

ОПТИЧЕСКАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ И СТАТИСТИКА ФОТОНОВ

Эти лекции являются элементарным введением в квантовую оптику, поэтому они начинаются с рассмотрения классических экспериментов. Привлечение квантовомеханических идей осуществляется довольно постепенно. Самое большее, что нужно знать из области квантовой электродинамики для понимания этих лекций — это связь между квантовым гармоническим осциллятором и квантованием полей.

Лекция 1	1
1. Введение	1
2. Классическая теория излучения	6
Лекция 2 Интерференционные опыты	9
Лекция 3 Введение в квантовую теорию	16
Лекция 4 Одноатомный детектор фотонов	21
Лекция 5 Детектор фотонов, состоящий из n атомов	30
Лекция 6	36
1. Свойства корреляционных функций	36
2. Пространственная и временная зависимости корреляционных функций	39
Лекция 7	42
1. Дифракция и интерференция	42
2. Некоторые общие замечания об интерференции	43
3. Когерентность первого порядка	45
4. Контрастность колец и факторизация	50
Лекция 8	53
1. Интерпретация опытов с интенсивностными интерферометрами	53
2. Когерентность высших порядков и регистрация совпадений фотонов	54
3. Дальнейший анализ когерентности высших порядков	57
4. Учет произвольных поляризаций	59
5. Понятия о когерентных состояниях поля	61
Лекции 9—11. Когерентные и некогерентные состояния поля излучения	64
1. Введение	64
2. Теоретико-полевое обоснование	66
3. Когерентные состояния одной моды	70
4. Разложение произвольных состояний по когерентным состояниям	77
5. Разложение операторов по векторам когерентных состояний	80
6. Общие свойства оператора плотности	83
7. Р-представление оператора плотности	85
8. Гауссов оператор плотности	93
9. Оператор плотности для поля	98
10. Корреляционные и когерентные свойства поля	104

Лекция 12. Излучение при заданном распределении тока	114
Лекция 13	119
1. Понятие о фазовом пространстве для поля	119
2. Р-представление и проблема моментов	121
3. Положительно-определенная «плотность состояний в фазовом пространстве»	123
4. «Фазовая плотность» Вигнера	125
Лекция 14	131
1. Функции корреляции и распределение квазивероятности	131
2. Функция корреляции первого порядка для стационарных полей	133
3. Функции корреляции для хаотических полей	136
4. Распределение квазивероятности для амплитуды поля	139
5. Распределение квазивероятности для амплитуд поля в двух пространственно-временных точках	146
Лекция 15	149
1. Элементарная модель светового луча	149
2. Модель для идеальных лазерных полей	155
3. Модель лазерного поля с конечной шириной полосы	158
Лекция 16. Интерференция независимых световых лучей	168
Лекция 17. Опыты по счету фотонов	175

Лекция 1

1. Введение

Достигнув, казалось бы, известной степени завершенности, в настоящее время оптика переживает период весьма быстрых и революционных изменений. Эти изменения связаны с фактами, которые в принципе известны уже давно. Однако вплоть до последних лет масштабы применения этих знаний на практике были чрезвычайно ограниченными. Так, например, электромагнитная природа световых волн стала понятна еще с прошлого столетия. С тех пор были созданы полная теория электромагнитных волн и методы их генерации, однако фактически все это относилось лишь к электромагнитным полям радиодиапазона. Конечно, световые волны имеют ту же самую электромагнитную природу, что и радиоволны; но так как известные в прошлом способы получения света были исключительно примитивными (в смысле, который ниже мы обсудим несколько подробнее), то вплоть до недавнего времени имелись чрезвычайно малые возможности применения в оптике результатов теории, развитой для радиочастотного диапазона.

Как мы увидим ниже, простая физическая причина этого заключается в следующем: все существовавшие типы источников света представляли собой устройства, которые радиоинженеры обычно называют генераторами шума, и все тонкие и оригинальные методы оптических измерений имели дело по существу с использованием шума. Изобретение оптического мазера сразу же опрокинуло этот барьер. Это позволяет надеяться, что в будущем мы сможем управлять электромагнитными полями, генерируемыми на оптических и более высоких частотах, с той же самой точностью и с тем же разнообразием методов, которые стали обычными в радиотехнике.

Другим недавним достижением является создание детекторов, которые реагируют на каждый отдельный квант света. Они позволяют исследовать корпускулярный характер оптических полей. Все обычные оптические эксперименты не только имели дело с исключительно «грубыми» источниками света, но и уделяли мало внимания регистрации отдельных световых квантов; детекторы были чувствительны только к довольно значительному числу фотонов и обладали значительной инерционностью, так что измерялись лишь интенсивности, усредненные по сравнительно большому

промежутку времени. Новые детекторы света позволяют получить более тонкие характеристики: можно, например, ставить вопрос о счете отдельных квантов; можно производить измерения вероятности нахождения квантов в любой совокупности точек пространства в произвольные моменты времени.

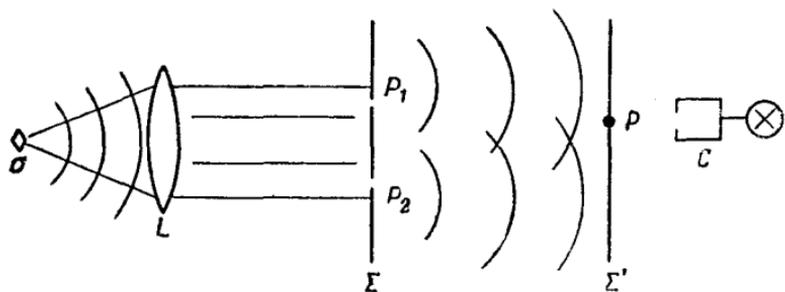
Наряду с быстрым развитием технических средств исследования свойств фотонов оптического диапазона большие успехи в этом направлении имеются в последние годы и в радиодиапазоне. Энергия фотонов радиодиапазона исключительно мала, намного меньше, чем тепловые флуктуации энергии, равные по порядку величины kT (T — шумовая температура; в большинстве усилителей она принимается равной комнатной температуре). Следовательно, до сих пор в радиотехнике не было большой необходимости учитывать корпускулярную структуру поля. Однако недавнее изобретение мал шумящих усилителей, использующих явления парамагнитного резонанса, до такой степени снизило шумовую температуру регистрирующих устройств, что при дальнейшем их совершенствовании окажется вполне возможной регистрация отдельных фотонов. Таким образом, даже в диапазоне СВЧ приходится в настоящее время учитывать корпускулярную структуру поля. Исследование корпускулярной природы электромагнитных полей представляет интерес еще и потому, что она ставит принципиальные ограничения при передаче информации с помощью этих полей. В данных лекциях мы не будем касаться вопросов теории информации, но сделаем некоторые замечания, относящиеся к теории шумов. Теория шумов является классической формой теории флуктуаций электромагнитного поля и, вполне естественно, связана с теорией квантовых флуктуаций электромагнитного поля. Все перечисленные выше вопросы составляют один общий раздел, который можно назвать статистикой фотонов. В него входит также теория когерентности, которая ставит своей целью нахождение удобных способов классификации статистического поведения полей.

Задачей настоящего курса является возможно более строгое и общее изложение проблем статистики фотонов. Нет необходимости делать при этом существенное различие между радиочастотными и оптическими полями (или между этими полями и рентгеновскими лучами). Часть формализма, который связан с определением понятия когерентности, фактически предлагается как средство унификации довольно различных концепций когерентности, существовавших ранее.

Мы уже отмечали, что оптические эксперименты лишь в редких случаях имели дело с отдельными фотонами. Почти то же самое можно сказать и относительно теории оптических явлений. Тот факт, что фотон оставался совершенно чуждым оптической теории, объясняется отчасти успехом простых волновых моделей, которые

использовались при анализе оптических экспериментов. Обычно говорят, что такие модели имеют классический характер, так как они исходят из определенного рода аналогий с классической электромагнитной теорией и учитывают корпускулярную природу излучения лишь настолько, насколько это позволяют условия эксперимента.

При таком подходе обычно говорят о своего рода «оптической возмущающей функции», предполагая, что она удовлетворяет



Ф и г. 1

некоторому волновому уравнению и иногда также определенным граничным условиям. Эта функция может представлять как компоненты электрического вектора, так и другие количественные характеристики поля, такие, как векторный потенциал или напряженность магнитного поля. Фактически во многих применениях нет необходимости точно определять, что именно представляет эта функция.

Для того чтобы проиллюстрировать такой подход, рассмотрим интерферометр Юнга (фиг. 1). Плоская квазимонохроматическая волна от точечного источника σ падает на экран Σ с двумя параллельными щелями P_1 и P_2 . Две волны, распространяющиеся от щелей, дают на экране Σ' интерференционную картину, которую часто можно наблюдать невооруженным глазом. Чтобы предсказать интерференционную картину, можно, пренебрегая векторным характером электромагнитного поля, ввести скалярное поле ϕ , описывающее «оптическое возмущение». Попытаемся теперь найти функцию ϕ , удовлетворяющую волновому уравнению и граничным условиям, учитывающим влияние экрана Σ . Найти точное решение такой задачи в общем случае очень трудно, поэтому обычно делают большое число упрощающих предположений; например, сильно упрощают граничные условия и используют принцип Гюйгенса. Тогда получают простое выражение для распределения поля ϕ на экране Σ' .

Разумеется, если необходимо предсказать вид интерференционной картины, то на определенном этапе придется столкнуться

с физической интерпретацией поля φ . Наиболее известный метод заключается в том, чтобы рассматривать φ (g, t) как реальное поле и отождествлять его, например, с одной из компонент вектора электрического поля. Хорошо известно, что экспериментально наблюдаемую картину можно предсказать довольно точно, если интенсивность света на экране связать с φ^2 . Это оправдано с точки зрения классической теории, ибо вектор Пойнтинга, равный потоку энергии, квадратичен по напряженности поля. Такое отождествление не является, однако, единственным. Кроме того, такой подход почти не учитывает способ регистрации света.

Предположим, что интенсивность света измеряют с помощью счетчика фотонов, расположенного на месте экрана. Зададимся вопросом, как предсказать сигнал счетчика в зависимости от его положения на интерференционной картине. В то время как использование волнового уравнения для нахождения амплитуды поля φ не приводит к каким-либо различиям между классическим и квантовым подходом к задаче о дифракции, использование счетчика фотонов в качестве регистрирующего устройства вносит такое различие. Счетчик фотонов по самой своей сущности является квантовомеханическим прибором. Его выходной сигнал можно предсказать только с помощью статистических средних значений даже в тех случаях, когда состояние поля определяется точно. Если мы хотим предсказать этот средний результат, то должны более точно определить поле, на которое реагирует счетчик, и рассмотреть процесс регистрации квантовомеханическим путем. При таком подходе оказывается более правильным связывать реакцию счетчика не с действительным полем φ , а с комплексным φ^* , т. е. считать сигнал пропорциональным не φ^2 , а $|\varphi^*|^2$. (Это различие физически не тривиально, так как для монохроматического поля величина φ^2 быстро осциллирует, тогда как $|\varphi^*|^2$ остается постоянной.) Приняв такую концепцию, мы можем использовать ее в качестве грубого правила для того, чтобы обойтись без детального анализа механизма регистрации в любом конкретном случае.

Использование таких приемов, которые позволяют избежать применения сложных квантовомеханических расчетов, в свое время было названо «полуклассическим» приближением. Несмотря на то, что при таком подходе появляется необходимость в определенном роде правиле, устраняющем противоречие между описаниями волновых и корпускулярных свойств фотонов, он остается корректным в квантовомеханическом смысле, если такое правило выбрано правильно.

Тот факт, что в ряде случаев такие «правила» приводили в «полуклассическом» приближении к неверным результатам, является хорошим доказательством того, что квантовомеханического рассмотрения нельзя полностью избежать.

При использовании «полуклассических» приближений приходится иметь дело с обычными числами и функциями. Это позволяет избежать использования аппарата некоммутирующих операторов, который, по-видимому, всегда необходим при любом формальном квантовомеханическом описании поля. Ниже мы покажем, что для некоторого класса полей возможно статистическое описание, в котором используются обычные функции, являющиеся решениями волнового уравнения. Эти поля можно описывать способом, который аналогичен используемому в классической теории шумов. Там, где такое описание пригодно, нет необходимости вводить термины «классическое» или «полуклассическое» рассмотрение, так как эти определения могут привести к недоразумениям.

Существует мнение, что вышеупомянутый класс состояний поля, для которого пригодно простое статистическое описание, включает в себя все состояния поля и что, следовательно, квантовая и «классическая» теории всегда будут давать эквивалентные результаты. В этих лекциях мы еще вернемся к этому вопросу, когда будем лучше подготовлены к его обсуждению, сейчас же ограничимся замечанием, что это утверждение носит, по-видимому, субъективный характер и математически некорректно. Только квантовая теория дает полную и логически стройную картину полевых явлений.

Итак, основным содержанием данных лекций будет квантовая электродинамика, которая к настоящему времени превратилась в хорошо разработанную теорию. Хотя давно было ясно, что классическая электродинамика является предельным случаем квантовой электродинамики при $\hbar \rightarrow 0$, однако не было каких-либо достаточно надежных методов, пригодных для обсуждения электродинамических проблем вблизи классического предела.

Исторически сложилось так, что квантово-электродинамические расчеты строились на основе стационарных состояний $|n\rangle$ гамильтониана поля \mathcal{H} . Эти стационарные состояния соответствуют наличию целого числа n квантов, т. е. удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{H} |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega |n\rangle; \quad (1.1)$$

n -квантовые состояния образуют замкнутую систему, которую обычно рассматривают как базис для разложения всех состояний поля. Так как фактически все электродинамические расчеты были проведены путем разложения по степеням напряженностей поля, то фигурировавшие в расчетах числа фотонов обычно представляли собой весьма малые целые числа. С другой стороны, в классическом предельном случае квантовой электродинамики квантовые числа чрезвычайно велики; причем они не только велики, но и весьма неопределенны. Например, если гармонический осциллятор колеблется в состоянии с относительно точно определенной фазой, то это

состояние должно соответствовать большому квантовому числу, которое точно не определено ($\Delta n \Delta \varphi \gtrsim 1$). Когда же приходится иметь дело с квантовыми состояниями электромагнитного поля, для которого фаза поля определяется точно, то эти состояния являются состояниями с принципиально неопределенным числом заполнения n . Вычисление ожидаемых значений с помощью n -квантовых состояний становится в таких случаях весьма затруднительным и неясным.

Один из математических приемов, примененных в этих лекциях, представляет собой использование совокупности квантовых состояний, с помощью которых удобнее описывать переменные амплитуды и фазы, чем с помощью n -квантовых состояний. Такой подход делает значительно более ясной связь между классическим и квантовомеханическим формализмом.

2. Классическая теория излучения

Для того чтобы понять тесную связь между классической и квантовой теориями, рассмотрим вначале вкратце классическую теорию излучения. Будем описывать классическое поле с помощью обычных векторов электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла для полей без источников:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При этом мы предполагаем, что источник, излучив однажды эти поля, больше их не излучает.

Так как наши детекторы обычно реагируют на электрические, а не на магнитные поля, то ограничимся рассмотрением поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Во многих классических расчетах для выделения зависимости напряженности поля от времени используют ряд или интеграл Фурье; напряженность поля распадается тогда на два комплексных слагаемых

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

Первый из этих членов $\mathbf{E}^{(+)}$, который мы будем называть компонентой с положительной частотой, содержит все амплитуды напряженности поля, меняющиеся как $e^{-i\omega t}$ для $\omega > 0$. Другой член — компонента с отрицательной частотой — содержит все амплитуды, меняющиеся как $e^{i\omega t}$. Оба члена являются комплексно-сопряженными по отношению друг к другу

$$\mathbf{E}^{(-)} = \mathbf{E}^{(+)*} \quad (1.4)$$

и содержат эквивалентную физическую информацию. Они часто используются в классических расчетах и называются либо комплексной напряженностью поля, либо комплексным сигналом. Использование комплексных полей служит лишь удобным математическим приемом и не является физической необходимостью, так как классические измерительные приборы обычно реагируют только на реальное поле $E = 2 \operatorname{Re} \mathbf{E}^{(\pm)}$.

Квантовомеханические детекторы, как уже отмечалось выше, ведут себя иначе, чем классические, и разделение поля на компоненты с положительной и отрицательной частотами в этом случае имеет глубокий смысл. Как мы увидим позже, идеальный счетчик фотонов (счетчик, имеющий нулевые размеры и одинаковую чувствительность ко всем частотам) реагирует на произведение

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2.$$

Во всяком случае эту величину измерил бы детектор, если бы мы могли создать поле со строго фиксированной напряженностью. Однако реально мы не в состоянии управлять движением зарядов в источниках поля с произвольно большой точностью. Практически все поля излучаются зарядами, поведение которых в значительной степени не определено; поэтому поля, создаваемые ими, также являются статистически неопределенными. Все, что мы можем сделать — дать способ математического описания этой неопределенности.

При анализе случайных полей удобнее иметь дело с дискретным набором переменных, чем с непрерывным. Поэтому мы попытаемся описать поле в некотором объеме пространства с помощью дискретного набора ортогональных собственных функций. В качестве таких функций выберем систему векторных функций $\{\mathbf{u}_k(\mathbf{r})\}$, удовлетворяющих волновым уравнениям

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.5)$$

и соответствующему набору граничных условий; при выполнении дополнительных условий

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.6)$$

уравнения (1.5) определяют совокупность частот $\{\omega_k\}$. Если эти функции образуют в рассматриваемом объеме полную ортонормированную систему

$$\int \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{kk'}, \quad (1.7)$$

то вектор электрического поля можно выразить через эти функции следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_k C_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \sum_k C_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}. \quad (1.8)$$

Две суммы в правой части представляют собой соответственно $\mathbf{E}^{(+)}$ и $\mathbf{E}^{(-)}$.

При разложении по ортогональным модам поле, очевидно, полностью определяется набором комплексных фурье-амплитуд $\{C_k\}$. При описании случайных полей эти коэффициенты являются, вообще говоря, случайными переменными с некоторым распределением вероятностей $p(\{C_k\}) = p(C_1, C_2, C_3, \dots)$. Тогда при измерении некоторой функции от \mathbf{E} или $\mathbf{E}^{(\pm)}$ мы в лучшем случае можем предсказать ее среднее значение; так, например, для $F(\mathbf{E}^{(+)})$ имеем

$$\langle F(\mathbf{E}^{(+)}) \rangle = \int p(\{C_k\}) F[\mathbf{E}^{(+)}(\{C_k\})] \prod_k d^2 C_k, \quad (1.9)$$

где элемент площади определяется выражением

$$d^2 C_k = d(\operatorname{Re} C_k) d(\operatorname{Im} C_k).$$

Важно помнить, что это среднее является средним по ансамблю. В принципе для его измерения мы должны повторить эксперимент много раз, каждый раз создавая поле идентичным образом. Такой метод не слишком удобен с экспериментальной точки зрения, однако именно такой смысл заложен в соотношении (1.9). Рассматриваемые нами поля могут изменяться со временем совершенно случайным образом. Примером может служить поле радиопередатчика, посылающего некоторое произвольное сообщение. Поэтому, вообще говоря, нельзя заменить среднее по ансамблю средним по времени. Теорию нестационарных статистических явлений можно построить лишь с помощью величин, усредненных по ансамблю.

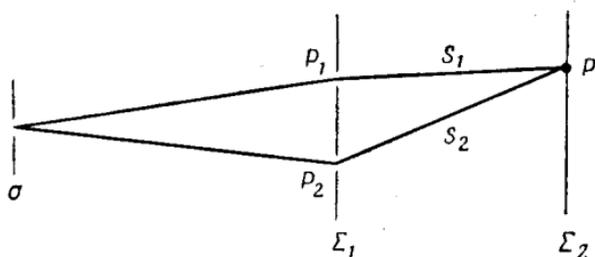
Решение проблем в статистической термодинамике приучило нас к мысли, что статистические флуктуации среднего по ансамблю весьма малы. Таким образом, мы склонны забывать о необходимости в принципе проводить ансамбль термодинамических измерений и сравнивать лишь одно измерение с предсказанным средним по ансамблю. И если в термодинамике такое упрощение большей частью справедливо, то оно не всегда годится в статистической оптике. Ниже при обсуждении интерференционных картин, полученных в результате суперпозиции света от независимых источников, мы увидим, что отдельные измерения дают совершенно иные результаты, чем средние по ансамблю. Таким образом, различие между отдельными измерениями и их средними значениями может быть весьма существенным.

Интерференционные опыты

Одним из классических экспериментов, который демонстрирует когерентные свойства света, является опыт Юнга (фиг. 2). Поле в точке P в момент t можно представить в виде линейной комбинации полей, существовавших в двух отверстиях экрана Σ_1 в более ранние моменты времени,

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \lambda_1 E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) + \lambda_2 E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (2.1)$$

где время определяется соотношением $t_{1,2} = t - S_{1,2}/c$. Коэффициенты λ_1, λ_2 зависят от геометрии, но предполагаются не зависящими от свойств поля.



Ф и г. 2

Для начала предположим, что расположенный в точке P детектор поля измеряет квадрат абсолютного значения некоторой компоненты комплексной напряженности поля (позже мы детально обсудим справедливость этого предположения). Пусть измеряемая компонента поля есть $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, тогда

$$|E^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 = E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = |\lambda_1|^2 E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) + |\lambda_2|^2 E^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) + 2 \operatorname{Re} [\lambda_1^* \lambda_2 E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)]. \quad (2.2)$$

Так как при использовании обычного источника света коэффициенты Фурье C_k остаются большей частью неопределенными, то для получения не случайного результата мы должны повторить эксперимент много раз и затем взять среднее. Единственной величиной,

которую мы можем вычислить, является среднее по ансамблю значение $|E^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2$, взятое по совокупности случайных коэффициентов $\{C_k\}$,

$$\langle |E^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = |\lambda_1|^2 \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle + |\lambda_2|^2 \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \lambda_1^* \lambda_2 \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (2.3)$$

Если ввести корреляционную функцию первого порядка

$$G^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}t) E^{(+)}(\mathbf{r}'t') \rangle, \quad (2.4)$$

то соотношение (2.3) примет вид

$$\langle |E^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = |\lambda_1|^2 G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_1 t_1) + |\lambda_2|^2 G^{(1)}(\mathbf{r}_2 t_2, \mathbf{r}_2 t_2) + 2 \operatorname{Re} [\lambda_1^* \lambda_2 G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2)]. \quad (2.5)$$

Мы опустили векторные и тензорные обозначения у полей и корреляционных функций, так как векторные свойства полей в этих экспериментах несущественны. Векторный характер полей необходимо было бы учитывать, если бы отверстие вызывало вращение плоскости поляризации или если бы поляризация играла в нашем опыте существенную роль.

Наиболее характерным для классической оптики является случай, когда падающее поле стационарно. Термин «стационарный» вовсе не означает, что поле не зависит от времени; наоборот, поле обычно весьма быстро осциллирует. Это означает лишь, что наши сведения о поле не изменяются со временем. Под стационарностью мы понимаем инвариантность статистического описания светового пучка относительно сдвига во времени. Корреляционная функция $G^{(1)}$ для таких полей может зависеть лишь от разности $t - t'$

$$G^{(1)}(t, t') = G^{(1)}(t - t'). \quad (2.6)$$

Заметим, что, введя лишь один тип корреляционной функции, мы указываем только необходимое, но не достаточное условие стационарности. Все средние характеристики стационарного поля должны оставаться неизменными при сдвиге во времени.

Когда случайные классические поля представляют с помощью стационарных стохастических процессов, используемые модели обычно обладают свойством эргодичности. Оно означает, что функция $G^{(1)}(t - t')$, которую определяют как среднее по ансамблю, имеет то же самое значение, что и усредненная по времени корреляционная функция $\Gamma^{(1)}(t - t')$,

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1 + \tau) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Свойства усредненных по времени корреляционных функций для классических полей подробно обсуждаются в книге Борна и Вольфа¹⁾.

При рассмотрении этих вопросов в лекциях удобнее иметь в виду некоторые конкретные интерференционные опыты. Рассмотрим вкратце один из основных случаев интерференции, когда поле, падающее на детектор, является суперпозицией двух плоских волн. Будем предполагать, что волновые векторы двух плоских волн лишь незначительно отличаются друг от друга. (В качестве такого примера можно рассматривать интерференцию монохроматического света от двух составляющих двойной звезды.) Пусть частоты обеих волн равны, тогда

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + Be^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.8)$$

Спросим теперь, какого рода измерениями можно узнать, что мы принимаем излучение от двух источников, а не от одного?

Прежде чем ответить на этот вопрос, давайте точно выясним статистический характер коэффициентов A и B , которые являются, конечно, частным случаем введенных выше коэффициентов C_h . Предположим, что эти коэффициенты имеют независимые распределения вероятности; это значит, что функция вероятности $p(A, B)$ распадается на множители

$$p(A, B) = p_1(A) p_2(B). \quad (2.9)$$

Предположим далее, что распределения p_1 и p_2 таковы, что фазы комплексных амплитуд A и B случайны, в таком случае $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$. Более того, средние значения различных степеней амплитуд и их комплексно сопряженных значений, т. е. $\langle AB^* \rangle$, $\langle |A|^2 A^* B \rangle$ и т. д. также равны нулю. Однако средние значения произведения амплитуд на их комплексно сопряженные значения положительны

$$\langle |A|^{2n} \rangle \neq 0, \quad \langle |B|^{2n} \rangle \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Прибором, который может дать ответ на поставленный вопрос, является звездный интерферометр Майкельсона (фиг. 3). В самом деле, поле в точке P в момент t представляет собой сумму двух полей, падающих на зеркала M_1 и M_2 в один и тот же момент времени t' (если оптические пути M_1P и M_2P равны). Каждое из этих двух полей можно записать в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в виде (2.8), поэтому средняя интенсивность в точке P будет равна

$$\begin{aligned} \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle = & 2 \operatorname{Re} \{ \langle |A|^2 + |B|^2 \rangle + \\ & + \langle |A|^2 \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} + \langle |B|^2 \rangle e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

¹⁾ В о р н М., В о л ф Е., Principles of Optics, London, 1959, Ch. 10.

здесь мы воспользовались условием

$$\langle AB^* \rangle = \langle A \rangle \langle B^* \rangle = 0.$$

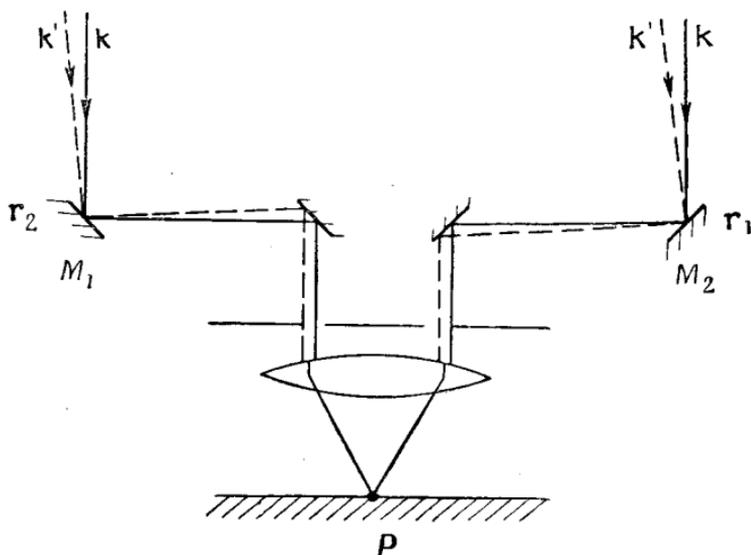
Если ввести функцию корреляции вида (2.4)

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t', \mathbf{r}_2 t') = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1 t') E^{(+)}(\mathbf{r}_2 t') \rangle = \langle |A|^2 \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} + \langle |B|^2 \rangle e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}, \quad (2.12)$$

то интенсивность можно записать в виде

$$\langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle = 2 \operatorname{Re} \{ \langle |A|^2 + |B|^2 \rangle + G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t', \mathbf{r}_2 t') \}. \quad (2.13)$$

Корреляционная функция, описывающая интерференционный эффект, не зависит от времени из-за стационарного характера рассматриваемого поля.



Ф и г. 3

Из соотношения (2.12) видно, что корреляционная функция содержит два члена, осциллирующих при изменении координат. Смещения от точки \$P\$, при которых эти два члена могут усиливать или ослаблять друг друга, зависят от разности \$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\$. Если \$\langle |A|^2 \rangle = \langle |B|^2 \rangle\$, то из выражения (2.11) получаем

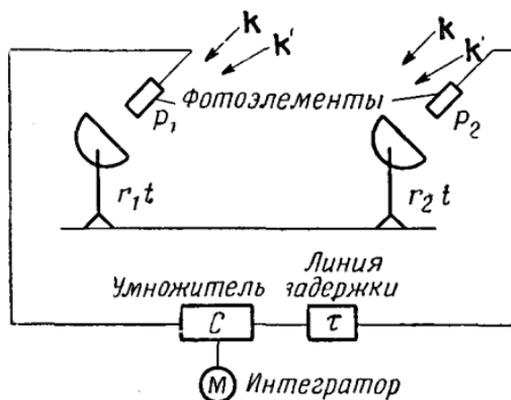
$$\langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle = 4 \langle |A|^2 \rangle \left\{ 1 + \cos \left[\frac{1}{2} (\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \cos \left[\frac{1}{2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \right\}. \quad (2.14)$$

Таким образом, интерференционная картина в фокусе телескопа представляет собой систему параллельных колец. Не останавливаясь

на подробном расчете этой системы, укажем лишь на одно характерное свойство интерференционной картины, следующее из выражения (2.14): она полностью исчезает, если разность $r_1 - r_2$ такова, что

$$\cos \left[\frac{1}{2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] = 0. \quad (2.15)$$

Наблюдая кольца, можно заключить, что имеем дело не с одним, а с двумя источниками; значения разности $r_1 - r_2$, при которой кольца исчезают, определяет угловое расстояние между источниками.



Ф и г. 4

Интерферометр Майкельсона действительно использовался для измерения углового расстояния между двойными звездами, а также для измерения угловых диаметров звезд. Однако вследствие трудностей, присущих работе с большим интерферометром, этим способом было измерено лишь небольшое число звездных диаметров. Очевидно, что для такой системы требуется очень большая механическая точность; кроме того, интерференционную картину легко могут смазать случайные изменения коэффициента преломления вдоль оптического пути.

Приборы, полностью подобные звездному интерферометру Майкельсона, были использованы в радиоастрономии для определения угловых размеров звездных источников радиоизлучения. Они состояли из двух отдельных антенн, сигналы которых подавались на общую регистрирующую систему. В этом случае также трудно увеличить расстояние между антеннами, не внося случайной разности фаз на пути от антенны до детектора.

Чтобы обойти эту трудность, Хэнбери Браун и Твисс предложили другой вид радиointерферометра (фиг. 4). Сигналы антенн детектируются в этом случае независимо; выходные сигналы детекторов на

значительно более низкой частоте поступают в общий коррелятор, где их произведение усредняется.

Угловые размеры источника определяют, анализируя, как изменяется корреляционная функция интенсивности флуктуаций сигналов при раздвижении антенн. Аналогичное устройство можно использовать и для видимого света.

Сущность приема, использованного Хэнбери Брауном и Твиссом, заключается в том, чтобы протектировать проходящее излучение и передать на центральный наблюдательный пункт лишь величину флуктуаций интенсивностей, попадающих в приемники. Так как сигналы детекторов являются относительно низкочастотными, их легко передать без искажений на расстояние, гораздо большее, чем предельные размеры интерферометра Майкельсона. Этот эксперимент по своей природе совершенно отличен от описанного выше интерференционного опыта, ибо имеет дело со средним от произведения двух случайных интенсивностей, а не с одной.

Легко видеть, что в среднем от произведения двух сигналов имеется интерференционный член, позволяющий разделить две проходящие волны. Прежде всего заметим, что сигнал квадратичного детектора, расположенного в точке P_1 , пропорционален величине

$$|E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)|^2 = |A|^2 + |B|^2 + AB^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_1} + A^* B e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_1}. \quad (2.16)$$

Этот сигнал уже не содержит быстрых осцилляций проходящей волны, однако среднее от такого преобразованного сигнала не содержит интерференционного члена (так как $\langle AB^* \rangle = 0$). Хэнбери Браун и Твисс перемножили оба преобразованных сигнала, а *только после этого* измерили статистическое среднее. Среднее от произведения двух интенсивностей вида (2.16) можно записать в виде

$$\langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_1 t)|^2 |E^{(+)}(\mathbf{r}_2 t)|^2 \rangle = \langle (|A|^2 + |B|^2)^2 \rangle + 2 \langle |A|^2 |B|^2 \rangle \cos [(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)], \quad (2.17)$$

где мы воспользовались тем, что $\langle |A|^2 A^* B \rangle = 0$ и т. д. Член с косинусом, очевидно, соответствует интерференционному эффекту. Наблюдая за поведением этого члена при изменении $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, мы можем разделить два источника. Важно заметить, что интерференционный эффект появляется при усреднении величины, пропорциональной четвертой степени амплитуд поля, тогда как в случае интерферометра Майкельсона он квадратичен по полю.

Хотя интерференционные опыты интерпретировались с помощью средних по ансамблю, ясно, что в этих опытах проводится усреднение по времени. Однако усреднение по времени обычно труднее выполнить, чем усреднение по ансамблю. При рассмотрении резуль-

татов интерферометрических измерений, усредненных по времени, необходимо учесть, что плоские волны в общем случае не являются абсолютно монохроматичными. Это значит, что коэффициенты A и B на самом деле изменяются во времени, поэтому мы должны считать $A(t)$ и $B(t)$ стохастическими функциями времени. Ниже будет показано, что в случае обычных источников света для описания амплитуд можно использовать гауссовский закон распределения. А так как процессы, описываемые таким распределением, обладают свойством эргодичности, то мы вправе отождествить среднее по времени со средним по ансамблю.

Введение в квантовую теорию

При квантовомеханическом описании электромагнитного поля мы должны считать векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{B} операторами, удовлетворяющими уравнениям Максвелла. Состояния $| \rangle$ (и сопряженные с ними состояния $\langle |$), на которые действуют эти операторы, содержат информацию, определяющую поле. При измерении физической величины, соответствующей оператору \mathcal{O} , мы, вообще говоря, не ожидаем, что каждый раз будем получать один и тот же результат. Измеренные величины флуктуируют около среднего значения, определяемого произведением $\langle | \mathcal{O} | \rangle$. Флуктуации отсутствуют только в том случае, когда состояние $| \rangle$ оказывается собственным состоянием \mathcal{O} , т. е. если

$$\mathcal{O} | \rangle = \mathcal{O}' | \rangle, \quad (3.1)$$

где \mathcal{O}' есть обычное число, а не оператор. В этом случае удобно пользоваться записью Дирака: \mathcal{O}' обозначает собственное значение состояния, записанного в виде $| \mathcal{O}' \rangle$.

Так же, как и в классической электромагнитной теории, удобно разделить оператор поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (являющийся, естественно, эрмитовым) на две части с положительной и отрицательной частотами:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$

Как мы уже отмечали, эти части представляют комплексные, а не реальные поля, поэтому операторы $\mathbf{E}^{(\pm)}$ не являются эрмитовыми, но эрмитово сопряжены по отношению друг к другу:

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^\dagger. \quad (3.3)$$

В то время как в классической теории поля $\mathbf{E}^{(+)}$ и $\mathbf{E}^{(-)}$ имеют одинаковое значение, в квантовой теории они обычно играют существенно разные роли. Оператор $\mathbf{E}^{(+)}$ описывает уничтожение фотона, тогда как $\mathbf{E}^{(-)}$ — его рождение. Эта идентификация операторов есть фактически единственный факт, который мы должны позаимствовать из более формального аппарата квантовой теории поля.

Мы должны твердо помнить, что все измерения производятся с электрическим полем, описываемым эрмитовым оператором $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в виде (3.2). В классическом предельном случае комплексные поля

$E^{(+)}$ и $E^{(-)}$ дают обычно одинаковый вклад в наши измерения. С квантовомеханической точки зрения это происходит потому, что в классическом предельном случае энергия кванта столь мала ($\hbar\omega \rightarrow 0$), что пробный заряд испускает кванты с той же вероятностью, с которой поглощает их. С другой стороны, в квантовой теории следует ожидать, что поля $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$ дадут существенно разные вклады в измеряемые нами величины, например в амплитуды вероятностей переходов.

Если в качестве пробных систем для электрических полей использовать атомные системы в основных состояниях, то такие атомы могут лишь поглощать кванты, так как у них нет избытка энергии для излучения фотонов. В случае обычного фотодетектора при определении амплитуд вероятностей переходов существенную роль играет лишь оператор аннигиляции $E^{(-)}$. Точнее говоря, если провести расчет амплитуды вероятности перехода, используя первый порядок теории возмущений, то легко получить, что оператор рождения $E^{(+)}$ соответствует такой малой амплитуде вероятности (которая, к тому же, быстро меняется во времени), что она вообще не изменяет наблюдаемого эффекта. Оператор рождения может дать существенный вклад только в том случае, если детектор содержит возбужденные атомы. (Энергия тепловых флуктуаций слишком мала, чтобы возбудить атомы до энергий оптических переходов, но на СВЧ этот эффект иногда необходимо принимать во внимание.)

В третьем и более высоких порядках теории возмущений, описывающей процессы поглощения, оператор рождения играет весьма малую роль. Он дает так называемую радиационную поправку к первому порядку вероятности поглощения, которая по всем оценкам очень мала.

Итак, при рассмотрении процесса регистрации квантов атомным фотодетектором с довольно хорошей точностью можно принимать в расчет только поле $E^{(+)}$ и пренебречь полем $E^{(-)}$. Хотя это утверждение, очевидно, является лишь приближенным, тем не менее оно важно, так как позволяет сформулировать теорию с помощью неэрмитовых операторов. Как мы увидим, такая формулировка весьма перспективна для анализа классического предельного случая.

Для дальнейшего выяснения сущности некоторых величин, измеряемых в опытах по счету фотонов, рассмотрим роль, которую играет оператор поля при расчете соответствующих вероятностей перехода. (В следующей лекции мы подробно укажем, как рассчитывают эти вероятности, учитывая атомную природу детектора.) При этом мы на некоторое время отвлечемся от конкретного типа счетчика фотонов и предположим просто, что он представляет собой идеальный прибор, чувствительный к полю $E^{(+)}$ (\mathbf{r}, t) в одной-единственной точке пространства \mathbf{r} в каждый момент времени t . Будем

считать, что вероятность перехода с поглощением фотона из поля в точке \mathbf{r} в момент t пропорциональна величине

$$\omega_{i \rightarrow f} = \langle f | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2, \quad (3.4)$$

где $|i\rangle$ — начальное состояние поля перед процессом регистрации, а $|f\rangle$ — конечное состояние поля после этого процесса. На опыте мы не можем измерить конечное состояние поля; единственная величина, которую можно измерить, — скорость счета. Чтобы ее рассчитать, необходимо просуммировать правые части (3.4) по всем возможным конечным состояниям поля после поглощения. Полученную сумму можно разложить по полному набору конечных состояний. Те состояния, которые не реализуются [например, состояния $|f\rangle$, отличающиеся от $|i\rangle$ на два или более фотона], не дадут в нее вклада, так как они ортогональны состоянию

$$E^{(+)}(\mathbf{r}t) | i \rangle.$$

В результате суммирования по конечным состояниям скорость счета получается равной

$$\omega = \sum_f \langle f | E^+(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2 = \langle i | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^+(\mathbf{r}, t) | i \rangle; \quad (3.5)$$

здесь было использовано условие полноты

$$\sum |f\rangle \langle f| = 1.$$

Скорость счета ω пропорциональна вероятности (в единицу времени) перехода, при котором идеальный счетчик фотонов, расположенный в точке \mathbf{r} , поглощает фотон из поля в момент времени t . Эта вероятность, согласно (3.5), равна ожидаемому значению положительно определенного эрмитова оператора $E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, взятого в состоянии $|i\rangle$. Соотношение (3.5) ясно показывает, что чувствительность счетчика пропорциональна не квадрату напряженности реального поля (как это предполагалось во многих «пслуклассических» расчетах), а ожидаемому значению оператора, соответствующего квадрату абсолютной величины комплексной напряженности поля.

До сих пор мы полагали, что знаем состояние поля $|i\rangle$. Разумеется, это не означает, что мы можем предсказать результат отдельного измерения, сделанного нашим счетчиком. Если повторить измерение, то, весьма вероятно, получится другой результат; равенство (3.5) дает только среднее значение этих измерений. Таким образом, квантовая механика вынуждает нас говорить о средних значениях по ансамблю даже тогда, когда состояние поля точно известно.

В действительности мы почти никогда не знаем состояния $|i\rangle$ достаточно точно. Источники излучения являются обычно сложными

системами со многими степенями свободы, так что состояние $|i\rangle$ зависит, как правило, от многих неконтролируемых параметров. Так как точное состояние поля не известно, то необходимо прибегнуть к его статистическому описанию, которое дает нам сведения о поле путем усреднения по неизвестным параметрам. Предсказания, получаемые при таком подходе, необходимо сравнивать с экспериментальными значениями средних по ансамблю. Таким образом, для получения скорости счета как среднего по ансамблю необходимо провести в равенстве (3.5) усреднение по всем случайным переменным, входящим в состояние $|i\rangle$,

$$\omega = \{ \langle i | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \}_{\text{ср. по } i}. \quad (3.6)$$

Вводя оператор плотности $\varrho = \{ |i\rangle \langle i| \}_{\text{ср. по } i}$, можно записать это среднее следующим образом:

$$\omega = \text{Sp} \{ \varrho E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \}. \quad (3.7)$$

Оператор плотности представляет собой среднее из операторов проекций по начальным состояниям поля. Очевидно, что он эрмитов, $\varrho^\dagger = \varrho$, и, кроме того, положительно определен

$$\langle j | \varrho | j \rangle \geq 0$$

для любого состояния $|j\rangle$. Стоит подчеркнуть, что в соотношении (3.7) подразумевается двойное усреднение. То обстоятельство, что мы должны усреднить измерения, сделанные с чистым состоянием, является требованием, присущим именно квантовой механике; оно не имеет классической аналогии. В отличие от этого среднее по ансамблю начальных состояний аналогично усреднению по совокупности случайных коэффициентов $\{C_k\}$ классической теории.

Из выражения (3.7) видно, что скорость счета идеального счетчика фотонов можно записать с помощью квантовомеханической функции корреляции

$$G^{(1)}(x, x') = \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x) E^{(+)}(x')], \quad x \equiv \{\mathbf{r}, t\}, \quad (3.8)$$

которая аналогична функции корреляции, введенной при описании классических интерференционных экспериментов. Для описания более сложных опытов, например эксперимента Хэнбери Брауна и Твисса, полезно определить более общий набор корреляционных функций

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{2n}) = \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x_1) \dots \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{2n})]. \quad (3.9)$$

Функцию $G^{(n)}$ будем называть функцией корреляции n -го порядка. Аналитические свойства этого набора функций и их связь с экспериментальными измерениями будут обсуждены позднее.

Для такого определения можно, конечно, выбрать и более широкий класс функций, чем $G^{(n)}$, обратившись к средним значениям типа $\text{Sp} [\rho E^{(-)} E^{(+)} E^{(+)} E^{(+)}]$, содержащим неодинаковое количество операторов рождения и уничтожения. Однако мы не будем давать таким средним какое-либо специальное обозначение, так как они не соответствуют величинам, измеряемым в обычных опытах по счету фотонов. В принципе такого рода средние значения могут измеряться в экспериментах другого рода, однако они всегда равны нулю в стационарных состояниях поля, а также и в значительно более общем случае, когда фазы полей случайны. Последняя ситуация довольно характерна для оптических и других чрезвычайно высокочастотных полей.

Одноатомный детектор фотонов

Рассмотрим процесс фоторегистрации несколько более подробно. Будем предполагать, что наш счетчик фотонов представляет собой идеализированный прибор, имеющий в качестве чувствительного элемента один атом, который может менять состояние при поглощении фотонов, как это имеет место при фотоэффекте. Предположим, что атом экранирован от поля, так что мы можем с помощью некоторого рода затвора включать счетчик в момент времени t_0 и снова закрывать в момент времени t . Наша задача — рассчитать вероятность того, что поглощение фотона произойдет именно в течение этого интервала.

Будем предполагать также, что детектор достаточно удален от источника излучения, так что поле можно считать свободным. Гамильтониан системы поле — детектор можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I, \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{0, \text{ат}} + \mathcal{H}_{0, \text{F}},$$

где \mathcal{H}_0 — сумма гамильтонианов свободного поля и атома. В представлении Шредингера гамильтониан взаимодействия \mathcal{H}_I не зависит от времени, в представлении же взаимодействия — зависит. В дипольном приближении (являющимся весьма точным для оптических частот) можно представить зависящий от времени гамильтониан взаимодействия в виде

$$\mathcal{H}_I = e^{i/\hbar \mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_{Ie} e^{-i/\hbar \mathcal{H}_0 t} = -e \sum_{\nu} \mathbf{q}_{\nu}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (4.1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор атомных ядер, а \mathbf{q}_{ν} — оператор положения ν -го электрона относительно ядер; оператор напряженности поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ описывает зависимость от времени свободного поля, не возмущенного присутствием атома.

Уравнение Шредингера для системы поле — атом в представлении взаимодействия имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = \mathcal{H}_I(t) |t\rangle. \quad (4.2)$$

Его общее решение можно записать в виде

$$|t\rangle = U(t, t_0) |t_0\rangle,$$

где $U(t, t_0)$ есть унитарный оператор изменения во времени, описывающий путь, по которому происходит изменение начального состояния под действием возмущения. В первом порядке теории возмущений решение имеет хорошо знакомый вид

$$|t\rangle = \left\{ 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_I(t') dt' \right\} |t_0\rangle. \quad (4.3)$$

Предположим теперь, что исходное состояние системы есть

$$|gi\rangle = |g\rangle|i\rangle,$$

где $|i\rangle$ — некоторое известное состояние поля, а $|g\rangle$ — основное состояние атома. Нас интересует вероятность того, что система к моменту времени t перейдет в точно определенное состояние

$$|af\rangle = |a\rangle|f\rangle,$$

где $|a\rangle$ — возбужденное состояние атома, а $|f\rangle$ — конечное состояние поля. Эта вероятность определяется квадратом абсолютного значения матричного элемента

$$\langle af|U(t, t_0)|gi\rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \langle af|\mathcal{H}_I(t')|gi\rangle dt'. \quad (4.4)$$

[Член нулевого порядка от $U(t, t_0)$ в выражении (4.3) не дает вклада из-за ортогональности электронных состояний $|a\rangle$ и $|g\rangle$.] Подставляя сюда оператор взаимодействия (4.1), можно разделить матричный элемент на две части: матричный элемент для атома и матричный элемент для поля

$$\langle af|U(t, t_0)|gi\rangle = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\gamma} \int_{t_0}^t \langle a|\mathbf{q}_{\gamma}(t')|g\rangle \langle f|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')|i\rangle dt'. \quad (4.5)$$

Чтобы оценить атомный матричный элемент, вспомним, что

$$\mathbf{q}_{\gamma}(t') = e^{i/\hbar \mathcal{H}_0 t'} \mathbf{q}_{\gamma}(0) e^{-i/\hbar \mathcal{H}_0 t'} = e^{i/\hbar \mathcal{H}_0, \text{ат}} t' \mathbf{q}_{\gamma}(0) e^{-i/\hbar \mathcal{H}_0, \text{ат}} t';$$

это справедливо в силу того, что гамильтониан поля $\mathcal{H}_{0, \text{р}}$ коммутирует как с атомным гамильтонианом $\mathcal{H}_{0, \text{ат}}$, так и с координатой электрона $\mathbf{q}_{\gamma}(0)$. Атомный матричный элемент можно записать теперь в виде

$$\langle a|\sum_{\gamma} \mathbf{q}_{\gamma}(t')|g\rangle = \mathbf{M}_{ag} e^{i\omega_{ag} t'},$$

где

$$\mathbf{M}_{ag} = \langle a|\sum_{\gamma} \mathbf{q}_{\gamma}(0)|g\rangle,$$

$$\hbar\omega_{ag} = E_a - E_g.$$

Таким образом, матричный элемент M_{ag} не зависит от времени и является просто коэффициентом в выражении для амплитуды вероятности перехода

$$\langle af | U(t, t_0) | gi \rangle = \frac{ie}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ag}t'} M_{ag} \langle f | E(\mathbf{r}, t') | i \rangle dt'. \quad (4.6)$$

Заменим $E(\mathbf{r}, t')$ в этом выражении на сумму двух операторов $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ и $E^{(-)}(\mathbf{r}, t)$. Оператор рождения $E^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ содержит только отрицательные частоты, т. е. зависимость его от времени выражается экспонентой $e^{i\omega t}$ для $\omega > 0$. Интегралы по времени от членов с такой временной зависимостью быстро осциллируют при изменении t и весьма малы по амплитуде по сравнению с членами, получающимися за счет оператора уничтожения $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$. Фактически будут иметь место лишь те переходы, для которых выполняется закон сохранения энергии. Чтобы убедиться в том, что при атомных переходах энергия квантов поля сохраняется с точностью до $\Delta E = \hbar\Delta\omega$, необходимо оставить наш затвор открытым в течение времени $t - t_0 \gg 1/\Delta\omega$. Практически затвор всегда открыт в течение многих периодов колебаний ($\Delta\omega \ll \omega_{ag}$) и, следовательно, вклад радиационного члена $E^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ пренебрежимо мал. (Так же как и в предыдущей лекции предполагается, что детектор находится при относительно низкой температуре.)

Теперь мы должны просуммировать квадраты модулей амплитуды (4.6) по всем конечным состояниям $|f\rangle$ поля, так как не производится никаких наблюдений для определения этих состояний. Одно из преимуществ использования выражения (4.6) для амплитуды заключается в том, что при суммировании по конечным состояниям можно суммировать по *всем* состояниям полной системы. Те конечные состояния, в которые физически поле перейти не может, присутствуют в сумме, но не вносят вклада из-за равенства нулю либо самих матричных элементов соответствующих этим состояниям, либо интегралов по времени от них. Таким образом, ограничение, накладываемое законом сохранения энергии, учитывается самой структурой временной зависимости интегралов, входящих в сумму квадратов амплитуд:

$$\begin{aligned} & \sum_f |\langle af | U(t, t_0) | gi \rangle|^2 = \\ & = \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt' dt'' e^{i\omega_{ag}(t''-t')} \sum_{\mu, \nu} M_{ag, \mu}^* M_{ag, \nu} \times \\ & \times \langle i | E_{\mu}^{(-)}(\mathbf{r}, t') E_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t'') | i \rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

которая получена при использовании соотношения

$$\langle f | \mathbf{E}^{(+)} | i \rangle^* = \langle i | \mathbf{E}^{(-)} | f \rangle$$

и условия полноты

$$\sum_f |f\rangle \langle f| = 1.$$

Мы уже обсуждали необходимость усреднения таких выражений, как (4.7), по ансамблю начальных состояний $|i\rangle$, поскольку на практике начальное состояние редко бывает известно точно. Таким образом, вероятность перехода равна

$$\begin{aligned} p_{g \rightarrow a}(t) &= \left\{ \sum |\langle af | U(t, t_0) | gi \rangle|^2 \right\}_{\text{ср. по } i} = \\ &= \left(\frac{e}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu, \nu} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt' dt'' e^{i\omega_{ag}(t''-t')} \times \\ &\quad \times M_{ag, \mu}^* M_{ag, \nu} \text{Sp} \{ \rho E_{\mu}^{(-)}(\mathbf{r}, t') E_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t'') \} = \\ &= \left(\frac{e}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu, \nu} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt' dt'' e^{i\omega_{ag}(t''-t')} M_{ag, \mu}^* M_{ag, \nu} G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t', \mathbf{r}t''). \quad (4.8) \end{aligned}$$

Определения оператора плотности ρ и функции корреляции первого порядка $G^{(1)}$ были даны в предыдущей лекции.

При выводе соотношения (4.8) мы предполагали, что атом совершает переход в точно определенное состояние $|a\rangle$. Счетчики фотонов подобного типа были недавно предложены Бломбергенем и Вебером (фиг. 5). Поле с частотой ω переводит атом на уровень a , а поле накачки с частотой ω_p переводит его на уровень b . Излучение фотона с суммарной частотой $\omega_s = \omega + \omega_p$ означает поглощение фотона из внешнего поля ω .

Фиг. 5

Однако в используемых в настоящее время детекторах конечные состояния $|a\rangle$ образуют тесную группу уровней или даже континуум (например, при ионизации). Детектор поля, основанный на регистрации фотоэлектронов, не всегда способен различить конечные состояния, например конечные состояния с различными импульсами. Поэтому при оценке вероятности регистрации фотонов таким счетчиком необходимо просуммировать вероятности, даваемые формулой (4.8), по континууму конечных состояний $|a\rangle$. Однако не все испущенные фотоэлектроны можно зарегистрировать. Часть их поглощается в веществе фотокатода или вылетает из него под такими углами, что не попадает на коллектор. В принципе

можно, конечно, построить такой прибор, который будет способен сортировать фотоэлектроны по энергиям перед регистрацией.

Мы не будем подробно обсуждать детали устройств, используемых для регистрации фотоэлектронов; предположим просто, что вероятность регистрации электрона после поглощения фотона определяется некоторой функцией $R(a)$. Закон, по которому $R(a)$ изменяется в зависимости от конечного состояния $|a\rangle$ системы электрон — ион, будет, вообще говоря, зависеть от геометрических и физических свойств конкретного прибора.

