B_3, \quad \dot{M}_3 = 0, \\ 2J_1 &= a_3M_3^2 + 2c_3M_3K_3 + b_3K_3^2 + \kappa g_1u_1^2 + \kappa g_2u_2^2, \quad (4.2) \\ J_2 &= M_3^2, \quad J_3 = u_1^2 + u_2^2, \quad B_2 = c_3M_3 + b_3K_3. \end{aligned}$$

Поверхность уровня интеграла $J_2 = k_2$ состоит из двух компонент $M_3 = \epsilon k_2^{1/2}$, $\epsilon = \pm 1$. На каждой компоненте многообразие уровня интегралов $J_1 = k_1$, $J_3 = k_3$ является пересечением эллипсоида ($J_1 = k_1$) и цилиндра ($J_3 = k_3$), имеющих общую ось K_3 , и либо состоит из двух замкнутых траекторий системы (4.2), либо пусто (число этих замкнутых траекторий одинаково для обеих компонент $M_3 = \epsilon k_2^{1/2}$). Всего на трех инвариантных подмногообразиях V_k^4 в зависимости от соотношения J_1, J_2, J_3 получаем 12, 8, 4 или 0 замкнутых траекторий, причем при $2J_1 > J_2 \max(a_i - c_i^2/b_i) + \kappa J_3 \max(g_i)$ имеется ровно 12 замкнутых траекторий.

Указанные замкнутые траектории описывают вращение пульсара вокруг неподвижной оси. Максимальное число таких траекторий (4 для каждой из трех осей) соответствует двум возможным направлениям полного момента импульса пульсара и двум возможным направлениям вращения жидкого ядра относительно оболочки.

Уравнения (4.2) после подстановки $K_3 = (B_3 - c_3M_3)/b_3$ принимают вид классических уравнений Эйлера

$$B_3 = -\omega u_1u_2, \quad \dot{u}_1 = u_2B_3, \quad \dot{u}_2 = -u_1B_3, \quad (4.3)$$

где $\omega = \kappa b_3(g_1 - g_2)$. Вычислим период замкнутых траекторий системы (4.2) — (4.3). Интегралы системы (4.3) запишем в виде

$$l = B_3^2 + \omega u_1^2, \quad J_3 = u_1^2 + u_2^2. \quad (4.4)$$

Пусть $d_2 > d_1$, тогда $\omega = \kappa b_3(d_2^2 - d_1^2) > 0$. Выражая B_3 и u_2 в силу (4.4) через u_1 и подставляя в (4.3), получаем

$$\dot{u}_1 = ((J_3 - u_1^2)(l - \omega u_1^2))^{1/2}. \quad (4.5)$$

Решения уравнений (4.5) имеют вид [155]

$$u_1 = (l/\omega)^{1/2} \sin \tau, \quad \tau = (\omega J_3)^{1/2}(t - t_0), \quad (4.6)$$

где $\operatorname{sn} \tau$ — эллиптическая функция Якоби, отвечающая параметру $k^2 = l/(\omega J_3)$. После подстановки (4.6) в (4.4) получаем:

$$B_3 = l^{1/2} \operatorname{sn} \tau, \quad u_2 = J_3^{1/2} \operatorname{dn} \tau. \quad (4.7)$$

Период эллиптических функций (4.6) — (4.7) определяется формулой

$$T = 4(\omega J_3)^{-1/2} \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha. \quad (4.8)$$

Это и есть период замкнутых траекторий системы (4.2) — (4.3).

II. Найдем минимальное значение периода T , реализующееся для моделей реальных пульсаров, т. е. при $d_1 \approx d_2 \approx d_3 \approx R$ и при постоянных J_3 , I_3 , ρ . Функция T (4.8) достигает минимума T_m при $k = l = 0$, т. е. для малых колебаний, происходящих в окрестности оси u_2 ($B_3 = u_1 = 0$); при этом $T_m = 2\pi(\omega J_3)^{-1/2}$. Такие колебания асимптотически имеют вид ($l \ll 1$):

$$u_1 = l^{1/2} \sin(\omega^{1/2} u_2^0(t - t_0)), \\ B_3 = (l\omega)^{1/2} \cos(\omega^{1/2} u_2^0(t - t_0)), \quad u_2 = u_2^0. \quad (4.9)$$

После подстановки формул (4.1) и (4.3) в (4.7) при $k \ll 1$ получаем:

$$T_m = 2\pi(4\pi\rho/J_3)^{1/2} K(d_1, d_2, I_3), \\ K = (d_1^2 + d_2^2 + I_3)^{-1/2} (d_2^2 - d_1^2 + I_3 (d_1^2 + d_2^2) (d_2^2 - d_1^2)^{-1})^{1/2}, \\ I_3 = m_1^{-1} (I_3^0 + I_3^1).$$

Функция K достигает минимального значения K_m при $d_2^2 - d_1^2 = (I_3 (d_1^2 + d_2^2))^{1/2}$, $K_m =$
 $= 2^{1/2} (I_3 (d_1^2 + d_2^2))^{1/4} (d_1^2 + d_2^2 + I_3)^{-1/2}. \quad (4.10)$

Отсюда получаем минимальное значение периода

$$T_0 = 4\pi^{3/2} (2\rho/J_3)^{1/2} (I_3 (d_1^2 + d_2^2))^{1/4} (d_1^2 + d_2^2 + I_3)^{-1/2}. \quad (4.11)$$

Для реальных пульсаров имеем [152]: $d_1 \approx d_2 \approx d_3 \approx R \sim 10^6$ см, плотность вещества жидкого ядра $\rho \sim 10^{14}$ г/см³, плотность вещества оболочки $\rho_1 \sim 10^8$ г/см³, толщина оболочки $r \sim 10^4$ см, величина магнитного поля на поверхности пульсара $|H| \sim 10^{12}$ Гс (все численные значения определены только по порядку величины). Со-

гласно определению (4.3) максимальное значение напряженности магнитного поля на поверхности эллипсоидальной полости дается формулой $|\mathbf{H}| = R|\mathbf{h}|$. В силу определения $u = Q_2 h Q_2^t$ имеем $J_3 = |u|^2 = |\mathbf{h}|^2$, поэтому $J_3^{1/2} = |\mathbf{H}|/R$. Тензор инерции оболочки при $r \ll R$ имеет вид

$$I_{ik}^1 = \frac{8}{3} \pi R^4 r \rho_1 \delta_{ik}.$$

Естественно предположить, что центр масс пульсара близок к центру эллипсоидальной полости, причем $|r^i| < R(2r\rho_1/R\rho)^{1/2}$, тогда $|I_{ik}^0| = \gamma |I_{ik}^1|$, где $\gamma < 1$ (см. (2.3)). Для компоненты I_3 получаем формулу

$$I_3 = m_1^{-1}(I_3^0 + I_3^1) = 10(1 + \gamma) R r \rho_1 / \rho.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (4.11), получаем:

$$T_0 = 8\pi^{3/2} (5(1 + \gamma)/4)^{1/4} \rho^{1/2} R H^{-1} (r\rho_1/R\rho)^{1/4}. \quad (4.12)$$

