

П.А.М.Дирак
ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА
Статья 1950 г.

- § 1. Введение
- § 2. Сильные и слабые уравнения
- § 3. Гамильтониан
- § 4. Уравнения движения
- § 5. Однородность по скоростям
- § 6. Условия самосогласованности
- § 7. Дополнительные условия
- § 8. Преобразования гамильтоновой формы
- § 9. Гамильтониан как исходное понятие
- § 10. Приложение к релятивистской динамике
- § 11. Квантование
- § 12. Приложение

ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА
Статья 1958 г.

- § 1. ϕ -уравнения
- § 2. χ -уравнения
- § 3. Условие принадлежности первому роду
- § 4. Редукция числа степеней свободы

Canadian Journal of Mathematics
vol. 2, No. 2 (1950), pp. 129—148.

GENERALIZED HAMILTONIAN DYNAMICS²⁾

P. A. M. DIRAC St. John's College, Cambridge

§ 1. Введение

Уравнениям динамики придал общий вид Лагранж, записавший их в терминах набора обобщенных координат и скоростей. Альтернативный общий вид в терминах координат и импульсов позднее был дан Гамильтоном. Рассмотрим сравнительные достоинства этих двух форм.

В лагранжевой форме очень легко удовлетворить требованиям специальной теории относительности, просто взяв лоренц-инвариантным действие, т. е. интеграл лагранжиана по времени. Так просто сделать релятивистской гамильтонову форму нельзя.

При построении квантовой теории следует исходить из гамильтоновой формы. Имеются прочно укоренившиеся правила перехода от гамильтоновой динамики к квантовой динамике путем превращения координат и импульсов в линейные операторы. В простых случаях эти правила приводят к однозначным результатам, и хотя в сложных примерах без неоднозначностей не обходится, практическая пригодность правил установлена.

Таким образом, в настоящее время каждая из форм имеет собственную ценность, и пользоваться следует обеими. Обе формы тесно связаны. Исходя из любого лагранжиана можно ввести импульсы, и в случае, когда импульсы суть

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

²⁾ Эта работа основана на первой половине курса лекций, прочитанного на Канадском математическом семинаре в Ванкувере в августе 1949 г.

независимые функции скоростей, можно получить гамильтониан. Настоящая статья посвящена построению более общей теории, применимой и в ситуации, когда импульсы не являются независимыми функциями скоростей. Получена более общая форма гамильтоновой динамики, которую по-прежнему можно использовать для квантования и которая оказывается специально приспособленной для релятивистского описания динамических процессов.

§ 2. Сильные и слабые уравнения

Рассмотрим динамическую систему с N степенями свободы, описываемую обобщенными координатами q_n ($n = 1, 2, \dots, N$) и скоростями dq_n/dt или $\dot{q}_n$. Возьмем лагранжиан L , который пока может быть произвольной функцией координат и скоростей

$$L \equiv L(q, \dot{q}). \quad (1)$$

Определим импульсы соотношением

$$p_n = \partial L / \partial \dot{q}_n. \quad (2)$$

Для развития теории введем вариационную процедуру, варьируя каждую из величин $q_n, \dot{q}_n, p_n$ независимо на малую величину $\delta q_n, \delta \dot{q}_n, \delta p_n$ порядка ϵ и работая с точностью до ϵ . В результате такой вариации уравнение (2) нарушится, так как его левая часть будет отлична от правой на величину порядка ϵ . Теперь нам придется различать два сорта уравнений: уравнения типа (2), которые оказываются нарушенными на величину порядка ϵ после применения вариации, и уравнения, остающиеся справедливыми с точностью до ϵ под действием вариации. Уравнение (1) будет этого второго сорта, поскольку вариация L будет по определению равна вариации функции $L(q, \dot{q})$. Уравнения первого сорта мы будем называть *слабыми уравнениями* и писать их с обычным знаком равенства « $=$ », а уравнения второго будем называть *сильными уравнениями* и писать их со знаком « $\equiv$ ».

Мы имеем следующие правила, регулирующие алгебраические действия со слабыми и сильными уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{если } A \equiv 0, \quad \text{то } \delta A &= 0; \\ \text{если } X = 0, \quad \text{то } \delta X &\neq 0. \end{aligned}$$

Из слабого уравнения $X = 0$ мы можем заключить, что

$$\delta X^2 = 2X \delta X = 0,$$

так что получится сильное уравнение

$$X^2 \equiv 0.$$

Аналогично из двух слабых уравнений $X_1 = 0$ и $X_2 = 0$ мы можем вывести сильное уравнение

$$X_1 X_2 \equiv 0.$$

Может оказаться, что все N величин $\partial L / \partial \dot{q}_n$ в правой части (2) являются независимыми функциями N скоростей $\dot{q}_n$. В этом случае уравнения (2) определяют каждую $\dot{q}$ как функцию аргументов q и p . Об этом случае будем говорить как о *стандартном*, и именно его обычно рассматривают в динамической теории.

Если $\partial L / \partial \dot{q}$ не являются независимыми функциями скоростей, можно исключить $\dot{q}$ из уравнений (2) и получить одно или более уравнений

$$\varphi(q, p) = 0, \quad (3)$$

содержащих только переменные q и p . Мы можем считать уравнение (3) записанным так, что вариация меняет φ на величину порядка ε , так как если она меняет φ на величину порядка ε^k , то следует лишь заменить в (3) φ на $\varphi^{1/k}$, и желаемое условие окажется выполненным. Теперь вариация нарушает уравнение (3) на величину порядка ε , так что оно правильно пишется как слабое уравнение.

Нам потребуется использовать полный набор независимых уравнений типа (3), например:

$$\varphi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

Условие независимости означает, что ни одну из φ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных с коэффициентами, зависящими от q и p . Условие полноты означает, что любая функция аргументов q и p , обращающаяся в нуль вследствие уравнений (2) и меняющаяся при вариации на величину порядка ε , может быть представлена как линейная комбинация функций φ_m с коэффициентами, зависящими от q и p .

Мы можем следующим образом описать соотношение между сильными и слабыми уравнениями. Возьмем $3N$ -мерное пространство с координатами q , $\dot{q}$ и p . В этом пространстве найдется $2N$ -мерная область, в которой уравнения (2) удовлетворяются. Назовем ее областью R . Уравнения (4) также удовлетворяются в этой области, поскольку они следуют из (2). Рассмотрим теперь все точки $3N$ -мер-

ного пространства, которые удалены от R не далее чем на расстояния порядка ε . Они образуют $3N$ -мерную область подобную оболочке с толщиной порядка ε . Назовем ее областью R_ε . Слабое уравнение выполняется в области R , сильное уравнение выполняется в области R_ε .

§ 3. Гамильтониан

Гамильтониан H определяется соотношением

$$H \equiv p_n \dot{q}_n - L, \quad (5)$$

где подразумевается суммирование по всем значениям повторяющегося в одном члене индекса. Имеем

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta (p_n \dot{q}_n - L) = \\ &= p_n \delta \dot{q}_n + \dot{q}_n \delta p_n - (\partial L / \partial q_n) \delta q_n - (\partial L / \partial \dot{q}_n) \delta \dot{q}_n = \\ &= \dot{q}_n \delta p_n - (\partial L / \partial q_n) \delta q_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы обнаруживаем, что δH не зависит от $\delta \dot{q}_n$. Этот важный результат справедлив вне зависимости от того, стандартный у нас случай или нет.

Уравнение (5) дает определение H как функции q , $\dot{q}$ и p , справедливое во всем $3N$ -мерном пространстве q , $\dot{q}$ и p . Мы будем пользоваться этим определением только в области R_ε , а в ней справедлив, с точностью до первого порядка, результат (6). Это означает, что если мы оставим постоянными q и p и возьмем вариацию первого порядка у $\dot{q}$, вариация H будет второго порядка. Таким образом, если мы сохраним постоянными q и p и возьмем конечную вариацию у $\dot{q}$, оставаясь все время в области R_ε (что возможно, когда случай не стандартный), вариация H будет первого порядка. Если же мы остаемся в области R , вариация H будет равна нулю. Следовательно, в области R гамильтониан H является функцией только q и p . Обозначив эту функцию $\mathcal{H}(q, p)$, мы имеем слабое уравнение

$$H = \mathcal{H}(q, p), \quad (7)$$

справедливое в области R . В стандартном случае функция $\mathcal{H}$ — это обычный гамильтониан.

Отправляясь от точки в R и совершая общую вариацию, из (6) мы имеем

$$\delta (H - \mathcal{H}) = \left(\dot{q}_n - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \right) \delta p_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} \right) \delta q_n.$$

Таким образом, $\delta(H - \mathcal{H})$ зависит только от δq и δp . Если вариация такова, что мы остаемся в области R , то, конечно, $\delta(H - \mathcal{H}) = 0$. Таким образом, $\delta(H - \mathcal{H})$ обращается в нуль для любой вариации q и p такой, что можно выбрать δq сохраняющими уравнения (2). Это налагает на δq и δp единственное ограничение — чтобы они сохраняли уравнения (4), т. е. приводили к $\delta\varphi_m = 0$ для всех m . Таким образом, $\delta(H - \mathcal{H})$ равна нулю для любых величин δq , δp , которые дают $\delta\varphi_m = 0$, а следовательно, для произвольных δq , δp

$$\delta(H - \mathcal{H}) = v_m \delta\varphi_m \quad (8)$$

с подходящими коэффициентами v_m . Эти коэффициенты будут функциями q , $\dot{q}$ и p , а с помощью (2) их можно представить функциями только q и $\dot{q}$. Теперь из (8) и (4) мы получаем

$$\delta(H - \mathcal{H} - v_m \varphi_m) = \delta(H - \mathcal{H}) - v_m \delta\varphi_m - \varphi_m \delta v_m = 0$$

и, следовательно,

$$H \equiv \mathcal{H} + v_m \varphi_m. \quad (9)$$

Мы имеем здесь сильное уравнение, справедливое с точностью до первого порядка в области R , в противоположность слабому уравнению (7), справедливому только в R .

