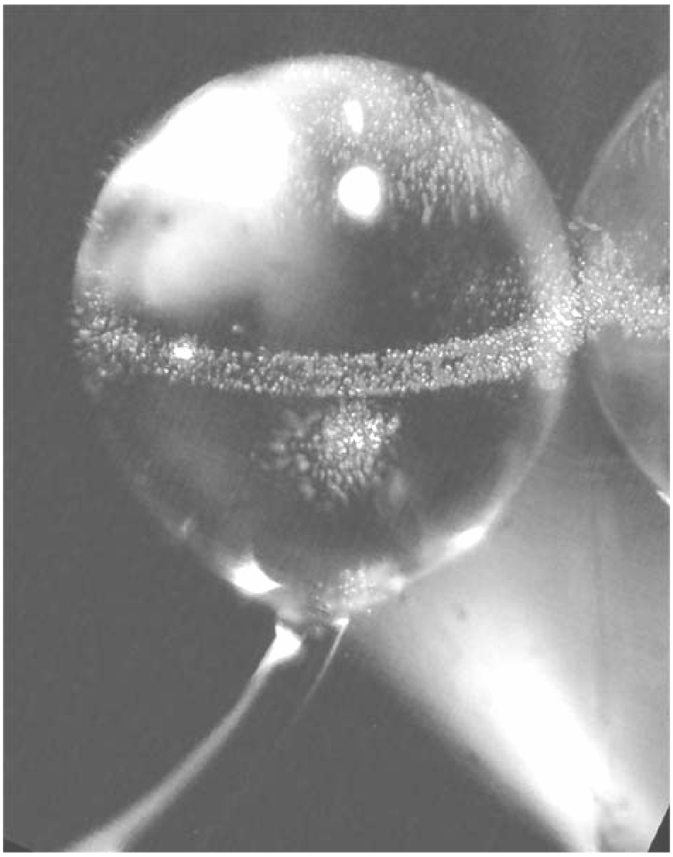
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. Л. Городецкий

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКИХ МИКРОРЕЗОНАТОРОВ

Учебное пособие



Москва
2010

М. Л. Городецкий

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКИХ МИКРОРЕЗОНАТОРОВ

Учебное пособие

Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 010701 – Физика.

Москва
Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
2010

Городецкий М. Л.

Основы теории оптических микрорезонаторов.

Пособие представляет собой сжатое изложение теории оптических микрорезонаторов. Дан обзор различных видов оптических резонаторов. Приведены основы общей теории открытых резонаторов и в частности резонаторов Фабри-Перо. Основное внимание уделено оптическим микрорезонаторам с модами шепчущей галереи, обладающим наибольшей добротностью. Изложена строгая теория мод в телах цилиндрической и сферической симметрии и методы приближенного р ассмотрения мод в произвольных телах вращения. Рассмотрены методы возбуждения резонаторов, ограничения добротности, их нелинейные свойства. В последней главе кратко рассмотрены вопросы практической реализации оптических микрорезонаторов. Пособие адресовано преподавателям и студентам оптических специальностей.

Рецензенты:
член-корр РАН Д. Р. Хохлов,
канд. физ.-мат. наук, доцент физического ф-та МГУ И. В. Головнин

Подписано в печать 1.06.2010
Объем 12,75 п.л., Тираж 50 экз. Заказ №

Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1, к.2

Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

Оглавление

Глава 1

Резонанс, резонатор и добротность

Развитие волоконной и интегральной оптики привело к разработке широкой гаммы малогабаритных оптических устройств, фильтров, модуляторов, дефлекторов и т. д. В настоящее время достаточно полно разработаны принципы построения и создана широкая гамма гибридных, электро- и акусто-оптических, элементов. Дальнейшее развитие когерентной оптики и систем оптической обработки информации требует перехода к чисто оптическим линейными и нелинейными устройствами, которые открывают путь к значительному сокращению габаритов приборов, уменьшению энергопотребления и повышению быстродействия.

Неотъемлемым элементом почти любого сложного оптического и микроволнового прибора является резонатор. Именно прогресс в совершенствовании резонаторов зачастую приводил к достижению качественно новых результатов. Так, появление мазеров и лазеров было бы невозможно без реализации высокодобротных резонаторов СВЧ и оптического диапазонов. Высокодобротные резонаторы активно используются для сужения и стабилизации линии генерации, в качестве фильтров и дискриминаторов, в разнообразных высокочувствительных сенсорах и датчиках, в метрологии и в прецизионных физических экспериментах.

Так, одним из ключевых направлений развития физики сегодня является квантовая теория измерений и связанный с ней интерес к манипуляциям с отдельными квантовыми объектами. Резонаторы играют существенную роль в этих исследованиях. Именно с помощью миниатюрных высокодобротных резонаторов в оптическом диапазоне были впервые продемонстрированы неклассические состояния электромагнитного поля и были впервые проведены впечатляющие эксперименты по наблюдению эффектов взаимодействия отдельных фотонов и отдельных атомов. Тесно связаны с этим направлением и такие, вызывающие активное внимание и ожидания, приложения, как квантовые компьютеры, квантовая криптография и квантовая телепортация. Одним из основных требований для наблюдения квантовых эффектов является изоляция системы от внешнего классического мира и уменьшение в ней диссипации для замедления распада состояний (декогеренции), что означает для резонаторов повышение добротности.

1.1 Колебательный контур и резонатор

Принципиальные особенности работы резонатора можно рассмотреть, используя модель колебательного контура с сосредоточенными параметрами (рис. 1.1). Колебательный контур может запасать энергию электрического и магнитного поля в емкости и индуктивности и описывается обычным уравнением колебаний:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U(t), \tag{1.1}$$

где q – электрический заряд, L – индуктивность, R – сопротивление, C – емкость, $U(t)$ – напряжение генератора. Уравнение (1.1) может быть представлено в стандартной форме уравнения, описывающего вынужденные колебания линейного осциллятора

$$\ddot{q} + 2\delta_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\omega_0}{\rho_0}U(t), \tag{1.2}$$

где введены параметры: характеристическое сопротивление контура

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{1.3}$$

декремент затухания

$$\delta_0 = \frac{R}{2L}, \tag{1.4}$$

и собственная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{1.5}$$

Модель, описываемая уравнением (1.2), также позволяет ввести понятие собственной добротности $Q_0 = \omega_0/2\delta_0$.

Для описания установившихся вынужденных колебаний, когда все переходные процессы уже затухли, решение удобно искать в спектральном виде:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int U(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{1.6}$$

превращающим дифференциальное уравнение в алгебраическое с решением

$$q(\omega) = U(\omega)\frac{\omega_0}{\rho_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta_0}. \tag{1.7}$$

Из этого выражения сразу определяется стационарный отклик на гармонический сигнал $U_0\cos(\omega t + \phi) = U_0\Re[e^{-i(\omega t+\phi)}]$ ($\Re[\ ]$ означает действительную часть):

$$q(t) = U_0\frac{\omega_0}{\rho_0}\Re\left[\frac{e^{-i(\omega t+\phi)}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta_0}\right]. \tag{1.8}$$

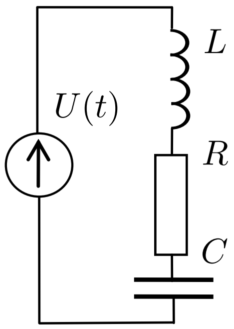


Рис. 1.1: Простой колебательный контур.

Резонансом называется резкое увеличение амплитуды колебаний заряда, а также тока и и напряжений на элементах вблизи частоты ω_0 из-за обращения в нуль действительной части знаменателя. Ширина амплитудной резонансной кривой по уровню $1/\sqrt{2}$ (или на кривой мощности по уровню $1/2$) равна $2\delta_0$. При этом фаза колебаний заряда оказывается сдвинута на $\pi/2$, а полная запасенная в контуре энергия

$$\mathcal{E} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \tag{1.9}$$

не осциллирует.

Задание 1. *Покажите, что точные значения частот, при которых достигаются максимальные значения напряжений U_R, U_C и U_L не совпадают и найдите эти частоты. Покажите, что только на резонансной частоте $\omega = \omega_0$ амплитуды U_C и U_L одинаковы, а колебания происходят в противофазе. Вычислите значение полной энергии, запасаемой в контуре в зависимости от частоты.*

Модель колебательного контура хорошо описывает свойства любой линейной колебательной системы вблизи одного из ее резонансов. Недостатком модели с сосредоточенными параметрами является то, что в ее рамках нельзя ввести понятие спектра мод системы. Эта модель не предусматривает также одной важной особенности резонаторов – то, что они возбуждаются не заданным напряжением $U(t)$, а волной, которая приходит от генератора и частично поглощается в резонаторе, а частью отажается от него.

1.2 Добротность собственная и нагруженная

Модель с использованием длинной линии (рис. 1.2) позволяет учесть распределенный характер возбуждения колебаний в резонаторе, а также ввести чрезвычайно важные в теории резонаторов понятия собственной и нагруженной добротностей. Длинная линия представляет собой два подводящих проводника, длина которых много больше длины волны, распространяющейся по линии, а поперечные размеры – много меньше

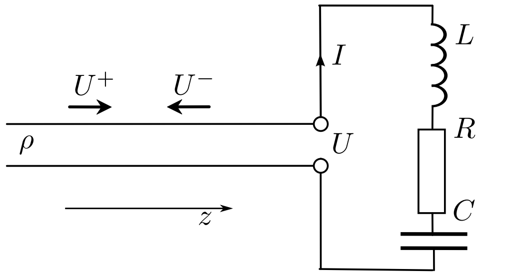


Рис. 1.2: Колебательный контур, подключенный к длинной линии.

этой длины волны. Такие проводники имеют емкость и индуктивность, пропорциональные длине. Примерами длинной линии могут служить коаксиальный телевизионный антенный кабель и витая пара в разводке локальных компьютерных сетей.

Пространственное распределение напряжения и тока в длинной линии без дисперсии и потерь описываются при помощи выведенных Оливером Хевисайдом из уравнений Максвелла так называемых телеграфных уравнений (по специальности Хевисайд был телеграфистом):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -L_s \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C_s \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где z – координата, L_s – распределенная индуктивность (индуктивность на единицу длинны линии), C_s – распределенная емкость, ω – частота. Можно отметить, что телеграфные уравнения при введении эквивалентных параметров достаточно хорошо описывают распространение сигналов в любых системах с поперечными электромагнитными волнами, даже если их характерные размер сравнимы и больше длины волны.

Решение уравнений (1.10) в Фурье виде можно представить в виде бегущих волн

$$U = U^+ e^{-i(\omega t - \beta z)} + U^- e^{-i(\omega t + \beta z)}, \tag{1.11}$$

$$I = \frac{1}{\rho}\left[U^+ e^{-i(\omega t - \beta z)} - U^- e^{-i(\omega t + \beta z)}\right], \tag{1.12}$$

где константа распространения выражается в виде $\beta = \omega\sqrt{L_s C_s}$, U^+ и U^- – амплитуды волн напряжения бегущих в разных направлениях.

Пусть на колебательный контур, расположенный в начале оси z, падает волна с амплитудой $U^+(t)$, а отражается от контура волна с амплитудой $U^-(t) = \mathcal{R}_u U^+(t)$, где $\mathcal{R}_u$ - коэффициент отражения по напряжению. Напряжения в падающей и отраженной волне связаны с токами равенствами:

$$\begin{aligned} U^+ &= \rho I^+ \\ U^- &= -\rho I^-, \end{aligned} \tag{1.13}$$

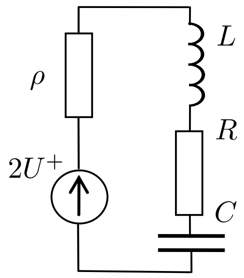


Рис. 1.3: Эквивалентная схема колебательного контура, соединенного с длинной линией на рис. 1.2

где ρ – волновое сопротивление линии. Полные ток I и напряжение U на конце линии с присоединенной нагрузкой Z ($Z = U/I$) вводятся как

$$\begin{aligned} U &= U^+ + U^- \\ I &= I^+ + I^-. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Пользуясь приведенными соотношениями (1.13, 1.14) легко показать, что коэффициент отражения по напряжению связан с импедансом нагрузки Z соотношением:

$$\mathcal{R} = \frac{Z-\rho}{Z+\rho}. \tag{1.15}$$

Запишем систему уравнений для напряжения и тока на контуре:

$$\begin{aligned} L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U^+(t) + U^-(t) = U^+(t)(1+\mathcal{R}_u), \\ \dot{q} = I = I^+(t) + I^-(t) = \frac{1}{\rho}U^+(t)(1-\mathcal{R}_u). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Умножим второе уравнение (1.16) на ρ и сложим с первым. В результате получим уравнение вынужденных колебаний для колебательного контура (1.1) с несколько отличающимися коэффициентами

$$L\ddot{q} + (R+\rho)\dot{q} + \frac{1}{C}q = 2U^+(t). \tag{1.17}$$

Таким образом, мы получили, что контур с линией эквивалентен обычному контуру на рис. 1.1, если заменить генератор источником напряжения $U(t) = 2U^+(t)$ с собственным сопротивлением ρ (рис. 1.3).

Разделив, как и ранее, уравнение (1.17) на L, получим обычное уравнение колебаний, но с дополнительным декрементом затухания $\delta_c = \frac{\rho}{2L}$:

$$\ddot{q} + 2(\delta_0 + \delta_c)\dot{q} + \omega_0^2 q = 2\frac{\omega_0}{\rho_0}U^+(t). \tag{1.18}$$

Этот дополнительный декремент затухания описывает связь резонатора с возбуждающей волной и описывает потери энергии излучаемой резонатором в линию. Он определяет так называемую нагруженную добротность

$$Q_c = \frac{\omega_0}{2\delta_c}. \tag{1.19}$$

Соотношение нагруженной и собственной добротности играет важнейшую роль в динамике резонаторов. Суммарная добротность Q определяется полным декрементом затухания $\delta = \delta_0 + \delta_c$:

$$Q = \omega_0 2\delta \tag{1.20}$$

и связана с собственными потерями и с потерями нагрузки следующими соотношением:

$$\frac{1}{Q} = 2\frac{\delta_0 + \delta_c}{\omega_0} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_c}, \tag{1.21}$$

Величина 2δ определяет ширину резонансной кривой или полосу фильтра, построенного на основе такого резонатора. Заметим, что наличие потерь связанных с нагрузкой резонатора отрицает существование резонаторов с бесконечной добротностью. Чтобы резонатор можно было возбудить, он должен иметь потери и конечную добротность.

Интерес представляет зависимость от частоты фазы отраженной волны вблизи резонанса. Можно показать, что крутизна фазовой характеристики стремится к бесконечности при $\delta_c \to \delta_0$. Этот парадокс находит объяснение в том, что при этом амплитуда отраженной волны стремится к нулю.

1.3 Укороченные уравнения

Для теоретического анализа высокодобротных колебаний удобно использовать так называемые укороченные уравнения. Приближение, используемое для вывода этих уравнений эквивалентно приближению вращающейся волны, широко используемом в оптике и квантовой механике.

Пусть $U^+(t) = \tilde{U}^+(t)e^{-i\omega t}$, где $\tilde{U}^+(t)$ – медленно изменяющаяся по сравнению с периодом колебаний $2\pi/\omega$ амплитуда напряжения накачки колебательного контура. Если потери в контуре малы и амплитуда колебаний мало изменяется за один период колебаний, $\delta \ll \omega_0$, можно перейти к укороченному уравнению для медленно меняющихся амплитуд $a(t)$. Полагая $q(t) = a(t)e^{-i\omega t}$ и пренебрегая членами, пропорциональными $\ddot{a}$ и $\delta\dot{a}$, мы приводим (1.18) к виду:

$$2i\omega\dot{a}(t) + 2\delta i\omega a(t) + (\omega^2 - \omega_0^2)a(t) = -\frac{\omega_0}{\rho_0}2\tilde{U}^+(t). \tag{1.22}$$

Если теперь положить, что $\omega - \omega_0 \sim \delta \ll \omega_0$ – отстройка сравнима с шириной линии и $\omega^2 - \omega_0^2 \simeq 2\omega(\omega - \omega_0)$, получим:

$$\dot{a}(t) + [\delta - i(\omega - \omega_0)]a(t) = i\frac{1}{\rho_0}\tilde{U}^+(t). \tag{1.23}$$

При выключении накачки колебания начинают затухать, а их амплитуда уменьшаться в соответствии с соотношением

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t + i(\omega - \omega_0)t}. \tag{1.24}$$

При этом мощность затухает как

$$|a(t)|^2 = |a_0|^2 e^{-2\delta t} = |a_0|^2 e^{-t/\tau^*}. \tag{1.25}$$

Величина $\tau^* = \frac{1}{2\delta}$ называется временем звона.

Другое определение добротности связано с энергетическими характеристиками колебаний:

$$Q = \frac{\omega_0 \mathcal{E}}{\mathcal{P}}, \tag{1.26}$$

где $\mathcal{E}$ – энергия, запасенная в резонаторе, а $\mathcal{P}$ – рассеиваемая мощность. Если $\mathcal{E} \propto |a(t)|^2$, то $\mathcal{P} = -\partial\mathcal{E}/\partial t\ |a(t)|^2/\tau^*$. Следовательно,

$$Q = \omega_0 \tau^*, \tag{1.27}$$

что эквивалентно первому определению добротности (1.20). Соотношения (1.20) и (1.27) используются для непосредственного измерения добротности резонаторов либо по времени затухания τ^* выходной мощности при резком выключении накачки, либо по ширине резонансного отклика 2δ.

1.4 Критическая связь

Рассмотрим стационарное решение выведенного уравнения колебаний (1.23) при накачке на резонансной частоте ($\omega = \omega_0$):

$$a = \frac{i\tilde{U}^+}{\delta\rho_0}. \tag{1.28}$$

Это решение дает амплитуду колебаний заряда на емкости, а значит, энергия, запасаемая в контуре, равна:

$$\mathcal{E} = \frac{|a|^2}{2C} = \frac{\tilde{U}^{+2}(t)}{2\delta^2\rho_0^2 C} = \frac{\delta_c}{(\delta_0 + \delta_c^2)}\mathcal{P}^+. \tag{1.29}$$

Здесь учтено, что мощность падающей волны $\mathcal{P}^+ = \tilde{U}^{+2}(t)/\rho$. Дифференцируя это выражение по δ_c можно найти, что при заданной мощности энергия в контуре максимальна, когда $\delta_c = \delta_0$. Этот режим называется критической связью.

Найдем коэффициент отражения (1.15) вблизи резонанса:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_u &= \frac{Z-\rho}{Z+\rho} = \frac{-i\omega L - \frac{1}{i\omega C} + R - \rho}{-i\omega L - \frac{1}{i\omega C} + R + \rho} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega(2\delta_0 - 2\delta_c)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega(2\delta_0 + 2\delta_c)} \\ &\simeq \frac{\delta_0 - \delta_c - i(\omega - \omega_0)}{\delta_0 + \delta_c - i(\omega - \omega_0)}.\end{aligned} \tag{1.30}$$

В пособии используется временная зависимость вида $e^{-i\omega t}$, как в квантовой механике и во многих современных книгах по оптике, в радиофизике же обычно используется зависимость вида $e^{i\omega t}$, поэтому знаки импедансов могут показаться непривычными. Выписанное выражение является характерным выражением для отклика резонансного фильтра первого порядка.

При резонансной накачке $\omega = \omega_0$, получим для коэффициента отражения по мощности:

$$\mathcal{R}_P = \mathcal{R}_u^2 = \frac{(1-\delta_c/\delta_0)^2}{(1+\delta_c/\delta_0)^2}. \tag{1.31}$$

Т. е. при $\delta_0 = \delta_c$ коэффициент отражения обращается в нуль и вся падающая мощность поглощается в резонаторе.

Задание 2. *Найдите зависимость от частоты фазы отраженной волны вблизи резонанса. Покажите, что крутизна фазовой характеристики стремится к бесконечности при $\delta_c \to \delta_0$. Объясните полученный результат.*

Итак, на примере колебательного контура с сосредоточенными параметрами мы ввели большинство параметров используемых в описании резонаторов. В следующей части мы обсудим распределенные колебательные системы.

1.5 Низкочастотные распределенные системы

Распределенной системой является физическая система, размеры которой сравнимы с характерной длиной волны электромагнитного поля в ней. Одним из простейших примеров распределенной системы, с которой мы уже в этой главе столкнулись, является длинная линия.

Простейший идеальный распределенный резонатор – это отрезок длинной линии. Его аналогия в оптике – резонатор Фабри-Перо. Рассмотрим отрезок линии длиной d. На разомкнутых концах линии ток равен нулю. Поскольку

$$I = (I^+ e^{i\beta z} + I^- e^{-i\beta z})e^{-i\omega t}, \tag{1.32}$$

это возможно, если $I^+ = -I^-$ при $z = 0$ и

$$\sin \beta d = 0, \tag{1.33}$$

что достигается, если ток в линии имеет резонансные частоты

$$\omega_m = \frac{\pi m}{d\sqrt{L_s C_s}}, \tag{1.34}$$

здесь m – целое число определяющее номер моды колебаний. Величина характеризующая частотную отстройку одной моды от другой,

$$\omega_{\text{осд}} = \frac{\partial \omega_m}{\partial m} = \frac{\pi}{d\sqrt{L_s C_s}} \tag{1.35}$$

называется областью свободной дисперсии резонатора(ОСД). Основное отличие распределенной системы от системы с сосредоточенными параметрами состоит в наличии бесконечного числа мод в системах с распределенными параметрами и только одной моды в системе с сосредоточенными параметрами.

1.6 Объемные резонаторы

Объемным резонатором электромагнитных волн является устройство, в котором из-за граничных условий образуется стоячая или бегущая по замкнутому пути волна, амплитуда которой затухает при отсутствии подкачки энергии за время много большее периода колебаний. В отличие от устройств с сосредоточенными параметрами типа колебательного контура или полуволнового отрезка длинной линии, в объемном резонаторе все размеры порядка или много больше длины волны в среде, заполняющей резонатор. Свойства объемного резонатора определяются свойствами его границ и заполняющей среды. Поля в резонаторе описываются уравнениями Максвелла с соответствующими граничными условиями.

Радиочастотный колебательный контур с сосредоточенными параметрами работает до мегагерцового частотного диапазона, а его размеры на много порядков меньше длины волны. Для того чтобы получить резонансный элемент в гигагерцовом и террагерцовом диапазоне, очевидно, надо радикально увеличить резонансную частоту, а следовательно уменьшить индуктивность и емкость. Уменьшить индуктивность можно уменьшив сначала до одного количество витков катушки, а затем взяв большое количество таких одинарных витков, соединенных параллельно. Из этих витков мы сделаем стенки резонатора. Сохраним при этом форму конденсатора, раздвинув слегка обкладки, разместив их на близко расположенных торцах внутренних цилиндров, получится резонатор с сосредоточенной емкостью (рис. 1.4). Как и в колебательном контуре, дважды за период вся энергия в таком резонаторе сосредотачивается в емкостном зазоре в виде энергии электрического поля. Через четверть периода энергия распределяется по объему резонатора в магнитном поле. Такой резонатор обладает целым рядом интереснейших свойств. В частности, именно с помощь такого резонатора

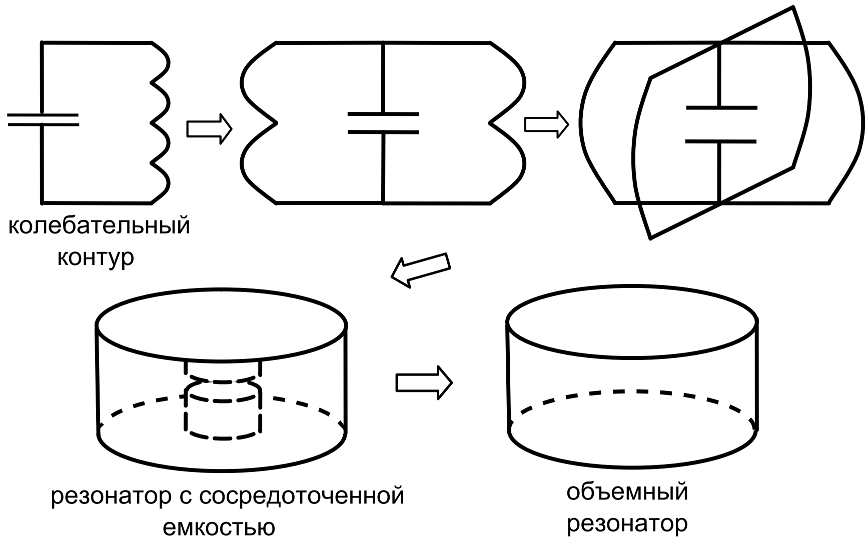


Рис. 1.4: Превращение колебательного контура в резонатор с сосредоточенной емкостью и в объемный резонатор

была достигнута рекордная координатная чувствительность. Однако такой резонатор пригоден лишь для СВЧ диапазона, для оптики он не годится. Если мы уменьшим и емкость, раздвигая обкладки и ликвидируя емкостной зазор, мы в конце концов получим простейший цилиндрический объемный резонатор.

Поле в объемном резонаторе можно представить в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E(t)\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[a(t)e^{-i\omega t} + a^*(t)e^{i\omega t}\right]\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}). \tag{1.36}$$

При этом временная часть $E(t)$ подчиняется дифференциальному уравнению колебаний, как и заряд в обычном контуре. Медленно изменяющаяся амплитуда $a(t)$ обычно подчиняется укороченному уравнению в приближении вращающейся волны. Пространственное распределение удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\mathbf{e}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{e}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.37}$$

Уравнение Гельмгольца порождает в замкнутом объеме собственные ортогональные собственные решения, которые мы будет называть электромагнитными модами резонатора, а соответствующие дискретные частоты этих мод – собственными частотами. Мы уже столкнулись с модами, обсуждая собственные колебательные частоты длинной линии. Для описания свойств резонатора удобно выбрать систему ортонормированных мод, так чтобы

$$\int \mathbf{e}_i(\mathbf{r})\mathbf{e}_j^*(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{ij}, \tag{1.38}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Ортогональность мод справедлива только для идеального закрытого резонатора без потерь, изолированного от окружающего пространства. Таких резонаторов, очевидно, в природе не существует. При наличии внутренних потерь и излучения в окружающее пространство интегралы по объему могут расходиться, моды становятся неортогональными, а частоты комплексными. Более того, и само понятия моды уже нельзя определить как собственные решения системы. Тем не менее, если добротность резонатора велика, подход ортогональных мод является обычно хорошим приближением. В этом случае часто говорят о квазинормальных модах. Под модами резонатора мы будем в этом случае понимать такие колебания в системе, вид которых точно воспроизводится в свободной системе через период колебаний. При этом из-за затухания коэффициент ослабления за период равен $e^{-\delta T} = e^{-\pi/Q}$.

Полезно ввести величину, называемую эффективным объемом моды. Это такой объем, который занимало бы поле величиной равной максимальной и с той же энергией, если бы оно было распределено по этому объему равномерно.

$$V_{eff} = \frac{\int \epsilon |\mathbf{e}(\mathbf{r})|^2 dV}{\max(\epsilon |\mathbf{e}(\mathbf{r})|^2)} \tag{1.39}$$

Эффективный объем обычно меньше физического объема резонатора.

Задание 3. *Рассмотрите резонатор в форме параллелипипеда с металлическими стенками. Покажите, что* $V_{eff} = \frac{d_x d_y d_z}{8} = \frac{V}{8}$.

Иногда удобно использовать другую нормировку мод, менее удобную с точки зрения математики, но более физически наглядную

$$\max |\mathbf{e}_m(\mathbf{r})|^2 = 1, \tag{1.40}$$

тогда $V_{eff} = \int |\mathbf{e}_m(\mathbf{r})|^2 dV$. Амплитуда a будет в этом случае иметь смысл максимальной амплитуды электрического поля в резонаторе. Для приложений квантовой механики удобна нормировка

$$\int |\frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \mathbf{e}_\hbar(\mathbf{r})|^2 dV = \hbar\omega, \tag{1.41}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, и тогда амплитуде a можно придать смысл оператора уничтожения фотонов, а $|a|^2$ соответствует числу фотонов в резонаторе.

Выбор нормировки будем далее в каждом случае оговаривать.

Естественно предположить, что минимальный размер резонатора должен быть сравним с кубом длиной волны поля, сконцентрированного в этом резонаторе.

Объемные резонаторы простейшего типа широко применяются в СВЧ технике. К сожалению, для оптики простые объемные резонаторы с металлическими стенками не годятся. Это легко понять. Если размеры резонатора порядка длины волны, это значит, что за время порядка периода колебаний электромагнитная волна в резонаторе сталкивается с его стенками. Поскольку коэффициент отражения оптической волны от поверхности металла не лучше 0.8-0.9, это означает, что добротность будет невелика. Следовательно, необходимо, чтобы волна сталкивалась со стенками как можно реже, чего можно добиться лишь увеличением размера резонатора и улучшением коэффициента отражения. Таким образом, слишком короткие оптические резонаторы с размерами порядка длины волны с высокой добротностью получить не удается.

Одним из решений является создание многомодового резонатора, в котором только ограниченное число мод обладают заданной добротностью, а остальные моды низкодобротны. При создании квантового генератора А.М.Прохоров в 1958 г. предложил использовать открытый квазиодномерный резонатор, высокодобротные колебания в котором получаются вследствие многократных отражений электромагнитной волны от системы зеркал, то есть резонатор типа интерферометра Фабри-Перо. Размеры такого резонатора достаточно велики в одном выделенном направлении, а в остальных могут быть малыми, сравнимыми с длиной волны. Как показали Фокс и Ли, только моды, распространяющиеся в этом выделенном направлении обладают большой добротностью, а остальные быстро затухают благодаря сильному росту дифракционных потерь на оконечных зеркалах конечного размера. Тем самым наряду с континумом низкодобротных мод в таком резонаторе существует набор дискретных мод с высокой добротностью.

1.7 Классические оптические резонаторы

Простейшим резонатором с разряженным за счет дифракционных потерь спектром является резонатор Фабри-Перо, подробному рассмотрению которого будет посвящена Глава 3. Это резонатор, образованный двумя зеркалами, расположенными на расстоянии d. Зеркала обладают коэффициентом отражения по мощности $\mathcal{R}$.

Добротность резонатора типа Фабри-Перо выражается следующим соотношением:

$$Q = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}} kd, \tag{1.42}$$

здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

В соответствии с выражением (1.42) при тех же зеркалах добротность резонатора прямо пропорциональна длине.

Современная технология изготовления многослойных диэлектрических покрытий и прецизионной полировки позволила получить зеркала с коэффициентом отражения $\mathcal{R} = 1 - 0.8 \times 10^{-6}$ (так называемые “суперзеркала”). Добротность в резонаторе типа Фабри-Перо с характерной длиной порядка 2 мм с такими зеркалами составит $Q = 9 \times 10^9$ ($Q = 6 \times 10^8$. Однако такие зеркала не лишены недостатков. Существующие диэлектрические суперпокрытия весьма чувствительны к внешним влияниям и быстро деградируют при обычных условиях. Эти покрытия узкополосны, т.е. хорошо отражают излучение только в узкой полосе вблизи заданной длины волны. Резонаторы Фабри-Перо малого размера чрезвычайно чувствительны к акустическим колебаниям, что осложняет их использование в большинстве прецизионных экспериментов.

Кроме технических ограничений добротность обычных квазиодномерных оптических резонаторов связана прямой пропорциональностью с их линейными размерами. Это вступает в противоречие как с потребностями экспериментальной техники – необходимостью работать с малым числом квантов и малым объемом локализации поля, так и с потребностями в миниатюризации компонентов, диктуемыми развитием волоконной и интегральной оптики.

1.8 Резонаторы с модами шепчущей галереи

Большая часть настоящего пособия посвящена свойстам резонаторов с модами шепчущей галереи (МШГ). Резонаторы с МШГ вполне могут стать следующим поколением резонаторов после резонаторов Фабри-Перо в микрооптике, подобно тому, как твердотельная схемотехника пришла на смену электровакуумным приборам в радиоэлектронике. Резонаторы с МШГ начали развиваться в середине прошлого века, хотя сама история МШГ насчитывает около столетия. Такое название моды получили по аналогии с акустическими модами в Шепчущей галерее собора Святого Павла в Лондоне, которые исследовал и объяснил лорд Рэлей.

Впервые на возможность создания электромагнитных резонаторов с использованием МШГ, возникающих при полном внутреннем отражении от поверхности аксиально-симметричного тела, указал в 1939 году Роберт Рихтмайер [1] (один из руководителей американского проекта водородной бомбы). Им был проведен расчет распределения электромагнитных полей внутри и снаружи сферического и тороидального резонаторов - именно такие резонаторы из плавленого кварца получили в настоящее время в оптике наибольшее распространение. Рихтмайер показал, что в открытых диэлектрических резонаторах с модами полного внутреннего отражения принципиальное ограничение на добротность оказывает срыв электромагнитного поля с выпуклой внешней поверхности (радиационная добротность) и привел оценки этого вида потерь. Как оказалось, излучательная добротность экспоненциально растет с ростом отношения радиуса резонатора к длине волны и поэтому не препятствует достижению сколь угодно высоких значений добротности. В теории волноводов такие потери известны как потери на изгибе.

Резонаторы с МШГ СВЧ диапазона получили широкое применение в экспериментальной физике и радиотехнике. Их главной особенностью является высокая добротность, составляющая около 10^8 при температуре жидкого азота и свыше 10^9 при окологелиевых температурах (лейкосапфир Al_2O_3, длина волны $\lambda \sim 3$ см, диаметр резонатора $D \sim 10$ см), которая ограничена СВЧ-поглощением в материале. При уменьшении линейных размеров резонатора на три-четыре порядка и при использовании материала с достаточно малыми собственными потерями оказывается возможным создание высокодобротного оптического диэлектрического микрорезонатора с такими модами. Идея таких резонаторов состоит в том, чтобы радикально уменьшить потери при отражении от границ, перейдя от нормального падения лучей к скользящему.

Наиболее простой формой резонатора, в которой возможны МШГ, является сферическая. Теоретическое исследование взаимодействия сферических частиц с электромагнитными волнами имеет более чем столетнюю историю и начинается с работ Рэлея (1971) по рассеянию света в атмосфере. Большой вклад в разработку теории рассеяния внесли работы многих ученых конца XIX, начала XX века. Но наиболее известны теоретические работы Ми рассмотревшего рассеяние света на сферических частицах с комплексным показателем преломления в среде с потерями и Дебая исследовавшего рассеяние на шаре в виде ряда по преломленным и отраженным волнам различного порядка. В рамках теории Ми вычисляется матрица рассеяния плоской линейно поляризованной электромагнитной волны при ее падении на тело сферической формы в виде сложного ряда специальных функций (см. главу 6). Полюсы матрицы рассеяния соответствуют собственным модам диэлектрической сферы, что стало понятно лишь в наше время. Дебай, по-видимому первый обнаружил существование мод свободных колебаний диэлектрической сферы.

В оптическом диапазоне МШГ впервые косвенно наблюдались еще в в 1961 г. по снижению порога лазерной генерации в шариках диаметром 1-2 мм из флюорита (CaF_2), активированного ионами Sm^{2+}. Интересно, что именно флюорит в настоящее время наиболее широко применяется при создании дисковых оптических микрорезонаторов в которых была продемонстрирована наибольшая добротность.

В конце 70-х годов был обнаружен эффект сверхтонкого оптического резонанса ранее предсказанный Ирвайном. Этот эффект проявляется в экспериментах по лазерной левитации, оптическому давлению и упругому рассеянию электромагнитных волн на диэлектрических сферических и цилиндрических телах как возникновение узких пиков коэффициента ослабления, рассеяния, поглощения и светового давления при вариациях длины волны падающего излучения и радиусов частиц. Можно отметить, что адекватное описание этих эффектов на основе теории Ми оказалось возможным лишь с появлением быстродействующих компьютеров и развитых численных методов.

Можно указать на следующие преимущества оптических резонаторов с МШГ по сравнению с традиционными резонаторами типа Фабри-Перо (РФП):

1. Гораздо меньший размер при той же добротности. У РФП добротность линейно зависит от размера, у резонаторов с МШГ излучательные потери падают с размерами экспоненциально. Резонаторы с размером порядка миллиметров могут иметь ту же добротность, что РФП длиной в десятки сантиметров.

2. Широкий диапазон частот в котором сохраняется высокая добротность резонаторов с МШГ. Высокодобротные резонаторы Фабри-Перо требуют использование суперзеркал, которые могут работать только в узком интервале частот.

3. Малая чувствительность твердотельных микрорезонаторов с МШГ к механическим воздействиям. У РФП требуется предпринимать специальные меры для обеспечения большой механической жесткости.

Можно указать и на следующие недостатки резонаторов с МШГ по сравнению с РФП:

1. Зеркала РФП можно закрепить на корпусе из материала с очень низким коэффициентом теплового расширения (инвар, суперинвар, ковар, ситалл, церодур, температурно-компенсированные стекла), тогда как тепловое расширение резонатора МШГ

задается материалом резонатора. Поэтому резонаторы с МШГ больше подвержены тепловым флуктуациям. С другой стороны, миниатюрный резонатор ШГ проще разместить в стабилизированном термостате, чем крупный РФП.

2. В резонаторах ФП свет большую часть времени распространяется в воздухе или в вакууме, что делает их нечувствительными к различным эффектам, связанным с материалом – нелинейность, термодинамические флуктуации, потери, дефекты.

В 1982 году В.Б.Брагинским было предложено для проведения квантово-невозмущающих измерений использовать оптические микрорезонаторы на эффекте полного внутреннего отражения в виде тороидального кварцевого резонатора, образованного закольцованным оптическим волокном. Эта идея стимулировала разработку оптических микрорезонаторов на физическом факультете МГУ и в 1989 году на кафедре физики колебаний были впервые продемонстрированы подобные сферические оптические микрорезонаторы с МШГ, изготовленные из плавленого кварца [2].

В 2003 году были продемонстрированы тороидальные кварцевые микрорезонаторы, изготавливаемые методами кремниевой микроэлектроники с последующим формованием с помощью CO_2 излучения [3]. Позже были разработаны и продолжают совершенствоваться разнообразные технологичные резонаторы, также основанные на идее МШГ, изготавливаемые с использованием технологий современной кремниевой электроники.

Развитием идеи стали оптические резонаторы с МШГ, вытачиваемые из кристаллических материалов [4].

Чрезвычайно перспективными также являются резонаторы на основе периодических структур с запрещенными зонами, так называемых фотонных кристаллов, которые позволяют получить микрорезонаторы с самым малым эффективным объемом, $V_{\text{эфф}} \sim \left(\frac{\lambda}{2n}\right)^3$ [5].

В настоящее время наблюдается устойчивый рост количества исследований, посвященных оптическим микрорезонаторам. В таблице на рис.1.5 представлено состояние исследований на сегодняшний день. Если говорить о резонаторах с очень высокой добротностью, там где требуется время звона больше 1 мкс, альтернативы резонаторам с модами шепчущей галереи просто нет.

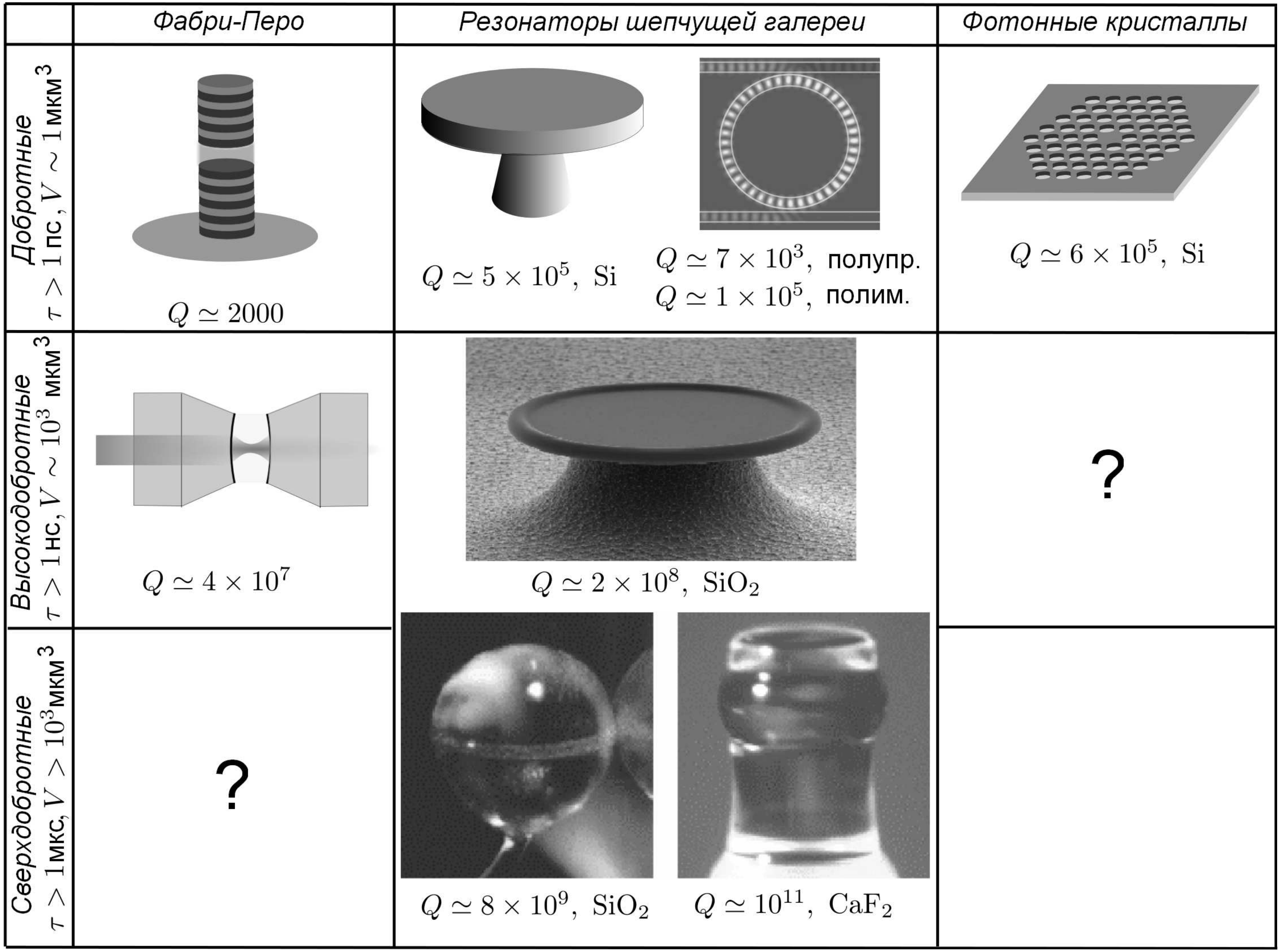


Рис. 1.5: Типы оптических микрорезонаторов.

Глава 2

Электродинамическа мод резонатора

2.1 Уравнения Максвелла в среде

В основе теории открытых резонаторов лежат уравнения Максвелла, которые в системе СИ при отсутствии токов и зарядов имеют вид:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – соответственно, электрическая и магнитная индукция; $\mathbf{J}$. В изотропной среде $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ и $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, где μ и ϵ – магнитная и диэлектрическая относительные проницаемости среды, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$Н/А^2 и $\epsilon_0 = 1/(c^2\mu_0) \simeq 8.854 \times 10^{-12}$ Ф/м, соответственно, электрическая и магнитная константы, $c = 299792458$ м/с (в точности по определению системы единиц СИ) – скорость света в вакууме.

В общем случае анизотропной среды проницаемости $\hat{\mu}$ и $\hat{\epsilon}$ – тензоры:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \\
\mathbf{B} &= \mu_0 \hat{\mu} \mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В немагнитной среде $\mu = 1$. Также вводятся векторы электрической поляризации и намагничения, определяемые соотношениями (обратите внимания на исторически сложившуюся несимметричность их определения):

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\
\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\
\mathbf{P} &= \epsilon_0 \hat{\chi}_e \mathbf{E}, \\
\mathbf{M} &= \hat{\chi}_m \mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Взяв дивергенцию от первого и второго уравнения (2.1), и учитывая, что дивергенция ротора равна нулю, легко видеть, что третье и четвертое уравнения Максвелла при отсутствии источников являются избыточными, поскольку удовлетворяются автоматически (с точностью до не зависящих от времени компонентов).

На врезках приведены основные свойства векторных операторов, фигурирующих в уравнениях Максвелла, и некоторые полезные соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

В декартовой системе координат оператор набла имеет вид:

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.4}$$

В недекартовых ортогональных координатах (ξ, η, ζ):

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathbf{i}_\xi + \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathbf{i}_\eta + \frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathbf{i}_\zeta, \qquad (2.5)\\
\nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left[\frac{\partial(h_\eta h_\zeta U_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(h_\xi h_\zeta U_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_\xi h_\eta U_\zeta)}{\partial \zeta}\right],\\
\nabla \times \mathbf{U} &= \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\begin{vmatrix} h_\xi \mathbf{i}_\xi & h_\eta \mathbf{i}_\eta & h_\zeta \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ h_\xi U_\xi & h_\eta U_\eta & h_\zeta U_\zeta \end{vmatrix}\\
&= \left[\frac{\partial(h_\zeta U_\zeta)}{h_\eta h_\zeta \partial \eta} - \frac{\partial(h_\eta U_\eta)}{h_\eta h_\zeta \partial \zeta}\right]\mathbf{i}_\xi + \left[\frac{\partial(h_\xi U_\xi)}{h_\xi h_\zeta \partial \zeta} - \frac{\partial(h_\zeta U_\zeta)}{h_\xi h_\zeta \partial \xi}\right]\mathbf{i}_\eta\\
&+ \left[\frac{\partial(h_\eta U_\eta)}{h_\xi h_\eta \partial \xi} - \frac{\partial(h_\xi U_\xi)}{h_\xi h_\eta \partial \eta}\right]\mathbf{i}_\zeta,\\
(\mathbf{V}\cdot\nabla)u &\equiv \frac{V_\xi}{h_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathbf{i}_\xi + \frac{V_\eta}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathbf{i}_\eta + \frac{V_\zeta}{h_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathbf{i}_\zeta,\\
\nabla^2 u &= \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\times\\
&\times\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\right].
\end{aligned}$$

Кроме декартовой системы координат далее будем использовать цилиндрическую: ($h_\rho = h_z = 1$, $h_\phi = \rho$) и сферическую ($h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r\sin\theta$) системы.

$$h_\chi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \chi}\right)^2} \tag{2.6}$$

– параметры Ламе ортогональной системы координат.

Часто приходится пользоваться соотношениями, определяющими двойные векторные операции:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{grad} u &\equiv \nabla\cdot(\nabla u) \equiv \nabla^2 u,\\
\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{U} &\equiv \nabla(\nabla\cdot\mathbf{U}) = \nabla^2\mathbf{U} + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{U}),\\
\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{U} &\equiv \nabla\times(\nabla\times\mathbf{U}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{U}) - \nabla^2\mathbf{U},\\
\operatorname{rot}\operatorname{grad} u &\equiv \nabla\times(\nabla u) = 0,\\
\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{U} &\equiv \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{U}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Выпишем также полезные соотношения для векторных операций от произведения функций:

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(u\mathbf{V}) = u\nabla\cdot\mathbf{V} + (\nabla u)\cdot\mathbf{V},\\
&\nabla\times(u\mathbf{V}) = u\nabla\times\mathbf{V} + (\nabla u)\times\mathbf{V},\\
&\nabla\cdot(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = \mathbf{V}\cdot\nabla\times\mathbf{U} - \mathbf{U}\cdot\nabla\times\mathbf{V},\\
&\nabla(\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}) = (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \mathbf{U}\times\nabla\times\mathbf{V} + \mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{U},\\
&\nabla\times(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{U} - (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \mathbf{U}(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \mathbf{V}(\nabla\cdot\mathbf{U}).
\end{aligned}$$

Задание 4. *Выведите выражения для двойных операций* $\nabla\times\nabla\times\mathbf{U}$ *и* $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U})$ *в произвольной криволинейной системе координат.*

2.2 Волновое уравнение

В изотропных средах при отсутствии сторонних зарядов и токов и выборе временной зависимости поля в виде $e^{-i\omega t}$ уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= -\frac{i}{\mu_0\mu\omega}\nabla\times\mathbf{E},\\
\mathbf{E} &= \frac{i}{\epsilon_0\epsilon\omega}\nabla\times\mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Действуя оператором ротор на эти уравнения, с учетом третьего и четвертого уравнений в (2.1), получаем однородные векторные уравнения Гельмгольца для полей:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} &= 0,\\
\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

здесь

$$k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} = \epsilon\mu k_0^2, \tag{2.11}$$

k_0 – постоянная распространения в вакууме.

При комплексной записи полей в виде $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ подразумевается, что переход к реальным полям производится следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t)\right]. \tag{2.12}$$

2.3 Теорема Пойнтинга. Мощность и энергия поля.

Если первое уравнение в системе Максвелла (2.1) скалярно умножить на $\mathbf{H}$, а третье на $-\mathbf{E}$ и сложить, то получим, согласно выписанному ранее представлению дивергенции векторного произведения:

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \equiv \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon\epsilon_0}{2}\mathbf{E^2} + \frac{\mu\mu_0}{2}\mathbf{H^2}\right]. \tag{2.13}$$

Мы доказали теорему Пойнтинга. Слагаемые

$$\begin{aligned} w_E &= \frac{\epsilon\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2, \\ w_H &= \frac{\mu\mu_0}{2}\mathbf{H}^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

описывает плотность электрической и магнитной энергии. Таким образом, в правой части равенства стоит изменение полной плотности энергии во времени. Вектор под дивергенцией – вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \tag{2.15}$$

который описывает поток мощности электромагнитной энергии, переносимой в единицу времени через единицу площади. Его интеграл по сечению распространяющейся волны равен мощности:

$$\mathcal{P} = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2.16}$$

Проинтегрировав это уравнение по объему и, воспользовавшись теоремой о дивергенции, получим:

$$\oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int \left[\frac{\epsilon_0\epsilon}{2}\mathbf{E^2} + \frac{\mu_0\mu}{2}\mathbf{H^2}\right] dv = 0. \tag{2.17}$$

Это фактически закон сохранения энергии, показывающий, что при отсутствии внутренних потерь изменение энергии в объеме в единицу времени происходит только за счет мощности, переносимой через границу объема.

При вычислении мощности и энергии следует помнить о соглашении для комплексной записи полей (2.12). Из указанного соглашения следует, что усредненные за период плотности энергии электрического и магнитного поля равны, соответственно:

$$\begin{aligned}\langle w_E\rangle &= \frac{\epsilon\epsilon_0|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{4}\\ \langle w_H\rangle &= \frac{\mu\mu_0|\tilde{\mathbf{H}}|^2}{4}\\ S &= \frac{1}{4}\left[\tilde{\mathbf{E}}^*\times\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^*\right].\end{aligned}\qquad(2.18)$$

В высокодобротных резонаторах, когда относительные потери за период малы и $\langle w_E\rangle \simeq \langle w_H\rangle$, полная плотность энергии

$$\begin{aligned}w &= \langle w_E\rangle+\langle w_H\rangle \simeq \frac{\epsilon\epsilon_0|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2}\simeq\frac{\mu\mu_0|\tilde{\mathbf{H}}|^2}{2},\\ \mathcal{E} &= \int_V w(\mathbf{r})d\mathbf{r},\end{aligned}\qquad(2.19)$$

где $\mathcal{E}$ – энергия электромагнитного поля, заключенная в объеме V. В свободно распространяющейся поперечной электромагнитной (TEM) волне, например, в лазерном пучке вдали от фокуса:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &\simeq \frac{\mathbf{k}}{2\omega\mu\mu_0}|\tilde{\mathbf{E}}|^2=\mathbf{i_k}\frac{c}{n}\frac{\epsilon\epsilon_0|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2}\\ &\simeq \frac{\mathbf{k}}{2\omega\epsilon\epsilon_0}|\tilde{\mathbf{H}}|^2=\mathbf{i_k}\frac{c}{n}\frac{\mu\mu_0|\tilde{\mathbf{H}}|^2}{2}=\mathbf{i_k}\frac{c}{n}w.\end{aligned}\qquad(2.20)$$

Этими же выражениями можно пользоваться и для направляющих волноводов, для которых справедливо соотношение для мощности:

$$\mathcal{P}=\frac{c\beta\epsilon_0}{2k_0}\int|\tilde{\mathbf{E}}|^2ds,\qquad(2.21)$$

где $\beta\sim nk_0$ – продольная постоянная распространения. В оптике абсолютное значение вектора имеет смысл интенсивности волны $I=|\mathbf{S}|$.

Простейшей формой распространяющихся электромагнитных колебаний является плоская волна. Пусть для определенности она распространяется вдоль оси z и поляризована вдоль оси x:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= E_0e^{ikz}\mathbf{i}_x\\ \tilde{\mathbf{H}} &= -\frac{i}{\mu\mu_0\omega}\frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial z}\mathbf{i}_y=E_0\frac{\sqrt{\epsilon\epsilon_0}}{\sqrt{\mu\mu_0}}e^{ikz}\mathbf{i}_y\\ \mathbf{S} &= \frac{c}{n}\frac{\epsilon\epsilon_0}{2}\tilde{E}_0^2\mathbf{i}_z.\end{aligned}\qquad(2.22)$$

В дальнейшем мы обычно рассматриваем поля в комплексной форме в виде частотных Фурье компонент, а знак тильды для краткости опускаем.

В оптике немагнитных материалов свойства среды описываются показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon}$. В среде с собственными потерями показатель преломления и проницаемость являются комплексными величинами, с которыми коэффициент затухания мощности плоской волны связан соотношением

$$\alpha = 2\mathrm{Im}(n)k_0. \tag{2.23}$$

Поскольку в большинстве рассматриваемых случаев собственные оптические потери малы, при решении электродинамических задач обычно удобно считать показатель преломления действительным, учитывая собственные потери потом, в числе других видов потерь.

Для нахождения собственных полей в резонаторе требуется найти решения уравнения (2.10), удовлетворяющие граничным условиям. Граничные условия получаются из уравнений Максвелла предельным переходом.

$$\begin{aligned} &(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = 0, \\ &(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор, нормали к поверхности. Иначе, обозначая индексом τ тангенциальные проекции поля, а индексом n – нормальные

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\tau 1} = \mathbf{E}_{\tau 2}, \quad \mathbf{H}_{\tau 1} = \mathbf{H}_{\tau 2}, \\ \mathbf{D}_{n1} = \mathbf{D}_{n2}, \quad \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Четыре граничных условия при отсутствии зарядов и токов не являются независимыми. На практике обычно достаточно взять подходящую пару условий, остальные будут в соответствии с уравнениями Максвелла удовлетворяться автоматически.

Для классического объемного резонатора с идеально проводящими стенками условия на этих стенках имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\tau = 0, \\ \mathbf{H}_n = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4 Векторы Римана-Зильберштейна

Основные способы нахождения распределения полей связаны с решением уравнений Гельмгольца (2.10). Однако существует и другой малоизвестный способ записи уравнений Максвелла в весьма симметричной форме, который позволяет достаточно просто получить решения некоторых задач с использованием вектора Римана-Зильберштейна (RS-векторы) [6]. Этот подход имеет достаточно глубокий физический смысл, особенно с точки зрения квантовой механики.

Введем новое векторное комплексное поле (СИ):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\epsilon\epsilon_0}\mathbf{E} + i\sqrt{\mu\mu_0}\mathbf{H} \right]. \tag{2.27}$$

Легко видеть, что электрическое и магнитное поле легко выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon\epsilon_0}} \left[\mathbf{F} + \mathbf{F}^* \right] \\ \mathbf{H} &= -\frac{i}{\sqrt{2\mu\mu_0}} \left[\mathbf{F} - \mathbf{F}^* \right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Уравнения Максвелла при этом сводятся к единственному уравнению:

$$\nabla \times \mathbf{F} = i\frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \tag{2.29}$$

поскольку, как легко видеть, беря дивергенцию от обеих частей этого уравнения, другое равенство $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ удовлетворяется автоматически. Переходя к Фурье представлению

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \tilde{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r})e^{i\omega t} \right], \tag{2.30}$$

получаем, что поле $\tilde{\mathbf{F}}^{\mp}(\mathbf{r})$ является собственной функцией оператора ротор:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{F}}^{\mp} = \pm k\tilde{\mathbf{F}}^{\mp}. \tag{2.31}$$

При выбранной нормировке $\mathbf{F}$ имеет смысл комплексной амплитуды совокупного электромагнитного поля, а ее квадрат модуля

$$|\mathbf{F}|^2 \equiv \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0\epsilon}{2}\mathbf{E^2} + \frac{\mu_0\mu}{2}\mathbf{H^2} \tag{2.32}$$

имеет смысл плотности энергии. В резонаторе электрические и магнитные поля обмениваются энергией, в результате чего их действительные амплитуды осциллируют. Амплитуда же $\mathbf{F}$ по модулю меняется медленно.

Не сложнее выражается через $\mathbf{F}$ и вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = -\frac{ic}{\sqrt{\epsilon\mu}}\mathbf{F}^* \times \mathbf{F}. \tag{2.33}$$

Кроме того, квадрат RS-вектора $\mathbf{F^2}$ является инвариантом преобразований Лоренца.

Вектор Римана-Зильберштейна можно связать с оператором вторичного квантования поля резонатора, и такой подход кажется весьма перспективным. Можно приписать $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^*$ смысл собственных функций, соответствующих циркулярно поляризованным волнам или даже квантовых волновых функций фотонов[7].

Рассмотрим пример решения с помощью RS-вектора практической задачи. Найдем в цилиндрических координатах выражение для поля, которое распространяется вдоль оси z без дифракции. То есть, распределение поля не зависит от z иначе как волновым образом $e^{i\beta z}$, где β - некоторая постоянная распространения вдоль z. Из условия периодичности по ϕ это поле должно иметь зависимость вида $e^{im\phi}$, где m – целое. Таким образом,

$$\tilde{F}_{\rho,z,\phi}(\mathbf{r}) = \tilde{F}_{\rho,z,\phi}(\rho)e^{i\beta z+im\phi}. \tag{2.34}$$

Подставляя эти выражения в (2.31), и приравнивая компоненты, получаем уравнение для $\tilde{F}_z$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{F}_z}{\partial\rho}\right) + \left[k^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right]\tilde{F}_z = 0. \tag{2.35}$$

Решение этого уравнения известно:

$$\tilde{F}_z(\rho) = CJ_m(\sqrt{k^2-\beta^2}\rho), \tag{2.36}$$

где $J_m(x)$ - цилиндрическая функция Бесселя, которая у нас еще не раз возникнет в дальнейшем. Ее свойства рассмотрены в 4-ой главе. Если константа C выбрана действительной, то найденное решение порождает пучок с нулевой компонентой H_z и компонентой E_z, описываемой функцией Бесселя, а если мнимой, то нулю равна компонента E_z, а, соответственно, компонента H_z распределена по Бесселю.

Таким образом, мы показали, что бездифракционными пучками, распространяющимися в пространстве без изменения, являются бесселевы пучки. В отличие от плоских волн, которые также не испытывают дифракции, бесселевы пучки достаточно локализованы в пространстве и их плотность энергии спадает как $1/\rho$. Бесселев пучок – такая же идеализация как и плоская волна, в которой дифракция просто не определена. Реальный, ограниченный в пространстве Бесселев пучок, постепенно распадается при распространении. В последнее время интерес к бездифракционным бесселевым пучкам достаточно велик. Оптические микрорезонаторы с МШГ, которые являются основной темой курса, позволяют приготавливать бесселевы пучки высокого порядка (с большим угловым моментом).

Задание 5. *Выведите уравнение (2.35), получите выражения для остальных компонент F_ρ, F_ϕ бесселевого пучка и выпишите выражения для электрического и магнитного полей.*

2.5 Потенциалы Дебая

Волновое уравнение представляет собой систему трех связанных скалярных уравнений, которые распадаются на три скалярных уравнения Гельмгольца только в декартовой системе координат. Для удобства поиска решений, удовлетворяющих граничным условиям, желательно выбирать координатные системы, координатные поверхности которых близки или совпадают с поверхностью резонатора. Один из подходов к решению векторного уравнения Гельмгольца состоит во введении скалярных функций ψ, удовлетворяющих скалярному волновому уравнению Гельмгольца, через которые затем могут быть выражены векторные поля:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\psi &= \nabla \times (\mathbf{f}\psi), \\ \mathbf{N}_\psi &= \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times (\mathbf{f}\psi), \\ \mathbf{O}_\psi &= \nabla\psi. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Здесь $\mathbf{f}$ – некоторая векторная функция координат. Вектор $\mathbf{O}_\psi$, описывающий потенциальную часть поля, который можно положить равным нулю при отсутствии свободных зарядов, в дальнейшем не рассматривается.

Если для некоторой ортогональной координатной системы существует функция $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, пропорциональная координатному вектору, то произвольное векторное поле, удовлетворяющее векторному уравнению Гельмгольца в этой системе можно представить в виде суммы векторных функций, пропорциональных векторам $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Как следует из уравнений Максвелла (2.1) и (2.38), электрическому полю, пропорциональному $\mathbf{M}$ соответствует магнитное поле типа $\mathbf{N}$ и наоборот. При этом векторные потенциалы $\mathbf{f}\psi$ соответствуют векторам Герца.

Поскольку в этом случае поле пропорциональное $\mathbf{M}$ нормально вектору $\mathbf{f}$, его компоненты являются тангенциальными к соответствующей $\mathbf{f}$ координатной поверхности. Если границы резонатора совпадают с одной из таких координатных поверхностей, то удовлетворение граничным условиям существенно упрощается.

Такое представление возможно только в ограниченном числе ортогональных координатных систем [8]. В декартовой системе координат в качестве вектора $\mathbf{f}$ может выступать любой координатный вектор. Соответствующие решения представляют собой плоские волны. Для цилиндрической системы координат $\mathbf{f} = \mathbf{i}_z$, и в сферической $\mathbf{f} = \mathbf{r}$. Кроме того, такое представление возможно в конической координатной системе, а также относительно оси z в параболической и эллиптической цилиндрических системах, которые не представляют для нас здесь особого интереса. К сожалению, в других ортогональных координатных системах, в том числе в таких интересных с точки зрения МШГ системах с осью симметрии, как сфероидальная, тороидальная, параболическая и бисферическая, такое удобное представление не получается.

2.6 Квазинормальные моды открытых резонаторов

В открытых диэлектрических резонаторах поле нельзя считать полностью сосредоточенным в ограниченном объеме. Связь поля такого резонатора с излучением в свободном пространстве играет в описании его свойств ключевую роль. Это отличает открытые диэлектрические резонаторы от объемных резонаторов ограниченных металлическими стенками, которые применяются в СВЧ технике. Кроме того, открытые резонаторы имеют комплексные собственные частоты, при этом мнимая часть описывает потерю со временем энергии в резонаторе при выключении внешнего источника. Как следствие, моды резонатора не являются собственными функциями эрмитовой системы и комплексно сопряженные решения уже не являются решениями той же самой системы, а значит внутреннее произведение $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \int \psi_i^*\psi_j dv$ не обеспечивает систему полных и ортогональных мод.

Две этих характерные особенности создают определенные сложности для математического описания поля мод, которые становятся еще больше при корректном квантовомеханическом описании системы. Этой проблеме посвящено множество публикаций с различными подходами, но единой теории пока не создано.

На большом расстоянии от резонатора, покинувшее его поле излучения, можно представить в виде сферической расходящейся волны:

$$E \propto \frac{1}{r}e^{-i\omega(t-r/c)}. \tag{2.39}$$

Если $\omega = \omega' - i\omega''$, что соответствует затухающему со временем полю в резонаторе, то поле такой собственной квазинормальной моды экспоненциально нарастает с расстоянием: $E \propto e^{\omega'' r/c}/r$. В этом парадоксе нет ничего удивительного — излучение на большом расстоянии соответствует затухающему полю, которое было в резонаторе давно, когда амплитуда была много больше, чем в текущий момент. Однако такая особенность вызывает сложности при попытках корректно математически нормировать моды в резонаторе.

Рассмотрим характерный пример. Пусть требуется найти сдвиг частоты поля моды $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = a^{(0)}\mathbf{E}_0$, где $\mathbf{E}_j$ – ортонормированные собственные моды невозмущенного резонатора с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(0)}(r)$, под действием некоторого возмущения $\epsilon^{(1)}(r)$ – это может быть как возмущение поверхности, так и некоторая флуктуация в объеме.

$$\begin{aligned}
&\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon^{(0)}(\mathbf{r}) + \epsilon^{(1)}(\mathbf{r}) \\
&\omega = \omega_0^{(0)} + \omega_0^{(1)} \\
&\nabla\times\nabla\times\mathbf{E_j} - \epsilon^{(0)}\frac{(\omega_j^{(0)})^2}{c^2}\mathbf{E_j} = 0.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Нижние индексы нумеруют моды резонатора, верхние – порядок возмущения. В случае эрмитовой системы с сохраняющейся энергией, поле новой моды в возмущенном резонаторе можно разложить по базису ортонормированных мод невозмущенного резонатора.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (a_0^{(0)} + a_0^{(1)})\mathbf{E_0}(\mathbf{r}) + \sum_{j\neq 0} a_j^{(1)}\mathbf{E_j}(\mathbf{r}). \tag{2.41}$$

Подставляя все выражения в новое уравнение Гельмгольца

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} - (\epsilon^{(0)}(\mathbf{r}) + \epsilon^{(1)}(\mathbf{r}))\frac{(\omega_0^{(0)} + \omega_0^{(1)})^2}{c^2}\mathbf{E} = 0, \tag{2.42}$$

оставляя только члены первого порядка малости,

$$\epsilon^{(0)} \sum_{j\neq 0} a_j^{(1)}(\mathbf{r})[(\omega_j^{(0)})^2 - (\omega_0^{(0)})^2]\mathbf{E_j}(\mathbf{r}) \\ - 2a_0^{(0)}\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})\omega_0^{(0)}\omega_0^{(1)}\mathbf{E_0}(\mathbf{r}) - a_0^{(0)}\epsilon^{(1)}(\mathbf{r})(\omega_0^{(0)})^2\mathbf{E_0}(\mathbf{r}) = 0, \tag{2.43}$$

домножим выражение на $\mathbf{E_0^*}(\mathbf{r})$ и из условия ортогональности после интегрирования по объему получим:

$$\frac{\omega_0^{(1)}}{\omega_0^{(0)}} = -\frac{1}{2}\frac{\int \epsilon^{(1)}(r)|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2 dv}{\int \epsilon^{(0)}(r)|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2 dv}. \tag{2.44}$$

Аналогично, домножая на $\mathbf{E_j^*}(\mathbf{r})$, и интегрируя по объему можно найти и коэффициенты $a_j^{(1)}$:

$$a_j^{(1)} = a_0^{(0)} \frac{(\omega_0^{(0)})^2}{(\omega_j^{(0)})^2 - (\omega_0^{(0)})^2} \frac{\int \epsilon^{(1)}(r)\mathbf{E}_j^*(\mathbf{r})\mathbf{E}_0(\mathbf{r})dv}{\int \epsilon^{(0)}(r)|\mathbf{E}_j(\mathbf{r})|^2 dv}. \tag{2.45}$$

Однако такие выражения лишены смысла для открытого резонатора, в котором, как мы видели, интеграл в знаменателе будет расходиться на бесконечности.

Математически строгое описание возможно только если одновременно рассматривается поле в резонаторе и во всем окружающем его пространстве. Следует однако отметить, что для высокодобротных резонаторов с МШГ этими тонкостями часто можно пренебречь, считая, что практически все поле заключено в объеме, ограниченном поверхностью, на которой происходит срыв излучения (внешняя каустика) или даже самой поверхностью резонатора.

Рассмотрим один из возможных подходов [9]. Рассмотрим для простоты невырожденный случай, когда все частоты резонатора различны. Случай вырожденных мод рассматривается аналогично. Пусть требуется методом теории возмущений найти собственную частоту возмущенной системы (2.42), полагая

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) \tag{2.46}$$

Пусть диэлектрик присутствует только в некоторой области размером a и на бесконечности $\epsilon^{(0)} \to 1$, $\epsilon^{(1)} \to 0$.