При этом в силу (4.10) имеем $d_2 = d_1(1 + 5(1 + \gamma)r\rho_1/R\rho)^{1/2}$. После подстановки указанных выше численных значений находим $d_2 = d_1(1 + (5(1 + \gamma))^{1/2} 10^{-4})$, $T_0 = 5$ с. Полученное значение T_0 аппроксимирует период $T = 3,75$ с пульсара PSR 0527. Учитывая неточность определения численных значений всех величин в формуле (4.12), полученную оценку минимального периода вращения пульсара T_0 (4.12) можно считать достаточно хорошо согласующейся с астрофизическими данными. Например, положив $H = 5 \cdot 10^{12}$ Гс (что весьма правдоподобно), получим $T_0 \sim 1$ с, а такое значение периода характерно для многих пульсаров, например, PSR 0628 ($T = 1,24$ с) PSR 1133 ($T = 1,19$ с) и др. [152].

III. Траектории системы (4.3), удовлетворяющие условию

$$(d_1^2 + d_3^2)^{-1} J_0 > J_3 > (d_2^2 + d_3^2)^{-1} J_0, \\ J_0 = (2J_1 - (a_3 - c_3^2/b_3) J_2) \kappa^{-1},$$

движутся вокруг оси $u_2 (B_3 = u_1 = 0)$, как и траектории (4.8). Для таких траекторий за период одного колебания матрица Q_2 не изменяется, так как $\dot{Q}_2 = -BQ_2$ и $\oint_3 B dt = 0$; при этом матрица $Q_1(t + T)Q_1^{-1}(t)$ определяет поворот вокруг оси x_3 на угол $\Delta\varphi = TM_3/I_3$. Условие $\Delta\varphi = 2\pi p/q$ (p и q — целые числа) определяют значения момента импульса $|\bar{\mathbf{M}}| = m_1 |\mathbf{M}_3| = 2\pi r m_1 I_3 / q T$, обеспечи-

вающие строгую периодичность вращения пульсара (с периодом qT).

При $J_3 \times \min(g_i) < J_1 < J_3 \times \max(g_i)$ и $J_2 \ll 1$ на поверхности уровня $J_i = k_i$ существуют 8 замкнутых траекторий, вдоль которых величины $K_3, B_3, A_3 = a_3 M_3 + c_3 K_3$ меняют знак. Таким траекториям отвечает немонотонное вращение пульсара вокруг оси x_3 , при котором угловая скорость оболочки и внутреннего вращения жидкости периодически меняют знак (частным случаем являются колебания (4.9) при $|M_3| < (\omega l)^{1/2} c_3 (a_3 b_3 - c_3^2)^{-1}$). Этот вид движения реализуется только при наличии внутреннего магнитного поля и $d_1 \neq d_2$.

Магниторотационные колебания несжимаемой жидкости в цилиндрически-симметричном случае (объект бесконечен по оси x_3) изучались в работе [156]. Существование некоторых периодических траекторий системы (2.12) можно установить, используя работу [117], так как при $J_2 = 0$ система (2.12) переходит в уравнения Кирхгофа.

IV. Важное значение имеют также решения, которые на многообразии $\mathcal{M}^6$ уровня интегралов $J_2 = k_2, J_3 = k_3, J_4 = k_4$ обладают минимальной полной энергией J_1 . Такие решения в силу положительной определенности энергии J_1 существуют на каждом многообразии уровня интегралов J_2, J_3, J_4 и соответствуют некоторым стационарным точкам системы (2.12). В стационарных точках системы (2.12) выполнены следующие условия:

$$A = \lambda M, \quad B = \alpha u, \quad w = \alpha K + \beta u. \quad (4.13)$$

Соотношения (4.13) после подстановки формул (2.11) принимают вид

$$u_i = \alpha \lambda z_i M_i, \quad K_i = (\kappa g_i - \beta) \lambda z_i M_i, \quad z_i = \gamma_i (\alpha^2 - \kappa) g_i + \beta)^{-1},$$

$$\lambda^{-1} M_i = \sum_{k=1}^3 J_{ik} M_k, \quad J_{ik} = I_{ik} - \gamma_i \alpha^2 z_i \delta_{ik}. \quad (4.14)$$

Отыскание особых точек сводится, таким образом, к нахождению собственных значений и собственных векторов матрицы J_{ik} . Твердотельное вращение ($\alpha = 0$) и чисто внутреннее вращение жидкости ($\lambda = 0$) реализуются только для вырожденного множества особых точек, лежащих на двухпараметрическом множестве многообразий $\mathcal{M}^6$. В общем случае (4.13) — (4.14) матрицы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ описывают периодические вращения с периодами T_1 и T_2 . Если периоды T_1 и T_2 соизмеримы, то решение является строго периодическим.

ДОПОЛНЕНИЕ
СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА,
ДОПУСКАЮЩИЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

**§ 1. Система гидродинамического типа, связанная
с моделью Вольтерра**

I. Пусть L — симметрическая матрица, имеющая вид матрицы Якоби:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Матрица A является кососимметрической и имеет следующие ненулевые элементы

$$A_{i,i+2} = x_i, \quad A_{i+2,i} = -x_i, \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (1.2)$$

Рассмотрим для указанных матриц L и A операторное уравнение

$$L_t = L L_y L + [L, A]. \quad (1.3)$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений

$$a_i(a_{i+1})_y a_{i+2} = a_{i+2}x_i - a_i x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-3, \quad (1.4)$$

$$(a_i)_t = \frac{1}{2} a_i ((a_{i-1}^2)_y + (a_i^2)_y + (a_{i+1}^2)_y) + a_{i-1}x_{i-1} + a_{i+1}x_i. \quad (1.5)$$

Для разрешения уравнений (1.4) относительно неизвестных x_i сделаем подстановку

$$x_i = a_i a_{i+1} b_i. \quad (1.6)$$

В силу (1.4) получаем

$$(a_{i+1})_y a_{i+1}^{-1} = b_i - b_{i+1}. \quad (1.7)$$

Решение этой системы имеет вид

$$b_i = - \sum_{k=1}^{k=i} (a_k)_y a_k^{-1} - \beta/2, \quad (1.8)$$

где β — произвольная функция от t, y .