Уравнение (8) дает

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta \mathcal{H} + v_m \delta\varphi_m = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} \delta q_n + v_m \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n} \delta q_n \right). \end{aligned}$$

Сравнивая это с (6), мы получаем

$$\dot{q}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \quad (11)$$

Уравнения (10) выражают $\dot{q}$ через q , p и v , (10) и (11) показывают, что $2N$ переменных q_n , $\dot{q}_n$ можно выразить через $2N + M$ переменных q_n , p_n , v_m . Между этими $2N + M$ переменными имеется M соотношений (4). Любых других соотношений между этими переменными быть не может, иначе $2N$ переменных q_n , $\dot{q}_n$ не были бы независимыми. Таким образом, каждая из v не должна зависеть от q , p и остальных v . Сами v можно считать переменными типа

скорости, служащими для фиксации тех $\dot{q}$, которые нельзя выразить через q и p .

Работая с гамильтоновой формой динамики, мы используем в качестве основных переменные q , p и v , которые предполагаются связанными некоторыми соотношениями (4), а в остальном — независимыми. Мы будем называть их *гамильтоновыми переменными*.

§ 4. Уравнения движения

Обычные лагранжевы уравнения движения мы считаем слабыми уравнениями

$$\dot{p}_n = \partial L / \partial q_n. \quad (12)$$

Подставляя в (12) значения p из (2), мы получаем уравнения, содержащие ускорения $\ddot{q}_n$. В стандартном случае эти уравнения определяют все $\ddot{q}$ как функции q и $\dot{q}$. В случае с M уравнениями (4) уравнения движения дадут нам только $N - M$ уравнений для $\ddot{q}$. Остающиеся M уравнений движения покажут нам, как меняются со временем φ_m . Для самосогласованности φ_m должны остаться нулями. Эти условия самосогласованности будут исследованы позднее.

С помощью (11) уравнения движения (12) принимают вид

$$\dot{p}_n = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} - v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \quad (13)$$

Уравнения (13) вместе с (10) образуют гамильтоновы уравнения движения. Их задают функция $\mathcal{H}$ и уравнения $\varphi_m = 0$. Гамильтоновы уравнения движения выражают $\dot{q}$ и $\dot{p}$ через гамильтоновы переменные q , p , v . Они не дают прямой информации о $\dot{v}$, но исследование условий самосогласованности даст нам некоторую косвенную информацию.

Гамильтоновы уравнения движения выглядят проще, если воспользоваться понятием скобки Пуассона (СП). Для любых двух функций ξ и η аргументов q и p СП $[\xi, \eta]$ определяется соотношением

$$[\xi, \eta] \equiv \frac{\partial \xi}{\partial q_n} \frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n} \frac{\partial \eta}{\partial q_n}. \quad (14)$$

Легко проверить, что СП остается инвариантной относительно такого преобразования к новым q и p , при котором новые q — любые независимые функции первоначаль-

ных q , а новые p определяются новыми уравнениями (2) с L , выраженным через новые q и их производные по времени. СП приобретает свое значение благодаря этому свойству инвариантности.

СП обладает следующими свойствами, легко проверяемыми из определения:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= -[\eta, \xi], \\ [\xi, f(\eta_1, \eta_2, \dots)] &= \frac{\partial f}{\partial \eta_1} [\xi, \eta_1] + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} [\xi, \eta_2] + \dots, \quad (15) \\ [\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] &= 0. \end{aligned}$$

Во втором из этих свойств f —любая функция набора величин $\eta_1, \eta_2, \dots$, каждая из которых зависит от q и p . Третье свойство, называемое тождеством Пуассона¹⁾, справедливо для любых трех функций ξ, η, ζ , зависящих от q и p .

Желательно расширить понятие СП на функции, зависящие от скоростей $\dot{q}$, которые нельзя выразить только через q и p . Мы примем, что эти более общие СП обладают свойствами (15), а в остальном произвольны. Напротив, мы можем предположить, что $\dot{q}$ произвольным образом зависят от q и p , а свойства (15) тогда можно вывести для ξ, η и ζ , зависящих и от $\dot{q}$.

Из сильного уравнения $A \equiv 0$ мы можем вывести слабые уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial q_n} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \dot{q}_n} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial p_n} = 0$$

и, следовательно, с использованием второго из свойств (15)

$$[\xi, A] = 0$$

для любой ξ . Может оказаться, что $[\xi, A] \equiv 0$ (например, когда $A \equiv 0$ по определению), но в общем случае это не так. Из слабого уравнения $X = 0$ не следует общего заключения, что $[\xi, X] = 0$.

Если g —любая функция q и p , из (10) и (13) мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \frac{\partial g}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_n} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n} \right) = \\ &= [g, \mathcal{H}] + v_m [g, \varphi_m]. \quad (16) \end{aligned}$$

¹⁾ В нашей литературе это тождество обычно называют тождеством Якоби.— *Примеч. пер.*

Это — общее гамильтоново уравнение движения. С помощью (4) его можно переписать в виде

$$\dot{g} = [g, \mathcal{H}] + v_m [g, \varphi_m] + [g, v_m] \varphi_m = [g, H], \quad (17)$$

в точности совпадающем с обычным гамильтоновым уравнением движения, записанным через СП.

§ 5. Однородность по скоростям

Теория принимает особенно простой вид в случае, когда лагранжиан однороден первой степени по скоростям. Тогда определяемые соотношением (2) импульсы однородны нулевой степени по $\dot{q}$ и зависят поэтому только от отношений $\dot{q}$. Поскольку имеется N импульсов p и только $N-1$ независимых отношений $\dot{q}$, теперь p не могут быть независимыми функциями $\dot{q}$, и должно существовать хотя бы одно соотношение (4), связывающее q и p . Случай, когда имеется только одно соотношение между q и p , можно считать теперь стандартным.

Из теоремы Эйлера мы имеем

$$L \equiv \dot{q}_n \partial L / \partial \dot{q}_n \quad (18)$$

и, следовательно,

$$L = \dot{q}_n p_n,$$

так что

$$H = 0. \quad (19)$$

Это слабое уравнение, справедливое в области R , позволяет нам взять $\mathcal{H} \equiv 0$, так что (9) переходит в

$$H \equiv v_m \varphi_m. \quad (20)$$

Общее уравнение движения (16) теперь имеет вид

$$\dot{g} = v_m [g, \varphi_m]. \quad (21)$$

Гамильтоновы уравнения движения полностью фиксированы теперь уравнениями $\varphi_m = 0$.

Правая часть уравнения (21) однородна по v . Взяв любое решение уравнений движения, можно получить из него другое решение, домножив все v на множитель γ , произвольно меняющийся со временем. Скорость изменения всех динамических переменных в новом решении будет домножена на γ . Новое решение получится из предыдущего, если время t заменить новой независимой переменной τ такой, что $dt/d\tau = \gamma$. Новая независимая переменная совер-

шенно произвольна: она может быть любой функцией t , а также q и $\dot{q}$. Итак, взяв любое решение уравнений движения, мы можем получить из него другое решение, заменив t произвольной τ , так что *уравнения движения не дают нам никакой информации о независимой переменной*. В этом состоит важная черта динамической теории с однородностью по скоростям, предоставляющая особые удобства для релятивистской формулировки.

Лагранжиану любой динамической системы можно придать однородность по скоростям, взяв время t дополнительной координатой q_0 и воспользовавшись уравнением $\dot{q}_0 = 1$, чтобы добиться однородности первой степени по всем скоростям, включая $\dot{q}_0$. Как было показано автором [1]¹⁾, после этого можно вывести новые лагранжевы уравнения движения для всех q . Так мы можем получить новую формулировку в «однородных скоростях» для общей динамической системы. Новая формулировка даст все уравнения старой, за исключением уравнения $\dot{q}_0 = 1$. Если в новой формулировке желательно его иметь, мы можем считать его дополнительным условием, не выводимым из уравнений движения, но согласованным с ними. Однако мы вполне можем обойтись и без него, так как его роль сводится лишь к фиксации независимой переменной, которая без этого в «однородной» формулировке была бы произвольной.

Таким образом, мы можем без потери общности ограничиться теорией с однородностью по скоростям. Поскольку она приводит к несколько более простым уравнениям, в дальнейшем мы и сделаем это. Точка будет обозначать дифференцирование по произвольной независимой переменной τ .

§ 6. Условия самосогласованности

Для самосогласованности уравнения движения должны сохранять нулем каждую из φ_m . Таким образом, подставив φ_m вместо g в (21), мы получаем

$$v_m [\varphi_m, \varphi_m] = 0. \quad (22)$$

Предположим, что уравнения (22) приведены к наиболее простому виду с помощью набора уравнений (4). При этом допускается сокращение множителей, когда их можно считать не обращающимися в нуль. Получившиеся уравнения должны быть одного из четырех типов.

¹⁾ Здесь ссылки приведены в конце статьи.— *Примеч. пер.*

Тип 1. Уравнение содержит некоторые из переменных v .