Если просуммировать теперь вероятности, даваемые выражением (4.8) по конечным состояниям $|a\rangle$, используя $R(a)$ в качестве весовой функции, то для вероятности регистрации и поглощения фотона нашим одноатомным детектором находим

$$p^{(1)}(t) = \sum_a R(a) p_{g \rightarrow a}(t) = \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \sum_{\mu, \nu} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt' dt'' \times \\ \times \sum_a R(a) M_{ag, \mu}^* M_{ag, \nu} e^{i\omega_{ag}(t''-t')} G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t', \mathbf{r}t''). \quad (4.9)$$

Разобьем теперь сумму по конечным состояниям на две части: на сумму по конечным энергиям электрона и сумму по всем прочим переменным (направления импульсов, спин и т. д.). Для этого введем функцию чувствительности

$$s_{\nu\mu}(\omega) = 2\pi \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \sum_a R(a) M_{ag, \nu} M_{ag, \mu}^* \delta'_1(\omega - \omega_{ag}), \quad (4.10)$$

которая содержит вклады только от переходов с фиксированной передачей энергии $\hbar\omega$. (Заметим, что хотя величина $s_{\nu\mu}(\omega)$ и записывается как сумма δ -функций, на самом деле для рассматриваемого случая она является гладкой функцией, так как сумма по состояниям $|a\rangle$ представляет по существу интегрирование по состояниям с непрерывным энергетическим спектром.)

Используя функцию чувствительности и свойства содержащейся в ней δ -функции, можем записать вероятность регистрации (4.9) в виде

$$p^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{\mu, \nu} s_{\nu\mu}(\omega) e^{i\omega(t''-t')} G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t', \mathbf{r}t''); \quad (4.11)$$

интегрирование по ω проводится в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, так как $s_{\nu\mu}(\omega) = 0$ при $\omega < 0$. Используя фурье-преобразование для функции чувствительности

$$S_{\nu\mu}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\nu\mu}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.12)$$

окончательно получаем

$$p^{(1)}(t) = \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \sum_{\nu\mu} S_{\nu\mu}(t'' - t') G_{\mu\nu}^{(1)}(rt', rt''). \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) представляет собой полную вероятность перехода, когда затвор открыт от t_0 до t . Чтобы получить скорость регистрации, необходимо продифференцировать это выражение по t .

В общем случае процесс поглощения не локализован во времени. Нельзя сказать, что фотон поглощается в течение данного временного интервала, малого по сравнению со временем, в течение которого затвор был открыт. Действительно, если предположить, что функция чувствительности $s_{\nu\mu}(\omega)$ имеет резкий максимум с малой шириной $\Delta\omega$, фурье-образ ее $S_{\nu\mu}(t'' - t')$ будет иметь неисчезающее значение при

$$|t'' - t'| \ll \frac{1}{\Delta\omega},$$

который при малом $\Delta\omega$ может быть сколь угодно большим. Степень неопределенности во времени, грубо говоря, обратно пропорциональна полосе чувствительности нашего прибора. Если полоса узкая, то счетчик измеряет среднее значение величины $G^{(1)}(rt', rt'')$, где t' существенно отлично от t'' . В оптических экспериментах чувствительность в узкой полосе получают с помощью узкополосного светофильтра, помещенного перед широкополосным счетчиком, т. е. «фильтруют» функцию корреляции $G^{(1)}$, а не «сортируют» фотоэлектроны. Поэтому широкополосные счетчики в этом смысле несколько более универсальны, чем узкополосные.

В предельном случае очень широкой полосы пропускания процесс регистрации становится почти локализованным во времени. Мы уже упоминали в предыдущей лекции об идеальном фотодетекторе; предположим теперь, что такой детектор имеет функцию чувствительности, одинаковую для всех частот. Чтобы легче понять смысл этого предположения, заметим, что коль скоро функция чувствительности постоянна, то равенство (4.12) сводится к выражению

$$S_{\nu\mu}(t) = s_{\nu\mu} \delta(t). \quad (4.14)$$

Процесс поглощения фотона в этом случае становится локализованным во времени, а вероятность переходов, даваемая формулой (4.13), принимает вид

$$p^{(1)}(t) = \sum_{\mu, \nu} s_{\nu\mu} \int_{t_0}^t G^{(1)}(rt', rt') dt'. \quad (4.15)$$

Предположение о независимости чувствительности от частоты не реализуется даже при $\omega > 0$. Если же учитывать отрицательные

значения ω , то это условие вообще невыполнимо, так как $s_{\nu\mu}(\omega) = 0$ при $\omega < 0$.

Указанные трудности не препятствуют, однако, созданию реальных приборов, сколь угодно близких по своим свойствам к идеальному детектору, если использовать их для регистрации полей излучения с ограниченной полосой частот. Если предположить, что измеряемое поле имеет конечную полосу частот, то достаточно потребовать, чтобы чувствительность детектора была постоянна только в этой полосе. Детектор работает тогда как идеальный, независимо от того, как изменяется его чувствительность вне полосы частот поля возбуждения.

Покажем теперь, что это действительно так. Рассмотрим несколько подробнее выражение (4.11) для вероятности перехода. Представим себе, что интервал времени $t - t_0$ неограниченно велик, т. е. положим, что $t \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow -\infty$. Ясно, что фурье-образ корреляционной функции $K_{\mu\nu}(\omega)$

$$K_{\mu\nu}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' e^{i\omega(t''-t')} G_{\mu\nu}^{(1)}(rt', rt'') \quad (4.16)$$

равен нулю для частот ω , лежащих вне полосы возбуждения [т. е. диагональные матричные элементы $K_{\mu\nu}(\omega)$ просто пропорциональны спектральной плотности энергии трех компонент поля]. Используя выражение для $K_{\mu\nu}(\omega)$, перепишем выражение (4.11) следующим образом:

$$p^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu\nu} s_{\nu\mu}(\omega) K_{\mu\nu}(\omega) d\omega. \quad (4.17)$$

Далее, поскольку чувствительность $s_{\nu\mu}(\omega)$ постоянна во всей полосе возбуждения (при этом не важно, как она ведет себя вне этой полосы), то ее можно вынести из-под знака интеграла

$$\begin{aligned} p^{(1)}(t) &= \sum_{\mu\nu} s_{\nu\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\mu\nu}(\omega) d\omega = \\ &= \sum_{\mu\nu} s_{\nu\mu} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\mu\nu}^{(1)}(rt', rt') dt'. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Выражение (4.18) снова указывает на локализацию во времени процесса поглощения фотона [что мы уже отмечали выше в связи с формулой (4.15)]; другими словами, оба аргумента корреляционной функции в подынтегральном выражении имеют одно и то же значение.

Чтобы получить этот результат, мы предполагали, что интервал времени $t - t_0$ бесконечно велик. Для того чтобы учесть конечность этого временного интервала, введем функцию $\eta(t')$, определяемую следующим образом:

$$\eta(t') = \begin{cases} 0 & \text{при } t' < t_0, \\ 1 & \text{при } t_0 < t' < t, \\ 0 & \text{при } t' > t. \end{cases}$$

Если умножить функцию корреляции в подынтегральном выражении на $\eta(t')\eta(t'')$, то пределы интегрирования по времени в соотношении (4.11) можно будет расширить от $-\infty$ до ∞ . Это расширение области интегрирования по времени означает, что мы еще раз воспользовались тем условием, которое привело нас к выражению (4.18). Последний случай отличается, однако, тем, что функцию $K_{\mu\nu}(\omega)$ следует теперь рассматривать как преобразование Фурье вида

$$K_{\mu\nu}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' e^{i\omega(t''-t')} \eta(t') G_{\mu\nu}^{(1)}(rt', rt'') \eta(t''). \quad (4.19)$$

Полоса частот этой функции, вообще говоря, отличается от полосы приходящего излучения. Однако разница существенна только в том случае, когда период времени, в течение которого открыт затвор, чрезвычайно мал.

Предположим, что ширина полосы частот приходящего излучения, т. е. функции корреляции $G^{(1)}$ равна $\delta\omega$. Полоса, связанная с функциями η , имеет ширину порядка $(t - t_0)^{-1}$. Ширина полосы частот функции $K_{\mu\nu}(\omega)$ имеет порядок большей из этих двух величин. Если предположить далее, что функция чувствительности нашего детектора заметно изменяется лишь в пределах интервала $\Delta\omega$, то для вероятности перехода получаем выражение, которое сводится к виду (4.15) при двух условиях:

$$\Delta\omega \gg \delta\omega, \quad \Delta\omega \gg (t - t_0)^{-1}.$$

Второе из этих соотношений определяет нижнюю границу величины $1/\Delta\omega$, равной времени, в течение которого может быть открыт наш затвор, при условии, что счетчик ведет себя, как идеальный.

Дифференцируя равенство (4.15) по времени, получаем скорость счета

$$\dot{\omega}^{(1)}(t) = \frac{dp^{(1)}(t)}{dt} = \sum_{\nu\mu} s_{\nu\mu} G_{\nu\mu}^{(1)}(rt, rt). \quad (4.20)$$

Тензорные индексы функций чувствительности и корреляции были нужны для иллюстрации роли этих функций в определении вероят-

ности перехода. Теперь мы их отбросим, предполагая, что поле обладает строго определенной поляризацией \hat{e} . На практике это осуществляется с помощью поляризационного фильтра перед счетчиком.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} E^{(-)}(\mathbf{r}, t) &= \hat{e} \cdot \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \\ E^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \hat{e}^* \cdot \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \\ G^{(1)}(rt, r't') &= \text{Sp} [\rho E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}', t')], \\ s &= \sum_{\mu\nu} \hat{e}_\nu s_{\nu\mu} \hat{e}_\mu^*, \end{aligned} \quad (4.21)$$

то выражение (4.20) можно переписать следующим образом:

$$\omega^{(1)}(t) = s G^{(1)}(rt, rt). \quad (4.22)$$

Таким образом, мы доказали справедливость сделанного ранее предположения о том, что идеальный счетчик фотонов можно построить так, что он будет реагировать на поле в данный момент времени. Скорость счета такого прибора пропорциональна корреляционной функции первого порядка, заданной в одной точке в один момент времени.

При выводе приведенных выше результатов мы воспользовались приближением электрического дипольного взаимодействия. Использование этого приближения было обусловлено скорее соображениями удобства, чем необходимостью. Мы могли бы использовать также общую связь между импульсами атомных электронов и векторным потенциалом. В этом случае нам пришлось бы вводить функции корреляции для векторного потенциала, а не для электрического поля. Единственное различие в расчетах заключалось бы в учете конечных размеров атома. Вместо матричных элементов, имеющих вид постоянных множителей в вероятностях переходов, пришлось бы интегрировать произведения атомных волновых функций и функций корреляции. Другими словами, вероятности переходов были бы интегралами, которые включали в себя функции корреляции для конечных пространственных и временных интервалов. К счастью, такие усложнения не обязательны для количественных оценок на оптических и более низких частотах.

Лекция 5

Детектор фотонов, состоящий из n атомов

Чувствительный элемент счетчика фотонов, который мы рассматривали до сих пор, состоял из одного-единственного атома. Поскольку такую конструкцию счетчика вряд ли возможно осуществить на практике, нам необходимо обобщить полученные результаты на случай сколь угодно большого числа атомов.

Мы осуществим это в два этапа. В настоящей лекции мы рассмотрим детекторы, состоящие из относительно небольшого числа атомов, и покажем, как эти результаты можно использовать для исследования корреляционных свойств более высоких порядков. Более детальный анализ экспериментов по счету фотонов мы отложим до последней лекции, так как сначала полезно обсудить когерентные свойства полей.

Как мы уже видели, измерения с помощью одноатомных детекторов фотонов приводят к функции корреляции первого порядка $G^{(1)}$. Однако существуют и более общие корреляционные свойства полей; некоторые из них связаны, например, с экспериментами, в которых регистрируются совпадения процессов поглощения фотонов в различных точках пространства и времени. Такой эксперимент выполнили, например, Хэнбери Браун и Твисс; мы обсудим его несколько подробнее в последующих лекциях.

Предположим, что n идентичных атомов расположены в разных точках поля $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ и образуют чувствительный элемент некоторого фотонного счетчика. Перед всеми атомами имеются затворы, открывающиеся на время от t_0 до t . Нас интересует вероятность того, что в течение этого интервала времени каждый из атомов поглотит фотон. Хотя эта задача носит несколько искусственный характер, ее решение существенно для более общей задачи, которую мы рассмотрим позднее.

Для расчета вероятности поглощения n фотонов нужно воспользоваться, строго говоря, n -м порядком теории возмущений. При этом можно, конечно, сделать большое число упрощений. Чтобы решить уравнение Шредингера в представлении взаимодействия

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = \mathcal{H}_I(t) |t\rangle, \quad (5.1)$$

мы ввели выше унитарный оператор изменения во времени, который преобразует состояния по схеме

$$|t\rangle = U(t, t_0) |t_0\rangle.$$

Формальное решение для $U(t, t_0)$ можно записать в виде

$$U(t, t_0) = \left\{ e^{-i/\hbar \int_{t_0}^t \mathcal{H}_I(t') dt'} \right\}_+, \quad (5.2a)$$

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \left\{ \mathcal{H}_I(t_1) \dots \mathcal{H}_I(t_n) \right\}_+ \prod_{p=1}^n dt_p, \quad (5.2b)$$

где символ $\{ \}_+$ означает операцию упорядочения по времени над всеми операторами внутри этих скобок, после которой произведение операторов записывалось так, чтобы их временные аргументы увеличивались слева направо. Представления (5.2a) и (5.2b) можно, по-видимому, довольно легко получить, записывая уравнение Шредингера (5.1) в интегральной форме и решая полученное интегральное уравнение с помощью степенных рядов.

Гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_I(t)$ для n атомов, взаимодействующих с полем, имеет вид

$$\mathcal{H}_I(t) = \sum_{j=1}^n \mathcal{H}_{I,j}(t), \quad (5.3)$$

где $\mathcal{H}_{I,j}(t)$ представляет взаимодействие с полем j -го атома. Каждый из этих членов имеет вид

$$\mathcal{H}_{I,j}(t) = -e \sum_{\nu} \mathbf{q}_{j\nu}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_j t), \quad (5.4)$$

который мы уже обсуждали. Для простоты предположим, что атомы динамически не зависят друг от друга, т. е. их гамильтонианы нулевого порядка разделяются и коммутируют друг с другом.

В наинизшем порядке теории возмущений процесс n -кратного поглощения описывается членом $U^{(n)}(t, t_0)$, т. е. членом n -го порядка в разложении (5.2b). Подставляя гамильтониан в виде (5.3) в (5.2b), получаем для $U^{(n)}(t, t_0)$ выражение, содержащее n^n членов, которые представляют собой все возможные способы, которыми n атомов могут принять участие в процессе n -го порядка. Многие из этих членов являются, однако, лишними, так как мы требуем, чтобы каждый атом участвовал в процессе один и только один раз. Члены, в которых гамильтониан для данного атома повторяется, описывают процессы, которые нас не интересуют. Вклад же в вероятность перехода дают члены, в которых $\mathcal{H}_{I,j}$ содержится лишь один раз.

Всего имеется $n!$ таких членов, и все они дают одинаковый вклад, так как скобка $\{ \}_+$ является симметричной функцией содержащихся в ней операторов. Поэтому член $U^{(n)}(t, t_0)$ сводится к выражению

$$\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \{ \mathcal{H}_{I,1}(t_1) \mathcal{H}_{I,2}(t_2) \dots \mathcal{H}_{I,n}(t_n) \}_+ \prod_{p=1}^n dt_p. \quad (5.5)$$

Так как ни один атом не может испустить фотон (каждый из них первоначально находится в основном состоянии), то вклад в амплитуду вероятности перехода будет давать лишь та часть оператора $\mathcal{H}_{I,j}$, которой соответствует поле с положительной частотой. Заменим оператор электрического поля в (5.4) на $E^{(+)}(\mathbf{r}_j, t)$ и обозначим получившийся в результате гамильтониан через $\mathcal{H}_{I,j}^{(+)}$. Операторы $\mathcal{H}_{I,j}^{(+)}$ коммутируют друг с другом, так как атомы динамически независимы, а поля $E^{(+)}(\mathbf{r}_j, t)$ коммутируют. Поэтому мы можем опустить скобку $\{ \}_+$ в формуле (5.5) и записать интересующую нас часть $U^{(n)}(t, t_0)$ как n -кратное произведение интегралов

$$\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \prod_{j=1}^n \int_{t_0}^t \mathcal{H}_{I,j}^{(+)}(t') dt'. \quad (5.6)$$

В результате получаем, что оператор, соответствующий интересующим нас переходам, есть просто произведение операторов, каждый из которых описывает процесс поглощения одного фотона. Это не означает, однако, что матрица оператора перехода факторизована.

При оценке матричного элемента оператора перехода (5.6) между двумя состояниями всей системы мы должны отметить, что отдельные атомы, находящиеся первоначально в одном и том же *основном состоянии*, могут совершать переходы в конечные состояния, *разные* для разных атомов. Если обозначить эти начальные и конечные состояния атомов как $|\{g\}\rangle$ и $|\{a_j\}\rangle$ и воспользоваться символами $|i, \{g\}\rangle$ и $|f, \{a_j\}\rangle$ для начальных и конечных состояний всей системы, то матричный элемент оператора (5.6) [члены $U^{(n)}(t, t_0)$] принимает вид

$$\begin{aligned} \langle f, \{a_j\} | U^{(n)}(t, t_0) | i, \{g\} \rangle = \\ = \left(\frac{ie}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \exp\left(i \sum_j \omega_{a_j g} t_j\right) \langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}_n, t_n) \dots \\ \dots E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle \prod_{j=1}^n M_{a_j g} \prod_{p=1}^n dt_p, \quad (5.7) \end{aligned}$$

где обозначения для атомных матричных элементов и частот аналогичны обозначениям предыдущей лекции, а тензорные индексы опущены в силу того, что поле имеет одну-единственную поляризацию [как в формуле (4.21)].

Теперь с амплитудой (5.7) необходимо проделать уже известные операции возведения в квадрат, суммирования по конечным и усреднения по начальным состояниям поля. В результате получим вероятность перехода каждого из атомов в точно определенное конечное состояние $|a_j\rangle$. Так как каждое из этих конечных состояний является в общем случае частью континуума, то мы должны суммировать полученную вероятность по всем конечным атомным состояниям.

Предположим снова, что наш регистрирующий прибор (детектор) отмечает все эти конечные состояния с различной вероятностью и характеризуется определенной вероятностью $R(a_j)$ регистрации данного процесса поглощения. Для простоты предположим, что эта вероятность регистрации представляет собой одну и ту же функцию для каждого из n атомов детектора. Суммирование по конечным состояниям n атомов можно произвести, вводя такую же функцию чувствительности, как и в соотношениях (4.10) и (4.12) предыдущей лекции. Проведя эти простые операции суммирования и усреднения, для вероятности регистрации получаем

$$p^{(n)}(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \prod_{j=1}^n S(t_j'' - t_j') G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1' \dots \mathbf{r}_n t_n', \mathbf{r}_n t_n'' \dots \dots \mathbf{r}_1 t_1'') \times \prod_{j=1}^n dt_j' dt_j'' \quad (5.8)$$

В этом выражении $G^{(n)}$ означает функцию корреляции n -го порядка для поля, определяемую соотношением

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \text{Sp} [\rho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots \dots E^{(+)}(x_{2n})], \quad x_j = \{\mathbf{r}_j, t\}.$$

Для широкополосного детектора выражение (5.8) упрощается

$$p^{(n)}(t) = s^n \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1' \dots \mathbf{r}_n t_n', \mathbf{r}_n t_n' \dots \mathbf{r}_1 t_1') \prod_{j=1}^n dt_j'. \quad (5.9)$$

Таким образом, счетчик из n атомов измеряет интеграл по времени от функции корреляции n -го порядка.

До сих пор мы рассматривали n атомов, поглощающих фотоны, как часть одного детектора. Но сконструированный таким образом детектор по существу не отличается от группы детекторов одно-

атомного типа, рассмотренных в предыдущей лекции. Если рассматривать n атомов как чувствительные элементы группы из n независимых детекторов, то уже исследованный процесс n -кратного поглощения фотонов позволит проанализировать счет фотонов по методу n -кратных совпадений.

Эту методику можно немного улучшить, если представить, что перед каждым одноатомным детектором стоит отдельный затвор и что все затворы открываются в одно и то же время t_0 , но моменты закрытия всех затворов различны. Пусть момент закрытия j -го затвора есть t_j . Тогда j -й атом «видит» поле с момента t_0 до t_j . Для описания такой ситуации введем ступенчатую функцию

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

и запишем эффективный гамильтониан взаимодействия (т. е. гамильтониан, учитывающий закрытие всех затворов) в виде

$$\mathcal{H}_I(t) = \sum_{j=1}^n \theta(t_j - t) \mathcal{H}_{I,j}(t). \quad (5.11)$$

Расчет вероятности поглощения фотона в каждом детекторе для гамильтониана (5.11) по существу тот же, что и расчет, описанный выше. Единственное реальное различие, кроме различия в интерпретации, заключается в том, что полная вероятность обнаружения представляет теперь n -кратный интеграл по времени, в котором верхними пределами интегрирования являются времена t_j . В случае, когда чувствительность не зависит от частоты поля, имеем

$$p^{(n)}(t_1 \dots t_n) = s^n \int_{t_0}^{t_1} dt'_1 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt'_n G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t'_1 \dots \mathbf{r}_n t'_n, \mathbf{r}_n t'_n \dots \mathbf{r}_1 t'_1). \quad (5.12)$$

Времена $t_1 \dots t_n$ могут изменяться независимо, поэтому скорость регистрации n -кратных совпадений, т. е. скорость счета в единицу времени, возведенную в n -ю степень, равна

$$\begin{aligned} \omega^{(n)}(t_1, \dots, t_n) &= \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} p^{(n)}(t_1 \dots t_n) = \\ &= s^n G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1 \dots \mathbf{r}_n t_n, \mathbf{r}_n t_n \dots \mathbf{r}_1 t_1). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Этот результат доказывает вышеприведенное утверждение о том, что опыты по регистрации совпадений, выполненные с идеальными детекторами, связаны с измерениями функций корреляции высших порядков.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемые нами процессы измерения отличаются как по методу, так и по содержанию от процессов, которые обычно обсуждаются в формальной квантовой механической теории. Формальная теория измерений была полезна при установлении физической интерпретации квантовомеханических выражений. Но так как необходимые предположения этой теории выполняются лишь в немногих случаях, то сфера ее приложения в настоящее время довольно ограничена.

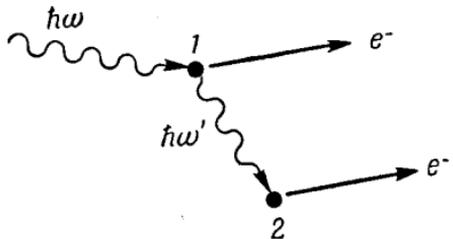
Рассмотренные выше способы измерения поля носят явно приближенный характер. Вероятности переходов рассчитывались в самом низком порядке теории возмущений. В то время как это приближение обычно не приводит

к большим трудностям при расчете вероятности отдельных атомных переходов, в многоатомных детекторах эффекты более высокого порядка имеют довольно сложную математическую формулировку.

В использованном нами приближении не учитывалось электромагнитное влияние одного атома на другой (равно, как и другие воздействия). Действительно, все операторы $E^{(+)}$, входящие в функции корреляции $G^{(n)}$, коммутируют. Скорость перехода (5.13), например, не зависит от выбора последовательности моментов времени $t_1 \dots t_n$, даже если между точками r_j t_j имеется временная корреляция, а электромагнитные возмущения могут перемещаться от одной точки к другой.

Атомы могут оказывать друг на друга электромагнитное воздействие по каналам, которые не учитываются нашими приближениями. Эти влияния обычно исключительно малы, и их можно иногда устранить экспериментально. Предположим, например, что вместо обычного процесса поглощения фотона в атоме 1 происходит комбинационное рассеяние, в результате которого наряду с фотоэлектроном испускается другой фотон (фиг. 6); испущенный фотон может поглотиться атомом 2, в результате чего рождается второй фотоэлектрон. Такой процесс имеет исключительно малое сечение; его можно полностью устранить, если выбрать регистрирующие атомы с ионизационным потенциалом, большим чем $1/2 \hbar\omega$.

Мы упомянули об электромагнитном взаимодействии атомов для иллюстрации приближенности нашей теории измерений. Тем не менее иногда она оказывается точной и весьма полезной.



Ф и г. 6

Лекция 6

1. Свойства корреляционных функций

Корреляционную функцию n -го порядка мы определили как ожидаемое значение

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots \dots E^{(+)}(x_{2n})]. \quad (6.1)$$

Усреднение, проведенное нами для вычисления этого выражения, является квантовомеханическим аналогом классической методики, введенной в лекции 1. Там мы говорили об усреднении по совокупности случайных коэффициентов Фурье. Сходство между этими двумя методами будет становиться более наглядным по мере того, как мы будем продолжать наше рассмотрение.

В качестве первого свойства корреляционных функций отметим, что при ограниченном сверху числе фотонов функция $G^{(n)} \equiv 0$ для всех порядков, более высоких, чем фиксированный порядок M . Это свойство проявляется более отчетливо, если $|n\rangle$ есть n -квантовое состояние, а оператор плотности записывается в виде

$$\rho = \sum_{m,n} c_{nm} |n\rangle \langle m|. \quad (6.2)$$

Тогда если $c_{nm} = 0$, то для $n > M$ или $m > M$ из свойств операторов уничтожения фотонов $E^{(+)}$ следует, что

$$E^{(+)}(x_1) \dots E^{(+)}(x_p) \varrho = 0 \text{ при } p > M. \quad (6.3)$$

Сопряженное соотношение

$$\rho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_p) = 0 \quad (6.4)$$

также выполняется для $p > M$. Отсюда следует, что

$$G^{(p)} \equiv 0 \text{ при } p_1 > M. \quad (6.5)$$

Это свойство корреляционных функций довольно странно с точки зрения классической теории. В ней корреляционные функции представляют собой по существу суммы моментов распределения вероятности для коэффициентов Фурье, и довольно трудно пред-

ставить себе случай, когда моменты выше определенного порядка тождественно равны нулю. Введя в рассмотрение верхнюю границу для числа имеющихся фотонов, мы создали состояния, которые не имеют классического аналога. Этому не следует удивляться, так как в предельном случае $\hbar \rightarrow 0$ эти состояния таковы, что их полная энергия стремится к нулю.

Следующее свойство корреляционных функций можно вывести из общего соотношения

$$\text{Sp}(A^\dagger) = (\text{Sp} A)^*, \quad (6.6)$$

которое выполняется для всех линейных операторов A . Применяя это тождество к корреляционной функции (6.1), находим

$$\begin{aligned} [G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n})]^* &= \text{Sp} [E^{(-)}(x_{2n}) \dots E^{(-)}(x_{n+1}) E^{(+)}(x_n) \dots \\ &\dots E^{(+)}(x_1) \varrho^\dagger] = \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x_{2n}) \dots E^{(-)}(x_{n+1}) E^{(+)}(x_n) \dots \\ &\dots E^{(+)}(x_1)] = G^{(n)}(x_{2n} \dots x_1). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь мы воспользовались эрмитовостью оператора ϱ и инвариантностью шпура от произведения операторов относительно циклической перестановки.

Коммутационные свойства $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$ позволяют произвольно переставлять аргументы $(x_1 \dots x_n)$ и $(x_{n+1} \dots x_{2n})$, не изменяя значения функции $G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{2n})$. Нельзя, однако, менять местами какой-либо из первых n аргументов с любым из n оставшихся без добавления соответствующих членов, так как соответствующие операторы не коммутируют.

Интересные неравенства можно получить из соотношения

$$\text{Sp} [\varrho A^\dagger A] \geq 0, \quad (6.8)$$

которое выполняется для любого линейного оператора A , поскольку заключенный в скобки оператор является положительно определенным. Чтобы доказать неравенство (6.8), заметим, что оператор ϱ эрмитов и поэтому его можно диагонализировать; в некотором представлении он имеет вид

$$\langle k | \varrho | m \rangle = \delta_{km} p_k. \quad (6.9)$$

Из определения оператора плотности непосредственно следует, что

$$p_k = \langle k | \rho | k \rangle = \{ \langle k | i \rangle \langle i | k \rangle \}_{\text{ср}} = \{ | \langle i | k \rangle |^2 \}_{\text{ср}} \geq 0. \quad (6.10)$$

Кроме того, так как

$$\text{Sp} \varrho = \sum_k p_k = 1,$$

не все p_k равны нулю. Пользуясь условием полноты, получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp } [QA^\dagger A] &= \sum_k p_k \langle k | A^\dagger A | k \rangle = \\ &= \sum_k p_k \sum_m \langle k | A^\dagger | m \rangle \langle m | A | k \rangle = \sum_k p_k \sum_m |\langle m | A | k \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Это значение шпура не зависит, конечно, от конкретного вида используемого представления, следовательно, неравенство (6.8) доказано.

Из общего неравенства (6.8) с помощью различных подстановок можно получить еще ряд свойств корреляционной функции. Например, выбирая $A = E^{(+)}(x)$, сразу же получаем

$$G^{(1)}(x, x) \geq 0. \quad (6.12)$$

Аналогично подстановка $A = E^{(+)}(x_1) \dots E^{(+)}(x_n)$ дает

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_n \dots x_1) \geq 0. \quad (6.13)$$

Эти два соотношения также явно следуют из физического смысла «диагонального» вида $G^{(n)}$. Такой вид $G^{(n)}$ следует интерпретировать соответственно как интенсивности фотонов и скорости совпадений, которые являются существенно положительными.

Эти и все последующие результаты можно непосредственно обобщить на случай векторных полей $E_\mu^{(+)}(x)$. Нужно только связать векторный индекс μ_j с соответствующей координатой x_j и рассматривать x_j как сокращенную запись совокупности переменных $\{r_j, t_j, \mu_j\}$ вместо совокупности $\{r_j, t_j\}$.

Другое возможное представление оператора A имеет вид

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j E^{(+)}(x_j), \quad (6.14)$$

где λ_j — набор произвольных комплексных чисел. Для этого случая неравенство (6.8) дает

$$\sum_{ij} \lambda_i^* \lambda_j G^{(1)}(x_i, x_j) \geq 0. \quad (6.15)$$

Таким образом, совокупность корреляционных функций $G^{(1)}(x_i, x_j)$ образует матрицу коэффициентов положительно определенной квадратичной формы. Разумеется, такая матрица имеет положительный детерминант

$$\det [G^{(1)}(x_i, x_j)] \geq 0. \quad (6.16)$$

При $n=1$ это просто соотношение (6.2), при $n=2$

$$G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2) \geq |G^{(1)}(x_1, x_2)|^2, \quad (6.17)$$

что является простым обобщением неравенства Шварца. Продолжая подобным образом, можно получить бесконечную последовательность неравенств. Приведем лишь одно неравенство для корреляционных функций более высокого порядка. Так как форма

$$A = \lambda_1 E^{(+)}(x_1) \dots E^{(+)}(x_n) + \lambda_2 E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{2n}) \quad (6.18)$$

является положительно определенной, то

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_n \dots x_1) G^{(n)}(x_{n+1} \dots x_{2n}, x_{2n} \dots x_{n+1}) &\geq \\ &\geq |G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{2n})|^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

2. Пространственная и временная зависимости корреляционных функций

Поскольку операторы $E^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$ подчиняются уравнениям Максвелла и удовлетворяют обычным граничным условиям для вектора электрического поля (например, периодическим граничным условиям или условиям на проводящих стенках), то функции $G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n})$ также удовлетворяют системе из $2n$ волновых уравнений и $2n$ граничным условиям.

Рассмотрим теперь функцию $G^{(n)}$ для стационарных полей. Лучшим критерием стационарности в квантовой механике является требование того, чтобы оператор плотности ρ коммутировал с гамильтонианом. Это эквивалентно утверждению, что оператор ρ не зависит от времени в представлении Шредингера (в представлении Гейзенберга оператор плотности для изолированной системы всегда не зависит от времени). Если воспользоваться этим определением и интерпретировать гамильтониан как оператор сдвига во времени, то

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\rho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(+)}(x_{2n})] &= \text{Sp} [e^{i\mathcal{H}\tau/\hbar} \rho E^{(-)}(x_1) \dots \\ &\dots E^{(+)}(x_{2n}) e^{-i\mathcal{H}\tau/\hbar}] = \\ &= \text{Sp} [e^{i\mathcal{H}\tau/\hbar} \rho e^{-i\mathcal{H}\tau/\hbar} e^{i\mathcal{H}\tau/\hbar} E^{(-)}(x_1) e^{-i\mathcal{H}\tau/\hbar} \dots \\ &\dots e^{i\mathcal{H}\tau/\hbar} E^{(+)}(x_{2n}) e^{-i\mathcal{H}\tau/\hbar}] = \\ &= \text{Sp} [\rho E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1 + \tau) \dots E^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n} + \tau)], \end{aligned}$$

где τ — произвольный отрезок времени. Таким образом показано, что для стационарных полей корреляционные функции удовлетворяют тождеству

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1 \dots \mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) = G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1 + \tau \dots \mathbf{r}_{2n}, t_{2n} + \tau), \quad (6.20)$$

т. е. они не изменяются при одновременном смещении во времени всех аргументов. В результате можно считать, что $G^{(n)}$ зависит

только от $(2n-1)$ временных переменных. Те же самые соотношения справедливы и для пространственных смещений. Если оператор плотности коммутирует с компонентами импульса поля, то корреляционные функции инвариантны относительно смещения пространственных координат в соответствующих направлениях.

Следующим математическим свойством корреляционных функций является последовательность способов, которыми они образуются из компонент поля с положительными и отрицательными частотами. Согласно нашему условию, функция $G^{(n)}(t_1 \dots t_n t_{n+1} \dots t_{2n})$ такова, что содержит только положительные частоты

для переменных $t_{n+1} \dots t_{2n}$ и только отрицательные — для $t_1 \dots t_n$; например, можно написать (пространственную зависимость не учитываем)

$$G^{(1)}(t, t') = \sum_{kk'} c_{kk'} e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_k t'}, \quad (6.21)$$

$$\omega_k \text{ и } \omega_{k'} > 0.$$

Если теперь рассматривать $G^{(1)}(t, t')$ как функцию двух комплексных переменных t и t' , то ясно, что она является аналитической функцией

t' в полуплоскости $\text{Im } t' \leq 0$ и аналитической функцией t в полуплоскости $\text{Im } t \geq 0$. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Коши из теории функций комплексного переменного и записать тождество

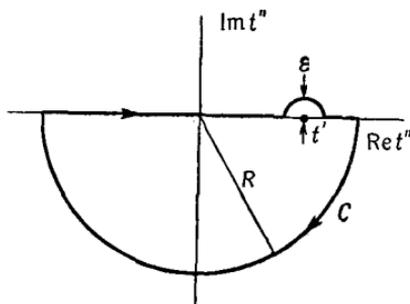
$$G^{(1)}(t, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G^{(1)}(t, t'')}{t'' - t'} dt'', \quad (6.22)$$

где C — контур в комплексной плоскости t'' , показанный на фиг. 7.

Из ограниченности коэффициентов $c_{kk'}$ в (6.21) следует, что часть контура в виде полуокружности в нижней полуплоскости с $R \rightarrow \infty$ не дает вклада в интеграл. Заметим далее, что вклад бесконечно малого полукруга в верхней полуплоскости равен вычету в полюсе, умноженному на $(-\pi i)$. Таким образом,

$$G^{(1)}(t, t') = \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{(1)}(t, t'')}{t'' - t'} dt'', \quad (6.23)$$

где интегрирование выполнено вдоль действительной оси, а P — символ окружности главного значения интеграла. Беря действительную



Ф и г. 7

и мнимую части равенства (6.23), получаем два соотношения

$$\operatorname{Im} G^{(1)}(t, t') = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} G^{(1)}(t, t'')}{t'' - t'} dt'', \quad (6.24)$$

$$\operatorname{Re} G^{(1)}(t, t') = -\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G^{(1)}(t, t'')}{t'' - t'} dt''. \quad (6.25)$$

Эти соотношения позволяют в принципе найти мнимую часть корреляционной функции, если известна действительная ее часть, и наоборот.

Трансформационные соотношения Гильберта подобного типа привлекали к себе большое внимание в физике и электротехнике в связи с анализом причинности поведения линейных систем. Однако соотношения (6.24) и (6.25) не имеют с ними ничего общего. Эти соотношения есть просто способ определения этих функций.

1. Дифракция и интерференция

С математической точки зрения квантовомеханическое рассмотрение задач дифракции не слишком сильно отличается от классического, так как операторы поля должны удовлетворять тем же самым линейным дифференциальным уравнениям и граничным условиям, что и классические поля. Задача построения таких операторов сводится к нахождению подходящей системы собственных функций, по которым можно их разложить (т. е. системы функций, удовлетворяющей волновому уравнению вместе с соответствующими граничными условиями на любой данной поверхности). Для нахождения собственной функции мы, естественно, прибегаем к известным методам классической теории решения граничных задач, т. е. эта задача вообще не является квантодинамической. С другой стороны, тот факт, что такое решение представляет собой хорошо исследованную «классическую» задачу, не означает, как известно, что она обязательно будет простой.

Вернемся, например, к опыту Юнга (фиг. 2). Когда мы говорили, что поле на экране Σ_2 есть просто линейная комбинация полей от двух отверстий P_1 и P_2 , определенная в соответствующие моменты времени, то это не значит, что мы точно решили дифракционную задачу, наоборот, мы сделали в этом случае ряд упрощающих физических приближений. Одно из них заключалось, например, в том, что не учитывался дисперсионный характер прохождения света через отверстия (этот эффект может быть довольно мал, если полоса частот падающего излучения не слишком широка). Приближения, подобные этому, носят классический характер. Мы делаем их просто потому, что нас не интересует более точное решение классической дифракционной проблемы.

Рассмотрим теперь опыт Юнга целиком квантовомеханически. Так же как и в классической теории, часть оператора поля на экране Σ_2 с положительной частотой $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ будет определяться линейной комбинацией полей $E^{(+)}$ от двух отверстий, имеющей вид (2.1). Единственное различие заключается в том, что теперь поля $E^{(+)}$ являются операторами. Предположим, что оба отверстия малы по сравнению с расстояниями между ними и равны по величине; тогда в соотношении (2.1) можно положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Если наблю-

дения интерференционной картины на экране производится с помощью идеального детектора фотонов, то скорость счета его будет пропорциональна $G^{(1)}(rt, rt)$. Другими словами, наблюдаемая интенсивность будет пропорциональна

$$I = \text{Sp} [\rho E^{(-)}(rt) E^{(+)}(rt)] = \\ = \text{Sp} \{ \rho |\lambda|^2 [E^{(-)}(x_1) + E^{(-)}(x_2)] [E^{(+)}(x_1) + E^{(+)}(x_2)] \}, \quad (7.1)$$

где x_j обозначает совокупность (r_j, t_j) . Эту интенсивность можно выразить через корреляционные функции первого порядка, разлагая произведение в (7.1); в результате находим

$$I = |\lambda|^2 [G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2\text{Re} G^{(1)}(x_1, x_2)]. \quad (7.2)$$

Первые два члена в правой части соответствуют интенсивностям, которые создаются каждым из отверстий в отсутствие другого. Согласно сделанным предположениям, эти члены представляют собой довольно медленно меняющиеся функции x_1 и x_2 . Как мы уже отмечали при классическом рассмотрении, третий член (7.2) является интерференционным. Корреляционная функция при $x_1 \neq x_2$ есть в общем случае комплексная величина; если записать ее как

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = |G^{(1)}(x_1, x_2)| e^{i\varphi(x_1, x_2)},$$

то выражение для интенсивности приобретает вид

$$I = |\lambda|^2 [G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2|G^{(1)}(x_1, x_2)| \cos \varphi(x_1, x_2)], \quad (7.3)$$

откуда видно, что причиной возникновения интерференционных колец является осциллирующий косинусоидальный член.

2. Некоторые общие замечания об интерференции

Проведенное рассмотрение опыта Юнга столь близко к классическому анализу, что может показаться неясным, почему явление интерференции представляет собой квантовомеханический эффект. Поэтому представляется целесообразным сделать некоторые общие замечания о квантовомеханической интерпретации интерференции. Характерные интерференционные явления имеют место в квантовой механике в тех случаях, когда амплитуда вероятности перехода из данного начального в данное конечное состояние представляет собой сумму двух или более парциальных амплитуд, имеющих достаточно точно определенные фазовые состояния. Отдельные парциальные амплитуды обусловлены обычно различием путей, по которым система может перейти из своего начального состояния в конечное.

Опыт Юнга дает простую иллюстрацию этих общих положений. Начальным состоянием системы можно считать состояние, в котором

волновой пакет, представляющий отдельный падающий фотон, расположен слева от первого экрана σ (фиг. 2) с одним отверстием. Предположим, что первоначально все атомы нашего детектора находятся в основном состоянии. В качестве конечного состояния системы возьмем состояние, в котором фотон поглощен и соответственно один из атомов счетчика возбужден. Амплитуда вероятности перехода в это конечное состояние равна сумме двух амплитуд, каждая из которых связана с прохождением фотона через одно из двух отверстий в экране Σ_1 .

Интересно отметить, что существование интерференционного эффекта существенно связано с невозможностью сказать, какой из возможных путей фактически выбрал фотон. Нильс Бор показал, что всякая попытка определить, по какому из двух путей прошел фотон, уничтожает интерференционные кольца. Одна из таких попыток заключается в измерении реакции экрана Σ_1 , когда он отклоняет фотон. Фотон может передать экрану любой импульс. Однако если мы проделаем достаточно точные измерения импульса экрана, то ничего не сможем сказать о положении фотона в пространстве, и если последовательно повторять эксперимент, то никаких колец не возникнет.

Этот результат можно обобщить на все описанные ранее квантовомеханические рассуждения. Различие путей, по которым может идти система, приводит к амплитудам с точно определенными фазовыми соотношениями лишь тогда, когда у нас нет способа узнать, какой из путей фактически реализуется. Когда мы производим наблюдения с целью определить этот путь, мы существенно изменяем систему, делая фазы парциальных амплитуд случайными по отношению друг к другу, т. е. ликвидируем в среднем всякую интерференцию амплитуд.

Различные пути, о которых мы говорим, являются путями развития системы или ее «предысториями». Для одной частицы их можно отождествить с пространственными траекториями, но для систем со многими частицами или переменным числом частиц проблема носит значительно более сложный характер. Важно подчеркнуть, что величины, которые могут интерферировать в квантовой механике, представляют собой амплитуды, связанные с частными «предысториями». Использование обычной терминологии иногда приводит к недоразумениям по этому поводу.

Примером, который часто цитируют и которому иногда дают неправильную интерпретацию, является утверждение, сделанное Дираком в гл. 1 его классического труда ¹⁾.

¹⁾ Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3rd ed., Oxford, 1947. (Имеется перевод: П. А. М. Д и р а к, Принципы квантовой механики, М., 1960.)

Дирак отмечает, что интерференцию двух пучков в интерферометре Майкельсона нельзя интерпретировать так, словно она имеет место из-за того, что иногда фотоны одного пучка уничтожают фотоны другого, а иногда комбинируются так, чтобы дать четыре фотона. «Это противоречило бы закону сохранения энергии. Новая теория, которая связывает волновую функцию с вероятностями для одного фотона, преодолевает эту трудность, считая, что каждый фотон входит отчасти в каждую из двух компонент. Тогда каждый фотон интерферирует лишь с самим собой. Интерференция между двумя различными фотонами никогда не происходит».

Эти замечания имели целью указать на эксперименты, подобные опыту Юнга, в котором интерференционная картина обнаруживается при регистрации отдельных фотонов. Попытка использовать замечания Дирака в качестве общей доктрины для всех других интерференционных опытов может, как мы вскоре увидим, привести к противоречиям.⁴

3. Когерентность первого порядка

Термин «когерентность» используют не только в оптике, но также и во всякого рода литературе по квантовой механике и теории связи. Не будем перечислять всех значений термина «когерентность»; вместо этого мы попытаемся дать ему точный смысл применительно к электромагнитным полям. Значение, которое мы примем, фактически свяжет воедино эти различные значения.

Известную всем концепцию оптической когерентности обычно связывают с возможностью получения интерференционных полос при наложении двух полей. Вернемся к выражению (7.3) для интенсивности, наблюдаемой в опыте Юнга. Если корреляционная функция $G^{(1)}(x_1, x_2)$ равна нулю, то никаких колец нет и мы можем сказать, что поля в точках x_1 и x_2 некогерентны. С другой стороны, максимальную степень когерентности естественно связать с полем, дающим наиболее резкие интерференционные кольца. В предыдущей лекции было получено общее неравенство (6.17), утверждающее, что

$$|G^{(1)}(x_1, x_2)| \leq [G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2}.$$

Если величины $G^{(1)}(x_1, x_1)$ и $G^{(1)}(x_2, x_2)$ считать постоянными, то самый резкий контраст в интенсивности колец, который только возможен, соответствует знаку равенства в этом соотношении. Таким образом, необходимое условие когерентности имеет вид

$$|G^{(1)}(x_1, x_2)| = [G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2}. \quad (7.4)$$

Если ввести нормированную корреляционную функцию

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{[G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2}}, \quad (7.5)$$

то условие (7.4) принимает вид

$$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1, \quad (7.6)$$

или, другими словами,

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = e^{i\varphi(x_1, x_2)}.$$

Подстановка этого соотношения в выражение (7.3) для интенсивности в опыте Юнга дает

$$\begin{aligned} |\lambda|^{-2} I &= G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + \\ &+ 2 [G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2} \cos \varphi(x_1, x_2) = \\ &= | [G^{(1)}(x_1, x_1)]^{1/2} e^{i\varphi(x_1, x_2)} + [G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2} |^2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Эта интенсивность изменяется между двумя предельными значениями

$$I_{\text{мин}} = \{ [G^{(1)}(x_1, x_1)]^{1/2} - [G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2} \}^2, \quad (7.8)$$

$$I_{\text{макс}} = \{ [G^{(1)}(x_1, x_1)]^{1/2} + [G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2} \}^2. \quad (7.9)$$

Параметр, который обычно называют видностью колец, определяется выражением

$$v = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}} = \frac{2 [G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2}}{G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2)}. \quad (7.10)$$

Если поля, падающие на два отверстия, имеют равные интенсивности, т. е. если

$$G^{(1)}(x_1, x_1) = G^{(1)}(x_2, x_2),$$

то интенсивность изменяется между нулем и $4G^{(1)}(x_1, x_1)$, а видность $v = 1$

Условие (7.4) связывает амплитуды полей лишь в двух пространственно-временных точках x_1 и x_2 . Если это условие выполняется, то можно говорить о взаимной когерентности полей в этих двух точках. Аналогичный подход был использован Борном и Вольфом при рассмотрении классических полей на основе усредненных по времени корреляционных функций.

Для квантовой механики характерно рассмотрение поля как динамической системы. Поэтому было бы значительно удобней как с аналитической, так и статистической точек зрения представить когерентность как идеализированное свойство полей в целом.

Такое свойство можно описывать с помощью условия (7.4), однако эквивалентное и математически более удобное описание можно получить из требования факторизации корреляционной функции первого порядка.

Пусть функция $G^{(1)}(x_1, x_2)$ представима в виде произведения двух функций $A(x_1)$ и $B(x_2)$

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = A(x_1) B(x_2). \quad (7.11)$$

Используя свойство симметрии (6.7), получаем, что функции A и B удовлетворяют тождеству

$$A(x_2) B(x_1) = A^*(x_1) B^*(x_2),$$

или

$$\frac{A(x_2)}{B^*(x_2)} = \frac{A^*(x_1)}{B(x_1)}. \quad (7.12)$$

Так как в последнем соотношении функция от x_1 равна функции от x_2 , то обе функции должны быть постоянными. Эта постоянная, которую мы обозначим буквой μ , должна быть действительным числом, в чем можно убедиться, полагая x_1 и x_2 равными. Таким образом,

$$A(x) = \mu B^*(x). \quad (7.13)$$

Так как функция $G^{(1)}(x, x)$ положительна, то величина μ также положительна. Следовательно, если ввести функцию

$$\mathcal{E}(x) = \sqrt{\mu} B(x), \quad (7.14)$$

то корреляционная функция первого порядка принимает факторизованный вид

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \mathcal{E}^*(x_1) \mathcal{E}(x_2). \quad (7.15)$$

Отсюда ясно, что если факторизация возможна, то функция $\mathcal{E}(x)$ почти полностью определена. Остается неоднозначным только постоянный фазовый множитель.

Ниже мы убедимся, что свойство факторизуемости (7.15) весьма удобно в качестве определения оптической когерентности, или когерентности первого порядка. Очевидно, что это условие подразумевает условия (7.4) и (7.6) для абсолютных значений корреляционных функций, и, наоборот, при выполнении условий (7.4) и (7.6) во всех точках поля условие факторизации также справедливо во всех точках поля. Обсудив некоторые примеры когерентных полей, мы покажем, что оба способа рассмотрения когерентности эквивалентны.

Самым элементарным примером поля с факторизованной функцией $G^{(1)}$ является любое классическое поле, для которого точно определены коэффициенты Фурье C_k , т. е. любое поле, для которого распределение вероятностей $P(\{C_k\})$ сводится к произведению δ -функций. В этом случае функция $\mathcal{E}(x)$ есть само классическое поле $E^{(+)}(x)$. Здесь мы впервые замечаем тесную связь, которая существует между когерентностью и отсутствием шумов,— связь, которую мы вскоре обсудим подробнее. Отсутствие случайности или шума в определении коэффициентов Фурье долгое время служило в технике связи критерием «когерентности» сигнала.

Другим примером когерентности может служить один из путей осуществления опыта Юнга (хотя, по-видимому, и не самый удобный), заключающийся в рассмотрении однофотонного волнового пакета, падающего на отверстие в экране σ . Тогда, если проделать эксперимент много раз, в точности повторяя волновой пакет, то интерференционные кольца проявятся в виде статистического распределения фотонов, попавших на экран Σ_2 . Такие чистые состояния для отдельных фотонов всегда будут приводить к кольцам в таком статистическом смысле, в чем можно убедиться, исследуя корреляционную функцию первого порядка. Предположим, что поле находится в некотором чистом однофотонном состоянии, которое обозначим символом $|1 \text{ фот}\rangle$. Тогда оператор плотности для поля равен

$$\rho = |1 \text{ фот}\rangle \langle 1 \text{ фот}|, \quad (7.16)$$

а корреляционная функция первого порядка сводится к выражению

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle 1 \text{ фот} | E^{(-)}(x_1) E^{(+)}(x_2) | 1 \text{ фот}\rangle. \quad (7.17)$$

Так как $E^{(+)}$ есть оператор уничтожения фотона, то состояние $E^{(+)}(x_2) |1 \text{ фот}\rangle$ можно умножить только на вакуумное состояние, которое мы обозначим через $|0\rangle$. Поэтому между операторами $E^{(-)}$ и $E^{(+)}$ в (7.17) можно вставить оператор проекции по вакуумным состояниям $|0\rangle \langle 0|$, не изменяя при этом значения корреляционной функции:

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle 1 \text{ фот} | E^{(-)}(x_1) | 0\rangle \langle 0 | E^{(+)}(x_2) | 1 \text{ фот}\rangle. \quad (7.18)$$

Выражение (7.18) представляет собой факторизованную форму $G^{(1)}$, удовлетворяющую соотношению (7.15). Следовательно, любое чистое состояние, в котором поле представлено одним фотоном, обладает когерентностью первого порядка. (Таким образом, оптическое определение когерентности связано с одним из возможных квантовомеханических определений, а именно тем, которое связано с чистыми состояниями.)

Разумеется, мы доказали только то, что *чистое* однофотонное состояние когерентно. Если наш гипотетический опыт, например,

повторить, не используя каждый раз один и тот же волновой пакет (т. е. рассматривая *смесь* чистых состояний), то, вообще говоря, мы не получим интерференционных колец с максимальной контрастностью. Однако некоторая определенная смесь фотонных состояний может сохранить свойства факторизованности корреляционной функции (7.15) и тем самым сохранить свойство когерентности; не следует думать, что только чистые состояния приводят к когерентности.

Предположим, например, что возбуждается только одна k -я мода поля. Так как все остальные моды остаются в основных состояниях, то их можно не учитывать при расчете корреляционной функции. Если оператор плотности для k -й моды представить в общем виде

$$\rho = \sum_{n,m} c_{n,m} |n\rangle \langle m|, \quad (7.19)$$

где $|n\rangle$ есть n -квантовое состояние для моды, то корреляционную функцию первого порядка можно записать в виде

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega_k \sum_{n,m} c_{nm} \langle m | a_k^\dagger a_k | n \rangle u_k^*(\mathbf{r}_1) u_k(\mathbf{r}_2) e^{i\omega_k(t_1 - t_2)} = \\ &= C^2 u_k^*(\mathbf{r}_1) e^{i\omega_k t_1} u_k(\mathbf{r}_2) e^{-i\omega_k t_2}; \end{aligned} \quad (7.20)$$

в первом из этих выражений мы применили некоторые из обозначений соотношения (8.21), а во втором использовали обозначение

$$C^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega_k \sum_k n c_{nn}. \quad (7.21)$$

Очевидно, что из возможности записи $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = C u_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} \quad (7.22)$$

следует, что корреляционная функция (7.20) принимает факторизованную форму (7.15).

Итак, возбуждение отдельной моды независимо от того, является ли она чистым состоянием или произвольной смесью таких состояний, приводит к полям с когерентностью первого порядка.

Хотя мы и смогли дать некоторые простые примеры полей с когерентностью первого порядка, следует заметить, что условие факторизации (7.15) является довольно ограниченным. Оно, например, не выполняется в общем случае для чистых состояний, в чем можно легко убедиться, рассчитывая корреляционную функцию для состояния, в котором два или более фотонов находятся в различных модах. Такие начальные состояния могут привести к кольцам в опыте Юнга, однако кольца, как правило, не будут удовле-

творять условию максимального контраста. Несмотря на то, что условие когерентности является ограничением, мы покажем, что существует значительно более широкий класс состояний, удовлетворяющих этому условию состояний, чем рассматривавшийся нами до сих пор.