Система (1.5) после подстановки формул (1.6), (1.8) принимает вид

$$(a_i)_t = \frac{1}{2} a_i \left((a_i^2)_y + 2a_{i+1}^2 \sum_{k=1}^{k=i+1} (a_k)_y a_k^{-1} - 2a_i \sum_{k=1}^{k=i-2} (a_k)_y a_k^{-1} + \right. \\ \left. + \beta (a_{i+1}^2 - a_{i-1}^2) \right). \quad (1.9)$$

Таким образом, система (1.9) допускает операторное представление (1.3), и поэтому, согласно основной лемме § 2 главы II, собственные числа $f_k(t, y)$ матрицы L (1.1) удовлетворяют уравнениям

$$f_{kt} = f_k^2 f_{ky}. \quad (1.10)$$

Система (1.9) при $\beta = 0$ входит в класс систем гидродинамического типа [92, 174, 175]. Собственные числа $f_k(t, y)$ в силу уравнений (1.10) являются инвариантами Римана. Число этих независимых инвариантов равно $[n/2]$, так как собственные числа матриц Якоби (1.1) симметричны относительно нуля. В силу уравнений (1.10) собственные числа $f_k(t, y)$ опрокидываются. Поэтому так же ведут себя и общие решения системы (1.9) (и системы (3.9), (3.13); см. § 3).

Система (1.9) при отсутствии зависимости от y переходит в классическую систему Вольтерра.

II. После подстановки $a_i = \exp(u_i/2)$ система (1.9) переходит в систему уравнений

$$u_{it} = e^{u_i} u_{iy} + e^{u_{i+1}} \sum_{k=1}^{k=i+1} u_{ky} - e^{u_{i-1}} \sum_{k=1}^{k=i-2} u_{ky} + \beta (e^{u_{i+1}} - e^{u_{i-1}}), \quad (1.11)$$

которая имеет следующий вид:

$$u_{it} = \sum_{j=1}^{n-1} A^{ij} \frac{\partial H}{\partial u_j}, \quad (1.12)$$

$$H = \frac{1}{2} \text{Tr } L^2 = e^{u_1} + e^{u_2} + \dots + e^{u_{n-1}}. \quad (1.13)$$

Операторы A^{ij} являются кососимметрическими и имеют вид

$$A^{ij} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^{ij} u_{ky} + \beta I^{ij}. \quad (1.14)$$

Здесь коэффициенты g^{ij} симметричны, I^{ij} и b_k^{ij} кососимметричны и постоянны и не равны нулю только в следующих случаях

$$g^{ii} = g^{i, i+1} = g^{i+1, i} = 1, \quad I^{i, i+1} = -I^{i+1, i} = 1, \\ b_k^{i, i+1} = -b_k^{i+1, i} = 1 \quad \text{при } 1 \leq k \leq i. \quad (1.15)$$

Операторы A^{ij} (1.14) имеют вид операторов, определяющих скобки Пуассона гидродинамического типа [92]. Справедливо тождество

$$\partial(g^{ij})/\partial u^k = b_k^{ij} + b_k^{ji}. \quad (1.16)$$

в силу которого символы Кристоффеля Γ_{jk}^i ,

$$\Gamma_{jk}^i = -g_{jm}b_k^{mi} \quad (1.17)$$

определяют постоянную связность, согласованную с метрикой g^{ij} .

В силу тождества (1.16) скалярное произведение двух функций $F(u)$ и $G(u)$:

$$\langle F, G \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta u_i} A^{ij} \frac{\delta G}{\delta u_j} dy \quad (1.18)$$

является кососимметрическим.

Коэффициенты g^{ij} , b_k^{ij} можно представить в виде

$$g^{ij} = \gamma^{ij} + \gamma^{ji}, \quad b_k^{ij} = \partial \gamma^{ij} / \partial u^k. \quad (1.19)$$

Здесь коэффициенты γ^{ij} являются ненулевыми только в следующих случаях: $\gamma^{ii} = \frac{1}{2}$, $\gamma^{i, i+1} = \frac{1}{2} + S_i$, $\gamma^{i+1, i} = \frac{1}{2} - S_i$, $S_i =$

$= \sum_{k=1}^{k=i} u_k$. Координаты $u_1, \dots, u_{n-1}$ ввиду (1.19), согласно терминологии работы [92], называются *лиувилевыми*.

Отметим, что постоянная связность (1.17) в силу формул (1.15) не является симметрической и ее тензор кручения T_{jk}^i и тензор кривизны R_{jkl}^i не равны нулю. Поэтому, согласно теореме 1 работы [92], оператор (1.14) не удовлетворяет тождеству Якоби для скобок Пуассона.

§ 2. Интегрируемое 2 + 1-мерное уравнение как континуальный предел систем гидродинамического типа

I. Система (1.9) после замены $u_i = a_i^2$ принимает вид

$$u_{it} = u_i \left(u_{iy} + u_{i+1,y} + u_{i+1} \sum_{k=1}^{k=i} u_{ky} u_k^{-1} - \right. \\ \left. - u_i \sum_{k=1}^{k=i-2} u_{ky} u_k^{-1} + \beta (u_{i+1} - u_{i-1}) \right). \quad (2.1)$$

Предположим, что выполнены равенства

$$u_j = 1 - \varepsilon^2 v(t, x_j, y), \quad x_j = j\varepsilon, \quad \beta = 3\beta_0 \varepsilon^{-1}, \quad (2.2)$$

где $v(t, x, y)$ — некоторая дифференцируемая функция от трех переменных. Уравнение (2.1) после подстановки (2.2) принимает вид

$$v_{it} = (1 - \varepsilon^2 v_i) \left(2v_{iy} + v_{i-1,y} + v_{i+1,y} - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 (v_{i+1} - v_{i-1}) \sum_{k=1}^{k=i} v_{ky} + \beta (v_{i+1} - v_{i-1}) + O(\varepsilon^3) \right), \quad (2.3)$$

где $v_i = v(t, x_i, y)$. Уравнение (2.3) после применения разложения Тейлора для функций v и v_y и использования формулы

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{k=i} v_{ky} = \int_0^{x_i} v_y(t, \xi, y) d\xi + O(\varepsilon) \quad (2.4)$$

принимает вид

$$v_{it} = (1 - \varepsilon^2 v_i) \left(4v_{iy} + \varepsilon^2 \left(v_{ixxy} - 2v_{ix} \int_0^x v_y(t, \xi, y) d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + 6\beta_0 v_{ix} + \varepsilon^2 \beta_0 v_{ixxx} + O(\varepsilon^3) \right) \right). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) после замены

$$t' = -\varepsilon^2 t, \quad y' = y + 4t, \quad x' = x + 6\beta_0 t \quad (2.6)$$

принимает вид (штрихи опускаем)

$$v_{it} = 4v_i v_{iy} + 2v_{ix} \int_0^x v_y(t, \xi, y) d\xi - v_{ixxy} + \beta_0 (6v_i v_{ix} - v_{ixxx}) + O(\varepsilon). \quad (2.7)$$

Полученное уравнение после перехода к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ преобразуется в уравнение

$$v_t = 4vv_y + 2v_x \int_0^x v_y(t, \xi, y) d\xi - v_{xxy} + \beta_0 (6vv_x - v_{xxx}). \quad (2.8)$$

В главе II построена подробная теория уравнения (2.8), которое описывает взаимодействие волны Римана, распространяющейся по оси y , с длинными волнами, распространяющимися по оси x . Уравнение (2.8) имеет операторное представление

$$L_t = 2(LL_y + L_y L) + [L, A], \quad (2.9)$$

где $L = -\partial_x^2 + v(t, x, y)$ — оператор Штурма — Лиувилля.

