ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ФИЗИКОВ

ГРИГОРЬЕВ
МАКСИМ АНАТОЛЬЕВИЧ

—

ФИЗФАК МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

1 Дифференцируемые многообразия

Лекция 1

1.1 Геометрия в физике

В основе современной дифференциальной геометрии и топологии лежит понятие многообразия. (Дифференцируемое) многообразие было впервые введено Анри Пуанкаре в качестве базового объекта, на котором можно вводить математический анализ (функции и производные), и которое обобщало кривые, двумерные поверхности и различные пространства, включая евклидово пространство, а также (гипер)поверхности в таком пространстве.

На самом деле, вы хорошо знакомы с самыми разными примерами многообразий из базовых курсов по математики и физики. В математических курсах из примеров вам встречались кривые и поверхности в аналитической геометрии и математическом анализе, линейные пространства и группы в линейной алгебре и т.д.

Многие физические понятия сводятся к геометрическим. В частности, многообразиями являются конфигурационные и фазовые пространства той или иной механической (или термодинамической) системы. Напомним, в механике конфигурационным пространством называется множество возможных положений системы. Так, пространство в котором мы живем (в первом приближении $\mathbb{R}^3$) есть конфигурационное пространство материальной точки. Если речь идет о более общей механической системе, то конфигурационное пространство может быть заметно сложнее. Например, для математического маятника оно уже является сферой:

$$\sum_{i=1}^{3} x^i x^i = l^2 \tag{1.1}$$

Для системы типа двух жестко связанных материальных точек это уже произведение сферы S^2 на $\mathbb{R}^3$. (Напомним, что декартовым (прямым) произведением множеств X, Y называется множество упорядоченных пар (x, y) $x \in X$, $y \in Y$). Менее тривиальный пример - это конфигурационное пространство твердого тела: $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ ($SO(3)$—группа специальных ортогональных преобразований трехмерного евклидова пространства. В качестве задачи рекомендуется доказать что конфигурационное пространство именно такое).

В свою очередь, по определению фазовое пространство - пространство, точками которого являются состояния данной системы. Например, если мы возьмем гармонический осциллятор, то его фазовое пространство - $\mathbb{R}^2$, где одна координата это координата пространства, а вторая - импульс. Для математического маятника легко визуализировать его фазовое пространство как цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}^1$ (координата и скорость). Для лагранжевой механической системы фазовое пространство наделено симплектической структурой (в общем случае предсимплектической). Симплектическая структура определяет известную нам из курса теоретической механики скобку Пуассона, относительно которой сопряжены координата и импульс. Эта структура является основной в стандартном построении квантовой теории. Мы коснемся симплектической геометрии и квантования во второй части курса.

Современная дифференциальная геометрия является языком, на котором говорит современная теория поля. В частности Риманова (точнее псевдо-Риманова) геометрия фактически составляет математический аппарат общей теории относительности, конформная геометрия тесно связана с конформными теориями поля (CFT часть в AdS/CFT соответствии). Теория Янга-Миллса формулируется в терминах расслоенных пространств и соответствующих связностей.

1.2 Дифференцируемые многообразия

1.2.1 Многообразия как поверхности

Самый простой и интуитивный способ определить многообразие—определить его как регулярную поверхность в $\mathbb{R}^N$. Для этого давайте вспомним следующий факт из анализа функций многих переменных—“теорема о неявной функции”.

Прежде чем сформулировать теорему, заметим, что, рассматривая функции на $\mathbb{R}^N$ или окрестностях в нем (по умолчанию, мы говорим о вещественно-значных функциях, т.е. отображениях $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$), необходимо фиксировать класс гладкости (дифференцируемости) этих функций. В дальнейшем, для простоты, все функции будут полагаться вещественнозначными и бесконечно дифференцируемыми. На окрестности $U \subset \mathbb{R}^N$ такие функции обозначаются как $C^\infty(U)$. Т.е. слово “функция” будет означать “бесконечно дифференцируемая функция”. Иногда полезно рассматривать более широкий класс $C^k(U)$ функций, имеющих k непрерывных производных. Минимальным требованием, необходимым для введения дифференциальной структуры, является $C^1(U)$ класс гладкости функций.

Теорема 1.1. *Пусть в $\mathbb{R}^N$ заданы функции F_α, $\alpha = 1, \dots, N-n$, и пусть в некоторой точке на множестве $F_\alpha = 0$ матрица $(\partial F_\alpha / \partial x^i)$ имеет максимальный ранг. Тогда в некоторой окрестности этой точки существуют такие дифференцируемые функции $f_i(x^1, \dots, x^n)$ (где, возможно, была проведена перенумерация координат), что для любых фиксированных $x^1, \dots, x^n$ решение уравнения*

$$F_\alpha(x^1, \dots, x^N) = 0 \tag{1.2}$$

единственно и имеет вид

$$x^{n+i} = f^i(x^1, \dots, x^n) \ , \quad i = 1, \dots, N-n \ . \tag{1.3}$$

Можно сказать и иначе – системы уравнений (1.2) *и* (1.3) *в такой окрестности эквивалентны.*

Таким образом, подмножество, заданное уравнениями $F_\alpha = 0$, локально (т.е. в окрестности некоторой своей точки) устроено так же, как окрестность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{N-k}$.

Задача 1.2. Рассмотрим множество всех $n \times n$ квадратных матриц. Является ли подмножество всех матриц с определителем равным 1 многообразием? А с определителем равным нулю?

Определение 1.3. Подмножество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ называется гладким многообразием (вещественным дифференцируемым многообразием), если у каждой точки $x \in \mathbb{R}^N$ существует открытая окрестность U, на которой определены функции F_α, $\alpha = 1, \dots, N-n$, такие что $U \cap \mathcal{M}$ задаётся уравнениями $F_\alpha = 0$ и матрица $\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i}\right)$ имеет максимальный ранг в любой точке $U \cap \mathcal{M}$. Число n называется размерностью многообразия $\mathcal{M}$.

Примеры:

- $\mathbb{R}^n$ (Евклидово пространство произвольной размерности)
- k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^N$
- Любая открытая окрестность в $\mathbb{R}^N$
- Сфера в $\mathbb{R}^N$.
- Регулярная кривая в $\mathbb{R}^N$.

Задача – доказать, что всё это многобразия.

Можно привести и более общие примеры.

Основные свойства многообразий. С точки зрения общей топологии, как множество, многообразие является топологическим пространством, т.е. на нем можно ввести топологию, что подразумевает определение того, какие из подмножеств многообразия будут называться открытыми, а какие замкнутыми.
В качестве открытых подмножеств многообразия X выберем пересечения X и открытых подмножеств из $\mathbb{R}^N$. Напомним, что в стандартной топологии на $\mathbb{R}^N$ открытыми (например) объявляются все открытые сферы и их объединения. При этом сфера с центром в x определяется как совокупность y, таких что

$$\delta_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j) \leqslant l^2$$

Здесь δ_{ij} символ Кронекера и суммирование по повторяющимся индексам подразумевается. Вообще говоря, эта формула верна в любом базисе, но тогда вместо δ_{ij} нужно ставить соответствующую матрицу евклидовой билинейной формы.
Иными словами, для определения стандартной топологии необходимо введение способа определения расстояния между точками. В курсе математического анализа открытые множества определяются исходя именно из этой топологии.

Как следует из теоремы о неявной функции, всякая точка имеет открытую окрестность, которая находится во взаимно однозначном соответствии с окрестностью в некотором евклидовом пространстве. Кроме того, это соответствие (отображение) является гомеоморфизмом, т.е. как образ, так и прообраз любого открытого подмножества открыт.

Когда такое отображение фиксировано, то говорят, что в окрестности U на многообразии заданы локальные координаты. Действительно, если фиксировано взаимно-однозначное и взаимнонепрерывное отображение $h : U \to \mathbb{R}^n$, то на U определено n штук функций, образующих координатную систему. Открытая окрестность на многообразии вместе с фиксированной координатной системой называется *координатной картой* многообразия. Совокупность карт, такая что каждая точка принадлежит хотя бы одной карте называется *атласом многообразия.*

Предположим, что точка p находится на пересечении двух координатных карт. Тогда ее координаты в одной карте являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями ее координат в другой карте. (Задача: Доказать. Указание: это следует из того, что отображение одной из карт имеет обратное, а значит суперпозиция этого обратного отображения с отображением другой карты является набором гладких функций).

Таким образом, многообразие можно ввести, не апеллируя к конкретному виду вложения в $\mathbb{R}^N$. Точнее можно считать, что многообразие склеено из кусочков, каждый из которых является евклидовым пространством. Вместе с тем, для задания в таких терминах точного определения многообразия нужно все таки начать с множества. Однако чтобы придать смысл утверждению что множество склеено из "кусочков" нужно все таки предположить что на этом множестве уже есть структура, которая позволяет сказать что такое окрестность точки (=элемента). Такая структура называется топологией.

1.3 Основные понятия топологии

Определение 1.4. Множество X называется топологическим пространством (т.п.), если задана система его подмножеств $\{\mathcal{T}\}$, такая что

- $X, \emptyset \in \{\mathcal{T}\}$
- Объединение любого числа подмножеств из $\{\mathcal{T}\}$ принадлежит $\{\mathcal{T}\}$
- Пересечение конечного числа подмножеств из $\{\mathcal{T}\}$ принадлежит $\{\mathcal{T}\}$

Подмножества из $\{\mathcal{T}\}$ принято называть открытыми.

Самый простой пример топологии на множестве – это дискретная (поточечная) т., т.е. когда все подмножества открыты. Другая крайность – открыты только X и $\emptyset$. Все остальные т. находятся где-то между ними. Говорят, что топология $\{\mathcal{T}_1\}$ грубее[1] $\{\mathcal{T}_2\}$, если любое $U \in \{\mathcal{T}_1\}$ также принадлежит $\{\mathcal{T}_2\}$. Очевидно, что дискретная топология является наименее грубой из всех.

Задача 1.5. Описать все возможные топологии на множестве из двух элементов.

Доказательство. Рассмотрим множество их двух элементов $\{a, b\}$. Множество подмножеств этого множества есть $\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. В соответствии с определением топологического пространства возможны следующие $\{U\}$: $\{\{\}, \{a, b\}\}$, $\{\{\}, \{a, b\}, \{a\}\}$, $\{\{\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ и $\{\{\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$. Все перечисленные варианты удовлетворяют аксиомам топологического пространства. $\square$

Задача 1.6. Стандартная топология в $\mathbb{R}^n$ (то что мы изучаем в курсе анализа)

Если $U \subset X$ открыто, то дополнение к нему принято называть замкнутым. Очевидно, что т.п. можно определить в терминах замкнутых подмножеств.

Задача 1.7. Дать определение т.п. в терминах замкнутых подмножеств.

Определение 1.8. Окрестностью точки $x \in X$ называется любое открытое подмножество U, содержащее x.

[1] Существует другое синонимичное и гораздо более распространенное название более/менее грубой т.: слабая/сильная топология. Проблема состоит в том, что более чем за полувека... математики так и не пришли к консенсусу какую т. называть слабой или сильной. Например, в книгах Фоменко, в современном бестселлере А.Хатчера "Алгебраическая топология", а также в названии CW-комплекса более сильная т. обозначает более грубую топологию. В тоже время, во многих книгах 80-90х годов, обычно используется обратная терминология.

Определение 1.9. Базой топологии называется система подмножеств V_i, такая что всякое $u \in \{\mathcal{T}\}$ является объединением V_i.

Определение 1.10. Замыканием $\bar{U} \subset X$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих U.

Другими словами, замыкание $\bar{U} \subset X$ – это минимальное замкнутое подмножество, содержащее U.

Определение 1.11. Отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y называется непрерывным, если прообраз любого открытого множества в Y открыт в X.

!! Задача 1.12. Доказать, что в случае $X = \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}$ это эквивалентно непрерывности функции, задающей отображение.

Определение 1.13. Топологическое пространство связно, если его нельзя представить в виде обьединения двух своих непересекающихся замкнутых подмножеств.

На топологическом пространстве можно ввести следующее отношение эквивалентности $x \sim y$, если для любых x, y существует связное подмножество, содержащее их. Докажем, что $\sim$ – соотношение эквивалентности.

1. Так как подмножество $\{x\} \subset X$ невозможно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, то оно связно и, следовательно, $x \sim x$.

2. В силу того, что принадлежность x и y к связному множеству не зависит от их порядка, то из $x \sim$ следует, что $y \sim x$.

3. Пусть $x \sim y$ и $y \sim z$. Тогда $\exists U_1, U_2$ связные, т.ч. $x, y \in U_1$ и $y, z \in U_2$. Так как замыкание связного множества также связно, то $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ также связны.

   Предположим, что $\bar{U}_1 \bigcup \bar{U}_2$ – несвязное множество. Тогда $\exists V_1, V_2 \in \bar{U}_1 \bigcup \bar{U}_2$, для которых выполнено $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$, т.ч. $\bar{U}_1 \bigcup \bar{U}_2 = V_1 \bigcup V_2$. Тогда множества $\bar{U}_1 \bigcap V_1$ и $\bar{U}_1 \bigcap V_2$ являются замкнутыми и составляют $\bar{U}_1$. Но тогда одно из этих множеств должно быть пустым, и то же самое верно для $\bar{U}_2$. Значит, множества $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ содержатся целиком либо в V_1, либо в V_2. Если оба множества содержатся внутри V_1 или V_2, то изначальное предположение неверно, и $\bar{U}_1 \bigcup \bar{U}_2$ связно. Если же они содержатся в V_1 и V_2, то $\bar{U}_1 \bigcap \bar{U}_2 = \emptyset$, что противоречит изначальному предположению. Отсюда следует, что множество $\bar{U}_1 \bigcup \bar{U}_2$ связно.

   Из доказанного мы заключаем, что $x \sim z$.

Классы эквивалентности – связные компоненты пространства. Фактормножество – множество компонент связности.

Определение 1.14. Пусть $X, \mathcal{T}$ т.п. а $Y \subset X$ подмножество. Индуцированную топологией на подмножестве Y задается подмножетсвами вида

$$U_Y = \{Y \cap U \,|\, U \in \mathcal{T}\} \tag{1.4}$$

Задача 1.15. Доказать что это задает структуру топологического пространства на Y.

1.4 Многообразия

Существует и другой (более современный и инвариантный) подход к определению понятия многообразия, в котором наличие дифференцируемого атласа является не свойством, а определением. Для начала, введем понятие карты.

Определение 1.16. Картой на топологическом пространстве M называется пара (U, h), где $U \subset M$ открытое подмножество а $h : U \to \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм (при этом в $\mathbb{R}^n$ подразумевается стандартная топология)

Определение 1.17. Атласом на топологическом пространстве называется совокупность карт (U_α, h_α), такая что $\cup_\alpha U_\alpha = M$, и отображение $h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является непрерывным в своей области определения

Определение 1.18. Атлас называется дифференцируемым, если $h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемы.

Определение 1.19. (абстрактное определение многообразия) Дифференцируемое многообразие – это топологическое пространство, наделённое дифференцируемым атласом.

Точнее, топологическое пространство $\mathcal{M}$ (от которого, как правило, требуется счетность базы и хаусдорфовость (наличие непересекающихся окрестностей у различных точек)) является многообразием, если задан дифференцируемый атлас (U_α, h_α), т.е. $\mathcal{M} = \cup_\alpha U_\alpha$, и отображение $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ дифференцируемо в любой точке $x \subset \mathbb{R}^n$ такой что $h_\alpha^{-1} x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Определение 1.20. Два (дифференцируемых) атласа называются эквивалентными, если их объединение также является (дифференцируемым) атласом.

1.4.1 Атлас на сфере S^2

Введём сферические координаты:

$$x = \sin\theta\cos\varphi \qquad y = \sin\theta\sin\varphi \qquad z = \cos\theta$$

Построим первую карту: $h_1 : \{x, y, z\} \to \{\theta, \varphi\}$ действующую из открытого множества U_1 в открытое множество $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Открытое множество U_1 покрывает всю сферу, кроме полуокружности $y = 0$, $x > 0$.

Построим вторую карту: $h_2 : \{x = \sin\theta' \sin\varphi', y = \cos\theta', z = -\sin\theta' \cos\varphi'\} \to \{\theta', \varphi'\}$действующую из открытого множества U_2 в открытое множество $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Открытое множество U_2 покрывает всю сферу, кроме полуокружности $x = 0$, $z < 0$.

Функции переклейки $h_1 \circ h_2^{-1}$ и $h_2 \circ h_1^{-1}$ гладкие, т.к. каждая из функций h_1, h_2, h_1^{-1}, h_2^{-1} является гладкой в области пересечения U_1 и U_2:

$$h_1 = \{arcctg\left(\sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2}}\right), arcctg\left(\frac{x}{y}\right)\}$$

$$h_2 = \{arcctg\left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2 + z^2}}\right), arcctg\left(\frac{-z}{x}\right)\}$$

$$h_1^{-1} = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$$
$$h_2^{-1} = \{\sin\theta'\sin\varphi', \cos\theta', -\sin\theta'\cos\varphi'\}$$

Таким образом, мы ввели на двумерной сфере две карты, которые вместе покрывают всю сферу, и функции переклейки которых гладки на пересечении областей этих карт, т.е. эти карты можно образуют атлас. Тем самым, мы показали, что сфера является многообразием.

