Я.С.Дубнов

ОШИБКИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	3
Введение	5
Глава I. Ошибки в рассуждениях, доступных начинающему	10
Глава II. Анализ примеров, приведенных в главе I	23
Глава III. Ошибки в рассуждениях, связанных с понятием предела	38
Глава IV. Анализ примеров, приведенных в главе III	55

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В основу этой книжки легли лекции-беседы, которые я несколько раз проводил со школьниками либо VII—VIII, либо IX—X классов в школьном математическом лектории при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Для той и для другой аудитории обычно устраивались две встречи, разделенные промежутком около месяца. Первые встречи соответствовали по содержанию главам I и III этой книжки, имели характер лекций и содержали, кроме введения, изложение примеров ошибочных доказательств без комментариев; в конце лекции слушателям предлагалось выяснить сущность сделанных ошибок и быть готовыми при следующей встрече выступить со своими возражениями. Вторые встречи были уже в большей степени беседами: лектор напоминал вкратце содержание каждого примера и непосредственно вслед за тем приглашал желающих выступить. Таких всегда было несколько, к доске выходил один, наудачу выбранный; остальным предоставлялось делать реплики с мест, иногда также выходить к доске. Разбор каждого примера заканчивался краткими высказываниями лектора, содержащими дополнения, варианты и подведение итога.

Трудно думать, что все школьники, активно участвовавшие в этой работе, готовились к ней без посторонней помощи. Но даже вразумительно изложить заимствованное опровержение софизма составляло далеко не всегда простую задачу. К чести московских школьников, посещавших лекторий, надо признать, что они показали себя здесь с лучшей стороны; некоторые выступления были просто превосходны.

Ободренный этим опытом, я обращаюсь теперь к более широкой аудитории в надежде, что эта книжка пробудит

у читателя не только любознательность, но и математическую активность. Последняя может проявиться в том, что читатель пройдет путь, рекомендованный слушателям моих лекций-бесед: сначала будет знакомиться с примерами ошибочных рассуждений, изложенными в главах I (для школьников, начиная с VII класса средней школы) и III (для IX—X классов); затем в каждом случае попытается вскрыть ошибку собственными силами; наконец, прочитает главы II и IV, где найдет разъяснения соответственно к главам I и III, а также некоторые дополнения.

Мелкий шрифт и значительную часть подстрочных примечаний можно пропустить: они рассчитаны на читателей, наиболее подготовленных, а также на руководителей математических кружков.

Я. Дубнов

ВВЕДЕНИЕ

Сорок лет назад известный тогда педагог-математик Н. А. Извольский в статье, посвященной преподаванию геометрии, воспроизвел характерный разговор, происшедший у него со знакомой школьницей. Девочка перешла из V в VI класс гимназии и один год обучалась геометрии; разговор происходил на каникулах, в непринужденной обстановке. Педагог спросил свою собеседницу, что она запомнила из курса геометрии. Девочка долго думала, но увы — ничего вспомнить не могла. Тогда вопрос был изменен: «Что же вы делали весь год на уроках геометрии?». На это последовал очень скорый ответ: «Мы доказывали». Ответ — мало вразумительный, но отражающий в своей наивности те представления, которые складываются у многих школьников: в арифметике решают задачи, в алгебре, кроме того, решают уравнения и выводят формулы, а вот в геометрии — доказывают теоремы. Надо сказать, что такое представление о строении математики давно уже перестало отвечать состоянию этой науки. В математических исследованиях нашего времени, идет ли там речь о числах или же о фигурах, заголовок «теорема» с последующим ее доказательством можно встретить одинаково часто. Во всех областях математики решают задачи, а в геометрии нередко прибегают к решению уравнений. Иначе было 2000 лет назад, когда завершалось создание так называемой геометрии Евклида, которая и поныне составляет основу школьного курса. С тех пор и вплоть до современных школьных учебников, геометрия (именно она, а не другие математические предметы) излагается как цепь теорем (некоторые из них называются леммами или же следствиями), построенных по плану, настолько хорошо известному, что достаточно ограничиться кратким напоминанием. Каждая теорема

содержит условие («дано...») и заключение («требуется доказать...»); при доказательстве можно ссылаться только на аксиомы или на ранее доказанные теоремы; нельзя опираться ни на «очевидность», которая иногда нас обманывает, ни на теоремы, хотя бы и верные, но еще не доказанные (ведь последние могут в свою очередь опираться на доказываемую теорему, и тогда получается «логический круг»).

Известно, какую роль играет в доказательстве чертеж: он делает наглядным не только содержание теоремы, но и ход доказательства. Иногда приходится для одной теоремы делать несколько чертежей, так как доказательство видоизменяется в зависимости от взаимного расположения частей фигуры (пример: теорема о вписанном угле, при доказательстве которой обычно рассматривают три возможности: центр круга лежит на стороне угла, внутри его или вне его). В таких случаях важно, чтобы были исчерпаны все возможные расположения частей фигуры; пропуск одного какого-нибудь варианта, для которого прежние рассуждения не могут быть повторены, лишает, разумеется, силы все доказательство — ведь как раз при этом варианте теорема может оказаться неверной.

Не следует ни преувеличивать ни преуменьшать роли чертежа. Преувеличением было бы считать чертеж необходимой составной частью доказательства. Теоретически говоря, любое геометрическое доказательство можно провести, не пользуясь никаким чертежом, и это даже имело бы ту положительную сторону, что устранило бы ссылки на «очевидность», которая иногда бывает кажущейся и служит источником ошибок. Однако практически отказ от чертежа привел бы к таким же затруднениям, какие мы испытали бы, если бы, например, захотели действия над многозначными числами производить всегда «в уме» (или — чтобы взять пример из более далекой области — играть в шахматы, «не глядя на доску»), — опасность ошибиться при этом сильно возросла бы. Говоря о помощи, которую чертеж оказывает доказательству, я имею в виду, конечно, хороший чертеж, выполненный с достаточной тщательностью. Ученик иногда думает, что, заботясь о правильности чертежа, он делает только уступку требованиям учителя. На самом же деле плохим чертежом ученик наказывает прежде всего себя самого, так как вместо помощи он получает иной раз помеху. И пусть этот ученик

не обольщает себя тем, что в том или другом случае ему удавалось провести доказательство на плохом чертеже,— так будет не всегда. В этой книжке читатель встретит наряду с правильными чертежами другие, несколько искаженные, но они сделаны такими сознательно. Дело в том, что наше внимание будет сосредоточено на ошибочных доказательствах, а для них нужны иногда неточные чертежи (подобно тому как к намеренно искаженным чертежам прибегают в доказательствах «от противного»).

В дальнейшем, в главах I и III, будет приведен ряд примеров ошибочных геометрических доказательств. О типах ошибок предпочтем говорить позже, когда в нашем распоряжении будут эти примеры. Но уже сейчас следует предупредить читателя относительно характера доказываемых (ошибочно) здесь предложений.

Среди этих предложений встретятся такие, ложность которых будет для читателя сразу очевидной, например, «прямой угол равен тупому». В этих случаях наша задача — вскрыть ошибку в доказательстве. Подобные доказательства утверждений, заведомо неправильных, известны с древних времен под названием «софизмов».

В других примерах читатель не будет заранее знать, верно ли доказываемое утверждение или ложно, если только оно этому читателю раньше не встречалось. Здесь наша задача усложняется: надо проверить как несостоятельность доказательства, так и ошибочность утверждения *).

Наконец, будут приведены примеры доказательств, ошибочность которых коренится в том, что доказываемое никак не может быть обосновано средствами, находящимися в распоряжении доказывающего. Как это может случиться, попытаюсь объяснить на примере, далеком от геометрии и вообще от науки.

Известна шуточная задача: «Пароход находится на 42°15′ с. ш. и 17°32′ з. д. (числа взяты наудачу; обычно добавляют еще ряд данных, усложняющих условие). Сколько лет капитану?». Для наших целей изменим несколько вопрос задачи: «Верно ли утверждение, что капитану

*) Не достаточно сделать только первое: ведь и верное утверждение можно обосновывать ошибочными доводами (например, из ошибочного равенства $3 + 5 = 12$ можно сделать правильный вывод: 3+5 есть число четное).

больше 45 лет?». Каждому ясно, что сделать такой вывод из данных, содержащихся в условии предложенной задачи, нельзя и что всякая попытка доказать формулированное утверждение о возрасте капитана обречена на неудачу. Более того, можно доказать, что доказательство этого утверждения невозможно. В самом деле, ведь пароходное управление (о котором из условия задачи мы ничего не знаем) может составить маршрут, проходящий через указанный географический пункт, и назначить в рейс капитана того или другого возраста (предполагая, что управление располагает для подобных плаваний капитанами как молодыми, так и старыми).

Иными словами, можно допустить, что капитан моложе 45 лет, и ни в какое противоречие с данными, касающимися широты и долготы, это, конечно, не вступит. Другое дело, если бы условие задачи содержало еще иные данные, например название парохода и точную дату его прохождения через указанный пункт, тогда можно было бы надеяться, что по судовому журналу удастся установить личность капитана, а затем и его возраст.

Итак, существуют утверждения, справедливость которых можно или нельзя доказать, в зависимости от того, какими средствами для доказательства мы располагаем.

Возвращаясь ближе к нашему предмету, спросим: верно ли, что сумма углов любого треугольника равна $2d$? Всякий школьник, изучивший главу о параллельных прямых, знает доказательство этой важной теоремы, но немногим известна ее 2000-летняя история. Доказательство основывается на свойствах углов, образуемых параллельными прямыми с секущей, а эти свойства в свою очередь опираются на так называемую «аксиому параллельности»: через точку, лежащую вне прямой, можно провести к этой прямой т о л ь к о одну, параллельную ей *). Со времен Евклида на протяжении более чем двух тысячелетий пытались сделать из этой аксиомы теорему, т. е. доказать ее, опираясь только на те утверждения, которые у Евклида и в наших школьных учебниках предшествуют аксиоме параллельности. Тем самым запрещалось вводить

*) Обращаем внимание на то, что аксиоматический характер этому предложению придается словом «только»: то, что одну параллельную всегда можно провести, доказывается раньше, хотя бы на основании теоремы «два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны».

вместо этой аксиомы какую-нибудь другую, сколь бы очевидным ни казалось ее содержание. Все эти попытки были безуспешны и обнаружили только, что приведенную выше аксиому параллельности можно на много ладов заменять другими аксиомами. В частности, если одно из свойств углов, образуемых двумя параллельными прямыми и секущей, или же теорему о сумме углов треугольника принять за аксиому, то прежняя аксиома параллельности станет теоремой. И только в 20-х годах прошлого века великому нашему соотечественнику, казанскому математику Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792—1856) удалось вскрыть источник неудачи всех попыток доказать аксиому параллельности. Он построил обширную и глубокую теорию, о которой я не пытаюсь здесь дать даже отдаленное представление. В этой теории содержалось, между прочим, в неявном виде доказательство невозможности доказать аксиому параллельности так, как это пытались сделать до Лобачевского (и при его жизни) многие ученые. Как ни сложна теория Лобачевского и как, с другой стороны, ни наивна задача о возрасте капитана, однако «доказательство невозможности доказательства» в обоих случаях — одинаковой природы: на конкретных примерах («моделях») обнаруживается, что с одними и теми же исходными данными могут находиться в согласии как одно, так и другое из двух противоречащих друг другу суждений. В применении к нашей аксиоме это означает: из того, что в обычном курсе геометрии предшествует аксиоме параллельности, не вытекает ни справедливость, ни ошибочность утверждения, содержащегося в этой аксиоме.

Теперь мы знаем, что любое доказательство аксиомы параллельности или какой-нибудь равносильной ей ошибочно, если оно ссылается только на предложения, предшествующие этой аксиоме. Ниже будет приведено несколько простейших примеров таких ошибочных доказательств.

ГЛАВА I

ОШИБКИ В РАССУЖДЕНИЯХ, ДОСТУПНЫХ НАЧИНАЮЩЕМУ

Перейдем к изложению примеров ошибочных доказательств, помня, что критический разбор их откладывается до главы II. Читатель уже предупрежден, что некоторые из чертежей в этой книжке сделаны с искажениями, подчас не сразу заметными.

Пример 1. *Квадрат со стороной* 21 (*см*) *имеет ту же площадь, что прямоугольник со сторонами* 34 (*см*) *и* 13 (*см*).

Квадрат Q разрезан на два прямоугольника размерами 13×21 и 8×21 (рис. 1; наименование «*см*» в дальнейшем опускаем); первый прямоугольник разрезан на две

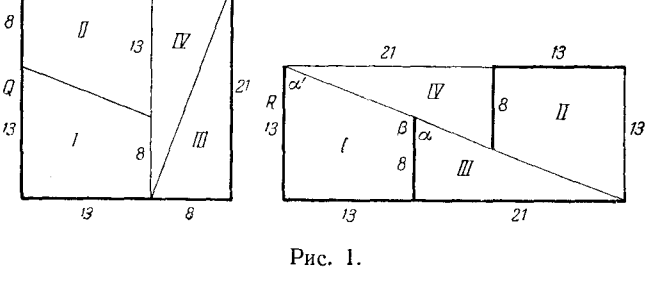

Рис. 1.

одинаковые прямоугольные трапеции с основаниями 13 и 8, второй прямоугольник — на два одинаковых прямоугольных треугольника с катетами 8 и 21. Из полученных четырех частей складываем прямоугольник R, как показано на рис. 1 справа (одинаковые части квадрата и прямоугольника помечены одинаковыми римскими цифрами).

Точнее говоря, к прямоугольной трапеции *I* прикладываем прямоугольный треугольник *III* так, чтобы прямые углы при общей стороне 8 оказались смежными,— образуется прямоугольный треугольник с катетами 13 и 13+21=34. Точно такой же треугольник складывается из частей *II* и *IV*; наконец, из полученных двух равных прямоугольных треугольников складывается прямоугольник *R* со сторонами 13 и 34. Площадь этого прямоугольника равна $34 \times 13 = 442$ ($см^2$), между тем как площадь квадрата *Q*, состоящего из тех же частей, есть $21 \times 21 = 441$ ($см^2$). Откуда же взялся лишний квадратный сантиметр? Рекомендуем читателю произвести опыт: вырезать из бумаги (удобно — из клетчатой, принимая, например, длину клетки за 1 *см*) квадрат *Q*, разрезать его на 4 части, точно соблюдая указанные размеры, и из этих частей сложить прямоугольник *R*.

Пример 2. *Доказательство аксиомы параллельности.* Дана прямая *AB* и точка *C* вне ее; требуется доказать, что через точку *C* можно провести единственную прямую, параллельную *AB*. Применим известное построение: из точки *C* на прямую *AB* опустим перпендикуляр *CD* (рис. 2; здесь, а часто и дальше, прямые углы на чертежах отмечаются зачерненными квадратиками); к этому перпендикуляру из точки *C* в свою очередь восставим перпендикуляр *CE*. Последний и будет параллелен прямой *AB* в силу известной теоремы о двух перпендикулярах к одной прямой (заметим, что ссылаться на эту теорему здесь законно, так как она доказывается до аксиомы параллельности). Но ведь из точки на прямую можно опустить единственный перпендикуляр, а к прямой из лежащей на ней точки можно восставить тоже единственный перпендикуляр (то и другое доказывается до аксиомы параллельности), значит, полученная параллельная прямая *CE* — е д и н с т в е н н а я.