Тип 2. Уравнение не зависит от v , но содержит некоторые из переменных p и q . Таким образом, оно имеет вид

$$\chi(q, p) = 0 \quad (23)$$

и не зависит от уравнений (4).

Тип 3. Уравнение сводится к $0 = 0$.

Тип 4. Уравнение сводится к $1 = 0$.

Уравнение типа 2 приводит к новому условию самосогласованности, так как χ должна сохранять нулевое значение. Подставив в (21) χ вместо g , мы получаем

$$v_m [\chi, \varphi_m] = 0. \quad (24)$$

Это уравнение, приведенное к наиболее простому виду с помощью уравнений (4) и уже имеющихся уравнений (23), снова будет одного из четырех типов. Будучи уравнением типа 2, оно приведет еще к одному новому условию самосогласованности. Эта процедура продолжается для каждого уравнения типа 2, пока она не приведет к уравнению другого типа.

Если одно из полученных таким образом уравнений — типа 4, то уравнения движения противоречивы. Этот случай не представляет никакого интереса и в дальнейшем не рассматривается. Уравнения типа 3 удовлетворяются автоматически. В итоге в нашей теории остаются уравнения типов 1 и 2.

Обозначим полный набор уравнений типа 2:

$$\chi_k(q, p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (25)$$

Мы можем полагать, что функции χ_k , подобно φ_m в (4), выбраны так, что их вариации порядка ε . Тогда уравнения (25) корректно записываются как слабые уравнения. Эти новые слабые уравнения сужают область R , в которой слабые уравнения справедливы, понижая ее размерность до $2N - K$. Окажется суженной и область R_ε , так как теперь она будет состоять из точек, удаленных не более чем на расстояния порядка ε от новой области R .

Для изучения уравнений типа 1 удобно ввести некоторые новые понятия. Назовем одну из величин φ_m величиной *первого рода* (*first class* φ), если ее СП со всеми φ и χ обращаются в нуль. Таким образом, φ_m — первого рода, если

$$\begin{aligned} [\varphi_m, \varphi_m] &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ [\varphi_m, \chi_k] &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (26)$$

Эти уравнения обязаны удовлетворяться только в слабом смысле, т. е. только как следствия уравнений $\varphi_m = 0$, $\chi_k = 0$. Таким образом, каждая из левых частей (26) должна равняться в сильном смысле некоторой линейной комбинации φ_m и χ_k . Величину φ , не удовлетворяющую всем этим условиям, мы называем величиной *второго рода* (*second class* φ).

Мы можем подвергнуть величины φ линейному преобразованию вида

$$\varphi_m^* = \gamma_{mm'} \varphi_{m'}, \quad (27)$$

где γ — любые функции q и p такие, что их детерминант не обращается в нуль в слабом смысле. Тогда для всех целей теории величины φ и φ^* эквивалентны.

Прделаем преобразование такого типа с тем, чтобы обратить в величины первого рода как можно больше φ . Получившиеся тогда φ первого рода обозначим φ_α , а φ второго рода — φ_β , где $\beta = 1, 2, \dots, B$, и $\alpha = B + 1, B + 2, \dots, M$.

Если $\varphi_{m'}$ — первого рода, то уравнение (22) удовлетворяется автоматически. Далее, в уравнениях (22) и (24) мы можем оставить только φ_m второго рода, поскольку φ_m первого рода дают нулевой вклад. Таким образом, в уравнениях (22) и (24) выживают только члены

$$\begin{aligned} v_\beta [\varphi_\beta, \varphi_{\beta'}] &= 0, \quad \beta, \beta' = 1, 2, \dots, B, \\ v_\beta [\varphi_\beta, \chi_k] &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (28)$$

Это и есть все уравнения типа 1. Они показывают, что либо все v_β обращаются в нуль, либо матрица

$$\begin{vmatrix} 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_B] & [\varphi_1, \chi_1] & \dots & [\varphi_1, \chi_K] \\ [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_B] & [\varphi_2, \chi_1] & \dots & [\varphi_2, \chi_K] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\varphi_B, \varphi_1] & [\varphi_B, \varphi_2] & \dots & 0 & [\varphi_B, \chi_1] & \dots & [\varphi_B, \chi_K] \end{vmatrix} \quad (29)$$

имеет ранг, меньший B (в слабом смысле).

Сейчас будет показано, что реализуется первая из альтернативных возможностей. Предположим, что матрица (29) имеет ранг $U < B$.

Образуем детерминант

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_U] \\ \varphi_2 & [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_U] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{U+1} & [\varphi_{U+1}, \varphi_1] & [\varphi_{U+1}, \varphi_2] & \dots & [\varphi_{U+1}, \varphi_U] \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Он — линейная комбинация φ_β и поэтому обращается в нуль в слабом смысле. СП любой величины f с D равна

сумме детерминантов, образованных взятием СП каждого из столбцов (30) с f . За исключением детерминанта с СП первого столбца с f , все они обращаются в нуль в слабом смысле, поскольку все элементы их первого столбца — нули в слабом смысле. Таким образом,

$$[D, f] = \begin{vmatrix} [\varphi_1, f] & 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_U] \\ [\varphi_2, f] & [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_U] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [\varphi_{U+1}, f] & [\varphi_{U+1}, \varphi_1] & [\varphi_{U+1}, \varphi_2] & \dots & [\varphi_{U+1}, \varphi_U] \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Если взять в качестве f любую из φ_α , первый столбец в (31) обращается в нуль, и поэтому $[D, \varphi_\alpha] = 0$. Если взять в качестве f любую из φ_β или χ , то либо детерминант (31) имеет два одинаковых столбца и поэтому обращается в нуль, либо он есть минор матрицы (29) с $U+1$ строками и столбцами и обращается в нуль, поскольку ранг этой матрицы по предположению равен U . Таким образом, D имеет нулевую СП со всеми φ и χ .

Может оказаться, что D обращается в нуль в сильном смысле — из-за того, что обращаются в нуль в слабом смысле алгебраические дополнения всех элементов его первого столбца. В этом случае мы возьмем другой детерминант D , со столбцами помимо первого, отвечающими любым U столбцам (29), и строками, отвечающими любым $U+1$ строкам (29). Благодаря предположению, что (29) имеет ранг U , мы всегда можем выбрать такой детерминант D , что не все алгебраические дополнения элементов его первого столбца обращаются в нуль. Таким образом, мы получаем D , являющийся величиной первого рода и одновременно линейной комбинацией φ_i . Это противоречит предположению, что ранее мы сделали величинами первого рода максимально возможное число φ .

Мы можем заключить, что если мы сделали величинами первого рода максимально возможное количество φ , то обращаются в нуль все v , ассоциированные с φ второго рода. Тогда гамильтониан (20) сводится к

$$H \equiv v_\alpha \varphi_\alpha, \quad (32)$$

а общее уравнение движения (21) приобретает вид

$$\dot{g} = v_\alpha [g, \varphi_\alpha]. \quad (33)$$

Обращение в нуль v_β и уравнения (25) гарантируют, что все условия согласованности удовлетворяются; v_α остаются полностью неопределенными. Каждый из них дает начало свободе в движении — произвольной функции

в общем решении уравнений движения. В стандартном случае имеется в точности одна φ , которая с необходимостью — первого рода, и поэтому имеется одна произвольная функция в общем решении уравнений движения. Это связано с произволом в независимой переменной t .

§ 7. Дополнительные условия

Имея дело с конкретной динамической системой, мы можем пожелать, чтобы координаты и скорости подчинялись уравнениям, добавочным к уравнениям движения, которые следуют из лагранжиана. Такие дополнительные условия должны вводиться в теорию как еще одни слабые уравнения.

С помощью уравнений (10) (с $\mathcal{H} \equiv 0$) дополнительные условия можно записать как соотношения между q , p и v . Они могут привести к уравнениям только между q и p . Такие уравнения следует трактовать как новые χ -уравнения и присоединить к набору (25). Они приведут к новым условиям согласованности, с которыми следует обращаться так же, как и с предыдущими, и это может дать следующие новые χ -уравнения. φ {первого рода следует теперь определять как имеющие нулевые СП и с этими новыми χ , так что дополнительные условия могут понизить число связей φ первого рода. Тогда это вызовет снижение числа степеней свободы.

Те из дополнительных условий, которые не дают χ -уравнений, дадут условия на переменные v . Как правило, эти последние условия будут более сложного вида, чем просто требования обращения в нуль некоторых v , как это всегда было с условиями на v , следовавшими из условий согласованности. Они приведут к дальнейшему снижению числа степеней свободы, понизив его до величины, меньшей числа φ первого рода.