Определение 1.21. Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как пространство всех возможных прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через центр.
Иными словами. Введём на $\mathbb{R}^{n+1}$ координаты $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$. Введём следующее отношение эквивалентности:

$$\{x_1, ..., x_{n+1}\} \sim \{\lambda x_1, ..., \lambda x_{n+1}\},$$

где $\lambda \neq 0$ – любое вещественное число не равное нулю. Тогда $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1}/\sim$.
Для наглядности, если бы λ было бы исключительно положительным, то записанное выше отношение эквивалентности позволило бы привести любую точку $\mathbb{R}^{n+1}$ на поверхность сферы S^n единичного радиуса, подобрав $\lambda = 1/\sqrt{x_1^2 + ... + x_{n+1}^2}$. Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ является сферой S^n с отождествлёнными противоположными точками – топологически очень не тривиальная конструкция (например, вам будет несколько затруднительно представить даже двумерное проективное пространство – его можно вложить минимум в четырехмерное пространство, наше трехмерное не подходит!)

Почему такая конструкция включена в курс геометрии для физиков? Не считая огромной значимости для математиков, некоторые проективные пространства играют колоссальную роль и в физике. Например, группа вращений твердого тела $SO(3)$ является $\mathbb{R}P^3$. Кроме того, в моделях квантовой механики активно обыгрывается факт того, что трехмерная сфера S^3 также является групповым многообразием – группа $SU(2)$, которая как бы дважды накрывает $SO(3)$. За счет этого появляется возможность описывать фермионы (например, электрон): бозоны преобразуются по группе $SO(3)$, фермионы – по $SU(2)$.

Задача 1.22. Ввести атлас на вещественной проективной поверхности ($\mathbb{R}P^2$)

1.5 Дифференцируемые отображения

Лекция 2

Естественными отображениями между окрестностями на многообразии (которые также можно рассматривать как подмногообразия) являются дифференцируемые отображения.

Определение 1.23. Отображение $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ многообразий дифференцируемо в точке x, если в локальных координатах оно задается функциями, дифференцируемыми в x. Это отображение дифференцируемо, если оно дифференцируемо в каждой точке $\mathcal{M}_1$.

Пусть $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ дифференцируемо и f – дифференцируемая функция на $\mathcal{M}_2$. Тогда можно определить функцию $\phi^* f$ на $\mathcal{M}_1$: $\phi^* f(x) = f(\phi(x))$. Можно показать, что $\phi^* f$ дифференцируема. Можно также показать, что отображение дифференцируемо тогда и только тогда, когда $\phi^* f$ дифференцируема для всякой дифференцируемой f.

Отображение $\phi^* : C^\infty(\mathcal{M}_2) \to C^\infty(\mathcal{M}_1)$ иногда называют сопряженным. В зарубежной литературе стандартное название такого объекта – pull-back.

Важная характеристика отображения – это его ранг.

Определение 1.24. Рангом отображения $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ в точке $x_0 \in \mathcal{M}_1$ называется ранг матрицы $\frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^j}\big|_{x=x_0}$, где x^i – координаты на $\mathcal{M}_1$, y^α – координаты на $\mathcal{M}_2$, а $y(x)$ – координатная запись отображения.

Заметим, что функции $y^\alpha(x)$, задающие отображение в локальных координатах, можно записать как

$$y^\alpha(x) = \phi^*(y^\alpha)$$

Задача 1.25. Показать, что ранг не зависит от выбора локальных координат, т.е. является инвариантной характеристикой отображения.

1.5.1 Локальная структура гладкого отображения постоянного ранга

Предложение 1.26. *Пусть $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ гладкое отображение многообразий. Пусть в некоторой окрестности точки $p \in \mathcal{M}$ ранг ϕ постоянен и равен k. Тогда для некоторых окрестностей точки $p \in \mathcal{M}$ и (каждой из точек) $\phi(p) \in \mathcal{N}$ существуют локальные координаты u^i и z^α такие, что в координатах отображение задается как*

$$z^\alpha = u^\alpha \quad \alpha = 1, \ldots, k\,, \qquad z^\alpha = 0 \quad \alpha = k+1, \ldots, \dim(\mathcal{N})\,. \tag{1.5}$$

Доказательство. Обозначим за $\phi^\alpha(x)$ набор функций, задающих отображение ϕ в координатах x^i на $\mathcal{M}$ и y^α на $\mathcal{N}$. Более формально $\phi^\alpha(x) = y^\alpha(\phi(x))$. Перенумеровав координаты на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ можно считать что квадратная матрица $\dfrac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}$, где $\alpha = 1, \ldots, k$ и $i = 1, \ldots, k$ обратима. Возьмем в качестве первых k координатных функции на M функции $u^i = \phi^i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ а оставшиеся оставим без изменений, т.е. $u^r = x^r$, $r = k+1, \ldots, \dim(M)$. В новых координатах отображение запишется как

$$\phi^*(y^\alpha) = u^\alpha\,, \quad \alpha = 1, \ldots, k \qquad \phi^*(y^\alpha) = \phi^\alpha(u)\,, \quad \alpha = k+1 \ldots \dim N \tag{1.6}$$

Заметим, что $\phi^\alpha(u)$ может зависеть только от $u^1, \ldots, u^k$ в силу условия на ранг. Теперь введем на $\mathcal{N}$ новые локальные координаты:

$$z^\alpha = y^\alpha\,, \quad \alpha = 1, \ldots, k \qquad z^\alpha = y^\alpha - \phi^\alpha(y^1, \ldots, y^k)\,, \quad \alpha = k+1 \ldots, \dim(N)\,. \tag{1.7}$$

Легко видеть что в новых координатах отображение ϕ задается как

$$\phi(z^\alpha) = u^\alpha\,, \quad \alpha = 1, \ldots, k \qquad \phi(z^\alpha) = 0\,. \quad \alpha = k+1 \ldots, \dim(N)\,. \tag{1.8}$$

что и дает утверждение. □

Данное утверждение похоже на известное утверждение из линейной алгебры: если имеется линейный оператор $A : V \to W$ ранга k, то в V можно выбрать базис $\{e_i\}$ так, что $Ae_i = f_i$, $i = 1, \ldots, k$ и $Ae_{i>k} = 0$, где $\{f_\alpha\}$ – базис на W. Именно таким образом устроен дифференциал отображения ϕ (см. определение ниже), в базисе отвечающем специальным координатам.

Заметим, что образ отображения постоянного ранга локально является регулярной поверхностью (т.е. подмногообразием) согласно определению многообразия, как вложенной поверхности.

1.5.2 Погружение, Вложение, диффеоморфизм

Определение 1.27. Дифференцируемое отображение $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ называется погружением (immersion), если ранг ϕ постоянен и равен размерности $\mathcal{M}_1$.

Локально, погружение взаимно однозначно (однако не глобально, пример с самопересечением). Пример погружения дает траектория материальной точки (например в $\mathbb{R}^3$, $\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$), у которой скорость не обращается в ноль.

Определение 1.28. Погружение $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ называется вложением (embedding), если $\mathcal{M}_1$ гомеоморфно (см. 1.29) $\phi(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{M}_2$, где на $\phi(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{M}_2$ имеется в виду индуцированная топология.

В более простых терминах, у любой точки из $\phi(\mathcal{M}_1)$ имеется координатная окрестность $U \subset \mathcal{M}_2$, такая что $\phi(\mathcal{M}_1) \cap U$ есть многообразие, вложенное в $U \subset \mathbb{R}^n$.

Если задано вложение $\mathcal{M}_1$ в $\mathcal{M}_2$, то говорят, что $\mathcal{M}_1$ – подмногообразие в $\mathcal{M}_2$.

Определение 1.29. Отображение $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ называется гомеоморфизмом, если оно взаимно-однозначно и как ϕ, так и ϕ^{-1} – непрерывные.

Определение 1.30. Отображение $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ называется диффеоморфизмом, если оно взаимно-однозначно и как ϕ, так и ϕ^{-1} – гладкие.

Многообразия называются диффеоморфными, если между ними существует диффеоморфизм. Диффеоморфные многообразия эквивалентны. Если многообразия заданы через вложение в $\mathbb{R}^N$, то, отождествляя диффеоморфные многообразия, мы избавляемся от зависимости от конкретного выбора вложения в $\mathbb{R}^N$.

Задача 1.31. Пусть $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ – дифференцируемое отображение и в некоторой точке $x \subset \mathcal{M}_1$ $rank(\phi)|_x = \dim(\mathcal{M}_1) = \dim(\mathcal{M}_2)$. Показать, что ϕ осуществляет диффеоморфизм некоторой окрестности x в $\mathcal{M}_1$ на некоторую окрестность $\phi(x)$ в $\mathcal{M}_2$.

1.5.3 Касательный вектор, касательное пространство

Если многообразие локально задано как поверхность $F_\alpha = 0$ в $\mathbb{R}^N$, то касательный вектор в точке $p \in \mathcal{M}$ легко определить как вектор в $\mathbb{R}^N$ с компонентами V^i, удовлетворяющими $V^i \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i}\big|_p = 0$. Очевидно, что касательные вектора в точке образуют линейное пространство той же размерности, что и многообразие. Это пространство называется касательным пространством в точке p и обозначается $T_p\mathcal{M}$.

Множество пар (p, V_p), где $p \in \mathcal{M}$, $V_p \in T_p\mathcal{M}$ образуют касательное расслоение $T\mathcal{M}$. Легко доказать, что касательное расслоение само естественным образом является многообразием.

!! Задача 1.32. Доказать это для случая $\mathcal{M}$, вложенного в $\mathbb{R}^N$, явно построив вложение $T\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^{2N}$. Также для многообразия заданного в терминах атласа.

!! Задача 1.33. Привести примеры многообразий $\mathcal{M}$, для которых касательное расслоение, определенное выше, не равно $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$, где n - размерность $\mathcal{M}$. (Подсказка: попытайтесь причесать ежа)

Мы введем понятие вектора наиболее естественным способом – через кривые на многообразии. Для начала, поясним, что мы называем кривой (параметризованной кривой):

Определение 1.34. Параметризованной кривой называется дифференцируемое отображение $\gamma : \mathbb{R}^1 \to \mathcal{M}$.

Определение 1.35. Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие. Пусть p – точка многообразия. Касательным вектором к $\mathcal{M}$ в p называется класс эквивалентности кривых $\gamma(t)\ :\ \gamma(0) = p$, по отношению эквивалентности

$$\gamma(t) \sim \bar{\gamma}(t) \qquad \left(\frac{d}{dt}x^i(\gamma(t))\right)\bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}x^i(\bar{\gamma}(t))\right)\bigg|_{t=0}\ , \tag{1.9}$$

где функции x^i – локальные координаты в окрестности точки p. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$ для координатного задания кривой.

Предложение 1.36. *Определение касательного вектора в точке не зависит от выбора локальных координат. Касательные вектора в точке образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности, равной размерности многообразия. Это векторное пространство называется касательным пространством и обозначается как $T_p\mathcal{M}$.*

Задача 1.37. Доказать это. В том числе:

- Показать, что любая линейная комбинация касательных векторов также является касательным вектором к некоторой кривой
- Заключить, что это пространство является векторным

Определение 1.38. Компонентами касательного вектора $V_p \in T_p\mathcal{M}$ по отношению к локальной системе координат x^i называются числа $V_p^i := \frac{\partial \gamma^i(t)}{\partial t}|_{t=0}$.

Легко проверить, что это компоненты вектора по отношению к базисным касательным векторам $(\frac{\partial}{\partial x^i})|_p$, которые отвечают следующим кривым $\gamma^k(t) = t\delta_i^k$ (или эквивалентным). Другими словами:

$$V_p = V_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\ , \tag{1.10}$$

Для всякой гладкой функции $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ и кривой γ можно определить скорость изменения функции на кривой:

$$\frac{d}{dt}[(f \circ \gamma)(t)] = \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))]$$

Теперь определим производную вдоль касательного вектора:

Определение 1.39. Дифференциалом функции f в точке p вдоль касательного вектора $X_p \in T_p\mathcal{M}$ называется

$$X_p(f) = \left(\frac{d}{dt}[f(\gamma(t))]\right)\bigg|_{t=0} \tag{1.11}$$

где $\gamma(t)$ – кривая через p, определяющая X_p.

Легко проверить что производная по направлению не зависит от выбора γ (из класса эквивалентности). В компонентах, производная по направлению запишется как:

$$X_p(f) = X_p^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p . \tag{1.12}$$

Заметим, что на практике, мы как правило (в частности в формуле выше) рассматриваем не саму функцию $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, а ее представление в координатах $\widetilde{f} = f \circ h^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

!! Задача 1.40. Во многих книгах по современной геометрии формула для дифференциала функции (1.11) принимается за определение вектора. Показать, что такое определение вектора корректно, т.е. определенный таким образом объект не зависит от выбора координатной карты, а также образует векторное пространство.

Сами компоненты касательного вектора можно записать как

$$X_p^i = X_p(x^i) \tag{1.13}$$

где x^i понимаются как функции на $\mathcal{M}$. Из такого представления легко поучить закон преобразования компонент при переходе к новой системе координат $y^i = y^i(x)$. Действительно, если обозначить за $X_p^{\prime i}$ компоненты вектора относительно координатной системы y^i, имеем

$$X_p^{\prime i} = X_p(y^i(x)) = X_p^j \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^j}\Big|_p \tag{1.14}$$

Эту же формулу можно переписать в терминах соответствующих базисов в $T_p\mathcal{M}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p \tag{1.15}$$

В дальнейшим мы будем называть базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, естественным базисом, отвечающим локальным координатам x^i.

1.5.4 Поведение касательных векторов при отображении многообразий. Дифференциал отображения. Push-forward

Мы только что выписали закон преобразования компонент касательного вектора при замене координат. Замену координат можно рассматривать как частный случай отображения многообразий. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ – отображение многообразий (пока будем требовать от ϕ только непрерывности и дифференцируемости). Пусть V – касательный вектор в точке $p \in \mathcal{M}_1$. Тогда V определяет единственный касательный вектор $(d_p\phi)V$ в точке $\phi(p) \in \mathcal{M}_2$. Действительно, пусть $\gamma(t)$ – кривая, задающая касательный вектор, тогда выберем в качестве $(d_p\phi)V$ касательный вектор в $\phi(p)$, определяемый кривой $\phi(\gamma(t))$.

Замечание 1.41. Отображение $(d_p\phi)$ также обозначается как ϕ_*, т.е. $\phi_* V \equiv (d_p\phi)V$. Это отображение носит два названия – дифференциал отображения, а также push-forward.

Запишем явно компоненты вектора $(d_p\phi)V$. Пусть x^i и y^a – локальные координаты в окрестности $p \in \mathcal{M}_1$ и $\phi(p) \in \mathcal{M}_2$ соответственно. Пусть также отображение ϕ задано в координатах в виде

$$y^a(\phi(p(x))) = Y^a(x) . \tag{1.16}$$

Тогда компоненты вектора $(d_p\phi)V$ относительно координат y^a запишутся как

$$((d_p\phi)V)^a = \frac{d}{dt}y^a(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial Y^a}{\partial x^i}\Big|_p \frac{\partial \gamma^i}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial Y^a}{\partial x^i}\Big|_p V^i\ . \tag{1.17}$$

В частности, если ϕ отвечает замене координат, мы вновь приходим к формуле (1.15).

Замечание 1.42. Вспомним вложение D-мерной поверхности, параметризованной t^α в $\mathbb{R}^n$. Тогда, величины $\frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}$ есть ни что иное, как компоненты образа базисного касательного вектора $\frac{\partial}{\partial t_\alpha}$ при вложении.

Замечание 1.43. Ранг дифференцируемого отображения ϕ в точке x – это просто ранг $d_p\phi$ как линейного отображения.

Как отображения согласуются со важнейшим (определяющим) свойством вектора – действием на функции? Пусть дано отображение многообразий $\phi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$. X – вектор в точке $p\in\mathcal{M}$, а f – функция на $\mathcal{N}$. Тогда мы можем определить дифференцирование по направлению кривой $\phi(\gamma)$ в точке $\phi(p)$, где γ – кривая в $\mathcal{M}$, касательным вектором к которой в т. p является X. Тогда, используя (1.11) как определение, получим следующую формулу:

$$\begin{aligned}((d_p\phi)X)(f)\Big|_{\phi(p)} &= \left(\frac{d}{dt}[f\circ(\phi\circ\gamma(t))]\right)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}[(f\circ\phi)\circ\gamma(t)]\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \left(\frac{d}{dt}[(\phi^*f)\circ\gamma(t)]\right)\Big|_{t=0} = X(\phi^*f)\Big|_p \equiv X(f(\phi(x)))\Big|_p\end{aligned} \tag{1.18}$$

!! Задача 1.44. Проверить это утверждение явно для следующего случая. Пусть $\mathcal{M}=\mathbb{R}^2$, а $\mathcal{N}=B^2\times\mathbb{R}^1$ – объемный бесконечный цилиндрический стержень. На $\mathbb{R}^2$ заданы координаты (x,y), на стержне – (r,l,θ). Отображение $\phi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ задано как $\phi\colon(x,y)\mapsto(r=1, l=x, \theta=2\pi y/L$, $L>0$ - радиус цилиндра. Пусть на стержне задана функция $f=xr\theta$, а на плоскости в некоторой точке $p=(x_p,y_p)$ задан вектор $X_p=x_p\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$.