§ 3. Система гидродинамического типа, связанная с цепочкой Toda

I. Пусть L — симметрическая матрица следующего вида:

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & p_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & p_n \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

а матрица A является кососимметрической и имеет ненулевые элементы

$$A_{i,i+1} = x_i, \quad A_{i+1,i} = -x_i. \quad (3.2)$$

Рассмотрим для этих матриц операторное уравнение вида

$$L_t = LL_y + L_yL + [L, A]. \quad (3.3)$$

Уравнение (4.3) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$(a_i a_{i+1})_y = x_i a_{i+1} - a_i x_{i+1}, \quad (3.4)$$

$$a_{it} = (a_i (p_i + p_{i+1}))_y + x_i (p_i - p_{i+1}), \quad (3.5)$$

$$p_{it} = (p_i^2 + a_i^2 + a_{i-1}^2)_y + 2a_{i-1}x_{i-1} - 2a_i x_i. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4) после подстановки $x_i = a_i b_i$ принимают вид

$$a_{iy} a_i^{-1} + a_{i+1,y} a_{i+1}^{-1} = b_i - b_{i+1}. \quad (3.7)$$

Решение этих уравнений определяется формулой

$$-b_i = \beta + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_{ky} a_k^{-1} + a_{iy} a_i^{-1}, \quad (3.8)$$

где β — произвольная функция от $\tilde{t}, y$.

Уравнения (3.5), (3.6) после подстановки выражений (3.8) и замены $\tilde{a}_i = a_i^2$, $\tilde{t} = 2t$ принимают вид (волну над $\tilde{a}_i$, $\tilde{t}$ далее опускаем)

$$p_{it} = p_i p_{iy} + a_i \sum_{k=1}^i a_{ky} a_k^{-1} - a_{i-1} \sum_{k=1}^{i-2} a_{ky} a_k^{-1} + \beta (a_i - a_{i-1}),$$

$$a_{it} = p_{i+1} a_{iy} + a_i (p_i + p_{i+1})_y + a_i (p_{i+1} - p_i) \left(\beta + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ky} a_k^{-1} \right). \quad (3.9)$$

Полученная система уравнений (4.9) эквивалентна операторному уравнению (3.3). Поэтому согласно основной лемме § 2 главы II собственные числа $f_k(t, y)$ матрицы L (3.1) в силу системы (3.9) удовлетворяют уравнениям

$$f_{kt} = 2f_k f_{ky} \quad (3.10)$$

и являются поэтому инвариантами Римана. Таким образом, система (3.9), описывающая эволюцию $2n-1$ функции p_i, a_i , обладает n инвариантами Римана (3.10). При $\beta = 0$ система (3.9) входит в класс систем гидродинамического типа [92, 174, 175].

При отсутствии зависимости от переменной y система (3.9) переходит в известную систему для цепочки Toda. Система (2.9) также имеет представление вида (1.12).

II. Укажем другой вид системы (3.9). Из уравнений (3.7) после подстановки

$$a_i = \exp(q_{i+1} - q_i) \quad (3.11)$$

получаем

$$-b_i = (q_i + q_{i+1})_y + 2\beta, \quad x_i = b_i \exp(q_{i+1} - q_i). \quad (3.12)$$

Уравнения (3.5), (3.6) после подстановки (3.14), (3.12) принимают вид

$$p_{it} = 2p_i p_{iy} + 4(q_{i+1,y} + \beta) e^{2(q_{i+1} - q_i)} - 4(q_{i-1,y} + \beta) e^{2(q_i - q_{i-1})}, \quad (3.13)$$

$$q_{it} = 2p_i q_{iy} + p_{iy} + 2 \sum_{k=1}^{i-1} p_{ky} + 2\beta p_i + \gamma,$$

где β и γ — произвольные функции от t, y . Любое решение системы (3.13) после подстановки (3.14), (3.12) определяет решение уравнений (3.5), (3.6), например, можно положить $\gamma = 0$.

При отсутствии зависимости от y система (3.13) совпадает со стандартным видом цепочки Тода. При $\beta = \gamma = 0$ уравнение (3.13) определяют достаточно излишнюю систему гидродинамического типа, обладающую n инвариантами Римана (3.10).

III. Операторное уравнение (3.3) совпадает с уравнением Лакса

$$L_t = [L, A - L\partial_y - \partial_y L]. \quad (3.14)$$

Поэтому построенные системы уравнений (3.9), (3.13) эквивалентны также уравнению Лакса (3.14).

Система (3.9), (3.13) связана с системой (1.9) так же, как цепочка Тода связана с системой Вольтерра. Действительно, нетрудно проверить, что из операторного уравнения (1.3) матрицы L следует уравнение для матрицы $L_1 = L^2$:

$$2L_{1t} = L_1 L_{1y} + L_{1y} L_1 + [L_1, A_1], \quad (3.15)$$

где матрица $A_1 = 2A - [L, L_y]$. Уравнение (3.15), очевидно, совпадает с уравнением (3.3). При этом матрица L_1 симметрична и имеет ненулевые элементы L_{1ii} , $L_{1i,i+2} = L_{1i+2,i}$, матрица A_1 косимметрична и имеет ненулевые элементы $A_{1i,i+2} = -A_{1i+2,i}$. Поэтому при отображении $L_1 = L^2$ система (1.9) преобразуется на инвариантное подмногообразие системы (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg — de Vries equation // *Phys. Rev. Lett.*— 1967.— V. 19.— P. 1095—1097.
2. Miura R. M. Korteweg — de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation // *J. Math. Phys.*— 1968.— V. 9.— N 8.— P. 1202—1204.
3. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D., Korteweg — de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion // *J. Math. Phys.*— 1968.— V. 9.— N 8.— P. 1204—1209.
4. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // *Comm. Pure Appl. Math.*— 1968.— V. 21.— P. 467—490.
5. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1977.
6. Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Пятаевский Л. П. Теория солитонов.— М.: Наука, 1980.
7. Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform.— Philadelphia: SIAM, 1981.
8. Calogero F., Degasperis A. Solitons and the spectral transform I.— Amsterdam: North Holland, 1982.
9. Non-linear integrable systems — classical theory and quantum theory. Proceedings of RIMS Symposium/Ed. M. Jimbo, T. Miwa.— Singapore: World Scientific, 1983.
10. Newell A. C. Solitons in mathematics and physics.— Arisona: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1985.
11. Тахтаджян Э. А., Фаддеев Э. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.— М.: Наука, 1986.
12. Богоявленский О. И. Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем // *Изв. АН СССР. Сер. мат.*— 1987.— Т. 51, № 4.— С. 737—767.
13. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform I // *Nuovo Cimento.*— 1976.— V. 32B, N 2.— P. 201—242.
14. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform II // *Nuovo Cimento.*— 1977.— V. 39B, N 1.— P. 1—54.
15. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform, associated with the matrix Schrödinger equation // *Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.*— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
16. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны в новых двумерных интегрируемых уравнениях // *Изв. АН СССР. Сер. мат.*— 1989.— Т. 53, № 2.— С. 243—257.

17. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны II // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1989.—Т. 53, № 4.—С. 907—910.
18. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны III // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 1.—С. 123—131.
19. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега—де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук.—1976.—Т. 31, № 1.—С. 55—136.
20. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы I // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики.—1985.—Т. 4.—С. 179—285.
21. Богоявленский О. И. Интегрируемые динамические системы, связанные с уравнением КдВ // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1987.—Т. 51, № 6.—С. 1123—1141.
22. Богоявленский О. И. Представление Лакса со спектральным параметром для некоторых динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1988.—Т. 52, № 2.—С. 243—266.
23. Volterra V. Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie.—Cahiers scientifiques. VII.—Paris: Gauthier—Vollars, 1931.
24. Богоявленский О. И. Алгебраические конструкции некоторых интегрируемых уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1988.—Т. 52, № 4.—С. 712—739.
25. Богоявленский О. И. Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 2.—С. 258—274.
26. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1984.—Т. 48, № 5.—С. 883—938.
27. Манаков С. В. Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // Успехи мат. наук.—1976.—Т. 31, № 5.—С. 245—246.
28. Мельников В. К. Об уравнениях, порожденных операторным соотношением // Мат. сб.—1979.—Т. 108.—С. 379—392.
29. Новиков С. П. Двумерные операторы Шрёдингера в периодических полях // Современные проблемы математики (Итоги науки и техники).—М.: ВИНТИ, 1983.—Т. 23.—С. 3—32.
30. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems, connected with isospectral deformations // Adv. in Math.—1975.—V. 16.—P. 197—220.
31. Новиков С. П. Геометрия консервативных систем гидродинамического типа. Метод усреднения для теоретико-полевых систем // Успехи мат. наук.—1985.—Т. 40, № 4.—С. 79—90.
32. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова—Уизема // ДАН СССР.—1983.—Т. 270, № 4.—С. 781—785.
33. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverse scattering transform—Fourier analysis for nonlinear problems // Studies in Appl. Math.—1974.—V. 53, N 4.—P. 249—291.
34. Hirota R., Satsuma J. N -soliton solutions of model equations for shallow water waves // J. Phys. Soc. Japan.—1976.—V. 40, N 2.—P. 601—602.

35. Zakharov V. E. Inverse scattering problem method // Solitons/Edit. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
36. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. Solitons and nonlinear wave equations.— London: Academic Press Inc., 1982.
37. Hirota R. Exact N -soliton of the Korteweg — de Vries equation for multiple collisions of solitons // Phys. Rev. Lett.— 1971.— V. 27.— P. 1192—1193.
38. Wadati M. Kamajo T. On the extension of inverse scattering method // Progress of Theor. Phys.— 1974.— V. 52, N 2.— P. 397—414.
39. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости волн в слабодиспергирующих средах // ДАН СССР.— 1970.— Т. 192, № 4.— С. 753—756.
40. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Nonlinear evolution equation of physical significance // Phys. Rev. Letters.— 1973.— V. 31.— P. 125—127.
41. Lax P. D. Almost periodic behaviour of nonlinear waves // Adv. Math. Phys.— 1975.— V. 16.— P. 368—379.
42. Wadati M. The exact solution of the Modified Korteweg — de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan.— 1972.— V. 32.— P. 1681.
43. Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М. О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме // Письма в ЖЭТФ.— 1974.— Т. 19, № 5.— С. 249—253.
44. Манаков С. В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ.— 1974.— Т. 67, № 2.— С. 543—555.
45. Кас М., van Moerbeke P. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices // Adv. in Math.— 1975.— V. 16.— P. 160—169.
46. Itoh Y. Integrals of a Lotka — Volterra system of odd number of variables // Progr. Theor. Phys.— 1987.— V. 78, N 3.— P. 507—510.
47. Bogoyavlensky O. I. Five constructions of integrable dynamic systems connected with the Korteweg — de Vries equation // Preprint.— Bochum University.— August, 1987.
48. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1978.
49. Kupershmidt B. A. Discrete Lax equations and differential — difference calculus.— Asterisque: Paris, 1985.
50. Салль М. А. Преобразование Дарбу для неабелевых и нелокальных уравнений типа цепочки Toda // Теор. мат. физ.— 1982.— Т. 53, № 2.— С. 227—237.
51. Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda // Письма в ЖЭТФ.— 1979.— Т. 30, № 7.— С. 443—448.
52. Манаков С. В. Заметка об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // Функц. анализ и его прилож.— 1976.— Т. 10, № 4.— С. 93—94.
53. Wadati M. Generalized matrix form of the inverse scattering problem method // Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
54. Ablowitz M. J., Ladik J. F. Nonlinear differential-difference equation and Fourier analysis // J. Math. Phys.— 1976.— V. 17, N 6.— P. 1011—1018.

55. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, № 2.— С. 12—78.
56. Perelomov A. M., Ragnisco O., Wojciechowski S. Integrability of Two Interacting N -Dimensional Rigid Bodies // Comm. Math. Phys.— 1986.— V. 102.— P. 573—583.
57. Jiang Z., Wojciechowski S. Integrable System of Many Interacting Rigid Bodies // Nuovo Cimento.— 1988.— V. 101B, N 4.— P. 415—427.
58. Дубровин Б. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия // Функт. анализ и его прилож.— 1977.— Т. 11, № 4.— С. 28—41.
59. Bogoyavlensky O. I. On perturbations of the periodic Toda lattice // Comm. Math. Phys.— 1976.— V. 51, N 3.— P. 201—209.
60. Kostant B. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory // Adv. in Math.— 1979.— V. 34, N 3.— P. 195—338.
61. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Explicite solution of the classical generalized Toda models.— Moscow: Preprint ITEF, 1978.
62. Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.— М.: Наука, 1985.
63. Toda M. Waves in nonlinear lattice // Progr. Theor. Phys. Suppl.— 1970.— V. 45.— P. 174—200.
64. Henon M. Integrals of the Toda lattice // Phys. Rev.— 1974.— V. B9.— P. 1921—1924.
65. Flascka H. The Toda lattice. III. Existence of integrals // Phys. Rev.— 1974.— V. B9.— P. 1924—1926.
66. Bourbaki N. Groupes et algebres de Lie.— Paris: Hermann, 1968.
67. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ.— 1971.— Т. 61, № 1.— С. 118—134.
68. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras // Inv. Math.— 1976.— V. 37, № 2.— P. 93—108.
69. Calogero F., Ragnisco O., Matchioro C. Exact solution of the classical and quantum one-dimensional many-body problems with the two-body potential $V(x) = g^2 a^2 / \sinh^2 ax$ // Lett. Nuovo Cimento.— 1975.— V. 13.— P. 383—387.
70. Toda M. Nonlinear lattice (Toda lattice) // Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
71. Ферми Э. Научные труды. Т. 2.— М.: Наука, 1972.— С. 645—656.
72. Захаров В. Е. К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов // ЖЭТФ.— 1973.— Т. 65, № 1.— С. 219—225.
73. Риман Б. Сочинения.— М.— Л.: Гостехиздат, 1948.
74. Adler M., Moser J. On a class of polynomials connected with the Korteweg — de Vries equation // Comm. Math. Phys.— 1978.— V. 61, N 1.— P. 1—30.
75. Fordy A. P., Gibbons J. Factorization of operators I. Mi-