Заметим, в частности, что мы не требовали монохроматичности для когерентных полей. Поля, удовлетворяющие условию факторизации (7.15) или условию, при котором получается максимальная мгновенная контрастность колец, могут произвольно зависеть от времени. Следовательно, функции $\mathcal{E}(r, t)$, определяющие корреляционные функции, могут иметь любой спектр Фурье. В связи с этим утверждением любопытно отметить, что для получения максимально когерентных пучков света пытались использовать максимально монохроматический свет. Причина этого была в том, что обычно имели дело с использованием стационарных источников света. Такие источники дают поля, для которых корреляционная функция первого порядка зависит только от разности двух времен

$$G^{(1)}(t_1, t_2) = G^{(1)}(t_1 - t_2). \quad (7.23)$$

Если такие поля когерентны, то корреляционная функция должна быть факторизована следующим образом:

$$G^{(1)}(t_1 - t_2) = \mathcal{E}^*(t_1) \mathcal{E}(t_2). \quad (7.24)$$

Однако (7.24) есть функциональное уравнение, которое имеет только экспоненциальные решения. Так как зависимость $G^{(1)}$ от переменной t_2 может содержать лишь положительные частоты, то $\mathcal{E}(t) \sim e^{-i\omega t}$ для $\omega > 0$. Другими словами, когерентное стационарное поле может быть только монохроматическим.

Следует добавить, что данное определение когерентности первого порядка является довольно идеализированным, как и почти всякое условие, налагаемое на квантовомеханические состояния. Нельзя ожидать, что для корреляционных функций реальных полей условие факторизации (7.15) будет выполняться в неограниченной области значений переменных x_1 и x_2 . Практически для определения диапазонов изменения пространственных и временных переменных, для которых возможна факторизация, мы введем понятия времени когерентности и длины когерентности.

4. Контрастность колец и факторизация

В предыдущем разделе мы связали понятие когерентности со свойством факторизации корреляционной функции главным образом из соображений математического удобства. Затем мы показали, что свойство факторизации предполагает выполнение условия (7.4) для

абсолютного значения корреляционной функции, т. е. условия максимальной контрастности колец. Покажем теперь, что выполнение последнего условия для всех пространственно-временных точек предполагает факторизацию. (Доказательство взято из статьи Титульера и Глаубера, которая будет опубликована.)

Соотношение

$$|G^{(1)}(x_1, x_2)|^2 = G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2) \quad (7.25)$$

накладывает серьезные ограничения на оператор плотности для поля. Эти ограничения можно найти, если заметить, что (7.25) означает существование оператора A , такого, что

$$\text{Sp}(\rho A^\dagger A) = 0. \quad (7.26)$$

Чтобы получить этот оператор в явном виде, выберем произвольную пространственно-временную точку x_0 , в которой интенсивность поля не равна нулю, $G^{(1)}(x_0, x_0) \neq 0$; пусть

$$A = E^{(+)}(x) - \frac{G^{(1)}(x_0, x)}{G^{(1)}(x_0, x_0)} E^{(+)}(x_0), \quad (7.27)$$

отсюда следует, что

$$\text{Sp}(\rho A^\dagger A) = G^{(1)}(x, x_0) - \frac{|G^{(1)}(x_0, x)|^2}{G^{(1)}(x_0, x_0)} = 0 \quad (7.28)$$

для всех точек x . Оператор плотности ρ можно записать в виде среднего от произведения векторов состояния системы

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|, \quad (7.29)$$

где все вероятности p_i положительны. Равенство нулю шпура (7.26) означает, что

$$\sum_i p_i \langle i | A^\dagger A | i \rangle = 0. \quad (7.30)$$

Так как все члены, входящие в сумму, существенно положительны, то

$$\langle i | A^\dagger A | i \rangle = 0 \quad (7.31)$$

для всех состояний $|i\rangle$, для которых $p_i \neq 0$. В свою очередь соотношение (7.31) означает, что состояния $|i\rangle$ являются собственными состояниями оператора A с нулевым собственным значением

$$A | i \rangle = 0. \quad (7.32)$$

Итак мы показали, что равенство нулю шпура (7.26) означает выполнение следующих двух соотношений для операторов:

$$A \rho = \rho A^\dagger = 0. \quad (7.33)$$

Так как эти соотношения выполняются, когда оператор A принимает значение (7.27), то оператор плотности должен удовлетворять двум тождествам:

$$E^{(+)}(x) \varrho = \frac{G^{(1)}(x_0, x)}{G^{(1)}(x_0, x_0)} E^{(+)}(x_0) \varrho, \quad (7.34)$$

$$\varrho E^{(-)}(x) = \frac{G^{(1)}(x, x_0)}{G^{(1)}(x_0, x_0)} \varrho E^{(-)}(x_0). \quad (7.35)$$

Эти тождества можно использовать для смещения аргументов корреляционных функций к общей начальной точке x_0 . Если в первом из этих тождеств положить $x = x_2$, а во втором положить $x = x_1$, то получаем соотношение

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x_1) E^{(+)}(x_2)] &= \frac{G^{(1)}(x_1, x_0)}{G^{(1)}(x_0, x_0)} \times \\ &\times \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x_0) E^{(+)}(x_0)] \frac{G^{(1)}(x_0, x_2)}{G^{(1)}(x_0, x_0)}, \end{aligned}$$

которое можно записать как функциональное тождество

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{G^{(1)}(x_1, x_0) G^{(1)}(x_0, x_2)}{G^{(1)}(x_0, x_0)}.$$

Теперь остается только записать функцию $\mathcal{E}(x)$ в виде

$$\mathcal{E}(x) = \frac{G^{(1)}(x_0, x)}{[G^{(1)}(x_0, x_0)]^{1/2}}, \quad (7.36)$$

чтобы убедиться, что корреляционная функция первого порядка принимает факторизованный вид

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \mathcal{E}^*(x_1) \mathcal{E}(x_2). \quad (7.37)$$

Мы не будем повторять доказательство для не полностью поляризованных полей, когда корреляционные функции имеют тензорную форму. Для доказательства в этом случае следует лишь считать время и каждую пространственную координату отдельным тензорным индексом.

Лекция 8

1. Интерпретация опытов с интенсивностными интерферометрами

В предыдущей лекции мы рассмотрели опыт Юнга как типичный пример интерференционных опытов, в основе которых лежит измерение корреляционной функции первого порядка. Аналогичный характер имеют все прежние интерференционные опыты. В лекции 2 мы рассмотрели некоторые новые эксперименты принципиально другого типа, а именно интерферометрические опыты Хэнбери Брауна и Твисса, в которых измерялась корреляционная функция поля второго порядка. Мы дали простой классический анализ причин появления интерференционных колец в интерферометре, когда поле возникает от двух источников с малым угловым расстоянием. Представляет интерес исследовать происхождение тех же колец методами квантовой механики.

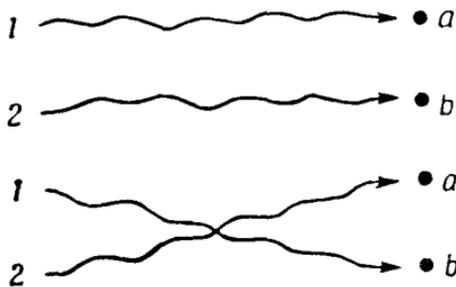
Напомним, что интерферометр Хэнбери Брауна и Твисса регистрирует подающее поле двумя различными приемниками. Следовательно, фотоны должны участвовать в интерференционном эффекте парами, т. е. сигнал на выходе возникает только тогда, когда различные фотоны попадают на каждый из двух детекторов примерно в одно и то же время. Именно здесь возникает серьезная дилемма: следует ли считать правильным утверждение Дирака о том, что «интерференция между двумя различными фотонами никогда не происходит».

Общие соображения об интерференции, изложенные в лекции 7, ясно показывают, что никакой дилеммы в этом случае не существует. Объекты, которые необходимо рассматривать как интерферирующие или неинтерферирующие, строго говоря, представляют собой не фотоны, а альтернативные «предыстории» системы как целого.

Предположим, что начальным состоянием системы является состояние, в котором имеется два (вообще говоря, перекрывающихся) однофотонных волновых пакета, а атомы двух детекторов (например, счетчиков фотонов) находятся в основном состоянии. В конечном состоянии оба фотона поглотились, в результате чего в каждом из счетчиков возбудилось по одному атому. Если обозначить фотоны цифрами 1 и 2, а счетчики — буквами a и b , то, как нетрудно видеть, имеется два различных способа реализации

конечного состояния: либо счетчик a поглощает фотон 1, а счетчик b — фотон 2; либо счетчик b поглощает фотон 1, а счетчик a — фотон 2 (фиг. 8).

Если бы пакеты имели разные средние волновые векторы, то указанные выше разные способы можно было бы различить с помощью тщательных измерений конечных состояний. Однако условия, при которых можно наблюдать кольца, как раз таковы, что волновые пакеты имеют почти одинаковые волновые векторы (например, пакеты с одной и той же частотой при малом угловом расстоянии между источниками). Другими словами, кольца появляются лишь тогда, когда альтернативные «предыстории» системы становятся неразличимыми.



Ф и г. 8

Из-за интерференции амплитуд вероятностей двух различных переходов не имеет смысла спрашивать, который из счетчиков поглотил данный фотон.

2. Когерентность высших порядков и регистрация совпадений фотонов

В лекции 2 мы уже говорили, что интенсивностный интерферометр измеряет корреляционную функцию второго порядка. Поля, излучаемые естественными источниками, носят хаотический характер, и их корреляционные свойства вполне определяются функцией коррекции первого порядка. Это несправедливо, вообще говоря, для излучения искусственных источников, таких, как лазер или радиопередатчик. Поля, генерируемые этими источниками, могут иметь значительно большую регулярность, чем та, которую можно получить от естественных источников. Поэтому мы уточним понятие когерентности, определив ее более высокие порядки.

Начнем снова с определения абсолютных значений корреляционных функций. В качестве условия полной когерентности потребуем, чтобы нормированная корреляционная функция n -го порядка

$$g^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \frac{G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n})}{\prod_{j=1}^{2n} [G^{(1)}(x_j)]^{1/2}} \quad (8.1)$$

была по модулю равна единице для всех n и всех комбинаций аргументов x . Если это условие выполняется только для $n \leq M$, то будем говорить о когерентности M -го порядка.

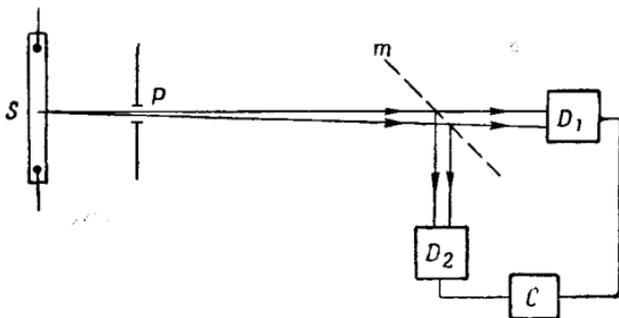
Понятие когерентности M -го порядка можно интерпретировать из анализа опытов по регистрации n -кратных задержанных совпадений. Мы знаем, что $G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_n \dots x_1)$ есть средняя скорость счета n -кратных совпадений для идеальных фотодетекторов, находящихся в точках $x_1 \dots x_n$. Так как функция $G^{(n)}$ действительна и положительна, то условие $|g^{(n)}| = 1$ при $n \leq M$ означает, что

$$g^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_n \dots x_1) = 1$$

для $n \leq M$. Следовательно, по определению функции $g^{(n)}$, для полей с когерентностью M -го порядка

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_n \dots x_1) = \prod_{j=1}^n G^{(1)}(x_j, x_j) \quad (8.2)$$

для $n \leq M$. С точки зрения эксперимента, это означает, что скорость счета n -кратных совпадений равна произведению скоростей счета,



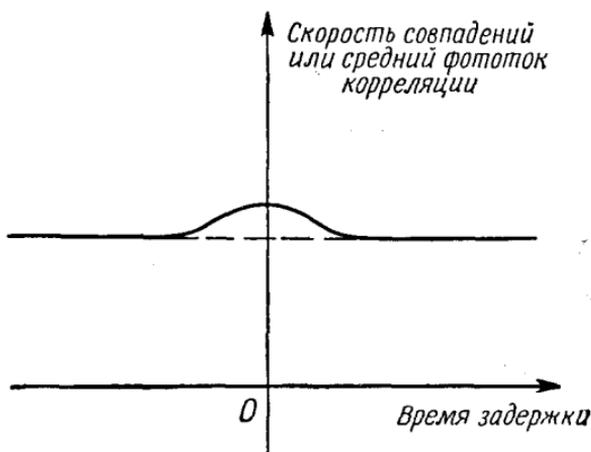
Ф и г. 9

которую давал бы каждый из счетчиков в отсутствие остальных. Таким образом, статистической корреляции счета фотонов, по-видимому, нет. Для поля с когерентностью порядка $M \geq n$ n фотонных счетчиков дают статистически независимые отсчеты.

В течение последних нескольких лет был выполнен ряд экспериментов по исследованию световых пучков путем счета фотонов по методу совпадений. Первый из таких опытов, в котором проявилась статистическая корреляция времен регистрации фотонов, был выполнен Хэнбери Брауном и Твиссом [1, 2]. В этом эксперименте свет от источника S (фиг. 9) проходил через точечное отверстие P и попадал на полупрозрачное серебряное зеркало m , которое разделяло его на два пучка. Детекторы D_1 и D_2 располагались симметрично относительно зеркала m . В корреляторе C фототоки детекторов перемножались, усреднялись во времени и регистрировались. По существу полупрозрачное зеркало можно рассматри-

вать как прибор, позволяющий поместить два различных фотодетектора в одном и том же месте пучка.

Вскоре после появления работы Хэнбери Брауна и Твисса аналогичные эксперименты проделали Ребка и Паунд [3], которые с помощью коррелятора C регистрировали задержанные по времени совпадения от счетчиков отдельных фотонов D_1 и D_2 . При этом измерялась средняя скорость совпадений как функция времени задержки, а счетчики закреплялись симметрично относительно



Ф и г. 10

зеркала. Даже в том случае, когда пучки фотонов, падающие на оба счетчика, были статистически независимы, имелся некоторый фон скорости счета, обусловленный случайными совпадениями; эта скорость счета не зависела от времени задержки. Таким образом, зависимость скорости счета от времени задержки указывает на статистическую связь между фотонами.

Результаты экспериментов показаны на фиг. 10. Если бы сигналы счетчиков были статистически независимы, то скорость совпадений не зависела бы от времени задержки. Небольшой «всплеск» на экспериментальной кривой показывает, что фотоны имеют определенную тенденцию регистрироваться парами. Хотя этот эффект вначале было трудно наблюдать, он (как мы покажем) не всегда является малым. Малая величина «всплеска» и его конкретная форма в этих экспериментах определялись в основном относительно большой инерционностью счетчиков.

Отметим, что если счетчики располагаются симметрично по отношению к зеркалу, то действующие на них поля отличаются друг от друга только постоянным множителем. Отсюда следует, что если r_1 и r_2 представляют собой зеркально симметричные точки

наблюдения, то

$$|g^{(1)}(\mathbf{r}_1 t, \mathbf{r}_2 t)| = 1, \quad (8.3)$$

т. е. поля, падающие на оба детектора, в первом порядке полностью когерентны. С другой стороны, наблюдение положительной корреляции в скорости счета совпадений означает, что поля некогерентны во втором порядке. Ниже мы покажем, что этот результат типичен для всех экспериментов, выполняемых с естественными источниками света. Поля от этих источников имеют случайный характер, что нарушает когерентность второго порядка.

3. Дальнейший анализ когерентности высших порядков

Вернемся к определению когерентности более высокого порядка. По аналогии с когерентностью первого порядка когерентность M -го порядка определим в виде условия

$$|G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n})|^2 = \prod_{j=1}^{2n} G^{(1)}(x_j, x_j), \quad (8.4)$$

налагаемого на абсолютные значения корреляционных функций при $n \leq M$. В этом случае еще удобнее выразить условие когерентности в виде свойства факторизации корреляционной функции. В качестве такого условия мы выдвинем требование, чтобы имелась единственная комплексная функция $\mathcal{E}(x)$, такая, что

$$G^{(1)}(x_1 \dots x_{2n}) = \prod_{j=1}^n \mathcal{E}^*(x_j) \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}(x_j) \quad (8.5)$$

для всех $n \leq M$. Если такая факторизация выполняется для всех n , то будем говорить о полной когерентности.

Заметим, что из условия (8.5) следует соотношение

$$G^{(1)}(x, x) = |\mathcal{E}(x)|^2, \quad (8.6)$$

которое означает, что корреляционная функция удовлетворяет условиям (8.4). С другой стороны, можно показать, что условия (8.4) также связаны со свойством факторизации. Заметим, что M -й порядок когерентности всегда подразумевает когерентность в первом порядке. Поэтому можно пользоваться соотношениями, которые являются следствиями когерентности первого порядка (см. лекцию 7). В частности, ввиду того, что все операторы $E^{(-)}(x_j)$ при $j = 1 \dots n$ коммутируют друг с другом так же, как и операторы $E^{(+)}(x_j)$ при $j = n+1 \dots 2n$, можно использовать любое из двух тождеств (7.34) и (7.35) n раз, чтобы сместить все аргументы корреляционной функции n -го порядка в данную начальную

точку x_0

$$\begin{aligned} & \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{2n})] = \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{G^{(1)}(x_j, x_0)}{G^{(1)}(x_0, x_0)} \text{Sp} [\varrho E^{(-)}(x_0) \dots E^{(-)}(x_0) E^{(+)}(x_0) E^{(+)}(x_0)] \times \\ & \times \prod_{j=n+1}^{2n} \frac{G^{(1)}(x_0, x_j)}{G^{(1)}(x_0, x_0)} ; \end{aligned}$$

из этого тождества следует, что

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) &= \frac{G^{(n)}(x_0 \dots x_0)}{[G^{(1)}(x_0, x_0)]^n} \times \\ & \times \frac{\prod_{j=1}^n G^{(1)}(x_j, x_0) \prod_{j=n+1}^{2n} G^{(1)}(x_0, x_j)}{[G^{(1)}(x_0, x_0)]^n} . \end{aligned}$$

Если ввести функцию $\mathcal{E}(x)$, определяемую выражением (7.37), и использовать нормированную функцию, то последнее соотношение принимает вид

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = g^{(n)}(x_0 \dots x_0) \prod_{j=1}^n \mathcal{E}^*(x_j) \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}(x_j). \quad (8.7)$$

Как было показано выше, произвольность выбора начальной точки x_0 приводит лишь к появлению у $\mathcal{E}(x)$ постоянного фазового множителя. Так как этот фазовый множитель не входит в произведение, содержащееся в (8.7), то, следовательно, для полей, когерентных в первом порядке, функции $g^{(n)}(x_0 \dots x_0)$ не зависят от x_0 . Другими словами, одного лишь условия когерентности первого порядка достаточно, чтобы привести к факторизованному виду все корреляционные функции высших порядков. Однако факторизации корреляционной функции, вообще говоря, еще не достаточно для когерентности более высокого порядка. Дело в том, что формула (8.7) содержит постоянные множители $g^{(n)}(x_0 \dots x_0)$, которые в случае когерентности более высокого порядка должны быть равны единице. Условия когерентности высшего порядка (8.4) требуют, чтобы эти коэффициенты по модулю были равны единице при $n \leq M$. Но так как величины $g^{(n)}(x_0 \dots x_0)$ должны быть действительны и положительны, то это условие выполняется. Таким образом, из условия (8.4) следует выполнение условия факторизации (8.5).

4. Учет произвольных поляризаций

С математической точки зрения необходимо лишь немного добавить к нашим прежним рассуждениям, чтобы проанализировать поле с произвольной поляризацией. Как мы уже отмечали, чтобы учесть общий, тензорный характер корреляционных функций, нужно в полученных нами формулах связать время и каждую из координат с тензорным индексом. Например, соотношения (6.7) при $n = 1$ и (6.17) можно обобщить в виде

$$[G_{\mu\nu}^{(1)}(x_1, x_2)]^* = G_{\nu\mu}^{(1)}(x_2, x_1), \quad (8.8)$$

$$|G_{\mu\nu}^{(1)}(x_1, x_2)|^2 \leq G_{\mu\mu}^{(1)}(x_1, x_1) G_{\nu\nu}^{(1)}(x_2, x_2). \quad (8.9)$$

Отметим, что вся информация о поляризации поля содержится в корреляционном тензоре $G_{\mu\nu}^{(1)}(x, x)$; обозначим его через $\mathcal{G}_{\mu\nu}$. Тензор $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ является эрмитовой матрицей, т. е. $\mathcal{G}_{\mu\nu}^* = \mathcal{G}_{\nu\mu}$. Если в общем неравенство $\text{Sp}[QA^+A] \geq 0$ подставить

$$A = \sum_{\nu=1}^3 \lambda_{\nu} E_{\nu}^{(+)}(x),$$

то найдем

$$\sum_{\mu, \nu=1}^3 \lambda_{\mu}^* \lambda_{\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu} \geq 0. \quad (8.10)$$

Таким образом, $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ есть также положительно определенная величина. Ввиду эрмитовости тензор $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ можно диагонализировать. Это означает, что имеется три действительных и положительных собственных значения λ_p и три (вообще говоря, комплексных) собственных вектора $\hat{e}^{(p)}$, таких, что

$$\mathcal{G} \cdot \hat{e}^{(p)*} = \lambda_p \hat{e}^{(p)*}, \quad \hat{e}^{(p)} \cdot \mathcal{G} = \lambda_p \hat{e}^{(p)}. \quad (8.11)$$

Заметим, что в соответствии с определением тензора \mathcal{G} , величины λ_p и $\hat{e}^{(p)}$ зависят в общем случае от пространственно-временной точки x .

Собственные векторы $\hat{e}^{(p)}$ либо оказываются взаимно ортогональными, если собственные числа λ не вырождены, либо могут быть выбраны взаимно ортогональными, если они вырождены; следовательно,

$$\hat{e}^{(p)} \cdot \hat{e}^{(q)*} = \delta_{pq}. \quad (8.12)$$

Так как тензорное произведение

$$\hat{e}^{(p)} \cdot \mathcal{G} \cdot \hat{e}^{(q)*} = \lambda_p \delta_{pq} \quad (8.13)$$

определяет корреляцию компонент поля в направлениях $\hat{e}^{(p)}$ и $\hat{e}^{(q)}$, то имеется три «направления» (комплексных направления), в кото-

рых компоненты поля взаимно не коррелированы. Таким образом, любое поле можно рассматривать как суперпозицию трех перпендикулярно поляризованных полей, амплитуды которых (в каждый момент) не коррелированы.

Собственные значения $\lambda^{(p)}$ представляют собой интенсивности, соответствующие трем поляризациям. Общая интенсивность дается выражением

$$\text{Sp } \mathcal{G} = \sum_p \lambda_p. \quad (8.14)$$

Совокупность нормированных интенсивностей можно определить следующим образом:

$$I_p = \frac{\lambda_p}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j}, \quad p = 1, 2, 3.$$

Эти величины можно рассматривать как точное определение степени поляризации поля. Для изотропного поля $I_p = 1/3$, $p = 1, 2, 3$. Если поле стационарно, т. е. $[\rho, H] = 0$, то тензор \mathcal{G} не зависит от времени; в этом случае величины $\hat{e}^{(p)}$, λ_p и I_p становятся фиксированными в любой точке пространства \mathbf{r} .

Если мы рассматриваем пучок, распространяющийся в одном направлении \hat{k} , то, очевидно, что $\hat{k} \cdot \mathcal{G} = \mathcal{G} \cdot \hat{k} = 0$ (так как свет представляет собой поперечную волну). Следовательно, вектор \hat{k} есть собственный вектор тензора \mathcal{G} , соответствующий собственному значению $\lambda = 0$; тогда остается только два собственных значения λ_p , соответствующих $p = 1, 2$. Суммарную поляризацию пучка обычно определяют равенством $|I_1 - I_2| = |\lambda_1 - \lambda_2| / (\lambda_1 + \lambda_2)$. Оба направления поляризации $\hat{e}^{(p)}$, $p = 1, 2$ лежат, очевидно, в плоскости, перпендикулярной вектору \hat{k} .

Корреляционный тензор высшего порядка определим следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\mu_1 \dots \mu_{2n}}^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \\ = \text{Sp} [\rho E_{\mu_1}^{(-)}(x_1) \dots E_{\mu_n}^{(-)}(x_n) E_{\mu_{n+1}}^{(+)}(x_{n+1}) \dots E_{\mu_{2n}}^{(+)}(x_{2n})]. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Условие когерентности для полей любой поляризации можно получить путем видоизменения условия (8.5) таким образом, чтобы существовала векторная функция $\mathcal{E}_\mu(x)$, для которой

$$G_{\mu_1 \dots \mu_{2n}}(x_1 \dots x_{2n}) = \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_{\mu_j}^*(x_j) \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}_{\mu_j}(x_j) \quad (8.16)$$

при $n \leq M$.

В качестве последнего замечания о поляризации отметим, что когерентность первого порядка предполагает полную поляризацию поля, т. е. если

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(x, x) = \mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{E}_\mu^*(x) \mathcal{E}_\nu(x), \quad (8.17)$$

то вектор $\mathcal{E}_\mu(x)$ является собственным вектором. Соответствующая интенсивность имеет вид $\sum_{\mu=1}^3 |\mathcal{E}_\mu(x)|^2$ и представляет собой полную интенсивность поля.

5. Понятия о когерентных состояниях поля

Попытаемся теперь образовать состояния, в которых поля полностью когерентны, т. е. состояния, в которых все корреляционные функции $G^{(n)}$ факторизованы в соответствии с соотношением (8.5) или (8.16). Если бы существовали общие собственные состояния операторов $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$, то такие собственные состояния, очевидно, привели бы к желаемой факторизации. Однако ввиду того, что $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$ не коммутируют (их коммутатор есть число), то такие собственные состояния не существуют. Можно смягчить наши требования, поскольку в корреляционных функциях операторы поля всегда содержатся в нормальном порядке¹⁾. Поэтому для обеспечения когерентности достаточно, чтобы состояние поля представляло собой просто собственное состояние оператора $E^{(+)}$ в том смысле, что

$$E_\mu^{(+)}(x)|\rangle = \mathcal{E}_\mu(x)|\rangle; \quad (8.18)$$

вместе с сопряженным соотношением

$$\langle | E_\mu^{(-)}(x) = \mathcal{E}_\mu^*(x) \langle |; \quad (8.19)$$

это приводит к желаемой факторизации корреляционных функций.

Так как оператор $E^{(+)}$ не является ни эрмитовым, ни нормальным (т. е. не коммутирует с эрмитово сопряженным ему оператором), то нельзя сказать априори, существуют ли собственные состояния подобного вида. В самом деле, легко показать, что уравнение

$$\langle | E^{(+)}(x) = \mathcal{E}(x) \langle | \quad (8.20)$$

вообще не может иметь нормализуемого решения. Самый простой путь доказать, что уравнение (8.18) имеет решение,— подобрать соответствующее решение. Если какое-либо решение уравнения (8.18) существует, то функция $\mathcal{E}_\mu(x)$ должна удовлетворять тому же самому волновому уравнению и граничным условиям, что и оператор $E_\mu^{(+)}(x)$, для которого можно записать разложение

¹⁾ См. формулу (3.21) лекций 9—11.— *Прим. ред.*

Фурье в виде

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^{(+)}}{\partial t} = i \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} \right)^{1/2} a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}. \quad (8.21)$$

Здесь не зависящие от времени операторы a_k полностью определяются с помощью своих коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}] &= [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \\ [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Соответствующее разложение для $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} \right)^{1/2} a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}, \quad (8.23)$$

где коэффициенты a_k представляют собой совокупность чисел, могущих принимать любые комплексные значения. Подставляя разложения (8.21) и (8.23) в уравнение, определяющее собственные состояния, и приравнявая коэффициенты при каждой собственной функции, получаем, что собственные состояния должны удовлетворять условиям

$$a_k | \rangle = \alpha_k | \rangle \quad (8.24)$$

для всех мод k .

Коэффициенты α_k соответствуют классическим коэффициентам Фурье C_k , которые мы ввели в лекции 1. Если сравнить уравнения (1.8) и (8.23), то получим, что

$$C_k = i \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} \right)^{1/2} \alpha_k. \quad (8.25)$$

Это соотношение показывает, что при описании классических полей параметры α_k велики по абсолютному значению: при $\hbar \rightarrow 0$ α_k увеличивается как $\hbar^{-1/2}$.

Построение искомого собственного состояния начнем с построения состояния $|\alpha_k\rangle_k$ для отдельной моды

$$a_k |\alpha_k\rangle_k = \alpha_k |\alpha_k\rangle_k. \quad (8.26)$$

После этого состояние всей системы определится соотношением

$$| \rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle_k. \quad (8.27)$$

Мы будем называть эти состояния *когерентными*. Так как с точностью до постоянного множителя они остаются неизменными при воздействии оператора уничтожения a_k , то, следовательно, они не могут быть собственными состояниями оператора числа фотонов.

В понятие когерентности, определяемое соотношением (8.27), входит, разумеется, и оптическая когерентность (эти соотношения обеспечивают факторизацию корреляционной функции первого порядка). Но они также включают в себя и понятие когерентности, используемое в теории связи, о чем мы упоминали ранее. Когерентный сигнал в теории связи является идеальным (не содержащим шума) с точно определенным набором коэффициентов Фурье C_k . Но это именно тот тип поля, о котором мы говорили при квантовомеханическом подходе. Точная определенность коэффициентов Фурье α_k , как будет показано, означает, что сигнал не имеет шума настолько это возможно. Однако из этого вовсе не следует, что шума нет вообще. Непредсказуемые флуктуирующие поля имеются даже в вакууме. Наши детекторы отмечают отдельные фотоны, а фотоны приходят случайно. Даже в том случае, когда поле определено точно, сигнал счетчика можно предсказать только статистически; поэтому неизбежно имеет место шум, а когерентное состояние поля лишь сводит этот шум к минимуму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hanbury Brown R., Twiss R. Q., Nature, 177, 27 (1956).
2. Hanbury Brown R., Twiss R. Q., Proc. Roy. Soc., A242, 300 (1957); A243, 291 (1957).
3. Rebka G. A., Pound R. V., Nature, 180, 1035 (1957).

Когерентные и некогерентные состояния поля излучения

1. Введение

Лишь немногие задачи физики привлекали в прошлом большее внимание, чем задачи, поставленные корпускулярно-волновым дуализмом света. История решения этих задач общеизвестна. Кульминационным моментом ее явилось построение квантовой теории электромагнитного поля. Однако по некоторым причинам, которые частично имеют математический характер, а частично связаны, по-видимому, со случайностями истории, в квантовой электродинамике рассматривалось очень мало вопросов, имеющих отношение к проблемам оптики. Так, например, статистические свойства пучка фотонов до сих пор описывались почти исключительно классическими или полуклассическими методами. При таком описании можно, конечно, получить некоторую информацию, но неизбежно остаются открытыми серьезные вопросы непротиворечивости теории, а также можно выпустить из поля зрения квантовые явления, которые не имеют классических аналогов. В качестве примера можно указать на корпускулярно-волновой дуализм света, который должен быть центральным вопросом любой теории, правильно описывающей статистику фотонов, и который исчезает при переходе к классическому пределу. Необходимость в более последовательной теории приводит нас к разработке квантовомеханического подхода к проблемам статистики фотонов. Некоторые результаты такого подхода изложены в статье [1]. Настоящая работа будет посвящена детальному анализу предпосылок, на основании которых получены результаты работы [1].

До сих пор математическое построение квантовой электродинамики исходило из определенного набора квантовых состояний поля. Такими состояниями являются стационарные состояния невзаимо-

¹⁾ После введения понятия о когерентных состояниях в лекциях 9—11 было показано, как можно эти состояния использовать в качестве базиса для разложения произвольных состояний и операторов, в частности, для представления оператора матрицы плотности. Ввиду того, что содержание этих лекций перекрывается с опубликованной недавно статьей автора [Phys. Rev., 131, 2766 (1963)], то ниже эта статья приводится целиком. Читателю, изучившему первые 8 лекций, следует читать далее разделы 3—9. Лекция 12 начинается с материала, соответствующего разделу 9 статьи, и несколько его углубляет.

действующего поля, которые соответствуют присутствию точно определенного числа фотонов. Необходимость использования этих состояний казалась почти аксиоматической, поскольку большая часть вычислений в квантовой электродинамике производилась методами теории возмущений. Особенность электродинамической теории возмущений состоит в том, что в каждом последующем приближении она описывает процессы с увеличением или уменьшением числа фотонов на единицу. Вычисления, выполненные такими методами, имеют дело одновременно с небольшим числом фотонов. С другой стороны, описание оптического светового пучка может потребовать рассмотрения состояний, в которых число фотонов велико и неопределенно. Давно было ясно, что использование в качестве базиса обычного набора состояний фотонов в лучшем случае дает неудобный метод решения таких проблем.

Мы выяснили, что использование набора состояний, возникающих естественным образом при рассмотрении корреляционных и когерентных [2, 3] свойств полей, позволяет значительно глубже понять роль, которую играют фотоны при описании световых пучков. Состояния такого типа, названные нами когерентными, давно уже используются для описания поведения во времени гармонических осцилляторов. Но поскольку они не обладают свойством ортогональности, то их не использовали в качестве набора базисных состояний для описания полей. Можно показать, однако, что эти состояния, хотя и не являются ортогональными, образуют полный набор, и с помощью этих состояний можно просто и однозначно представить любое состояние поля. Обобщая методы, используемые для разложения произвольных состояний по когерентным состояниям, можно выразить произвольные операторы через произведения соответствующих векторов когерентных состояний. Особенно удобно с помощью такого разложения выразить оператор плотности поля. Эти разложения обладают тем свойством, что если поле имеет классический предел, то они очевидны, хотя при этом описание поля остается существенно квантовомеханическим.

Первые разделы данной работы посвящены подробному описанию когерентных состояний и изучению некоторых их свойств. В разделах 4 и 5 дается разложение произвольных состояний и операторов по когерентным состояниям. Раздел 6 посвящен рассмотрению некоторых свойств операторов плотности и тому, как эти свойства учитываются новым методом. Применение развитого формализма к физическим задачам начинается в разделе 7, где вводится определенный вид оператора плотности, который, по-видимому, наиболее подходит для описания излучения макроскопических источников. Такая форма оператора плотности приводит к особенно простому способу описания суперпозиции полей излучения. Далее в разделе 8 рассматривается оператор плотности, кото-

рый соответствует наиболее часто встречающемуся типу некогерентности, и показано, что этот оператор тесно связан с оператором плотности для излучения черного тела. В разделе 9 обобщаются результаты, полученные при описании отдельных мод поля излучения на случай всего поля. Показано, что поля, создаваемые произвольными распределениями классических токов, особенно просто описываются когерентными состояниями. Наконец, в разделе 10 разработанные методы иллюстрируются на примере конкретных типов когерентных и некогерентных полей, их спектров и корреляционных функций.

2. Теоретико-полевое обоснование

В статье [3] было рассмотрено разделение оператора электрического поля $E(\mathbf{r}t)$ на положительно-частотную часть $E^{(+)}(\mathbf{r}t)$ и отрицательно-частотную часть $E^{(-)}(\mathbf{r}t)$. Затем эти поля были использованы для определения последовательности корреляционных функций $G^{(n)}$, простейшая из которых имеет вид

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \text{Sp} \{ \varrho E_{\mu}^{(-)}(\mathbf{r}t) E_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}'t') \}, \quad (2.1)$$

где ϱ есть оператор плотности, который описывает поле, а символ Sp обозначает сумму диагональных элементов. При рассмотрении этих функций было отмечено, что существуют квантовомеханические состояния, которые являются собственными состояниями положительно- и отрицательно-частотных частей поля. Эти состояния определяются уравнениями

$$E_{\mu}^{(+)}(\mathbf{r}t) | \rangle = \mathcal{E}_{\mu}(\mathbf{r}t) | \rangle, \quad (2.2)$$

$$\langle | E_{\mu}^{(-)}(\mathbf{r}t) = \mathcal{E}_{\mu}^*(\mathbf{r}t) \langle |, \quad (2.3)$$

в которых функции $\mathcal{E}_{\mu}(\mathbf{r}t)$ играют роль собственных значений. Возможно, как мы отметим позднее, найти такие собственные состояния $| \rangle$, которые соответствуют произвольному выбору собственных значений $\mathcal{E}_{\mu}(\mathbf{r}t)$ [при условии, что $\mathcal{E}_{\mu}(\mathbf{r}t)$ подчиняются уравнениям Максвелла, которым также удовлетворяет оператор поля $E_{\mu}(\mathbf{r}t)$] и содержат только положительно-частотные члены в разложении Фурье.

Важность собственных состояний, определяемых уравнениями (2.2) и (2.3), заключается в том, что они приводят к факторизации корреляционных функций. Если поле находится в собственном состоянии такого типа, то $\varrho = | \rangle \langle |$ и корреляционная функция первого порядка приводится к виду

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \mathcal{E}_{\mu}^*(\mathbf{r}t) \mathcal{E}_{\nu}(\mathbf{r}'t'). \quad (2.4)$$

Для корреляционной функции n -го порядка имеет место аналогичное разделение на произведение $2n$ сомножителей. Представление

корреляционных функций в факторизованном виде мы использовали для определения полностью когерентных полей. Поэтому собственные состояния $| \rangle$, которые обладают многими интересными свойствами и будут детально изучены, были названы когерентными состояниями. Для изучения свойств таких состояний полезно изложить некоторые элементы квантовой электродинамики, непосредственно относящиеся к данному вопросу.

Операторы электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ можно получить из оператора векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ с помощью соотношений

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

При рассмотрении квантовых состояний поля удобнее описывать поле не непрерывными переменными, а с помощью дискретной последовательности динамических переменных. Предположим поэтому, что рассматриваемое поле заключено в пространственном объеме конечного размера, и разложим векторный потенциал внутри этого объема по соответствующему набору векторных функций собственных состояний, или мод. Амплитуды, связанные с такими колебаниями, образуют дискретный набор переменных, динамическое поведение которых рассмотреть весьма просто.

Выбор набора мод $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ обычно определяется из физических соображений, которые непосредственно не имеют отношения к рассматриваемому вопросу. В частности, нет необходимости определять природу граничных условий в данном объеме; граничные условия могут быть как периодическими, что приводит к бегущим волнам, так и соответствующими отражающими поверхностям, что приводит к стоячим волнам. Если объем не содержит преломляющих сред, то можно считать, что во внутренних точках объема функции мод $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$, соответствующие частотам ω_k , удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k + \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{u}_k = 0. \quad (2.6)$$

В наиболее общем случае, отвлекаясь от вида волнового уравнения или граничных условий, мы будем предполагать, что наши функции образуют полный набор, который удовлетворяет условию ортонормированности

$$\int \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{kl} \quad (2.7)$$

и условию поперечности

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.8)$$

Собственные функции в виде плоских волн, соответствующие кубическому объему с ребром L , можно записать следующим

образом:

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = L^{-3/2} \hat{e}^{(\lambda)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.9)$$

где $\hat{e}^{(\lambda)}$ есть единичный вектор поляризации. На этом примере видно, что индексом моды k можно заменить несколько дискретных переменных, т. е. в данном случае индекс поляризации ($\lambda = 1, 2$) и три декартовы компоненты вектора распространения \mathbf{k} . Но для этого необходимо, чтобы вектор поляризации $\hat{e}^{(\lambda)}$ был перпендикулярен вектору \mathbf{k} согласно условию (2.8), а допустимые значения \mathbf{k} определялись бы обычным образом с помощью периодических граничных условий.

Для векторного потенциала используется следующее разложение:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = c \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}], \quad (2.10)$$

где нормировочный множитель выбран так, чтобы комплексно-сопряженные амплитуды a_k и a_k^\dagger были безразмерными. В классической электромагнитной теории такие фурье-амплитуды являются комплексными числами, которые выбираются произвольным образом, но так, чтобы они оставались постоянными во времени в отсутствие зарядов и токов. В квантовой же электродинамике эти амплитуды должны рассматриваться как взаимно сопряженные операторы. Операторы амплитуд, определенные соотношением (2.10), также будут оставаться постоянными во времени при отсутствии в изучаемой системе источников поля.

Динамическое поведение амплитуд поля описывается гамильтонианом, который в рационализированной системе единиц СИ имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Используя уравнения (2.7) и (2.8) и соответствующие граничные условия для функций мод, этот гамильтониан можно привести к виду

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger). \quad (2.12)$$

Это выражение послужило источником для известной и исключительно плодотворной аналогии между амплитудами мод поля и координатами совокупности одномерных гармонических осцилляторов. Квантовомеханические свойства операторов a_k и a_k^\dagger определяются полностью, если принять для них соотношения коммутации, аналогичные соотношениям для независимых гармонических осцилля-

торов:

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad (2.13a)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (2.13б)$$

После того как произведено разделение динамических переменных, описывающих различные моды, можно приступить к рассмотрению квантовых состояний данной моды независимо от других мод. Состояние каждой моды можно описывать вектором состояния $| \rangle_k$ в гильбертовом пространстве, соответствующем данной моде. Тогда состояния всего поля определяются в пространстве, являющемся произведением гильбертовых пространств всех мод.

Для рассмотрения квантовых состояний отдельных мод достаточно быть знакомым с элементарным описанием отдельного гармонического осциллятора. Гамильтониан

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger)$$

имеет собственные значения $\hbar \omega_k (n_k + 1/2)$, где n_k есть целое число ($n_k = 0, 1, 2, \dots$). Вектор основного состояния осциллятора будем записывать символом $| \rangle_k$, причем он определяется следующим условием:

$$a_k | 0 \rangle_k = 0. \quad (2.14)$$

Векторы возбужденных состояний осциллятора можно получить путем последовательного применения оператора a_k^\dagger к вектору $| 0 \rangle_k$. В нормированном виде эти состояния записываются как

$$| n_k \rangle_k = \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} | 0 \rangle_k \quad (n_k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.15)$$

Действие операторов a_k и a_k^\dagger на эти состояния ясно из следующих соотношений:

$$a_k | n_k \rangle_k = n_k^{1/2} | n_k - 1 \rangle_k, \quad (2.16)$$

$$a_k^\dagger | n_k \rangle_k = (n_k + 1)^{1/2} | n_k + 1 \rangle_k, \quad (2.17)$$

$$a_k^\dagger a_k | n_k \rangle_k = n_k | n_k \rangle_k. \quad (2.18)$$

Закончив небольшое вступление, мы можем теперь перейти к более детальному рассмотрению когерентных состояний поля. Положительно-частотная часть разложения векторного потенциала (2.10) является суммой, содержащей операторы уничтожения фотонов a_k , в то время как отрицательно-частотная часть включает в себя операторы рождения фотонов a_k^\dagger . Таким образом, положительно-частотная часть оператора электрического поля в соответствии с (2.10)

дается следующим выражением:

$$E^{(+)}(rt) = i \sum_k \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_k \right)^{1/2} a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}. \quad (2.19)$$

Очевидно, что собственные значения $\mathcal{E}(rt)$, определяемые уравнением (2.2), так же как и оператор $E^{(+)}(rt)$, должны удовлетворять уравнениям Максвелла. Поэтому их можно разложить по нормальным модам вида (2.19). Другими словами, можно ввести набор коэффициентов Фурье a_k , являющихся c -числами, которые позволяют переписать собственные значения в виде

$$\mathcal{E}(rt) = i \sum_k \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_k \right)^{1/2} a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}. \quad (2.20)$$

Так как функции мод $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ образуют ортогональный набор, то отсюда следует, что собственное состояние поля $|\rangle$ для всех мод k подчиняется следующей бесконечной последовательности соотношений:

$$a_k |\rangle = \alpha_k |\rangle. \quad (2.21)$$

Для нахождения состояний, которые удовлетворяют этим соотношениям, необходимо найти такие состояния отдельных мод $|\alpha_k\rangle_k$, которые подчиняются соотношениям

$$a_k |\alpha_k\rangle_k = \alpha_k |\alpha_k\rangle_k. \quad (2.22)$$

Тогда, как легко видеть, когерентные состояния поля $|\rangle$, рассматриваемого как целое, представляют собой произведение отдельных состояний $|\alpha_k\rangle$

$$|\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle_k. \quad (2.23)$$

3. Когерентные состояния одной моды

Несколько следующих разделов будет посвящено описанию одномодового осциллятора. Поэтому мы можем упростить систему обозначений, опустив индекс моды у вектора состояния, амплитудных параметров и операторов. Для нахождения состояния осциллятора $|\alpha\rangle$, которое удовлетворяет уравнению

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (3.1)$$

умножим скалярно обе его части на n -е возбужденное состояние $\langle n |$. Используя затем эрмитово-сопряженную форму соотношения (2.17) для скалярного произведения $\langle n | \alpha \rangle$, находим следующее рекуррентное соотношение:

$$(n+1)^{1/2} \langle n+1 | \alpha \rangle = \alpha \langle n | \alpha \rangle. \quad (3.2)$$

Из этого соотношения сразу же получаем

$$\langle n | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \langle 0 | \alpha \rangle. \quad (3.3)$$

Эти скалярные произведения являются коэффициентами разложения состояния $|\alpha\rangle$ по полному ортонормированному набору состояний $|n\rangle$ ($n=0, 1, 2 \dots$). Таким образом, имеем

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \alpha \rangle = \langle 0 | \alpha \rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (3.4)$$

Следовательно, квадрат длины вектора $|\alpha\rangle$ равен

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 e^{|\alpha|^2}. \quad (3.5)$$

Если состояние $|\alpha\rangle$ нормировано на единицу (т. е. $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$), то его фазу можно определить следующим образом:

$$\langle 0 | \alpha \rangle = e^{-1/2|\alpha|^2}. \quad (3.6)$$

Поэтому когерентные состояния осциллятора принимают вид

$$|\alpha\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (3.7)$$

и

$$\langle \alpha | = e^{-1/2|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{(n!)^{1/2}} \langle n |. \quad (3.8)$$

Эти выражения показывают, что среднее число заполнения n -го состояния дается распределением Пуассона со средним значением $|\alpha|^2$

$$|\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (3.9)$$

Из них также следует, что когерентное состояние $|\alpha\rangle$, соответствующее $\alpha = 0$, является единственным основным состоянием осциллятора, т. е. состоянием $|n\rangle$ для $n = 0$.

В дальнейшем будет чрезвычайно полезен и другой подход к когерентным состояниям, которым мы тоже будем пользоваться. Для этого предположим, что существует унитарный оператор D , который действует как оператор смещения на амплитуды a^\dagger и a . Допустим, что D является функцией комплексного параметра β , и потребуем, чтобы действие этого оператора на операторы амплитуд сводилось к следующему:

$$D^{-1}(\beta) a D(\beta) = a + \beta, \quad (3.10)$$

$$D^{-1}(\beta) a^\dagger D(\beta) = a^\dagger + \beta^*. \quad (3.11)$$

Тогда если $|\alpha\rangle$ подчиняется уравнению (3.1), то $D^{-1}(\beta)|\alpha\rangle$ является собственным состоянием a , соответствующим собственному значению $\alpha - \beta$:

$$aD^{-1}(\beta)|\alpha\rangle = (\alpha - \beta)D^{-1}(\beta)|\alpha\rangle. \quad (3.12)$$

В частности, если выбрать $\beta = \alpha$, то получим

$$aD^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle = 0.$$

Так как основное состояние осциллятора однозначно определяется соотношением (2.14), то отсюда следует, что $D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle$ является как раз основным состоянием $|0\rangle$. Другими словами, когерентные состояния представляют собой как раз основное состояние осциллятора, на которое действовали оператором сдвига,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (3.13)$$

Чтобы найти явный вид оператора сдвига $D(\alpha)$, рассмотрим бесконечно малые сдвиги в окрестности $D(0) = 1$. Для произвольных сдвигов da , как легко видеть из коммутационных соотношений (2.13), $D(da)$, с точностью до первого порядка по da можно представить в виде

$$D(da) = 1 + a^\dagger da - a da^*. \quad (3.14)$$

Для вывода дифференциального уравнения первого порядка для неизвестного оператора рассмотрим приращение α в виде $da = \alpha d\lambda$, где λ — действительный параметр. Тогда, если предположить, что оператор D обладает следующим свойством группового умножения:

$$D[\alpha(\lambda + d\lambda)] = D(\alpha d\lambda) D(\alpha\lambda), \quad (3.15)$$

то мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda} D(\alpha\lambda) = (\alpha a^\dagger - \alpha^* a) D(\alpha\lambda), \quad (3.16)$$

решением которого, вычисленным для $\lambda = 1$, является унитарный оператор

$$D(\alpha) = e^{a\alpha^\dagger - \alpha^* a}. \quad (3.17)$$

Поэтому когерентные состояния $|\alpha\rangle$ можно записать в виде

$$|\alpha\rangle = e^{a\alpha^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle. \quad (3.18)$$

Так как $D(\alpha)$ является унитарным оператором, то эти состояния удовлетворяют требуемым условиям нормировки.

Интересно рассмотреть связь между двумя полученными нами выражениями для когерентных состояний. Для этого вспомним простую теорему об умножении экспоненциальных функций от

операторов. Если \mathcal{A} и \mathcal{B} — произвольные операторы, коммутатор которых $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ коммутирует с каждым из них

$$[[\mathcal{A}, \mathcal{B}], \mathcal{A}] = [[\mathcal{A}, \mathcal{B}], \mathcal{B}] = 0, \quad (3.19)$$

то можно показать [4], что

$$e^{\mathcal{A}} e^{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A} + \mathcal{B} + 1/2[\mathcal{A}, \mathcal{B}]}. \quad (3.20)$$

Если положить $\mathcal{A} = a^\dagger$ и $\mathcal{B} = a$, то на основании этой теоремы экспоненциальное выражение (3.17) для $D(a)$ можно разложить на множители

$$D(a) = e^{-1/2|a|^2} e^{aa^\dagger} e^{-a^*a}. \quad (3.21)$$

Мы будем говорить, что произведение такого типа, в котором операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения, записано в нормальном виде. Удобство такой записи заключается в том, что применение экспоненциального выражения $\exp(-a^*a)$ к основному состоянию $|0\rangle$ эквивалентно применению единичного оператора, так как экспоненциальное выражение можно разложить в ряд и использовать определение основного состояния в виде (2.14), поэтому

$$e^{-a^*a} |0\rangle = |0\rangle. \quad (3.22)$$

Отсюда следует, что когерентные состояния можно записать в виде

$$|\alpha\rangle = D(a) |0\rangle = e^{-1/2|a|^2} e^{aa^\dagger} |0\rangle, \quad (3.23)$$

$$|\alpha\rangle = e^{-1/2|a|^2} \sum_n \frac{(aa^\dagger)^n}{n!} |0\rangle. \quad (3.24)$$

А так как возбужденные состояния осциллятора есть

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2} (a^\dagger)^n |0\rangle,$$

то снова получаем выражение (3.7)

$$|\alpha\rangle = e^{-1/2|a|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle.$$

С помощью этого выражения можно наглядно представить когерентные состояния, рассматривая их в координатном пространстве и в пространстве импульсов. Для координаты одномодового осциллятора и его импульса введем соответственно пару эрмитовых операторов q и p . Эти операторы, которые должны удовлетворять каноническим правилам коммутации $[q, p] = i\hbar$, можно определить обычным способом

$$q = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} (a^\dagger + a), \quad (3.25a)$$

$$p = i \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} (a^\dagger - a). \quad (3.25b)$$

Чтобы найти ожидаемые значения q и p в когерентных состояниях, достаточно воспользоваться уравнением (3.1), которое определяет эти состояния, и его эрмитово-сопряженной формой. После этого получаем

$$\langle \alpha | q | \alpha \rangle = \left(\frac{2\hbar}{\omega} \right)^{1/2} \operatorname{Re} \alpha, \quad (3.26a)$$

$$\langle \alpha | p | \alpha \rangle = (2\hbar\omega)^{1/2} \operatorname{Im} \alpha. \quad (3.26b)$$

Чтобы найти волновые функции когерентных состояний, запишем определяющее уравнение (3.1) в виде

$$(2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega q + ip) | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle \quad (3.27)$$

и умножим скалярно обе его части на сопряженное состояние $\langle q' |$, которое соответствует собственному значению q' для q . Так как импульс можно представить дифференциальным оператором, т. е.

$$\langle q' | p = -i\hbar \frac{d}{dq'} \langle q' |,$$

то отсюда получаем, что волновая функция в координатном пространстве $\langle q' | \alpha \rangle$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dq'} \langle q' | \alpha \rangle = -2 \left(\frac{\omega}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\omega}{2\hbar} \right)^{1/2} q' - \alpha \right] \langle q' | \alpha \rangle. \quad (3.28)$$

Данное уравнение можно проинтегрировать и получить решение для волновой функции, которая в нормированном виде дается следующим выражением:

$$\langle q' | \alpha \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-[(\omega/2\hbar)^{1/2} q' - \alpha]^2}. \quad (3.29)$$

Аналогично можно получить и волновую функцию в пространстве импульсов. Если обе части уравнения (3.27) умножить скалярно на собственное состояние импульса $\langle p' |$ и воспользоваться соотношением

$$\langle p' | q = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' |,$$

то получим дифференциальное уравнение, нормированное решение которого имеет вид

$$\langle p' | \alpha \rangle = (\pi\hbar\omega)^{-1/4} e^{-[(2\hbar\omega)^{-1/2} p' + i\alpha]^2}. \quad (3.30)$$

Обе волновые функции представляют собой волновую функцию основного состояния осциллятора, на которую действовали оператором сдвига. Параметры $(\hbar/\omega)^{1/2}$ и $(\hbar\omega)^{1/2}$ соответствуют амплитудам нулевых флуктуаций координаты и импульса осциллятора единичной массы. Не следует удивляться тому, что волновые функ-

ции когерентных состояний имеют такую простую структуру, поскольку они получены из уравнения (3.13) с помощью сдвига в комплексной α -плоскости.