Вычитая из 2.42 уравнение, которому удовлетворяет невозмущенное поле $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$ (уравнение (2.40) при $j = 0$):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(0)} - \epsilon^{(0)}\frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\mathbf{E}^{(0)} = 0, \tag{2.47}$$

получим:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(1)} = \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2}\epsilon^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{E} + \frac{2\omega^{(0)}\omega^{(1)}}{c^2}\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})\mathbf{E} \tag{2.48}$$

Умножим это уравнение на $\mathbf{E}^{(0)}$ и проинтегрируем по объему некоторой сферы большого радиуса $R \to \infty$. Существенно, что мы домножаем выражение не на комплексно сопряженное поле, поскольку оно не удовлетворяет при наличии потерь или излучения исходному уравнению Гельмгольца.

$$\int_{V_R} \mathbf{E}^{(0)} \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2} \epsilon^{(0)} \mathbf{E}^{(1)} \right] dV$$
$$= \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2} \int_{V_R} \epsilon^{(1)} (\mathbf{E}^{(0)})^2 \, dV + \frac{2\omega^{(0)}\omega^{(1)}}{c^2} \int_{V_R} \epsilon^{(0)} (\mathbf{E}^{(0)})^2 \, dV \tag{2.49}$$

При этом в правой части мы заменили $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}^{(0)}$, снова пренебрегая членами второго порядка малости.

Используя теорему Грина:

$$\int_{V_R} \mathbf{E}^{(0)} \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \frac{(\omega^{(0)})^2}{c^2} \epsilon^{(0)} \mathbf{E}^{(1)} \right] dV \tag{2.50}$$
$$= \int_{V_R} [\nabla^2 \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{E}^{(1)} - \nabla^2 \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{E}^{(0)}] dV = \int_{V_R} \left[\frac{\partial \mathbf{E}^{(0)}}{\partial r} \mathbf{E}^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial r} \mathbf{E}^{(0)} \right] ds$$

На большом расстоянии R волна превращается в сферическую – $\mathbf{E}^{(0)} \propto \frac{1}{r} e^{i\omega^{(0)} r/c}$, при этом $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} \propto \frac{1}{r} e^{i(\omega^{(0)}+\omega^{(1)})r/c}$, и для последнего интеграла получаем:

$$\to \frac{1}{c} \int_{V_R} \left[i\omega^{(0)} \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{E}^{(1)} - (i(\omega^{(0)} + \omega^{(1)})(\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(0)}) - i\omega^{(0)} \mathbf{E}^{(0)}) \mathbf{E}^{(0)} \right] ds$$
$$\to -\frac{i\omega^{(1)}}{c} \int_{V_R} (E^{(0)})^2 ds \tag{2.51}$$

Откуда:

$$\frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(0)}} = -\frac{1}{2} \frac{\int\limits_{V_R} \epsilon^{(1)} (\mathbf{E}^{(0)})^2 \, dV}{\int\limits_{V_R} \epsilon^{(0)} (\mathbf{E}^{(0)})^2 \, dV + \frac{ic}{2\omega^{(0)}} \int\limits_{\partial V_R} (\mathbf{E}^{(0)})^2 \, ds}. \tag{2.52}$$

Задание 6. *Покажите независимость знаменателя от R при $R \to \infty$.*

Отличие полученного выражения от (2.44) состоит в наличии интеграла по поверхности. Альтернативный метод избавления от расходимости на бесконечности состоит в выборе подходящего контура интегрирования в верхней полуплоскости, однако рассмотренный подход имеет явное преимущество для аналитических и численных расчетов. Важно, что получающиеся при этом интегралы являются комплексными величинами, что является проявлением неэрмитовости системы.

Глава 3

Резонатор Фабри-Перо

В 1899 году французы Шарль Фабри и Альфред Перо описали многолучевой интерферометр, состоящий из двух плоскопараллельных частично посеребренных стеклянных пластин, который позволил существенно повысить разрешение спектральных измерений. Однако триумфальное шествие этого устройства, уже как резонатора Фабри-Перо (РФП), способного запасать оптическую энергию, начинается после того, как почти одновременно в 1958 году Прохоров и Шавлов с Таунсом предложили его использовать для создания лазера. Современные патентные тяжбы, продолжавшиеся до 1987 года, свидетельствуют, правда, что приоритет следует отдать Гордону Гоулду, предложившему схему с открытым резонатором на год раньше (Гоулд также первым предложил слово “лазер”). Наконец, 16 мая 1960 года Теодор Мейман запустил первый в мире лазер на основе, освещаемого лампой-вспышкой, рубинового стержня, резонатором Фабри-Перо в котором служил сам стержень с посеребренными торцами. Позднее, в том же 1960 году заработал первый гелий-неоновый лазер в лаборатории имени Белла, в котором уже использовался метровый резонатор Фабри-Перо с плоскими юстируемыми зеркалами с отражающим многослойным диэлектрическим покрытием.

3.1 Матрица рассеяния

Для описания поведения волны при падении на границу раздела двух сред удобно пользоваться формализмом матрицы рассеяния $\mathbf{S}$ [10, Гл. 3]. Если на оптическую систему падают волны с амплитудами a_i, то в линейной системе они будут связаны с выходящими из системы в результате преломления и отражения волнами b_i соотношением

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}. \tag{3.1}$$

Для описания преломления и отражения достаточно взять матрицу 2×2 (рис. 3.1):

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2, \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

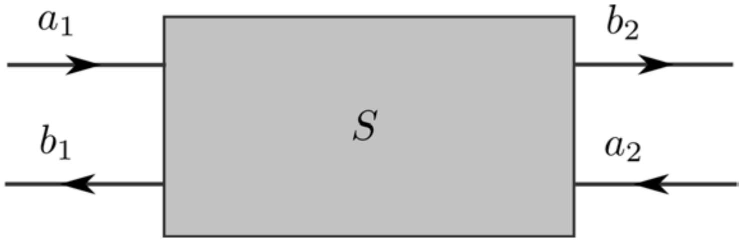


Рис. 3.1: Схема оптического элемента, описываемого матрицей рассеяния

Если в оптическом элементе, описываемом матрицей рассеяния, нет потерь, то должно выполняться условие сохранения энергии:

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2, \tag{3.3}$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{a}^+\mathbf{a} = \mathbf{b}^+\mathbf{b} = \mathbf{a}^+\mathbf{S}^+\mathbf{S}\mathbf{a}. \tag{3.4}$$

Верхний индекс '+' означает транспонированную комплексно-сопряженную матрицу

$$\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}^{*T}. \tag{3.5}$$

Следовательно,

$$\mathbf{a}^+(\mathbf{I} - \mathbf{S}^+\mathbf{S})\mathbf{a} = 0, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, и значит матрица $\mathbf{S}$ должна быть унитарной:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}^+\mathbf{S} = \mathbf{I} \\ &\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Покомпонентно расписывая условие (3.7):

$$\begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

получаем:

$$\begin{aligned} &|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = |S_{22}|^2 + |S_{21}|^2 = 1, \\ &S_{21}S_{11}^* + S_{22}S_{12}^* = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Если на рисунке (3.1) все волны $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ пустить в противоположных направлениях, то входными сигналами станут волны $\mathbf{b}$, а выходными – $\mathbf{a}$. Такое обращение времени эквивалентно замене $\mathbf{a} \to \mathbf{b}^*$ и $\mathbf{b} \to \mathbf{a}^*$. При этом матрица рассеяния не изменится ($\mathbf{a}^* = \mathbf{S}\mathbf{b}^*$) или

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^*\mathbf{b}. \tag{3.10}$$

Домножая слева обе части равенства на обратную матрицу, получаем:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{S}^*]^{-1}\mathbf{a}. \tag{3.11}$$

Сравнивая теперь последний результат с (3.7) и (3.1) и получаем, что

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^+, \tag{3.12}$$

что означает требование симметричности матрицы $\mathbf{S}$, и значит $S_{12} = S_{21}$. Вместе с этим новым условием в итоге формулируем такие требования на компоненты $\mathbf{S}$:

$$\begin{aligned} &S_{12} = S_{21}, \\ &|S_{11}|^2 = |S_{22}|^2, \\ &|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1, \\ &S_{12}S_{11}^* + S_{22}S_{12}^* = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Эти уравнения связывают 4 комплексных или 8 действительных значений, определяющих матрицу рассеяния. При этом первое уравнение является комплексным, второе и третье - действительным, а последнее, хотя и является комплексным, но, учитывая первые два, накладывает ограничение лишь на фазы комплексных коэффициентов. В итоге получаем пять независимых действительных уравнений, а значит в системе без потерь матрица рассеяния полностью описывается тремя действительными параметрами. Вводя амплитуды и фазы компонентов $\mathbf{S}$, легко показать, что такая матрица имеет вид:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} |S_{11}|e^{i\psi_r} & \sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{i\psi_t} \\ \sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{i\psi_t} & |S_{11}|e^{i(2\psi_t-\pi-\psi_r)} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

С коэффициентами матрицы рассеяния связаны энергетические коэффициенты отражательной $\mathcal{R}$ и пропускательной способности $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{R} = |S_{11}|^2 = |S_{22}|^2, \qquad \mathcal{T} = |S_{12}|^2. \tag{3.15}$$

При этом

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1. \tag{3.16}$$

Во многих случаях, когда интересует лишь поведение волны вдали от рассеивателя, удобно выбрать входные и выходные поверхности, не совпадающие в общем случае с границами раздела, так, чтобы фазовые углы $\psi_r = \pi$ и $\psi_t = \pi/2$. В этом случае матрица рассеяния принимает простой вид:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -R & iT \\ iT & -R \end{bmatrix}, \\ &R^2 + T^2 = 1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Рис. 3.2: Схема оптического резонатора Фабри-Перо.

При этом коэффициенты R и T имеют смысл амплитудных коэффициентов отражения и пропускания $R^2 = \mathcal{R}$, $T^2 = \mathcal{T}$. Знак минус перед R выбран так, чтобы соответствовать полному отражению электромагнитной волны от металлической поверхности – при этом суммарное электрическое поле падающей и отраженной волны на границе должно обращаться в нуль и соответствовать узлу стоячей волны. Такой вид имеет, в частности, матрица рассеяния для волны, проходящей через границу раздела диэлектриков при переходе из оптически менее плотной в оптически более плотную среду. При переходе в обратном направлении амплитудный коэффициент отражения положителен.

3.2 Одномерный резонатор Фабри-Перо

Рассмотрим, как введенная матрица рассеяния может быть использована для нахождения характеристик интерферометра Фабри-Перо, образованного двумя зеркалами с коэффициентами отражения R_1 и R_2 и, соответственно, пропускания T_1 и T_2, расположенными на расстоянии d, заполненный средой с показателем преломления n (рис. 3.2). Если потерь в зеркалах нет, то

$$T_1 = \sqrt{1 - R_1^2}, \qquad T_2 = \sqrt{1 - R_2^2}, \tag{3.18}$$

в противном случае

$$R_i^2 + T_i^2 = \mathcal{R}_i + \mathcal{T}_i = 1 - \mathcal{L}_i, \tag{3.19}$$

где $\mathcal{L}_i$ – потери на зеркале. Обозначим амплитуду волны, падающей на первое входное зеркало, через a_1, а отраженной через b_1. Соответственно, амплитуда выходящей из второго зеркала b_2. За один проход внутри резонатора волна приобретает фазовый сдвиг

$$\Delta\phi = 2nk_0 d. \tag{3.20}$$

Здесь $k_0 = 2\pi/\lambda$ – постоянная распространения волны в вакууме (λ – длина волны в вакууме).

Обычно для нахождения поля внутри резонатора a_0 используется геометрическая прогрессия [10]. Волна ищется как сумма прошедшей через входное зеркало волны $a_T = iT_1 a_1$ и затем частичных многократно отраженных от обоих зеркал волн:

$$a_0 = iT_1 a_1 \sum_{j=0}^{\infty} (R_1 R_2 e^{i\Delta\phi})^j = \frac{iT_1}{1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}}\, a_1, \tag{3.21}$$

Но можно тот же ответ, и даже в еще более интересной и более общей дифференциальной форме, получить сразу, рассмотрев условия на входном зеркале, на которое слева падает входная волна, а справа – внутренняя волна, но та, которая отошла от входного зеркала некоторое время $\Delta t = 2nd/c$ назад, потребовавшееся волне, чтобы пройти путь $2d$, отразится от второго зеркала и получить за это время набег фаз:

$$a_0(t) = iT_1 a_1 + R_1 R_2 a_0(t - \Delta t)\, e^{i\Delta\phi}. \tag{3.22}$$

В стационарном режиме, когда $a_0(t) = a_0(t - \Delta t)$ получается, естественно, тот же ответ, что и прежде. Рассмотрим сначала именно этот режим. Аналогично предыдущему, записывая условия для отраженной волны:

$$\begin{aligned} b_1 &= -R_1 a_1 - iT_1 R_2 e^{i\Delta\phi} a_0 = -\frac{R_1 - R_2(R_1^2 + T_1^2)e^{i\Delta\phi}}{1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}} a_1 \\ &= -\frac{R_1 - R_2(1 - \mathcal{L}_1)e^{i\Delta\phi}}{1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}} a_1, \end{aligned} \tag{3.23}$$

а для прошедшей через резонатор волны:

$$b_2 = iT_2 e^{i\Delta\phi/2} a_0 = -\frac{T_1 T_2 e^{i\Delta\phi/2}}{1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}}\, a_1. \tag{3.24}$$

В итоге мы можем записать все коэффициенты матрицы рассеяния резонатора ФП:

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{1 - R_1 R_2 e^{i\Delta\phi}} \begin{pmatrix} R_2 e^{i\Delta\phi}(1 - \mathcal{L}_1) - R_1 & -T_1 T_2 e^{i\Delta\phi/2} \\ -T_1 T_2 e^{i\Delta\phi/2} & R_1 e^{i\Delta\phi}(1 - \mathcal{L}_2) - R_2 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Наибольший общий интерес представляют РФП с одинаковыми зеркалами без потерь:

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \sqrt{1 - T_{1,2}^2} = \sqrt{\mathcal{R}} = \sqrt{1 - \mathcal{T}}, \\ \mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

В этом случае выражения для мощностей отраженной, прошедшей и циркулирующей внутри волны имеют вид:

$$|b_1|^2 = \frac{4\mathcal{R}\sin^2(\Delta\phi/2)}{(1-\mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R}\sin^2(\Delta\phi/2)}\,|a_1|^2,$$
$$|b_2|^2 = \frac{(1-\mathcal{R})^2}{(1-\mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R}\sin^2(\Delta\phi/2)}\,|a_1|^2,$$
$$|a_0|^2 = \frac{1-\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R}\sin^2(\Delta\phi/2)}\,|a_1|^2. \tag{3.27}$$

Задание 7. *Получите аналогичные выражения для произвольных зеркал с потерями.*

Максимумы пропускания наблюдаются когда

$$\Delta\phi/2 = \frac{\omega_m nd}{c} = m\pi,$$
$$f_m = \frac{mc}{2nd}. \tag{3.28}$$

Если в зеркалах и в среде, заполняющей резонатор, нет потерь, то на этих частотах знаменатель во всех выражениях минимален, отражения нет ($b_1 = 0$), а амплитуда прошедшей волны по модулю равна входной амплитуде. Чем меньше коэффициент отражения отличается от единицы, тем уже эти максимумы, превращающиеся в острые резонансные пики с лоренцевским профилем. Интерферометр превращается в резонатор.

При этом циркулирующая мощность внутри резонатора на резонансной частоте резко возрастает:

$$|a_0|^2 = \frac{1}{1-\mathcal{R}}|a_1|^2. \tag{3.29}$$

При использовании хороших зеркал $1-\mathcal{R} \ll 1$ и циркулирующая внутри мощность может быть на много порядков больше, чем входная.

Расстояние между соседними максимумами определяется соотношением:

$$f_{m+1} - f_m = \Delta f = \frac{c}{2nd}. \tag{3.30}$$

Как следует из этого соотношения, расстояния между максимумами пропускания резонатора не зависит от частоты, то есть спектр собственных частот идеального резонатора Фабри-Перо является эквидистантным.

Полоса пропускания резонатора Фабри-Перо $\Delta\lambda$ – это расстояние между максимумами пропускания, выраженными в длинах волн:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta f}{f}\lambda = \frac{\lambda^2}{2nd}, \tag{3.31}$$

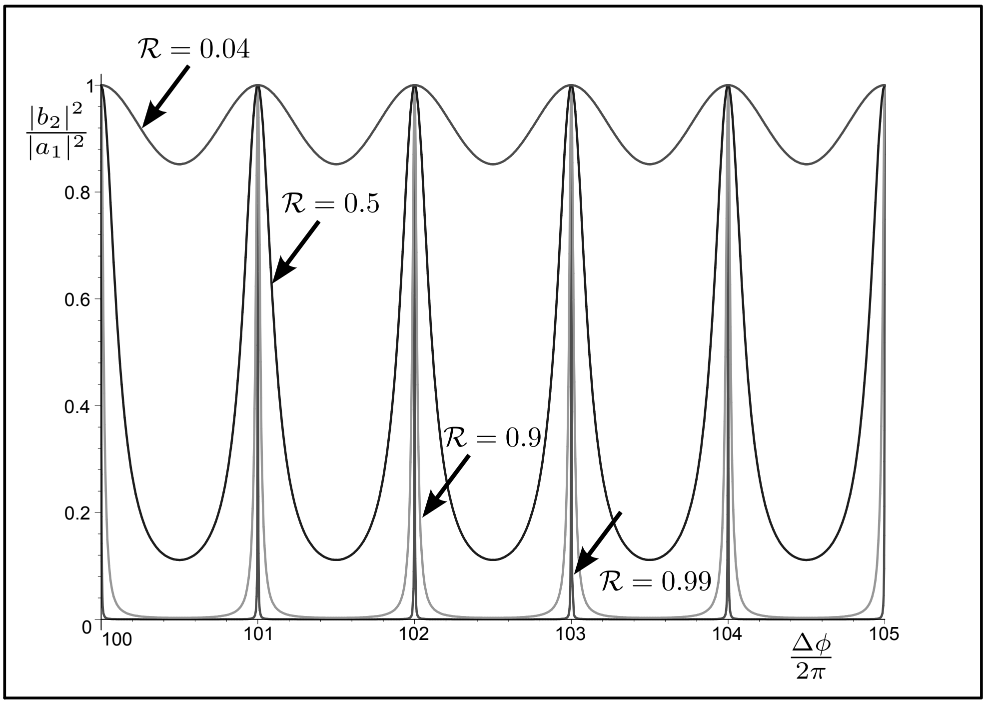


Рис. 3.3: Пики пропускания интерферометра Фабри-Перо при $\mathcal{R} = 0.04$ (стеклянная пластинка), $\mathcal{R} = 0.5$, $\mathcal{R} = 0.9$ и $\mathcal{R} = 0.99$.

Полная ширина максимумов пропускания по уровню 1/2 определяется из условия (см. 3.27):

$$\sin \Delta\phi/2 = \frac{1-\mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}}, \tag{3.32}$$

что при условии узких пиков пропускания $\Delta\phi/2 - m\pi \ll 1$ приводит к соотношению:

$$\delta f_{1/2} = \frac{(1-\mathcal{R})c}{2\pi\sqrt{\mathcal{R}}nd}, \tag{3.33}$$

Величина, определяемая отношением частотного расстояния между соседними однотипными модами (ОСД) к полосе пропускания отдельного резонанса

$$\frac{\Delta f}{\delta f_{1/2}} \equiv \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}}, \tag{3.34}$$

называется резкостью интерферометра и характеризует разрешающую способность интерферометра Фабри-Перо как фильтра излучения. ОСД и полоса пропускания легко измеряются экспериментально и поэтому резкостью удобно характеризовать и резонаторы, не имеющие зеркал. При этом появляется возможность сравнивать любой резонатор с эквивалентным резонатором Фабри-Перо.

Понятие резкости резонатора играет большую роль в теории оптических резонаторов. Во-первых, в отличие от добротности, резкость не зависит от размера резонатора типа Фабри-Перо, но зависит только от отражательной способности зеркал. Следовательно, она характеризует качество зеркал. Во-вторых, резкость характеризует возрастание мощности волны в резонаторе по сравнению с мощностью волны накачки. Наконец, в-третьих, резкость присуща только принципиально многомодовым распределенным системам.

А добротность резонатора по определению является отношением частоты резонанса к его полуширине:

$$Q = \frac{f}{\delta f_{1/2}} = \mathcal{F}\frac{2nd}{\lambda}. \tag{3.35}$$

3.3 Резонатор с потерями. Согласование связи

Рассмотрим резонатор Фабри-Перо с потерями в среде и с неидеальными зеркалами. Потери в среде можно описать, вводя мнимую часть показателя преломления на данной частоте $\mathrm{Im}(n) = \alpha/(2k_0)$, где α – коэффициент затухания мощности распространяющейся волны:

$$P(d) = |e^{ik_0nd}|^2 P(0) = e^{-\alpha d} P(0). \tag{3.36}$$

Удобно ввести коэффициент внутренних потерь на один проход

$$\mathcal{L}_0 = 2\alpha d. \tag{3.37}$$

Если потери малы, на резонансной частоте

$$e^{i\Delta\phi} = e^{-\alpha d} \simeq (1 - \alpha d) = 1 - \mathcal{L}_0/2. \tag{3.38}$$

Оказывается, что и в этом неидеальном случае можно добиться того, чтобы вся входная мощность попадала в резонатор на резонансной частоте и отражения бы отсутствовало.

Для того чтобы вся входная мощность попадала в резонатор необходимо выполнение условия $b_1 = 0$ на резонансной частоте. Считая, что зеркала достаточно хорошие, и пропускание с поглощением много меньше единицы, разложим коэффициенты отражения

$$R_i = \sqrt{1 - \mathcal{T}_i - \mathcal{L}_i} \simeq 1 - \mathcal{T}_i/2 - \mathcal{L}_i/2. \tag{3.39}$$

Из выражения (3.23) следует, что для обращения в нуль b_1 достаточно потребовать при резонансе равенства нулю числителя дроби:

$$\begin{aligned} &R_1 - R_2(R_1^2 + T_1^2)e^{-\alpha d} \simeq -\mathcal{T}_1/2 - \mathcal{L}_1/2 + \mathcal{T}_2/2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0/2 = 0 \\ &\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Мы пренебрегли здесь членами второго порядка малости. Полученное выражение имеет очень простой физический смысл: $\mathcal{T}_1$ – определяет связь резонатора с волной накачки и потери связи, а все остальные члены описывают другие виды потерь. Так, $\mathcal{T}_2$ можно интерпретировать как потери рассеяния резонатора на втором зеркале, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – поглощение в зеркалах, $\mathcal{L}_0$ – внутренние (собственные) потери резонатора. Таким образом, оптимальная связь с резонатором обеспечивается условием равенства потерь связи сумме всех остальных видов потерь. Легко показать, что именно при таком пропускании входного зеркала, амплитуда и мощность, циркулирующая внутри резонатора, максимальна. Действительно, найдем, при каком значении $\mathcal{T}_1$ достигается максимум a_0 на резонансной частоте (3.21):

$$a_0 = \frac{iT_1}{1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}}\,a_1 \simeq \frac{i2\sqrt{\mathcal{T}_1}}{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0}\,a_1. \tag{3.41}$$

Дифференцируя по $\mathcal{T}_1$ и приравнивая производную нулю, получаем то же самое равенство, что и ранее. При этом

$$|a_{0max}|^2 = \frac{1}{\mathcal{T}_1}|a_1|^2. \tag{3.42}$$

3.3.1 Укороченное уравнение для поля в резонаторе

Вернемся к выведенному ранее разностному уравнению (3.22). Используя приближение $a(t - \frac{2nd}{c}) \simeq a(t) - \frac{2nd}{c}\dot{a}(t)$, получим дифференциальное уравнение:

$$\dot{a}_0 + a_0\frac{c}{2nd}(1 - R_1R_2e^{i\Delta\phi}) = i\frac{T_1c}{2nd}a_1, \tag{3.43}$$

полагая, как и ранее $R_i \simeq 1 - \mathcal{T}_i/2 - \mathcal{L}_i/2$, $e^{i\Delta\phi} \simeq 1 + i2n\Delta k_0d - \alpha d$, и пренебрегая членами второго порядка малости, получить дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_0 + a_0(\delta_\Sigma - i\Delta\omega) = i\frac{T_1c}{2nd},\\
&\delta_\Sigma = \delta_0 + \delta_{1s} + \delta_{2s} + \delta_{1a} + \delta_{2a},\\
&\delta_0 = \frac{\alpha c}{2n}, \qquad \delta_{is} = \frac{\mathcal{T}_ic}{4nd}, \qquad \delta_{ia} = \frac{\mathcal{L}_ic}{4nd}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Мы получили укороченное уравнение, совершенно аналогичное тому, которое было выведено в первой главе для модели колебательного контура, связанного с длинной линией. Первый декремент δ_0 описывает внутренние потери в резонаторе. Ему соответствует собственная добротность:

$$Q_0 = \frac{\omega}{2\delta_0} = \frac{2\pi n}{\alpha\lambda}. \tag{3.45}$$

В случае согласованного резонатора δ_{1s} равна сумме всех остальных видов потерь, и тогда:

$$Q_\Sigma = \frac{\omega}{4\delta_{1s}} = \frac{\pi}{\mathcal{T}_1}\frac{2dn}{\lambda} \simeq \mathcal{F}\frac{2dn}{\lambda}, \tag{3.46}$$

что согласуется с выражением, полученным ранее.

3.3.2 Сканирование длины резонатора

Собственные частоты и соответствующие им длины волн удовлетворяют простому условию резонанса:

$$m\frac{\lambda_m}{2} = nd, \tag{3.47}$$

то есть на оптической длине резонатора укладывается целое число полуволн. При этом в резонаторе образуется стоячая волна и на поверхности зеркал приходятся узлы этой волны.

При медленном (по сравнению со временем звона) изменении длины Фабри-Перо резонатора, например, посредством продольного перемещения одного зеркала, приклеенного к пьезоэлектрическому пакету, изменяется и резонансная длинна волны в пропорции $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta d}{d}$ и, соответственно, смещается (свипируется) его частота. Изменяя, таким образом, резонансную длину волны резонатора лазера, можно тем самым менять длину волны одночастотного лазерного излучения. Такой способ сканирования широко применяется, когда требуется прецизионная перестройка длины волны в не слишком больших пределах. Перестройка волны одночастотного лазера имеет смысл лишь в пределах свободного спектрального диапазона, в противном случае, излучение лазера будет перескакивать на моды другого порядка, соответствующие другим номерам m.

$$\begin{aligned} &m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda, \\ &\Delta\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2nd}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

что с использованием полученной пропорции дает:

$$\Delta d \leq \frac{d}{m} = \frac{\lambda}{2n}, \tag{3.49}$$

то есть максимальная допустимая перестройка лазера достигается при изменении его длины на половину длины волны в среде – доли микрона. Такой порядок перемещения легко обеспечивают пьезопакеты. Чем короче резонатор, тем большую перестройку длины волны лазера обеспечивает такое изменение длины резонатора.

3.4 Гауссовы пучки

Поскольку резонатор Фабри-Перо является резонатором, не ограниченным боковыми стенками, поле распространяющихся в нем мод должно каким-то образом спадать в поперечном направлении, чтобы утечка энергии в этом направлении была мала. В декартовой или цилиндрической системе координат можно выбрать скалярный потенциал, соответствующий z компоненте поля. Этот потенциал будет удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца.

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0. \tag{3.50}$$

Будем искать решение в параксиальном приближении $\psi = u(x,y,z)e^{ikz}$, где $u(x,y,z)$ – медленно в масштабе длины волны изменяющаяся функция. Подставляя это решение в уравнение Гельмгольца и пренебрегая членом $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, как в методе медленно меняющихся амплитуд, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i2k\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{3.51}$$

Решением уравнения Гельмгольца является сферическая волна e^{ikr}/r. В параксиальном приближении для точек, прилежащих к оси z ($x^2 + y^2 \ll z^2$), r можно разложить в ряд Тейлора:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \simeq z + \frac{x^2+y^2}{2z},$$
$$\frac{e^{ikr}}{r} \simeq e^{ikz}\frac{1}{z}e^{i\frac{k(x^2+y^2)}{2z}} = e^{ikz}u(x,y,z). \tag{3.52}$$

Если $\psi(x,y,z)$ выбрать в качестве потенциала Дебая с векторной функцией $\mathbf{i}_x$ или, что тоже самое, выбрать векторный потенциал в виде:

$$\mathbf{A} = u(x,y,z)e^{ikz}\mathbf{i}_x, \tag{3.53}$$

можно получить выражения для электромагнитных полей:

$$\mu_0\mathbf{H} = \nabla\times(\mathbf{i}_x\psi) = ik\left[u\mathbf{i}_y + \frac{i}{k}\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{i}_z\right],$$
$$\mathbf{E} = i\omega\left[u\mathbf{i}_x + \frac{i}{k}\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}_z\right], \tag{3.54}$$

где мы, в соответствии с параксиальным приближением пренебрегли слагаемыми $\frac{\partial u}{\partial z}$ по сравнению с ku.

Можно проверить, что $u(x,y,z)$ в параксиальном приближении удовлетворяет полученному ранее укороченному уравнению, также как и любая другая функция вида $u(x,y,z+z_0)$. Для мнимого $z_0 = -ib$ получается функция, описывающая распространение гауссового пучка.

$$u_{00} = i\sqrt{\frac{kb}{\pi}}\left(\frac{1}{z-ib}\right)e^{ik\frac{x^2+y^2}{2(z-ib)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}w}e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}+\frac{ik(x^2+y^2)}{2K}-i\phi} \tag{3.55}$$
$$w^2(z) = \frac{2b}{k}(1+\frac{z^2}{b^2}), \qquad K(z) = \frac{z^2+b^2}{z}, \qquad \tan\phi = \frac{z}{b}$$

Здесь нормировочная константа выбрана так, чтобы

$$\int\int |u_{00}|^2 dx\, dy = 1. \tag{3.56}$$

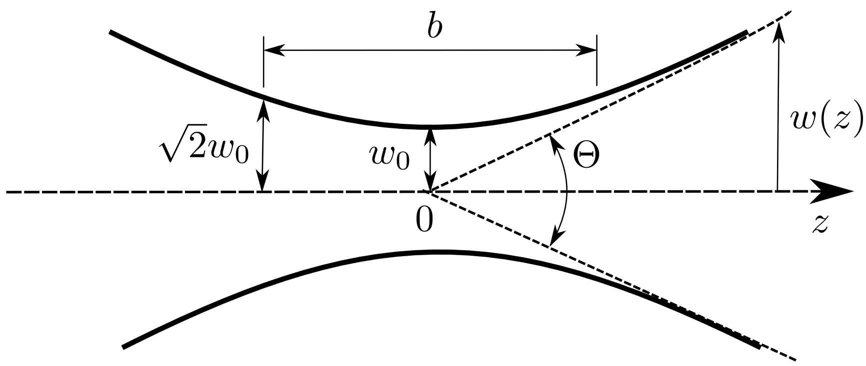


Рис. 3.4: Параметры гауссового пучка

Величина $K(z)$ описывает радиус кривизны фронта пучка, который распространяется вдоль оси z. Величина $w(z)$ показывает радиус пучка. Минимальный радиус при $z = 0$, равный $w_0 = \sqrt{2b/k}$ называется радиусом перетяжки. Величина $b = kw_0^2/2 = \pi w_0^2/\lambda$ называется конфокальным параметром. Параметры пучка удобно переписать через радиус перетяжки w_0:

$$\begin{aligned} w^2(z) &= w_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right] \\ K(z) &= \frac{z^2+(\pi w_0^2/\lambda)^2}{z} \\ \tan\phi &= \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Гауссов пучок с радиусом перетяжки w_0 (рис. 3.4) асимптотически расширяется в виде конуса с углом раскрыва

$$\Theta \simeq \frac{w}{z} \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.58}$$

3.5 Условия устойчивости РФП

Рассмотрим резонатор Фабри-Перо, образованный парой сферических зеркал. Пусть в нем образовалась стоячая волна, имеющая вид гауссового пучка с перетяжкой при $z = 0$, а отражающие поверхности зеркал с радиусами кривизны K_1 и K_2 пересекают ось z в точках $z = z_1$ и $z = z_2$. Понятно, что такая мода будет устойчива, если фаза волны на поверхности зеркал одинакова, что достигается, если радиус кривизны фазовых фронтов на поверхности зеркал совпадает с радиусом кривизны самих зеркал.

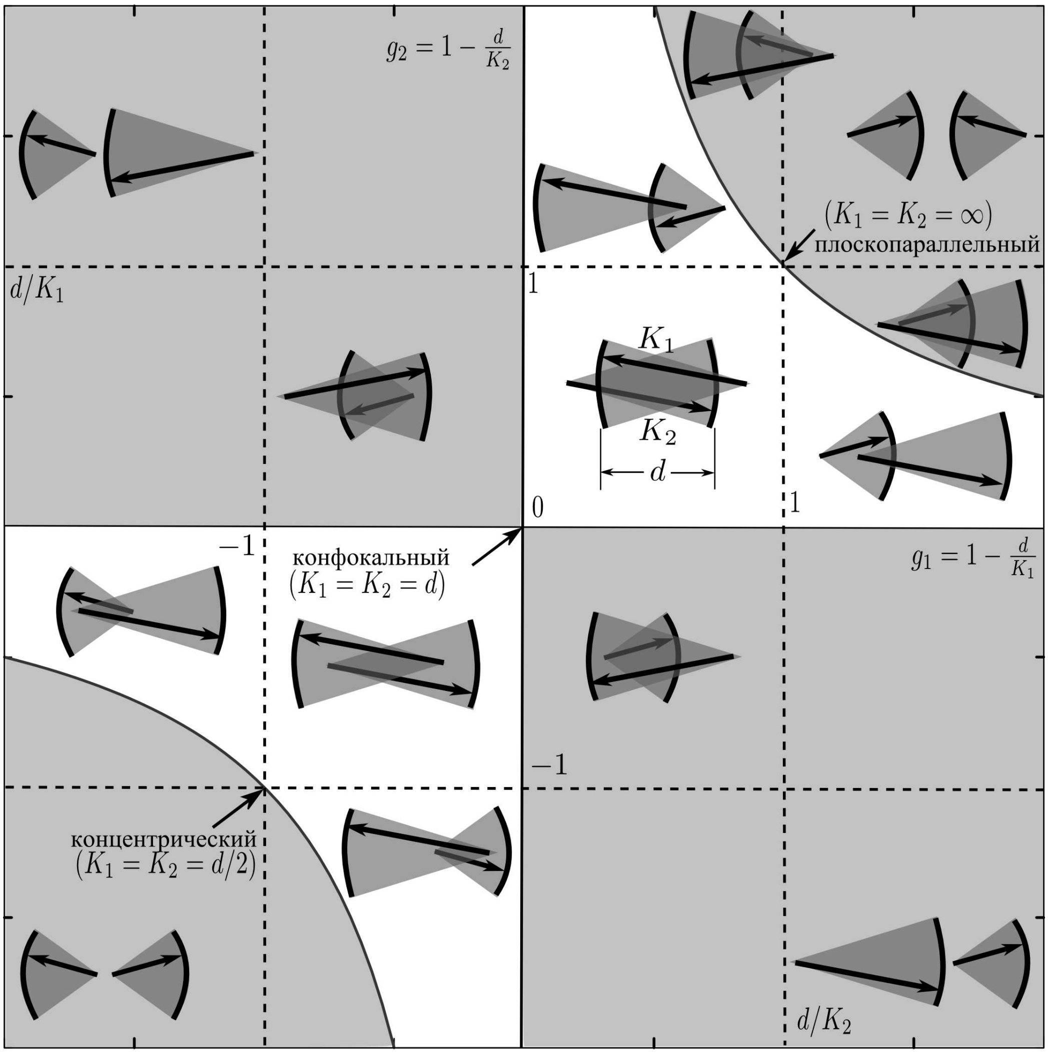


Рис. 3.5: Диаграмма устойчивости резонаторов типа Фабри-Перо

Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\frac{z_2^2 + b^2}{z_2} = K_2, \qquad \frac{z_1^2 + b^2}{z_1} = -K_1,$$
$$z_2 - z_1 = d. \tag{3.59}$$

После цепочки преобразований выразим b^2:

$$b^2 = \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2} = -z_1(K_1 + z_1) = \frac{d(K_1 - d)(K_2 - d)(K_1 + K_2 - d)}{(K_1 + K_2 - 2d)^2}. \tag{3.60}$$

Если ввести обозначения, $g_1 = 1 - \frac{d}{K_1}$ и $g_2 = 1 - \frac{d}{K_2}$, то радиусы пятен на поверхности зеркал определятся следующими выражениями:

$$w_1 = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}} \left[\frac{g_1}{g_2} \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right]^{1/4}, \qquad w_2 = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}} \left[\frac{g_2}{g_1} \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right]^{1/4}. \tag{3.61}$$

Задание 8. *Выведите выражения для* b^2, w_1 *и* w_2.

Эти величины действительны только если выполняются условия:

$$0 \le g_1 g_2 \le 1. \tag{3.62}$$

Эти условия графически изображаются в виде классической диаграммы Когельника-Бойда [11] (рис. 3.5). Устойчивые моды возможны только в незаштрихованных областях.

Можно указать и более простое эквивалентное правило определения устойчивости, не требующее обращения к диаграмме. Если каждое из двух зеркал резонатора представить в виде горизонтального отрезка, соединяющего центр кривизны зеркала $O_{1,2}$ и точку на поверхности $P_{1,2}$, то устойчивыми являются лишь те конфигурации, для которых два получающихся отрезка накладываются с пересечением, но при этом ни один из отрезков не лежит внутри другого. Иначе говоря, в последовательностях точек типа $O_1 P_2 P_1 P_2$ нижние индексы должны чередоваться (см. примеры конфигураций на рисунке).

3.6 Астигматические и обобщенные гауссовы пучки

Основная мода резонатора Фабри-Перо со сферическими зеркалами представляет собой осесимметричный гауссов пучок, однако, это не единственное решение параксиального уравнения.

Говоря о простых гауссовых пучках, обычно имеют в виду симметричные пучки, описываемые только поляризацией, положением и радиусом перетяжки. Между тем, пучок может иметь эллиптическое сечение и разное положение фокусов z_1 и z_2 по разным осям. Такой пучок описывается выражением:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \frac{u_0}{\sqrt{q_1 q_2}} \exp\left[\frac{ikx^2}{2q_1} + \frac{iky^2}{2q_2} + ikz + i\phi \right], \qquad (3.63)\\
q_1 &= z - z_1 - ib_1, \qquad q_2 = z - z_2 - ib_2,\\
w_1(z) &= \sqrt{\frac{(z - z_1)^2 + b_1^2}{kb_1}}, \qquad w_2(z) = \sqrt{\frac{(z - z_2)^2 + b_2^2}{kb_2}},\\
R_1(z) &= z - z_1 + \frac{b_1^2}{z - z_1}, \qquad R_2(z) = z - z_2 + \frac{b_2^2}{z - z_2}.
\end{aligned}$$

Волновой фронт астигматичного пучка вдали от перетяжек имеет форму астигматичного параболоида, в перетяжках – цилиндрическую форму, а между ними – седловидную форму.

Другие решения параксиального уравнения описывают гауссовы пучки более высокого порядка. Если в системе каким-либо образом нарушена осевая симметрия, возможны решения, называемые гаусс-эрмитовыми пучками:

$$\begin{aligned} u_{p,m}(x,y,z) = & \frac{u_0}{\sqrt{((z-z_1)^2+b_1^2)((z-z_2)^2+b_2^2)}} H_p\left(\frac{x}{w_1}\right) H_m\left(\frac{y}{w_2}\right) \\ & \times \exp\left[\frac{ikx^2}{2q_1} + \frac{iky^2}{2q_2} - i\left(p+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{z-z_1}{b_1}\right. \\ & \left. - i\left(m+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{z-z_2}{b_2} + ikz + i\phi\right]. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Параметры q_1, q_2, w_1 и w_2 определяются также как и для простого астигматичного пучка (3.64), а H_ν – полиномы Эрмита.

В осесимметричном случае возможны лагерр-гауссовы пучки, которые в цилиндрических координатах (r,ϕ,z):

$$\begin{aligned} u(\rho,\phi,0) = & \frac{u_0}{\sqrt{b^2+z^2}}\left(\frac{kbr^2}{b^2+z^2}\right)^{|m|/2} L_m^p\left(\frac{kbr^2}{b^2+z^2}\right) \\ & \times \exp\Big[\frac{kbr^2}{2(b^2+z^2)} + \frac{ikzr^2}{2(b^2+z^2)} - i\,(|m|+2p+1)\operatorname{arctg}\frac{z}{b} \\ & + ikz + im\phi + i\psi\Big], \end{aligned} \tag{3.65}$$

где $L_2^m(x)$ – полиномы Лагерра. Подробнее об обобщенных гауссовых пучках см., например, [12].

3.7 Многослойные покрытия

Применявшиеся в первых интерферометрах и резонаторах Фабри-Перо, серебряные зеркала не годятся для создания высокодобротных резонаторов, поскольку металлические пленки имеют большие оптические потери (10^6см$^{-1}$), а коэффициент отражения ≤ 0.96 недостаточен для большинства применений. Современная технология позволяет получать диэлектрические многослойные зеркала с очень малыми потерями и большими коэффициентами отражения. Такие же многослойные зеркала, часто называемые брэгговскими, применяются и в монолитных микрорезонаторах типа Фабри-Перо.

Электрическое и магнитное поле в плоской бегущей волне (для определенности выберем поляризацию вдоль оси x) можно представить в виде:

$$E_x = E_{0+}e^{ikz} + E_{0-}e^{-ikz} = E_+(z) + E_-(z), \tag{3.66}$$

$$H_y = H_{0+}e^{ikz} + H_{0-}e^{-ikz} = \frac{1}{\eta}[E_{0+}e^{ikz} - E_{0-}e^{-ikz}]$$

$$= \frac{1}{\eta}[E_+(z) - E_-(z)],$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = \frac{1}{n}Z_0. \tag{3.67}$$

В такой записи прямая и обратная электромагнитные волны эквивалентны прямой и обратной волне в длинной линии, описываемой телеграфными уравнениями (Глава 2). При этом электрическое поле соответствует напряжению волны в длинной линии, а магнитное поле – току. Параметр η соответствует волновому сопротивлению длинной линии. Как и в длинных линиях удобно ввести понятия коэффициента отражения поля Γ и импеданса Z [10]:

$$\Gamma(z) = \frac{E_-(z)}{E_+(z)} = \frac{E_{0-}}{E_{0+}}e^{-2ikz} = \Gamma_0 e^{-2ikz},$$

$$Z(z) = \frac{E(z)}{H(z)} = \eta\frac{E_+(z) + E_-(z)}{E_+(z) - E_-(z)} = \eta\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} = \eta\frac{1+\Gamma(0)e^{-2ikz}}{1-\Gamma(0)e^{-2ikz}},$$

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z)-\eta}{Z(z)+\eta}. \tag{3.68}$$

Введенные параметры Γ и Z позволяют легко рассчитывать параметры любой многослойной системы. Так как тангенциальные компоненты электрических и магнитных полей непрерывны на границах, то же справедливо и для импеданса Z. С другой стороны, Γ на границах испытывает скачок, но в однородной среде только меняет фазу

$$\Gamma(z+d) = \Gamma(z)e{-}2iknd = \Gamma(z)e^{-i\phi}. \tag{3.69}$$

Пусть многослойное покрытие нанесено между основой с показателем преломления n_s и другой средой с показателем преломления n_0 (например, на границе воздуха с $n_0 \simeq 1$ и стеклянного зеркала) (рис. 3.7). Рассматривать слои следует с самой последней границы слоя со средой s, где есть только прошедшая волна E_+, а $E_- = 0$ и поэтому $Z_s = \eta_s$.

Таким образом, начиная с самого правого слоя, где в субстрате $\Gamma_s = 0$ и $Z_s = \eta_s$, двигаясь слой за слоем, справа налево, пересчитывая на границе справа коэффициент отражения в импеданс и затем на границе слева импеданс в коэффициент отражения, мы можем рассчитать коэффициент отражения многослойного зеркала Γ_{out}. Можно связать и непосредственно коэффициенты отражения справа Γ_r и слева Γ_l от любой границы раздела:

$$\Gamma_l = \frac{\Gamma_{rl} + \Gamma_r}{1 + \Gamma_r\Gamma_{rl}}, \tag{3.70}$$

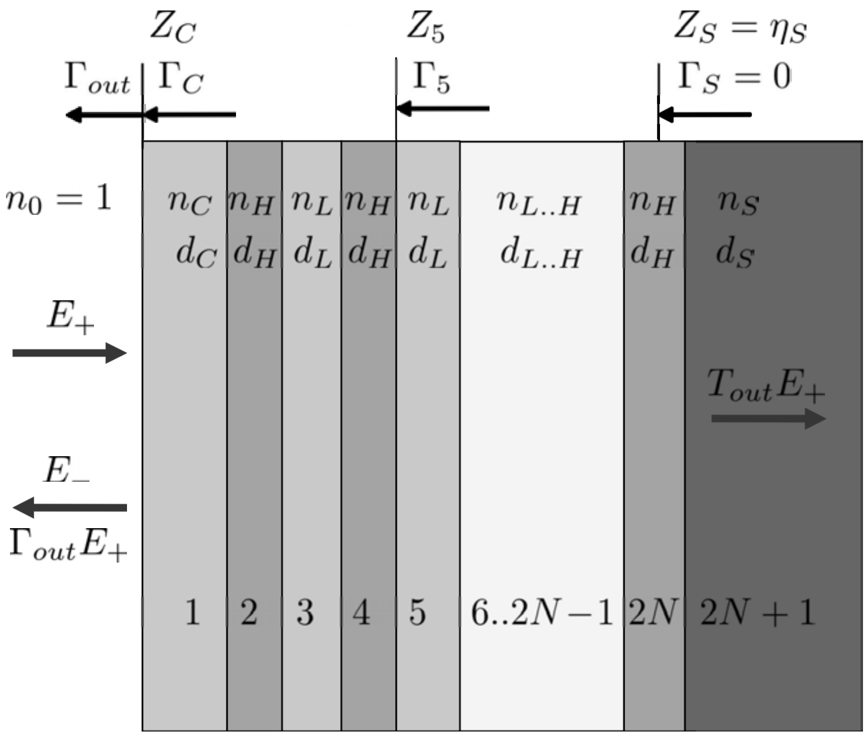


Рис. 3.6: Схема многослойного диэлектрического покрытия.

где

$$\Gamma_{rl} = \frac{\eta_r - \eta_l}{\eta_r + \eta_l} = \frac{n_l - n_r}{n_l + n_r} \tag{3.71}$$

определяет коэффициент отражения по амплитуде на границе раздела двух сред. В частности, он определяет коэффициент отражения от диэлектрической поверхности при нормальном падении при $n_r = n_0$. Отметим, что если $n_l < n_r$, коэффициент отражения отрицателен.

Таким образом, раскручивая слои в обратном порядке, чередуя условия для Γ и Z, можно рассчитать произвольное многослойное покрытие.

Рассмотрим простейшую систему слоев, наиболее часто применяемую для создания диэлектрических зеркал – систему состоящую из $2N$ чередующихся четвертьволновых слоев (слоев, оптическая толщина которых равна четверти длины волны в среде) с высоким и низким показателем преломления с $n_{2j} = n_H$, $n_{2j+1} = n_L$, $n_j d_j = \lambda/4$, $\phi_j = 2kn_j d_j = \pi$. Этот вид покрытия обеспечивает максимальный коэффициент отражения при заданном числе слоев. Для четвертьволнового слоя

$$\Gamma_i\left(z + \frac{\lambda}{4n}\right) = -\Gamma_i(z),$$

$$Z_{i+1} = \eta\frac{1 + \Gamma_i\left(\frac{\lambda}{4n}\right)}{1 - \Gamma_i\left(\frac{\lambda}{4n}\right)} = \eta\frac{1 - \Gamma_i}{1 + \Gamma_i} = \frac{\eta^2}{Z_i}. \tag{3.72}$$

Это свойство четвертьволнового слоя преобразовывать импеданс (в теории длинных линий четвертьволновые отрезки называются трансформатором) позволяет построить простые рекуррентные соотношения между импедансами слоев.

$$Z_2 = \frac{\eta_H^2}{Z_3} = \frac{\eta_L^2}{\eta_H^2} Z_4 = \frac{\eta_L^{2N-2}}{\eta_H^{2N-2}} Z_{2N} = \frac{\eta_H^{2N}}{Z_{2N+1}\eta_L^{2N-2}} = \frac{\eta_H^{2N}}{\eta_S \eta_L^{2N-2}}. \tag{3.73}$$

Здесь Z_2 – импеданс на границе покровного слоя с первым регулярным слоем, а $Z_{2N+1} = Z_S$ – выходной импеданс на границе многослойного покрытия с основой. Поскольку отраженной волны на выходе нет, $Z_{2N+1} = \eta_S$. Окончательно получаем коэффициент отражения на входной поверхности:

$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - \eta_a}{Z_1 + \eta_a} = \frac{\left(\frac{\eta_L}{\eta_H}\right)^{2N} \eta_s - \eta_a}{\left(\frac{\eta_l}{\eta_h}\right)^{2N} \eta_s - \eta_a} = \frac{1 - \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^{2N} n_S}{1 + \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^{2N} n_S}. \tag{3.74}$$

Для двух принципиальных случаев 1) когда внешний покровный слой $n_C = n_L$ является тоже четвертьволновым – выходной слой с низким показателем преломления, и без покровного слоя ($d_C = 0$, выходной слой с высоким показателем преломления) получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{out,L} &= \frac{1 - \varepsilon n_S}{1 + \varepsilon n_S}, \\ \Gamma_{out,H} &= -\frac{1 - \varepsilon n_S / n_L^2}{1 + \varepsilon n_S / n_L^2}, \end{aligned} \tag{3.75}$$

где $\varepsilon = (n_L/n_H)^{2N}$. Существенно, что когда $N \to \infty$ и $n_L/n_H < 1$ оба случая дают $|\Gamma_{out}| = 1$ но с разными знаками.

Распределенные отражающие структуры в интегральном исполнении, аналогичные по свойствам многослойным покрытиям, могут играть роль распределенных микрорезонаторов. При этом область в среде, в которой образуется резонансное поле, протяженностью в целое число полуволн и заключенное между распределенными отражателями может быть очень короткой. В отличие от обычных резонаторов Фабри-Перо, добротность связи таких распределенных структур зависит от длины не линейно, а экспоненциально. Эти интересные микрорезонаторы выходят, однако, за рамки рассмотрения этой книги, поскольку их добротность, реально продемонстрированная в экспериментах, все же невелика.

Задание 9. *Получите выражение для добротности резонатора с распределенными отражателями, пренебрегая собственными потерями.*

Глава 4

Моды шепчущей галереи в цилиндре

Мы переходим к рассмотрению диэлектрических микрорезонаторов с МШГ. Такие резонаторы являются телами вращения – сферами, дисками, тороидами, сфероидами и т.д. Высокодобротные диэлектрические резонаторы в форме колец и дисков с МШГ стали применяться в СВЧ диапазоне с начала 60-ых годов, и получили широкое распространение в различных устройствах. При гелиевых температурах добротность таких резонаторов из лейкосапфира (кристаллический сверхчистый оксид алюминия Al_2O_3) для миллиметрового диапазона волн может превышать 10^9. Перенос успешной формы в область световых волн казался естественным и вполне реализуемым методами интегральной оптики и такие предложения появились достаточно рано. Вероятно, впервые идею подобного резонатора в планарном исполнении выдвинул в 1969 году Маркатили.

В оптическом диапазоне при попытках практической реализации дисковых резонаторов пришлось столкнуться со многими сложностями, в частности, с резким ростом влияния поверхностных неоднородностей и, как следствие, с малой добротностью получающихся устройств. И лишь относительно недавно развитие технологии и появление чистых материалов позволило получить действительно высокие добротности в дисковых и кольцевых оптических резонаторах [13]. В настоящее время добротность диэлектрических цилиндрических резонаторов в оптическом диапазоне, изготавливаемых методами интегральной технологии из кремния достигает 5×10^6.

Аналитическое решение электродинамической задачи о собственных колебаниях ограниченного диэлектрического цилиндра в виде конечного ряда невозможно. В наше время для практических целей собственные частоты и распределение полей в резонаторе произвольной сложности можно рассчитать на компьютере с помощью метода конечных элементов (FEM) или с помощью метода конечных разностей во временной области (FDTD), если требуется исследовать динамические процессы. Вместе с тем, во многих случаях желательно иметь, пусть не очень точные, аналитические приближения, которые позволяют получить более наглядное представление о распределениях полей, оптимизировать геометрию системы и в явной форме получить зависимости измеряемых величин от различных параметров. Если не удается получить полное аналитическое решение электродинамической задачи в осесимметричном резонаторе, можно применять следующие подходы:

1) Построить сходящийся ряд по собственным функциям решаемой задачи;

2) Использовать приближение функциями задачи с более простыми граничными условиями, например, с идеально отражающими стенками;

3) Разбить систему на несколько простых областей, в которых задача решается, и постараться как-то сшить решения;

4) Считая одну из компонент поля выделенной, рассмотреть решение скалярного уравнения;

5) Найти приближенное решение скалярного волнового уравнения (метод эйконала);

6) Если размеры резонатора много больше длины волны, рассмотреть задачу в приближении лучевой оптики (биллиардная теория);

Эти подходы к анализу оптических микрорезонаторов будут в разной мере освещены в этой книге.

4.1 Волны в цилиндрических координатах

Выражения для основных операторов в цилиндрической системе координат (ρ, z, ϕ) показаны на врезке.

$$
\begin{aligned}
\nabla u =& \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathbf{i}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{i}_z, \\
\nabla \cdot \mathbf{U} =& \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho U_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\
\nabla \times \mathbf{U} =& \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U_z}{\partial \phi} - \frac{\partial U_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{i}_\rho + \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{i}_\phi \\
&+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho U_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial U_\rho}{\partial \phi}\right)\mathbf{i}_z, \\
\nabla^2 u =& \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{U} =& \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 U_\rho}{\partial^2 z} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_\rho}{\partial \phi^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho^2}U_\rho\right]\mathbf{i}_\rho \\
&+ \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U_\phi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial U_\rho}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho^2}U_\phi\right]\mathbf{i}_\phi \\
&+ \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U_z}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_z}{\partial \phi^2}\right]\mathbf{i}_z.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись выражением для векторного оператора Лапласа, распишем в явном виде волновое уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \tag{4.2}$$

покомпонентно для вектора электрического $\mathbf{E}$ в изотропной среде. Получим систему из трех частично связанных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 E_\rho + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) E_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0,\\
&\nabla^2 E_\phi + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) E_\phi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = 0,\\
&\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Такая же система уравнений получается для компонент магнитного поля.

При выбранной угловой зависимости решения от угла ϕ в виде $e^{im\phi}$ получаем:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{im}{\rho} E_\phi + \frac{\partial\, E_z}{\partial\, z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\,(\rho E_\rho)}{\partial\,\rho} = 0. \tag{4.4}$$

Таким образом, компонента поля E_ϕ и ее производные явным образом выражаются через две другие компоненты электрического поля:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} &= -\rho\frac{\partial\, E_z}{\partial\, z} - \frac{\partial\,(\rho E_\rho)}{\partial\,\rho},\\
E_\phi &= -\frac{\rho}{im}\frac{\partial\, E_z}{\partial\, z} - \frac{1}{im}\frac{\partial\,(\rho E_\rho)}{\partial\,\rho},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

и, следовательно, система трех уравнений (4.3) после исключение компоненты E_ϕ принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} + \left[\epsilon k_0^2 - \frac{m^2-1}{\rho^2}\right] E_\rho + \frac{2}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \left[\epsilon k_0^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right] E_z = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Аналогичным уравнениям удовлетворяют компоненты магнитного поля. Таким образом, нам удалось свести трехмерную задачу к двухмерной только для двух компонент поля. Эта более простая новая система уравнений удобна для численного решения уравнений, например, методом конечных элементов в системе Comsol Multiphysics® и вследствие уменьшения размерности позволяет добиться лучшей точности решения. Для расчетов открытых резонаторов, однако, лучше использовать аналогичные уравнения для магнитного поля $\mathbf{H}$, поскольку все его компоненты на границах диэлектрика, в отличие от нормальных компонент электрического поля остаются непрерывными.

Дисковые оптические микрорезонаторы могут изготавливаться из различных анизотропных кристаллических материалов [4]. Исходные волновые уравнения в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 0, \\
&\nabla \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = 0, \\
&\nabla \times (\hat{\epsilon}^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H} = 0, \\
&\nabla \cdot \mathbf{H} = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

В анизотропной одноосной осесимметричной среде ($\partial\hat{\epsilon}/\partial\phi = 0$), в которой

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\rho & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

Задание 10. *Выведите системы уравнений для электрического и магнитного поля для одноосного кристалла.*

4.2 Скалярное уравнение Гельмгольца

В основе многих методов решения векторного уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах лежит скалярное уравнение Гельмгольца, которому удовлетворяет, в частности, компонента E_z и другие вводимые для удобства скалярные потенциалы. Частное решение скалярного уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + k^2\psi = 0 \tag{4.9}$$

легко находится разделением переменных:

$$\psi(\rho, \phi, z) = Z_m(\sqrt{k^2 - \beta^2}\rho)e^{\pm im\phi \pm i\beta z}. \tag{4.10}$$

Константа разделения β является постоянной распространения вдоль оси z и, вообще говоря, может быть как действительной, так и комплексной. При действительных β общее решение можно записать также в виде стоячих четных и нечетных по z волн: $\cos(\beta z)$ и $\sin(\beta z)$. Условие замыкания по угловой циклической координате $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$ приводит к тому, что константа m должна быть целой. Во всех телах вращения частоты мод вырождены по четности или направлению относительно угла ϕ. То есть моды, бегущие в противоположных направлениях вокруг оси, а также четные и нечетные стоячие волны, распределенные по косинусу и синусу, при одном и том же индексе m имеют одинаковые частоты и основные свойства. Поэтому там, где характер распределения по ϕ не принципиален, будем для простоты использовать зависимость в виде $e^{im\phi}$.

4.2.1 Функции Бесселя

Функция $Z_m(x)$ – удовлетворяет уравнению:

$$Z''_m + \frac{1}{x}Z'_m + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)Z_m = 0. \tag{4.11}$$

Штрихом после функций здесь и далее мы обозначаем производную по ее полному аргументу, в данном случае по x.

Иногда, как например в задачах аппроксимации, удобна запись, не содержащая первой производной:

$$(x^{1/2}Z_m)'' + \left(1 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2}\right)(x^{1/2}Z_m) = 0. \tag{4.12}$$

Функция $x^{1/2}Z_m$ при полуцелых m сводится к функциям Риккати-Бесселя, которые будут играть большую роль в следущей главе. Общим решением этого уравнения является линейная комбинация двух цилиндрических функций, каждая из которых, естественно, также подчиняется уравнению (4.11):

$$Z_m(x) = C_J J_m(x) + C_Y Y_m(x). \tag{4.13}$$

Здесь J_m – цилиндрическая функция Бесселя с номером m, конечная в нуле ($J_0(0) = 1$, $J_{m\neq 0}(0) = 0$), $Y_m(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя второго рода или функция Неймана (другое встречающееся обозначение N_m), которая при приближении к нулю стремится к $-\infty$. Номер m, который соответствует числу вариаций поля по азимутальному углу ϕ будем называть азимутальным индексом.

Вдали от нуля это осциллирующие, хотя и не точно периодические ограниченные функции, во многом похожие на косинус и синус. Такая аналогия с базовыми тригонометрическими функциями становится понятной, поскольку уравнение для них $Z'' + Z = 0$ формально получается из (4.11), при $x \to \infty$. Выбор констант $C_{J,Y}$ при функциях Бесселя и Неймана производится исходя из граничных условий и требуемого поведения в нуле и на бесконечности. Так, если рассматриваемая область пространства включает окрестность нуля, $C_Y = 0$. Для описания бегущих волн на бесконечности аналогично гармоническим функциям можно для решения использовать другую линейную комбинацию и ввести новую пару функций:

$$Z_m(x) = C_{H1}H_m^{(1)}(x) + C_{H2}H_m^{(2)}(x), \tag{4.14}$$
$$H_m^{(1,2)}(x) = J_m(z) \pm iY_m(x). \tag{4.15}$$

Функции $H_m^{(1,2)}$ называются функциями Ханкеля первого и второго рода, иногда их также называют функциями Бесселя третьего рода, что вносит некоторую путаницу в классификацию. Такой переход аналогичен переходу к комплексным экспонентам

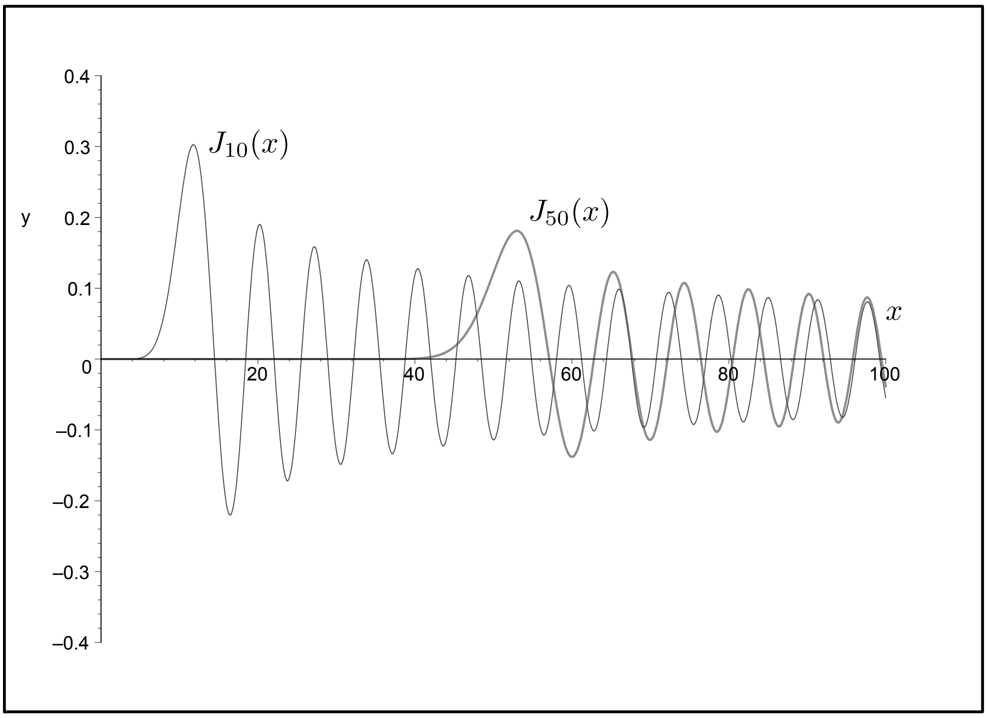


Рис. 4.1: Функции Бесселя с большим индексом $m = 10, 50$

$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$. На бесконечности при $x \to \infty$ справедливы следующие асимптотические выражения [14, 15]:

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$
$$Y_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$
$$H_m^{(1,2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{\pm i(x - m\pi/2 - \pi/4)}. \tag{4.16}$$

Для больших значений аргумента и индекса можно пользоваться квазиклассическими аппроксимациями Дебая, которые, как будет показано далее, тесно связаны с приближениями геометрической оптики. При $x < m$:

$$J_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{m^2 - x^2}}} e^{-\zeta_1}[1 + O(m^{-1})],$$
$$Y_m(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{m^2 - x^2}}} e^{\zeta_1}[1 + O(m^{-1})],$$
$$\zeta_1 = -\sqrt{m^2 - x^2} + m \,\mathrm{Arch}\frac{m}{x}. \tag{4.17}$$

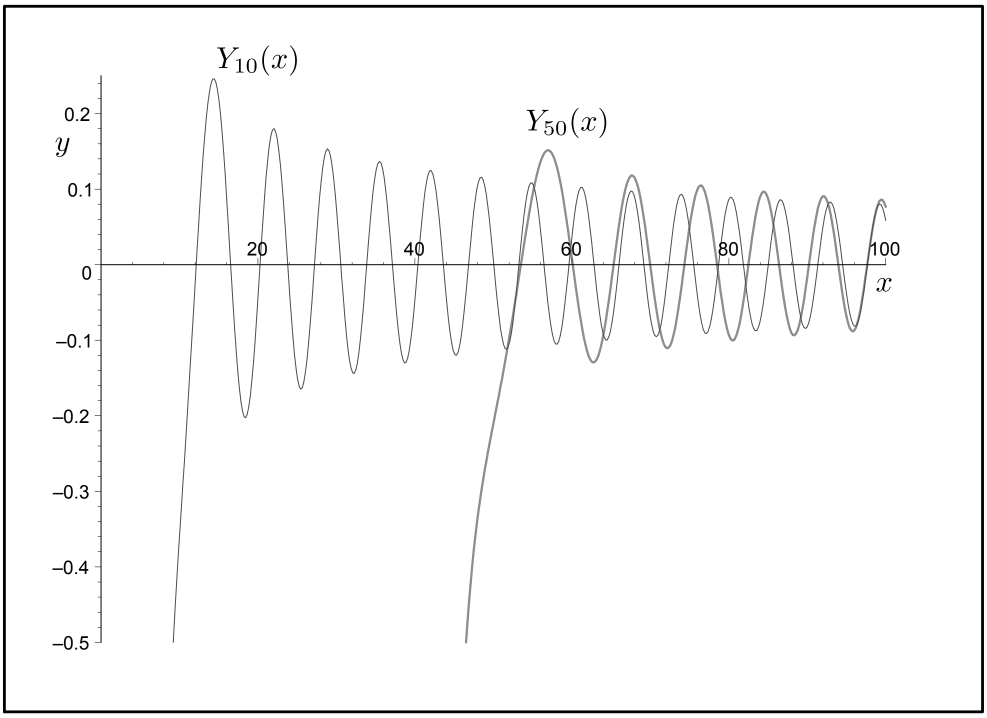


Рис. 4.2: Функции Неймана с большим индексом $m = 10, 50$

При $x > m$:

$$J_m(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{x^2-m^2}}}\cos\left(\zeta_2 - \frac{\pi}{4}\right)\ [1+O(m^{-1})],$$
$$Y_m(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{x^2-m^2}}}\sin\left(\zeta_2 - \frac{\pi}{4}\right)\ [1+O(m^{-1})],$$
$$\zeta_2 = \sqrt{x^2-m^2} - m\arccos\frac{m}{x}. \tag{4.18}$$

Последние приближения переходят в (4.16) при $x \to \infty$.

Первый нуль функций Бесселя и Неймана с большим индексом появляется при значениях аргумента близких к m (см приведенные на рисунках графики функций разного порядка). В этой области хорошо работают приближения, использующие функции Эйри, получающиеся линеаризацией множителя в скобках в (4.11) вблизи $x = m$, когда это выражение обращается в нуль:

$$J_m(x) = 2^{1/3}m^{-1/3}\mathrm{Ai}(-(2/m)^{1/3}(x-m)) + O(m^{-1}),$$
$$Y_m(x) = -2^{1/3}m^{-1/3}\mathrm{Bi}(-(2/m)^{1/3}(x-m)) + O(m^{-1}). \tag{4.19}$$

Пара независимых функций Эйри Ai и Bi является решением уравнения

$$f''(x) - xf(x) = 0. \tag{4.20}$$

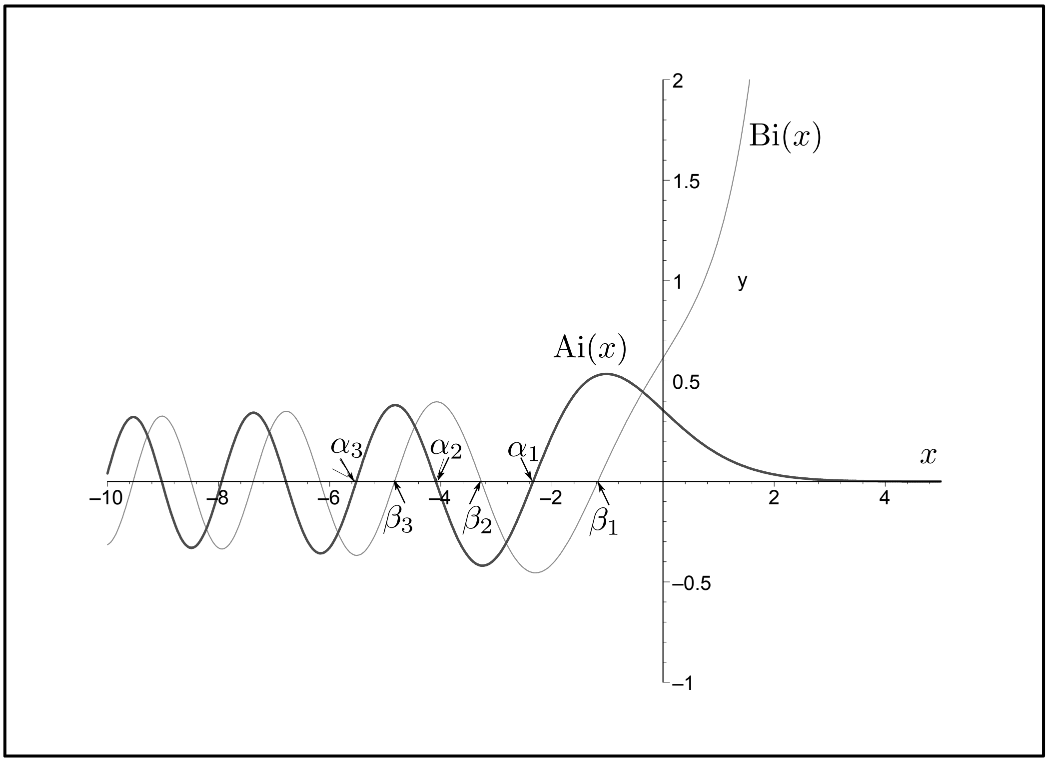


Рис. 4.3: Функции Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$, играющие большую роль в аппроксимации специальных функций.