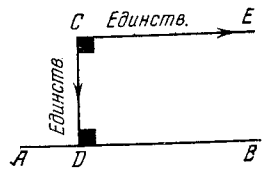

Рис. 2.

Пример 3. *Если параллельные прямые пересечены секущей, то сумма внутренних односторонних углов равна* 2*d* (*доказательство, не опирающееся на аксиому параллельности*).

Пусть $AB \parallel CD$, линия EF — секущая (рис. 3); внутренние углы отмечены на чертеже цифрами. Возможны *) три допущения:

1) Сумма внутренних односторонних углов $> 2d$,
2) Сумма внутренних односторонних углов $< 2d$,
3) Сумма внутренних односторонних углов $= 2d$.

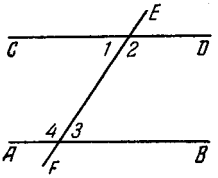

Рис. 3.

При первом допущении имеем:

$$\angle 1 + \angle 4 > 2d, \quad \angle 2 + \angle 3 > 2d,$$

откуда

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 > 4d,$$

между тем как сумма четырех внутренних углов (две пары смежных углов) на самом деле равна $4d$. Полученное противоречие показывает, что 1-е допущение должно быть отброшено. По такой же причине мы должны отказаться от 2-го допущения, так как оно приводит к выводу, что сумма четырех внутренних углов меньше $4d$. Единственно возможным остается 3-е допущение (оно к противоречию не приводит), в результате чего теорема доказана.

Пример 4. *Сумма углов треугольника равна* $2d$ *(доказательство, не опирающееся на аксиому параллельности).*

Произвольный треугольник ABC разобьем на два треугольника с помощью отрезка, выходящего из вершины, обозначим углы цифрами, как сделано на рис. 4. Пусть x — неизвестная нам пока сумма углов треугольника; тогда

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x,$$
$$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x.$$

---

*) Здесь и дальше, говоря о возможных допущениях или о возможных случаях, мы вовсе не утверждаем, что все они действительно возможны в условиях данного примера. Наоборот, не раз случится, что допущенный нами сначала в качестве возможного случай потом окажется фиктивным, т. е. противоречащим условию или тому, что считается установленным, как это часто бывает в доказательствах «от противного». Таким образом, речь идет всегда о так называемых «априорных возможностях» (от à priori — заранее), т. е. о возможностях, которые представляются заранее, до учета остальных условий вопроса.

Складывая, получаем:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x.$$

Но сумма $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ есть сумма углов треугольника ABC, т. е. снова x; а углы $\angle 5$ и $\angle 6$ как смежные в сумме составляют $2d$. Таким образом, для нахождения x получаем уравнение $x + 2d = 2x$, откуда $x = 2d$.

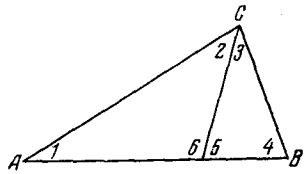

Рис. 4.

Пример 5. *Существует треугольник, у которого сумма углов равна* $2d$ *(доказательство, не опирающееся на аксиому параллельности).*

Начнем с замечаний исторического характера. В XVIII и начале XIX в. некоторые математики старались выяснить, что можно сказать о сумме углов треугольника, не опираясь на аксиому параллельности *). Было установлено, что сумма углов треугольника не может быть больше $2d$. Оставались три возможности: эта сумма 1) всегда (т. е. для всех треугольников) равна $2d$, 2) всегда меньше $2d$, 3) иногда равна, а иногда меньше $2d$. В дальнейшем обнаружилось, что третья из этих возможностей исключается. Тогда усилия сосредоточились на том, чтобы дать хотя бы один пример треугольника, у которого сумма углов равна $2d$. Одна из попыток такого построения будет сейчас изложена; если бы она удалась, аксиома о параллельности стала бы лишней.

Так как сумма углов треугольника не превышает $2d$, то пусть ABC (см. рис. 4) будет треугольник с наибольшей суммой углов (если таких треугольников несколько, то берем любой из них), обозначим эту сумму α. Таким образом, у всякого другого треугольника сумма углов не превышает α, поэтому, сохраняя обозначения рис. 4, имеем:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 \leqslant \alpha, \quad \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 \leqslant \alpha.$$

Отсюда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 \leqslant 2\alpha$; но по

*) Новейшие исторические данные, а также указания на роль Н. И. Лобачевского в этих исследованиях читатель найдет в статье Б. Л. Лаптева «Теория параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского», Историко-математические исследования, вып. IV, Гостехиздат, 1951.

допущению $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \alpha$, а кроме того, $\angle 5 + \angle 6 = 2d$; следовательно, $\alpha + 2d \leqslant 2\alpha$, $\alpha \geqslant 2d$. А так как α не может быть больше $2d$, то $\alpha = 2d$, т. е. сумма углов треугольника ABC равна $2d$.

Пример 6. *Все треугольники — равнобедренные.*

Пусть ABC — произвольный треугольник (рис. 5 или 6 или 7); проведем биссектрису угла C, затем ось симметрии стороны AB (т. е. прямую, перпендикулярную к AB в середине M отрезка AB) и рассмотрим различные случаи взаимного расположения этих прямых; так как в рассуждениях участвуют только одна биссектриса и одна ось симметрии, то разрешим себе называть их просто «биссектриса» и «ось».

Случай 1: биссектриса и ось не пересекаются, т. е. либо параллельны, либо сливаются. Так как ось перпендикулярна к AB, то и биссектриса перпендикулярна к AB, т. е. совпадает с высотой, а в таком случае треугольник ABC — равнобедренный ($CA = CB$).

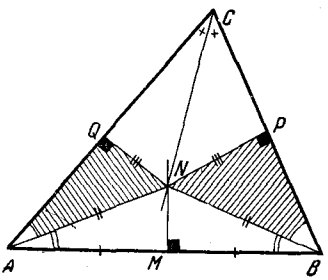

Рис. 5.

Случай 2: биссектриса и ось не пересекаются внутри треугольника ABC (рис. 5), пусть в точке N. Так как эта точка равноудалена от сторон угла ACB, то, опустив из нее перпендикуляры NP и NQ соответственно на CB и CA, имеем $NP = NQ$. Но точка N в то же время равноудалена от концов отрезка AB, т. е. $NB = NA$. Прямоугольные треугольники NPB и NQA равны по катету и гипотенузе, следовательно, $\angle NAQ = \angle NBP$. Прибавляя к этим равным углам равные между собою (как углы при основании равнобедренного треугольника ANB) углы NAB и NBA, получим $\angle CAB = \angle CBA$, значит, треугольник ABC — равнобедренный (именно $CA = CB$).

Случай 3: биссектриса и ось пересекаются на стороне AB, т. е. в середине M этой стороны. Это означает, что в треугольнике ABC медиана и биссектриса, проведенные из вершины C, совпадают, а отсюда следует, что этот треугольник — равнобедренный.

Замечание. Предостерегаем читателя от возможной ошибки. Хорошо известно, что в равнобедренном треугольнике медиана и биссектриса совпадают. Но мы ссылаемся здесь не на это, а на обратное утверждение: «если в треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают, то треугольник — равнобедренный». В такой формулировке обратная теорема также верна, но доказательство ее может затруднить читателя, поэтому приводим одно из возможных. Пусть в треугольнике ABC отрезок CM — одновременно медиана и биссектриса. Опустив из точки M перпендикуляры MP и MQ на стороны CB и CA (можно воспользоваться рис. 5, считая там точки M и N совпадающими; при этом прямая MN становится лишней), получаем равные прямоугольные треугольники MPB и MQA, а затем из равенства углов MBP и MAQ заключаем, что треугольник ABC — равнобедренный. Это рассуждение будет неполным, если не показать, что точки P и Q попадут именно на стороны CB и CA, а не на их продолжения. Одна из этих точек могла бы попасть на продолжение соответствующей стороны, если бы один из углов A и B был тупым. Пусть, например, угол B — тупой, так что точка P лежит на продолжении стороны CB; по-прежнему получается $\angle MAQ = \angle MBP$, но теперь это приводит к противоречию, так как первый из этих углов — внутренний для треугольника ABC, а второй — внешний, с первым не смежный.

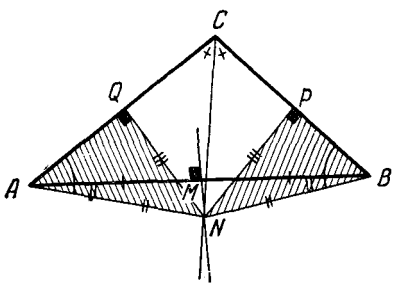

Рис. 6.

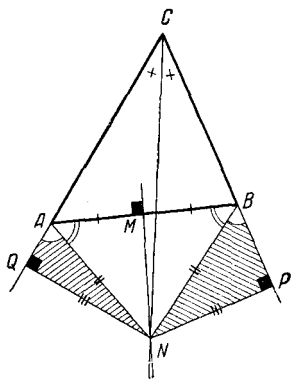

Рис. 7.

Случай 4а: биссектриса и ось пересекаются вне треугольника ABC; перпендикуляры, опущенные из точки N пересечения на стороны CB и CA, падают на эти стороны (рис. 6), а не на их продолжения. Как и раньше, получаем равные треугольники NPB и NQA, равнобедренный треугольник ANB. Углы при основании AB треугольника ABC равны теперь как разности (а не как суммы в случае 2) соответственно равных углов.

Случай 4б: биссектриса и ось пересекаются вне треугольника ABC;

перпендикуляры, опущенные из точки N пересечения на стороны CB и CA, падают на продолжения этих сторон (рис. 7). Те же построения и рассуждения приводят к выводу о равенстве внешних углов при вершинах A и B треугольника ABC. Отсюда сейчас же вытекает равенство внутренних углов A и B, следовательно, $CA = CB$.

Пример 7. *Прямой угол равен тупому.*

Из концов отрезка AB (рис. 8 или 9) проведем два равных между собой отрезка AC и BD, лежащих по одну сторону от прямой AB и образующих с ней прямой угол DBA и

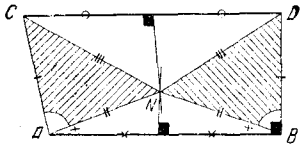

Рис. 8.

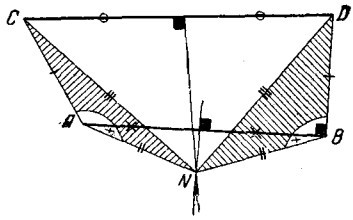

Рис. 9.

тупой CAB; равенство этих углов мы и будем доказывать. Соединив C с D, получим четырехугольник $ABDC$, у которого стороны AC, BD, очевидно, не параллельны, равно как и стороны AB, CD (в противном случае $ABDC$ был бы равнобедренной трапецией с неравными углами при основании AB). Для каждого из отрезков AB, CD построим его ось симметрии. Так как отрезки не параллельны, то и перпендикулярные к ним оси не параллельны и не сливаются, а пересекаются, пусть в точке N. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: точка N лежит «выше» прямой AB, точнее говоря — по ту же сторону от прямой AB, по какую лежит четырехугольник $ABDC$ (см. рис. 8, где точка N помещена внутри четырехугольника). Соединим эту точку со всеми вершинами четырехугольника; так как она одинаково удалена от концов отрезка AB и одинаково — от концов отрезка CD, то треугольники NAC и NBD равны по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle NAC = \angle NBD$. Прибавляя к первому углу угол NAB,

ко второму — угол NBA и учитывая, что $\angle NAB = \angle NBA$ по свойству равнобедренного треугольника, приходим к равенству $\angle CAB = \angle DBA$.

Случай 2: точка N лежит на AB, т. е. служит серединой отрезка AB. Предыдущее доказательство упрощается — равенство $\angle CAB = \angle DBA$ получается сразу из равенства треугольников NAC и NBD.

Случай 3: точка N лежит «ниже» AB, т. е. не по ту сторону от прямой AB, по какую лежит четырехугольник $ABDC$ (рис. 9). Снова из равенства треугольников получается $\angle NAC = \angle NBD$, но теперь от этих углов надо отнять углы NAB и NBA, равные между собою, и снова получится $\angle CAB = \angle DBA$.

Пример 8. *Если между элементами двух треугольников установлено такое соответствие, что две стороны и лежащий против одной из них угол одного треугольника равны соответствующим элементам другого, то треугольники равны.* Короче: треугольники равны по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

Относительно треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 10 или 11 или 12) пусть известно: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$,

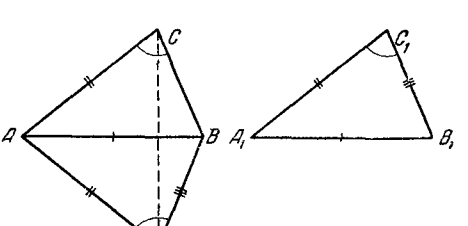

Рис. 10.

$\angle C = \angle C_1$; докажем равенство треугольников. Для этой цели воспользуемся приемом, известным из обычного доказательства равенства треугольников по трем сторонам: приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы равные стороны (именно — те, которые лежат против равных по условию углов) AB и A_1B_1 совпали соответственными концами (A с A_1 и B с B_1); тогда треугольник $A_1B_1C_1$ (перевернутый) займет положение ABC_2. Соединив точки C и C_2, рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: прямая CC_2 пересекает сторону AB во внутренней ее точке (рис. 10). Треугольник ACC_2 — равнобедренный, следовательно, $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$; отнимая эти равные углы соответственно от равных по условию углов ACB и AC_2B, получим: $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$. Последнее равенство означает, что треугольник CBC_2 также равнобедренный, именно $CB = C_2B$, значит, $CB = C_1B_1$, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ оказываются равными по трем сторонам.

Случай 2: прямая CC_2 пересекает продолжение стороны AB за точку B (рис. 11).

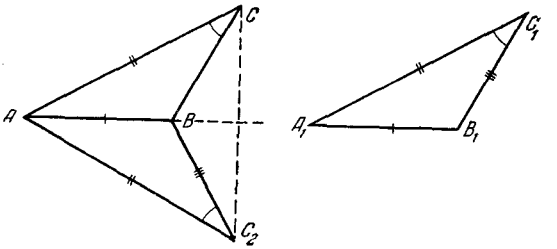

Рис. 11.

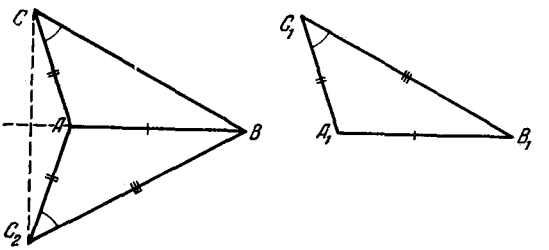

Рис. 12.

Рассуждение остается прежним, только меняется порядок вычитания: от равных углов ACC_2 и AC_2C отнимаются равные углы ACB и AC_2B.

Случай 3: прямая CC_2 пересекает продолжение стороны AB за точку A (рис. 12). Рассуждение то же, что в случае 1, только вычитание заменяется сложением: к равным углам ACC_2 и AC_2C прибавляются равные углы ACB и AC_2B.

Пример 9. *Прямоугольник, вписанный в квадрат, есть также квадрат* *). Точнее: если прямоугольник $MNPQ$ (рис. 13) вписан в квадрат $ABCD$ так, что на каждой стороне квадрата лежит одна из вершин прямоугольника (у нас — M на AB, N на BC, P на CD, Q на DA), то последний также есть квадрат.