- ra transformations // J. Math. Phys.—1980.— V. 21, N 10.— P. 2508—2510.
76. Fordy A. P., Gibbons J. Factorization of operators. II // J. Math. Phys.—1981.— V. 22, N 6.— P. 1170—1175.
 77. Соколов В. В., Шабат А. Б. $L-A$ пары и замена типа Риккати // Функц. анализ и его прилож.—1980.— Т. 14, № 2.— С. 79—80.
 78. Kupershmidt B. A., Wilson G. Modifying Lax equations and the second Hamiltonian structure // Invent. Math.—1981.— V. 62, N 3.— P. 403—436.
 79. Antonowicz M., Fordy A. P., Wojciechowski S. Integrable stationary flows: Miura maps and bi-Hamiltonian structures // Phys. Lett. A.—1987.— V. 124, N 3.— P. 143—150.
 80. Владимиров В. С., Волович И. В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // Успехи мат. наук.—1985.— Т. 40, № 2.— С. 17—26.
 81. Владимиров В. С. Применение метода малого параметра для получения законов сохранения для двумерных вполне интегрируемых систем // Сб.: Современные проблемы математической физики.—Тбилиси: Изд-во Тбилис. Ун-та.—1987.— С. 19—34.
 82. Boyer C. P., Finley J. D. Killing vectors in self-dual, Euclidean Einstein spaces // J. Math. Phys.—1982.— V. 23, N 6.— P. 1126—1130.
 83. Gedenberg J. D., Das A. Stationary Riemannian space-times with self-dual curvature // General Relativity and Gravitation.—1984.— V. 16, N 9.— P. 817—829.
 84. Iwasaki K. Scattering theory for 4-th order differential operators. I, II // Japan. Journ. of Math.—1988.— V. 14, N 1.— P. 1—97.
 85. Beals R., Coifman R. R. Scattering and inverse scattering for first order system // Comm. Pure Appl. Math.—1984.— V. 37, N 1.— P. 39—90.
 86. Saveliev M. V. Integro-differential non-linear equations and continual Lie algebras // Comm. Math. Phys.—1989.— V. 121, N 2.— P. 283—290.
 87. Saveliev M. V., Vershik A. M. Continual analogs of contragredient Lie algebras // Comm. Math. Phys.—1989.— V. 126, N 2.— P. 367—378.
 88. Новиков С. П. Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса // ДАН СССР.—1981.— Т. 260, № 1.— С. 31—34.
 89. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук.—1982.— Т. 37, № 5.— С. 3—49.
 90. Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье—Стокса // Зап. науч. семин. ЛОМИ.—1972.— Т. 27.— С. 91—114.
 91. Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье—Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи мат. наук.—1987.— Т. 42, № 6.— С. 25—60.
 92. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук.—1989.— Т. 44, № 6.— С. 29—98.

93. Euler L. Decouverte d'un nouveau principe de Mécanique // *Memoires de l'Acad.*
94. Cayley A. Sur quelques propriétés des déterminants gauches // *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*— 1846.— T. XXXII.— P. 119—123.
95. Frahm W. Ueber gewisse differentialgleichungen // *Math. Annalen.*— 1875.— Bd. 8.— P. 35—44.
96. Schottky F. Über das analytische problem der rotation eines starren körpers in raume von vier dimensionen // *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Academie der wissenschaften zu Berlin.*— 1891.— T. XIII.— P. 227—232.
97. Poincare H. Sur une forme nouvelle des equations de la Mécanique // *Comptes Rendus des seances de l'Academie des sciences.*— 1901.— T. 132.— S. 369—371.
98. Weyl H. Raum — Zeit — Materie.— Berlin: Springer Verlag, 1923.— P. 45—47.
99. Blaschke W. Nicht-Euklidische geometrie und mechanik I, II, III. *Hamburger Mathematische Einzelschriften.*— 1942.— V. 34.— P. 39.
100. Bottema O., Beth H. J. E. Euler' equations for the motion of a rigid body in n -dimensional space. *Koninklijke Nederlandse akademie van Wetenschappen. Proceedings.*— 1951.— V. 54, N 1.— P. 106—108.
101. Bottema N., Beth H. J. E. The stationary motions of a rigid body under no forces in four-dimensional space // *Koninklijke Nederlands akademie van Wetenschappen. Proceedings.*— 1951.— V. 54, N 2.— P. 123—129.
102. Arnold V. I. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // *Annales Instit. Fourier.*— 1966.— T. XVI, N 1.— P. 319—361.
103. Lagrange J. *Mécanique analytique.*— Paris, 1788.
104. Kowalewski S. V. Sur la probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Math.*— 1889.— V. 12.— P. 177—232.
105. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости.— Харьков: Тип. Дарре, 1893.
106. Steklov V. A. Sur la mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.*— 1909.— 3^e serie.— Tome I.
107. Ляпунов М. А. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // *Сообщ. Харьковск. мат. общ.*— 1893.— Т. IV, № 1.— С. 3—7.
108. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // *Труды отделения физич. наук. Общ. любит. естествознания.*— 1902.— Т. XI.— С. 10—19.
109. Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // *Труды отделения физич. наук. Общ. любит. естествознания.*— 1901.— Т. X.— С. 12—18.
110. Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // *Мат. сб.*— 1900.— Т. 21, № 3.— С. 431—438.
111. Clebsch A. Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // *Math. Annalen.*— 1871.— B. 3.— S. 238—262.