Эти функции широко используются в оптике для аппроксимации полей вблизи каустических поверхностей, а также для равномерных аппроксимаций специальных функций. Нули функций Эйри и ее производной имеют полезные приближения [15]:

$$\alpha_q \simeq -\left(\frac{3\pi(4q-1)}{8}\right)^{2/3}, \qquad \alpha'_q \simeq -\left(\frac{3\pi(4q-3)}{8}\right)^{2/3}, \tag{4.21}$$
$$\mathrm{Ai}'(\alpha_q) \simeq \frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3\pi(4q-1)}{8}\right)^{1/6}, \qquad \mathrm{Ai}(\alpha'_q) \simeq \frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3\pi(4q-3)}{8}\right)^{1/6}.$$

Нули функции Бесселя аппроксимируются выражениями [14, 15]:

$$\begin{aligned}
T_{m1} &= m - \alpha_q\left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{3\alpha_q^2}{20}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q^3+10}{1400}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + O(m^{-5/3})\\
T_{m1} &\simeq m + 1.8557571m^{1/3} + 1.03315m^{-1/3} - 0.00397m^{-1},\\
T_{m2} &\simeq m + 3.2446076m^{1/3} + 3.15824m^{-1/3} - 0.09759m^{-1},\\
T_{m3} &\simeq m + 4.3816712m^{1/3} + 5.75987m^{-1/3} - 0.24035m^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Для аппроксимации полей в резонаторах шепчущей галереи очень полезны также следующие соотношения [15]:

$$
\begin{aligned}
T'_{mq} &= m - \alpha'_q \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{2+3\alpha'^2_q}{20}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} + O(m^{-1}),\\
J'_m(T_{mq}) &= -\mathrm{Ai}'(\alpha_q)\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3}\left(1+\frac{2\alpha_q}{5}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3}\right) + O(m^{-2}),\\
J_m(T'_{mq}) &= \mathrm{Ai}(\alpha'_q)\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3}\left(1+\frac{\alpha'_q}{10}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3}\right) + O(m^{-5/3}),\\
T'_{m1} &\simeq m + 0.8086165m^{1/3} + 0.072490m^{-1/3} - 0.05097m^{-1},\\
J'_m(T_{m1}) &\simeq -1.11310m^{-2/3}\left(1 - 1.48460m^{-2/3} + 0.43294m^{-4/3}\right),\\
J_m(T'_{m1}) &\simeq 0.6748851m^{-1/3}(1 - 0.161723m^{-2/3} + 0.022918m^{-4/3}).
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Во врезке приводятся основные свойства цилиндрических функций, часто используемые при аналитических преобразованиях [14, 15]:

$$
\begin{aligned}
&Z'_m = \frac{m}{x}Z_m - Z_{m+1} = -\frac{m}{x}Z_m + Z_{m-1}, \qquad (4.24)\\
&Z_{m-1} + Z_{m+1} = \frac{2m}{x}Z_m,\\
&Z_{-m}(x) = (-1)^m Z_m(x),\\
&\int xZ_m^2(x)dx = \frac{x^2}{2}\left(Z_m^2(x) - Z_{m-1}(x)Z_{m+1}(x)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 Z'^2_m(x) + (x^2-m^2)Z_m^2(x)\right),\\
&\int \frac{1}{x}Z_m^2(x)dx = \frac{1}{2m}\left(1 + Z_0^2(x) + Z_m^2(x) - 2\sum_{k=0}^{m} Z_k^2(x)\right),\\
&\int Z_m(x)Z_{m+1}(x)dx = \frac{1}{2}\left(1 + Z_0^2(x) - 2\sum_{k=0}^{m} Z_k^2(x)\right),\\
&\int xZ_m(ax)Z_m(bx)dx = \frac{bxZ_m(ax)Z_{m-1}(bx) - axZ_{m-1}(ax)Z_m(bx)}{a^2-b^2}.
\end{aligned}
$$

Вронскиан:

$$
W(J_m, Y_m) = J_m(x)Y'_m(x) - J'_m(x)Y_m(x) = \frac{2}{\pi x}.
$$

Род цилиндрической функции (Бесселя, Неймана, Ханкеля двух видов) выбирается в различных областях пространства исходя из требований на поведение поля вблизи оси ($\rho \to 0$) или на бесконечности ($\rho \to \infty$).

На рисунке (4.4) показана функция Бесселя высокого порядка при $m = 100$ и ее аппроксимации. Как видно, аппроксимации Дебая расходятся при $x \to m$, но прекрасно аппроксимируют цилиндрические функции вдали от этой точки. Напротив, приближение функцией Эйри хорошо ведет себя только вблизи этого значения. Аналогично ведут себя аппроксимации функции Неймана.

Аппроксимацией, равномерно сходящейся во всех интересующих нас областях, является уже первые слагаемые аппроксимаций Ольвера [16], которые как бы объединяют все три приближения:

$$\begin{aligned} J_m(x) &\simeq \left(\frac{4\xi}{m^2 - x^2}\right)^{1/4} \mathrm{Ai}(\xi), \\ Y_m(x) &\simeq -\left(\frac{4\xi}{m^2 - x^2}\right)^{1/4} \mathrm{Bi}(\xi), \\ z &= \left[\frac{3}{2}\zeta_2\right]^{2/3}_{|x<m} = -\left[\frac{3}{2}\zeta_1\right]^{2/3}_{|x>m}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

см. (4.17, 4.17). Здесь для удобства мы избавились от комплексностей. Аппроксимации имеет разрешимую неопределенность в точке $x = m$ в которой множитель перед функциями Эйри принимает значение $(2/m)^{1/3}$ в согласии с приближениями (4.19).

В наше время, когда любые функции легко вычисляются на компьютере, надобность в подобных достаточно громоздких приближениях может показаться сомнительной, однако это приближение полезно тем, что позволяет с хорошей точностью определить нули функции Бесселя $T_{m,q}$ из нулей функций Эйри

$$\xi_{m,q} = \alpha_q, \tag{4.26}$$

решая которое с помощью ряда по степеням $m^{-2/3}$, получаем

$$T_{m,q} \simeq m - \alpha_q \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{3\alpha_q^2}{20}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q^3}{1400}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + O(m^{-5/3}). \tag{4.27}$$

Это приближение напрямую связано с квазиклассическим приближением для собственных частот цилиндрических и сферических функций.

4.3 Цилиндрические векторные гармоники

Уравнения для компонент E_z и H_z не зависят от других компонент и подчиняются скалярному волновому уравнению. Их можно использовать в качестве базовых потенциалов. Более общий подход был представлен в Главе 2, где отмечалось, что произвольное решение векторного волнового уравнения можно выразить через решения

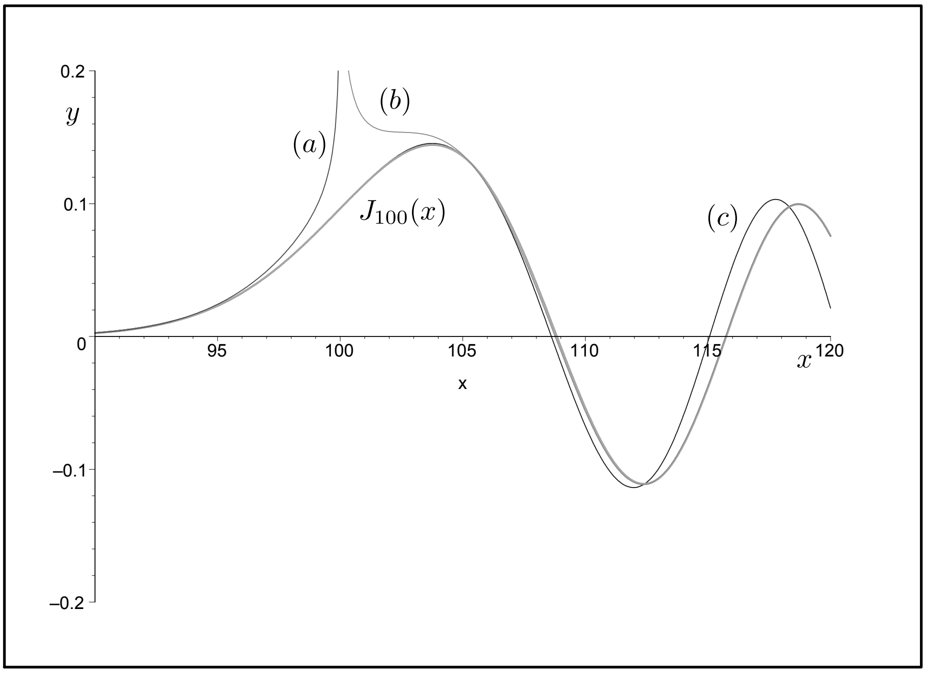


Рис. 4.4: Приближения функции $J_{100}(x)$ при $x \sim m$: (a) – приближение Дебая (4.17); (b) – приближение Дебая (4.18); (c) приближение (4.19)

скалярного уравнения Гельмгольца ψ (потенциалы Дебая) следующим образом:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = C_{TE}\mathbf{M} + C_{TM}\mathbf{N}, \tag{4.28}$$

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{i}_z\psi),$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times (\mathbf{i}_z\psi). \tag{4.29}$$

При этом, если поле $\mathbf{E}$ в бегущей или стоячей волне в резонаторе выражается только через вектор $\mathbf{M}$, то оно не имеет компоненты E_z (ротор вектора ортогонален этому вектору) и называется поперечно электрическим – полем TE-типа, если же оно выражается только через вектор $\mathbf{N}$, то $H_z = 0$ и называется поперечно магнитным - полем TM-типа.

Стоит заметить, что названия "поперечно электрические"и "поперечно магнитные были введены изначально для плоских волн и волн, распространяющихся в волноводах. В этом случае соответствующие поля действительно перпендикулярны направлению распространения вдоль z. В случае же МШГ в цилиндрических координатах это название является обманчивым, поскольку такие моды распространяются по кругу в плоскости, перпендикулярной z. Более того, как мы увидим далее, возникает противоречие между аналогичными названиями в сферических координатах, поскольку там базовым является вектор $\mathbf{i}_r$, приблизительно перпендикулярный $\mathbf{i}_z$. В связи с этим применять термины TE и TM к МШГ в произвольных телах следует с оговорками. В эту путаницу можно внести некоторую ясность, если положить, что в дисковых резонаторах моды ведут себя как близкие к TE или к TM по отношению к верхним и нижним плоским граням, роль которых существенна для тонких резонаторов.

Кроме того, поле TE называют также полем магнитного типа (H-типа), а TM полем электрического типа (E-типа), что умножает путаницу.

Если собственное решение для поля в системе имеет все компоненты, а значит, не может быть выражено только через один из векторов **N** или **M**, то такая мода называется гибридной. В большинстве случаев МШГ в аксиально-симметричных телах являются гибридными, однако один из интегралов энергии, заключенной в E_z или H_z компоненте $\frac{1}{2}\int \epsilon\epsilon_0 E_z^2 dv$, $\frac{1}{2}\int \mu\mu_0 H_z^2 dv$ существенно преобладает над другим. В этом случае можно говорить о близости моды к TE или TM типу.

Используя определения (4.28) и (4.10) выпишем в явном виде выражения для полей TE и TM типа в бесконечном цилиндре:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{TE} &= C_{TE} e^{im\phi+i\beta z}\left[\frac{im}{\rho} Z_m(k_\rho \rho)\mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\phi\right], \qquad (4.30)\\
\mathbf{B}_{TE} &= -C_{TE}\frac{i}{k_0 c} e^{im\phi+i\beta z}\\
&\times\left[i\beta\frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\rho - \frac{m\beta}{\rho} Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_\phi + k_\rho^2 Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_z\right],\\
\mathbf{E}_{TM} &= -C_{TM}\frac{1}{\epsilon\mu k_0} e^{im\phi+i\beta z}\\
&\times\left[i\beta\frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\rho - \frac{m\beta}{\rho} Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_\phi + k_\rho^2 Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_z\right],\\
\mathbf{B}_{TM} &= C_{TM}\frac{i}{c} e^{im\phi+i\beta z}\left[\frac{im}{\rho} Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\phi\right].
\end{aligned}
$$

Здесь β – постоянная распространения вдоль оси z, а

$$k_\rho = \sqrt{k^2-\beta^2}. \qquad (4.31)$$

Волновое число β может быть не только положительным и отрицательным, как для волн, распространяющихся, соответственно, в сторону убывания или возрастания z, но и мнимой, как в случае спадающих волн во внешней среде при полном внутреннем отражении. Чтобы удовлетворялось условие непрерывности по ϕ, число m должно быть целым. $C_{TE/TM}$ – нормировочные константы. При выводе выражений для сопряженных полей учтено уравнение (4.9).

Найденное решение справедливо и для описания полей в ступенчатых круглых световодах. Однако ключевую роль в оптических волокнах играют моды, у которых азимутальный индекс m мал, а постоянная распространения $\beta \sim \epsilon k_0$. В этом случае во внешней среде ($\epsilon = 1$) аргумент функций Бесселя становится мнимым $\sqrt{k_0^2-\beta^2}\rho = i\sqrt{\beta^2-k_0^2}\rho$, и для описания полей используются модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента, быстро затухающие на бесконечности (функции Макдональда). Нас же будут интересовать в основном совсем другие моды, те у которых, напротив, m велико, а составляющая волнового вектора вдоль оси z мала. В этом случае аргумент остается действительным во всех областях и для описаний поля снаружи используются функции Ханкеля, хотя в реальных дисковых резонаторах возможны МШГ в обоих режимах.

4.4 Моды закрытого цилиндра

Рассмотрим моды в закрытом цилиндрическом резонаторе с проводящими стенками радиусом a и высотой d $(-d/2 < z < d/2)$, который заполнен средой с проницаемостью $\epsilon = n^2$ и $\mu = 1$. От бегущих по z волн в выражениях (4.30) перейдем к стоячим волнам по z:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{TE} &= C_{TE}\left(\frac{im}{\rho}Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\phi\right)\,{}^{\cos(\beta z)}_{\sin(\beta z)}e^{im\phi}, \qquad (4.32)\\
\mathbf{B}_{TE} &= -C_{TE}\frac{i}{k_0 c}\left(\beta\left[\frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\rho + i\frac{m}{\rho}Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_\phi\right]\,{}^{-\sin(\beta z)}_{\cos(\beta z)}\right.\\
&\quad\left. + k_\rho^2 Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_z\,{}^{\cos(\beta z)}_{\sin(\beta z)}\right)e^{im\phi},\\
\mathbf{E}_{TM} &= -C_{TM}\frac{1}{n^2k_0}\left(\beta\left[\frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\rho + i\frac{m}{\rho}Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_\phi\right]\,{}^{\cos(\beta z)}_{-\sin(\beta z)}\right.\\
&\quad\left. + k_\rho^2 Z_m(k_\rho\rho)\,{}^{\sin(\beta z)}_{\cos(\beta z)}\mathbf{i}_z\right)e^{im\phi},\\
\mathbf{B}_{TM} &= C_{TM}\frac{i}{c}\left(\frac{im}{\rho}Z_m(k_\rho\rho)\mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\phi\right)\,{}^{\sin(\beta z)}_{\cos(\beta z)}e^{im\phi}.
\end{aligned}$$

В качестве цилиндрических функций внутри резонатора выбираем обычные функции Бесселя. Равенства нулю одновременно тангенциальных компонент поля **E** и нормальных поля **H** на образующей и на плоских границах можно добиться только при выборе нижних зависимостей по z и выполнении условий:

$$\begin{aligned}
ak_{\rho,TM} &= a\sqrt{n^2k_{0,TM}^2 - \beta_p^2} = T_{m,q}, \qquad (4.33)\\
ak_{\rho,TE} &= a\sqrt{n^2k_{0,TE}^2 - \beta_p^2} = T'_{m,q},\\
\beta_p &= \frac{p\pi}{d},\\
\lambda_{mqp,TM} &= \frac{2\pi a n}{T_{mq}\sqrt{1+\left(\frac{p\pi a}{dT_{mq}}\right)^2}},\\
\lambda_{mqp,TE} &= \frac{2\pi a n}{T'_{mq}\sqrt{1+\left(\frac{p\pi a}{dT'_{mq}}\right)^2}}. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

где T_{mq} и T'_{mq} – корни порядка q функции Бесселя с индексом m и ее производной, соответственно, p – целое, начинающееся от нуля для ТМ мод, и от 1 для ТЕ мод (моды TE_{mq0} в закрытом цилиндре невозможны), а q - натуральное число, обозначающее номер корня трансцендентного уравнения. Если β – мало по сравнению с nk (последнее слагаемое под корнем – мало), то при больших m, когда корни $T_{mq} \sim m$ и $T'_{mq} \sim m$, резонанс примерно соответствует длине волны в среде, которая укладывается на окружности цилиндра m раз. Это и есть МШГ, которые прижимаются к внешней границе цилиндра.

4.5 Двумерные моды

Для понимания характера МШГ особый интерес представляют собственные колебания бесконечного цилиндра, которые не имеют зависимости от z ($\beta = 0$). Пусть радиус цилиндра равен a, его диэлектрическая проницаемость $\epsilon = n^2$, а магнитная везде $\mu = 1$. Без потери общности можно положить, что диэлектрическая проницаемость в окружающем пространстве равна 1. Если требуется решение для мод цилиндра из материала с $\epsilon_i = n_i^2$ в среде с $\epsilon_e = n_e^2$, оно может быть получено формальной заменой в решении для вакуума $n \to n_i/n_e$ и $k_0 \to n_e k_0$. Используя (4.30)) мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{TE} &= C_{TE}\left(\frac{im}{\rho}Z_m(k\rho)\mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\phi\right)e^{im\phi}, \qquad (4.35)\\
\mathbf{B}_{TE} &= -C_{TE}\frac{ik_0}{c}n^2 Z_m(k\rho)e^{im\phi}\mathbf{i}_z,\\
\mathbf{E}_{TM} &= -C_{TM}k_0 Z_m(k\rho)e^{im\phi}\mathbf{i}_z,\\
\mathbf{B}_{TM} &= C_{TM}\frac{i}{c}\left(\frac{im}{\rho}Z_m(k\rho)\mathbf{i}_\rho - \frac{\partial Z_m(k\rho)}{\partial\rho}\mathbf{i}_\phi\right)e^{im\phi}.
\end{aligned}$$

В этом случае поле каждого типа выглядит достаточно просто и включает только по три компоненты. Для описания полей внутри цилиндра $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ используем функцию Бесселя $J_m(nk_0\rho)$, конечную в нуле, а для описания полей снаружи $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{H}_e$ – одну из функций Ханкеля.

При выбранной зависимости поля от времени $e^{-i\omega t}$ следует взять первую функцию Ханкеля $H_m^{(1)}(k_0\rho)$, которая описывает на бесконечности расходящуюся цилиндрическую волну $\propto e^{-i(\omega t - k\rho)}/\sqrt{k\rho}$ и удовлетворяет, таким образом, условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)\mathbf{E} = 0. \qquad (4.36)$$

Если бы мы выбрали зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, решение вне цилиндра нужно было бы взять в виде $H_m^{(2)}(k_0\rho)$, а в условии Зоммерфельда поменять знак перед ik. Для выполнения на поверхности цилиндра радиусом a граничных условий требуется, чтобы были непрерывны тангенциальные компоненты E_τ и H_τ и (что не является независимым условием, см. Главу 2) нормальные D_n и B_n. То есть, с учетом того, что $\mu = 1$: $E_{i,\phi} = E_{e,\phi}$, $E_{i,z} = E_{e,z}$, $n^2 E_{i,\rho} = E_{e,\rho}$, $B_{i,\phi} = B_{e,\phi}$, $B_{i,z} = B_{e,z}$, $B_{i,\rho} = B_{e,\rho}$.

Выбор граничных условий диктуется соображениями удобства и достаточности. Так, например, в данном случае из-за того, что в случае ТЕ-мод отсутствует компонента E_z, а в случае ТМ-мод компонента B_z, учет только нормальных граничных условий дает неполную систему уравнений для определения частот и коэффициентов.

В данном случае достаточно учесть только:

$$\begin{aligned}
&C_{TE,i}\frac{\partial J_m(nk_0a)}{\partial a} = C_{TE,e}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_0a)}{\partial a},\\
&C_{TE,i}n^2 J_m(nk_0a) = C_{TE,e}H_m^{(1)}(k_0a),\\
&C_{TM,i}\frac{\partial J_m(nk_0a)}{\partial a} = C_{TM,e}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_0a)}{\partial a},\\
&C_{TM,i}J_m(nk_0a) = C_{TM,e}H_m^{(1)}(k_0a).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Разделив в каждой паре первое равенство на второе, получаем характеристические уравнения:

$$\frac{J_m'(\tilde{y})}{PnJ_m(\tilde{y})} = \frac{H_m^{(1)\prime}(\tilde{x})}{H_m^{(1)}(\tilde{x})}, \tag{4.38}$$

где $P = 1$ для ТЕ мод и $P = 1/n^2$ для ТМ мод и введены обозначения: $\tilde{y} = nk_0a$, $\tilde{x} = k_0a$.

4.6 Конечный диэлектрический цилиндр

Для решения похожей задачи о нахождении полей в прямоугольном диэлектрическом волноводе Маркатили, который также выдвинул идею фильтра на основе дискового интегрально-оптического резонатора, предложил использовать метод частичных областей. В конечном диэлектрическом цилиндре, когда $\beta \neq 0$ моды уже не могут быть чистыми полями ТЕ или ТМ типа и являются гибридными.

Попробуем представить поле как сумму полей обоих типов $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{TE} + \mathbf{E}_{TM}$. Сошьем бегущие волны на границе областей 1 и 2. Для этого достаточно приравнять на цилиндрической образующей тангенциальные компоненты E_ϕ, E_z, B_ϕ и B_z:

$$\begin{aligned}
&-C_{TE,1}\frac{\partial J_m(k_{1\rho}\rho)}{\partial\rho} + C_{TM,1}\frac{m\beta}{n^2k_0\rho}J_m(k_{1\rho}\rho) = -C_{TE,2}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)}{\partial\rho} + C_{TM,2}\frac{m\beta}{k_0\rho}H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)\\
&C_{TM,1}\frac{1}{n^2}k_{1\rho}^2 J_m(k_{1\rho}\rho) = C_{TM,2}k_{2\rho}^2 H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho),\\
&C_{TE,1}\frac{\beta}{k_0}\frac{\partial J_m(k_{1\rho}\rho)}{\partial\rho} - C_{TM,1}\frac{m}{\rho}J_m(k_{1\rho}\rho) = C_{TE,2}\frac{\beta}{k_0}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho)}{\partial\rho} - C_{TM,2}\frac{m}{\rho}H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho),\\
&C_{TE,1}k_{1\rho}^2 J_m(k_{1\rho}\rho) = C_{TE,2}k_{2\rho}^2 H_m^{(1)}(k_{2\rho}\rho).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

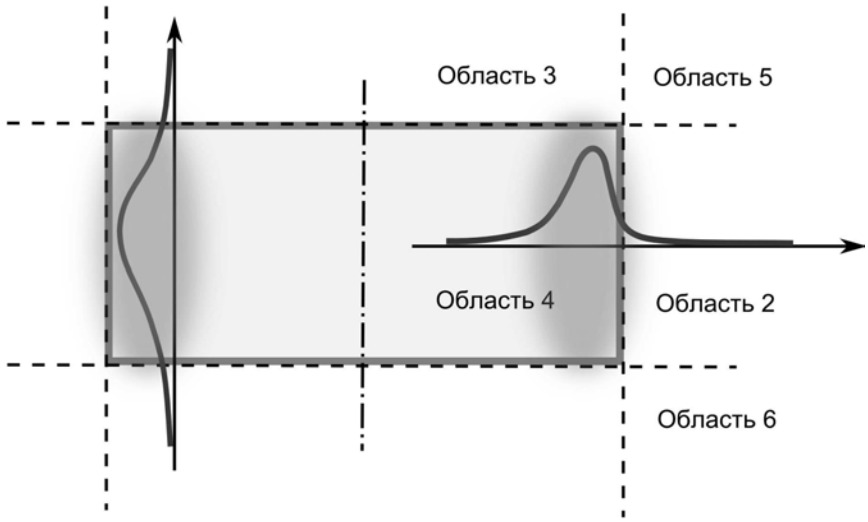


Рис. 4.5: Метод частичных областей

Из второго и четвертого равенства получаем:

$$
\begin{aligned}
C_{TM,2} &= C_{TM,1}\frac{1}{n^2}\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)},\\
C_{TE,2} &= C_{TE,1}\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}.
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Подставляя эти выражения в первое и второе уравнения, получаем:

$$
\begin{aligned}
&C_{TE,1}J_m(k_{1\rho}a)\frac{m}{a}\left(n^2-\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\right)=C_{TM,1}\frac{\beta}{k_0}\left(\frac{\partial J_m(k_{1\rho}a)}{\partial a}-\frac{1}{n^2}\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}{\partial a}\right),\\
&C_{TE,1}\left(\frac{\partial J_m(k_{1\rho}a)}{\partial a}-\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}{\partial a}\right)=C_{TM,1}J_m(k_{1\rho}a)\frac{m\beta}{n^2k_0a}\left(1-\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\right).
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Приравнивая определитель матрицы этой системы, или просто избавляясь от коэффициентов $C_{TE,TM}$, деля первое равенство на второе, получаем характеристическое уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial J_m(k_{1\rho}a)}{\partial a}-\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}{\partial a}\right]\left[\frac{\partial J_m(k_{1\rho}a)}{\partial a}-\frac{1}{n^2}\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\frac{J_m(k_{1\rho}a)}{H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}\frac{\partial H_m^{(1)}(k_{2\rho}a)}{\partial a}\right]\\
&=J_m^2(k_{1\rho}a)\frac{m^2}{n^2a^2}\left(1-\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\right)\left(n^2-\frac{k_{1\rho}^2}{k_{2\rho}^2}\right),
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

или

$$\left[\frac{J_m'(\tilde{y})}{J_m(\tilde{y})} - \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\frac{H_m^{(1)\prime}(\tilde{x})}{H_m^{(1)}(\tilde{x})}\right]\left[\frac{J_m'(\tilde{y})}{J_m(\tilde{y})} - \frac{\tilde{y}}{n^2\tilde{x}}\frac{H_m^{(1)\prime}(\tilde{x})}{H_m^{(1)}(\tilde{x})}\right] = \frac{m^2}{n^2y^2}\left(\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{x}^2}-1\right)\left(\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{x}^2}-n^2\right), \quad (4.43)$$

где введены обозначения $\tilde{y} = k_{1\rho}a$, $\tilde{x} = k_{2\rho}a$. Если $k_0^2 - \beta^2 < 0$ и значит, $\tilde{x}^2 = -\tilde{z}^2 < 0$, можно перейти к выражению через функции Макдональда (модифицированные функции Ханкеля):

$$K_m(x) = \frac{\pi}{2}i^{m+1}H_m^{(1)}(ix) \quad (4.44)$$

$$\left[\frac{J_m'(\tilde{y})}{J_m(\tilde{y})} + \frac{\tilde{y}}{\tilde{z}}\frac{K_m'(\tilde{z})}{K_m(\tilde{x})}\right]\left[\frac{J_m'(\tilde{y})}{J_m(\tilde{y})} + \frac{\tilde{y}}{n^2\tilde{z}}\frac{K_m'(\tilde{z})}{K_m(\tilde{x})}\right] = \frac{m^2}{n^2y^2}\left(\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{z}^2}+1\right)\left(\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{z}^2}+n^2\right), \quad (4.45)$$

МШГ описываются функциями Бесселя с большим индексом, у которых первый максимум появляется при значениях аргумента, близких к значению индекса ($y \simeq m$). Если $\beta \ll k$, то последняя скобка в правой части (4.43) и, соответственно, вся правая часть оказывается близка к нулю (другие множители в правой части будут порядка единицы). Действительно, подставляя выражения для $k_{1\rho}$ и $k_{2\rho}$ из (4.31), получим:

$$\frac{m^2}{n^2y^2}\left(\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{x}^2}-1\right)\left(\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{x}^2}-n^2\right) = \frac{m^2(n^2-1)^2k_0^2\beta^2a^4}{n^2\tilde{y}^2\tilde{x}^4}. \quad (4.46)$$

При этом уравнение (4.43) приблизительно распадается на два, соответствующих равенству нулю квадратных скобок в левой части. Эти решения соответствуют модам, близким к ТЕ и ТМ колебаниям, полученным ранее для бесконечного цилиндра.

При $\beta > k_0$ (тонкий диск), напротив, правая часть уравнения является большой, и значит, решения надо искать вблизи нулей функций Бесселя, стоящих в знаменателях выражений в скобках.

Попробуем найти собственные значения для волнового числа k_0 (резонансные частоты), решив характеристическое уравнение, используя простые приближения для первого режима (толстый диск), наиболее соответствующего МШГ, хотя оказывается, что получающиеся приближения вполне применимы и для достаточно тонких дисков.

Поскольку резонансы МШГ находятся вблизи значений $\tilde{y} = m$, то значения $\tilde{x} \simeq \tilde{y}/n_{eff} < m$. Поэтому функции Бесселя и Неймана от аргумента $\tilde{x}$ находятся вне области осцилляций, где функции Бесселя экспоненциально малы, а функции Неймана, напротив, экспоненциально велики. Поэтому для нахождения приближения действительной части частоты можно в функциях Ханкеля и их производных оставить только функции Неймана. Кроме того, такое приближение соответствует резонансам вынужденных колебаний, когда резонансные частоты действительны.

Рассмотрим получающееся действительное уравнение:

$$\frac{J_m'(\tilde{y})}{P\tilde{y}J_m(y)} = \frac{Y_m'(\tilde{x})}{\tilde{x}Y_m(\tilde{x})}. \quad (4.47)$$

Воспользовавшись выражением для производных функций Бесселя (4.24), перепишем уравнение в виде:

$$\frac{J_{m-1}(\tilde{y})}{J_m(\tilde{y})} = \frac{m}{\tilde{y}} + \frac{P\tilde{y}}{\tilde{x}}\frac{Y'_m(\tilde{x})}{Y_m(\tilde{x})}. \tag{4.48}$$

В левой части уравнения стоит быстро осциллирующее выражение, обращающееся в нуль и в бесконечность, соответственно в нулях $T_{m-1,q}$ и $T_{m,q}$ функции Бесселя. В правой же части стоит медленно меняющаяся в области резонансов, то есть при $\tilde{x} < m$, функция. Воспользуемся в этой области приближением (4.17) при $\tilde{x} \gg 1$ и получим:

$$\frac{Y'_m(\tilde{x})}{Y_m(\tilde{x})} \simeq -\frac{\sqrt{m^2-\tilde{x}^2}}{\tilde{x}} + \frac{\tilde{x}}{2(m^2-\tilde{x}^2)}. \tag{4.49}$$

Второе слагаемое для больших m можно отбросить, но оно улучшает точность оценок при малых размерах резонатора.

Окончательно получаем следуюшее выражение для анализа:

$$\frac{J_{m-1}(\tilde{y})}{J_m(\tilde{y})} = \frac{m}{\tilde{y}} - \frac{P\tilde{y}}{\tilde{x}}\left(\frac{\sqrt{m^2-\tilde{x}^2}}{\tilde{x}} - \frac{\tilde{x}}{2(m^2-\tilde{x}^2)}\right). \tag{4.50}$$

Как в СВЧ, так и в оптическом диапазоне дисковые резонаторы делают обычно из материалов с относительно большой диэлектрической проницаемостью (большим показателем преломления). Так, у сапфировых дисков в диапазоне миллиметровых волн $\epsilon \sim 12$, а у кремния на длине волны 1.55 мкм, где он прозрачен, $n \simeq 3.48$. Если теперь показатель преломления в правой части устремить к бесконечности: $n \sim n_{eff} \to \infty$, то, поскольку $m \sim \tilde{y} = n_{eff}\tilde{x}$, для мод типа TE ($P = 1$) в правой части будет стоять большой по модулю коэффициент $\sim -n^2$, а для мод типа TM ($P = 1/n^2$) – наоборот малый, $\sim 1/n^2$ (см. рис. 4.6). Можно предположить, поэтому, что для мод типа TE корни характеристического уравнения будут располагаться вблизи нулей $T_{m,q}$, а для мод типа TM вблизи $T_{m-1,q}$. Заметим, что эти условия не совпадают в пределе с граничными условиями для различных типов мод в металлическом цилиндре, где требуется обращение в нуль либо самой функции Бесселя, либо ее производной. Это связано с тем, что у диэлектрического резонатора магнитное поле в отличие от случая объемного резонатора остается на границе непрерывным.

Решение можно искать в виде поправок:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^{(0)}_{TE} &= T_{m,q},\\
\tilde{y}^{(0)}_{TM} &= T_{m-1,q},\\
\tilde{y}^{(1)}_{TE} &= \tilde{y}^{(0)}_{TE} + \Delta_{m,TE},\\
\tilde{y}^{(1)}_{TM} &= \tilde{y}^{(0)}_{TM} + \Delta_{m-1,TM}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

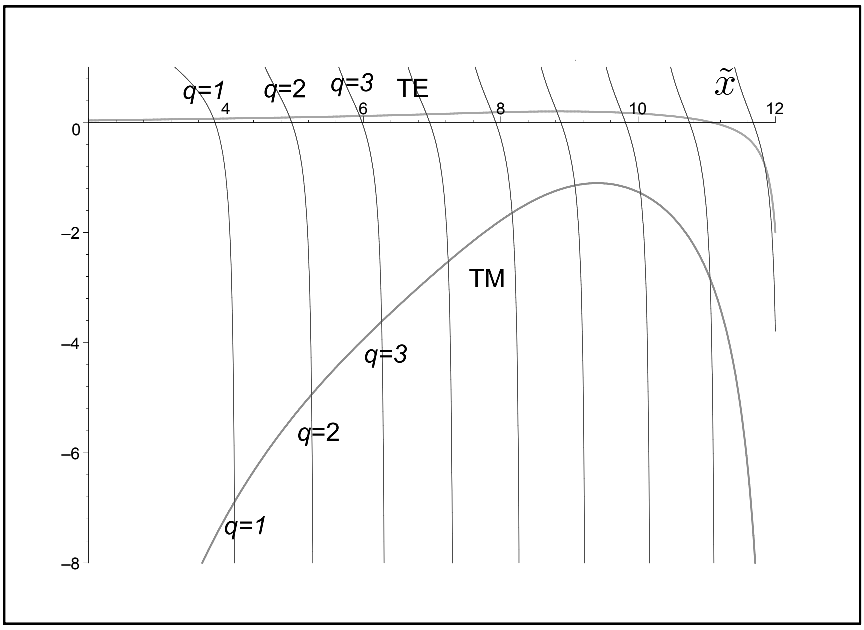


Рис. 4.6: Графическое решение характеристического уравнения (4.50) при $m = 25$, $n = 3.48$

Разлагая функции Бесселя в ряд Тейлора по поправкам $\Delta_{TE,TM}$ до первого члена и воспользуемся выражениями для производных цилиндрических функций (4.24) можно получить при $m \gg 1$ и не слишком больших q:

$$\Delta_{m,TE} \simeq \Delta_{TE} \simeq \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}},$$
$$\Delta_{m-1,TM} \simeq \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1. \tag{4.52}$$

Задание 11. *Докажите приведенные приближения.*

Еще более простым, но заметно худшим при n существенно больших 1, для мод типа ТМ является приближение:

$$\tilde{y} \simeq T_{m,q} - \Delta_{TM},$$
$$\Delta_{TM} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}, \tag{4.53}$$

которое позволяет записать приближения в совсем простом виде, имеющем наглядный физический смысл:

$$\tilde{y} \simeq T_{m,q} - \Delta_{TE,TM},$$
$$\Delta_{TE,TM} = \frac{1}{Pn\sqrt{n^2-1}}. \tag{4.54}$$

В таком приближении можно считать, что поля в диэлектрическом резонаторе и его собственные частоты эквивалентны тем, которые получаются в закрытом резонаторе с радиусом, увеличенным на величину $\Delta_{TE,TM}/(k_0 n)$ с простейшими граничными условиями $H_n = E_n = 0$. Эти условия отличаются от граничных условий в резонаторе с металлическими стенками и соответствуют резонатору, окруженному средой с $\epsilon, \mu \to \infty$.

Мы пока еще не полностью нашли решение для собственных частот в конечном цилиндре, поскольку неизвестной осталась величина β, описывающая распределение поля по оси z. Выпишем условия на границе между частичными областями 1 и 3 на верхней плоскости диска, при $z = d/2$, где d – толщина диска. Поскольку обе эти области захватывают нуль, распределение по радиусу описывается в них функцией Бесселя $J_m(k_\rho \rho)$. Чтобы поля были непрерывны, следует положить, что $k_{1\rho} = k_{3\rho}$, то есть $n^2 k_0^2 - \beta^2 = k_0^2 - \beta_3^2$, откуда в предположении $\beta \ll k_0$ следует, что $\beta_3 = i\gamma$ – величина мнимая. Сшиваем вместе на верхней грани компоненты E_ρ, E_ϕ, E_z:

$$\begin{aligned}
&C_{TE,1}\frac{im}{\rho}J_m(k_\rho\rho)\,{}^{\cos(\beta h/2)}_{\sin(\beta h/2)} - C_{TM,1}\frac{\beta}{n^2 k_0}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\,{}^{\cos(\beta h/2)}_{-\sin(\beta h/2)}\\
=\;&C_{TE,3}\frac{im}{\rho}J_m(k_\rho\rho)e^{-\gamma h/2} + C_{TM,3}\frac{\gamma}{k_0}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}e^{-\gamma h/2},\\
&-C_{TE,1}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\,{}^{\cos(\beta h/2)}_{\sin(\beta h/2)} - C_{TM,1}\frac{im\beta}{n^2 k_0\rho}J_m(k_\rho\rho)\,{}^{\cos(\beta h/2)}_{-\sin(\beta h/2)}\\
=\;&-C_{TE,3}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}e^{-\gamma h/2} + C_{TM,3}\frac{im\gamma}{k_0\rho}J_m(k_\rho\rho)e^{-\gamma h/2},\\
&C_{TM,1}\,{}^{\sin(\beta h/2)}_{\cos(\beta h/2)} = C_{TM,3}e^{-\gamma h/2},\\
&-C_{TE,1}\frac{i\beta}{k_0 c}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\,{}^{-\sin(\beta h/2)}_{\cos(\beta h/2)} - C_{TM,1}\frac{m}{c\rho}J_m(k_\rho\rho)\,{}^{\sin(\beta h/2)}_{\cos(\beta h/2)}\\
=\;&C_{TE,3}\frac{i\gamma}{k_0 c}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}e^{-\gamma h/2} - C_{TM,3}\frac{m}{c\rho}J_m(k_\rho\rho)e^{-\gamma h/2},\\
&C_{TE,1}\frac{m}{k_0 c\rho}\beta J_m(k_\rho\rho)\,{}^{-\sin(\beta h/2)}_{\cos(\beta h/2)} - C_{TM,1}\frac{i}{c}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}\,{}^{\sin(\beta h/2)}_{\cos(\beta h/2)}\\
=\;&-C_{TE,3}\frac{m\gamma}{k_0 c\rho}J_m(k_\rho\rho)e^{-\gamma h/2} - C_{TM,3}\frac{i}{c}\frac{\partial J_m(k_\rho\rho)}{\partial\rho}e^{-\gamma h/2},\\
&C_{TE,1}\,{}^{\cos(\beta h/2)}_{\sin(\beta h/2)} = C_{TE,3}e^{-\gamma h/2}.
\end{aligned}$$

После подстановок получаем:

$$\begin{aligned}
&\beta\,{}^{\cos(\beta d/2)}_{-\sin(\beta d/2)} = -\gamma n^2\,{}^{\sin(\beta d/2)}_{\cos(\beta d/2)},\\
&C_{TM,1}\,{}^{\sin(\beta d/2)}_{\cos(\beta d/2)} = C_{TM,3}e^{-\gamma d/2},\\
&\beta\,{}^{-\sin(\beta d/2)}_{\cos(\beta d/2)} = -\gamma\,{}^{\cos(\beta d/2)}_{\sin(\beta d/2)},\\
&C_{TE,1}\,{}^{\cos(\beta d/2)}_{\sin(\beta d/2)} = C_{TE,3}e^{-\gamma d/2}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

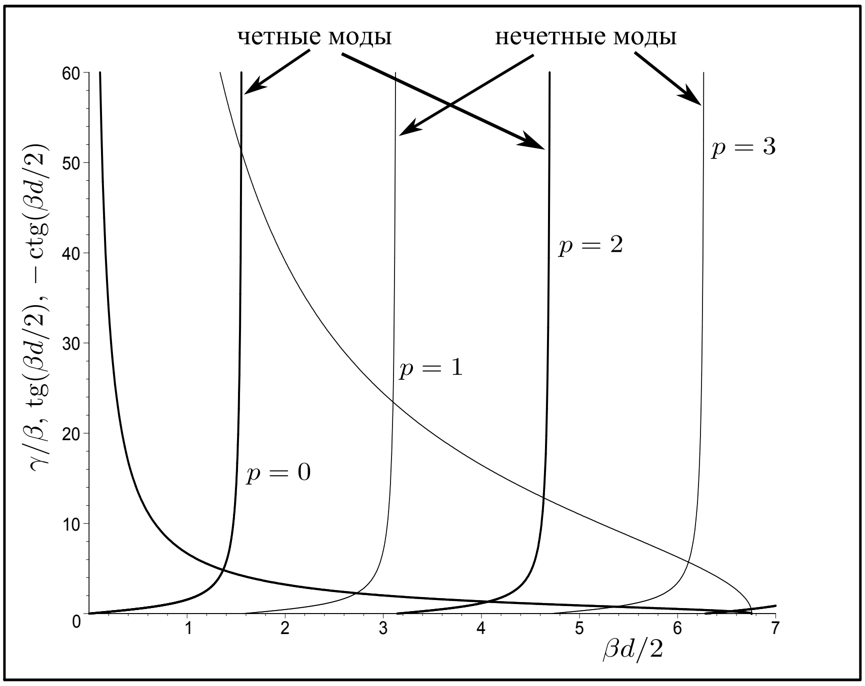


Рис. 4.7: Графическое решение дисперсионных уравнений для слоя ($\lambda = 1.55$ мкм, $n = 3.48$, $d = 1$ мкм).

Из первого и третьего уравнений видно, что одновременно удовлетворить всем уравнениям не удается, поскольку получается, что $\mathrm{tg}^2(\beta d/2) = -1$. Однако в приближении близости мод к TM и TE типам волн система распадается на две, соответственно, включающие первые или последние три равенства, которые дают следующие дисперсионные уравнения:

$$\frac{\gamma_{TE}}{\beta_{TE}} = \sqrt{\frac{k_0^2(n^2-1)}{\beta_{TE}^2} - 1} = {}^{\mathrm{tg}(\beta_{TE} d/2)}_{-\,\mathrm{ctg}(\beta_{TE} d/2)},$$
$$\frac{\gamma_{TM}}{\beta_{TM}} = n^2\sqrt{\frac{k_0^2(n^2-1)}{\beta_{TE}^2} - 1} = {}^{\mathrm{tg}(\beta_{TM} d/2)}_{-\,\mathrm{ctg}(\beta_{TM} d/2)}. \tag{4.56}$$

Эти уравнения являются характерными для волн в направляющем диэлектрическом слое, и они хорошо известны в теории оптических волноводов [12, 10]. На рис. 4.7 показано графическое решение дисперсионных уравнений.

Как следует из этих графиков, для достаточно тонкого диска моды следует искать вблизи значений $\beta d = (p+1)\pi$. Полагая, что $\beta \ll k_0$, и действуя аналогично тому, как мы поступили в случае с цилиндрической границей, можно найти поправку к $\beta^{(0)}d = (p+1)\pi$ (как в резонаторе с металлическими стенками). При этом в первом приближении получается, что диэлектрический слой эквивалентен закрытому слою толщины, увеличенной с обеих сторон на $\Delta_{TM,TE}\lambda/(2\pi n)$ (индексы TE и TM меняются местами по сравнению с граничными условиями на цилиндрической поверхности, поскольку плоские границы ортогональны цилиндрическим и значит, они видят противоположную поляризацию распространяющихся в резонаторе волн). При этом для плоских верхних границ поле моды действительно выглядит в соответствии с обозначениями, то есть для ТЕ моды поле **E** действительно ортогонально направлению распространения и лежит в плоскости границы, аналогично для ТМ, а для цилиндрических границ ситуация получается обратной.

Это позволяет получить простую систему для оценки собственных частот:

$$\begin{cases} \beta_{mqp} = \frac{\pi p}{d+\frac{2Pn}{k_{mpq}\sqrt{n^2-1}}} \\ k_{mpq}a = \sqrt{\left(T_{mq} - \frac{1}{Pn\sqrt{n^2-1}}\right)^2 + \beta_{mqp}^2 a^2} \end{cases} \tag{4.57}$$

При этом в качестве начальной оценки можно использовать простое приближение

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{mq}^0 &= T_{mq} - \frac{1}{Pn\sqrt{n^2-1}}, \\ \beta_{mqp}^0 &= \frac{\pi p}{d + \frac{2Pna}{\tilde{y}_{mq}^0\sqrt{n^2-1}}}, \\ \lambda_{mqp}^0 &\simeq \frac{2\pi na}{\sqrt{\tilde{y}_{mq}^{(0)2} + \beta_{mqp}^{(0)2}a^2}}, \end{aligned} \tag{4.58}$$

которое затем можно использовать для рекурсивного решения системы (4.57).

4.7 Излучательная добротность

Характеристические уравнения открытых резонаторов являются комплексными, следовательно, и их решения – собственные значения для волновых чисел k, а значит, и частот ω являются комплексными. Мнимая часть вектора $k = k^r - ik^i$ описывает потери открытого резонатора на излучение в окружающее пространство. При этом излучательная добротность определяется выражением.

$$Q_{rad} = \left|\frac{k^r}{2k^i}\right|. \tag{4.59}$$

Рассмотрим однородное характеристическое уравнение

$$\frac{J_m'(\tilde{y})}{J_m(y)} = \frac{P\tilde{y}}{\tilde{x}}\frac{H_m^{(1)\prime}(\tilde{x})}{H_m^{(1)}(\tilde{x})}, \tag{4.60}$$

и найдем мнимые поправки к его действительному решению. Поправками, вызванными гибридным характером мод пренебрежем.

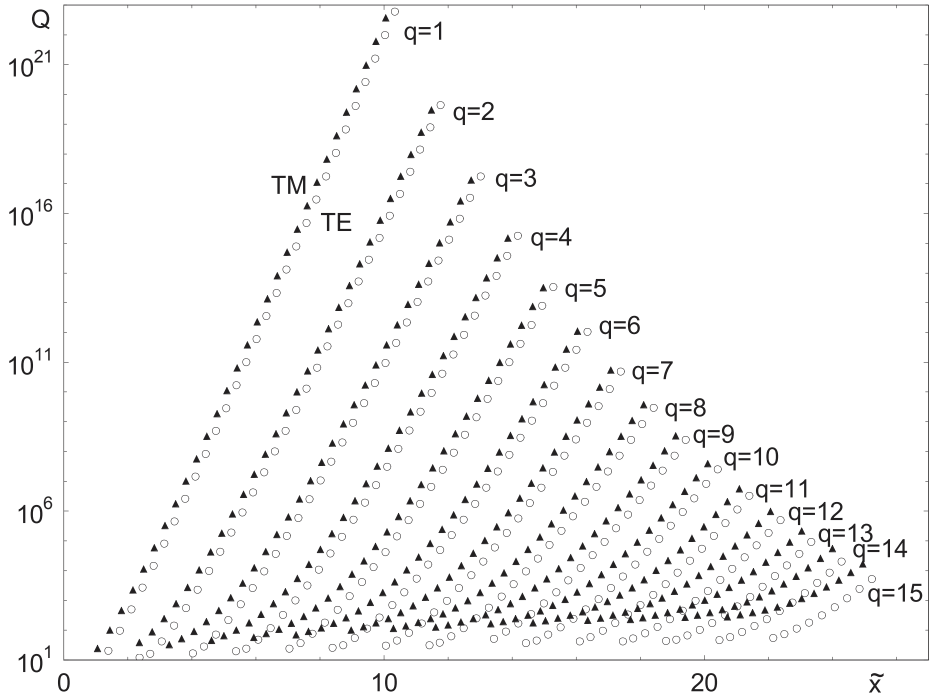


Рис. 4.8: Зависимость излучательной добротности мод бесконечного кремниевого цилиндра ($n = 3.48$) для TE ($\circ$) и TM ($\blacktriangle$) мод с индексом $m < 30$ в зависимости от размерного параметра $\tilde{x}$

Задание 12. *Считая мнимую часть аргументов функций малой, разложите по ней в ряд Тейлора левую и правую часть характеристического уравнения и покажите, что*

$$Q = \frac{k_0^r}{2k_0^i} \simeq \frac{\pi \tilde{x}^r k_0^2 a^2}{4P\tilde{y}^r} \left[\left(\frac{P\tilde{y}^r}{\tilde{x}^r} \left(\frac{m^2}{\tilde{x}^{r2}} - 1 \right) - \frac{n^2 \tilde{x}^r}{\tilde{y}^r} \left(\frac{m^2}{\tilde{y}^{r2}} - 1 \right) \right) Y_m^2(\tilde{x}^r) \right.$$
$$\left. - (1 - Pn^2) \frac{P\tilde{y}^r}{\tilde{x}^r} Y_m'^2(\tilde{x}^r) - 2P\tilde{y}^r \left(\frac{1}{\tilde{x}^{r2}} - \frac{n^2}{\tilde{y}^{r2}} \right) Y_m(\tilde{x}^r) Y_m'(\tilde{x}^r) \right]. \tag{4.61}$$

Второе слагаемое в квадратных скобках обращается в нуль для мод TM. Последнее слагаемое мало и обращается в нуль для бесконечного цилиндра ($\beta = 0$, $\tilde{y}^{r2} = n^2 \tilde{x}^{r2}$).

Используя аппроксимации для функции Неймана и ее производной в тех же приближениях, что и ранее, получаем более простую формулу для добротности:

$$Q_{rad} \simeq \frac{P\pi n^2 (m^2 - \tilde{x}^{r2}) Y_m^2(\tilde{x}^r)}{4}$$
$$\simeq \frac{Pn^2 \sqrt{m^2 - \tilde{x}^{r2}}}{2} \exp \left[m \operatorname{Arth} \left(\frac{\sqrt{m^2 - \tilde{x}^{r2}}}{m} \right) - \sqrt{m^2 - \tilde{x}^{r2}} \right]$$

Излучательная добротность экспоненциально растет с увеличением m (рис. 4.8) и, как правило, в реальных резонаторах не играет особой роли.

Глава 5

Моды диэлектрического шара

5.1 Волны в шаре

Взаимодействие света со сферическими телами исследуется уже более 100 лет. В последние десятилетия, в связи с обнаружением сверхузких резонансов рассеяния и возможностью создания на этой основе микрорезонаторов с гигантской добротностью, открывающих новые горизонты оптической микрофотоники, интерес к этому вопросу усилился многократно.

На фотографии (Рис. 5.1) показан сферический микрорезонатор с МШГ. В виде пояса видна спекл-картина рассеяния на поверхностных неоднородностях поля МШГ.

В этой главе рассматривается электродинамическое описание характера собственных мод диэлектрического шара.

5.1.1 Волны в сферических координатах

Общее решение векторных уравнений Максвелла в сферических координатах для изотропной среды может быть получено через потенциалы Дебая (Глава 2) [6]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_\psi = \nabla \times (\mathbf{r}\psi), \\
&\mathbf{N}_\psi = \frac{1}{k}\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{r}\psi)), \\
&\mathbf{O}_\psi = \nabla\psi, \\
&\nabla^2\psi + k^2\psi = 0,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор. При этом произведение $\mathbf{r}\psi_{e,m}$ является вектором Герца.

Возможность представления полей в виде потенциалов Дебая такого вида эквивалентна возможности представления любого векторного поля в виде:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{L}}\psi + \nabla \times \hat{\mathbf{L}}\chi + \nabla\phi, \tag{5.2}$$

где

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\mathbf{r} \times \nabla, \tag{5.3}$$

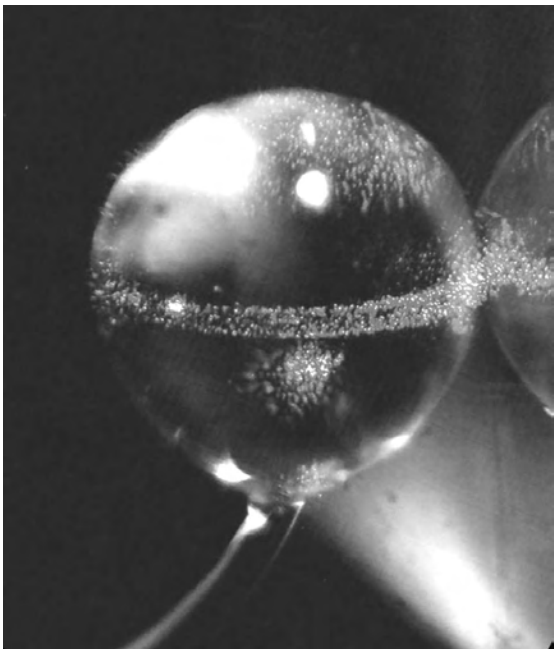


Рис. 5.1: Оптический сферический микрорезонатор на ножке рядом с возбуждающей призмой, в которой видно его отражение. Диаметр около 570 мкм, добротность $> 10^9$. (Физический факультет МГУ).

является оператором углового момента, а ψ, χ, ϕ – потенциалы, удовлетворяющие скалярному уравнению Гельмгольца. Действительно, поскольку $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, пользуясь свойствами оператора ∇ (см. врезку в Главе 2), получаем:

$$\hat{\mathbf{L}}\psi = -i\mathbf{r} \times \nabla\psi = i\nabla \times (\mathbf{r}\psi). \tag{5.4}$$

Скалярные потенциалы Дебая ставшие популярными благодаря книге Дж. А. Стрэттона [6], широко используются в англоязычной литературе и приняты в этом пособии. Они позволяют последовательно и единообразно решать широкий круг задач в различных координатных системах. Эквивалентным описанием в сферических координатах является использование скалярных потенциалов Бромвича $U = \psi_1/r$, $V = \psi_2/r$, которые также часто используются в теории рассеяния, особенно франкоязычными авторами. Использование этих потенциалов приводит к радиальным функциям Риккати-Бесселя, которые, зачастую обеспечивают более простую запись выражений.

Вводя векторы $\mathbf{M}_{lm}$ и $\mathbf{N}_{lm}$, получаемые из решения скалярного волнового уравнения ψ_{lm}, можно получить полное решение векторного волнового уравнения в сферических координатах.

В сферических координатах (r, θ, ϕ) с параметрами Ламэ $h_r = 1$, $h_\theta = r$ и $h_\phi = r\sin\theta$ основные векторные операторы имеют вид:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathbf{i}_\phi, \tag{5.5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{U} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2U_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta U_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi},$$

$$\nabla\times\mathbf{U} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta U_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rU_\phi)}{\partial r}\right)\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{i}_\phi,$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}.$$

Двумя независимыми соленоидальными ($\nabla\cdot(\mathbf{M},\mathbf{N})_{lm} = 0$) решениями являются векторные функции:

$$\mathbf{M} = \nabla\times(\mathbf{r}\psi) = -i\hat{\mathbf{L}}\psi,$$
$$\mathbf{N} = \frac{1}{k}\nabla\times\mathbf{M} = \frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times(\mathbf{r}\psi) = -\frac{i}{k}\nabla\times\hat{\mathbf{L}}\psi, \tag{5.6}$$

Векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ взаимно ортогональны и образуют базис. Общеприняты обозначения:

- Н-тип (поперечно электрические ТЕ-моды), $\mathbf{E}\sim\mathbf{M}$, $E_r = 0$;
- Е-тип (поперечно магнитные ТМ-моды), $\mathbf{E}\sim\mathbf{N}$, $H_r = 0$.

Эти обозначения, как уже отмечалось в предыдущей главе, для МШГ в сфере противоположны обозначению мод в цилиндре, с близкой поляризацией.

При выбранной временной зависимости $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}$ произвольное векторное поле без источников можно выразить в сферической системе координат в виде:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{M}_v - i\mathbf{N}_u,$$
$$\tilde{\mathbf{H}} = -\sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}}(\mathbf{M}_u + i\mathbf{N}_v), \tag{5.7}$$

где индексами u и v обозначены разные решения скалярного уравнения Гельмгольца.

Решение скалярного уравнения Гельмгольца в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + k^2\psi = 0 \tag{5.8}$$

можно найти методом разделения переменных $\psi_{\ell m} = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Подставляя это выражение в уравнение Гельмгольца, и выделяя члены, не зависящие от координат, вводим константы разделения:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + k^2r^2 = \\
&-\frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{\Theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2}\right] = C_\ell, \\
&\frac{1}{\Theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) + C_\ell\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} = C_m.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Простое гармоническое уравнение для $\Phi(\phi)$ имеет пару независимых решений $\Phi(\phi) = e^{\pm i\sqrt{C_m}}$, и из условия периодичности по углу ϕ следует, что $C_m = m^2$, где m – целое число. Заменой переменных $x = kr$ и $\eta = \cos\theta$ при выборе константы разделения $C_\ell = \ell(\ell+1)$, где $\ell \geq |m|$ – положительное целое число, оставшиеся два уравнения сводятся к известным уравнениям для сферических функций Бесселя и полиномов Лежандра, которые подробнее будут рассмотрены далее.

$$\begin{aligned}
&R''(x) + \frac{2}{x}R'(x) + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]R(x) = 0, \\
&(1-\eta^2)\Theta''(\eta) - 2\eta\Theta'(\eta) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right]\Theta(\eta) = 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Угловая часть $Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ называется угловой шаровой функцией, ее обычно нормируют на единицу:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_{\ell m}(\theta,\phi)Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi)\,d\phi\,d\theta = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \\
&Y_{\ell m}(\theta,\phi) = C_{\ell m}P_\ell^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}, \\
&C_{\ell m} = (-1)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}, \\
&\nabla^2 Y_{\ell m} = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}Y_{\ell m}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Функции P_ℓ^m называются присоединенными полиномами Лежандра. Индекс ℓ будем называть полярным индексом или номером моды (в приближении волновой оптики он соответствует числу длин волн, укладывающихся на большом круге резонатора $\ell \simeq 2\pi na/\lambda$), целое число m, как и для случая цилиндра, – азимутальным индексом. Волны $e^{i|m|\phi}$ и $e^{-i|m|\phi}$ соответствуют двум вырожденным модам, бегущим по окружности резонатора в экваториальной (азимутальной) плоскости в противоположных направлениях. В соответствии с этим удобно полагать, что индекс m может быть как положительным, так и отрицательным, а в полиномах Лежандра и в нормировках использовать модуль m.

5.2 Сферические функции

5.2.1 Радиальные функции

Сферические радиальные функции $f_\ell(x)$ удовлетворяют уравнению:

$$f_\ell'' + \frac{2}{x} f_\ell' + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right) f_\ell = 0. \tag{5.12}$$

Заменой переменных $f_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} F(x)$ уравнение превращается в уже рассмотренное уравнение для цилиндрической функции Бесселя полуцелого номера $F(x) = Z_{\ell+1/2}(x)$. Поэтому основные свойства радиальных сферических функций следуют из свойств цилиндрических функций Бесселя.

Также как и в случае цилиндрических координат, общим решением скалярного уравнения Гельмгольца является линейная комбинация двух радиальных сферических функций, каждая из которых, естественно, также подчиняется уравнению (5.12):

$$f_\ell(x) = C_j j_\ell(x) + C_y y_\ell(x). \tag{5.13}$$

Здесь $j_\ell(x) = \sqrt{\pi/(2x)} J_{\ell+1/2}(x)$ – сферическая функция Бесселя, которая ограничена в нуле $j_\ell(0) = \delta_{0\ell}$, а $y_\ell(x) = \sqrt{\pi/(2x)} Y_{\ell+1/2}(x)$ – сферическая функция второго рода (Неймана), которая при приближении к нулю стремится к минус бесконечности. Вдали от нуля это осциллирующие ограниченные функции.

Аналогично цилиндрическим функциям вводятся сферические первые и вторые функции Ханкеля:

$$\begin{aligned} h_\ell^{(1)}(x) &= j_\ell(x) + i y_\ell(x), \\ h_\ell^{(2)}(x) &= j_\ell(x) - i y_\ell(x). \end{aligned} \tag{5.14}$$

На бесконечности сферические функции Ханкеля ведут себя как сферические расходящиеся волны:

$$\begin{aligned} j_\ell(x \to \infty) &\approx \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right), \\ y_\ell(x \to \infty) &\approx -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right), \\ h_m^{(1,2)}(x \to \infty) &\approx \frac{\mp i}{x} e^{\pm i(x - \ell\pi/2)}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Как и в случае цилиндрических функций Бесселя и Неймана, первый нуль сферических функций с большим номером появляется при значениях аргумента близких к $\nu = \ell + 1/2$, при этом приближения для нулей получаются те же, что и для цилиндрических функций с формальной заменой m на ν.

Следует заметить, что сферические функции, вообще говоря, проще цилиндрических функций, поскольку явно выражаются через элементарные функции с помощью данных выше рекуррентных соотношений из функций нулевого и первого порядка:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}, & j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \\ y_0(x) &= -\frac{\cos x}{x}, & y_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} j_\ell(x) &= x^\ell \left[-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} \right]^\ell \frac{\sin x}{x}, \\ y_\ell(x) &= -x^\ell \left[-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} \right]^\ell \frac{\cos x}{x}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

5.2.2 Функции Риккати-Бесселя

В теории рассеяния на сфере (теория Ми) также часто используются функции Риккати-Бесселя, определяемые через обычные сферические функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) &= x j_\ell(x), \\ \chi_\ell(x) &= -x y_\ell(x), \\ \zeta_\ell(x) &= \psi_\ell(x) - i\chi_\ell(x) = x h_\ell^{(1)}(x), \\ \xi_\ell(x) &= \psi_\ell(x) + i\chi_\ell(x) = x h_\ell^{(2)}(x). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Эти функции именно в таких обозначениях были введены Дебаем в классической работе 1909 года. Хотя решением скалярного уравнения Гельмгольца являются сферические функции Бесселя, векторные поля обычно проще записываются именно через функции Риккати-Бесселя. Проще также выглядят многие основные соотношения для этих функций, хотя выбор между двумя этими видами функций для расчетов является обычно делом вкуса и привычки.

Функции Риккати-Бесселя подчиняются дифференциальному уравнению:

$$\phi'' + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] \phi = 0. \tag{5.19}$$

На бесконечности эти функции превращаются в простой синус и косинус. Следует иметь в виду, что такая простая аппроксимация для практических целей все же малопригодна – хотя амплитуда функций Риккати-Бесселя быстро стремится к единице, медленно меняющийся период осцилляций приводит к существенным отличиям в фазе синусоиды даже при больших значениях аргумента.

Нули функций Риккати-Бесселя совпадают с нулями функций Бесселя полуцелого аргумента, а аппроксимации легко получаются из соответствующих аппроксимаций для радиальных сферических функций, приведенных выше.

При значениях аргумента близких к $\nu = \ell + 1/2$:

$$\begin{aligned}\psi_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3}\mathrm{Ai}\left[\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3}(\nu - x)\right] + O(\ell^{-1}),\\ \chi_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3}\mathrm{Bi}\left[\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3}(\nu - x)\right] + O(\ell^{-1})\end{aligned} \tag{5.20}$$

Эти приближения хороши для описания поля внутри резонатора около поверхности. Для больших значений номера и аргумента можно пользоваться аппроксимациями Дебая. При $x < \nu$:

$$\begin{aligned}\psi_\ell(x) &\simeq \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{\nu^2 - x^2}}e^{\sqrt{\nu^2 - x^2} - \nu \operatorname{arccosh}(\nu/x)}[1 + O(x^{-1})]\\ \chi_\ell(x) &\simeq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{\nu^2 - x^2}}e^{\nu \operatorname{arccosh}(\nu/x) - \sqrt{\nu^2 - x^2}}[1 + O(x^{-1})],\\ \psi'_\ell(x) &\simeq \left[\frac{\sqrt{\nu^2 - x^2}}{x} + \frac{\nu^2}{2x(\nu^2 - x^2)}\right]\psi_\ell(x)[1 + O(x^{-1})],\\ \chi'_\ell(x) &\simeq \left[-\frac{\sqrt{\nu^2 - x^2}}{x} + \frac{\nu^2}{2x(\nu^2 - x^2)}\right]\psi_\ell(x)[1 + O(x^{-1})].\end{aligned} \tag{5.21}$$

Когда $x > \nu$:

$$\begin{aligned}\psi_\ell(x) &\simeq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2 - \nu^2}}\cos\zeta[1 + O(x^{-1})],\\ \psi'_\ell(x) &\simeq \left[-\frac{\sqrt{x^2 - \nu^2}}{x}\operatorname{tg}\zeta - \frac{\nu^2}{2x(x^2 - \nu^2)}\right]\psi_\ell(x)[1 + O(x^{-1})],\\ \chi_\ell(x) &\simeq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2 - \nu^2}}\sin\zeta[1 + O(x^{-1})],\\ \zeta &= \sqrt{x^2 - \nu^2} - \nu \arccos\left(\frac{\nu}{x}\right) - \frac{\pi}{4}.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Этими приближениями можно пользоваться для описания выпадающего поля вне резонатора около его поверхности.

$$
\begin{aligned}
&\phi_\ell' = \phi_{\ell-1} - \frac{\ell}{x}\phi_\ell = \frac{(\ell+1)}{x}\phi_\ell - \phi_{\ell+1},\\
&\phi_{\ell-1} + \phi_{\ell+1} = \frac{2\ell+1}{x}\phi_\ell,\\
&\int \phi_\ell^2 dx = \frac{x}{2}\left[\phi_\ell^2 - \phi_{\ell-1}\phi_{\ell+1}\right] = \frac{x}{2}\left[\phi_\ell'^2 + \frac{x^2-\ell(\ell+1)}{x^2}\phi_\ell^2 - \frac{1}{x}\phi_\ell'\phi_\ell\right],\\
&\int \phi_\ell(\alpha r)\phi_\ell(\beta r)dr = \frac{\alpha\phi_{\ell+1}(\alpha r)\phi_\ell(\beta r) - \beta\phi_\ell(\alpha r)\phi_{\ell+1}(\beta r)}{\alpha^2-\beta^2},\\
&W(\psi_\ell,\chi_\ell) \equiv \psi_\ell(x)\chi_\ell'(x) - \psi_\ell'(x)\chi_\ell(x) = -1,\\
&W(\zeta_\ell,\xi_\ell) \equiv \zeta_\ell(x)\xi_\ell'(x) - \zeta_\ell'(x)\xi_\ell(x) = -2i.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

5.2.3 Угловые сферические функции

Присоединенные функции Лежандра $P_\ell^m(\eta)$ подчиняются уравнению:

$$(1-\eta^2)w'' - 2\eta w' + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right] w = 0. \tag{5.24}$$

или при $\eta = \cos\theta$, как в случае угловых сферических функций:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P = 0. \tag{5.25}$$

Обычно присоединенные функции Лежандра выводят из полиномов Лежандра $P_\ell(\eta)$, уравнение для которых получается из приведенного выше при $m = 0$. Они определяются формулой Родрига [15]:

$$
\begin{aligned}
P_\ell(\eta) &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{d\eta^\ell}(\eta^2-1)^\ell,\\
P_\ell^m(\eta) &= (1-\eta^2)^{m/2}\frac{d^m P_\ell(\eta)}{d\eta^m}.
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

При определении функций Лежандра часто используется дополнительный фазовый множитель $(-1)^m$, введение которого упрощает рассмотрение теории углового момента в квантовой механике. Следуя соглашению Кондона-Шортли, мы, как и многие авторы справочников, перенесли его в определение угловых шаровых функций $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$.