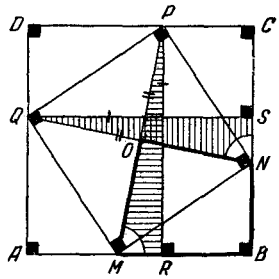

Рис. 13.

Для доказательства опустим перпендикуляры PR и QS из P и Q соответственно на AB и BC. Эти перпендикуляры, из которых каждый равен стороне квадрата $ABCD$, равны между собой. Они служат катетами в треугольниках PRM и QSN, где гипотенузы также равны между собой, как диагонали прямоугольника $MNPQ$; отсюда следует равенство треугольников (заштрихованных на чертеже), а затем и равенство углов:

$$\angle PMR = \angle QNS.$$

Рассмотрим теперь четырехугольник $MBNO$ (на чертеже обведен утолщенными линиями; O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $MNPQ$); у него внешний угол при вершине N равен внутреннему при вершине M, значит, сумма двух внутренних углов при вершинах M и N равна $2d$. Такою же должна быть сумма внутренних углов при вершинах B и O, но один из них ($\angle B$) — прямой, следовательно, и угол O — прямой, т. е. диагонали прямоугольника взаимно перпендикулярны, а этим признаком среди прямоугольников характеризуется квадрат — доказательство завершено.

Пример 10. *Перпендикуляр и наклонная к прямой не пересекаются.* Это — видоизменение древнего софизма, дошедшего до нас благодаря греческому математику Проклу (V в. н. э.) **). Уточним содержание нашего утверждения:

*) Будем надеяться, что никому из читателей не покажется противоречивым уже сочетание слов «прямоугольник... есть... квадрат». Конечно, не все прямоугольники, но некоторые из них суть квадраты.

**) Об изложении этого софизма у Прокла см. Б о н о л а, Неевклидова геометрия, СПБ, 1905, стр. 5 русск. перевода.

в точках A и B прямой AB (рис. 14) по одну сторону от нее построены два луча (чтобы подчеркнуть, что это лучи, направления их на чертеже отмечены стрелками): AQ под острым углом BAQ к прямой AB, затем BP, перпендикулярный к AB; будем доказывать, что эти лучи не пересекаются.

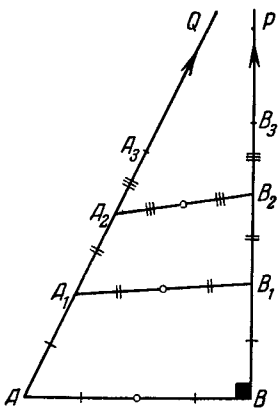

Рис. 14.

Разделим отрезок AB пополам и на каждом из лучей AQ, BP отложим $\frac{1}{2}AB$; таким образом, $AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AB$. На протяжении отрезков AA_1 и BB_1 не может произойти пересечения перпендикуляра с наклонной, т. е. отрезки AA_1 и BB_1 не могут иметь общей точки. Действительно, если бы существовала такая общая точка (K), то получился бы треугольник (AKB), у которого сумма двух сторон $(AK + KB)$ меньшей третьей стороны (AB) или равна ей, а это невозможно. Соединив точки A_1 и B_1, повторим предыдущее построение: от точек A_1 и B_1 на каждом из лучей AQ, BP в его направлении отложим $\frac{1}{2}A_1B_1$, будем иметь $A_1A_2 = B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1B_1$. По соображениям, один раз уже изложенным, отрезки A_1A_2 и B_1B_2 не могут иметь общей точки, в частности, не могут совпасть A_2 с B_2; в таком случае разделим отрезок A_2B_2 пополам, отложим $A_2A_3 = B_2B_3 = \frac{1}{2}A_2B_2$ и т. д. (следует особо подчеркнуть, что откладывание равных отрезков $A_nA_{n+1} = B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}A_nB_n$ на том и другом луче производится каждый раз в направлении этого луча, и следовательно, не может встретить препятствий). Процесс будет длиться без конца; он мог бы остановиться, если бы исчез отрезок A_nB_n, т. е. если бы совпали точки A_n и B_n одинакового номера, но это, как мы видели, невозможно (впрочем, невозможность такого совпадения ясна непосредственно из того, что тогда получился бы прямоугольный треугольник,

у которого гипотенуза AA_n равна катету BB_n). Итак, на каждом шаге этого бесконечного процесса не произойдет пересечения перпендикуляра с наклонной, значит, оно не произойдет никогда.

Перед нами прошел ряд рассуждений, которые подчас кажутся не менее убедительными, чем доказательства из учебника геометрии. В некоторых случаях эти рассуждения направлены на доказательство явных несуразностей, в других неверность доказываемого видна не сразу, но по отношению ко всем примерам читатель предупрежден, что каждый раз делается ошибка. Теперь настало время эти ошибки вскрыть.

Прежде чем заняться (в главе II) разбором всех приведенных до сих пор примеров, настойчиво приглашаю читателей попытаться в каждом случае найти ошибку собственными силами. Быть может, не всегда и не всем и не со всей полнотой это удастся; но даже в случае неудачи собственные размышления над каким-нибудь примером подготовят хорошую почву для чтения того, что будет сказано об этом примере в главе II. А в случае успеха читателю, вероятно, захочется сопоставить свое толкование с изложенным в главе II. Предлагая эту работу, в которой большинство читателей не имеет опыта, считаю полезным дать несколько предварительных указаний и советов.

1. Опровергнуть неправильное геометрическое доказательство — значит найти в нем логическую ошибку. Трудность заключается в том, что такое доказательство почти всюду правильно, но обязательно в каком-то месте содержит пробел — его-то и следует обнаружить.

2. Критикуя доказательство, часто указывают, что оно проведено «на неверном чертеже». Это — не очень удачная формулировка; во всяком случае ограничиться ею нельзя. Когда говорят, что чертеж A неверен и должен быть заменен чертежом B, то этим обычно маскируется следующее положение дел: в доказательстве рассмотрены не все возможные случаи (и это — логическая ошибка!), именно учтены и изображены на чертеже A те, которые окажутся впоследствии противоречащими условию теоремы, а пропущены те, которые (рис. B) согласуются с этим условием. Таким образом, источник ошибки не в чертеже, а в неполном перечислении возможных случаев.

3. Если случай, изображенный на чертеже A, приводит к абсурдному выводу, то достаточно показать, что на

чертеже B такого вывода не получается, чтобы считать косвенно («от противного») доказанной невозможность случая A. При этом желательно (но не обязательно!) получить и прямое доказательство того, что условие теоремы приводит с необходимостью к случаю B (образцы такого доказательства — в главе II).

4. Хотя чертеж сам по себе не может обнаружить ни правильности утверждения, ни его ошибочности, однако следует рекомендовать делать по возможности точные чертежи (с помощью инструментов). Там, где мы имеем дело с явным софизмом, полезно делать чертеж так, чтобы он резко подчеркивал абсурдность вывода, скажем, в примере 7 изобразить тупой угол близким к 180°; в примере 10 начертить перпендикуляр и наклонную пересекающимися уже в пределах чертежа и т. п. Такой чертеж может подсказать, в каком направлении искать ошибку.

5. В некоторых случаях ошибка не имеет никакого отношения к чертежу, а состоит, например, в следующем: доказывается (правильно) не то утверждение, которое брались доказать, а родственное ему, причем либо сам доказывающий не замечает сделанной подмены, либо рассчитывает на то, что ее не заметят другие.

6. Если не известно, верно ли доказываемое предложение, то лучше (однако не обязательно) начать с выяснения этого вопроса. Следует помнить, что утверждение будет опровергнуто, если построить хотя бы один противоречащий ему пример.

Читатель лучше уяснит себе смысл сделанных указаний после того, как проделает предлагаемую самостоятельную работу и прочитает следующую главу. Поэтому рекомендую возвращаться к этим указаниям при чтении главы II и еще раз обдумать их после ее окончания.

ГЛАВА II

АНАЛИЗ ПРИМЕРОВ, ПРИВЕДЕННЫХ В ГЛАВЕ I

К примеру 1. Утверждая, что из частей *I*, *II*, *III*, *IV* квадрата может быть сложен прямоугольник, мы доверяемся кажущейся наглядности или грубо произведенному опыту (если занимались вырезыванием из бумаги). Какое основание мы имеем считать, что приложенные друг к другу фигуры *I* и *III* (или, что то же, *II* и *IV*) образуют треугольник, т. е. что наклонная боковая сторона трапеции *I* и гипотенуза треугольника *III* при этом составят одну прямую, а не дадут «излом» в общей точке этих отрезков? То, что мы этого излома не видим на чертеже или не наблюдаем на выкройке из бумаги, конечно, доводом служить не может: даже оставляя в стороне несовершенство наших зрительных впечатлений, заметим, что ведь они относятся не к геометрическим фигурам, а к их физическим моделям, значит, для строгих геометрических доказательств не годятся *).

Достаточно обнаружить этот пробел, для того чтобы признать все доказательство несостоятельным и, пока пробел не восполнен, даже отказаться от дальнейшего обсуждения. Мы, однако, на этот путь не станем и постараемся выяснить вопрос об «изломе» до конца.

Если бы, например, удалось доказать, что углы α и β рис. 1 составляют в сумме $2d$ или, вместо этого, что углы

*) В истории человечества это было понято далеко не сразу. При раскопках древнеиндийского храма, существовавшего за 1000 лет до нашей эры, были обнаружены некоторые математические записи, в том числе геометрическая фигура, изображенная на стене храма. Рисунок, по-видимому, относился к правилу нахождения площади круга; вместо доказательства около фигуры было написано «смотри».

α и α' того же чертежа равны между собою, то отсутствие «излома» было бы обосновано и доказательство восстановлено в своих правах. Возможно ли это? Рассуждая косвенным образом, именно — от противного, следует ответить на этот вопрос отрицательно: ведь положительный ответ привел бы к равенству $441 = 442$.

Впрочем, можно и прямым путем убедиться в неравенстве углов α и α', а заодно выяснить, который из них больше. Ближайшие несколько строк будут понятны читателю, хоть немного знакомому с тригонометрией, например, в объеме VIII класса средней школы (вместо тригонометрии можно было бы применить свойства подобных треугольников). Из треугольника *III* на рис. 1 находим тангенс угла α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{8}.$$

Если же в трапеции *I* опустить перпендикуляр (на рис. 1 не изображенный) из вершины угла β на большее основание, то образуется прямоугольный треугольник с катетами 13 и 13—8=5, из которого

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{13}{5}.$$

А так как $\frac{21}{8} > \frac{13}{5}$, именно $\frac{21}{8} - \frac{13}{5} = \frac{1}{40}$, то $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\alpha'$, а отсюда следует, что

$$\alpha > \alpha',$$
$$\alpha + \beta > 2d.$$

Теперь картина ясна: части *I*, *II*, *III*, *IV* квадрата действительно можно расположить внутри прямоугольника, но при этом они не покрывают полностью этот прямоугольник, а оставляют «просвет» в форме очень узкого параллелограмма, «щель», идущую вдоль диагонали прямоугольника. Не удивительно, что мы не замечаем этой щели: ведь при протяжении ее в 36,4... (*см*) она занимает площадь всего 1 ($см^2$) — тот самый излишек, который обнаружился при переходе от квадрата *Q* к прямоугольнику *R*. Читатель, который пожелает сделать для себя картину еще более наглядной, пусть изменит числовые данные рис. 1, например так, как это сделано на рис. 15, где «щель» имеет

площадь, равную 99 ($см^2$), при площади 540 ($см^2$) всего прямоугольника.

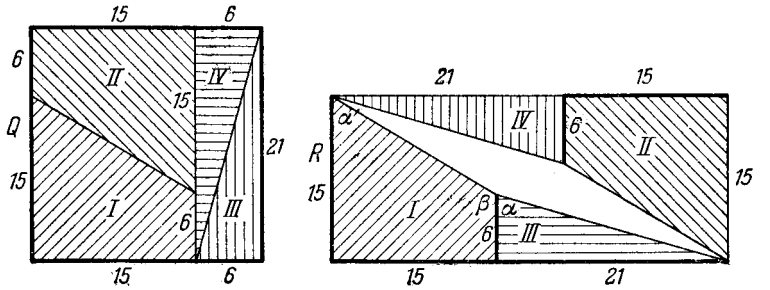

Рис. 15.

К примеру 2. Допущенная здесь ошибка принадлежит к числу распространенных и уже в классической логике носила мудреное латинское название (ignoratio elenchi), которое в вольном переводе звучит так: «непонимание того, что́ доказано». В самом деле, что же обосновано рассуждением, к которому относится рис. 2? Доказано только, что если строить параллельную прямую тем способом (с помощью двух перпендикуляров), который там описан, то получается единственная прямая. Но разве сам этот способ единственный? Нет, хорошо известно, что существуют другие построения, приводящие к той же цели. Например, вместо основания D перпендикуляра CD (см. рис. 2) мы могли бы взять любую другую точку D' (рис. 16) на прямой AB, соединить ее с C прямой $D'F$ и на луче CF при точке C построить угол FCE', равный углу $CD'B$ (притом так, чтобы лучи CE' и $D'B$ лежали по одну сторону от FD'). На основании теоремы (доказываемой до аксиомы) о параллельности прямых при равенстве соответственных углов, можем утверждать, что прямая CE' параллельна AB. Но где гарантия того, что прямые CE рис. 2 и CE' рис. 16 совпадают? Утверждать, что различные построения

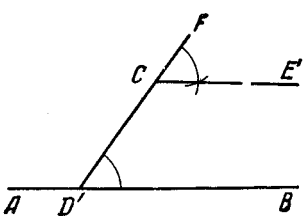

Рис. 16.

приведут к одной и той же прямой *), — это значит принять без доказательства то, что мы хотели доказать.

К примеру 3. Уточним наши допущения: каковы бы ни были параллельные прямые и секущая, какую бы пару внутренних односторонних углов ни взять, сумма этих углов либо всегда больше $2d$, либо всегда меньше $2d$, либо всегда равна $2d$. Но здесь только на первый взгляд исчерпаны все возможные случаи: упущена возможность того, что сумма внутренних односторонних углов иногда больше, иногда меньше, а иногда, быть может, и равна $2d$. Это допущение ни к какому противоречию не приводит. Например, если предположить, что $\angle 1 + \angle 4 > 2d$, а $\angle 2 + \angle 3 < 2d$ (см. рис. 3), то это нисколько не противоречит тому, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 4d$.

Заметим, что, не вникая в подробный разбор доказательства, можно было с самого начала обнаружить его несостоятельность по одному внешнему признаку: доказательство это совершенно не использует параллельности прямых AB и CD. Если бы оно было верным, то была бы доказана следующая теорема: «при пересечении любых двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна $2d$», а это заведомо неправильно. Как раз, если отбросить предположение о параллельности прямых AB и CD, то, как правило, будет осуществляться та четвертая возможность, которая была упущена в опровергнутом нами доказательстве: по одну сторону от секущей сумма углов будет больше, по другую — меньше $2d$.

К примеру 4. Мы привыкли к тому, что сумма углов треугольника одинакова (именно равна $2d$) для всех треугольников независимо от их формы и размеров, поэтому большинство из нас не протестует, когда слышит: «обозначим через x сумму углов (любого) треугольника». Но ведь в момент доказательства интересующей нас теоремы ничего не известно о сумме углов треугольника, и нет никаких оснований предполагать ее одной и той же для всех треугольников. Конечно, мы могли бы принять факт одинаковости суммы без доказательства, и тогда приведенное рассуждение действительно доказывало бы, что эта

*) В геометрии Лобачевского прямые CE и CE' заведомо не совпадают.