1.6 Ковекторы

Как известно из линейной алгебры, для любого векторного пространства можно построить сопряженное:

Определение 1.45. Если V – вещественное векторное пространство над $\mathbb{R}$, сопряженным векторным пространством V^* называют пространство линейных отображений из V в $\mathbb{R}$. (аналогично для пространств над $\mathbb{C}$ и т.п.)

Если мы работаем с конечномерными пространствами, можно определить базис сопряженного пространства следующей процедурой:

Предложение 1.46. *Пусть $\{e_i\}_{i=1..n}$ – базис V. Тогда на V^* можно ввести базис $\{f^i\}_{i=1..n}$, определенный соотношением $f^j(e_i)=\delta_i^j$. Такой базис называется двойственным.*

Поскольку V и V^* являются векторными пространствами одной размерности, они изоморфны. Однако, если не заданы дополнительные структуры, то естественного изоморфизма нет. Для того, чтобы построить естественный изоморфизм, в будущем нам понадобится ввести дополнительную структуру, метрику. Но об этом в следующих лекциях.

Пространство, дуальное касательному пространству в точке p $T_p\mathcal{M}$, называется кокасательным, и обозначается $T_p^*\mathcal{M}$. Его элементы – ковектора, другое их название – "внешние формы на $T_p\mathcal{M}$" или "дифференциальные 1-формы в точке p".

Определение 1.47. Градиентом функции f в точке p называется ковектор df_p, определяемый как $df_p(X) := X(f)$, где $X \in T_p\mathcal{M}$.

!! Задача 1.48. Пусть (гипер)поверхность определена функцией $f(x) = 0$. Показать, что нормалью к ней является градиент f. (Нормаль определяется как ненулевой сопряженный вектор (ковектор), свертка которого с касательными векторами равна 0). Что будет, если поверхность задается двумя уравнениями $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$?

Легко заметить, что так определенное отображение линейно, то есть градиент действительно принадлежит пространству ковекторов. Если взять в качестве функции f координатные функции $(x^1, ..., x^n)$, то по определению

$$(dx^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right)_p = \delta^i_j$$

Таким образом, $(dx^i)_p$ образуют базис сопряженного пространства.

Задача 1.49. Показать, что при преобразованиях координат, ковектор в точке p преобразуется как

$$(dx^i)_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)_{x'=x'(p)} (dx'^j)_p$$

1.7 Векторные поля

Определение векторного поля выглядит следующим образом:

Определение 1.50. Пусть в каждой точке многообразия задан касательный вектор, при этом компоненты этого вектора относительно локальных координат в любой карте, являются дифференцируемыми функциями (в частности, на пересечении координатных окрестностей компоненты преобразуются, как положено компонентам касательного вектора). В этом случае говорят, что на $\mathcal{M}$ задано векторное поле.

С другой стороны, на более современном языке определение можно сформулировать так. Напомним, что с каждым многообразием $\mathcal{M}$ можно связать многообразие $T\mathcal{M}$, называемое касательным расслоением. Определено дифференцируемое отображение $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, естественная проекция, которое сопоставляет паре $(p, X_p) \in T\mathcal{M}$ точку $p \in \mathcal{M}$.

Определение 1.51. Векторным полем на многообразии $\mathcal{M}$ называется дифференцируемое отображение $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$, такое что $\pi \circ X = \mathrm{id}$, где id тождественное отображение $\mathcal{M}$ в себя. (На языке расслоений, такое отображение называется сечением).

Векторные поля на $\mathcal{M}$ очевидно образуют линейное пространство над R, которое мы будем обозначать как $\mathrm{Vect}_{\mathcal{M}}$ или $\Gamma(T\mathcal{M})$.

В физике есть много примеров векторных полей. Рассмотрим например, поле скоростей жидкости или электрическое поле в R^3 – это векторные поля на многообразии R^3, поскольку они сопоставляют каждой точке R^3 касательный вектор.

Пример с жидкостью или электрическим полем приводит к полезному альтернативному определению векторного поля. А именно, любое поле скоростей жидкости определяет отображение $\mathcal{M}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}$, которое точке $p\in\mathcal{M}$ сопоставляет траекторию $S(p,t)$ частицы жидкости как функцию времени. такое отображение очевидно удовлетворяет $S(p,0)=p$.

Более формально, рассмотрим дифференцируемое отображение $S:\mathcal{M}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}$, такое что $S(p,0)=p$. Зафиксируем первый аргумент, тогда $S(p,t)$ есть кривая проходящая при $t=0$ через точку p. Т.е. такое отображение определяет касательный вектор в каждой точке многообразия. Можно показать, что, по отношению к локальной координатной системе в каждой карте, компоненты касательных векторов являются дифференцируемыми функциями локальных координат. Другими словами, векторное поле есть соответствующий класс эквивалентности таких отображений.

Задача 1.52. Полностью сформулировать определение и доказать его эквивалентность данному выше.

Лекция 4

На основании определения вектора как линейной карты, можно сформулировать важное свойство векторных полей.

Предложение 1.53. *Пусть X векторное поле на $\mathcal{M}$, тогда всегда определено отображение $X:\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\to\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. А именно,*

$$(X(F))(p)=\left(\frac{d}{dt}F(S(p,t))\right)|_{t=0}\,, \tag{1.19}$$

где $S:\mathcal{M}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}$ – семейство кривых определяющих векторное поле V.

Компонентами векторного поля относительно локальной координатной системы x^i в U, называются функции $X^i(x)$. Часто пишут

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\ . \tag{1.20}$$

Записанное в таком виде, векторное поле выглядит как дифференциальный оператор первого порядка. Действительно, можно показать, что

$$X(f)=V^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\ , \tag{1.21}$$

где X в левой части равенства обозначает отображение из предложения **1.53**. В частности, удобно выражать компоненты векторного поля в виде $X^i=X(x^i)$.

Задача 1.54. Доказать это утверждение.

Раньше мы видели, как векторы отождествлялись с дифференциальными операторами. Это связано с тривиальным фактом, что все возможные производные по направлению в некоторой точке образуют конечномерное векторное пространство (каждой из которых соответствует класс эквивалентности кривых), а множество всех возможных дифференциальных операторов имеет структуру векторного пространства. Если рассматривать дифференциальные операторы поточечно, т.е. рассматривать дифференцирование в точке, то это множество будет конечномерным и будет, как векторное пространство, изоморфно векторному пространству, которое мы вводили выше. Исходя из этого можно построить новое определение векторного поля (и вектора, если рассматривать это определение в точке).

Определение 1.55. Пусть для любой $U \subset \mathcal{M}$ задано линейное отображение над функциями $X : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$, удовлетворяющее условию (правилу Лейбница)

$$X(fg) = (X(f))g + f(X(g))\,, \tag{1.22}$$

то X векторное поле.

!! Задача 1.56. Доказать эквивалентность стандартному определению.

Оказывается, что на пространстве $\mathrm{Vect}_\mathcal{M}$ векторных полей на $\mathcal{M}$ определена дополнительная структура – коммутатор векторных полей.

Определение 1.57. Пусть X, Y векторные поля на $\mathcal{M}$. Коммутатором (скобкой Ли) $[X, Y]$ называется отображение $\mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$, определенное как

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))\,. \tag{1.23}$$

Предложение 1.58. *Коммутатор векторных полей есть векторное поле. Для коммутатора справедливо тождество Якоби*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{1.24}$$

В локальных координатах

$$[X, Y]^i = X^l \frac{\partial}{\partial x^l} Y^i - Y^l \frac{\partial}{\partial x^l} X^i\,. \tag{1.25}$$

Напомним стандартное определение:

Определение 1.59. Линейное пространство L называется алгеброй Ли над $\mathbb{R}$, если на нем задана билинейное, антисимметричное отображение $[,] : L \times L \to L$, удовлетворяющее

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0\,. \tag{1.26}$$

Таким образом, пространство $\mathrm{Vect}_\mathcal{M}$ – Алгебра Ли над $\mathbb{R}$.

Пусть $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – отображение многообразий. В общем случае, векторное поле на $\mathcal{M}$ не определяет векторного поля на $\mathcal{N}$. Однако, если $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ диффеоморфизм то дифференциал отображения определяет отображение векторных полей в себа, а именно

$$(\phi_* X)|_{\phi(p)} = d_p\phi(X|_p) \tag{1.27}$$

Определение корректно так как ϕ^{-1} существует. pravka

Полезно также ввести понятие ϕ-связанных полей: векторные поля $X \in \mathrm{Vect}_{\mathcal{M}}$ $Y \in \mathrm{Vect}_{\mathcal{N}}$ называются ϕ-связанными, если в каждой $p \in \mathcal{M}$ выполнено $(d_p\phi)X|_p = Y|_{\phi_p}$.
Действительно, рассмотрим пример из задачи **(1.44)**. В этой задаче мы ввели вектор X_p в некоторой точке $\mathcal{M}$. Если ввести такой вектор для каждой точки $\mathcal{M}$, то получится, что мы поточечно ввели векторное поле, которое мы назовем X. Очевидно, что X – действительно векторное поле на $\mathcal{M}$. Вместе с тем, ϕ_*X не является векторным полем на $\mathcal{N}$, поскольку задано только на поверхности $r = 1$, а не во всем объёме.
Другим примером будут являться отображения, не максимального ранга, например, проекция. Действительно, рассмотрим пример, когда многообразие $\mathcal{M}$ отображается на свое подмногообразие $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$. Тогда несколько точек $\mathcal{M}$ отображаются в одну точку $\mathcal{M}_1$. Понятно, что в этом случае возникнет неопределенность, по какой из точек рассчитывать векторное поле на $\mathcal{M}_1$, поэтому мы не сможем даже просто определить такой объект ϕ_*X.
Конечно, это поле можно доопределить и гладко продлить во все $\mathcal{N}$. Но это будет уже другое векторное поле, которое и будет ϕ-связным полю X. Таким образом, (1.18) верно, вообще говоря, только поточечно, потому что ϕ_*X может не являться векторным полем.

Что это такое? Где определение для случая когда не дифф.

!! Задача 1.60. Показать, что в случаях, когда при отображении многообразий определен push-forward (например, отображение – диффеоморфизм), алгебраическая структура инвариантна относительно этого отображения:

$$\phi_*([X, Y]) = [\phi_*X, \phi_*Y] \tag{1.28}$$

1.8 Поля 1-форм (ковекторные поля)

Ковекторное поле определяется абсолютно аналогично векторному:

Определение 1.61. Пусть в каждой точке многообразия задан ковектор, при этом компоненты этого ковектора относительно локальных координат в любой карте, являются дифференцируемыми функциями (в частности, на пересечении координатных окрестностей компоненты преобразуются, как положено компонентам ковектора). В этом случае говорят, что на $\mathcal{M}$ задано ковекторное поле.

На языке расслоений, поля 1-форм можно также определить абсолютно по аналогии – как гладкое сечение кокасательного расслоения.

Определение 1.62. Кокасательное расслоение к многообразию $\mathcal{M}$, обозначаемое $T^*\mathcal{M}$ представляет собой множество всех пар (p, ω_p), где p – точка многообразия $\mathcal{M}$, а ω_p – ковектор в этой точке.

Напомним определение сечения кокасательного расслоения:

Определение 1.63. Сечением кокасательного расслоения $T^*\mathcal{M}$ называется дифференцируемое отображение $\omega : \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$, такое что $\pi \circ s = \mathrm{id}$, где id тождественное отображение $\mathcal{M}$ в себя. Множество всех сечений кокасательного расслоения (т.е. всех возможных полей 1-форм) обозначается как $\Gamma(T^*\mathcal{M})$ (есть и эквивалентное обозначение $\Omega^1(\mathcal{M})$, об этом в следующих лекциях).

Компонентами ковекторного поля относительно локальной координатной системы x^i в U, называются функции $\omega_i(x)$. Часто пишут

$$\omega = \omega_i dx^i \tag{1.29}$$

Давайте определим, как преобразуется ковекторное поле при отображениях многообразий. До этого мы рассматривали только поточечные преобразования в какой-то выбранной координатной карте при заменах координат. Для того чтобы определить преобразования для произвольных отображений, потребуем согласованности преобразований векторных и ковекторных полей.

Определение 1.64. Пусть задано отображение $\phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, $\omega \in \Gamma(T^*\mathcal{N})$. Pull-back (обратным отображением) 1-формы ω называют объект $\phi^*\omega$, такой что:

$$(\phi^*\omega)(X_p) = \omega(d_p\phi X_p) \tag{1.30}$$

$\forall p \in M$ and $\forall X_p \in T_pM$

Правка. определение не рабптало для общего отображения

Если $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ диффеоморфизм то дифференциал отображения определяет отображение векторных полей в себа, а именно

$$(\phi_* X)|_{\phi(p)} = d_p\phi(X|_p) \tag{1.31}$$

Определение корректно так как ϕ^{-1} существует.

Стоит отметить важное отличие полей форм от векторного поля: если ω – поле 1-формы на $\mathcal{N}$, то объект $\phi^*\omega$ является 1-формой на всем $\mathcal{M}$. Это связано с тем, что поле 1-формы преобразуется "в правильную, обратную сторону". Приведём практический пример.
Если перейти к локальному рассмотрению, в некоторой координатной карте отображение $\phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ задается как $\phi\colon x'^a = x'(x^i)$, где x^i – координаты в некоторой области $\mathcal{M}$, а x'^a – $\mathcal{N}$. Тогда изменение компонент ковекторного поля хорошо определено всюду: $\omega_i = \frac{\partial x'^a(x)}{\partial x^i}\omega'_a$.

Напомним, что преобразование функций при отображениях так же называется pull-back. Это не случайный факт – в следующих главах мы покажем, что и функции, и ковекторные поля являются примерами дифференциальных форм, которые преобразуются при помощи pull-back, т.е. в обратную сторону, в отличие от векторных полей. Пока, остановимся на следующей любопытной задаче.

!! Задача 1.65. Показать, что pull-back коммутирует с операцией взятия градиента, т.е. $\phi^*(df) = d(\phi^* f)$, где f –функция.

Задача 1.66. Пример некоординатного базиса для векторного поля
Рассмотрим некоторый локальный базис векторных полей $\{e_a\}$, т.е. векторные поля записываются в виде $X = X^a e_a$. Вообще говоря, базисные вектора могут не коммутировать:

$$[e_a, e_b] = \gamma^c_{ab} e_c \tag{1.32}$$

Пусть $\{\omega^a\}$ – сопряженный базис для ковекторов. Пусть $\{x^i\}$ – координаты в этой области (в этой задаче мы будем обозначать координаты другими индексами, чтобы отличать их от индексов некоординатного базиса). Тогда введенный базис можно разложить в координатном базисе:

$$e_a = e^i_a \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \omega^a = \omega^a_i dx^i$$

1. Если $\omega^a(e_b) = \delta^a_b$, найти $\omega^a_i e^i_b$

2. Вначале, показать, что $e^i_a \dfrac{\partial e^j_b}{\partial x^i} - e^i_b \dfrac{\partial e^j_a}{\partial x^i} = \gamma^c_{ab} e^j_c$

3. Затем, вывести формулу $\dfrac{\partial \omega^a_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial \omega^a_i}{\partial x^j} = -\gamma^a_{bc}\omega^b_i\omega^c_j$

4. Допустим, $e_a = \frac{\partial}{\partial y^a}$, а $\omega^a = dy^a$, где y^a – другие координаты в этой области. Проверить, что в этом случае $[e_a, e_b] = 0$ независимо от выбора координат (можно сослаться на задачу (1.60)).

5. При помощи п.3 доказать обратное утверждение, т.е. что только координатный базис является коммутирующим.

2 Однопараметрические группы преобразований, тензорные поля, дифференцирование Ли

Вспомним основные свойства уже известных нам объектов – функций и векторных полей при дифференцируемых отображениях многообразий и зафиксируем соответствующие обозначения.

Пусть задан диффеоморфизм $\phi\colon \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. Тогда определено отображение $\phi^*\colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}_2) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}_1)$. А именно

$$(\phi^* f)(p) = f(\phi(p)) , \qquad p \in \mathcal{M}_1 \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}_2) \tag{2.1}$$

Отсюда легко убедится что дифференцируемость ϕ – влечет за собой дифференцируемость $\phi^* f$.

Задача 2.1. 1. Проверить этот факт и показать что отображение ϕ^* линейно и удовлетворяет соотношению

$$\phi^*(fg) = \phi^*(f)\phi^*(g) . \tag{2.2}$$

Функции образуют бесконечномерную ассоциативную коммутативную алгебру (в качестве билинейной операции выбрано просто умножение функций как чисел). На алгебраическом языке, такое отображение ассоциативных алгебр называется гомоморфизмом.