Основные свойства присоединенных полиномов Лежандра определяются соотношениями, приведенными во врезке [14]

$$
\begin{aligned}
&(\ell - m + 1)P^m_{\ell+1}(\eta) = (2\ell+1)\eta P^m_\ell(\eta) - (\ell+m)P^m_{\ell-1}(\eta),\\
&P^m_{\ell+1}(\eta) = 2m\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}P^m_\ell(\eta) - (\ell-m+1)(\ell+m)P^{m-1}_\ell(\eta),\\
&\sqrt{1-\eta^2}P^{m\prime}_\ell(\eta) = \frac{1}{2}(\ell+m)(\ell-m+1)P^{m-1}_\ell(\eta) - \frac{1}{2}P^{m+1}_\ell(\eta),\\
&(1-\eta^2)P^{m\prime}_\ell(\eta) = -(\ell-m+1)P^m_{\ell+1}(\eta) - (\ell+1)\eta P^m_\ell(\eta),
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} P^m_\ell(\eta)P^{m'}_\ell(\eta)d\eta = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{mm'},\\
&\int_{-1}^{1} P^m_\ell(\eta)P^m_{\ell'}(\eta)d\eta = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'},\\
&\int_{-1}^{1} P^m_\ell(\eta)P^{m'}_\ell(\eta)\frac{1}{1-\eta^2}d\eta = \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!}\delta_{mm'}.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Использование функций Лежандра в традиционной форме в расчетах для мод высокого порядка не очень удобно из-за входящих в их выражение факториалов больших чисел, что приводит к гигантским численным множителям. Проще применять нормированные угловые сферические функции $Y_{\ell m}$.

В теории МШГ наибольшую роль играют моды, описываемые присоединенными функциями Лежандра у которых $m = \ell$, которые мы будем далее называть фундаментальными модами:

$$
Y_{\ell\ell}(\theta,\phi) = (-1)^\ell\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi(2\ell)!}}(2\ell-1)!!(\sin\theta)^\ell e^{i\ell\phi},
\tag{5.29}
$$

где двойной факториал числа означает в зависимости от четности этого числа произведение всех четных или нечетных чисел до него:

$$
\begin{aligned}
(2n)!! &= 2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 2n = 2^n n!,\\
(2n-1)!! &= 1\cdot 3\cdot 4\ldots\cdot(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n^2}.
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

Разлагая $\sin\theta$ вблизи экваториальной плоскости в ряд Тейлора, беря в разложении Стирлинга для факториала

$$
n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\right)
\tag{5.31}
$$

только первый член и пользуясь известным пределом – $(1 + x/\ell)^\ell \to e$, получаем:

$$
\begin{aligned}
Y_{\ell\ell}(\theta,\phi) &= (-1)^\ell \left(\frac{\ell}{4\pi^3}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{(\pi/2-\theta)^2}{2}\right)^\ell e^{i\ell\phi} \\
&\simeq (-1)^\ell \left(\frac{\ell}{4\pi^3}\right)^{1/4} e^{-\frac{\ell}{2}(\pi/2-\theta)^2} e^{i\ell\phi}. \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

Для мод у которых $\ell \gg p$, где $p = \ell - m$ – небольшое число порядка 1 удобно приближение, связывающее присоединенные функции Лежандра с функциями Эрмита:

$$
Y_{\ell m}(\theta,\phi) \simeq (-1)^m \left(\frac{\ell}{4\pi^3}\right)^{1/4} H_p(\ell^{1/2}\theta') \frac{1}{\sqrt{2^p p!}} e^{-m\theta'^2/2}\, e^{im\phi}, \qquad (5.33)
$$

где $\theta' = \pi/2 - \theta$.

С использованием этой аппроксимации моду можно представить как пучок Гаусса-Эрмита, циркулирующий благодаря полному внутреннему отражению в экваториальной плоскости резонатора.

В некоторых случаях для расчета свойств мод с не слишком малым $\ell - m$ полезно следующее приближение вблизи $\theta = \pi/2$:

$$
\begin{aligned}
P_\ell^m(\cos\theta) &\simeq c_{\ell m} \cos\left[\mu\theta' - (\ell - m)\frac{\pi}{2}\right], \\
\mu^2 &= \ell(\ell+1) - m^2, \\
c_{\ell m} &= (-1)^m \begin{cases} \frac{(\ell+m-1)!!(\ell-m-1)!!}{(\ell-m)!}, & \text{при четных } \ell - m \\ \frac{(\ell+m)!!(\ell-m)!!}{\mu(\ell-m)!}, & \text{при нечетных } \ell - m \end{cases}, \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

что, с использованием разложения Стирлинга приводит к простому приближению:

$$
Y_{\ell m}(\theta,\phi) \simeq (-1)^m \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\ell}{\mu}} \cos\left[\mu\theta' - (\ell - m)\frac{\pi}{2}\right] e^{im\phi} \qquad (5.35)
$$

5.3 Моды диэлектрического шара

При выбранной зависимости от времени в виде $e^{-i\omega t}$ и от азимутального угла в виде $\propto e^{im\phi}$ (сопряженная мода, бегущая во встречном направлении получается заменой m на $-m$) выражения для компонент собственного электромагнитного поля в сферических координатах запишутся на основании выражений (5.1) в следующем виде:

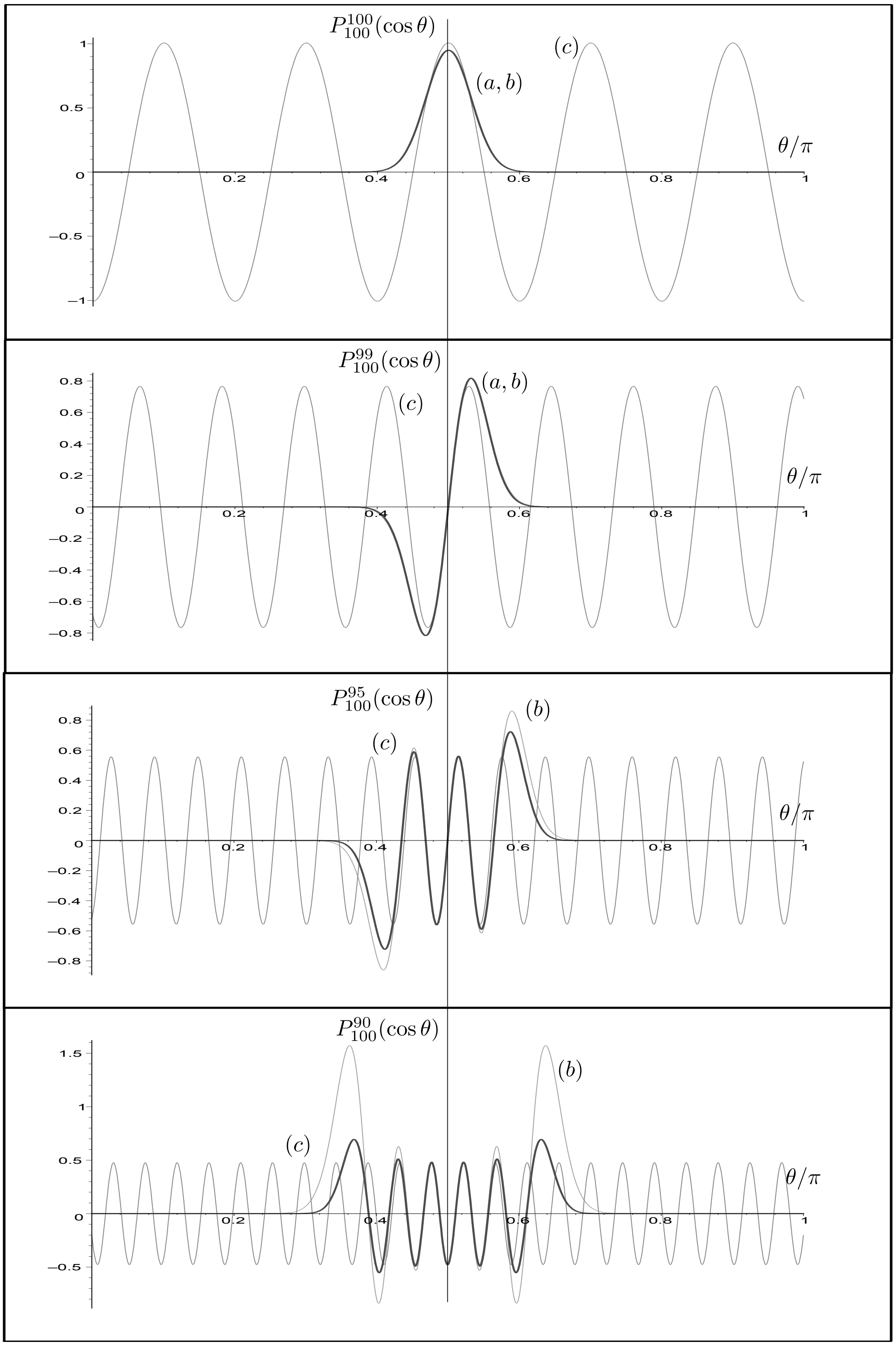


Рис. 5.2: Графики нормированных присоединенных функций Лежандра $C_{\ell m}P_{100}^{m}(\cos\theta)$ (a), а также приближений (5.33) – (b) и 5.35 – (c).

- TE-мода

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{TE} &= C_{TE}\frac{\phi_\ell(kr)}{kr\sqrt{\ell(\ell+1)}}\left[\frac{im}{\sin\theta}Y_{\ell m}(\theta,\phi)\mathbf{i}_\theta - \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\mathbf{i}_\phi\right],\\
\mathbf{b}_{TE} &= -C_{TE}\frac{i}{k_0 rc\sqrt{\ell(\ell+1)}}\left[\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta,\phi)\frac{\phi_\ell(kr)}{kr}\mathbf{i}_r\right.\\
&\left.+\frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\phi'_\ell(kr)\mathbf{i}_\theta + \frac{im}{\sin\theta}Y_{\ell m}(\theta,\phi)\phi'_\ell(kr)\mathbf{i}_\phi\right].
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

- TM-мода:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{TM} &= C_{TM}\frac{1}{kr\sqrt{\ell(\ell+1)}}\left[\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta,\phi)\frac{\phi_\ell(kr)}{kr}\mathbf{i}_r\right. \qquad (5.37)\\
&\left.+\frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\phi'_\ell(kr)\mathbf{i}_\theta + \frac{im}{\sin\theta}Y_{\ell m}(\theta,\phi)\phi'_\ell(kr)\mathbf{i}_\phi\right],\\
\mathbf{b}_{TM} &= -C_{TM}\frac{i\phi_\ell(kr)}{k_0 rc\sqrt{\ell(\ell+1)}}\left[\frac{imY_{\ell m}(\theta,\phi)}{\sin\theta}\mathbf{i}_\theta - \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\mathbf{i}_\phi\right].
\end{aligned}
$$

где сферические функции Риккати-Бесселя выбираются в виде $\phi_\ell(kr) = \psi_\ell(nk_0 r)$ внутри и $\phi_\ell(kr) = \zeta_\ell(k_0 r)$, если рассматриваются собственные моды. Если же рассматривается стационарное решение с действительным k, для внешнего поля выбирается линейная комбинация функций $\chi_\ell(k_0 r) + \beta_\ell(k)\psi_\ell(k_0 r)$, при этом в резонансе $\beta_\ell(k) \to 0$. C_{TE}, C_{TM} – нормировочные константы. Как и ранее, для среды с $n_e \neq 1$ решения получаются формальной заменой $n \to n_i/n_e$, $k_0 \to n_e k_0$. Если бы зависимость от времени была выбрана в виде $e^{i\omega t}$, убегающая на бесконечность волна описывалась бы функцией $\xi_\ell(k_0 r)$.

Задание 13. *Получите приведенные выражения для векторных гармоник.*

Из равенства тангенциальных составляющих поля на границе ($r = a$):

$$
\begin{aligned}
E^i_\theta = E^e_\theta, E^i_\phi = E^e_\phi,\\
B^i_\theta = B^e_\theta, B^i_\phi = B^e_\phi,
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

получаем соотношения:

$$
\begin{aligned}
C_{TE,i}\frac{1}{n}\psi_\ell(\tilde{y}) &= C_{TE,e}\zeta_\ell(\tilde{x}),\\
C_{TE,i}\psi'(\tilde{y}) &= C_{TE,e}\zeta'(\tilde{x}),\\
C_{TM,i}\frac{1}{n}\psi'(\tilde{y}) &= C_{TE,e}\zeta'(\tilde{x}),\\
C_{TM,i}\psi_\ell(\tilde{y}) &= C_{TM,e}\zeta_\ell(\tilde{x}).
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

Здесь $\tilde{x} = k_0 a$ – так называемый диффракционный параметр размера шара, $\tilde{y} = nk_0 a$. Легко проверить, что эти уравнения также обеспечивают удовлетворение оставшихся граничных условий $B^i_{TE,r} = B^e_{TE,r}$ и $D_{TM,r} = n^2 E^i_{TE,r} = E^e_{TE,r}$. Эти равенства связывают амплитуды полей снаружи и внутри резонатора, помеченные, соответственно, индексами e и i, а также позволяют найти характеристическое уравнение, определяющее собственные числа k_{lq} колебаний диэлектрического резонатора. Деля второе равенство на первое и третье на четвертое, получаем:

$$nP\frac{\psi'_\ell(\tilde{y})}{\psi_\ell(\tilde{y})} = \frac{\zeta'_\ell(\tilde{x})}{\zeta_\ell(\tilde{x})}. \tag{5.40}$$

где $P = 1/n^2$ для колебаний ТМ и $P = 1$ для ТЕ-мод.

На рис. 5.3 показано радиальное распределение поля для нескольких МШГ, рассчитанное исходя из численного решения характеристического уравнения. Следует обратить внимание на скачок поля на границе для мод типа ТМ.

Угловое распределение поля в микросферах описывается функциями Лежандра (5.2). На фотографии 5.1 показано наблюдаемое в эксперименте распределение интенсивности для ТЕ моды, визуализируемое благодаря рассеянию света на молекулярных поверхностных неоднородностях, с $\ell \simeq 4000$, $\ell - n \simeq 13$.

5.4 Собственные частоты

Корни трансцендентных уравнений (5.40) являются комплексными числами, при этом малая мнимая часть определяет излучательную добротность моды (потери на излучение с выпуклой поверхности). Поскольку характеристические уравнения 5.40 не зависят от азимутального индекса m, все резонансные частоты в идеальном сферическом резонаторе являются m раз вырожденными и моды одинаковой поляризации, отличающиеся лишь этим индексом, имеют одинаковые частоты. Этот результат является следствием высокой степени симметрии сферы, которая переходит в себя поворотом на любой угол вокруг любой оси, проходящей через центр. Соответственно, МШГ одного вида с разными направлениями, но одинаковыми по величине угловыми моментами переходят друг в друга при повороте системы координат.

Численный расчет сферических функций, даже очень высоких номеров и, соответственно, численное решение уравнения (5.40) не составляет особых проблем, поэтому как и для цилиндра получим здесь лишь очень простую и физически прозрачную аппроксимацию, дающую к тому же приближения, достаточные для большинства приложений.

Мнимая часть корней, которая определяет так называемую излучательную добротность резонатора, связанную с потерей энергии на излучение в окружающее пространство в реальных резонаторах очень мала, а, следовательно, она является малым параметром в уравнении (5.40). Полагая $\tilde{x} = \tilde{x}^r + i\tilde{x}^i$, $\tilde{x}^r \gg \tilde{x}^i$, и, раскладывая в точке $\tilde{x}^r$ все функции, получим систему из двух действительных уравнений для нахождения действительной и мнимой частей.

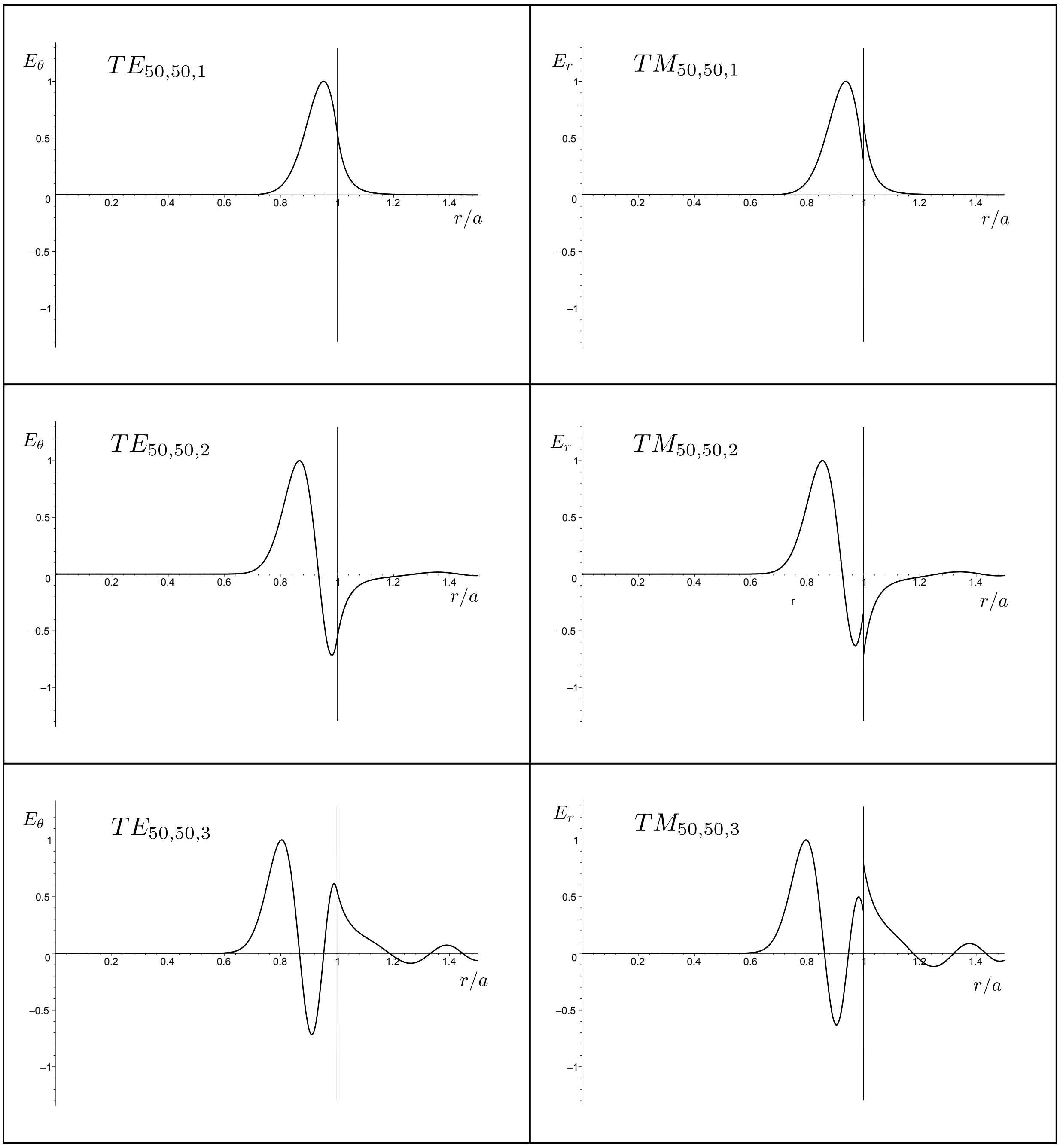


Рис. 5.3: Расчетное распределение основных компонент электрического поля мод $\mathrm{TE}_{50,50,q}$ и $\mathrm{TM}_{50,50,q}$ при $q = 1, 2, 3$ в микросфере из плавленого кварца (n=1.457)
.

Уравнение для действительной части можно также просто получить, если пренебречь в характеристическом уравнении действительными частями сферической функции Ханкеля, то есть фактически заменить снаружи резонатора сферические функций Ханкеля, описывающие на бесконечности убегающую волну, на функцию Неймана, соответствующую стоячей волне. Такая замена эквивалентна предположению о наличии где-то на бесконечности генератора, компенсирующего потери энергии, либо о наличии на некотором расстоянии от резонатора в нуле функции Неймана идеального зеркала. Аналогично для функций Риккати-Бесселя:

$$nP\psi'_\ell(\tilde{y}^r)\chi_\ell(\tilde{x}^r) - \psi_\ell(\tilde{y}^r)\chi'_\ell(\tilde{x}^r) = 0. \tag{5.41}$$

Преобразуя производные от функций в функции меньшего номера получаем уравнение, удобное для численного решения:

$$\tilde{x}^r(Pn\,\psi_{\ell-1}(n\tilde{x}^r)\,\chi_\ell(\tilde{x}^r) - \psi_\ell(n\tilde{x}^r)\chi_{\ell-1}(\tilde{x}^r)) + \ell(1-P)\psi_\ell(n\tilde{x}^r)\,\chi_\ell(\tilde{x}^r) = 0.$$

Это уравнение имеет много действительных корней, которые перенумеруем, начиная с наименьшего, индексом q, который будем называть порядком моды. Высокодобротные МШГ с малым порядком q в геометрическом приближении представляют собой волну, бегущую внутри резонатора вдоль его внутренней поверхности и испытывающую многократное полное внутреннее отражение. Легко понять, что моды с малыми потерями могут существовать лишь до тех пор, пока угол падения такой бегущей волны больше чем угол полного внутреннего отражения $\sin(\vartheta_i) = 1/n$. Таким образом, из резонансного условия для продольной компоненты волнового вектора $nk_0\sin(\vartheta_i)a \simeq \ell$, получаем, что МШГ возможны лишь при $\tilde{x} < \ell$, а поскольку при скользящем падении $nk_0 a \simeq \ell$, то $\ell/n < \tilde{x} < \ell$.

Поскольку показатель преломления стекол, из которых обычно изготавливаются микросферы, в отличие от материалов, используемых для изготовления микродисков (см. обсуждение характеристического уравнения в Главе 4) достаточно мал, как $\sqrt{n^2-1}$ так и $1/n$ близки к 1 и поэтому как в случае TE, так и TM мод будем искать решения единообразно вблизи корней $j_\ell(nk_{\ell q}a) = 0$ (или $\psi_\ell(k^{(0)}_{\ell q}a) = 0$), то есть $k^{(0)}_{\ell q}a = t_{\nu q}$, где $t_{\nu q}$ – корни сферических функций Бесселя, $\nu = \ell + 1/2$.

При полном внутреннем отражении поле моды немного (на глубину заметно меньшую длины волны) проникает в окружающее пространство и спадает вне его по экспоненте приблизительно как

$$\propto e^{ik_\perp(r-a)} = e^{-\sqrt{n^2-1}k_0(r-a)}. \tag{5.42}$$

Этот результат следует из равенства тангенциальных компонент волнового вектора $\mathbf{k}$ на границе резонатора с окружающей средой. Для скользящей волны: $k_{||} = nk_0$, $k_\perp = \sqrt{k_0^2 - k_{||}^2} = ik_0\sqrt{n^2-1}$.

$$\frac{y'_\ell(\tilde{x})}{y_\ell(\tilde{x})} \simeq \frac{\chi'_\ell(\tilde{x})}{\chi_\ell(\tilde{x})} \simeq -\sqrt{n^2-1}. \tag{5.43}$$

Тот же результат можно получить и формально непосредственно из асимптотических разложений Дебая для функции Ханкеля при $x < \ell$ (см. выражения (5.21), учитывая, что $\nu/\tilde{x} \simeq n$. Различие между модами TE и TM появляется из-за разных направлений вектора $\mathbf{E}$ на границе, и, соответственно, разных граничных условий. Будем искать решения вблизи нуля функции Бесселя в виде

$$\tilde{y}^r = n\tilde{x}^r \simeq t_{\nu q} - \Delta. \tag{5.44}$$

Тогда

$$\psi_\ell(n\tilde{x}) \simeq -\Delta \frac{\partial\, \psi_\ell(n\tilde{x})}{n\partial \tilde{x}}. \tag{5.45}$$

Подставляя эти приближения в характеристическое уравнение (5.41), получим:

$$\Delta_{TE,TM} = \frac{Pn}{\sqrt{n^2-1}}. \tag{5.46}$$

Полученное приближение $n\tilde{x}^r = t_{\nu q} + \Delta_{TE,TM}$, имеет точность порядка $\nu^{-2/3}$, приемлемую для многих оценок.

Корень $t_{\nu q}$ можно легко найти численно или рассчитать приближенно из выражений, использующих нули функции Эйри (4.27) α_q, которой можно аппроксимировать функцию Бесселя при больших значениях порядка ℓ [15]:

$$\begin{aligned}
&t_{\nu q} \simeq \nu - \alpha_q \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20}\alpha_q^2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1/3} + \frac{10+\alpha_q^3}{1400}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1} + O(\nu^{-4/3}),\\
&\alpha_q \simeq -f\left(\frac{3\pi(4q-1)}{8}\right),\\
&f(z) = z^{2/3}\left[1 + \frac{5}{48}z^{-2} - \frac{5}{36}z^{-4} + \frac{77125}{82944}z^{-6} + \ldots\right].
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Разными авторами предложены и другие способы нахождения приближений для действительной и мнимой части корней. С. Шиллер [17] получил асимптотики решений, дающие точность порядка $O(\ell^{-3})$. Приведем здесь первые три члена, дающие точность порядка $O(\ell^{-1})$.

$$\begin{gathered}
\tilde{y}_{lq} = n\tilde{x}_{lq} = \nu - \alpha_q(\nu/2)^{1/3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(n^2-1)^{(k+1)/2}}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-k/3},\\
c_0 = -nP, \qquad c_1 = \frac{3(n^2-1)\alpha_q^2}{20}, \qquad c_2 = -\frac{n^3P(2P^2-3)\alpha_q}{6}.
\end{gathered} \tag{5.48}$$

При работе с микросферами часто требуется решать обратную задачу – вычислять индекс моды ℓ по размерному параметру x. Оборачивая предыдущие формулы можно получить следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}
\ell = \tilde{y} + \alpha_q\left(\frac{\tilde{y}}{2}\right)^{1/3} &+ \frac{nP}{(n^2-1)^{1/2}} + \frac{\alpha_q^2}{60}\left(\frac{\tilde{y}}{2}\right)^{-1/3}\\
&+ \frac{\alpha_q nP(2n^2P^2-2n^2-1)}{6(n^2-1)^{3/2}}\left(\frac{\tilde{y}}{2}\right)^{-2/3} + O(\tilde{y}^{-1}).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

5.5 Излучательные потери

Комплексные корни характеристического уравнения (5.40), определяющего собственные частоты, имеют следующий смысл: так как поле в диэлектрическом шаре связано с электромагнитным полем в окружающем пространстве, часть энергии колебаний постоянно уносится уходящими на бесконечность волнами. Таким образом, однажды возбужденные в резонаторе колебания затухают со временем из-за излучения (излучательные потери). Если представить корень уравнения, как $k = k^r - ik^i$, то излучательную добротность, с точностью до множителя 2π, характеризующую отношение запасенной в резонаторе энергии к энергии, теряемой за период, можно рассчитать как

$$Q_{\text{изл}} = \frac{k^r}{2k^i} = \frac{\tilde{x}^r}{2\tilde{x}^i}. \tag{5.50}$$

Физический смысл излучательной добротности можно понять следующим образом. Вблизи поверхности резонатора фазовая скорость экспоненциально спадающей волны, распространяющейся в воздухе вдоль поверхности, равна c/n. При удалении от резонатора эта компонента скорости линейно нарастает, пока на расстоянии $(n-1)a$ не сравнивается со скоростью света. На этом расстоянии излучение будет отрываться от резонатора с потерей энергии окружающее пространство. Для реальных микрорезонаторов излучательные потери пренебрежимо малы. Ищем решение в виде:

$$\tilde{x} = \tilde{x}^r + i\tilde{x}^i. \tag{5.51}$$

Раскладывая характеристическое уравнение до первого порядка по $\tilde{x}^i$, получим:

$$\begin{aligned} Q_{TE} &= \frac{\tilde{x}^r \chi_\ell^2(\tilde{x}^r)(n^2-1)}{2}, \\ Q_{TM} &= \frac{\tilde{x}^r \chi_\ell^2(\tilde{x}^r)(n^2-1)}{2}\left(\frac{l(l+1)}{n^2\tilde{x}^{r2}} + \frac{\chi_\ell'^2(\tilde{x}^r)}{\chi_\ell^2(\tilde{x}^r)}\right). \end{aligned} \tag{5.52}$$

Задание 14. *Выведите приведенные выше уравнения. Примечание: для упрощений используйте Вронскиан из (5.23).*

Используя приближение Дебая для функции Неймана при $\nu > x$, можно получить еще более грубую оценку:

$$\begin{aligned} Q_{TE,\text{изл}} &\simeq \frac{\tilde{x}^{r2}(n^2-1)}{2s} e^{2(\nu\,\mathrm{Arcth}(s/\nu)-s)}, \\ Q_{TM,\text{изл}} &\simeq \frac{\tilde{x}^{r2}(n^2-1)}{2s}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{n^2\tilde{x}^{r2}} + \frac{s^2}{\tilde{x}^{r2}}\right) e^{2(\nu\,\mathrm{Arcth}(s/\nu)-s)}, \\ s &= \sqrt{\nu^2 - \tilde{x}^{r2}}. \end{aligned} \tag{5.53}$$

В обоих случаях подставлять следует, естественно, решения или приближения $\tilde{x}^r$ для, соответственно, TE или TM мод. Аналогичные формулы были впервые получены

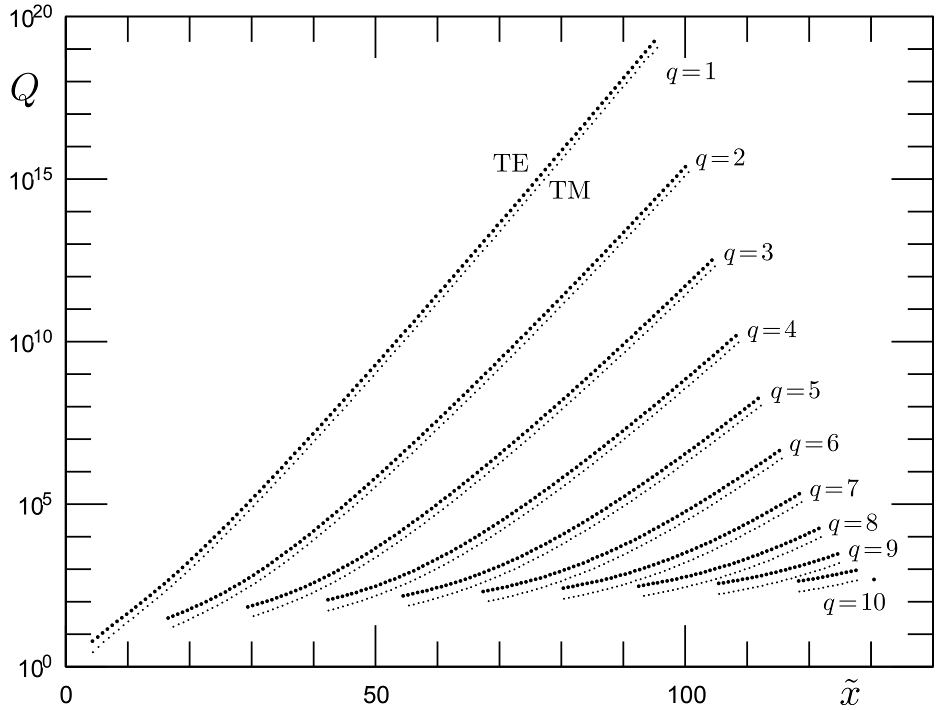


Рис. 5.4: Зависимость излучательной добротности мод разных типов и номеров q в сферическом резонаторе в зависимости от размерного параметра $\tilde{x}$.

Л.А.Вайнштейном [18], однако точность такого приближения весьма невелика и для не слишком высоких порядков, для которых как раз интересно рассмотрение излучательных потерь, ошибка составляет десятки процентов. Причина состоит в том, что это выражение очень чувствительно к точности используемого приближения размерного параметра $\tilde{x}^r$ (входит под экспоненту), кроме того, использованное приближение имеет большую погрешность при больших q. Поскольку численный расчет специальных функций давно проблемы не составляет, можно рекомендовать к применению лишь выражения (5.52).

5.6 Нормировка поля в резонаторе

Нормировка и вообще формальное интегрирование квадрата поля моды по всему объему в открытом резонаторе, как уже было пояснено в Главе 2, встречает математические сложности из-за наличия мнимой части k_0. Интеграл на бесконечности экспоненциально расходится. Расходится также на бесконечности интеграл, но лишь линейно, при выборе решения в виде стоячей волны с действительными собственными значениями.

Выбирая конечный физический объем интегрирования или полагая излучательную добротность равной бесконечности, эту часто непринципиальную в случае высокодобротных резонаторов проблему в большинстве случаев можно обойти. Правда, можно отметить, что ту же самую проблему вызывает и поле, рассеянное в окружающее пространство внутренними и объемными неоднородностями резонатора.

Для теоретического анализа различных эффектов, связанных с МШГ, удобно нормировать распределение энергии поля на единицу:

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \epsilon|\mathbf{e}(\mathbf{r})_{\ell mq}|^2\,dV = 1. \tag{5.54}$$

При этом в резонансе:

$$\frac{\epsilon_0}{4}\int_V \epsilon|\mathbf{e}(\mathbf{r})_{\ell mq}|^2\,dV = \frac{1}{4\mu\mu_0}\int_V |\mathbf{b}(\mathbf{r})_{\ell mq}|^2\,dV. \tag{5.55}$$

Поскольку распределение поля является решением задачи на собственные значения в ограниченной области (если пренебречь излучением), распределения полей для разных мод практически ортогональны:

$$\frac{\epsilon_0}{4}\int_V \epsilon[\mathbf{e}(\mathbf{r})_{\ell' m' q'}\mathbf{e}^*(\mathbf{r})_{\ell mq} + \text{к.с.}]dV = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{qq'}, \tag{5.56}$$

интегрирование здесь и далее ведется по объему резонатора и некоторой прилегающей области, вне волновой зоны, где выпадающее поле заметно. При этом ортогональность по угловым координатам выполняется строго.

Проведем сначала интегрирование по углам. Хотя, как было показано выше, векторные угловые сферические функции, ортонормированы, интересно рассмотреть распределение энергии по координатным компонентам.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\epsilon_0\epsilon}{4}|\mathbf{e}_{TE}|^2 dV &= \frac{\epsilon_0\epsilon}{4}\int \left[|e_{TE,\theta}|^2 + |e_{TE,\phi}|^2\right]dV = \frac{\epsilon_0\epsilon C_{TE}^2 2\pi C_{\ell m}^2}{4k^2\ell(\ell+1)}\times\\
&\times\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{m^2 P_\ell^m(\eta)^2}{1-\eta^2} + \left(\frac{\partial P_\ell^m(\eta)}{\partial\eta}\right)^2(1-\eta^2)\right]d\eta\int\phi_\ell^2(kr)\,dr\\
&= \frac{\epsilon_0\epsilon C_{TE}^2 2\pi C_{\ell m}^2}{4k^2\ell(\ell+1)}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\left[m + \left(\frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} - m\right)\right]\int\phi_\ell^2(kr)\,dr\\
&= \frac{\epsilon_0\epsilon}{4k^2}C_{TE}^2\int\phi_\ell^2(kr)\,dr.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Аналогично,

$$\int \frac{1}{4\mu_0\mu}|\mathbf{b}_{TM}|^2 dV = \frac{\epsilon_0\epsilon}{4k^2}C_{TM}^2\int\phi_\ell^2(kr)\,dr. \tag{5.58}$$

Из этого расчета следует, что отношение энергии, приходящейся на компоненту E_ϕ к E_θ для больших ℓ и m в TE моде, а также для других компонент составляет:

$$\frac{\int |E_{TE,\phi}|^2 dV}{\int |E_{TE,\theta}|^2 dV} = \frac{\int |H_{TE,\theta}|^2 dV}{\int |H_{TE,\phi}|^2 dV} = \frac{\int |H_{TM,\phi}|^2 dV}{\int |H_{TM,\theta}|^2 dV} = \frac{\int |E_{TM,\theta}|^2 dV}{\int |E_{TM,\phi}|^2 dV}$$
$$= \frac{2\ell(\ell+1)}{(2\ell+1)m} - 1 \simeq \frac{\ell - m + 1/2}{m}, \tag{5.59}$$

то есть основная доля энергии приходится на компоненту E_θ.

Для интегрирования по η мы один раз проинтегрировали по частям и затем воспользовались дифференциальным уравнением для функций Лежандра (5.24).

Задание 15. *Покажите, что отношение компонент:*

$$\frac{\int |H_{TE,\phi}|^2 dV}{\int |H_{TE,r}|^2 dV} = \frac{\int |E_{TM,\phi}|^2 dV}{\int |E_{TM,r}|^2 dV}$$
$$\simeq \frac{(nk_0a)^2 - \ell(\ell+1)}{(nk_0a)^2} \simeq -\alpha_q \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-2/3}, \tag{5.60}$$

где α_q – нуль функции Эйри.

Таким образом, с хорошей степенью приближения можно полагать, что практически вся энергия в резонаторе сосредоточена у TE моды в компонентах поля E_θ и H_r и у TM моды в компонентах H_θ и E_r. Хотя выше и было отмечено, что в расчетах для высокодобротных резонаторов обычно можно полагать, что $\int \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{4} \simeq \int \frac{\mu\mu_0 H^2}{4}$, интегрирование в открытом резонаторе по магнитному и электрическому полю по объему резонатора дает несколько отличающиеся выражения. Действительно,

$$\int \frac{\epsilon_0\epsilon}{4} |\mathbf{e}_{TM}|^2 dV = \frac{\epsilon_0\epsilon}{4} \int \left(|e_{TM,\theta}|^2 + |e_{TM,\phi}|^2 + |e_{TM,r}|^2\right) dV$$
$$= C_{TM}^2 \frac{\epsilon_0\epsilon}{4k^3} \left[\ell(\ell+1) \int_0^{\tilde{y}} \frac{\phi_\ell^2(x)}{x^2} dx + \int_0^{\tilde{y}} \phi_\ell'^2(x) dx\right]$$
$$= C_{TM}^2 \frac{\epsilon_0\epsilon}{4k^3} \left[\phi_\ell(x)\phi_\ell'(x)\Big|_0^{\tilde{y}} + \int_0^{\tilde{y}} \phi_\ell^2(x) dx\right]. \tag{5.61}$$

Мы здесь взяли второй интеграл по частям и воспользовались дифференциальным уравнением для $\phi_\ell(x)$. Аналогично,

$$\int \frac{1}{4\mu_0\mu} |\mathbf{b}_{TE}|^2 dV = C_{TE}^2 \frac{\epsilon_0\epsilon}{4} \left[\phi_\ell(x)\phi_\ell'(x)\Big|_0^{\tilde{y}} + \int_0^{\tilde{y}} \phi_\ell^2(x) dx\right]. \tag{5.62}$$

Как можно видеть, энергии электрического и магнитного поля, заключенные только внутри диэлектрического сферического резонатора неодинаковы, поскольку на его границе не обращаются в нуль ни производная от поля, ни сами компоненты поля, хотя они на границе и близки к нулю. Если же в интегрирование включить и прилегающую к сфере область, то проявляется характерная черта открытых резонаторов – расходимость поля на бесконечности. Рассмотрим такой интеграл, взяв в качестве верхнего предела некоторый большой радиус R и введя обозначение $\tilde{X} = k_0 R$.

Для интегрирования нам понадобятся выведенные ранее соотношения, связывающие поля на границе и характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} C_e^2 &= C_i^2 \frac{1}{Pn^2} \frac{\psi_\ell^2(\tilde{y})}{\chi_\ell^2(\tilde{x})}, \\ nP\frac{\psi'_\ell(\tilde{y})}{\psi_\ell(\tilde{y})} &= \frac{\chi'_\ell(\tilde{x})}{\chi_\ell(\tilde{x})}. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Теперь можно найти интеграл энергии:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int\limits_0^a \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon}{4} |\mathbf{e}|^2 + \frac{\mu\mu_0}{4} |\mathbf{h}|^2 \right) dV + \int\limits_a^R \left(\frac{\epsilon_0}{4} |\mathbf{e}|^2 + \frac{\mu_0}{4} |\mathbf{h}|^2 dV \right) \\ &= C_i^2 \frac{\epsilon_0}{4k_0^3 n} \left[2 \int\limits_0^{\tilde{y}} \psi_\ell^2(x) dx + \psi_\ell(\tilde{y}) \psi'_\ell(\tilde{y}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{Pn} \frac{\psi_\ell^2(\tilde{y})}{\chi_\ell^2(\tilde{x})} \left(2 \int\limits_{\tilde{x}}^{\tilde{X}} x_\ell^2(x) dx + \chi_\ell(\tilde{x}) \chi'_\ell(\tilde{x}) \Big|_{\tilde{x}}^{\tilde{X}} \right) \right] \\ &= C_i^2 \frac{\epsilon_0 n^2 a^3}{4\tilde{y}^2} \left[\left(1 - \frac{1}{Pn^2} \right) \psi_\ell^2(\tilde{y}) + (1-P) \left(\psi_\ell'^2(\tilde{y}) + \frac{\ell(\ell+1)}{P\tilde{y}^2} \psi_\ell^2(\tilde{y}) \right) \right] \\ &\quad + C_i^2 \frac{\epsilon_0}{4k_0^2 P n^2} \frac{\psi_\ell^2(\tilde{y})}{\chi_\ell^2(\tilde{x})} \left(\chi_\ell'^2(\tilde{X}) - \chi''_\ell(\tilde{X}) \chi_\ell(\tilde{X}) \right) R. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Полученное выражение явно распадается на два слагаемых, одно из которых остается постоянным, а второе расходится при $R \to \infty$. Это второе слагаемое можно интерпретировать как энергию стороннего поля, возбуждающего резонатор. Это слагаемое обращается в нуль вблизи области отрыва поля от резонатора, и там же магнитная и электрическая компоненты энергии сравниваются.

Возможной обобщенной нормой для квазинормальных мод с комплексными собственными корнями является выражение [9] (см. Главу 2):

$$\langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}_k \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int \left[\int\limits_0^{R \to \infty} \epsilon \mathbf{e}^2(\mathbf{r}) dV + \frac{i}{2k_0} \mathbf{e}^2(R) \right] R^2 \, d\Omega \right]. \tag{5.65}$$

При этом в качестве выражений для поля надо брать не стационарные решения для резонансных “мод Вселенной”, которые мы использовали выше, а квазинормальные моды с комплексными собственными частотами и полями, выражающимися снаружи через функции Ханкеля для описания убегающей волны, а не стоячей волны с функцией Неймана снаружи. Все вычисления совершенно аналогичны и приводят к аналогичным выражениям для нормировочных интегралов, с тем отличием, что нормы получаются комплексными.

Окончательно мы получаем выражения для нормировочных интегралов энергии –

TE:

$$\mathcal{E} = C_i^2(n^2-1)\frac{\epsilon_0 a^3}{4\tilde{y}^2}\psi_\ell^2(\tilde{y}), \tag{5.66}$$

TM:

$$\mathcal{E} = C_i^2\frac{\epsilon_0 a^3}{4\tilde{y}^2}(n^2-1)\left[\psi_\ell'^2(\tilde{y}) + \psi_\ell^2(\tilde{y})\frac{\ell(\ell+1)}{\tilde{x}^2}\right]. \tag{5.67}$$

Эти выражения имеют достаточно простой смысл в приближении больших ℓ при использованном нами ранее способе оценки собственных частот. При этом $j_\ell(\tilde{y}) \simeq -\Delta j_\ell'(y)$ и можно положить, что открытый диэлектрический резонатор эквивалентен закрытому резонатору с несколько большим радиусом $\tilde{a} = t_{\ell q}/(nk_0)$ с идеально отражающей поверхностью, на которой $j_\ell(k_0 n\tilde{a})$ обращается в нуль. Тогда

$$\int\limits_0^{\tilde{a}} j_\ell^2(knr)r^2dr = \frac{a^3}{2}\left(\frac{\partial\, j_\ell(kn\tilde{a})}{kn\partial\tilde{a}}\right)^2 \simeq \frac{a^3}{2\Delta_{TE,TM}^2}j_\ell^2(\tilde{y}), \tag{5.68}$$

что соответствует выведенным выше интегралам энергии.

Уместно здесь заметить, что более общее интегральное соотношение для мод шара, связывающее интеграл квадрата поля по объему или по радиусу (вследствие независимости интеграла по углам) и квадрат поля на поверхности сферы

$$\int\limits_0^{\infty} \epsilon(r)\mathbf{E}^2(r)r^2dr = \frac{n^2a^3P^2}{2\Delta^2}\mathbf{E}^2(a), \tag{5.69}$$

является в определенном смысле точным. Интегрирование с бесконечным пределом следует понимать в смысле (5.65).

Проще всего это показать, воспользовавшись теорией возмущений (2.52) и рассчитать по этой формуле сдвиг резонансной частоты сферического резонатора при добавлении бесконечно тонкого слоя δa с тем же показателем преломления (возмущение проницаемости в слое δa составляет $\delta\epsilon = n^2-1$). Из соображений масшабирования легко сообразить, что этот сдвиг будет просто равен

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta a}{a}, \tag{5.70}$$

что и приводит к (5.69).

При введенной нормировке вида (5.54) нормировочные константы в выражениях (5.36,5.37) имеют вид:

$$C_{TE,i} = \left(\frac{4}{\epsilon_0 a^3(n^2-1)j_\ell^2(nx_{TE})}\right)^{1/2} = \frac{2\Delta_{TE}}{\sqrt{\epsilon_0}na^{3/2}j_\ell(\tilde{y})}, \tag{5.71}$$

$$C_{TM,i} \simeq \frac{2\Delta_{TM}}{\sqrt{\epsilon_0}na^{3/2}j_\ell(\tilde{y})}.$$

Вычислим приближение эффективного объема моды резонатора для фундаментальной моды $\ell = m$:

$$V_{TE,eff} = \frac{\int |E|^2 dV}{|E_{max}|^2} = \frac{a^3(n^2-1)}{2n^2}\frac{\ell+1}{\ell|Y_{\ell m}(0,0)|^2}\frac{j_\ell^2(\tilde{y})}{j_\ell^2(t'_{\ell 1})} \tag{5.72}$$

$$\simeq \frac{n^2-1}{n^2k^3}\frac{\pi^{3/2}(\ell+1)}{\ell^{3/2}}\frac{t_{\ell q}^3\Delta_{TE}^2 j_\ell'^2(t_{\ell q})}{j_\ell^2(t'_{\ell 1})} \simeq c_q^{(0)}\nu^{11/6}(1+c_q^{(1)}\nu^{-2/3})\left(\frac{\lambda}{2\pi n}\right)^3, \tag{5.73}$$

$$V_{TM,eff} = \frac{a^3(n^2-1)}{2n^2}\frac{(\tilde{y}j_\ell'(\tilde{y})+j_\ell(\tilde{y}))^2+n^2j_\ell^2(\tilde{y})\ell(\ell+1)}{\ell(\ell+1)|Y_{\ell m}(0,0)|^2 j_\ell^2(t'_{\ell 1})}$$

$$\simeq \frac{a^3(n^2-1)}{2n^2}\frac{j_\ell'^2(t_{\ell q})(t_{\ell q}^2+\ell(\ell+1)n^2\Delta_{TM}^2)}{\ell(\ell+1)|Y_{\ell m}(0,0)|^2 j_\ell^2(t'_{\ell 1})}$$

$$\simeq V_{TE,eff}\left(1-\frac{n^2-1}{n^2}\alpha_q(2\nu)^{-2/3}\right).$$

где $\nu = \ell + 1/2$, а численные коэффициенты, следующие из аппроксимаций (4.23) $c_{1..5}^{(0)} \simeq [15.15,\ 19.87,\ 23.04,\ 25.52,\ 27.56]$; $c_{1..5}^{(1)} \simeq [1.876,\ 2.446,\ 2.953,\ 3.443,\ 3.940]$. При вычислении мы учли, что $P_\ell^\ell(0) = (2\ell-1)!!$ и воспользовались формулой Стирлинга для вычисления факториалов. Электрическое поле моды TM на поверхности может превышать поле внутри, однако этот эффект возможен только для мод с очень малой радиационной добротностью и поэтому не оказывает заметного влияния на оценку эффективного объема для этих мод.

Для других мод шара с $\ell \neq m$ вычисления аналогичны, для аппроксимации можно воспользоваться аппроксимацией угловых сферических функций через полиномы Эрмита (5.33). При этом надо учесть, что функции Лежандра имеют абсолютный максимум не в нуле, а вблизи углов $\sin\theta = \pm m/\ell$ (см. Рисунок 5.2). В этом заключается некоторое неудобство эффективного объема, вводимого через максимум электрического поля, то есть через поле в какой-то одной точке внутри резонатора. Кроме того, надо иметь в виду, что у мод, имеющих более одного максимума по радиусу ($q > 1$), абсолютным максимумом является первый, а не ближайший к поверхности.

Глава 6

Приближенные методы анализа МШГ

6.1 Скалярное волновое уравнение

Ранее были рассмотрены МШГ в круговых цилиндрических и сферических телах. К сожалению, эти геометрические формы и соответствующие им координатные системы, если не считать декартову, практически исчерпывают класс систем координат, в которых векторные уравнения допускают разделение переменных и решения выписываются в явном виде. Между тем, большой интерес представляют резонаторы, форма которых отлична от сферической или цилиндрической. Так, в частности, уплощение резонатора позволяет избавиться от большой плотности частотного спектра собственных мод. Технология прецизионного микротокарного точения позволяет получать осесимметричные резонаторы с произвольной образующей не только из стекол, но и из кристаллических материалов [4].

Для получения приближенного решения для МШГ в произвольных телах обычно достаточно ограничиться скалярным уравнением, поскольку у мод высокого порядка, близких к TE или TM колебаниям, основная часть энергии сконцентрирована вблизи экваториальной плоскости в одной из компонент, направленных приблизительно вдоль оси z – E_z (E_θ в сферических координатах) или H_z (H_θ), а z компонента поля подчиняется скалярному уравнению Гельмгольца.

6.2 Угловые функции и прецессия

В сфере у МШГ $TE(TM)_{\ell mq}$ ($\ell \sim m$, $q \ll \ell$) электромагнитное поле сосредоточено в кольцевой экваториальной области вблизи поверхности резонатора. При этом максимальная концентрация поля достигается для мод типа $TE(TM)_{\ell\ell 1}$ при ($\ell = m$, $q = 1$), которые имеют один узкий максимум ($\Delta\theta \sim /1/\sqrt{\ell}$) в меридианальном и радиальном направлении ($\Delta r/r \sim \ell^{-2/3}$). Такие моды мы называем фундаментальными модами.

Угловые сферические функции, описывающие распределение поля в резонаторе – те же самые, которые появляются при решении квантовой задачи о движении электрона в центральном поле. Поэтому существует тесная аналогия между электронным облаком в атоме и модами сферических резонаторов. Обычно в атомах рассматривают моды низкого порядка с небольшим главным квантовым числом n и, соответственно, малыми азимутальными квантовыми числами ℓ и m. Однако в современной экспериментальной квантовой физике широко применяются так называемые возбужденные ридберговские атомы, в которых электрон находится на высоком уровне с большим номером n. Такие атомы имеют квантовые переходы, лежащие в СВЧ диапазоне и позволяют осуществлять эксперименты на уровне взаимодействия отдельных атомов с отдельными фотонами. При этом наибольшую чувствительность к внешним воздействиям и наибольшее время жизни имеют состояния с максимальным угловым и магнитным моментом, которые соответствуют максимальным значениям чисел ℓ и m. Электронные облака в таких атомах соответствуют фундаментальным МШГ сферических резонаторов.

Фундаментальные электромагнитные моды в шаре с $\ell = m$ можно интерпретировать как узкие гауссовы пучки, испытывающие многократное полное внутреннее отражение от внутренней поверхности сферы и циркулирующие в экваториальной плоскости. Расширение этой квазигеометрической интерпретации на моды с $\ell \neq m$ не является вполне очевидной. С ростом разности $\ell - m$, “широтное” распределение становится быстро осциллирующей функцией по θ с резким обрезанием вблизи углов $\theta_{max} = \pi/2 \pm \arccos(m/\ell)$. Оказывается, произвольная сферическая функция может быть представлена как результат суперпозиции наклоненных фундаментальных циркулярных мод или как результат вырожденной прецессии одной такой наклоненной моды.

Запишем преобразование из системы угловых сферических координат (θ, ϕ) в систему собственных сферических угловых координат, (ϑ, φ) связанную с фундаментальной наклоненной прецессирующей модой, описываемой углами Эйлера $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ (рис. 6.1. Эти углы задают трехэтапное преобразование координат посредством трех последовательных вращений: 1) поворот пространства вокруг оси z_1 на угол $0 \leq \alpha < 2\pi$; 1) поворот пространства вокруг новой оси y', которую называют линией узлов, на угол $0 \leq \beta < \pi$; 3) поворот пространства вокруг новой получившейся оси z_2 на угол $0 \leq \gamma < 2\pi$.

При этом первый угол α – начальный поворот вокруг оси z, – как раз и описывает прецессию, угол β – поворот вокруг новой оси y' – фиксированный угол наклона фундаментальной прецессирующей моды и γ – третий поворот вокруг новой оси z – описывает фазу фундаментальной моды.

$$\begin{aligned}
&\sin\vartheta\cos(\varphi-\gamma) = \sin\theta\cos(\phi-\alpha)\cos\beta - \cos\theta\sin\beta,\\
&\sin\vartheta\sin(\varphi-\gamma) = \sin\theta\sin(\phi-\alpha),\\
&\cos\vartheta = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\cos(\phi-\alpha)\sin\beta.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Поэтому (см. (5.29))

$$\begin{aligned}
&Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha,\beta,\gamma),\varphi(\alpha,\beta,\gamma))/C_{\ell\ell} = P_\ell^\ell(\cos\vartheta)e^{i\ell\varphi} = (2\ell-1)!!(e^{i\varphi}\sin\vartheta)^\ell \qquad (6.2)\\
&\quad = (2\ell-1)!!e^{i\ell\gamma}(\sin\theta\cos(\phi-\alpha)\cos\beta - \cos\theta\sin\beta + i\sin\theta\sin(\phi-\alpha))^\ell.
\end{aligned}$$

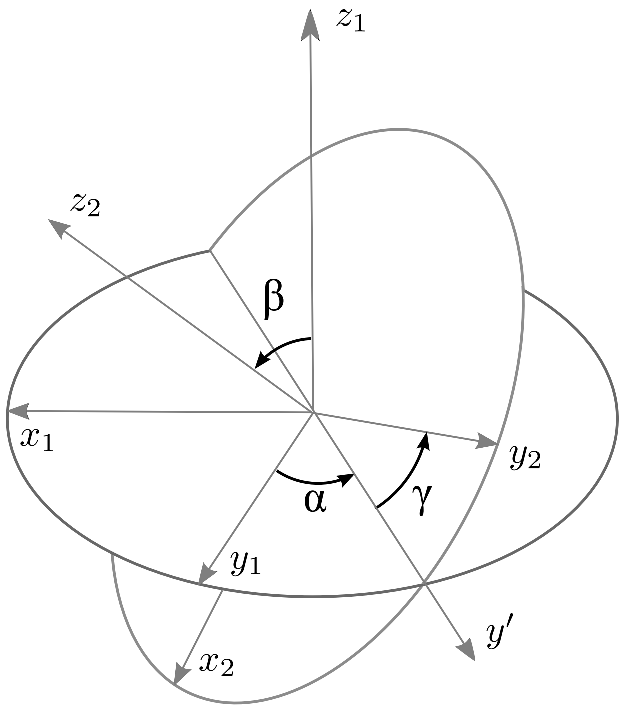


Рис. 6.1: Углы Эйлера, задающие поворот системы координат

Покажем, что угловую функцию с номером ℓ и произвольным m можно разложить по наклоненным на фиксированный угол β фундаментальным модам, отличающимся лишь углом α. Пока не будем обращать внимание на угол γ и вычислим вспомогательный интеграл:

$$I = \frac{1}{C_{\ell\ell}} \int\limits_0^{2\pi} e^{im\phi} Y_{\ell\ell}(\vartheta, \varphi) d\alpha = \tag{6.3}$$

$$(-1)^\ell (2\ell - 1)!! \int\limits_0^{2\pi} e^{-im\psi} (\cos\theta \sin\beta - \sin\theta \cos\psi \cos\beta + i \sin\theta \sin\psi)^\ell d\psi.$$

Здесь сделана замена переменных $\psi = \alpha - \phi$. Легко проверить, что этот интеграл удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{\ell \cos\beta - m}{\sin\beta} I, \tag{6.4}$$

поэтому $I = \sin^{\ell-m}\beta (1 + \cos\beta)^m C(\theta, \phi)$, где $C(\theta, \phi)$ – некоторая, не зависящая от β функция. Наконец, формально подставляя $\beta = -\pi/2$ в (6.3) и сравнивая результат с известным интегралом Гейне [16]:

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{(\ell+m)!}{2\pi\ell!}\int\limits_0^{2\pi} e^{-im\psi}(\cos\theta + i\sin\theta\sin\psi)^\ell d\psi, \tag{6.5}$$

получаем

$$\begin{aligned}
&Y_{\ell m}(\theta,\phi) = |\ell, m\rangle = \\
&\frac{C_{\ell m}(\ell+m)!}{C_{\ell\ell}2\pi\ell!(2l-1)!!}\frac{(-1)^{\ell-m}}{\sin^{\ell-m}\beta(1+\cos\beta)^m}\int\limits_0^{2\pi} e^{im\alpha}Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha,\beta),\varphi(\alpha,\beta))d\alpha = \\
&\frac{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}{2\pi\sqrt{(2\ell)!}\sin^{\ell-m}(\beta/2)\cos^{\ell+m}(\beta/2)}\int\limits_0^{2\pi} e^{im\alpha}Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha,\beta),\varphi(\alpha,\beta))d\alpha.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Полученное разложение любой сферической моды по фундаментальным модам является точным, как в скалярном, так и в векторном приближении, поскольку каждой скалярной собственной функции уравнения Гельмгольца, взятой в качестве потенциала Дебая, соответствует векторная мода.

В вырожденном случае идеальной сферы угол наклона фундаментальных мод β в разложении может быть формально любым, хотя нормирующий множитель в знаменателе и имеет два резких максимума при $\beta = \pm\arccos(m/\ell)$. Любая сколь угодно малая эллиптичность снимает вырождение и наклоненные фундаментальные моды становятся неустойчивыми и начинают прецессировать вокруг оси возмущения, распадаясь на систему собственных функций новой системы. Абсолютная величина прецессии при этом не имеет значения, поскольку в пределе бесконечной добротности все резонаторы можно считать несферичными. Продолжая квантовомеханическую аналогию, можно отметить, что в случае большого времени жизни атомных уровней, даже слабое внешнее поле снимает вырождение уровней из-за эффекта Штарка или Зеемана и, таким образом, дает естественную ось для определения и квантования собственных значений оператора проекции углового момента $\hat{L}_z$.

Можно показать, что угол наклона β не может быть произвольным. За один оборот волна $e^{i\ell\varphi}$ получит фазовый сдвиг равный $\ell\Delta\varphi = \ell\Delta\phi\cos\beta$ (φ является полярным углом в новой системе координат (φ, ϑ) повернутой на углы Эйлера α, β относительно исходной (ϕ, θ) системы координат). С другой стороны, при резонансе этот фазовый сдвиг должен быть равен фазовому сдвигу в экваториальной плоскости $\pm m\Delta\phi$ и поэтому мы получаем условие:

$$\cos\beta = \pm\frac{m}{\ell}. \tag{6.7}$$

Этот простой анализ, демонстрирующий дискретизацию угла наклона β, дает квазигеометрическую интерпретацию природы сферических гармоник $Y_{\ell m}$, аналогичную квантованию проекции углового момента $\hat{L}_z$ в квантовой механике (угловые сферические функции являются также собственными функциями оператора углового момента). Хотя мы предположили, что прецессия вызвана неидеальностью сферы, величина

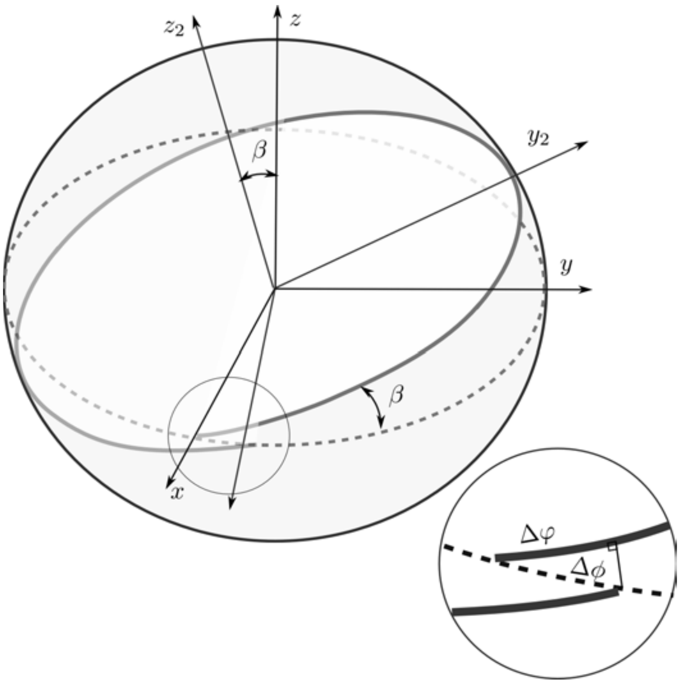


Рис. 6.2: Прецессия в возмущенном сферическом резонаторе. На врезке показан увеличенный фрагмент изображения.

возмущения в выводе (6.7) никак не задействована и на результат не влияет – она может быть сколь угодно мала.

Рассмотрим к чему приводит малая сплюснутость (вытянутость) вдоль оси z. Если эллиптичность сфероида мала (угловой сдвиг на один оборот $\Delta\alpha \ll 2\pi/m$, то разложение для скалярной сферической функции, зависящей от времени с учетом прецессии можно записать в виде:

$$e^{-i\omega_{\ell\ell}t}\int\limits_0^{2\pi} e^{im\alpha}Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha+\Omega t,\beta),\varphi(\alpha+\Omega t,\beta)d\alpha, \tag{6.8}$$

где $\Omega = \Delta\alpha\omega/2\pi\ell$ – круговая фазовая скорость прецессии и $\omega_{\ell\ell}$ означает невозмущенную собственную частоту фундаментально циркулярной моды. Заменой переменных мы сразу получаем выражение для частотного расщепления

$$e^{-i(\omega_{\ell\ell}+m\Omega)t}\int\limits_0^{2\pi} e^{im\alpha}Y_{\ell\ell}(\vartheta(\alpha,\beta),\varphi(\alpha,\beta))d\alpha \propto e^{-i(\omega_{\ell\ell}+m\Omega)t}Y_{\ell m}. \tag{6.9}$$

Оценку частотного расщепления мод сфероида проще всего сделать в геометрическом приближении. При этом подходе требуется всего лишь вычислить периметр наклоненной эллиптической орбиты. Если эксцентриситет сфероида равен ε, то наклоненный под углом $\beta = \arccos(m/\sqrt{\ell(\ell+1)})$ эллипс в сплюснутом сфероиде будет иметь ту же большую полуось a и эксцентриситет

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{\varepsilon^2(1-\cos^2\beta)}{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}}. \tag{6.10}$$

Периметр эллипса, как известно, не имеет аналитического выражения, но с точностью до второго по ε' порядка (а даже для больших значений сплюснутости или вытянутости резонатора эксцентриситет ε' слабо наклоненного к экватору эллипса при $\ell - m \ll \ell$ будет мал) может быть записан в виде:

$$L' = 2\pi a\left(1 - \frac{\varepsilon'^2}{4}\right), \tag{6.11}$$

и, следовательно, поправка к резонансной частоте в сплюснутом эллипсоиде вращения

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega} \simeq \frac{2\pi a - L'}{2\pi a} = \frac{\varepsilon^2\sin^2\beta}{4(1-\varepsilon^2\cos^2\beta)} \simeq \frac{\varepsilon^2(\ell^2-m^2)}{4\ell^2}. \tag{6.12}$$

Аналогичным образом, в вытянутом эллипсоиде вращения

$$\begin{aligned} a' &= a/\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\beta}, \\ \varepsilon' &= \varepsilon\sin\beta \end{aligned} \tag{6.13}$$

получаем:

$$\frac{\Delta\omega_p}{\omega} \simeq -\frac{\varepsilon^2\sin^2\beta}{4} = -\frac{\varepsilon^2(\ell^2-m^2)}{4\ell^2}. \tag{6.14}$$

К такому же результату можно прийти используя теорию возмущений.

6.3 Радиальные функции, аналогия с квантовой механикой и ВКБ

Квазиклассическое приближение Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) – является мощным методом решения широкого спектра задач в квантовой механике и других областях физики. Этот метод в различных вариантах также хорошо подходит для исследования МШГ.

Радиальная часть уравнения для скалярного потенциала Дебая ψ_r в сферических координатах имеет вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_r}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\psi_r + k_0^2 n^2(r)\psi_r = 0. \tag{6.15}$$

Радиальная часть уравнения Шредингера после отделения угловой части выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi_r}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Psi_r + \frac{2M}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\Psi_r = 0. \tag{6.16}$$

Если переписать последнее слагаемое в первом из уравнений в виде

$$k_0^2 n^2(r) = k_0^2 - k_0^2[1 - n^2(r)], \tag{6.17}$$

появляется полная аналогия. При этом $\hbar k_0$ – импульс фотона, $E = \hbar\omega$ – его энергия, $M = \frac{\hbar\omega}{2c^2}$ – приведенная масса:

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{2M}k_0^2(1 - n^2(r)) = \hbar\omega(1 - n^2(r)), \tag{6.18}$$

а эффективный потенциал, учитывающий центробежный вклад:

$$V^*(r) = \frac{\hbar^2}{2M}\left[k_0^2 - k_0^2 n^2(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] = \frac{\hbar^2}{2M}\left[k_0^2 - k^{*2}\right]. \tag{6.19}$$

Необычно здесь то, что потенциал сам зависит от k_0, но если нас интересуют моды близкие по частотам, так что $k_0 \ll \Delta k$, то этот факт не является принципиальным. Здесь введено обозначение k^*, которое соответствует локальному импульсу $p = \hbar k^*$ в квантовой механике:

$$k^{*2}(r) = k_0^2 n^2(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} = k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \tag{6.20}$$

Величина $\frac{\hbar^2}{2M}k^{*2}(r)$ аналогична кинетической энергии. Если эта величина положительна, то фотон может свободно распространяться, если же она отрицательна, то мы находимся в классически-запрещенной зоне, в которой локальное волновое число k^* чисто мнимое и поле экспоненциально затухает.

Заменой $\psi_r = \tilde{\Psi}(r)/r$ (переход к функциям Риккати-Бесселя) уравнение сводится к простейшему одномерному уравнению Шредингера для движения частицы при наличии потенциала:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\tilde{\Psi}(r)}{dr^2} + V^*(r)\tilde{\Psi}(r) = E\tilde{\Psi}(r). \tag{6.21}$$

То же самое уравнение получается и для радиальной функции в цилиндрических координатах заменой $\Psi(\rho) = \tilde{\Psi}(\rho)/\sqrt{\rho}$. При этом в центробежный потенциал в знаменатель вместо $\ell(\ell+1)$ входит выражение $m^2 - 1/4$.

Построим график $V^*(r)$ для сферического резонатора, в котором $n(r) = n$ при $r < a$ и $n(r) = 1$ при $r > a$ в единицах $\frac{\hbar^2}{2M}$ (рис.6.3).