сумма равна $2d$. Но это только означало бы, что вместо аксиомы параллельности мы ввели другую аксиому, не имеющую перед первой никаких преимуществ.

К примеру 5. История математики знает несколько случаев, когда допускалась одна и та же ошибка: без оснований принимали, что среди чисел данной бесконечной совокупности должно существовать наибольшее (в других случаях — наименьшее). Впрочем, никому не придет в голову искать наибольшее среди чисел 1, 2, 3, ... натурального ряда. Но отсутствие такого числа объяснят тем, что ведь числа здесь все время возрастают, а ряд этот не имеет конца. Однако ряд дробей, у которых числитель на 1 меньше знаменателя,

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5},\ldots,$$

тоже можно продолжать без конца, прибавляя каждый раз по 1 к числителю и к знаменателю, причем, как и в первом случае, числа будут возрастать, но наибольшего среди них нет. Вообще, не существует наибольшей правильной дроби. Более близок к нашему следующий пример из геометрии: внутренний угол правильного многоугольника *), равный $\frac{2d(n-2)}{n}$, где n — число сторон, всегда меньше $2d$, но не существует правильного многоугольника с наибольшим внутренним углом.

В разбираемом доказательстве слабым местом как раз является утверждение, что среди треугольников, о которых мы знаем только то, что сумма углов каждого не превышает $2d$, существует треугольник с наибольшей суммой углов. Это — недоказанное утверждение, которое мы могли бы принять за новую аксиому взамен аксиомы параллельности.

Объединяя результаты, полученные при разборе примеров 4 и 5, приходим к выводу: можно доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$, и тем самым сделать аксиому параллельности лишней, если принять без доказательства одно из двух утверждений: 1) у всех треугольников сумма углов одна и та же; 2) существует треугольник (хотя бы один) с наибольшей суммой углов.

*) Так называется многоугольник, у которого равны между собою все стороны, а также и все углы.

К примеру 6. Рассмотрены не все возможные случаи (по поводу последних двух слов полезно вспомнить сказанное в сноске на стр. 12), именно не учтена возможность того, что из двух перпендикуляров NP и NQ один упадет на сторону треугольника ABC, а другой — на продолжение стороны (рис. 17, где пока не надо принимать во внимание окружность). Если это произойдет, то один из углов при основании AB треугольника ABC окажется разностью двух углов, а другой будет смежным для суммы тех же углов — отсюда, разумеется, никаких выводов, относящихся к углам при основании, а значит, и к равенству боковых сторон, сделать нельзя. Достаточно установить этот пробел в доказательстве, для того чтобы оно было опорочено. Более того, если данный треугольник — н е р а в н о б е д р е н н ы й, то можно утверждать (рассуждая от противного), что все рассмотренные случаи (рис. 5, 6, 7) невозможны, а единственно возможный случай (рис. 17) упущен *).

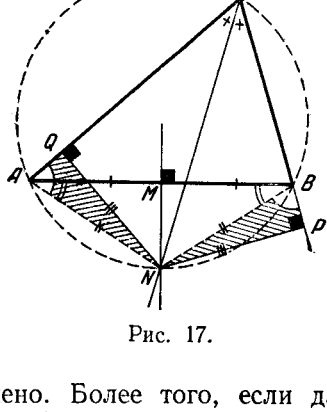

Рис. 17.

Впрочем, мы дадим сейчас прямое доказательство того, что в неравнобедренном треугольнике расположение частей фигуры именно таково, каким оно изображено на рис. 17. Действительно, пусть $CA > CB$. Опишем около треугольника ABC окружность; по свойству вписанных углов биссектриса угла C должна пройти через середину N дуги AB,

*) На первый взгляд может показаться, что упущены еще и те случаи, когда точка N лежит внутри или на основании треугольника, а точки P и Q находятся по разные стороны от AB (разумеется, ничего невозможного нет в том, чтобы перпендикуляр, опущенный из внутренней точки треугольника на его сторону, упал на продолжение стороны,— достаточно вспомнить о тупоугольном треугольнике). Однако в ближайшем тексте будет установлено, что для неравнобедренного треугольника пересечение оси с биссектрисой не может произойти иначе, как вне треугольника. Читатель, знакомый с теоремой «биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам», пусть попытается иным путем установить это свойство точки пересечения.

на которую этот угол опирается. Но через ту же середину N должна пройти ось симметрии хорды AB. Таким образом, пересечение биссектрисы с осью происходит на описанной окружности, т. е. заведомо в н е треугольника ABC. Перпендикуляры из N на CB и CA упадут на эти стороны или на их продолжения в зависимости от того, будут ли острыми или тупыми углы NAC и NBC. Вместо этих вписанных углов будем рассматривать дуги, на которые они опираются. Так как мы предположили $CA > CB$, то $\overset{\smile}{CA} > \overset{\smile}{CB}$, а отсюда и из $\overset{\smile}{AN} = \overset{\smile}{BN}$ следует, что $\overset{\smile}{CAN} > \overset{\smile}{CBN}$. Это означает, что дуга CAN больше полуокружности, а дуга CBN меньше ее, следовательно, угол CBN тупой, а угол CAN острый. Поэтому перпендикуляр NP падает на продолжение стороны CB, а перпендикуляр NQ на сторону AC (в качестве упражнения предлагаем читателю доказать, что точки P, M, Q лежат на одной прямой).

К примеру 7. Доказательство кажется поначалу убедительным, так как создает иллюзию, будто рассмотрены все существенно различные случаи*) (точка N лежит выше, ниже или на прямой AB). Между тем в нашем примере ход доказательства зависит н е т о л ь к о от положения точки N. Можно заметить, что в случае 3 прямой угол ABD в сумме с острым углом ABN всегда даст тупой угол DBN; однако относительно тупого угла CAB можно допустить, что при сложении с острым углом NAB он даст снова тупой угол (рис. 9), но может дать и «сверхтупой» (т. е. больший 180° — рис. 18), а это коренным образом меняет дело.

Таким образом, случай 3 необходимо разбить на два подслучая: тупой угол CAB и треугольник CAN лежат 1) по одну сторону (рис. 9) от прямой AC, 2) по разные стороны от нее (рис. 18, где сначала надо оставить без внимания пунктирные линии). Первый подслучай, при котором угол CAB составляет часть угла CAN, рассмотрен и приводит к равенству углов DBA и CAB. Однако второй подслучай к этому выводу не приводит: прямой угол DBA по-прежнему представляется р а з н о с т ь ю двух

*) Два случая следует считать существенно различными, если доказательство, годное для одного случая, нельзя буквально повторить для другого.

углов ($\angle DBN$ и $\angle ABN$), а тупой угол CAB дополняет до $4d$ с у м м у двух таких же углов ($\angle CAN$ и $\angle BAN$). Рассуждая от противного, следует заключить, что второй подслучай является единственно возможным.

Произведем дополнительное построение, позволяющее лучше обозреть расположение частей фигуры. Из точки A восставим перпендикуляр к AB (теперь вступают в дело и пунктирные линии рис. 18), отложим на нем отрезок AE, равный BD и одинаково с ним направленный; очевидно, имеем также $AE = AC$. Соединим E с точками D, N и C; так как $ABDE$ — прямоугольник, то ось симметрии отрезка AB будет такой же для отрезка ED, следовательно, $NE = ND$, а отсюда $NE = NC$. Итак, каждая из точек A и N одинаково удалена от концов отрезка CE, следовательно, прямая AN служит осью симметрии этого отрезка. Треугольник DBN в результате отражения от оси симметрии отрезка AB переходит в треугольник EAN (противоположной ориентации *)), а этот последний после отражения от прямой AN — в треугольник CAN (той же ориентации, что у треугольника DBN). Таким образом, CAN получается из DBN просто поворотом последнего вокруг вершины N на угол BNA ($= EAC$, т. е. равный разности между первоначально взятыми тупым и прямым углами).

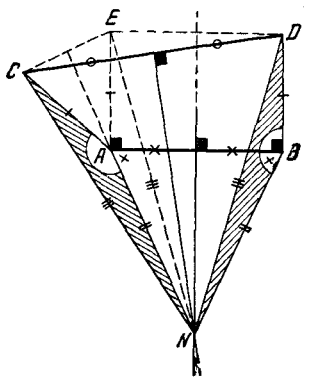

Рис. 18.

К примеру 8. Удостоверимся прежде всего в том, что теорема не верна. Для этого достаточно привести «противоречащий пример», т. е. указать случай, когда условия теоремы выполнены, а заключение нет. Такой пример мы получим, если какой-нибудь равнобедренный треугольник

*) Читатель, не владеющий понятием «ориентация треугольника», может либо пройти мимо слов, заключенных в скобки, либо обратиться к книгам (см., например, Д. И. П е р е п е л к и н, Курс элементарной геометрии, Гостехиздат, 1948, § 8).

LMN ($LN = MN$, рис. 19) разобьем на два отрезком NP, выходящим из вершины, но отличным от медианы. У полученных треугольников LNP и MNP (соответствие устанавливается порядком перечисления вершин) сторона NP — общая, кроме того, $LN = MN$ и $\angle L = \angle M$ — условия теоремы выполнены, между тем треугольники, конечно, не равны (хотя бы потому, что $LP \neq MP$).

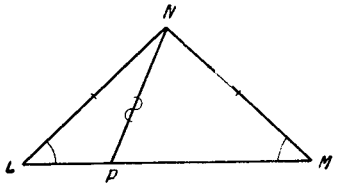

Рис. 19.

Однако даже не зная, верна ли теорема или нет, можно было обнаружить пробел в доказательстве, заключающийся в том (возвращаемся к обозначениям рис. 10—12), что упущены случаи, когда прямая CC_2 проходит через один из концов (A или B) отрезка AB, т. е. стороны CA и C_2A или же CB и C_2B составляют продолжение одна другой.

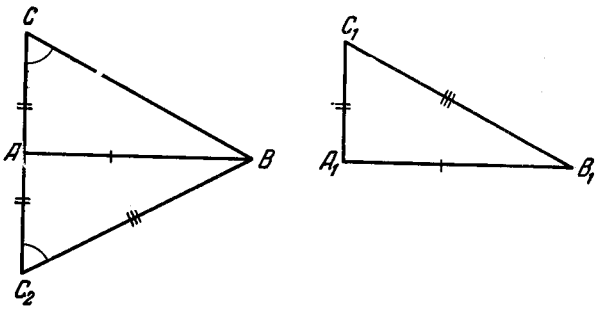

Рис. 20.

В первом из этих двух случаев (лежат на одной прямой две равные стороны — AC и AC_2 на рис. 20) заключение теоремы все же верно: после прикладывания треугольника $A_1B_1C_1$ к ABC получается треугольник BCC_2, равнобедренный в силу равенства углов C и C_2, следовательно,

$$BC = BC_2 = B_1C_1.$$

Добавим, что это может иметь место только в случае

прямоугольных треугольников (на рис. 20 слева углы при точке A равны и смежны) *).

Иная картина получается, когда лежат на одной прямой те стороны (BC и BC_2, рис. 21), о которых нам из условия теоремы ничего не известно. Конечно, получится равнобедренный треугольник ACC_2, но сделать отсюда какие-нибудь выводы относительно сторон CB и C_2B невозможно. Более того, читатель сразу вспомнит фигуру равнобедренного треугольника (рис. 19), разбитого на две неравные части, и заключит, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ в этом случае, вообще говоря, не равны (разве только углы при вершинах B и B_1 окажутся прямыми — тогда снова равенство).

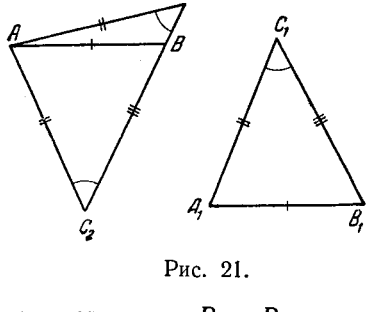

Рис. 21.

Замечание 1. Предыдущие рассуждения подсказывают, как можно было бы «исправить» нашу теорему, т. е. какими родственными ей, но верными теоремами можно было бы ее заменить. Приведем два примера такого «исправления».

а) *Если между элементами двух треугольников установлено такое соответствие, что две стороны и лежащий против одной из них угол одного треугольника равны соответствующим элементам другого, то углы, лежащие против равных сторон второй пары* (на всех рис. 10—12 и 20—21 эти углы отмечены буквами B и B_1), *либо равны между собой* (и тогда треугольники равны, рис. 10—12 и 20), *либо в сумме составляют* $2d$ (рис. 21).

б) *Если между элементами двух треугольников установлено такое соответствие, что две стороны и лежащий против большей из них угол одного треугольника равны соответствующим элементам другого, то треугольники равны.*

---

*) Заметим, что эту возможность (вершины C, A, C_2 — на одной прямой) следует предусмотреть и в обычном доказательстве равенства треугольников по трем сторонам. При таком допущении там, как и здесь, доказательство благополучно завершается, причем также обнаруживается, что равные треугольники в этом случае должны быть прямоугольными.

Действительно, теперь случай, изображенный на рис. 21, исключается: ни один из углов B и B_1 не может быть тупым (и даже прямым), так как не лежит против наибольшей стороны. Эта теорема приводится иногда в учебниках геометрии под названием «четвертого признака равенства треугольников».

Замечание 2. Следующее обстоятельство кажется на первый взгляд странным: случай равенства треугольников может быть сделан в известном смысле «сколь угодно близким» к случаю их неравенства. Например, если сравнивать рис. 10 с рис. 21, то ведь точка B рис. 10 могла бы лежать сколь угодно близко к прямой CC_2; сколь бы «узким» ни был треугольник CBC_2, он непременно будет равнобедренным, и доказательство равенства треугольников сохранит силу. Но стóит точке B упасть в точности на прямую CC_2 (рис. 21), как равенство отрезков CB и C_2B, а вместе с тем и равенство треугольников, становится необязательным. Сейчас будут приведены некоторые соображения, имеющие целью разъяснить это явление.

Иногда бывает удобно рассматривать три точки P, Q, R, лежащие на одной прямой, как вершины «выродившегося треугольника»; если при этом Q лежит между P и R, то углами «треугольника» считают $\angle P = 0$, $\angle R = 0$, $\angle Q = 2d$. Смысл этой терминологии ясен: пока точки лежат «почти» на одной прямой, они все же определяют треугольник с двумя «весьма малыми» углами и третьим «близким» к развернутому ($2d$). При непрерывной деформации фигуры эти три точки могут оказаться в точности на одной прямой, и для такого случая желательно сохранить прежние названия. При этом некоторые теоремы оказываются одинаково справедливыми для «настоящих» и для «выродившихся» треугольников; такова, например, теорема: сумма углов треугольника равна $2d$. Зато другие теоремы при переходе к выродившимся треугольникам теряют силу. Сюда, в частности, относится теорема: треугольник с двумя равными углами — равнобедренный. Теорема эта верна, когда равные углы отличны от нуля; но в выродившемся треугольнике PQR, о котором недавно говорилось, из равенств $\angle P = \angle R = 0$ вовсе не следует, что $PQ = QR$, т. е. что точка Q служит серединой отрезка PR,— она может лежать на этом отрезке где угодно. Этот пример имеет прямое отношение к интересующему нас вопросу. Пока на рис. 10 или 11 точка B не лежит на прямой CC_2,

то сколь бы малыми ни были углы при стороне CC_2 в треугольнике BCC_2, из равенства этих углов следует, что $CB = C_2B$. Но если, как на рис. 21, треугольник BCC_2 вырождается, то оба рассматриваемых угла обращаются в нуль, и вывод о равнобедренности, а с ним и заключение теоремы, теряют силу.