2. Показать, что верно и обратное: если задан гомоморфизм алгебр функций, то тем самым задано и отображение соответствующих многообразий (по меньшей мере для областей в евклидовом пространстве и формальных рядов по координатам).

Другими словами всякое отображение многообразий определяет (обратное!) отображение функций на них. В этом смысле алгебра функций на многообразии является объектом двойственным самому многообразию.

Нашей следующей целью является рассмотреть поведение функций и векторных полей относительно диффеоморфизмов, которые, в свою очередь, индуцированы векторными полями.

Когда мы рассматривали векторные поля, мы ввели следующий объект – дифференцируемое отображение $S\colon \mathcal{M} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, такое что $S(p, 0) = p$. Его геометрический смысл – каждой точке многообразия сопоставлена своя кривая, проходящая через эту точку, причем касательным вектором к этой кривой в этой точке является векторное поле в этой точке. Лекция 5

При эволюции параметра t, нас будет уносить всё дальше от этой точки по вдоль кривой, определяемой этим векторным полем (векторное поле задает касательный вектор в любой точке этой кривой). Такая кривая называется интегральной кривой соответствующего векторного поля.

Определение 2.2.
Интегральной кривой векторного поля $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ называется такая кривая γ, что в любой точке этой кривой, касательный вектор является значением векторного поля в этой точке, т.е. $\forall t_0, p = \gamma(t_0)$, $\forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$,

$$(X(f))|_p = \left(\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) \right) |_{t=t_0} \tag{2.3}$$

Другии словами:

$$X|_{\gamma(t)} = \frac{d}{dt}\gamma(t)$$

Более того, можно утверждать, что векторное поле задает семейство отображений – перемещений вдоль кривой(см. физический пример про векторное поле скоростей потока жидкости), называемое **потоком**. Очевидно, эти отображения являются гладкими и отображают многообразие на само себя. Более того, как минимум в некоторой области эти отображения обратимы, т.е. являются диффеоморфизмами. Свойства обратимости мы будем исследовать в следующем разделе.

Предложение 2.3.
Пусть $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$. Тогда для любой $p \in \mathcal{M}$ $\exists \varepsilon > 0$) и открытая окрестность $U_p \ni p$ в $\mathcal{M}$, в которой определено единственное семейство гладких отображений $\phi_t : U_p \to \mathcal{M}$, такое что:

- *ϕ_t определено для $|t| < \varepsilon$, и семейство отображений $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \to \mathcal{M}$ является гладким (как по t, так и по $p \in \mathcal{M}$).*
- *Если $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon$, а также некоторая точка $x \in U_p$ вместе с её образом $\phi_t(x)$ лежат в U_p, то $\phi_{t+s}(x) = \phi_s \circ \phi_t(x)$. Таким образом, $\phi_0 = id$.*
- *Если f – гладкая функция (по крайней мере в окрестности точки p), то значение $X(p)$ на f равно:*

$$X(f)|_p = \frac{d}{dt} \left(f(\phi_t(p)) \right) |_{t=0} \tag{2.4}$$

Данное предложение – версия теоремы о существовании/единственности для решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Т.е. допустим, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ в локальной системе координат, а X^i – гладкие в этой карте. Тогда третий пункт предположения утверждает, что

$$X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}(f(\phi_t)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d\gamma^i}{dt},$$

где $\gamma^i \equiv x^i(\phi_t)$ – координаты точки, перемещенной вдоль интегральной кривой кривой на параметр t из точки $(x^1, ..., x^n)$.

Иными словами, мы хотим решить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций γ^i от параметра t:

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = X^i(\gamma^1, ..., \gamma^n), \tag{2.5}$$

при условии $\gamma^i(x^1, ..., x^n, t = 0) = x^i$.

Из предложения 2.3 можно предположить, что возникшее семейство диффеоморфизмов имеет групповую природу. Это не совсем так. Для дальнейшего рассмотрения свойств потоков нам потребуется ввести понятие группы Ли.

2.1 Групповая природа потоков

Для начала, введём определение группы.

Определение 2.4.
Группой G называется множество, на котором введена операция группового умножения $m : G \times G \to G$, со следующими свойствами:

- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, \quad g_1 \times (g_2 \times g_3) = (g_1 \times g_2) \times g_3$
- $\exists e \in G$: $\forall g \in G$ $e \times g = g \times e = g$
- $\forall g \in G$ $\exists g^{-1} \in G$: $gg^{-1} = e$

Определение 2.5. Группа G – группа Ли, если она является многообразием.

Задача 2.6. Убедиться, что множество всех диффеоморфизмов многообразия образует группу.

Вернемся к рассмотрению потоков.

Лемма 2.7. *Если векторное поле X имеет компактный носитель (иными словами – не равно нулю только в компактной области), в частности если само многообразие $\mathcal{M}$ компактно, то тогда поток ϕ_t определяет однопараметрическую подгруппу $\mathbb{R} \to Diff(\mathcal{M})$ группы диффеоморфизмов многообразия.*

Доказательство. Покроем $\mathcal{M}$ (или носитель поля X) локальными окрестностями U_p. Поскольку носитель (или многообразие) компактно, то таких окрестностей может быть конечное число.
Пусть $\varepsilon = \min \varepsilon_i$. Поскольку локальные потоки единственны, они согласуются на перекрытии окрестностей.
Таким образом, мы получаем хорошо определенное отображение $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Пусть $|t| > \varepsilon$, тогда запишем $t = k(\varepsilon/2) + r$, $|r| < \varepsilon/2$, k – целое.
Тогда $\phi_t = \phi_{\varepsilon/2} \circ ... \circ \phi_{\varepsilon/2} \circ \phi_r$, если $k > 0$ и $\phi_t = \phi_{-\varepsilon/2} \circ ... \circ \phi_{-\varepsilon/2} \circ \phi_r$, если $k < 0$. Используя "$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$", получим, хорошо определенное обратимое отображение. □

В случае некомпактных носителей векторного поля, поток может, вообще говоря, не быть группой. На языке приведенного выше доказательства, может потребоваться бесконечное число окрестностей для покрытия носителя X. В этом случае, аргумент о том, что согласуя разные локальные потоки мы получим глобальное хорошее отображение, работать не будет.
Приведем конкретный пример. Рассмотрим векторные поля на $\mathbb{R}$

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.6}$$

Первые два, в отличие от третьего, генерируют хорошо определенные потоки:

$$x \to x + t_1, \qquad x \to e^{t_2} x, \qquad x \to \frac{x}{1 - t_3 x} \tag{2.7}$$

Очевидно, что при $t_3 = 1/x$, мы получим отображение, которое не имеет обратного, т.е. групповая структура нарушается.

!! Задача 2.8. Проверить (2.7)

Определение 2.9. Векторный поле называется полным, если оно определяет поток для любых значений параметра, т.е. поток является группой.

2.2 Производная Ли функций и векторных полей

В предыдущем разделе мы показали, что векторное поле генерирует семейство диффеоморфизмов – отображений многообразия на само себя.

Мы уже изучили, как преобразуются функции и векторные поля при отображениях. Вместе с тем, сейчас мы работаем с *семейством* отображений (перемещений вдоль кривой), непрерывным и *дифференцируемым* по параметру. Следовательно, мы можем определить "скорость" изменения объектов при изменении параметра, т.е. производную от этих отображений по параметру. Эта производная и называется производной Ли, но само определение будет дано позднее.
Для начала, приведем наиболее наглядные примеры функций и векторных полей.

Для функций, "скорость" изменения при переносе по кривой, фактически обозначает дифференцирование по направлению кривой – уже введенный нам объект. Покажем, что это действительно так: функция f преобразуется как $(\phi_t^* f)(x) = f(\phi_t(x))$. Производная от этого выражения будет равна:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ((\phi_t^* f)(p)) = \frac{d}{dt} \left(f(\phi_t(p))\right)_{t=0} = X(f)|_p, \tag{2.8}$$

где X – векторное поле, генерирующее поток ϕ_t, а в частности кривую $\gamma(t)$ – как поток через точку p.
(2.8) называется производной Ли от функции и обозначается $\mathcal{L}_X f$

Теперь рассмотрим векторное поле. Напомним определлеение pushforward векторных полей. Пусть ϕ-диффеоорфизм $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Тогда для векторного поля X

$$(\phi_* X)|_{\phi(p)} = (d_p \phi) X|_p \tag{2.9}$$

Лекция 6

Лемма 2.10. *Пусть X, Y – векторные поля на многообразии $\mathcal{M}$, т.е. $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$.*
Потоки, генерируемые X и Y, коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют векторные поля, т.е. $[X, Y] = 0$.

Доказательство. Для начала покажем, что

$$-\left.\left(\frac{d}{dt}(\phi_t)_*(Y)\right)\right|_{t=0} \equiv \lim_{t\to 0} \frac{Y|_p - (\phi_t)_*(Y)}{t} = [X, Y]|_p. \tag{2.10}$$

Для этого рассмотрим действие на произвольную гладкую функцию $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Обозначим $f_t := (\phi_t)^* f = f(\phi_t)$. Мы знаем, что $X(f) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\phi_t)^*(f)$.
Поскольку f – гладкая, то в некоторой окрестности верно разложение $f_t = f + t(X(f)) + t^2 h_t$, где h_t – некоторая гладкая функция.
Кроме того, $((\phi_t)^*(Y))\big|_p (f) = Y|_{\phi_t^{-1}(p)}(f_t)$. Тогда верно следующее выражение:

$$- \left(\frac{d}{dt}(\phi_t)_*(Y) \right)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{Y|_p(f) - Y|_{\phi_t^{-1}(p)}(f + t(X(f)) + t^2 h_t)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{Y|_p(f) - Y|_{\phi_t^{-1}(p)}(f)}{t} \right) - Y_p(X(f)) = X|_p(Y(f)) - Y|_p(X(f)) = [X,Y]|_p(f), \qquad (2.11)$$

где предпоследнее равенство фактически представляет собой (2.8), поскольку мы брали производную от функции $Y(f)$ по направлению X.

Теперь, используя (2.10), можно установить, что Y переносится инвариантно потоком X, и наоборот, а значит коммутируют и сами потоки. □

Заметим, что поскольку $[X, X] = 0$, векторное поле не изменяется при переносе вдоль себя. Это необходимое условие, иначе мы не смогли бы определить ни интегральную кривую, ни поток.

Определение 2.11. Производной Ли $\mathcal{L}_X Y$ от векторного поля Y по векторному полю X называется левая часть (2.10):

$$\mathcal{L}_X Y = \left(\frac{d}{dt}(\phi_{-t})_*(Y) \right)\bigg|_{t=0} \qquad (2.12)$$

В дальнейшем, мы увидим, что производную Ли как правило определяют через *обратное отображение* (pullback). Поскольку мы работаем с диффеоморфизмами, и pull-back и push-forward хорошо определены. Определим действие pullback на векторные поля, как отображение в сторону, обратную push-forward:

$$\phi^* X = (\phi^{-1})_* X \qquad (2.13)$$

Таким образом, производная Ли записывается как

$$\mathcal{L}_X Y = \left(\frac{d}{dt}(\phi_t)^*(Y) \right)\bigg|_{t=0} \qquad (2.14)$$

!! Задача 2.12. Показать, что на векторных полях $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ и $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$.

2.3 Интегрируемость

В предыдущем разделе мы показали, что если коммутируют векторные поля, то коммутируют и их потоки. Тогда рассмотрим следующую конструкцию. Возьмем произвольную интегральную кривую первого векторного поля и через каждую её точку построим интегральную кривую второго векторного поля. В данном случае, очевидно, что как минимум локально, мы получим хорошо определенную поверхность (двумерное подмногообразие). Если повторить эту процедуру для каждой интегральной кривой X из их семейства, мы получим семейство поверхностей,

покрывающих все многообразие. Всегда ли возможно построить многообразие по векторным полям?
Нет. В качестве контрпримера можно рассмотреть векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial y}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ в $\mathbb{R}^3$. Если посмотреть, как в каждой точке будут выглядеть касательные пространства к предполагаемому семейству поверхностей, то можно убедиться, что эти векторные поля не образуют поверхностей даже локально.

Для того, чтобы формализовать эту ситуацию, введем понятие распределения.

Определение 2.13. Пусть $\forall p \in \mathcal{M}$ задано k-мерное подпространство $\Delta_p \in T_p\mathcal{M}$, $\Delta_p = \{X_1|_p, ..., X_k|_p\}$ так, что для $U_p \subset \mathcal{M}$ – окрестности т. $p \in U_p$ в $\mathcal{M}$ существует k линейно независимых векторных полей $X_1, ..., X_k$, а $\forall q \in U_p$ $\Delta_q = \{X_1|_q, ..., X_k|_q\}$. Тогда на $\mathcal{M}$ задано k-мерное распределение Δ. Векторные поля $X_1, ..., X_k$ называются локальным базисом распределения.

Определение 2.14. Распределение Δ называется инволютивным, если оно замкнуто относительно коммутатора, т.е. $\forall X_i, X_j$ из локального базиса распределения, $[X_i, X_j] = a_1X_1 + ...a_kX_k$ – линейная комбинация базисных векторных полей.

Стандартный способ построения многообразия – задать его атлас, т.е. координаты вместе с областями, где они определены. Отсюда возникает определение *интегрируемого* распределения.

Определение 2.15. Распределение Δ на $\mathcal{M}$ называется интегрируемым, если $\forall p \in M$ в её окрестности $\exists$ локальные координаты $x^1, ..., x^k$, такие что векторные поля $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ – локальный базис распределения Δ.

Теорема 2.16. ***(Теорема Фробениуса)***
Распределение Δ на $\mathcal{M}$ интегрируемо только тогда, когда оно инволютивно. Обратное тоже верно.

Доказательство. Доказательство обратного утверждения практически очевидно, и предлагается в качестве задачи.
Для начала рассмотрим следующий специальный случай. Допустим, локально в окрестности $p \in \mathcal{M}$ существуют коммутирующие векторные поля $X_1, ...X_k$, $[X_i, X_j] = 0$ $\forall i, j$, образующие локальный базис Δ.

Построим координаты в окрестности произвольной т. $p \in \mathcal{M}$.
Рассмотрим открытую окрестность U нуля в $\mathbb{R}^k$ ($U \cong (-\varepsilon, \varepsilon)^k$ для некоторого $\varepsilon > 0$). Согласно Предположению (2.3), для достаточно небольшого ε можно построить гладкое отображение $F : U \to \mathcal{M}$, такое что:

$$\begin{gathered} F(y_1, ..., y_k) = \phi_{X_1,y_1} \circ ... \circ \phi_{X_k,y_k}(p) \\ F(0, ...0) = p \end{gathered} \tag{2.15}$$

где ϕ_{X_i,y_i} – отображение, перемещающее вдоль потока векторного поля X_i на параметр y_i. По нашему предположению, векторные поля коммутируют, а следовательно коммутируют и их потоки. Давайте проверим, что мы хорошо ввели локальную координатную карту с координатами $\{y_i\}$. Для этого, нам нужно убедиться, что как минимум локально F достаточно гладкое и обратимое, т.е. является диффеоморфизмом.
Локально, каждое из отображений ϕ_{X_i,y_i} обратимо, а F не зависит от их порядка (ϕ_{X_i,y_i} коммутируют). Поэтому обратное отображение всегда существует.

Аналогично доказывается дифференцируемость – каждое из семейств отображений ϕ_{X_i,y_i} дифференцируемо по параметру y_i и не зависит от параметров других отображений, т.е мы можем определить дифференцируемость F по каждой координате.
Итак, $\{y_i\}$ – действительно координаты.

Общий случай
Идея состоит в том, чтобы показать, что локально мы можем выбрать коммутирующий базис.
В окрестности т.$p \in \mathcal{M}$ выберем координатную карту U так, что $\Delta|_p = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\Big|_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\Big|_p \right\rangle$.
Поскольку Δ – гладкое, то для т. q в окрестности т. p, можно найти локальный базис распределения в виде

$$\Delta|_q = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial x^j} \right), c^i \in \mathbb{R} \right\}, \tag{2.16}$$

где n – размерность $\mathcal{M}$, а a_{ij} – гладкие функции, $a_{ij}(p) = 0$. В самом общем случае, вблизи точки p, векторные поля распределения можно записать в виде

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.17}$$

Поскольку $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, коммутатор базисных векторных полей должен выражаться через линейную комбинацию от $\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, ... \frac{\partial}{\partial x^n}$:

$$[X_i, X_j] = f_{k+1} \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} + ... + f_n \frac{\partial}{\partial x^n}, \qquad f_{k+1}, ..., f_n \in C^\infty(\mathcal{M}) \tag{2.18}$$

С другой стороны, распределение инволютивно, т.е. $[X_i, X_j] = a_1 X_1 + ... a_k X_k$. Сравнивая коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $i \leqslant k$, получим, что a_{ij} не зависят от x^i $i \leqslant k$, и $[X_i, X_j] = 0$.

Далее см. специальный случай, разобранный в начале. □

!! Задача 2.17. Доказать обратное утверждение в теореме Фробениуса.