113. Brun F. Rotation kring fix punkt // Öfversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Förhadl. Stokholm.—1893.—V. 7.—P. 455—468.
114. Kötter F. Die von Steklow und Liapunov entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit // Sitzungsberichte Königlich Preussischen Akad. Wiss. Berlin.—1900.—T. 6.—S. 79—87.
115. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.—М.: Гостехиздат, 1953.
116. Berezin F. A. Models of Gross—Neveu Type // Commun. in Math. Phys.—1978.—V. 63, N 2, p. 131—154.
117. Новиков С. П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛМШ). I // Функт. анализ и его прилож.—1981.—Т. 15, № 3.—С. 54—66.
118. Новиков С. П. Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II // Функт. анализ и его прилож.—1981.—Т. 15, № 4.—С. 37—53.
119. Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik.—Königsberg, 1866.
120. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела.—Киев: Наукова думка, 1978.
121. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1974.
122. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на шестимерных алгебрах Ли // ДАН СССР.—1983.—Т. 268, № 1.—С. 11—15.
123. Богоявленский О. И. Интегралы четвертой степени для уравнений Эйлера на шестимерных алгебрах Ли // ДАН СССР.—1983.—Т. 273, № 1.—С. 15—19.
124. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР.—1983.—Т. 272, № 6.—С. 1364—1367.
125. Богоявленский О. И. Периодические решения в модели вращения пульсара // ДАН СССР.—1984.—Т. 276, № 2.—С. 343—347.
126. Богоявленский О. И. Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // ДАН СССР.—1984.—Т. 275, № 6.—С. 1359—1363.
127. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Серия мат.—1984.—Т. 48, № 5.—С. 883—938.
128. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР.—1986.—Т. 287, № 5.—С. 1105—1109.
129. Brun F. Rotation kring fix punkt. II, III // Arkiv för matem., astronomi och fysik.—1907.—Bd. 6, N 5.—P. 1—10.
130. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.—М.: Наука, 1968.
131. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.—М.: Наука, 1965.

131. Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза // Функц. анализ и его прилож.— 1974.— Т. 8, № 3.— С. 54—66.
132. Богоявленский О. И. Интегрируемые случаи вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в физических полях // Вычислительная математика и математическая физика.— М.: МГПИ.— 1985.— С. 21—24.
133. Adler M., van Moerbeke P. Completely Integrable Systems, Euclidean Lie Algebras, and Curves // Adv. in Math.— 1980.— V. 38, N 3.— P. 267—317.
134. Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian Systems, Jacobi Varieties and Representation Theory // Adv. in Math.— 1980.— V. 38, N 3.— P. 318—379.
135. Переломов А. М. Несколько замечаний об интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функц. анализ и его прилож.— 1981.— Т. 15, № 2.— С. 83—86.
136. Haine L. Geodesic Flow on $SO(4)$ and Abelian Surfaces // Mathem. Annalen.— 1983.— V. 263.— P. 435—472.
137. Baker H. F. Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators» by J. L. Burchall and T. W. Chaundy // Proc. Royal Soc. London.— 1928.— V. A118.— P. 584—593.
138. Ахизер Н. И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // ДАН СССР.— 1961.— Т. 141, № 2.— С. 263—266.
139. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии.— Т. 1, 2.— М.: Мир, 1982.
140. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела.— Варшава.: Тип. Варшавск. учебн. округа, 1910.
141. Горячев Д. Н. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Варшавск. универс. известия.— 1915.— Т. 3.— С. 3—14.
142. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшавск. универс. известия.— 1916.— Т. 3.— С. 3—15.
143. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости.— М.: Университет. тип., 1897.
144. Adler M., van Moerbeke P. Kowalewski's asymptotic method, Кас — Moody Lie algebras and regularization // Commun. Math., Phys.— 1982.— V. 86, N 1.— P. 83—106.
145. Greenhill A. G. On the general motion of a liquid ellipsoid // Proc. Cambr. Phil. Soc.— 1880.— V. IV, N 4.
146. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журнал Русского физико-химического общества, ч. физическая.— 1885.— Т. XVII, отд. 1, № 6.— С. 81—113.
147. Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bulletin astronomique.— 1910.— Т. XXVII.
148. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.— М.: Наука, 1965.
149. Рейман А. Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли // Записки науч. семинаров ЛОМИ.— Л.— 1980.— Т. 95.— С. 3—54.

150. Лунёв В. В. Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца // ДАН СССР.— 1984.— Т. 276, № 2.— С. 351—355.
151. Яхья Х. М. Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1985.— № 5.— С. 60—63.
152. Дайсон Ф., Хаар Д. Нейтронные звезды и пульсары.— М.: Мир, 1973.
153. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.— М.: Наука, 1962.
154. Куликовский А. Г. О движениях с однородной деформацией в магнитной гидродинамике // ДАН СССР.— 1958.— Т. 120, № 5.— С. 984—986.
155. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1967.
156. Bisnovatyi-Kogan G. S., Porov Ju. P., Samochin A. A. The magnetohydrodynamical rotational model of supernova explosion // Astrophys. Space Sciences.— 1976.— V. 41.— P. 321—356.
157. Bogoyavlensky O. I. Model of pulsar rotation and Euler equations on Lie algebras.— International Congress of Mathematicians.— 1982.— Warsaw. Short Communications (Abstracts).— 1983.— V. XI.— P. 27.
158. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.— М.: Наука, 1980.
159. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела.— М.: Наука, 1977.
160. Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classen revocatur // J. Reine Angew. Math.— 1859.— V. 56.— P. 46—63.
161. Dirac P. A. M. The Theory of Magnetic Poles // Physics Rev., 1948.— V. 74, N 7.— P. 817—830.
162. Веселов А. П. Уравнение Ландау — Лифшица и интегрируемые системы классической механики // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 5.— С. 1094—1097.
163. Kötter F. Veber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. I, II // J. Reine Angew. Math.— 1892.— B. 109.— S. 51—81, 89—111.
164. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.— М.: ВИНТИ.— 1985.— Т. 3.— С. 5—300.
165. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, № 2.— С. 3—56.
166. Kruskal M. Nonlinear wave equations // Lecture Notes in Physics.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag.— 1975.— V. 38.— P. 310—354.
167. Sabatier P. C. Around the classical string problem // Lecture Notes in Physics.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag.— 1980.— V. 120.— P. 85—102.
168. Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Gaudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
169. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws // Comm. Math. Phys.— 1957.— V. X.— P. 537—566.

170. Airault H., McKean H. P., Moser J. Rational and elliptic solutions of the Korteweg — de Vries equation and a related many — body problem // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1977. — V. XXX, N 1. — P. 95—148.
171. Oevel W., Fuchssteiner B. Explicit formulas for symmetries and conservation laws of the Kadomtsev — Petviashvili equation // *Phys. Lett.* — 1982. — V. 88A, N 7. — P. 323—327.
172. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. — New York: McGraw — Hill book company, 1955, V. 3.
173. Calogero F. Exactly solvable one-dimensional many-body problems // *Lett. Nuovo Cim.* — 1975. — V. 13. — P. 411—427.
174. Whitham G. B. Nonlinear dispersive waves // *Proc. Royal Soc. London.* — 1965. — A139. — P. 283—291.
175. Маслов В. П. Переход при $\hbar \rightarrow 0$ уравнения Гейзенберга в уравнение динамики одноатомного идеального газа и квантование релятивистской гидродинамики // *Теор. и мат. физика.* — 1969. — Т. 1, № 3. — С. 378—383.
176. Флорин В. А. Некоторые простейшие нелинейные задачи консолидации водонасыщенной земляной среды // *Изв. АН СССР. Отделение техн. наук.* — 1948. — № 9. — С. 1389—1397.
177. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1950. — V. 3, N 3. — P. 201—230.
178. Cole I. D. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // *Quart. Appl. Math.* — 1951. — V. 9. — P. 226—236.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
--------------------	---