К примеру 9. Утверждение теоремы ошибочно, так как легко построить прямоугольник, вписанный в квадрат и имеющий неравные стороны,— достаточно взять стороны прямоугольника параллельными диагоналям квадрата (но при этом не делящими сторон квадрата пополам). Подробнее (рис. 22): от двух противоположных вершин квадрата, например от A и C, вдоль его сторон откладываем четыре равных отрезка $AM = AQ = CN = CP$ произвольной длины $\neq \frac{a}{2}$, где a — длина стороны квадрата; оставшиеся части сторон квадрата также будут равны между собой: $MB = BN = PD = DQ \neq \frac{a}{2}$. Соединяя последовательно точки M, N, P, Q, M, получаем четыре равнобедренных прямоугольных треугольника, попарно равных между собой: $\triangle AMQ \equiv \triangle CPN$, $\triangle BNM \equiv \triangle DQP$. Отсюда $QM = PN$, $MN = QP$, четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, и именно прямоугольник, так как, например, $\angle MQP = 180° - 45° - 45° = 90°$ (одновременно замечаем, что стороны четырехугольника $MNPQ$, будучи наклонены к сторонам квадрата под углами в 45°, должны быть параллельны диагоналям квадрата; отсюда получается новое доказательство того, что $MNPQ$ — прямоугольник).

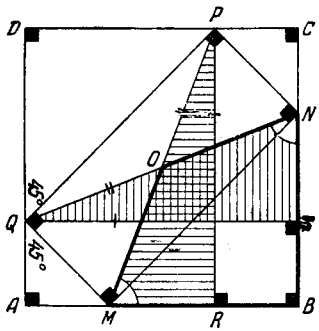

Рис. 22.

Независимо от только что изложенного построения можно было заметить следующий логический дефект в доказательстве на стр. 21: только доверившись случайному рис. 13, мы считали, что из двух проекций — точки P на AB и точки Q на BC — одна (R) лежит на стороне четырехугольника $MBNO$, а другая (S) — на продолжении его

стороны; иными словами, что из двух равных углов $\angle OMR$ и $\angle ONS$ один является внутренним, другой — внешним для четырехугольника $MBNO$. Никакими доводами это расположение точек или углов не было обосновано и не могло быть: ведь с тем же условием теоремы согласуется рис. 22, где упомянутые углы — оба внутренние.

Подводя итог, мы можем в нескольких вариантах формулировать исправленную теорему, например:

1) *если прямоугольник вписан в квадрат так, что одна из сторон первого не параллельна ни одной из диагоналей второго, то этот прямоугольник есть квадрат*; или

2) *если прямоугольник с неравными сторонами вписан в квадрат, то стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.*

К примеру 10. Ошибка — той же логической природы, что и в примере 2: «непонимание того, что́ доказано»; иначе говоря, подмена того, что требуется доказать, другим предложением, которое действительно обосновывается, но из которого доказываемое никак не вытекает. Вдумаемся еще раз в ход рассуждений и облегчим себе работу обнаружения ошибки, заменяя рис. 14 другим (рис. 23), где лучи AQ и BP пересекаются (чтобы избежать обвинения в том, что чертеж предрешает вопрос о существовании точки пересечения, сделаны небольшие разрывы при вычерчивании лучей AQ и BP). Если именовать для краткости AA_1, A_1A_2, A_2A_3,... первым, вторым, третьим, ... отрезками наклонной, а BB_1, B_1B_2, B_2B_3,... — первым, вторым, третьим, ... отрезками перпендикуляра, то следует признать доказанным, 1) что процесс откладывания этих отрезков не имеет конца, так что могут быть получены отрезки сколь угодно высокого порядкового номера, 2) что при этом о д н о и м е н н ы е отрезки друг с другом не пересекаются, т. е. не имеют общей точки ни первый отрезок перпендику-

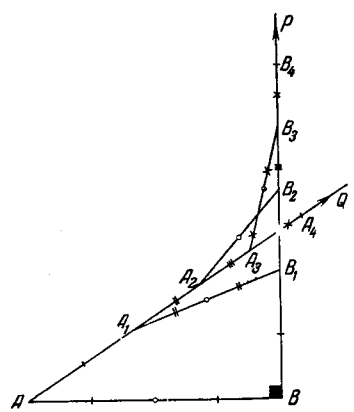

Рис. 23.

ляра с первым отрезком наклонной, ни второй со вторым, ..., ни сотый с сотым и т. д. Но почему же не могут пересекаться разноименные отрезки, скажем, 20-й отрезок перпендикуляра с 25-м отрезком наклонной? А ведь когда мы утверждаем, что перпендикуляр и наклонная нигде не пересекаются, то обязаны показать, что ни один из отрезков перпендикуляра не имеет общей точки ни с одним из отрезков наклонной. И мы не можем удовлетвориться вместо этого доказательством того, что ни один из отрезков перпендикуляра не пересекается с одноименным отрезком наклонной. Если обратимся к рис. 23 (на котором сохранены обозначения рис. 14; оба чертежа выполнялись без намеренных искажений), то убедимся, конечно, «на глаз», что там как раз 2-й отрезок перпендикуляра пересекается с 4-м отрезком наклонной*). Этот софизм замечателен контрастом между элементарностью ошибки и трудностью ее обнаружения.

Замечание. Как уже было сказано (см. сноску на стр. 19), здесь заимствована только идея софизма, воспроизведенного Проклом. Последний рассматривает две произвольно взятые прямые (фактически два луча, не лежащих на одной прямой и имеющих разные начала) и доказывает с помощью описанного выше бесконечного процесса откладывания отрезков, что эти прямые не пересекаются. Прокл правильно характеризует логическую ошибку, допущенную в этом софистическом рассуждении, когда говорит, что доказана только недостижимость точки пересечения с помощью данного построения, но это вовсе не означает, что такой точки не существует. Однако, судя по изложению Бонола, нельзя быть уверенным в том, что Прокл глубже проник в геометрическую сущность допущенной ошибки; во всяком случае, близкий к нам по времени итальянский автор явно ошибается, когда говорит, что недостижимость точки пересечения здесь имеет тот же характер, что и в знаменитом софизме «Ахиллес и черепаха». Этим сопоставлением Бонола, конечно, хочет сказать следующее: точка пересечения (назовем ее K) лучей AQ и BP именно потому недостижима в данном построении, что при неограниченном возрастании n точки A_n и B_n стремятся к точке K, как к своему пределу, никогда не достигая этого предела. В нашем варианте такое допущение невозможно, так как при наличии равенства $AA_n = BB_n$, справедливого при любом n, отсюда вытекало бы, что $AK = BK$, т. е. гипотенуза равна катету. Но эта невозможность сохраняется и в построении Прокла—Бонола, за исключением того частного случая, когда треугольник AKB оказывается равнобедренным. Таким образом, и здесь происходит, вообще говоря, пересечение разноименных отрезков, а не стремление концов одноименных отрезков к общему пределу.

*) Зная угол A, можно было бы средствами тригонометрии найти номера пересекающихся отрезков вычислением.

Выводы. Читатель может спросить: если ошибки в математических рассуждениях оказываются иногда настолько замаскированными, что их можно обнаружить лишь после тщательного анализа, то является ли математика тем надежным фундаментом для точных наук (физики, техники и др.), каким мы ее привыкли считать?

Конечно, ни один научный метод не гарантирует от ошибочных выводов, необходимо еще, чтобы этим методом пользовались правильно. Это только означает, что следует изучать источники возможных ошибок, быть более требовательным к обоснованию своих утверждений. А для того чтобы уяснить себе, насколько реальна опасность допустить ошибку, которая может остаться незамеченной, надо обратиться к истории нашей науки.

История знает в трудах математиков отдельные ошибки, но никогда они не останавливали поступательного движения науки и на более высокой ступени разоблачались. Внушительным примером может служить уже упоминавшаяся история многовековых попыток доказать аксиому параллельности. Об этой аксиоме Лобачевский писал в 1823 г.: «Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут называться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами». К такому убеждению Лобачевский пришел за несколько лет до завершения своего замечательного открытия. В истории геометрии оно и послужило той новой ступенью, с высоты которой — сначала для Лобачевского, а позже для всего математического мира — стала очевидной несостоятельность самых хитроумных проектов доказательства аксиомы параллельности.

Дальнейшие иллюстрации к этим выводам читатель найдет в главах III и IV.

ГЛАВА III

ОШИБКИ В РАССУЖДЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПОНЯТИЕМ ПРЕДЕЛА

Примеры этой главы доступны уже только ученикам двух старших классов: здесь нам понадобится знакомство с длиной окружности, с понятием предела, с тригонометрией, а в одном случае и со стереометрией.

Пример 11. *Все окружности имеют одинаковую длину.* Это — софизм, приписываемый греческому философу Аристотелю (IV в. до н. э.) и по причине, которая скоро выяснится, называемый «аристотелевым колесом».

Вспомним задачи из арифметики, где в числе данных была длина окружности (там обычно говорили просто «окружность») колеса едущей по дороге телеги или автомашины, а найти требовалось пройденный путь, или наоборот. За основу решения брался тот кажущийся очевидным факт, что при каждом полном обороте катящегося колеса оно проходит путь, равный (длине) окружности колеса; если, например, колесо имеет «в окружности» 2 метра и, катясь, сделало 30 полных оборотов, то пройденное расстояние равно 60 *м*. Надо сказать, что там, где движение происходит по прямой линии и где не требуется особой точности, эти расчеты подтверждаются опытом. Окружность колеса можно измерить тесьмой; о том, что колесо сделало полный оборот, можно судить, следя за какой-нибудь отмеченной спицей этого колеса или, вместо этого, закрепив в каком-нибудь месте обода накладку, оставляющую след на земле (многие счетчики, устанавливаемые на отдельных видах транспорта, учитывают именно числа оборотов, а показывают расстояния или же, в соединении с часовым механизмом, скорости). Конечно, все эти расчеты

практически правильны, если колесо катится «нормально», т. е. не «подпрыгивает» и не «буксует»; на языке механики это выражают словами «колесо катится без скольжения».

Теперь обратимся к софизму. Рассмотрим две скрепленные одна с другой концентрические окружности C и C_1 разных радиусов (рис. 24). Одновременно представим себе

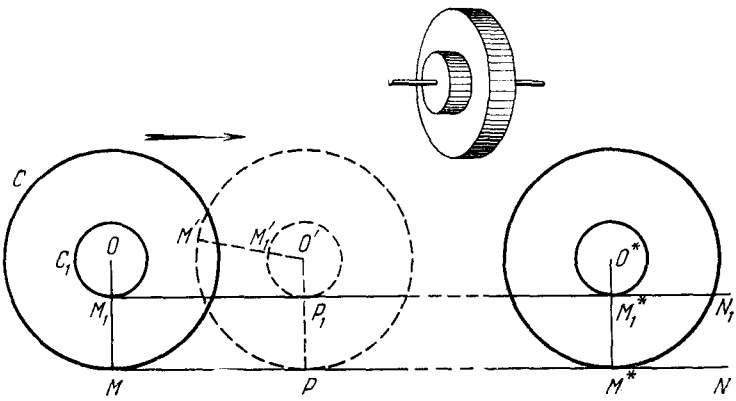

Рис. 24.

физическую модель: два цилиндрических вала насажены на общую, пусть горизонтальную, ось и наглухо скреплены друг с другом (или даже так: часть цилиндрического вала обточена в форме нового цилиндрического вала с той же осью, но с меньшим радиусом; см. рис. 24, сверху). К окружностям C и C_1 соответственно в точках M и M_1, лежащих на одном радиусе OM, проведены касательные MN и M_1N_1. Так как окружности скреплены между собой, то они движутся как одно целое: на какой угол поворачивается одна окружность, на такое же — другая. Если поэтому окружность C катится по прямой MN, то окружность C_1 катится по прямой M_1N_1 (на рис. 24 оперенной стрелкой показано, в каком направлении катятся скрепленные окружности; пунктиром изображено одно из их промежуточных положений, причем M' и M_1' — новые положения точек M и M_1). На физической модели надо представлять себе это так, что под каждый из цилиндрических валов подведен горизонтальный рельс, и когда больший вал

катится по своему рельсу, он заставляет меньший вал катиться по своему. Пусть окружность C, катясь по прямой MN, сделает полный оборот, в результате чего точка M займет положение M^*; при этом окружность C_1 также сделает полный оборот, а точка M_1 займет положение M_1^* на радиусе O^*M^*, параллельном OM (так как оба эти радиуса перпендикулярны к MN). Отсюда заключаем, что

$$MM^* = M_1M_1^*,$$

т. е. обе катящиеся окружности при полном обороте прошли одинаковые пути и, значит, имеют одинаковые длины. А так как окружности C и C_1 взяты совершенно произвольными, то требуемое доказано.

Указание. Не будем предрешать вопроса о том, какой выход найдет читатель из полученного явного противоречия (относящиеся сюда соображения автора будут изложены в главе IV). Следующее замечание будет, кажется, полезным при любом ходе размышлений над этим софизмом.

Часто рассматривают окружность как предел последовательности вписанных в нее (или описанных около нее) правильных многоугольников, когда число их сторон неограниченно возрастает *). Это наводит на такую мысль: чтобы уяснить себе процесс качения окружности, будем катить вместо нее правильный многоугольник; чем большее число сторон у него мы возьмем, тем более точно можно будет представить себе картину качения окружности.

---

*) Здесь намеренно употреблен термин «предел» (вместо распространенного «предельное положение»), которому придается совершенно точный смысл: каким бы (узким) ни было кольцо, ограниченное двумя окружностями, концентрическими с данной и имеющими одна больший, другая меньший радиус, чем у данной (например, кольцо может быть заключено между окружностями радиусов $R - \varepsilon$ и $R + \varepsilon$, где R — радиус данной окружности), найдется такое число n, что все вписанные (описанные) правильные многоугольники с числом сторон n или бо́льшим будут умещаться целиком внутри названного кольца, являясь объемлющими для его внутреннего края и объемлемыми для внешнего края. Этого не надо смешивать с широко известным предложением (чаще — определением): «длина окружности есть предел последовательности длин периметров правильных вписанных (описанных) многоугольников, когда...»; как увидим (см. ниже примеры 12—14), термину «предел» придается в обоих случаях неодинаковый смысл.

Что значит «многоугольник (выпуклый) катится (без скольжения) по прямой», представляется очевидным: устанавливаем определенный порядок обхода вершин (а значит, и сторон) многоугольника, например, против часовой стрелки, и пусть в исходном положении одна из сторон лежит на прямой; вращаем многоугольник вокруг вершины, общей для этой стороны и следующей за ней, пока на прямую

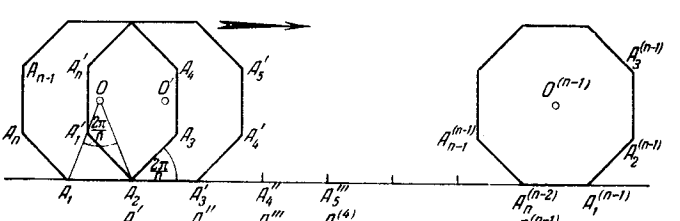

Рис. 25.