§ 8. Преобразования гамильтоновой формы

Возьмем набор зависящих от q и p функций θ_s ($s = 1, 2, \dots, S$) таких, что детерминант

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & [\theta_1, \theta_2] & [\theta_1, \theta_3] & \dots & [\theta_1, \theta_S] \\ [\theta_2, \theta_1] & 0 & [\theta_2, \theta_3] & \dots & [\theta_2, \theta_S] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\theta_S, \theta_1] & [\theta_S, \theta_2] & [\theta_S, \theta_3] & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (34)$$

не обращается в нуль в слабом смысле. Это значит, что S должно быть четным. Пусть $c_{ss'}$ обозначает алгебраиче-

ское дополнение $[\theta_s, \theta_{s'}]$, деленное на Δ , так что

$$c_{ss'} \equiv -c_{s's}$$

и

$$c_{s's} [\theta_{s'}, \theta_{s''}] \equiv \delta_{ss''}. \quad (35)$$

Тогда для любых двух величин ξ и η мы можем определить новую СП $[\xi, \eta]^*$ формулой

$$[\xi, \eta]^* \equiv [\xi, \eta] + [\xi, \theta_s] c_{ss'} [\theta_{s'}, \eta]. \quad (36)$$

Легко видеть, что новая СП обладает первыми двумя из свойств (15), а в справедливости третьего, тождества Пуассона, убеждает прямая выкладка (см. Приложение, § 12). Новая СП дает для любой ξ :

$$\begin{aligned} [\xi, \theta_s]^* &\equiv [\xi, \theta_s] + [\xi, \theta_{s'}] c_{s's''} [\theta_{s''}, \theta_s] \equiv \\ &\equiv [\xi, \theta_s] - [\xi, \theta_{s'}] \delta_{s's} \equiv 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Чтобы понять значение новых СП, возьмем случай, когда набор θ состоит из $1/2 S$ координат q и сопряженных им импульсов p . Тогда мы видим, что новая СП получается вычеркиванием из суммы по n в определении (14) всех членов, содержащих производные по этим q и p . Таким образом, новая СП относится к системе с $N - 1/2 S$ степенями свободы. Взяв в качестве θ не в точности некоторые q и p , а любые независимые функции этих q и p , мы получаем ту же самую новую СП. Для таких общих θ новые СП по-прежнему будут относиться к системе с $N - 1/2 S$ степенями свободы, но редукция числа степеней свободы более сложна и не сводится к простому вычеркиванию некоторых q и p .

Предположим, что в качестве θ выступают все φ или χ (φ должны быть второго рода, так как иначе $\Delta = 0$). Тогда мы имеем $[\theta_s, H] = 0$ для всех s , и, следовательно,

$$[g, H]^* = [g, H] = \dot{g}, \quad (38)$$

где g — любая функция q и p . Таким образом, с помощью новой СП можно записывать гамильтоновы уравнения движения. Таким путем мы получаем новую форму уравнений движения, более простую, поскольку эффективное число степеней свободы понизилось.

Теперь каждая из θ обращается в нуль в слабом смысле. Работая только с новыми СП, мы без риска вступить в противоречие можем полагать, что каждая из θ обращается в нуль в сильном смысле, потому что согласно (37) обращается в нуль новая СП θ с чем угодно,

Тогда мы можем использовать сильные уравнения $\theta_s \equiv 0$, чтобы упростить гамильтониан.

Назовем χ величиной первого рода, если она имеет нулевую СП со всеми φ и χ , и величиной второго рода в противном случае. Мы можем проделать над χ линейное преобразование вида

$$\chi_k^* = \gamma_{kk'} \chi_{k'} + \gamma'_{km} \varphi_m, \quad (39)$$

где γ и γ' — любые функции q и p такие, что детерминант γ не обращается в нуль в слабом смысле; тогда новые χ^* эквивалентны старым для всех целей теории. Проведем преобразование такого типа с тем, чтобы обратить в величины первого рода как можно больше χ , и получившиеся тогда χ первого рода обозначим χ_α , а второго рода — χ_β .

Мы можем взять в качестве θ все φ_β и χ_β . Тогда детерминант Δ не обращается в нуль. Доказательство этого факта аналогично доказательству того, что ранг матрицы (29) равен B : предположив, что Δ имеет ранг $T < S$, и построив детерминант вида

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & 0 & [\theta_1, \theta_2] & \dots & [\theta_1, \theta_T] \\ \theta_2 & [\theta_2, \theta_1] & 0 & \dots & [\theta_2, \theta_T] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{T+1} & [\theta_{T+1}, \theta_1] & [\theta_{T+1}, \theta_2] & \dots & [\theta_{T+1}, \theta_T] \end{vmatrix}, \quad (40)$$

следует убедиться, что Δ является величиной первого рода по отношению к φ и χ и одновременно — линейной комбинацией φ_β и χ_β , так что это противоречит предположению, что величинами первого рода сделано максимальное число φ и χ .

Такой выбор θ дает максимальное в описанном методе упрощение гамильтоновых уравнений движения. Мы получаем новую схему, в которой все уравнения для φ_β и χ_β сильные. Мы можем использовать эти уравнения для полного исключения из теории некоторых q и p .

Вид новой схемы неоднозначен, поскольку неоднозначны φ_β и χ_β . Просто заменив φ_β и χ_β линейными комбинациями их самих, мы не изменим окончательного вида. Однако мы можем добавить к φ_β любые линейные комбинации φ_α , а к χ_β — любые линейные комбинации φ_α и χ_α . Это не изменит Δ или $c_{ss'}$, но, вообще говоря, изменит $[\xi, \eta]^*$, так что вид гамильтоновой схемы внешне изменится. Конечно, внешне отличающиеся схемы должны быть эквивалентны, поскольку все они дают одни и те же уравнения движения.

В качестве применения описанного метода рассмотрим случай, когда лагранжиан не содержит некоторых скоростей. Предположим, что L не содержит $\dot{q}_j$ ($j=1, 2, \dots, J < N$). Тогда каждый p_j в слабом смысле равен нулю, а в сильном — ф. Предположим, что ни одна линейная комбинация p_j не является величиной первого рода. Тогда мы можем считать, что p_j суть φ_β . Возьмем теперь в качестве половины набора θ эти p_j , а в качестве другой половины — подходящие φ или χ второго рода, так, чтобы Δ не обращался в нуль. Эти другие θ назовем θ_j . Легко видеть, что при таком выборе θ именно новые СП и получились бы применением определения (14) к тем степеням свободы, для которых из числа q исключены q_j , причем каждый p_j считается сильно равным нулю, а каждая q_j — сильно равной функции остальных q и p , заданной уравнениями $\theta_j \equiv 0$. Таким путем мы получаем новую гамильтонову схему (не обязательно максимально упрощенную, поскольку могут существовать другие φ_β и χ_β , не включенные в число θ), в которой q_j и p_j не появляются как независимые динамические переменные.

Новую схему можно было бы получить и более прямым путем, с самого начала не считая q_j координатами и вообще не вводя сопряженных им импульсов. Посмотрим, какие модификации внесло бы это в развитие теории.

Обозначим через n те и только те значения индексов, для которых q не есть q_j , т. е. значения $J+1, J+2, \dots, N$. Тогда уравнения (2) и (5) остаются в силе, а уравнение (6) следует заменить на

$$\delta H = \dot{q}_n \delta p_n - \partial L / \partial q_n \cdot \delta q_n - \partial L / \partial q_j \cdot \delta q_j, \quad (41)$$

поскольку мы допускаем варьирование q_j . Уравнения

$$\partial L / \partial q_j = 0 \quad (42)$$

мы можем считать при этом дополнительными условиями. Тогда уравнение (41) сводится просто к (6). Мы можем заключить, что H имеет вид (20), где φ_m зависят от q_n и p_n , не зависят от q_j и обращаются в нуль как следствие уравнений (2). В дальнейшем теорию можно развивать, как и ранее, в терминах φ и χ , не зависящих от q_j . Те же из уравнений для φ и χ , которые содержат q_j , можно считать определяющими q_j через другие переменные, и в дальнейшем они не играют в теории никакой роли.

В такой форме теории мы имеем лагранжиан, содержащий зависящие от импульсов переменные q_j . Появление импульсных переменных в лагранжиане аналогично появлению скоростей v_α в гамильтониане.

§ 9. Гамильтониан как исходное понятие

Вместо того, чтобы начинать с лагранжиана и получать из него гамильтониан, можно начинать с гамильтониана. Мы полагаем, что имеются некоторые динамические переменные q_n и p_n ($n=1, 2, \dots, N$) и, возможно, другие динамические переменные, между которыми определены СП, обладающие свойствами (15), и что их связывают некоторые слабые уравнения в качестве φ -уравнений. На таком пути нет оснований различать φ и χ . По крайней мере, одна из φ должна быть первого рода, т. е. иметь нулевые СП со всеми φ , иначе не будет непротиворечивого движения. Предположим затем, что гамильтониан есть линейная комбинация φ_α (φ первого рода) с новыми переменными v_α в качестве коэффициентов, а гамильтоновы уравнения движения имеют вид (17) или (33). Сами v могут быть произвольными функциями независимой переменной τ .

Прежнюю схему уравнений движения, выведенных из лагранжиана и включающих как φ , так, возможно, и χ , следует считать примером настоящей схемы, в котором некоторые из v обращены в нуль дополнительными условиями. Тогда φ_α , отвечающие этим v_α , суть χ первого рода в прежней схеме. Такие дополнительные условия, да и любые дополнительные условия, содержащие v , ничего не дают в применениях теории к релятивистской динамике, рассматриваемых в следующем разделе, и не могут быть перенесены в квантовую теорию, так что в дальнейшем они исключаются. Дополнительные же условия, не содержащие v , суть в точности φ -уравнения.

СП двух φ первого рода есть φ первого рода, в чем можно убедиться следующим образом. СП $[\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'}]$ слабо обращается в нуль и поэтому в сильном смысле равна линейной комбинации φ —единственных величин, слабо равных нулю в настоящей схеме. Мы должны показать, что ее СП с любой φ слабо равна нулю. Из тождества Пуассона:

$$[\varphi, [\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'}]] \equiv [[\varphi, \varphi_\alpha], \varphi_{\alpha'}] - [[\varphi, \varphi_{\alpha'}], \varphi_\alpha]. \quad (43)$$

Поскольку φ_α —первого рода, $[\varphi, \varphi_\alpha]$ слабо равна нулю

и потому в сильном смысле есть линейная комбинация φ , откуда ее СП с $\varphi_{\alpha'}$ первого рода слабо обращается в нуль. Аналогично слабо обращается в нуль второй член в правой части (43), и необходимый результат доказан.