Не зависящие от времени состояния $|\alpha\rangle$, которые рассматривались до сих пор, являются характерными состояниями для гейзенберговского представления квантовой механики. Для шредингеровского же представления, наоборот, необходимо использовать зависящие от времени состояния $\exp(-iHt/\hbar)|\alpha\rangle$. Если из гамильтониана осциллятора исключить энергию нулевых колебаний поля $(1/2)\hbar\omega$ и записать его в виде $H = \hbar\omega a^\dagger a$, то, как легко видеть из разложения (3.7) для $|\alpha\rangle$, соответствующие шредингеровские состояния принимают такой же вид, если α заменить на $\alpha e^{-i\omega t}$. Следовательно, шредингеровское состояние можно записать как $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$. Заменяя в соотношениях (3.26а) и (3.26б) α на $\alpha e^{-i\omega t}$, получаем, что ожидаемые значения координаты и импульса гармонически колеблются, причем амплитуда колебаний координаты равна $(2\hbar/\omega)^{1/2}|\alpha|$. Аналогичная замена в волновых функциях (3.29) и (3.30) показывает, что гауссова плотность вероятности, характерная для основного состояния осциллятора, также обладает колебательным характером движения, как и ожидаемые значения. Такие волновые пакеты, конечно, давно известны; еще на заре развития квантовой механики они были введены Шредингером [5, 6] и часто использовались для иллюстрации предельного перехода от квантового осциллятора к классическому.

Волновые пакеты (3.29) и (3.30) в прошлом рассматривались также в связи с тем, что они особым образом локализуют координату q' и импульс p' . Конечно, можно построить такие волновые пакеты, которые значительно сильнее локализуют любую из переменных, но только за счет уменьшения локализации другой переменной. Волновые же пакеты (3.29) и (3.30) в некотором смысле представляют своеобразный компромисс; произведение неопределенностей переменных q' и p' в этих волновых пакетах имеет минимальное значение. Если ожидаемые значения представить с помощью угловых скобок $\langle \rangle$ и определить дисперсии

$$\langle \Delta q \rangle^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2, \quad (3.31a)$$

$$\langle \Delta p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2, \quad (3.31б)$$

то при использовании волновых функций (3.29) и (3.30) найдем, что произведение этих дисперсий равно

$$\langle \Delta p \rangle^2 \langle \Delta q \rangle^2 = \frac{1}{4} \hbar^2.$$

В соответствии с принципом неопределенности это есть минимальное значение, которое может иметь данное произведение [7]. Таким образом, в определенном смысле описание осциллятора с помощью

волновых функций (3.29) и (3.30) представляет наиболее близкое из возможных приближение к классической локализации переменных.

Использование когерентных состояний в квантовой электродинамике фактически не требует явного введения переменных координаты и импульса. Поэтому мы пересмотрели общеизвестные представления когерентных состояний с помощью этих переменных, надеясь, что они могут оказать некоторую помощь в понимании различных применений когерентных состояний, к рассмотрению которых мы вскоре перейдем.

Одно из свойств когерентных состояний $|\alpha\rangle$, которое становится очевидным при использовании указанного представления волновых функций, заключается в том, что два таких состояния в общем случае не ортогональны. Если, например, мы рассмотрим волновые функции $\langle q' | \alpha \rangle$ и $\langle q' | \alpha' \rangle$ для значений α' , близких к α , то очевидно, что эти функции аналогичны по форме и значительно перекрываются друг с другом. Однако для значений α' и α , достаточно отличающихся друг от друга, перекрытие волновых функций в лучшем случае весьма мало. Поэтому можно ожидать, что скалярное произведение $\langle \alpha | \alpha' \rangle$, которое равно единице при $\alpha = \alpha'$, будет уменьшаться по абсолютной величине по мере удаления α' от α в комплексной плоскости. Если применить представления (3.7) и (3.8), то это скалярное произведение можно вычислить более просто, чем при использовании волновых функций. В этом случае получаем выражение

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-1/2 |\alpha|^2 - 1/2 |\beta|^2} \sum_{n, m} \frac{(\alpha^*)^n \beta^m}{(n!m!)^{1/2}} \langle n | m \rangle,$$

которое из-за ортонормированности состояний $|n\rangle$ сводится к следующему:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{\alpha^* \beta - 1/2 |\alpha|^2 - 1/2 |\beta|^2}. \quad (3.32)$$

Абсолютное значение скалярного произведения дается выражением

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}, \quad (3.33)$$

которое показывает, что когерентные состояния становятся приблизительно ортогональными для достаточно различающихся значений α и β . Тот факт, что эти состояния даже приблизительно не ортогональны при значениях $|\alpha - \beta|$ порядка единицы, можно рассматривать как результат перекрытия волновых функций, вызванного наличием нулевых флуктуаций.

Поскольку когерентные состояния не образуют ортогонального набора функций, они привлекали мало внимания в качестве возможной системы базисных векторов для разложения произвольных

состояний¹⁾). Однако в следующем разделе показывается, что можно легко получить такие разложения, и притом однозначные, и что они обладают исключительно полезными свойствами. В последующих разделах, обобщая методику на билинейные комбинации состояний $|\alpha\rangle$ и $\langle\beta|$, мы получим также аналогичные разложения для операторов [1].

4. Разложение произвольных состояний по когерентным состояниям

Хотя ортогональность набора базисных состояний очень удобное свойство, однако оно не является необходимым. Существенное же свойство такого набора заключается в его полноте. Нетрудно показать, что набор когерентных состояний $|\alpha\rangle$ одномодового осциллятора является полным. Для доказательства необходимо только показать, что единичный оператор можно выразить через соответствующую сумму или интеграл по комплексной α -плоскости проекционных операторов типа $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Для описания таких интегралов введем дифференциальный элемент площади в α -плоскости

$$d^2\alpha = d(\operatorname{Re} \alpha) d(\operatorname{Im} \alpha) \quad (4.1)$$

(элемент $d^2\alpha$ действителен). Если записать $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, то можно легко доказать интегральное тождество

$$\int (\alpha^*)^n \alpha^m e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha = \int_0^\infty |\alpha|^{n+m+1} e^{-|\alpha|^2} d|\alpha| \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \pi n! \delta_{nm}, \quad (4.2)$$

в котором интегрирование производится по всей комплексной плоскости. С помощью этого тождества и разложений (3.7) и (3.8) для когерентных состояний сразу же можно показать, что

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \pi \sum_n |n\rangle\langle n|.$$

Известно, что n -квантовые состояния образуют полный ортонормированный набор функций, поэтому указанная сумма по n просто равна единичному оператору. Следовательно [1],

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = 1, \quad (4.3)$$

что является соотношением полноты для когерентных состояний.

¹⁾ Однако эти состояния использовались Швингером в качестве производящей функции для n -квантовых состояний [8].

Произвольное состояние осциллятора должно обладать разложением по n -квантовым состояниям следующего вида:

$$|\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n \frac{(a^\dagger)^n}{(n!)^{1/2}} |0\rangle, \quad (4.4)$$

где $\sum |c_n|^2 = 1$. Ряд в выражении (4.4) можно использовать для определения функции f комплексного переменного z

$$f(z) = \sum c_n \frac{z^n}{(n!)^{1/2}}. \quad (4.5)$$

Из условия нормировки c_n ясно, что этот ряд сходится для всех конечных z и, следовательно, представляет функцию, аналитическую в конечной области комплексной плоскости. Функции $f(z)$, для которых $\sum |c_n|^2 = 1$, мы будем называть набором нормированных целых функций. Очевидно, что между такими целыми функциями и состояниями осциллятора существует взаимно однозначное соответствие. Один из методов описания осциллятора заключается в том, что сами функции $f(z)$ рассматриваются как элементы гильбертова пространства. Свойства этого пространства и проводимых в нем разложений детально изучались в работах Сегала [9] и Баргманна [10]. Для разложения произвольных состояний по когерентным состояниям мы будем использовать метод, который является простым обобщением обычного метода преобразования базисных состояний в квантовой механике. Очевидно, что это эквивалентно одному из разложений, полученных Баргманном.

Если произвольное состояние, которому соответствует функция $f(z)$, обозначить через $|f\rangle$, то уравнение (4.4) можно переписать в следующем виде:

$$|f\rangle = f(a^\dagger) |0\rangle. \quad (4.6)$$

Для получения разложения $|f\rangle$ по состояниям $|\alpha\rangle$ умножим состояние $|f\rangle$ на единичный оператор в представлении (4.3):

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | f(a^\dagger) |0\rangle d^2\alpha.$$

Поскольку $\langle \alpha | f(a^\dagger) = \langle \alpha | f(\alpha^*)$, это выражение сводится к следующему:

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle f(\alpha^*) e^{-1/2|\alpha|^2} d^2\alpha, \quad (4.7)$$

которое и является разложением желаемого типа.

Следует отметить, что разложение (4.7) легко обратить и получить явное выражение для функции $f(\alpha^*)$, которая соответствует произвольному вектору $|f\rangle$. Для этого умножим скалярно обе части равенства (4.7) на когерентное состояние $\langle \beta |$ и используем выра-

жение (3.32) для вычисления скалярного произведения $\langle \beta | \alpha \rangle$;

$$\langle \beta | f \rangle = \frac{1}{\pi} e^{-1/2 |\beta|^2} \int e^{\beta^* \alpha - |\alpha|^2} f(\alpha^*) d^2 \alpha. \quad (4.8)$$

Поскольку функцию $f(\alpha^*)$ можно разложить в сходящийся степенной ряд, то имеет место соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int e^{\beta^* \alpha - |\alpha|^2} (\alpha^*)^n d^2 \alpha = (\beta^*)^n, \quad (4.9)$$

из которого получается более общее тождество

$$\frac{1}{\pi} \int e^{\beta^* \alpha - |\alpha|^2} f(\alpha^*) d^2 \alpha = f(\beta^*). \quad (4.10)$$

Подставляя последнее тождество в уравнение (4.8), находим, что

$$f(\beta^*) = e^{1/2 |\beta|^2} \langle \beta | f \rangle. \quad (4.11)$$

Таким образом, имеется однозначное соответствие между функциями $f(\alpha^*)$, которые играют роль коэффициентов разложения в (4.7), и векторами $|f\rangle$, описывающими состояния осциллятора.

Для векторов сопряженных состояний также существует разложение, аналогичное (4.7). Если $g(\alpha^*)$ есть целая функция α^* , то для состояния $\langle g|$ можно построить разложение

$$\langle g| = \frac{1}{\pi} \int [g(\beta^*)]^* \langle \beta | e^{-1/2 |\beta|^2} d^2 \beta. \quad (4.12)$$

Отсюда скалярное произведение состояний $\langle g|$ и $|f\rangle$ равно

$$\langle g | f \rangle = \pi^{-2} \int [g(\beta^*)]^* f(\alpha^*) e^{\beta^* \alpha - |\alpha|^2 - |\beta|^2} d^2 \alpha d^2 \beta.$$

Выполняя здесь интегрирование по переменной α с помощью тождества (4.10), получаем

$$\langle g | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int [g(\beta^*)]^* f(\beta^*) e^{-|\beta|^2} d^2 \beta. \quad (4.13)$$

Данное выражение для скалярного произведения двух векторов по существу являлось исходным при рассмотрении Баргманном¹⁾ гильбертова пространства функций $f(z)$.

С математической точки зрения интересно, что когерентные состояния $|\alpha\rangle$ не являются линейно независимыми, как это имеет место для членов полного ортогонального набора. Так, например, разложение (4.7) можно использовать для выражения любого данного когерентного состояния через линейную комбинацию осталь-

¹⁾ Некоторые из доказательств Баргманна обобщены Швебером [11], который использовал их в связи с формулировкой квантовой механики с помощью фейнмановских амплитуд.

ных, т. е. на основании выражений (4.11) и (3.32) можно записать

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\beta\rangle e^{\beta^* \alpha - 1/2 |\alpha|^2 - 1/2 |\beta|^2} d^2\beta. \quad (4.14)$$

Существует также много других типов линейной зависимости между состояниями $|\alpha\rangle$. Отметим, например, соотношение

$$\int |\alpha\rangle \alpha^n e^{-1/2 |\alpha|^2} d^2\alpha = 0, \quad (4.15)$$

которое справедливо для всех целых $n > 0$. Из последних результатов ясно, что если бы мы использовали в качестве коэффициентов разложения в (4.7) более общие функции, чем $f(\alpha^*)$, скажем функции $F(\alpha, \alpha^*)$, то дополнительно появилось бы много других способов разложения произвольного состояния по когерентным состояниям. Но именно неявное ограничение, накладываемое на разложение (4.7) (разлагаемая функция должна аналитически зависеть от переменной α^*), приводит к тому, что разложение является однозначным. Достоинство же разложения с однозначно определяемыми коэффициентами очевидно. Кроме того, появляется возможность с помощью обращения разложения [как при получении (4.11)] построить явное решение для коэффициентов разложения произвольного состояния, независимо от того, в каком представлении оно было дано первоначально.

5. Разложение операторов по векторам когерентных состояний

Наши знания о собственных состояниях осциллятора практически редко бывают достаточными для того, чтобы можно было определить его квантовое состояние. Вместо этого мы должны описывать их с помощью суперпозиции состояний, которые выражаются через оператор плотности. Те же самые причины, которые привели нас к необходимости разложения произвольных состояний по когерентным состояниям, делают необходимым получение разложения оператора плотности по этим состояниям. В этом разделе исследование начинается с рассмотрения довольно общего класса операторов, а в следующем — будет рассмотрен частный случай оператора плотности.

Квантовомеханический оператор T в общем случае можно выразить через его матричные элементы, связывающие состояния с фиксированным числом квантов:

$$T = \sum_{n, m} |n\rangle T_{nm} \langle m|, \quad (5.1)$$

$$T = \sum T_{nm} (n!m!)^{-1/2} (a^\dagger)^n |0\rangle \langle 0| a^m. \quad (5.2)$$

Если это выражение использовать для вычисления матричных элементов, связывающих два когерентных состояния $\langle \alpha |$ и $\langle \beta |$, то получим

$$\langle \alpha | T | \beta \rangle = \sum_{n, m} T_{nm} (n!m!)^{-1/2} (\alpha^*)^n \beta^m \langle \alpha | 0 \rangle \langle 0 | \beta \rangle. \quad (5.3)$$

Для упрощения записи удобно ввести функцию $\mathcal{F}(\alpha^*, \beta)$, определяемую соотношением

$$\mathcal{F}(\alpha^*, \beta) = \sum_{n, m} T_{nm} (n!m!)^{-1/2} (\alpha^*)^n \beta^m. \quad (5.4)$$

В квантовой механике часто встречаются неограниченные операторы; примером таких операторов могут служить операторы, определяемые соотношениями (2.16)–(2.18). Такие операторы, а также некоторые другие, которые нам, вероятно, встретятся, обладают тем свойством, что значения их матричных элементов T_{nm} мажорируются выражением типа $Mn^j m^k$ для некоторых фиксированных положительных значений M , j и k . В этом случае двойной ряд (5.4) сходится в конечных областях плоскостей α^* и β и представляет собой целую функцию обеих переменных.

Для получения разложения оператора T по когерентным состояниям можно использовать представление единичного оператора в виде (4.3), что дает

$$T = \frac{1}{\pi^2} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | T | \beta \rangle \langle \beta | d^2\alpha d^2\beta, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\pi^2} \int |\alpha\rangle \mathcal{F}(\alpha^*, \beta) \langle \beta | \langle \alpha | 0 \rangle \langle 0 | \beta \rangle d^2\alpha d^2\beta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int |\alpha\rangle \mathcal{F}(\alpha^*, \beta) \langle \beta | e^{-1/2 |\alpha|^2 - 1/2 |\beta|^2} d^2\alpha d^2\beta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Пользуясь тем же методом, которым было получено соотношение (4.11) из (4.7), можно найти обращение этого разложения, или решение относительно $\mathcal{F}(\alpha^*, \beta)$:

$$\mathcal{F}(\alpha^*, \beta) = \langle \alpha | T | \beta \rangle e^{1/2 |\alpha|^2 + 1/2 |\beta|^2}. \quad (5.7)$$

Отсюда видно, что разложение операторов, а также и произвольных квантовых состояний по когерентным состояниям является однозначным.

С помощью функций \mathcal{F} легко получить закон умножения операторов. Если $T = T_1 T_2$, а \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 — функции, соответствующие операторам T_1 и T_2 , то можно записать

$$\begin{aligned} \langle \alpha | T | \beta \rangle &= \langle \alpha | T_1 T_2 | \beta \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | T_1 | \gamma \rangle \langle \gamma | T_2 | \beta \rangle d^2\gamma. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Поэтому функция \mathcal{F} , которая представляет произведение операторов, дается выражением

$$\mathcal{F}(\alpha^*, \beta) = \frac{1}{\pi} \int \mathcal{F}_1(\alpha^*, \gamma) \mathcal{F}_2(\gamma^*, \beta) e^{-|\gamma|^2} d^2\gamma. \quad (5.9)$$

Функция разложения для оператора T^\dagger , эрмитово-сопряженного с T , получается из выражения (5.4) путем замены в нем T_{nm} на T_{mn}^* (т. е. она равна $[\mathcal{F}(\beta^*, \alpha)]^*$). Если оператор T является эрмитовым, то функция \mathcal{F} должна удовлетворять соотношению

$$\mathcal{F}(\alpha^*, \beta) = [\mathcal{F}(\beta^*, \alpha)]^*, \quad (5.10)$$

так как разложения операторов T и T^\dagger однозначны.

Как следует из (5.7) и (3.32), функции $\mathcal{F}(\alpha^*, \beta)$, которые представляют нормальные произведения операторов a^\dagger и a вида $(a^\dagger)^n a^m$, выражаются следующим образом:

$$\mathcal{F}(\alpha^*, \beta) = (\alpha^*)^n \beta^m e^{\alpha^* \beta}. \quad (5.11)$$

В частности, для единичного оператора $n = m = 0$.

Следует отметить, что большинство предыдущих формул можно несколько упростить, приняв для когерентных состояний нормировку, отличную от общепринятой. Если для состояний, нормированных новым способом, ввести обозначение $||\alpha\rangle$ и определить их как

$$||\alpha\rangle = |\alpha\rangle e^{1/2|\alpha|^2}, \quad (5.12)$$

то скалярное произведение двух таких состояний запишется в виде $\langle\alpha || \beta\rangle$. На основании выражения (3.32) это скалярное произведение равно

$$\langle\alpha || \beta\rangle = e^{\alpha^* \beta}. \quad (5.13)$$

Далее, следуя Баргманну [10], можно ввести элемент меры $d\mu(\alpha)$, определяемый соотношением

$$d\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha. \quad (5.14)$$

После таких изменений из предыдущих формул выпадают все гауссовы функции и число π . Например, выражения (5.6) и (5.7) записываются в такой сокращенной форме:

$$T = \int ||\alpha\rangle \mathcal{F}(\alpha^*, \beta) \langle\beta || d\mu(\alpha) d\mu(\beta) \quad (5.15)$$

и

$$\mathcal{F}(\alpha^*, \beta) = \langle\alpha || T || \beta\rangle. \quad (5.16)$$

Наиболее важное свойство таких состояний $||\alpha\rangle$ заключается

в том, что они даются разложением

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (5.17)$$

и поэтому подчиняются соотношению

$$a^\dagger |\alpha\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha} |\alpha\rangle. \quad (5.18)$$

Хотя о свойствах нормированных таким образом состояний $|\alpha\rangle$ не следует забывать, однако в данной работе мы не будем пользоваться этой нормировкой для того, чтобы сохранить общепринятую интерпретацию скалярных произведений как амплитуд вероятности. Преимущества же, вытекающие из соотношения (5.18), не являются очень большими, так как все операторы, с которыми мы будем иметь дело, или уже имеют нормально упорядоченную форму, или легко к ней приводятся.

6. Общие свойства оператора плотности

Разработанный в двух предыдущих разделах формализм дает возможность выразить собственные значения оператора плотности через векторы когерентных состояний. С математической точки зрения использование векторов когерентных состояний приводит к значительному упрощению при вычислении статистических средних. Так как когерентные состояния являются собственными состояниями полевых операторов $E^{(\pm)}(rt)$, то нормально упорядоченные произведения полевых операторов можно заменить при усреднении на произведения их собственных значений, т. е. рассматривать их не как операторы, а как числа. Корреляционные функции поля вида $G^{(1)}$, определяемые уравнением (2.1), есть средние именно от таких произведений операторов. Их можно довольно легко вычислить при использовании представлений, которые мы рассмотрим ниже.

Любой оператор плотности ρ можно в соответствии с результатами предыдущего раздела однозначно представить с помощью функции двух комплексных переменных $R(\alpha^*, \beta)$, которая аналитична в конечных областях плоскостей α^* и β . На основании (5.7) явное выражение для функции R есть

$$R(\alpha^*, \beta) = \langle \alpha | \rho | \beta \rangle e^{1/2|\alpha|^2 + 1/2|\beta|^2}. \quad (6.1)$$

Однако если нам известно матричное представление оператора ρ по n -квантовым состояниям, то очевидно, что функция R дается выражением

$$R(\alpha^*, \beta) = \sum_{n, m} \langle n | \rho | m \rangle (n!m!)^{-1/2} (\alpha^*)^n \beta^m. \quad (6.2)$$

Если же матричные элементы $\langle n | \rho | m \rangle$ неизвестны, то их можно довольно легко найти, зная $R(\alpha^*, \beta)$. Один из подходящих для этой цели методов заключается в том, что мы рассматриваем $R(\alpha^*, \beta)$ как производящую функцию и отождествляем ее ряд Тейлора с рядом (6.2). В качестве второго метода можно отметить следующий. Если выражение (6.2) умножить на $\alpha^i (\beta^*)^j \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)]$ и проинтегрировать по всем плоскостям α и β , то в правой части исчезают все члены суммы, кроме тех, у которых $n = i$, $m = j$, и мы получаем

$$\langle i | \rho | j \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int R(\alpha^*, \beta) (i!j!)^{-1/2} \alpha^i (\beta^*)^j e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} d^2\alpha d^2\beta. \quad (6.3)$$

Таким образом, зная функцию $R(\alpha^*, \beta)$, оператор плотности можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{\pi^2} \int |\alpha\rangle R(\alpha^*, \beta) \langle \beta| e^{-1/2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} d^2\alpha d^2\beta. \quad (6.4)$$

Статистическое среднее оператора T дается шпуром произведения ρT . Если при вычислении этого среднего для ρ использовать представление (6.4), то необходимо отметить, что шпур выражения $|\alpha\rangle \langle \beta| T$, рассматриваемого как оператор, равен матричному элементу $\langle \beta | T | \alpha \rangle$. Тогда если матричный элемент выразить с помощью функции $\mathcal{F}(\alpha^*, \beta)$, определяемой выражением (5.7), то найдем, что

$$\text{Sp} \{\rho T\} = \frac{1}{\pi^2} \int R(\alpha^*, \beta) \mathcal{F}(\beta^*, \alpha) e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2} d^2\alpha d^2\beta. \quad (6.5)$$

Если T есть оператор типа $(a^\dagger)^n a^m$, то его представление $\mathcal{F}(\beta^*, \alpha)$ дается соотношением (5.11). В частности, при $n = m = 0$ имеем единичный оператор $T = 1$, для которого $\mathcal{F}(\beta^*, \alpha) = \exp(\beta^* \alpha)$. Следовательно, шпур самого оператора ρ , который должен быть нормирован на единицу, равен

$$\text{Sp} \rho = 1 = \frac{1}{\pi^2} \int R(\alpha^*, \beta) e^{\beta^* \alpha - |\alpha|^2 - |\beta|^2} d^2\alpha d^2\beta.$$

Так как $R(\alpha^*, \beta)$ является целой функцией α^* , то можно, используя (4.10), провести интегрирование по всей α -плоскости. Отсюда получаем условие нормировки для R :

$$\frac{1}{\pi} \int R(\beta^*, \beta) e^{-|\beta|^2} d^2\beta = 1. \quad (6.6)$$

Оператор плотности является эрмитовым оператором и, следовательно, имеет действительные собственные значения. Эти собственные значения можно интерпретировать как вероятности, и поэтому они должны быть положительными числами. Так как ρ является положительно-определенным оператором, то его ожидаемое значе-

ние в любом состоянии, например в состоянии $|f\rangle$, определяемом (4.6), должно быть не отрицательным

$$\langle f | \rho | f \rangle \geq 0. \quad (6.7)$$

Если в качестве состояния $|f\rangle$ выбрать, например, когерентное состояние $|\alpha\rangle$, то получим, что функция R , определяемая выражением (6.1), удовлетворяет следующему неравенству:

$$R(\alpha^*, \alpha) \geq 0. \quad (6.8)$$

Если же считать, что состояние $|f\rangle$ определяется целой функцией $f(\alpha^*)$, как в (4.7), то из неравенства (6.7) находим более общее условие положительной определенности

$$\int [f(\alpha^*)]^* f(\beta^*) R(\alpha^*, \beta) e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2} d^2\alpha d^2\beta \geq 0, \quad (6.9)$$

которое должно быть справедливо для всех целых функций f .

Во многих физических экспериментах, особенно в экспериментах с полями очень высокой частоты, нельзя сказать, что имеется какая-нибудь априорная информация о параметрах, зависящих от времени. Поэтому выводы, к которым мы приходим в этих случаях, не изменяются при сдвиге события во времени. Их можно получить, исходя из стационарного оператора плотности, т. е. оператора, который коммутирует с гамильтонианом, или проще с оператором $a^\dagger a$. Необходимое и достаточное условие того, что функция $R(\alpha^*, \beta)$ соответствует стационарному оператору плотности, состоит в том, что она должна зависеть только от произведения своих переменных $\alpha^* \beta$. Другими словами, должна существовать аналитическая функция \mathcal{S} , такая, что

$$R(\alpha^*, \beta) = \mathcal{S}(\alpha^* \beta). \quad (6.10)$$

То, что это условие достаточно, ясно из инвариантности R относительно умножения как α , так и β на фазовый множитель $e^{i\varphi}$. Необходимость же его непосредственно следует из обращения в нуль коммутатора операторов ρ и $a^\dagger a$. Другой и, возможно, более простой путь доказательства соотношения (6.10) основан на том, что стационарный оператор ρ является функцией гамильтониана только для одной моды, или $a^\dagger a$. Поэтому он диагонален в представлении n -квантовых состояний, т. е. $\langle n | \rho | m \rangle = \delta_{nm} \langle n | \rho | n \rangle$. Исследование ряда (6.2) для R показывает, что он сводится в этом случае к выражению (6.10).

7. P -представление оператора плотности

В предыдущих разделах была продемонстрирована применимость когерентных состояний в качестве базисных векторов. Однако не все поля требуют для своего описания операторов плотности такого

общего вида. Действительно, для широкого класса полей излучения, который включает, как будет показано ниже, фактически все поля, изучаемые в оптике, появляется возможность привести оператор плотности к значительно более простому виду. Такой вид оператора плотности проливает свет на многие аналогии между соответствующими вычислениями в квантовой электродинамике и в классической теории. Его использование позволяет глубже понять, почему некоторые из основных законов оптики, такие, как суперпозиция полей и вычисление результирующих интенсивностей даже при малом числе квантов, совпадают с законами классической теории. В дальнейшем мы пока по-прежнему будем ограничиваться рассмотрением одной моды поля.

Конечно ясно, что наибольший интерес представляет для нас когерентное состояние осциллятора. Для чистого состояния $|\alpha\rangle$ оператором плотности является проекционный оператор

$$\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (7.1)$$

Однозначное представление этого оператора через функцию $R(\beta^*, \gamma)$, как легко видеть из выражения (6.1), имеет вид

$$R(\beta^*, \gamma) = e^{\beta^*\alpha + \gamma\alpha^* - |\alpha|^2}. \quad (7.2)$$

Другие функции $R(\beta^*, \gamma)$, которые удовлетворяют требованиям аналитичности, необходимым для представления операторов плотности, можно получить с помощью линейной комбинации экспоненциальных выражений типа (7.2) с различными значениями комплексного параметра α . Получаемые таким образом функции R представляют смешанные когерентные состояния. В наиболее общем виде такую функцию R можно записать следующим образом:

$$R(\beta^*, \gamma) = \int P(\alpha) e^{\beta^*\alpha + \gamma\alpha^* - |\alpha|^2} d^2\alpha, \quad (7.3)$$

где $P(\alpha)$ есть весовая функция, определенная во всех точках комплексной α -плоскости. Так как функция $R(\beta^*, \gamma)$ должна удовлетворять условию эрмитовости [см. (5.10)], то мы потребуем, чтобы весовая функция была действительной, т. е. $[P(\alpha)]^* = P(\alpha)$. Она не обязательно должна удовлетворять условиям регулярности, но ее сингулярности должны быть интегрируемыми¹⁾. Удобно предположить, что $P(\alpha)$ имеет сингулярность типа δ -функции, тогда представление чистого когерентного состояния можно рассматривать как специальный случай выражения (7.3). В этом случае действительную двухмерную δ -функцию можно определить

¹⁾ Если $P(\alpha)$ обладает сингулярностями более сильными, чем δ -функция, например типа производной от δ -функции, то представляемые поля не будут иметь классического аналога.

равенством

$$\delta^2(\alpha) = \delta(\operatorname{Re} \alpha) \delta(\operatorname{Im} \alpha). \quad (7.4)$$

Тогда чистое когерентное $|\beta\rangle$ описывается функцией

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \beta), \quad (7.5)$$

а основному состоянию осциллятора соответствует $\beta = 0$.

Функции (7.3) соответствует оператор плотности ρ , который является суперпозицией проекционных операторов (7.1):

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (7.6)$$

К оператору такого типа можно прийти, если известно, что осциллятор находится в когерентном состоянии, которому соответствует неизвестное собственное значение α . Следовательно, можно считать, что функция $P(\alpha)$ играет роль, аналогичную плотности вероятности для распределения значений α по комплексной плоскости¹⁾. Далее мы увидим, что иногда такую интерпретацию можно обосновать. Однако в общем случае функцию $P(\alpha)$ нельзя последовательно интерпретировать как распределение вероятности, поскольку проекционные операторы, с которыми она связана, не ортогональны друг другу при различных значениях α . Правда, в некотором смысле можно сказать, что состояния $|\alpha\rangle$ и $|\alpha'\rangle$ становятся приблизительно ортогональными при $|\alpha - \alpha'| \gg 1$ [что отмечалось в связи с (3.33)], т. е. когда их волновые пакеты (3.29) или (3.30) не перекрываются заметным образом. Если же функция $P(\alpha)$ мало изменяется во всей области значений параметра α , то неортогональность когерентных состояний оказывает небольшое влияние и функцию $P(\alpha)$ можно приближенно интерпретировать как плотность вероятности. Медленно меняющиеся функции $P(\alpha)$ обычно будут связываться с сильными полями, которые приближенно можно описывать с помощью классической теории.

Выражение (7.6) для оператора плотности мы будем называть P -представлением, чтобы отличать его от более общего выражения через функцию R , которое рассматривалось выше. Из нормировки оператора плотности вытекает, что $P(\alpha)$ должна подчиняться следующему нормировочному условию:

$$\operatorname{Sp} \rho = \int P(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (7.7)$$

Интересно также рассмотреть ограничения, которые накладывает на $P(\alpha)$ положительная определенность ρ . Если к функции

¹⁾ На существование оператора плотности в таком виде указывал также Сударшан [12]. Его замечания кратко обсуждаются в конце раздела 10.

$R(\beta^*, \gamma)$, данной выражением (7.3), применить неравенство (6.9), то получим

$$\int [f(\beta^*)]^* f(\gamma^*) P(\alpha) e^{\beta^* \alpha + \gamma \alpha^* - |\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2} d^2 \alpha d^2 \beta d^2 \gamma \geq 0. \quad (7.8)$$

Интегрирование по γ можно провести, учитывая соотношение (4.10), а по β с помощью соотношения, комплексно-сопряженного с (4.10). После этого получим следующее неравенство:

$$\int |f(\alpha^*)|^2 P(\alpha) e^{-|\alpha|^2} d^2 \alpha \geq 0, \quad (7.9)$$

которое должно быть справедливым для всех целых функций. В частности, если выбрать

$$f(\alpha^*) = e^{\beta \alpha^* - 1/2 |\beta|^2},$$

то приходим к простому условию, которое должно быть справедливо для всех комплексных значений β ,

$$\int P(\alpha) e^{-|\alpha - \beta|^2} d^2 \alpha \geq 0. \quad (7.10)$$

Это условие соответствует требованию $\langle \beta | \rho | \beta \rangle \geq 0$. Если бы функция $P(\alpha)$ представляла плотность вероятности, то она была бы положительной и полученные неравенства выполнялись бы автоматически. Однако эти неравенства не являются достаточно строгими, чтобы исключить для $P(\alpha)$ возможность принимать отрицательные значения в некоторой ограниченной соответствующим образом области плоскости¹⁾. Этот результат показывает, что в общем случае весовую функцию $P(\alpha)$ нельзя интерпретировать как плотность вероятности²⁾.

Если оператор плотности задан в P -представлении, то его матричные элементы определяются выражением

$$\langle n | \rho | m \rangle = \int P(\alpha) \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | m \rangle d^2 \alpha. \quad (7.11)$$

Скалярные произведения в подынтегральном выражении можно вычислить с помощью (3.3) и (3.6). В этом случае получаем

$$\langle n | \rho | m \rangle = (n! m!)^{-1/2} \int P(\alpha) \alpha^n (\alpha^*)^m e^{-|\alpha|^2} d^2 \alpha. \quad (7.12)$$

¹⁾ Пример весовой функции $P(\alpha)$, которая принимает отрицательные значения, но приводит к положительно-определенному оператору плотности, дается выражением $P(\alpha) = (1 + \lambda) (\pi n)^{-1} e^{-|\alpha|^2/n} - \lambda \delta^{(2)}(\alpha)$ для $n > 0$ и $0 < \lambda < n^{-1}$. Видно, что матричное представление соответствующего оператора плотности, определяемое выражением (7.12), диагонально и имеет только положительные собственные значения.

²⁾ Примером такой функции, которая играет роль, аналогичную плотности вероятности, но может принимать отрицательные значения в квантовомеханическом смысле, является функция распределения Вигнера [13].

Матрица плотности в таком виде дает основные свойства полей, которые наиболее удобно описывать в P -представлении. Если $P(\alpha)$ — весовая функция, сингулярности которой не сильнее сингулярности δ -функции, то в общем случае она будет обладать неисчезающими комплексными моментами произвольно высокого порядка. [Единственное исключение составляет функция $P(\alpha) = \delta^2(\alpha)$, которая соответствует основному состоянию моды.] Из этого следует, что диагональные матричные элементы $\langle n | \rho | n \rangle$, которые представляют вероятность нахождения n фотонов в моде, имеют ненулевые значения для произвольно больших n . Таким образом, если функция $P(\alpha)$ ведет себя достаточно хорошо в указанном выше смысле, то нет ограничения сверху на число фотонов, имеющих в моде ¹⁾.

В P -представлении стационарные операторы плотности соответствуют функциям $P(\alpha)$, которые зависят только от $|\alpha|$. Это следует из выражения (7.2), которое показывает, что такие функции $P(\alpha)$ приводят к функциям $R(\beta^*, \gamma)$, не изменяющимся при изменении общей фазы β и γ . Это также хорошо видно и из соотношения (7.12), которое показывает, что $\langle n | \rho | m \rangle$ приводится к диагональному виду, когда весовая функция не зависит от фазы.

Некоторое понятие о практическом значении P -представления для оператора плотности можно получить, рассматривая суперпозицию полей, создаваемых различными источниками. Поскольку нас интересует пока поведение только одной моды поля, то мы будем иметь дело лишь с отдельными аспектами полной задачи, хотя аналогичным образом можно исследовать и поведение всех мод. Рассмотрим суперпозицию полей от двух различных неустановившихся источников излучения, связанных с модой поля, которые могут включаться и выключаться раздельно. Предположим, что в момент времени t_1 включается первый источник, который переводит осциллятор поля из его основного состояния $|0\rangle$ в когерентное состояние $|\alpha_1\rangle$. Если к моменту времени t_2 этот источник перестает излучать, то для всех более поздних моментов времени поле остается в состоянии $|\alpha_1\rangle$. С равным успехом можно считать, что первый источник остается выключенным, а в момент времени t_2 включается второй источник. Далее, предположим, что второй источник переводит осциллятор из его основного состояния в когерентное состояние $|\alpha_2\rangle$. Возникает вопрос, в какое состояние перейдет осциллятор

¹⁾ Оператор плотности для полей, у которых максимальное число фотонов в моде ограничено числом N , представляется функциями $R(\beta^*, \gamma)$, которые являются полиномами N -й степени по β^* и γ . Из поведения таких полиномов при больших $|\beta|$ и $|\gamma|$ следует, что любая весовая функция $P(\alpha)$, которая на основании (7.2) соответствует $R(\beta^*, \gamma)$, должна обладать сингулярностями более сильными, чем сингулярность δ -функции. Такие поля, вероятно, наиболее удобно описывать с помощью R -функций.

поля, если допустить, что два источника начинают действовать последовательно: первый в момент t_1 , а второй в момент t_2 .

Ответ на вопрос в этом простом случае можно получить, не делая никаких детальных вычислений, а пользуясь унитарным оператором сдвига, рассмотренным в разделе 2. Действие первого источника представляется унитарным оператором $D(\alpha_1)$, который осуществляет сдвиг состояния осциллятора из основного в когерентное $|\alpha_1\rangle = D(\alpha_1)|0\rangle$. Действие же второго источника представляется оператором сдвига $D(\alpha_2)$, так что при включении его после первого источника он переводит осциллятор в суперпозиционное состояние

$$|\rangle = D(\alpha_2)D(\alpha_1)|0\rangle \quad (7.13)$$

Поскольку эти операторы сдвига имеют экспоненциальную форму (3.17), то закон их умножения дается выражением (3.20):

$$D(\alpha_2)D(\alpha_1) = D(\alpha_1 + \alpha_2)e^{1/2(\alpha_2\alpha_1^* - \alpha_2^*\alpha_1)}. \quad (7.14)$$

Экспоненциальное выражение, выделенное в (7.14), имеет чисто мнимый аргумент и, следовательно, соответствует фазовому множителю. Другими словами, суперпозиционное состояние (7.13) является как раз когерентным состоянием $|\alpha_1 + \alpha_2\rangle$, умноженным на фазовый множитель. Однако фазовый множитель не влияет на оператор плотности для суперпозиционного состояния, который равен

$$\rho = |\alpha_1 + \alpha_2\rangle\langle\alpha_1 + \alpha_2|. \quad (7.15)$$

При изменении способа включения описываемых источников в мысленном эксперименте (например, при включении их в другие моменты времени или в обратном порядке) конечное состояние отличается только фазовым множителем и, следовательно, приводит к тому же самому оператору плотности. Амплитуды последовательных когерентных возбуждений осциллятора поля складываются в квантовой теории подобно комплексным числам, так же как и в классической теории.

Предположим теперь, что в таком же эксперименте используются несколько менее идеальные источники и что они переводят осциллятор не в чистые состояния, а в состояния, описываемые суперпозицией когерентных состояний типа (7.6). Будем считать, что при действии одного только первого источника поле переходит в состояние, описываемое оператором плотности

$$\rho_1 = \int P_1(\alpha_1)|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|d^2\alpha_1. \quad (7.16)$$

Состояние поля при действии только второго источника представляется следующим оператором:

$$\varrho = \int P_2(\alpha_2) |\alpha_2\rangle \langle \alpha_2| d^2\alpha_2 = \int P_2(\alpha_2) D(\alpha_2) |0\rangle \langle 0| D^{-1}(\alpha_2) d^2\alpha_2.$$

Если второй источник включается после первого, то он переводит поле в состояние, описываемое оператором плотности

$$\begin{aligned} \varrho &= \int P_2(\alpha_2) D(\alpha_2) \varrho_1 D^{-1}(\alpha_2) d^2\alpha_2 = \\ &= \int P_2(\alpha_2) P_1(\alpha_1) |\alpha_1 + \alpha_2\rangle \langle \alpha_1 + \alpha_2| d^2\alpha_1 d^2\alpha_2. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Этот оператор можно записать в общем виде

$$\varrho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha,$$

если считать, что при последовательном возбуждении весовая функция $P(\alpha)$ равна

$$P(\alpha) = \int \delta^2(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) P_1(\alpha_1) P_2(\alpha_2) d^2\alpha_1 d^2\alpha_2, \quad (7.18)$$

$$P(\alpha) = \int P_1(\alpha - \alpha') P_2(\alpha') d^2\alpha'. \quad (7.19)$$

Непосредственно из (7.18) видно, что P имеет правильную нормировку, если соответствующим образом нормированы P_1 и P_2 . Простой закон свертки весовых функций является одним из важных свойств описания полей с помощью P -представления. Он полностью аналогичен закону, который мы использовали бы в классической теории для описания распределения вероятности суммы двух неопределенных фурье-амплитуд осциллятора поля.

Теорему о свертке функций часто можно использовать для разложения полей на составные части с более простыми свойствами. Предположим, что наше поле описывается весовой функцией $P(\alpha)$, для которой среднее значение $\bar{\alpha}$ определяется следующим образом:

$$\bar{\alpha} = \int \alpha P(\alpha) d^2\alpha. \quad (7.20)$$

Тогда из (7.19) следует, что любое поле такого типа можно рассматривать как сумму чистого когерентного поля, которое соответствует весовой функции $\delta^{(2)}(\alpha - \bar{\alpha})$, и поля, представляемого функцией $P(\alpha + \bar{\alpha})$, для которой среднее значение α равно нулю. Поля с нулевым средним значением α будем называть нефазированными полями.

Использование P -представления оператора плотности в той области, где он не является слишком сингулярным, приводит

к упрощению вычислений статистических средних, которые несколько отличаются от рассмотренных в предыдущем разделе. Так, например, статистическое среднее любого нормально упорядоченного произведения операторов рождения и уничтожения фотонов типа $(a^\dagger)^n a^m$ сводится к простому среднему от $(\alpha^*)^n \alpha^m$, взятому относительно весовой функции $P(\alpha)$, т. е. равно

$$\text{Sp} \{ \rho (a^\dagger)^n a^m \} = \int P(\alpha) \langle \alpha | (a^\dagger)^n a^m | \alpha \rangle d^2\alpha = \int P(\alpha) (\alpha^*)^n \alpha^m d^2\alpha. \quad (7.21)$$

Практически это тождество означает, что многие квантовомеханические расчеты можно производить способами, которые аналогичны уже известным из классической теории.

Среднее число фотонов в моде является наиболее простой мерой интенсивности ее возбуждения. Оператор, представляющий число имеющихся фотонов, как видно из уравнения (2.18), равен $a a$. Поэтому среднее число фотонов $\langle n \rangle$ дается выражением

$$\langle n \rangle = \text{Sp} \{ \rho a^\dagger a \}. \quad (7.22)$$

Тогда на основании (7.21) получаем

$$\langle n \rangle = \int P(\alpha) |\alpha|^2 d^2\alpha, \quad (7.23)$$

т. е. среднее число фотонов равно среднему от квадрата абсолютного значения амплитуды α . При суперпозиции двух полей, описываемых распределениями P_1 и P_2 , результирующие интенсивности получаются с помощью правил, которыми всегда пользовались в классической электромагнитной теории. Для нефазированных полей интенсивности складываются «некогерентно»; для когерентных состояний амплитуды складываются «когерентно».

Использование P -представления оператора плотности для описания полей приводит многие результаты квантовой электродинамики к виду, аналогичному результатам классической теории. Хотя в этих аналогиях особенно наглядно проявляется принцип соответствия, однако на этом основании нельзя считать, что классическая теория является сколько-нибудь адекватной заменой квантовой теории. Весовые функции $P(\alpha)$, используемые в теории, нельзя строго интерпретировать как распределения вероятности. Они также не выводятся, как правило, из классического описания источников излучения. С помощью классического или полуклассического анализа вообще нельзя понять их зависимость от постоянной Планка.

Поскольку в прошлом целый ряд вычислений, связанных со статистикой фотонов, был произведен существенно классическими методами, то, вероятно, полезно несколько глубже рассмотреть

связь между P -представлением и классической теорией. В частности, следует отметить, что определение амплитуды α как собственного значения оператора аннигиляции присуще только квантовой механике. Если мы хотим представить амплитуду моды данного классического поля как собственное значение, то из (2.20) получаем, что величина соответствующего значения α пропорциональна $\hbar^{-1/2}$. При использовании безразмерных величин, с помощью которых и определена величина α , классическое описание моды применимо только в той области комплексной α -плоскости, где $|\alpha| \gg 1$, т. е. к амплитудам колебаний, большим по сравнению с нулевыми флуктуациями, входящими в волновые пакеты (3.29) и (3.30). Поэтому классическая теория в принципе может дать нам только самое грубое представление о весовой функции $P(\alpha)$. Когда аргумент весовой функции явно попадает в классическую область комплексной плоскости, то, грубо говоря, из классической теории можно получить только среднее значение функции $P(\alpha)$ на площади, размеры которой $|\Delta\alpha|$ порядка единицы или больше. Такие средние значения, как видно из неравенства (7.10), будут всегда положительными; следовательно, в классическом пределе их всегда можно интерпретировать как вероятности.

8. Гауссов оператор плотности

Гауссова функция является статистическим распределением, давно известным из классической статистики. В данном разделе будет показано, что это распределение используется также и в квантовой теории поля, где оно естественным образом описывает наиболее часто встречающийся тип некогерентности [1].

Предположим, что изучаемая мода поля связана с целым рядом источников, которые в основном подобны, но ведут себя статистически независимо. Практически такими источниками могут являться разные части одного большого источника. Если вклад от каждого источника ($j = 1 \dots N$) в возбуждение моды можно представить весовой функцией $p(\alpha_j)$, то с помощью обобщенной теоремы о свертке функций можно построить весовую функцию $P(\alpha)$, которая описывает суперпозиционное поле

$$P(\alpha) = \int \delta^{(2)}\left(\alpha - \sum_{j=1}^N \alpha_j\right) \prod_{j=1}^N p(\alpha_j) d^2\alpha_j. \quad (8.1)$$

Поскольку весовые функции, входящие в это выражение, действительны, то иногда удобно рассматривать амплитуды α не как комплексные числа, а как двумерные действительные векторы α (т. е. $\alpha_x = \text{Re } \alpha$, $\alpha_y = \text{Im } \alpha$). Тогда если λ — произвольное комплексное число, представляемое вектором λ , то для сокращения

записи можно использовать двумерное скалярное произведение

$$\operatorname{Re} \lambda \operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im} \alpha = \alpha \cdot \lambda. \quad (8.2)$$

Используя эту систему обозначений, двумерное фурье-преобразование весовой функции $\rho(\alpha)$ можно определить следующим образом:

$$\xi(\lambda) = \int e^{i\lambda \cdot \alpha} \rho(\alpha) d^2\alpha. \quad (8.3)$$

Из закона суперпозиции (8.1) следует, что фурье-преобразование функции $P(\alpha)$ дается выражением

$$\Xi(\lambda) = \int e^{i\lambda \cdot \alpha} P(\alpha) d^2\alpha = [\xi(\lambda)]^N. \quad (8.4)$$

Если отдельные источники стационарны, то их весовые функции $\rho(\alpha)$ зависят только от $|\alpha|$. Поэтому функцию преобразования $\xi(\lambda)$ при малых значениях $|\lambda|$ можно аппроксимировать выражением

$$\xi(\lambda) = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 \int |\alpha|^2 \rho(\alpha) d^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 \langle |\alpha|^2 \rangle. \quad (8.5)$$

При достаточно малых значениях $|\lambda|$ (т. е. при $|\lambda|^2 < N^{-1/2} \langle |\alpha|^2 \rangle^{-1}$) преобразование Ξ для суперпозиционного поля можно аппроксимировать следующим образом:

$$\Xi(\lambda) \approx e^{-1/4 \lambda^2 N \langle |\alpha|^2 \rangle}. \quad (8.6)$$

Однако весовая функция $\rho(\alpha)$ может принимать и отрицательные значения, поэтому здесь необходимо удостовериться в том, что момент второго порядка $\langle |\alpha|^2 \rangle$ является положительным. Из выражений (7.22) и (7.23) видно, что величина $\langle |\alpha|^2 \rangle$ равна среднему числу фотонов, которые излучал бы каждый источник при отсутствии остальных, поэтому момент второго порядка действительно является положительной величиной. Следовательно, для больших значений N преобразование $\Xi(\lambda)$ быстро убывает по мере роста $|\lambda|$. Так как эта функция становится исчезающе малой при значениях $|\lambda|$, лежащих вне области, где определены указанные приближения, то выражение (8.6) можно использовать в общем случае как асимптотическое приближение для $\Xi(\lambda)$ при больших N . Пользуясь этим асимптотическим выражением для $\Xi(\lambda)$, получаем

$$P(\alpha) = (2\pi)^{-2} \int e^{-i\alpha \cdot \lambda} \Xi(\lambda) d^2\lambda = \frac{1}{\pi N \langle |\alpha|^2 \rangle} e^{-\alpha^2 / N \langle |\alpha|^2 \rangle}. \quad (8.7)$$

Для такой весовой функции среднее значение $|\alpha|^2$, очевидно, есть $N \langle |\alpha|^2 \rangle$, но на основании общей теоремы [см. (7.23)] это среднее значение как раз равно среднему значению общего числа квантов, имеющих в моде. Если это среднее значение обозначить

через $\langle n \rangle$ и вновь воспользоваться комплексной системой обозначений для переменной α , то весовую функцию (8.7) можно записать следующим образом:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} e^{-|\alpha|^2 / \langle n \rangle}. \quad (8.8)$$

Весовая функция $P(\alpha)$ положительна при любых значениях аргумента и имеет такой же вид, как и распределение вероятности для полного отклонения, обусловленного случайным разбросом в комплексной плоскости. Однако из-за того, что когерентные состояния $|\alpha\rangle$ не образуют ортогонального набора, $P(\alpha)$ можно точно интерпретировать как распределение вероятности только при $\langle n \rangle \gg 1$. Отметим также, что для получения соотношения (8.8) не обязательно предполагать, что весовые функции, соответствующие отдельным источникам, все одинаковые. Необходимо только, чтобы моменты отдельных функций были сравнимы по величине. В этом более общем случае среднеквадратичное значение $|\alpha|$ дается не значением, использованным в выражении (8.7), а суммой $\sum_j \langle |\alpha_j|^2 \rangle$, но оно по-прежнему равно среднему числу квантов в моде, что следует из (8.8).

Из самого вывода ясно, что гауссово распределение $P(\alpha)$ для возбуждения моды обладает исключительно широкой областью применимости. Случайное или хаотическое возбуждение, которое оно описывает, характерно, по-видимому, для большинства известных типов некогерентных макроскопических световых источников, таких, как газовый разряд, источники накаливания и т. д.

Гауссов оператор плотности также принимает очень простой вид, если в качестве базиса пользоваться числами фотонов

$$\varrho = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \int e^{-|\alpha|^2 / \langle n \rangle} |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (8.9)$$

Действительно, подставим в равенство (8.9) разложения когерентных состояний (3.7) и (3.8) и воспользуемся тождеством

$$\pi^{-1} (l!m!)^{-1/2} \int e^{-C|\alpha|^2} \alpha^l (\alpha^*)^m d^2\alpha = \delta_{lm} C^{-(m+1)},$$

справедливым при $C > 0$. Если теперь записать $C = (1 + \langle n \rangle) / \langle n \rangle$, то получим

$$\varrho = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \sum_m \left\{ \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right\}^m |m\rangle \langle m|. \quad (8.10)$$

Другими словами, число квантов в моде распределяется соответственно степеням параметра $\langle n \rangle / (1 + \langle n \rangle)$. Распределение Планка для излучения черного тела дает пример оператора плотности, который, как давно известно, имеет вид (8.10). Тепловое возбужде-

ние, приводящее к распределению, соответствующему излучению черного тела, является идеальным примером хаотического источника, который был описан ранее. Поэтому не удивительно, что распределение, соответствующее излучению черного тела, относится к полученному нами классу распределений. В частности, следует отметить, что хотя распределение Планка характерно только для теплового равновесия, однако в операторе плотности общего вида (8.9) такие ограничения не содержатся. Этот оператор применим всегда, когда возбуждение имеет достаточно хаотический характер независимо от того, насколько излучатель далек от теплового равновесия.

Гауссова функция распределения $\exp[-|\alpha|^2/\langle n \rangle]$ зависит только от квантовомеханических переменных. При переходе к классическому полю $|\alpha|^2$ и среднее квантовое число $\langle n \rangle$ стремятся к бесконечности как \hbar^{-1} , но так, что их отношение, которое является аргументом гауссовой функции, остается строго определенным. В классическом пределе вид распределения общеизвестен. Исторически одной из причин постановки задачи о хаотическом движении явилось рассмотрение поведения классического гармонического осциллятора, подверженного хаотическому возбуждению [14, 15]. Такие осцилляторы обладают комплексными амплитудами, которые при самых общих условиях описываются гауссовым распределением. Если бы мы не знали квантовомеханического анализа, то вполне могли бы предположить, что гауссово распределение, полученное таким способом из классической теории, может описывать распределение фотонов. Чтобы показать ошибочность такого заключения, необходимо более тщательно изучить природу параметра $\langle n \rangle$, который в конечном счете является единственным физическим параметром, содержащимся в распределении. В качестве простого примера можно рассмотреть тепловое возбуждение при температуре T . Тогда среднее число фотонов равно $\langle n \rangle = [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^{-1}$, (k — постоянная Больцмана), а распределение $P(\alpha)$ в этом случае принимает вид

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi} [e^{\hbar\omega/kT} - 1]^{-1} \exp[-(e^{\hbar\omega/kT} - 1)|\alpha|^2]. \quad (8.11)$$

Для получения классического аналога этого распределения мы должны предположить, что энергия классического поля в моде

$$H = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) dr$$

распределена с вероятностью, пропорциональной $e^{-H/kT}$. Тогда для амплитуды α получается следующее распределение:

$$P_{\text{кл}}(\alpha) = \left(\frac{\hbar\omega}{\pi kT} \right) e^{-\hbar\omega|\alpha|^2/kT}, \quad (8.12)$$

которое, как видно, является первым членом разложения правильного распределения по степеням \hbar . (При этом следует помнить, что величина $\hbar |\alpha|^2$ должна рассматриваться как классический параметр.) Распределение $P_{\text{кл}}(\alpha)$ справедливо только в классической области изменения величины α , $|\alpha| \gg 1$; следовательно, достаточно интенсивно возбуждаются только низкочастотные моды, у которых $\hbar\omega/kT \ll 1$; именно эти моды точно описываются классической теорией. Для более высоких частот эти два распределения, являясь гауссовыми, значительно различаются по своему характеру. Когда $\hbar\omega$ становится больше kT , радиус классического распределения в α -плоскости остается слишком большим, в то время как радиус правильного распределения очень быстро уменьшается¹⁾. Это расхождение фактически устраняет ультрафиолетовую катастрофу классической теории излучения. Мы рассмотрели, конечно, элементарный пример, но он подчеркивает некоторые положения, отмеченные в предыдущем разделе, относительно ограниченной области применения классической функции распределения.