не ляжет следующая сторона; затем вращаем вокруг следующей вершины и т. д. Короче говоря, многоугольник «перекладывается» с одной стороны на другую, вращаясь каждый раз вокруг вершины, общей этим сторонам, и в результате этого перемещаясь вдоль прямой в определенном направлении.

В случае правильного n-угольника (рис. 25, где $n = 8$) перенумеруем его вершины: A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n и пусть в исходном положении сторона A_1A_2 лежит на прямой, по которой будет катиться многоугольник в направлении A_1A_2 (оперенная стрелка на рис. 25). В радианной мере внешний угол многоугольника, как и его центральный угол, равен $\frac{2\pi}{n}$ (при других единицах измерения $\frac{4d}{n}$ или $\frac{360^\circ}{n}$); поэтому достаточно повернуть многоугольник вокруг вершины A_2 на угол $\frac{2\pi}{n}$, чтобы сторона A_2A_3 легла на прямую. После этого поворота центр O многоугольника займет положение O', а вершины A_1, A_2, A_3, ..., A_n — соответственно положения A_1', A_2' (совпадающее с A_2), A_3', ..., A_n'. Новый поворот вокруг вершины A_3' на угол $\frac{2\pi}{n}$ приведет многоугольник $A_1'A_2'A'\ldots A_n'$ в положение $A_1''A_2''A_3''\ldots A_n''$ (на рис. 25 отмечены только вершины: A_2'', совпадающая

с A_3', и A_4'', лежащая на прямой). Продолжая этот процесс, мы после $(n-1)$-го поворота приведем многоугольник в положение $A_1^{(n-1)}\ A_2^{(n-1)}\ \ldots A_n^{(n-1)}$, при котором центр будет находиться в точке $O^{(n-1)}$, а сторона $A_n^{(n-1)}\ A_1^{(n-1)}$ будет лежать на прямой; так как при этом вершина A_1 возвращается на прямую, то нет надобности продолжать движение; легко понять, что отрезок $A_1A_1^{(n-1)}$ равен периметру многоугольника.

Читатель заметит, что положение каждой вершины отмечается двумя индексами: нижним, показывающим, какой номер имела эта вершина в исходном положении, и верхним (сначала штрихи, а позже их число, заключенное в скобки), позволяющим судить о числе сделанных поворотов; например, символом $A_6^{(4)}$ отмечается положение вершины A_6 после 4-го поворота.

На рис. 25 можно наряду с существенными свойствами описанного движения наблюдать и некоторые случайные, связанные с выбранным там значением n; читателю рекомендуется сделать чертеж для какого-нибудь другого, пусть теперь нечетного, числа сторон, например для $n = 5$.

Возвращаясь к занимающему нас софизму, возьмем теперь вместо двух концентрических окружностей два правильных концентрических n-угольника с соответственно параллельными сторонами; иначе говоря — два правильных многоугольника, получающихся один из другого преобразованием подобия (гомотетии) с центром подобия в центре второго многоугольника. Считая многоугольники наглухо скрепленными друг с другом, заставим больший из них катиться по прямой так, как описано выше, и постараемся уяснить себе, как при этом будет перемещаться меньший многоугольник. Будет ли последний также «перекладываться» с одной стороны на другую? Будет ли периметр меньшего многоугольника «развертываться» по прямой, как это происходит у большего? Можно поступить наоборот: заставить катиться меньший многоугольник и проследить, каково при этом будет движение большего.

З а д а ч а. Сейчас будет сформулирована задача, в которой для другой цели применяется замена катящейся окружности катящимся многоугольником.

С тематикой настоящей главы эта задача имеет то общее, что содержит некоторые предельные переходы, требующие обоснования (ср. последующие примеры).

Известно, что когда окружность катится по прямой, то каждая точка этой окружности движется по кривой, которую называют ц и к л о и д о й. Если проследить за движением той точки, которая в начальном положении катящейся окружности находится «внизу», т. е. совпадает с точкой касания (рис. 26, ср. с рис. 24), то траектория этой точки между двумя последовательными положениями M и M^* (последнее, как и на рис. 24, соответствует полному обороту катящегося круга) представится в виде «циклоидальной арки» $MM'M^*$.

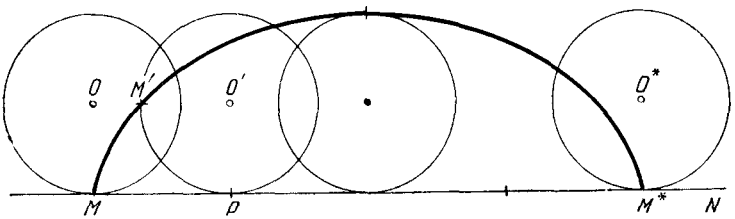

Рис. 26.

Средствами высшей математики установлено, что длина этой арки ровно в 8 раз превышает радиус катящегося круга, а площадь, заключенная между аркой и прямой MM^*, равна утроенной площади круга. Задача заключается в том, чтобы получить эти результаты элементарным путем. Для этого предлагается заменить катящийся круг радиуса R вписанным в него правильным n-угольником.

В обозначениях рис. 25 траектория точки A_1 будет слагаться из круговых дуг (числом $n-1$; на рис. 25 эти дуги не изображены): $\overset{\frown}{A_1A_1'}$ с центром A_2, $\overset{\frown}{A_1'A_1''}$ с центром A_3', ..., $\overset{\frown}{A_1^{(n-2)}A_1^{(n-1)}}$ с центром $A_n^{(n-2)}$. В своей совокупности эти круговые дуги составят кривую, идущую от A_1 до $A_1^{(n-1)}$, похожую на циклоиду, но отличающуюся от нее наличием «точек излома» (в местах стыка двух соседних дуг). По мере увеличения числа n изломы сглаживаются, и кривая, составленная из круговых дуг, приближается к арке циклоиды. Можно ожидать, что последняя служит пределом первой при $n \to \infty$. Но средствами элементарной тригонометрии нетрудно найти для любого n длину траектории, описываемой при полном обороте вершиной многоугольника, как составленную из круговых дуг, а также площадь, заключенную между этой траекторией и прямой $A_1A_1^{(n-1)}$.

Если в полученных выражениях для длины и площади перейти к пределу при $n \to \infty$, то найдем соответственно $8R$ и $3\pi R^2$,

т. е. правильные результаты *). Однако, полноценным вывод*ом формул длины и площади для циклоиды эти рассуждения могут считаться только после того, как будет обоснован предельный переход, т. е. будет доказано, что при $n \to \infty$ длина и площадь, найденные для катящегося n-угольника, имеют своими пределами искомые длину и площадь. Сделать это, оставаясь в рамках элементарной математики, быть может, доступно, но вряд ли легко.

Задача допускает расширение: в случае катящейся окружности рассматривают также траектории точек, лежащих внутри или вне окружности и неподвижно с ней скрепленных,— приходят к так называемым «удлиненным» и «укороченным» циклоидам. Можно попытаться изучать и эти кривые, заменяя катящийся круг вписанным в него правильным многоугольником, а затем переходя к пределу.

Пример 12. *Длина гипотенузы равна сумме длин катетов.*

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 27; $C = 90°$) из середины D гипотенузы опустим перпендикуляры DE и DF на катеты; получится четырехзвенная ломаная $BEDFA$, длина которой, очевидно, равна сумме длин катетов. Повторим это построение для каждого из треугольников DBE и ADF: из середин гипотенуз DB и AD опустим перпендикуляры на катеты — получим восьмизвенную ломаную прежней длины. Процесс можно сделать бесконечным: гипотенуза будет последовательно разделена

---

*) В варианте решения, который наметил себе автор, кроме формул, известных из школьного курса тригонометрии, участвуют еще следующие:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{\sin k\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(k+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 k\alpha = \frac{2k+1}{4} - \frac{\sin(2k+1)\alpha}{4\sin\alpha},$$

$$2(\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\sin 3\alpha + \ldots + \sin(k-1)\alpha\sin k\alpha) = k\cos\alpha - \frac{\sin 2k\alpha}{2\sin\alpha}$$

(читатель легко проверит справедливость этих тождеств, например, индукцией от k к $k+1$);

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega}{\omega} = 1 \quad (\omega — \text{радианная мера угла})$$

(эту формулу можно найти во многих руководствах по тригонометрии).

на 2, 4, 8, 16, ... равных частей; появится последовательность пилообразных ломаных — будем для краткости называть их просто «пилами»,— соединяющих точку A с B и состоящих соответственно из 2, 4, 8, 16, ... «зубьев» (т. е. 4, 8, 16, 32, ... звеньев). Все «пилы» имеют одинаковую длину (т. е. одинаковую сумму длин звеньев), равную сумме длин катетов. С увеличением числа звеньев «пила» все более приближается к гипотенузе AB, так что при очень больших значениях этого числа трудно будет практически отличить ломаную линию с мельчайшими звеньями от прямолинейного отрезка (так же, как трудно отличить от окружности вписанный в нее правильный многоугольник с очень большим числом сторон).

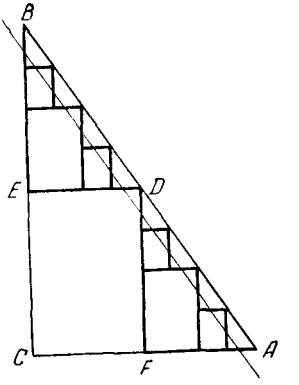

Рис. 27.

Это наглядное представление положим в основу точного высказывания: последовательность «пил» имеет своим пределом отрезок AB в том смысле, что наибольшее из расстояний от точек «пилы» до прямой стремится к нулю по мере возрастания порядкового номера «пилы» (действительно, это наибольшее расстояние есть не что иное, как опущенная на гипотенузу высота какого-нибудь из равных прямоугольных треугольников, образующих «зубья пилы», а высота «зуба» меньше его гипотенузы, которая стремится к нулю). Другими словами, какую бы (узкую) полосу между гипотенузой AB и пересекающей катеты параллелью к ней (рис. 27) мы ни назначили, найдется в последовательности «пил» такая, которая вместе со всеми следующими за ней уместится на всем протяжении от A до B целиком внутри этой полосы (ср. сноску на стр. 40). Но у всех «пил» длина одинакова, значит, последовательность их длин состоит из равных чисел и имеет пределом то же число, равное сумме длин катетов. С другой стороны, пределом «пилы» служит гипотенуза, длина которой также должна быть пределом для последовательности длин «пил», а двух различных пределов последовательность иметь не может; этим наше утверждение доказано.

Замечание 1. Не существенно то, что взят прямоугольный треугольник ABC (единственное преимущество которого состоит здесь в том, что его стороны имеют определенные названия). В случае косоугольного треугольника можно было строить последовательность «пил», проводя через точки деления одной стороны параллели к двум другим сторонам. Не существенно также то, что мы делили сторону на 2, 4, 8, ... равных частей; можно было делить на 2, 3, 4, 5, ... и даже на неравные части, лишь бы число их неограниченно возрастало, а наибольшая часть стремилась к нулю.

Замечание 2. Читатель, может быть, станет искать источник ошибки в том, что длина «пилы» остается неизменной, а потому якобы нельзя говорить о ее пределе. На это следует возразить, что математика рассматривает и такие последовательности, которые состоят из равных чисел; это же самое число будет пределом последовательности согласно точному смыслу понятия «предел». Впрочем, нетрудно было бы так видоизменить наше построение, чтобы длина «пилы» стала переменной, а все остальное сохранилось бы в силе. Достаточно было бы, например, у каждой «пилы» отломить один из зубьев, скажем, первый, считая от точки A; точнее говоря, заменить первые два звена отрезком гипотенузы, начинающимся в A (отчего число звеньев каждой «пилы» уменьшится на единицу). По-прежнему «испорченная пила» будет иметь пределом отрезок AB, а длина ее, отличаясь от суммы длин катетов $AC + BC$ на «бесконечно малое», будет стремиться к этой сумме как к пределу.

Пример 13. *Число* π *равно* 2.

На отрезке AB как на диаметре построим полуокружность (рис. 28); затем разделим отрезок AB пополам и на каждой половине как на диаметре построим по полуокружности, располагая их по разные стороны от AB. Эти две полуокружности составят волнообразную линию (напоминающую по внешнему виду синусоиду), длина которой от A до B равна длине первоначальной полуокружности, т. е. $\frac{\pi}{2}AB$; действительно, каждая меньшая полуокружность вдвое короче большей, так как имеет диаметр, вдвое меньший. Теперь разделим отрезок AB на четыре равные части и построим волнообразную линию, состоящую из

четырех полуокружностей (рис. 28), с прежней суммой длин $\frac{\pi}{2}AB$. Будем продолжать этот процесс неограниченно, деля отрезок AB на 8, 16, ... равных частей и строя на них полуокружности, поочередно расположенные с одной и с другой стороны прямой AB. Получится последовательность волнообразных линий, все более приближающихся к отрезку AB и имеющих его своим пределом в том смысле, что

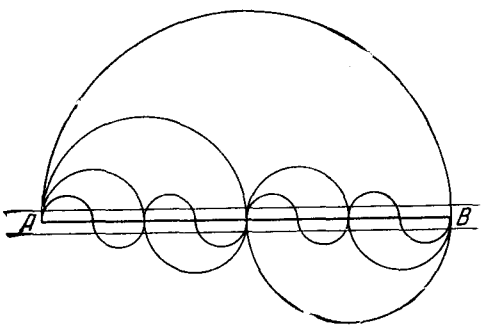

Рис. 28.

наибольшее из расстояний точек каждой волнообразной линии от прямой AB (это наибольшее расстояние, очевидно, равно радиусу полуокружностей, составляющих линию) стремится к нулю по мере удаления от начала последовательности (на рис. 28 изображена полоса между двумя параллелями к AB; как бы ни была узка эта полоса, найдется в нашей последовательности такое место, начиная с которого все волнообразные линии на всем своем протяжении от A до B будут целиком умещаться внутри полосы). Но длина у всех волнообразных линий одинакова и равна $\frac{\pi}{2}AB$; такова же должна быть длина предела этих линий, т. е. отрезка AB. Из равенства $\frac{\pi}{2}AB = AB$ находим $\pi = 2$.

Замечание. Этот пример можно дополнить соображениями, аналогичными замечаниям 1 и 2 к примеру 12: не играет существенной роли ни способ деления отрезка AB на части, ни постоянство длины волнообразной линии. Как

и в предыдущем примере, можно было бы одну из полуокружностей, составляющих волнообразную линию, заменять каждый раз ее диаметром, и тогда длина этой линии стала бы переменной. Предоставляем читателю рассмотреть другие варианты: вместо полукругов, т. е. сегментов, вмещающих прямой угол, строить сегменты, вмещающие какой-нибудь другой угол (постоянный или же изменяющийся по определенному закону в зависимости от числа делений, однако не стремящийся к 180°); тогда для числа π будут получаться иные значения.

Пример 14. «*Цилиндр Шварца*».

Когда хотят измерить дугу $\overset{\frown}{AB}$ кривой линии (рис. 29, слева), то поступают почти так же, как при измерении

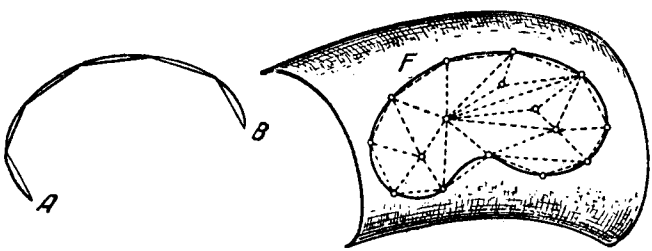

Рис. 29.