Предположим, что имеется A независимых φ первого рода и M всех независимых φ . В фазовом пространстве ($2N$ -мерном пространстве переменных q_n и p_n) имеется $(2N - M)$ -мерное подпространство, в котором выполнены все φ -уравнения. Назовем его $(2N - M)$ -пространством. Состояние динамической системы при данном значении t фиксируется заданием переменных q и p , удовлетворяющих всем φ -уравнениям, т. е. представляется точкой P в $(2N - M)$ -пространстве. Движение системы, исходным для которого является это состояние, представляется в $(2N - M)$ -пространстве кривой с началом в P . Благодаря произвольности A переменных v_{α} эта кривая может уходить в любом направлении в малом пространстве A измерений, охватывающем P . Для каждой точки $(2N - M)$ -пространства имеется такое малое A -мерное охватывающее пространство. Покажем теперь, что эти малые пространства интегрируемы.

Предположим, что в интервале времени $\delta t = \varepsilon_1$ обращаются в нуль все v , за исключением $v_{\alpha'}$, равной 1, в следующем интервале $\delta t = \varepsilon_2$ — все v , за исключением $v_{\alpha''}$, также равной 1. Тогда любая функция g , зависящая от q и p , в конце первого интервала переходит в

$$g + \varepsilon_1 [g, \varphi_{\alpha'}].$$

В конце второго интервала, с учетом членов порядка $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, но в пренебрежении членами порядка ε_1^2 и ε_2^2 , она переходит в

$$g + \varepsilon_1 [g, \varphi_{\alpha'}] + \varepsilon_2 [g + \varepsilon_1 [g, \varphi_{\alpha'}], \varphi_{\alpha''}]. \quad (44)$$

Если эти два движения совершаются в обратной последовательности, g переходит в

$$g + \varepsilon_2 [g, \varphi_{\alpha''}] + \varepsilon_1 [g + \varepsilon_2 [g, \varphi_{\alpha''}], \varphi_{\alpha'}]. \quad (45)$$

Разность между (44) и (45) благодаря тождеству Пуассона равна

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 [g, [\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\alpha''}]]. \quad (46)$$

Выше было показано, что $[\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\alpha''}]$ есть φ первого рода, так что (46) есть возможное изменение g , описываемое уравнениями движения при подходящем выборе v и по-

этому отвечающее повороту в малом A -мерном пространстве вокруг начальной точки. Это и есть условие интегрируемости.

Если в дополнительные условия войдут v , эта интегрируемость может подпортиться. Таким образом, для выведенных из лагранжиана уравнений движения интегрируемость не обязательно имеет место.

Объединение малых пространств образует набор лежащих в $(2N - M)$ -пространстве A -мерных пространств таких, что движение всегда происходит только в одном из них. Назовем эти пространства A -пространствами. Каждая кривая в A -пространстве представляет возможное решение уравнений движения. Каждая точка $(2N - M)$ -пространства лежит в некотором A -пространстве, содержащем все начинающиеся в этой точке траектории. Полным решением уравнений движения допустимо считать само A -пространство, а не кривую общего положения в нем.

Точку данного A -пространства можно фиксировать A координатами, каждая из которых есть некоторая функция q и p . Обозначим эти координаты t_a ($a = 1, 2, \dots, A$). Они будут играть роль временных переменных. Само A -пространство можно описать, задав зависимость всех q и p от t_a . Если g есть любая из q и p или их функция, мы имеем

$$\dot{g} = \dot{t}_a \partial g / \partial t_a, \quad (47)$$

поскольку зависимость g от τ можно считать порожденной зависимостью t_a от τ . Используя гамильтоновы уравнения движения (33) для $\dot{g}$ и $\dot{t}_a$, мы получаем

$$v_\alpha [g, \varphi_\alpha] = v_\alpha [t_a, \varphi_\alpha] \partial g / \partial t_a.$$

Это уравнение выполняется для произвольных v_α , так что

$$[g, \varphi_\alpha] = [t_a, \varphi_\alpha] \partial g / \partial t_a. \quad (48)$$

Уравнения (48) можно считать общими уравнениями движения, фиксирующими A -пространство. В теории с однородностью по скоростям именно они наиболее похожи на обычные гамильтоновы уравнения движения. Если $A = 1$, то мы можем взять в качестве времени единственную переменную t_a , и (48) сведется в точности к обычным гамильтоновым уравнениям движения.

Чтобы перейти от гамильтониана к лагранжиану, мы введем скорости $\dot{q}_n$ уравнениями

$$\dot{q}_n = v_\alpha \partial \varphi_\alpha / \partial p_n, \quad (49)$$

а затем определим L :

$$L \equiv p_n \dot{q}_n - H \equiv p_n \dot{q}_n - v_\alpha \varphi_\alpha. \quad (50)$$

Это задает L как функцию q , $\dot{q}$, p и v , причем линейную по $\dot{q}$ и v . Взяв независимые вариации δq , $\delta \dot{q}$, δp , δv , мы получаем

$$\begin{aligned} \delta L = \dot{q}_n \delta p_n + p_n \delta \dot{q}_n - \varphi_\alpha \delta v_\alpha - v_\alpha (\partial \varphi_\alpha / \partial q_n \cdot \delta q_n + \partial \varphi_\alpha / \partial p_n \cdot \delta p_n) = \\ = p_n \delta \dot{q}_n - v_\alpha \partial \varphi_\alpha / \partial q_n \cdot \delta q_n. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, δL не зависит от δp_n и δv_n . Этот результат следует сопоставить с (6).

Если уравнения (49) вместе с ф-уравнениями выражают $\dot{q}$ как независимые функции p и v , позволяя тем самым считать p и v функциями q и $\dot{q}$, то (51) показывает, что L есть функция только q и $\dot{q}$ в сильном смысле. Эта функция должна быть однородной первой степени по $\dot{q}$. Ее частные производные по q и $\dot{q}$ дают

$$\begin{aligned} \partial L / \partial \dot{q}_n &= p_n, \\ \partial L / \partial q_n &= -v_\alpha \partial \varphi_\alpha / \partial q_n = \dot{p}_n. \end{aligned} \quad (52)$$

Это обычные лагранжевы уравнения.

Если уравнения (49) вместе с ф-уравнениями не выражают $\dot{q}$ как независимые функции p и v , то они приводят к некоторым соотношениям, связывающим только q и $\dot{q}$, скажем,

$$R_j(q, \dot{q}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (53)$$

R_j однородны по $\dot{q}$, и мы выбираем их так, чтобы однородность была первой степени. Дальнейшие действия аналогичны методу § 3, но с взаимной переменой ролей у p и $\dot{q}$. Мы получаем аналогичный (9) результат

$$L \equiv \mathcal{L} + \lambda_j R_j, \quad (54)$$

где $\mathcal{L}$ зависит только от q и $\dot{q}$ и должен быть однородным первой степени по $\dot{q}$, а коэффициенты λ_j зависят от q , p и v .

Если λ считать независимыми переменными при частном дифференцировании L , а L тогда однороден первой степени по $\dot{q}$, мы возвращаемся к уравнениям (52). Таким образом, мы имеем лагранжиан, содержащий импульс-

ные переменные; нечто подобное обсуждалось в конце предыдущего раздела, причем тогдашние $\dot{q}_j$ отвечают теперешним λ_j , а дополнительные условия (42)—уравнениям (53).

§ 10. Приложение к релятивистской динамике

В обычной нерелятивистской динамике работают с состояниями динамической системы в данный момент времени, причем это состояние характеризуется заданием значений q и p . Имеются уравнения движения, позволяющие по состоянию в один момент времени вычислить состояние в другой момент. Гамильтонова форма этих уравнений движения в случае однородности по скоростям требует только одной φ первого рода.

Чтобы получить динамическую теорию, удовлетворяющую частному принципу относительности, мы должны построить схему уравнений, равно применимых для наблюдателей со всеми скоростями. Если мы работаем с мгновеньями¹⁾, мы должны охватить мгновенья относительно всех наблюдателей. Тогда мгновение—это любая плоская трехмерная поверхность в пространстве-времени, нормаль к которой лежит внутри светового конуса. Чтобы описать общее мгновение, нужны четыре параметра—три для фиксации направления нормали (скорости наблюдателя) и четвертый, чтобы различить разные мгновенья для одного наблюдателя.

Включая понятие мгновений, релятивистская динамика должна позволять по заданному состоянию в любое из этих мгновений вычислять состояние в любое другое. Мы должны располагать уравнениями движения, показывающими, как меняются динамические переменные с изменением этих мгновений. Мы должны допустить произвольные изменения мгновений—как трансляции в пространстве-времени, так и изменения в направлении нормали, и все это должны суметь описать уравнения движения. Таким образом, нам нужны четыре φ первого рода, чтобы породить четыре степени свободы в изменении мгновенья.

Четыре параметра, описывающих мгновение, следует понимать как q , подчиняющиеся наряду с другими q и p уравнениям движения (17) или (33). Их отличие от других q и p состоит в том, что именно их удобно взять

¹⁾ *With instants*—см. статью 17 настоящего сборника.— *Примеч. пер.*

в качестве переменных t в уравнениях движения (48). Тогда эти уравнения явно показывают, как меняются любые q и p при данном изменении мгновенья.