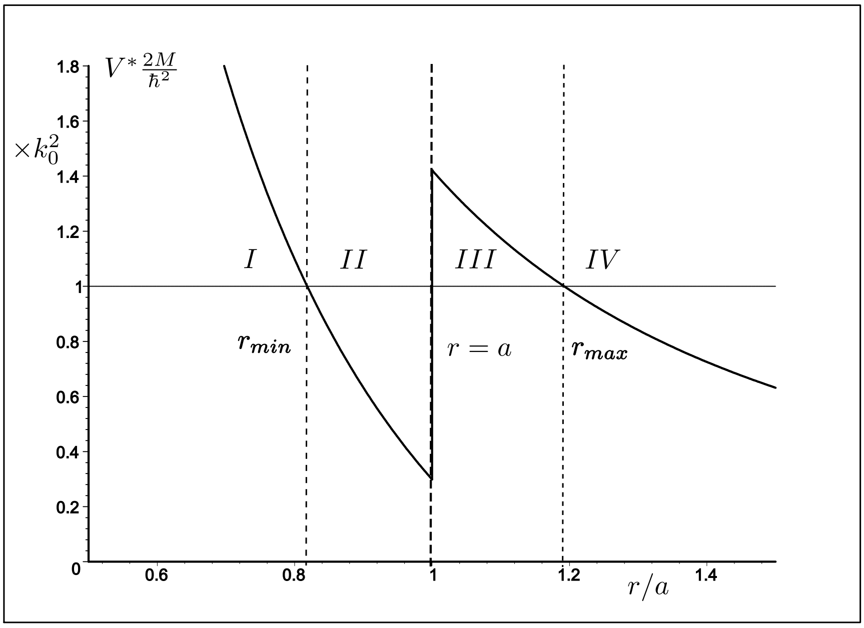


Рис. 6.3: Эффективный потенциал в сферическом диэлектрическом микрорезонаторе

Как видно из рисунка 6.3, потенциал имеет вид почти треугольной потенциальной ямы с четырьмя областями. Границы областей находятся решением уравнения $k^{*2}(r) = 0$:

$$\begin{aligned} k_0 n r_{min} &= \sqrt{\ell(\ell+1)}, \\ k_0 r_{max} &= \sqrt{\ell(\ell+1)}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

В областях I ($r < r_{min}$) и III ($a < r < r_{max}$) поле экспоненциально затухает. В области потенциальной ямы II ($r_{min} < r < a$) фотон распространяется между поверхностью резонатора и границей центробежного потенциала, которая является каустикой. Каустикой (ударение на первом слоге, от греческого $\kappa\alpha\upsilon\sigma\tau o\varsigma$ – жгучий) называется огибающая семейства отраженных или преломленных лучей, которые касательны во всех точках каустики.

Наконец, в области IV ($r > r_{max}$) фотон распространяется как убегающая волна, протуннелировавшая через потенциальный барьер области III.

На рис. 6.4 приведены первые пять собственных функций задачи для $n = 1.5$ и $\ell = 50$. При этом последний график показывает поле вытекающей моды, не удерживаемой полным внутренним отражением на стенках резонатора. Если длина волны много меньше, чем характерный масштаб изменения потенциала, (за исключением областей разрыва):

$$k_0 \gg \frac{1}{V^*}\frac{dV^*}{dr}, \tag{6.23}$$

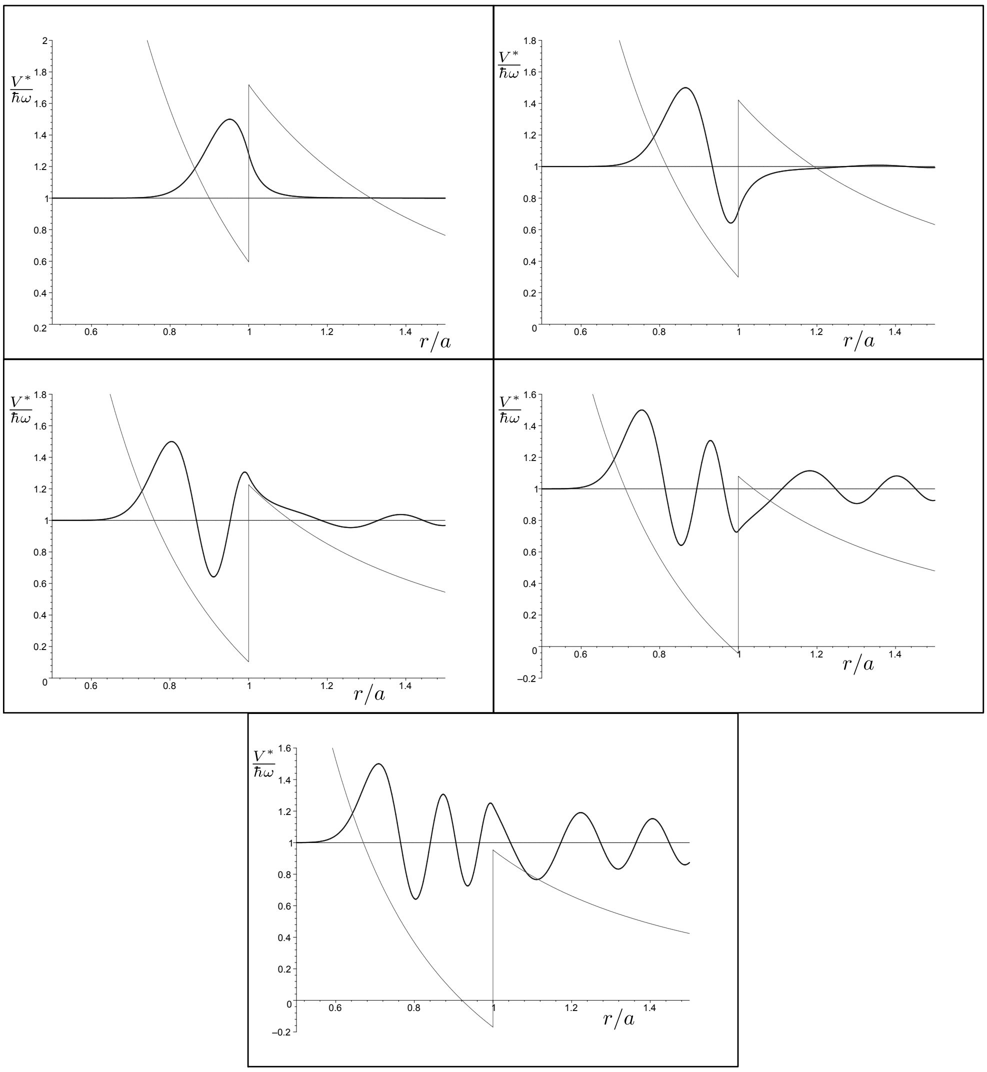


Рис. 6.4: Поведение фотона в эффективном потенциале диэлектрического резонатора, $\ell = 50$, $q = 1-6$. Последний график соответствует неудерживаемой вытекающей моде.

то можно решение уравнения (6.21) выписать, согласно методу ВКБ в виде:

$$\tilde{\Psi}(r) = e^{\pm i \int k^* dr}. \tag{6.24}$$

Задание 16. *Найдите апроксимации для функций Риккати-Бесселя первого и второго рода в ВКБ приближении.*

Граничные условия на гладких границах и непрерывность функции $\tilde{\psi}$ при переходе других границ областей позволяют сшить решения в разных областях, а применение условий квантования Бора-Зоммерфельда позволяет определить собственные частоты.

Аналогичным образом метод ВКБ можно использовать для исследования угловых сферических и сфероидальных функций большого порядка.

6.4 Метод ВКБ для произвольных тел вращения

Для нахождения собственных частот аксиально-симметричных резонаторов в работе [19] был предложен метод, основанный на квазиклассическом квантовании поперечного волнового числа β. Аналогичный метод рассмотрен в работе [20]. В адиабатическом приближении, когда граница резонатора $\rho_s(z)$ медленно по сравнению с длиной волны меняется вдоль оси z и $\beta \ll k_0$, распределение поля можно приблизительно представить в виде:

$$\Psi \propto e^{\pm i \int \beta(z) dz \pm im\phi} R(\rho/\rho_s), \tag{6.25}$$

где

$$\beta(z) = \sqrt{k^2 - \frac{\tilde{y}_{mq}^2}{\rho_s^2(z)}}, \tag{6.26}$$

$\tilde{y}_{mq}$ – собственные решения характеристического уравнения для бесконечного цилиндра (см. Главу 4), а $R(\rho/\rho_s(z))$ – радиальные решения, выражающиеся через функции Бесселя $J(\tilde{y}_{mp}\rho/\rho_s)$ внутри и функции Ханкеля $H^{(1)}(\tilde{x}_{mq}\rho/\rho_s)$ снаружи.

Тогда, в соответствии с условием квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\oint \beta(z) dz = 2 \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{k^2 - \frac{\tilde{y}_{mq}^2}{\rho_s^2(z)}} dz = 2\pi (p + \frac{1}{2}). \tag{6.27}$$

Здесь z_1 и z_2 точки поворота, когда выражение под корнем обращается в нуль, $k = nk_0$ – постоянная распространения в среде. Как и в Главах 4 и 5 здесь и далее T_{mq} означают нули цилиндрических функций Бесселя, а $t_{\ell q}$ – нули сферических функций Бесселя, совпадающие с нулями цилиндрических функций полуцелого номера.

Интересно рассмотреть, как этот метод работает для идеальной сферы в случае простейших нулевых граничных условий (вытекающего поля снаружи нет), когда точное решение известно:

$$k_{\nu q}a = \tilde{y}_{\nu q} = t_{\ell q} = T_{\ell+1/2,q}. \tag{6.28}$$

Полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{mq} &= T_{mq}, \\ \rho_s(z) &= a\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}, \\ z_c = z_{1,2} &= \pm a\sqrt{1-\tilde{y}_{mq}^2/\tilde{y}_{\nu q}^2}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Делая замену переменных $\sin\psi = z/z_c$, $\eta_c = z_c/a$, получаем:

$$\begin{aligned} 2\int_{-z_1}^{z_1}\left[k_{\nu q}^2 - \frac{\tilde{y}_{mq}^2}{a^2-z^2}\right]^{1/2}dz &= 4\tilde{y}_{\nu q}\eta_c^2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi}{\sqrt{1-\eta_c^2\sin^2\psi}}d\psi \\ &= \pi\tilde{y}_{mq}\eta_c^2\left[1+\frac{5\eta_c^2}{8}+\frac{31\eta_c^4}{64}+\frac{417\eta_c^6}{1024}+...\right]. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Оборачивая ряд, из условия квантования Бора-Зоммерфельда (6.27)

$$\eta_c^2 = \frac{2p+1}{\tilde{y}_{mq}}\left[1-\frac{5}{8}\frac{2p+1}{\tilde{y}_{mq}}+\frac{19}{64}\left(\frac{2p+1}{\tilde{y}_{mq}}\right)^2-\frac{117}{1024}\left(\frac{2p+1}{\tilde{y}_{mq}}\right)^3+...\right], \tag{6.31}$$

находим уравнение для искомого $\tilde{y}_{\nu q} = k_{\nu q}a$. Затем, используя разложение для корней функций Бесселя [15]:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{mq} = T_{mq} = m - \alpha_q\left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20}\alpha_q^2\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q^3+10}{1400}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1} \\ - \frac{479\alpha_q^4-40\alpha_q}{504000}\left(\frac{m}{2}\right)^{-5/3}, \end{aligned} \tag{6.32}$$

можно получить:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\nu q} = \nu - \alpha_q\left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20}\alpha_q^2\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q(2p+1)}{12}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-2/3} \\ + \left[\frac{\alpha_q^3+10}{1400}+\frac{(2p+1)^2}{32}\right]\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{6.33}$$

где положено, что $\nu = m+p+1/2 = \ell+1/2$. Сравнивая это выражение с истинным рядом для $t_{\nu q}$, получающегося из (6.32) формальной заменой $m \to \nu = m+1/2$, видим отличие в четвертом члене (в идеальной сфере резонансные частоты не зависят от

$p = \ell - m$) и приходим к выводу, что метод Сумецкого дает относительную точность собственных частот порядка $O(\nu^{-5/3})$.

Аналогичное выражение можно получить для сфероида:

$$k_{mpq}a = \nu - \alpha_q \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3} + \frac{(2p+1)(a-b)}{2b} + \frac{3}{20}\alpha_q^2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1/3} + O(\nu^{-2/3}), \tag{6.34}$$

Задание 17. *Получите выражение для собственных частот сфероида (эллипсоида вращения) с полуосями a и b, полагая в параболическом приближении*

$$\rho_s(z) = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2}}, \tag{6.35}$$

В работе [20] предложен похожий метод расчета собственных частот микротороида, эквивалентного с точки зрения МШГ сильно сплюснутому сфероиду. Нас интересуют только моды, которые циркулируют очень близко к "экваториальной" плоскости сфероида. В этом случае естественно оценить радиальное распределение с помощью *цилиндрической* функции Бесселя $J_m(\tilde{k}_{mq}r)$, где

$$\tilde{k}_{mq}a = a\sqrt{k_{lmq}^2 - k_\perp^2} = T_{mq}, \tag{6.36}$$

а $k_\perp$ – волновое число в ВКБ приближении для угловой сфероидальной функции [21]. Здесь для наших целей достаточно взять очень простую оценку гармонического осциллятора:

$$k_\perp^2 \simeq \frac{2p+1}{ab}m. \tag{6.37}$$

Принимая во внимание, что $T_{mq} \simeq t_{l,q} - (l - m + 1/2)$, окончательно получим:

$$k_{\ell mq}a \simeq \sqrt{\tilde{k}_{mq}^2 + k_\perp^2}\,a \simeq T_{mq} + \frac{k_\perp^2 a^2}{2T_{mq}} \simeq t_{lq} + \frac{(2p+1)(a-b)}{2b}, \tag{6.38}$$

что точно соответствует выражению (6.34).

Эта оценка дает такое же расщепление мод для малых значений эксцентриситета ε и довольно близкое при больших $\varepsilon^2 = 1 - b^2/a^2$, что и выражение (6.12), полученное из геометрических соображений. Для оценки аппроксимации было проведено сравнение с численным расчетом нулей радиальной сфероидальной функции при $\ell = 100$ для ε, изменяющихся от 0 до 1. Оказалось, что даже при $\epsilon = 0.8$ ошибка в величине расщепления составила меньше 5% и в абсолютном значении частоты менее 0.1%. При больших ℓ и меньших ϵ точность будет очевидно лучше. Оценить погрешность, которая получается из-за замены векторной краевой задачи скалярной, к сожалению, затруднительно, но очевидно она пропорциональна отношению энергий, заключенных в компонентах поля вдоль и поперек поверхности резонатора и для фундаментальных мод убывает с ростом ℓ.

Если мы хотим теперь в этом приближении найти частоты открытого диэлектрического резонатора, можно, как и в главах 4 и 5 ввести эффективный большой радиус:

$$\bar{a} = a + \frac{\Delta_{TE,TM}}{k_0 n_0} = a + \frac{P}{k_0\sqrt{n^2-1}} \tag{6.39}$$

и получить из (6.38).

$$k_{\ell mq} a \simeq t_{lq} + \frac{(2p+1)(a-b)}{2b} - \frac{Pn}{\sqrt{n^2-1}}, \tag{6.40}$$

($P = 1$ для TE мод и $P = 1/n^2$ для TM мод). Обоснование такого подхода и его уточнение будет дано в следующей главе.

В этом приближении распределение поля в сфероидальных резонаторах (и в резонаторах, поверхность которых вблизи экватора хорошо приближается сфероидом, например, в тороидальных) описывается в цилиндрических координатах следующим образом:

$$\begin{aligned} E_\chi \simeq& E_0 e^{-\frac{z^2}{2b^2}\sqrt{m^2b^2/a^2-1/4}} J_m\left(T_{mq}\frac{\rho}{\bar{a}}\right) e^{im\phi},\ (\rho < a) \\ E_\chi \simeq& C E_0 e^{-\frac{z^2}{2b^2}\sqrt{m^2b^2/a^2-1/4}} H_m^{(1)}\left(\sqrt{\frac{T_{mq}^2}{n^2a^2} + \frac{m(n^2-1)}{n^2ab}}\rho\right) e^{im\phi} \\ \simeq& \frac{1}{P} E_0 e^{-\frac{z^2}{2b^2}\sqrt{m^2b^2/a^2-1/4}} J_m\left(T_{mq}\frac{a}{\bar{a}}\right) e^{im\phi} e^{-\alpha(\rho-a)},\ (\rho > a) \end{aligned} \tag{6.41}$$

где $\bar{a} = a + \frac{P}{k_0\sqrt{n^2-1}}$ – эффективный радиус, $P = 1$ для TE мод и $P = 1/n^2$ для TM, T_{m1} – первый корень цилиндрической функции Бесселя, $\gamma = \sqrt{n^2-1}k_0$, $\chi = z$ для мод TE и $\chi = \rho$ для мод TM.

Для достаточно больших по сравнению с длиной волны резонаторов обычно достаточно еще более простое приближение:

$$\begin{aligned} E_\chi &\simeq E_0 \exp\left[-\frac{z^2 m}{2ab}\right] J_m\left(T_{mq}\frac{\rho}{\bar{a}}\right) e^{im\phi}, && \rho < a \\ E_\chi &\simeq \frac{1}{P} E_0 \exp\left[-\frac{z^2 m}{2ab}\right] J_m\left(T_{m1}\frac{a}{\bar{a}}\right) e^{-\sqrt{n^2-1}k_0(\rho-a)} e^{im\phi}, && \rho > a, \end{aligned} \tag{6.42}$$

Энергия в резонаторе будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\epsilon_0 n^2}{2} 2\pi \int_0^{\bar{a}} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 \rho d\rho dz \\ &\simeq \frac{\epsilon_0 n^2}{2} E_0^2 2\pi \frac{\sqrt{\pi ab}}{\sqrt{m}} \frac{\bar{a}^2}{2} J_m'^2(T_{m1}), \end{aligned} \tag{6.43}$$

и, соответственно, эффективный объем:

$$V_{eff} = \frac{\int n^2|E|^2 dV}{\max(n^2|E|^2)} \simeq \pi^{3/2} \frac{a^2\sqrt{ab}}{\sqrt{m}} \frac{J_m'^2(T_{m1})}{J_m^2(T'_{m1})}. \tag{6.44}$$

Здесь учтено, что $E_{max} = E_0 J_m(T'_{m1})$, где T'_{m1} – первый нуль производной функции Бесселя. Используя приближения для корней цилиндрических функций Бесселя из Главы 4 (4.22,4.23), получим

$$\begin{aligned} V_{eff} &\simeq 15.12a^2\sqrt{ab}\, m^{-7/6} \\ &\simeq 15.12a^{11/4}r_t^{1/4}\, m^{-7/6} \end{aligned} \tag{6.45}$$

Для оценок можно также часто считать, что поле в резонаторе в меридианальном сечении имеет приблизительно гауссов профиль

$$\begin{aligned} E &\simeq \exp\left[-\frac{(r-a_m)^2}{2r_r^2} - \frac{z^2}{2r_z^2} + im\phi\right], \\ r_z &= \sqrt{\frac{ab}{m}}, \\ r_r &= 0.77am^{-2/3}, \\ a_m &= \frac{T'_{m1}\lambda}{2\pi n}. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Поле на поверхности резонатора вблизи экватора $E_s(z=0, \rho=a)$:

$$E_s \simeq \frac{1}{P}E_0 J_m\left(T_{m1}\frac{a}{\bar{a}}\right) \simeq -E_0 J'_m(T_{m1})\frac{T_{m1}}{k_0\bar{a}\sqrt{n^2-1}}. \tag{6.47}$$

Замечательным свойством МШГ является то, что отношение квадратов поля на поверхности и поля в максимуме включает ту же комбинацию функций Бесселя, что и эффективный объем (энергия), что крайне упрощает многие оценки эффектов вблизи поверхности, в которые обычно входит отношение этих параметров:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{E_s}{E_{max}} &\simeq -\frac{J'_m(T_{m1})}{J_m(T'_{m1})}\frac{T_{m1}}{k_0\bar{a}\sqrt{n^2-1}} \simeq -\frac{J'_m(T_{m1})}{J_m(T'_{m1})}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \\ &\simeq 1.65m^{-1/3}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}, \end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\frac{\xi^2}{V_{eff}^2} = \frac{n^2}{n^2-1}\frac{\sqrt{m}}{\pi^{3/2}a^{5/2}b^{1/2}}. \tag{6.49}$$

Глава 7

Лучевое приближение и метод эйконала

Аналогом квазиклассического приложения в волновой оптике является приближение геометрической оптики, которое математически выражается в методе эйконала.

Математические основания лучевой интерпретации волновых уравнений оптики были заложены Гамильтоном и Дебаем и получили дальнейшее развитие уже в наше время [22, 23]. Такое асимптотическое приближение позволяет не только весьма просто описывать распространение излучения в неоднородных средах, но и решать различные граничные задачи, включая проблемы дифракционного рассеяния. Наиболее интересной для нас является возможность с помощью этого метода рассчитывать собственные частоты и распределения полей в резонаторах [24, 25], больших по сравнению с длинов волны.

Асимптотическое решение волнового уравнения в приближении медленного изменения показателя преломления на масштабе длины волны можно искать в виде плоских волн с медленно меняющимися в пространстве амплитудами и фазами. Удобно, как предложил Дебай, воспользоваться разложением поля по обратным степеням волнового числа k_0 [23]:

$$\Psi(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(ik_0)^m} e^{ik_0 S(\mathbf{r})}. \tag{7.1}$$

После подстановки этого ряда в уравнение Гельмгольца и приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях k_0 получается бесконечная система связанных уравнений:

$$\begin{aligned} &(\nabla S)^2 = n^2, \\ &2(\nabla A_0 \nabla S) + A_0\,\Delta S = 0, \\ &2(\nabla A_m \nabla S) + A_m\,\Delta S = -\Delta A_{m-1}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Функцию $S(\mathbf{r})$ принято называть эйконалом (от греческого $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$ – изображение), а первое из уравнений системы, описывающее эту функцию, – уравнением эйконала. Эйконал S имеет размерность длины и имеет смысл оптического пути. Уравнения для амплитудных коэффициентов A_m называют уравнениями переноса нулевого, первого и т.д. порядков. Полученная система проще исходного уравнения Гельмгольца, поскольку состоит из уравнений в частных производных первого порядка, которые с помощью метода характеристик сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям [23].

Формально полученная система уравнений позволяет получить решение уравнения Гельмгольца с любой точностью, хотя сходимость решения в общем виде пока не доказана. Однако часто ограничиваются лишь рассмотрением уравнения эйконала и уравнения переноса нулевого порядка.

В системах координат, в которых векторное волновое уравнение не сводится к скалярному, приближение эйконала для МШГ должно достаточно хорошо работать для тех компонент электрического или магнитного поля, которые являются доминирующими для данного типа колебаний, а значит в основном определяют собственные частоты резонатора.

Так, для колебаний, близких к ТЕ-типу – это меридиональная электрическая и нормальная к поверхности магнитная компонента, а для колебаний близких к ТМ-типу, наоборот, соответственно, главными является меридиональная магнитная и ортогональная к поверхности электрические компоненты поля.

7.1 Уравнения эйконала в цилиндре

Рассмотрим для начала решение методом эйконала скалярной двумерной задачи о собственных колебаниях бесконечного цилиндра. Вначале мы используем простейшие нулевые граничные условия. О том, как полученные результаты переносятся на случай диэлектрических резонаторов, будет рассказано далее.

Уравнение для эйконала в цилиндрических координатах запишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}\right)^2 = n^2. \tag{7.3}$$

Решение этого уравнения можно найти методом разделения переменных:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S} = \mathcal{S}_\phi(\phi) + \mathcal{S}_\rho(\rho) + \mathcal{S}_0,\\
&-\rho^2\left(\frac{\partial \mathcal{S}_\rho(\rho)}{\partial \rho}\right)^2 + n^2\rho^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\phi(\phi)}{\partial \phi}\right)^2 = \mathcal{M}^2,\\
&\frac{\partial \mathcal{S}_\phi(\phi)}{\partial \phi} = \mathcal{M}.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Отсюда

$$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{M}\phi = \frac{1}{k_0} m\phi. \tag{7.5}$$

Здесь $\mathcal{S}_0$ – некоторая постоянная, которую можно положить равной нулю, перенеся фазовый множитель в амплитудный коэффициент, как и ранее, $k = nk_0$. Заменяя константу разделения $\mathcal{M}$ на m/k_0, где m – целое, мы учли требование непрерывности решения $A_0 e^{ik_0\mathcal{S}}$ при $\phi = 2\pi$. Этот результат, как следует из дальнейшего, следует также из условия квантования, но для получения квазиклассического приближения радиальных функций сделаем эту подстановку здесь.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{S}_\rho(\rho)}{\partial \rho} = \pm n\sqrt{1 - \frac{\mathcal{M}^2}{n^2\rho^2}} = \pm n\sqrt{1 - \left(\frac{m}{k\rho}\right)^2},\\
&\mathcal{S}_\rho = \pm\frac{m}{k_0}\left[\sqrt{\left(\frac{k\rho}{m}\right)^2 - 1} - \arccos\left(\frac{m}{k\rho}\right)\right] = \\
&\pm\frac{1}{k_0}\left[\sqrt{k^2\rho^2 - m^2} - m\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\left(\frac{k\rho}{m}\right)^2 - 1}\right)\right].
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Рассмотрим теперь первое уравнение переноса. Домножив его на A_0, перепишем уравнение в более простом виде:

$$A_0(2\nabla A_0 \nabla\mathcal{S} + A_0\Delta\mathcal{S}) = \nabla\cdot(A_0^2\nabla\mathcal{S}) = 0. \tag{7.7}$$

Подставляя сюда найденное решение для эйконала $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_0^2\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(A_0^2\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\phi}\right) = \\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{m}{k_0}A_0^2\sqrt{\left(\frac{k\rho}{m}\right)^2 - m^2}\right) \pm \frac{m}{k_0\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(A_0^2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Не теряя общности можно положить, что $\frac{\partial A_0}{\partial\phi} = 0$, поскольку в противном случае получающийся после разделения переменных фазовый множитель вида $e^{\nu\phi}$ можно было бы перенести в эйконал $\mathcal{S}$. В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
&A_0 = C(k^2\rho^2 - m^2)^{-1/4}, \\
&\Psi_\pm = C_\pm\frac{1}{\sqrt[4]{k^2\rho^2 - m^2}}e^{\pm im[\sqrt{(k\rho/m)^2-1} - \mathrm{arctg}(\sqrt{(k\rho/m)^2-1})] + im\phi}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Решения в области $k\rho < m$ легко получаются из уже полученных подстановкой

$$\sqrt{k^2\rho^2 - m^2} = i\sqrt{m^2 - k^2\rho^2}. \tag{7.10}$$

Линейные комбинации функций Ψ_+ и Ψ_- обеспечивают квазиклассические аппроксимации полей во всех областях, кроме непосредственно прилегающей к значениям $a_c = m/k$ (см. приближения Дебая в Главах 4 и 5).

7.2 Собственные частоты в методе эйконала

В квазиклассическом приближении квантовой механики условие квантования Бора-Зоммерфельда, уточненное Эйнштейном для многомерного случая выглядит следующим образом:

$$\oint k^* dx = 2\pi q, \tag{7.11}$$

где $q = 0, 1, 2 \ldots$ Однако, как показал Келлер, такое условие квантование справедливо лишь при условии отражения волны от двух гладких границ потенциальной ямы. Применение уточненных условий квантования позволило ему продемонстрировать, что метод эйконала является мощным и неожиданно весьма точным для расчета собственных частот разнообразных резонаторов [24].

В квазиклассическом приближении интеграл по замкнутому контуру означает, что луч, бегущий по этому контуру возвращается в исходную точку с той же фазой. Набег фазы луч приобретает как в ходе распространения, так и при отражении от границ. В методе эйконала роль локального волнового вектора играет величина $\mathbf{k}^* = \mathbf{k_0}\nabla\mathcal{S}$, и условие квантования в общем виде превращается в условие:

$$k_0 \oint \nabla\mathcal{S}\mathbf{ds} = 2\pi q + \Delta_b, \tag{7.12}$$

где Δ_b – набег фазы при отражении от различных границ.

Проще всего выбирать контур так, чтобы направление волнового вектора было во всех точках касательно к этому контуру. Если интегрирование ведется по одной координате, условие получается простым:

$$2k_0\mathcal{S}|_{x_1}^{x_2} = 2\pi q + \Delta_b, \tag{7.13}$$

Рассмотрим условия отражения от границ потенциального барьера. Если на границе рассматриваемое поле ψ должно обращаться в нуль (как в случае тангенциальных компонент электрического поля на металлической поверхности), значит, на границу $s = s_b$ приходится узел стоячей волны и

$$\psi \propto \sin[k^*(s - s_b)] = \frac{1}{2i}(e^{ik^*(x-s_b)} + e^{-ik^*(x-s_b)+i\pi}), \tag{7.14}$$

а значит, при этом на каждое отражение от поверхности при следовании вдоль контура надо добавить π. Если же требование состоит в равенстве нулю производной, то

$$\psi \propto \cos k^*(s - s_b) = \frac{1}{2}(e^{ik^*(x-s_b)} + e^{-ik^*(x-s_b)}) \tag{7.15}$$

и при отражении фазового сдвига не происходит. Особым случаем является отражение от каустической поверхности. Непрерывность сшивки квазиклассического решения и решения линеаризованного уравнения вблизи точки поворота диктует необходимость добавления фазы $\pi/2$ при касании каустики. Показать это несколько сложнее.

Задание 18. *Линеаризуя уравнение для функции Бесселя вблизи точки поворота, показать, что получающееся решение плавно сшивается с квазиклассическим если положить, что при отражении от каустической поверхности происходит дополнительный набег фазы* $\pi/2$.

Таким образом, условия квантования запишутся следующим образом:

$$k_0 \oint \nabla \mathcal{S} \mathbf{ds} = 2\pi(q + \frac{q'}{2} + \frac{q''}{4}), \tag{7.16}$$

где q' – количество отражений на рассматриваемом контуре от границ с краевым условием Неймана $u(s_b) = 0$, а q'' – количество касаний каустических поверхностей. Число q'' обычно называют индексом Маслова, который ввел его независимо от Келлера и разработал его теорию в более общем виде, хотя, стоит отметить, позднее. Более справедливо, видимо, название индекс Келлера-Маслова, хотя фамилия Келлера входит в название всего метода ЕВК (Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера).

Теперь, воспользовавшись найденным решением для эйконала мы можем записать условия квантования для найденных решений (7.5,7.6) и найти собственные значения:

$$k_0 \mathcal{S}_\phi|_0^{2\pi} = 2\pi m = 2\pi q_\phi, \tag{7.17}$$

$$2k_0 \mathcal{S}_\rho|_{\rho_c}^a = 2m \left[\sqrt{\left(\frac{ka}{m}\right)^2 - 1} - \arccos\left(\frac{m}{ka}\right) \right] = 2\pi \left(q_\rho + \frac{3}{4} \right) = 2\pi \left(q - \frac{1}{4} \right).$$

Здесь учтено, что циклический интеграл по ρ включает одно касание каустики ($q'' = 1$) и одно границы ($q' = 1$) и то, что $S(\rho_c = m/k) = 0$. Из первого уравнения следует, что $q_\phi = k_0 \mathcal{M} = m$. Для согласия с нумерацией корней функции Бесселя мы заменили q_ρ на $q = q_\rho + 1$. Второе уравнение позволяет найти приближенные собственные значения, но прежде чем это сделать, посмотрим, что означают записанные уравнения с квазигеометрической лучевой точки зрения. В цилиндрическом резонаторе, заполненном изотропной средой с постоянным показателем преломления n могут распространяться, согласно принципу наименьшего действия, только прямолинейные лучи, отражающиеся лишь от границы на окружности.

Кроме вырожденного случая, когда лучи распространяются по диаметру, все лучи внутри окружности располагаются внутри некоторого кольца (рис. 7.1). Обозначим через a_c радиус внутренней окружности кольца (наружний радиус соответствует границе a) и выберем в качестве первого пути обхода эту внутреннюю окружность.

$$2\pi a_c k = 2\pi m. \tag{7.18}$$

Второй контур выбираем так, как показано на рис. 7.1. Он состоит из двух сопряженных отражением от поверхности лучей AC и BC до каустической окружности и из стягивающей эти лучи дуги AB на этой же каустической окружности. В каждой точке на таком контуре лучи МШГ тангенциальны к поверхности, однако на каустической окружности направление противоположно направлению распространения двух лучей:

$$2k[(a^2 - a_c^2)^{1/2} - a_c \arccos(a_c/a)] = 2\pi(q - 1/4). \tag{7.19}$$

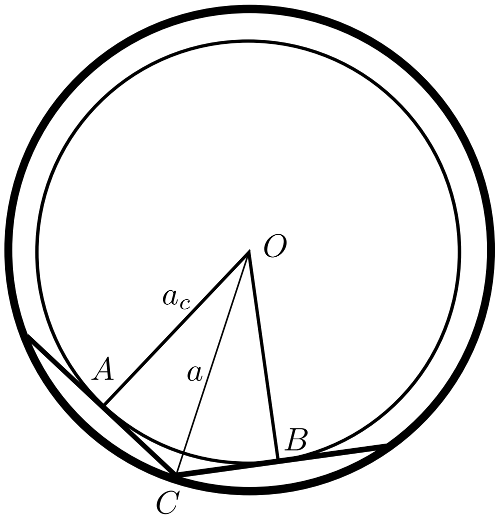


Рис. 7.1: Выбор контуров для квантизации.

Выражая из первого уравнения a_c, получаем уравнение, совпадающее в точности с тем, которое получается формальным решением уравнения эйконала (7.17).

Решение (7.17) можно искать в виде ряда:

$$\frac{nk_0a}{m} = 1 + \sum_i^\infty c_j m^{-2j/3}, \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned} nk_0a = m &+ \left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20}\left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} \\ &- \frac{1}{1400}\left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^{2}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1} + O(m^{-5/3}). \end{aligned} \tag{7.21}$$

Это решение можно сравнить с асимптотическим разложением аналитического решения, которым являются корни функции Бесселя [15]

$$\begin{aligned} T_{mq} = m - \alpha_q\left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} &+ \frac{3}{20}\alpha_q^2\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q^3+10}{1400}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1} \\ &- \frac{479\alpha_q^4 - 40\alpha_q}{504000}\alpha_q^4\left(\frac{m}{2}\right)^{-5/3} + O(m^{-8/3}). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Сравнивая две аппроксимации, мы видим, что при формальной замене выражений $\beta_q = -\left(\frac{3\pi(q-1/4)}{2}\right)^{2/3}$ на нули функции Эйри α_q, ряды совпадают с точностью до члена порядка $O(m^{-1})$. Отличие между величинами β_q и α_q для первых q меньше процента быстро стремится к нулю с ростом q.

Можно привести обоснование замены β_q на α_q. Вблизи каустики условия квазиклассического приближения нарушаются и, как было отмечено выше, в этой области лучшее приближение дает после линеаризации уравнения решение через функции Эйри. Сочетая оба подхода, можно получить равномерные аппроксимации уравнения второго порядка вблизи точки поворота ξ_c:

$$\psi'' + [k^2\mathcal{V}(\xi) - \mathcal{G}(\xi)]\psi = 0. \tag{7.23}$$

При $k \to \infty$ это уравнение имеет равномерную аппроксимацию:

$$\begin{gathered}\psi = C\mathrm{Ai}[\mathcal{F}(\xi)]\left[\sqrt[4]{\frac{\mathcal{F}(\xi)}{-\mathcal{V}(\xi)}} + O(k^{-1})\right] \\ \mathcal{F}(\xi) = \left[\frac{3}{2}k\int\limits_{\xi_c}^{\xi}\sqrt{-\mathcal{V}(\xi)}d\xi\right]^{2/3},\end{gathered} \tag{7.24}$$

отсюда условие обращение функции в нуль приводит к уравнению:

$$k\int\limits_{\xi_c}^{\xi_s}\sqrt{-\mathcal{V}(\xi)}d\xi = \frac{2}{3}\alpha_q^{3/2}, \tag{7.25}$$

что эквивалентно условию квазиклассического квантования по Келлеру с одним касанием каустики и одним отражением от границы с нулевыми граничными условиями с заменой β_q на α_q. Что и требовалось доказать.

Для функций Бесселя указанная равномерная аппроксимация приводит к уже обсуждавшейся в Главе 4 равномерной аппроксимации Ольвера [16].

7.3 Лучевое приближение в сфере

Рассмотрим теперь применение правил квантования к эйконалу и в лучевом приближении. Сферическую гармонику в лучевом приближении можно представить как суперпозицию наклоненных циркулярных мод. Каустическими поверхностями в сфере являются внутренняя сфера радиусом a_c и два симметричных конуса, определяемые углами $\theta_{1,2c} = \pi/2 \mp \beta$.

Мы рассматриваем далее лишь лучевой метод квантования, однако те же уравнения получаются при квантовании эйконала.

Задание 19. *Найдите решение для эйконала в сферических координатах.*

В качестве первого контура выбираем окружность на пересечении каустической сферы и каустических конусов:

$$ka_c \sin\theta_c = m. \tag{7.26}$$

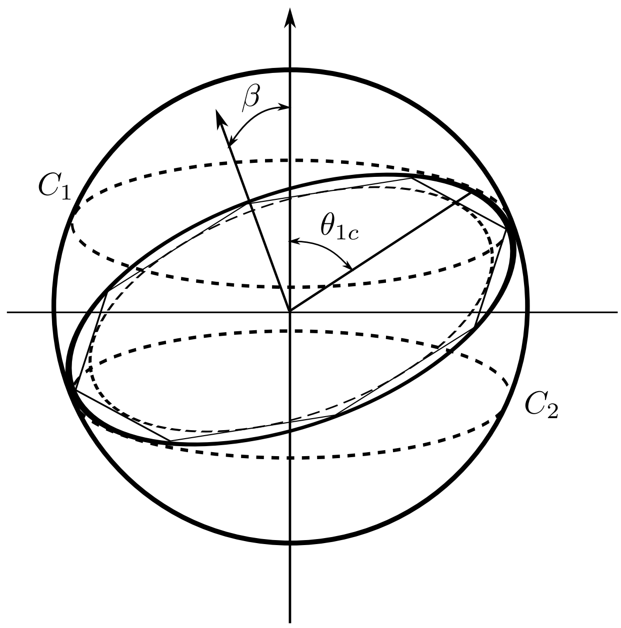


Рис. 7.2: Лучевой метод описания мод в сфере.

Второй контур – наклоненная большая окружность на каустической сфере:

$$ka_c = (\ell + 1/2). \tag{7.27}$$

Добавка 1/2 следует из того, что круг на внутренней каустической сфере, лежащий в плоскости распространения такой наклоненной орбиты, касается сверху и снизу каустических конусов (индекс Келлера-Маслова $q'' = 2$) (7.2).

Наконец, третий замкнутый контур соответствует двойному проходу по r от $r = a_c$ до $r = a$ и обратно. Получаем уравнение, аналогичное радиальному уравнению эйконала для цилиндра. Контур для луча при этом находится в наклоненной плоскости (7.2) и также состоит из пары лучей от внутреннего каустического круга до поверхности и стягивающей их дуги, лежащей на каустической сфере:

$$2k[(a^2 - a_c^2)^{1/2} - a_c \arccos(a_c/a)] = 2\pi(q_r + 3/4) = 2\pi(q - 1/4). \tag{7.28}$$

Где как и в цилиндре мы учли, что на этот контур приходится одно касание каустики и одно отражение от поверхности и заменили индекс q_r на q_r, исчисляемый от единицы.

Решение этой системы получается простой заменой в решении (7.21) m на $\ell + 1/2$. Из полученной системы уравнений (7.26,7.27,7.28) следует, что как и при точном решении, в квазиклассическом приближении собственные частоты вырождены и не зависят от m.

Из приведенных уравнений можно видеть, что в лучевом приближении, как и при точном электродинамическом решении, собственные частоты сферы определяются только двумя уравнениями (7.27,7.28) и не зависят от m и угла каустического конуса

$$\sin\theta_c = \cos\beta = \frac{m}{\ell + 1/2}. \tag{7.29}$$

Выражения для собственных частот получаются те же, что и у закрытого цилиндра с заменой m на $\nu = \ell + 1/2$.

7.4 Моды сфероида

В случаях сферы и цилиндра удается точно найти собственные моды колебаний резонатора и соответствующие резонансные частоты, получить распределение поля внутри и вне резонатора, оценить энергетические потери. Однако в общем случае, если резонатор представляет собой произвольное тело вращения, этого сделать нельзя, точных аналитических решений не существует, а численные методы, например метод конечных элементов, не всегда удобны для теоретического анализа. Приближение лучевой оптики (эйконала) – один из наиболее эффективных асимптотических методов оценки собственных частот МШГ в случае, когда точные решения найти не удается [24]. Интересно рассмотреть этим методом моды эллипсоида вращения (сфероида), поскольку сфероидом, имеющим разную кривизну в азимутальном и меридиональном направлениях можно с хорошей точностью аппроксимировать поверхность многих тел вращения в приэкваториальной области распространения мод, например, для различных тороидальных и скругленных дисковых резонаторов. В частности, если тороид имеет малый радиус r, то его поверхность можно аппроксимировать сфероидом (рис. 7.3), большая полуось которого равна основному радиусу тороида, а малая полуось

$$b = \sqrt{ar}. \tag{7.30}$$

В этом случае вблизи экватора в цилиндрических координатах поверхность описывается одинаковой параболической зависимостью и имеет на экваторе одинаковую в обоих случаях кривизну. Действитеьно, для сфероида:

$$(a - \rho) = a - a\sqrt{1 - z^2/b^2} \simeq \frac{az^2}{2b^2}, \tag{7.31}$$

а для тороида

$$(a - \rho) = r_t - \sqrt{r_t^2 - z^2} \simeq \frac{z^2}{2r_t} = \frac{az^2}{2b^2}. \tag{7.32}$$

Несмотря на гибридный характер мод, в случае МШГ, прилегающих к экваториальной плоскости, энергия в основном сосредоточена либо в тангенциальных, либо в нормальных к поверхности в электрических компонентах поля. Такие моды мы будем обозначать, соответственно, как квази-ТЕ или квази-ТМ (используя соглашение, такое же как в случае сферических, а не цилиндрических координат, где в силу исторических причин соглашение обратное, см. Главу 4), и они могут быть с хорошим приближением проанализированы с помощью скалярного волнового уравнения.

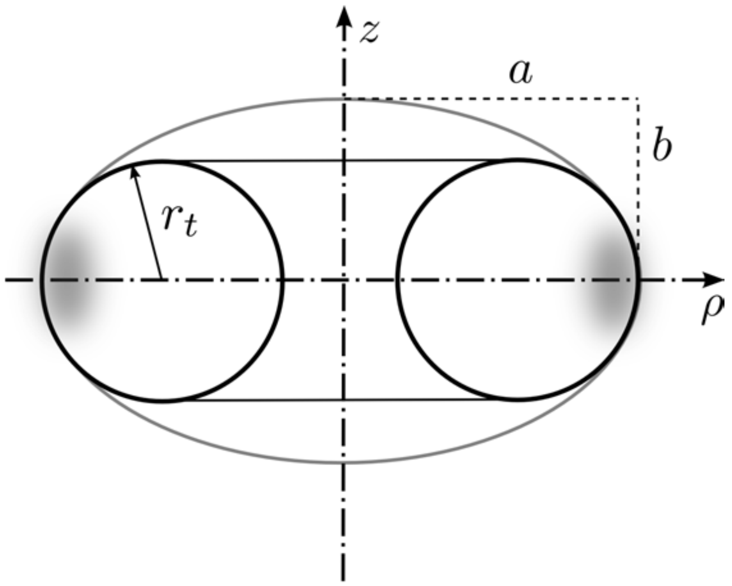


Рис. 7.3: Тороидальный резонатор и эквивалентный ему сфероидальный.

7.5 Сфероидальная система координат

Термином “сфероид” для обозначения двух вариантов эллипсоида вращения мы обязаны Архимеду. Ввести координаты для вытянутого и сплюснутого сфероида и соответствующие им сфероидальные функции можно несколькими эквивалентными способами [15]. Следующая система координат позволяет рассматривать одновременно обе геометрии:

$$x = \frac{d}{2}[(\xi^2 - s)(1-\eta^2)]^{1/2}\cos(\phi),$$
$$y = \frac{d}{2}[(\xi^2 - s)(1-\eta^2)]^{1/2}\sin(\phi),$$
$$z = \frac{d}{2}\xi\eta, \tag{7.33}$$

где d – расстояние между точками фокусов. Здесь мы ввели знаковую переменную s, которая равна $+1$ для вытянутой сфероидальной системы, в которой $\xi \in [1,\infty)$ определяет вытянутые сфероиды, а $\eta \in [-1,1]$ описывает ортогональные им двуполостные гиперболоиды вращения (рис. 7.4, слева). Соответственно, $s=-1$ порождает сплюснутые сфероиды для $\xi \in [0,\infty)$ и однополостные гиперболоиды вращения (рис. 7.4, справа). Сфероиды чаще рассматриваются в связи с модами другого вида – “прыгающего мячика”, которые соответствуют модам резонатора типа Фабри-Перо. Нас же интересуют моды внутри сфероида, прилегающие к его поверхности около экваториальной плоскости. Удобно обозначить полуось в этой плоскости через a, а полуось по оси симметрии z через b. В этом случае $d^2/4 = s(b^2-a^2)$ и эксцентриситет

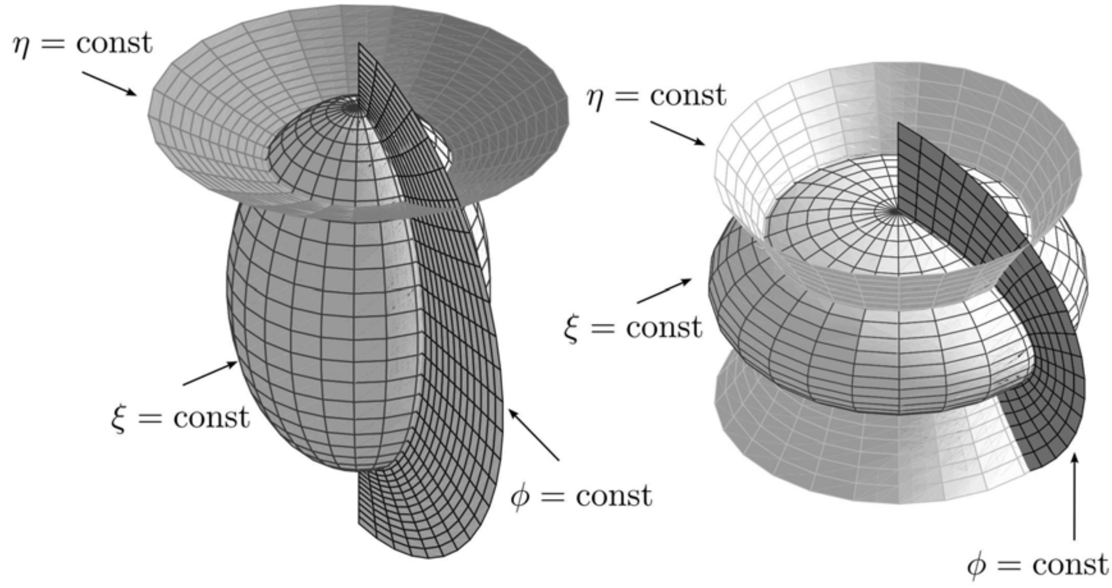


Рис. 7.4: Координатные системы вытянутого и сплюснутого сфероида $(\xi,\ \eta,\ \phi)$.

$\varepsilon = \sqrt{1-(a/b)^{2s}}$. Параметры Ламэ для введенной системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned} h_\xi &= \frac{d}{2}\left(\frac{\xi^2 - s\eta^2}{\xi^2 - s}\right)^{1/2}, \\ h_\eta &= \frac{d}{2}\left(\frac{\xi^2 - s\eta^2}{1-\eta^2}\right)^{1/2}, \\ h_\phi &= \frac{d}{2}[(\xi^2 - s)(1-\eta^2)]^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Скалярное уравнение Гельмгольца в сфероидальных координатах разделяется.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2 - s)\frac{\partial}{\partial\xi}\psi + \frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi \\ &+\left(c^2(\xi^2 - s\eta^2) - \frac{m^2}{1-\eta^2} - s\frac{m^2}{\xi^2 - s}\right)\psi = 0, \end{aligned} \tag{7.35}$$

где $c = kd/2$. Решение $\psi = R_{ml}(c,\xi)S_{ml}(c,\eta)e^{im\phi}$, где радиальные и угловые сфероидальные функции определяются следующими уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2 - s)\frac{\partial R}{\partial\xi} - \left(\lambda_{ml} - c^2\xi^2 + s\frac{m^2}{\xi^2 - s}\right)R = 0, \tag{7.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial S}{\partial\eta} + \left(\lambda_{ml} - sc^2\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right)S = 0. \tag{7.37}$$

Здесь λ_{ml} – константа разделения уравнений, которая определяется независимо и является функцией m, l и c. При подстановке $\xi = 2r/d$ первое уравнение переходит в уравнение для сферических функций Бесселя $j_l(kr)$ в пределе $d/2 \to 0$, при этом второе уравнение обращается в уравнение для присоединенных полиномов Лежандра $P_m^l(\eta)$, а $\lambda_{ml} -> l(l+1)$. Поэтому сфероидальные функции часто анализируются разложением их в ряды по сферическим функциям.

Вычисление сфероидальных функций и собственных значений $\lambda_{ml}(c)$ является нетривиальной задачей. Можно было бы предположить, что приближение сфероидальных функций и их нулей является более последовательным способом нахождения приближений для собственных частот сфероида, однако оказывается, что метод эйконала обеспечивает лучшие результаты и гораздо более нагляден.

Нас интересуют МШГ, то есть моды, у которых поле сосредоточено вблизи поверхности и экваториальной плоскости резонатора. В сфероидальной системе координат уравнение эйконала разделяется, если положить $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\xi(\xi) + \mathcal{S}_\eta(\eta) + \mathcal{S}_\phi(\phi) + \mathcal{S}_0$:

$$\frac{\xi^2 - s}{\xi^2 - s\eta^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}_\xi(\xi)}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1-\eta^2}{\xi^2 - s\eta^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}_\eta(\eta)}{\partial \eta}\right)^2 + \\ + \frac{1}{(\xi^2 - s)(1-\eta^2)}\left(\frac{\partial \mathcal{S}_\phi(\phi)}{\partial \phi}\right)^2 = \frac{n^2 d^2}{4}. \tag{7.38}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}_\phi}{\partial \phi} &= \mathcal{M}, \\ \frac{\partial \mathcal{S}_\xi(\xi)}{\partial \xi} &= \pm\left(\frac{n^2 d^2 \xi^2}{4(\xi^2 - s)} - \frac{\mathcal{N}^2}{\xi^2 - s} - \frac{s\mathcal{M}^2}{(\xi^2 - s)^2}\right)^{1/2}, \\ \frac{\partial \mathcal{S}_\eta(\eta)}{\partial \eta} &= \pm\left(\frac{\mathcal{N}^2}{1-\eta^2} - \frac{s n^2 d^2 \eta^2}{4(1-\eta^2)} - \frac{\mathcal{M}^2}{(1-\eta^2)^2}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{7.39}$$

где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – константы разделения.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\xi(\xi) &= \pm\frac{nd}{2}\int \frac{\sqrt{(\xi^2 - \xi_c^2)(\xi^2 - s\eta_c^2)}}{\xi^2 - s} d\xi, \\ \mathcal{S}_\eta(\eta) &= \pm\frac{nd}{2}\int \frac{\sqrt{(\eta_c^2 - \eta^2)(\xi_c^2 - s\eta^2)}}{1-\eta^2} d\eta, \\ \mathcal{S}_\phi(\phi) &= \frac{m}{k_0}\phi, \end{aligned} \tag{7.40}$$

где, как и ранее, из условия цикличности фазы $ik_0\mathcal{S}_\phi$ мы определили, что $\mathcal{M} = m/k_0$, где m - целое.

Задание 20. *Получите эти решения и найдите выражения для ξ_c и η_c через константы разделения.*

Обратимся теперь к квазиклассической лучевой интерпретации [24, 22]. Уравнение эйконала описывает прямые лучи, которые распространяются внутри сфероида, касаются поверхности резонатора и отражаются. Для мод типа шепчущей галереи угол отражения близок к $\pi/2$. Эти лучи формируют каустическую поверхность, (в нашем случае это вложенный сфероид, определяемый параметром ξ_c). Лучи являются касательными к поверхности внутреннего каустического сфероида и распространяются вдоль геодезических кривых на нем. В случае идеальной сферы все лучи одного семейства лежат в одной плоскости. Однако это вырождение пропадает даже в случае небольшого эксцентриситета и тогда замкнутые моды в виде окружностей, благодаря прецессии вокруг оси z превращаются в незамкнутые спиральные трехмерные кривые, которые наматываются на внутренний сфероид. Верхняя и нижняя точки этих траекторий на каустической поверхности задают еще одну каустическую поверхность η_c, которая будет двуполостным гиперболоидом в случае вытянутого сфероида и однополостным гиперболоидом в случае сплюснутого сфероида. Для величины η_c можно привести простую механическую интерпретацию. В методе эйконала лучи соответствуют траекториям движения точечных бильярдных шаров внутри резонатора без гравитации. В аксиально-симметричных телах проекция углового момента таких шаров на ось z сохраняется, поскольку при отражении от осесимметричной поверхности угловой момент по отношению к оси симметрии не меняется

$$L_z = \rho^2 \dot{\phi} = (x^2 + y^2)\dot{\phi} = const. \tag{7.41}$$

Сохраняется также кинетическая энергия (скорость). Поэтому величина η_c просто равна синусу угла между экваториальной плоскостью и траекторией луча, пересекающей экватор. В то же время η_c определяет максимальное удаление траектории луча от экваториальной плоскости в этой точке направление распространения параллельно экваториальной плоскости. Так называемая биллиардная теория в двух и трех измерениях в наше время чрезвычайно популярна, особенно в исследованиях динамического хаоса. Переход к хаосу в оптическом деформированном резонаторе означает, что поле мод уже нельзя представить как распространяющуюся волну медленно-меняющейся амплитуды и любые квазиклассические приближения с представлением поля в виде конечной суммы лучей становятся неприменимы. Однако нас интересуют стабильные МШГ, распространяющиеся вблизи поверхности, ограниченные внутренней каустикой и прилегающие к экваториальной плоскости, то есть лежащие вблизи стабильной геодезической линии.

В рамках квазиклассической лучевой интерпретации метода эйконала требуется применить условия согласования фаз при циклическом изменении каждой из координатных функций $\mathcal{S}_{\xi,\eta,\phi}$, что приводит к уравнениям для собственных значений задачи:

$$\begin{aligned} &2k_0 \mathcal{S}_\xi|_{\xi_c}^{\xi_s} = 2\pi(q - 1/4), \\ &2k_0 \mathcal{S}_\eta|_{-\eta_c}^{\eta_c} = 2\pi(p + 1/2), \\ &k_0 \mathcal{S}_\phi|_0^{2\pi} = 2\pi|m|, \end{aligned} \tag{7.42}$$

где ξ_s – сфероид, соответствующий поверхности резонатора, q, p, m – целые числа, при этом $p \geq 0$, $q > 1$. При составлении уравнений учитывают особенности поведения фазы луча при касании каустик и отражении от поверхностей. Поле моды сосредоточено в экваториальной области вблизи поверхности резонатора и заполняет пространство, ограниченное этой поверхностью ξ_s и поверхностями каустик ξ_c и $\pm\eta_c$. Поле может быть представлено в виде совокупности лучей, отражающихся от поверхности, касательных к каустических поверхностям и прилегающих к геодезическим линиям на этих каустических поверхностях. Каждое касание каустики добавляет фазу $\pi/2$, а отражение добавляет π.

Эти же уравнения можно получить другим методом, предложенным В. П. Быковым [25], при этом полученные формально решения эйконала приобретают наглядную интерпретацию.

В рамках формализма Келлера [24] интеграл для $\mathcal{S}_\xi$ соответствует разнице в длине двух геодезических путей на каустической поверхности η_c между двумя точками $P_1 = (\xi_c, \eta_c, \phi_1)$ и $P_2 = (\xi_c, \eta_c, \phi_2)$ (рис. 7.5). Первый путь следует от окружности, по которой пересекаются каустические поверхности ξ_c и η_c вдоль η_c к границе поверхности резонатора ξ_s, отражается от нее и возвращается обратно на ту же окружность, а второй – дуга окружности между точками P_1 и P_2. Интеграл для $\mathcal{S}_\eta$ соответствует разнице длин путей, первый из которых идет по поверхности ξ_c от точки P_1', спускается к $-\eta_c$ и возвращается к η_c в точке P_2', а второй дуге окружности между точками P_1' и P_2'. Третий интеграл соответствует просто длине окружности пересечения каустических поверхностей ξ_c и η_c. В итоге, для $\mathcal{S}_\xi$ мы имеем один каустический сдвиг фазы $\pi/2$ на ξ_c и одно отражение от поверхности сфероида, для $\mathcal{S}_\eta$ имеем каустический сдвиг $2 \times \pi/2$ на η_c и на $-\eta_c$, $\mathcal{S}_\phi$ не имеет дополнительных сдвигов фазы. Такая интерпретация является более общей и справедлива и в тех случаях, когда в явном виде не удается выписать решения эйконала.

В случае МШГ, когда $\eta_c \ll 1$ и $\xi_s - \xi_c \ll \xi_s$, $\mathcal{S}_\xi$, $\mathcal{S}_\eta$ можно разложить в ряд и проинтегрировать, используя подстановки

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{\xi^2 - \xi_c^2}{\xi_s^2 - s}, \\ \zeta_c^2 &= \frac{\xi_s^2 - \xi_c^2}{\xi_s^2 - s} = 1 - \frac{a_c^2}{a^2}, \\ \eta &= \eta_c \sin\psi. \end{aligned} \tag{7.43}$$

В итоге, выражая сфероидальную координату ξ_s на поверхности через параметры сфероида:

$$\xi_s = \frac{2b}{d}, \qquad s = \frac{4}{d^2}(b^2 - a^2), \tag{7.44}$$

и раскладывая интегралы модно получить выражения для параметров каустик и ре-

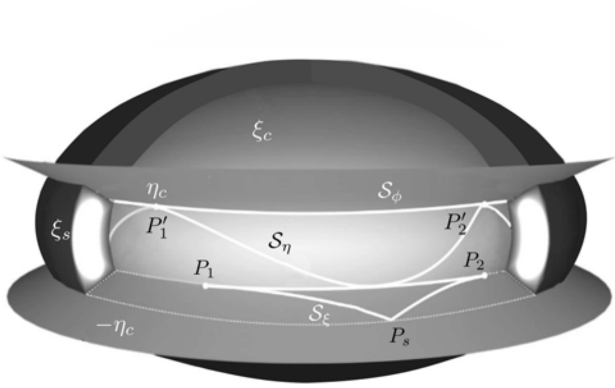


Рис. 7.5: Каустические поверхности и геодезические кривые в лучевой интерпретации МШГ в сфероидальном сплюснутом резонаторе.

зонансных частот [26]:

$$\eta_c^2 = \frac{(2p+1)a}{b} m^{-1} \left[1 - \frac{\beta_q (a^2-b^2)}{2b^2} \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3}\right] + o(m^{-5/3}),$$
$$\zeta_c^2 = -\beta_q \left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} \left[1 + \frac{3\beta_q}{5}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} - \frac{(2p+1)a^3}{6b^3}\frac{2}{m}\right] + o(m^{-5/3}), \tag{7.45}$$

$$nk_0 a = m - \beta_q \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{(2p+1)a}{2b} + \frac{3\beta_q^2}{20}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3}$$
$$-\frac{\beta_q}{12}\frac{(2p+1)a^3}{b^3}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} + O(m^{-1}), \tag{7.46}$$

где для удобства мы ввели коэффициенты $\beta_q = -[\frac{3}{2}\pi(q-\frac{1}{4})]^{2/3}$.

Эти приближения справедливы в том случае, если $\frac{a}{b} < m^{1/3}$, в противном случае необходимо изыскивать другие способы аппроксимации эллиптических интегралов.

Если положить $a = b$, то все шесть членов ряда совпадут с разложением нулей функции Бесселя со следующим отличием: в квазиклассическом разложении на месте нулей функции Эйри α_q стоят аналитические выражения β_q. Это связано с тем, что на каустической поверхности метод эйконала не работает и нужно пользоваться более точным разложением с использованием функций Эйри, поэтому, чтобы улучшить наше решение при больших ℓ, можно и в нем формально заменить β_q на α_q. Воспользовавшись разложением для корней функций Бесселя T_{mq} полученное решение можно переписать в виде:

$$nk_0 a \simeq T_{mq} + \frac{(2p+1)a}{2b} - \frac{\beta_q}{12}\frac{(2p+1)a^3}{b^3}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3}. \tag{7.47}$$

Для приложений полезно рассчитать зависимость расстояния между соседними модами от трех индексов (без учета дисперсии в материале резонатора):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\ell} &\simeq \ell^{-1}\left[1 + \frac{\alpha_q}{3}\left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3}\right], \qquad (7.48)\\
\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial m} &\simeq \frac{b-a}{b}\ell^{-1}\left[1 - \frac{\alpha_q}{6}\frac{(a+2b)(a-b)}{b^2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3}\right],\\
\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial q} &\simeq \frac{\pi}{2\sqrt{-\alpha_q}}\left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3}\left[1 + \frac{4\alpha_q}{5}\left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3}\right].
\end{aligned}$$

Эти приближения имеют точность порядка $O(l^{-2})$.

Произвольную поверхность тела вращения часто можно апроксимировать эквивалентным сфероидом, принимая во внимание, что поле МШГ сосредоточено около экваториальной плоскости, вблизи поверхности резонатора и использовать напрямую полученный результат.

Можно построить также более общую теорию приповерхностных МШГ в случае произвольного выпуклого тела вращения [26]. Для этого нужно записать выражения для длин геодезических кривых на каустических поверхностей. Однако, скажем, расчет таким методом собственных частот тора не приводит к лучшей точности чем приближение тора сфероидом:

$$\begin{aligned}
nk_0 R = m &- \alpha_q\left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{(2p+1)}{2}\sqrt{\frac{R}{r}} + \frac{3\alpha_q^2}{20}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} \qquad (7.49)\\
&- \frac{\alpha_q(2p+1)}{12}\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} + O(m^{-1})\\
= T_{mq} &+ \frac{(2p+1)}{2}\sqrt{\frac{R}{r}} - \frac{\alpha_q(2p+1)}{12}\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} + O(m^{-1}).
\end{aligned}$$

Глава 8

Лучевое приближение и диэлектрическая граница

До сих пор мы применяли лучевой подход и метод эйконала к закрытым резонаторам с непроницаемой границей. Нас, однако, интересуют в этой книге открытые диэлектрические резонаторы, в которых моды распространяются вблизи границы раздела и поле отлично от нуля как внутри, так и снаружи. Рассмотрим самый простой двумерный случай — цилиндрический резонатор с показателем преломления n, бесконечный по z в вакууме с независимыми от z модами TE и TM. На цилиндр падает снаружи узкий световой луч с прицельным расстоянием b (рис. 8.1). Он частично отражается, а частично проходит в резонатор. Угол падения определяется соотношением:

$$\sin\theta_i = b/a, \tag{8.1}$$

где a — радиус цилиндра. Волновое число резонатора в окружающем резонатор пространстве — k_0, импульс $p = \hbar k_0$, момент импульса — $L = \hbar\tilde{L} = \hbar b k_0$. В среде волновое число nk_0. Тангенциальные компоненты волновых векторов на границе раздела должны быть равны: $k_t = \sin\theta_i k_0 = \sin\theta_t n k_0$, отсюда следует закон Снеллиуса,

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_c} = n, \tag{8.2}$$

а также равенство углов падения и отражения. Фактически это закон сохранения импульса, тангенциальная компонента которого не возмущается границей.

Момент импульса фотона внутри резонатора

$$L = \hbar n k_0 a \sin\theta_c = \hbar k_0 a \sin\theta_i = \hbar b k_0, \tag{8.3}$$

то есть момент импульса фотона при переходе через границу в аксиально-симметричной конфигурации сохраняется.

Тангенциальная компонента волнового вектора

$$k_t = \frac{\tilde{L}}{\rho} = k_0\frac{b}{\rho} \tag{8.4}$$

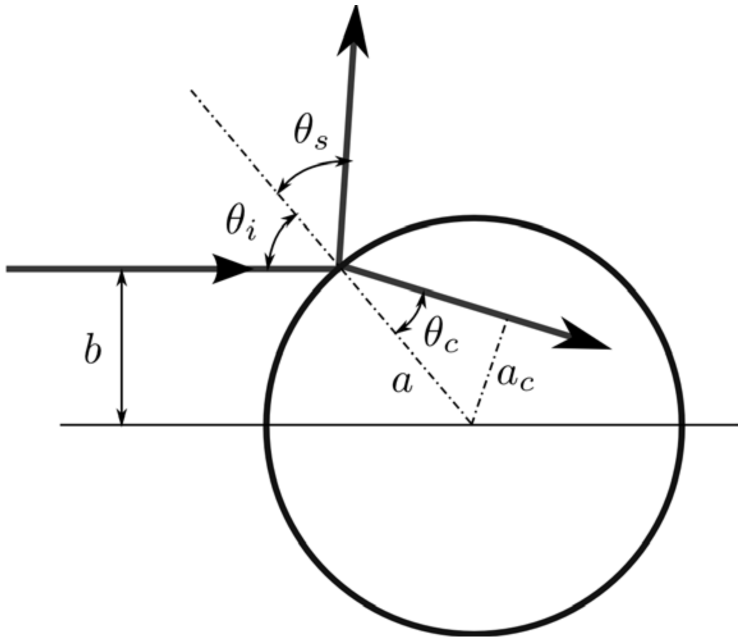


Рис. 8.1: Преломление луча в сфере

непрерывна при переходе через границу раздела. Однако радиальная компонента

$$k_\rho = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \pm n_\rho k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{\rho n_\rho}\right)^2} \tag{8.5}$$

испытывает скачок на границе из-за скачка $n_\rho = \left\{\begin{smallmatrix} n, & \rho<a \\ 1, & \rho>a \end{smallmatrix}\right.$.

8.1 Внешняя каустика и принцип локализации

Минимальное расстояние на которое подходит луч к центру $\rho_{min} = a_c = a\sin\theta_c = b/n < b$ определяет внутреннюю каустику резонатора. Все лучи, испытавшие отражение внутри резонатора касаются этой внутренней каустики и тангенциальны к ней в области касания. Окружность радиуса b играет роль каустики для лучей снаружи цилиндра — их продолжения внутрь касаются окружности. В рассмотренном случае обе каустики лежат внутри цилиндра и волны с заданным моментом импульса могут распространяться везде кроме области $\rho < a_c$. Если мы увеличим прицельный параметр b так, чтобы он стал немного больше a, то ситуация изменится. В этом случае волны с соответствующим моментом импульса $L = \hbar b k_0$, имеющие действительное значение радиального импульса могут распространяться как внутри, так и снаружи цилиндра, но появляется запрещенная зона $a < \rho < b$, в которой волны с таким угловым моментом не могут находиться. При этом оказывается, что лучи внутри цилиндра падают на поверхность под углом $\theta_c > \theta_0$, где $\theta_0 = \arcsin(1/n)$ в геометрической оптике называется углом полного внутреннего отражения. Внутри цилиндра могут распространяться не все такие лучи, а только такие, которые при учете набегов фаз после многократного отражения образуют стационарное фазовые картины, то есть моды резонатора. При этом $\sin\theta_c = a_c/a$, а из рассматривавшегося условия квантования $nk_{0mq}a_c = m$. Этой внутренней каустике соответствует внешняя каустика:

$$b = a_c n = a\sin\theta_c n = \frac{m}{k_{0mq}}, \tag{8.6}$$

где k_{0mq} определяется характеристическим уравнением. Таким образом, каждой моде резонатора ставится в соответствие некоторое расстояние b. Именно на этом расстоянии тангенциальная скорость волны, туннелирующей в окружающее пространство, сравнивается со скоростью света в окружающей среде и происходит излучение так, что ему соответствует каустика b (рис. 8.1). Это утверждение называется "принципом локализации". Верно и обратное. Чтобы возбудить моду в резонаторе лучом из окружающего пространства, надо сфокусировать его тангенциально к внешней каустике b. На практике, однако, такой способ может быть реализован только для очень малых резонаторов с малой излучательной добротностью, и для мод у которых такая внешняя каустика b оказывается очень близко к поверхности a, поскольку для возбуждения резонатора необходимо, чтобы энергия, вводимая в резонатор, превышала потери. В реальных резонаторах лишь очень малая часть энергии моды, обратно пропорциональная излучательной добротности перекрывается с возбуждающим лучом.