Выражение для оператора плотности, соответствующего тепловому возбуждению осциллятора, через когерентные квантовые состояния дает новый и плодотворный подход ко многим известным проблемам. Например, оно позволяет нам простым путем получать средние от экспоненциальных функций операторов a и a^\dagger при тепловом возбуждении. Для иллюстрации найдем среднее от оператора $D(\beta)$, определяемого равенством (3.17). Оно равно

$$\text{Sp} \{ \rho D(\beta) \} = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \int e^{-|\alpha|^2 / \langle n \rangle} \langle \alpha | D(\beta) | \alpha \rangle d^2\alpha. \quad (8.13)$$

В этом случае ожидаемое значение оператора $D(\beta)$ в подинтегральном выражении имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \alpha | D(\beta) | \alpha \rangle &= \langle 0 | D^{-1}(\alpha) D(\beta) D(\alpha) | 0 \rangle = \\ &= \exp [\beta \alpha^* - \beta^* \alpha] \langle 0 | D(\beta) | 0 \rangle = \\ &= \exp [\beta \alpha^* - \beta^* \alpha] \langle 0 | \beta \rangle = \\ &= \exp \left[\beta \alpha^* - \beta^* \alpha - \frac{1}{2} |\beta|^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

При вычислении этого выражения использовались свойства оператора $D(\alpha)$, являющегося оператором сдвига. После вычисления интеграла в (8.13) получаем

$$\text{Sp} \{ \rho D(\beta) \} = \exp \left[-|\beta|^2 \left(\langle n \rangle + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (8.15)$$

¹⁾ Для частот, лежащих в середине видимого спектра, и для температур ниже 3000° К квантовомеханическое распределение (8.11) имеет радиус, соответствующий $|\alpha|^2 \ll 10^{-3}$, т. е. распределение далеко от классического. Распределения для нетепловых некогерентных источников характеризуются радиусами, сравнимыми по величине с указанным.

которое является следствием теоремы Блоха о функции распределения координаты осциллятора [16] и часто используется на практике.

9. Оператор плотности для поля

Все результаты, полученные в разделах 3—8, относились к описанию квантового состояния одной моды электромагнитного поля. Для описания поля как целого необходимы аналогичные методы, которые сразу бы учитывали все его моды. С этой целью введем базисный набор когерентных состояний для всего поля

$$|\{\alpha_k\}\rangle \equiv \prod_k |\alpha_k\rangle_k, \quad (9.1)$$

где символ $\{\alpha_k\}$, который будет использоваться и для других целей, обозначает набор всех амплитуд α_k . Тогда из результатов раздела 4 следует, что произвольное состояние поля однозначно определяет функцию $f(\{\alpha_k^*\})$, которая является целой функцией каждой переменной α_k^* . Если известен вектор в гильбертовом пространстве (обозначим его $|f\rangle$), представляющий это состояние, то функция f дается выражением.

$$f(\{\alpha_k^*\}) = \langle \{\alpha_k\} | f \rangle \exp\left(\frac{1}{2} \sum_k |\alpha_k|^2\right), \quad (9.2)$$

которое является непосредственным обобщением равенства (4.11). Тогда разложение состояния $|f\rangle$ по когерентным состояниям, которое обобщает равенство (4.7), имеет следующий вид:

$$|f\rangle = \int |\{\alpha_k\}\rangle f(\{\alpha_k^*\}) \prod_k \pi^{-1} e^{-1/2|\alpha_k|^2} d^2\alpha_k. \quad (9.3)$$

Все операторы, встречающиеся в теории поля, можно разложить по векторам $|\{\alpha_k\}\rangle$ и их сопряженным значениям. Построение таких представлений является простым обобщением формул, полученных в разделе 5, на случай бесконечного набора амплитудных переменных. Поэтому мы сразу же перейдем к рассмотрению оператора плотности. Для произвольного оператора плотности ρ можно определить функцию $R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\})$, которая является целой функцией каждой из переменных α_k^* и β_k для всех мод k . Как видно из (6.1), эта функция дается выражением

$$R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\}) = \langle \{\alpha_k\} | \rho | \{\beta_k\} \rangle \times \exp\left[\frac{1}{2} \sum (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2)\right]. \quad (9.4)$$

Отсюда соответствующее представление оператора плотности имеет вид

$$\varrho = \int |\{\alpha_k\}\rangle R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\}) \langle\{\beta_k\}| \prod_k \pi^{-2} \times \\ \times e^{-1/2(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2)} d^2\alpha_k d^2\beta_k. \quad (9.5)$$

Если для обозначения обычных стационарных состояний с n_k фотонами в k -й моде использовать набор целых чисел $\{n_k\}$, то R можно рассматривать как производящую функцию для матричных элементов ϱ , связывающих эти состояния; обобщая соотношение (6.2), получаем

$$R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\}) = \sum_{\{n_k\}, \{m_k\}} \langle\{n_k\}|\varrho|\{m_k\}\rangle \times \\ \times \prod_k (n_k! m_k!)^{-1/2} (\alpha_k^*)^{n_k} \beta_k^{m_k}. \quad (9.6)$$

В стационарном базисе матричные элементы ϱ определяются следующим образом:

$$\langle\{n_k\}|\varrho|\{m_k\}\rangle = \\ = \int R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\}) \prod_k \pi^{-2} (n_k! m_k!)^{-1/2} \alpha_k^{n_k} (\beta_k^*)^{m_k} \times \\ \times e^{-(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2)} d^2\alpha_k d^2\beta_k. \quad (9.7)$$

Ясно, что функция R обладает при этом следующей нормировкой:

$$\int R(\{\beta_k^*\}, \{\beta_k\}) \prod_k \pi^{-1} e^{-|\beta_k|^2} d^2\beta_k = 1. \quad (9.8)$$

Условие положительной определенности (6.9) также можно обобщить на случай полного набора амплитудных переменных.

В качестве простой иллюстрации предыдущих формул полезно рассмотреть представление однофотонного волнового пакета. Для состояния, в котором нет фотонов, исчезают все амплитуды α_k . Если это состояние обозначить через $|\text{vac}\rangle$, то наиболее общее однофотонное состояние можно записать в виде $\sum_k q(k) a_k^\dagger |\text{vac}\rangle$, где $q(k)$ — амплитуда пакета. Тогда функция f , представляющая это состояние, определяется следующим образом:

$$f(\{\alpha_k^*\}) = \sum_k q(k) \alpha_k^*, \quad (9.9)$$

а соответствующая функция R , определяющая оператор плотности, имеет вид

$$R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\}) = \sum_k q(k) \alpha_k^* \sum_{k'} q^*(k') \beta_{k'}. \quad (9.10)$$

Условие нормировки (9.8) соответствует требованию

$$\sum |q(k)|^2 = 1.$$

Но поскольку рассматриваемое состояние является чистым, функция R распадается на произведение двух функций, причем одна из них имеет вид f , а другая — ее комплексно-сопряженной функции. Так как обычно амплитуды пакета $q(k)$ являются в некоторой степени неопределенными, то пакет не может представляться чистым состоянием. Тогда функция R равняется среднему, взятому по распределению амплитуд $q(k)$, и, следовательно, в общем случае не распадается на произведение сомножителей. Всегда, когда есть ограничение сверху на число имеющихся в моде фотонов, т. е. когда требуется, чтобы число фотонов было меньше или равно некоторому целому числу N , мы получаем, что функция R является полиномом степени не выше N по переменным $\{\alpha_k^*\}$ и по переменным $\{\beta_k\}$.

Существует, конечно, много типов возбуждения, для которых число фотонов в моде неограничено. К ним, в частности, относятся такие типы возбуждения, которые наиболее удобно описывать обобщенным P -распределением, т. е. для них существует действительная функция $P(\{\alpha_k\})$ с достаточно хорошим поведением, такая, что

$$R(\{\beta_k^*\}, \{\gamma_k\}) = \int P(\{\alpha_k\}) \times \\ \times \exp \left[\sum_k (\beta_k^* \alpha_k + \gamma_k \alpha_k^* - |\alpha_k|^2) \right] \prod_k d^2 \alpha_k. \quad (9.11)$$

Когда R обладает представлением этого типа, оператор плотности (9.5) можно привести с помощью выражений (4.14) и ему комплексно-сопряженного к простому виду

$$\rho = \int P(\{\alpha_k\}) |\{\alpha_k\}\rangle \langle \{\alpha_k\}| \prod_k d^2 \alpha_k, \quad (9.12)$$

который является многомодовым аналогом P -представления, определяемого (7.6). Функция P должна удовлетворять условию положительной определенности для любых целых функций $f(\{\alpha_k^*\})$

$$\int |f(\{\alpha_k^*\})|^2 P(\{\alpha_k\}) \prod_k e^{-|\alpha_k|^2} d^2 \alpha_k \geq 0. \quad (9.13)$$

Матричные элементы оператора плотности в представлении, основанном на n -фотонных состояниях, равны

$$\langle \{n_k\} | \rho | \{m_k\} \rangle = \int P(\{\alpha_k\}) \times \\ \times \prod_k (n_k! m_k!)^{-1/2} \alpha_k^{n_k} (\alpha_k^*)^{m_k} e^{-|\alpha_k|^2} d^2\alpha_k. \quad (9.14)$$

Стационарные операторы плотности, т. е. операторы, коммутирующие с гамильтонианом, соответствуют функциям $P(\{\alpha_k\})$, которые зависят только от модуля амплитудных переменных $\{|\alpha_k|\}$.

Суперпозиция двух полей, так же как и в случае одной моды, описывается интегралом свертки функций распределения. Следовательно, если складываемые поля описываются функциями $P_1(\{\beta_k\})$ и $P_2(\{\gamma_k\})$ соответственно, то результирующее поле имеет функцию распределения

$$P(\{\alpha_k\}) = \int \prod_k \delta^{(2)}(\alpha_k - \beta_k - \gamma_k) \times \\ \times P_1(\{\beta_k\}) P_2(\{\gamma_k\}) \prod_k d^2\beta_k d^2\gamma_k. \quad (9.15)$$

Для полей, представляемых оператором плотности (9.12), все средние от нормально упорядоченных произведений операторов можно вычислять по формулам, которые, как и в случае одной моды, очень похожи на формулы классической теории. Так, в этих вычислениях параметры $\{\alpha_k\}$ играют почти такую же роль, как случайные фурье-амплитуды поля в известной классической теории СВЧ шумов [17]. Весовая функция $P(\{\alpha_k\})$ играет при этом роль, аналогичную распределению вероятности для фурье-амплитуд. Хотя это сходство оказывается весьма полезным при вычислениях, а также помогает разобраться в применении принципа соответствия, не следует забывать о том, что в общем случае функция $P(\{\alpha_k\})$ является квантовомеханической величиной. Она может принимать отрицательные значения и точно не интерпретируется как распределение вероятности, за исключением классического предельного случая сильно возбужденных или низкочастотных полей.

Выше мы предполагали, что оператор плотности, описывающий поле, известен, и поэтому его можно выразить как в представлении (9.5), так и в P -представлении (9.12). Для некоторых типов некогерентных источников, рассмотренных в разделе 8 (к которым мы снова вернемся в разделе 10), построение явного вида оператора плотности не представляет трудностей. Однако, чтобы получить точное выражение оператора плотности для других типов источ-

ников, включая недавно разработанные когерентные источники, потребуется большая физическая интуиция. Общая задача квантовомеханического описания взаимодействия многоатомного источника как с полем излучения, так и с определенным механизмом возбуждения является сложной. Несомненно, что ее следует аппроксимировать с помощью существенно упрощенных моделей.

Об операторе плотности для полей излучения имеется очень мало сведений. Однако некоторое представление о нем можно получить, изучая вид, который он принимает в одной из нескольких полностью решаемых задач квантовой электродинамики. Рассмотрим поле фотонов, излучаемых некоторым существенно классическим распределением электрического тока, который практически не испытывает обратной реакции поля излучения. Тогда излучающий ток можно представить векторной функцией координат и времени $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Гамильтониан, описывающий связь квантованного электромагнитного поля с током, принимает вид

$$H_1(t) = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (9.16)$$

Введение явно зависящего от времени взаимодействия означает, что вектор состояния поля $|\rangle$, который раньше был фиксированным (что соответствует представлению Гейзенберга), начнет изменяться во времени согласно уравнению Шредингера, которое соответствует представлению взаимодействия

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\rangle = H_1(t) |\rangle. \quad (9.17)$$

Легко получить решение такого уравнения [18]. Предположим, что в начальном состоянии поля в момент $t = -\infty$ фотонов нет. Тогда состояние поля в момент времени t можно записать в виде

$$|t\rangle = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^t dt' \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t') d\mathbf{r} + i\varphi(t) \right\} |vac\rangle, \quad (9.18)$$

причем функция $\varphi(t)$ есть действительная фазовая функция (c -число). Это выражение легко вычисляется, но поскольку произведение $|t\rangle \langle t|$ оказывается равным нулю, оно не имеет отношения к построению оператора плотности. Экспоненциальный оператор в (9.18) очень просто выражается через операторы сдвига, рассмотренные в разделе 3. Для этого определим оператор сдвига D_k для k -й моды

$$D_k(\beta_k) = e^{\beta_k a_k^\dagger - \beta_k^* a_k}. \quad (9.19)$$

Тогда, если учесть разложение векторного потенциала (2.10),

можно написать следующее соотношение:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^t dt' \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t') d\mathbf{r} \right\} \prod_k D_k[\alpha_k(t)], \quad (9.20)$$

в котором зависящие от времени амплитуды $\alpha_k(t)$ даются выражением

$$\alpha_k(t) = \frac{i}{(2\hbar\omega)^{1/2}} \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r} \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'}. \quad (9.21)$$

Поэтому оператор плотности в момент времени t можно записать в виде

$$|t\rangle \langle t| = \prod_k D_k[\alpha_k(t)] |vac\rangle \langle vac| \prod_k D_k^{-1}[\alpha_k(t)] \quad (9.22)$$

$$|t\rangle \langle t| = |\{\alpha_k(t)\}\rangle \langle \{\alpha_k(t)\}|. \quad (9.23)$$

Другими словами, излучение произвольного распределения тока всегда приводит к чистому когерентному состоянию.

Теперь предположим, что распределение тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ не является полностью определенным (это всего лишь небольшое обобщение только что рассмотренной модели). В этом случае амплитуды $\alpha_k(t)$, определяемые выражением (9.21), становятся случайными переменными, которые описываются функцией распределения вероятности [обозначим ее $p(\{\alpha_k\}, t)$]. Оператор плотности для поля, создаваемого таким хаотическим током, принимает вид

$$\rho(t) = \int p(\{\alpha_k\}, t) |\{\alpha_k\}\rangle \langle \{\alpha_k\}| \prod_k d^2\alpha_k. \quad (9.24)$$

Отсюда можно видеть, что оператор плотности для поля, излучаемого хаотическим током, который не испытывает обратной реакции излучения, всегда имеет вид P -представления (9.12). В этом случае весовую функцию действительно можно интерпретировать как распределение вероятности; она имеет классическую структуру, непосредственно связанную со свойствами излучающего тока, а не с данными (неортогональными) состояниями поля. Допущение, которое мы ввели при определении данной модели (нет обратной реакции поля излучения), является весьма сильным, но оно довольно хорошо выполняется для излучающих систем радиодиапазона и СВЧ. Поля, создаваемые такими системами, должны точно описываться оператором плотности (9.24).

10. Корреляционные и когерентные свойства поля

Любое собственное значение $\mathcal{E}(rt)$, которое удовлетворяет соответствующим уравнениям поля и содержит только положительно-частотные члены, однозначно определяет набор амплитуд $\{\alpha_k\}$ для данной моды [см. (2.20)]. Набор же этих амплитуд определяет когерентное состояние поля $|\{\alpha_k\}\rangle$ так, что

$$E^{(+)}(rt)|\{\alpha_k\}\rangle = \mathcal{E}(rt)|\{\alpha_k\}\rangle. \quad (10.1)$$

Для рассмотрения общего вида, который функции корреляции поля принимают в таких состояниях, удобно заменить набор координат (r_j, t_j) одним символом x_j . Тогда функция корреляции n -го порядка определится следующим образом [3]:

$$G_{\mu_1 \dots \mu_{2n}}^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \text{Sp} \{ \rho E_{\mu_1}^{(-)}(x_1) \dots \dots E_{\mu_n}^{(-)}(x_n) E_{\mu_{n+1}}^{(+)}(x_{n+1}) \dots E_{\mu_{2n}}^{(+)}(x_{2n}) \}. \quad (10.2)$$

Оператор плотности для когерентного состояния, определяемого уравнением (10.1), есть проекционный оператор

$$\rho = |\{\alpha_k\}\rangle \langle \{\alpha_k\}|. \quad (10.3)$$

Для этого оператора из уравнения (10.1) и ему эрмитово-сопряженного вытекает, что корреляционные функции приводятся к факторизованному виду

$$G_{\mu_1 \dots \mu_{2n}}^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_{\mu_j}^*(x_j) \prod_{l=n+1}^{2n} \mathcal{E}_{\mu_l}(x_l). \quad (10.4)$$

Другими словами, поле, обладающее состояниями $|\{\alpha_k\}\rangle$, в соответствии с данным ранее определением [3] удовлетворяет условиям полной когерентности.

Следует отметить, что к корреляционным функциям (10.4) приводят не только состояния $|\{\alpha_k\}\rangle$. Действительно, рассмотрим состояние с набором амплитуд $\{e^{i\varphi} \alpha_k\}$, которое отличается от использованного ранее общим фазовым множителем (фаза φ действительна и не зависит от k). Тогда соответствующие собственные значения переходят в $e^{i\varphi} \mathcal{E}(rt)$, но корреляционная функция (10.4) при этом не изменяется. Из данного свойства инвариантности корреляционных функций ясно следует, что некоторая суперпозиция когерентных состояний приводит к тому же самому набору функций. Таким образом, если состояние $|\{\alpha_k\}\rangle$ определяется уравнением (10.1) и $\mathcal{L}(\varphi)$ является произвольной действительной функцией φ с нормировкой

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\varphi) d\varphi = 1, \quad (10.5)$$

то оператор плотности имеет вид

$$\rho = \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\varphi) |\{e^{i\varphi\alpha_k}\}\rangle \langle\{e^{i\varphi\alpha_k}\}| d\varphi \quad (10.6)$$

и при любом выборе $\mathcal{L}(\varphi)$ приводит к корреляционным функциям (10.4). Этот оператор плотности, конечно, есть частный случай оператора общего вида (9.12), который соответствует полной неопределенности в фазе $\{\alpha_k\}$. Обычно выбирают $\mathcal{L}(\varphi) = (2\pi)^{-1}$ (т. е. полностью пренебрегают фазой), что соответствует нашей информации о высокочастотных полях. Именно поэтому мы определили когерентность через набор корреляционных функций, которые не зависят от фазы.

Поскольку многие типы нестационарных полей можно представить с помощью функций собственных значений, то построение соответствующих квантовых состояний не вызывает затруднений. В качестве примера можно рассмотреть амплитудно-модулированную плоскую волну. Для этой цели используем конкретный набор функций мод, определяемых выражением (2.9). Тогда, если несущая имеет частоту ω , а модуляция является периодической с частотой $\zeta\omega$, где $0 < \zeta < 1$, то соответствующую функцию собственного значения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}t) = & i \left(\frac{\hbar\omega}{2L^3} \right)^{1/2} \hat{e}^{(\lambda)} \alpha_k \times \\ & \times \{1 + M \cos[\zeta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \delta]\} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

При разложении этого выражения по плоским волнам получается только три отличных от нуля члена: один с амплитудой α_k и два боковых с амплитудами

$$\begin{aligned} \alpha_{k(1-\zeta)} &= \frac{1}{2} M (1 - \zeta)^{-1/2} e^{i\delta} \alpha_k, \\ \alpha_{k(1+\zeta)} &= \frac{1}{2} M (1 + \zeta)^{-1/2} e^{-i\delta} \alpha_k. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Зная эти амплитуды, можно сразу же построить когерентное состояние для модулированной волны. Однако в действительности мы часто не знаем фазу α_k , и поэтому волну приходится представлять не отдельным когерентным состоянием, а их суперпозицией типа (10.6). Аналогично можно также получить и другие типы представлений модулированных волн.

Некогерентные поля, т. е. широкий класс полей, для которых функции корреляции не распадаются на множители (не факторизованы), следует описывать операторами плотности более общего вида, чем (10.3) или (10.6). Чтобы показать, какую форму прини-

мают корреляционные функции в этом случае, предположим, что поле описывается оператором плотности в P -представлении. Тогда корреляционная функция первого порядка дается выражением

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(rt, r't') = \int P(\{\alpha_k\}) \sum_{k, k'} \frac{1}{2} \hbar (\omega\omega')^{1/2} \times \\ \times u_{k\mu}^*(\mathbf{r}) u_{k'\nu}(\mathbf{r}') \alpha_k^* \alpha_{k'} e^{i(\omega t - \omega' t')} \prod_l d^2\alpha_l. \quad (10.9)$$

Если P -представление обладает значительной сингулярностью, то, как отмечалось выше, поле всегда можно описать аналитическими функциями $R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\})$ и соответствующими операторами плотности вида (9.5). При вычислении с помощью этих операторов корреляционной функции первого порядка получаем

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(rt, r't') = \int R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\}) \sum_{k', k''} \frac{1}{2} \hbar \times \\ \times (\omega'\omega'')^{1/2} u_{k'\mu}^*(\mathbf{r}) u_{k''\nu}(\mathbf{r}') \beta_k^* \alpha_{k''} \times \\ \times e^{i(\omega' t - \omega'' t')} \prod_l e^{\beta_l^* \alpha_l} d\mu(\alpha_l) d\mu(\beta_l), \quad (10.10)$$

где дифференциалы $d\mu(\alpha_l)$ и $d\mu(\beta_l)$ определяются выражением (5.14). Корреляционные функции более высокого порядка задаются интегралами, аналогичными (10.9) и (10.10). Только в этом случае подынтегральное выражение содержит полином степени $2n$ по амплитудным переменным α_k и β_k^* , а не квадратичную форму, как это имеет место для функций первого порядка.

Зная корреляционную функцию первого порядка, легко получить энергетический спектр поля излучения. Если вернуться к разложению оператора положительно-частотной части поля (2.19), а для отрицательно-частотной части поля использовать выражение, эрмитово-сопряженное (2.19), то можно видеть, что эти операторы удовлетворяют тождеству

$$2 \int \mathbf{E}^{(-)}(rt) \mathbf{E}^{(+)}(r't') d\mathbf{r} = \sum_k \hbar \omega a_k^\dagger a_k e^{i\omega(t-t')}. \quad (10.11)$$

Взяв статистическое среднее от обеих частей этого равенства, получим

$$\sum_\mu \int G_{\mu\mu}^{(1)}(rt, r't') d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega \langle n_k \rangle e^{i\omega(t-t')}, \quad (10.12)$$

где $\langle n_k \rangle$ есть среднее число фотонов в k -й моде. Поэтому фурье-преобразование объемного интеграла от $\sum_\mu G_{\mu\mu}^{(1)}$ определяет энергетический спектр $\hbar \omega \langle n_k \rangle$ в самом общем случае.

Получение энергетического спектра из корреляционной функции для полей, представляемых стационарными операторами плотности, еще проще. Для таких полей весовая функция $P(\{a_k\})$ зависит только от абсолютных значений a_k , так что

$$\int P(\{a_k\}) a_{k'}^* a_{k''} \prod_l d^2 a_l = \langle |a_{k'}|^2 \rangle \delta_{k'k''} = \langle n_{k'} \rangle \delta_{k'k''}. \quad (10.13)$$

Используя при вычислении корреляционной функции выражение (10.9) и ограничиваясь случаем плоских волн, получаем соотношение, в котором явно показана роль индекса поляризации λ :

$$\sum_{\mu} G_{\mu\mu}^{(1)}(rt, rt') = \frac{1}{2} L^3 \sum_{k, \lambda} \hbar \omega \langle n_{k, \lambda} \rangle e^{i\omega(t-t')}. \quad (10.14)$$

Если объем, содержащий поле, достаточно велик по сравнению с длинами волн возбуждаемых мод, то в равенстве (10.14) сумму по модам можно заменить на интеграл по \mathbf{k} -пространству

$$\sum_k \rightarrow \int L^3 (2\pi)^{-3} d\mathbf{k}.$$

Определяя энергетический спектр квантов (т. е. энергию на единичный спектральный интервал) как

$$\omega(\omega) = (2\pi)^{-3} \hbar k^3 \sum_{\lambda} \int \langle n_{k, \lambda} \rangle d\Omega_k, \quad (10.15)$$

где $d\Omega_k$ есть элемент телесного угла в \mathbf{k} -пространстве, равенство (10.14) можно переписать в виде

$$\sum_{\mu} G_{\mu\mu}^{(1)}(rt, rt') = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \omega(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega. \quad (10.16)$$

Поскольку $\omega(\omega) = 0$ при $\omega < 0$, то интегрирование по ω можно производить от $-\infty$ до ∞ . Ясно, что соотношение (10.16) можно в этом случае обратить, чтобы выразить энергетический спектр как фурье-преобразование корреляционной функции, зависящей от времени:

$$\omega(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu} G_{\mu\mu}^{(1)}(\mathbf{r}0, \mathbf{r}t) e^{i\omega t} dt. \quad (10.17)$$

Соотношения, аналогичные равенствам (10.16) и (10.17) (вместе их называют теоремой Винера — Хинчина), уже давно используют-

ся в классической теории случайных полей ¹⁾. Полученные нами соотношения в некотором смысле являются естественным квантовомеханическим обобщением теоремы Винера — Хинчина. Нами использовалось только предположение, что поле описывается стационарной формой оператора плотности в P -представлении. Фактически для доказательства не обязательно использовать P -представление, поскольку аналогичный результат можно получить и с помощью более общего представления оператора плотности (9.5).

Стационарные поля представляются, согласно (6.10), целыми функциями $R = \mathcal{S}(\{\alpha_k^* \beta_k\})$, т. е. функциями, которые зависят только от произведений $\alpha_k^* \beta_k$. Тогда для таких полей интеграл [используемый в (10.10)] по плоскостям α и β имеет вид

$$\langle \beta_k^* \alpha_k \rangle = \int \mathcal{S}(\{\alpha_k^* \beta_k\}) \beta_k^* \alpha_k \prod_l e^{\beta_l^* \alpha_l} d\mu(\alpha_l) d\mu(\beta_l). \quad (10.18)$$

Поскольку область интегрирования по каждой из переменных α и β распространяется на всю комплексную плоскость, то этот интеграл не может измениться при изменении знаков любой из переменных. Если, однако, заменить данные переменные α_k и β_k на $-\alpha_k$ и $-\beta_k$, то интеграл меняет знак, если только не выполняется равенство

$$\langle \beta_k^* \alpha_k \rangle = \delta_{k'k''} \langle \beta_k^* \alpha_k \rangle. \quad (10.19)$$

На основании (5.11) и (6.5) можно заметить, что среднее значение $\langle \beta_k^* \alpha_k \rangle$ точно равно среднему числу квантов в k -й моде

$$\langle \beta_k^* \alpha_k \rangle = \text{Sp} \{ \rho a_k^\dagger a_k \} = \langle n_k \rangle. \quad (10.20)$$

Таким образом, мы показали, что корреляционная функция первого порядка в общем виде (10.10) всегда удовлетворяет равенству (10.14), когда поле описывается стационарным оператором плотности. Выражения, связывающие энергетический спектр с зависящей от времени корреляционной функцией, находятся, как и раньше.

Самый простой и наиболее общий пример некогерентного поля — поле, создаваемое суперпозицией излучений стационарных источников. В разделе 8 мы подробно показали, что по мере увеличения числа источников, которые дают вклад в возбуждение одной моды, оператор плотности моды принимает гауссов вид в P -представлении. Нетрудно получить аналогичный результат и для случая, когда источники возбуждают сразу много мод. Предположим, что

¹⁾ В теореме Винера — Хинчина преобразование обычно выполняется с помощью косинусов, поскольку для классического поля E корреляционная функция является действительной величиной, а не комплексной, как для полей $E(\pm)$. Для квантовомеханических целей значительно удобнее использовать комплексные корреляционные функции [3].

источники ($j = 1 \dots N$) в основном идентичны и что их вклады в возбуждение описываются весовой функцией $p(\{\alpha_{jk}\})$. Тогда на основании теоремы о свертке функций весовая функция $P(\{\alpha_k\})$, описывающая суперпозиционное поле, дается выражением

$$P(\{\alpha_k\}) = \int \prod_k \delta^{(2)}\left(\alpha_k - \sum_{j=1}^N \alpha_{jk}\right) \prod_{j=1}^N p(\{\alpha_{jk}\}) \prod_k d^2\alpha_{jk}. \quad (10.21)$$

Так как предполагается, что отдельные источники стационарны, то функция $p(\{\alpha_{jk}\})$ будет зависеть только от абсолютного значения переменных α_{jk} , т. е. от $|\alpha_{jk}|$.

Вывод асимптотической гауссовой формы для $P(\{\alpha_k\})$ из (10.21) настолько аналогичен выводу выражения (8.8) из (8.1), что нет необходимости здесь подробно повторять его еще раз. При доказательстве используются моменты второго порядка функции p , которые (употребляя такие же векторные обозначения, как и раньше) можно записать в следующем виде:

$$\langle \alpha_k \alpha_{k'} \rangle = \int \alpha_k \alpha_{k'} p(\{\alpha_k\}) \prod_l d^2\alpha_l. \quad (10.22)$$

Стационарный характер функции p означает, что такие моменты равны нулю при $k \neq k'$. Можно повторить наши рассуждения и показать, что многомерное фурье-преобразование P имеет вид произведения гауссовых функций вида (8.6), соответствующих каждой моде. Отсюда сразу же следует, что весовая функция P всего поля дается произведением гауссовых множителей вида (8.8):

$$P(\{\alpha_k\}) = \prod_k \frac{1}{\pi \langle n_k \rangle} e^{-|\alpha_k|^2 / \langle n_k \rangle}, \quad (10.23)$$

где $\langle n_k \rangle$ есть среднее число фотонов в k -й моде при полной суперпозиции полей. Одно из замечательных свойств этой весовой функции заключается в том, что она имеет факторизованную форму. Интересно напомнить поэтому, что не делалось никаких предположений о факторизованности весовых функций p , описывающих отдельные источники. Правда, у этих источников различные амплитуды мод могут быть сильно связаны по величине. Но именно свойство стационарности источников приводит вследствие исчезновения моментов (10.22) при $k \neq k'$ к факторизованному виду весовой функции (10.23).

Оператор плотности, соответствующий гауссовой весовой функции (10.23), описывает идеально хаотический тип возбуждения мод поля. Мы не без оснований можем предположить, что этот оператор (по крайней мере как хорошее приближение) применим для описания всех известных видов некогерентных источников, используемых

в лабораториях. В частности, из результатов раздела 7 следует, что гауссова весовая функция правильно описывает тепловые источники. Подстановка в (10.23) распределения Планка $\langle n_{\hbar} \rangle = [\exp(\hbar \omega_{\hbar}/kT) - 1]^{-1}$ приводит к оператору плотности, соответствующему полю излучения теплового происхождения. Так как гауссова весовая функция (10.23) может описывать излучение целого ряда некогерентных источников, то это приводит к определенным глубоким аналогиям с фотонными полями, генерируемыми этими источниками. Например, можно считать, что все эти источники напоминают тепловые, отличаясь от них только спектральным распределением выходного излучения. В качестве иллюстрации этих аналогий можно мысленно рассмотреть прохождение излучения черного тела через такой фильтр, выходное спектральное распределение которого обладает данным контуром линии. Мы можем подобрать этот искусственный контур линии таким образом, чтобы он совпадал с контуром действительно излучаемой линии, скажем разрядной трубки. Тогда возникает вопрос, можно ли по измерениям фотонного поля отличить источник, действительно испускающий линию, от искусственного. Если излучение разрядной трубки, как мы полагаем, описывается гауссовой весовой функцией, то ясно, что с точки зрения экспериментов, в которых считаются фотоны, эти два источника неразличимы. Они являются эквивалентными узкополосными квантовомеханическими генераторами шума.

Получение функций корреляции для некогерентных полей [2], описываемых гауссовой весовой функцией (10.23), не представляет труда. Если эту весовую функцию подставить в выражение (10.9) для корреляционной функции первого порядка, то получим

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega u_{\mathbf{k}\mu}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}\nu}(\mathbf{r}') \langle n_{\hbar} \rangle e^{i\omega(t-t')}. \quad (10.24)$$

Если функции мод $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ являются плоскими волнами (2.9), а объем системы достаточно велик, то функцию корреляции можно представить в виде интеграла

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \int \sum_{\lambda} e_{\mu}^{(\lambda)*} e_{\nu}^{(\lambda)} \langle n_{\hbar, \lambda} \rangle k \times \\ \times \exp\{-i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]\} d\mathbf{k}, \quad (10.25)$$

в котором индекс λ по-прежнему обозначает направление поляризации. Чтобы найти функцию корреляции второго порядка, определяемую выражением (10.2), можно записать ее аналогичным образом в виде разложения по функциям мод. При этом единственные новые моменты весовой функции, которые необходимо знать, даются выражением $\langle |a_{\mathbf{k}}|^4 \rangle = 2 \langle |a_{\mathbf{k}}|^2 \rangle^2 = 2 \langle n_{\hbar} \rangle^2$. Тогда получаем, что

функцию корреляции второго порядка можно выразить через функцию корреляции первого порядка

$$G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{(2)}(x_1x_2, x_3x_4) = G_{\mu_1\mu_3}^{(1)}(x_1, x_3) G_{\mu_2\mu_4}^{(1)}(x_2, x_4) + \\ + G_{\mu_1\mu_4}^{(1)}(x_1, x_4) G_{\mu_2\mu_3}^{(1)}(x_2, x_3). \quad (10.26)$$

Легко показать, что все функции корреляции более высокого порядка также сводятся к суммам произведений функций первого порядка. Так, функцию корреляции n -го порядка можно представить в виде

$$G_{\mu_1 \dots \mu_{2n}}^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{2n}) = \sum \prod_{j=1}^n G_{\mu_j \nu_j}^{(1)}(x_j, y_j), \quad (10.27)$$

где индексы ν_j и координаты y_j при $j = 1 \dots n$ являются перестановками из двух наборов $\mu_{n+1} \dots \mu_{2n}$ и $x_{n+1} \dots x_{2n}$ соответственно, а суммирование производится по всем $n!$ перестановкам. Все поля, представляемые весовой функцией (10.23), характеризуются тем, что их свойства можно полностью описать, зная корреляционную функцию первого порядка.

Поля, обычно называемые по оптической терминологии когерентными, легко описать корреляционной функцией первого порядка (10.25). Поскольку в таких полях свет тщательно коллимируется и является приблизительно монохроматическим, то средние числа заполнения $\langle n_{\mathbf{k}, \lambda} \rangle$ обращаются в нуль вне малого объема в \mathbf{k} -пространстве. Критерием точной когерентности обычно считается малость линейных размеров этой области по сравнению с величиной k . Легко доказать, что если поле полностью поляризовано, а две точки (\mathbf{r}, t) и (\mathbf{r}', t') не слишком удалены друг от друга, то функция корреляции (10.25) приблизительно принимает факторизованный вид (2.4). Другими словами, поля описываемого типа приблизительно удовлетворяют условию когерентности первого порядка [3]. Однако из структуры корреляционных функций более высокого порядка легко видеть, что эти поля никогда не имеют когерентности второго или более высокого порядка. Действительно, если вычислить функцию $G^{(n)}$, определяемую выражением (10.27), для конкретного случая, когда все координаты и индексы равны (т. е. $x_1 = \dots = x_{2n} = x$, а $\mu_1 = \dots = \mu_{2n} = \mu$), то получим

$$G_{\mu \dots \mu}^{(n)}(x \dots x, x \dots x) = n! [G_{\mu\mu}^{(1)}(x, x)]^n. \quad (10.28)$$

Наличие в этом выражении множителя $n!$ несовместимо с условием факторизации (10.4) для функций корреляции n -го порядка при n , большем единицы. Таким образом, отсутствие когерентности второго и более высокого порядка является общим свойством стационарных полей, описываемых гауссовой весовой функцией (10.23). Другими

словами, существует определение, согласно которому эти поля остаются некогерентными независимо от того, насколько они монохроматичны или тщательно коллимированы. С другой стороны, существуют поля (генерируемые, например, радиопередатчиками или мазерами), которые могут обладать когерентностью сколь угодно высокого порядка.

Во время окончания данной работы появилась заметка Сударшана [12], где рассматривались некоторые вопросы статистики фотонов, которые исследованы здесь ¹⁾. Сударшан также получил P -представление оператора плотности и установил его связь с представлением, основанным на n -квантовых состояниях. Что касается этих результатов его работы, то они согласуются с нашими (разделы 7 и 9 настоящей статьи). Однако он сделал целый ряд утверждений, которые, по-видимому, придают другую интерпретацию P -представлению. В частности, он рассматривает существование P -представления как подтверждение «полной эквивалентности» — классического и квантовомеханического подходов к статистике фотонов. Он утверждает далее, что имеется «однозначное соответствие» между весовыми функциями P и распределениями вероятности для амплитуд поля в классической теории.

Связь между P -представлением и классической теорией уже обсуждалась в разделах 7—9. Там мы показали, что весовая функция $P(\alpha)$ является в общем случае существенно квантовомеханической величиной и не выводится из классической теории. В пределе при $\hbar \rightarrow 0$, который соответствует большим амплитудам возбуждения мод, весовые функции $P(\alpha)$ могут приближаться к классическим функциям вероятности, как к своему асимптотическому значению. Поскольку бесконечно много квантовых состояний поля может приближаться к одному и тому же асимптотическому виду, то ясно, что соответствие между весовыми функциями $P(\alpha)$ и классическими распределениями вероятности не является полностью однозначным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glauber R. J., Phys. Rev. Lett., **10**, 84 (1963).
2. Glauber R. J., Quantum Electronics, Proceedings of the Third International Congress, ed. Dunod, Vol. I, Paris, New York, 1964, p. 111.
3. Glauber R. J., Phys. Rev., **130**, 2529 (1963).
4. Messiah A., Mécanique Quantique, Paris, 1959.
5. Schrödinger E., Naturwissenschaften, **14**, 664 (1926).
6. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2nd ed., New York, 1955, p. 67.
(Имеется русский перевод: Л. Ш и Ф ф, Квантовая механика, ИЛ, 1959.)

¹⁾ В своей заметке Мандел и Вольф [19] защищают классический подход к вопросам статистики фотонов. Некоторые возможности и принципиальные ограничения такого подхода должны быть очевидны из нашей более ранней работы. Можно отметить, что «вывод», который они получили из [1], нельзя обоснованно вывести из этой статьи при любом ее чтении.

7. Heisenberg W., The Physical Principles of the Quantum Theory, New York, 1930, p. 16. (Имеется русский перевод: В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, М.-Л., 1932.)
8. Schwinger J., Phys. Rev., 91, 728 (1953).
9. Segal I. E., Illinois Journ. Math., 6, 520 (1962).
10. Bargmann V., Commun. Pure and Appl. Math., 14, 187 (1961).
11. Schweber S., Journ. Math. Phys., 3, 831 (1962).
12. Sudarshan E. C. G., Phys. Rev. Lett., 10, 277 (1963).
13. Wigner E. P., Phys. Rev., 40, 749 (1932).
14. Rayleigh, The Theory of Sound, 2nd ed., Vol. I, London, 1894, p. 35. (Имеется русский перевод: Релей, Теория звука, М., 1955.)
15. Rayleigh, Scientific Papers Cambridge University Press (Cambridge, England, 1899—1920), Vol. I, p. 491; Vol. IV, p. 370.
16. Bloch F., Zs. Phys., 74, 295 (1932).
17. Lawson J., Uhlenbeck C. E., Threshold Noise Signals, New York, 1950, p. 33.
18. Glauber R. J., Phys. Rev., 84, 395 (1951).
19. Mandel L., Wolf E., Phys. Rev. Lett., 10, 276 (1963).

Лекция 12

Излучение при заданном распределении тока

В квантовой электродинамике не так много задач, которые имели бы точное решение в полном смысле этого слова. Существует, однако, пример простой полностью разрешимой задачи, представляющей к тому же значительный физический интерес. Это проблема нахождения фотонного поля, излучаемого системой, распределение электрических токов в которой можно считать классическим. Термин «классическое» означает в этом случае, что ток можно представить векторной функцией координат и времени $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Ясно, что такая модель не может описывать процесс излучения отдельных атомов, поскольку обратное влияние излучения на распределение атомарных токов учесть в сущности не удастся. Эта модель может, однако, служить превосходным приближением в том случае, когда имеют дело с излучением достаточно большого числа атомов, для которых поведение вектора полного тока можно предсказать статистически. Заметим, что, говоря это, мы вовсе не игнорируем обратную реакцию процесса излучения на токи. Все, что мы требуем,— это возможность, по крайней мере в принципе, предсказать такую реакцию, какой бы она ни была (как, например, в теории антенн ее учитывает сопротивление излучения антенны). При допущении статистических неопределенностей в распределении тока эта модель даст, по-видимому, точный результат при расчете фотонных полей, генерируемых большинством макроскопических источников.

Гамильтониан взаимодействия, который связывает квантованное электромагнитное поле с распределением токов, имеет вид

$$\mathcal{H}_I(t) = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (12.1)$$

В представлении взаимодействия изменение вектора состояния поля со временем подчиняется уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = \mathcal{H}_I |t\rangle. \quad (12.2)$$

Введем для краткости оператор $B(t)$, определяемый соотношением

$$B(t) = \frac{1}{\hbar c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}; \quad (12.3)$$

оператор $B(t)$ есть просто линейная комбинация значений векторного потенциала и, таким образом, подчиняется тем же общим коммутационным соотношениям, что и векторный потенциал. В общем случае коммутатор $[B(t), B(t')]$ отличен от нуля, но он всегда есть просто число.

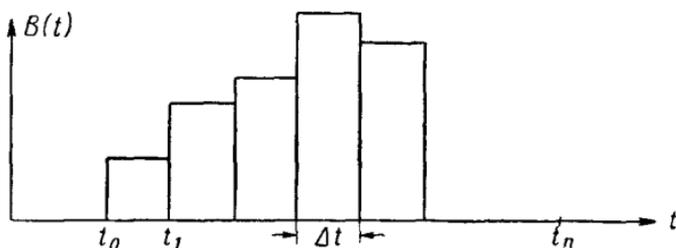
Уравнение Шредингера (12.2) можно переписать теперь в виде

$$\frac{d}{dt} |t\rangle = B(t) |t\rangle. \quad (12.4)$$

Вследствие операторного характера величины $B(t)$ решение этого уравнения не равно

$$\exp \left\{ \int_{t_0}^t B(t') dt' \right\} |t_0\rangle, \quad (12.5)$$

так как $B(t)$ не есть число. Однако из-за простоты коммутационных соотношений, которым подчиняется оператор $B(t)$, это выражение не столь ошибочно, как можно было бы предположить.



Ф и г. 11

Известно, что состояние $|t\rangle$ в момент времени t можно выразить посредством унитарного оператора $U(t, t_0)$, примененного к состоянию $|t_0\rangle$ в момент времени t_0 ,

$$|t\rangle = U(t, t_0) |t_0\rangle. \quad (12.6)$$

Очевидно, что оператор $U(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} U(t, t_0) = B(t) U(t, t_0) \quad (12.7)$$

с начальным условием $U(t_0, t_0) = 1$.

Чтобы найти оператор U , разделим временной интервал $(t_0 - t)$ на более мелкие интервалы Δt , заключенные между моментами времени $t_j = t_0 + j\Delta t$, где j — целое число. Решение уравнения (12.7) можно получить с помощью предельного перехода. Предположим, что оператор $B(t)$ имеет постоянное значение внутри каждого интервала времени Δt и претерпевает изменение только в момент времени t_j (фиг. 11).

Поскольку оператор B постоянен в каждом малом интервале, мы можем легко проинтегрировать дифференциальное уравнение (12.7) для каждого такого интервала. Если $B(t)$ принимает значение B_j в интервале от t_{j-1} до t_j , то

$$U(t_j, t_{j-1}) = e^{B_j \Delta t}. \quad (12.8)$$

Следовательно, оператор преобразования, соответствующий последовательности малых интервалов, будет иметь вид

$$U(t_n, t_0) = e^{B_n \Delta t} e^{B_{n-1} \Delta t} \dots e^{B_1 \Delta t}. \quad (12.9)$$

Чтобы оценить это произведение, мы можем использовать известную теорему об умножении экспонент (С3.20)¹). Для $n=2$, например, имеем

$$U(t_2, t_0) = e^{B_2 \Delta t} e^{B_1 \Delta t} = \exp \left\{ (B_1 + B_2) \Delta t + \frac{1}{2} [B_2, B_1] (\Delta t)^2 \right\}. \quad (12.10)$$

Повторяя эту операцию, получаем

$$U(t_n, t_0) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n B_j \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{j>k} [B_j, B_k] (\Delta t)^2 \right\}. \quad (12.11)$$

Это выражение есть точное решение, если $B(t)$ является, как мы предположили, разрывной функцией времени.

Случай, когда оператор $B(t)$ изменяется со временем непрерывно, можно рассмотреть, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е. предполагая, что $t_n = t$ остается фиксированным, а $n \rightarrow \infty$. В результате такого предельного перехода получаем точное решение

$$U(t, t_0) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t B(t') dt' + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [B(t'), B(t'')] \right\}. \quad (12.12)$$

Сравнивая это решение с выражением (12.5), которое получено в предположении, что $B(t)$ не является оператором, видим, что разница сводится к добавлению в показателе экспоненты члена

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [B(t'), B(t'')]. \quad (12.13)$$

Коммутатор в этом интеграле есть просто коэффициент (величина чисто мнимая). Таким образом, решение (12.12) отличается от (12.5) лишь зависящим от времени фазовым множителем. Обозначая интеграл (12.13) через $i\phi(t)$, запишем оператор преобразо-

¹) Буквой S условно выделены формулы из статьи автора, включенной в настоящий курс в качестве лекций 9—11.— *Прим. ред.*

вания в виде

$$U(t, t_0) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t B(t') dt' + i\varphi(t) \right\} = \\ = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar c} \int_{t_0}^t \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t') dt' d\mathbf{r} + i\varphi(t) \right\}. \quad (12.14)$$

Хотя фазовая функция $\varphi(t)$ имеет некоторый физический смысл (она содержит, к примеру, информацию относительно энергии взаимодействия тока и поля), она не влияет на выражение для операторов плотности поля, т. е. если начальное значение оператора плотности есть $\varrho(t_0)$, то его значение в момент времени t равно

$$\varrho(t) = U(t, t_0) \varrho(t_0) U^\dagger(t, t_0); \quad (12.15)$$

как мы видим, фазовый множитель действительно исчезает.

В частности, если начальное состояние есть вакуум

$$|t_0\rangle = |\text{vac}\rangle, \quad (12.16)$$

то в момент времени t имеем

$$e^{-i\varphi(t)} |t\rangle = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar c} \int_{t_0}^t \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t') d\mathbf{r} dt' \right\} |\text{vac}\rangle. \quad (12.17)$$

Если ввести теперь разложение оператора \mathbf{A} по нормальным типам колебаний или модам [соотношение (С2.10)], то станет видно, что унитарный оператор, действующий на вакуумное состояние справа в выражении (12.17), есть просто произведение операторов смещения:

$$D_k(\alpha_k) = \exp [\alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k]. \quad (12.18)$$

Точнее, если мы определим систему зависящих от времени амплитуд

$$\alpha_k(t) = \frac{i}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}} \int_{t_0}^t \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}, t') e^{-i\omega_k t'} d\mathbf{r} dt', \quad (12.19)$$

то соотношение (12.17) можно переписать в виде

$$e^{-i\varphi(t)} |t\rangle = \prod_k D_k(\alpha_k(t)) |\text{vac}\rangle. \quad (12.20)$$

Отсюда ясно, что излучение заданного распределения токов в вакуум всегда приводит к когерентному состоянию поля излучения:

$$e^{-i\varphi(t)} |t\rangle = | \{ \alpha_k(t) \} \rangle. \quad (12.21)$$

Вообще, если поле вначале находится в произвольном когерентном состоянии, то под действием излучения распределения токов его состояние остается когерентным.

Найденное решение задачи об излучении заданного распределения токов точно учитывает квантовомеханические свойства поля. Однако оно просто связано с решением соответствующей классической задачи. Соотношениями (8.22) амплитуды $\alpha_k(t)$ связаны с зависящими от времени амплитудами мод для классического поля излучения.

В момент времени t оператор плотности, который соответствует когерентному состоянию (12.21), равен

$$\rho(t) = |\{\alpha_k(t)\}\rangle \langle\{\alpha_k(t)\}| \quad (12.22)$$

и может быть переписан в P -представлении следующим образом:

$$\rho(t) = \int P(\{\beta_k\}) |\{\beta_k\}\rangle \langle\{\beta_k\}| \prod_k d^2\beta_k, \quad (12.23)$$

где

$$P(\{\beta_k\}) = \prod_k \delta^{(2)}(\beta_k - \alpha_k(t)) \quad (12.24)$$

есть P -функция.

В проведенных расчетах мы оперировали с заданным распределением тока, т. е. с таким распределением, поведение которого можно *в принципе* предсказать. Однако в действительности может оказаться так, что у нас недостаточно информации для такого предсказания, и мы должны прибегнуть к статистическому описанию поведения тока. Поскольку токи $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ в любой заданный момент времени в этом случае неизвестны, записать точные значения амплитуд $\alpha_k(t)$ в виде соотношения (12.19) становится невозможным. Поэтому мы предположим, что коэффициенты α_k имеют в момент времени t некоторое распределение вероятности $p(\{\alpha_k\}, t)$ с заданной дисперсией. Тогда оператор плотности можно записать в форме

$$\rho = \int p(\{\alpha_k\}, t) |\{\alpha_k\}\rangle \langle\{\alpha_k\}| \prod_k d^2\alpha_k, \quad (12.25)$$

которая является общей для P -представления, но в которой функция P , очевидно, всегда положительна.

Оператор плотности в виде соотношения (12.25) с положительной величиной $p(\{\alpha_k\}, t)$ может использоваться для описания полей излучения целого ряда источников, например тепловых излучателей, разрядных трубок и т. д. В связи с этим интересно заметить, что мы всегда можем построить в этих случаях такое классическое распределение случайных токов, что оно будет приводить к тому же самому полю, т. е. тому же самому оператору плотности.

Лекция 13

1. Понятие о фазовом пространстве для поля

В классической механике мы можем определить состояние системы заданием мгновенных значений всех координат и импульсов. Тогда эволюция системы единственным образом описывается уравнениями движения. Для наглядности n координат и n импульсов системы можно представить как координаты точки в $2n$ -мерном (фазовом) пространстве. Точка, которая представляет систему в этом пространстве, движется по определенной траектории.

Эту концепцию легко обобщить на случай классической статистической механики. Однако ввиду того, что в этом случае начальные координаты и импульсы системы неопределенны, мы можем указать только распределения вероятности $P_{\text{кл}}(p'_1 \dots p'_n, q'_1 \dots q'_n)$ для этих переменных. Вместо того, чтобы следить за движением отдельной точки в фазовом пространстве, мы должны следить за движением целого «облака» точек, представляющих ансамбль систем. Ожидаемое значение любой функции величин p'_i и q'_i можно вычислить тогда путем интегрирования произведения этой функции на вероятность $P_{\text{кл}}$ по всему фазовому пространству.

В первые же годы существования квантовой механики делались попытки использовать такой подход для описания квантовомеханической неопределенности. Мы не будем здесь обсуждать этот подход более подробно, поскольку наши интересы ограничены изучением электромагнитного поля.

С точки зрения динамики колебания поля в каждой моде есть колебания гармонического осциллятора. Для простоты рассмотрения ограничимся одной модой. В этом случае классическое фазовое пространство имеет только два измерения, соответствующие переменным p' и q' . Фазовая точка для моды с энергией E движется по эллипсу

$$p'^2 + \omega^2 q'^2 = 2E$$

(масса взята равной единице).

Любому комплексному собственному значению оператора

$$a = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega q + ip) \quad (13.1)$$

будет соответствовать когерентное состояние. Амплитуду a ,

соответствующую состоянию $|\alpha\rangle$, можно записать в виде

$$\alpha = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega q' + ip'), \quad (13.2)$$

где q' и p' — действительные числа.

Как показано в разделе 3 статьи автора, включенной в настоящий курс в качестве лекций 9—11, состояние $|\alpha\rangle$ можно описать волновым пакетом с минимальной неопределенностью, имеющим средние значения координаты q' и импульса p' .

Если использовать далее представление Шредингера и проследить изменение состояния во времени, то мы увидим, что состояние остается когерентным, а зависимость его амплитуды от времени имеет вид $ae^{-i\omega t}$. Движение вектора амплитуды в комплексной плоскости происходит по окружности $|\alpha| = \text{const}$, которая в плоскости p' и q' соответствует упомянутому выше эллипсу.