Есть другие формы релятивистской динамики, не использующие мгновений, как то обсуждалось автором [2]. Есть точечная форма, в которой состояние определяется относительно точки в пространстве-времени. Для этой формы также нужны четыре ϕ первого рода, соответственно четырем степеням свободы движения точки. Далее, есть фронтальная форма, для которой нужны три ϕ первого рода, соответственно трем степеням свободы движения фронта. Наконец, мы можем задавать состояние на произвольной трехмерной пространственноподобной поверхности в пространстве-времени. Тогда число ϕ первого рода должно быть бесконечным, соответственно всем деформациям, которые можно сделать с этой поверхностью. В каждой из этих форм переменные, описывающие точку, волновой фронт или произвольную пространственноподобную поверхность, следует понимать как q , подчиняющиеся уравнениям движения (17) или (33) и предпочтительно удобные для выбора в качестве переменных t в уравнении (48).

Обсуждавшиеся выше ϕ первого рода минимально необходимы для построения релятивистской динамики в соответственных формах. Могут быть и другие. Например, электродинамика, допускающая калибровочные преобразования даже после фиксации начальных значений всех q и p , должна обладать добавочными степенями свободы, для порождения которых будут нужны добавочные ϕ первого рода.

§ 11. Квантование

Чтобы проквантовать динамическую систему, получившую классическое описание, нужно построить систему линейных операторов, соответствующих классическим динамическим переменным q и p и их функциям. Ни классическим переменным u , ни переменным типа скорости вообще, ни комбинациям, явно содержащим τ , — нет соответствий среди операторов. Все операторы действуют на векторы ψ гильбертова пространства, представителями которых в любом представлении являются волновые функции, характеризующие состояния в квантовой теории. Вещественным классическим переменным соответствуют самосопряженные операторы.

Аналогия между линейными операторами и их классическими двойниками должна удовлетворять двум общим принципам. С обозначением одинаковыми символами обоих партнеров-двойников, эти принципы суть:

(i) СП-соотношения между классическими переменными соответствуют перестановочным соотношениям между операторами согласно формуле

$$[\xi, \eta] \text{ соответствует } 2\pi (\xi\eta - \eta\xi)/ih;$$

(ii) слабые уравнения между классическими переменными соответствуют линейным условиям на векторы ψ согласно формуле

$$X(q, p) = 0 \text{ соответствуют } X\psi = 0.$$

Процедура перехода от классической к квантовой теории не вполне определена математически, поскольку всякий раз, когда классическое выражение содержит произведение двух множителей, СП которых не обращается в нуль, есть произвол в порядке, в котором должны появиться эти два множителя в соответствующем квантовом выражении. В простых реальных примерах этот вопрос решается без труда. В сложных примерах может оказаться невозможным так выбрать порядок в каждом месте, чтобы сделать непротиворечивыми все квантовые уравнения, — а тогда и неизвестно, как проквантовать теорию. Все современные методы квантования являются по сути практическими приемами, основанием для применения которых служат соображения простоты.

Имеются некоторые общие соображения, которые следует иметь в виду при переходе к квантовой теории, чтобы сразу не столкнуться с тривиальной противоречивостью квантовых уравнений. В классической теории мы имеем некоторое число ϕ -уравнений (включая в него на равных правах χ -уравнения), которые в квантовой теории следует трактовать в соответствии с принципом (ii). Для классических ϕ мы можем провести линейное преобразование (27), и новые ϕ будут ничем не хуже старых. Проводя соответствующее преобразование в квантовой теории, мы должны озаботиться тем, чтобы все коэффициенты γ стояли слева от ϕ . Общая ϕ в квантовой теории есть линейная комбинация исходных ϕ с коэффициентами слева.

Из двух квантовых уравнений, полученных по ϕ -уравнениям согласно принципу (ii),

$$\phi_1\psi = 0, \quad \phi_2\psi = 0,$$

мы можем заключить, что

$$\varphi_2 \varphi_1 \psi = 0, \quad \varphi_1 \varphi_2 \psi = 0,$$

а отсюда согласно принципу (i)

$$[\varphi_1, \varphi_2] \psi = 0.$$

Это соответствует классическому слабому уравнению

$$[\varphi_1, \varphi_2] = 0.$$

Мы можем заключить, что если переход к квантовой теории возможен, то все φ должны быть первого рода.

Квантовую теорию можно построить и по классической теории с φ второго рода, — предварительно превратив все φ_β -уравнения в сильные уравнения с помощью преобразования, описанного в § 8. Квантовым эквивалентом сильных уравнений будут уравнения между операторами, по которым одни из них можно определить через другие.

Квантовые уравнения $\varphi\psi = 0$, полученные из классических φ -уравнений применением принципа (ii) к φ первого рода, представляют собой волновые уравнения Шредингера. Обычная классическая динамика с единственной φ первого рода приводит к единственному уравнению Шредингера. В общей теории каждой классической степени свободы, характеризующей произвол в движении, отвечает свое уравнение Шредингера. В этих уравнениях все операторы соответствуют динамическим переменным при одном и том же значении τ . Операторы, относящиеся к различным значениям τ , принадлежат разным алгебраическим системам, и, по-видимому, в квантовой теории нет ничего похожего на τ -зависимость классических переменных.

Однако описываемая уравнением (48) зависимость классических величин от параметров t имеет квантовый аналог, если только t выбраны так, что их взаимные СП равны нулю, и поэтому в квантовой теории им можно одновременно придать числовые значения. Предпочтительные t различных форм релятивистской динамики, обсуждавшихся в предыдущем параграфе, удовлетворяют этому условию. Непосредственно перенести в квантовую теорию уравнения (48) мы не можем, поскольку, как легко проверить, получившиеся уравнения не были бы инвариантны при общих линейных преобразованиях φ (27). Сначала мы должны привести уравнения (48) к стандартному виду. Преобразованием (27) мы образуем новый набор φ , скажем φ_a , находящихся в таком взаимно однозначном

соответствии с t_a , что

$$[t_a, \varphi_{a'}] = \delta_{aa'}. \quad (55)$$

Для таких φ уравнения (48) сводятся к

$$[g, \varphi_a] = \partial g / \partial t_a. \quad (56)$$

Эти уравнения уже можно перенести в квантовую теорию, и тогда они станут гейзенберговыми квантовыми уравнениями движения в нашей обобщенной динамике.

§ 12. Приложение

Доказательство тождества Пуассона для новых СП, определенных уравнением (36).

Воспользуемся индексами $r, s, t, \dots$ для идентификации различных θ . Мы имеем по определению

$$\begin{aligned} [[\xi, \eta]^*, \zeta]^* &= [[\xi, \eta] + [\xi, \theta_r] c_{rs} [\theta_s, \eta], \zeta] + \\ &+ [[\xi, \eta] + [\xi, \theta_r] c_{rs} [\theta_s, \eta], \theta_t] c_{tu} [\theta_u, \zeta] = \\ &= [[\xi, \eta], \zeta] + [[\xi, \theta_r], \zeta] c_{rs} [\theta_s, \eta] + [\xi, \theta_r] [c_{rs}, \zeta] [\theta_s, \eta] + \\ &+ [\xi, \theta_r] c_{rs} [[\theta_s, \eta], \zeta] + [[\xi, \eta], \theta_t] c_{tu} [\theta_u, \zeta] + \\ &+ [[\xi, \theta_r], \theta_t] c_{rs} [\theta_s, \eta] c_{tu} [\theta_u, \zeta] + \\ &+ [\xi, \theta_r] [c_{rs}, \theta_t] [\theta_s, \eta] c_{tu} [\theta_u, \zeta] + \\ &+ [\xi, \theta_r] c_{rs} [[\theta_s, \eta], \theta_t] c_{tu} [\theta_u, \zeta]. \quad (57) \end{aligned}$$

Пусть оператор Σ означает суммирование по трем циклическим перестановкам величин ξ, η, ζ . Тогда мы должны доказать, что

$$\Sigma [[\xi, \eta]^*, \zeta]^* = 0.$$

В применении к первому члену (57) Σ дает нуль благодаря обычному тождеству Пуассона. Применение Σ ко второму, четвертому и пятому членам дает

$$\Sigma c_{rs} [\theta_s, \eta] \{ [[\xi, \theta_r], \zeta] + [[\theta_r, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \theta_r] \} = 0$$

снова благодаря обычному тождеству Пуассона. Применение к шестому и восьмому членам (57) дает, после циклической перестановки r, u, s, t в восьмом,

$$\begin{aligned} c_{rs} c_{tu} \Sigma [\theta_s, \eta] [\theta_u, \zeta] \{ [[\xi, \theta_r], \theta_t] + [[\theta_t, \xi], \theta_r] \} = \\ = -c_{rs} c_{tu} \Sigma [\theta_s, \eta] [\theta_u, \zeta] [[\theta_r, \theta_t], \xi]. \quad (58) \end{aligned}$$

Из (35) можем заключить, что

$$[c_{tu} [\theta_r, \theta_t], \xi] = 0,$$

или

$$[c_{tu}, \xi] [\theta_r, \theta_t] + c_{tu} [[\theta_r, \theta_t], \xi] = 0. \quad (59)$$

Таким образом, (58) сводится к

$$c_{rs} [\theta_r, \theta_t] \Sigma [\theta_s, \eta] [\theta_u, \zeta] [c_{tu}, \xi] = \Sigma [\theta_t, \eta] [\theta_u, \zeta] [c_{tu}, \xi]$$