Следствие 2.18. *Лево (или право) инвариантные векторные поля на группе Ли определяют инволютивное распределение. Его интегральным подмногообразием, содержащим единицу, являеся является группа Ли G' – связная компонента единицу группы G.*

2.4 Тензорные поля

Мы можем ввести дифференцирование практически любого объекта по векторному полю.
Все поля на многообразии, с которыми мы столкнулись – функции (скалярное поле), векторное и ковекторное поле, а также упоминавшиеся ранее, но пока не введенные поля дифференциальных форм, являются тензорными полями.

Определение 2.19. (k,l)-тензором в точке $p \in \mathcal{M}$ называется мультилинейное отображение (т.е. линейное по каждому аргументу) переводящее k векторов и l векторов в точке p в $\mathbb{R}$.

Компоненты тензора определяются как и ранее – действием на базисные (ко)-вектора. Преобразование тензора индуцируется соответствующими преобразованиями векторов и ковекторов.

Дадим два определения тензорного поля: первое – через гладкое задание тензоров во всех точках многообразия, второе – на языке расслоений.

Определение 2.20. Пусть в каждой точке многообразия задан (k,l)-тензор, при этом компоненты этого тензора являются дифференцируемыми функциями относительно локальных координат в любой карте. В частности, на пересечении координатных окрестностей компоненты преобразуются, как положено компонентам тензора. В этом случае говорят, что на $\mathcal{M}$ задано (k,l)-тензорное поле.

Определение 2.21. (k,l)-тензорным полем на $\mathcal{M}$ называется сечение $(T^*\mathcal{M})^{\otimes k} \otimes (T\mathcal{M})^{\otimes l}$.

Иными словами, тензорное поле (k,l) ранга – это мультилинейное отображение k векторных полей и l ковекторных полей в $\mathbb{R}$:

$$T : (X_1, ..., X_k, \omega_1, ..., \omega_l) \mapsto T(X_1, ..., X_k, \omega_1, ..., \omega_l) \in \mathbb{R}, \tag{2.19}$$

$X_1, ..., X_k \in \Gamma(T\mathcal{M})$, $\omega_1, ..., \omega_l \in \Gamma(T^*\mathcal{M})$.

Стоит отметить, что говоря о мультилинейности тензорных полей, мы имеем в виду $C^\infty(\mathcal{M})$-мультилинейность, т.е. коэффициентами выступают гладкие функции. Это наиболее очевидно в случае уже введенных ковекторных полей:

$$\omega(fX) = f\omega(X), \qquad X \in \Gamma(T\mathcal{M}), \quad f \in C^\infty(\mathcal{M}) \tag{2.20}$$

Давайте изучим, какие объекты из уже введенных являются тензорами.
Рассмотрим следующий объект: $T(X,Y,\omega) = \omega\left([X,Y]\right)$. Компонентами этого объекта будут являться структурные константы алгебры векторных полей. Можно убедиться, что этот объект не является $(1,2)$-тензором:

$$\omega\left([fX,Y]\right) = \omega\left(f[X,Y] - Y(f)X\right) = f\omega\left([X,Y]\right) - Y(f)\omega\left(X\right) \neq f\omega\left([X,Y]\right)$$

Задача 2.22. Показать, что объект $T(X) := \mathcal{L}_X Y$ не является $(1,0)$ тензорным полем, где $Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$, т.е некорректно рассматривать производную Ли без указания, по какому полю осуществляется перенос.

Пусть $\{e_a\}$ – локальный базис векторных полей, а $\{f^a\}$ – локальный базис ковекторных полей в той же области. Тогда базисом тензорных полей ранга (k,l) будет $\{f^{a_1} \otimes \ldots \otimes f^{a_k} \otimes e_{b_1} \otimes \ldots \otimes e_{b_l}\}$. Если мы работаем в координатном базисе, то этот базис имеет вид

$$\{dx^{i_1} \otimes ... \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}\} \tag{2.21}$$

Компонентами (k,l)-тензорного поля в координатном базисе называются числа

$$T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = T(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., jdlx^{i_k}, dx^{j_1}, ..., dx^{j_l}) \tag{2.22}$$

Таким образом, (k,l)-тензорное поле записывается как

$$T = T^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes ... \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \tag{2.23}$$

Преобразования для тензорных полей при отображениях многообразий определяются соответствующими преобразованиями векторных и ковекторных полей. По аналогии с ковекторными полями, преобразования $(k,0)$-тензорных полей всегда оказываются хорошо определены. Пусть задано $(k,0)$-тензорное поле на $\mathcal{N}$, $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $X_1, ..., X_k \in \Gamma(T\mathcal{M})$. Тогда $\forall p \in \mathcal{N}$, мы можем поточечно определить объект $\phi^* T$ в точках прообраза точки p:

$$[(\phi^* T)(X_1, ..., X_k)]|_{\phi^{-1}(p)} = T|_p (\phi_*(X_1)_{\phi^{-1}(p)}, ..., \phi_*(X_k)_{\phi^{-1}(p)}), \tag{2.24}$$

где – $\phi^{-1}(p)$ – прообраз точки p (множество точек $\mathcal{M}$, образом которых является точка p).

Иначе, для $(k, l > 0)$-тензорных полей мы требуем, чтобы было определено индуцированное отображение векторных полей (push-forward). В случае, когда эти индуцированные отображения определены (т.е. диффеоморфизмов), индуцированное отображение (k,l)-тензорных полей определяется следующим образом. (Мы обозначим это индуцированное отображение тем же символом, что и для векторных полей – ϕ_*, чтобы подчеркнуть, что это отображение существует не всегда.
Пусть $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – диффеоморфизм, $X_1, ..., X_k \in T_{\phi(p)}\mathcal{M}$, $\eta_1, ..., \eta_l \in T^*_{\phi(p)}\mathcal{M}$, а T – тензорное поле (k,l)-ранга на $\mathcal{M}$. Тогда $\phi_* T$ – тензорное поле (k,l)-ранга на $\mathcal{N}$, определяется как

$$(\phi_* T)(X_1, ..., X_k, \eta_1, ..., \eta_l) = T(\phi_* X_1, ..., \phi_* X_k, (\phi^{-1})^* \eta_1, ..., (\phi^{-1})^* \eta_l) \tag{2.25}$$

Обратное отображение тензорных полей, т.е. pullback, необходимый в определении производной Ли, определяется как:

$$\begin{aligned}(\phi^* T)(X_1, ..., X_k, \eta_1, ..., \eta_l) &= T(\phi^* X_1, ..., \phi^* X_k, \phi^* \eta_1, ..., \phi^* \eta_l) = \\ &= T((\phi^{-1})_* X_1, ..., (\phi^{-1})_* X_k, \phi^* \eta_1, ..., \phi^* \eta_l)\end{aligned} \tag{2.26}$$

!! Задача 2.23. Записать в явном виде преобразования компонент (k,l)-тензорного поля при заменах координат (диффеоморфизмах).

2.5 Производная Ли

Определение 2.24. Производной Ли от тензорного поля T по векторному полю X называется объект

$$\mathcal{L}_X T = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi_t)^* T \tag{2.27}$$

Докажем следующее важное свойство производной Ли – она удовлетворяет формуле Лейбница.

Лемма 2.25.

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S) = \mathcal{L}_X(T) \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_X(S), \tag{2.28}$$

где T и S – (p,q) и (p',q') тензорные поля соответственно.

Доказательство.

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S)|_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\phi_t^*\ (T \otimes S)|_{\phi_t(p)} - (T \otimes S)|_p\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\phi_t^*(T|_{\phi_t(p)}) \otimes \phi_t^*(S|_{\phi_t(p)}) - \phi_t^*(T|_{\phi_t(p)}) \otimes S|_p + \right.$$

$$\left. + \phi_t^*(T|_{\phi_t(p)}) \otimes S|_p - T|_p \otimes S|_p\right) = \lim_{t\to 0}\left(\phi_t^*(T|_{\phi_t(p)}) \otimes \frac{\phi_t^*(S|_{\phi_t(p)}) - S|_p}{t}\right) + \lim_{t\to 0}\left(\frac{\phi_t^*(T|_{\phi_t(p)}) - T|_p}{t} \otimes S|_p\right) =$$

$$= T|_p \otimes \mathcal{L}_X(S)|_p + \mathcal{L}_X(T)|_p \otimes S|_p$$

$\square$

Свойства производной Ли (отн. тензорного произведения). Является ли производная Ли тензором? Метрика, вектора Киллинга, конформные вектор Киллинга.

3 Дифференциальные формы

Лекция 7

Среди тензорных полей на многообразии особый интерес представляют антисимметричные ковариантные тензорные поля – дифференциальные формы. На пространстве таких полей определен ряд дополнительных операций.

Определение 3.1. Дифференциальная p-форма – антисимметричное тензорное поле типа $(0,p)$.

В дальнейшем будем обозначать пространство дифференциальных форм типа p на $\mathcal{M}$, как $\Omega^p(\mathcal{M})$. Кроме того

$$\Omega^{\diamond}(\mathcal{M}) = \oplus_{i=0}^{\dim \mathcal{M}} \Omega^i(\mathcal{M}) \,. \tag{3.1}$$

Из антисимметричности следует, что $\Omega^p(\mathcal{M}) = 0$ для $p > \dim \mathcal{M}$.

Пусть $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, отображение многообразий. Тогда как для функций так и для ковекторов определен pullback $\phi^* \Omega^k(\mathcal{M}_2) \to \Omega^k(\mathcal{M}_2)$

$$(\phi^* a)|_p(V_1, \ldots, V_k) = a|_{\phi(p)}(d_p\phi V_1, \ldots d_p\phi V_k) \,. \tag{3.2}$$

На пространстве дифференциальных форм определено т.н. внешнее произведение: $\wedge : \Omega^i \times \Omega^j \to \Omega^{i+j}$. А именно, для двух форм a, b положим

$$\begin{gathered}(a \wedge b)(X_1, \ldots, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_{i+j}) = \\ \frac{1}{(i+j)!} \sum_{\sigma} (-1)^{sign(\sigma)} a(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(i)}) b(X_{\sigma(i+1)}, \ldots, X_{\sigma(i+j)}) \,, \\ a \in \Omega^i(\mathcal{M}) \,, \quad b \in \Omega^j(\mathcal{M}) \,, \quad a \wedge b \in \Omega^{i+j}(\mathcal{M}) \,.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Заметим также что непосредственно из определений внешнего умножения и pullback следует

$$\phi^*(a \wedge b) = (\phi^* a) \wedge (\phi^* b) \tag{3.4}$$

Также легко проверить, что

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \,, \qquad a \wedge b = (-1)^{\deg a \deg b} b \wedge a \,.$$

!! Задача 3.2. Переписать (3.3) через компоненты. Далее, показать ассоциативность и градуированность внешнего умножения.

Умножение в градуированном пространстве, обладающее такими свойствами, называется градуировано-коммутативным, а само пространство градуировано-коммутативной алгеброй. Точнее:

Определение 3.3. Линейное пространство V называется градуированным, если $V = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ (прямая сумма подпространств). Подпространство V_i называется однородной компонентой степени (градуировки) i. Элемент $v \in V$ называется однородным, если $v \in V_i$ для некоторого i; в этом случае i степенью (градуировкой) элемента v.

Часто рассматривают $\mathbb{Z}_+$ градуировку. В общем случае V-бесконечномерно и может иметь бесконечное число ненулевых V_i. Пример: $\mathbb{C}[x]$ - многочлены от переменной x с комплексными коэффициентами. Градуировка – степень. Однородные элементы – однородные многочлены.

Градуированной алгеброй называют алгебру, которая является градуированным пространством и у которой алгебраическая операция согласована с градуировкой, т.е. $V_i V_j \subset V_{i+j}$. Пример: $\mathbb{C}[x]$ является градуированной алгеброй.

Градуированная алгебра называется градуировано-коммутативной, если для любых двух однородных элементов $vw = (-1)^{\deg v \deg w} wv$. Таким образом, дифференциальные формы образуют градуировано-коммутативную алгебру.

Пространство дифференциальных форм на многообразии $\mathcal{M}$, наделенное операцией внешнего умножения, принято называть внешней алгеброй многообразия $\mathcal{M}$.

Можно ограничиться дифференциальными формами в одной точке. Пространство таких форм также образует градуировано-коммутативную алгебру. Ее часто называют внешней алгеброй на касательном пространстве. Понимаемая как абстрактная алгебра она известна как алгебра Грассмана. Ее можно определить абстрактно, как алгебру порожденную элементами θ^i и соотношениями $\theta^i\theta^j + \theta^j\theta^i = 0$.

Геометрический смысл: рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением. Тогда (с точностью до коэффициента) объем параллелепипеда натянутого на вектора v_1, v_2, v_3 можно записать как $(\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3)(v_1, v_2, v_3)$

Задача 3.4. Доказать этот факт и обобщить на произвольную размерность.

Заметим, что в n-мерном пространстве, внешние формы степени n образуют 1-мерное подпространство. А значит всякая ненулевая n-форма дает возможность определить понятие объема даже не апеллируя к наличию невырожденного скалярного произведения. Такую форму называют формой объема. В Евклидовом пространстве имеется естественная форма объема (ее можно задать как $\pm\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$ во всяком ортонормированном базисе. Можно показать что такое определение не зависит от выбора базиса с точностью до знака).

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ можно отождествить внешние 2-формы с векторами. Действительно, если e_i ортонормированный базис, а θ^i двойственный базис то имеется внешняя 3-форма $\epsilon = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\theta^i\theta^j\theta^k$, где $\epsilon_{123} = 1$. Тогда имеется обратимое отображение из векторов в 2-формы, заданное как $(*v)(u, w) = \epsilon(v, u, w)$. Обратное отображение будем также обозначать $*$. Также имеется отождествление 1-форм и векторов, задаваемое скалярным произведением.

Задача 3.5. Используя эти отождествления показать, что векторное произведение векторов сводится к внешнему произведению, т.е. $u \times v \sim \star(v \wedge w)$

В отличие от векторного произведения, внешнее определено в пространствах всех размерностей и не требует наличия скалярного произведения. В этом смысле это гораздо более фундаментальное понятие.

3.1 Выражения в локальных координатах

В локальных координатах дифференциальные формы задаются набором функций

$$a_{i_1\dots i_n} = a(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}), \tag{3.5}$$

которые, как можно заметить, полностью антисимметричны относительно перестановки индексов.

Дифференциальные формы вида

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \qquad i_1 < i_2 < \dots i_p . \tag{3.6}$$

очевидным образом линейно независимы и образуют базис в пространстве антисимметричных p-форм в каждой точке нашего многообразия. Поэтому выражение в локальных координатах для произвольной дифференциальной формы имеет следующий вид:

$$a = \sum_{i_1<i_2<\dots i_p} a_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_{i_1,i_2,\dots i_p} \frac{1}{p!} a_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} . \tag{3.7}$$

3.2 Дифференциал де-Рама

Лекция 8

Определим оператор $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ его действием на однородные формы

$$d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} . \tag{3.8}$$

при этом 1-форма df определена выше, как градиент функции. Если операция d линейна, то тогда мы легко распространим определение на все формы в Ω^p. Операция d называется дифференциалом де-Рама.

Предложение 3.6. *Дифференциал де-Рама удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *линейность (над $\mathbb{R}$)*
2. $d^2 = 0$
3. *является градуированным дифференцированием внешнего произведения*
4. *для функций (0-форм) совпадает с дифференциалом функций.*

Наоборот, свойства 1-3 однозначно определяют дифференциал.

Кроме того,

Предложение 3.7. *Пусть $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, отображение многообразий. Тогда*

$$d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega) \tag{3.9}$$

для любой дифференциальной формы ω на $\mathcal{M}_2$. В частности, d не зависит от выбора системы координат.

Таким образом, хотя мы и определили d через выражение в локальных координатах, на самом деле, дифференциал де-Рама определен на всем многообразии.

Локально, на дифференциальные формы можно смотреть и иначе. А именно, рассмотрим алгебру порожденную образующими dx^i, удовлетворяющими соотношениям

$$dx^i dx^j + dx^j dx^i = 0\,,$$

и рассмотрим тензорное произведение этой алгебры и алгебры гладких функций на $\mathbb{R}^n$. Легко усмотреть, что это и есть алгебра дифференциальных форм на $\mathbb{R}^n$. Действительно, можно отождествить моном

$$\omega_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}$$

и дифференциальную форму

$$\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$$

Преимуществом такого подхода является, в частности, элегантное представление дифференциала d. А именно

$$d\omega = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i}\,\omega\,.$$

Т.е. в некотором смысле d можно рассматривать как векторное поле на пространстве с координатами x^i, dx^j. Однако это пространство не есть обычное многообразие (не все координаты коммутируют). Такие пространства известны как градуированные пространства или суперпространства.

Помимо определения в терминах локальных координат полезно дать инвариантное определение дифференциала:

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_0,\ldots,X_p) = \\ \sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i(\omega(X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_p)+ \\ \sum_{0\leqslant i<j\leqslant p}^{p}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,,\widehat{X}_j,\ldots,X_p)\,,\end{aligned} \tag{3.10}$$

где $X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_p$ обозначает набор из $X_1\ldots,X_p$ *без* X_i.