Ясно, что комплексная α -плоскость есть просто видоизменение двумерного фазового пространства. Казалось бы, что с этой точки зрения волновые пакеты когерентных состояний можно представить себе как «облака» вероятности, центры которых движутся по круговым путям. Однако такое представление является в сущности классическим. В квантовой механике наблюдаемые величины p и q не могут измеряться одновременно с произвольной степенью точности, и, следовательно, отчасти теряет смысл попытка говорить об общем распределении вероятности для переменных p' и q' . Учитывая эти ограничения, можно, конечно, говорить о распределении вероятностей для обеих переменных, однако более удобным является другой подход.

Введенное выше P -представление оператора плотности (см. лекции 9—11) можно рассматривать как определение понятия, адекватного понятию распределения вероятности в фазовом пространстве. Комплексная α -плоскость, на которой определена P -функция, есть видоизменение понятия фазового пространства. Более того, как мы уже отмечали, P -функция имеет ряд свойств, общих с распределением вероятности; однако эта функция может иметь отрицательное значение и сингулярности, что не свойственно функции плотности вероятности. Такое поведение P -функции не должно казаться странным, поскольку она в противоположность распределению плотности вероятности не является непосредственно измеряемой физической величиной.

Величина $P(\alpha)$ по определению обладает рядом свойств функции распределения плотности вероятности в фазовом пространстве, однако она не тождественна ей. Позднее мы обсудим некоторые другие примеры таких функций (которые, по-видимому, лучше всего называть плотностями квазивероятности) и покажем их связь с P -представлением. Сначала, однако, вернемся к вопросу о применимости P -представления вообще.

2. *P*-представление и проблема моментов

Из примера, данного в статье (лекции 9—11), ясно, что *P*-представление оператора плотности можно с успехом использовать для описания весьма широкого класса полей, однако до сих пор этот вопрос до конца детально не исследован. Сударшан¹⁾ указывал в короткой заметке, что диагональное представление оператора плотности с помощью когерентных состояний можно использовать для представления произвольного поля. Он дал точное выражение для весовой функции такого представления в виде неограниченной суммы производных произвольно высокого порядка от δ -функции. Он указал, что при такой записи оператора плотности «описание статистических состояний квантовомеханической системы... полностью эквивалентно описанию с помощью классических распределений вероятности».

Способ, которым можно получить выражение Сударшана для функции $P(\alpha)$, заключается в следующем. Рассматриваем матричный элемент оператора плотности для n -го квантового состояния. Согласно уравнению (С 7.12), эти матричные элементы есть комплексные моменты

$$\langle n | \rho | m \rangle = (n!m!)^{-1/2} \int P(\alpha) (\alpha^*)^m \alpha^n d^2\alpha$$

весовой функции $P(\alpha)$. В общем случае нам необходимо решать полную систему таких уравнений для всех n и m , т. е. найти матрицу, элементы которой дают матрицу моментов. Таким образом, в общем виде эта задача трудно разрешима. Решение Сударшана основано на использовании некоторых замечательных свойств δ -функции и ее производных. Рассмотрим для простоты сначала одномерный случай.

Предположим, что нам нужно найти функцию $f(x)$, определенную в интервале $-\infty < x < \infty$, по заданному набору ее моментов M_n

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^n dx = M_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13.3)$$

Если j -ю производную δ -функции записать в виде

$$\delta^{(j)}(x) = \frac{d^j}{dx^j} \delta(x), \quad (13.4)$$

то моменты δ -функции будут иметь вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \delta^{(j)}(x) dx = (-1)^j j! \delta_{jk}. \quad (13.5)$$

¹⁾ Sudarshan E.C.G., Phys. Rev. Lett., 10, 277 (1963).

Другими словами, каждая производная δ -функции имеет один и только один отличный от нуля момент. Используя (13.3) и (13.5), можно записать

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} M_n \delta^{(n)}(x). \quad (13.6)$$

Теперь необходимо проверить, имеет ли такое решение какой-либо смысл или нет.

Математики уже давно доказали, что δ -функция и ее производные не являются, строго говоря, полноценными функциями. Совсем недавно развита теория распределений (или теория обобщенных функций), в которой указаны пределы применимости преобразований типа (13.6).

В теории распределений уравнениям (13.4) и (13.5) придают вполне определенный смысл, однако нужно иметь в виду, что здесь мы сталкиваемся, вообще говоря, не с обычным значением, которое можно придать, например, бесконечной сумме в уравнении (13.6).

«Решение» Сударшана для двумерного распределения имеет вид

$$P_S(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n!m!)^{1/2}}{(n+m)!} \langle n | \rho | m \rangle \frac{1}{2\pi |\alpha|} e^{|\alpha|^2 - i(n-m)\theta} \times \\ \times \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial |\alpha|} \right)^{n+m} \delta(|\alpha|) \right\}, \quad (13.7)$$

где $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$. Холидей и Сейдж¹⁾ на простом примере показали, что это выражение нельзя рассматривать как распределение (обобщенную функцию) произвольного вида. В качестве примера использовался оператор тепловой плотности. Они показали, что интеграл от произведения ряда (13.7) на предельно хорошо ведущую себя пробную функцию (которая равна нулю вне круга конечного радиуса в α -плоскости) расходится. Кахилл²⁾ показал недавно, что для бесконечного числа квантов ряд (13.7) не удастся интерпретировать как обобщенную функцию.

Поскольку эти результаты указывают на то, что представление, предложенное Сударшаном, не является, вообще говоря, корректным, весьма важный вопрос об общности P -представления остается открытым. Однако Кастлер и Глаубер³⁾ показали недавно, что P -представление не настолько общо, чтобы описать все состояния. Они показали, в частности, что существуют такие квантовые состоя-

¹⁾ Holliday D., Sage M. L. (в печати).

²⁾ Cahill K., частное сообщение.

³⁾ Kastler D., Glauber R. J. (в печати).

ния поля, для которых невозможно найти функцию $P(\alpha)$, являющуюся распределением. Это означает, что все результаты, полученные с использованием P -представления, справедливы только в том случае, когда представление существует.

3. Положительно-определенная «плотность состояний в фазовом пространстве»

Рассмотрим теперь некоторые другие примеры функций квази-вероятности, которые могут быть иногда полезными. Одной из таких функций является диагональный элемент $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ оператора плотности. Ясно, что элемент $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ является не отрицательным и вполне определенной функцией α для всех ρ . Следовательно, по своему характеру он ближе к понятию плотности состояний в фазовом пространстве, чем функция $P(\alpha)$.

Из общего выражения для $R(\alpha^*, \beta)$, определяемого равенством (С6.1),

$$R(\alpha^*, \beta) = \langle \alpha | \rho | \beta \rangle \exp \left\{ \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \right\}$$

легко получаем, что

$$\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = R(\alpha^*, \alpha) e^{-|\alpha|^2}. \quad (13.8)$$

Таким образом, согласно (С6.6), условие нормировки для $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ записывается в виде

$$\frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle d^2\alpha = \frac{1}{\pi} \int R(\alpha^*, \alpha) e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha = 1. \quad (13.9)$$

Если для оператора плотности ρ P -представление существует и имеет весовую функцию $P(\beta)$, то

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle &= \int P(\beta) |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 d^2\beta = \\ &= \int P(\beta) e^{-|\alpha - \beta|^2} d^2\beta. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Рассматриваемая функция есть просто свертка P -функции.

Функцию $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ можно использовать для вычисления средних значений произведений операторов, которые в антинормальном порядке усредняются посредством P -представления так же, как и произведения в нормальном порядке.

Рассмотрим для примера среднее

$$\text{Sp} \{ \rho J(a) K(a^\dagger) \},$$

где J и K могут быть любыми функциями операторов уничтожения и рождения соответственно. Мы можем записать это среднее следую-

шим образом:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{K(a^\dagger) \varrho J(a)\} &= \frac{1}{\pi} \int \text{Sp} \{|\alpha\rangle \langle \alpha| K(a^\dagger) \varrho J(a)\} d^2\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha| K(a^\dagger) \varrho J(a) |\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha| \varrho |\alpha\rangle K(\alpha^*) J(\alpha) d^2\alpha. \end{aligned} \quad (13.11)$$

К сожалению, исследователи не слишком часто интересуются оценкой ожидаемых величин произведений операторов поля в анти-нормальном порядке. Для полной системы мод поля такая ожидаемая величина содержит расходящиеся составляющие от вакуумных флуктуаций.

Для n -го возбужденного состояния осциллятора функция $\langle \alpha | \varrho | \alpha \rangle$ принимает интересную форму:

$$\varrho_n = |n\rangle \langle n| = \frac{1}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \langle 0| a^n, \quad (13.12)$$

$$\langle \alpha | \varrho | \alpha \rangle = \frac{1}{n!} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (13.13)$$

Это исключительно «хорошая» функция, особенно в сравнении с аналогичным выражением в P -представлении, которое содержит $2n$ -ю производную δ -функции. При $x = n$ функция $x^n e^{-x}$ достигает максимума, который при больших значениях n имеет вид острого пика. Чтобы получить результат (13.13) в виде распределения в фазовом пространстве, необходимо заменить α выражением (13.2)

$$\langle \alpha | \varrho | \alpha \rangle = \frac{1}{n!} \frac{(p'^2 + \omega^2 q'^2)^n}{(2\hbar\omega)^n} \exp \left\{ -\frac{p'^2 + \omega^2 q'^2}{2\hbar\omega} \right\}. \quad (13.14)$$

Эта функция имеет свое максимальное значение на эллипсе

$$\frac{1}{2} (p'^2 + \omega^2 q'^2) = n\hbar\omega,$$

т. е. на классической орбите в фазовом пространстве. Она спадает к нулю с обеих сторон от классической орбиты, оставаясь всюду положительной.

Другим примером, для которого можно легко записать «плотность в фазовом пространстве», является гауссов оператор плотности. Для этого случая мы имеем

$$\begin{aligned} R(\alpha^*, \beta) &= \int P(\gamma) \exp \{ \alpha^* \gamma + \beta \gamma^* - |\gamma|^2 \} d^2\gamma = \\ &= \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \int \exp \left\{ -\frac{|\gamma|^2}{\langle n \rangle} + \alpha^* \gamma + \beta \gamma^* - |\gamma|^2 \right\} d^2\gamma = \\ &= \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \int \exp \left\{ -|\gamma|^2 \frac{1 + \langle n \rangle}{\langle n \rangle} + \alpha^* \gamma + \beta \gamma^* \right\} d^2\gamma. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Подстановкой

$$\xi = \gamma \left\{ \frac{1 + \langle n \rangle}{\langle n \rangle} \right\}^{1/2}$$

интеграл сводится к стандартной форме

$$\begin{aligned} R(\alpha^*, \beta) &= \frac{1}{\pi(1 + \langle n \rangle)} \int \exp \left\{ -|\xi|^2 + \left[\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right]^{1/2} (\alpha^* \xi + \beta \xi^*) \right\} d^2 \xi = \\ &= \frac{1}{\pi(1 + \langle n \rangle)} \exp \left\{ \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \alpha^* \beta \right\}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Таким образом, мы находим

$$\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = R(\alpha^*, \alpha) e^{-|\alpha|^2} = \frac{1}{\pi(1 + \langle n \rangle)} \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{1 + \langle n \rangle} \right\}. \quad (13.17)$$

Если $\langle n \rangle$ стремится к нулю, это выражение переходит в гауссову функцию $(1/\pi) \exp(-|\alpha|^2)$. В этом же случае весовая функция $P(\alpha)$ должна быть δ -функцией в начале координат. Если $\langle n \rangle$ стремится к бесконечности, то

$$\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \approx \frac{1}{\pi \langle n \rangle} e^{-|\alpha|^2/\langle n \rangle} \approx P(\alpha). \quad (13.18)$$

В этом пределе элемент $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ становится равным P -распределению, потому что предел большого $\langle n \rangle$ есть попросту классический предел. Следовательно, в этом случае $P(\alpha)$ действительно можно интерпретировать как классическую плотность в фазовом пространстве и различие между нормально и антинормально упорядоченными операторами также исчезает вследствие принципа соответствия.

4. «Фазовая плотность» Вигнера

Вигнеровское распределение можно считать «предком» всех наших функций квазивероятности. Оно существует и является «хорошей» функцией для всех квантовых состояний, но, как оказывается, может принимать и отрицательные значения. Для определения вигнеровского распределения мы используем приближение, предложенное Мойалом¹⁾.

Начнем с обсуждения разновидности характеристических функций, определяемых соотношением

$$X(\mu, \nu) = \langle e^{i(\mu p + \nu q)} \rangle, \quad (13.19)$$

где p и q — операторы. Используя теорему об умножении экспонент (С3.20), можно записать это выражение в виде

$$X(\mu, \nu) = \text{Sp} \{ \rho e^{i\mu p/2} e^{i\nu q} e^{i\mu p/2} \}. \quad (13.20)$$

¹⁾ M o u a l J. E., Proc. Cambr. Phil. Soc., 45, 99 (1948).

Если ограничиться рассмотрением чистых состояний, использовать координатное представление и вспомнить интерпретацию экспоненциальных функций моментов как операторов координатного смещения, то равенство (13.20) можно переписать в виде

$$X(\mu, \nu) = \int \psi^* \left(q'' - \frac{\mu \hbar}{2} \right) e^{i\nu q''} \psi \left(q'' + \frac{\mu \hbar}{2} \right) dq'', \quad (13.21)$$

где $\psi(q')$ есть волновая функция чистого состояния. Функция Вигнера есть преобразование Фурье этой характеристической функции

$$\begin{aligned} W(p', q') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp\{-i(\mu p' + \nu q')\} X(\mu, \nu) d\mu d\nu = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp\{-i(\mu p' + \nu q')\} \int \psi^* \left(q'' - \frac{\mu \hbar}{2} \right) e^{i\nu q''} \times \\ &\quad \times \psi \left(q'' + \frac{\mu \hbar}{2} \right) dq'' d\mu d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\mu p'} \int \psi^* \left(q'' - \frac{\mu \hbar}{2} \right) \delta(q' - q'') \psi \left(q'' + \frac{\mu \hbar}{2} \right) dq'' d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \psi^* \left(q' - \frac{\mu \hbar}{2} \right) e^{-i\mu p'} \psi \left(q' + \frac{\mu \hbar}{2} \right) d\mu. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Если в последнем выражении положить $y = -\mu \hbar$, то приходим к форме, полученной впервые Вигнером:

$$W(p', q') = \frac{1}{2\pi \hbar} \int \psi^* \left(q' + \frac{y}{2} \right) e^{i p' y / \hbar} \psi \left(q' - \frac{y}{2} \right) dy. \quad (13.23)$$

Очевидно, что из любой волновой функции можно вывести вигнеровское распределение. Таким образом, распределение всегда существует, хотя оно и не всегда положительно. Ясно, что в случае смешанного состояния необходимо произвести усреднение (13.23) по всем занятым состояниям. Условие нормировки, налагаемое на $W(q', p')$, имеет вид

$$\int W(q', p') dp' dq' = \int \delta(\mu) \delta(\nu) X(\mu, \nu) d\mu d\nu = X(0, 0) = 1. \quad (13.24)$$

Чтобы сравнить вигнеровское распределение с теми, которые обсуждались выше, полезно выразить его через операторы уничтожения и рождения a и a^\dagger . Тогда, определяя комплексную переменную преобразования Фурье соотношением

$$\lambda = -\mu \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^{1/2} + i\nu \left(\frac{\hbar}{2\omega} \right)^{1/2}, \quad (13.25)$$

можно записать оператор в показателе характеристической функции следующим образом:

$$-i(\mu p + \nu q) = \lambda a^\dagger - \lambda^* a, \quad (13.26)$$

а сама характеристическая функция принимает вид

$$\begin{aligned} X(\mu, \nu) &= \langle e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a} \rangle = \\ &= \text{Sp} \{ \rho e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} \} e^{-1/2|\lambda|^2} = \\ &= \text{Sp} \{ \rho e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^\dagger} \} e^{1/2|\lambda|^2}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Мы можем теперь использовать нормально упорядоченную форму, чтобы записать вигнеровскую функцию в P -представлении. Если принять, что оператор плотности имеет P -представление, то характеристическая функция дается выражением

$$\begin{aligned} X(\mu, \nu) &= \int P(\beta) \langle \beta | e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} | \beta \rangle e^{-1/2|\lambda|^2} d^2\beta = \\ &= \int P(\beta) \exp \left\{ \lambda \beta^* - \lambda^* \beta - \frac{1}{2} |\lambda|^2 \right\} d^2\beta. \end{aligned} \quad (13.28)$$

При вычислении преобразования Фурье от X , т. е. вигнеровской функции, удобнее использовать в показателе линейную комбинацию α и α^* , чем комбинацию классических переменных p' и q' . Поэтому мы запишем

$$i(\mu p' + \nu q') = \lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha \quad (13.29)$$

и

$$d\mu d\nu = \frac{2}{\hbar} d^2\lambda. \quad (13.30)$$

Тогда преобразование Фурье принимает вид

$$\begin{aligned} W(q', p') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \text{Sp} \{ \rho e^{\lambda(a^\dagger - \alpha^*)} e^{-\lambda^*(a - \alpha)} \} e^{-1/2|\lambda|^2} \frac{2}{\hbar} d^2\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int P(\beta) \exp \left\{ \lambda(\beta^* - \alpha^*) - \lambda^*(\beta - \alpha) - \frac{1}{2} |\lambda|^2 \right\} d^2\lambda d^2\beta. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Заменой $\xi = \lambda/\sqrt{2}$ этот интеграл сводится к стандартной форме

$$\begin{aligned} W(q', p') &= \frac{1}{\pi\hbar} \int P(\beta) \exp \{ \sqrt{2}\xi(\beta^* - \alpha^*) - \sqrt{2}\xi^*(\beta - \alpha) - |\xi|^2 \} d^2\xi d^2\beta = \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int P(\beta) \exp \{ -2|\beta - \alpha|^2 \} d^2\beta. \end{aligned} \quad (13.32)$$

Удобнее сразу рассматривать функцию Вигнера как функцию комплексной переменной α и соответственно изменить ее нормировку. Вспомним, что

$$d^2\alpha = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} \left(\frac{\omega}{2\hbar} \right)^{1/2} dp' dq' = \frac{dp' dq'}{2\hbar}, \quad (13.33)$$

и определим функцию

$$W(\alpha) = 2\hbar W(p', q'), \quad (13.34)$$

так что

$$\int W(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (13.35)$$

Тогда функция Вигнера комплексного аргумента будет иметь вид

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int P(\beta) e^{-2|\beta - \alpha|^2} d^2\beta. \quad (13.36)$$

Сравнивая это выражение с выведенным в предыдущем разделе

$$\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \int P(\beta) e^{-|\beta - \alpha|^2} d^2\beta, \quad (13.37)$$

мы видим, что оба они являются просто гауссовой сверткой P -распределения (когда последнее существует). Свойство принимать местами отрицательные значения, которое является общим для вигнеровского распределения и P -распределения, связано, по-видимому, с тем, что усреднение, выраженное равенством (13.36), производится в радиусе, который в $1/\sqrt{2}$ раз меньше радиуса в выражении (13.37).

В качестве примера рассмотрим вигнеровское распределение для поля, описываемого гауссовым оператором плотности. В этом случае, согласно равенству (13.36), имеем

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{2}{\pi^2 \langle n \rangle} \int \exp \left\{ -\frac{|\beta|^2}{\langle n \rangle} - 2|\beta - \alpha|^2 \right\} d^2\beta = \\ &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi^2 \langle n \rangle} \int \exp \left\{ -|\beta|^2 \left(2 + \frac{1}{\langle n \rangle} \right) + 2(\beta^* \alpha + \alpha^* \beta) \right\} d^2\beta. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Используя подстановку

$$\gamma = \left\{ \frac{1 + 2\langle n \rangle}{\langle n \rangle} \right\}^{1/2} \beta,$$

сводим интеграл к стандартной форме

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi^2 (2\langle n \rangle + 1)} \int \exp \left\{ -|\gamma|^2 + 2 \left\{ \frac{\langle n \rangle}{2\langle n \rangle + 1} \right\}^{1/2} (\gamma^* \alpha + \alpha^* \gamma) \right\} d^2\gamma = \\ &= \frac{2}{\pi^2 (2\langle n \rangle + 1)} \int \exp \left\{ -\left| \gamma - 2 \left\{ \frac{\langle n \rangle}{2\langle n \rangle + 1} \right\}^{1/2} \alpha \right|^2 \right\} d^2\gamma \times \\ &\times \exp \left\{ \left[\frac{4\langle n \rangle}{2\langle n \rangle + 1} - 2 \right] |\alpha|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi (2\langle n \rangle + 1)} \exp \left\{ -\frac{2}{2\langle n \rangle + 1} |\alpha|^2 \right\}. \quad (13.40)$$

Таким образом, вигнеровское распределение также имеет гауссову форму. Рассмотрим опять два предельных случая: $\langle n \rangle = 0$,

когда

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}, \quad (13.41)$$

и $\langle n \rangle \rightarrow \infty$, для которого

$$W(\alpha) \approx \frac{1}{\pi \langle n \rangle} e^{-|\alpha|^2 / \langle n \rangle} = P(\alpha), \quad (13.42)$$

что и следовало ожидать в этом предельном случае.

Простая гауссова форма, определяемая равенством (13.40), может быть использована для вывода полной системы вигнеровских распределений для квантовых состояний с индексом n . Это возможно потому, что функцию (13.40) можно рассматривать как производящую функцию для вигнеровского распределения. Рассмотрим общий случай оператора плотности, который можно записать в форме

$$\varrho = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n |n\rangle \langle n|, \quad (13.43)$$

где x — произвольный параметр. Если считать, что $W_n(\alpha)$ есть вигнеровская функция для n -го квантового состояния, то как следствие линейности W по ϱ будем иметь

$$W(\alpha) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n W_n(\alpha). \quad (13.44)$$

Если ввести теперь обозначение $x = \langle n \rangle / (1 + \langle n \rangle)$, то из уравнения (С8.10) станет ясно, что оператор ϱ , определяемый соотношением (13.43), есть просто гауссов оператор плотности. Следовательно, используя переменную x , можно записать равенство (13.40) в виде

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{2(1-x)}{\pi(1+x)} \exp \left\{ -2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right) |\alpha|^2 \right\} = \\ &= \frac{2(1-x)}{\pi(1+x)} \exp \left\{ \frac{x}{1+x} 4 |\alpha|^2 \right\} \exp \{ -2 |\alpha|^2 \}. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Но эта довольно сложная экспонента есть производящая функция для полиномов Лагерра L_n . В более обычных обозначениях производящая функция имеет вид

$$\frac{\exp \left\{ -\frac{\varrho u}{1-u} \right\}}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\varrho) \frac{u^n}{n!}. \quad (13.46)$$

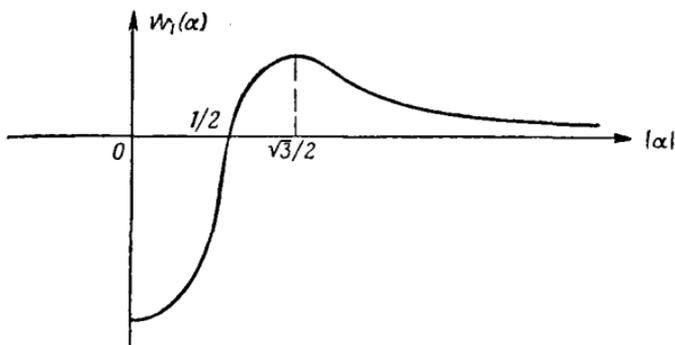
Таким образом, равенство (13.45) имеет следующее разложение:

$$W(\alpha) = (1-x) \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{(-1)^n}{n!} L_n(4|\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}. \quad (13.47)$$

Функцию

$$W_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n!} L_n(4|\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}$$

можно отождествить с вигнеровской функцией для n -го возбужденного состояния осциллятора. Эти функции имеют довольно сложное поведение в комплексной фазовой плоскости; функция



Ф и г. 12

с индексом n имеет узлы на n концентрических окружностях.

Для первых двух состояний имеем

$$W_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -\frac{p'^2 + \omega^2 q'^2}{2\hbar\omega} \right\}, \quad (13.48)$$

$$W_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} (4|\alpha|^2 - 1) e^{-2|\alpha|^2}. \quad (13.49)$$

Функция $W_1(\alpha)$ изображена на фиг. 12. Ее максимальное значение лежит на окружности с радиусом $\alpha = \sqrt{3}/2$.

Каждая из рассмотренных функций (P -функция, функция $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ и вигнеровское распределение) имеет свои преимущества. Из предыдущей дискуссии должно быть ясно, однако, что мы можем построить много таких функций, каждая из которых будет обладать своими достоинствами. Всем таким рассмотрениям фазового распределения присущ элемент произвольности.

Замечание. В недавнем препринте Клаудер, Мак-Кенна и Кюри подтвердили вывод о том, что для произвольных операторов плотности существование весовой функции P не является необходимым. Чтобы преодолеть эту трудность, они выразили матричные элементы оператора плотности с помощью предельной последовательности бесконечного числа операторов в P -представлении. Однако при этой процедуре теряется наиболее полезное свойство P -представления — возможность сведения статистического среднего к простым интегралам по комплексной α -плоскости.

1. Функции корреляции и распределение квазивероятности

В этой и следующих лекциях мы начнем обсуждение применений развитого формализма к некоторым более конкретным задачам. В качестве первого шага в этом направлении мы обсудим некоторые моменты из раздела 10 вышеприведенной статьи автора.

Предположим, что электромагнитное поле находится в чисто когерентном состоянии, которое мы обозначим символом $|\{\alpha_k\}\rangle$. Состояние $|\{\alpha_k\}\rangle$ есть собственное состояние оператора $E^{(+)}$

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\{\alpha_k\}\rangle = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t|\{\alpha_k\})|\{\alpha_k\}\rangle, \quad (14.1)$$

и соответствующая функция собственного значения \mathcal{E} есть линейная комбинация переменных $\{\alpha_k\}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t|\{\alpha_k\}) = i \sum_k \left(\frac{\hbar\omega_k}{2}\right)^{1/2} u_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} \alpha_k. \quad (14.2)$$

Соответствующее поле находится в полностью когерентном состоянии, так как функции корреляции всех n порядков факторизованы:

$$G_{\mu_1 \dots \mu_{2n}}^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_{\mu_j}^*(x_j|\{\alpha_k\}) \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}_{\mu_j}(x_j|\{\alpha_k\}). \quad (14.3)$$

Мы уже отмечали, что термин «когерентность» часто используется при обсуждении квантовомеханических проблем самого различного характера. Поскольку этот термин обычно предполагает возможность интерференции, он должен найти применение при анализе чистых квантовомеханических состояний. Однако возможность наблюдения интерференции никоим образом не исчерпывается чистыми состояниями. Для большинства квантовомеханических систем существуют некоторые статистические смеси состояний, для которых сохраняются в сущности те же явления интерференции, что и найденные для чистых состояний. Примеры таких смешанных состояний легко найти для электромагнитного поля; нетрудно показать, что они могут соответствовать полям, которые полностью когерентны в смысле равенства (14.3).

Вместо поля, которое соответствует системе амплитуд $\{\alpha_k\}$, мы рассмотрим поле, соответствующее системе $\{\alpha'_k\}$, которое получается умножением каждого из коэффициентов α_k на фазовый множитель $e^{i\varphi}$, одинаковый для всех мод. Если

$$\alpha'_k = e^{i\varphi} \alpha_k, \quad (14.4)$$

то в силу линейности функции собственного значения \mathcal{E} должно иметь место соотношение

$$\mathcal{E}_\mu(\mathbf{r}, t \{\alpha'_k\}) = e^{i\varphi} \mathcal{E}_\mu(\mathbf{r}, t \{\alpha_k\}). \quad (14.5)$$

Так как при нахождении функции корреляции фазовые множители исчезают, то измененное состояние поля ведет к той же системе корреляционных функций (14.3), что и исходное состояние. Это свойство инвариантности, которое вытекает из нашего определения функций корреляции, означает, что мы сохраняем те же самые корреляционные функции не только для чистых состояний, соответствующих различным значениям фазы φ , но также и для произвольной смеси таких состояний.

Предположим, что $\mathcal{L}(\varphi)$ — функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\varphi) d\varphi = 1. \quad (14.6)$$

Построим оператор плотности

$$\rho = \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\varphi) |\{\alpha_k e^{i\varphi}\}\rangle \langle \{\alpha_k e^{i\varphi}\}| d\varphi, \quad (14.7)$$

который представляет собой смесь состояний с различными значениями полной фазы φ . [Заметим, что $\mathcal{L}(\varphi)$ должно также удовлетворять условию положительной определенности, аналогичному равенству (С7.9).] Эти смеси [при любом выборе $\mathcal{L}(\varphi)$] ведут к системе корреляционных функций (14.3), следовательно, все такие смешанные состояния соответствуют полностью когерентным полям.

С практической точки зрения весьма важно то, что наши определения включают в себя смешанные состояния, соответствующие когерентным полям. Наше *априорное* знание состояния высокочастотных полей обычно не содержит информации о полной фазе φ . Поэтому ансамбль экспериментов, проведенных с такими полями, должен описываться с помощью оператора плотности в форме (14.7) со специальным выбором $\mathcal{L}(\varphi)$:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad (14.8)$$

который отражает наше полное незнание фазы. Неопределенность этой фазы не оказывает влияния на интенсивности ни в одном из опытов по интерференции, которые мы обсуждали до сих пор. Следовательно, она не должна иметь отношение к когерентным свойствам поля. Наше определение когерентности едва ли будет полезным с физической точки зрения, если оно не будет допускать когерентность смешанных состояний, так же как и чистых состояний.

2. Функция корреляции первого порядка для стационарных полей

Фактически все известные эксперименты в оптике могут быть описаны с помощью функции корреляции первого порядка для стационарных лучей света. Начнем вычисление такой функции корреляции, используя разложение по нормальным колебаниям для операторов поля:

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(rt, r't') = \frac{1}{2} \sum_{k, k'} \hbar (\omega_k \omega_{k'})^{1/2} \text{Sp} \{ \rho a_k^\dagger a_{k'} \} \times \\ \times u_{k\mu}^*(\mathbf{r}) u_{k'\nu}(\mathbf{r}') e^{i(\omega_k t - \omega_{k'} t')}. \quad (14.9)$$

Прежде чем оценивать статистические средние $\text{Sp} \{ \rho a_k^\dagger a_{k'} \}$, заметим, что они будут равны нулю всегда, когда моды k и k' не вырождены. Для доказательства нужно вспомнить, что для стационарных полей оператор ρ коммутирует с гамильтонианом поля \mathcal{H}_0 . Таким образом, мы имеем, например,

$$\rho = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t} \rho e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t} \quad (14.10)$$

для всех значений параметра t . Если подставить последнюю форму для оператора в выражение для искомого шпура, то найдем, что

$$\text{Sp} \{ \rho a_k^\dagger a_{k'} \} = \text{Sp} \{ \rho e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t} a_k^\dagger a_{k'} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t} \} = \\ = \text{Sp} \{ \rho a_k^\dagger a_{k'} \} e^{i(\omega_k - \omega_{k'}) t}. \quad (14.11)$$

Поскольку шпур не зависит от параметра t , он должен исчезать всегда, когда $\omega_k \neq \omega_{k'}$.

С другой стороны, для случая двух различных, но вырожденных колебаний k и k' величина $\text{Sp} (\rho a_k^\dagger a_{k'})$ не должна исчезать. Если имеется N вырожденных колебаний, то соответствующие средние $\text{Sp} (\rho a_k^\dagger a_{k'})$ можно рассматривать как формирующие элементы эрмитовой $N \times N$ -матрицы, не являющейся, вообще говоря, диагональной. Однако эту матрицу всегда можно диагонализировать с помощью линейного преобразования, представляющего просто

переопределение системы вырожденных модовых функций. Другими словами, для любого стационарного состояния поля, представленного оператором плотности ρ , будет существовать такой набор функций $u_k(\mathbf{r})$, что матрица сводится к диагональной форме, т. е.

$$\text{Sp}(\rho a_k^\dagger a_k) = \langle n_k \rangle \delta_{kk'}, \quad (14.12)$$

где $\langle n_k \rangle$ есть среднее число заполнения k -й моды.

Удобство использования таких выделенных наборов вырожденных модовых функций легко проиллюстрировать на примере поляриационных свойств световых лучей. Для любой плоской волны в луче имеются две вырожденные поляризационные моды, которые ортогональны. Если бы в качестве базиса мы выбрали пару плоскополяризованных состояний и описывали бы, например, луч с круговой поляризацией, то величина $\text{Sp}(\rho a_k^\dagger a_k)$ приняла бы форму 2×2 -матрицы с 4 неисчезающими компонентами. Не удивительно поэтому, что более удобным для этого случая является набор модовых функций из двух ортогональных круговых поляризаций. Этот выбор приводит матрицу к виду, в котором она имеет всего одну неисчезающую компоненту.

Вернемся теперь к расчету функции корреляции первого порядка для стационарных полей. Из равенств (14.12) и (14.9) мы видим, что при подходящем выборе базисных функций всегда можно записать функцию корреляции в форме разложения вида

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k \langle n_k \rangle u_{k\mu}^*(\mathbf{r}) u_{k\nu}(\mathbf{r}') e^{i\omega_k(t-t')}, \quad (14.13)$$

которое определено просто системой средних чисел заполнения $\langle n_k \rangle$. Разложение этого типа, часто оказывающееся полезным, основано на системе мод, имеющих форму плоских волн в большом кубическом объеме со стороной L . Эти моды [функции которых $u_k(\mathbf{r})$ определяются равенством (С2.9)] при большом объеме системы так плотно распределены в пространстве векторов распространения \mathbf{k} , что сумму по всем состояниям в равенстве (14.13) можно заменить интегралом $(L/2\pi)^3 \int d\mathbf{k} \dots$. Тогда разложение функции корреляции запишется в виде

$$G^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \int \sum_{\lambda=1,2} \hat{e}_\mu^{(\lambda)*} \hat{e}_\nu^{(\lambda)} \langle n_{\mathbf{k},\lambda} \rangle \mathbf{k} \times \\ \times \exp\{-i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega_k(t - t')]\} d\mathbf{k}, \quad (14.14)$$

где индекс λ отмечает поляризации, связанные с вектором пространства.

Допустим, что поле представляет хорошо коллимированный световой луч, близкий к монохроматическому и полностью поляризо-

ванный. Тогда среднее число заполнения $\langle n_{k, \lambda} \rangle$ будет принимать не нулевые значения только в очень малой ячейке k -пространства и, например, при $\lambda = 1$. При этом, если величины $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и $|t - t'|$ остаются малыми по сравнению с обратными размерами объема, в котором число $\langle n_{k, \lambda} \rangle$ отлично от нуля, то становится возможным упростить интеграл (14.14), пренебрегая изменением экспоненты в подынтегральном выражении. Если через k_0 и ω_0 обозначить средние значения вектора распространения и частоты луча, то получим

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') \approx \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} N \bar{e}_{\mu}^{(1)*} \bar{e}_{\nu}^{(1)} e^{-i[k_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega_0(t - t')]}, \quad (14.15)$$

где

$$N = \int \langle n_{k, \lambda} \rangle dk. \quad (14.16)$$

Описанный световой луч наиболее часто используется в интерференционных экспериментах. Он представляет собой тот тип лучей, который часто называют «когерентным» по традиционной оптической терминологии. Теперь ясно, что, определяя поле соотношением

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \right\} N^{1/2} \hat{e}^{(1)} e^{i(k_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}, \quad (14.17)$$

мы можем записать выражение (14.15) для функции корреляции в факторизованной форме

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') \approx \mathcal{E}_{\mu}^*(\mathbf{r}t) \mathcal{E}_{\nu}(\mathbf{r}'t'). \quad (14.18)$$

Таким образом, рассматриваемое поле действительно удовлетворяет условию когерентности первого порядка. Важно подчеркнуть, однако, что запись функции корреляции в виде произведения (14.18) приближенна, причем она тем точнее, чем ближе точки \mathbf{r}' , t' к точкам \mathbf{r} , t . Неабсолютность коллимированности и монохроматичности луча ограничивает интервалы переменных $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $t - t'$, внутри которых выполнено условие факторизации, т. е. определяет пространственный и временной интервал когерентности. В принципе эти интервалы можно сделать как угодно большими, улучшая указанные параметры луча.

Этот пример показывает, в каком идеализированном смысле необходимо рассматривать условия когерентности. Мы не можем ожидать, что корреляционные свойства полей, излучаемые реальными источниками, будут подчиняться условиям когерентности в неограниченной области пространства (хотя для полей лазеров эти условия выполняются, как известно, на протяжении десятков тысяч километров).

3. Функции корреляции для хаотических полей

Важный класс стационарных полей, возникающих всегда, когда источник по природе своей хаотичен, представляют поля, для которых весовая функция в P -представлении есть произведение гауссовых функций по одной на каждую моду. Оператор плотности представляется для этого случая в виде

$$P(\{\alpha_k\}) = \prod_k \frac{1}{\pi \langle n_k \rangle} e^{-|\alpha_k|^2 / \langle n_k \rangle}, \quad (14.19)$$

а все статистические свойства поля определяются системой средних чисел заполнения $\langle n_k \rangle$. С другой стороны, знание этой системы чисел эквивалентно, согласно равенству (14.13), знанию функции корреляции первого порядка для поля. Здесь проявляется то фундаментальное обстоятельство, что функция корреляции первого порядка содержит всю информацию, необходимую для описания полей с гауссовыми весовыми функциями. Это свойство, упрощающее рассмотрение, можно доказать, показав, что все функции корреляции более высокого порядка для таких полей можно выразить как сумму произведений функций корреляции первого порядка.

Чтобы доказать эту теорему, мы установим вид производящего функционала для системы всех функций корреляции поля. Важным инструментом в этом будет операция функционального дифференцирования. Если $F[\zeta(x)]$ есть функционал $\zeta(x)$, т. е. функция набора значений $\zeta(x)$ для всех x , то его функциональную производную по $\zeta(x_0)$ определяют соотношением

$$\frac{\delta F}{\delta \zeta(x_0)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{F[\zeta(x) + \varepsilon \delta^{(4)}(x - x_0)] - F[\zeta(x)]\}, \quad (14.20)$$

где $\delta^{(4)}$ есть четырехмерная (пространственно-временная) δ -функция. Если в качестве иллюстрации применить это определение к интегральному оператору

$$F = \int \zeta(x) E^{(-)}(x) d^4x, \quad (14.21)$$

то найдем, что

$$\frac{\delta F}{\delta \zeta(x_0)} = \int \delta^{(4)}(x - x_0) E^{(-)}(x) d^4x = E^{(-)}(x_0). \quad (14.22)$$

Производящий функционал определим выражением

$$\Xi[\zeta(x), \eta(x)] = \text{Sp} \left\{ \rho e^{\int \zeta(x) E^{(-)}(x) d^4x} e^{\int \eta(x') E^{(+)}(x') d^4x'} \right\}, \quad (14.23)$$

в котором он зависит от двух независимых функций $\zeta(x)$ и $\eta(x)$ и является шпуром нормально упорядоченного произведения.

Отсюда видно, что функциональные производные этого выражения, вычисленные для $\zeta(x) = \eta(x) = 0$, являются корреляционными функциями поля, т. е.

$$\frac{\delta^2}{\delta \zeta(x_1) \delta \eta(x_2)} \Xi \Big|_{\zeta=\eta=0} = \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(x_1) E^{(+)}(x_2) \} = G^{(1)}(x_1, x_2), \quad (14.24)$$

или в более общем виде

$$\frac{\delta^{2n}}{\delta \zeta(x_1) \dots \delta \zeta(x_n) \delta \eta(x_{n+1}) \dots \delta \eta(x_{2n})} \Xi \Big|_{\zeta=\eta=0} = G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{2n}). \quad (14.25)$$

[Тензорные индексы, которые опущены в этих выражениях, можно было восстановить, если учесть, что каждая координата x определяет и положение, и время; например, функция $\zeta(x)$ есть фактически набор четырех функций $\zeta_\mu(\mathbf{r}, t)$ для $\mu = 1 \dots 4$.]

В этом месте удобно ввести сокращенное обозначение

$$e(x, k) = i \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} \right)^{1/2} \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}, \quad (14.26)$$

с помощью которого разложение оператора $E^{(+)}$ по модовым функциям записывается в виде

$$E^{(+)}(x) = \sum_k e(x, k) a_k. \quad (14.27)$$

Используя P -представления для оператора плотности с гауссовой весовой функцией (14.19), производящий функционал (14.23) можно записать в виде

$$\Xi = \int \exp \left\{ - \sum_k \frac{|\alpha_k|^2}{\langle n_k \rangle} \right\} \exp \left\{ \sum_k \int \zeta(x) e^*(x, k) \alpha_k^* d^4 x \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \sum_k \int \eta(x') e(x', k) \alpha_k d^4 x' \right\} \prod \frac{d^2 \alpha_k}{\pi \langle n_k \rangle}. \quad (14.28)$$

Этот многократный интеграл обращается в произведение интегралов по одному для каждой моды k . Если ввести два комплексных параметра

$$\beta_k = \int \zeta(x) e^*(x, k) d^4 x, \\ \gamma_k = \int \eta(x') e(x', k) d^4 x', \quad (14.29)$$

то интегральный множитель для моды с индексом k примет знаковую форму

$$\int \exp \left\{ - \frac{|\alpha_k|^2}{\langle n_k \rangle} + \beta_k \alpha_k^* + \gamma_k \alpha_k \right\} \frac{d^2 \alpha_k}{\pi \langle n_k \rangle} = \exp \{ \beta_k \gamma_k \langle n_k \rangle \}. \quad (14.30)$$

Следовательно, производящий функционал дается произведением

$$\begin{aligned} \Xi &= \prod_k \exp \{ \beta_k \gamma_k \langle n_k \rangle \} = \\ &= \exp \left\{ \int \zeta(x) \sum_k e^*(x, k) e(x', k) \langle n_k \rangle \eta(x') d^4x d^4x' \right\}. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Согласно равенствам (14.13) и (14.26), функция корреляции первого порядка для поля

$$G^{(1)}(x, x') = \sum_k e^*(x, k) e(x', k) \langle n_k \rangle, \quad (14.32)$$

есть как раз та сумма, которая фигурирует в показательной функции в выражении (14.31). Таким образом, производящий функционал для функций корреляции всех порядков можно выразить через функцию корреляции первого порядка

$$\Xi [\zeta(x), \eta(x)] = \exp \left\{ \int \zeta(x) G^{(1)}(x, x') \eta(x') d^4x d^4x' \right\}. \quad (14.33)$$

Мы можем теперь вывести точное выражение для функций корреляции более высоких порядков, вычисляя соответствующие производные функционала. В частности, n -ю производную по ζ можно записать в виде

$$\frac{\delta^n}{\delta \zeta(x_1) \dots \delta \zeta(x_n)} \Xi = \left\{ \prod_{j=1}^n \int G^{(1)}(x_j, x') \eta(x') d^4x' \right\} \Xi. \quad (14.34)$$

Чтобы найти функцию корреляции n -го порядка, мы должны далее дифференцировать n раз по функции η . Поскольку $\zeta(x)$, в конце концов, должна быть положена равной нулю, то легко видеть, что все члены, которые появятся от дифференцирования по η множителя Ξ в правой части (14.34), в конечном итоге исчезнут, поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^{2n}}{\delta \zeta(x_1) \dots \delta \zeta(x_n) \delta \eta(x_{n+1}) \dots \delta \eta(x_{2n})} \Xi \Big|_{\substack{\zeta=0 \\ \eta=0}} = \\ &= \frac{\delta^n}{\delta \eta(x_{n+1}) \dots \delta \eta(x_{2n})} \prod_{j=1}^n \int G^{(1)}(x_j, x') \eta(x') d^4x' = \\ &= \sum_P \prod_{j=1}^n G^{(1)}(x_j, x_{P(n+j)}), \end{aligned} \quad (14.35)$$

т. е. производная есть сумма, взятая по $n!$ возможным способам перестановки набора координат $x_{n+1} \dots x_{2n}$. Так как вычисленная производная, согласно равенству (14.25), есть функция кор-

реляции n -го порядка, то окончательно имеем

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{2n}) = \sum_P \prod_{j=1}^n G^{(1)}(x_j x_{P(n+j)}). \quad (14.36)$$

Функция корреляции n -го порядка для гауссовых полей есть симметричная сумма произведений функций корреляции первого порядка.

Чтобы проиллюстрировать этот результат, запишем функцию корреляции второго порядка

$$G^{(2)}(x_1 x_2, x_3 x_4) = G^{(1)}(x_1 x_3) G^{(1)}(x_2 x_4) + G^{(1)}(x_1 x_4) G^{(1)}(x_2 x_3). \quad (14.37)$$

Если рассматриваемое поле обладает когерентностью первого порядка, то функцию корреляции первого порядка можно записать в факторизованной форме (7.15). Слагаемые в (14.37) равны, поэтому

$$G^{(2)}(x_1 x_2, x_3 x_4) = 2 \mathcal{E}^*(x_1) \mathcal{E}^*(x_2) \mathcal{E}(x_3) \mathcal{E}(x_4). \quad (14.38)$$

Функция корреляции второго порядка факторизуется, но так как появился множитель 2, то поле не может иметь когерентность второго или более высокого порядка. Очевидно, что функция корреляции n -го порядка для таких полей дается формулой

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = n! \prod_{j=1}^n \mathcal{E}^*(x_j) \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}(x_j). \quad (14.39)$$

4. Распределение квазивероятности для амплитуды поля

Когда оператор плотности для поля можно определить с помощью P -представления, функция $P(\{\alpha_k\})$ играет роль, аналогичную роли плотности вероятности для отдельных амплитуд α_k . Конечно, для светового луча мы обычно измеряем не отдельные амплитуды α_k , а средние значения различных функций комплексного собственного значения напряженности поля $\mathcal{E}(r, t)$, которое представляет собой некоторую линейную сумму амплитуд отдельных мод,

$$\mathcal{E}(x\{\alpha_k\}) = \sum_k e(x, k) \alpha_k. \quad (14.40)$$

Чтобы описать все разнообразие таких измерений, которые можно произвести в одной пространственно-временной точке $x = (r, t)$, удобно использовать разновидность приведенного распределения квазивероятности для комплексной амплитуды поля $\mathcal{E}(x\{\alpha_k\})$, которую можно вывести из $P(\{\alpha\})$. Эта функция распределения для амплитуды поля будет весьма полезна при обсуждении причины возникновения эффекта корреляции фотонов, открытого Хэнбери Брауном и Твиссом.

Для иллюстрации вида средних величин, с которыми нам часто придется сталкиваться, заметим, что средняя интенсивность поля в точке x равна

$$G^{(1)}(x, x) = \int P(\{\alpha_k\}) |\mathcal{E}(x\{\alpha_k\})|^2 \prod_k d^2\alpha_k, \quad (14.41)$$

а среднюю частоту совпадений для частного случая, когда два счетчика помещены в одной и той же точке и обладают одинаковой зависимостью чувствительности от времени, можно представить в виде

$$G^{(1)}(xx, xx) = \int P(\{\alpha_k\}) |\mathcal{E}(x\{\alpha_k\})|^4 \prod_k d^2\alpha_k. \quad (14.42)$$

Это примеры общего класса средних, имеющих форму

$$\int P(\{\alpha_k\}) F(\mathcal{E}(x\{\alpha_k\})) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (14.43)$$

где F — подходящим образом определенные функции. Теперь удобно разделить многомерное интегрирование по комплексным параметрам амплитуды на две стадии: интегрирование по подпространству параметров α_k , в котором линейная комбинация

$$\mathcal{E}(x\{\alpha_k\}) = \sum e(x, k) \alpha_k$$

остаётся постоянной, и затем по всем значениям, которые может принимать эта сумма. Обозначая через $W(\mathcal{E}, x)$ функцию, получающуюся в результате первого интегрирования

$$W(\mathcal{E}, x) = \int P(\{\alpha_k\}) \delta^{(2)}\left(\mathcal{E} - \sum_k e(x, k) \alpha_k\right) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (14.44)$$

можно записать полный интеграл (14.43) в форме

$$\begin{aligned} & \int P(\{\alpha_k\}) F(\mathcal{E}(x\{\alpha_k\})) \prod_k d^2\alpha_k = \\ & = \int \int P(\{\alpha_k\}) \delta^{(2)}\left(\mathcal{E} - \sum_k e(x, k) \alpha_k\right) \times \\ & \times F(\mathcal{E}) \prod_k d^2\alpha_k d^2\mathcal{E} = \int W(\mathcal{E}, x) F(\mathcal{E}) d^2\mathcal{E}, \end{aligned} \quad (14.45)$$

где $d^2\mathcal{E} = d(\operatorname{Re} \mathcal{E}) d(\operatorname{Im} \mathcal{E})$ есть действительный элемент площади в комплексной плоскости амплитуды поля. Ясно, что функция $W(\mathcal{E}, x)$, определенная равенством (14.44), играет роль, аналогичную роли распределения вероятности для комплексной ампли-

туды поля в пространственно-временной точке x . Поскольку этот результат получен с помощью функции P , являющейся только распределением квазивероятности, то на него распространяются все те ограничения, о которых упоминалось в предыдущей лекции; те же самые ограничения следует иметь в виду и при физической интерпретации функции $W(\mathcal{E}, x)$. Например, она также может принимать отрицательные значения.

Функция W обеспечивает особенно простое описание поля, содержащего много независимо возбужденных типов колебаний (мод). Поскольку в этом случае полная амплитуда поля \mathcal{E} есть сумма большого числа независимо распределенных комплексных амплитуд, пропорциональных α_k , распределение амплитуды \mathcal{E} будет соответствовать распределению конечных точек траекторий случайных блужданий в комплексной плоскости. Независимо от индивидуального распределения амплитуд в каждой моде это распределение принимает гауссову форму, когда число типов колебаний, дающих вклад, велико. С математической точки зрения, это утверждение едва ли отличается от теоремы о предельном значении, обсуждаемой в разделе 8 вышеприведенной статьи автора, т. е. равенство (14.44) становится по своей структуре подобным равенству (С8.1), когда функцию $P(\{\alpha_k\})$ можно представить в виде произведения $\prod_k P_k(\alpha_k)$. В порядке обобщения мы можем считать возбуждения

отдельных мод нестационарными со средними амплитудами

$$\int P_k(\alpha_k) \alpha_k d^2\alpha_k = \langle \alpha_k \rangle. \quad (14.46)$$

Тогда, применяя теорему о предельном значении, мы находим

$$W(\mathcal{E}, x) = \frac{1}{\pi \sum_k |e(x, k)|^2 \{|\langle \alpha_k \rangle|^2 - |\langle \alpha_k \rangle|^2\}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{|\mathcal{E} - \sum_k e(x, k) \langle \alpha_k \rangle|^2}{\sum_k |e(x, k)|^2 \{|\langle \alpha_k \rangle|^2 - |\langle \alpha_k \rangle|^2\}} \right\}. \quad (14.47)$$

Если средние амплитуды $\langle \alpha_k \rangle$ исчезают, как это происходит, например, в случае стационарных полей, то

$$W(\mathcal{E}, x) = \frac{1}{\pi \sum_k |e(x, k)|^2 \langle n_k \rangle} \exp \left\{ - \frac{|\mathcal{E}|^2}{\sum_k |e(x, k)|^2 \langle n_k \rangle} \right\} = \\ = \frac{1}{\pi G^{(1)}(x, x)} e^{-|\mathcal{E}|^2 / G^{(1)}(x, x)}. \quad (14.48)$$

Для иллюстрации полезности найденного выражения для $W(\mathcal{E}, x)$ подсчитаем функцию корреляции n -го порядка при равен-

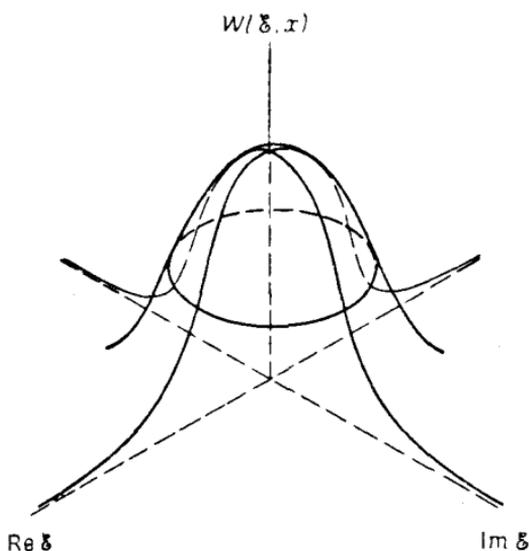
стве всех ее аргументов. Полагая $F(\mathcal{E}) = |\mathcal{E}|^{2n}$ в равенстве (14.45), находим

$$G^{(n)}(x \dots x) = \int W(\mathcal{E}, x) |\mathcal{E}|^{2n} d^2\mathcal{E}. \quad (14.49)$$

Для гауссовой формы функции W , данной равенством (14.48), последний интеграл есть просто

$$G^{(n)}(x \dots x) = n! \{G^{(1)}(x, x)\}^n. \quad (14.50)$$

Важный класс полей, подчиняющихся условиям разделения, которые мы предполагали выполненными при выводе этих результатов, представляют поля, определенные гауссовыми операторами



Ф и г. 13

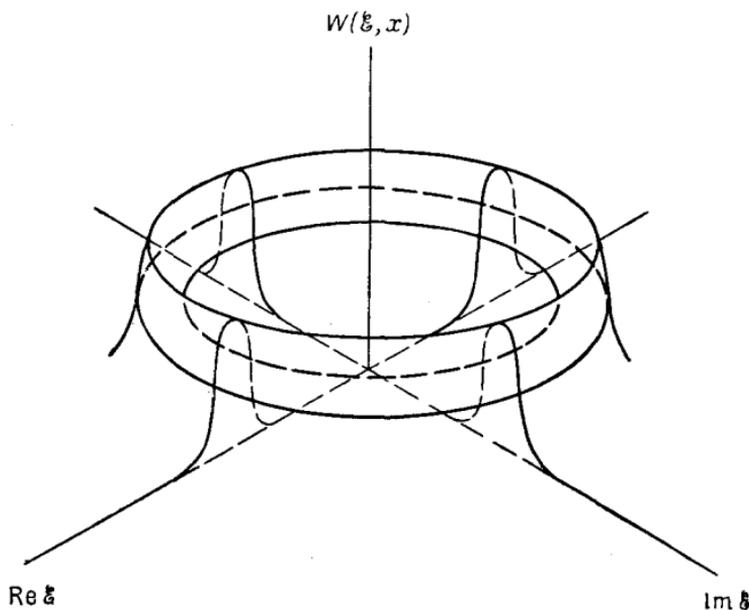
плотности, обсуждавшимися ранее. Для этих полей равенство (14.50) следует прямо из (14.36). Но поскольку при выводе формул (14.48) и (14.50) мы не предполагали, что функции $P_k(\alpha_k)$ являются по форме гауссовыми, эти результаты остаются справедливыми и для значительно более широкого множества возбуждений поля.