Ч А С Т Ь I

ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ СОЛИТОНЫ

Глава I. Интегрируемые уравнения с аттракторами . .	11
---	----

§ 1. Алгебраическая конструкция дифференциальных уравнений с аттракторами	11
§ 2. Динамические системы с аттракторами	16
§ 3. Одномерные интегрируемые уравнения	19

Глава II. Опрокидывающиеся солитоны в двумерных интегрируемых уравнениях	26
--	----

§ 1. Двумерное интегрируемое уравнение	27
§ 2. Основная лемма	31
§ 3. Опрокидывающиеся солитоны и N -солитонные решения	38
§ 4. Второе двумерное интегрируемое уравнение	46
§ 5. О связи с уравнением Кадомцева — Петвиашвили	49
§ 6. Динамика полюсов мероморфных решений	51
§ 7. Трехмерное интегрируемое уравнение	55
§ 8. Третье двумерное интегрируемое уравнение	56
§ 9. Интегрируемая двумеризация уравнения Бюргерса и динамика особенностей	58

Глава III. Двумерное модифицированное интегрируемое уравнение	61
---	----

§ 1. Двумерное модифицированное уравнение	61
§ 2. Счетное множество законов сохранения	65
§ 3. Представление Лакса для двумерного модифицированного уравнения (1.5)	68
§ 4. Представление Лакса для двумерных уравнений (1.5) и (1.6)	70
§ 5. Представление Лакса с эрмитовым оператором L	73
§ 6. Опрокидывающиеся солитоны	74
§ 7. Эволюция данных рассеяния	77
§ 8. Интегрируемые комплексификации уравнений КдФ и МКдФ	80
§ 9. Интегрируемые расширения уравнения КдФ с оператором L четвертого порядка. Модифицированная цепочка Toda	84

Глава IV. Трехмерное комплексное интегрируемое уравнение	91
§ 1. Представление Лакса для трехмерного комплексного уравнения	91
§ 2. Опрокидывающиеся солитоны двумерных редукций	96
§ 3. Двумерное матричное уравнение, допускающее представление Лакса	98

ЧАСТЬ II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава V. Интегрируемые дискретизации уравнения Кортевега — де Фриза	101
§ 1. Интегрируемые динамические системы с квадратичной нелинейностью	101
§ 2. Интегрируемые редукции динамических систем (1.3)	108
§ 3. Интегрируемые динамические системы с произвольной степенью нелинейности	112
§ 4. Интегрируемые редукции динамических систем (3.1)	118
§ 5. Интегрируемые дискретизации второго уравнения КдФ	121
§ 6. Общие конструкции интегрируемых дискретизаций уравнения КдФ	125
Глава VI. Интегрируемое интегро-дифференциальное уравнение	130
§ 1. Интегро-дифференциальное уравнение как непрерывный предел семейства динамических систем	130
§ 2. Основные свойства интегро-дифференциального уравнения (1.3)	134
§ 3. Иерархия высших уравнений	140
Глава VII. Интегрируемые уравнения в алгебрах гладких функций и в непрерывных ассоциативных алгебрах	146
§ 1. Первые интегралы дифференциальных уравнений, связанных с автоморфизмами ассоциативных алгебр	146
§ 2. Алгебраические конструкции некоторых интегрируемых уравнений	149
§ 3. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в алгебрах функций	160
§ 4. Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения	167
§ 5. Применения к уравнениям Эйлера в прямой сумме алгебр Ли $gl(n, \mathbb{R})$ и $so(n, \mathbb{R})$	174
§ 6. Третья теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения	179
§ 7. Матричные уравнения, допускающие представление Лакса с несколькими спектральными параметрами	182
Глава VIII. Интегрируемые динамические системы, связанные с простыми алгебрами Ли	187
§ 1. Алгебраические обобщения цепочки Toda	187
§ 2. Алгебраические аналоги системы Вольтерра	191

§ 3. Интегрируемые гамильтоновы возмущения цепочки Тода и ее обобщений	199
§ 4. Представление нулевой кривизны для некоторых расширений обобщенных цепочек Тода и уравнения Сивуса Гордона	202
§ 5. Континуальные пределы цепочки Тода и ее двумеризации. Опрокидывающиеся решения	205
§ 6. Опрокидывающиеся решения в континуальных пределах систем Ферми — Паста — Улама и их двумеризаций	212

Ч А С Т Ь III

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА КОАЛГЕБРАХ ЛИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Глава IX. Уравнения Эйлера на конечномерных коалгебрах Ли, возникающие в физических задачах	217
§ 1. Классические исследования уравнений Эйлера вращения n -мерного твердого тела	218
§ 2. Уравнения Эйлера на коалгебрах Ли, связанные с динамикой твердого тела, имеющего неподвижную точку, и с движением тела в жидкости	220
§ 3. Алгебраическая и гамильтонова структура уравнений вращения спутника вокруг центра масс	226
Глава X. Интегрирование динамики произвольного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом	230
§ 1. История вопроса	230
§ 2. Интегрируемость по Лиувиллю уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижного центра масс в поле удаленных притягивающих объектов	233
§ 3. Интегрируемость по Лиувиллю уравнений поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с квадратичным потенциалом	236
§ 4. Интегрирование динамики в θ -функциях Римана	241
§ 5. Динамика симметричного твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с квадратичным потенциалом	250
§ 6. Интегрируемые случаи уравнений вращения твердого тела в нелинейных гравитационных полях	254
§ 7. Интегрируемость n -мерного аналога задачи о динамике твердого тела в ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом	256
Глава XI. Интегрируемые уравнения Эйлера на некоторых шестимерных коалгебрах Ли	260
§ 1. Уравнения Эйлера для двух классов шестимерных коалгебр Ли	260
§ 2. Интегралы I_4 четвертой степени	263
§ 3. Явное интегрирование некоторых уравнений Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$	267
§ 4. Интегралы I_4 второй степени	272

§ 5. Физические применения уравнений Эйлера на коалгебре Ли $SO(4)$	278
§ 6. Лагранжева структура уравнений Кирхгофа	284
Глава XII. Периодические решения в модели вращения пульсара	291
§ 1. Магнитогидродинамическая модель вращения пульсара	292
§ 2. Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью	294
§ 3. Первые интегралы динамической системы. Интегрируемые случаи	297
§ 4. Периодические решения	300
Дополнение. Системы гидродинамического типа, допускающие операторные представления	305
§ 1. Система гидродинамического типа, связанная с моделью Вольтерра	305
§ 2. Интегрируемое $2 + 1$ -мерное уравнение как континуальный предел систем гидродинамического типа	307
§ 3. Система гидродинамического типа, связанная с цепочкой Года	308
Список литературы	311