после еще одного использования (35). Это выражение сокращается с результатом применения Σ к третьему члену (57). Применение Σ к остающемуся, седьмому члену (57) дает

$$[\xi, \theta_r] [\eta, \theta_s] [\zeta, \theta_u] \{c_{tu} [c_{rs}, \theta_t] + c_{tr} [c_{su}, \theta_t] + c_{ts} [c_{ur}, \theta_t]\}. \quad (60)$$

Обозначив Σ_{rsu} результат суммирования по циклическим перестановкам индексов r, s, u и одновременно индексов r', s', u' , мы имеем благодаря обычному тождеству Пуассона

$$\Sigma_{rsu} c_{rr'} c_{ss'} c_{uu'} [[\theta_{r'}, \theta_{s'}], \theta_{u'}] = 0. \quad (61)$$

Замена ξ на $\theta_{u'}$ в (59) дает

$$[c_{rr'}, \theta_{u'}] [\theta_{r'}, \theta_{s'}] + c_{rr'} [[\theta_{r'}, \theta_{s'}], \theta_{u'}] = 0,$$

так что из (61) следует

$$\Sigma_{rsu} c_{ss'} c_{uu'} [\theta_{r'}, \theta_{s'}] [c_{rr'}, \theta_{u'}] = 0.$$

С помощью (35) это сводится к

$$\Sigma_{rsu} c_{uu'} [c_{rs}, \theta_{u'}] = 0,$$

что свидетельствует об обращении (60) в нуль. На этом доказательство завершается. Все выписанные выше уравнения можно понимать как сильные, поскольку слабых уравнений в доказательстве не использовалось.

Ссылки

1. Dirac P. A. M. Homogeneous variables in classical dynamics // Proc. Camb. Phil. Soc.—1933.—V. 29.—P. 389.
2. Dirac P. A. M. Forms of relativistic dynamics¹⁾//Rev. Mod. Phys.—1949.—V. 21.—P. 392.

¹⁾ Статья 17 настоящего сборника.—Примеч. пер.

Proceedings of the Royal Society
A vol. 246 (1958), pp. 326—332

GENERALIZED HAMILTONIAN DYNAMICS

By P. A. M. DIRAC, F. R. S., St. John's College, Cambridge
 (Received 13 March 1958)

Предложенная автором процедура перехода от лагранжиана к гамильтониану в ситуации, когда импульсы не являются независимыми функциями скоростей, приведена к более простой и практичной форме, причем основные результаты получены прямым решением уравнений, вытекающих из требований самосогласованности. Показано, как (при некоторых условиях) можно исключить часть степеней свободы и тем самым добиться существенного упрощения гамильтонова формализма.

Обычная процедура перехода от лагранжевой формы уравнений движения к гамильтоновой форме требует, чтобы импульсы были независимыми функциями скоростей. На практике имеется ряд важных случаев, когда это условие не выполнено — например, в релятивистской теории поля, — и возникает необходимость обобщить процедуру. Один из способов сделать это был предложен автором ²⁾. В настоящей статье он приводится к более простому и практичному виду.

Альтернативный подход к проблеме дан Андерсоном и Бергманом ³⁾. Будучи приложим только к квадратичным по скоростям лагранжианам, их метод менее общий, чем настоящий. В настоящем методе лагранжиан может быть любой функцией скоростей и координат, при единственном ограничении, чтобы лагранжевы уравнения движения не приводили к несовместности.

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

²⁾ *Dirac P. A. M.* // *Can. J. Math.*— 1950.— V. 2.— P. 129.

³⁾ *Anderson J. L., Bergman P. G.* // *Phys. Rev.*— 1951.— V. 83.— P. 1018.

§ 1. Ф-уравнения

Рассмотрим динамическую систему, описываемую в терминах координат q_n ($n=1, 2, \dots, N$) и скоростей $\dot{q}_n$, с лагранжианом $L=L(q, \dot{q})$. Как обычно, определим импульсы

$$p_n = \partial L / \partial \dot{q}_n. \quad (1)$$

Может оказаться, что p не являются независимыми функциями $\dot{q}$. Если среди p имеется только $N-M$ независимых функций $\dot{q}$, возникнет M независимых соотношений

$$\varphi_m(p, q) = 0, \quad m=1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

M может быть любым — от 0 до N .

Лагранжевы уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} \quad (3)$$

задают теперь $N-M$ функций, зависящих от ускорений $\ddot{q}_n$, и дают M уравнений, связывающих только координаты и скорости. Может оказаться, что дифференцированием по времени (однократным или, возможно, многократным) мы можем получить некоторые новые независимые уравнения, содержащие ускорения. Если таких уравнений недостаточно, чтобы задать все ускорения, то общее решение уравнений движения с данными начальными значениями q и $\dot{q}$ будет содержать несколько произвольных функций времени.

Сделаем произвольные малые вариации δq_n , $\delta \dot{q}_n$ координат и скоростей. Они приведут к вариациям δp_n , сохраняющим уравнения (1). Эти вариации должны сохранять и уравнения (2), являющиеся следствием (1), так что

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \delta p_n = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) будут единственными ограничениями на вариации δp_n , учитывающими уравнения (2) в том смысле, что независимые вариации первого порядка у p и q дают вариации первого порядка у φ .

Мы имеем

$$\begin{aligned} \delta(p_n \dot{q}_n - L) &= p_n \delta \dot{q}_n + \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n = \\ &= \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку члены с $\delta \dot{q}$ сокращаются, вариация по $\dot{q}$, сохраняющая уравнения (1) в отсутствие вариаций по q и p , оставляет неизменной $p_n \dot{q}_n - L$. Это означает, что $p_n \dot{q}_n - L$ является функцией только q и p , так что мы можем положить

$$p_n \dot{q}_n - L = H(q, p). \quad (6)$$

Конечно, функция $H(q, p)$ определена неоднозначно. Мы можем сделать замену

$$H \rightarrow H + c_m \varphi_m, \quad (7)$$

где c_m — любые функции q и p . В случае, когда L однороден первой степени по $\dot{q}$, мы можем взять $H = 0$.

Теперь уравнение (5) дает

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial H}{\partial q_n} \delta q_n = \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n,$$

где вариации δq_n , δp_n ограничены уравнением (4), а в остальном произвольны. Поэтому

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{\partial H}{\partial q_n} + u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}, \quad (9)$$

где u_m — некоторые коэффициенты. При преобразовании (7) к u_m добавляются функции, зависящие только от q и p , а именно минус c_m .

Уравнения (8) показывают, что $\dot{q}$ заданы через q , $N-M$ независимых переменных p и M новых переменных u . Таким образом, вместо q и $\dot{q}$ мы можем взять в качестве основных динамических переменных q , p и u . Это и есть гамильтоновы переменные.

С помощью (9) уравнения движения (3) принимают вид

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \quad (10)$$

Если обычным образом определить скобку Пуассона (СП)

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_n} \frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n} \frac{\partial B}{\partial q_n}, \quad (11)$$

то для любой g , зависящей от q и p , имеем

$$\dot{g} = [g, H] + u_m [g, \varphi_m]. \quad (12)$$

Одно это уравнение охватывает все уравнения (8) и (10). Оно есть общее гамильтоново уравнение движения.

Определение СП (11) требует, чтобы q и p считались независимыми переменными. Любые соотношения, ограничивающие, подобно уравнениям (2), независимость q и p , не должны использоваться до взятия СП, иначе СП потеряют однозначную определенность. Чтобы помнить об этом при работе с некоторыми из наших уравнений, удобно назвать такие ограничивающие уравнения *слабыми уравнениями* и записать их в виде

$$\varphi_m \approx 0.$$

§ 2. χ -уравнения

Дифференцируя по времени (2) и используя (12), мы получаем

$$[\varphi_m', H] + u_m [\varphi_m', \varphi_m] = 0. \quad (13)$$

Если не все эти уравнения сводятся к $0=0$, они уменьшат число гамильтоновых переменных q , p , u , выявив некоторые соотношения между ними.

Может оказаться, что уравнения (13) приводят к некоторым соотношениям только между q и p , независимым по отношению к φ -уравнениям. Они должны быть *слабыми уравнениями*, поэтому запишем их в виде

$$\chi_k(q, p) \approx 0 \quad (k=1, 2, \dots). \quad (14)$$

Дифференцируя по времени каждое из уравнений (14) получаем

$$[\chi_k, H] + u_m [\chi_k, \varphi_m] = 0. \quad (15)$$

Эти уравнения могут приводить к новым соотношениям только между q и p , т. е. к новым уравнениям (14), которые, в свою очередь, могут привести к новым уравнениям (15). Продолжим эту процедуру до тех пор, пока она идет, получив таким образом все уравнения (14) и (15), являющиеся следствиями (2) и общего уравнения движения (12). Пусть полный набор описывается индексами $k=1, 2, \dots, K$. Таким образом, число независимых p и q мы свели до $2N-M-K$, а u ограничили уравнениями (13) и (15), если только эти уравнения не сводятся к $0=0$ или к χ -уравнениям.

Рассмотрим эти уравнения (13) и (15) как уравнения для неизвестных u_m с коэффициентами, заданными как

функции q и p . Они должны иметь решение

$$u_m = U_m(q, p), \quad (16)$$

поскольку из отсутствия его следовала бы противоречивость лагранжевых уравнений движения (3). По смыслу решения (16), уравнения

$$\begin{aligned} [\varphi_m', H] + U_m[\varphi_m', \varphi_m] &\approx 0, \\ [\chi_k, H] + U_m[\chi_k, \varphi_m] &\approx 0 \end{aligned} \quad (17)$$

выполняются вследствие (2) и (14).