Эскиз функции гауссова распределения $W(\mathcal{E}, x)$ дан на фиг. 13. Поскольку роль этой функции родственна с ролью распределения вероятности для комплексной амплитуды поля \mathcal{E} , то ясно, что абсолютное значение поля подвержено флуктуациям существенной величины. Таким образом, в то время как наиболее вероятное значение амплитуды поля есть $\mathcal{E} = 0$, амплитуда будет время от времени попадать в те области комплексной плоскости, которым

соответствуют «хвосты» гауссового распределения и произвольно сильные поля. Соотношение (14.50) между значениями функций корреляции можно представить в виде

$$\langle |\mathcal{E}|^{2n} \rangle = n! \{ \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle \}^n \quad (14.51)$$

между средними моментами $\langle |\mathcal{E}|^j \rangle$ функции W . Чрезвычайно быстрое увеличение с ростом n отношения $\langle |\mathcal{E}|^{2n} \rangle / \{ \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle \}^n$,



Ф и г. 14

которое дает гауссово распределение, обусловлено характерными для него длинными «хвостами».

Хотя гауссова форма для функции $W(\xi, x)$ почти универсальна для описания излучений естественных источников, хаотических по своей природе, для описания излучений различных искусственных источников могут потребоваться совершенно иные распределения. Фактически одной из главных задач высокочастотной техники является устранение полей, которые имеют резко выраженный случайный или шумовой характер, описываемый функцией $W(\xi, x)$ гауссовой формы. Одним из первых достижений этой техники было создание генераторов поля с предельно стабильной амплитудой, а именно генераторов несущих волн для радиовещания. Эти генераторы являются нелинейными устройствами, и вклады амплитуд различных мод в общее поле распределены не независимо, как это имеет место в случае гауссового распределения. Для стационарного поля, генерируемого таким источником, можно найти функцию $W(\xi, x)$, подобную по форме показанной на фиг. 14, т. е. имеется

лишь очень малая вероятность того, что модуль поля $|\mathcal{E}|$ будет заметно отличаться от корня из своего среднеквадратичного значения $\{\langle |\mathcal{E}|^2 \rangle\}^{1/2}$.

Форма функции $W(\mathcal{E}, x)$ позволяет понять причины эффекта корреляции фотонов, открытого Хэнбери Брауном и Твиссом в экспериментах, описанных в лекции 8. Рассмотрим скорость счета двукратных совпадений фотонов, когда детекторы D_1 и D_2 (см. фиг. 9) расположены точно симметрично относительно полупрозрачного зеркала и регистрируют совпадения без временной задержки. Поскольку в таком устройстве счетчики занимают по существу одно и то же положение и способны регистрировать в одно и то же время, скорость совпадений дается функцией корреляции в форме

$$G^{(2)}(xx, xx) = \langle |\mathcal{E}(x)|^4 \rangle. \quad (14.52)$$

Согласно формулам (14.50) и (14.51), для всех хаотических источников света

$$\langle |\mathcal{E}(x)|^4 \rangle = 2 \langle |\mathcal{E}(x)|^2 \rangle^2 = 2 \{G^{(1)}(x, x)\}^2. \quad (14.53)$$

Разность между $G^{(2)}(xx, xx)$ и $\{G^{(1)}(xx)\}^2$ есть мера регулярной регистрации одновременно двух фотонов, т. е. мера высоты «горба» на кривой скорости счета совпадений на фиг. 10. Поскольку скорость счета совпадений при нулевой временной задержке вдвое больше фоновой скорости счета совпадений или скорости счета случайных совпадений, эффект корреляции не является малым. (Первоначальное наблюдение эффекта затруднялось большим временем задержки отклика считающей системы по сравнению со временем, в течение которого существует корреляция.)

Чтобы понять природу эффекта корреляции фотонов для других типов распределений $W(\mathcal{E}, x)$, заметим, что он пропорционален величине

$$\begin{aligned} G^{(2)}(xx, xx) - \{G^{(1)}(x, x)\}^2 &= \langle |\mathcal{E}(x)|^4 \rangle - \langle |\mathcal{E}(x)|^2 \rangle^2 = \\ &= \int W(\mathcal{E}, x) \{|\mathcal{E}|^2 - \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle\}^2 d^2\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (14.54)$$

Одно из любопытных квантовомеханических свойств этого выражения заключается в том, что, хотя оно и напоминает статистическое отклонение величины $|\mathcal{E}|^2$, тем не менее может быть как положительным, так и отрицательным. Это допустимо, поскольку функция $W(\mathcal{E}, x)$, как мы уже отмечали, не является, строго говоря, распределением вероятности. Нетрудно найти состояния поля, для которых функция W принимает отрицательное значение (по крайней мере локально) и для которых среднее (14.54) будет, следовательно, отрицательным. Когда поле находится в таком состоянии, скорость счета совпадения фотонов будет меньше, чем фоновая

скорость счета в аппаратуре Хэнбери Брауна — Твисса, — эффект, обратный наблюдаемому с естественными источниками излучения.

Когда поле генерируется классическим источником, т. е. источником с предопределенным поведением, всегда можно (как мы уже видели в лекции 12) построить P -представление для оператора плотности с неотрицательной весовой функцией $P(\{\alpha_k\})$. Тогда функция $W(\mathcal{E}, x)$, определенная равенством (14.44), также не будет принимать отрицательных значений. Таким образом, можно сделать вывод, что для всех полей, генерируемых классическими источниками, корреляция Хэнбери Брауна — Твисса положительна

$$G^{(2)}(xx, xx) - \{G^{(1)}(x, x)\}^2 \geq 0. \quad (14.55)$$

Если корреляционный эффект для полей этого типа исчезает, то для всех \mathcal{E}

$$W(\mathcal{E}, x) \{|\mathcal{E}|^2 - \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle\}^2 = 0. \quad (14.56)$$

Следовательно, функция $W(\mathcal{E}, x)$ может принимать неисчезающие значения только в точках, лежащих на окружности $|\mathcal{E}|^2 = \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle$. Другими словами, если функция $W(\mathcal{E}, x)$ имеет форму, которая не допускает амплитудной модуляции поля, то эффект корреляции будет исчезать, и наоборот. При этом ограничении мы имеем более общее равенство

$$G^{(n)}(x \dots x) = \langle |\mathcal{E}|^{2n} \rangle = \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle^n = \{G^{(1)}(x, x)\}^n, \quad (14.57)$$

и все эксперименты по регистрации n -кратных совпадений показывают отсутствие какой-либо тенденции к статистическим корреляциям.

В ряде публикаций эффект Хэнбери Брауна — Твисса объясняется тем, что фотоны являются бозе-частицами и, следовательно, имеют некоторую тенденцию к ассоциации. Очевидно, что такое объяснение далеко не полно, ввиду того что квантовомеханическая форма эффекта может иметь оба знака: она может соответствовать антикорреляции, или «отталкиванию», а не положительной корреляции, или «группировке». Далее, тот факт, что классические поля имеют только положительный корреляционный эффект, есть ясный показатель того, что средние величины, которые можно вычислить посредством корреляционных функций (даже когда существует P -представление), не всегда эквивалентны в квантовой и классической теории. Множество различных полей, встречающихся в квантовой теории, гораздо больше множества классических полей.

Ясно, что измерения эффекта корреляции фотонов, по крайней мере при нулевом времени задержки, дают просто меру величины случайной амплитудной модуляции, присутствующей в полях с положительной функцией $W(\mathcal{E}, x)$. Этот эффект должен практически отсутствовать у поля хорошо стабилизированного генера-

тора. В частности, газовый лазер в режиме генерации является, по-видимому, весьма стабильным генератором и корреляция Хэн-бери Брауна — Твисса, измеренная для его луча, должна быть очень малой.

То обстоятельство, что эксперимент по корреляции фотонов или его аналог в радиочастотной области — эксперимент по корреляции в интенсивности, — представляет простой способ различения полей от естественных и искусственных источников, может иметь некоторые интересные следствия для астрономии. Если разумные существа другой цивилизации Галактики захотели бы связаться с нами, то резонно предположить, что они должны были бы использовать в качестве излучателя какой-нибудь амплитудно-стабилизированный генератор. В этом случае их сигналы, как мы уже видели, имели бы безошибочно отличимый характер, даже если бы не передавалось никакого сообщения, потому что немодулированный сигнал легче отличить от шумового фона, чем модулированный сигнал.

Б. Распределение квазивероятности для амплитуд поля в двух пространственно-временных точках

Ряд корреляционных функций и другие статистические характеристики, которые нас интересуют, зависят от полей в двух различных пространственно-временных точках x_1 и x_2 . Если существует P -представление, то эти средние можно выразить в общей форме

$$\int P(\{\alpha_k\}) F(\mathcal{E}(x_1\{\alpha_k\}), \mathcal{E}(x_2\{\alpha_k\})) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (14.58)$$

где функция F соответствующим образом определяется для каждого случая. Два известных примера таких средних представляют корреляционная функция первого порядка $G^{(1)}(x_1, x_2)$, для которой мы выберем

$$F = \mathcal{E}^*(x_1\{\alpha_k\}) \mathcal{E}(x_2\{\alpha_k\}), \quad (14.59)$$

и скорость счета задержанных совпадений $G^{(2)}(x_1x_2, x_2x_1)$, для которой

$$F = |\mathcal{E}(x_1\{\alpha_k\})|^2 |\mathcal{E}(x_2\{\alpha_k\})|^2. \quad (14.60)$$

Теперь, если функцию распределения $W(\mathcal{E}_1x_1, \mathcal{E}_2x_2)$ для комплексных амплитуд поля в двух точках определить соотношением

$$W(\mathcal{E}_1x_1, \mathcal{E}_2x_2) = \int P(\{\alpha_k\}) \delta^{(2)}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}(x_1\{\alpha_k\})) \times \\ \times \delta^{(2)}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}(x_2\{\alpha_k\})) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (14.61)$$

то среднее значение в формуле (14.58) дается интегралом

$$\int W(\mathcal{E}_1 x_1, \mathcal{E}_2 x_2) F(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) d^2 \mathcal{E}_1 d^2 \mathcal{E}_2. \quad (14.62)$$

Функция $W(\mathcal{E}_1 x_1, \mathcal{E}_2 x_2)$ по существу есть распределение квази-вероятности, которое играет в усреднении функций двух пространственно-временных переменных ту же роль, что и обсуждавшаяся выше функция $W(\mathcal{E}, x)$ в усреднении функций, зависящих от одной пространственно-временной точки. Фактически функцию $W(\mathcal{E}, x)$ можно получить из «двухточечной» функции интегрированием по переменным поля для одной из точек

$$W(\mathcal{E}, x) = \int W(\mathcal{E}x, \mathcal{E}'x') d^2 \mathcal{E}' = \int W(\mathcal{E}'x', \mathcal{E}x) d^2 \mathcal{E}'. \quad (14.63)$$

Когда функция $P(\{\alpha_k\})$ представима в виде произведения независимых весовых функций по одной на каждую моду, а число возбужденных мод велико, легко показать, используя метод, подобный тому, который был применен в разделе 8 вышеприведенной статьи автора, что функция $W(\mathcal{E}_1 x_1, \mathcal{E}_2 x_2)$ принимает гауссову форму по двум переменным комплексным амплитудам \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Для доказательства мы просто покажем, что двойное преобразование Фурье функции $W(\mathcal{E}_1 x_1, \mathcal{E}_2 x_2)$ по переменным амплитудам \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 есть асимптотическая форма гауссова распределения для бесконечного числа возбужденных мод. Тогда обратное преобразование приведет к результату, который для случая стационарных полей можно записать в виде

$$W(\mathcal{E}_1 x_1, \mathcal{E}_2 x_2) = \frac{1}{\pi^2 G^{(1)}(x_1 x_1) G^{(1)}(x_2 x_2) \{1 - |g^{(1)}(x_1 x_2)|^2\}} \times \\ \times \exp - \left\{ \frac{\frac{|\mathcal{E}_1|^2}{G^{(1)}(x_1 x_1)} + \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{G^{(1)}(x_2 x_2)} - 2 \operatorname{Re} \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* g^{(1)}(x_1 x_2)}{\{G^{(1)}(x_1 x_1) G^{(1)}(x_2 x_2)\}^{1/2}}}{1 - |g^{(1)}(x_1 x_2)|^2} \right\}, \quad (14.64)$$

где $g^{(1)}$ — нормированная функция корреляции первого порядка, определенная равенством (7.5). В качестве простой проверки этого результата легко убедиться, что среднее значение функции (14.59) есть

$$\{G^{(1)}(x_1 x_1) G^{(2)}(x_2 x_2)\}^{1/2} g^{(1)}(x_1 x_2) = G^{(1)}(x_1, x_2) \quad (14.65)$$

и что среднее значение функции (14.60) есть действительно

$$G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2) + |G^{(1)}(x_1, x_2)|^2 = G^{(2)}(x_1 x_2, x_2 x_1). \quad (14.66)$$

Функция $W(\mathcal{E}_1 x_1, \mathcal{E}_2 x_2)$ играет в теории роль, аналогичную плотности вероятности для связанных событий, т. е. вероятности нахождения поля \mathcal{E}_1 в точке $x_1 = (r_1, t_1)$, а поля \mathcal{E}_2 в точке $x_2 = (r_2, t_2)$. Опираясь с такими связанными событиями, в теории

вероятности часто вычисляют вероятность полного связанного события, предполагая, что первая часть события уже имела место. Для такого случая функцию вероятности можно определить посредством соотношения

$$W(\mathcal{E}_1 x_1 | \mathcal{E}_2 x_2) = \frac{W(\mathcal{E}_1 x_1, \mathcal{E}_2 x_2)}{W(\mathcal{E}_1 x_1)}, \quad (14.67)$$

где $W(\mathcal{E}_1 x_1)$ определяется равенством (14.44). Функция $W(\mathcal{E}_1 x_1 | \mathcal{E}_2 x_2)$ есть аналог плотности вероятности того, что амплитуда поля в точке $x_2 = (\mathbf{r}_2, t_2)$ будет иметь значение в окрестности \mathcal{E}_2 , когда известно, что в точке $x_1 = (\mathbf{r}_1, t_1)$ она имеет значение \mathcal{E}_1 . Мы будем называть эту функцию плотностью условной квазивероятности; строго говоря, это единственная величина, измеримая как плотность вероятности в классическом пределе, или в пределе сильного поля.

Вычисляя отношения функций, данных равенствами (14.64) и (14.48), для плотности условной вероятности получаем

$$W(\mathcal{E}_1 x_1 | \mathcal{E}_2 x_2) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{G^{(1)}(x_2 x_2) \{1 - |g^{(1)}(x_1 x_2)|^2\}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{\left| \frac{\mathcal{E}_2}{\{G^{(1)}(x_2 x_2)\}^{1/2}} - \frac{\mathcal{E}_1}{\{G^{(1)}(x_1 x_1)\}^{1/2}} g^{(1)}(x_1 x_2) \right|^2}{1 - |g^{(1)}(x_1 x_2)|^2} \right\}. \quad (14.68)$$

Другими словами, поле \mathcal{E}_2 имеет гауссово распределение около среднего значения

$$\langle \mathcal{E}_2 \rangle = \mathcal{E}_1 \frac{G^{(1)}(x_1 x_2)}{G^{(1)}(x_1 x_1)} \quad (14.69)$$

с дисперсией, пропорциональной $G^{(2)}(x_2 x_2) \{1 - |g^{(1)}(x_1 x_2)|^2\}$, которая исчезает, когда точка x_2 близка к x_1 , и приближается к $G^{(2)}(x_2 x_2)$, когда точка x_2 удаляется от x_1 . Мы исследуем эти выражения подробнее при расчете функций корреляций, от которых они зависят.

1. Элементарная модель светового луча

Так как до сих пор наши результаты формулировались в весьма общей форме, то один-два наглядных примера будут очень полезны. Рассмотрим, в частности, простой пример стационарного светового луча, который можно представить в виде плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси y . Мы допустим, что луч имеет произвольную полосу частот, но определенную поляризацию \hat{e} . Функцию корреляции первого порядка для первого луча можно вычислить при помощи равенства (14.13) как сумму по функциям мод, имеющим вид плоских волн. В качестве индекса функций мод можно взять в этом случае k_y , т. е. y -компоненту волнового вектора (другие компоненты равны нулю). Поскольку значения k_y распределены плотно, когда размеры объема квантования L велики, суммирование по k_y эквивалентно одномерному интегрированию

$$\sum_{k_y} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk_y \dots$$

Подставляя функции мод, данные формулой (С2.9), в равенство (14.13) и заменяя сумму интегралом, находим

$$G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2) = \frac{\hbar c}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\langle n_k \rangle}{L^2} k e^{-i [k_y (y_1 - y_2) - \omega_k (t_1 - t_2)]} dk_y, \quad (15.1)$$

где, как и в равенстве (4.21), $G^{(1)}$ есть функция корреляции для компонент поля в направлении \hat{e} . Поскольку луч не содержит встречных волн (соответствующих отрицательным значениям k_y), мы можем заменить переменную интегрирования k_y на частотную переменную $\omega_k = ck_y$. Тогда, если пространственно-временной интервал, входящий в аргумент, обозначить через

$$s = t_1 - t_2 + \frac{1}{c} (y_1 - y_2), \quad (15.2)$$

то можно записать

$$G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2) = \frac{1}{4\pi c} \int_0^\infty \frac{\langle n_k \rangle \hbar \omega_k}{L^2} e^{i\omega_k s} d\omega_k. \quad (15.3)$$

Выражение $\langle n_k \rangle \hbar \omega_k$, фигурирующее в подинтегральном выражении в равенстве (15.3), есть средняя энергия возбуждения k -й моды. Примем, например, что наш луч имеет лоренцеву форму спектральной линии

$$\frac{\langle n_k \rangle \hbar \omega_k}{cL^2} = \frac{2\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} U. \quad (15.4)$$

Здесь ω_0 — центральная частота, γ — полуширина линии и постоянная U — мера интенсивности луча. Поскольку частота ω_0 обычно много больше, чем γ , то будет сделана лишь очень малая численная ошибка при интегрировании по спектру, если нижний предел $\omega = 0$ в равенстве (15.3) заменить на $\omega = -\infty$. В этом приближении мы находим ($\omega' = \omega - \omega_0$)

$$G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2) = \frac{\gamma}{2\pi} U e^{i\omega_0 s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega' s}}{\omega'^2 + \gamma^2} d\omega'. \quad (15.5)$$

Сингулярные точки функции

$$\frac{1}{\omega'^2 + \gamma^2} = \frac{1}{2i\gamma} \left\{ \frac{1}{\omega' - i\gamma} - \frac{1}{\omega' + i\gamma} \right\} \quad (15.6)$$

суть пара простых полюсов $\pm i\gamma$ в комплексной ω' -плоскости. Интеграл в формуле (15.5) можно записать как контурный по замкнутому пути в ω' -плоскости, причем выбор пути интегрирования зависит от знака переменной s . При $s > 0$ контур можно замкнуть с помощью бесконечной полуокружности в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega' > 0$; при $s < 0$ его можно замкнуть полуокружностью в нижней полуплоскости. Поскольку интегралы по обеим полуокружностям исчезают, то, применяя теорему вычетов, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i\gamma} \left(\frac{1}{\omega - i\gamma} - \frac{1}{\omega + i\gamma} \right) e^{i\omega s} d\omega = 2\pi i \begin{cases} \frac{1}{2i\gamma} e^{-\gamma s}, & s > 0, \\ \frac{1}{2i\gamma} e^{\gamma s}, & s < 0. \end{cases} \quad (15.7)$$

Согласно формуле (15.5), функция корреляции первого порядка равна

$$G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2) = \frac{1}{2} U e^{i\omega_0 s - \gamma |s|}. \quad (15.8)$$

Интенсивность поля находится в предположении $y_1 = y_2$ и $t_1 = t_2$. Для этих значений координат, соответствующих $s = 0$, имеем

$$G^{(1)}(y_1 t_1, y_1 t_1) = \frac{1}{2} U. \quad (15.9)$$

Это не что иное, как среднее значение квадрата величины комплексного поля $E^{(+)}$. Если вспомнить формулы элементарной электродинамики

намики, то легко видеть, что параметр U равен полной средней плотности электрической и магнитной энергий поля.

Функция корреляции, данная равенством (15.8), показывает, что рассматриваемый световой луч приближенно обладает когерентностью первого порядка, когда его полоса частот достаточно мала. Таким образом, когда

$$\frac{1}{\gamma} \gg |s| = \left| t_1 - t_2 - \frac{1}{c} (y_1 - y_2) \right|, \quad (15.10)$$

множитель $e^{-\gamma|s|}$ в равенстве (15.8) можно аппроксимировать единицей и оставшееся выражение для функции корреляции можно приближенно записать в факторизованной форме. Рассуждая иначе, мы также обнаружим когерентность первого порядка, если заметим, что нормированная корреляционная функция равна

$$g^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2) = \frac{G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2)}{\{G^{(1)}(y_1 t_1, y_1 t_1) G^{(1)}(y_2 t_2, y_2 t_2)\}^{1/2}} = e^{i\omega_0 s - \gamma|s|}. \quad (15.11)$$

Абсолютная величина этой функции действительно близка к единице, когда величина $\gamma|s|$ достаточно мала.

Проблеме создания источников света с узкой полосой в экспериментальном плане обращалось много внимания. В наилучшем из таких источников — обычном газовом разряде — величина γ имеет порядок 10^9 *гц*. У обычных лабораторных источников γ часто порядка 10^{11} *гц* и больше. Соответствующие интервалы когерентности составляют 30 и 0,3 *см*.

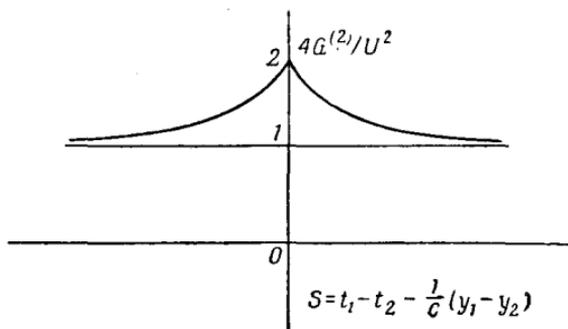
Хотя мы уже обсудили условия, когда монохроматичность предполагает когерентность, однако полезно напомнить, что она не является необходимым условием даже для когерентности первого порядка. Как мы заметили в связи с равенством (7.24), условие когерентности только тогда сливается с требованием монохроматичности, когда мы ограничиваем наше рассмотрение стационарными полями. Для стационарных лазерных лучей область когерентности первого порядка определяется спектральной шириной полосы так же, как и для обычных источников. В случае газовых лазеров без особых трудностей можно свести ширину полосы к значению порядка 10^3 *гц* и, по-видимому, возможно достичь частотной стабилизации в пределах около 10 *гц* в течение коротких интервалов. Интервалы когерентности при таких полосах равны 300 и 30 000 *км*.

Прежде чем вычислять функции корреляции второго и более высокого порядка для исследуемого светового луча, необходимо несколько глубже изучить его статистическую природу. Описание лучей, генерируемых естественными источниками, и лучей, генерируемых когерентными источниками, становится с этого момента качественно различным. Допустим, что наш источник является обычным хаотическим источником. Как видно из равенства (14.36),

корреляционные функции высокого порядка можно записать в этом случае как сумму произведений функций корреляции первого порядка. Другими словами, функция спектральной плотности нашего луча, состоящего из плоских волн, полностью определяет статистические свойства поля. В частности, скорость счета задержанных совпадений пар фотонов дается выражением

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(y_1 t_1, y_2 t_2, y_2 t_2, y_1 t_1) &= \\
 &= G^{(1)}(y_1 t_1, y_1 t_1) G^{(1)}(y_2 t_2, y_2 t_2) + |G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2)|^2 = \\
 &= G^{(1)}(y_1 t_1, y_1 t_1) G^{(1)}(y_2 t_2, y_2 t_2) [1 + |g^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2)|^2] = \\
 &= \left(\frac{1}{2} U\right)^2 (1 + e^{-2\gamma |s|}). \tag{15.12}
 \end{aligned}$$

Присутствие члена $e^{-2\gamma |s|}$ в этом выражении показывает, что луч никогда не может обладать когерентностью второго порядка. Далее,



Ф и г. 15

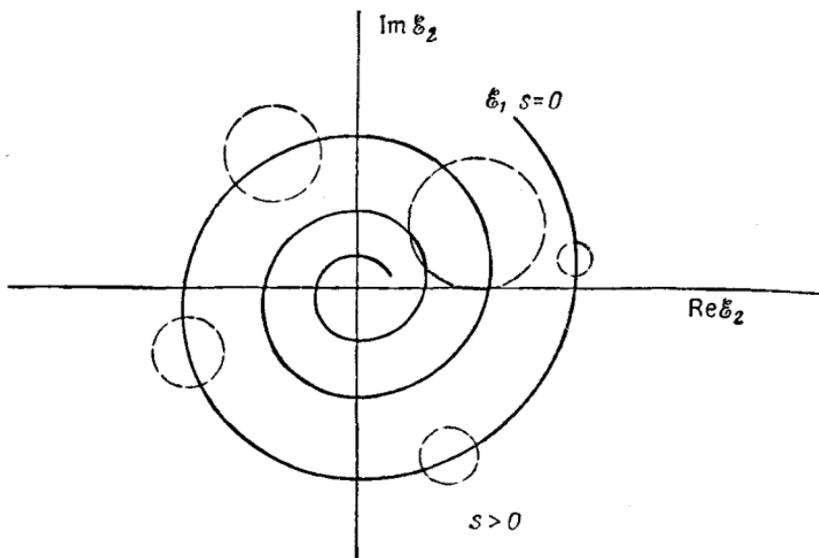
из графика зависимости частоты совпадений от s (фиг. 15) видно, что этот член создает «горб» на кривой корреляции Хэнбери Брауна — Твисса, т. е. отклонение кривой от частоты случайных или фоновых совпадений. Экспериментальная кривая, показанная на фиг. 10, будет соответствовать форме кривой, приведенной здесь, после учета разрешающих свойств системы счетчиков.

Мы уже заметили в последней лекции, что причина корреляционного эффекта лежит в случайной амплитудной модуляции светового луча. Таким образом, множитель $n!$, которым частота n -кратных совпадений (при нулевом времени задержки) отличается от частоты случайных совпадений, легко объясняется в терминах моментов гауссового распределения амплитуды $W(\mathcal{E}, x)$, данного равенством (14.48). Чтобы понять поведение корреляционного эффекта при ненулевом времени задержки и объяснить, например, почему эффект исчезает при $|s| \gg 1/2\gamma$, мы можем использовать распределения квазивероятности для двух значений амплитуды

поля, найденных в последней лекции. Подставляя значения, данные равенствами (15.8) и (15.11) для корреляционных функций, в выражение (14.65) для функции условной квазивероятности $W(\mathcal{E}_1 x_1 | \mathcal{E}_2 x_2)$, находим

$$W(\mathcal{E}_1 y_1 t_1 | \mathcal{E}_2 y_2 t_2) = \frac{1}{\frac{1}{2} \pi U (1 - e^{-2\gamma |s|})} \times \exp \left\{ -\frac{|\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 e^{i\omega_0 s - \gamma |s|}|^2}{\frac{1}{2} U (1 - e^{-2\gamma |s|})} \right\}. \quad (15.13)$$

Эту функцию следует интерпретировать как распределение величины амплитуды поля \mathcal{E}_2 в точке (y_2, t_2) при условии, что в точке (y_1, t_1) амплитуда принимает значение \mathcal{E}_1 . Когда параметр s



Ф и г. 16.

исчезает, средний радиус гауссова пика в этом выражении стремится к нулю и распределение сводится к функции $\delta^{(2)}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)$. Когда $|s|$ увеличивается от нуля, среднее значение \mathcal{E}_2 , выраженное в виде $\mathcal{E}_1 e^{i\omega_0 s - \gamma |s|}$, описывает в комплексной \mathcal{E}_2 -плоскости экспоненциальную спираль, стягивающуюся к нулю. Спираль, соответствующая $s < 0$, показана в несколько утрированном виде на фиг. 16. В то же самое время среднеквадратичный радиус гауссова пика в распределении асимптотически стремится к значению $1/2 U$. Для значений $|s|$, гораздо больших, чем $1/\gamma$, условное распределение (15.13) принимает форму пика с центром в начале коор-

динат и совпадает с безусловным распределением $W(\mathcal{E}_2, y_2 t_2)$, выраженным равенством (14.48). Время $1/\gamma$ есть время релаксации для распределений амплитуды поля. Величина \mathcal{E}_1 перестает влиять на распределение \mathcal{E}_2 при $|s| > 1/\gamma$. Не удивительно поэтому, что для интервалов, при которых $|s| \gg 1/\gamma$, частота двухфотонных совпадений

$$\begin{aligned} G^{(2)}(y_1 t_1 y_2 t_2, y_2 t_2 y_1 t_1) &= \int W(\mathcal{E}_1 y_1 t_1, \mathcal{E}_2 y_2 t_2) |\mathcal{E}_1|^2 |\mathcal{E}_2|^2 \times \\ &\times d^2 \mathcal{E}_1 d^2 \mathcal{E}_2 = \int W(\mathcal{E}_1 y_1 t_1) W(\mathcal{E}_1 y_1 t_1 | \mathcal{E}_2 y_2 t_2) \times \\ &\times |\mathcal{E}_1|^2 |\mathcal{E}_2|^2 d^2 \mathcal{E}_1 d^2 \mathcal{E}_2 \end{aligned} \quad (15.14)$$

сводится к факторизованной форме

$$G^{(2)}(y_1 t_1 y_2 t_2, y_2 t_2 y_1 t_1) = G^{(1)}(y_1 t_1, y_1 t_1) G^{(1)}(y_2 t_2, y_2 t_2). \quad (15.15)$$

Другими словами, тенденция к фотонным совпадениям исчезает, когда интервал $s = t_1 - t_2 - c^{-1}(y_1 - y_2)$ становится достаточно большим, так как амплитуды поля $\mathcal{E}(y_1 t_1)$ и $\mathcal{E}(y_2 t_2)$ перестают быть статистически коррелированными.

Чтобы показать, как полная временная зависимость частоты совпадений вытекает из интеграла (15.14), мы заметим, что, когда функция условного распределения дана равенством (15.13), среднее значение $|\mathcal{E}_2|^2$ при фиксированном \mathcal{E}_1 равно

$$\int W(\mathcal{E}_1 y_1 t_1 | \mathcal{E}_2 y_2 t_2) |\mathcal{E}_2|^2 d^2 \mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_1|^2 e^{-2\gamma|s|} + \frac{1}{2} U(1 - e^{-2\gamma|s|}). \quad (15.16)$$

Умножая это выражение на $|\mathcal{E}_1|^2$ и усредняя его, как и в равенстве (15.14), по гауссовой форме для $W(\mathcal{E}_1 y_1 t_1)$, находим

$$\begin{aligned} G^{(2)}(y_1 t_1, y_2 t_2, y_2 t_2, y_1 t_1) &= \left(\frac{1}{2} U\right)^2 (2e^{-2\gamma|s|} + 1 - e^{-2\gamma|s|}) = \\ &= \left(\frac{1}{2} U\right)^2 (1 + e^{-2\gamma|s|}), \end{aligned} \quad (15.17)$$

что подтверждает значение частоты совпадений, найденное ранее в виде равенства (15.12).

Все наши расчеты корреляционных функций были основаны на предположении, что энергетический спектр светового луча имеет лоренцеву форму. Соответствующие результаты легко вывести и для других спектров, для которых известно фурье-преобразование. Для любой другой простой и гладкой формы спектральной линии получим результаты, качественно подобные тем, к которым мы пришли для лоренцевой формы линии.

Так как эффект корреляции фотонов распространяется на времена задержки порядка обратной ширины полосы γ , то может показаться, что это время можно растянуть в миллион и более раз,

используя чрезвычайно монохроматический свет лазера вместо света естественных источников. Ошибочность такого вывода заключается в том, что статистические свойства лазерного луча совершенно отличны от свойств хаотически генерируемых лучей, которые обсуждались выше. Лазеры, работающие в монохроматическом режиме, генерируют лучи с очень малой амплитудной модуляцией, и для них, как мы видели в предыдущей лекции, вообще не должно быть эффекта корреляции фотонов.

2. Модель для идеальных лазерных полей

Для полей, генерируемых хаотическими источниками, достаточно знать средние числа заполнения $\langle n_k \rangle$, чтобы определить оператор плотности ρ и из него все статистические свойства поля. Однако если источник по природе не хаотический, то мы не можем предложить какой-либо универсальный путь нахождения оператора плотности для поля, которое он генерирует, без анализа некоторых деталей механизма излучения. Единственный надежный способ нахождения оператора плотности заключается, вообще говоря, в построении теоретической модели изучаемой системы и интегрировании соответствующего уравнения Шредингера, или, что эквивалентно, в решении уравнения движения для оператора плотности. Применительно к лазерному осциллятору эти задачи необычайно трудны и пока не решены до конца в рамках квантовой механики. Наибольшая трудность заключена в математической сложности, связанной с нелинейностью устройств. Нелинейность играет важную роль в стабилизации полей, генерируемых лазером. Следовательно, пока в этих вопросах не будет достигнут дальнейший прогресс, мы не сможем дать последовательное квантовомеханическое объяснение ширины частотной полосы флуктуаций излучения лазера.

Если исключить на время проблемы шумов и ширины полосы и ограничиться случаем идеально монохроматического лазера, то нетрудно найти представление для оператора плотности луча лазера. Поле излучения связано с электрическим дипольными векторами всех атомов активной среды лазера. Эти атомы имеют поляризацию, которая осциллирует вместе с полем и в то же время излучает в него энергию. Если активную среду рассматривать как целое, то она имеет осциллирующую плотность поляризации в макроскопическом масштабе, т. е. все соседние атомы дают одинаковый вклад в полную плотность поляризации. Так как производная плотности поляризации по времени есть распределение тока, то можно считать, что поле излучается осциллирующими токами. Когда лазер работает в режиме генерации, распределение тока известно: оно имеет классическую величину. Далее, если лазер, как мы предположили, идеально стабилизирован, то ток просто

стационарно осциллирует вполне предсказуемым образом. Другими словами, связанные токи в активной среде можно с хорошим приближением описать в c -числах.

Общая проблема нахождения полей, излучаемых заданным распределением тока, была решена в лекции 12. Наиболее важное свойство этого решения состоит в том, что излучение при известном распределении тока всегда приводит к полю в когерентном состоянии (в предположении, что в начале не было других полей). Если ток осциллирует с одной частотой, то будет возбуждаться только та мода поля, которая имеет в точности ту же частоту. Примем для простоты, что геометрия нашей системы благоприятствует возбуждению только одной моды поля. Тогда оператор плотности для этого поля можно записать в виде

$$\rho = |\alpha\rangle \langle \alpha|, \quad (15.18)$$

где $|\alpha\rangle$ есть когерентное состояние для возбужденной моды, а амплитуда α дается интегралом (12.20), взятым по распределению связанного тока.

Запишем комплексное собственное значение поля, которое соответствует амплитуде α , в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^{1/2} u(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \alpha. \quad (15.19)$$

Тогда, поскольку оператор плотности (15.18) соответствует чистому когерентному состоянию, корреляционные функции всех порядков факторизованы в форме равенства (8.5), т. е. луч обладает полной когерентностью. Отсюда следует, что частота задержанных n -кратных совпадений также факторизована

$$G^{(2)}(x_1 \dots x_n, x_n \dots x_1) = \prod_{j=1}^n G^{(1)}(x_j, x_j) \quad (15.20)$$

и никаких корреляций фотонных совпадений любого порядка в идеальном лазерном луче обнаружить нельзя.

Применение оператора плотности (15.18) для лазерного луча основано на предположении, что распределение осциллирующего тока в точности известно, т. е. что мы знаем и фазу его колебания, и амплитуду. Практически же наше знание осциллирующих величин на предельно высоких частотах редко включает какую-либо информацию об их абсолютной фазе. (Это объясняется скорее отсутствием подходящих часов, которые можно было бы использовать как опорный стандарт, чем какими-либо принципиальными трудностями определения или измерения фазы таких в сущности классических величин, как связанные токи в лазере.) Когда мы ничего не знаем о фазе колебаний тока, оператор плотности можно записать в форме равенства (12.30). Ясно, что эта форма есть просто

выражение (15.8) для оператора плотности, усредненное по фазе комплексной амплитуды α , т. е.

$$\begin{aligned} \rho &= \int_0^{2\pi} \|\alpha|e^{i\theta}\rangle\langle\alpha|e^{i\theta}| \frac{d\theta}{2\pi} = \\ &= \int \frac{1}{2\pi|\alpha|} \delta(|\beta| - |\alpha|) |\beta\rangle\langle\beta| d^2\beta. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Эти выражения оператора плотности зависят только от абсолютного значения α и, следовательно, представляют стационарные поля. Они соответствуют смешанным, а не чистым состояниям поля, но, как мы заметили в предыдущей лекции, смешанные состояния, соответствующие усреднению по всем фазовым переменным, не изменяют когерентных свойств поля. Легко убедиться, что функции корреляции, которые выведены из оператора плотности (15.21), идентичны тем, которые выведены из выражения (15.18).

Точное построение оператора плотности для идеального лазерного луча показывает, что фотонная корреляция в таком луче не должна обнаруживаться. Причина отсутствия такой корреляции очевидна из анализа, проведенного в предыдущей лекции. Функция квазивероятности $W(\mathcal{E}, x)$, которая соответствует стационарному оператору плотности (15.21), непосредственно выводится из равенств (14.44) и (15.19):

$$W(\mathcal{E}, x) = \frac{1}{2\pi \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} |u(r)\alpha|} \delta(|\mathcal{E}| - \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} |u(r)\alpha|). \quad (15.22)$$

Эта функция исчезает везде в комплексной \mathcal{E} -плоскости, исключая окружность, где δ -функция имеет сингулярность. Она описывает поле, которое совершенно не подвержено амплитудной модуляции, и это основная причина отсутствия корреляции фотонов в идеальном лазерном луче.

Используя принцип соответствия, можно более прямо показать возникновение этого свойства когерентно излучаемых лучей. Мы упростим нашу картину лазера, рассматривая его как распределение осциллирующего заряда, который излучает наподобие антенны. Заряд, по нашему предположению, имеет только один тип колебания, амплитуда которого такая же, как у гармонического осциллятора. Поскольку электрическая поляризация этого осциллятора является макроскопической, то мы должны рассматривать координату осциллятора как существенно классическую величину, т. е. считать, что осциллятор находится в сильно возбужденном квантовом состоянии, которое имеет чрезвычайно большой квантовый номер.

Когда осциллятор отделен от каких-либо источников возбуждения и излучает спонтанно, амплитуда его колебаний уменьшается весьма медленно по сравнению с периодом колебаний. Поскольку осциллятор ведет себя по существу классически, ток, создаваемый его движущимися зарядами, вполне предсказуем. Как мы уже отмечали, излучение такого тока приводит поле в когерентное состояние. С другой стороны, с квантовомеханической точки зрения мы считаем, что осциллятор совершает переходы вниз по энергетической шкале, шаг за шагом проходя через состояния с квантовыми числами $n, n - 1, n - 2, \dots$, где $n \gg 1$. Продолжительность времени, которое осциллятор проводит в каждом из этих состояний, распределена по экспоненциальному закону, и поскольку n велико, средние времена жизни состояний не изменяются значительно от данного состояния к следующему. Каждый переход сопровождается испусканием фотона. Не удивительно поэтому, что когда фотоны детектируются счетчиком, интервалы времени между их последовательными регистрациями распределены по экспоненциальному закону. Экспоненциальное распределение временных интервалов указывает на отсутствие тенденции к парной корреляции или корреляции более высокого порядка. Это характерное распределение для интервалов между полностью некоррелирующими событиями, которые происходят с фиксированной средней частотой. Ясно, что при использовании двух или более счетчиков не будет наблюдаться зависящей от времени корреляции их выходных сигналов.

3. Модель лазерного поля с конечной шириной полосы

В отличие от идеального луча, который мы только что обсудили, реальный лазерный луч никогда не будет абсолютно монохроматическим. Его частота всегда изменяется более или менее случайным образом в узкой области, что вызывается возмущениями, имеющими место как внутри, так и вне лазера. Мы будем строить простую модель лазерного поля с конечной шириной полосы частот, предполагая, что механизм, возмущающий лазер, существенно стохастичен по природе.

Примем для простоты, что лазер возбужден в единственной моде электромагнитного поля с частотой ω_0 . Тогда гамильтониан поля для этой моды равен

$$H_0 = \hbar\omega_0 a^\dagger a,$$

а зависящие от времени операторы $a(t)$ и $a^\dagger(t)$ задаются в отсутствие возмущений через не зависящие от времени операторы

a и a^\dagger выражениями

$$\begin{aligned} a(t) &= a e^{-i\omega_0 t}, \\ a^\dagger(t) &= a^\dagger e^{i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (15.23)$$

Полностью гармоническое поведение осциллирующего поля будет нарушаться различными взаимодействиями поля с другими системами. Мы будем предполагать, что влияние этих взаимодействий можно учесть добавлением к гамильтониану поля члена, зависящего от одной или более случайных функций времени $f(t)$. Обозначая этот стохастический добавок к гамильтониану через $H_f(t)$, для полного гамильтониана поля получаем

$$H = H_0 + H_f(t). \quad (15.24)$$

Чтобы влияние стохастического члена проявилось наиболее ясно, мы будем решать уравнение Шредингера в представлении взаимодействия. Гамильтониан взаимодействия выразится тогда следующим образом:

$$H'_f(t) = e^{(i/\hbar) H_0 t} H_f(t) e^{-(i/\hbar) H_0 t}. \quad (15.25)$$

Определим унитарный оператор $U_f(t, t')$ как решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_f(t, t') = H'_f(t) U_f(t, t'), \quad (15.26)$$

которое подчиняется начальному условию

$$U_f(t', t') = 1. \quad (15.27)$$

Тогда, если обозначить вектор состояния поля в момент времени t символом $|t\rangle$, то он будет изменяться согласно преобразованию

$$|t\rangle = U_f(t, t') |t'\rangle.$$

Уравнение движения для оператора плотности в представлении взаимодействия $\rho_i(t)$ имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_i(t) = [H'_f(t), \rho_i(t)]. \quad (15.28)$$

Его решение, описывающее изменение оператора плотности во времени, можно записать с помощью унитарного оператора U_f :

$$\rho_i(t) = U_f(t, t') \rho_i(t') U_f^{-1}(t, t'). \quad (15.29)$$

Все выражения для функций корреляции поля, которые мы обсуждали выше, были построены согласно гейзенберговской картине квантовой механики, в которой векторы состояния и оператор плотности не зависят от времени. Когда же они изменяются со временем, как это имеет место в представлении взаимодействия,

необходимые величины должны быть построены несколько иначе. Требуемые выражения можно найти, если начать с формул для средних величин, взятых в гейзенберговском представлении, и применить затем унитарное преобразование к представлению взаимодействия.

Рассмотрим два произвольных оператора, зависящих от времени $L(t)$ и $M(t)$ в гейзенберговском представлении. Примером статистических средних, которые используются при расчете функций корреляции, может служить усредненное произведение $\langle L(t) M(t') \rangle_f$. Индекс у среднего означает, что оно подсчитано для некоторой частной реализации случайной функции $f(t)$, от которой зависит стохастический гамильтониан. Среднее, вычисляемое в гейзенберговском представлении, есть

$$\langle L(t) M(t') \rangle_f = \text{Sp} \{ L(t) M(t') \varrho \}, \quad (15.30)$$

где ϱ есть не зависящий от времени гейзенберговский оператор плотности.

Один из способов определения гейзенберговского представления (унитарно эквивалентного всем другим способам) заключается в том, что фиксированный гейзенберговский вектор состояния для системы предполагается идентичным вектору состояния в представлении взаимодействия в некоторой момент времени t_0 . Тогда соотношение

$$|t\rangle = U_f(t, t_0) |t_0\rangle \quad (15.31)$$

выражает унитарное преобразование от гейзенберговских состояний $|t_0\rangle$ к состояниям $|t\rangle$ в представлении взаимодействия. Соответствующие преобразования операторов L , M и ϱ принимают вид

$$\begin{aligned} L_i(t) &= U_f(t, t_0) L(t) U_f^{-1}(t, t_0), \\ M_i(t) &= U_f(t, t_0) M(t) U_f^{-1}(t, t_0), \\ \varrho_i(t) &= U_f(t, t_0) \varrho U_f^{-1}(t, t_0), \end{aligned} \quad (15.32)$$

где индексы i обозначают форму операторов в представлении взаимодействия. Используя соотношения, обратные соотношениям (15.32), для того чтобы выразить операторы в равенстве (15.30), мы находим

$$\begin{aligned} \langle L(t), M(t') \rangle_f &= \text{Sp} \{ U_f^{-1}(t, t_0) L_i(t) U_f(t, t_0) U_f^{-1}(t', t_0) \times \\ &\quad \times M_i(t') \varrho_i(t') U_f(t', t_0) \}. \end{aligned} \quad (15.33)$$

Поскольку оператор временного смещения U_f подчиняется мультипликативному закону

$$U_f(t, t') U_f(t', t_0) = U_f(t, t_0), \quad (15.34)$$

то выражения для средних можно записать в форме

$$\langle L(t) M(t') \rangle_f = \text{Sp} \{ L_i(t) U_f(t, t') M_i(t') \varrho_i(t') U_f^{-1}(t, t') \}. \quad (15.35)$$

Оператор U_f в этом выражении учитывает действие возмущения поля в течение интервала между t' и t . Возмущение предполагается случайным, и среднее (15.35) оценивается для некоторых частных вариантов его поведения, т. е. для определенной случайной функции $f(t)$. До того, как среднее можно было сравнить с результатами экспериментов, оно должно быть еще раз усреднено по подходящему ансамблю случайных функций $f(t)$. Последний процесс усреднения упрощается при использовании представления взаимодействия.

Так как произведение LM , которое нас интересует, имеет нормально упорядоченную форму, оно наиболее удобно для использования P -представления оператора плотности. Вследствие этого мы будем рассматривать только тот класс стохастических гамильтонианов, которые сохраняют возможность выражения оператора плотности с помощью P -представления. Другими словами, мы принимаем, что оператор $\rho_i(t)$ можно записать в форме

$$\rho_i(t) = \int P(\alpha, t) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (15.36)$$

для всех моментов времени.

Если оператор плотности в момент t' соответствует чистому когерентному состоянию $|\alpha\rangle$, т. е.

$$\rho_i(t') = |\alpha\rangle \langle \alpha|, \quad (15.37)$$

согласно (15.29), в любой момент t он будет выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_i(t) &= U_f(t, t') \rho_i(t') U_f^{-1}(t, t') = \\ &= U_f(t, t') |\alpha\rangle \langle \alpha| U_f^{-1}(t, t'). \end{aligned} \quad (15.38)$$

Согласно соотношению (15.36), этот оператор также будет иметь P -представление, для которого можно ввести специальное обозначение

$$\rho_i(t) = \int P(\alpha t' | \beta t) |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta. \quad (15.39)$$

Функция $P(\alpha t' | \beta t)$ есть, очевидно, функция условной квазивероятности. Она соответствует в классическом пределе распределению вероятности для комплексной амплитуды β в момент t , когда известно, что в момент t' она имела (или будет иметь) значение α .

Чтобы проиллюстрировать использование этих соотношений при вычислении статистических средних, рассмотрим среднее от произведения $a^\dagger(t) a(t')$, которое фигурирует в выражении для функции корреляции первого порядка. Если подставить $L(t) = a^\dagger(t)$ и $M(t) = a(t)$ в (15.35), то, учитывая равенство (15.23),

находим

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t) a(t') \rangle_f &= \\ &= \text{Sp} \{ a^\dagger e^{i\omega_0 t} U_f(t, t') a e^{-i\omega_0 t'} Q_i(t') U_f^{-1}(t, t') \}. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Используем далее равенство (15.36) для оператора плотности и тот факт, что $|\alpha\rangle$ есть собственное состояние оператора a , тогда

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t) a(t') \rangle_f &= \\ &= \text{Sp} \left\{ U_f(t, t') \int P(a t') \alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha U_f^{-1}(t, t') a^\dagger \right\} e^{i\omega_0(t-t')}. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Теперь с помощью (15.39) можно выполнить унитарное преобразование внутри скобок, что позволяет выразить оператор плотности (15.38),

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t) a(t') \rangle_f &= \\ &= \text{Sp} \left\{ \int P(a t') \alpha P(a t' | \beta t) |\beta\rangle \langle \beta| \beta^* d^2\alpha d^2\beta \right\} \times \\ &\times e^{i\omega_0(t-t')} = \int P(a t') P(a t' | \beta t) \alpha \beta^* d^2\alpha d^2\beta e^{i\omega_0(t-t')}. \end{aligned} \quad (15.42)$$

Последнее выражение для среднего весьма сходно с теми формулами, которые встречаются в классической теории непрерывных процессов Маркова. Напомним, что средние, которые мы вычисляли, соответствуют некоторому частному поведению стохастического гамильтониана. Чтобы получить величины, сопоставимые с экспериментом, необходимо, как уже говорилось выше, провести усреднение по подходящему ансамблю случайных функций $f(t)$. Мы можем записать это среднее как

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t) a(t') \rangle &= \\ &= \int \langle P(a t') P(a t' | \beta t) \rangle_{\text{ср. по } f} \alpha \beta^* d^2\alpha d^2\beta e^{i\omega_0(t-t')}. \end{aligned} \quad (15.43)$$

Выведенные соотношения дают весьма общую схему обсуждения влияния случайных возмущений на осцилляции поля. Мы используем этот формализм для создания простой модели лазерного луча с конечной шириной полосы.

Простейший способ получить осциллирующие моды поля с конечной шириной полосы частот состоит, по-видимому, в предположении, что их частота есть случайная функция времени. Это можно проделать, записывая полный гамильтониан поля (15.24) в виде

$$H = \hbar [\omega_0 + f(t)] a^\dagger a, \quad (15.44)$$

где $f(t)$ есть такая случайная функция, для которой среднее по ансамблю $\langle f(t) \rangle$ равно нулю.

Так как стохастический гамильтониан, очевидно, равен

$$H_f(t) = \hbar f(t) a^\dagger a \quad (15.45)$$

и коммутирует с $H_0 = \hbar \omega a^\dagger a$, то гамильтониан взаимодействия, согласно равенству (15.25), есть просто H_f .

Уравнение Шредингера (15.26) принимает тогда вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_f(t, t') = f(t) a^\dagger a U_f(t, t'). \quad (15.46)$$

Его решения есть просто экспоненциальная функция вида

$$U_f(t, t') = e^{-ia^\dagger a \varphi(t, t')}, \quad (15.47)$$

где φ определено выражением

$$\varphi(tt') = \int_{t'}^t f(t'') dt''. \quad (15.48)$$

Чтобы выявить влияние преобразования U_f на состояния поля, предположим, что поле находится в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ в момент времени t' . Тогда в момент времени t это состояние будет

$$\begin{aligned} |t\rangle &= U_f(t, t') |\alpha\rangle = e^{-ia^\dagger a \varphi(tt')} |\alpha\rangle = \\ &= e^{-1/2|\alpha|^2} e^{-ia^\dagger a \varphi(tt')} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \right\} |n\rangle = \\ &= e^{-1/2|\alpha|^2} \sum \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} e^{-in\varphi(tt')} |n\rangle = |\alpha e^{-i\varphi(tt')}\rangle. \end{aligned} \quad (15.49)$$

Частный стохастический гамильтониан, который мы приняли, как раз преобразует одно когерентное состояние в другое когерентное состояние, для которого амплитудный параметр отличается от исходного фазовым множителем. Ясно, что в этой модели совершенно отсутствует амплитудная модуляция.

Используя выражение (15.46) для оператора плотности, представленного равенствами (15.38) и (15.39), находим

$$|\alpha e^{-i\varphi(tt')}\rangle \langle \alpha e^{-i\varphi(tt')}| = \int P(\alpha t' | \beta t) |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta, \quad (15.50)$$

откуда видно, что плотность условной квазивероятности можно взять просто в виде δ -функции

$$P(\alpha t' | \beta t) = \delta^{(2)}(\beta - \alpha e^{-i\varphi(tt')}). \quad (15.51)$$

Если ввести фазы амплитуд α и β

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}, \quad \beta = |\beta| e^{i\theta}, \quad (15.52)$$

то двумерную δ -функцию (15.51) можно записать как произведение одномерных, т. е.

$$P(at' | \beta t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(|\beta| - |\alpha|) \delta(\theta - \theta_0 + \varphi(tt')). \quad (15.53)$$

Эта функция описывает эволюцию состояния поля из когерентного состояния $|\alpha\rangle$ в момент t' , когда мы задаемся любой частной случайной функцией $f(t)$. Чтобы найти состояние в момент t , которое типично для набора возможных случайных функций, необходимо усреднить равенство (15.53) по ансамблю функций $f(t)$. Мы можем записать это среднее как

$$P_{\text{ср}}(at' | \beta t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(|\beta| - |\alpha|) \langle \delta(\theta - \theta_0 + \varphi(tt')) \rangle_{\text{ср. по } f}. \quad (15.54)$$

Если вспомнить теперь, что функция $\delta(\theta)$ имеет разложение в ряд Фурье

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta}, \quad (15.55)$$

то усредняемую δ -функцию в равенстве (15.54) можно записать следующим образом:

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta - \theta_0)} \langle e^{im \int_{t'}^t f(t'') dt''} \rangle_{\text{ср. по } f}. \quad (15.56)$$

Остается выяснить еще некоторые свойства случайных функций $f(t)$, прежде чем можно будет усреднить по ним экспоненциальные функции в равенстве (15.56).