Третий случай соответствует условию $bn > a$. В этом случае обе каустики находятся вне цилиндра и моды в резонаторе невозможны. Мы опять пришли к условию существования мод:

$$m/n < k_0 a < m. \tag{8.7}$$

8.2 Обобщение формул Френеля

В приближении геометрической оптики МШГ представляют собой совокупности лучей, отражающихся от внутренней поверхности диэлектрического резонатора под углом большим угла полного внутреннего отражения. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания плоской волны при ее падении на плоскую границу раздела двух сред следуют из известных формул Френеля:

$$\begin{aligned} E_r &= R_F E_i = \frac{Pn_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{Pn_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}E_i, \\ E_t &= T_F E_i = \frac{2\sqrt{P}n_1\cos\theta_i}{Pn_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}E_i. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Здесь E_i, E_t, E_r — амплитуды электрического поля, соответственно, в падающей, прошедшей и отраженной волне, θ_i, $\theta_c = \theta_i$, θ_t — углы падения, отражения и преломления

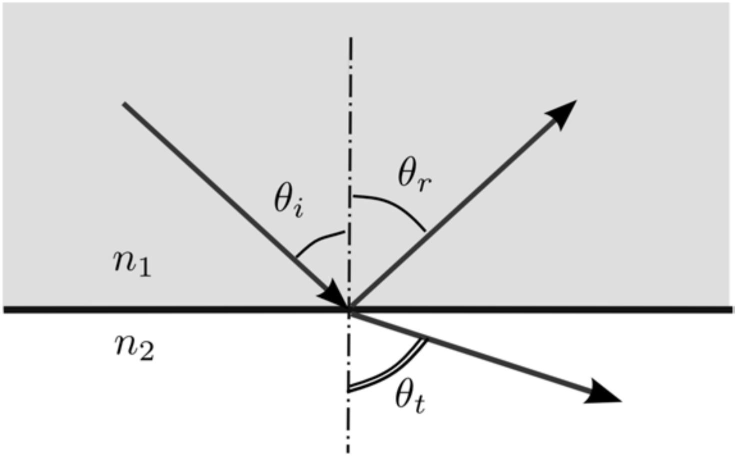


Рис. 8.2: Отражение и преломление света от границы раздела

(рис. 8.2), соответственно, падающей, отраженной и прошедшей волны, n_1 и n_2 — показатели преломления в двух средах, а P — коэффициент, зависящий от поляризации волны. Для волны, у которой вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости падения (поперечноэлектрическая ТЕ-волна) и параллелен границе раздела (такую волну иначе еще иногда называют s-волной), $P = 1$. Для ТМ-волны, у которой вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения и направлен в первой среде под углом падения θ_i к границе раздела (p-волна) $P = (n_2/n_1)^2$. В лучевом приближении обозначения отражающихся от диэлектрической внутренней поверхности волн совпадают с обозначениями мод для сферического резонатора, но противоположны обозначениям для мод цилиндра, что уже обсуждалось в 4-й и 5-й главах. Уравнения Френеля легко получаются из условия непрерывности на границе раздела продольных компонент вектора $\mathbf{E}$ и поперечных вектора $\mathbf{D} = n^2\mathbf{E}$. Угол преломления θ_t связан с углом падения законом Снелля $\sin\theta_i/\sin\theta_t = n_2/n_1$. Положим $n = n_1/n_2$ — показатель преломления резонатора, и, как обычно, не теряя общности будем считать, что снаружи показатель преломления равен единице, а волна снаружи описывается волновым вектором k_0.

Коэффициент, связывающий E_r и E_i в первой из формул Френеля (8.8) имеет смысл амплитудного коэффициента отражения S_{11} в матрице рассеяния (Глава 3), поскольку непосредственно связывает амплитуды поля в падающей и отраженной волне. Связь коэффициента прохождения S_{12} со второй формулой Френеля можно установить из выражений для мощности оптической волны:

$$\begin{aligned} R &= S_{11} = \frac{Pn\cos\theta_i - \cos\theta_t}{Pn\cos\theta_i + \cos\theta_t}, \\ T &= S_{12} = \sqrt{\mathrm{Re}\left[\frac{k_{tz}}{k_{iz}}\right]\frac{E_t}{E_i}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}[\cos\theta_t]}{n\cos\theta_i}}T_F = \frac{2\sqrt{Pn\cos\theta_i \mathrm{Re}[\cos\theta_t]}}{Pn\cos\theta_i + \cos\theta_t}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

8.3 Полное внутреннее отражение

При переходе из более оптически плотную в менее оптически плотную среду ($n > 1$) угол преломления остается действительным лишь при углах падения, удовлетворяющих условию $\sin\theta_i < 1/n$. При углах больших этого критического угла полного внутреннего отражения угол преломления становится комплексным (действительная часть равна $\pi/2$), его косинус $\cos\theta_i = \sqrt{1-(n\sin\theta_i)^2}$, а значит и поперечная составляющая волнового вектора $k_{tz} = k_0\cos\theta_t$ становятся чисто мнимыми, что означает, что волна во второй среде $\propto \exp[-ik_0 n_2\cos\theta_2]$ превращается в затухающую $\propto \exp[-k_0\sqrt{n^2\sin^2\theta_i - 1}]$ и не распространяется на бесконечности. При этом модуль коэффициента отражения R и $\mathcal{R} = |R|^2$ обращаются в 1, а коэффициент прохождения $\mathcal{T} = 0$. Поле во второй среде, определяемое второй из формул Френеля (8.8) не обращается на границе в нуль как раз из-за наличия такой затухающей волны. Этот эффект спадающего поля при полном внутреннем отражении, играет важнейшую роль в свойствах МШГ, поскольку позволяет связываться с такими модами и ответственен за взаимодействие мод с окружающей резонатор средой. В англоязычной литературе такое поле называется словом evanescent — исчезающее.

При полном внутреннем отражении от границы раздела диэлектриков волна проникает во вторую среду, и это проникновение можно описать в лучевом приближении, вводя воображаемую зеркальную границу, отстоящую на расстояние σ_r от реальной границы (рис. 8.2). Это расстояние можно получить из формулы для коэффициента отражения (8.10), полагая, что дополнительный набег фазы в коэффициенте разложения вызван прохождением этого дополнительного пути. Для почти скользящих углов падения в МШГ, когда величина $\cos\theta_i$ мала, раскладывая по ней выражения Френеля, можно получить:

$$S_{11} = e^{i\phi_r} = \frac{Pn\cos\theta_i - i\sqrt{n^2\sin^2\theta_i - 1}}{Pn\cos\theta_i + i\sqrt{n^2\sin^2\theta_i - 1}}, \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned}\phi_r = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{Pn\cos\theta_i}{\sqrt{n^2\sin^2\theta_i - 1}} \simeq \frac{2Pn}{\sqrt{n^2-1}}\cos\theta_i + \frac{Pn^3(3-2P^2)}{3(n^2-1)^{3/2}}\cos^3\theta_i \\ + \frac{Pn^5(15-20P^2+8P^4)}{20(n^2-1)^{5/2}}\cos^5\theta_i + O(\cos^7\theta_i),\end{aligned} \tag{8.11}$$

где $n = n_i/n_t$. Лучи ведут себя так, как если бы они отражались без смещения от поверхности, отстоящей от реальной поверхности на расстояние $\sigma_r = \phi_r/(2kn\cos\theta_i)$ (рис. 8.4).

$$\begin{aligned}\sigma_r = \frac{\phi_r}{2k_0 n\cos\theta} = k_0^{-1}\left[\frac{P}{(n^2-1)^{1/2}} + \frac{Pn^2(3-2P^2)}{6(n^2-1)^{3/2}}\cos^2\theta_i\right. \\ \left. + \frac{Pn^4(15-20P^2+8P^4)}{40(n^2-1)^{5/2}}\cos^4\theta_i + O(\cos^6\theta_i)\right].\end{aligned} \tag{8.12}$$

Благодаря той же причине происходит поперечный эффективный сдвиг отраженной волны $\sigma_p = 2\sigma_r \sin\theta_i$ — этот эффект известен, как эффект Гуса-Хенхена и может быть весьма велик для скользящих углов. Рассмотрение МШГ возможно в простом геометрическом приближении с учетом сдвига Гуса-Хенхена. Полное выражение для сдвига пучка конечной апертуры получается в результате учета интерференции всех отраженных плоских волн из разложения исходного пучка.

Таким образом, если найдено решение для собственных частот резонатора с простыми нулевыми граничными условиями, оно с использованием полученного соотношения может быть расширено и на диэлектрический резонатор с модами TE и TM. Для этого в решение нужно подставить радиус резонатора $\tilde{a} = a + \sigma_r$, увеличенный на величину σ_r. Так, из найденной ранее методом эйконала аппроксимации для собственных частот сфероида следует следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
nk_0 a = nk_0(\tilde{a} - \sigma_r) &= T_{mq} + \frac{(2p+1)a}{2b} - \frac{Pn}{\sqrt{n^2-1}} \\
&- \frac{\alpha_q}{12}\left(\frac{(2p+1)a^3}{b^3} + \frac{2n^3P(2P^2-3)}{(n^2-1)^{3/2}}\right)\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} + O(m^{-1}), \\
&= m - \alpha_q\left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} + \frac{(2p+1)a}{2b} - \frac{Pn}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{3\alpha_q^2}{20}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3} \\
&- \frac{\alpha_q}{12}\left(\frac{(2p+1)a^3}{b^3} + \frac{2n^3P(2P^2-3)}{(n^2-1)^{3/2}}\right)\left(\frac{m}{2}\right)^{-2/3} + O(m^{-1}),
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

где использовано приближение

$$
\cos\theta_i = \sqrt{1 - \ell^2/(nk_0\bar{a})} \simeq \sqrt{-\alpha_q}(\ell/2)^{-1/3}. \tag{8.14}
$$

Из разложения решения уравнения эйконала в сфере можно показать, что квазиклассическое приближение имеет ошибку порядка $O(\ell^{-1})$, такого же порядка должна быть ошибка при подстановке векторных уравнений вместо скалярных при малых сплюснутостях. Таким образом, если размер резонатора составляет около сотни микрометров, то относительная погрешность должна быть порядка 10^{-6}. При больших сплюснутостях, например, в случае дисковых и тороидальных резонаторов, когда $a/b \gg 1$, абсолютная погрешность найденной оценки возрастает, поскольку начинают нарушаться условия применимости разложения интегралов в ряд. В частности, приближение перестает работать, когда $a/b \sim m^{1/3}$. Тем не менее, для типичных тороидальных резонаторов точность оценки частоты составляет обычно много меньше десятой доли процента, что достаточно для идентификации мод.

В реальных резонаторах показатель преломления зависит от длины волны и это следует учитывать при анализе расстояния между модами. Частотное расстояние между фундаментальными модами (ОСД) при этом определяется выражением:

$$
\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{c}{2\pi na}\frac{\frac{\partial \tilde{y}}{\partial m}}{1 - \frac{\lambda}{n}\frac{\partial n}{\partial \lambda}}. \tag{8.15}
$$

Эквидистантность спектра фундаментальных мод характеризуется второй производной по $m = \ell$:

$$(f_{m+1} - f_m) - (f_m - f_{m-1}) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2\omega}{\partial m^2}. \tag{8.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} &= \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial m^2}\left[n+\omega\frac{\partial n}{\partial\omega}\right]^2 - \frac{c}{a}\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial m}\right)^2\left[2\frac{\partial n}{\partial\omega}+\omega\frac{\partial^2 n}{\partial\omega^2}\right]}{\frac{a}{c}\left[n+\omega\frac{\partial n}{\partial\omega}\right]^3}\\ &= \frac{c}{2\pi a n}\frac{\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial m^2}\left(1-\frac{\lambda}{n}\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right)^2 - \frac{1}{\tilde{y}}\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial m}\right)^2\frac{\lambda^2}{n}\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right)^3}.\end{aligned} \tag{8.17}$$

Из этого выражения следует, что дисперсия материала может вблизи некоторых частот компенсироваться дисперсией резонатора при соответствующем подборе его параметров [27], если

$$\tilde{y}\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial m^2}\Big/\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial m}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n}\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{n}\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right)^2 \tag{8.18}$$

Очень грубо эту длину волны можно оценить как:

$$a = \frac{\lambda}{\pi n}\left[\frac{\alpha_q\left(1-\frac{\lambda}{n}\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right)^2}{9\frac{\lambda^2}{n}\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2}}\right]^{3/2} \tag{8.19}$$

8.4 Отражение от неплоской поверхности

При падении луча на плоскую поверхность раздела под углом больше полного внутреннего отражения отражение будет почти полным. Почти, потому что в угловом спектре любого ограниченного пучка, например гауссова, всегда найдутся плоские волны с малыми углами падения. Однако, если поверхность выпуклая с внешней стороны, отражение не будет полным уже по другой причине (рис. 8.4). Эту причину легко понять, а эффект оценить из простых физических соображений. Спадающее поле волны движется вдоль изогнутой поверхности с радиусом кривизны r_k с тангенциальной скоростью $v_t = \omega/k_t = c/(n_i \sin\theta_i)$ (c — скорость света во внешней среде) и при удалении от поверхности фазовые фронты двигаются с постоянной угловой скоростью. Однако на расстоянии

$$\rho_t = r_k\frac{c}{v_t} = r_k n \sin\theta_i \tag{8.20}$$

от центра кривизны эта скорость сравнивается со скоростью света и “хвост” выпадающего поля, дошедший до этой границы излучается по касательной и поэтому не

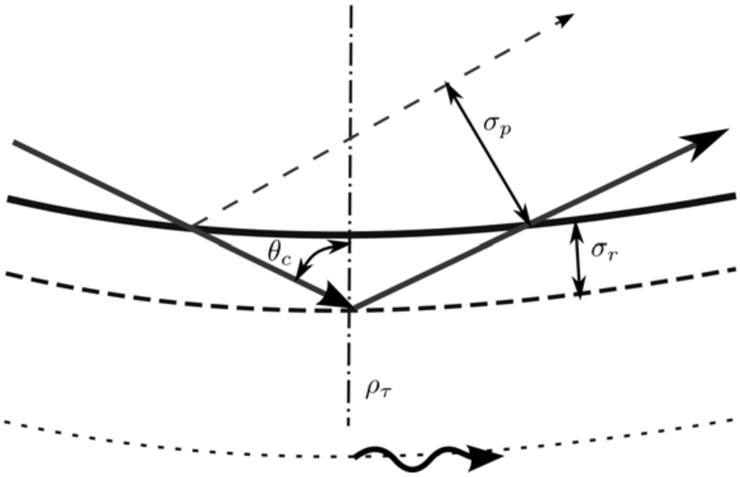


Рис. 8.3: Нарушенное полное внутреннее отражение от выпуклой границы и фиктивная поверхность

может вернуться назад в первую среду. В отличие от отражения от плоскости, убывание выпадающего поля происходит не по экспоненте, но и это распределение легко найти. Оно происходит по закону $E = E_i T_F \exp[i \int k_\rho(\rho) d\rho]$, где

$$k_\rho(\rho) = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k_t r_k}{\rho}\right)^2} = ik\sqrt{\left(\frac{r_k n \sin\theta_i}{\rho}\right)^2 - 1}. \tag{8.21}$$

Как видно, на расстоянии ρ_t затухание прекращается и k_ρ из мнимого становится действительным. Таким образом, беря интеграл, мы получаем окончательное выражение:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= |T_F|^2 \frac{\sqrt{n^2 \sin^2\theta_i - 1}}{n \cos\theta_i} \exp\left[-2k \int_{r_k}^{\rho_r} \sqrt{\left(\frac{r_k n \sin\theta_i}{\rho}\right)^2 - 1}\, d\rho\right] \\
&= \frac{4nP \cos\theta_i \sqrt{n^2 \sin^2\theta_i - 1}}{n^2 - 1 - n^2(1-P)\cos^2\theta_i} e^{-2\Psi(\theta_i)}, \\
\Psi(\theta_i) &= kr_k \left[n \sin\theta_i \operatorname{arccosh}(n \sin\theta_i) - \sqrt{n^2 \sin^2\theta_i - 1}\right].
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Полученное выше выражение (8.22) является лишь приближенным и хорошо выполняется только для углов много больших угла полного внутреннего отражения, то есть для мод с высокой добротностью. Интересно, однако, получить выражение, справедливое для малых и больших углов. Это можно сделать, исследовав поведение цилиндрической или сферической [28] волны на границе, соответственно, диэлектрического цилиндра или сферы или рассмотрев более общий случай отражения от искривленной поверхности в каустическом приближении. При этом поле описывается цилиндрическими или сферическими функциями Бесселя (см. главы 4 и 5). Падающая волна представляется в виде функции Ханкеля первого рода, а отраженная в виде функции Ханкеля второго рода, которые в сумме дают внутреннее распределение поля в виде функции Бесселя коплексного аргумента. При этом мнимая часть постоянной распространения как раз и отвечает за отличие коэффициента отражения от 1 (излучательные потери резонаторов МШГ).

$$\mathcal{R} = R^2 = e^{4n\Im(k)r_k\cos\theta_i}. \tag{8.23}$$

Поскольку аргумент функции Бесселя определяется постоянной распространения, а индекс m задает азимутальную постоянную распространения, угол падения просто равен:

$$\theta_i = \frac{m}{n\Re(k)r_k}. \tag{8.24}$$

и, таким образом, коэффициент отражения определяется из решения характеристического уравнения (4.38)

$$F(\theta_i) = \frac{J_m'(\tilde{y})}{PnJ_m(\tilde{y})} = \frac{H_m^{(1)\prime}(\tilde{x})}{H_m^{(1)}(\tilde{x})}, \tag{8.25}$$

В работе [28] выписаны полные выражения для амплитудных коэффициентов матрицы рассеяния при отражения от сферической поверхности. Удобное выражение для отражения по мощности получено в работе [29] с помощью аппроксимаций функций Бесселя:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \left|\frac{\cos\theta_i + inF(\theta_i)}{\cos\theta_i - inPF(\theta_i)}\right|^2, \\
F(\theta) &\simeq i\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}\left(1 + \frac{1}{n^2\sin^2\theta}\left(\frac{K_{2/3}(\zeta)}{K_{1/3}(\zeta)} - 1\right)\right), \\
\zeta &= -i\tilde{x}\frac{(1-n^2\sin^2\theta)^{3/2}}{3n^2\sin^2\theta}.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

На рис.8.4 показан расчет по приведенным формулам коэффициента отражения от изогнутой поверхности. Хорошо видно, что в этом случае уже не существует “угла полного внутреннего отражения” и коэффициент отражения из-за излучения для всех углов падения меньше единицы.

8.5 Излучательная добротность тел вращения

Чтобы оценить собственную добротность МШГ в квазиклассическом приближении, нужно учесть потери внутренних лучей при каждом отражении от поверхности резонатора. Добротность определяется простым выражением [2]:

$$Q = \frac{2\pi n}{\alpha\lambda}, \tag{8.27}$$

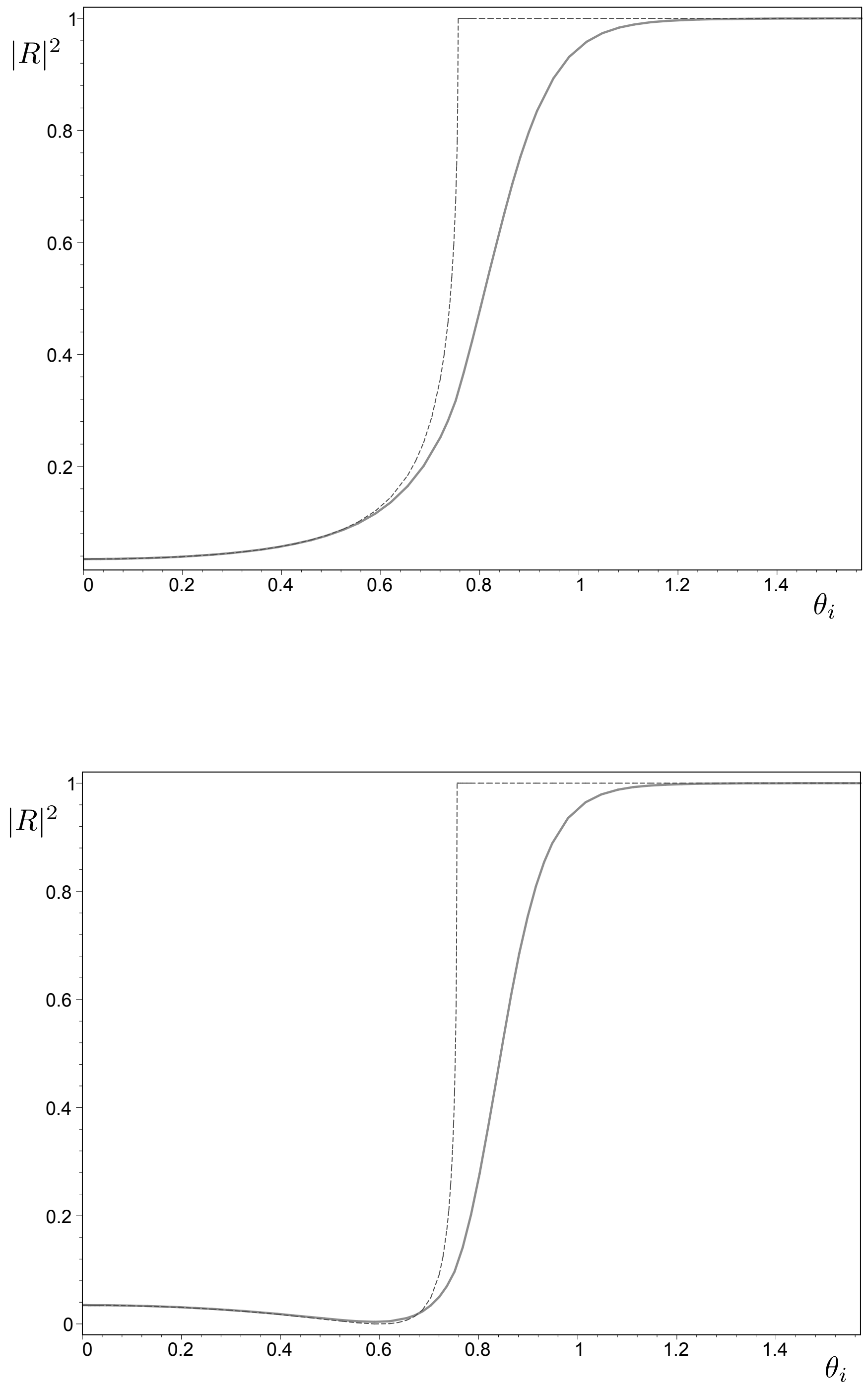


Рис. 8.4: Коэффициент внутреннего отражения по мощности от изогнутой поверхности для $\tilde{x} = 2\pi r_k/\lambda = 20$, $n = 1.457$. Слева — для волны TE, справа — для волны TM. Пунктиром показан коэффициент отражения от плоской поверхности, рассчитанный по формулам Френеля

где α соответствует потерям на единицу длины пути луча.

Путь можно представить как множество отрезков ломаной, длина каждого из которых $L_n = 2r_k \cos\theta$, где r_k — радиус кривизны геодезической кривой на поверхности. Пусть потери энергии при отражении на данном отрезке пути равны $\mathcal{T}(\theta)$ и $\alpha_n = \mathcal{T}(\theta, r_k)/L_n$. Усредняя α_n по одному витку геодезической кривой, касающейся верхнего каустического конуса на расстоянии z_c от экватора, спускающегося вниз до нижнего каустического конуса $-z_c$ и возвращающегося назад, получим полные потери:

$$Q = \frac{2\pi n L_g}{\lambda}\left[\oint \frac{\mathcal{T}(\theta)}{2r_k(\theta)\cos\theta} dl\right]^{-1} = \frac{2\pi n L_g}{\lambda}\left[\int_{-z_c}^{z_c} \frac{\mathcal{T}(\theta)}{r_k(\theta)\cos\theta}\frac{dl}{dz}dz\right]^{-1}. \tag{8.28}$$

Это выражение можно использовать для оценки добротности в произвольных диэлектрических резонаторах с МШГ, причем не только для вычисления излучательной добротности, но и для расчета потерь на рассеяние и поглощение на поверхности. Потери на излучение при отражении от изогнутой поверхности были найдены выше, их можно также получить, решая модельную задачу в цилиндре, когда $r_k = a$ и $\cos\theta_0 = \sqrt{1 - m^2/(kna)^2} \simeq \sqrt{-\alpha_q}(m/2)^{-1/3}$ являются постоянными моды:

$$\mathcal{T}_0 = \frac{4\pi na\cos\theta_0}{\lambda Q_0}. \tag{8.29}$$

При использовании приближений Дебая для функций Неймана в выражении для излучательной добротности, полученном из точного уравнения сферы, получается то же самое выражение (8.22).

Добротность можно вычислить, если известно $\mathcal{T}(\theta)$ и аналитический вид поверхности вращения. используя соотношения аналитической геометрии и

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dz} &= \frac{\rho(z)\sqrt{1+\rho'(z)^2}}{\sqrt{\rho^2(z)-\rho_m^2}}, \\ L_g &= 4\int_0^{z_c} \frac{\rho(z)\sqrt{1+\rho'(z)^2}}{\sqrt{\rho^2(z)-\rho_m^2}}dz, \\ \cos(\theta) &\simeq \sqrt{2\sigma_c/r_k}, \end{aligned} \tag{8.30}$$

где σ_c — нормальное расстояние от поверхности тела вращения до каустической поверхности.

На рисунке 8.5 показана зависимость излучательной добротности от параметра сплюснутости сфероида для TE и TM моды при $l = m = 100$ (фундаментальная мода) и $l = 100$, $m = 98$. Сплюснутость $f = 0$ $(a = b)$ соответствует идеальной сфере.

Задание 21. *Используя полученные выражения, найдите формулы для излучательной добротности сфероидального резонатора.*

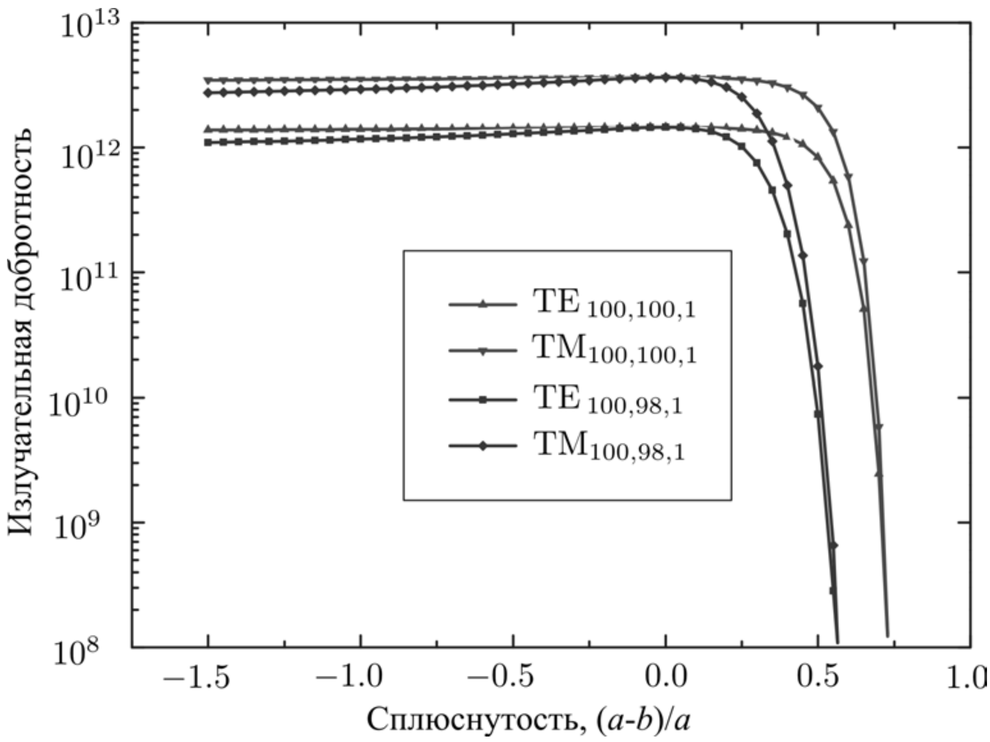


Рис. 8.5: Излучательная добротность сфероида

Глава 9

Возбуждение мод шепчущей галереи

С точки зрения простейшей геометрической оптики, если внутри сферического резонатора луч циркулирует так, что падает на его поверхность под углом, большим чем угол полного внутреннего отражения, то такой луч никогда не сможет покинуть резонатор. Из соображений взаимности, если луч, циркулирующий внутри, не может выйти из резонатора, то и никакой луч, вошедший в резонатор, не может превратиться в такую бесконечно долго циркулирующую волну. Следовательно, для рассмотрения возбуждения МШГ необходимо использовать менее грубые приближения. Согласно принципу локализации, рассмотренному в предыдущей главе, возбуждение мод в резонаторе возможно свободными лучами, при этом, парадоксальным образом, входной луч должен проходить мимо резонатора и даже, чтобы возбудить фундаментальную моду, на весьма порядочном расстоянии от его поверхности, сравнимом с радиусом резонатора.

Резонаторы малого по сравнению с длиной волны размера действительно можно возбуждать свободными гауссовыми пучками и плоскими волнами [рис. 9.1(a)]. Именно так были открыты высокодобротные морфологические резонаторы в каплях аэрозолей. Главным условием для такого возбуждения является то, что излучательная добротность таких резонаторов должна быть сравнима с собственной добротностью (точнее, коэффициент прохождения при однократном отражении луча от внутренней поверхности должен быть сравним с другими потерями луча за один обход резонатора). В противном случае энергия в резонаторе не может накопиться. Поскольку излучательная добротность нарастает почти экспоненциально с размером резонатора и при этом требуемое прицельное расстояние также возрастает, этот метод для резонаторов с диаметром большим, чем несколько десятков микрон — неприменим. Действительно,

Задание 22. *Оцените коэффициент однократного прохождения для резонатора из плавленого кварца диаметром 15 мкм и 100 мкм.*

К потерям на излучение в окружающее пространство приводит также рассеяние на внутренних и поверхностных неоднородностях и на отдельных дефектах, а значит, согласно принципу взаимности через эти же неоднородности можно возбуждать и моды резонаторов. Для возбуждения резонансов таким способом нужно использовать сильно сфокусированные уже на поверхности (для поверхностных неоднородностей) или на некоторой глубине (в случае объемного рассеяния) пучки с широким угловым спектром. Эффективность возбуждения при этом будет невелика.

Связь возможна и через отдельные рассеивающие центры рис. 9.1(c). Исторически впервые с кварцевым шариком удалось связаться именно потому, что на поверхность в области моды попала светорассеивающая пылинка [30].

Интересен метод связи рис. 9.1d), при котором резонатор изготавливается из специального германиевого стекла, способного изменять в небольших пределах и запоминать изменения показателя преломления под действием ультрафиолетового облучения. На часть боковой поверхности готового резонатора ультрафиолетовым лучом с помощью маски наносится периодическая структура с пространственным периодом $\Lambda = \lambda/(n - \sin\alpha)$ (α — требуемый угол падения возбуждающего сфокусированного луча), также обеспечивающая согласование со свободным лазерным пучком [31].

Большой интерес с точки зрения осуществления эффективной связи свободных пучков и высокодобротных МШГ представляют моды в деформированных неосесимметричных резонаторах. В таких резонаторах уже при малых дипольных деформациях угол внутреннего отражения бегущей моды может в процессе распространения сильно варьироваться и в определенных точках резонатора, определяемых его геометрией, близко подходить к углу полного внутреннего отражения. В результате излучение таких резонаторов в дальней зоне носит направленный характер, а поэтому такие моды могут возбуждаться эффективно пучками, исходящими из этих направлений. Экспериментально такое возбуждение с эффективностью до 45% наблюдалось в слабо неосесимметричных резонаторах, полученных сплавлением двух микросфер.

Наиболее гибкими элементами связи для МШГ являются те, которые основаны на эффекте спадающего поля. Вспомним квазиклассическое приближение и эквивалентный потенциал, образующий барьер для фотонов. Для того чтобы, тем не менее, связаться с резонатором надо каким-то образом уменьшить потенциальный барьер, создать в нем что-то типа окна, через которое можно было получить доступ к модам. Если поднести близко к поверхности резонатора диэлектрик с показателем преломления n_c, в этом месте эффективный потенциал опустится (рис. 9.2) и фотоны будут туннелировать в диэлектрик через гораздо более тонкий барьер. Этот эффект носит название нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО) и на нем основано большинство эффективных элементов связи, используемых в настоящее время для связи с МШГ. Коэффициент пропускания барьера, а значит и нагруженная добротность при этом будут экспоненциально зависеть от расстояния между поверхностью резонатора и элементом связи, и меняя это расстояние пропускание и добротность можно менять в широких пределах, оптимизируя связь. Таким образом, создается то самое требуемое “окно”, пропускание которого можно легко регулировать.

Для простой связи МШГ с лазерными пучками наиболее естественным представляется использование, широко применяемого в интегральной оптике для возбуждения мод в планарных волноводах, призменного элемента связи [32] рис. 9.1(e). Для возбуждения резонатора луч лазера с помощью объектива вводится в призму и фокусирует-

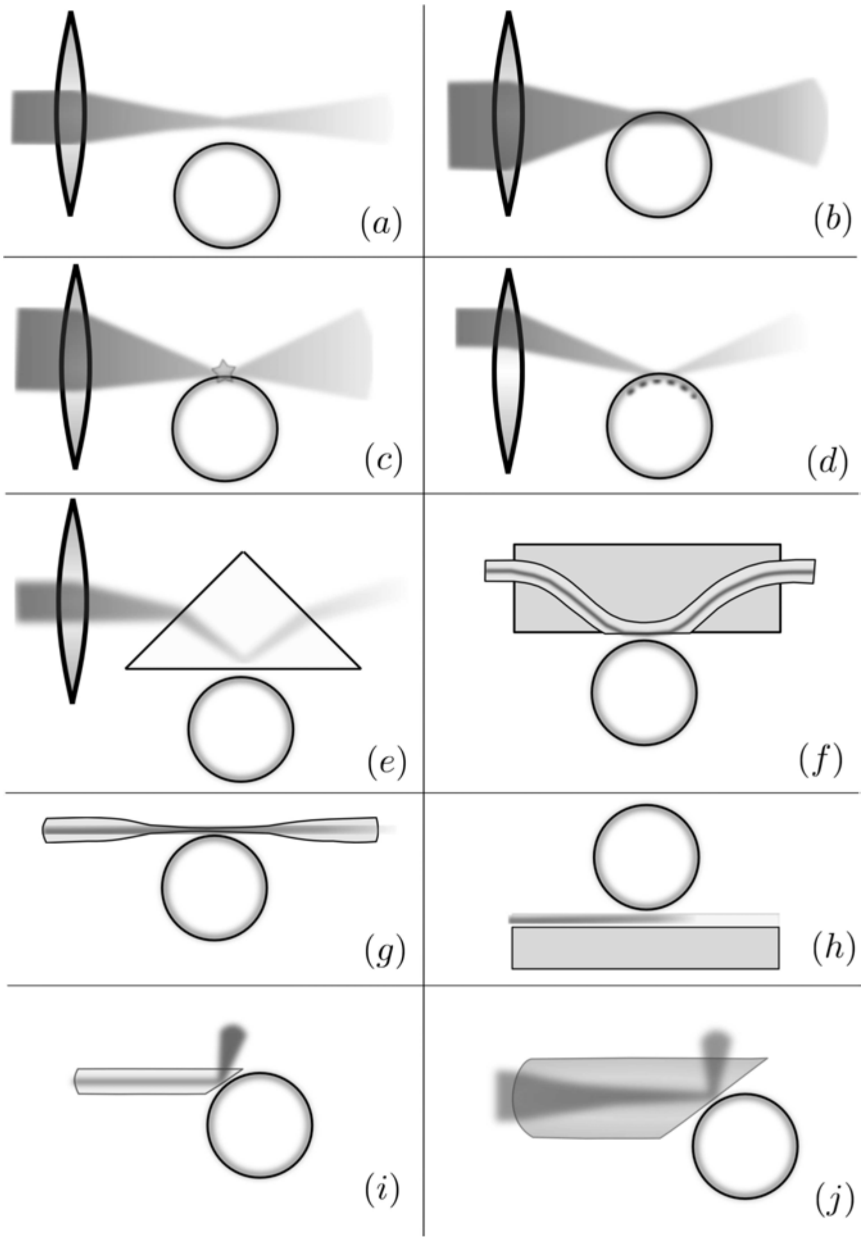


Рис. 9.1: Методы возбуждения МШГ: (a) — туннелирование гауссовых пучков; (b) — связь через поверхностные и внутренние неоднородности; (c) — связь через отдельные рассеивающие центры; (d) — наведенная модуляция показателя преломления; (e) — связь с помощью призмы; (f) — сошлифованное волокно; (g) — растянутое волокно; (h) — планарный и интегральный волновод; (i) — срезанное волокно; (j) — срезанная градиентная линза

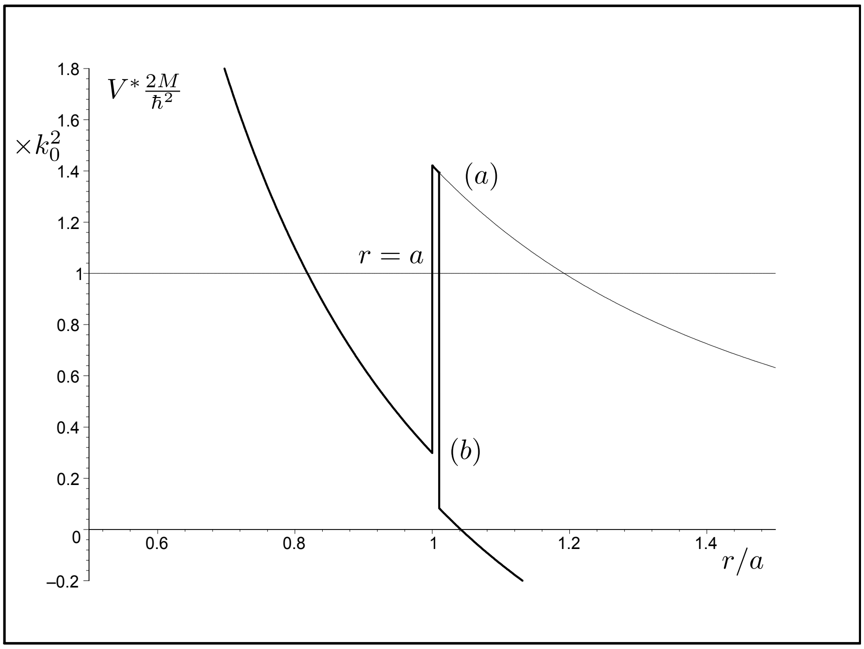


Рис. 9.2: Модификация потенциального барьера для фотонов моды в месте поднесения к резонатору диэлектрического элемента связи. (a) — вид потенциала для свободной сферы. (b) — вид потенциала в месте поднесения элемента связи.

ся на внутренней поверхности, на которой происходит полное внутреннее отражение, а резонатор подносится к области фокального пятна снаружи на расстояние около $0.1 - 0.5$ мкм.

Связь через сошлифованный сбоку до сердцевины участок волокна, предварительно вклеянного или вплавленного в в массиве рис. 9.1(f) (аналогично тому, как это делается в волоконных ответвителях) оказалась неэффективной. Этот трудоемкий в изготовлении элемент связи вытеснен другим, гораздо более удобным и эффективным волоконным элементом связи, в котором связь с сердцевиной волокна обеспечивается на растянутом утончающемся участке оголенного волокна [33] 9.1(g) (на рисунке область растянутости волокна для наглядности сильно преуменьшена, в действительности эта область во много раз превышает размеры резонатора, см. фото 9.3 и составляет несколько сантиметров). На этом участке уменьшившаяся в диаметре ступенчатая сердцевина волокна с большим показателем преломления уже не может удерживать моды и они переходят в моды оболочки, спадающие в окружающее пространство, и в некоторой области перетяжки с оптимальным диаметром обеспечивается синхронизм с модами резонатора. При дальнейшем утолщении волокна моды из оболочки опять переходят в сердцевину. Поскольку толщина растянутого участка изменяется в широких пределах, оптимизировать связь можно смещая резонатор вдоль волокна. Такой элемент связи имеет малые потери ввода и в одномодовом режиме легко обеспечивает режим критической связи. Было показано, что параметр эффективность ввода

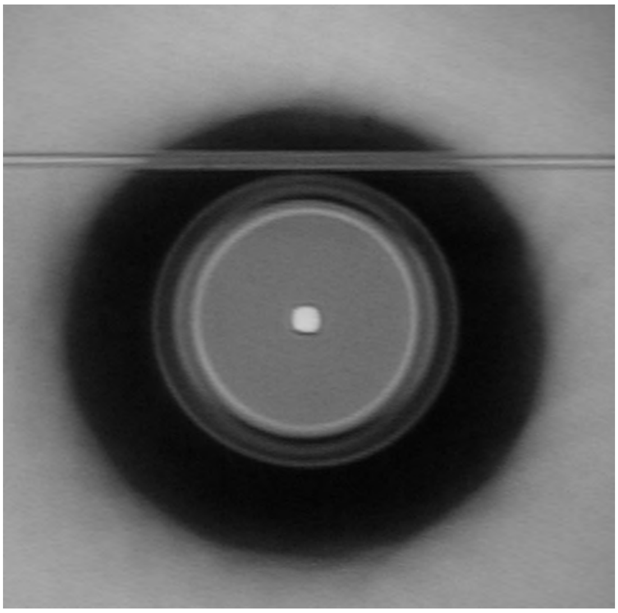


Рис. 9.3: Возбуждение тороидального микрорезонатора диаметром 40 мкм растянутым волокном. (Институт квантовой оптики, г. Гархинг (Германия), группа проф. Т. Хэнша, Лаборатория фотоники и квантовых измерений Т. Киппенберга. Фото автора).

мощности в требуемую моду резонатора может достигать в таких элементах 99.97%.

Достаточно эффективная связь (десятки процентов) с высокодобротными микросферами было продемонстрировано с планарными интегральными волноводами. Планарные волноводы обеспечивает дополнительную гибкость по сравнению с волоконным световодом поскольку позволяет свободно манипулировать двухмерными оптическими пучками.

Другой простой и очень эффективный и удобный в настройке способ связи — через торец косо срезанного под оптимальным углом волокна (“поросячий хвостик”) рис. 9.1(i).

Некоторой комбинацией призменного и волоконного элемента связи является связь через срезанный под углом в области фокуса градан (градиентная линза для свободных пучков, представляющая собой стержень с градиентным по сечению распределением показателя преломления, фокусное расстояние такой линзы зависит просто от длины стержня) рис. 9.1(j). Такой элемент связи, как бы совмещающий в себе и призму, и объектив недавно был успешно применен в схеме стабилизации полупроводникового лазера с помощью микрорезонатора.

9.1 Связь с призмой

Рассмотрим возбуждение сферического резонатора с МШГ пучком, падающим на внутреннюю поверхность призмы под углом, большим угла полного внутреннего от-

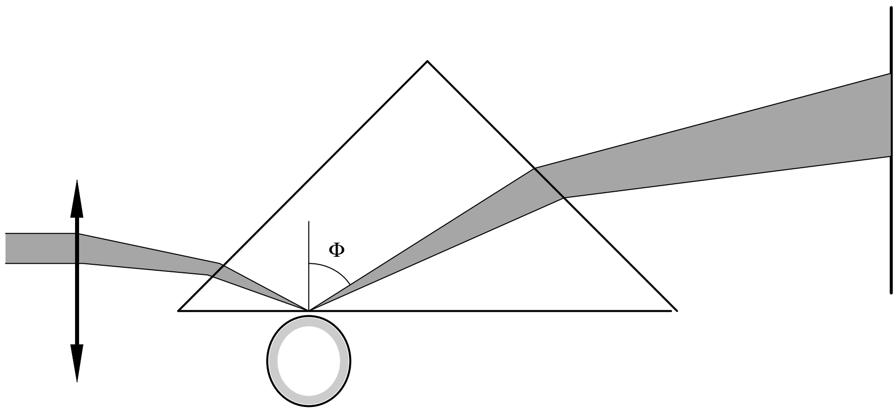


Рис. 9.4: Схема возбуждения МШГ с помощью призмы

ражения рис. 9.4. Резонатор при этом помещается на некотором малом расстоянии $d \sim \lambda$ от призмы так, что внешнее поле мод ШГ существенно проникает в полупространство призмы. Априори очевидно, что для эффективного взаимодействия с модами ШГ возбуждающий пучок должен быть сфокусирован в области "касания".

С точки зрения обычной геометрической оптики, если угол падения луча, отражающегося от внутренней поверхности резонатора равен θ_i, то фундаментальные моды типа $TE_{\ell\ell q}$ и $TM_{\ell\ell q}$ могут эффективно возбуждаться с помощью гауссового пучка (рис. 9.4), сфокусированного на внутреннюю поверхность призменного элемента связи (с углом преломления n_c, большим чем показатель преломления резонатора n_m) в области вблизи резонатора под оптимальным углом $\Phi = \arcsin(n_m/n_c)$. Это условие следует из равенства тангенциальных компонент волнового вектора. Для каждой моды можно рассчитать добротность связи (нагружение) Q_c, которая характеризует потери энергии моды вследствие связи с излучательными модами полупространства призмы. Далее будем называть такие моды пространственными (угловыми) спектрами переизлучения МШГ с призменным элементом связи. Оптимальная связь достигается, если собственная добротность резонатора равна добротности связи и если угловой спектр возбуждающего пучка совпадает с угловым спектром переизлучения. В работе [34] было показано, что пространственный спектр переизлучения моды $Y_{\ell\ell}$ представляет собой гауссов луч, совпадающий с плоскостью ориентации фундаментальной моды в сфере. Согласно принципу взаимности, гауссов луч с оптимальными угловыми апертурами (оптимальный луч должен быть эллиптическим) и углом падения, совпадающий по параметрам со спектром переизлучения, хорошо возбуждает фундаментальную моду резонатора в плоскости падения.

Ситуация меняется для сфероидального резонатора (идеальных сферических резонаторов не бывает) любая мода $Y_{\ell\ell}$, наклоненная по отношению к экватору сфероида, будет прецессировать, и единственная устойчивая фундаментальная мода может быть возбуждена лишь в плоскости экватора сфероида резонатора. В соответствии с предшествующим анализом можно предположить, что гауссовы пучки, наклоненные под углом $\Theta = \pm \arccos(m/\ell)$, возбудят невырожденную моду типа $Y_{\ell m}$. Другое очевидное следствие — *появление второго выходного луча* в пространственном спектре переизлучения моды $Y_{\ell m}$, симметричного входному лучу относительно экваториальной плоскости сфероида. Таким образом, полный спектр излучения будет состоять из двух гауссовых пучков (двух максимумов) исходящих из области контакта. Один луч, совпадающий по направлению с возбуждающим оптимальным лучом, будет излучаться через целое число периодов прецессии, а другой — через полуцелое.

Выражения для пространственных спектров переизлучения резонатора, связанного с призмой, могут быть найдены и непосредственно как результат дифракции Фраунгофера ближнего поля моды, проникающего в призму из-за нарушенного полного внутреннего отражения. Размер зоны излучения определяется масштабом спадания поля вне резонатора, которое описывается функцией Ханкеля первого рода $h_\ell^{(1)}(k_0 r)$, но при больших порядках ℓ может быть аппроксимировано экспонентой $\exp(-d/r^*)$, где d — расстояние от поверхности резонатора и $r^* = \lambda/(2\pi\sqrt{n_m^2 - 1})$. Фактически, область связи с резонатором является гауссовым окном $W(y,z) = \exp[-\frac{y^2+z^2}{2ar^*}]$ для спектрального преобразования ближнего поля моды в дальней зоне. Для больших значений $\ell - m$, присоединенные функции Лежандра в этом окне могут быть аппроксимированы следующим образом (Глава 5):

$$\begin{aligned} P_\ell^m(\cos\theta) &\simeq c_{\ell m}\cos(\mu(\theta - \pi/2) + (\ell - m)\pi/2), \\ \mu^2 &= \ell(\ell+1) - m^2, \\ c_{\ell m} &= \begin{cases} \frac{(\ell+m-1)!!(\ell-m-1)!!}{(\ell-m)!}, & \text{при четных } \ell - m, \\ \frac{(\ell+m)!!(\ell-m)!!}{(\ell-m)!}, & \text{при нечетных } \ell - m. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Из теории дифракции известно, что в дальней зоне поле можно найти зная распределения поля на поверхности экрана, в данном случае на поверхности призмы, с помощью двумерного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} &F(\sqrt{n_c^2 k_0^2 - k_y^2 - k_z^2}, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint U(x=0,y,z)e^{-ik_y y - ik_z z}dy\,dz \\ &U_{m=\ell} \propto e^{i\ell y/a - z^2\ell/(2a^2) - (y^2+z^2)/(2ar^*)}, \\ &U_{m\neq\ell} \propto e^{imy/a - (y^2+z^2)/(2ar^*)}\cos(\mu z + \pi(\ell - m)/2). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Интегралы Фурье можно вычислить, воспользовавшись стандартным интегралом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-k^2\sigma^2/2}. \tag{9.3}$$

Для определенности взято распределение поля для моды TE и лишь основная компонента поля. Таким образом, выражая компоненты волнового вектора через углы

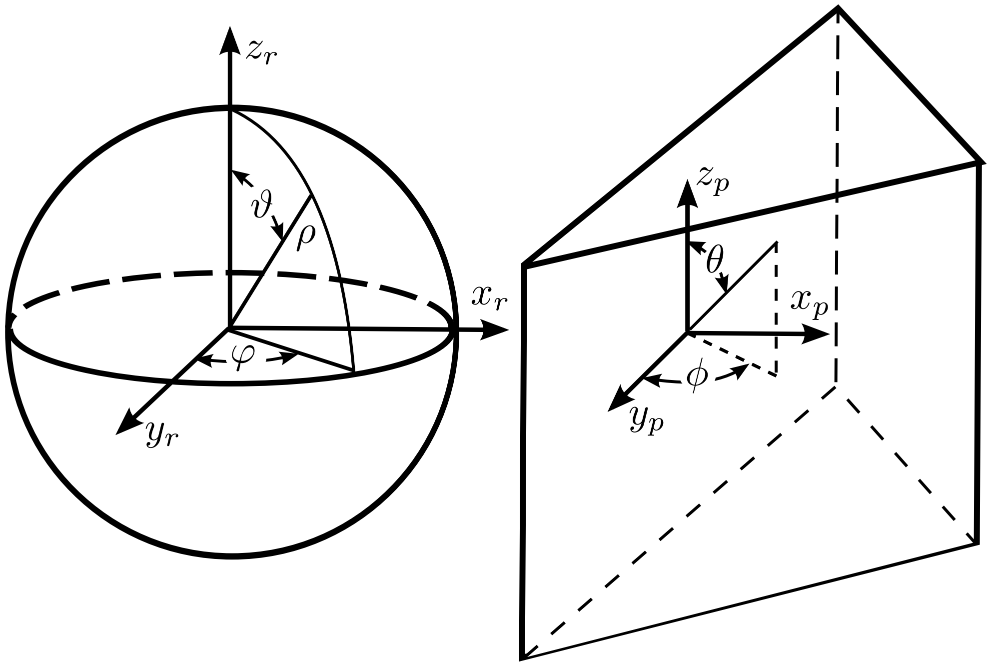


Рис. 9.5: Система координат в микросфере и элементе связи

(рис. 9.5), получаем

$$U(\Theta,\Phi) \propto \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(y,z) e^{-in_c k \sin\Phi\cos\Theta z - in_c k \sin\Phi \sin\Theta x} dy\, dz = \tag{9.4}$$
$$2\pi a r^* e^{-(m-n_c ka \sin\Phi\cos\Theta)^2 r^*/(2a)} \times$$
$$\left(e^{-(\mu - n_c ka \sin\Phi\sin\Theta)^2 r^*/(2a)} + (-1)^{\ell-m} e^{-(\mu+n_c ka\sin\Phi\sin\Theta)^2 r^*/(2a)}\right).$$

Вычисление интеграла (при $\ell > 1$ и $k_x, k_y < k$ — что справедливо при $n_c > n_m$, при интегрировании можно перейти к бесконечным пределам) дает два гауссовых луча (9.6) с одинаковыми фазами для четных $\ell - m$ и в противофазе для нечетных $\ell - m$. Поляризация лежит при $\ell - m \ll \ell$ примерно в плоскости излучения для мод TM и перпендикулярно ей для мод TE. Дополнительный учет второй компоненты поля E_ϕ даст дополнительный, малый при $\ell - m \leq m$ поворот поляризации.

Задание 23. *Получите выражения для углов и угловых апертур (все внутри призмы)* $\Theta_0, \Phi_0, \Delta\Theta_0, \Delta\Phi_0$ *для случаев* $\mu \gg 1$ *и* $\ell = m$*:*

$$U(\Theta,\Phi) \propto e^{-\frac{(\Theta-\Theta_0)^2}{2\Delta\Theta^2} - \frac{(\Phi-\Phi_0)^2}{2\Delta\Phi^2}}. \tag{9.5}$$

Использованные приближения для полиномов Лежандра справедливы если $\mu > \sqrt{\ell}$, т.е. когда зона связи покрывает только малую часть распределения по углу θ.

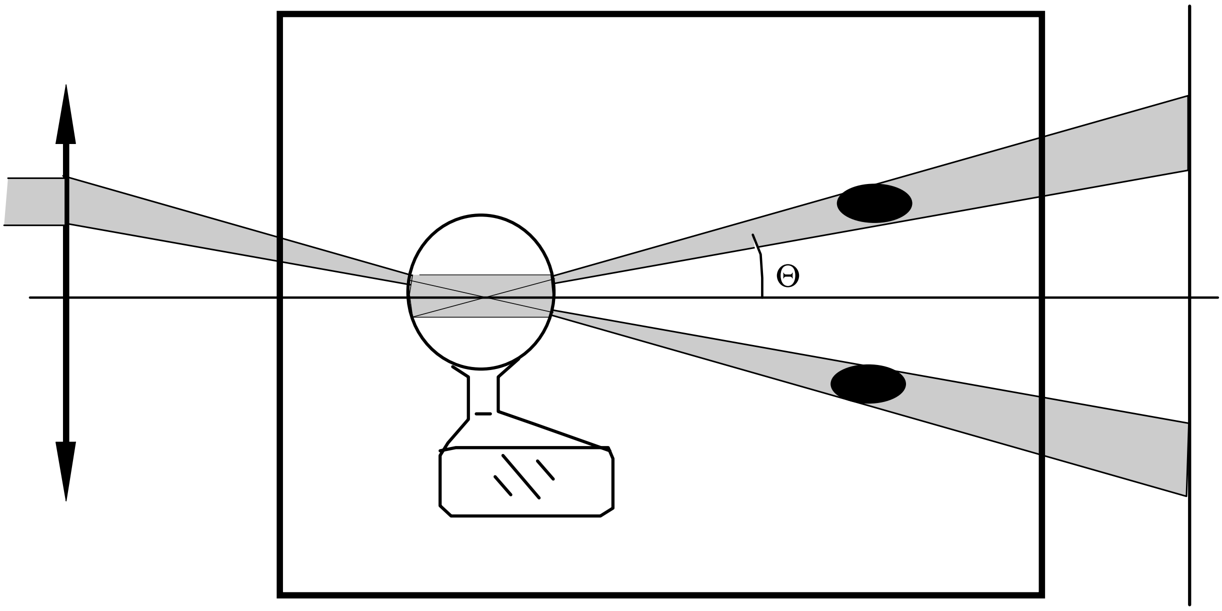


Рис. 9.6: Связь с МШГ в диэлектрическом сфероиде. Входной луч связывается с копланарной фундаментальной циркулярной модой $Y_{\ell\ell}$. Прецессируя вокруг оси симметрии сфероида (совпадающей с осью ножки), фундаментальная мода $Y_{\ell\ell}$ формирует стационарную моду $Y_{\ell m}$ и образует два гауссовых луча переизлучения в призму.

Однако, прямое численное интегрирование без использования приближения (9.1) показывает, что количественные оценки для углов и апертур существенно не меняются и двулучевые спектры излучения характерны для всех мод вплоть до $\ell - m = 1$ и вплоть до малых $\ell \sim 50$. Поскольку волновое число k зависит от q и ℓ (и в меньшей степени от m при малой эллиптичности), углы Θ_0, Φ_0 зависят от всех трех индексов. Таким образом, МШГ могут быть идентифицированы по их пространственным спектрам излучения, хотя в случае больших $\ell \gg 1$ зависимости от $p = \ell - m$ и особенно q являются довольно слабыми и идентификация требует большой точности картирования распределения поля.

Это свойство призменного элемента связи в принципе может найти применение при создании устройств мультиплексирования со спектральным разделением каналов для линий оптической связи.

Добротность связи с нагрузкой проще всего найти из соотношения полной энергии $\mathcal{E}$ моды и мощности P излучаемой в призму:

$$Q_c = \frac{\omega\mathcal{E}}{P} = \frac{k_0 n_m^2}{n_c}\frac{\int\limits_{\mathbf{M}} |\mathbf{E}|^2 dv}{\int\limits_{\mathbf{C}} |\mathbf{E}|^2 ds}. \tag{9.6}$$

Излучаемую мощность можно найти, проинтегрировав угловой спектр по всем углам, или, возвращаясь к координатному представлению, проинтегрировать квадрат поля по поверхности призмы:

$$P = \frac{c\epsilon_0 n_c}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int\int F^2(k_y, k_z) dk_y dk_z = \frac{c\epsilon_0 n_c}{2} \int\int |E|^2 dydz \tag{9.7}$$

Используя для аппроксимации формулу Стирлинга, окончательно получаем [32] (для простоты в окончательном выражении положено $n_c \simeq n_m = n$):

$$Q_c \simeq 2 \left(\frac{n^2 - 1}{n} \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^{3/2} e^{2kd\sqrt{n^2-1}} \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{1+\sqrt{n^2-1}}}, \text{ при } \ell = m, \\ \sqrt{2}\pi\sqrt{\ell - m}, \text{ при } \ell > m \end{cases} \tag{9.8}$$

9.2 Теория связи с высокодобротными МШГ

Все эффективные системы ввода излучения в резонатор основаны на эффективном обмене энергии между направляемой циркулирующей в резонаторе волной полного внутреннего отражения (модой ШГ) и спадающим полем моды волновода или пятна полного внутреннего отражения элементе связи.

Эффективную связь можно ожидать при выполнении двух важных условий: 1) существенное перекрытие полей двух волн, моделирующих, соответственно, моду ШГ и моду элемента связи и 2) фазовый синхронизм волн в резонаторе и элементе связи (оптимизация эффективности связи, впрочем, как показывает конкретный анализ некоторых систем, может привести к некоторому отступлению от синхронизма за счет выигрыша в перекрытии).

9.3 Простая модель связи

Рассмотрим возбуждение отдельной высокодобротной МШГ с высокой добротностью с помощью N бегущих мод в элементе связи [35]. При этом элемент связи может иметь бесконечное число пространственных мод ($N = \infty$), как, например, призма [34, 32, 35] или планарный волновод, или только одну моду ($N = 1$, одномодовая связь), связанную с резонатором, как в растянутом волокне [33] или интегральном полосковом волноводе. Рассмотрим вначале простое описание системы, состоящей из резонатора и элемента связи, с помощью сосредоточенных параметров в квазигеометрическом приближении.

Пусть $A_0(t)$ — амплитуда циркулирующей моды полного внутреннего отражения в резонаторе (см. рис. 9.7), моделирующая МШГ. Пусть мощность накачки распределена между ортонормированными модами в элементе связи так, что $B_k(t)$ представляет амплитуду моды k ($1 \leq k \leq N$) и $B^{in}(t)$ - медленно меняющаяся амплитуда возбуждающего поля, так что $\sum |B_k^{in}(t)|^2 = |B^{in}(t)|^2$ определяет полную мощность накачки Положим, что перекрестная связь между разными модами в элементе связи вблизи области взаимодействия (спил, вытянутый участок) без резонатора отсутствует.

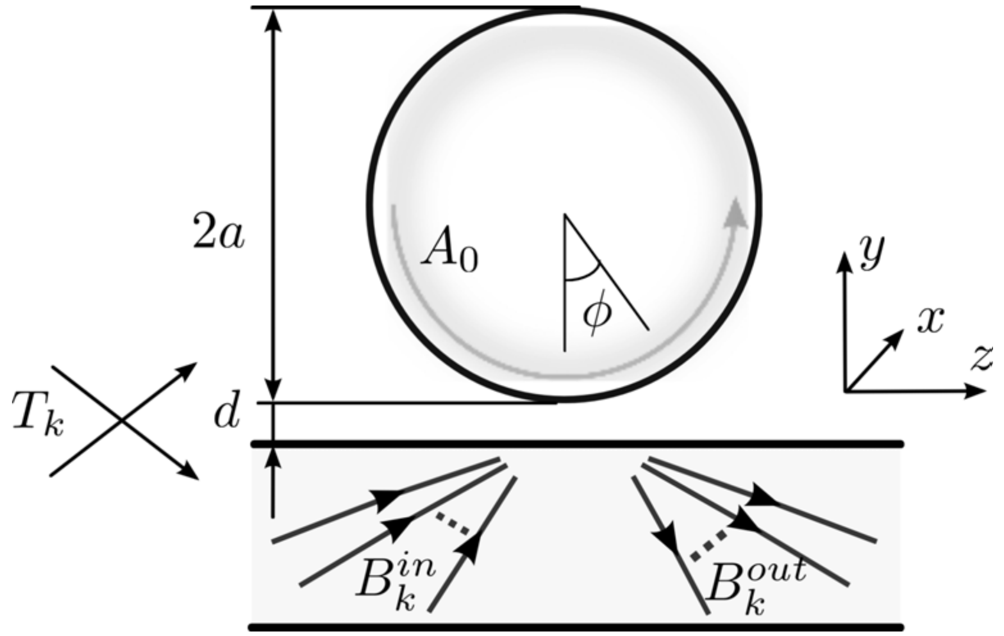


Рис. 9.7: Схема возбуждения МШГ в высокодобротном сферическом микрорезонаторе

Эту чисто математическую проблему всегда можно обойти, выбрав в качестве мод не парциальные моды волновода, а локальные нормальные моды, однако, в большинстве случаев связь между парциальными модами слаба, и ей действительно можно пренебречь.

Положим также, что область связи геометрически много меньше, чем диаметр $2a$ резонатора, так что можно ввести локальные действительные амплитудные коэффициенты передачи T_k, описывающие связь резонатора со всеми модами элемента связи (как направляемыми, так и вытекающими) и коэффициент внутреннего отражения — R. Будем обозначать массивы коэффициентов передачи и амплитуд как векторы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{B}$, соответственно. Если добротность моды резонатора достаточно велика, то каждый оборот моды дает только малый вклад в установление моды и поэтому $1 - R \ll 1$. В этом случае (пренебрегая для простоты поглощением и рассеянием в элементе связи, то есть, считая, что выполняется закон сохранения энергии $R_k^2 = 1 - T_k^2$), получаем

$$R = \prod R_k = \sqrt{1 - T^2} \simeq 1 - T^2/2 = 1 - \sum T_k^2/2 \tag{9.9}$$

Уравнение для амплитуды моды резонатора и амплитуд в элементе связи запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_0(t) &= i \sum T_k B_k^{in}(t) + R A_0(t - \tau_0) e^{i2\pi n_m L/\lambda - \alpha L/2}, \\ B_k^{out}(t) &= R_k B_k^{in}(t) + i T_k A_0(t). \end{aligned} \tag{9.10}$$

В этих уравнениях

$$\tau_0 = n_m L/c \tag{9.11}$$

— время одного оборота бегущей волны в сфере, а

$$L \simeq 2\pi a \tag{9.12}$$

— оптический путь закольцованной моды примерно равный длине окружности сферы, λ — длина волны, n_m — показатель преломления резонатора, c — скорость света и α — коэффициент затухания мощности в резонаторе, обусловленный потерями на рассеяние, поглощение и излучение в резонаторе.

В таком представлении микросфера эквивалентна кольцевому резонатору, образованному зеркалами с пропусканием T_k, заполненному поглощающей средой с коэффициентом ослабления α, а в случае одномодовой связи — резонатору Фабри-Перо длиной $L/2$ с глухим задним зеркалом.

Если потери на один оборот малы, то вблизи резонансной частоты:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\pi c}{\lambda_0}, \\ n_m L &= m\lambda_0, \end{aligned} \tag{9.13}$$

где m — целое число, раскладывая в ряд $A_0(t-\tau_0) = A_0(t) - \tau_0 dA_0/dt$ из (9.10) получим:

$$\frac{dA_0}{dt} + (\delta_c + \delta_0 - i\Delta\omega)A_0 = i\frac{T\Gamma}{\tau_0}B^{in}, \tag{9.14}$$

где

$$\delta_0 = \frac{\alpha c}{2n_m}; \quad \delta_c = \frac{1-R}{R\tau_0} \simeq \frac{T^2}{2\tau_0}. \tag{9.15}$$

Здесь введен коэффициент $\Gamma \leq 1$:

$$\Gamma = \frac{\mathbf{TB}^{in}}{TB^{in}}, \tag{9.16}$$

который описывает перекрытие мод, и показывает, насколько хорошо возбуждающее поле соответствует моде резонатора.

Слагаемое δ_0 обусловлено собственной добротностью резонатора

$$Q_0 = \frac{2\pi n_m}{\alpha\lambda}, \tag{9.17}$$

(см. также аналогичное выражение (3.45), полученное для резонатора Фабри-Перо), а δ_c описывает нагружение, т.е. утечку энергии моды в моды элемента связи. Понятно, что связь с резонатором является взаимной — энергия не только поступает в моду резонатора из мод накачки, но и утекает в них. Именно балансом собственных потерь, коэффициента связи и нагружения описывается установившийся режим в резонаторе. Ниже все величины, связанные с элементом связи будут помечаться индексом 'c', а величины связанные со сферическим микрорезонатором — 'm'.

Получившееся уравнение (9.14) является классическим уравнением для медленно меняющейся амплитуды осциллятора под действием гармонической внешней силы (см. Главу 2). Аналогичное уравнение было получено в Главе 3 (3.44) для резонатора Фабри-Перо, где также рассматривалось условие оптимальной связи с этим резонатором.

Как будет показано ниже, коэффициенты T_k могут быть вычислены как интегралы перекрытия поля микросферы с каждой из ортогональных мод элемента связи. Отличие от Фабри-Перо резонатора и кольцевого резонатора состоит в том, что в микросфере T_k не являются фиксированными параметрами, а сильно зависят от геометрии связи, и в частности, экспоненциально зависят от величины зазора между резонатором и элементом связи, и, таким образом, находятся в руках экспериментатора.

Как уже подчеркивалось в Главах 2 и 3, именно управляемое соотношение между δ_0 и δ_c определяет эффективность связи при заданной конфигурации, при этом это соотношение учитывает одновременно перекрытие мод, синхронизм и оптимальное нагружение, обеспечивающее обмен энергией между резонатором и элементом связи.

Стационарное решение (9.14) имеет типичный для теории колебаний вид:

$$A_0 = \frac{i2\delta_c B^{in}}{\delta_0 + \delta_c - i\Delta\omega} \frac{\mathit{\Gamma}}{T} = \frac{i\mathit{\Gamma} B^{in}}{\delta_0 + \delta_c - i\Delta\omega} \sqrt{\frac{2\delta_c}{\tau_0}} \tag{9.18}$$

Амплитуда поля в резонаторе будет максимальна при $\delta_c = \delta_0$ (собственная добротность равна добротности связи, или полная “нагруженная” добротность в два раза меньше собственной). Выходная стационарная амплитуда при этом равна

$$\mathbf{B}^{out} = \mathbf{B}^{in} - B^{in} \frac{2\delta_c \mathit{\Gamma}}{\delta_0 + \delta_c - i\Delta\omega} \frac{\mathbf{T}}{T} \tag{9.19}$$

(мы пренебрегли здесь членами порядка T^2), и полная выходная интенсивность имеет лоренцевский вид частотной зависимости:

$$|B^{out}|^2 = |B^{in}|^2 \left[1 - \frac{4\delta_0 \delta_c \mathit{\Gamma}^2}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + (\Delta\omega)^2} \right], \tag{9.20}$$

Из выражения (9.19) можно легко видеть, что выходной сигнал может быть представлен как результат интерференции входных полей и полей, “переизлученных” из резонатора. Следует отметить, что распределение мод во втором слагаемом (пространственное распределение переизлучения из резонатора) не зависит от входного распределения.