Задача 3.8. Доказать что определение корректно (т.е. действительно определяет отображение форм в формы) и эквивалентно данному выше.

!! Задача 3.9. Исходя из (3.10) показать, что в локальных координатах дифференциал де Рама действует как

$$d\omega_{(p)} = d\left(\frac{1}{p!}\omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right) = \frac{1}{p!}\partial_{[j}\omega_{i_1\ldots i_p]} dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} \tag{3.11}$$

3.3 Примеры

Рассмотрим привычное трехмерной пространство $\mathbb{R}^3$. Внешняя производная обобщает хорошо знакомые дифференциальные операторы, такие как градиент, дивергенция и ротор.

3.4 Комплекс де-Рама

Лекция 9

$(\Omega^\diamond(\mathcal{M}), d)$ вместе образуют коцепной компле́кс:

$$\Omega^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} ... \tag{3.12}$$

Введем понятие когомологии комплекса:

Определение 3.10. Когомологией де Рама коцепного комплекса называется

$$H^p_{dR} = \frac{\mathrm{Ker}(d : \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{M}))}{\mathrm{Im}(d : \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \to \Omega^p(\mathcal{M}))} \tag{3.13}$$

$$H^\diamond(\mathcal{M}) = \oplus_{p=0}^{\dim \mathcal{M}} H^p(\mathcal{M})\,. \tag{3.14}$$

Назовём дифференциальную форму ω – замкнутой, если $d\omega = 0$. Очевидно, все n-формы, где n– размерность многообразия, замкнуты.
Назовем дифференциальную форму ω – точной, если $\omega = d\beta$, β – дифференциальная форма на единицу меньшего ранга.
Очевидно, все точные формы замкнуты. Обратное, вообще говоря, не верно.
На этом языке когомологическая группа ранга p – множество всех замкнутых p-форм, не являющихся точными.

Лемма 3.11. ***(Лемма Пуанкаре)***
Если $\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} &H^0_{dR}(\mathcal{M}) \cong \mathbb{R} \\ &H^q_{dR}(\mathcal{M}) = 0,\ \forall q \geqslant 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered} H^0_{dR}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ker}(d : \Omega^0(\mathcal{M}) \to \Omega^1(\mathcal{M})) = \{f \in C^\infty(\mathcal{M})\,|\quad df \equiv 0\} = \\ = \{f \in C^\infty(\mathcal{M})\,|\quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \quad \forall i\} \Longrightarrow H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) - \text{множество всех постоянных функций на } \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{3.16}$$

т.е. $H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$.

Для $H^q_{dR}(\mathcal{M})$, $q > 0$ покажем, что любая замкнутая форма точна. Для этого построим такое отображение s, которое будет переводить $\Omega^{q+1}(\mathcal{M}) \to \Omega^q(\mathcal{M})$, (т.е. противоположно дифференциалу де Рама), так чтобы $s \circ d + d \circ s \equiv 1$.
Если мы построим это отображение, то тогда для любой замкнутой формы ω

$$\omega = (s \circ d + d \circ s)\omega = d(s\omega), \tag{3.17}$$

т.е. ω будет точной формой.
Действительно, такое отображение существует: если $\omega_p = \frac{1}{p!}\omega_{i_1...i_p} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$, то

$$s(\omega)|_x = \sum_{i_1<...<i_p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{q-1} \omega_{i_1...i_p}(tx) dt \right) x^{i_j} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge ... \wedge dx^{i_p} \tag{3.18}$$

В частности, для $q = 1$:

$$d(s(\omega))|_x = \int_0^1 \omega_i(tx)dtdx^i + \int_0^1 x^j \partial_i \omega_j(tx)dtdx^i = \omega(tx)|_0^1 - \int_0^1 t\frac{d}{dt}\left(\omega_i(tx)\right) + \int_0^1 x^i t \frac{\partial}{\partial(tx^j)}\omega_i(tx)dtdx^i =$$
$$= \omega|_x - \int_0^1 t\frac{d}{dt}\left(\omega_i(tx)\right) + \int_0^1 t\frac{d}{dt}\left(\omega_i(tx)\right) = \omega|_x, \tag{3.19}$$

где во втором равенстве была использована замкнутость ω: $\partial_i \omega_j = \partial_j \omega_i$.

Можно проверить, что

$$(s \circ d + d \circ s)(\omega)|_x = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^q \omega_{i_1 \ldots i_p}(tx)dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \omega|_x \tag{3.20}$$

□

Задача 3.12. Проверить (3.20).

Лемма Пуанкаре имеет важнейшее следствие. Поскольку все рассматриваемые нами пространства являются многообразиями, а каждое многообразие по своему определению локально (т.е. при рассмотрении отдельных областей) изоморфно $\mathbb{R}^n$, то локально, каждая замкнутая форма является точной.
Приведем пример из электродинамики. Пусть магнитное поле постоянно, тогда соответствующее уравнение Максвелла: $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = 0$. С другой стороны,

$$(\nabla \times E)^i = \varepsilon^{ijk}(dE)_{jk}, \tag{3.21}$$

т.е. $dE = 0$, электрическое поле – замкнутая 1-форма. Согласно Лемме Пуанкаре, как минимум в некоторой области, это поле однозначно описывается одним скаляром (электрическим потенциалом): $E = d\Phi$.
Если система стацонарна и отсутствует ток смещения, то всю информацию о электромагнитном поле можно заключить в двух скалярных потенциалах: электрическом и магнитном.

Приведем пример, где существует замкнутая неточная форма.

3.4.1 S^1

S^1 легко вкладывается в $\mathbb{R}^2$ и определяется условием $x^2 + y^2 = 1$. Очевидно, дифференциальные формы dx, dy хорошо определены всюду.
Перейдем от координат в $\mathbb{R}^2$ к координатам на самой окружности, т.е. к полярным координатам: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
Окружность можно параметризовать полярным углом θ. Единственная 1-форма, которую мы можем сконструировать – $d\theta$. Очевидно, что она замкнутая. Покажим, что она не точная.
Рассмотрим

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \text{“}d\theta''\tag{3.22}$$

Заметим, что $d\theta$ являлась бы точной, только если существовала хорошо определенная гладкая функция $\theta(x, y)$. Такая функция существует толко локально, при $x > 0$. Таким образом, эта форма является точной только локально, согласно лемме Пуанкаре.

Таким образом, когомологии S^1: $H^0_{dR}(S^1) = \mathbb{R}$, $H^1_{dR}(S^1) = \mathbb{R}$, $H^p_{dR}(S^1) = 0$ $p > 1$.

Задача 3.13. Убедиться, что когомологии тора $T^2 = S^1 \times S^1$ равны

$$\begin{cases} H^0_{dR}(T^2) \cong \mathbb{R} \\ H^1_{dR}(T^2) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ H^2_{dR}(T^2) \cong \mathbb{R} \\ H^q_{dR}(T^2) = 0, \forall q > 2 \end{cases} \tag{3.23}$$

3.4.2 Свойства когомологий де Рама

H^0 и связность, $H^{p>n} = 0$, дуальность Пуанкаре (упомянуть, что для док-ва дуальности в де Раме нужно ввести метрику), формула Кюннета. В целом, упомянуть про топологическую природу этого объекта – когомологии имеют связь с гомологиями - один из предметов изучения алгебраической топологии. Для вещественных и комплексных – эквивалентность гомологий и когомологий. Геометрический смысл гомологий.

Наконец, сказать, что сейчас мы проясним смысл последней когомологической группы и перейти к интегрированию и ориентации. Но сначала введем следующий технический прием – разбиение единицы.

3.4.3 Разбиение единицы

Определение 3.14. Разбиением единицы называется набор гладких функций ρ_α, таких что

$$\sum_\alpha \rho_\alpha = 1\,, \qquad \rho_\alpha \geqslant 0\,,$$

и в каждой точке сумма конечна (т.е. имеет конечное число отличных от нуля членов). Разбиение единицы ρ_α называется подчиненным покрытию U_α, если $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$

Разбиение единицы существует на любом "хорошем" многообразии. Если говорить математически корректно, для введения разбиения единицы требуется, чтобы многообразие было паракомпактно, т.е. из любого покрытия многообразия можно было выбрать такое подпокрытие, чтобы любая точка содержалсь в конечном числе областей (локально конечное подпокрытие).

3.5 Интегрирование и ориентация

Определение 3.15. n-мерное многообразие $\mathcal{M}$ ориентируемо, если на нем существует $\omega \in \Omega^n(\mathcal{M})$, такая что $\forall p \in \mathcal{M}$ $\omega|_p \neq 0$—нигде не обращается в ноль. ω называется формой объёма.

Определение 3.16. Диффеоморфизм $f : U \to U$ сохраняет ориентацию, если $\det(df|_x) > 0$ $\forall x \in U$.

Лемма 3.17. *$\mathcal{M}$ ориентируемо тогда и только тогда, когда существует ориентируемый атлас (U_α, h_α), т.е. такой что все фукнции переклейки: $h_\alpha \circ h_\beta$ сохраняют ориентацию.*

Доказательство.
Туда
$\exists \omega \in \Omega^n(\mathcal{M})$, $\omega|_p \neq 0$ $\forall p \in \mathcal{M}$. Рассмотрим атлас из карт (U_α, h_α), таких что в локальных координатах каждой карты $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}) > 0$.
Поскольку во всех картах компоненты формы объёма положительны, то и все функции переклейки $h_\alpha \circ h_\beta$, являющиеся диффеоморфизмами, сохраняют ориентацию: действительно, если $\psi_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta = y^i(x)$, $\{x^i\}$ – координаты на U_β, $\{y^i\}$ – координаты на U_α, то

$$\omega_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} ... \frac{\partial y^{j_n}}{\partial x^{i_n}} \omega'_{j_1 \dots j_n} = \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \omega'_{i_1 \dots i_n}. \tag{3.24}$$

Обратно, пусть на $\mathcal{M}$ задан ориентированный атлас. Рассмотрим следующие формы

$$\omega_\alpha = \rho_\alpha dx^1 \dots dx^n \,,$$

где $\sum \rho_\alpha = 1$ – разбиение единицы, подчинённое этому атласу. Тогда $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha$ нигде не обращается в ноль. $\square$

Лекция 10

Определение 3.18. Многообразие с границей (многообразие с краем) задается атласом, таким что каждая карта есть либо $\mathbb{R}^n$ либо $\mathbb{H}^n$ (веhхняя полуплоскость $\mathbb{R}^n$).

Если $\mathcal{M}$ многообразие с границей то $\partial\mathcal{M}$, многообразие склеенное из границ есть многообразие (без границы). Более того, граница ориентированного многообразия есть ориентированное многообразие. Если $dx^1 \dots dx^n$ форма задающая ориентацию то на одной из карт. То $(-1)^n dx^1 \dots dx^{n-1}$ задает ориентацию на ее границе $x^n = 0$. Можно убедиться что всякая замена координат на верхнем полупространстве, обратимая и обладающая положительным якобианом, определяет на границе обратимую замену координат с положительным якобианом.

Лемма 3.19. *Если $\mathcal{M}$ – многообразие с границей $\partial\mathcal{M}$, то ориентация на $\mathcal{M}$ однозначно канонически определяет ориентацию на $\partial\mathcal{M}$.*

Пусть на $\mathcal{M}$ задан ориентированный атлас и ω – n-форма с компактным носителем. По определению

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha f dx^1 \dots dx^n \,, \tag{3.25}$$

где ρ_α разбиение единицы, подчиненное покрытию U_α и интеграл по U_α понимается как стандартный интеграл Римана по $\mathbb{R}^n$ (с которым U_α отождествляется).

Сейчас мы сформулируем одну из важнейших теорем дифференциальной геометрии – теорему Стокса.

3.5.1 Теорема Стокса

Теорема 3.20 (Теорема Стокса)**.**
Если $\mathcal{M}$ - ориентированное и компактное n-мерное многообразие с границей $\partial\mathcal{M}$, $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathcal{M})$ - $n-1$ форма с компактным носителем, то

$$\int_{\mathcal{M}} d\alpha = \int_{\partial\mathcal{M}} \alpha \tag{3.26}$$

Если $\mathcal{M}$ – замкнута (в т.ч. компактна и не имеет границы), то $\int_{\mathcal{M}} d\alpha = 0$.

Следствие 3.21.
Если $\mathcal{M}$ – замкнута, то интеграл определяет линейное отображение из гомологий максимальього ранга в числа: $\int_{\mathcal{M}} : H^n(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$.

Действительно, если многообразие не имеет границы, то интеграл от точной формы будет равен 0. Более того, моэно замети тьм, что поскольку форма объема положительна в любой карте, то интеграл будет отличен от нуля и положителен. Таким образом, форма объема является замкнутой, но не точной формой. Существуют ли иные замкнутые, но не точные формы? Оказывается, что все они лежат в том же когомологическом классе. Это утверждение будет доказано позднее.

Следствие 3.22.
Если многообразие $\mathcal{M}$ связно, компактно и ориентируемо, то $H^n_{dR}(\mathcal{M}) \cong \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы Стокса.
Базовый случай: $\partial\mathcal{M} = 0$. Многообразие $\mathcal{M}$ не имеет границы, форма $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathcal{M})$ имеет компактный носитель.
Пусть $\sum \rho_i = 1$ – разбиение единицы, подчиненное атласу $\{(U_i, h_i)\}$.
$\alpha = \sum_i \alpha_i = \sum \alpha\rho_i$.
На U_i $\rho_i\alpha = a_1 dx^2 \wedge ... \wedge dx^n + a_2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge ... \wedge dx^n + ... a_n dx^1 \wedge ... \wedge dx^{n-1}$, где a_k – функции с компактным носителем, причем supp$(a_k)\in U_i$.

$$d(\rho_i\alpha) = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^1} - \frac{\partial a_2}{\partial x^2} + ... + (-1)^n \frac{\partial a_n}{\partial x^n}\right) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \tag{3.27}$$

По определению многообразия U_i диффеоморфно открытой области евклидового пространства, $U_i \cong \mathbb{R}^n$ и интеграл в ней является обычным интегралом по евклидовому пространству

$$\int_{U_i} \frac{\partial a_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}} ... \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_1}{\partial x^1} dx^1\right) dx^2 ... dx^n \tag{3.28}$$

Вместе с тем, каждая из функций a_k отлична от нуля только в ограниченной области, причем лежащей внутри U_i, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_1}{\partial x^1} dx^1 = a_1|^N_{-N} = 0, \tag{3.29}$$

аналогично и для других a_i.
Таким образом, если $\mathcal{M}$ не имеет границы, то $\int_{\mathcal{M}} d\alpha = 0$ $\forall\alpha \in \Omega^{n-1}_{ct}(\mathcal{M})$ – $n-1$ форм на $\mathcal{M}$ с компактным носителем.