окружности или ее частей: вписывают в эту дугу ломаные линии (здесь — не обязательно правильные, потому что для некруговой дуги это может удаться только случайно) и строят бесконечную последовательность таких ломаных, неограниченно сближая вершины, т. е. заботясь о том, чтобы длина наибольшего звена ломаной стремилась к нулю по мере удаления от начала последовательности. Последовательность длин этих ломаных и будет иметь своим пределом длину измеряемой дуги.

Повышая размерность на единицу, приходим к родственной задаче: найти меру (площадь) для фигуры F, лежащей на кривой поверхности (рис. 29, справа). По аналогии с дугой кажется естественным действовать так:

вписывать в данную фигуру многогранные поверхности *) с гранями все более и более мелкими; площадь фигуры F будет пределом для площади переменной многогранной поверхности (т. е. для суммы площадей ее граней). Это, конечно, надо уточнить: внутри фигуры F и на ее границе берем множество точек и соединяем их по три плоскостями так, чтобы образовалась многогранная поверхность с треугольными гранями, из которых никакие две не имеют общих внутренних точек и никакие три — общего ребра. Строим бесконечную последовательность вписанных в фигуру F многогранных поверхностей F_1, F_2, ..., F_n, ... так, чтобы длина наибольшего ребра (т. е. наибольшей из всех сторон всех треугольных граней) поверхности F_n стремилась к нулю при $n \to \infty$ и чтобы каждая точка фигуры F служила пределом для некоторой последовательности точек, взятых соответственно на F_1, F_2, ..., F_n, ... (при этом можно устроить так, чтобы граница многогранной поверхности всегда была вписанной в границу фигуры F, ср. рис. 29). Кажется почти очевидным, что последовательность площадей многогранных поверхностей F_1, F_2, ..., F_n, ... имеет предел, именно — площадь фигуры F. Здесь действуют те же, что и в предыдущих примерах, представления о «практической неотличимости» кривой поверхности от вписанной в нее многогранной, когда грани последней становятся очень мелкими. Однако в конце прошлого века немецкий математик Г. А. Шварц показал на простом примере, что очевидность здесь нас обманывает; к изложению этого примера мы и перейдем.

Рассмотрим прямой круговой цилиндр радиуса R и высоты H (рис. 30); будем искать площадь его боковой поверхности по способу, изложенному выше. С этой целью разделим высоту на n равных частей и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные к образующим; в пересечении с боковой поверхностью цилиндра получим $n - 1$ окружностей, которые вместе с основаниями разделят эту поверхность на n равных цилиндрических поясов. В одну из окружностей впишем правильный m-угольник и через вершины его проведем образующие, которыми каждая из остальных окружностей разделится на m равных частей,— примем точки деления за вершины правильных

*) Многогранная поверхность считается вписанной в кривую поверхность, если все вершины первой лежат на второй.

многоугольников, вписанных в эти окружности. Отрезки проведенных образующих вместе со сторонами вписанных многоугольников составляют mn одинаковых прямоугольников (один из них $MNPQ$ отмечен на рис. 30), вершины которых лежат на поверхности цилиндра. Остается разделить каждый прямоугольник диагональю на два треугольника, чтобы получить многогранную поверхность, вписанную в боковую поверхность цилиндра и состоящую из $2mn$ (одинаковых) треугольных граней. Когда числа m и n оба неограниченно возрастают, стороны этих треугольных граней стремятся к нулю, равно как и расстояния всех принадлежащих им точек от боковой поверхности цилиндра *).

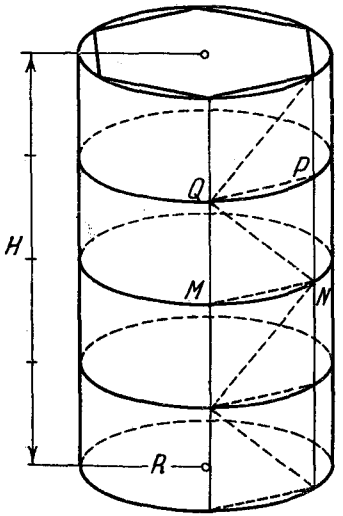

Рис. 30.

Среди упомянутых вписанных многогранников каждый определяется значениями двух индексов m и n, но можно бесконечным множеством способов выделять отсюда последовательности многогранников, делая один из индексов функцией другого (разумеется так, чтобы оба индекса принимали натуральные значения, одновременно стремящиеся к бесконечности), например, полагая $m = n$ или $n = 3m$ или $m = n^2$ и т. п. Читатель, вероятно, уже заметил, что наши многогранные поверхности в сущности совпадают с боковыми поверхностями правильных вписанных в цилиндр m-гранных призм, так что разбивка каждой прямоугольной грани такой призмы на $2n$ треугольников имела единственной целью подчинить способ вписывания общей схеме, изображенной на рис. 29. Таким образом, перед нами лишь несколько усложненный вариант общепринятого вывода формулы для площади боковой поверхности цилиндра ($S_{\text{бок.цил.}} = 2\pi RH$) посредством вписывания правильных

*) Расстояние какой-либо точки от боковой поверхности цилиндра измеряется разностью между его радиусом и расстоянием этой точки от оси цилиндра.

вписанных призм с последующим переходом к пределу. Пока в наших рассуждениях нет ничего софистического.

Теперь изменим несколько способ вписывания многогранной поверхности. По-прежнему разделим высоту H на n равных частей, проведем $n - 1$ круговых сечений, что вместе с основаниями цилиндра дает $n + 1$ окружностей; впишем в каждую из них по правильному m-угольнику, но вершины их расположим иначе: так, чтобы образующая, проведенная через любую вершину многоугольника, вписанного в какую-нибудь из окружностей, делила пополам дугу, стягиваемую стороной многоугольника, вписанного в соседнюю окружность (например, на рис. 31 образующая через P делит пополам дуги $\overset{\frown}{MN}$ и $\overset{\frown}{QS}$; не изображенные прямые QM и SN — образующие). Другими словами: в то время как раньше многоугольник, вписанный в какую-нибудь окружность, получался из многоугольника, вписанного в соседнюю окружность, просто путем параллельного переноса в направлении образующей на расстояние H/n, теперь к этому переносу присоединяется поворот вокруг центра многоугольника на угол, равный половине его центрального угла, т. е. на π/m. Расположив таким образом правильные вписанные многоугольники, строим многогранную поверхность (невыпуклую!) из треугольных граней, соединяя каждую вершину с двумя ближайшими к ней, лежащими на соседней окружности. Эта многогранная поверхность (напоминающая по виду складной бумажный фонарик в растянутом состоянии), состоящая из $2mn$ равных между собой равнобедренных треугольников (по $2m$ в каждом из n поясов), для кривой поверхности цилиндра является вписанной в точном смысле этого слова (см. сноску на стр. 49).

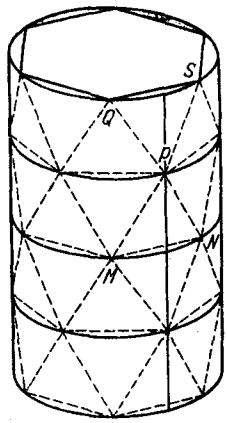

Рис. 31.

Имея в виду найти площадь многогранной поверхности, займемся одной из ее равных граней MNP, изображенной на рис. 31 и отдельно на рис. 32, где MN — сторона правильного m-угольника, вписанного в круговое сечение

центра O, точки K и L — соответственно середины дуги $\overset{\frown}{MN}$ и хорды MN; PK — отрезок образующей. Треугольник MNP — равнобедренный ($PM = PN$, так как эти отрезки имеют равные проекции KM и KN на плоскость круга O); высоту его PL найдем из треугольника PKL, где $\angle K = 90°$, $PK = H/n$, $KL = R - OL = R - R\cos\frac{\pi}{m} =$

$= 2R\sin^2\frac{\pi}{2m}$, откуда

$$PL = \sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2 + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

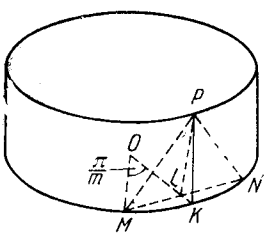

Рис. 32.

А так как $\frac{1}{2}MN = R\sin\frac{\pi}{m}$, то

пл. $MNP =$

$$= R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Обозначая через $S_{m,n}$ площадь всей многогранной поверхности, получающейся при делении окружности на m, а высоты на n частей, находим:

$$S_{m,n} = 2mn\,R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2m\,R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2 + 4n^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Как уже отмечалось по другому поводу, из совокупности чисел $S_{m,n}$ можно бесконечным множеством способов выделять последовательности, устанавливая зависимость между индексами m и n; рассмотрим два таких варианта.

а) $n = m^2$, т. е. деля окружность последовательно на 3, 4, 5, ... частей, мы будем высоту делить соответственно на 9, 16, 25, ...частей. Площадь многогранной поверхности — уместно теперь обозначить ее через S_m, так как она зависит только от индекса m,— выразится формулой

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2 + 4m^4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Теперь следует выполнить предельный переход $m \to \infty$,

при котором $\frac{\pi}{m}$, а значит, и $\sin\frac{\pi}{m}$, $\sin\frac{\pi}{2m}$ стремятся к нулю. Желая применить последнюю из формул, приведенных в сноске на стр. 44, преобразуем выражение для S_m:

$$S_m = 2\pi R\,\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}\pi^4 R^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4},$$

после чего находим:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}\pi^4 R^2}.$$

Этот предел очевидным образом больше, чем $2\pi RH$ — общеизвестное выражение для площади боковой поверхности цилиндра. Можно было бы получить для предела и другие значения, в том числе сколь угодно большие; например, полагая $n = km^2$ (k — натуральное число), имели бы

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{k^2}{4}\pi^4 R^2}.$$

б) $n = m^3$, так что по сравнению с предыдущим вариантом число делений высоты возрастает еще быстрее. В выражении для S_m это вызовет только появление добавочного множителя m^2 во втором слагаемом подкоренной суммы. Благодаря этому упомянутое слагаемое, а с ним и S_m будет стремиться к бесконечности, когда $m \to \infty$. Это означает, что можно установить такой закон вписывания многогранных поверхностей, чтобы площади их, неограниченно возрастая, не стремились ни к какому пределу. Выходит, что боковая поверхность цилиндра не имеет площади.

Мы пришли к явным несообразностям и должны теперь искать ошибку.

Пример 15. *Площадь сферы радиуса R равна π^2R^2.* Рассмотрим полусферу (рис. 33) с центром O, «экватором» q и «полюсом» P (это означает, что радиус OP перпендикулярен к проходящей через O плоскости экватора q). Разделим окружность q на очень большое число n равных частей и соединим P со всеми точками деления посредством

дуг больших кругов (каждая дуга равна 1/4 «меридиана»); тогда полусфера разделится на n очень узких сферических треугольников, из которых каждый ограничен малой дугой экватора и двумя дугами меридианов (несколько таких треугольников изображено на чертеже; один из них PAB выделен штриховкой). За счет ничем не ограниченного увеличения числа n делений можно сделать эти сферические

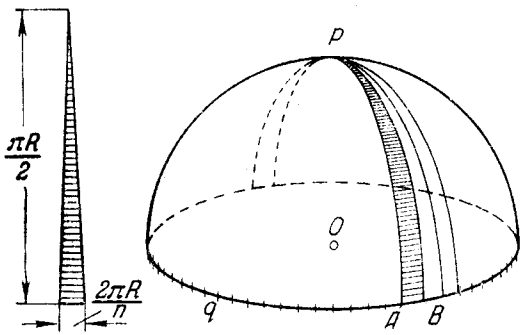

Рис. 33.

треугольники сколь угодно узкими («тоньше паутинки»), а «бесконечно узкий» искривленный треугольник можно распластать или, как говорят, «развернуть» на плоскость с сохранением всех размеров (т. е. длин, углов, площади). Получится (равнобедренный) плоский треугольник, у которого основанием служит распрямленная дуга длиной $\frac{2\pi R}{n}$, а высотой — распрямленная дуга, равная четверти окружности, т. е. длиной $\frac{\pi R}{2}$ (см. заштрихованный треугольник на рис. 33 слева). Площадь такого треугольника есть $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi R}{n}\cdot\frac{\pi R}{2}=\frac{1}{2n}\pi^2R^2$, следовательно, общая площадь всех n треугольников, заполняющих полусферу, равна $\frac{1}{2}\pi^2R^2$, а площадь всей сферы равна π^2R^2. Это находится в противоречии с общеизвестной формулой, согласно которой эта площадь равна $4\pi R^2$ (а ведь $\pi \neq 4$).

ГЛАВА IV

АНАЛИЗ ПРИМЕРОВ, ПРИВЕДЕННЫХ В ГЛАВЕ III

К примеру 11. В своей классической форме этот софизм относится собственно не к геометрии, а к механике (точнее — к кинематике, т. е. к учению о движении), поскольку речь идет о колесе, движущемся особым образом. С другой стороны, заранее можно предвидеть, что при ближайшем рассмотрении кинематическая оболочка окажется чисто внешней, так как время здесь не играет существенной роли (безразлично, например, быстро или медленно катится колесо); весь софизм может быть изложен на языке геометрии, что и будет сделано несколько позже.

Несомненно, слабой стороной наших рассуждений является расплывчатость выражения «окружность катится (без скольжения) по прямой». Стоит только договориться относительно точного смысла последней фразы, как тотчас же обнаружится, что если одна из скрепленных между собой окружностей в этом смысле катится, то другая не катится,— и софистическое доказательство рухнет.

Будем сначала говорить на языке кинематики. Окружность катится по прямой без скольжения — это означает: окружность движется так, что в любой момент она касается прямой, причем та лежащая на окружности точка, в которой происходит касание, имеет в этот момент скорость, равную нулю. Другими словами, та точка окружности, которая в данный момент находится «внизу», т. е. совпадает с точкой касания, служит для катящейся окружности «мгновенным центром вращения». Последнее означает, что скорость любой точки, связанной с окружностью (не

обязательно, чтобы эта точка лежала на окружности), в каждый момент такова, как если бы в этот момент окружность вращалась вокруг своей точки касания. В частности, направление этой скорости перпендикулярно к прямой, соединяющей данную точку с точкой касания; так, при обозначениях рис. 24 скорость точки, пришедшей в положение M', направлена по перпендикуляру к прямой $M'P$ (таким образом, для циклоиды рис. 26 нормаль в точке M' служит прямая $M'P$).

В противоположность этому, если та лежащая на окружности точка, которая в данный момент оказалась «внизу», имеет скорость, отличную от нуля, то говорят, что движение происходит «с положительным скольжением», когда эта скорость направлена в сторону движения, или же «с отрицательным скольжением», когда она направлена в противоположную сторону. Только в том случае, когда отсутствует скольжение, можно утверждать, что путь, пройденный по прямой за любой промежуток времени, равен длине круговой дуги, соответствующей центральному углу, на который повернулся за этот промежуток какой-нибудь радиус окружности; например, на рис. 24 и 26 $MP = \overset{\smile}{PM'}$, в частности MM^* равен по длине всей катящейся окружности. В случае положительного скольжения $MP > \overset{\smile}{PM'}$, а при наличии отрицательного скольжения $MP < \overset{\smile}{PM'}$.