Наиболее важным частным случаем (9.19) является режим идеального соответствия мод ($\mathit{\Gamma} = 1$), получающийся при $\mathbf{B}^{in}/B^{in} = \mathbf{T}/T$, когда доля входной мощности, заводимая в резонатор — максимальна. В частности, одномодовый элемент связи всегда работает в режиме идеального соответствия. В этом случае:

$$B^{out} = B^{in} \frac{\delta_0 - \delta_c - i\Delta\omega}{\delta_0 + \delta_c - i\Delta\omega}. \tag{9.21}$$

Как легко видеть, при $\delta_c = \delta_0$, выходная интенсивность обращается в нуль, т.е. вся мощность теряется внутри резонатора. Этот режим обычно называют режимом критической связи.

Иногда эффективность связи оценивают по глубине провала K в передаточной характеристике на резонансной частоте. Из выражения (9.20) можно получить:

$$\begin{aligned} K &= \frac{4Q_0 Q_c \mathit{\Gamma}^2}{(Q_0+Q_c)^2} = \frac{4Q\mathit{\Gamma}^2}{Q_0+Q_c}, \\ \frac{1}{Q} &= \frac{2\delta_0}{\omega} + \frac{2\delta_c}{\omega} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_c}. \end{aligned} \tag{9.22}$$

При критической связи величина K равна 100%. Однако критическая связь может наблюдаться и в случае неидеального соответствия до тех пор пока $2\mathit{\Gamma}^2 > 1$ (частичное соответствие), если на выходе происходит фильтрация мод, с тем чтобы собрать только часть мод элемента связи. В этом случае утечку в остальные моды можно рассматривать как дополнительные внутренние потери и критическая связь достигается при более низкой нагруженной добротности Q, когда $\delta_c = \delta_0/(2\mathit{\Gamma}^2 - 1)$. Если $\delta_c \gg \delta_0$ (сильное нагружение), то при идеальном соответствии, хотя контраст провала на частотной характеристике получается мал (потери мощности в резонаторе малы), выходная волна имеет в резонансе противоположный знак по сравнению с волной вне резонанса, т.е. резонатор сдвигает фазу на π.

Здесь уместно отметить, что в резонаторах обычного типа, образованных зеркалами, добротность в основном определяется их резкостью, то есть добротностью связи, в то время как с микросферами ситуация противоположна, и ключевую роль обычно играет собственная добротность.

9.4 Вариационный подход

Задача теперь состоит в том, чтобы определить параметры системы элемент связи — резонатор из электродинамики. Это можно сделать, например, рассматривая связь с МШГ на основе модели распределенной связи между бегущими волнами в двух эквивалентных сходящихся и расходящихся волноводах, изображающих моду резонатора и моду элемента связи. Однако выражения для параметров связи, лучше подходящие для элементов связи с плотным спектром мод, проще найти, пользуясь более строгим и прямым способом — вариационным методом непосредственно из уравнений Максвелла.

Электрическое поле в резонаторе, возмущенном поднесением к нему элемента связи может быть выписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(\mathbf{r},t) =& e^{-i\omega t}\sum_j a_j(t)\mathbf{e}_j(\mathbf{r}), \\ \mathbf{E}_c(\mathbf{r},t) =& e^{-i\omega t}\tilde{\mathbf{E}}_c(\mathbf{r},t), \end{aligned} \tag{9.23}$$

где $\mathbf{e}_j$ — ортонормированные собственные моды невозмущенного резонатора, не имеющего собственных потерь, a_j — медленно меняющиеся во времени амплитуды.

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int \varepsilon_m \mathbf{e}_{j1}\mathbf{e}^*_{j2} dv = \delta_{j1,j2}, \tag{9.24}$$

($\delta_{j1,j2}$ здесь символ Кронекера).

Строго говоря, как уже не раз отмечалось в книге, такая нормализация имеет определенные сложности в случае открытых диэлектрических резонаторов с конечной излучательной добротностью Q_{rad}, однако в нашем рассмотрении мы можем легко избежать этих проблем, считая интересующие нас собственные частоты ω_j чисто действительными, пренебрегая чрезвычайно малыми мнимыми частями, описывающими потери на излучение и выбирая в качестве объема интегрирования сферу диаметром много меньшим чем $Q_{rad}\lambda/\pi$, но много большим чем диаметр микрорезонатора.

Уравнение для поля в сфере в присутствии элемента связи запишется в следующем виде:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_m + \left(\frac{\varepsilon_m(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{\varepsilon_c(\mathbf{r})-1}{c^2} - i\frac{2\delta_0\varepsilon_m(\mathbf{r})}{\omega_0 c^2}\right)\frac{\partial^2\mathbf{E}_m}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_m(\mathbf{r})-1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}_c}{\partial t^2}, \tag{9.25}$$

где второе слагаемое в скобках описывает дополнительную поляризацию из-за присутствия элемента связи, третье описывает затухание из-за внутренних потерь в резонаторе, а правая часть — наведенная поляризация задаваемая волной накачкой. Диэлектрические восприимчивости $\varepsilon_{m|c}(\mathbf{r})$ равны $n^2_{m|c}$ внутри и единице, соответственно, внутри сферического резонатора и элемента связи. Подставляя (9.23) в (9.25) и затем умножая это уравнение на $\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{e}^*_0$ после интегрирования по всему объему, пренебрегая малыми членами, получаем.

$$\frac{da_0}{dt} + a_0(\delta_0 - i\Delta\omega') = \frac{i\omega}{4}e^{i\omega t}\epsilon_0\int\limits_{\mathbf{M}}(n_m^2-1)\mathbf{E}_c\mathbf{e}^*_0 dv, \tag{9.26}$$

где $\Delta\omega' = \omega - \omega'_0$ и

$$\omega'_0 = \omega_0 - \frac{\omega}{4}\epsilon_0\int\limits_{\mathbf{C}}(n_c^2-1)|\mathbf{e}_0|^2 dv. \tag{9.27}$$

является новой резонансной частотой, изменившейся в присутствии элемента связи.

Поле в элементе связи запишем в виде разложения по модам, бегущим в направлении z (см. рис. (9.7)):

$$\tilde{\mathbf{E}}_c(\mathbf{r}) = \int B_\beta(z,t)\mathbf{e}_\beta(\mathbf{r})e^{i\beta z}\frac{\beta}{2\pi}, \tag{9.28}$$

Направляемые локализованные моды в элементе связи при этом подходе могут быть также легко учтены, если мы запишем B_β как

$$B_\beta = \sum_k B_k 2\pi\delta(\beta-\beta_k) + \tilde{B}_\beta. \tag{9.29}$$

Моды элемента связи нормируем так, чтобы

$$\frac{\beta_c}{2k_0}\epsilon_0 \int \mathbf{e}^*_{\beta_1}\mathbf{e}_{\beta_2} ds = \delta(\beta_1 - \beta_2), \tag{9.30}$$

где $\delta(\beta_1 - \beta_2)$ — дельта функция. Интегрирование производится по сечению, перпендикулярному оси z. Амплитуды B_β (медленно меняющиеся по z и t) описывают распределение волны накачки в элементе связи. Подставляя (9.28) в волновое уравнение:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_c + \left(\frac{\varepsilon_c(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{\varepsilon_m(\mathbf{r}) - 1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 \mathbf{E}_c}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_c(\mathbf{r}) - 1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_m}{\partial t^2}, \tag{9.31}$$

получим

$$\int \left(\beta\frac{\partial B_\beta}{\partial z} - \frac{i\omega^2(\varepsilon_m - 1)}{2c^2}B_\beta\right)\mathbf{e}_\beta e^{i\beta z}\frac{d\beta}{2\pi} = \frac{i(\varepsilon_c - 1)\omega^2}{2c^2}\mathbf{E}_m e^{i\omega t}. \tag{9.32}$$

Второй член в скобках (9.31) определяет изменение волнового числа (фазовой скорости) соответствующей моды в области взаимодействия. Домножив это уравнение скалярно на $\mathbf{e}^*_\beta$, и проинтегрировав по поперечному сечению, получим уравнение для медленно меняющихся амплитуд B_β с формальным решением:

$$B_\beta = B^{in}_\beta e^{i\Delta\beta z} + \frac{i\omega^2}{4c\beta}\epsilon_0 \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-i\beta z' + i\Delta\beta(z-z')} \int\limits_{\mathbf{C}} (n_c^2 - 1)\mathbf{e}'^*_\beta \mathbf{E}'_m, ds' dz',$$

$$\Delta\beta(z) = \frac{\omega^2(n_m^2 - 1)}{4c\beta}\epsilon_0 \int\limits_{\mathbf{M}} |\mathbf{e}_\beta|^2 ds. \tag{9.33}$$

Подставляя (9.28) в (9.26) и используя (9.33) пренебрегая $\Delta\beta$, окончательно получаем следующее выражение для амплитуды поля в резонаторе:

$$\frac{da_0}{dt} + (\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega')a_0 = \frac{i\omega_0(n_c^2 - 1)\epsilon_0}{4}\int B^{in}_\beta \int\limits_{\mathbf{C}} \mathbf{e}_0\mathbf{e}^*_\beta e^{-i\beta z} dv \frac{d\beta}{2\pi}, \tag{9.34}$$

и

$$\delta_c = \frac{\omega_0^3\epsilon_0^2}{16c} \times \int\int\limits_{\mathbf{M}}\int\limits_{-\infty}^{z}\int\limits_{\mathbf{C}} \frac{(n_m^2 - 1)(n_c^2 - 1)}{\beta} e^{i(\beta+\Delta\beta)(z-z')}(\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'^*_\beta)(\mathbf{e}_\beta\hat{\mathbf{e}}^*_0) ds' dz' dv \frac{d\beta}{2\pi}$$

$$\simeq \frac{\omega^2(n_c^2 - 1)(n_m^2 - 1)}{32}\int \left|\epsilon_0 \int\limits_{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_0\mathbf{e}^*_\beta e^{-i\beta z} dv\right|^2 \frac{d\beta}{2\pi}. \tag{9.35}$$

Полное согласие с (9.14-9.19) станет очевидным, если положить

$$T_\beta = \frac{\omega_0\sqrt{(n_c^2 - 1)(n_m^2 - 1)}}{4}\epsilon_0 \int\limits_{\mathbf{C}} \mathbf{e}_0\mathbf{e}^*_\beta e^{i(\beta_0 - \beta)z} dv. \tag{9.36}$$

Для высокодобротных мод $\beta_0 \simeq m/a$, и так как поле спадает вне резонатора приблизительно как $e^{-\gamma r}$ ($\gamma^2 \simeq k^2(n_m^2 - 1)$), зависимость $\mathbf{e}_0$ от z может быть аппроксимировано следующим образом: $\mathbf{e} \simeq \mathbf{e}(z = 0)e^{-\gamma z^2/2a}$. Если элемент связи является протяженным в направлении z (как большинство продемонстрированных до сих пор элементов связи), получаем:

$$T_\beta = \frac{\omega_0\sqrt{(n_c^2-1)(n_m^2-1)}}{4}\sqrt{\frac{2\pi a}{\gamma}}\int\limits_{\mathbf{C}} e^{-(\beta a - m)^2/2\gamma a}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\beta^* ds. \tag{9.37}$$

Изложенная выше теория может быть использована для анализа связи МШГ с оптическими волноводами разного типа, в частности, с волокном, планарным волноводом и призмой [35]. Для трех рассмотренных типов элементов связи были получены зависимости Q_c от размера резонатора при нулевом зазоре $d = 0$ от его поверхности, которые позволяют быстро оценить возможность достижения критической связи при заданном размере и уровне затухания в резонаторе.

Режим критической связи (характерный максимальными потерями входной мощности в резонаторе), интересный при использовании резонаторов в качестве фильтров, для ряда приложений, в частности для экспериментов по квантовой электродинамики резонатора и квантово-невозмущающим измерениям, является каком-то смысле бесполезным. Чтобы иметь возможность использовать мощность, прошедшую через резонатор, требуется удовлетворить условие $Q_c \ll Q_0$ (сильное нагружение). Другими словами, собственная добротность должна быть достаточно велика, чтобы обеспечить резерв для достаточного нагружения оптимального элемента связи.

Удобный формализм добротности связи для описания обмена энергией между модами элемента связи и резонатора предоставляет быстрый алгоритм для определения эффективности интересующего типа элемента связи при заданной собственной добротности моды резонатора.

Возможность изменять соотношение между собственной добротностью и добротностью связи, обусловленной излучением в моды элемента связи, является отличительной чертой резонаторов с МШГ по сравнением с обычными резонаторами Фабри-Перо, для которых характерна фиксированная связь, осуществляемая через входное зеркало. Эта уникальная возможность контроля добротности и связи благодаря спадающему полю МШГ позволяет получить новые режимы работы устройств, доступные ранее лишь в радио и СВЧ диапазоне в устройствах с сосредоточенными параметрами.

Глава 10

Добротность и спектр мод РШГ

10.1 Бюджет добротности

Добротность оптических микрорезонаторов определяется различными каналами потери энергии, а поскольку потери складываются, полная добротность описывается следующим соотношением:

$$\frac{1}{Q_\Sigma} = \frac{1}{Q_{\text{изл}}} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}} + \frac{1}{Q_{\text{пов}}} + \frac{1}{Q_{\text{окр}}} + \frac{1}{Q_{\text{св}}} \tag{10.1}$$

Здесь

$$Q_\Sigma = \omega \frac{\text{энергия, запасенная в резонаторе}}{\text{мощность потерь}} \tag{10.2}$$

В установившемся режиме мощность потерь просто равна мощности, поступающей в резонатор.

$Q_{\text{изл}}$ — описывает излучательные потери, обусловленные внутренним отражением от поверхности с кривизной,

$Q_{\text{вн}}$ — описывает затухание поля внутри резонатора (рассеяние, поглощение),

$Q_{\text{пов}}$ — описывает потери на поверхности резонатора,

$Q_{\text{окр}}$ — описывает потери в окружающей среде, вызванные наличием спадающего поля в неволновой зоне,

$Q_{\text{св}}$ — описывает уход энергии в элемент связи.

Излучательные потери были рассмотрены ранее для различных геометрий, и было показано, что для реальных микрорезонаторов на основе мод шепчущей галереи диаметром больше примерно десяти микрометров излучательные потери пренебрежимо малы по сравнению с другими видами потерь. Если же для каких-то приложений ставится задача минимизации размеров резонатора, этот вид потерь тоже надо принимать во внимание. Добротность связи была рассмотрена в предыдущей главе. Далее мы рассмотрим остальные виды потерь, которые связаны с неидеальностью геометрии резонатора и материала, из которого он изготовлен.

10.2 Потери в материале

Оптические потери в материале оптических резонаторов обусловлены теми же причинами, что и в волоконных световодах. Существенны два механизма затухания света: рассеяние и поглощение. Затухание света в среде принято характеризовать величиной α, имеющей смысл относительных потерь мощности на единицу длины:

$$P(z) = P_0 e^{-\alpha z} \tag{10.3}$$

Коэффициент затухания связан с мнимой частью показателя преломления

$$\begin{aligned} &n = n' + in'', \\ &P(z) \propto |E(0)e^{ink_0 z}|^2 = |E(0)|^2 e^{-2n'' k_0 z} = |E(0)|^2 e^{-\alpha z}, \\ &\alpha = -2n'' k_0. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Формальная связь между постоянной затухания и добротностью определяется выражением (3.45,9.17):

$$Q_{\text{вн}} = \frac{2\pi n}{\alpha\lambda}. \tag{10.5}$$

Зависимость от длины волны затухания в плавленом кварце, основном материале волоконных световодов, показана на рис. 10.1.

Затухание α приводится обычно или в единицах обратной длины, или в децибелах на единицу длины:

$$\begin{aligned} \frac{\text{дБ}}{\text{км}} &= \frac{10\lg[P(0)/P(d)]}{d(\text{км})}, \\ \alpha[\text{дБ/км}] &= 10\lg(e)\,\alpha \simeq 4.343 \times 10^3 \alpha[\text{м}^{-1}]. \end{aligned} \tag{10.6}$$

10.2.1 Поглощение

Поглощение в большинстве сред обусловлено, главным образом, наличием примесей и дефектов в атомной структуре. Большие усилия по тщательной очистке и подбору материалов, предпринятые в связи с потребностями оптической телекоммуникации и электроники, позволили в ряде случаев значительно уменьшить примесные потери и выйти на уровень, определяемый фундаментальными механизмами. Поглощение света происходит при взаимодействии фотонов с электронами и колебательными состояниями вещества. Для чистых материалов в оптическом диапазоне фундаментальное поглощение обусловлено в длинноволновой области крылом колебательного спектра решетки за счет крыла многофононного поглощения оптических фотонов различными обертонами и комбинационными частотами основных колебаний решетки, связанных из-за ангармонизма. В коротковолновой области поглощение определяется ультрафиолетовым краем электронного поглощения (крыло Урбаха). Оба вида потерь хорошо описываются следующим выражением:

$$\alpha_{\text{погл}} \simeq A_{IR} e^{-a_{IR}/\lambda} + A_{UV} e^{a_{UV}/\lambda}, \tag{10.7}$$

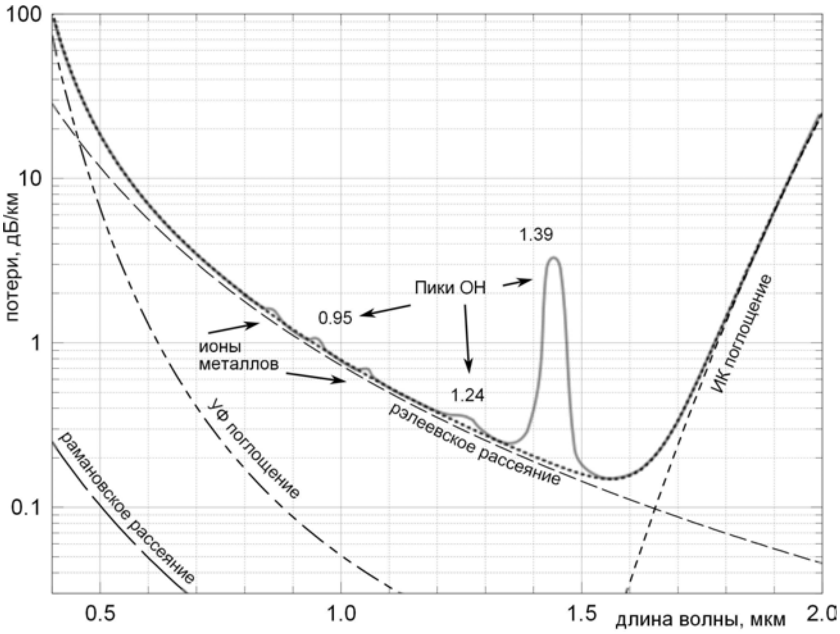


Рис. 10.1: Оптическое затухание в плавленом кварце

В плавленом кварце основную роль играет поглощение на основных колебаниях тетраэдра SiO_4. Наиболее важной примесью, влияющей на поглощение в инфракрасном диапазоне, являются ионы гидроксила OH^-. Поглощение происходят на колебательных возбуждениях связи (Si-OH) и комбинационных частотах. От этой примеси сложнее всего избавиться и, вместе с тем, она приводит к самому сильному дополнительному поглощению. Поэтому при производстве оптических волокон предпринимаются значительные усилия для приготовления сырья не содержащего ионы гидроксила (в частности, воды) и для предотвращения их попадания в материал в процессе производства.

Современные технологии очистки позволили добиться минимума потерь в волокнах из плавленого кварца, который практически совпадает с теоретическим. Так, на длине волны 1.55 мкм были продемонстрированы потери 0.15 дБ/км. При этом волокна со столь малыми потерями производятся уже промышленно.

В кварцевых стеклах ультрафиолетовой край полосы поглощения определяют ионы кислорода. В видимом и ближнем ИК-диапазоне ультрафиолетовое поглощение обычно лежит много ниже уровней других потерь и им можно пренебречь. Стекла, как правило, содержат примеси различных элементов, имеющие электронные состояния с более низкой энергией активации. Такие примеси смещают край полосы поглощения в область более длинных волн и вызывают дополнительные полосы поглощения в видимом и инфракрасном диапазонах спектра.

10.2.2 Потери рассеяния

Основной вклад в потери рассеяния вносят рамановское (комбинационное) рассеяние света, рассеяние Мандельштама-Бриллюэна, появляющееся в результате взаимодействия излучения с собственными колебаниями среды и рэлеевское упругое рассеяние на термодинамических флуктуациях плотности. Рассеяние в стеклах происходит на "замороженных" флуктуациях плотности, соответствующих температуре отвердевания, а не реальной температуре, как в случае кристаллических сред. Кроме того, в многокомпонентных стеклах рассеяние происходит на флуктуациях концентрации компонентов. Все эти потери характеризуются зависимостью вида

$$\alpha_{\text{расс}} \simeq \frac{B}{\lambda^4}, \tag{10.8}$$

Из-за малых размеров резонаторов и строгих правил отбора неупругое рассеяние Мандельштамма-Бриллюэна в микрорезонаторах, как правило, не приводит к появлению заметных дополнительных потерь и вырождается во взаимодействие с отдельными акустическими модами тела, сопровождающееся интересными пондеромоторными эффектами, привлекающими в последнее время все больший интерес в связи с исследованиями оптомеханических явлений. В средах и в микрорезонаторах возможно также неупругое рассеяние на гораздо более высокочастотных колебаниях атомов и молекул — комбинационное или рамановское рассеяние, сопровождающееся переносом частоты вниз с появлением стоксовых линий или вверх — антистоксово рассеяние. Потери из-за спонтанного рамановского рассеяния составляют лишь несколько процентов от потерь, вызванных другими процессами, анализ которых проводится на основе термодинамической теории флуктуаций.

10.2.3 Минимум потерь в материале

Основными видами потерь в чистых материалах, как указано выше, являются инфракрасное крыло мультифононного поглощения и рэлеевское рассеяние, которые хорошо описываются общей формулой:

$$\alpha_{\text{погл}} \simeq Ae^{-a/\lambda} + \frac{B}{\lambda^4}, \tag{10.9}$$

Дифференцируя это выражение можно найти минимум кривой потерь и длину волны, на которой этот минимум достигается:

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= \frac{B}{\lambda_{\min}^4}\left(1 + \frac{4\lambda_{\min}}{a}\right), \\ \lambda_{\min}^3 e^{-a/\lambda_{\min}} &= \frac{4B}{Aa}. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Параметры инфракрасного поглощения довольно легко измеряются экспериментально, и для широкого класса оксидных, галидных и халькогенидных стекол и кристаллов они лежат в диапазоне $A \sim 10^{10} - 10^{12}$ дБ/км и $a \sim 50 - 200$мкм. Хотя коэффициент рэлеевского рассеяния также можно измерить, однако в реальных неидеальных веществах этот вид потерь может быть скрыт другими, поэтому надежнее брать результаты теоретического расчета, опирающегося на константы материал. Уравнения (10.10) не разрешимы в явном виде, однако поскольку во втором равенстве зависимость λ_{min} от всех параметров кроме a является логарифмической, можно показать, что для очень большого числа оптических материалов, представляющих интерес, прекрасным приближением, с точностью заметно лучшей 10% являются выражения:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{min}} &= 0.030a, \\ \alpha_{\text{min}} &= \frac{1.12B}{\lambda_{min}^4}. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Задание 24. *Найдите выражение для максимальной добротности, определяемой внутренними потерями.*

Рассчитанные максимальные добротности для большинства сред на много порядков превышают те, что можно получить при сегодняшнем уровне технологии материалов. Лишь для плавленого кварца достигнут в настоящее время уровень потерь как в оптических волокнах, так и в микрорезонаторах, соответствующий теоретическим предсказаниям. В микрорезонаторах из плавленого кварца продемонстрирована добротность $Q = 8 \times 10^9$ [36], близкая к теоретической на длине волны 0.63 мкм. Для больших длин волн предсказанные большие значения добротности в кварцевых оптических микрорезонаторах пока не получены. Значительно большие добротности были продемонстрированы в кристаллических дисковых микрорезонаторах из флюорита (CaF_2) — $Q = 3 \times 10^{11}$ [37], но и здесь еще резервы улучшения добротности, по-видимому, не исчерпаны.

Существенно, что на длине волны минимума потерь 90% потерь определяются рэлеевским рассеянием.

10.2.4 Рассеяние на термодинамических флуктуациях плотности и добротность микрорезонаторов

Основной вклад в потери рассеяния в однокомпонентном материале вносят рассеяние Мандельштама-Бриллюэна, возникающее в результате взаимодействия излучения с собственными колебаниями среды и рэлеевское рассеяние на термодинамических флуктуациях плотности. Рэлеевское рассеяние при этом рассматривается, как рассеяние на большом числе слабокоррелированных диполей, образованных локальными флуктуациями плотности, либо динамическими в кристаллах, либо статическими замороженными в стеклах.

Для вычисления рассеяния [38], объем материала разбивается на малые объемы, размеры которых произвольны, но намного меньше длины волны света. Каждый из них ведет себя как малый рассеивающий диполь, излучающий свет, в соответствии с формулой Рэлея, интенсивности всех диполей будут некогерентно складываться, и в результате полная интенсивность рассеянного света будет для падающего поляризованного света определяться выражением:

$$I_s = I\frac{\pi^2 \sin^2\theta}{\lambda^4 r^2}\sum_i\sum_j(\epsilon_i - \bar{\epsilon})(\epsilon_j - \bar{\epsilon})\delta v_i \delta v_j, \tag{10.12}$$

где $\bar{\epsilon}$-средняя диэлектрическая проницаемость, так что $\epsilon_i = bar\epsilon + \delta\epsilon_i$ диэлектрическая проницаемость каждого элемента объема, I — интенсивность падающего на диполь излучения.

Эта формула описывает также рассеяние в атмосфере на флуктуациях плотности воздуха. При этом сильная зависимость рассеяния от длины волны ($\propto \lambda^{-4}$) объясняет голубой цвет неба.

Выписанное выше выражение можно проанализировать, вводя корреляционную функцию флуктуаций и заменяя сумму интегралом:

$$I_s = \frac{\pi^2 \sin^2\theta}{\lambda^4 r^2} dV \langle \int \delta\epsilon(\vec{r})\delta\epsilon(0)dv\rangle I, \tag{10.13}$$

где dV — рассеивающий объем. Вводя корреляционный объем δV_ϵ, выражение (10.13) можно переписать в виде:

$$\frac{I_s}{I} = \frac{\pi^2 \sin^2\theta}{\lambda^4 r^2} dV \langle \delta\epsilon^2\rangle \delta V_\epsilon, \tag{10.14}$$

Рассмотрим теперь оптический луч, сечением s распространяющийся в среде, и проходящий через рассеивающий объем v толщины z, его мощность равна

$$\begin{aligned} P_0 &= sI = IdV/dz, \\ V &= sdz. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Полная рассеиваемая мощность равна интегралу рассеиваемой интенсивности по поверхности большой сферы

$$P_s = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I_s r^2 \sin\theta d\theta d\phi = I\frac{8\pi^3}{3\lambda^4} dV \langle\delta\epsilon^2\rangle \delta V_\epsilon. \tag{10.16}$$

С другой стороны, отношение рассеиваемой мощности, к полной мощности на длине dz должно, в соответствии с формулой (10.3), составлять α:

$$P_s = -s\frac{dI}{dz}dz = \alpha I s dz = \alpha I dV. \tag{10.17}$$

Таким образом, мы получаем выражение для коэффициента рассеяния α:

$$\alpha = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4}\langle\delta\epsilon^2\rangle\delta V_\epsilon. \tag{10.18}$$

Эту формулу в более простом виде впервые вывел лорд Рэлей, рассматривая рассеяние света в атмосфере как результат рассяения на отдельных микросферических частицах, много меньших длины волны:

$$\frac{8\pi}{3}k^4|\chi_0|^2N, \tag{10.19}$$

где χ_0 — поляризуемость отдельных рассеивающих центров, а N — их концентрация. Формулу, учитывающую термодинамические флуктуации плотности, получил впервые Эйнштейн на основе теории флуктуаций Смолуховского.

Величину $\langle\delta\epsilon^2\rangle\delta V_\epsilon$, используя уравнения термодинамики, можно выразить через параметры, которые поддаются измерениям:

$$\langle\delta\epsilon^2\rangle\delta V_\epsilon = \rho^2\left(\frac{d\epsilon}{d\rho}\right)_T^2 k_BT\beta_T. \tag{10.20}$$

где β_T — изотермический коэффициент сжимаемости, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, ρ — плотность диэлектрика, получим выражение

$$\alpha = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4}\rho^2\left(\frac{d\epsilon}{d\rho}\right)_T^2 k_BT\beta_T. \tag{10.21}$$

Это выражение одновременно учитывает как рассеяние Мандельштама-Бриллюэна так и рассеяние Рэлея. Характерной является зависимость потерь от четвертой степени длины волны. В выражении (10.21) при вычислении затухания для стеклообразных материалов необходимо подставлять температуру затвердевания материала, и соответствующий этой температуре коэффициент сжимаемости (замороженные неоднородности).

Для вычисления зависимости $\epsilon(\rho)$ можно использовать различные модели: формулу Лоренц-Лоренца, Клаузиуса-Моссотти, Друда и др., однако, универсального подхода, дающего согласующиеся с экспериментом значения рассеяния во всех спектральных диапазонах, не существует.

Посмотрим теперь, как модифицируется вывод итогового выражения для затухания, обусловленного рассеянием в случае сферического микрорезонатора с модами типа шепчущей галереи. Неоднородности представляются в виде диполей, расположенных в зависимости от поляризации рассеиваемой волны либо параллельно для мод TE, либо перпендикулярно поверхности резонатора, для мод TM.

Угловое распределение интенсивности излучения диполя дается известной формулой электродинамики и пропорционально $\sin^2\theta$, где в данном случае θ — угол между осью диполя и направлением рассеяния. При выводе выражения для объемного рассеяния для того чтобы получить выражение для полного рассеяния из формулы (10.14) проводилось интегрирование по всем углам. Чтобы получить более точную оценку ограничения добротности рассеянием необходимо учитывать явление полного внутреннего отражения от внутренних стенок микрорезонатора. Рассеянные лучи, падающие на поверхность под углом больше критического угла $\theta_{\text{кр}} = \arcsin(1/n)$ либо опять включаются в моду, если угол рассеяния мал и лежит внутри каустики моды, либо подавляются в результате деструктивной интерференции за несколько оборотов внутри резонатора (вторичным рассеянием, как эффектом второго порядка можно пренебречь). Таким образом, в потери включаются лишь те лучи, которые падают под углом меньшим критического. Условия ограничения скажутся лишь на интегрировании по углам, и не влияют на последующий вывод формулы для коэффициента рассеяния. Поэтому можно ввести коэффициент подавления $K_{TE,TM}$:

$$Q_{\text{расс}} = K_{TE,TM}\frac{2\pi n}{\alpha_{\text{расс}}\lambda}. \tag{10.22}$$

При этом коэффициент $K_{TE,TM}$ равен отношению полной интенсивности рассеянной волны, к интенсивности волны с углами рассеяния, соответствующими углам падения на поверхность микрорезонатора, меньшим, чем угол полного внутреннего отражения.

Результаты численного расчета для плавленого кварца, с $n = 1.45$ дают [39]

$$\begin{aligned} K_{TE} &= 2.8, \\ K_{TM} &= 9.6. \end{aligned} \tag{10.23}$$

10.3 Рассеяние на поверхностных неоднородностях

В микрорезонаторе с модами шепчущей галереи электромагнитная энергия циркулирует вблизи поверхности. Естественно поэтому предположить, что свойства поверхности оказывают заметное влияние на свойства мод, в частности на их добротность.

Остаточная шероховатость поверхности резонатора должна приводить к рассеянию и, следовательно, ухудшению добротности. По аналогии с объемными потерями вычислим величину α, характеризующую поверхностные потери волны на единицу длины. Будем исходить из того же выражения (10.13), но теперь рассмотрим вклад только поверхностных неоднородностей. Как и в предыдущем параграфе, следует проинтегрировать это выражение по всем углам с учетом полного внутреннего отражения, но для поверхностных диполей следует также учесть, что излучение в пространство над поверхностью проходит беспрепятственно. И, таким образом, коэффициент подавления следует взять равным $2K_{TE,TM}/(K_{TE,TM}+1)$. В расчетах коэффициента ослабления для общности мы его учитывать не будем, а введем лишь в окончательную формулу для добротности микрорезонатора.

Рассмотрим волну, бегущую вблизи направляющей поверхности вдоль оси z, ось x выберем вдоль, а ось y перпендикулярно поверхности резонатора. Полная мощность волны равна $\int I_0(x,y)dxdy$. Неоднородность поверхности приводит к неоднородности показателя преломления (10.2):

$$\delta\epsilon(x,y,z) = (n^2-1)f(x,z)\delta(y), \tag{10.24}$$

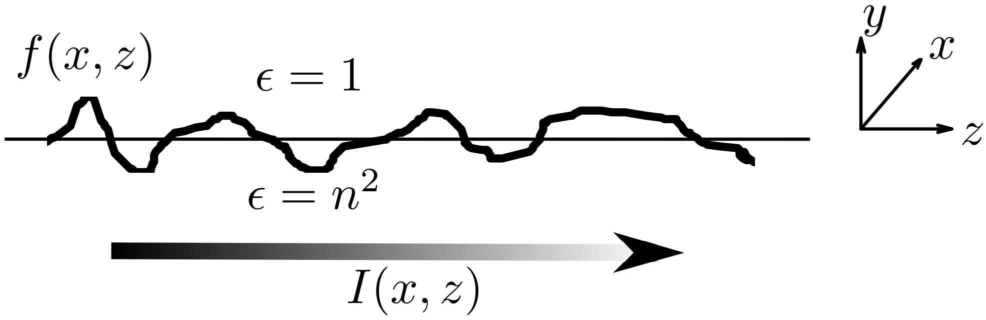


Рис. 10.2: Неоднородности оптической поверхности

Удобнее всего неоднородность границы характеризовать корреляционными функциями. Функция корреляции простейшего вида, которую часто используют для оценок, имеет вид:

$$G(r) = \sigma^2 e^{-|r|/\tilde{B}}. \tag{10.25}$$

Постоянная $\tilde{B}$ здесь определяет характерный размер островков неоднородностей и называется длиной корреляции, а $\sigma = \sqrt{< f^2(x,z) >}$ часто называется среднеквадратичной шероховатостью поверхности. Спектральная плотность такой экспоненциальной корреляционной функции соответствуют кривой Лоренца:

$$S(\beta) = \frac{2\sigma^2 \tilde{B}}{1 + \beta^2 \tilde{B}^2}. \tag{10.26}$$

В этой модели

$$P_s = dz \int I(x=0) dy \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} \sigma^2 (n^2 - 1)^2 \delta s_\epsilon, \tag{10.27}$$

где характерная площадь корреляции поверхностных неоднородностей δs_ϵ определяется выражением:

$$\delta s_\epsilon = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} R(\rho) d\rho d\phi = 2\pi \tilde{B}^2. \tag{10.28}$$

Таким образом, учитывая, что полная мощность равна $\int I(x,y)dxdy$, и считая, что волна распространяется близко от поверхности, получаем:

$$\alpha_{\text{пов}} = \frac{\int I(0)dx}{\int I(y)dxdy} \frac{16(n^2-1)^2 \pi^4 \tilde{B}^2 \sigma^2}{3\lambda^4}. \tag{10.29}$$

Обратимся теперь к сферическому микрорезонатору. В главе 5 было получено приближение, связывающее интеграл квадрата поля по объему резонатора и поле на поверхности, из которого следует, что:

$$\frac{\int I(y)dxdy}{\int I(0)dx} \simeq \frac{a}{2\Delta^2_{TE,TM}} \simeq \frac{a(n^2-1)}{2P^2n^2} \tag{10.30}$$

где $P = (1/n)^2$ для колебаний ТМ и $P = 1$ для ТЕ-мод.

Окончательно получаем выражение для добротности:

$$Q = \frac{2K_{TE,TM}}{K_{TE,TM}+1}\frac{3\lambda^3 a}{16n\pi^3\tilde{B}^2\sigma^2P^2} \tag{10.31}$$

В кристаллических резонаторах поверхностные неоднородности определяются качеством полировки поверхности и, как показывают измерения, они могут быть гораздо меньше, чем для естественной поверхности плавленого кварца.

10.4 Поверхностное поглощение на адсорбированных пленках

Другим фактором, влияющим на добротность микрорезонатора является адсорбция на поверхность атмосферной воды [36]. Согласно современной модели двухступенчатой хемосорбции, после быстрого поглощения кислорода на только-что образованную поверхность SiO_2 оседает вода, находящаяся в атмосфере. Это приводит к образованию слоя групп OH на поверхности, продолжительность этого процесса имеет порядок 100 секунд. Получающаяся гидратированная поверхность является основой для последующего поглощения молекул воды. После этой второй стадии процесса, оканчивающегося приблизительно через 20-30 минут водяная пленка на поверхности приходит в состояние термодинамического равновесия. Результаты измерения расстройки частоты МШГ позволяют оценить толщину абсорбируемого слоя. Как показывают эксперименты, общее изменение толщины абсорбирующего слоя между 1 и 30 минутами составляет ~ 0.2нм и соответствует 1.5 монослоям.

Задание 25. *Найдите влияние поглощения в слое адсорбата толщины δ с известными объемными потерями на добротность резонатора.*

Задание 26. *Пусть резонатор помещен в жидкость с известными потерями, найдите влияние потерь в жидкости на добротность резонатора.*

10.5 Расщепление резонансов из-за связи мод

Связь, устанавливающуюся между различными модами микросферы вследствие наличия объемных и поверхностных неоднородностей, можно описать в рамках вариационного подхода. Случайные отклонения диэлектрической проницаемости можно записать в виде:

$$\delta\epsilon = f(\theta, \phi) F(r), \tag{10.32}$$

где $F(r)$ — случайная радиальная, а $f(\theta, \phi)$ — случайная угловая функция. В частном случае малых поверхностных неоднородностей микросферы, флуктуации можно представить в следующем виде:

$$r(\theta, \phi) = a + f(\theta, \phi), \tag{10.33}$$

и выражение (10.32) тогда запишется как:

$$\delta\epsilon = (n^2 - 1) f(\theta, \phi) \delta(r - a). \tag{10.34}$$

Волновое уравнение для поля в микрорезонаторе с неоднородностями можно получить непосредственно из уравнений Максвелла:

$$\Delta E - \left(\frac{\epsilon^0(\vec{r})}{c^2} + \frac{\delta\epsilon(\vec{r})}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{10.35}$$

Решение невозмущенного волнового уравнения в резонаторе без неоднородностей (если $\delta\epsilon = 0$) имеет вид

$$\mathbf{E}_j \propto \mathbf{e}_j(r, \theta, \phi) e^{-i\omega_j t}, \tag{10.36}$$

где $\mathbf{e}_j(r, \theta, \phi)$ — векторная гармоника, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \mathbf{e}_j + \epsilon^0 k_j^2 \mathbf{e} = 0. \tag{10.37}$$

Индекс j соответствует всем возможным типам колебаний, а $j = 0$ отвечает первоначально возбужденной моде. Используя метод медленно меняющихся амплитуд, находим решение в виде:

$$\mathbf{E} = \sum A_j(t) \mathbf{e}_j e^{-i\omega_0 t} \tag{10.38}$$

Подставляя эту сумму в выражение (10.35), и, опуская малые члены, получим:

$$2i\omega_0 \epsilon^0 \sum \frac{dA_j(t)}{dt} \mathbf{e}_j + \omega_0^2 \delta\epsilon \sum A_j(t) \mathbf{e}_j + \epsilon^0 \sum_j (\omega_0^2 - \omega_j^2) A_j(t) \mathbf{e}_j = 0 \tag{10.39}$$

Умножив это уравнение на $\mathbf{e}_k^*$ и проинтегрировав его по всему объему с учетом ортогональности (тонкостями, связанными с неэрмиттовостью системы из-за наличия диссипации пренебрегаем), находим обычные уравнения связанных мод:

$$\frac{dA_k}{dt} - i\Delta\omega_k A_k = i \sum_j A_j g_{jk}, \tag{10.40}$$

где $\Delta\omega_k = \omega_0 - \omega_k$ и

$$g_{jk} = \frac{\omega_0}{2\epsilon^0} \frac{\int \mathbf{e}_j \delta\epsilon \mathbf{e}_j^* dv}{\int |\mathbf{e_j}|^2 dv} \tag{10.41}$$

Именно случайные неоднородности $\delta\epsilon$ приводят в этом выражении к связи между A_j и A_k. Нас интересует лишь модуль коэффициента g_{jk}, который определяет скорость обмена энергией между модами. Если размер неоднородностей и их длина корреляции малы по сравнению с длиной волны, g_{jk}^2 можно усреднить:

$$g_{jk}^2 = \frac{\omega_0^2}{(2\epsilon^0)^2} \frac{\langle \delta\epsilon^2 \rangle \delta V_\epsilon}{V_{jk}}, \tag{10.42}$$

где V_{jk} — объем перекрытия мод:

$$V_{jk} = \frac{\int |\mathbf{e_j}|^2 dv \int |\mathbf{e}_k|^2 dv}{\int |\mathbf{e}_j|^2 |\mathbf{e}_k|^2 dv}. \tag{10.43}$$

В самом интересном случае связи между двумя циркулярными модами $A_+(t)$ и $A_-(t)$, бегущими в микрорезонаторе в противоположных направлениях, распределения полей различаются лишь фазовым множителем $\exp(\pm im\phi)$. В этом случаее $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k^*$ и V_{jk} превращается в эффективный объем локализации поля:

$$V_{jj} = \frac{(\int |\mathbf{e}_j|^2 dv)^2}{\int |\mathbf{e}_j|^4 dv}. \tag{10.44}$$

Задание 27. *Найдите отношение такого объема в гауссовом приближении распределения поля к введенному ранее эффективному объему*

$$V_{eff} = \frac{\int |\mathbf{e}_j|^2 dv}{\max |\mathbf{e}_j|^2}. \tag{10.45}$$

Связь встречных мод приводит к наблюдаемому расщеплению вырожденных мод в том случае, если константа связи g существенно превышает потери внутри резонатора и в элементе связи $\delta_0 + \delta_c$. При этом

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2g}{\omega_0}, \tag{10.46}$$

Если неоднородности являются термодинамическими флуктуациями плотности, то получаем:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{расс}} = \sqrt{\frac{3\lambda^4 \alpha_{\text{расс}}}{8\pi^3 n^4 V_{jj}}}. \tag{10.47}$$

Глава 11

Нелинейные свойства микрорезонаторов

11.1 Оптическая нелинейность

Поскольку оптические моды типа шепчущей галереи сочетают малый эффективный объем локализации поля с очень высокой добротностью, даже в микрорезонаторах из таких “линейных” материалов как плавленый кварц порог проявления различных нелинейных эффектов оказывается очень низким.

При взаимодействии сильного светового поля с веществом зависимость между поляризацией среды, описываемой вектором $\mathbf{P}$, и напряженностью действующего светового поля $\mathbf{E}$ уже не является линейной. Описание нелинейных оптических явлений можно проводить разложением вектора поляризации в ряд, например, в скалярном случае:

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \epsilon_0 \left[\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \ldots\right] \\
&= P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \ldots,
\end{aligned} \tag{11.1}
$$

где $\chi^{(1)}$ — обычная линейная восприимчивость, а $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, $\ldots$ — нелинейные восприимчивости второго, третьего и т. д. порядков. $P^{(1)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E$, $P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2$, $P^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3$ — соответственно, линейная и нелинейные поляризации второго и третьего порядков. Поскольку электрическая индукция в среде

$$
D(t) = \epsilon E(t) = \epsilon_0 E(t) + P, \tag{11.2}
$$

диэлектрическая проницаемость, а значит и показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ оказываются зависимыми от напряженности поля:

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= 1 + \chi^{(1)} + \chi^{(2)} E(t) + \chi^{(3)} E^2(t) + \ldots, \\
n &= n_0 + \frac{1}{2n_0} \chi^{(2)} E(t) + \frac{1}{2n_0} \chi^{(3)} E^2(t) + \ldots.
\end{aligned} \tag{11.3}
$$

В общем случае все нелинейные коэффициенты, также как и линейные, являются тензорами, связывающими компоненты вектора поляризации со всеми возможными произведениями компонентов вектора **E**. По порядку величины коэффициенты нелинейности определяются внутриатомными полями, поэтому $\chi^{(2)} \sim 2 \times 10^{-12}$ м/В, $\chi^{(3)} \sim (\chi^{(2)})^2 \simeq 4 \times 10^{-24}\,$м^2/В^2. В реальных веществах $\chi^{(3)}$, обусловленная различными механизмами $\chi^{(3)}$ 10^{-22}м^2/В^2.

Нелинейность $\chi^{(2)}$ отвечает за электрооптический эффект (управление показателем преломления низкочастотным полем), за генерацию второй гармоники, параметрическую генерацию и трехволновое смешение. Кубическая нелинейность $\chi^{(3)}$ приводит к еще большему разнообразию эффектов: изменение эффективного показателя преломления, самофокусировка, перекрестная фазовая модуляция, гипергеометрическая генерация, генерация третьей гармоники, четырехволновое смешение.

В кристаллах, обладающих центром симметрии (например, CaF_2), а также в изотропных веществах из соображений симметрии $\chi^{(2)} = 0$ и основной вклад в нелинейность вносит кубическая нелинейность, определяемая $\chi^{(3)} \neq 0$, при которой изменение показателя преломления вещества пропорционально квадрату напряженности электрического поля, а значит интенсивности волны. Это явление в литературе часто просто называют эффектом Керра, хотя Керр исследовал лишь нелинейные свойства жидкостей, в которых нелинейность обусловлена ориентационными механизмами. Кубическая поляризация может быть обусловлена различными механизмами: ориентационным, электронным, стрикционным, однако далее мы их не разделяем. Все они имеют малое время отклика $< 10^{-12}$ с. Кроме того, в микрорезонаторах часто проявляется тепловая нелинейность, связанная с нагревом резонатора поглощаемой мощностью, имеющая на много порядков большее время отклика $> 10^{-6}$ с.

Кубическая нелинейность в Фурье представлении определяется тензором четвертого ранга $\chi^{(3)}_{ijkl}(\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$, который имеет ненулевые компоненты для всех сред. Эти эффекты можно разбить на два класса, различающиеся тем колеблется ли наведенная поляризация с частотой падающего поля или нет. К первому типу относят эффекты самовоздействия, а ко второму относятся вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР), рассеяние Мандельштама-Бриллюэна (ВРМБ) и четырехволновое смешение. Как ВКР так и ВРМБ с классической точки зрения могут быть представлены как взаимодействие между падающей волной (накачкой), сигнальной волной (стоксовой или мандельштам-бриллюэновской) и соответственно либо волной, связанной с колебательным возмущением молекул среды, либо звуковой волной. В результате такого взаимодействия в свободном пространстве часть энергии, которая вначале содержится в волне накачки, постепенно преобразуется в сигнальную волну, распространяющуюся в случае ВКР в прямом и обратном направлениях, а в случае ВРМБ только в обратных. В волноводах эти два процесса являются паразитными эффектами, ограничивающими передаваемую мощность, при этом, как правило, эффект ВРМБ при использовании узкополосной накачки является превалирующим.

Оптический микрорезонатор с точки зрения ВРМБ и ВКР нелинейностей представляет собой достаточно специфическую систему, поскольку как оптические, так и акустические колебания в нем возможны лишь на фиксированных частотах (модах).

Поэтому в обычных условиях описанные нелинейные эффекты в основном будут подавлены. Однако в специально подобранных условиях, при одновременном существовании в системе двух оптических мод, разнесенных на частоту собственных акустических колебаний (двойной резонанс) порог параметрических эффектов будет резко снижен.

В центросимметричных средах независимыми являются две компоненты тензора $\chi^{(3)}$. Удобно в качестве базовых выбрать $\chi^{(3)}_{1221}$, описывающую нелинейное изменение поляризации света, и $\chi^{(3)}_{1111}$, которая отвечает за самовоздействие линейно поляризованного света. Можно показать, что в зависимости от механизма нелинейности эти два коэффициента в свою очередь связаны между собой. Так для электронных механизмов $\chi^{(3)}_{1111} = 3\chi^{(3)}_{1221}$, для ориентационных — $\chi^{(3)}_{1111} = 4/3\chi^{(3)}_{1221}$, наконец, для тепловой нелинейности $\chi^{(3)}_{1221} = 0$. Наибольший интерес представляют нелинейности с малым временем отклика ($t < 10^{-12}$ с) — стрикционная, ориентационная, электронная (которую в свою очередь можно представить как сумму штарковского, электронно-ядерного ангармонизма и ангармонизма связанных электронов, возникающие при приближении напряженности оптического поля к атомным полям. Мы будем объединять их в названии керровская или собственная нелинейность среды, поскольку в эксперименте, зачастую, различить их сложно.

Здесь рассмотрим лишь особенности проявления одномодового нелинейного самовоздействия в микрорезонаторах, которые определяются коэффициентом $\chi^{(3)}_{1111}(\omega : \omega, \omega, -\omega)$. Интересно, что проявление достаточно сильных квадратичных эффектов возможно и в плавленом кварце. При этом эффективная квадратичная нелинейность появляется при выпрямлении кубической нелинейности $\chi^{(2)}_{eff} = \chi^{(3)}_{eff}E_{dc}$, где E_{dc} — некоторое наведенное постоянное поле. Такое постоянное поле может быть создано в поверхностном слое при прогреве образца при температуре $\sim 300°$ C во внешнем постоянном поле $\sim 10^7$ В/м в течение десятков минут. Наведенное поле формируется в результате сохраняющейся после такой процедуры наведенной поляризации поверхностных дефектов и примесей. Было показано, что получающееся значение $\chi^{(2)}_{eff}$ в поверхностном слое толщиной ~ 3 мкм (что вполне достаточно для РШГ) может достигать ~ 1 пм/В — 20% нелинейности $LiNbO_3$ [40].

Во врезке приведены правила перевода коэффициентов нелинейности в СИ и СГС, с чем приходится часто сталкиваться при сравнении экспериментальных данных.

Если подставить в (11.3) при $\chi^{(2)} = 0$ поле $E(t) = \frac{1}{2}(E(\omega)e^{-i\omega t} + \text{к.с.})$, то кроме поляризации на тройной частоте получим отклик на частоте волны:

$$P^{(3)}(\omega) = \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)|E(\omega)|^2E(\omega), \tag{11.4}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \bar{n}_2 \langle E(t)^2 \rangle = n_0 + n_2 I, \\ \bar{n}_2 &= \frac{3}{4n_0} \chi^{(3)}(\omega), \\ n_2 &= \frac{3}{4n_0^2 \epsilon_0 c} \chi^{(3)}(\omega). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Оптическая нелинейность в СГС и СИ

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \chi^{(1)} E \left[1 + \frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(1)}} E + \frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(1)}} E^2 + \ldots \right], \\ D &= \epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 E + P \\ &= \epsilon_0 E [1 + \chi] = \epsilon_0 E \left[1 + \chi^{(1)} + 4\pi \chi^{(2)} E + 4\pi \chi^{(3)} E^2 + \ldots \right]. \end{aligned} \tag{11.6}$$

При этом как поля, так и все коэффициенты имеют в СИ и СГС различные единицы измерения и разные переводные коэффициенты. Определяющим коэффициентом при этом является равенство

$$1\text{В СГС} = 10^{-8} c [\text{см/с}] \text{В СИ} = 299.792458 \text{В СИ}, \tag{11.7}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} [E](\text{СИ}) &= \frac{\text{В}}{\text{м}}, \\ [E](\text{СГС}) &= \frac{\text{В СГС}}{\text{см}} = \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \right)^{1/2}, \\ \chi^{(2)}(\text{СИ}) &\simeq 4.19 \times 10^{-4} \chi^{(2)}(\text{СГС}), \\ \chi^{(3)}(\text{СИ}) &\simeq 1.40 \times 10^{-8} \chi^{(3)}(\text{СГС}). \end{aligned} \tag{11.8}$$

$$\begin{aligned} n_2(\text{СИ}) \left(\frac{\text{м}^2}{\text{Вт}} \right) &= \frac{3}{4n_0^2 \epsilon_0 c} \chi^{(3)}(\text{СИ}) \simeq \frac{283}{n_0^2} \chi^{(3)}(\text{СИ}) \left(\frac{\text{м}^2}{\text{В}^2} \right) \\ n_2(\text{СИ}) \left(\frac{\text{м}^2}{\text{Вт}} \right) &= \frac{12\pi^2}{n_0^2 c} 10^{11} \chi^{(3)}(\text{СГС}) \simeq \frac{395}{n_0^2} \chi^{(3)}(\text{СГС}) \end{aligned} \tag{11.9}$$

Здесь

$$I = \frac{n_0 \epsilon_0 c}{2} |E(\omega)|^2 \tag{11.10}$$

— интенсивность поля. Следует отметить, что в ряде публикаций по нелинейной оптике используется другое соглашение для представления Фурье в виде $E(t) = \tilde{E}(\omega)e^{-i\omega t}$+к.с. (без нормирующего коэффициента 1/2). В этом случае $E(\omega) = 2\tilde{E}(\omega)$ и коэффициенты в представлении кубической поляризации будут в 4 раза больше. В ряде работ используется также другое соглашение для записи нелинейной поляризации, что приводит к значениям $\chi^{(3)}$ в четыре раза меньшим (численный коэффициент 1/4 переносится в коэффициент нелинейности). Это следует иметь в виду при использовании экспериментальных значений коэффициентов. Коэффициент нелинейности n_2, измеряемый в Вт/м^2 не зависит от этих соглашений и поэтому удобнее для использования при рассмотрении эффектов самовоздействия.

В плавленом кварце:

$$\begin{aligned} \chi^{(3)} &\simeq 2.5 \times 10^{-22} \text{м}^2/\text{В}^2 \\ n_2 &\simeq 3.2 \times 10^{-20} \text{м}^2/\text{Вт} \end{aligned} \tag{11.11}$$

11.2 Оптическая нелинейность в микрорезонаторах

Рассмотрим действие оптической кубической нелинейности на отдельную высокодобротную моду микрорезонатора. Динамические уравнения для амплитуды поля моды можно получить исходя из уравнения электродинамики:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \tag{11.12}$$

Поскольку

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{11.13}$$

это уравнение можно переписать в виде:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \tag{11.14}$$

Это уравнение является самой общей формой волнового уравнения в среде, поскольку член в правой части, играющий роль возбуждающей силы позволяет учесть, накачку, нелинейность и дисперсию в среде.

Слагаемое

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}. \tag{11.15}$$

в нелинейном общем случае нельзя свести, как мы это обычно делали в этой книге, к одному векторному оператору Лапласа, поскольку $\nabla\cdot\mathbf{E} \neq 0$ из-за нелинейной связи векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Тем не менее, в большинстве практически интересных случаев первым слагаемым в (11.15) все-таки можно пренебречь вследствие его малости.

Если выделить из поляризации линейную часть, то волновое уравнение можно записать в виде:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{n^2(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}_p}{\partial t^2}, \tag{11.16}$$

где $\mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \chi^3(\omega = \omega + \omega - \omega)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$, а $\mathbf{P}_p$ описывает поляризацию, вызванную полем накачки.

Пусть невозбужденное поле некоторой моды в линейном случае описывается уравнением

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e_m} - \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2}\mathbf{e_m} = 0, \tag{11.17}$$

и $\mathbf{e_m}$ нормировано на максимум так, что $\max(\mathbf{e_m}) = 1$, так чтобы $\int |\mathbf{e_m}|^2 dV = V_{eff}$. Представим поле моды в виде:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left[a(t)\mathbf{e}_m(\mathbf{r})e^{-ipt} + \text{к. с.}\right], \tag{11.18}$$

где p — частота гармонической накачки, близкая к собственной частоте ω_m.

Подставляя это выражение в уравнение (11.16), домножая его на $\mathbf{e_m}^*$ и интегрируя по всему объему, получаем, как обычно, отбрасывая члены второго порядка малости:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial t} + \left[-i\Delta\omega - i\mu|a|^2 + \delta_0 + \delta_c\right] a = iF,\\
&\mu = \frac{3\omega_m \chi^{(3)}}{8n^2}\frac{V_{eff}}{V_{jj}},\\
&V_{jj} = \frac{\left(\int_V |e|^2 dV\right)^2}{\int_V |e|^4 dV}.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Здесь $\Delta\omega = p - \omega_m$ и формально добавлены собственные потери $\delta_0 = \delta_a + \delta_s$, включающие потери поглощения δ_a и рассеяния δ_s, которые можно получить, вводя мнимую часть диэлектрической проницаемости, либо конечное удельное сопротивление материала, и потери в элемент связи δ_c (см. главу 9), а F — обобщенная сила, учитывающая эффективность связи и мощность, попадающую в резонатор через элемент связи $\mathcal{P}_{in}$.

$$F = \sqrt{\frac{4\mathcal{P}_{in}\delta_c}{\epsilon_0 \epsilon V_{eff}}}. \tag{11.20}$$

Для мод шепчущей галереи $V_{jj} \simeq 2V_{eff}$ (см. главу 10).

В стационарном режиме при постоянной амплитуде и частоте накачки выражение (11.19) описывает нелинейную амплитудно-частотную характеристику резонатора (АЧХ). Умножая уравнение при $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$ на комплексно-сопряженное, получим выражение:

$$U = \mu^2 A^3 + 2\mu\Delta\omega A^2 + (\delta^2 + \Delta\omega^2)A - F^2 = 0, \tag{11.21}$$

где мы ввели обозначение $A = |a|^2$. Это выражение в отличие от линейной кривой при мощности больше пороговой может иметь два устойчивых, наблюдаемых в эксперименте, и одно неустойчивое состояния (рис. 11.1, рисунки в этой главе сделаны на основании численных расчетов для параметров реальных сферических микрорезонаторов) при одной и той же отстройке $\Delta\omega$. В результате резонансные кривые при наличии нелинейности принимают треугольный вид, зависящий от направления сканирования частоты. Явный вид кривых можно получить, разрешив уравнение в виде двух ветвей $\Delta\omega(A)$.

$$\Delta\omega = -\mu A \pm \sqrt{\frac{F^2}{A} - \delta^2}. \tag{11.22}$$

На АЧХ экспериментальной кривой можно легко определить интервал частот, в пределах которого находится участок бистабильности. На рис. 11.1 (внизу) этот интервал заключен между значениями отстроек $\Delta\omega_2$ и $\Delta\omega_1$. Чтобы определить $\Delta\omega_{1,2}$ можно найти те точки кривой АЧХ, в которых проходят вертикальные касательные, которые определяются выражением $\frac{\partial A}{\partial\omega} = \infty$. Так будет, если:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= 3\mu^2 A^2 + 4\Delta\omega\mu A + \Delta\omega^2 + \delta^2 = 0, \\ \Delta\omega_{1,2} &= -\mu A_{1,2}\left[2 \mp \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\mu^2 A_{1,2}^2}}\right] \end{aligned} \tag{11.23}$$

Из этого выражения можно найти пороговое условие наблюдения нелинейности:

$$\begin{aligned} \frac{\mu A}{\delta} &= \frac{\mu F^2}{2\delta^3} = 1 \\ \mathcal{P}_{in} &> \frac{4n^4\epsilon_0 V_{jj}\delta^3}{3\omega_m \chi^{(3)}\delta_c} = \frac{n^2 V_{jj}\delta^3}{c\omega_m n_2 \delta_c}. \end{aligned} \tag{11.24}$$

Практически оценить значение порога можно из условия равенства нелинейного сдвига резонансной частоты полуширине собственной резонансной кривой $\chi^{(3)}|E|^2 \sim 2/Q$.

При критической связи $\delta = 2\delta_c = \frac{Q}{2\omega_m}$ и

$$\begin{aligned} \frac{\mu A}{\delta} &= \frac{\mu F^2}{2\delta^3} = 1 \\ \mathcal{P}_{in} &> \frac{\pi n^2 V_{jj}}{\lambda Q^2 n_2}. \end{aligned} \tag{11.25}$$

Характерной особенностью этого выражения является прямая зависимость пороговой мощности наблюдения бистабильности от эффективного объема и обратная от квадрата добротности, что и обуславливает легкость наблюдения в высокодобротных резонаторах нелинейных эффектов. Такая зависимость от добротности связана с тем, что бистабильность наблюдается тогда, когда нелинейный сдвиг резонансной частоты

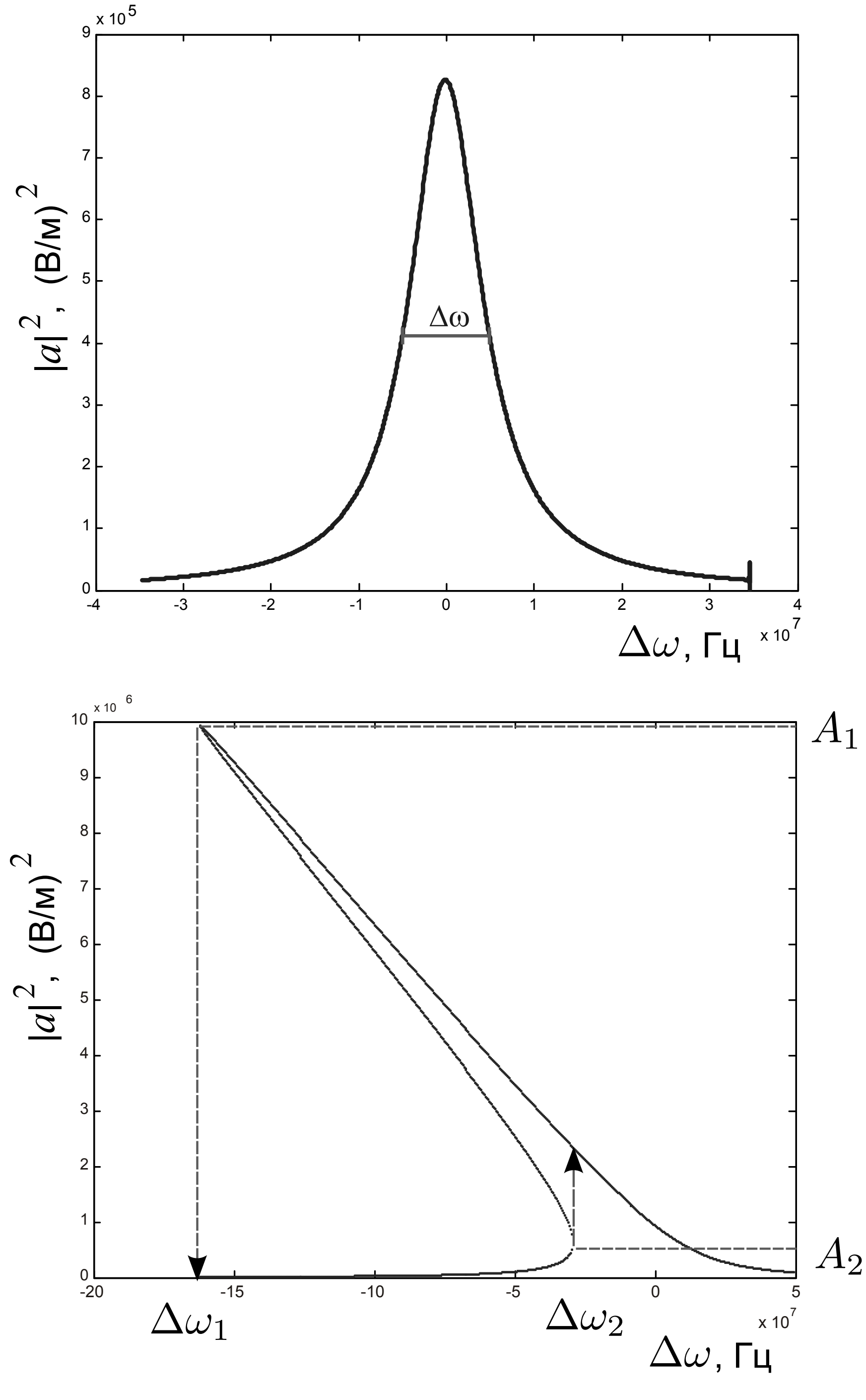


Рис. 11.1: Амплитудно-частотная характеристика линейного (вверху) и нелинейного (внизу) оптического микрорезонатора.

превышает ширину резонансной кривой. При этом нелинейный сдвиг пропорционален энергии поля в резонаторе, пропорциональной при заданной мощности добротности, а ширина резонансной кривой обратно пропорциональна добротности. При эффективном объеме микросферы 10^{-15} м^3 (что соответствует фундаментальной моде в микросферах диаметром 100 мкм) и добротности 10^8, порог достигается уже при входной мощности ~ 20 мкВт.

Определение добротности резонатора — одна из задач, с которой часто приходится сталкиваться экспериментатору. Если речь идет о линейном резонансе, то существует простой и наглядный способ определить добротность. Она будет численно равна отношению резонансной частоты ω_m к ширине резонансной кривой $\Delta\omega$ на уровне убывания интенсивности в 2 раза (рис. 11.1, сверху). Однако нелинейное поведение системы усложняет задачу. Вид амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) сильно меняется (рис. 11.1, снизу) и определить добротность таким простым способом не представляется возможным. Для этого в эксперименте обычно от нелинейности стремятся избавится, ослабляя связь и уменьшая мощность, что ухудшает отношение сигнал-шум. Можно, однако, определить добротность и по сильно нелинейной кривой ($\mu|a|^2 > gg\delta$), полученной при обоих направлениях сканирования.

Задание 28. *Найдите выражение для определении добротности по сильно нелинейной резонансной кривой.*

11.3 Тепловая нелинейность

Зависимость резонансной частоты в микрорезонаторах может быть обусловлена не только непосредственной нелинейной зависимостью поляризации атомов и молекул от приложенного поля, но и может быть связана с поглощением оптического излучения в резонаторе. Такое поглощение вызывает нагрев среды и изменяет параметры резонатора вследствие эффектов теплового расширения и зависимости показателя преломления от температуры. Поскольку поглощаемая энергия прямо пропорциональна циркулирующей мощности, а значит квадрату поля, то и изменение показателя преломления или изменение размера, пропорциональные выделяющейся теплоте и изменению температуры будет пропорционально квадрату поля. Поэтому тепловая нелинейность проявляется обычно, так же как и керровская кубическая нелинейность, отличаясь от нее, однако, временем отклика и тем, что вызывается лишь долей фотонов, поглощенных в среде, а не всеми квантами поля — это важно для квантовых приложений микрорезонаторов. Особенностью тепловой нелинейности, связанной с ее малым временем отклика является то, что она не может быть просто описана одним коэффициентом $\chi^{(3)}$, поскольку зависит от скорости изменения оптической мощности, то есть нелинейность является частотнозависимой и может описываться несколькими характерными временами релаксации, определяемыми различными механизмами тепловой релаксации. Такая временная зависимость может порождать в резонаторе регенеративные осцилляции [41, 42].

Предположим, что часть электромагнитной энергии моды резонатора переходит в тепловую форму, что вызывает локальное изменение температуры. Показатель преломления области моды в этом случае будет меняться в зависимости от изменения температуры моды $T(\mathbf{r})$. В плавленом кварце влияние температурной зависимости показателя преломления на частоту резонатора на порядок превышает влияние теплового расширение. Для простоты поэтому будем считать, что значение показателя преломления изменяется только благодаря первому эффекту.

$$\begin{aligned} n(\omega, \mathbf{r}) &= n_0(\omega) \left[1 + \beta(T(\mathbf{r}) - T_0)\right], \\ \beta &= \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial T}. \end{aligned} \tag{11.26}$$

В кристаллах, однако, эти эффекты могут быть сравнимы по величине, и тогда кроме рассмотрения теплопроводности необходимо решать задачи упругости.

Подставим модифицированное уравнение для показателя преломления в основное волновое уравнение (11.16) и получим:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + a(t)(\delta - i\Delta\omega - i\omega\beta\Theta) = iF, \tag{11.27}$$

где Θ — усредненная по объему моды температура:

$$\Theta = \frac{\int |\mathbf{e}_m|^2 (T(\mathbf{r}) - T_0) dV}{\int |\mathbf{e}_m|^2 dV}. \tag{11.28}$$

Как видно из этого уравнения, $a(t)$ зависит от динамики температуры Θ, вызванной изменением собственной частоты резонатора из-за его нагрева. В свою очередь, Θ зависит от $a(t)$, поскольку мощность потерь и величина тепловой перестройки частоты пропорциональны квадрату амплитуды колебаний в резонаторе. Так осуществляется тепловая обратная связь.