Вообще говоря, решение (16) неоднозначно. Мы можем добавить к U_m любое решение $V_m = V_m(q, p)$ уравнений

$$V_m[\varphi_m', \varphi_m] \approx 0, \quad V_m[\chi_k, \varphi_m] \approx 0. \quad (18)$$

Пусть V_{am} ($a = 1, 2, \dots, A$) — все независимые решения уравнений (18). Тогда общее решение уравнений (13) и (15) есть

$$u_m = U_m + v_a V_{am}, \quad (19)$$

где v_a — произвольные коэффициенты.

С помощью уравнений (19) можно исключить переменные u_m , так что в качестве основных гамильтоновых переменных мы имеем $2N - M - K$ оставшихся независимыми после учета уравнений (2) и (14) переменных q и p и A переменных v_a . Полное число этих переменных может быть значительно меньше первоначального числа $2N$ независимых переменных, поскольку уравнения движения могут сократить его.

Андерсон и Бергман называют φ -уравнения первичными связями, а χ -уравнения — вторичными связями. Во многих аспектах φ и χ выступают на равной ноге, и поэтому удобно их все обозначать как χ_j ($j = 1, 2, \dots, M + K$). С гамильтоновой точки зрения, существенно то различие между ними, что φ фигурируют в общем уравнении движения (12), а χ нет.

§ 3. Условие принадлежности первому роду

По определению, зависящая от q и p функция есть величина *первого рода*, если все ее СП с H и с χ_j обращаются в нуль. Достаточно, чтобы это обращение было слабым, т. е. с использованием уравнений (2) и (14). Зависящая от q и p функция, не удовлетворяющая этим условиям, называется величиной *второго рода*.

Теорема. *СП двух величин первого рода есть величина первого рода.* Пусть X и Y — первого рода, так что

$$[X, \chi_j] \approx 0, \quad [Y, \chi_j] \approx 0.$$

Эти слабые уравнения означают, что

$$[X, \chi_j] = x_{jj'} \chi_{j'}, \quad [Y, \chi_j] = y_{jj'} \chi_{j'},$$

с некоторыми коэффициентами $x_{jj'}$ и $y_{jj'}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} [[X, Y], \chi_j] &= [[X, \chi_j], Y] - [[Y, \chi_j], X] \approx \\ &\approx x_{jj'} [\chi_{j'}, Y] - y_{jj'} [\chi_{j'}, X] \approx 0. \end{aligned}$$

Аргументация сохраняет силу, если заменить χ_j на H ; откуда $[[X, Y], H] \approx 0$. Следовательно, $[X, Y]$ — первого рода.

Положим

$$H + U_m \varphi_m = H'. \quad (20)$$

Уравнения (17) показывают, что СП H' с любой χ_j слабо обращается в нуль. Далее,

$$[H, H'] \approx U_{m'} [\varphi_{m'}, H] \approx 0$$

из первого из уравнений (17), умноженного на $U_{m'}$. Таким образом, H' — первого рода. Заметим, что гамильтониан H' может быть получен из H преобразованием (7).

Любая линейная комбинация φ с коэффициентами, зависящими от q и p , может рассматриваться как другая φ . Положим

$$V_{am} \varphi_m = \varphi_a. \quad (21)$$

Уравнения (18) показывают, что СП φ_a с любой χ_j слабо обращается в нуль. Мы только что видели, что СП φ_a с H' обращается в нуль, так что СП ее с H также должен обращаться в нуль. Следовательно, φ_a — первого рода.

Благодаря (19) общее уравнение движения (12) принимает вид

$$\dot{g} = [g, H'] + v_a [g, \varphi_a]. \quad (22)$$

Теперь оно содержит гамильтониан первого рода H' и φ первого рода φ_a . Коэффициенты v_a , отвечающие этим φ первого рода, никак не ограничиваются уравнениями движения. Таким образом, в общем решении уравнений движения с данными начальными условиями каждый из них приводит к произвольной функции времени.

Каждая φ первого рода имеет вид $U_m \varphi_m$, где U_m удовлетворяют (17). Поэтому каждая независимая φ первого

рода должна появиться в (22). Следовательно, число независимых функций времени в общем решении уравнений движения равно числу независимых φ первого рода. Следует считать, что все решения уравнений движения, различие которых при данных начальных условиях вызвано разным выбором произвольных функций времени, отвечают одному и тому же физическому состоянию движения, по-разному описываемому в зависимости от выбора некоторых не имеющих физического значения математических переменных (например, от выбора калибровки в электродинамике или координатной системы в релятивистской теории).

На практике инвариантные свойства интеграла действия обычно позволяют узнать, какие произвольные функции времени имеются в общем решении уравнений движения. Это знание помогает выделить φ первого рода из набора всех φ , не прибегая к трудоемкому вычислению всех СП. Любая переменная скорости, отбрасывание которой не сказывается на физическом состоянии, должна появиться как коэффициент v_a , связанный с φ первого рода, в гамильтоновом уравнении движения (22).

§ 4. Редукция числа степеней свободы

Предположим, что некоторые φ первого рода содержат импульсные переменные лишь линейно с числовым коэффициентом. Хотя математически это — очень специальный случай, на практике он появляется часто и поэтому важен.

Тривиальной заменой переменных мы можем привести эти φ первого рода к виду

$$p_r - \dot{f}_r \approx 0, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (23)$$

где $\dot{f}_r$ зависят только от q . Условие принадлежности первому роду требует, чтобы СП величин $p_r - \dot{f}_r$ слабо обращались в нуль. Эти СП могут зависеть только от q . В предположении, что нет χ_j , зависящих только от q , эти СП должны обращаться в нуль сильно. Следовательно,

$$\dot{f}_r = \partial F / \partial q_r,$$

где F — некоторая функция, зависящая от q . Добавим теперь к лагранжиану член

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_n} \dot{q}_n; \quad (24)$$

это не изменит уравнений движения. К p_r добавится $\partial F/\partial q_r$, так что φ -уравнения (23) примут вид

$$p_r \approx 0. \quad (25)$$

Продолжим работу с новым лагранжианом. Любую из χ_j , не попадающую в (25), назовем χ_i ($i = 1, 2, \dots, M + K - R$); χ_i могут быть как первого, так и второго рода. Не теряя общности, можно предположить, что χ_i не зависят от переменных p_r . Можно предположить, что и H' не зависит от p_r , поскольку преобразованием (7) к другому H' первого рода всегда можно добиться этого.

Поскольку p_r — первого рода, мы имеем

$$[\chi_i, p_r] \approx 0, \quad [[\chi_i, p_r], p_r'] \approx 0 \quad (26)$$

и т. д. Следовательно, если у χ_i вообще есть зависимость от q_r , она может быть лишь в виде

$$\chi_i = \beta_{ii'} \chi_{i'}^*, \quad (27)$$

где χ^* слабо обращаются в нуль и не зависят от q_r , так что q_r появляются только в коэффициентах $\beta_{ii'}$. Это означает, что условия $\chi_i \approx 0$ эквивалентны условиям $\chi^* \approx 0$, не затрагивающим переменных q_r . Число χ^* должно быть равно числу χ_i (χ^* по количеству не могут превышать χ_i , поскольку все условия $\chi_i^* \approx 0$ суть следствия условий $\chi_i \approx 0$ плюс условий (26), которые сами являются следствиями $\chi_i \approx 0$).

Если χ_i — первого рода, применение теоремы предыдущего раздела к χ_i и p_r показывает, что χ_i выражается через χ^* только первого рода, т. е. что коэффициенты $\beta_{ii'}$ в (27) можно сделать ненулевыми лишь для χ_i^* первого рода.

Проделав над H' такую же работу, как над χ_i , мы находим, что

$$H' = H'' + \gamma_i \chi_i^*, \quad (28)$$

где H'' , как и χ^* , не зависит от q_r . Поскольку H' — первого рода, мы можем заключить, что H'' первого рода и что любые из фигурирующих в (28) χ^* — первого рода.

Посмотрим теперь, какой вид примет уравнение движения (22). Для g , совпадающей с одной из q_r , мы обнаруживаем, что $\dot{q}_r$ произвольна, так что q_r меняется произвольно. Для g , зависящей от переменных q_s, p_s ($s = R+1, \dots, N$), мы получаем уравнение движения вида

$$\dot{g} = [g, H''] + \omega_\alpha [g, \chi_\alpha^*], \quad (29)$$

где χ_α^* суть χ^* первого рода. (В их число не обязательно попадают все χ^* первого рода.) Переменные p_r в этом уравнении не появляются, а от q_r могут зависеть лишь коэффициенты w_α .

Предположим, что произвольные вариации w_α можно получить, варьируя q_r и те из коэффициентов v_a в (22), которые связаны с иными, чем p_r , q первого рода. На практике это предположение обычно оправдывается. Тогда мы можем считать w_α в (29) произвольными коэффициентами, которые вместе с q_s и p_s образуют основные гамильтоновы переменные. В общем уравнении движения (29) q_r и p_r больше не появляются. По своему характеру это уравнение столь же фундаментально, что и (22), но относится только к степеням свободы q_s, p_s . Таким образом, степени свободы q_r, p_r выпали из теории.

Может оказаться, что некоторые из χ_α^* , фигурирующих в (29), содержат импульсные переменные лишь линейно с численными коэффициентами. Тогда мы можем повторить всю процедуру и добиться дальнейшей редукции числа эффективных степеней свободы.