Теперь рассмотрим случай с границей. Как мы уже показали, во внутренних областях $U_i \subseteq \mathcal{M}/\partial\mathcal{M}$, $\int d(\rho_i\alpha) = 0$.
Если U_i достигает $\partial\mathcal{M}$. Без ограничения общности можно положить, что $U_i = \{x^1 \geqslant 0\} \cap B^n(1) \subseteq \mathcal{M}$, где $B^n(1)$ – шаровая области с центром в точке на $\mathcal{M}$. Тогда

$$\int_{U_i} d(\rho_i\alpha) = \int_{x^1 \geqslant 0} \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x^1} - \frac{\partial a_2}{\partial x^2} + ... + (-1)^n \frac{\partial a_n}{\partial x^n}\Big) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [a_1]_0^\infty \, dx^2 ... dx^n + ... =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, x^2, ..., x^n) dx^2 ... dx^n + ... = \int_{U_i \cap \partial\mathcal{M}} \rho_i\alpha, \tag{3.30}$$

поскольку $(\rho_i\omega)|_{\partial\mathcal{M}} = a(0, x^2, ..., x^n) dx^2 \wedge ... \wedge dx^n$. $\square$

Более прозрачное и короткое доказательство (из Ботт-Ту)

Теорема 3.23. *(Стокс)*

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$$

Доказательство. В силу линейности утверждения относительно ω достаточно доказать его для ω с носителем в заданной U_α. В свою очередь это эквивалентно доказатеьству для случя когда U_α это либо $\mathbb{R}^n$ либо $\mathbb{H}^n$. Рассмотрим сначала случай $\mathbb{R}^n$. Тогда достаточно рассмотреть случай $\omega = f dx^1 \dots dx^{n-1}$. Имеем $d\omega = \pm \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^1 \dots dx^n$

$$\int d\omega = \pm \int dx^1 \dots dx^{n-1} \int dx^n \frac{\partial f}{\partial x^n} =$$
$$= \int dx^1 \dots dx^{n-1} [f(x^1, \dots, x^{n-l}, -\infty) - f(x^1, \dots, x^{n-l}, +\infty)] = 0 \tag{3.31}$$

Для случая $\mathbb{H}^n$ имеем

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \pm \int dx^1 \dots dx^{n-1} \int_0^\infty dx^n \frac{\partial f}{\partial x^n} =$$
$$= \int dx^1 \dots dx^{n-1} [f(x^1, \dots, x^{n-l}, -\infty) - f(x^1, \dots, x^{n-l}, 0)] =$$
$$= \mp \int dx^1 \dots dx^{n-1} f(x^1, \dots, x^{n-l}, 0) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega \tag{3.32}$$

$\square$

Теорема 3.24. А тут не ндао требовать комапктности? *Если $\mathcal{M}$ - связно и ориентируемо, то (после выбора ориентации) мы получим выделенный изоморфизм $\int_{\mathcal{M}} : H^n(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$.
Иными словами, $H^n(\mathcal{M}) \cong \mathbb{R}$.*

Тут какие-то проблемы с утверждением. По сути вычисляются когомолпгии для форм с компактным носителем но говорятся другие слова. Не понятно

Доказательство. Многообразие $\mathcal{M}^n$ – ориентируемо, ω - форма объема, $\omega \in \Omega^n(\mathcal{M})$. Можно нормировать форму объема $\int \omega = 1$.
Мы хотим показать, что любая другая n-форма (с компактным носителем, т.к. этого требует т. Стокса) на $\mathcal{M}^n$ лежит в том же когомологическом классе $[\omega]$, т.е. отличается от ω на точную форму.
Ключевая лемма:

Лемма 3.25. *$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $supp(f) \in (-1,1)^n$. Пусть $\int_{\mathbb{R}^n} f dx^1..dx^n = 0$.
Тогда существует такое гладкое отображение $u_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $supp(u_i) \subseteq (-1,1)^n$, т.ч. $f = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} u_i$ т.е $f dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ является точной формой.
Иными словами, если интеграл от формы на $\mathbb{R}^n$ равен 0, то она точна.*

Доказательство. Доказательство леммы.
Объясним логику доказательства на одномерном случае. Если $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp}(f)$ - компактен, а мы ищем g: $\frac{dg}{dx} = f$, мы можем подставить $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Тогда g будет иметь компактный носитель, когда $\int_{\mathbb{R}} f dt = 0$.
В случае многих переменных мы поступаем так. $\rho:\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, t \leqslant -1+\varepsilon, \varepsilon > 0 \\ 1, t \geqslant 1-\varepsilon \end{cases} \tag{3.33}$$

Отметим, $\rho'(t)$ имеет носитель $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$.
Определим индуктивно функции f_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ как: $f_n = f$ - задана, а

$$f_i(x) = \int_{-1}^{1} ... \int_{-1}^{1} f(x_1, ..., x_i, \chi_{i+1}, ..., \chi_n) \rho'(x_{i+1}) ... \rho'(x_n) d\chi_{i+1} ... d\chi_n \tag{3.34}$$

В частности, $f_0(x) = \rho'(x_1)...\rho'(x_n) \int f(\chi_1, ..., \chi_n) d\chi_1 ... d\chi_n = 0$ - по условию леммы.
Определим u_i через f_i следующим образом,

$$u_i(x) = \int_{-1}^{x_i} (f_i - f_{i-1})(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ... x_n) dt, \tag{3.35}$$

$\operatorname{supp}(u_i) \subseteq (-1,1)^n$, получим

$$\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big|_x = \sum_i f_i(x) - f_{i+1}(x) = f \tag{3.36}$$

Что и требовалось доказать. □

Будем пользоваться этой леммой. Пусть $\widehat{\omega}$ - другая n-форма с компактным носителем. Пусть $\sum \rho_i = 1$ - разбиение единицы, подчиненное атласу. $\widehat{\omega}_i = \rho_i \widehat{\omega}$.
Достаточно показать, что существует такого число $c_i \in \mathbb{R}$ и точная форма $d\eta_i \in \Omega^n_{ct}(\mathcal{M})$, такие что $\rho_i \widehat{\omega} = c_i \omega + d\eta_i$. Поскольку носитель этих форм может лежать в разных областях, то придется построить цепь областей $U_0, U_1, ..., U_N \cong \mathbb{R}^n$, где $U_0 = U$—носитель ω, а $U_N = V$—носитель $\widehat{\omega}$, так что $U_{i-1} \cap U_i$—связны. Поскольку наше многообразие—дифференцируемое, то по определению функции переклейки между соседними областями в этой цепочке являются диффеоморфизмами, а определитель этих диффеоморфизмов положителен (т.к. $\mathcal{M}$—ориентируемо).

Теперь возьмем $\widehat{\omega}_i = \rho_i \widehat{\omega}$ с компактным носителем в $U_{i-1} \cap U_i$, заметим, $\int_{U_i} \widehat{\omega}_i > 0$. Тогда по лемме в каждой из областей: $\widehat{\omega}_1 - a_1\omega = d\eta_1$, $\widehat{\omega}_2 - a_2\omega = d\eta_2$, ... (для некоторых $a_i \in \mathbb{R}$). Тогда $[\widehat{\omega}] = c[\omega]$, т.е. они лежат в одном и том же когомологическом классе. □

3.6 Пример топологической теории: теория Черна-Саймонса

Мы ввели интегрирование на многообразиях — ключевой элемент для записи действия физических теорий. Впрочем, мы не сможем прямо сейчас записать действие электродинамики и других теорий поля с динамическими членами – они требуют метрики, объекта, который будет превращать дифференциальные формы в векторные поля и наоборот (см. следующую лекцию). Поэтому мы рассмотрим пример топологической теории — теорию Черна-Саймонса. Она задается действием, состоящим из одного члена:

$$S = \frac{k}{4\pi} \int (A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)\,, \tag{3.37}$$

где A – 1-форма со значениями в некотором векторном пространстве, т.е $A = A_i^I dx^i T_I$, где T_I – базис этого векторного пространства, а x^i - локальные координаты на многообразии, на котором живет дифференциальная форма A. Если это векторное пространство является алгеброй (на нем дополнительно определили антисимметричную операцию), то T_I называют генераторами этой алгебры.
Физически, A является некоторым полем, например, электромагнитным потенциалом A_μ из электродинамики. С геометрической точки зрения, A – имеет смысл связности (см. следующие главы).

Лучше считать A матричнозначным и написать след. Тогда не надо объяснять про генераторы и т.п.

У многих физических полей есть калибровочная вырожденность – одной и той же физике может соответствовать разные значения потенциалов, т.е. сами потенциалы определены с точностью до некоторого преобразования, называемого калибровочным.
Если векторным пространством является алгебра }, то преобразования имеют вид

$$A \to dgg^{-1} + gAg^{-1}, \qquad g(x) \in \} \tag{3.38}$$

Для электродинамики (алгебра которой - $u(1) \cong \mathbb{R}$) эта формула упрощается до $A \to A + d\alpha$, $\alpha(x) \in \mathbb{R}$.

Стоит отметить важный факт: несмотря на то, что действие Черна-Саймонса не является калибровочно-инвариантным, его закон преобразования оказывается "хорошим". При калибровочных преобразованиях, оно получает некоторую добавку, которая оказывается целочисленной: А что многообразие компактно???

$$S \to S + n, \qquad 2\pi n \in \mathcal{Z} \tag{3.39}$$

(фактор 2π появляется при соответствующем выборе константы k).
Таким образом, функциональный интеграл от этого действия оказывается калибровочно инвариантным:

$$I = \int [dA] e^{iS} \to \int [dA] e^{iS + i2\pi n} = I \tag{3.40}$$

Член Черна-Саймонса нашел активное применение в огромном спектре тем: от теоретической физики до геометрии. Это и топологические теории поля, и трехмерная гравитация, и теория узлов, а также множество других тем. В сети есть огромное количество хороших обзоров по этим теориям.

Сильно выбегая за рамки этого курса, добавлю, что на самом деле этот член зависит только от гомотопического класса A, связности на многообразии, который связан как с геометрией многообразия, так и с его топологией.

3.7 Контракция (свертка) с векторным полем и производная Ли

Лекция 11

Для дифференицальных форм, мы сразу дадим готовую формулу для расчетов производной Ли, а потом покажем, что она эквивалентна нашему ранее данному определению. Для этого введем понятие контракции (свертки) формы с вектором.

Для p-формы ω и векторного поля X определим операцию контракции $i_X : \Omega^p \to \Omega^{p-1}$ следующим образом

$$i_X\omega(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})\,. \tag{3.41}$$

Очевидно, $(i_X)^2 = 0$.
Если компоненты форм вводятся как

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p} = \frac{1}{p!}\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}\,, \tag{3.42}$$

где компоненты считаются антисимметричными и во втором равенстве подразумевается суммирование по всем повторяющимся индексам, то для контракции имеем следующее выражение:

$$(i_X\omega)_{j_1 \dots j_{p-1}} = X^l \omega_{l j_1 \dots j_{p-1}}\,. \tag{3.43}$$

Для корректности дальнейших действий, положим действие свертки на нуль-формы (функции) равным нулем (свертка невозможна): $i_X f = 0$.
Градуированность свертки: $\forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$, $\forall \omega' \in \Omega^q(\mathcal{M})$

$$i_X(\omega \wedge \omega') = i_X\omega \wedge \omega' + (-1)^q \omega \wedge i_X\omega' \tag{3.44}$$

В терминах супермногообразия можно записать $i_X = X^i \frac{\partial}{\partial(dx^i)}$. Отметим следующее удобное представление для компонент p-формы:

$$\omega_{j_1 \dots j_p}(x) = i_{\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}} \dots i_{\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}} \omega(x, dx)\,. \tag{3.45}$$

Определение 3.26. Производная Ли в действии на дифференциальные формы задается “магической формулой Картана”:

$$\mathcal{L}_X\omega = d i_X\omega + i_X d\omega \tag{3.46}$$

Свойства производной Ли дифференциальных форм

1. Правило Лейбница для дифференциальных форм: $\forall\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$, $\forall\omega' \in \Omega^q(\mathcal{M})$

$$\mathcal{L}_X(\omega\wedge\omega') = \mathcal{L}_X(\omega)\wedge\omega' + \omega\wedge\mathcal{L}_X(\omega') \tag{3.47}$$

2. Коммутация с дифференциалом де Рама: $\mathcal{L}_X d\omega = d\mathcal{L}_X\omega$

Задача 3.27. Доказать свойства исходя из “магической формулы Картана”.

Правило Лейбница: $\mathcal{L}_X(S\otimes T) = (\mathcal{L}_X S)\otimes T + S\otimes(\mathcal{L}_X T)$

В действии на 0-формы, производная Ли равна $\mathcal{L}_X f = i_X df = X(f)$.
Для базисных 1-форм имеем

$$\mathcal{L}_V dx^i = di_V dx^i = dV\, x^i = dV^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\, dx^j\,. \tag{3.48}$$

Можно использовать $L_X\omega = di_X + i_X d$ как определение производной Ли для дифф. форм. В этом случае производную Ли можно распространить на тензорные поля других типов требуя правила Лейбница относительно тензорного произведения и перестановочности со сверткой. Проверим согласованность определения для 1-форм.

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \omega(\mathcal{L}_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) =\\ = d\omega(X,Y) + Y(\omega(X)) = (i_x d\omega)(Y) + (di_X\omega)(Y),\end{aligned} \tag{3.49}$$

где было использовано инвариантное определение дифференциала де Рама.

3.8 Тензоры. Метрика

Напомним определение тензорного поля.

Определение 3.28. (k,l)-тензором в точке $p\in\mathcal{M}$ называется мультилинейное отображение (т.е. линейное по каждому аргументу) переводящее k векторов и l векторов в точке p в $\mathbb{R}$.

Определение 3.29. Пусть в каждой точке многообразия задан (k,l)-тензор, при этом компоненты этого тензора являются дифференцируемыми функциями относительно локальных координат в любой карте. В частности, на пересечении координатных окрестностей компоненты преобразуются, как положено компонентам тензора. В этом случае говорят, что на $\mathcal{M}$ задано (k,l)-тензорное поле.

Если взять картину в целом, то логика за тензорными полями такова. В начале мы ввели базовые структуры на многообразии - функции, и их дифференцирования - векторные поля. Затем, уже исходя из соображений линейной алгебры, мы ввели сопряженное пространство - пространство ковекторов или 1-форм. В этом смысле, тензоры произвольного ранга - это следующий шаг в том же направлении — линейное по каждому аргументу отображение над несколькими векторными и ковекторными полями.
Таким образом, для проверки тензорности нужно проверить полилинейность, в частности, в случае когда коэффициенты являются функциями. Например, 1-формы являются тензорными полями:

$$\omega(fX+gY) = \omega(fX) + \omega(gY) = f\omega(X) + g\omega(Y) \tag{3.50}$$

Задача 3.30. Показать, что объект $T(X) := \mathcal{L}_X Y$ не является $(1,0)$ тензорным полем, где $Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$, т.е некорректно рассматривать производную Ли без указания по какому полю осуществляется перенос.

Преобразование компонент тензора при замене координат дается следующим образом. Если координаты тензора в координатной карте $\{x^1, ..., x^n\}$ даются как

$$T^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} = T(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, dx^{j_1}, ..., dx^{j_l}), \tag{3.51}$$

то компоненты в координатах $\{x'^1, ..., x'^n\}$ равны:

$$\begin{aligned} T'^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} = T(\frac{\partial}{\partial x'^{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x'^{i_k}}, dx'^{j_1}, ..., dx'^{j_l}) = T(\frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{m_1}}, ..., \frac{\partial x^{m_k}}{\partial x'^{i_k}} \frac{\partial}{\partial x^{m_k}}, \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} dx^{n_1}, ..., \frac{\partial x'^{j_l}}{\partial x^{n_l}} dx^{n_l}) = \\ = \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{m_k}}{\partial x'^{i_k}} \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \dots \frac{\partial x'^{j_l}}{\partial x^{n_l}} T(\frac{\partial}{\partial x^{m_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{m_k}}, dx^{n_1}, ..., dx^{n_l}), \end{aligned} \tag{3.52}$$

Таким образом, закон преобразования компонент тензора в локальных координатах выглядит как

$$T'^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}(x') = \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{m_k}}{\partial x'^{i_k}} \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \dots \frac{\partial x'^{j_l}}{\partial x^{n_l}} T^{n_1 \dots n_l}_{m_1 \dots m_k}(x), \tag{3.53}$$

Определение 3.31. Метрика g – это симметричное тензорное поле $(2,0)$- ранга, компоненты которого в любой карте являются невырожденными матрицами. Если этот тензор положительно определен, то метрика называется Римановой. Иначе – псевдоримановой.

В локальных координатах $g = g_{ij} dx^i dx^j$ – интервал в ОТО.

Ранее мы говорили о том, что пространство векторных полей изоморфно своему сопряженному – пространству 1-форм. Метрика и является этим изоморфизмом, превращающим векторные поля в ковекторные:

$$g : X \mapsto \omega = g(X, \cdot) \tag{3.54}$$

В локальных координатах это записывается как опускание индекса: $\omega_i = g_{ij} X^j$.

Наконец, перед тем как вернуться к дифференциальным формам, скажем пару слов о симметриях метрики.

Определение 3.32. Векторным полем Киллинга называется векторное поле X, т.ч. $\mathcal{L}_X g = 0$.

Векторные поля Киллинга образуют алгебру симметрий метрики.

Определение 3.33. Конформным векторным полем Киллинга называется векторное поле X, т.ч. $\mathcal{L}_X g \propto g$.

Конформные симметрии - преобразования координат, которые сохраняют форму метрики вплоть до некоторого общего множителя (вообще говоря являющегося функцией). Такие преобразования меняют длины, но сохраняют углы между векторами.

3.9 Дуальность Ходжа

Рассмотрим пространство дифференицальных форм всех рангов на $\mathcal{M}$:

$$\Omega^{\diamond}(\mathcal{M}) = \oplus_{i=0}^{\dim \mathcal{M}} \Omega^i(\mathcal{M})\,. \tag{3.55}$$

Каждое $\Omega^i(\mathcal{M})$ $\forall i$ является векторным пространством размерности $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$. Поэтому должен существовать изоморфизм $\Omega^i(\mathcal{M}) \rightleftarrows \Omega^{n-i}(\mathcal{M})$. Этот изоморфизм называется дуальностью Ходжа. Для алгебры дифференциальных форм для построения этого изоморфизма в явном виде требуется метрика.

Определение 3.34. Пусть $(\mathcal{M}, g)$ - n-мерное (псевдо-)Римановое многообразие. Тогда действие дуальности Ходжа на p-формы определяется как

$$\begin{aligned} \star\colon \Omega^p(\mathcal{M}) \quad &\to \quad \Omega^{n-p}(\mathcal{M}) \\ \omega \quad &\mapsto \quad \star\,\omega \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\star\,\omega = \frac{1}{p!(n-p)!}\epsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n} g^{i_1 j_1}\ldots g^{i_p j_p}\omega_{j_1\ldots j_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}\,, \tag{3.57}$$

где $\epsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n}$ – полностью антисимметрический объект. Поскольку ω, $\star\,\omega$, а также (обратная) метрика являются тензорами, то и $\epsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n}$ – тоже должен быть тензором. Нам нужна инвариантная запись полностью антисимметричного символа.