Электромагнитное поле мод шепчущей галереи в микрорезонаторах шепчущей галереи сосредоточено в малом по сравнению со всем резонатором объеме. Уравнение теплопроводности для резонатора можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D_T \nabla^2 T = \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{r})}{C\rho}. \tag{11.29}$$

Здесь $D_T = \frac{\kappa}{\rho C}$ — температуропроводность (κ — теплопроводность, C — удельная теплоемкость, ρ — плотность), $\mathcal{Q}$ — мощность тепловых источников в единице объема, которая равна оптической мощности, поглощающейся в единице объема. Поскольку полная мощность $\mathcal{P} = \mathcal{E}\omega/Q$, воспользовавшись выражением для плотности энергии (см. главу 2), мы можем записать:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon\epsilon_0 |a|^2 |\mathbf{e_m}(\mathbf{r})|^2 \omega}{2Q_{abs}}, \tag{11.30}$$

где добротность, определяемая поглощением (см. 10.5),

$$Q_{abs} = \frac{2\pi n_0}{\alpha_{abs}\lambda} = \frac{n_0\omega}{\alpha_{abs}c}. \tag{11.31}$$

Усредним (11.29), умножив его на $|\mathbf{e_m}(\mathbf{r})|^2$ и, проинтегрировав по объему резонатора, можно получить, используя формулу Грина для второго члена уравнения:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \delta_\theta\Theta = \frac{n_0\epsilon_0\alpha_{abs}c|a|^2V_{eff}}{2C\rho V_{jj}},$$
$$\delta_\theta = -\frac{D_T\int\nabla^2|\mathbf{e_m}(\mathbf{r})|^2dV}{\int|\mathbf{e_m}(\mathbf{r})|^2dV}. \tag{11.32}$$

Характерное время тепловой нелинейности δ_θ^{-1} зависит от конфигурации моды. Используя гауссово приближение (6.47):

$$\mathbf{e}_m \simeq \exp\left[-\frac{(r-a_m)^2}{2r_r^2} - \frac{z^2}{2r_z^2} + im\phi\right]\mathbf{i}_s, \tag{11.33}$$
$$r_z = \sqrt{\frac{ab}{m}},$$
$$r_r = 0.77am^{-2/3},$$
$$a_m = \frac{T'_{m1}\lambda}{2\pi n},$$

можно получить

$$\delta_\theta \simeq 2D_T\left[\frac{1}{r_r^2} + \frac{1}{r_z^2}\right]. \tag{11.34}$$

Во многих случаях и, в частности, в микросферах $r_z^2 \gg r_r^2$ и поэтому

$$\delta_\theta^{-1} \simeq \frac{0.3a^2}{D_T m^{4/3}}. \tag{11.35}$$

Так, для плавленого кварца $D_T = 0.84 \times 10^{-6}$м^2/с и в микросферах диаметром 100 мкм $\delta_\theta^{-1} \sim 3 \times 10^{-7}$ с. В квазистационарном случае, когда $\frac{\partial\Theta}{\partial t} \ll \frac{\Theta}{\tau_\theta}$, тепловая нелинейность становится полностью аналогичной керровской нелинейности, поскольку в этом случае

$$\Theta = \frac{n_0\epsilon_0\alpha_{abs}c|a|^2V_{eff}}{2C\rho V_{jj}\delta_\theta},$$
$$\nu = \frac{\epsilon_0\alpha_{abs}cV_{eff}\omega n_0\beta}{2C\rho V_{jj}\delta_\theta},$$
$$\chi_\theta^{(3)} = \frac{4n_0^3\epsilon_0\alpha_{abs}c\beta}{3C\rho\delta_\theta}.$$
$$n_{2\theta} = \frac{\alpha_{abs}n_0\beta}{C\rho\delta_\theta}.$$
$$\tag{11.36}$$

Подставив в это выражение поглощение $\alpha_{abs} \sim 10^{-3}\,\text{м}^{-1}$, что соответствует в видимом диапазоне максимальной продемонстрированной добротности в кварцевых микросферах 10^{10} [36], а также другие параметры плавленого кварца, мы получим для резонаторов диаметром 100 мкм.

$$n_{2\theta} \sim 2 \times 10^{-21}\text{м}^2/\text{Вт}, \tag{11.37}$$

что на порядок меньше коэффициента керровской нелинейности. Однако в реальных резонаторах при наличии примесей и на других длинах волн поглощение может быть много больше, и тогда тепловая нелинейность будет доминировать.

Мы рассмотрели модель тепловой релаксации резонатора за счет теплопроводности, однако, если изменения мощности или перестройка частоты накачки происходит очень медленно, медленнее, чем характерное время прогрева всего объема резонатора, могут проявиться и другие процессы, в частности, тепловая релаксация всего резонатора как целого за счет конвекции в окружающем воздухе и теплопроводности ножки резонатора (последний процесс будет доминировать в микротороидах с кремниевой ножкой). При воздушном охлаждении сферического резонатора [41]:

$$\begin{aligned} \delta_{\theta,\text{возд}}^{-1} &\simeq \frac{a^2}{0.3D_T} \simeq 10^{-2}\,\text{с} \\ n_{2\theta,\text{возд}} &\simeq n_{2\theta}\frac{V_{jj}\delta_\theta}{V\delta_{\theta,\text{возд}}} \simeq 4 \times 10^{-19}\text{м}^2/\text{Вт}, \end{aligned} \tag{11.38}$$

что на порядок больше керровской нелинейности.

Уравнения (11.32) и (11.27) приводят к нелинейной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) + a(t)(\delta - i(\Delta\omega - i\omega\beta\Theta) = iF \\ \dot{\Theta} + \delta_\theta\Theta = \frac{\nu\delta_\theta}{\omega\beta}|a|^2. \end{cases}$$

Эти уравнения описывают динамическое поведение микрорезонатора с учетом тепловой нелинейности. Систему уравнений (11.39) можно решать численно.

На рис. 11.2 сверху представлена АЧХ резонатора с мощностью накачки 10 мкВ. Это типичная картина для нелинейного резонанса. На этом рисунке, точно так же как и на 11.1 (внизу), можно выделить режимы стабильной работы резонатора и неустойчивые режимы (бистабильность).

Важной особенностью тепловой нелинейности является возможность самостабилизации резонанса при постоянной частоте накачки на правом склоне резонансной лоренцевской кривой. При этом малое уменьшение мощности уменьшает температуру моды, что приведет к дрейфу частоты в сторону резонанса, сопровождающемуся увеличению поступающей в резонатор мощности. И наоборот, увеличение мощности лазера приведет к отстройке от резонанса и к уменьшению поглощаемой мощности. Этот эффект оказывается очень полезным в эксперименте, когда требуется длительное измерение на резонансной частоте и позволяет обойтись в ряде случаев без электронных схем обратной связи для привязки к резонансу.

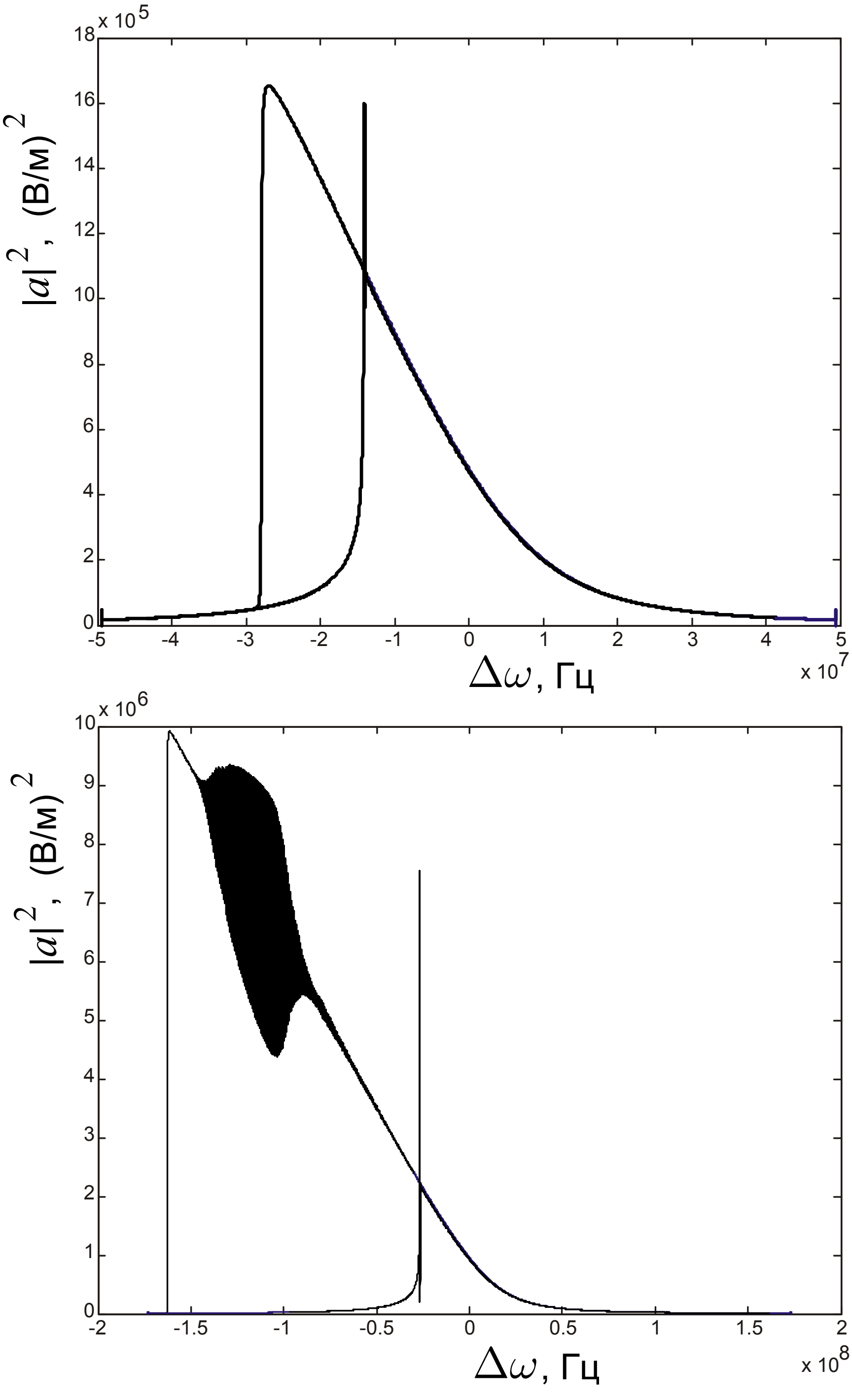


Рис. 11.2: Расчетная АЧХ резонатора с тепловой нелинейностью при различных значениях мощности, поступающей в резонатор: 10 мкВ (сверху) и 60 мкВ (снизу).

11.4 Термическая колебательная неустойчивость

Если увеличить мощность, поступающую в резонатор при наличии тепловой нелинейности, картина может качественно изменится (Рис.11.2, снизу). Кроме двух обычно наблюдаемых стабильных режимов работы, на одном из склонов кривой нелинейного резонанса появляется новая особенность — колебательная неустойчивость в виде регенеративных квазипериодических осцилляций. Появление нового режима связано с тем, что нелинейность системы носит инерционный характер.

Анализ результатов численного моделирования показывает, что в случае, когда в системе термическая нелинейность играет определяющую роль и другими механизмами нелинейности можно пренебречь, появление режима колебательной нестабильности определяется мощностью, поглощаемой в резонаторе. В отличие от аналитического анализа тепловой неустойчивости ниже, численный расчет позволяет не только получить области устойчивости, но и определить вид осцилляций при различных режимах возбуждения и мощностях накачки.

Экспериментально колебательная неустойчивость на склоне резонансной кривой впервые наблюдалась в микросферах в работе [41] (рис. 11.3). Кроме того, колебательная неустойчивость была продемонстрирована в дисковых РШГ из кремния в котором зависимость показателя преломления от температуры гораздо сильнее, чем в плавленом кварце.

Условием наблюдения осцилляций является относительно большое оптическое поглощение в материале, обеспечивающее преобладание тепловой нелинейности над керровской [42].

Рассмотрим здесь более подробно основное уравнение (11.39) для амплитуды напряженности поля внутри резонатора с учетом кубической нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$.

Представим $a(t)$ в виде суммы действительных квадратурных компонент:

$$\begin{aligned} a(t) &= u(t) + iv(t), \\ |a|^2 &= A = u^2 + v^2. \end{aligned} \tag{11.39}$$

$$\begin{cases} \dot{u} + \delta u + [\Delta\omega + \mu(u^2+v^2) + \omega\beta\Theta]u = 0, \\ \dot{v} + \delta v - [\Delta\omega + \mu(u^2+v^2) + \omega\beta\Theta]v = F, \\ \dot{\Theta} + \delta_\theta\Theta = \frac{\nu\delta_\theta}{\omega\beta}(u^2+v^2). \end{cases}$$

В состоянии равновесия $A_0(u_0, v_0)$, производные в уравнениях (11.40) обращаются в нуль. В этом случае A_0, как следует из системы, будет удовлетворять следующему уравнению:

$$(\delta^2 + (\Delta\omega + (\mu+\nu)A_0)^2)A_0 - F^2 = 0 \tag{11.40}$$

Это выражение описывает классический гистерезисный отклик нелинейного резонатора с двумя устойчивыми и одной неустойчивой ветвями. Интенсивность максимальна не на резонансной частоте, а на отстройке $\Delta\omega_0 = -(\mu+\nu)A_0$, вызванной керровской и тепловой нелинейностью, также как и в случае простой керровской нелинейности.

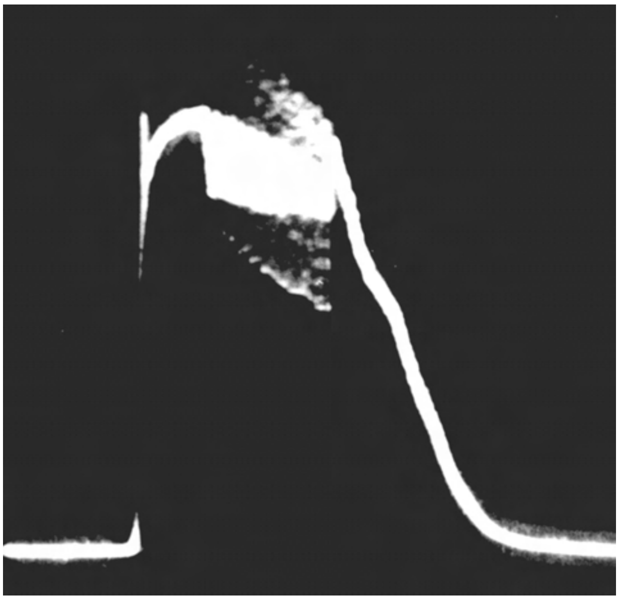


Рис. 11.3: Оптический нелинейный резонанс с осцилляторной неустойчивостью в микросфере на экране осциллографа

Динамическое поведение фазовых траекторий может быть получено из системы линеаризованных уравнений, получающихся из (11.40) введением малых параметров отклонения от стационарного решения.

$$\begin{aligned}\xi &= u - u_0,\\ \eta &= v - v_0,\\ \zeta &= \Theta - \Theta_0.\end{aligned} \tag{11.41}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{\xi} = -(\delta + 2\mu u_0 v_0)\xi - (\Delta_n + 2\mu v_0^2)\eta - \omega_0\beta v_0\zeta,\\ \dot{\eta} = (\Delta_n + 2\mu u_0^2)\xi - (\delta - 2\mu u_0 v_0)\eta + \omega_0\beta u_0\zeta,\\ \dot{\zeta} = 2\frac{\nu\delta_\theta u_0}{\omega_0\beta}\xi + 2\frac{\nu\delta_\theta v_0}{\omega_0\beta}\eta - \delta_\theta\zeta,\end{array}\right. \tag{11.42}$$

где $\Delta_n = \Delta\omega + (\nu + \mu)A_0$ — стационарная отстройка от нелинейного резонанса.

Решение уравнения (11.42) определяется корнями характеристического уравнения:

$$\begin{aligned}\Lambda^3 + [2\delta + \delta_\theta]\Lambda^2 + [(\mu+\nu)(3\mu+\nu)A_0^2 + 2\Delta\omega(2\mu+\nu)A_0 + \Delta\omega^2 + \delta^2\\ + 2\delta\delta_\theta]\Lambda + \delta_\theta(3(\mu+\nu)^2 A_0^2 + 4\Delta\omega(\mu+\nu)A_0 + \Delta\omega^2 + \delta^2) = 0\end{aligned} \tag{11.43}$$

Из этого алгебраического уравнения, используя критерий Рауса-Гурвица можно найти области устойчивости системы (11.40). Число положительных корней, приводящих к нестабильности, определяется количеством смен знака в последовательности

$$T_0,\ T_1,\ T_1T_2,\ T_2T_3..., \tag{11.44}$$

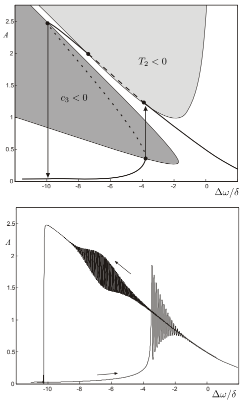


Рис. 11.4: Области устойчивости нелинейного резонатора с релаксационной нелинейностью и численный расчет АЧХ в нем

где

$$T_0 = c_0 > 0,\ T_1 = c_1,\ T_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix},\ T_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{11.45}$$

а c_0, c_1, c_2, c_3 — коэффициенты полинома (11.43) по Λ, $c_4 = c_5 = 0$. $T_0 = c_0, T_1 = c_1, T_1T_2 = (c_2c_1 - c_3)T_1, T_3 = c_3$.

Поскольку $c_0 = 1$ и $c_1 = 2\delta + \delta_\theta$ положительны, поведение системы определяется нулями двух других коэффициентов T_2 и $T_3 = c_3$:

$$\begin{aligned} A_{a_3} &= -\frac{2\Delta\omega \pm \sqrt{\Delta\omega^2 - 3\delta^2}}{3(\mu+\nu)}, \\ A_{T_2} &= [-\Delta\omega(2\mu + \nu - \nu\delta_\theta/2\delta) \pm (\Delta\omega^2(\mu - \nu\delta_\theta/2\delta)^2 \\ &\quad - (\delta+\delta_\theta)^2(\mu+\nu)(3\mu + \nu - \nu\delta_\theta/\delta))^{1/2}] \\ &\quad \times [(\mu+\nu)(3\mu+\nu-\nu\delta_\theta/\delta)]^{-1}. \end{aligned} \tag{11.46}$$

Первая пара нулей, определяемых первым выражением, указывает границы ненаблюдаемой полностью неустойчивой области на гистерезисной резонансной кривой. Вторая пара нулей, определяемых вторым выражением, указывает на возможность появления тепловой колебательной неустойчивости. Эти осцилляции возможны, если область, определяемая второй парой нулей, лежит вне области полной неустойчивости (рис. 11.4).

Решения (11.46) упрощаются в сильно нелинейном режиме, когда $\nu A, \mu A, |\Delta\omega| \gg \delta, \delta_\theta$. В этом случае нули определяются тремя асимптотическими прямыми: $A_{c_3,1}(\mu+\nu) = -\Delta\omega/3$, $A_{c_3,2}(\mu+\nu) = A_{T_2,1}(\mu+\nu) = -\Delta\omega$, $A_{T_2,2}(3\mu + \nu - \nu\delta_\theta/\delta) = -\Delta\omega$. Вторая асимптота совпадает также с асимптотой для максимальной интенсивности поля в нелинейном резонаторе A_0. Термические осцилляции возможны, только если $A_{T_2,2} > A_{a_3,2}$ т. е. $\nu > 2\mu\delta/\delta_\theta$:

$$n_2 < \frac{n_0^2 \alpha_{abs}\beta}{c\alpha_\Sigma C\rho} \simeq 3 \times 10^{-19}\frac{\alpha_{abs}}{\alpha_\Sigma}, \tag{11.47}$$

где подставлены параметры для плавленого кварца, $\alpha_\Sigma = \frac{2\delta n}{c}$ — суммарные потери в резонаторе, включающие потери рассеяния внутри и на поверхности, а также потери на элемент связи. Это означает, что керровская нелинейность может подавлять в плавленом кварце релаксационные осцилляции, если потери в нем в основном определяются рассеянием, а не поглощением и $\alpha_{abc}/\alpha_\Sigma < 1/10$, что обычно реализуется в чистом плавленом кварце.

При квазипериодических осцилляциях состояние равновесия типа фокус, которое определяется нулями функции T_2, становится неустойчивым и в системе появляются мягкие бифуркации типа Андронова-Хопфа с предельным циклом. При некоторых условиях, в частности, при существовании вырожденных дублетов, в системе возможно появление хаотических колебания. Все эти режимы наблюдались экспериментально.

Глава 12

Изготовление и исследование микрорезонаторов

12.1 Плавленый кварц

Кварц, химически являющийся диоксидом кремния (SiO_2), — один из самых распространенных минералов на Земле, в земной коре на его долю приходится около 12%. Он входит в большинство горных пород, слагающих литосферу: граниты, гнейсы и т.д., является главным, а то и почти единственным компонентом песчаника, галечника, кварцита, песка, гравия и жильных пород. Кварц встречается в природе и в виде отдельных прозрачных кристаллов горного хрусталя, достигающих гигантских размеров, а также в виде других форм, широко используемых в качестве поделочных, полудрагоценных и драгоценных камней (агат, оникс, халцедон, опал, цитрин, аметист, сердолик, топаз), окраска которых обусловлена примесями. Кварц — кристалл, но при температуре выше 1700 градусов он плавится и при последующем быстром охлаждении превращается а изотропное кварцевое стекло. В природе такое стекло называется обсидианом. Плавленый кварц высокой чистоты обладает чрезвычайно низкими оптическими потерями в видимом и ближнем ИК диапазонах и именно кварц является главным материалом в оптических кабелях, опутавших земной шар. Мировое производство плавленого кварца составляет порядка 200000 тонн в год.

Для получения плавленого кварца высокой частоты используется несколько методов. Примечательно, что в англоязычной литературе плавленый кварц обозначают двумя разными словами: “fused quartz” и “fused silica”. Fused quartz действительно, согласно названию, получают плавлением высокочистого кристаллического кварца, а синтетический “fused silica” получается искусственно либо осаждением окисленного газообразного кремния, либо чаще пиролизом или гидролизом в кислородно-водородном пламени при температуре около 1800° из тетрахлорида кремния $SiCl_4$ с последующим осаждением оксида на внутреннюю поверхность кварцевой трубы (внутренний про-

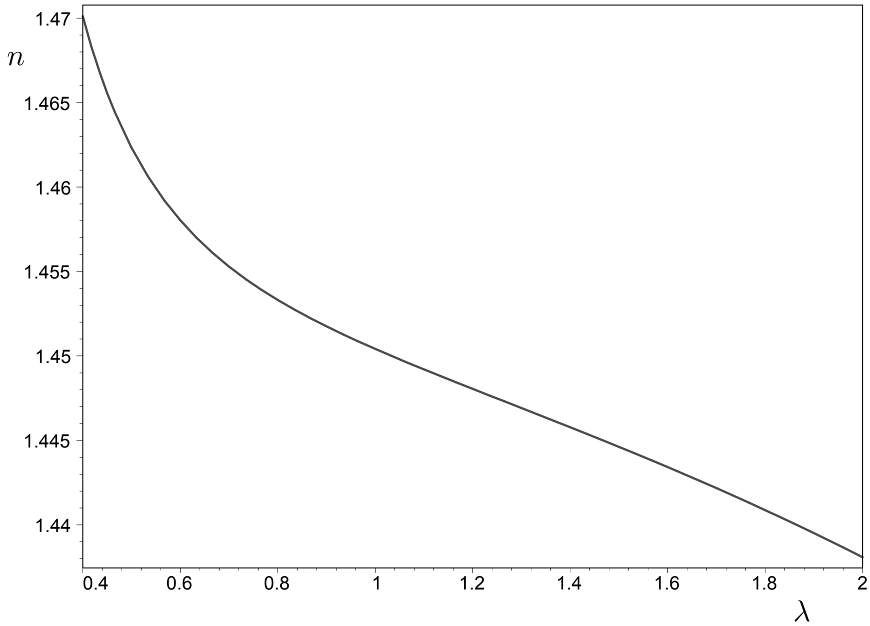


Рис. 12.1: Показатель преломления плавленого кварца

цесс) либо на кварцевый стержень (внешний процесс).

$$SiCl_4 + O_2 \rightarrow SiO_2 + 2Cl_2$$
$$SiCl_4 + 2H_2O \rightarrow SiO_2 + 4HCl$$

Тетрахлорид получают сжиганием кремния или его соединений в хлоре

$$Si + 2Cl_2 = SiCl_4 \tag{12.1}$$

Эта жидкость с удушливым запахом кипит при температуре $57.6°$ и может быть очень хорошо очищена многократной дистилляцией. Из тетрахлорида получают как высокочистый кремний для электроники, так и плавленый кварц для волноводов.

Показатель преломления плавленого кварца в диапазоне длин волн $0.21 - 3.71$ мкм определяется дисперсионной формулой Селмейера:

$$n^2 - 1 = \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - 9.896161^2}. \tag{12.2}$$

Материальная дисперсия групповой скорости определяет фазовый синхронизм нелинейных процессов.

$$D = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2n}{d\lambda^2} \tag{12.3}$$

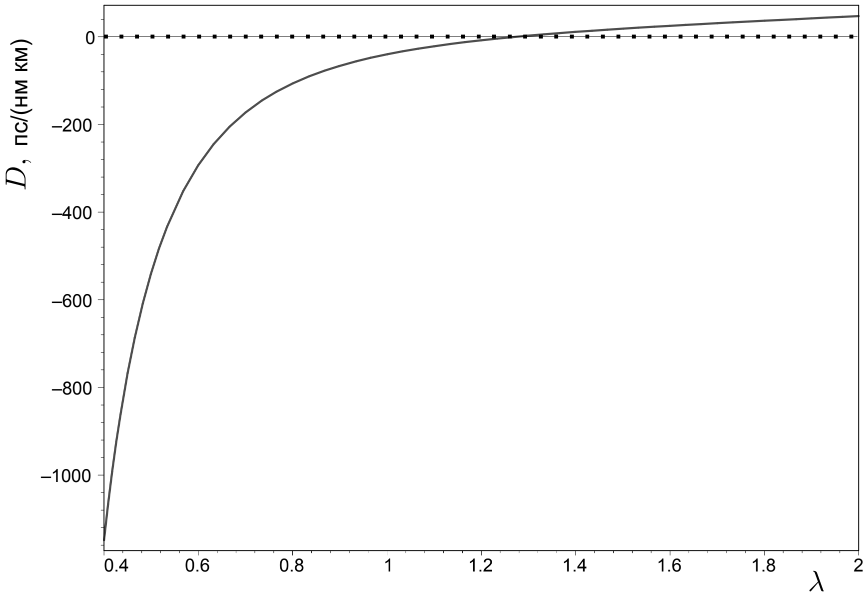


Рис. 12.2: Материальная дисперсия групповой скорости в плавленом кварце

Как видно из рис. 12.2 на длине волны около 1.273 мкм материальная дисперсия обращается в нуль, что означает, что в резонаторах существует диапазон длин волн (сдвинутый из-за собственной дисперсии резонатора в область больших длин волн) в котором моды следуют практически эквидистантно. Это обеспечивает возможность параметрической генерации и получения оптических гребёнок [27].

Температурный коэффициент показателя преломления в видимом и ближнем ИК диапазоне $\frac{dn}{dT} \simeq 1.0 - 1.2 \times 10^{-5}$ и может быть аппроксимирован выражением:

$$\frac{dn}{dT} = \Big(9.39059 + 0.235290\lambda^{-2} - 1.318560 \times 10^{-3}\lambda^{-4} + 3.028570 \times 10^{-4}\lambda^{-6}\Big) \times 10^{-6}, \tag{12.4}$$

где длина волны λ в измеряется микрометрах.

12.2 Изготовление кварцевых сферических мини и микрорезонаторов

Для изготовления сферических минирезонаторов используется высокочистый плавленый кварц, например, отечественный типа КУВИ или типа KS-4V производства США. В качестве заготовок удобнее всего брать небольшие цилиндры сечением до 10 мм^2 и длиной до 40мм с полированной поверхностью. Перед использованием нарушенный поверхностный слой образцов после предварительной стандартной очистки стравливается в плавиковой кислоте погружением примерно на 1 минуту и промывается в дистиллированной воде.

Для удобства манипуляций очищенные образцы приваривались к кварцевому стержню в пламени газовой или водородной горелки. Затем образец приваривался другим концом ко второму кварцевому стержню и растягивался в пламени горелки после нагрева посередине до толщины 0.1 — 1.0 миллиметр. После пережигания получающейся кварцевой нити и обламывания слишком длинных концов получались сразу две заготовки из которых и изготавливались в дальнейшем резонаторы.

Общий принцип изготовления резонатора из заготовки состоит в следующем. Самый кончик заготовки приваривается к кварцевой подложке, на которой планируется размещение резонатора, разогревается до белого свечения и растягивается до нужной толщины $\sim 10 - 100$ мкм в зависимости от требуемого размера будущего резонатора и чуть выше в расплавленном состоянии обрывается. Следует иметь в виду, что толщина растянутого участка определяется скоростью растяжения, поэтому для изготовления резонаторов очень малого размера и, соответственно, для формирования их заготовок диаметром порядка микрометров движения должны быть достаточно быстрые.

В результате на подложке оказывается прикрепленный короткий кварцевый ус длиной ~ 1 мм с утолщением на конце. При разогревании этого утолщения до температуры плавления, под действием сил поверхностного натяжения образуется сферический резонатор правильной формы на ножке. Можно отметить, что сходным способом пользовался Антони ван Левенгук, для получения стеклянных микросферических линз своих микроскопов.

Именно таким способом были получены резонаторы с рекордной добротностью. Для изготовления обычных резонаторов с добротностью порядка 10^8 в лаборатории удобно использовать стандартные коммерческие оптические волокна толщиной 125 мкм, испарив или механически удалив с участка в несколько сантиметров защитную пластиковую рубашку. После растяжения до требуемой толщины, которая определяется нужными размерами будущего резонатора и составляет 1/3—1/10 его диаметра и разделения двух концов волокна (для формования относительно больших резонаторов можно сначала сформовать утолщение — заготовку будущей микросферы, используя два участка растяжения), резонатор формируется на растянутом конце. Этот способ позволяет обойтись без дополнительных подложек, поскольку резонаторы в экспериментальной установке могут фиксироваться за свободный конец волокна, и позволяет придать волокну локальным нагревом нужный изгиб.

Как это ни кажется странным, все манипуляции можно достаточно просто делать вручную в поле зрения микроскопа, для этого не требуются исключительные навыки микроминиатюристов, пишущих портреты внутри макового зернышка. Именно вручную было сделано большинство резонаторов в лаборатории МГУ. Последовательность изготовления в пламени микрогорелки показана на кадрах видеозаписи на рис. 12.3.

Преимущество ручного изготовления состоит в возможности свободной манипуляции и подстройки к вариациям пламени микрогорелки. При использовании для

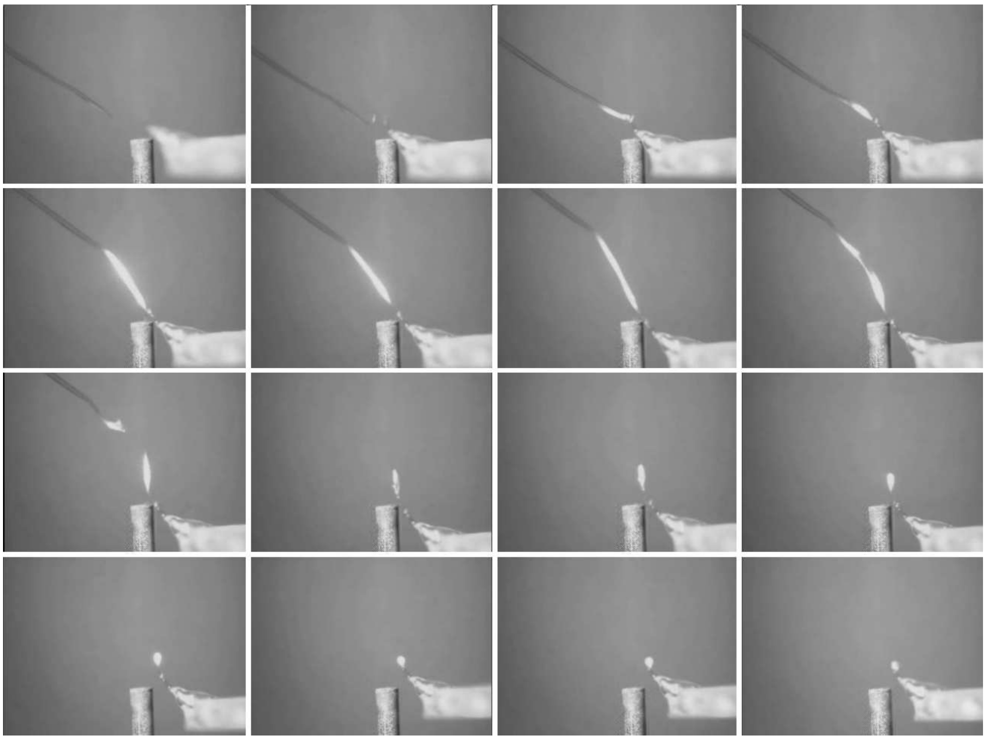


Рис. 12.3: Изготовление микрорезонаторов с помощью микрогорелки

изготовления резонаторов стандартных оптических волокон для растяжения и формования резонатора естественно использовать трехкоординатные микрометрические подачи. При этом крайне желательно обеспечить дополнительно возможность вращения заготовки, чтобы иметь возможность прогревать ее с разных сторон, выправляя искажения формы — при нагреве в фокусе CO_2 лазера волокно и формирующаяся микросфера из-за неравномерного плавления стремятся наклониться в сторону луча, при нагреве в пламени, наоборот от пламени.

Для изготовления микросфер в МГУ было последовательно опробованы несколько методов, что позволило постепенно увеличить достигаемое значение добротности с $\sim 3 \times 10^8$ [2, 43] до $\sim 10^{10}$[36]. Вначале микрорезонаторы изготавливались с помощью $\mathrm{CO_2}$ лазера (мощностью 40 Вт). Несмотря на простоту и кажущуюся чистоту обработки, лазерный процесс изготовления диэлектрических микросфер обладает рядом недостатков. Главным из них является невозможность достижения однородного температурного поля на поверхности образца. Сфокусированный луч лазера прогревает волокно и резонатор неравномерно, в первую очередь со стороны, обращенной к лучу лазера, где происходит поглощение лазерного излучения, что приводит к отклонениям формы резонатора от сферической. Кроме того, неоднородность нагрева вызывает поверхностное испарение кварца и его осаждение на более холодные области. Испарение можно было отчетливо наблюдать по появлению слабого белого налета на поверхности подложек.

Оказалось, что резонаторы лучшего качества (с добротностью $\sim 10^9$) получаются при их изготовлении в пламени обыкновенной газовой горелки с соплом малого диаметра. Наилучшие результаты, однако, были получены пока с помощью водородно-кислородной микрогорелки. Такую микрогорелку электролизного типа можно достаточно просто изготовить в лабораторных условиях или использовать чистый водород и кислород в газовых баллонах.

Как было установлено опытным путем, наилучшие результаты получались при последующем отжиге в течении нескольких минут уже сформированного резонатора в области пламени с более низкой температурой.

Аналогичным образом можно изготавливать микросферы из разннобразных оптических стекол с малыми оптическими потерями [34].

12.3 Веретенообразные резонаторы

В последнее время интерес привлекают веретенообразные (бутылкообразные в англоязычной литературе) резонаторы — вытянутые микрорезонаторы с МШГ, сформированные не как микросферы на конце кварцевой нити, а посередине. При сильной вытянутости резонатора МШГ в нем имеют вид широкого пояса с большим числом максимумов в меридиональном направлении, аналогичные соответствующим модам с большим $p = \ell - m$ в микросферах. Такие моды можно хорошо описывать в рамках подходов, разработанных в главах 7 и 8. Концентрация электромагнитного поля для таких мод максимальна по краям пояса, соответствующего каустическим точкам поворота $\pm z_c$, а не на экваторе, как у фундаментальных мод. Соответственно, и возбуждать такие моды лучше, располагая элемент связи вблизи краев пояса моды. Резонаторы такого типа имеют ряд особенностей, которые могут быть востребованы для некоторых применений. В частности, растягивая концы волокна, на котором располагается резонатор, можно в достаточно широком диапазоне перестраивать его резонансные частоты или наоборот, измеряя сдвиг частоты измерять натяжение и флуктуации волокна. Плотность мод в таком резонаторе обычно выше, чем в микросфере того же диаметра, что также может быть интересно для некоторых приложений. В резонаторах такого типа была продемонстрирована добротность выше 10^8.

12.4 Кварцевые микротороиды

Развитием идеи оптических микросфер стали тороидальные микрорезонаторы [3] из плавленого кварца, изготавливаемые по гибридной технологии. Резонаторы изготавливаются из коммерчески доступных кремниевых подложек со сформированным на поверхности слоем аморфного оксида кремния толщиной 1 или 2 мкм. Оксидная пленка формируется на поверхности кремния термическим окислением при температуре $700-1300^\circ$ C, при взаимодействии с кислородом (сухое окисление), в присутствии хлора (хлорное окисление), с водяным паром (влажное окисление), с молекулами воды, образующимися на поверхности кремния в атмосфере кислорода и водорода (пирогенное окисление).

$$Si + O_2 \to SiO_2$$
$$Si + 2H_2O \to SiO_2 + 2H_2$$

Влажный процесс является на порядок более быстрым и поэтому применяется чаще. Вид процесса может быть не принципиален для применения пластин в электронике, но для достижения наилучших результатов при изготовлении микрорезонаторов использование кремниевых пластин, полученных с помощью влажных процессов, увеличивающих гидроксильное оптическое поглощение, нежелательно. По этой же причине более предпочтительно использование нелегированного кремния.

Методом фотолитографии с нанесением защитного слоя Si_3N_4 и химического травления в плавиковой кислоте оксидный слой удаляется везде кроме отдельных дисковых островков диаметром ~ 100 мкм.

$$SiO_2 + 6HF \to H_2SiF_6 + 2H_2O \tag{12.5}$$

Для травления можно использовать буферный раствор плавиковой кислоты (7 частей 40-процентной NH_4F к одной части концентрированной HF), обеспечивающий более равномерное травление и защищающий фоторезист. Скорость травления в таком растворе составляет примерно 0.1 мкм/мин.

После удаления фоторезиста последующее сухое травление заготовки в $\mathrm{XeF_2}$ подтравливает уже кремниевую подложку, оставляя кварцевые диски на конусных опорах из кремния.

$$2XeF + SiO_2 \to 2Xe + SiF_4 \tag{12.6}$$

Изготовленные кварцевые диски нагреваются сверху лучом CO_2 лазера, оплавляющим их края (в середине диска кремниевый столбик обеспечивает эффективный теплоотвод). Плавленый кварц непрозрачен для инфракрасного излучения CO_2 лазера с длиной волны 10.6 мкм, и поэтому поглощает его, нагреваясь, в то же время кремний прозрачен в этом диапазоне и с излучение ним не взаимодействует. Под действием сил поверхностного натяжения при плавлении краев кварцевого диска формируется гладкая тороидальная поверхность микрорезонаторов (рис. 12.4). Получаются тороиды из плавленого кварца с большим диаметром тора ~ 100 мкм и малым диаметром ~ 5 мкм, монолитно связанные с изначальной оксидной мембраной, прикрепленной к кремниевым опорам, вырастающим из кремниевой подложки. В таких тороидальных резонаторах эффективный объем локализации электромагнитного поля на несколько порядков меньше физического объема резонатора и составляет порядка сотен кубических микрометров, а добротность достигают значений $\sim 10^7 - 10^8$.

Дисковые микротороиды представляют собой тонкий кварцевый диск с тороидальной завальцованной границей, держащийся на кремниевом пеньке (рис. 12.4).

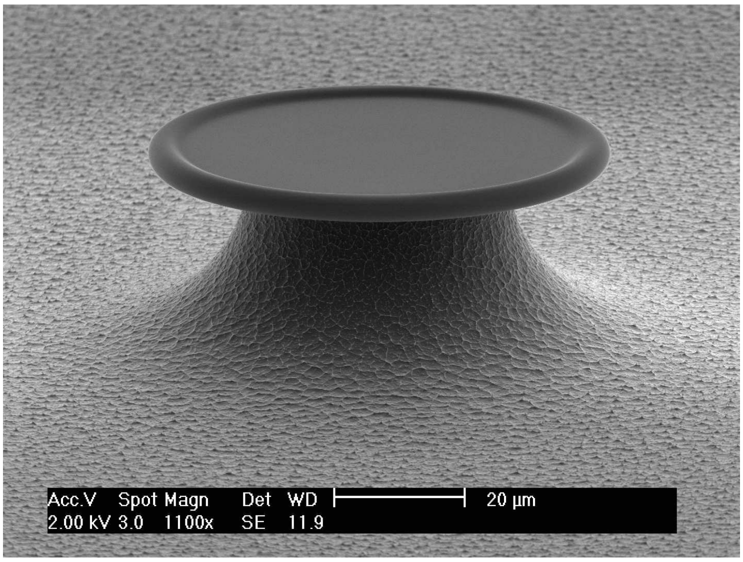


Рис. 12.4: Изображение микротороида, полученное с помощью электронного микроскопа. (Институт квантовой оптики, г. Гархинг (Германия), группа проф. Т. Хэнша, Лаборатория фотоники и квантовых измерений Т. Киппенберга. Любезно предоставлено А.Шлиссером.)

12.5 Кристаллические микрорезонаторы

Наилучшим кристаллическим материалом для изготовления оптических микрорезонаторов на сегодняшний день является флюорит. Этот минерал с кубической кристаллической решеткой встречается в естественном виде в природе в виде кристаллов различной окраски, цвет которых обусловлен различными примесями: редкоземельных элементов, а также хлора, железа, урана, тория. Чистый флюорит не окрашен и прозрачен в широком интервале длин волн от УФ до дальнего ИК, что в сочетании с малым показателем преломления и очень слабой растворимости делает флюорит прекрасным материалом для изготовления оптических окон. Потребности развития ультрафиолетовой литографии для полупроводниковой электроники стимулировали в последние годы дальнейший интерес к этому материалу и способствовали разработке технодогий выращивания кристаллов высокой чистоты. Интересно, что именно во флюорите были впервые экспериментально еще в 1961 году зарегистрированы косвенно оптические МШГ [44].

Показатель преломления флюорита в диапазоне длин волн $0.23 - 9.72$ мкм определяется дисперсионной формулой Селмейера:

$$n^2 - 1 = \frac{0.5675888\lambda^2}{\lambda^2 - 0.050263605^2} + \frac{0.4710914\lambda^2}{\lambda^2 - 0.1003909^2} + \frac{3.8484723\lambda^2}{\lambda^2 - 34.649040^2}. \tag{12.7}$$

Температурный коэффициент показателя преломления меняется от $-6.2\times10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ при 0.2288 мкм до $-5.6\times10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ при 9.724 мкм с минимумом $-10.6\times10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ при

0.852 мкм.

12.5.1 Изготовление кристаллических резонаторов

Оптические кристаллические дисковые микрорезонаторы изготавливаются методом алмазного точения из дисковых или удлиненных цилиндрических заготовок методом алмазного точения. Заготовки закрепляются на шпинделе токарного станка с малыми уходами оси. В работе [45] использовался самодельный микротокарный станок с воздушными подшипниками и управляемой компьютером подачей алмазного резца. Вырезанные таким образом резонаторы из CaF_2 имеют добротность порядка 10^7. Для получения более высоких значений добротности требуется ручная асимптотическая полировка заглаженной образующей поверхности диска на том же самом станке с помощью алмазных порошков, паст или пленок с последовательно уменьшающимся размером зерна. После каждой ступени полировки требуется тщательная очистка поверхности от остатков абразива. Этот метод изготовления применим к различным кристаллам. В работе [37] для получения рекордной добротности резонатор подвергался многократному отжигу при температуре 650° в течение суток. Отжиг позволяет устранить остаточные напряжения в кристалле и связанное с ним двулучепреломление, а также увеличивает подвижность дефектов, которые выходят на поверхность. Такая процедура применялась ранее для получения высокодобротных дисковых резонаторов из лейкосапфира в СВЧ диапазоне [46]. После каждого отжига резонатор переполировывался заново. В результате трехкратного повторения процедуры в дисковом резонаторе диаметром 4.5 мм и толщиной 0.5 мм была достигнута добротность 3×10^{11} на длине волны 1.55 мкм, что соответствует значению резкости 2.1 ± 10^7, на порядок лучше, чем у лучших суперзеркал резонаторов Фабри-Перо.

Аналогичным образом могут изготавливаться резонаторы из других кристаллов, например, из ниобата лития ($LiNbO_3$) с добротностью до 2×10^8 или лейкосапфира (Al_2O_3) с $Q = 6.2 \times 10^8$ [47].

12.6 Жидкости

Основным требованием к материалам высокодобротных резонаторов является низкий уровень потерь. Поскольку многие неорганически и органические жидкости весьма прозрачны в оптическом диапазоне, неудивительно, что высокодобротные МШГ часто наблюдались в экспериментах с каплями аэрозолей, которые представляют собой почти идеальные сферы или сфероиды, формируемые силами поверхностного натяжения. Микроскопические капли широко использовались для резонансной спектроскопии высокого разрешения. Они также использовались для исследования флуоресценции и лазерной генерации в жидкостях, содержащих красители. Вынужденное комбинационное (рамановское) рассеяние исследовалось в CS_2, CCl_4, воде, глицероле, и в каплях других жидкостей.

Применение жидких резонаторов с МШГ естественным образом ограничено, что объясняется сложностью манипуляции с ними, быстрым испарением и механической неустойчивостью поверхности.

12.7 Полимерные резонаторы

Другим примером аморфных резонаторов являются полимерные микросферы. Хотя изготовление полимерных резонаторов, особенно в виде микросфер и несложно, до недавнего времени не удавалось получить достаточно высокодобротные микрорезонаторы. Это связано с тем, что в большинстве полимеров оптические потери являются существенными. Добротность полимерных резонаторов ограничивается рэлеевским рассеянием, поглощением вблизи края энергетической зоны, и мультифононным поглощением. В работе [48] использовался полимер PDMS. Максимальная продемонстрированная добротность составила 2×10^6 на длине 980 нм. Нельзя не отметить оригинальную технологию изготовления полимерных микротороидов, разработанную в этой работе. Полимерные тороидальные резонаторы реплицировались с кварцевых, технология изготовления которых, разработанная в той же группе, описана выше. Кремниевая подложка с несколькими кварцевыми микротороидами сначала силанизировалась триметилсиланом, чтобы избежать прилипания, и заливалась тем же полимером PDMS, который является достаточно гибким силиконовым эластомером и позволяет извлечь из образовавшейся матрицы без ее повреждения кварцевые микротороиды. В образованную отожженную и специально обработанную для облегчения извлечения реплицированных резонаторов матрицу заливается затем требуемый для микротороидов полимер — тот же PDMS или Vicast (который дает несколько худшую добротность порядка 5×10^5 и после полимеризации благодаря упругости матрицы и отливки извлекается без повреждения. В работе [49] в резонаторах из полиметилметакрилата (ПММА) была продемонстрирована добротность 4×10^7 на длине волны 4×10^7 0.635 мкм — это на сегодняшний день самое большое значение, достигнутое в полимерных резонаторах. Резонаторы изготавливались тем же методом, что и кристаллические резонаторы, то есть вытачивались и полировались, а затем отжигались при температуре 90°C для устранения внутренних натяжений. Добротность резонаторов диаметром в несколько миллиметров в видимом диапазоне ограничивалась поверхностным рассеянием (поглощение на использованной для измерений длины волны соответствует добротности 1.2×10^8, в ближнем ИК диапазоне на длине волны 1580 мкм добротность 3×10^5 определялась собственным поглощением.

12.8 Измерения добротности микрорезонаторов

12.8.1 Наблюдение резонансной кривой

Самым простым способом измерения добротности микрорезонаторов является динамический способ, описанный в работах [2, 41], который предусматривает непосредственное наблюдение резонансной кривой на экране осциллографа при линейной ча-

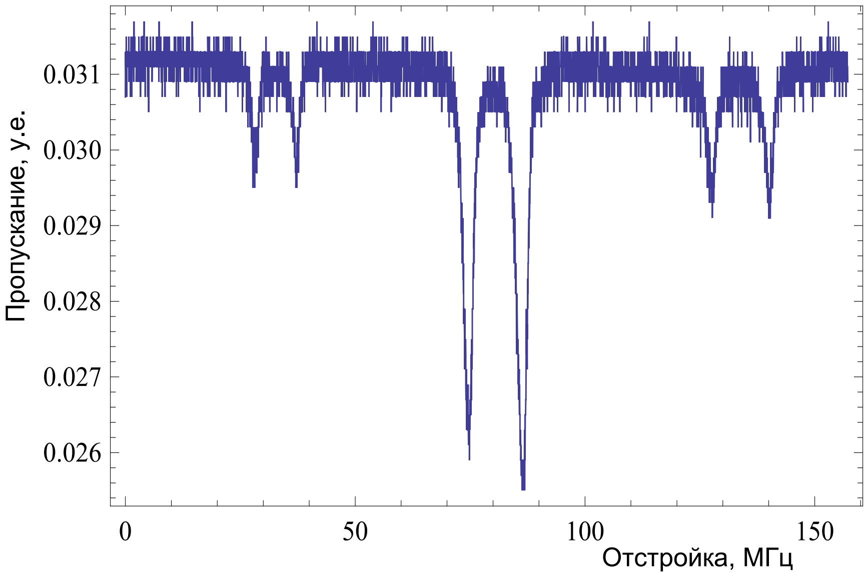


Рис. 12.5: Измерение добротности и частотного расщепления мод, вызванного обратным рассеянием с помощью частотных меток, в микросфере диаметром 30 мкм. Частота модуляции 50 МГц.

стотной модуляции измерительного лазера. В качестве измерительного генератора в ранних работах использовался гелий-неоновый лазер, перестраиваемый в пределах доплеровской линии усиления газовой He-Ne смеси пьезотрансляцией одного из зеркал. Сигнал с детектора на выходе элемента связи, подаваемый на осциллограф синхронно с перестройкой частоты позволяет наблюдать форму резонансной кривой на отбор. Для того, чтобы по форме резонансной кривой определить числовые значения добротности наблюдаемой моды, требуется калибровка частотной шкалы. Калибровка может быть проведена формированием серии частотных меток с помощью электрооптического или акустооптического модулятора или модуляцией тока при использовании диодного лазера. Частотные метки могут быть получены гетеродинным смешением перестраиваемого лазера с частотой опорного лазера [2]. Этот же способ был использован в работе [27], где излучение перестраиваемого диодного лазера смешивалось с опорной высокостабильной частотной гребенкой. Синхронная цифровая запись сигналов биений и пиков пропускания резонатора позволила точно измерить частоты всех мод микротороида в очень широком спектральном диапазоне. При частотной модуляции излучения лазера для получения меток можно обойтись без опорного лазера, поскольку резонансные кривые на экране осциллографа будут наблюдаться при совпадении частоты перестраиваемого лазера с основной частотой гетеродина и боковыми компонентами, отстроенными на частоту модуляции. Расстояние между основной и дополнительными резонансными кривыми будет при этом очевидно равно частоте модуляции (рис. 12.5).

Добротность резонатора определяется по полуширине резонансной кривой, калиброванной с помощью частотных меток. Для расширения частотного интервала при наблюдении спектра сферических микрорезонаторов с помощью лазеров с узкой полосой усиления можно использовать дополнительную перестройку частоты за счет нагрева резонатора. Изменение температуры резонатора приводит к пропорциональному сдвигу его резонансных частот. В плавленом кварце основной причиной температурной зависимости резонансной частоты является изменение показателя преломления, поскольку коэффициент теплового расширения много меньше чем температурный коэффициент показателя преломления. В результате удавалось наблюдать моды стеклянных резонаторов в диапазоне до 500 ГГц [34], с помощью He-Ne лазера, полоса одночастотной генерации которого составляла всего около 1 ГГц.

В отличие от резонатора типа Фабри-Перо, в котором связь с внешним лазерным лучом является фиксированной, связь с МШГ может быть плавно уменьшена до нуля увеличением зазора между призмой и резонатором (см. главу 9). Для нахождения собственной добротности микрорезонатора можно использовалось асимптотическое стремление добротности к собственной при уменьшении коэффициента связи при перемещении резонатора относительно поверхности возбуждающей призмы.

Для перемещения микрорезонаторов относительно элемента связи можно использовать современные прецизионные пьезоподачи с большим динамическим диапазоном. В работе [2] использовалась система прецизионной безгистерезисной подачи, собранная на основе кварцевого камертона, на который через стальную пружину воздействовал микрометрический винт. Таким образом контролируемое смещение резонатора, закрепленного на камертоне относительно призмы составляло около 10 нанометров.

12.8.2 Измерение времени затухания

Определение добротности по ширине резонансной кривой возможно только в случае если эта ширина больше ширины линии генерации лазера. Для измерения значений добротности $> 10^9$ в [36] использовался другой метод — определение времени затухания света в минирезонаторе. Для этого излучение перестраиваемого лазера, настроенного на одну из мод резонатора, резко (за время порядка нескольких десятков наносекунд) выключалось с помощью акустооптического затвора в момент возбуждения одной из мод резонатора. Затухающее излучение регистрировалось с помощью детектора и сигнал подавался на осциллограф, развертка которого запускалась одновременно с прерыванием лазерного луча. Быстродействие модулятора и фотодетектора позволяли измерять с 10% погрешностью $Q \geq 3 \times 10^8$, ниже этого значения добротность легко измеряется с той же погрешностью по ширине резонансной кривой.

На Рис.12.6 показана кривая затухания для рекордного значения добротности в микросфере диаметром 750 мкм, Измеренная примерно через 1 минуту после изготовления. Экспоненциальная аппроксимация дает значение $\tau = 2.7 \pm 0.1$ мкс, которое вместе с инструментальными ошибками приводит к оценке $Q = (0.8 \pm 0.1) \times 10^{10}$. Эта величина добротности Q близка к пределу, определяемому фундаментальными потерями в материале (см. главу 10).

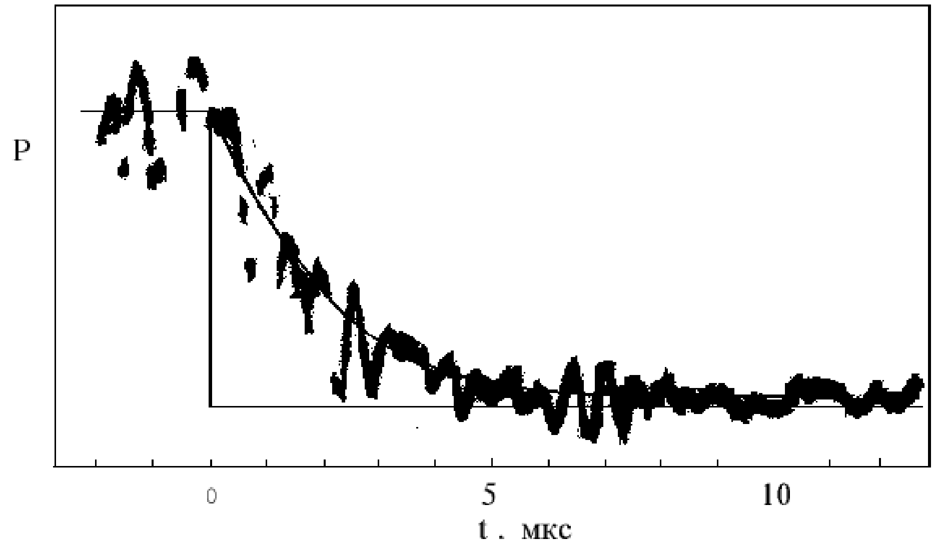


Рис. 12.6: Затухание энергии в одной из мод резонатора диаметром 750 мкм. Время затухания $\tau = 2.7$ мкс, $\lambda = 0.63$ мкм

12.8.3 Динамический метод биений

Самым распространенным методом измерения добротности является простое измерение ширины резонансной кривой при перестройки частоты лазера, возбуждающего резонатор.

Упрощенные укороченные уравнения для возбуждения резонатора выглядит следующим образом:

$$\dot{a} + (\delta - i\mu t)a = i\frac{T}{\tau_0}b_{in}$$
$$b_{out} = Rb_{in} + iTa, \tag{12.8}$$

здесь a — амплитуда поля в резонаторе, b_{in} и b_{out} — амплитуда входной и выходной волны, $\delta = \delta_0 + \delta_c$ — суммарный декремент затухания, складывающийся из собственных потерь и нагружения $\delta_c = \frac{T^2}{2\tau_0}$, а $\mu = \frac{d\omega}{dt}$ — скорость свипирования частоты, $\Delta\Omega = \mu t$. При $t = 0$ генератор проходит через резонанс. Если частота сканируется достаточно медленно, так что время прохода частоты генератора через полосу резонатора много меньше времени звона $1/(2\delta)$: $(\mu/\delta \ll \delta)$, производной медленно меняющейся амплитуды можно пренебречь и выходная мощность просто квазистационарно прорисовывает резонансную кривую:

$$|a|^2 = \frac{T^2}{\tau_0^2}\frac{1}{\delta^2 + \Delta\omega^2}|b_{in}|^2, \tag{12.9}$$

ширину которой можно измерить на уровне 1/2 и тем самым определить добротность

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega_{1/2}} = \frac{\omega}{2\delta}. \tag{12.10}$$

Если добротность резонатора очень велика, а время звона высокодобротных резонаторов может быть много больше микросекунд, то для того, чтобы таким образом прорисовать резонансную кривую приходится проводить сканирование очень медленно, чему мешают различного рода флуктуации и уходы частоты резонатора. С этим неудобством столкнулись ранее при исследовании свойств высокодобротных резонаторов в СВЧ диапазоне. Однако оказалось, что существует метод, позволяющий ничего не меняя в схеме измерения определять добротность с высокой точностью при быстром свипировании [50].

Решением дифференциального уравнения является следующее выражение:

$$\begin{aligned} a(t) &= i\frac{T}{\tau_0}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-i\mu(t'^2-t^2)/2+\delta(t'-t)}dt' \\ &= \frac{\sqrt{\pi}T}{\sqrt{2i\mu}\tau_0}e^{-i\frac{\delta^2-\mu^2t^2}{2\mu}-\delta t}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{-i\mu t+\delta}{\sqrt{2i\mu}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{12.11}$$

Случай медленного прохождения через резонанс соответствует традиционному методу прописывания резонансной кривой, при этом аргумент функции ошибок велик и раскладывая функцию ошибок при большом значении аргумента $1-\operatorname{erf}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}x}e^{-x^2}$ мы придем к тому же выражению (12.9). Если же полоса резонанса проходится быстро, $\Delta\omega = \mu t \gg \delta$, но время перестройки $t < 1/\delta$, аргумент мал $|x| \ll 1$ и $\operatorname{erf}(x) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}}x$

$$\begin{aligned} a(t) &\simeq \frac{\sqrt{\pi}T}{\sqrt{2i\mu}\tau_0}e^{-i\frac{\delta^2}{2\mu}}e^{-i\Delta\omega(t)t-\delta t}b_{in} \\ b_{out}(t) &\simeq \left[R+\sqrt{\frac{2\pi}{i\mu}}\delta_c e^{-i\frac{\delta^2}{2\mu}}e^{-i\Delta\omega(t)t-\delta t}\right]b_{in} \\ |b_{out}(t)|^2 &\simeq R^2+\frac{2\pi\delta_c^2}{\mu}e^{-2\delta t}+R\sqrt{\frac{\pi\delta_c^2}{2\mu}}e^{-\delta t}\cos(\Delta\omega(t)t-\frac{\delta^2}{2\mu}-\frac{\pi}{4}) \end{aligned} \tag{12.12}$$

Сигнал на детекторе представляет собой экспоненциально затухающие колебания с повышающейся частотой. Для прописывания такой кривой и определения времени затухания требуется, чтобы верхняя частота детектора была больше μ/δ. Этот метод измерения для СВЧ резонаторов был рассмотрен в работе [50]. В оптическом диапазоне таким методом измерялась добротность микрорезонаторов порядка 10^{11} [37].

Литература

[1] R. D. Richtmyer. Dielectric resonators. *Journal of Applied Physics*, 10:391–398, 1939.

[2] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, and V. S. Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering gallery modes. *Physics Letters A*, 137:393–397, 1989.

[3] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala. Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip. *Nature*, 421:925–928, 2003.

[4] A. A. Savchenkov, V. S. Ilchenko, A. B. Matsko, and L. Maleki. Kilohertz optical resonances in dielectric crystal cavities. *Physical Review A*, 70:051804, 2004.

[5] B.-Sh. Song, S. Noda, T. Asano, and Y. Akahane. Ultra-high-Q photonic double-heterostructure nanocavity. *Nature Materials*, 4:207–210, 2005.

[6] Дж. А. Стрэттон. *Теория электромагнетизма.* ОГИЗ, Москва, Ленинград, 1948.

[7] I. Bialynicky-Birula. Photon wave function. *Progress in Optics*, 36:245–294, 1996.

[8] R. Janaswamy. A note on the TETM decomposition of electromagnetic fields in three dimensional homogeneous space. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52:2474–2476, 2004.

[9] H. M. Lai, P. T. Leung, K. Young, P. W. Barber, and S. C. Hill. Time-independent perturbation for leaking electromagnetic modes in open system with application to resonances in microdroplets. *Physical Review A*, 41:5187–5198, 1990.

[10] Х. Хаус. *Волны и поля в оптоэлектронике.* М.: Мир, 1988.

[11] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5:1550–1567, 1966.

[12] С. Солимено, Б. Крозиньяни, П. Ди Порто. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения.* М.: Мир, 1989.

[13] J. Heebner, R. Grover, and T. A. Ibrahim. *Optical microresonators. theory, fabrication and application.* Springer-Verlag, London, 2008.

[14] Е. Янке, Ф. Эмде, Лёш Ф. *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.* М.: Наука, 1964.

[15] М. Абрамовиц, И. Стиган. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.* М.: Наука, 1979.

[16] Ф. Олвер. *Асимптотика и специальные функции.* М.: Наука, 1990.

[17] S. Schiller. Asymptotic expansion of morphological resonance frequencies in Mie scatternig. *Applied Optics*, 32:2181–2185, 1993.

[18] Л. А. Вайнштейн. *Открытые резонаторы и открытые волноводы.* М.: Советское радио, 1966.

[19] M. Sumetsky. Whispering-gallery bottle microcavities: the three-dimensional etalon. *Optics Letters*, 29:8–10, 2004.

[20] V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky, X. S. Yao, and L. Maleki. Microtorus: a high-finesse microcavity with whispering-gallery modes. *Optics Letters*, 26:256–258, 2001.

[21] И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, and С. Ю. Славянов. *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.* М.:, Наука, 1976.

[22] В. М. Бабич and В. С. Булдырев. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М.: Наука, 1972.

[23] Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов. *Геометрическая оптика неоднородных сред.* М.: Наука, 1980.

[24] J. B. Keller and S.I. Rubinow. Asymptotic solution of eigenvalue problem. *Annalen der Physik*, 9:24, 1960.

[25] В. П. Быков. Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах. *Электроника больших мощностей*, 4(2):66–92, 1965.

[26] М. Л. Городецкий, А. Е. Фомин. Собственные частоты и добротность в геометрической теории мод шепчущей галереи. *Квантовая электроника*, 37(2):167–172, 2007.

[27] P. Del'Haye, O. Arcizet, M. L. Gorodetsky, R. Holzwarth, and T. Kippenberg. Frequency comb assisted diode laser spectroscopy for measurement of microcavity dispersion. *Nature photonics*, 3(9):529–533, 2009.

[28] J. Schulte and Schweiger G. Resonant inelastic scattering by use of geometrical optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 50(2):317–324, 2003.

[29] M. Hentschel and H. Schomerus. Fresnel laws at curved dielectric interfaces of microresonators. *Physical Review E*, 65:045603(4), 2002.

[30] В. Б. Брагинский, В. С. Ильченко. Свойства оптического диэлектрического микрорезонатора. *Доклады академии наук СССР*, 293:1358–1362, 1987.

[31] V. S. Ilchenko, D. S. Starodubov, M. L. Gorodetsky, L. Maleki, and J. Feinberg. Coupling light from a high-Q microsphere resonator using a uv-induced surface grating. In *Conference on Lasers and Electrooptics, Baltimore, May 23-28, Technical Digest*, page 67, 1999.

[32] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko. High-Q optical whispering gallery microresonators–precession approach for spherical mode analysis and emission patterns with prism couplers. *Optics Communications*, 113:133–143, 1994.

[33] J. C. Knight, G. Cheung, F. Jacques, and T. A. Birks. Phase-matched excitation of whispering gallery mode resonances using a fiber taper. *Optics Letters*, 22:1129–1131, 1997.

[34] С. П. Вятчанин, М. Л. Городецкий, В. С. Ильченко. Перестраиваемые узкополосные оптические фильтры с модами типа шепчущей галереи. *Журнал прикладной спектроскопии.*, 56:274–288, 1992.

[35] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko. Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-Q whispering-gallery modes. *Journal of the Optical Society of America B*, 16:147–154, 1999.

[36] M. L. Gorodetsky, A. A. Savchenkov, and V. S. Ilchenko. Ultimate Q of optical microsphere resonators. *Optics Letters*, 21:453–455, 1996.

[37] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, V. S. Ilchenko, and L. Maleki. Optical resonators with ten million finesse. *Optics Express*, 15:6768–6773, 2007.

[38] И. Л. Фабелинский. *Молекулярное рассеяние света.* М.: Наука, 1965.

[39] M. L. Gorodetsky, A. D. Pryamikov, and V. S. Ilchenko. Rayleigh scattering in high-Q microspheres. *Journal of the Optical Society of America B*, 17:1051–1057, 2000.

[40] R. A. Myers, N. Mukherjee, and S. R. J. Brueck. Large second-order nonlinearity in poled fused silica. *Optics Letters*, 16(22):1732–1734, 1991.

[41] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko. Thermal nonlinear effects in optical whispering-gallery microresonators. *Laser Physics*, 2:1004–1009, 1992.

[42] A. E. Fomin, M. L. Gorodetsky, I. S. Grudinin, and V. S. Ilchenko. Nonstationary nonlinear effects in optical microspheres. *Journal of the Optical Society of America B*, 22:459–465, 2005.

[43] В. Б. Брагинский, М. Л. Городецкий, В. С. Ильченко. Оптические микрорезонаторы с модами шепчущей галереи. *Успехи физических наук*, 160:157–159, 1990.

[44] C. G. B. Garrett, W. Kaiser, and W. L. Bond. Stimulated emission into optical whispering gallery modes of spheres. *Physical Review*, 124:1807–1809, 1961.

[45] I.S. Grudinin, V.S. Ilchenko, and L. Maleki. Ultrahigh optical Q-factors of crystalline resonators in the linear regime. *Physical Review A*, 74:063806(9), 2006.

[46] V. B. Braginsky, V. S. Ilchenko, and Kh. S. Bagdassarov. Experimental observation of fundamental microwave absorption in high-quality dielectric crystals. *Physics Letters A*, 120:300, 1987.

[47] V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, and L. Maleki. Nonlinear optics and crystalline whispering gallery mode cavities. *Physical Review Letters*, 92:043903, 2004.

[48] A. L. Martin, D. K. Armani, L. Yang, and K. J. Vahala. Replica-molded high-Q polymer microresonators. *Optics Letters*, 29(6):533–535, 2004.

[49] J.R. Schwesyg, T. Beckmann, A. S. Zimmermann, K. Buse, and D. Haertle. Fabrication and characterization of whispering-gallery-mode resonators made of polymers. *Optics Express*, 17(4), 2009.

[50] С. П. Вятчанин, А. Б. Тимашев. Простой метод измерения высоких добротностей СВЧ резонаторов. *Приборы и техника эксперимента*, (4):145–146, 1983.