Разнообразные физические процессы, которые могут возмущать частоту нашего осциллятора поля, требуют, чтобы мы обсудили различные виды случайных функций $f(t)$. Здесь мы рассмотрим, однако, только один из простейших типов случайных функций. Примем, что $f(t)$ есть стационарный гауссов стохастический процесс, т. е. что в любое время t ансамбль значений $f(t)$ имеет фиксированное гауссово распределение. Тогда нетрудно показать, что усредненные экспоненты в равенстве (15.56) будут даваться выражением

$$\begin{aligned} \langle \exp \left\{ im \int_{t'}^t f(t'') dt'' \right\} \rangle_{\text{ср. по } f} &= \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} m^2 \int_{t'}^t \int_{t'}^t \langle f(t'') f(t''') \rangle dt'' dt''' \right\}, \quad (15.57) \end{aligned}$$

где среднее по ансамблю $\langle f(t'') f(t''') \rangle$ есть просто автокорреляционная функция случайного процесса $f(t)$.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда функция $f(t)$ флуктуирует так быстро, что ее функцию автокорреляции можно взять в виде

$$\langle f(t'') f(t''') \rangle = 2\zeta \delta(t'' - t'''), \quad (15.58)$$

где ζ есть положительная константа. Тогда усредненные экспоненты в равенстве (15.57) сведутся к

$$\left\langle \exp \left\{ im \int_{t'}^t f(t'') dt'' \right\} \right\rangle_{\text{ср. по } f} = \exp \{ -m^2 \zeta |t - t'| \}, \quad (15.59)$$

а усредненная δ -функция в равенстве (15.56) становится равной

$$\langle \delta(\theta - \theta_0 + \varphi(tt')) \rangle_{\text{ср. по } f} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta - \theta_0) - m^2 \zeta |t - t'|}. \quad (15.60)$$

Интересно заметить, что эта функция есть в сущности функция Грина дифференциального уравнения для диффузии тепла в кольцевой области, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \zeta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \langle \delta(\theta - \theta_0 + \varphi) \rangle_{\text{ср}} = 0$$

для $t > t'$ и сводится к $\delta(\theta - \theta_0)$ для $t = t'$. Становится ясно, что функция условной квазивероятности (15.54), которую можно записать как

$$P_{\text{ср}}(\alpha t' | \beta t) = \frac{1}{2\pi |\alpha|} \delta(|\beta| - |\alpha|) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta - \theta_0) - m^2 \zeta (t - t')}, \quad (15.61)$$

описывает такую случайную фазовую модуляцию, в которой фазовая переменная $\theta = \arg \beta$ «диффундирует» от ее первоначального значения θ_0 .

Величина, обратная диффузионной константе ζ , определяет время релаксации для фазовой переменной. Для интервала времени $t - t'$, значительно превышающего $1/\zeta$, распределение (15.61) сводится к постоянному распределению с круговой симметрией; фаза θ становится полностью случайной.

Вернемся теперь к вычислению функции корреляции первого порядка для поля. Согласно равенству (15.43), мы можем построить эту функцию, как только вычислим среднее

$$\langle P(\alpha, t') P(\alpha t' | \beta t) \rangle_{\text{ср. по } f}. \quad (15.62)$$

Предположим, что мы не знаем исходной фазы осцилляций поля. Поскольку случайные возмущения поля только сдвигают фазу, то фаза остается однородно распределенной все время, т. е. мы

никогда не знаем о фазе больше, чем вначале. Следовательно, оператор плотности, который представляет поле, стационарен. Функция $P(\alpha, t)$ в равенстве (15.36) зависит только от абсолютного значения α и не зависит от t , так же как и от поведения функции $f(t)$. В этом наиболее часто встречающемся случае функцию $P(\alpha, t')$ можно записать как $P(|\alpha|)$ и вынести из скобок, означающих усреднение, в выражении (15.62):

$$P(|\alpha|) P_{\text{cp}}(\alpha t' | \beta t); \quad (15.63)$$

здесь второй сомножитель дается равенством (15.61).

Из равенства (15.61) ясно, что

$$\begin{aligned} \int P_{\text{cp}}(\alpha t' | \beta t) \beta^* d^2\beta &= \\ &= \frac{1}{2\pi|\alpha|} \int_0^\infty \delta(|\beta| - |\alpha|) |\beta|^2 d|\beta| \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \times \\ &\times \sum e^{im(\theta - \theta_0) - m^2 \zeta |t - t'|} d\theta = \\ &= |\alpha| e^{-i\theta_0 - \zeta |t - t'|} = \alpha^* e^{-\zeta |t - t'|}. \end{aligned} \quad (15.64)$$

Подставляя выражение (15.63) в корреляционную функцию (15.43) и используя только что вычисленный интеграл, находим

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t) a(t') \rangle &= \\ &= \int P(|\alpha|) |\alpha|^2 d^2\alpha e^{i\omega_0(t-t') - \zeta |t-t'|} = \\ &= \langle |\alpha|^2 \rangle e^{i\omega_0(t-t') - \zeta |t-t'|}, \end{aligned} \quad (15.65)$$

где символом $\langle |\alpha|^2 \rangle$ обозначена среднеквадратичная амплитуда возбуждения, или, что эквивалентно, среднее число фотонов в моде.

Если принять, что функция моды $u(\mathbf{r})$ для поля не меняется в результате возмущения, то полную пространственно-временную зависимость корреляционной функции первого порядка можно найти умножением выражения (15.65) на произведение вида $u^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}')$. Согласно равенству (С10.17), которое является квантово-механической формой теоремы Винера — Хинчина, энергетический спектр поля пропорционален фурье-преобразованию корреляционной функции (15.65). Выполняя это преобразование, находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \langle a^\dagger(0) a(t') \rangle e^{i\omega t'} dt' &= \\ &= \langle |\alpha|^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t' - \zeta |t'|} dt' = \\ &= \langle |\alpha|^2 \rangle \frac{2\zeta}{(\omega - \omega_0)^2 + \zeta^2}. \end{aligned} \quad (15.66)$$

Таким образом, наша модель диффузии фазы имеет энергетический спектр лоренцевой формы, и диффузионная константа ζ есть его полуширина.

С точки зрения спектроскопии описываемое поле нельзя отличить от хаотически генерируемого поля с лоренцевой формой линии, которое мы обсудили выше, если окажется, что $\zeta = \gamma$. Фундаментальное различие природы этих двух полей наилучшим образом выражается посредством их корреляционных функций высших порядков. Эти функции можно вычислить для модели «диффузии фазы» с помощью простого распространения тех методов, которые мы уже развили, но мы не будем здесь делать этого. Один довольно очевидный результат заслуживает, однако, упоминания. Поскольку случайная фазовая модуляция, которую мы описали, не ведет к амплитудной модуляции, она не вызывает какой-либо корреляции фотонных совпадений.

Имеется ряд способов, которыми представленную нами в качестве иллюстрации модель диффузии фазы можно обобщить и приблизить к реальности. Мы можем, например, легко отказаться от предположения, что стохастический процесс $f(t)$ имеет исчезающе малое время релаксации. Далее можно рассмотреть отличные от гауссова типы стохастических процессов. Наконец, мы можем рассмотреть другие виды стохастического гамильтониана, отличные от (15.45), и попытаться рассчитать этим способом некоторые эффекты случайной амплитудной и фазовой модуляции.

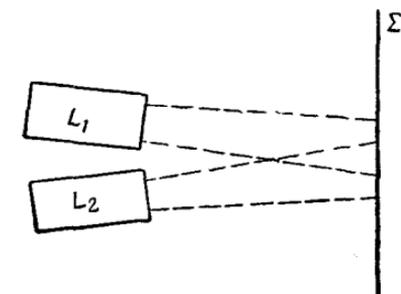
Лекция 16

Интерференция независимых световых лучей

Одним из вопросов, связанных с когерентностью, является вопрос об интерференции между независимыми лучами света, который вызвал в недавнем прошлом оживленную дискуссию и даже некоторую путаницу. То, что такие интерференционные явления могут существовать, не является большой неожиданностью; они

наблюдались уже давно с радиоволнами фиксированной частоты, и если до недавних пор ¹⁾ не было сообщений о наблюдении таких явлений в оптическом диапазоне, то задержка объясняется исключительно экспериментальными трудностями.

Проблема, которая возникла при обсуждении этих интерференционных явлений, касалась точного способа их объяснения и описания. Трудно сказать, как много в тех заблуждениях, которые возникали в процессе дискуссии,



Ф и г. 17

систи, чисто семантического по природе, и как много глубоко принципиального. Например, в интерференции независимых лучей нет ничего собственно квантовомеханического. Однако тот факт, что совершенно различные наборы квантов должны каким-то образом интерферировать друг с другом, внес значительный вклад в путаницу. Мы не будем воспроизводить здесь историю этого вопроса, а лишь обсудим наиболее простые примеры интерференционных явлений.

Простейший тип экспериментального устройства показан на фиг. 17. Два независимых лазерных источника (или, быть может, другие типы источников) L_1 и L_2 проектируют свои лучи в направлениях, близких к параллельности, но слегка сходящихся. Лучи попадают на перекрывающиеся площадки экрана Σ . Если интенсивности света достаточно велики или же возможна регистрация за продолжительный период, то мы можем использовать в качестве

¹⁾ Magyar G., Mandel L., Nature, 198, 255 (1963).

детектора фотопленку в плоскости Σ . Если условия не благоприятствуют фотографии, то можно использовать мозаику фотонных счетчиков в плоскости Σ . В любом случае в области перекрытия лучей будут наблюдаться интерференционные полосы.

Допустим, что поле, которое возбуждает каждый источник света, можно описать в P -представлении с помощью функций $P_1(\{\alpha_{1k}\})$ и $P_2(\{\alpha_{2k}\})$. Единая P -функция, которая описывает суперпозицию полей, дается тогда, согласно равенству (С7.18) или (С9.15), выражением

$$P(\{\alpha_k\}) = \int P_1(\{\alpha_{1k}\}) P_2(\{\alpha_{2k}\}) \times \\ \times \prod_k \delta^{(2)}(\alpha_k - \alpha_{1k} - \alpha_{2k}) d^2\alpha_{1k} d^2\alpha_{2k}. \quad (16.1)$$

Средняя интенсивность суммы полей в любой пространственно-временной точке x дается функцией корреляции первого порядка:

$$G^{(1)}(x, x) = \int P(\{\alpha_k\}) |\mathcal{E}(x, \{\alpha_k\})|^2 \prod_k d^2\alpha_k = \\ = \int P_1(\{\alpha_{1k}\}) P_2(\{\alpha_{2k}\}) |\mathcal{E}(x, \{\alpha_{1k} + \alpha_{2k}\})|^2 \prod_k d^2\alpha_{1k} d^2\alpha_{2k}. \quad (16.2)$$

При получении второго из этих выражений мы использовали равенство (16.1) и провели интегрирование по переменным $\{\alpha_k\}$. Заметим теперь, что собственное значение поля $\mathcal{E}(x, \{\alpha_k\})$ линейно зависит от амплитуд α_k , так что

$$\mathcal{E}(x, \{\alpha_{1k} + \alpha_{2k}\}) = \mathcal{E}(x, \{\alpha_{1k}\}) + \mathcal{E}(x, \{\alpha_{2k}\}), \quad (16.3)$$

т. е. справедливо соотношение, соответствующее классическому принципу суперпозиции. Если подставить это соотношение в равенство (16.2) и обозначить через $\{G^{(1)}(x, x)\}_j$, $j = 1, 2$, интенсивность, создаваемую каждым источником в отсутствие другого, то полная интенсивность запишется следующим образом:

$$G^{(1)}(x, x) = \{G^{(1)}(x, x)\}_1 + \{G^{(1)}(x, x)\}_2 + \\ + 2 \operatorname{Re} \left\{ \int P_1(\{\alpha_{1k}\}) \mathcal{E}^*(x, \{\alpha_{1k}\}) \prod_k d^2\alpha_{1k} \times \right. \\ \left. \times \int P_2(\{\alpha_{2k}\}) \mathcal{E}(x, \{\alpha_{2k}\}) \prod_k d^2\alpha_{2k} \right\}. \quad (16.4)$$

Третий член в этой сумме есть, очевидно, интерференционный член. Мы должны теперь выяснить, когда он дает вклад в наблюдаемые интенсивности и когда не дает.

В разделе 7 вышеприведенной статьи автора отмечалось, что любой световой луч, описанный в P -представлении, можно рас-

сма­тривать как суперпозицию двух полей, одно из которых соот­вет­ствует чисто когерентному состоянию, а другое имеет нефазиро­ванную форму, т. е. его ожидаемое значение исчезает для комплекс­ной напряженности поля. Когда каждое из этих полей генерируется обоими исследуемыми источниками, нефазированная компонента поля не будет давать вклада в интерференционный член в равенстве (16.4). Интерференционный член будет полностью исчезать всегда, за исключением случая, когда поле, генерируемое каждым из двух источников, содержит не равную нулю когерентную компоненту.

Наиболее элементарный пример, в котором интерференционный член отличен от нуля, состоит в том, что два действующих неза­висимо источника приводят поле в когерентное состояние, описы­ваемое выражениями

$$P_1(\{\alpha_{1k}\}) = \prod_k \delta^{(2)}(\alpha_{1k} - \beta_{1k}), \quad (16.5)$$

$$P_2(\{\alpha_{2k}\}) = \prod_k \delta^{(2)}(\alpha_{2k} - \beta_{2k}).$$

Тогда интерференционный член в равенстве (16.4) сводится к

$$2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{E}^*(x, \{\beta_{1k}\}) \mathcal{E}(x, \{\beta_{2k}\}) \}. \quad (16.6)$$

Анализ этого члена можно упростить, предполагая, что два источ­ника суть идеальные лазеры подобной конструкции, каждый из которых возбуждает только одну моду плоских волн. Две плоские волны будут тогда не идентичны, поскольку их векторы распро­странения не вполне параллельны, но будут иметь одну и ту же частоту. При этих условиях интерференционный член (16.6) описы­вает полосы стационарной интенсивности, которые видны на экране в области перекрытия двух лучей. Полосы перпендикулярны плоско­сти, которая содержит два вектора распространения, и могут быть сделаны узкими или широкими увеличением или уменьшением угла между лучами.

Предположим, что мода, возбуждаемая источником 1, имеет амплитуду β_1 , а возбуждаемая источником 2 — амплитуду β_2 . Тогда поскольку функция плоской волны представляет собой комплекс­ную величину, то положение системы полос на экране Σ (т. е. их смещение в направлении, перпендикулярном полосам) будет зави­сеть от разности фаз комплексных амплитуд β_1 и β_2 . Если геометрия эксперимента достаточно хорошо определена, то наблюдение системы полос дает нам меру разности фаз.

Проведение экспериментов описанного выше типа с двумя лазер­ными лучами не встречает принципиальных трудностей. Однако на практике мы никогда не знаем достаточно полно амплитуды воз­буждения, которые мы предполагали известными, составляя,

например, равенства (16.5) и (16.6). Как мы уже неоднократно отмечали выше, нам почти всегда неизвестны полные фазовые параметры. Поэтому мы не знаем фазы осцилляций в наших лазерах, и единственный способ, которым мы можем представить оператор плотности для возбужденных мод, есть использование функций

$$P_j(\alpha_j) = \frac{1}{2\pi |\beta_j|} \delta(|\alpha_j| - |\beta_j|), \quad j = 1, 2. \quad (16.7)$$

Эти функции представляют стационарные операторы плотности, которые получены [как и в равенстве (15.21)] усреднением когерентных состояний по фазе. Но P -функции (16.7) относятся к нефазированной разновидности; они соответствуют комплексным полям, усреднение которых дает нуль. Другими словами, когда источники стационарны, интерференционный член в равенстве (16.4) тождественно равен нулю.

Если этот результат рассматривать в том смысле, что интерференционные полосы не наблюдаемы на экране, наше незнание фазовых параметров перестает иметь значение. Чтобы заострить внимание на парадоксальности этого вывода, можно возразить, что каждый из наших лазерных источников имеет по существу классическую природу и в действительности имеет вполне определенную фазу колебаний. Следовательно, полосы должны наблюдаться на экране одинаковым образом как теми, кто знает фазу, так и теми, кто ее не знает.

Чтобы показать, что мы не сталкиваемся здесь с какой-либо фундаментальной дилеммой, необходимо вспомнить, что операторы плотности построены с целью описания ансамбля квантовомеханических экспериментов. Необходимость повторения экспериментов на многих подобным образом приготовленных системах возникает по причинам, лежащим в основе квантовой механики. Измеренные величины вообще флуктуируют непредсказуемым образом от одной системы к другой даже тогда, когда все системы приготовлены в одном и том же квантовом состоянии. Когда же само квантовое состояние случайно, то основания для проведения экспериментов на большом числе систем и усреднения их результатов становятся еще более вескими.

Пусть две P -функции в равенствах (16.5) представляют, например, чистые состояния поля. В любом однократном эксперименте, проведенном с двумя источниками, для которых все амплитуды и фазы возбуждения известны, мы обнаружим, по-видимому, более или менее шумовую форму интерференционной картины, которую мы обсуждали. Интерференционная картина примет гладкую форму, данную равенством (16.6), только после усреднения по многим экспериментам, выполненным с идентично приготовленными источниками.

Когда мы не знаем фазы колебаний обоих лазеров, наш формализм описывает ансамбль экспериментов, в которых фазы распределены совершенно случайным образом. Ясно, что вклад интерференционного эффекта в среднюю интенсивность для этого ансамбля обращается в нуль. Однако из обращения в нуль среднего по ансамблю нельзя заключать, что полосы не будут наблюдаться в отдельных экспериментах. Эти эксперименты таковы, что элементы ансамбля в отдельности совершенно не похожи на среднее по всему ансамблю. В каждом из этих опытов будет наблюдаться стационарная интерференционная картина на экране точно так, как если фазы колебаний были бы известны. Но, поскольку фазы случайны, смещение картины будет случайным образом изменяться от данного эксперимента к следующему. Тогда усреднение будет уничтожать полосы в среднем по ансамблю.

Вопрос, который можно теперь задать, состоит в том, как же вообще использовать формализм оператора плотности, чтобы получить сведения относительно интерференционной картины. Если источники стационарны, то мы не можем сказать ничего, кроме того, что средняя по ансамблю интенсивность, выражаемая интерференционным членом, исчезает в каждой точке экрана. Представим себе, что мы проделали эксперимент с парой лазеров, представляющих собой выбранный элемент рассматриваемого ансамбля случайных фаз. Чтобы определить, какова в действительности интерференционная картина на экране, мы должны измерить интенсивность в значительном числе точек на экране. Мы не приготавливаем систему заново для каждого из этих экспериментов; они проводятся с однажды приготовленной системой лазеров. С первым из измерений интенсивности в известной точке экрана только начинается процедура определения разности фаз двух лазеров. Оно определяет линейную комбинацию синуса и косинуса разности фаз амплитуд β_1 и β_2 , которая ограничивает разность фаз любым из двух дискретных значений. Измерение интенсивности в другой точке окончательно определяет разность фаз.

Используя измерения интенсивности в паре точек для определения разности фаз, мы можем предсказать вид интерференционной картины в смысле среднего по ансамблю. Конечно, ансамбль содержит в этом случае только один опыт, с которого мы начали, если условия остаются стационарными. Наши начальные измерения интенсивности снабдили нас информацией, сокращающей размеры исходного ансамбля, в результате чего в нем остаются только те эксперименты, в которых разность фаз близка к измеренной. Этот сокращенный ансамбль будет описываться стационарным оператором плотности, поскольку фазовый множитель, общий для амплитуд β_1 и β_2 пары вырожденных мод, остается совершенно случайным. Допустим, что мы нашли разность фаз

двух лучей

$$\arg \beta_1 - \arg \beta_2 = \theta. \quad (16.8)$$

Тогда процесс отбора, с помощью которого мы сократили ансамбль до одного члена, соответствующего эксперименту с фиксированной θ , можно представить введением множителя

$$\frac{1}{2\pi} \delta(\arg \alpha_1 - \arg \alpha_2 - \theta) \quad (16.9)$$

в подынтегральное выражение P -функции (16.1). Как только мы локализовали полосы интерференционной картины экспериментальным определением их непредсказуемого положения, нам уже нетрудно получить стационарный оператор плотности, который предсказывает среднюю интенсивность интерференционной картины.

Идея сокращения размеров нашего ансамбля, которая отражает приобретение информации о системе, не является совершенно новой. Например, при многократных бросаниях монеты вероятности «орла» и «решки» вначале равны, но изменяются по мере того, как выполняются бросания. Вначале вероятность «решки» подсчитывается путем использования полного ансамбля возможных случаев, но на последующих стадиях она подсчитывается только с использованием сокращенного ансамбля, соответствующего информации, которая была получена при предшествующих бросаниях.

К несколько отличному способу использования стационарного оператора плотности для получения информации о случайным образом расположенной интерференционной картине можно прийти при обсуждении функции корреляции второго порядка. Легко видеть, что скорость счета двухкратных совпадений

$$G^{(2)}(\mathbf{r}\mathbf{r}'t', \mathbf{r}'t'\mathbf{r}t) = \int P(\{\alpha_k\}) |\mathcal{E}(\mathbf{r}t\{\alpha_k\})|^2 \times \\ \times |\mathcal{E}(\mathbf{r}'t'\{\alpha_k\})|^2 \prod_k d^2\alpha_k \quad (16.10)$$

содержит член, который осциллирует как функция положения \mathbf{r} и \mathbf{r}' на экране. Этот тип интерференционного члена можно вывести, используя по существу то же обоснование, к которому мы пришли при обсуждении экспериментов по интерференции интенсивности в лекции 2. Осцилляции в функции корреляции интенсивности должны, очевидно, отражать осцилляции самой интенсивности. Далее, поскольку неизвестные фазовые углы β_1 и β_2 не входят в корреляционную функцию второго порядка, они вообще не требуются для ее вычисления.

Однако простые измерения интенсивности случайной интерференционной картины (скажем, изучением фотографии) это не то же самое, что измерение $G^{(2)}$, и мы не умеем, вообще говоря, по известной величине функции $G^{(2)}$ делать заключение относительно того, какова будет картина интенсивности случайной системы полос.

Таким образом, хотя функция $G^{(2)}$ и другие функции корреляции четного порядка полезны сами по себе, они не могут быть использованы для определения интенсивности полос. Если мы хотим получить эти интенсивности, то мы должны вывести их из операторов плотности для соответствующим образом сокращенного ансамбля.

До этого момента мы предполагали, что наши источники являются идеальными, нешумящими лазерами. Выясним теперь, к чему приводит учет случайной модуляции устройства. Поскольку наиболее важным параметром, определяющим картину интерференции двух лучей, является фаза осцилляций в лазере, то будет вполне уместно для описания лазерных лучей использовать модель «диффузии фазы». Согласно этой модели, фаза лазерного луча заметно блуждает за интервал времени, больший по сравнению со временем релаксации $1/\zeta$, и остается относительно неизменной в течение значительно более коротких временных интервалов.

Когда два лазерных луча представлены такими моделями, интенсивности света, зарегистрированные на экране, будут зависеть от продолжительности, которая нам потребуется, чтобы провести измерения. Если интенсивности достаточно велики, так что мы можем зарегистрировать их за времена, короткие по сравнению с величиной $1/\zeta$, то два луча будут сохранять фазы вблизи их начальных значений, пока проводятся измерения. В этом случае возникает случайная интерференционная картина, которая уже была обсуждена выше. Подобное же измерение, сделанное, скажем, на половину времени релаксации позднее, обнаружит иначе расположенную систему полос, соответствующую имевшей место флуктуации разности фаз двух лучей.

Если бы мы могли проследить интенсивность полос как функцию времени, то увидели бы систему параллельных полос, совершающую хаотическим образом блуждания вперед и назад по экрану. Если бы мы регистрировали интенсивности на экране интегрированием их за период, много больший, чем время релаксации, то мы нашли бы, что интерференционные полосы полностью размыты и осталась только однородная интенсивность.

Лазерные источники удобны для таких двухлучевых экспериментов, поскольку они интенсивны, достаточно монохроматичны и имеют относительно большое время релаксации. В принципе такие опыты возможны и с лучами обычных хаотических источников. Случайная амплитудная модуляция этих лучей будет приводить к тому, что контрастность полос будет флуктуировать так же, как и их расположение. Время релаксации для этих вариаций будет обратно пропорционально ширине полосы частот источников. Если такие интерференционные картины не были до сих пор сфотографированы, то только из-за того, что необходимое для этого время экспозиции короче, чем 10^{-10} сек.

Опыты по счету фотонов

Число фотонов, которое счетчик регистрирует в любой интервал времени, флуктуирует случайным образом. В качестве простого эксперимента по счету фотонов мы рассмотрим опыт, когда счетчик экспонируется в поле в течение фиксированного интервала времени t . Тогда, повторяя эксперимент много раз, мы можем найти функцию распределения для отсчетов, полученных за этот интервал. Хотя часто нам достаточно знать средний отсчет, понять характер флуктуаций отсчета около своего среднего значения мы сможем полностью только тогда, когда будем знать функцию распределения и ее моменты. В этой лекции мы обсудим способы предсказания функции распределения и соотношения между формой распределения и когерентностью поля.

Вспомним некоторые результаты лекции 5. Мы подсчитали там вероятность того, что в интервале от t_0 до t все n атомов гипотетического n -атомного фотодетектора совершат переходы с поглощением фотонов, что и регистрируется как счет фотонов. Если мы опустим тензорные индексы, предполагая, что поле полностью поляризовано, то получим эту вероятность с помощью формулы (5.8)

$$p^{(n)}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t \prod_{j=1}^n S(t_j' - t_j'') G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1' \dots \mathbf{r}_n t_n', \mathbf{r}_n t_n'' \dots \mathbf{r}_1 t_1'') \times \\ \times \prod_{j=1}^n dt_j' dt_j'', \quad (17.1)$$

где функция чувствительности S определена равенствами (4.12) и (4.10) и, кроме того, положено $t_0 = 0$. Если наш детектор является широкополосным, то равенство (4.14) можно использовать для уменьшения числа интегрирований по времени в этом интервале с $2n$ до n , но это не является необходимым для последующих выводов.

Мы должны рассмотреть теперь более реалистическую модель счетчика, содержащего гигантское число атомов, скажем $N \sim 10^{20}$, которые способны детектировать фотоны с помощью процесса фотопоглощения. Излишне говорить, что фактически никогда не бывает

чтобы все N этих атомов совершали процесс поглощения в любой ограниченный интервал времени. Полное число фотопоглощений, как правило, много меньше, и мы попытаемся использовать (17.1), чтобы найти закон их распределения.

Полное число фотонов, зарегистрированное в любой интервал времени, можно рассматривать как сумму случайных переменных по одной на каждый атом детектора. Чтобы составить ее, введем случайную переменную z_j для j -го атома, которая равна

$$z_j = \begin{cases} 0, & \text{если для } j\text{-го атома процесс фотопоглощения не зарегистрирован,} \\ 1, & \text{если для } j\text{-го атома процесс фотопоглощения зарегистрирован.} \end{cases} \quad (17.2)$$

Тогда случайная переменная, которая представляет полный отсчет, запишется в виде

$$C = \sum_{j=1}^n z_j. \quad (17.3)$$

Вероятность каждого конечного состояния системы, т. е. набора значений $z_1 \dots z_N$, будет описываться функцией вероятности $\mathcal{P}(z_1 \dots z_N, t)$. Статистическое среднее любой функции переменных z_j находится усреднением функции по распределению вероятности. Например, средний отсчет дается формулой

$$\langle C \rangle = \sum_{\{z_j=0,1\}} \sum_{j=1}^N z_j \mathcal{P}(z_1 \dots z_N, t), \quad (17.4)$$

где окончательное суммирование ведется по значениям 0 и 1 для полного набора переменных z_j . Мы будем писать такие суммы в дальнейшем как суммы по $\{z_j\}$. Введем далее приведенную функцию вероятности для j -го атома, которую определим соотношением

$$p_j(z_j, t) = \sum_{(z_k, k \neq j)} \mathcal{P}(z_1 \dots z_n, t). \quad (17.5)$$

Средний отсчет можно записать* с помощью приведенной вероятности p_j как

$$\langle C \rangle = \sum_{\{z_k\}} \sum_{j=1}^N z_j p_j(z_j, t) = \sum_{j=1}^N p_j(1, t). \quad (17.6)$$

Очевидно, что вероятность $p_j(1, t)$, которая появляется в последнем выражении, равна вероятности одноатомного перехода $p^{(1)}(t)$, вычисленной для j -го атома. Эта вероятность дается равенством (17.1) при $n=1$ и $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_j$; мы будем записывать ее как $p_j^{(1)}(t)$.

Таким образом, средний отсчет равен

$$\langle C \rangle = \sum_{j=1}^N p_j^{(1)}(t). \quad (17.7)$$

Введем производящую функцию, которая даст нам возможность решить задачу одновременно для неизвестного распределения отсчетов фотонов и для его моментов. Мы могли бы, конечно, найти моменты непосредственно обобщением способа, которым было получено $\langle C \rangle$, но настоящий метод имеет преимущество в том, что дает нам возможность получить все интересующие нас величины из одной только функции. В качестве производящей мы выбираем функцию

$$Q(\lambda, t) = \langle (1 - \lambda)^C \rangle, \quad (17.8)$$

где C есть сумма случайных переменных, данная равенством (17.3); скобки означают усреднение по ансамблю, а переменная λ есть просто полезный параметр.

Если записать Q как сумму по целым значениям, которые может принимать C , то будем иметь следующее разложение:

$$Q(\lambda, t) = \sum_{m=0}^N (1 - \lambda)^m p(m, t), \quad (17.9)$$

где $p(m, t)$ — вероятность того, что счетчик зарегистрирует m фотонов за время t . Ясно, что если функция $Q(\lambda, t)$ известна, то вероятность $p(m, t)$ можно получить дифференцированием

$$p(m, t) = \frac{(-1)^m}{m!} \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} Q(\lambda, t) \right]_{\lambda=1}, \quad (17.10)$$

поскольку равенство (17.9) можно рассматривать как разложение Тейлора для функции Q вблизи $\lambda = 1$.

Если, с другой стороны, разложить $Q(\lambda, t)$ в степенной ряд вблизи $\lambda = 0$, то будем иметь

$$Q(\lambda, t) = \sum_{n=0}^N \frac{\lambda^n}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} Q(\lambda, t) \right]_{\lambda=0}. \quad (17.11)$$

Производные, которые встречаются в разложении, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} (-1)^n \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} Q(\lambda, t) \right]_{\lambda=0} &= \left\langle \frac{C!}{(C-n)!} \right\rangle = \\ &= \langle C(C-1) \dots (C-n+1) \rangle. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Средние в правой части этого равенства известны как факториальные моменты. Они являются простой линейной комбинацией обычных моментов $\langle C^n \rangle$ распределения отсчетов фотонов. Из этих соотно-

шений ясно, что знание производящей функции дает нам возможность найти и распределение вероятности, и его моменты. Теперь необходимо показать, как можно вычислить производящую функцию с помощью вероятностей фотопоглощения $p^{(n)}(t)$.

Сначала заметим, что функцию $Q(\lambda, t)$ можно записать как

$$Q(\lambda, t) = \sum_{\{z_k\}} \mathcal{F}(z_1 \dots z_N, t) (1-\lambda)^{\sum_{j=1}^N z_j} = \\ = \sum_{\{z_k\}} \mathcal{F}(z_1 \dots z_N, t) \prod_{j=1}^N (1-\lambda)^{z_j}. \quad (17.13)$$

Последнюю формулу можно упростить, используя тождество

$$(1-\lambda)^{z_j} = 1 - z_j \lambda, \quad (17.14)$$

которое выполняется потому, что z_j принимает только значения 0 или 1. После этого упрощения равенство (17.13) принимает вид

$$Q(\lambda, t) = \sum_{\{z_j\}} \mathcal{F}(z_1 \dots z_N, t) \prod_{j=1}^N (1 - \lambda z_j). \quad (17.15)$$

Если N -кратное произведение в этом выражении разложить в ряд по степеням λ , то получим

$$Q(\lambda, t) = \sum_{n=0}^N (-\lambda)^n \sum_{\{z_j\}} \sum_{\substack{n\text{-кратные} \\ \text{комбинации}}} z_{j_1} \dots z_{j_n} \mathcal{F}(z_1 \dots z_n, t), \quad (17.16)$$

где первая сумма берется по всем способам выбора n атомов из набора N .

Если мы определим теперь вероятность сложного n -кратного события, а именно вероятность того, что все атомы $j_1 \dots j_n$ подвергаются процессу фотопоглощения, как

$$p_{j_1 \dots j_n}^{(n)}(t) = \sum_{\{z_k\}} z_{j_1} \dots z_{j_n} \mathcal{F}(z_1 \dots z_n, t), \quad (17.17)$$

то мы сможем записать производящую функцию в форме

$$Q(\lambda, t) = \sum_{n=0}^N (-\lambda)^n \sum_{\substack{n\text{-кратные} \\ \text{комбинации}}} p_{j_1 \dots j_n}^{(n)}(t). \quad (17.18)$$

Здесь величина $p_{j_1 \dots j_n}^{(n)}(t)$ определена как вероятность того, что каждый из выделенного набора n атомов поглощает фотон, независимо от всех других атомов. Эта вероятность есть просто выражение $p^{(n)}(t)$, данное равенством (17.1) и вычисленное для выделенных атомов $j_1 \dots j_n$. Таким образом, мы знаем все члены равенства

(17.18) и проблема сводится просто к их суммированию. Фактически же мы совершим не суммирование по атомам, а интегрирование по объему.

Так как вероятности $p^{(n)}(t)$ велики только при значениях n , чрезвычайно малых по сравнению с N , то суммы по n -кратным комбинациям можно аппроксимировать выражением

$$\sum_{\substack{n\text{-кратные} \\ \text{комбинации}}} \approx \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \dots \sum_{j_n=1}^N. \quad (17.19)$$

Тогда суммирование по отдельным атомам можно выполнить как пространственное интегрирование, полагая, что число атомов в единице объема равно $\sigma(\mathbf{r})$:

$$\sum_{j_1=1}^N \dots = \int d\mathbf{r}_1 \sigma(\mathbf{r}_1) \dots \quad (17.20)$$

По существу мы имеем дело с пределом $N \rightarrow \infty$. Подставляя вероятности, данные равенством (17.1), в выражение (17.18) для производящей функции и преобразуя сумму по комбинациям атомов соответственно (17.19), находим

$$Q(\lambda, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \int_{\substack{\text{объем} \\ \text{детектора}}} \dots \int_{\substack{\text{объем} \\ \text{детектора}}} G^{(n)}(\mathbf{r}'_1 t'_1 \dots \mathbf{r}'_n t'_n, \mathbf{r}''_1 t''_1 \dots \mathbf{r}''_n t''_n) \times \\ \times \prod_{j=1}^n \sigma(\mathbf{r}'_j) S(t''_j - t'_j) d\mathbf{r}'_j dt'_j dt''_j. \quad (17.21)$$

Чтобы немного сократить это выражение, определим функцию

$$V(x', x'') = \sigma(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') S(t'' - t'), \quad (17.22)$$

где x одновременно указывает положение \mathbf{r} и время t . Тогда выражение для производящей функции сведется к виду

$$Q(\lambda, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \dots \int G^{(n)}(x'_1 \dots x'_n, x''_1 \dots x''_n) \times \\ \times \prod_{j=1}^n V(x'_j x''_j) d^4 x'_j d^4 x''_j. \quad (17.23)$$

Так как это выражение суть разложение в степенной ряд вблизи $\lambda = 0$, то факториальные моменты должны выражаться в соответ-

ствии с (7.11) и (7.12) формулой

$$\left\langle \frac{C!}{(C-n)!} \right\rangle = \int \dots \int G^{(n)}(x'_1 \dots x'_n, x''_n \dots x''_1) \times \\ \times \prod_{j=1}^n V(x'_j x''_j) d^4 x'_j d^4 x''_j, \quad (17.24)$$

где интегрирование проводится по объему счетчика, который содержит атомы, совершающие фотопоглощение, и по интервалу времени от 0 до t .

Полезность полученных результатов продемонстрируем на примере полностью когерентного поля. Для такого поля имеет место факторизация

$$G^{(n)}(x'_1 \dots x'_n, x''_n \dots x''_1) = \prod_{j=1}^n G^{(1)}(x'_j, x''_j), \quad (17.25)$$

так что ряд для $Q(\lambda, t)$ можно просуммировать

$$Q(\lambda, t) = e^{-\lambda \iint G^{(1)}(x', x'') V(x' x'') d^4 x' d^4 x''}. \quad (17.26)$$

Однако из (17.24) мы видим, что средний отсчет есть как раз

$$\langle C \rangle = \iint G^{(1)}(x', x'') V(x' x'') d^4 x' d^4 x'', \quad (17.27)$$

так что производящую функцию можно записать как

$$Q(\lambda, t) = e^{-\lambda \langle C \rangle}. \quad (17.28)$$

Далее, используя равенство (17.12), получаем факториальные моменты

$$\left\langle \frac{C!}{(C-n)!} \right\rangle = \langle C \rangle^n, \quad (17.29)$$

и используя, наконец, равенство (17.10), находим распределение вероятности

$$p(m, t) = \frac{\langle C \rangle^m}{m!} e^{-\langle C \rangle}. \quad (17.30)$$

Таким образом, когда поле полностью когерентно, мы всегда имеем для отсчетов распределение Пуассона.

Когда поле не обладает полной когерентностью, мы можем использовать когерентные состояния как базис для описания поля. Чтобы проиллюстрировать форму статистических расчетов, мы используем P -представление для оператора плотности поля. Можно также использовать и более общее R -представление.

В P -представлении функция $G^{(n)}$ дается интегралом

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_{2n}) = \int P(\{\alpha_k\}) \prod_{j=1}^n \mathcal{E}^*(x_j \{\alpha_k\}) \times \\ \times \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}(x_j \{\alpha_k\}) \prod_k d^2\alpha_k. \quad (17.31)$$

Если это выражение подставить в ряд (17.23), то в результате суммирования он приобретает следующую замкнутую форму:

$$Q(\lambda, t) \int P(\{\alpha_k\}) e^{-\lambda\Omega(\{\alpha_k\})} \prod_k d^2\alpha_k, \quad (17.32)$$

где

$$\Omega(\{\alpha_k\}) = \int \mathcal{E}^*(x' \{\alpha_k\}) \mathcal{E}(x'' \{\alpha_k\}) V(x', x'') d^4x' d^4x''. \quad (17.33)$$

Далее, из равенства (17.12) видно, что факториальные моменты равны

$$\left\langle \frac{C!}{(C-n)!} \right\rangle = \int P(\{\alpha_k\}) \Omega^n(\{\alpha_k\}) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (17.34)$$

а из формулы (17.10) следует, что распределение вероятности дается выражением

$$p(m, t) = \int P(\{\alpha_k\}) \frac{\Omega^m(\{\alpha_k\})}{m!} e^{-\Omega(\{\alpha_k\})} \prod_k d^2\alpha_k. \quad (17.35)$$

Вероятность регистрации m фотонов есть, очевидно, результат усреднения по соответствующим вероятностям для ансамбля распределений Пуассона. Нет нужды подчеркивать, что процесс усреднения является не классическим процессом и что функция квазивероятности P может принимать отрицательные значения.

В качестве следующей иллюстрации применения методов, которые мы обсуждаем, рассмотрим общий случай хаотически генерируемых полей. Операторы плотности для таких полей можно представить посредством гауссовой функции

$$P(\{\alpha_k\}) = \prod_k \frac{1}{\pi \langle n_k \rangle} e^{-|\alpha_k|^2 / \langle n_k \rangle}. \quad (17.36)$$

Тогда, поскольку функция Ω есть квадратичная форма переменных α_k , интеграл (17.32) для производящей функции можно вычислить в общем виде.

Однако прежде мы введем одно полезное обозначение. Мы можем выразить функцию $\mathcal{E}(x, \{\alpha_k\})$ как линейную форму пере-

менных α_k с помощью разложения по нормальному модам

$$\mathcal{E}(x, \{\alpha_k\}) = \sum_k e(x, k) \alpha_k, \quad (17.37)$$

где функции e даются равенством (14.26). Если ввести далее матрицу

$$B_{k'k''} = \int e^*(x'k') V(x'x'') e(x''k'') d^4x' d^4x'', \quad (17.38)$$

то квадратичную форму Ω можно записать как

$$\Omega(\{\alpha_k\}) = \sum_{k'k''} \alpha_{k'}^* B_{k'k''} \alpha_{k''}. \quad (17.39)$$

Подставляя это выражение для Ω и гауссову форму для P в равенство (17.32), для производящей функции получаем

$$Q(\lambda, t) = \int \dots \int \exp \left\{ - \sum_k \frac{|\alpha_k|^2}{\langle n_k \rangle} - \lambda \sum_{k'k''} \alpha_{k'}^* B_{k'k''} \alpha_{k''} \right\} \prod_k \frac{d^2\alpha_k}{\pi \langle n_k \rangle}.$$

Если ввести переменные

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{\{\langle n_k \rangle\}^{1/2}} \quad (17.40)$$

и определить матрицу

$$M_{k'k''} = \{\langle n_{k'} \rangle\}^{1/2} B_{k'k''} \{\langle n_{k''} \rangle\}^{1/2}, \quad (17.41)$$

то интеграл для производящей функции можно свести к следующей форме:

$$Q(\lambda, t) = \int \dots \int \exp \left\{ - \sum_k |\beta_k|^2 - \lambda \sum_{k'k''} \beta_{k'} M_{k'k''} \beta_{k''} \right\} \prod_k \frac{d^2\beta_k}{\pi}. \quad (17.42)$$

Теперь мы можем рассмотреть набор чисел β_k как совокупность компонент комплексного вектора β . Тогда если допустить, что M представляет матрицу, компоненты которой даны равенством (17.41), то экспоненту в подынтегральном выражении равенства (17.42) можно записать как произведение

$$-\beta^\dagger (1 + \lambda M) \beta.$$

Так как матрица M является эрмитовой, ее можно диагонализировать путем унитарного преобразования вектора β . Тогда, обозначая собственные значения M через \mathcal{M}_i , а преобразованные комплексные координаты через γ_i , мы можем свести интеграл для

производящей функции к элементарному виду

$$Q(\lambda, t) = \int \dots \int \exp \left\{ - \sum_i (1 + \lambda \mathcal{M}_i) |\gamma_i|^2 \right\} \prod_i \frac{d^2 \gamma_i}{\pi} = \frac{1}{\prod_i (1 + \lambda \mathcal{M}_i)}, \quad (17.43a)$$

$$Q(\lambda, t) = \frac{1}{\det(1 + \lambda M)}. \quad (17.43b)$$

Заметим, что матрица M должна быть положительно определенной, поскольку квадратичная форма Ω , данная равенством (17.33) или (17.39), есть среднее число фотонов, подсчитанных в некотором когерентном поле. Таким образом, собственные значения \mathcal{M}_i положительны, и сингулярности производящей функции лежат на отрицательной части действительной оси переменной λ . Поскольку функция Q аналитична в полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq 0$, мы видим, что если разложить функцию Q в степенные ряды около точки $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$, то эти разложения в ряды в других точках можно вычислить в принципе методом аналитического продолжения. Это соображение показывает, что использованная нами процедура вычисления производящей функции посредством ее разложения в точке $\lambda = 0$ действительно ведет к единственному результату для распределения вероятности.

Поскольку матрица M имеет, вообще говоря, неопределенный ранг, непосредственно вычислить выражения (17.43) нелегко. Заметим, однако, что $\det(1 + \lambda M)$ можно записать как

$$\prod_i (1 + \lambda \mathcal{M}_i) = \exp \left\{ \sum_i \ln(1 + \lambda \mathcal{M}_i) \right\}.$$

При $|\lambda| < (\mathcal{M}_{\text{макс}})^{-1}$, где $\mathcal{M}_{\text{макс}}$ есть наибольшее собственное значение \mathcal{M}_i , логарифм в показателе можно разложить в сходящийся степенной ряд, тогда

$$\begin{aligned} \det(1 + \lambda M) &= \exp \left\{ \sum_i \left(\lambda \mathcal{M}_i - \frac{1}{2} \lambda^2 \mathcal{M}_i^2 + \dots \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \text{Sp} \left(\lambda M - \frac{1}{2} \lambda^2 M^2 + \dots \right) \right\} = \\ &= \exp \{ \text{Sp} \ln(1 + \lambda M) \}. \end{aligned} \quad (17.44)$$

Используя это равенство, мы можем выразить производящую функцию в виде

$$Q(\lambda, t) = e^{-\text{Sp} \ln(1 + \lambda M)}. \quad (17.45)$$

Разлагая логарифм по степеням λ , имеем

$$Q(\lambda, t) = \exp \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r} I_r \right\}, \quad (17.46)$$

где I_r определено как

$$I_r = \text{Sp} \{M^r\}. \quad (17.47)$$

Если мы вспомним определение матрицы M , данное равенствами (17.41) и (17.38), то увидим, что для $r=1$

$$I_1 = \iint \sum_k e^*(x'k) e(x''k) \langle n_k \rangle V(x', x'') d^4x' d^4x''.$$

Сумма по k под интегралом, согласно (14.32), есть просто функция корреляции первого порядка, поэтому

$$I_1 = \iint G(x', x'') V(x'x'') d^4x' d^4x''. \quad (17.48)$$

Сравнивая равенство (17.46) с равенствами (14.27) и (14.28), мы видим, что этот член ($r=1$) имеет ту же самую форму, что и показатель производящей функции для случая полностью когерентного поля. Утрата когерентности в гауссовом случае отражена присутствием в экспоненте добавочного члена с $r \geq 2$. Используя далее матрицу M , мы можем показать, что общее выражение для I_r есть циклический интеграл

$$I_r = \int \prod_{j=1}^r G^{(1)}(x'_j, x''_{j+1}) V(x'_j, x''_j) d^4x'_j d^4x''_j, \quad (17.49)$$

в котором координату x''_{r+1} нужно интерпретировать как x''_1 . Для широкополосных детекторов определения (17.22) и (4.14) позволяют упростить этот интеграл:

$$I_r = s^r \int_0^t \dots \int_0^t \prod_j dt_j \int \dots \int \prod_j G^{(1)}(r'_j t'_j, r'_{j+1} t'_{j+1}) \sigma(r'_j) dr'_j. \quad (17.50)$$

Чтобы вычислить эти интегралы; предположим, что наше поле состоит из плоских волн, идущих в положительном направлении оси y , так что функция корреляции первого порядка дается равенством (15.1). Эта функция, естественно, зависит только от координаты y . Примем далее, что область чувствительности счетчика, т. е. его фотокатода, есть очень тонкий слой атомов, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси y , т. е. что функция $\sigma(r)$ есть по существу δ -функция координаты y . При этих предположениях, часто оправдывающихся на практике, пространственное инте-

грирование в равенстве (17.50) становится тривиальным. Функции $G^{(1)}$ не зависят от пространственных координат во всех точках, где функция $\sigma(\mathbf{r})$ отлична от нуля.

Временные интегралы в выражении (17.50) значительно менее тривиальны, но мы можем обсудить формы, которые они принимают за короткое и продолжительное время. Если t много меньше обратной ширины полосы частот поля излучения, то функции $G^{(1)}$ практически не будут изменяться во всем интервале от 0 до t . Для таких времен интеграл I_r должен быть просто пропорционален t^r . Если мы запишем I_1 как ωt , где ω — коэффициент пропорциональности, то элементарный характер пространственных интегрирований позволяет показать, что общий результат должен выражаться в виде

$$I_r = (\omega t)^r. \quad (17.51)$$

Если этот результат подставить в равенство (17.46), то мы найдем что производящая функция для малых значений t есть

$$Q(\lambda, t) = \exp\{-\ln(1 + \lambda\omega t)\} = \frac{1}{1 + \lambda\omega t}. \quad (17.52)$$

Распределение вероятности для числа счетов дается, согласно равенству (17.10), выражением

$$p(m, t) = \frac{(\omega t)^m}{(1 + \omega t)^{m+1}}. \quad (17.53)$$

Распределение для коротких времен дается, таким образом, степенным законом, не отличающимся от распределения Планка. Среднее число счетов есть ωt , так что ω является просто средней скоростью счета.

Для времен t , которые значительно превосходят обратную ширину полосы частот поля излучения, также возможно упрощение интеграла I_r . В этом случае его значения чувствительны, однако, к изменению спектрального распределения энергии, заключенной в поле. Примем в качестве примера, что частотный спектр имеет лоренцеву форму

$$\langle n_k \rangle \hbar \omega_k = \frac{\text{const}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (17.54)$$

Временная зависимость функции корреляции первого порядка дается в этом случае равенством (15.8). Если эту функцию подставить в интеграл (17.50), то можно видеть, что ввиду циклической структуры подынтегрального выражения все интегралы I_r будут возрастать линейно со временем при $t \gg \gamma^{-1}$. Мы снова можем определить среднюю скорость счета ω , записывая интеграл I_1 как ωt . После этого нетрудно показать, что полный набор интегралов I_r можно

записать в виде

$$I_r = \frac{t(2\gamma\omega)^r}{2(r-1)!} \left(-\frac{1}{2\gamma} \frac{d}{d\gamma} \right)^{r-1} \frac{1}{\gamma} \quad (17.55)$$

при $t \gg \gamma^{-1}$.

Имея эти значения для I_r , можно провести суммирование ряда в показателе в равенстве (17.46). Выполняя его для производящей функции, находим

$$Q(\lambda, t) = \exp \{ - [(\gamma^2 + 2\gamma\omega\lambda)^{1/2} - \gamma] t \}. \quad (17.56)$$

Если скорость счета ω мала по сравнению с шириной полосы частот, т. е. $\omega \ll \gamma$, то выражение в экспоненте можно разложить, и мы находим, что в наинизшем приближении производящая функция сводится к экспоненте

$$Q(\lambda, t) = e^{-\lambda\omega t}. \quad (17.57)$$

Эта функция, как мы уже видели, ведет к распределению Пуассона. Это распределение и должно иметь место, если отсутствует тенденция для фотонов прибывать коррелированными группами, а для амплитуды поля флуктуировать случайным образом.

Чтобы обсудить распределение и моменты, которые следуют из производящей функции (17.5), полезно ввести последовательность полиномов

$$\begin{aligned} s_0(\xi) &= s_1(\xi) = 1, \\ s_2(\xi) &= 1 + \frac{1}{\xi}, \\ s_3(\xi) &= 1 + \frac{3}{\xi} + \frac{3}{\xi^2}, \\ s_4(\xi) &= 1 + \frac{6}{\xi} + \frac{15}{\xi^2} + \frac{15}{\xi^3}. \end{aligned} \quad (17.58)$$

Дальнейшие члены последовательности даются рекуррентной формулой

$$s_{n+1}(\xi) = -s'_n(\xi) + \left(1 + \frac{n}{\xi} \right) s_n(\xi). \quad (17.59)$$

Эти полиномы хорошо известны в теории функций Бесселя. Их можно также получить из выражения

$$s_n(\xi) = e^{\xi} \left(\frac{2\xi}{\pi} \right)^{1/2} K_{n-1/2}(\xi), \quad (17.60)$$

где $K_{n-1/2}$ есть видоизмененная функция Ханкеля полуцелого порядка.

Если мы разложим теперь производящую функцию (17.56) в степенной ряд около точки $\lambda = 1$ и определим его коэффициенты,

то найдем, что вероятность отсчета m за время t есть

$$p(m, t) = \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{\gamma \omega t}{\Gamma} \right)^m s_m(\Gamma t) e^{-(\Gamma - \nu)t}, \quad (17.61)$$

где

$$\Gamma = (\gamma^2 + 2\omega\gamma)^{1/2}. \quad (17.62)$$

Распределение (17.61) имеет то же самое среднее значение ωt , что и распределение Пуассона, которое следует из производящей функции (17.57). Однако дисперсия всегда много больше, чем в распределении Пуассона ввиду эффекта сцепления фотонов.

Разложение производящей функции (17.56) в степенной ряд вблизи точки $\lambda = 0$ имеет вид

$$Q(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda \omega t)^n}{n!} s_n(\gamma t). \quad (17.63)$$

Отсюда заключаем, что факториальные моменты распределения (17.61) даются формулой

$$\left\langle \frac{C!}{(C-n)!} \right\rangle = (\omega t)^n s_n(\gamma t) = \langle C(C-1)\dots(C-n+1) \rangle. \quad (17.64)$$

Для распределения Пуассона эти моменты будут просто $(\omega t)^n$. По формуле (17.64) первые два момента равны

$$\langle C \rangle = \omega t, \quad (17.65)$$

$$\langle C(C-1) \rangle = (\omega t)^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma t} \right). \quad (17.66)$$

Дисперсия числа счетов есть, таким образом,

$$\langle C^2 \rangle - \langle C \rangle^2 = \langle C \rangle \left\{ 1 + \frac{\langle C \rangle}{\gamma t} \right\}. \quad (17.67)$$

Член $\langle C \rangle^2 / \gamma t$ есть дополнение к дисперсии, вызванное тем, что времена прибытия фотонов не являются статистически независимыми одно от другого.