Теперь мы в состоянии чисто геометрически описать различные виды качения, хотя ради наглядности будем сохранять иногда кинематический язык. Рассмотрим (рис. 24 и 26) отрезок $MM^* = 2\pi R$ и в каждой его точке P построим касательную окружность с центром O', лежащим по определенную сторону от MM^*, и радиусом R'; на этой окружности отложим дугу $\overset{\smile}{PM'}$, равную по длине отрезку PM и имеющую с ним в точке P одинаковое направление *). Если мы выполним это построение для всех возможных положений точки P на отрезке MM^*, то скажем (возвращаясь только к кинематическому языку, но по существу оставаясь в области геометрии), что совокупность всех касательных окружностей получена в результате одного

*) Это означает, что дуга $\overset{\smile}{PM'}$ (а если она больше полуокружности, то часть дуги, примыкающая к P) и отрезок PM лежат по одну сторону от диаметра PO' (в случае другой катящейся кривой мы сказали бы: по одну сторону от нормали).

оборота окружности радиуса R, катящейся без скольжения по прямой MN, а геометрическое место точек M', соответствующих различным положениям точки P, назовем траекторией точки M. Если бы в предыдущем построении мы заменили равенство $MP = \overset{\frown}{PM'}$ пропорциональностью $MP = k\overset{\frown}{PM'}$ (k — постоянный множитель, отличный от 1), то сказали бы, что окружность катится «с постоянным скольжением коэффициента k», причем скольжение будет положительным или отрицательным смотря по тому, положительна или отрицательна разность $k - 1$.

Вооруженные этими точными определениями, вернемся к аристотелеву колесу. С кинематической точки зрения, если бóльшая из концентрических окружностей, изображенных на рис. 24, катится без скольжения по прямой MN, то меньшая заведомо не катится так по прямой M_1N_1. Действительно, если бы и меньшая окружность катилась без скольжения, то в момент, когда общий центр окружностей находится в O', движущаяся фигура имела бы одновременно два мгновенных центра вращения P и P_1 (а тогда скорость точки M' была бы направлена перпендикулярно как к PM', так и к P_1M', что невозможно). Более того, можно сказать, что меньшая окружность катится с положительным скольжением, так как всегда $M_1P_1 = MP = \overset{\frown}{PM'}$, и значит, $M_1P_1 > \overset{\frown}{P_1M_1'}$. Наоборот, если бы мы заставили меньшую окружность катиться по M_1N_1 без скольжения, то увлекаемая ею бóльшая окружность катилась бы с отрицательным скольжением.

К тем же выводам придем, отправляясь от геометрических определений: если бóльшая окружность рис. 24 «катится» так, что в любом ее положении $MP = \overset{\frown}{PM'}$, то для меньшей окружности $M_1P_1 > \overset{\frown}{P_1M_1'}$, именно $M_1P_1 = \frac{R}{r}\overset{\frown}{P_1M_1'}$, где R и r — радиусы большей и меньшей окружностей. Таким образом, меньшая окружность катится с положительным скольжением коэффициента $\frac{R}{r}$ (>1). Если бы, наоборот, меньшая окружность катилась без скольжения, то бóльшая катилась бы с отрицательным скольжением коэффициента $\frac{r}{R}$ (<1).

К у к а з а н и ю на стр. 40. Рассмотрим два концентрических и гомотетичных n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и

$a_1a_2...a_n$ с центром O (рис. 34, где $n = 8$ и для большего многоугольника сохранены обозначения рис. 25). Пусть больший многоугольник катится так, как описано на стр. 41: сначала вершина A_2 остается неподвижной, являясь центром вращения до тех пор, пока многоугольник не повернется на угол $2\pi/n$ (для сравнения вспомним, что при качении окружности «нижняя» ее точка также была центром

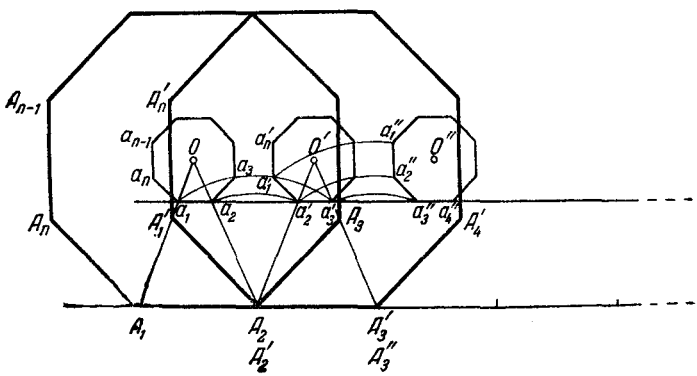

Рис. 34.

вращения, но только мгновенным). В результате такого поворота больший многоугольник ляжет на прямую другой своей стороной A_2A_3, новое положение которой, обозначенное на чертеже через $A_2'A_3'$, составляет продолжение стороны A_1A_2; благодаря этому по мере качения многоугольника периметр его будет «развертываться» вдоль прямой.

Существенно иначе будет двигаться при этом скрепленный с бо́льшим меньший многоугольник: он также повернется вокруг центра A_2 на угол $2\pi/n$, в результате чего сторона a_2a_3 займет положение $a_2'a_3'$, но она не составит продолжения отрезка a_1a_2. В противоположность многоугольнику $A_1A_2\ldots A_n$, который «перекладывается» с одной стороны на другую, многоугольник $a_1a_2\ldots a_n$ одновременно «перекладывается» и «перепрыгивает» из одного положения в другое (на рис. 34 обозначены два последовательных положения большего многоугольника и три положения меньшего; при этом изображены начальные

звенья траекторий для вершин a_1, a_2, a_3: каждая из отмеченных частей траекторий образована двумя круговыми дугами радианной меры $\frac{2\pi}{n}$, например для вершины a_2 — это дуги $\overset{\frown}{a_2a_2'}$ с центром A_2 и $\overset{\frown}{a_2'a_2''}$ с центром A_3'; как и в случае рис. 25, предлагаем читателю не придавать значения некоторым особенностям рис. 34, проистекающим из принятого там частного значения $n = 8$, и сделать другой чертеж, например для $n = 5$). Благодаря этим «скачкáм» многоугольник $a_1a_2 \ldots a_n$, двигаясь вдоль прямой $a_1a_1^{(n-1)}$, «покрывает расстояние», большее, чем его периметр; такова приближенная модель «качения с положительным скольжением». Предоставляем читателю выяснить, как двигался бы многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$, если бы мы заставили многоугольник $a_1a_2 \ldots a_n$ катиться без скольжения по прямой: можно предвидеть, что после каждого поворота на угол $2\pi/n$ вокруг вершины меньшего многоугольника сторона большего будет частично налегать на предыдущую сторону этого многоугольника, в результате чего путь, пройденный при полном обороте, окажется меньше периметра; мы получим приближенную картину «качения с отрицательным скольжением».

К задаче на стр. 42. Достаточно привести чертеж и некоторые промежуточные результаты.

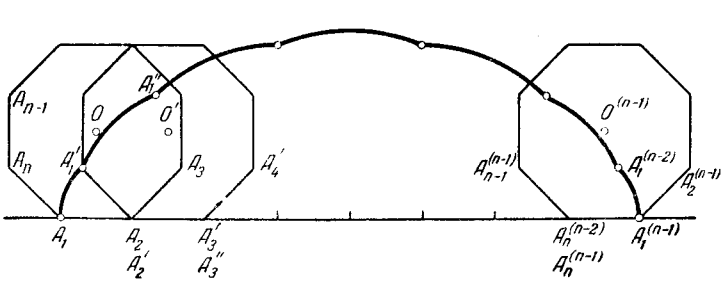

Рис. 35.

На рис. 35 изображена траектория $A_1A_1'A_1''\ldots A_1^{(n-1)}$ вершины A_1 катящегося многоугольника (частный случай $n = 8$), более подробно описанная на стр. 43. Длина этой состоящей из круговых дуг

траектории равна

$$\frac{2\pi}{n}\cdot 2R\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{4\pi R}{n}\,\frac{\cos\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}.$$

Площадь фигуры, ограниченной этой траекторией и отрезком $A_1A_1^{(n-1)}$, слагается из 1) площадей круговых секторов $A_2A_1A_1'$, $A_3'A_1'A_1''$, ..., $A_n^{(n-2)}A_1^{(n-2)}A_1^{(n-1)}$ с центральными углами по $\frac{2\pi}{n}$; сумма этих площадей равна

$$\frac{4\pi R^2}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=2\pi R^2;$$

2) площадей треугольников $A_1'A_2A_3'$, $A_1''A_3'A_4''$, ..., $A_1^{(n-2)}A_{n-1}^{(n-3)}A_n^{(n-2)}$ с общей суммой

$$2R^2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

К примеру 12. Логическая ошибка кроется в последней фразе доказательства (предшествующей замечанию 1) и состоит в двояком употреблении термина «предел». В одном случае рассматривается последовательность линий (здесь это «пилы» с изменяющимся числом «зубьев»), точки которых неограниченно приближаются к некоторой определенной линии. В другом случае речь идет о последовательности чисел (длины «пил»), неограниченно приближающихся к некоторому определенному числу (относительно того, можно ли считать, что длины пил образуют последовательность, см. замечание 2, стр. 46).

Из того, что последовательность линий стремится (в одном смысле) к определенной линии, мы не имеем никакого основания заключать, что последовательность длин первых линий стремится (в другом смысле) к длине последней.

Пусть нас не смущает то обстоятельство, что при очень мелких зубьях «пила» практически неотличима от прямолинейного отрезка; это — не геометрический, а физический и даже физиологический факт, зависящий от свойств нашего зрения (сильный микроскоп изменил бы положение). Но если говорить о наглядности, подкрепляя ее рассуждением, то дело представится в следующем виде. Верно то, что в каждом малом треугольнике («зубе пилы») раз-

ность между суммой катетов и гипотенузой ничтожна, но таких разностей очень много, а самые малые слагаемые при очень большом их числе могут, очевидно, дать любую сумму. Если бы мы захотели глубже проникнуть в суть дела, то обратили бы внимание на то, что звенья «пилы» приближаются к прямой AB по расстоянию, но отнюдь не по направлению: какими бы мелкими ни были эти звенья, они (на рис. 27) всегда по очереди горизонтальны и вертикальны, между тем как гипотенуза AB наклонна.

К примеру 13. Ошибка — того же рода, что и в предыдущем примере. Последовательность волнообразных линий неограниченно приближается к прямолинейному отрезку, но длины их не имеют своим пределом длину этого отрезка. Как и раньше, здесь происходит приближение одной линии к другой по расстоянию, но не по направлению: если отрезок AB горизонтален, то направление волнообразной линии, как бы мелки ни были ее круговые звенья, всегда колеблется между горизонтальным и вертикальным.

К примеру 14. Хотя картина значительно сложнее, чем в двух предыдущих примерах, однако логическая природа софизма прежняя: многогранная поверхность действительно приближается к цилиндрической неограниченно, но отсюда вовсе не следует, что площадь многогранной поверхности неограниченно приближается к площади цилиндрической. Чтобы лучше уяснить себе связь между тем и другим приближением, заметим, что и при том способе вписывания многогранной поверхности, который показан на рис. 31, можно было получить правильную формулу для площади боковой поверхности цилиндра, если бы, например, мы положили $n = m$ или $n = 10m$, вообще если бы считали числа делений по высоте и по окружности изменяющимися пропорционально одно другому. Например, при $n = 10m$ имели бы

$$S_m = 2mR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 400m^2R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2\pi R \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^2 + \frac{25\pi^4R^2}{m^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \right)^4}$$

и при $m \to \infty$ получили бы $\lim S_m = 2\pi RH = S_{\text{бок. цил}}$. Чем же объясняется, что при другом законе вписывания, определяемом формулой $n = m^2$, площадь S_m многогранной поверхности стремилась к пределу, большему, чем $2\pi RH$, а при $n = m^3$ — даже к бесконечности? Разрешим себе ответить на языке не математическом, отказываясь от претензии на какие-либо доказательства, а лишь выделяя то, что доступно наглядному представлению (и что после математической обработки может стать основой доказательства). Когда $n = m$ или $n = 10m$ и т. п., густота делений по окружности и по высоте возрастает в одинаковом темпе; благодаря этому многогранная поверхность, будучи невыпуклой, обладает все же гранями почти вертикальными, если предполагать цилиндр поставленным вертикально (предоставляем читателю доказать, пользуясь рис. 32, что грань MNP составляет с горизонтальной плоскостью MKN угол, который стремится к $\pi/2$, когда $m \to \infty$). Таким образом, многогранная поверхность приближается к цилиндрической не только по расстоянию, но и по направлению. Иная картина получится, когда $n = m^2$ или $n = m^3$ и т. п.; теперь деления по высоте сгущаются в гораздо более быстром темпе, чем деления по окружности. В результате этого многогранная поверхность становится заметно более «зазубренной», за счет чего и получается излишняя площадь. Треугольные грани теперь уже не стремятся стать вертикальными; можно показать, что при $n = m^2$ угол PLK (рис. 32) неограниченно приближается к некоторому острому, а при $n = m^3$ — даже к нулю (т. е. грань стремится стать горизонтальной), когда $m \to \infty$.

В заключение рассмотрим один вопрос, который возникает естественным образом: в чем источник отсутствия аналогии между вписыванием ломаных линий в кривую линию и многогранных поверхностей в кривую поверхность? Почему в первом случае сгущением вершин обеспечивается сближение линий не только по расстоянию, но и по направлению, а во втором случае сближение по расстоянию может происходить без сближения по направлению? Не входя в подробности, отметим лишь следующие факты. Когда на кривой линии две точки, из которых одна неподвижна, стремятся к совпадению, то прямая, соединяющая эти точки, имеет пределом касательную к кривой в неподвижной точке. Когда же на кривой поверхности три точки (пусть никогда не оказывающиеся на одной прямой), из которых одна неподвижна, стремятся к совпадению, то плоскость, соединяющая эти точки, не обязательно стремится стать касательной плоскостью. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе, что на сфере проведено какое-

нибудь круговое сечение и на его окружности взяты неподвижная точка и две другие, неограниченно приближающиеся к первой; плоскостью таких трех точек будет все время плоскость сечения.

К примеру 15. Перед нами злоупотребление такими не имеющими математического смысла выражениями, как «очень большое число», «очень узкий треугольник», «малая дуга», «бесконечно узкий треугольник», которые уместны, когда мы стремимся наглядно описать геометрическую фигуру (этот прием описания выше не раз применялся), но совершенно непригодны как орудие доказательства или для вывода формулы. Прямая ошибка состоит в утверждении, будто бесконечно узкий треугольник можно развернуть на плоскость, т. е. заменить плоским треугольником с теми же длинами сторон, теми же углами и той же площадью, что у сферического. На самом деле никакой сферический треугольник (как бы мал он ни был) не может быть в указанном смысле развернут на плоскость; это видно уже из того, что сумма углов плоского треугольника всегда равна $2d$, а у сферического всегда больше $2d$. В нашем примере у сферического треугольника PAB (рис. 33 справа) углы A и B прямые; если бы такой треугольник мог быть развернут на плоскость, то получился бы плоский (равнобедренный) треугольник (рис. 33 слева) с прямыми углами при основании.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию 3
Введение 5
Глава I. Ошибки в рассуждениях, доступных начинающему 10
Глава II. Анализ примеров, приведенных в главе I 23
Глава III. Ошибки в рассуждениях, связанных с понятием предела 38
Глава IV. Анализ примеров, приведенных в главе III . . . 55