Мы знаем, что в Евклидовом пространстве этот объект - n-мерная матрица $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$, состоящая только из ± 1 и нулей. Она удовлетворяет следующему свойству:

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n}\varepsilon^{j_1\ldots j_p i_{p+1}\ldots i_n} = p!(n-p)!\delta^{j_1}_{[i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\ldots\delta^{j_p}_{i_p]}, \tag{3.58}$$

в частности,

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\varepsilon^{i_1\ldots i_n} = n! \tag{3.59}$$

Задача 3.35. Доказать (3.58) и (3.59).

Потребуем, чтобы это свойство (точнее его аналог, учитывающий сигнатуру метрики - см. далее) выполнялось для любого пространства.

Рассмотрим, как поднимаются индексы у $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$:

$$\varepsilon^{i_1\ldots i_n} = g^{i_1 j_1}\ldots g^{i_n j_n}\varepsilon_{j_1\ldots j_n} = g^{-1}\varepsilon_{i_1\ldots i_n} \tag{3.60}$$

Таким образом,

$$\varepsilon^{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = g^{-1}\sum_{i_1,\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = n! g^{-1}, \tag{3.61}$$

Мы получили правильный вид с точностью до детерминанта метрики. Если мы включим его в определение полностью антисимметричного тензора, то мы получим желаемое условие:

$$\epsilon_{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}, \qquad\qquad \epsilon_{i_1\ldots i_n}\epsilon^{i_1\ldots i_n} = \pm n! \tag{3.62}$$

Задача 3.36. Проверить (3.62). Проверить

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_n} \epsilon^{j_1 \ldots j_p i_{p+1} \ldots i_n} = \pm p!(n-p)! \delta^{j_1}_{[i_1} \delta^{j_2}_{i_2} \ldots \delta^{j_p}_{i_p]}, \tag{3.63}$$

где знак $\pm$ зависит от сигнатуры метрики: $+1$, если метрика положительно определена, т.е. Риманова, и -1, если метрика определена отрицательно, как в ОТО (псевдо-Риманова).

!! Задача 3.37. Проверить важнейшее свойство дуальности Ходжа:

$$\star\star\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega, \qquad \omega \in \Omega^p(\mathcal{M}) \tag{3.64}$$

!! Задача 3.38. Действие электродинамики. В классической теории поля действие электродинамики на фоне искривленного пространства, из которого выводятся уравнения Максвелла, имеет следующий вид

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|g|}\; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{3.65}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - антисимметричный тензор поля.
Показать, что на языке дифференциальных форм это действие переписывается как

$$S = -\frac{1}{2} \int F \wedge \star F\,, \tag{3.66}$$

где $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

!! Задача 3.39. Кусок из теории де Рама как задача (to be given as additional material, 29.11.2018)

4 Расслоения

Лекция 12

На практике часто приходится иметь дело с многообразиями, которые можно представить как $M_1 \times M_2$ (прямое произведение). Хорошим примером из физики может служить конфигурационное пространство объединенной системы (равное произведению конфигурационных пространств этих систем). Более того, отображениям $M_1 \to M_2$ удобно придать геометрический смысл поверхностей в $M_1 \times M_2$. В случае $M_1 \times M_2$ мы имеем два отображения (естественные проекции) $\pi_k : M_1 \times M_2 \to M_k$.

Вместе с тем, в физике встречаются похожие ситуации, в которых приходится иметь дело не с прямым произведением, а полупрямым. Поясним. Рассмотрим касательное расслоение TS^2 над S^2. Если ограничиться координатной окрестностью U на S^2, то на $\pi^{-1}U$ можно ввести координаты x^1, x^2, y^1, y^2 так что паре $p, V_p \in T_pM$ отвечают координаты $x^1(p), x^2(p), y^1 = dx^1(V_p), dx^2(V_p)$ (иными словами, y_1, y_2 — компоненты вектора V_p). Таким образом, выбор координат отождествляет $\pi^{-1}U$ с $U \times \mathbb{R}^2$. Другими словами, локально наше TM устроено как прямое произведение. Однако глобально это не так. *Ежа нельзя причесать.*

В частности, отличие TM от прямого произведения становится наиболее наглядно, если попытаться придать векторному полю на M смысл вектор-функции (т.е. отображению из M в некоторое векторное пространство). Локально это возможно. Действительно, выбрав координаты на U, мы можем просто записать $V \in \Gamma(TM)$ как вектор функцию $V^i(x^1, x^2), i = 1, 2$. Однако, глобально так не получится. Тем не менее, векторное поле можно понимать как отображение $V : M \to TM$, удовлетворяющее $\pi \circ V = id$. Такие отображения называются **сечениями**. В случае, если мы имеем дело с прямым произведением, задать сечение — тоже самое, что задать отображение $M_1 \to M_2$. В общем случае это не так. При этом, сечение все равно можно понимать как поверхность в TM, которая проекцией отображается диффеоморфно в M.

Пришло время ввести формальное определение и обозначения.

Определение 4.1. Локально тривиальным расслоением (далее расслоение) называется набор (E, B, π), где E, B-многообразия (тотальное пространство, база), $\pi : E \to B$ дифференцируемое отображение (естественная проекция). При этом существует покрытие U_α, такое что имеется диффеоморфизм $\phi_\alpha : \pi^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times F$, где F многообразие (слой), и такой что $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi$, где $\pi_1 : U_\alpha \times F \to U_\alpha$ проекция на первый сомножитель.

Очевидно, что рассмотренное выше TM является расслоением, где M-база, $\mathbb{R}^n$-слой а TM-тотальное пространство.

Расслоение называется тривиальным, если существует диффеоморфизм $\phi : E \to B \times F$, такой что $\pi_1 \circ \phi = \pi$. Другими словами E является прямым произведением.

Определение 4.2. Сечением расслоения $E \to B$ называется отображение $s : B \to E$, удовлетворяющее $\pi \circ s = id$.

Понятие сечения является обобщением понятия функции со значением в некотором пространстве (например вектор фунцкии). Как мы уже видели векторные поля (необходимые в физике) в общем случае не являются вектор-функциями, а являются сечениями касательного расслоения.

Рассмотрим касательное пространство T_pE в точке p. Через точку p проходит подмногообразие $\pi^{-1}(\pi(p))$. Касательно пространство к этому многообразию в p называется вертикальным подпространством T_pE. Важно заметить, что горизонтальное подпространство естественным образом не задано (в отличие от случая когда мы имеем дело с прямым произведением). Выбор локальной тривиализации фиксирует и горизонтальное подпространство, однако оно зависит от выбора тривиализации. В общем случае говорят, что если задано правило, сопоставляющее каждой точке подпространство, дополнительное к вертикальному подпространству, то на расслоении задана связность (связность Эресмана)).

Среди расслоений важный и относительно простой класс расслоений образуют векторные расслоения. Это расслоения у которых слоем является векторное пространство а функции переклейки являются линейными преобразованиями. Более формально:

Определение 4.3. Векторным расслоением называется набор (E, B, π), где E, B, F-многообразия (тотальное пространство, база, слой), $\pi : E \to B$ отображение на (естественная проекция). При этом выполнены следующие условия

- Существует покрытие U_α такое что: $\pi^{-1}U_\alpha \cong U_\alpha \times F$, а F – векторное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).
- Существует (U_α, ϕ_α) где $\phi_\alpha : \pi^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times F$ и $\pi'(\phi_\alpha x) = \pi x$ где π' стандартная проекция на первый сомножитель в $U_\alpha \times F$.
- В любой точке $p \in (U_\alpha \cap U_\beta)$ выполнено $\phi_{\alpha\beta} \in GL(F)$, где $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$.

Далее мы будем рассматривать векторные расслоения.

Примеры. Самый простой пример – это тривиальное расслоение, т.е. расслоение, для которого $E = B \times F$. Для такого расслоения все аксиомы автоматически выполняются. Ещё пример (в общем случае нетривиальный) – касательное расслоение над многообразием. Выберем $E = T\mathcal{M}$, $B = \mathcal{M}$, π-отображение, сопоставляющее касательному вектору в точке саму точку. Все аксиомы оказываются очевидным образом выполнены, если в качестве покрытия U_α взять покрытие базы координатными картами, а также взять $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в качестве базиса в кайдом слое. В частности, то что $\phi_{\alpha\beta} \in GL(F)$ очевидно вытекает из закона преобразования компонент вектора на перекрытии карт.

Определение 4.4. Сечением расслоения (E, B, π) называется отображение $\sigma : B \to E$ такое что $\pi\sigma = \mathrm{id}$. Обозначается: $\sigma \in \Gamma(T\mathcal{M})$.

В случае если расслоение тривиально, понятие сечения совпадает с понятием векторнозначной функции. В общем случае, сечение является функцией только локально.

Задача 4.5. Показать, что векторное поле на $\mathcal{M}$ является сечением $T\mathcal{M}$.

Определение векторного расслоения гарантирует существование тривиализации (U_α, ϕ_α), удовлетворяющей аксиомам векторного расслоения. Можно показать, что если задано покрытие и набор функций $\phi_{\alpha\beta}$, заданных на перекрытии окрестностей и удовлетворяющих определенным условиям совместности, то расслоение определено с точностью до изоморфизма. Точнее:

Предложение 4.6. *Пусть на базе B задано покрытие U_α и функции $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(F)$, удовлетворяющие*

$$\phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\alpha} = \mathrm{id}\,, \qquad \phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\gamma\alpha} = \mathrm{id}\,, \tag{4.1}$$

в любой точке $U_\alpha \cap U_\beta$ и $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Тогда существует единственное (с точностью до изоморфизма) расслоение (E, B, π) и тривиализация U_α, ϕ_α такие что $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$

Доказательство. Чтобы построить раслоение по заданному покрытию и функциям склейки рассмотрим множество, являющееся несвязным обьединением $\cup_\alpha U_\alpha \times F$. Введем на этом множестве отношение эквивалентности, а именно пары $(p, v) \in U_\alpha \times F$ и $(p', v') \in U_\beta \times F$ эквивалентны если $p = p'$ как точки B и $v' = \phi_{\beta\alpha} v$. То что введенное отношение эквивалентности корректно следует из (4.1). Определим E как фактор множество. Можно убедиться что E естественным образом является многообразием. Естественная проекция $\pi : E \to B$ сопоставляет классу эквивалентности с представителем $(p, v) \in U_\alpha \times F$ точку $p \in U_\alpha \subset B$. Отображение, сопоставляюее классу эквивалентности его представителя в $U_\alpha \times F$ (если его проекция принадлежит U_α) очевидно корректно определено и определяет тривиализацию расслоения (E, B, π). Нетрудно убедиться, что соответствующие функции переклейки действительно совпадают с $\phi_{\alpha\beta}$.

Пусть E' и U_α, ϕ'_α другое расслоение и тривиализация, соответственно, удовлетворяющие условию предложения. Рассмотрим отображние $h : E' \to E$ определенное следующим образом: если $\phi'_\alpha x = (p = \pi x, v \in F)$ тогда $hx \in E$ – класс эквивалентности элемента $(p, v) \in U_\alpha \times F$ где U_α какая либо окрестность содержащая p. Очевидно, что h корректно определено и является гомоморфизмом. Кроме того, нетрудно построить гомоморфизм h^{-1}. Тем самым h является изоморфизмом.

□

5 Связности

5.1 Связности в векторных расслоениях

Так же как и в случае тензорных полей, имеется произвол в определении дифференцирования сечения векторного расслоения.
Мы хотим, чтобы дифференцирование, во-первых, не зависело от выбора координат (т.е. являлось тензором). У нас уже есть пример операции дифференцирования, заданной в инвариантной форме, – производная Ли. Вместе с тем, для определения производной Ли нужно заранее выбрать векторное поле, по которому будет осуществляться перенос (напомню, что объект $\mathcal{L}T$ зависит от выбора координат, т.е. не является тензорным). Это неудобно. Поэтому вторым требованием будет возможность определить производную без привязки к полю (т.е. линейность по этому аргументу).

Чтобы однозначно (независимо от выбора тривиализаци) определить дифференцирования необходимо задать на векторном расслоении дополнительную структуру – ковариантное дифференцирование или связность. Пусть (E, B, π) векторное расслоение над B и $\Gamma(E)$ пространство глобальных сечений.

Предложение 5.1. *Связностью (ковариантным дифференцированием) в E называется полуторалинейное отображение $\nabla : \Gamma(TB) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, $\nabla : (X, s) \mapsto \nabla_X s$, удовлетворяющее следующим условиям:*

- $\nabla_{fX+gY} s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s, \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(B)$
- $\nabla_X(s + s') = \nabla_X s + \nabla_X s'$
- $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + X(f)s \qquad$ *(Правило Лейбница)*

Линейность по X позволит нам отвязать его от определения: рассмотрим ∇s. Очевидно, что по своей конструкции

$$\nabla s : \Gamma(TB) \to \Gamma(E), \qquad X \mapsto \nabla s(X) := \nabla_X s\,, \tag{5.1}$$

т.е. $\nabla s \in \Gamma(T^*B \otimes E)$. Тогда правило Лейбница без векторного поля X записывается как

$$\nabla(fs) = sdf + f\nabla s \tag{5.2}$$

Для наглядности перейдем к координатному рассмотрению. Как следует из линейности определения, чтобы задать связность, достаточно определить ее для базисных сечений $\{e_a\}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\nabla_X(s^a e_a) = \nabla_{X^i\partial_i}(s^a e_a) = X^i\nabla_{\partial_i}(s^a e_a) = X^i\nabla_i(s^a e_a)\\ = X^i\left((\partial_i s^a)e_a + s^a\nabla_i(e_a)\right)\,.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Заметим, что по нашей конструкции, $\nabla_i(e_a) \in \Gamma(E)$. Наконец, поскольку E – векторное расслоение, то любое сечение должно раскладываться по базису:

$$\nabla_i e_a := \Gamma^b_{ia} s_b, \tag{5.4}$$

где $\Gamma^b_{ia} \in \mathbb{R}$ называется символом Кристоффеля связности ∇ в локальных координатах $\{x^i\}$.
Приведем примеры. Если в нашем расслоении слоем является $\mathbb{R}^1$, то индексы a, b пробегают одно значение, и $\Gamma^b_{ia} \equiv \Gamma_i$. Например, электродинамика со скалярным полем.
Если мы работаем с касательным расслоением, то различать индексы слоя a, b и индексы базы i, не имеет смысла. Тогда имеет смысл запись "Γ^k_{ij}".
Запись $\nabla^b_{ia} = \delta^b_a \partial_i + \Gamma^b_{ia}$ назовем оператором ковариантной производной (в локальных координатах).
Пусть $\nabla s = 0$, или в локальных координатах $\partial_i s^a +$

Задача 5.2. Получить закон преобразования компонент связности про переходе к другому локальному базису сечений. Другим координатам на B.

Стандартные операции линейной алгебры (прямая сумма, взятие сопряженного пространства, тензорное произведение векторных пространств) непосредственно обобщаются на векторные расслоения над одной базой. А именно соответствующие операции проводятся послойно, т.е. в слое над каждой точкой базы. В частности отталкиваясь от касательного расслоения можно определить различные тензорные расслоения (в то же время все тензорные расслоения есть расслоения ассоциированные с касательными). В частности, расслоение дифференциальных форм дается $\Lambda(B) = T^*B \oplus T^*B \wedge T^*B \oplus \ldots$. Также удобно рассматривать расслоение $E \otimes \Lambda(B)$, где Λ это расслоение дифференциальных форм. Сечения $E \otimes \Lambda(B)$ можно поточечно умножать (в смысле внешнего умножения) на дифференциальные формы.

Удобно определить ковариантное дифференцирование в терминах дифференциальных форм со значением в векторном расслоении. Тогда ковариантный "дифференциал" это отображение $\Gamma(E \otimes \Lambda^p(B)) \to \Gamma(E \otimes \Lambda^{p+1}(B))$ удовлетворяющее

$$\nabla f\psi = df\psi + (-1)^p f\nabla\psi\,, \qquad f \in \Lambda^p(B)\,. \tag{5.5}$$

Для векторного поля V имеем $\nabla_V \psi = \langle V, \nabla\psi\rangle$. Удобно рассматривать коэффициенты связности как 1-форму, $\nabla e_a = \Gamma^b_a e_b = dx^i \Gamma^b_{ia} e_b$. Важно отметить, что коэффициенты $\Gamma^b_{ia} e_b$ вообще говоря не определяют сечение расслоения $Hom(E, E) \otimes \Lambda^1(B)$. Если же Γ и Γ' две связности то компоненты $\Delta^b_{ia} e_b = \Gamma^b_{ia} e_b - {\Gamma'}^b_{ia} e_b$ являются компонентами глобального сечения $Hom(E, E) \otimes \Lambda^1(B)$.

Если задана связность, то можно определить отображение $R : \mathrm{Vect}_B \times \mathrm{Vect}_B \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$:

$$R(V, W)\psi = \nabla_V \nabla_W \psi - \nabla_W \nabla_V \psi - \nabla_{[V,\,W]}\psi \tag{5.6}$$

Задача 5.3. Показать что данное отображение линейно (над функциями) по всем аргументам.

Используя результат задачи можно показать, что R есть глобально определенная 2-форма со значением в $Hom(E, E)$, т.е. элемент $\Gamma(E \otimes E^* \otimes \Lambda^2(B))$. nabla

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА