А.В.Разгулин, М.В.Федотов

ПОДГОТОВКА К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ В МГУ АЛГЕБРА

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Настоящее пособие составлено для подготовительных курсов факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова на основе задач письменных вступительных экзаменов по математике в МГУ за 1977-1999 годы. Может быть полезно абитуриентам при подготовке к поступлению как на факультет ВМиК, так и на другие факультеты МГУ.

The James and Table	
СОДЕРЖАНИЕ	
§1. Стандартные тригонометрические уравнения	6
§2. Простейшие уравнения и неравенства с модулями, дробями и	11
радикалами	
§3. Стандартные текстовые задачи	18
§4. Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными	29
функциями	
§5. Тригонометрия - 2	39
§6. Задачи с радикалами.	43
§7. Разложение на множители и расщепление	48
§8. Раскрытие модулей в смешанных уравнениях и неравенствах	58
§9. Обратные тригонометрические функции. Тригонометрические	65
неравенства	
§10. Эквивалентные преобразования в смешанных уравнениях и	70
неравенствах	
§11. Нестандартные текстовые задачи	78
§12. Расположение параболы в зависимости от параметра. Теорема Виета	88
§13. Полезные преобразования и замены переменных	95
§14. Использование графических иллюстраций	107
§15. Использование различных свойств функций	112
§ 16. Метод оценок	117
§17. Получение следствий и логические задачи	124

138

146

160

§ 18. Задачи с целыми числами

Ответы

§19. Задачи последних лет, не вошедшие в §§1-18

Настоящее пособие составлено для подготовительных курсов факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова на основе задач письменных вступительных экзаменов по математике в МГУ за 1977-1999 годы. При составлении пособия авторы придерживались идеи циклического расположения задач: сначала идут простые стандартные задачи по всем разделам алгебры, затем более сложные стандартные задачи по тем же разделам. И, наконец, параграфы с нестандартными задачами составлены так, что в них есть задачи на повторение всех изученных ранее методов и формул. Идея такого расположения материала принадлежит Сергееву И.Н.

После номера каждой задачи в скобках идет ссылка - где была данная задача. Сначала идет сокращенное название факультета, затем год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2 - это значит, что эта задача была на весенней олимпиады; на ВМиК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения - одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМиК-98.3) - означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМиК, третьим номером в варианте, а (м/м-97(2).1) - означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико- математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге:

м/м - механико- математический факультет,

ВМиК - факультет Вычислительной математики и кибернетики,

физ - физический факультет,

хим - химический факультет,

ВКНМ - Высший колледж наук о материалах,

биол - биологический факультет,

почв - факультет почвоведения,

геол - геологический факультет (.ОГ - отделение общей геологии),

геогр - географический факультет,

-экон - экономический факультет (.К - отделение экономической кибернетики, .М - отделение менеджмента, .В - вечернее отделение),

псих - факультет психологии,

фил - философский факультет,

филол - филологический факультет,

соц - социологический факультет,

ИСАА - Институт стран Азии и Африки.

Данное пособие может быть полезно абитуриентам при подготовке к поступлению как на факультет ВМиК, так и на другие факультеты МГУ.

При решении предлагаемых в пособии задач дополнительно можно использовать следующую литературу:

- 1. Мельников И.И., Сергеев И.Н. "Как решать задачи вступительного экзамена по математике".
- 2. Сергеев И.Н. "1000 вопросов и ответов. МАТЕМАТИКА: учебное пособие для поступающих в ВУЗы: М.: Книжный дом "Университет", 2000.
- 3. Будак А.Б., Щедрин Б.М. "Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы".
- 4. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. "Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. Избранные вопросы элементарной математики".
- 5. Якушева Е.В., Попов А.В., Якушев А.Г. "Математика. Ответы на вопросы. Устный экзамен, теория и практика".
 - 6. Ткачук В.В. "Математика абитуриенту".
- 7. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. "Задачи вступительных экзаменов по математике".
- 8. Мельников И.И., Олехник С.Н., Сергеев И.Н. "Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями (1993 1997 гг.)".
- 9. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1998 г.).- М., Механико-математический факультет МГУ, 1998.
- 10. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1999 г.).- М., Механико-математический факультет МГУ, 1999.
- 11. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1997 1998 гг.).- М., факультет ВМиК МГУ, 1999.
- 12. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1999 г.).- М., факультет ВМиК МГУ, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ.

§1. Стандартные тригонометрические уравнения
§2. Простейшие уравнения и неравенства с модулями, дробями и радикалами
§3. Стандартные текстовые задачи
§4. Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями
§5. Тригонометрия – 2
§6. Задачи с радикалами
§7. Разложение на множители и расщепление
§8. Раскрытие модулей в смешанных уравнениях и неравенствах
§9. Обратные тригонометрические функции. Тригонометрические неравенства
§10. Эквивалентные преобразования в смешанных уравнениях и неравенствах
§11. Нестандартные текстовые задачи
§12. Расположение параболы в зависимости от параметра. Теорема Виета
§13. Полезные преобразования и замены переменных95
§14. Использование графических иллюстраций107
§15. Использование различных свойств функций
§16. Метод оценок
§17. Получение следствий и логические задачи 124
§18. Задачи с целыми числами
§19. Задачи последних лет, не вошедшие в §§1-18
Ответы

§1. Стандартные тригонометрические уравнения.

В этом параграфе собраны простейшие тригонометрические уравнения. Для их решения достаточно знать основные тригонометрические формулы. Все тригонометрические уравнения решаются сведением к одному из четырех простейших:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z, \text{ если } |a| \leq 1 \\ \emptyset, \text{ если } |a| > 1 \end{array} \right.$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z, \text{ если } |a| \leq 1 \\ \emptyset, \text{ если } |a| > 1 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$$

Эти формулы необходимо знать наизусть! Кроме того жела*тельно* знать наизусть следующие частные случаи этих формул:

 $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z; \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z; \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

Следующие формулы необходимы для преобразования уравнений к простейшим:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

 $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgxtgy}, \quad tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x},$$
$$1 + tg^2x = \frac{1}{1 + tg^2x}, \quad 1 + ctg^2x = \frac{1}{1 + tg^2x}$$

 $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

При решении квадратных уравнений относительно различных тригонометрических выражений можно посоветовать вводить новые переменные. Только НЕ ЗАБЫВАЙТЕ:

- следить за областью определения и областью значений новых переменных;
- возвращаться к старым переменным для записи окончательного ответа.
- 1. (физ-77.1) Решить уравнение $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.
- 2. (фил-85.1) Найти все решения уравнения $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$, удовлетворяющие условию -5 < x < -3.
- 3. (ВМиК-80.2) Решить уравнение $\sin 2x \sqrt{3}\cos x = 0$.
- 4. (хим-95(1).2) Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $0 < \alpha < \pi/2$.
- 5. (ВМиК-80.1) Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = 1/3$.
- 6. (физ-87.3) Известно, что $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \pi < \alpha < \frac{4\pi}{3}$. Найти $\cos \alpha$ и $\lg \frac{\alpha}{2}$.
- 7. (фил-88.3) Найти все решения уравнения $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$, каждое из которых удовлетворяет условию |x| < 1.
- 8. (псих-86.1) Найти ${
 m tg}^2 2 \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{11}}$.
- 9. (почв-98.2) Найти $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\lg\alpha=\frac{3}{4}$ и что $\pi<\alpha<2\pi$. Установить без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ или $\frac{2}{7}$.

10. (ВМиК-91.2) Найти все решения уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = 1.$$

- 11. (био-81.2) Решить уравнение $\cos(2x \frac{7\pi}{2}) = \sin(4x + 3\pi)$.
- 12. (ВМиК-94(1).2) Вычислить $\cos 2(\alpha \frac{\pi}{4})$, если $tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.
- 13. (экон.K-80.4) Решить уравнение $\sin(\frac{\pi}{3} x) + \cos(\frac{\pi}{6} x) = \sqrt{3}$.
- 14. (почв-96(1).1) Найдите $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$, если известно, что $\sin \alpha = -3/5$, а $\lg \alpha > 0$.
- 15. (геол-91.1) Решить уравнение $\sin 7x \cos x = \sin 6x$.
- 16. (хим-96.1) Решить уравнение $\cos 4x + \sin x \sin 3x = 0$.
- 17. (геол-94(1).4) Решить уравнение $\sin 5x = \sin 5$.
- 18. (физ-93.2) Решить уравнение $\cos 5x = \cos(5+x)$.
- 19. (физ-83.1) Решить уравнение $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.
- 20. (физ-89.1) Решить уравнение $\sin 5x \sin x = \sqrt{8}\cos 3x$.
- 21. (физ-96.1) Решить уравнение $\cos 3x \sin \left(7x \frac{\pi}{2}\right) = \cos 5x$.
- 22. (физ-97(2).1) Решить уравнение $\cos 9x \cos 7x = \sqrt{2} \sin x$.
- 23. (геол-94.4) Решить уравнение $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.
- 24. (reorp-78.2) Решить уравнение $\cos x 2\cos 3x + \cos 5x = 0$.
- 25. (хим-78.1) Решить уравнение $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x$.
- 26. (ИСАА-91.3) Решить уравнение

$$\cos^2(45^o + x) = \cos^2(45^o - x) + \sqrt{5}\cos x.$$

- 27. (физ-94(1).1) Решить уравнение $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.
- 28. (био-94.3) Найти все решения уравнения $3 ext{tg}^2 \left(\pi x \frac{\pi}{8} \right) = 1,$ удовлетворяющие условию 3/2 < x < 3.
- 29. (экон.-89.4) Найти все решения уравнения $\ensuremath{\mathrm{tg}}(4\sin x) = \sqrt{3},$ удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$
- 30. (геогр-91.1) Решить уравнение $2\cos^2 x 7\cos x = 2\sin^2 x$.
- 31. (геол-87.2) Решить уравнение $4\sin^2 x + 4\cos x = 1$.
- 32. (псих-90.1) Решить уравнение

$$4\sin^2\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \cos(2x - \pi) + \sqrt{15} - 4 = 0.$$

- 33. (физ-96(2).1) Решить уравнение $4 \sin x + \cos 2x + 3 = 0$.
- 34. (хим-96(1).2) Решить уравнение $5 + \cos 2x = 6 \cos x$.
- 35. (экон.-87.1) Решить уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x 3 = 0$.
- 36. (ВМиК-94.1) Решить уравнение $12\sin 5x = \cos 10x + 7$.
- 37. (геогр-89.1) Решить уравнение $\sin(x-\frac{\pi}{3}) = \cos(2x-\frac{2\pi}{3})$.
- 38. (экон.В-98.3) Решить уравнение $\cos(2x^2) \sqrt{3}\cos(x^2) 2 = 0.$
- 39. (ВМиК-85.3) Решить уравнение

$$4 - \cos[2\pi(13x + 9)^2] = 5\sin[\pi(13x + 9)^2].$$

- 40. (экон.К-84.3) Решить уравнение $3-12\sin^2x-2\cos 4x=-\frac{5}{1+\lg^2x}$.
- 41. (геол-98.3) Решить уравнение $5 + \frac{1}{\sin^2(3x)} = 7 \operatorname{ctg}(3x)$.
- 42. (хим-83.1) Решить уравнение

$$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x).$$

43. (ВМиК-84.2) Решить уравнение

 $9\cos 3x \cdot \cos 5x + 7 = 9\cos 3x \cdot \cos x + 12\cos 4x.$

44. (псих-82.3) Решить уравнение
$$2\sin x - \sqrt[4]{3} = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{12})\sqrt{\sin x}$$
.

45. (геол-93.2) Решить уравнение
$$\sqrt{1-\cos^2 x} + 6\cos 2x = 0$$
.

46.
$$(M/M-89.1)$$
 Решить уравнение $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.

47. (м/м-79.1) Найти все решения уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \ge 0$.

48. (геол-80.2) Решить уравнение
$$\frac{2-3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$$

49. (экон.-85.2) Решить уравнение $2 \sin x = 3 \cot x$.

50. (геол.ОГ-78.1) Решить уравнение
$$\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$$
.

51. (физ-84.1) Решить уравнение
$$tgx + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0.$$

52. (псих-77.1) Решить уравнение
$$3 tg^2 x - 8 \cos^2 x + 1 = 0$$
.

53. (био-85.2) Найти все корни уравнения

$$5\cos 2x + 7\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

54. (био-88.1) Найти наименьший положительный корень уравнения

$$8\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{4} - 6\cos x + 1 = 0.$$

55. (ВМиК-83.2) Решить уравнение

$$\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x \cos x - 1} = 1.$$

§2. Простейшие уравнения и неравенства с модулями, дробями и радикалами.

В этом параграфе собраны простейшие задачи с модулями, дробями и радикалами (корнями различной степени), приводимые к линейным и квадратным уравнениям и неравенствам, а также задачи на метод интервалов.

В задачах с корнями необходимо помнить, что возведение левой и правой частей уравнения в четную степень представляет из себя эквивалентное преобразование только для неотрицательных значений этих частей. В задачах на сравнение радикалов надо группировать выражения так, чтобы слева и справа были положительные величины, после чего возводить их в соответствующую степень.

Напомним определение модуля числа а:

$$|a|=\left\{egin{array}{l} a,\ {
m ecnn}\ a\geq 0\ -a,\ {
m ecnn}\ a\leq 0. \end{array}
ight.$$

Уравнение вида |f(x)|=g(x) можно решить двумя способами. 1-й способ: Уравнение |f(x)|=g(x) эквивалентно совокупности двух систем

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0. \end{array} \right. \qquad \text{if} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=-g(x), \\ f(x)\leq 0. \end{array} \right.$$

2-й способ: Уравнение |f(x)| = g(x) эквивалентно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Выбор способа решения зависит от вида функций f(x) и g(x). Если проще функция f(x) (например, f(x) - линейная, а g(x) - квадратичная), то надо решать задачу 1-м способом, иначе задачу решать надо 2-м способом.

Часто задачи с модулями имеют следующий вид: $|f(x)|+|g(x)|=f(x)\pm g(x)$ или $|f(x)|=\pm f(x)$, $|f(x)|\geq f(x)$, $|f(x)|\leq f(x)$ и т.д. и т.п. Такого типа задачи лучше решать не стандартными способами, а, например, так:

$$|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x)\Longleftrightarrow\left\{egin{array}{l} f(x)\geq0,\ g(x)\geq0. \end{array}
ight.$$

$$|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0.$$

Чтобы решить квадратное уравнение или неравенство надо уметь находить корни квадратного трехчлена вида ax^2+bx+c . Если дискриминант $D=b^2-4ac\geq 0$, то корни равны $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, если же D<0, то корней нет.

При решении рациональных неравенств (неравенство называется рациональным, если левая и правая его части есть суммы отношений многочленов) надо применять метод интервалов. Для этого неравенство приводится к виду, например,

$$\frac{(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\dots(x-x_k)^{p_k}}{(x-x_{k+1})^{p_{k+1}}(x-x_{k+2})^{p_{k+2}}\dots(x-x_n)^{p_n}} \ge 0$$

При этом каждая скобка обязательно должна иметь вид $(x-x_k)$, а не (x_k-x) . И, вообще, полезно следовать следующему правилу: ПРИ СТАРШЕЙ СТЕПЕНИ В УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ ДОЛЖЕН БЫТЬ ЗНАК ПЛЮС. Затем рисуется числовая ось, расставляются на ней все корни x_k , при этом точки стоящие в знаменателе выкалываются, а точки стоящие в числителе выкалываются, если неравенство строгое. После этого рисуем змейку, начиная справа сверху, и переходим через ось, если кратность корня нечетная, и остаемся на той же стороне, если кратность корня четная.

1. (псих-84.1) Вычислить, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{3(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}):480}{(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot10^{-2}}{0,7}+0,3\right).$$

- 2. (ВМиК-92.1) Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[5]{\frac{1991}{1992}}$ больше?
- 3. (геол-94(1).1) Какое из чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?
- 4. (геол.ОГ-82.1) Определить, какое из следующих чисел больше: $\sqrt{\cot \frac{\pi}{4} 2 \sin \frac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$?
- 5. (геол-82.1) Определить, какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{1-2\sin\frac{3\pi}{2}}$$
 или $\sqrt[3]{5\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}}$?

- 6. (экон.-88.1) Какое из чисел больше $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ или 3?
- 7. (физ-82.2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых решение уравнения 10x 15a = 13 5ax + 2a больше 2.
- 8. (геол-79.1) Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие равенству $\frac{a}{2a-x}=3.$
- 9. (геол. OГ-79.1) Решить уравнение |2x-3|=3-2x.
- 10. (физ-95.3) Решить уравнение $2 \cdot |x+1| = 2 x$.
- 11. (физ-83.2) Решить уравнение $|5x^2 3| = 2$.
- 12. (reorp-77.1) Решить неравенство 2|x+1| > x+4.
- 13. (хим-94.2) Решить неравенство 2x > |x| + 1.
- 14. (геол-82.2) Решить неравенство $\frac{2x+5}{|x+1|} \ge 1$.
- 15. (геол-78.2) Решить уравнение |5x-13|-|6-5x|=7.
- 16. (био-95.2) Решить уравнение |x-1|+|2x-3|=2.
- 17. (псих-95.1) Решить уравнение |2x-15|=22-|2x+7|.
- 18. (reorp-96(1).1) Решить уравнение |5x-3|-|7x-4|=2x-1.
- 19. (псих-98.1) Решить уравнение |4x |x 2| + 3| = 16.
- 20. (экон.-89.3) Решить уравнение ||3-x|-x+1|+x=6.
- 21. (геол-98.2) Решить уравнение $||4-x^2|-x^2|=1$.
- 22. (экон.-84.3) Решить неравенство 2|x-4|+|3x+5|>16.
- 23. (хим-96(1).3) Решить неравенство |x+|1-x|| > 3.
- 24. (ИСАА-97.2) Решить уравнение 2|x-5|-1=3|2x-5|-4|x-1|.
- 25. (ВМиК-82.5) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению |x+3|-a|x-1|=4.

26. (геол-91.6) При всех значениях параметра а решить уравнение

$$|x+2|+a\cdot |x-4|=6.$$

- 27. (физ-84.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения 2|x-a|+a-4+x=0 принадлежат отрезку [0;4].
- 28. (физ-84.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения 3|x+2a|-3a+x-15=0 принадлежат отрезку [4:9].
- 29. (псих-80.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases}
2u+v=7, \\
|u-v|=2.
\end{cases}$$

30. (фил-88.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4. \end{cases}$$

31. (физ-94(1).5) Решить систему

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$$

32. (физ-97.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y+|x+1|=1, \\ |y-x|=5. \end{cases}$$

33. (экон.-78.3) Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b+1)y = 2b + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

34. (экон.-86.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11, \\ -2x + 5\sin y = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

35. (геол.ОГ-79.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12}\operatorname{ctg} x = 4, \\ 2\sqrt{2}y - \sqrt{27}\operatorname{ctg} x = 1. \end{cases}$$

36. (м/м-79.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18}. \end{cases}$$

- 37. (ВМиК-87.2) Существуют ли действительные значения a, для которых $a^2 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}$? Если такие значения существуют, то сколько их?
- 38. (геогр-80.1) Найти все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $x^2-2kx+k^2+2k-1=0$ имеет два различных корня.
- 39. (хим-95.1) Решить неравенство $\frac{3x}{x^2+2} \ge 1$.
- 40. (био-94.1) Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

41. (физ-81.2) Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

42. (био-85.1) Решить уравнение $\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3.$

43. (экон.-89.1) Найти область определения функции
$$y=rac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{-x^2+x+20}}.$$

44. (псих-94.2) Известно, что $x=1,\ y=-1$ - одно из решений системы

$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3}\operatorname{tg}(\frac{1111\pi}{6}), \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найти все решения данной системы.

45. (геол-81.1) Решить уравнение
$$x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$$
.

46. (геол-90.1) Решить уравнение
$$-\frac{|x|}{x} - x = \frac{x^2}{2} + 1$$
.

47. (ВМиК-94(1).1) Решить уравнение

$$\left(4|x-1|+\frac{1}{2}\right)^2=11(x-1)^2+\frac{5}{4}.$$

- 48. (био-96.2) Решить уравнение $(x-7)^2 |x-7| = 30$.
- 49. (геол-77.2) Решить неравенство $x^2 |5x 3| x < 2$.
- 50. (геол-97.3) Решить неравенство $\frac{x}{20-\sqrt{x}} < 10.$
- 51. (ВМиК-87.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$$

52. (физ-77.2) Найти все значения параметра a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству x > y.

- 53. (почв-82.3) Решить неравенство $x^4 10x^2 + 16 > 0$.
- 54. (почв-96.2) Решить неравенство $3x^4 + 4 < 13x^2$.

- 55. (геол-95.2) Решить неравенство $x^2 6 \ge |x|$.
- 56. (геогр-87.2) Решить неравенство $y^2 + 3|y| < 10$.
- 57. (геол-87.3) Решить неравенство $\frac{1}{1-x} \ge -3$.
- 58. (соц-98.1) Решить неравенство $\frac{x-3}{3x} \ge \frac{1}{2}$.
- 59. (геол-96(1).1) Решить неравенство $\frac{1}{x-1996} \le \frac{x}{x-1996}$.
- 60. (м/м-77.1) Решить неравенство $x \le 3 \frac{1}{x-1}$.
- 61. (геогр-93.3) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}.$$

- 62. (био-84.1) Решить неравенство $\frac{x}{1-x} < x 6$.
- 63. (псих-82.1) Решить неравенство $\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}$.
- 64. (филол-98.1) Решить неравенство $\frac{x^2 + 4x + 3}{|1 + x|} \le 0.$
- 65. (геол-98(1).1) Решить неравенство $(x^2 + 5x 6) \cdot |x + 4|^{-1} < 0$.
- 66. (ВМиК-98.1) Решить неравенство $2x > \frac{5x+3}{|x+2|}$.
- 67. (MCAA-98.3) Решить неравенство $\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}$.
- 68. (м/м-85.2) Решить неравенство $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{|x|-1} \ge \frac{2}{x-1}$.
- 69. (физ-93.5) Решить неравенство $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$.

70. (ИСАА-92.3) Решить неравенство
$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \le 1.$$

71. (экон.-87.3) Решить неравенство
$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \le 2.$$

§3. Стандартные текстовые задачи.

В этом параграфе собраны стандартные текстовые задачи, приводимые к одному линейному уравнению или неравенству, к линейной системе уравнений или к квадратным уравнениям. Процесс формализации высказываний в условии задачи, т.е. превращение их в уравнения и неравенства вашей системы, обычно не требует никаких математических знаний. От вас требуется только здравый смысл на уровне домохозяйки и знание простейших формул:

$$pасстояние = скорость \cdot время,$$

$$pабота = производительность \cdot время,$$

$$концентрация \ вещества = \frac{\textit{масса вещества}}{\textit{общая масса раствора}} \cdot 100\%$$

Возникающие в текстовых задачах системы линейных уравнений можно решать подстановкой или методом Гаусса (методом приведения к треугольному виду). Особенно хорошо применять Метод Гаусса когда система состоит из трех и более уравнений.

Иногда после составления уравнений в текстовой задаче получается система нелинейных уравнений. Может так случиться, что уравнений будет меньше, чем неизвестных. В этом случае может помочь введение новых переменных, относительно которых система становится линейной. Причем эти новые переменные, как правило, являются теми величинами, которые надо найти по условию задачи.

Последовательность чисел a_1, a_2, \ldots, a_n называется арифметической прогрессией, если найдется такое число d, называемое разностью прогрессии, что $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, ..., $a_n = a_{n-1} + d$. Для решения задач на арифметичские прогрессии необходимо знать следующие формулы:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
, $a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$,

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Последовательность чисел b_1,b_2,\ldots,b_n называется зеометрической прогрессией, если найдется такое число q, называемое знаменателем прогрессии, что $b_2=b_1\cdot q,\ b_3=b_2\cdot q,\ \ldots,\ b_n=b_{n-1}\cdot q$. Для решения задач на геометрические прогрессии необходимо знать следующие формулы:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad b_1 + \ldots + b_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}.$$

- 1. (почв-84.1) Площади участков земли относятся как 4:3:5. Средняя урожайность всех трех участков одинакова и составляет 28 ц с гектара. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из трех участков.
- 2. (почв-94(1).1) С двух полей, первое из которых по площади вдвое меньше второго, собрали урожай свеклы. Средняя урожайность составила 150 ц/га, в то время, как на первом поле собрали по 156 ц/га. Какова урожайность свеклы на втором поле?
- 3. (почв-93.1) Представить число 128 в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы первое слагаемое относилось ко второму, как 2: 3, второе к третьему как 3: 5, а третье к четвертому как 5: 6.
- 4. (соц-98.3) В городе N 9% коренного населения в зимний период заняты народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет 4/5 от численности в зимний период. Определить, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.
- 5. (геол-94.7) Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное количество % по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе на 25%, на втором этапе на 20%, на третьем этапе на 10%, на четвертом этапе на 8%. На сколько % в результате увеличится содержание кремния?

- 6. (геол-98.4) Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 л, затем еще 5% от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31%. Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 л воды?
- 7. (геол-95.6) Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке 10%, во втором 40%. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором 30%. Определить массу полученного слитка.
- 8. (геол-96(1).5) В одном декалитре кислотного раствора 96% объема составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40%?
- 9. (экон.-80.4) Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.
- 10. (физ-79.2) Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов этой прогрессии равна 105. Найти первый член и разность этой прогрессии.
- 11. (физ-92.5) Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.
- 12. (экон.В-98.2) Второй член арифметической прогрессии a_1, a_2, \ldots равен 2, а сумма пятого и шестого членов равна 9. Найти сумму первых двадцати членов прогрессии, номера которых кратны 2.
- 13. (ИСАА-93.2) Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи членов этой прогрессии.
- 14. (экон.-95.4) В банк помещен вклад в размере 3900 тыс.руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после

вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

- 15. (геогр-95.2) Теплоход затратил 5 ч на путь вниз по течению реки от пункта A до пункта B. На обратный путь против течения он затратил 8 ч 20 мин. Найти скорость теплохода, если путь от A до B равен 100 км.
- 16. (био-95.4) Саша и Сережа дважды обменивались марками, причем каждый раз 1/7 количества марок, имевшихся (на момент обмена) у Саши, обменивалась на половину количества марок, имевшихся у Сережи. Сколько марок было у Саши и сколько у Сережи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Сережи 220?
- 17. (экон.-87.2) В магазине продано 12 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс.руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?
- 18. (геогр-81.3) Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый 40%, второй 60%. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20% раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80% раствора, то получился бы 70% раствор. Сколько было 40% и 60% растворов?
- 19. (почв-92.2) Самолет, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях A, B или B с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолет находился в метеоусловиях A половину полетного времени, в метеоусловиях B 1/6 полетного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях A и 3/4 в метеоусловиях B. В третий раз по четверти полетного времени в метеоусловиях A и B, а половину времени в метеоусловиях B. На сколько процентов израсходует самолет полетный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях

- B, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\%$, во второй раз на 92,5%, а в третий на 97,5%?
- 20. (физ-78.2) Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?
- 21. (геол-96.6) В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке 60% к текущей сумме на счете, во втором 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?
- 22. (геол-79.4) Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет 5/8 скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.
- 23. (м/м-97.3) Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найти расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если AB = 480 км.
- 24. (геол-94.1) Какое из чисел больше: $2 \cdot \sqrt{17}$ или 8, (24)?
- 25. (ВМиК-90.2) Числа a_1, a_2, \ldots, a_{21} образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12} , если $a_{20}=3a_9$.
- 26. (геол-80.4) В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2м, а в каждую следующую

секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

- 27. (псих-97.3) В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего ее членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найти последний член прогрессии.
- 28. (ВМиК-96.1) Числа a,b,c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a+d=10, a\cdot d=7$. Найти b^3+c^3 .
- 29. (ВМиК-94.5) В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30-й инъекции?
- 30. (экон.М-95.4) В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс.т железной руды. В течение нескольких последующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс.т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?
- 31. (геол-98(1).4) Первая бригада выполняет работу на 2 часа быстрее второй бригады и на 7 часов медленнее, чем обе бригады, работающие одновременно. Выполнят ли бригады, работающие одновременно, эту работу быстрее, чем за 7 час. 57 мин.?
- 32. (ВМиК-97.1) Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению реки. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C 14 км. В 12^{oo} из пункта B отплыла лодка и отправилась в A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14^{oo} того же дня прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/час. Найти скорость лодки в стоячей воде.
- 33. (геол-95(1).5) Поезд, идущий с постоянной скоростью из пункта A в пункт B, был задержан у семафора на 16 мин. Расстояние от

- семафора до пункта B равно 80 км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в пункт B не поэже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 10 км/ч?
- 34. (ВМиК-96.2) Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 л первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 л первого раствора, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если процентное содержание воды во второй смеси вдвое больше процентного содержания кислоты в первой?
- 35. (геол-81.5) Для составления смеси из двух жидкостей А и В были взяты два сосуда: первый емкостью 10 литров, второй 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости А. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью В и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд был добавлено жидкости А столько, сколько было в него ее налито сначала, отношения количества жидкости А ко всему объему имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости А было налито первоначально в первый сосуд?
- 36. (ИСАА-95.3) На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на ту сумму, которую вкладчик имел на счету в начале второго квартала, начисляется в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1+r_2=150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?
- 37. (геол.ОГ-77.2) Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.

- 38. (почв-82.1) Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через 2/3 часа после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он шел на 3/8 часа дольше, чем товарный поезд шел 5 км?
- 39. (хим-79.3) От пристани А вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани В, расположенной в 324 км от пристани А, простоял там 18 часов и отправился назад в А. В тот момент, когда он находился в 180 км от А, второй пароход, отплывший из А на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.
- 40. (геол-93.3) Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того, как первый проработал 2 ч, его сменил второй, который за 3 ч закончил работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 ч быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выроют котлован оба экскаватора, работая вместе?
- 41. (экон.-79.3) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько-литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?
- 42. (ВМиК-95(1).1) В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвертого по четырнадцатый включительно равна 77. Найти номер того члена прогрессии, который равен 7.
- 43. (хим-89.2) Последовательность чисел a_1, a_2, a_3, \ldots является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1+a_5+a_{15}=3$. Найти a_5+a_9 .

- 44. (ВМиК-88.1) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.
- 45. (био-91.3) Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвертого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?
- 46. (м/м-93(1).2) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна ее первому члену, умноженному на 5, а сумма первых пятнадцати членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.
- 47. (ВМиК-79.1) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен √2. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.
- 48. (геогр-91.3) Числа a_1 , a_2 , a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел (в том же порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти a_1 , a_2 , a_3 , если известно, что $a_1+a_2+a_3=21$.
- 49. (почв-95.1) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго члена арифметической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.
- 50. (хим-94(1).3) Для членов геометрической прогрессии b_1, b_2, \dots известно, что $b_2b_4=25$ и $b_3+b_5=15$. Найти b_1 .
- 51. (м/м-95(1).1) Найти первый член геометрической прогрессии, если известно, что третий член этой прогрессии равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

- 52. (хим-78.2) Из пункта А в пункт В выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта А в пункт В выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт В одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов А и В навстречу друг другу, то они бы встетились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от А до В грузовой автомобиль?
- 53. (экон.К-77.2) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал 1/4 пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.
- 54. (ВМиК-92.4) Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут того же дня. Найти время отправления мотоцикла из города B.
- 55. (фил-79.4) Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.
- 56. (геогр-78.1) Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти

- собственную скорость парохода. (Собственная скорость скорость в неподвижной воде.)
- 57. (геогр-77.4) Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.
- 58. (м/м-87.4) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/час, а другой на 20 км/час, то они прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.
- 59. (био-86.3) Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет 6/5 скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/час. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.
- 60. (геогр-89.2) Из пункта А в пункт В, находящийся на расстоянии 12 км от пункта А, по горной дороге со скоростью 6 км/час поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта А в пункт В выехал автобус. Доехав до пункта В менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта В. Найти скорость автобуса на подъеме, если известно, что она в 2 раза меньше его скорости на спуске.
- 61. (псих-88.4) Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два товарных поезда. Они двигались без остановок, встре-

тились через 24 часа после начала движения и продолжили свой путь, причем первый поезд прибыл в пункт B на 20 часов позднее, чем второй поезд прибыл в A. Сколько времени был в пути первый поезд?

- 62. (геол-85.3) Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовили за один час 30 деталей?
- 63. (экон.К-87.2) В магазине продано 10,5 тонны орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?
- 64. (геол-89.5) В баке находится 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.

§4. Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями.

В этот параграф вошли простейшие уравнения и неравенства с показательной и логарифмической функциями.

Свойства показательной функции $y=a^x$. Необходимо сразу же отметить, что эта функция имеет смысл только при a>0. При этом x может принимать любые значения. Поэтому, если в уравнении или неравенстве есть выражение вида $f(x)^{g(x)}$, то к условиям, определяющим ОДЗ, надо отнести неравенство f(x)>0.

Следующие свойства степеней необходимо знать, чтобы решать показательные уравнения и неравенства:

$$a^x = b \iff x = \left\{ \begin{array}{ll} \log_a b, & e \textit{cau} \ a > 0, \ b > 0, \ a \neq 1, \\ \emptyset (nycmoe \ \textit{mhomeembo}), & e \textit{cau} \ a = 1, \ b \neq 1, \\ \textit{nwfoe}, & e \textit{cau} \ a = b = 1. \end{array} \right.$$

Если m и n - натуральные числа, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$
 $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x.$
 $(ab)^x = a^x b^x.$
 $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$
 $a^0 = 1, \quad a^1 = a.$

Необходимо также знать, что при a > 1 функция $y = a^x$ возрастает, а при 0 < a < 1 убывает на всей прямой.

Аналогично тригонометрическим, показательные уравнения и неравенства решаются сведением к простейшим при помощи вышеприведенных формул. Приведем примеры простейших уравнений и неравенств с указанием равносильных переходов, устраняющих степени:

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a
eq 1 \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$$
 $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}\Longleftrightarrow \left[egin{array}{l} f(x)=g(x),\ a(x)>0.\ a(x)=1,\ f(x),\ g(x) \end{array}
ight.$ определены.

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Longleftrightarrow \left[egin{array}{l} f(x) > g(x), \\ a(x) > 1. \\ f(x) < g(x), \\ 0 < a(x) < 1. \end{array}
ight.$$

Аналогично решаются неравенства со знаками $<, \ge u \le .$ Свойства логарифмической функции. Пусть $a>0, \ b>0, \ a\ne 1.$ Тогда $\log_a b$ есть такое число c, что $a^c = b$. Это определение можно записать в виде основного логарифмического тождества:

$$a^{\log_a b} = b, \ a > 0, \ b > 0, \ a \neq 1.$$

Приведем основные формулы преобразований логарифмов:

$$\begin{split} \log_a 1 &= 0, \ \log_a a = 1, \ a > 0, \ a \neq 1. \\ \log_a (bc) &= \log_a |b| + \log_a |c|, \ a > 0, \ bc > 0, \ a \neq 1. \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) &= \log_a |b| - \log_a |c|, \ a > 0, \ bc > 0, \ a \neq 1. \\ \log_a \left(b^c\right) &= c \log_a b, \ a, b > 0, \ a \neq 1. \\ \log_a c b &= \frac{1}{c} \log_a b, \ a, b > 0, \ a \neq 1, \ c \neq 0. \\ \log_a \left(b^{2n}\right) &= 2n \log_a |b|, \ a > 0, \ a \neq 1, \ b \neq 0, \ n \in N. \\ \log_a \left(b^{2n}\right) &= 2n \log_a |b|, \ a > 0, \ a \neq 1, \ b \neq 0, \ n \in N. \\ \log_a \frac{1}{b} &= -\log_a b, \ a, b > 0, \ a \neq 1. \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}, \ a, b, c > 0, \ a, c \neq 1. \\ \log_a b &= \frac{1}{\log_b a}, \ a, b > 0, \ a, b \neq 1. \\ \log_a b &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ \log_a b &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ \log_a b &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, b, c, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c b, \ a, d > 0, \ a, d > 0, \ a, c \neq 1. \\ 0 &= \log_a d \cdot \log_c d = \log_a$$

При решении задач с логарифмами НАДО ПОСТОЯННО ПОМНИТЬ ПРО ОДЗ и следить за равносильностью преобразований. Не обязательно сразу выписывать ОДЗ, достаточно ПОСТОЯННО СЛЕДИТЬ ЗА РАВНОСИЛЬНОСТЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. Простое выписывание ОДЗ и решение полученных при этом неравенств часто приводит к лишней работе по нахождению корней квадратных трехчленов и сравнению этих корней с корнями, которые получаются при решении собственно уравнений и неравенств.

Приведем теперь пример простейшего логарифмического уравнения и равносильного перехода, позволяющего избавляться от логарифмов.

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Вернемся к вопросу ОДЗ и равносильности преобразований. Если бы мы сразу же выписали ОДЗ, то нам пришлось бы выписать еще одно неравенство, которое мы не выписали в данном случае: g(x)>0. Таким образом ЛУЧШЕ СЛЕДИТЬ ЗА РАВНОСИЛЬНОСТЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ЧЕМ СРАЗУ ВЫПИСЫВАТЬ ОДЗ.

Покажем на примере, как избавляться от логарифмов в простейших неравенствах:

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \iff \left\{ \begin{array}{l} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < a(x) < 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{array} \right.$$

Аналогично решаются неравенства со знаками $<, \ge u \le$. При этом необходимо помнить, что при a>1 функция $y=\log_a x$ возрастает, а при 0< a<1 - убывает при всех x>0.

- 1. (экон.-83.1) Решить уравнение $2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}$.
- 2. (физ-95(2).1) Решить уравнение $2^{x-1} \cdot 3^x = 0, 5 \cdot 6^{2-x}$.
- 3. (физ-82.4) Решить неравенство $5^x 3^{x+1} > 2(5^{x-1} 3^{x-2})$.
- 4. (экон.-89.2) Вычислить $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} \frac{\log_5 150}{\log_6 5}.$
- 5. (ВМиК-84.1) Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b (a^2 b)$.
- 6. (физ-82.3) Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислить $\log_{\sqrt{a}/b} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.
- 7. (м/м-92.3) Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y, q = \log_x y$. Найти число $\log_{\left(\frac{x_1}{y^2}\right)^3} \sqrt{xyz}$, считая, что оно определено.
- 8. (био-98.1) Вычислить $\log_{(b^3,\sqrt[7]{a^5})}\left(rac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}
 ight)$, если $\log_b a = \sqrt{3}$
- 9. (геол-89.1) Определить, какое из чисел больше
 - $2\log_{1/2}\frac{1}{5}$ или $3\log_8 26$. Ответ должен быть обоснован.

- 10. (ВМиК-82.1) Какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5 + \log_{1/2} 9}$?
- 11. (экон.-90.1) Имеют ли общие точки область значений функции $y=\sqrt{3}+2\sqrt{2}x-2x^2$ и промежуток $[\log_3 15; +\infty)$? Ответ обоснуйте.
- 12. (геогр-86.2) Решить уравнение $\log_x \sqrt{3} \log_{x^2} 27 = \frac{1}{2}$.
- 13. (почв-95(1).3) Решить неравенство $\frac{1}{\log_x 2} \log_2 \frac{1}{x} \le 2$.
- 14. (физ-83.3) Решить неравенство $\frac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} \frac{1}{2}\log_2 x > 1.$
- 15. (геол.ОГ-82.3) Решить неравенство

$$\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$$

16. (м/м-95.2) Решить неравенство
$$\frac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3.$$

17. (м/м-93(2).1) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{(x+1)} 11} \geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}.$$

- 18. (био-96.3) Решить неравенство $1 + \log_{1/4}(\log_3(4-x)) > 0$.
- 19. (физ-97(2).5) Решить неравенство $\log_{\sqrt[4]{9}} \log_{1/3}(x+2) > 2$.
- 20. (геогр-95(1).2) Решить неравенство $\log_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}}\log_{1/3}\log_5 x > 0.$
- 21. (физ-80.4) Решить неравенство $2^{x-1} > (1/16)^{1/x}$.
- 22. (физ-97(1).5) Решить неравенство $2^{x-3} < \frac{2}{8^{1/x}}$.
- 23. (геол-97(1).4) Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2} > (2,25)^{x^2-10}$.
- 24. (м/м-94(2).2) Решить систему

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

25. (хим-83.4) Решить уравнение

$$\log_2(x^2+3) + \log_{\frac{1}{2}} 5 = 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_2(x+1).$$

- 26. (почв-77.2) Решить уравнение $2\lg(x+\frac{1}{2})-\lg(x-1)=\lg(x+\frac{5}{2})+\lg 2$.
- 27. (физ-89.3) Решить уравнение $\log_2(x+4) + 2\log_2\sqrt{x} = 5$.
- 28. (геол-97(1).2) Решить уравнение $2 \log_3 x = \log_3 \left(\frac{5}{3}|x| + 2\right)$.
- 29. (фил-89.3) Решить уравнение $\log_{2x+2}(2x^2-8x+6)=2$.
- 30. (соц-98.2) Решить уравнение $\log_2(x^2-5)=\frac{3}{2}\log_{\sqrt{8}}(1-x)$.
- 31. (физ-94(1).2) Решить уравнение $\frac{1}{6}\log_2(x-2) \frac{1}{3} = \log_{1/8}\sqrt{3x-5}$.
- 32. (филол-98.3) Решить уравнение $\frac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2.$
- 33. (м/м-96(1).1) Решить уравнение

$$\log_{x+5}(x^3 + 10x^2 + 20x) \cdot \log_3(x+5) = \log_3(3x^2 + 8x).$$

- 34. (хим-97(1).2) Решить уравнение $\log_{\tau}(3x-2)=2$.
- 35. (геол-96(1).3) Решить уравнение $\log_{\frac{x-1}{12x-31}}(x-1)=2$.
- 36. (ВМиК-83.1) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{16 - x^2} \log_2(x^2 - 5x + 6).$$

37. (геогр-97(1).1) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - x - 2} + \log_{(3+x)}(9 - x^2).$$

38. (геол.ОГ-83.3) Решить неравенство $\log_3(5x^2 + 6x + 1) \le 0$.

- 39. (псих-80.4) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2}) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 1$.
- 40. (ВМиК-86.1) Решить неравенство $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) 1 \le 0$.
- 41. (ВМиК-92.3) Решить неравенство

$$\log_2(11-x) + \log_2(x+1) \le \log_2((x+1) \cdot (x^2 + 5x - 5)).$$

- 42. (геол-83.3) Решить неравенство $\log_{\sin \frac{\pi}{2}}(x^2 3x + 2) \ge 2$.
- 43. (м/м-87.2) Решить неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})<2$.
- 44. (ВМиК-90.1) Решить неравенство $\log_{\pi^2+4} 8 < 1$.
- 45. (почв-93.3) Решить неравенство $\log_{9x^2+1} 37 > 1$.
- 46. (био-94.2) Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{11}$$
 или $9^{\frac{1}{2}\log_3(1+1/9)+\frac{3}{2}\log_8 2}$?

Ответ должен быть обоснован.

47. (геол.ОГ-85.1) Определить, какое из двух чисел больше

$$2^{\log_3 5} - 0.1$$
 или $5^{\log_3 2}$.

Результат обосновать.

48. (геол-85.1) Определить, какое из двух чисел больше

$$3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{5} \log 2}$$
 или $5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}$.

Результат обосновать.

- 49. (ИСАА-94.2) Решить уравнение $2^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1$.
- 50. (геол-97.5) Решить неравенство $11^{\log_{1/11}\log_{7}x} < 7^{\log_{1/7}\log_{11}x}$.
- 51. (экон. K-80.1) Решить неравенство $\log_5(26-3^x) > 2$.
- 52. (физ-81.4) Решить неравенство $5^{\log_3} \frac{2}{x+2} < 1$.
- 53. (экон.М-97.1) Решить уравнение $3^{|x|} = 5^{x^2+3x}$.

- 54. (физ-97(1).3) Решить уравнение $\log_9(x^2/4) + \log_3(x+5) = 1$.
- 55. (хим-98.1) Решить уравнение $4^x + 2^x 2 = 0$.
- 56. (геол-84.1) Решить уравнение $3 \cdot 9^{x+1} 6 \cdot 3^x 1 = 0$.
- 57. (хим-90.1) Решить уравнение $4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64$.
- 58. (физ-96(1).3) Решить уравнение $3^{2x} = ((0,6)^x + 2) \cdot 25^x$.
- 59. (хим-92.1) Решить уравнение $x+1+\log_{1/3}(-2+3^{-x})=0.$
- 60. (фил-91.2) Решить уравнение $\log_2(5 \cdot 2^x + 3) = 2x + 1$.
- 61. (физ-96.3) Решить уравнение $5^{x/2} 5^{2-3x/2} = 24 \cdot 5^{-x/2}$.
- 62. (физ-94(1).3) Решить уравнение $5^{\sqrt{x}} 5^{3-\sqrt{x}} = 20$.
- 63. (экон.М-99.2) Решить уравнение

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{2^x}{2^x - 1}} - \sqrt{14}.$$

- 64. (м/м-78.2) Найти все решения уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4},1\right]$.
- 65. (физ-87.2) Решить уравнение $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$.
- 66. (ВМиК-90.3) Решить уравнение

$$3 \cdot 64^{2\sin^2(x+\pi/4)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

- 67. (псих-93.1) Решить уравнение $3^{\frac{x+2}{3x-4}} 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}$.
- 68. (псих-93.1) Решить уравнение $2^{\frac{3x-1}{2x+1}} 1 = 2^{\frac{2-x}{2x+1}}$.
- 69. (физ-85.4) При каждом значении параметра a решить уравнение

$$4^{x}-2a\cdot(a+1)\cdot 2^{x-1}+a^{3}=0.$$

70. (физ-96(2).5) Решить неравенство $4^{x-0,5} + 2^{x+1} - 16 < 0$.

71. (геол-80.1) Решить неравенство
$$7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$$
.

72. (ВМиК-77.1) Решить неравенство
$$2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \ge 0.$$

73. (геол.ОГ-77.1) Решить неравенство
$$\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \ge 5.$$

- 74. (хим-95(1).3) Решить неравенство $2^{\frac{1-x}{x}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$.
- 75. (псих-77.5) Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие условию $a^2 9^{x+1} 8 \cdot 3^x \cdot a > 0$.
- 76. (хим-97.2) Решить неравенство $(\sqrt{2}+1)^x+1<2\cdot(\sqrt{2}-1)^x$.
- 77. (почв-83.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32. \end{cases}$$

78. (ВМиК-85.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$$

79. (почв-98.4) Решить систему

$$\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$$

- 80. (био-80.2) Решить уравнение $2(\log_2 x)^2 3\log_2 \frac{x}{4} 11 = 0.$
- 81. (почв-81.2) Решить уравнение $2(\lg x)^2 + (1-\sqrt{2})\lg x^2 = 2\sqrt{2}$.
- 82. (хим-98(1).2) Решить уравнение $\log_4 x + 2\log_x 4 = 3$.
- 83. (фил-81.2) Решить неравенство $\log_2^2(2-x) 8\log_{\frac{1}{4}}(2-x) \ge 5$.
- 84. (геол-98.5) Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-2) > \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}(x-2)} + \frac{3}{2}.$$

85. (био-87.3) Решить неравенство
$$\frac{3\log_{0.5}x}{2-\log_{0.5}x} \ge 2\log_{0.5}x+1.$$

86. (м/м-86.3) Решить неравенство
$$\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}.$$

- 87. (м/м-95.1) Найти наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству $4\cdot 3^{2k+1}+3^k<1$.
- 88. (био-91.1) Решить уравнение $4^{\sqrt{x}+1,5}-13\cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}}+20=0.$

89. (почв-92.3) Решить уравнение
$$\frac{9^x - 82 \cdot 3^x + 162 - 3^{x/2+2}}{3^{x/2} - 9} = -9.$$

- 90. (почв-96(1).2) Решите уравнение $\log_{(4x-x^2)} x = \log_{(12-3x)} x$.
- 91. (ВМиК-96(1).2) Решить уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{(\frac{x}{6}+\frac{1}{2})}(x-2)^2.$$

- 92. (геогр-94.3) Решить неравенство $\log_x(2-x-x^2) > 0$.
- 93. (м/м-98.2) Решить неравенство $\log_{\frac{2x+2}{\delta x-1}} (10x^2 + x 2) \le 0.$
- 94. (фил-92.2) Решить неравенство $\log_x(x^2 x^3 + 21x) \ge 3$.
- 95. (м/м-97(1).2) Решить неравенство $\log_{x+1} \frac{x^2 + 3x 4}{2x 4} \le 1$.
- 96. (экон.М-95.3) Решить неравенство $\log_{\frac{3x-1}{3x+1}} \left(x \frac{1}{3} \right) \geq 1.$
- 97. (м/м-88.2) Решить неравенство $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0$.
- 98. (ВМиК-98.2) Решить неравенство $\log_2(5-x) \cdot \log_{(x+1)} \frac{1}{8} \ge -6$.

§5. Тригонометрия – 2.

Этот параграф снова, как и первый, посвящен исключительно тригонометрии. Здесь собраны однородные тригонометрические уравнения, задачи на метод вспомогательного аргумента и системы тригонометрических уравнений. Однородными уравнениями 1-й степени называются уравнения вида

$$A\sin x + B\cos x = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$
 (1)

Однородными уравнениями 2-й степени называются уравнения вида

$$A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = 0, \quad A^2 + C^2 \neq 0.$$
 (2)

К однородному уравнению 2-й степени сводятся любые уравнения вида:

$$D\sin^2 x + E\cos^2 x + F\sin 2x + G\cos 2x + H\sin x\cos x + K = 0.$$

Схема решения уравнения (2). Пусть $A \neq 0$. Тогда корни уравнения $\cos x = 0$ не могут быть решениями (2), т.к. иначе после подстановки $\cos x = 0$ в (2) получим $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно можно поделить все уравнение на $\cos^2 x$ и получить эквивалентное исходному квадратное уравнение относительно tgx: $A ext{ tg}^2 x + B ext{ tg} x + C = 0$. Если же $C \neq 0$, то можно поделить на $\sin^2 x$. Получающиеся квадратные уравнения решаются методами §1. Отметим, что при оформлении решения подобного рода задач НЕОБХОДИМО ПРИВОДИТЬ ПОЛНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО того факта, что корни уравнения $\cos x = 0$ (или $\sin x = 0$, соответственно) не является решениями уравнения (2).

Однородные уравнения 1-й степени можно решать как с помощью вышеописанного метода (т.е. делением на $\sin x$ или $\cos x$), так и с помощью метода вспомогательного (дополнительного) аргумента:

$$\begin{split} A \sin x \pm B \cos x &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin x \cos \phi \pm \sin \phi \cos x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \pm \phi), \end{split}$$

где $\phi=\arcsin rac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ или $\phi=\arccos rac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$ или $\phi= \operatorname{arctg} rac{B}{A}, \ A \neq 0.$ Уравнения вида $A\sin x + B\cos x = C$ проще всего решать мето-

дом вспомогательного аргумента.

При решении систем тригонометрических уравнений НЕОБХОДИ-МО ИСПОЛЬЗОВАТЬ РАЗНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕНН-ЫХ ПЕРЕМЕННЫХ при решении разных уравнений системы.

- 1. (геол. $O\Gamma$ -85.4) Решить уравнение $5\sin^2 x 4\sin x\cos x \cos^2 x = 4$.
- 2. (ИСАА-97.3) Решить уравнение $1 3\sin x \cos x 5\cos^2 x = 0$.
- 3. (хим-82.1) Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x \cos 2x = \sqrt{3}$.
- 4. (био-79.1) Решить уравнение $\cos 3x = 1 \sqrt{3} \sin 3x$.
- 5. (физ-96(1).1) Решить уравнение $1 \sin 5x = \cos 5x$.
- 6. (хим-79.1) Решить уравнение $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$.
- 7. (геол-90.3) Решить уравнение $1 (2\cos x + \sqrt{3}) \cdot \text{ctg} x = 2\sin x$.
- 8. (экон.-92.1) Вычислить $\log_{11/25}|\sin 3\beta| + \log_{11/25}|\sin \beta|$, если $\sin \left(\beta \frac{\pi}{4}\right) + \cos \left(\beta \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2/5}$.
- 9. (экон.-92.1) Вычислить $\log_{\frac{18}{7}}\left|\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\log_{\frac{18}{7}}\left|\cos\left(3\gamma+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, если известно, что $\cos\gamma+\sin\gamma=-\sqrt{\frac{1}{3}}$.
- 10. (физ-94(2).2) Решить уравнение $5\cos x + 2\sin x = 3$.
- 11. (геол-85.4) Решить уравнение $3\sin x + 5\cos x = \sqrt{17}$.
- 12. (фил-91.4) Решить уравнение $\frac{2}{\pi}\sin x + \cos 19\pi = \cos x$.
- 13. (геол-79.3) Найти все числа A, при каждом из которых уравнение $5\sin x + 2\cos x = A$ имеет решение.
- 14. (псих-81.3) Найти все решения уравнения $\cos 7x \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2},$ удовлетворяющие условию $0, 4\pi < x < \frac{6\pi}{7}.$
- 15. (геогр-98.4) Решить уравнение

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 + 3\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

16. (экон.-90.5) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}\cos(\pi x)+\sin(\pi x)=\sqrt{2},$$

расположенные на отрезке [-3; 1].

17. (экон.-90.5) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{3- ext{tg}^2\left(rac{3}{2}\pi x
ight)}\cdot\sin(\pi x)-\cos(\pi x)=2,$$

расположенные на отрезке [-3; 2].

- 18. (геол.ОГ-80.1) Решить уравнение $\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x$.
- 19. (фил-80.1) Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x = 2\cos^2 x$.
- 20. (хим-94(1).2) Решить уравнение $\sin 2x + \cos^2 x = 0$.
- 21. (геогр-94(1).1) Найти наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-2\cos^2x=0.$
- 22. (почв-79.3) Решить уравнение $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1.$
- 23. (физ-91.1) Решить уравнение $8-7\sin 2x=12\sin^2 x$.
- 24. (био-80.5) Найти все те решения уравнения $3\sin^3 x 3\cos^2 x + 7\sin x \cos 2x + 1 = 0$, которые являются также решениями уравнения $\cos^2 x + 3\cos x \sin 2x 8\sin x = 0$.
- 25. (экон.К-79.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

26. (геол-83.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

27. (геол.ОГ-83.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$$

28. (фил-77.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} tgx \cdot tgy = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

29. (почв-94(1).4) Найти все решения системы

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 1/4, \\ \cos x \cdot \sin y = -1/4, \end{cases}$$

удовлетворяющие неравенствам $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

30. (геол-81.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

31. (геогр-87.4) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \cos(x+y) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $-\pi \le x \le \pi, -2\pi \le y \le -\pi.$

32. (ВМиК-77.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg} 5y = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$$

33. (био-79.5) Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям

(био-79.5) Найти все пары чисел
$$x$$
 и y , удовлетворяющие условиз
$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)(1+\cos(xy)\sin(xy))=(\sqrt{3}+1)\sin^2(xy)+\cos(2xy),\\ x^2y^2-y^2+1=0,\\ \frac{1}{x^2}+y^2\leq 6. \end{cases}$$

34. (почв-85.3) Найти все корни уравнения

$$(1 + tg^2x)\sin x - tg^2x + 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству tgx < 0.

35. (ВМиК-97(1).2) Решить уравнение

$$\frac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$$

- 36. (физ-96.8) Для каждого значения a найти число решений уравнения $a \log x + \cos 2x = 1$, принадлежащих промежутку $0 < x < 2\pi$.
- 37. (геол.ОГ-79.6) Найти все значения параметра α , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$$
 имеет единственное решение.

38. (геол.ОГ-79.6) Найти все значения параметра α , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + \frac{2x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{1}{\cos \alpha} + 2\sqrt{2} = 0$$
 имеет единственное решение.

39. (ВМиК-98.3) Решить уравнение $|\sin^3 x| + 13\cos^3 x - \cos x = 0$.

§6. Задачи с радикалами.

В этом параграфе собраны стандартные задачи с радикалами. Методика решений таких задач хорошо отработана и основана на следующих эквивалентных переходах:

$$\begin{split} \sqrt{f(x)} &= g(x) \iff \left\{ egin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) &= (g(x))^2, \end{array}
ight. \\ \sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff \left\{ egin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq (g(x))^2, \\ f(x) \geq 0, \end{array}
ight. \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \iff \left\{ egin{array}{l} g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2, \\ f(x) \geq 0, \end{array}
ight. \end{split}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff \left\{ egin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq (g(x))^2, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{array}
ight. \ \sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left\{ egin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{array}
ight. \end{array}
ight.$$

Если в рассмотренных выше уравнениях или неравенствах радикал стоит в правой части, тогда желательно переписать условие так, чтобы радикал стоял слева. Это поможет избежать возможных ошибок, получающихся из-за того, что вам приходится смотреть на неравенство с другой стороны. То есть мы рекомендуем неравенство вида $g(x) < \sqrt{f(x)}$ сначала переписать в виде $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и только после этого решать.

Если в уравнении или неравенстве имеется несколько радикалов, то сначала имеет смысл сгруппировать эти радикалы. Здесь играют роль как простота получающихся неравенств при использовании приведенных выше эквивалентных переходов, так и возможность получить подобные слагаемые при возведении в квадрат обеих частей уравнения или неравенства.

Возникающие при решении УРАВНЕНИЙ с радикалами тригонометрические неравенства лучше сразу не решать, а производить отбор полученных корней посредством подстановки в эти неравенства. Если же тригонометрические неравенства возникают при решении НЕРА-ВЕНСТВ с радикалами, то решать их скорее всего придется, причем лучше всего это делать на тригонометрическом круге.

- 1. (геол-94.5) Решить неравенство $\sqrt{4z-3-z^2} \neq 0$.
- 2. (м/м-86.1) Решить уравнение $2\cos(\sqrt{x} + \pi) + 1 = 0$.
- 3. (хим-78.3) Решить неравенство $\sqrt{2(5^x+24)} \sqrt{5^x-7} \ge \sqrt{5^x+7}$.
- 4. (м/м-98.1) Решить неравенство $3 \cdot \sqrt{|x+1|-3} \ge \sqrt{x^2-2x-3}$.
- 5. (ВМиК-91.1) Решить уравнение $\sqrt{x+4} + x 2 = 0$.
- 6. (геол-95.1) Решить уравнение $\sqrt{5x-6} + x = 4$.

- 7. (соц-97.3) Найти все решения уравнения $\sqrt{-3x+3}=x-1$.
- 8. (геол-96.1) Решить уравнение $\sqrt{3x-5} = x-11$.
- 9. (хим-98(1).1) Решить уравнение $7-x=3\sqrt{5-x}$.
- 10. (геол-83.1) Решить уравнение $(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23)$.
- 11. (био-77.1) Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.
- 12. (м/м-94(1).2) Решить уравнение $3\sqrt{x+4} = 5 2|x+2|$.
- 13. (геогр-95.3) Решить уравнение $\sqrt{2-x^2} = |x|-1$.
- 14. (физ-85.2) Решить уравнение $\sqrt{x^4 2x 5} = 1 x$.
- 15. (ИСАА-91.1) Решить уравнение $\sqrt{3x-5} \sqrt{4-x} = 1$.
- 16. (почв-98.1) Решить уравнение $\sqrt{x+1} \sqrt{4x-3} = 1$.
- 17. (геол.ОГ-82.2) Решить уравнение $\sqrt{x+3} \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$.
- 18. (геол-95(1).3) Решить уравнение $\sqrt{\sin x} = -\cos x$.
- 19. (экон.М-96.4) Решить уравнение $\sqrt[4]{12} \sin x = \sqrt{\sin 2x}$.
- 20. (экон-98.2) Решить уравнение $tgx + \sqrt{3\sin x} = 0$.
- 21. (м/м-88.1) Решить уравнение $\sqrt{1-\cos 2x} = \sin 2x$.
- 22. (псих-95.3) Решить уравнение $\sqrt{2} \sin x \sqrt{2 + \cos x} = 0$.
- 23. (м/м-91.1) Решить уравнение $\sqrt{4\cos 2x 2\sin 2x} = 2\cos x$.
- 24. (фил-90.1) Решить уравнение $\sqrt{10}\cos x \sqrt{4\cos x \cos 2x} = 0$.
- 25. (м/м-97(1).1) Решить уравнение $\sqrt{-24\cos x + 25} = 4\cos x 3$.
- 26. (псих-79.1) Решить уравнение

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x}=4\cos x-\sqrt{3}.$$

27. (геол-98(1).3) Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

лежащие на отрезке $-\frac{3\pi}{2} \le x \le -\pi$.

28. (геогр-94(1).3) Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(10-3y) + \log_{0,5}(2y-5x) = 0, \\ \sqrt{x+2y+1} - \sqrt{11-3y} = \sqrt{2x+4y-12}. \end{cases}$$

- 29. (хим-98.2) Решить неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.
- 30. (почв-87.2) Решить неравенство $\sqrt{2x+3} \ge x$.
- 31. (хим-96.2) Решить неравенство $\sqrt{x+5} > 7 x$.
- 32. (псих-97.2) Решить неравенство $\sqrt{t+3} > 5 2t$.
- 33. (м/м-95(2).1) Решить неравенство $\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x} \ge 0.$
- 34. (экон.-95.1) Решить неравенство $2x-5 < \sqrt{x^2-x-6}$.
- 35. (псих-88.3) Решить неравенство $2x 11 < 2\sqrt{36 x^2}$.
- 36. (био-80.3) Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.
- 37. (экон.-88.2) Решить неравенство $x + \sqrt{x^2 + x 6} > -1$.
- 38. (почв-97.6) Для каждого значения параметра a решить неравенство $\sqrt{a^2-x^2}>a+1.$

39. (физ-97.7) Для любых значений а решить неравенство

$$a-2<(a-1)\sqrt{x+1}.$$

40. (физ-97.7) Для любых значений а решить неравенство

$$5-a<(4-a)\sqrt{x-3}.$$

41. (м/м-96.2) Решить неравенство
$$\sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \ge 3^x - 3 \cdot 2^x$$
.

42. (ВМиК-94(1).3) Решить неравенство
$$\sqrt{7+2^{1-x}} \ge 7 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$$

43. (физ-95.7) Для каждого значения a решить неравенство

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}.$$

- 44. (фил-85.3) Решить неравенство $\log_{1/2}(\sqrt{x+1}-x) < 2$.
- 45. (ИСАА-96.4) Решить неравенство

$$\log_{0,5}(\sqrt{x+2}-x+4) \ge -1 + \log_{0,5} 3.$$

46. (физ-97.3) Решить неравенство
$$\sqrt{\log_5(x+2)} > \log_{1/5} \frac{5}{x+2}$$
.

- 47. (ВМиК-84.4) Решить неравенство $\sqrt{7 \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4$.
- 48. (псих-94.1) Верно ли неравенство $3\log_2 5 < \sqrt{9\log_2 5 + 28}$? (таблицами и калькуляторами не пользоваться).
- 49. (псих-94.1) Верно ли неравенство $4(1-\log_3 2) < \sqrt{1+\log_3 4}$? (таблицами и калькуляторами не пользоваться).
- 50. (экон.-93.3) Решить неравенство $3\sqrt{x+2} \le 6 |x-2|$.
- 51. (ВМиК-94.2) Решить неравенство $\sqrt{x-3} \le 3 |x-6|$.
- 52. (био-97.3) Решить неравенство $\sqrt{|1-8x|-2} \le x+1$.
- 53. (псих-93.2) Решить неравенство $\sqrt{1-x} \sqrt{x} > 1/\sqrt{3}$.
- 54. (геол-84.2) Решить неравенство $\sqrt{2x^2 6x + 4} < x + 2$.
- 55. (геол.ОГ-84.2) Решить неравенство $\sqrt{x^2 3x + 2} \le 3x 3$.
- 56. (физ-97(2).3) Решить неравенство $\sqrt{x^2+x+4} \le 2x+|3x-2|$.
- 57. (псих-89.5) Для каждого значения параметра a решить неравенство $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0.$

58. (псих-89.5) Для каждого значения параметра а решить неравенство

$$x + 2a - \sqrt{3ax + 4a^2} > 0.$$

59. (псих-83.2) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$$
.

60. (ИСАА-93.1) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{3 - x} \ge 1.$$

61. (ВМиК-82.3) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \ge 2.$$

62. (экон.К-88.3) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5}>1.$$

63. (экон.В-98.1) Решить неравенство
$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$$
.

§7. Разложение на множители и расщепление.

В этом параграфе собраны задачи, для решения которых необходимо иметь навыки разложения на множители степенных, тригонометрических, логарифмических, показательных, а также смешанных выражений. Получающиеся при этом уравнения или неравенства обычно легко решаются методом расшепления. Чтобы успешно решать задачи этого параграфа необходимо очень хорошо знать формулы, которые вы применяли при решении задач из §1-6. Обязательно повторите все эти формулы до начала занятия.

Однородные уравнения относительно функций f(x) и g(x) решаются сведением к квадратному уравнению делением, например, на $(g(x))^2$:

$$A \cdot (f(x))^2 + B \cdot f(x) \cdot g(x) + C \cdot (g(x))^2 = 0, A, C \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ A \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 + B \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + C = 0. \end{cases}$$

Отметим важные случаи, когда функции f(x) и g(x) не имеют общих корней, и, следовательно, от выписанной совокупности остается только

квадратное уравнение:

1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ (cm. §5); 2) $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$, a > 0, b > 0.

Некоторые задачи вида

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{p(x) \cdot q(x)} > 0, \tag{3}$$

где f(x), g(x), p(x) и q(x) суть показательные или логарифмические функции, особенно эффективно решаются модифицированным методом интервалов. Идея модифицированного метода интервалов достаточно проста и основана на следующих соображениях:

т. к. при
$$a>1$$
 $\log_a b(x)\geq 0 \Leftrightarrow b(x)-1\geq 0,$

a
$$\log_a b(x) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b(x) - 1 \le 0, \\ b(x) > 0, \end{cases}$$

то в неравенстве вида (3) функцию $f(x) = \log_a b(x)$ можно заменить на (b(x)-1), не забывая при этом для сохранения эквивалентности преобразований дописать ОДЗ, т.е. неравенство b(x)>0. Аналогичные рассуждения позволяют при 0< a<1 обосновать в (3) замену $f(x) = \log_a b(x)$ на выражение (1-b(x)) с учетом ограничения b(x)>0.

Несколько более просто рассматриваются показательные функции:

т. к. при
$$a>1, c>0$$
 $a^{b(x)}-c\geq 0 \Leftrightarrow b(x)-\log_a c\geq 0,$

a
$$a^{b(x)} - c \le 0 \Leftrightarrow b(x) - \log_a c \le 0$$
,

то в неравенстве вида (3) функцию $g(x)=(a^{b(x)}-c)$ можно заменить на $(b(x)-\log_a c);$ если же 0< a<1, тогда $g(x)=(a^{b(x)}-c)$ можно заменить на $(\log_a c-b(x)).$

При решении задач модифицированным методом интервалов ПОМ-НИТЕ, что выражение вида $\log_a b(x)$ или $(a^{b(x)}-c)$ должно входить в неравенство (3) целиком в виде одного из СОМНОЖИТЕЛЕЙ, а не какой-то его частью.

После разложения на множители получающиеся уравнения и неравенства решаются расщеплением. Само понятие "расщепление уравнений и неравенств" мы впервые встретили в книге Мельников И.И., Сергеев И.Н. "Как решать задачи вступительного экзамена по математике". Основная идея расщепления при решении уравнений f(x).

g(x) = 0 достаточно проста и основана на том, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, а другой при этом ИМЕЕТ СМЫСЛ, т.е.:

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \left\{egin{array}{ll} f(x)=0,\ g(x) ext{ - определена }.\ g(x)=0,\ f(x) ext{ - определена }. \end{array}
ight.$$

Аналогичные соображения используются при расщеплении неравенств

$$f(x)\cdot g(x)>0, \ \ f(x)\cdot g(x)<0, \ \ f(x)\cdot g(x)\geq 0, \ \ f(x)\cdot g(x)\leq 0,$$

например:

$$f(x)\cdot g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[egin{array}{ll} f(x)\cdot g(x)>0,\ f(x)\cdot g(x)=0 \end{array}
ight.; \quad f(x)\cdot g(x)>0 \Leftrightarrow \left[egin{array}{ll} f(x)>0,\ g(x)>0.\ f(x)<0,\ g(x)<0. \end{array}
ight.$$

- 1. (геол-94(1).6) Решить неравенство $|x| \cdot (x^4 2x^2 3) > 0$.
- 2. (экон.-86.3) Решить уравнение $\sqrt{3x+4} \cdot (9x^2+21x+10) = 0$.
- 3. (геол-88.2) Решить неравенство $(x^2 + 8x + 15) \cdot \sqrt{x+4} \ge 0$.
- 4. (ВМиК-78.1) Решить неравенство $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} > 0$.
- 5. (экон.К-86.3) Решить неравенство

$$(8x^2 - 6x + 1)\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \ge 0.$$

6. (м/м-83.1) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \ge \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$$
.

7. (м/м-95(1).2) Решить уравнение
$$\frac{|x^3| - |5x|}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0.$$

8. (геол-95.3) Решить систему

$$\begin{cases} x^3 \cdot \sqrt{x - y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$$

9. (псих-81.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$$

- 10. (экон.К-83.2) Решить уравнение $\sqrt{4-x^2}(\sin 2\pi x 3\cos \pi x) = 0$.
- 11. (м/м-95.3) Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x \frac{\pi}{6}\right) = 0.$
- 12. (ВМиК-98(1).3) Решить уравнение $tgx \cdot \sqrt{\sin x 2\cos x 1} = 0$.
- 13. (ВМиК-87.4) Решить уравнение

$$(2+3\cos 2x)\cdot(\sqrt{2\cos 2x+3\sin x+3}-2\sin x+1)=0.$$

14. (ВМиК-87.4) Решить уравнение

$$(4\sin x + 1 + \sqrt{3 + 5\cos 2x - 16\sin x})(1 + 3\cos 2x) = 0.$$

- 15. (геогр-95(1).3) Решить уравнение $\frac{\operatorname{tg} x \cdot (\cos 2x + 3\sin x 2)}{\sqrt{187\pi^2 + 36\pi x 36x^2}} = 0.$
- 16. (м/м-97.1) Решить уравнение $(2\sin^2 x 3\sin x + 1) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$
- 17. (экон.К-87.1) Решить уравнение $(2\sin x 1)\sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0.$
- 18. (экон.-96.3) Решить уравнение

$$\left(\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3} - \operatorname{tg}x\right) \cdot \sqrt{6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2} - \cos x - 3} = 0.$$

19. (ИСАА-95.5) Решить неравенство

$$\sqrt{4x - x^2 - 3}(\sqrt{2}\cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) > 0.$$

20. (ИСАА-95.5) Решить неравенство

$$\sqrt{2-x-x^2}\cdot(\sqrt{2}\cdot\sin x-\sqrt{1-\cos 2x})\geq 0.$$

21. (м/м-81.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

22. (м/м-93(2).3) Решить систему

$$\begin{cases} (\cos y + \sin x - 1) \cdot \left(\operatorname{tg}^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{tg}^2 \left(y + \frac{\pi}{6} \right) \right) = 0, \\ (\sin x - \cos y) \cdot \left(2 - \sin 2y + \sin y \right) = 0. \end{cases}$$

23. (био-88.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{2} + \sin\frac{\pi(2x-y-2)}{6}\right) \cdot \left(\sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3\right) = 0, \\ 3\cos\frac{\pi x}{2} + \sin\frac{\pi(2x-y)}{6} = \sqrt{3}\cos\frac{\pi(2x-y)}{6}. \end{cases}$$

24. (экон.-91.5) Найти площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$(x^2 + y^2 - x - y) \cdot (x^2 + y^2 - 1) \le 0.$$

25. (экон.-92.2) Решить неравенство

$$(2-3^{x-5}-3^{5-x})^{-1}\cdot (x^2-7x+10)\cdot \sqrt{x+1}\geq 0.$$

26. (экон.-92.2) Решить неравество

$$\left(4^{x-1}+4^{1-x}-2\right)^{-1}\cdot (x^2-5x+4)\cdot \sqrt{7-x}\leq 0.$$

- 27. (геол-88.3) Решить уравнение $(2x^2 5x + 2) \cdot (\log_{2x}(18x) + 1) = 0$.
- 28. (почв-80.4) Решить неравенство $(4x^2 16x + 7)\log_2(x 3) > 0$.
- 29. (хим-84.1) Решить неравенство $\frac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \ge 0.$

30. (м/м-81.1) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \ge 0$$

31. (м/м-89.2) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3(\frac{5}{2}-x)+\log_32}\leq 0.$$

32. (геол-95.5) Решить уравнение

$$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x + 3\pi) - \operatorname{tg}(\pi x - \pi/2)\right) \cdot \log_2(4 - x^2) = 0.$$

- 33. (ИСАА-92.5) Решить неравенство $\log_{1/2} |\cos x| \cdot \log_5(x^2 9) < 0$.
- 34. (геол-93.1) Найти численное значение выражения

$$\left(rac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}
ight)\cdot \left(rac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}
ight)^2$$

35. (геол-96.5) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - xy = 20y, \\ 5xy - 5y^2 = 4x. \end{cases}$$

- 36. (почв-98(1).2) Решить неравенство $(x^2 4x)^2 \ge 16$.
- 37. (псих-90.3) Найти все решения неравенства

$$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 - 32x}\right)^2 \le 1.$$

38. (геогр-96(1).4) Решить неравенство

$$\frac{(3x - 2\arccos(-1/2)) \cdot (x - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{7})^2}{x - 8\sin(241\pi/12)} \le 0.$$

- 39. (био-83.1) Решить уравнение $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$.
- 40. (почв-94.1) Решить уравнение $\sin^3 x \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.
- 41. (псих-84.3) Решить уравнение $2(\cos x 1) \cdot \sin 2x = 3\sin x$.

- 42. (почв-96(1).5) Решите уравнение $(1 \cos 8x) \text{tg} x = 6 \sin^2 4x \cdot \text{ctg} x$.
- 43. (физ-86.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y = x, \\ 2\sin x + \sin 2x = 2\cos^2 \frac{x}{2}. \end{cases}$$

44. (био-89.3) Решить уравнение

$$\sin x \cdot (3\sin 2x\sin^3 x + 12\sin 2x\sin x - 16\cos x) + 2\sin 4x = 0.$$

- 45. (физ-90.3) Решить уравнение $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 2x$.
- 46. (геол.
ОГ-88.2) Найти все значения α , удовлетворяющие равенству

$$\frac{\sin 20^{\circ}}{\sin(4\alpha + 60^{\circ})} = 1.$$

47. (геогр-79.2) Решить уравнение
$$\sin(x-\frac{\pi}{6})-\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\cos(x+\frac{\pi}{4})$$
.

- 48. (ВМиК-88.2) Решить уравнение $\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x 1)$.
- 49. (био-97.2) Решить уравнение $\sin 2x \sin 4x = (\cos 2x + 1) \cdot \cos 3x$.
- 50. (физ-97(1).1) Решить уравнение $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$.
- 51. (фил-81.1) Решить уравнение

$$\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-8x\right)+\cos 6x=1.$$

- 52. (фил-78.3) Решить уравнение $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.
- 53. (экон.К-88.2) Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x 1 = 2\cos x$.
- 54. (ВМиК-78.2) Решить уравнение

$$(1+\operatorname{tg}^2 2x)\left(\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4}\right)=$$

$$\frac{1}{\cos^2 2x} \left(\sin \frac{x}{4} \cos \frac{5}{4} x - \sin \frac{7}{4} x \cos \frac{21}{4} x \right).$$

55. (био-77.4) Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right).$$

56. (экон.-88.3) Решить уравнение

$$\sin(x+\pi/4)\cdot\cos(4x-\pi/4)=\cos x\cdot\cos 2x.$$

- 57. (био-82.2) Решить уравнение $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$.
- 58. (ИСАА-98.1) Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 6x = 1$.
- 59. (хим-95.3) Решить уравнение $\cos 2x = 2(\cos x + \sin x)$.
- 60. (псих-91.2) Решить уравнение

$$(\cos x - 1) \cdot (\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - 1) = \sin^2 x.$$

61. (почв-78.5) Решить уравнение

$$\sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}})=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

- 62. (почв-88.3) Решить уравнение $3 \cdot 4^x 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.
- 63. (геол-98(1).2) Решить уравнение $\log_{9}(4^{x}-2\cdot 18^{x})=2x$.
- 64. (геол-86.3) Решить уравнение $\frac{2 \cdot 6^x 4^x 15}{6^x 9^x 5} = 3.$
- 65. (хим-93(1).4) Решить систему

$$\begin{cases} 6x^2 + 17xy + 7y^2 = 16, \\ \log_{2x+y}(3x + 7y) = 3. \end{cases}$$

- 66. (ВМиК-98(1).1) Решить неравенство $\frac{1}{\log_2 \frac{4}{\pi}} \ge \log_2 \frac{x}{8} 1.$
- 67. (геол-90.4) Решить неравенство $\frac{\log_{1/5}\left(\frac{1}{x^{18}}\right)-2}{\log_{125}x^{12}} \leq 4-\frac{7}{\log_x 5}.$

68. (ВМиК-94.3) Найти все отрицательные значения u, при которых выполнено неравенство $\frac{1}{\log_{3\cos u} 3} + \frac{1}{\log_{3}(\frac{\cos u}{3})} \geq 0.$

69. (псих-78.1) Решить уравнение

$$(\log_3 \frac{3}{x})\log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.$$

70. (физ-93.1) Решить неравенство
$$\frac{2x-1}{2^x-1} < 0.$$

71. (геол-95.4) Решить неравенство
$$\frac{3^x-2}{x^2-6x+5} \leq 0$$
.

72. (почв-97(1).4) Решить неравенство
$$\frac{(\log_2 3)^x - (\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x} - x(\log_2 3)} > 0.$$

73. (экон.-93.1) Решить неравенство
$$\log_{7\pi-6} 25 < 2$$
.

74. (ВМиК-97.2) Решить неравенство
$$\log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2} \frac{1}{2}$$
.

75. (м/м-94(2).3) Решить неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \le \frac{1}{\log_6(6x^2 - 6x + 1)}.$$

76. (псих-98.3) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{16-3x^2+22x} \leq 0.$$

77. (м/м-98(2).2) Решить неравенство

$$\frac{1 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x + 4} + \log_{\frac{1}{2}} (13 - x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \ge 0.$$

78. (фил-77.3) Найти наименьший положительный корень уравнения $\cos \pi x^2 = \cos(\pi (x^2 + 2x + 1)).$

79. (геогр-97.2) Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos(\pi(x^2 - x + 1)) = \cos(\pi(x - 1)).$$

80. (геол-96.3) Найти все решения уравнения

$$\frac{\cos 10x - \cos 8x}{2x^2 + \pi x - \pi^2} = \frac{\cos 6x - \cos 4x}{2x^2 + \pi x - \pi^2},$$

принадлежащие интервалу $(0; \pi)$.

- 81. (экон.К-83.6) Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство $a^3x^4 + 6a^2x^2 x + 9a + 3 \ge 0$.
- 82. (экон.-84.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^{3}\sqrt{a^{3}+a^{2}-a-1}-x^{2}\sqrt{a^{3}+a^{2}}+x\sqrt{a^{4}-a^{2}}-a^{2}\leq 0$$

удовлетворяет условию $a \le x \le 2a + 1$.

83. (м/м-87.5) Найти все пары значений параметров a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y).

84. (соц-97.6) Укажите все неотрицательные значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin(2a)\cdot\sin^2(ax)+1=(1+\sin(2a))\cdot\sin(ax)$$

имеет ровно 4 решения на отрезке $[-\pi;\pi]$.

85. (псих-85.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} -15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7, \\ x < y, \\ 2a^2x + 3ay < 0. \end{cases}$$

86. (псих-85.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7, \\ x + y > 0, \\ 4a^2x - 3ay < 0. \end{cases}$$

§8. Раскрытие модулей в смешанных уравнениях и неравенствах.

В этом параграфе собраны задачи, в которых под знаком модуля стоят степенные, тригонометрические, показательные, логарифмические функции и их комбинации, а также выражения, зависящие от нескольких переменных или параметров.

Приведем уже упоминавшиеся в $\S 2$ способы решения уравнения вида |f(x)|=g(x):

1-й способ: Уравнение |f(x)|=g(x) эквивалентно совокупности двух систем

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0. \end{array} \right. \qquad \text{if} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -f(x)=g(x), \\ f(x)\leq 0. \end{array} \right.$$

2-й способ: Уравнение |f(x)|=g(x) эквивалентно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right.$$

Неравенство вида |f(x)| > (<)g(x) также можно решить двумя способами.

1-й способ:

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \left[egin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0. \\ -f(x) > g(x), \\ f(x) \leq 0. \end{array}
ight.$$

$$|g(x)| < g(x) \Leftrightarrow \left\{egin{array}{ll} f(x) < g(x), \ f(x) \geq 0. \ -f(x) < g(x), \ f(x) \leq 0. \end{array}
ight.$$

2-й способ: использование геометрического смысла модуля числа.

$$|f(x)|>g(x) \iff \left\{egin{array}{l} g(x)<0,\ f(x)-\ ext{oпределена},\ g(x)\geq0,\ \left\{egin{array}{l} f(x)>g(x),\ f(x)<-g(x). \end{array}
ight. \end{array}
ight.$$
 и $|f(x)|< g(x) \iff \left\{egin{array}{l} g(x)>0,\ -g(x)< f(x)< g(x), \end{array}
ight.$

Можно пользоваться более краткими (но эквивалентными) соотношениями

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[egin{array}{l} f(x)>g(x),\ f(x)<-g(x). \end{array}
ight.$$
 If $|f(x)|< g(x) \Leftrightarrow -g(x)< f(x)< g(x).$

Аналогично решаются неравенства со знаками ">" и " < ".

Выбор способа решения зависит от вида функций f(x) и g(x). Если проще функция f(x) (например, f(x) – линейная, а g(x) – квадратичная), то лучше решать задачу 1-м способом, иначе – 2-м способом. Обычно второй способ оптимальнее.

Часто задачи с модулями имеют следующий вид: $|f(x)| + |g(x)| \le f(x) \pm g(x)$ или $|f(x)| = \pm f(x)$, $|f(x)| \ge f(x)$, $|f(x)| \le f(x)$ и т.д. Такого типа задачи предпочтительнее решать не стандартными способами, а, например, так (докажите самостоятельно):

$$|f(x)| + |g(x)| \le f(x) + g(x) \iff \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

 $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \le 0.$

Задачи с двумя и более модулями общего вида, а также задачи на нахождение площади плоской фигуры решаются обычно стандартным образом, рассматривая все случаи раскрытия модулей.

1. (физ-96(2).3) Решить неравенство $-1 < |x^2 - 9| < 27$.

- 2. (геол-91.2) Решить уравнение $|x^2-2x-1|-x+1=0$.
- 3. (экон.К-78.1) Найти все корни уравнения $|x^2+x-1|=2x-1$ удовлетворяющие неравенству $x<\frac{\sqrt{3}}{3}.$
- 4. (ВМиК-97(1).3) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 4y + 3| + y = 1, \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$$

- 5. (био-98.2) Решить неравенство $|x^2+x-2|+|x+4| < x^2+2x+6$.
- 6. (экон.К-84.2) Найти наименьшее значение функции

$$y = 2|x - 3| + |3x - 2|.$$

- 7. (фил-84.3) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^2 + 3|x-1| + 2$ на отрезке [-2;2].
- 8. (псих-85.4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=|x^2+x|+|x^2-3x+2|$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.
- 9. (био-82.4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x) = x + \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 2x + 1)}$$
 на отрезке $\left[-4, -rac{5}{4}
ight]$.

- 10. (экон.-90.2) Решить уравнение $\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|$.
- 11. (био-83.3) Решить неравенство $8+6\cdot |3-\sqrt{x+5}|>x$.
- 12. (ВМиК-98(1).2) Решить неравенство

$$|\sqrt{x-4}-3| > |\sqrt{9-x}-2| + 1.$$

13. (ВМиК-98(1).2) Решить неравенство

$$|\sqrt{-2x-4}-3|<|\sqrt{9+2x}-2|+1.$$

- 14. (геол-95(1).7) Пусть $f(x) = \sqrt{x^2 4x + 4} 3$, $g(x) = \sqrt{x} a$, a— параметр. Решить относительно x неравенство f(g(x)) < 0.
- 15. (ВМиК-95(1).4) Для каждого значения a решить неравенство

$$|x+2a|\leq \frac{1}{x}.$$

16. (ВМиК-95(1).4) Для каждого значения а решить неравенство

$$\left|\frac{1}{x}+2a\right|>x.$$

17. (геол-86.5) Для каждой пары положительных чисел a и b найти решение неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{b} \right|.$$

18. (геогр-78.5) Найти все значения параметра а, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0. \end{cases}$$

19. (геогр-78.5) Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 2)x + a(a - 4) = 0. \end{cases}$$

- 20. (хим-92.5) Найти все значения параметра k, при которых уравнение $2x-|x-k^2|=11k-3|x+4k|$
 - а) не имеет решений;
 - б) имеет конечное непустое множество решений.
- 21. (геол-81.3) Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} y \le 6 - 2|x|, \\ y \ge 2 + 2|x|. \end{cases}$$

22. (ИСАА-96.2) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y \ge -|x| - 1, \\ y \le -2|x| + 3. \end{cases}$$

- 23. (геол.ОГ-81.4) Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условием $|x|+|y-1|\leq 4$.
- 24. (экон.-94.4) Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием |2y+3x-2|+|3x+6|<6.
- 25. (геол.ОГ-80.5) Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости следующими условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} ||x-y|-|y-1|| = x-2y+1, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1. \end{array} \right.$$

- 26. (экон.-88.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $\left|y-\frac{1}{2}x^2\right|+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right|\leq 2+x.$
- 27. (экон.-88.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $2 \cdot (2-x) \ge |y-x^2| + |y+x^2|$.
- 28. (экон.М-96.6) При каких значениях p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием $|2x+y|+|x-y+3| \le p$, будет равна 24?
- 29. (псих-89.2) Решить уравнение $\left|\cos^2\frac{x}{2} \frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1.$
- 30. (геол-89.3) Найти все решения уравнения $\frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 \cos 2x$ на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$.
- 31. (экон.К-77.1) Решить уравнение $\frac{\cos x}{(x+\frac{3}{2})^2} = |\cos x|$.
- 32. (почв-77.3) Решить уравнение $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$.

- 33. (био-98.3) Решить уравнение $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2} \sin x \left(\cos x \frac{2}{3}\right)$.
- 34. (почв-91.3) Решить уравнение $\sqrt{2}\cos(x+\pi/4) \sin x = |\cos x|$.
- 35. (reorp-97(1).3) Решить уравнение $|\cos x| \cos 3x = \sin 2x$. В ответе указать сумму корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-8\pi; 7\pi]$.
- 36. (почв-97.3) Решить уравнение $2\sin^2 x \frac{|\sin x|}{\cos x} = 0$.
- 37. (ВМиК-81.5) Найти все решения уравнения $|\sin(2x-1)| = \cos x$, удовлетворяющие условию $|x| < 2\pi$.
- 38. (экон.К-86.1) Решить уравнение $2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}$.
- 39. (ВМиК-79.2) Решить уравнение $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$.
- 40. (ВМиК-88.4) Решить неравенство $8^x > 6 \cdot 9^{|x-1|}$.
- 41. (ВМиК-88.4) Решить неравенство $25^{x+1} > 15 \cdot 27^{|x-1|+1}$.
- 42. (M/M-93(1).1) Решить неравенство $5\left(\sqrt[6]{\frac{1}{5}}\right)^{35x} < 5^{|x^2+6x-1|}$.
- 43. (м/м-98(1).1) Решить уравнение $2^{2x}-2^{x+2}+\left|2^x-\frac{1}{3}\right|=-\frac{7}{3}$.
- 44. (м/м-97(2).1) Решить неравенство $\frac{21-2^x-2^{6-x}-|2-2^x|}{5-|3-2^x|}\geq 1.$
- 45. (почв-84.3) Решить неравенство $\log_2 \left| 1 + \frac{1}{x} \right| > 1$.
- 46. (физ-95(2).5) Решить неравенство $|\log_7(x+2)| > 1$.
- 47. (экон.К-85.2) Решить неравенство $x \log_{1/2} \left(\frac{1}{3} x \right) \ge |x|$.
- 48. (геол-92.3) Решить уравнение $|3\log_x x^4 + 7\log_7 2\cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49$.

49. (ВМиК-95(1).2) Решить уравнение

$$|1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6)| = 1 - \log_{2x}(x^2 - 5x + 6).$$

$$50.$$
 (экон.-91.2) Решить неравенство $\log_{1/7}\log_3\frac{|-x+1|+|x+1|}{2x+1}\geq 0.$

51. (экон.М-99.1) Решить неравенство

$$\log_{1+|7x+17|} (|3x+8|+|7x+17|) \le 1.$$

52. (ВМиК-93.3) Решить неравенство

$$|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| < 3^x + 4x - x^2 - 7.$$

53. (хим-96.5) Решить уравнение

$$|1 + \cos(\pi\sqrt{x})| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45.$$

54. (экон.-97.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left| \sin \frac{\pi(x+y)}{4} \right| + \left| 1 - \sin \frac{\pi(x-y)}{4} \right| = 0, \\ \sqrt{4 - |x| - |y+2|} = \sqrt{4 - |x| - |y+2|}. \end{cases}$$

55. (экон.-97.1) Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} |\cos\frac{\pi(x+y)}{4}| + |1 + \cos\frac{\pi(x-y)}{4}| = 0, \\ \sqrt{4 - |x| - |y+4|} = \sqrt{4 - |x| - |y+4|}. \end{array} \right.$$

56. (экон.-96.2) Решить неравенство

$$\frac{\log_7(19 - 16x|x|) - \log_{49}(1 - 4x)^2}{3 - 4x - |4x - 3|} \le 0.$$

§9. Обратные тригонометрические функции. Тригонометрические неравенства. В этом параграфе собраны задачи с обратными тригонометрическими функциями и задачи, в решении которых главным элементом является решение тригонометрических неравенств.

Для успешного решения задач с обратными тригонометрическими функциями обычно достаточно знать основные тригонометрические формулы и определения обратных тригонометрических функций. Основные тригонометрические формулы были приведены в §1, рекомендуем повторить их перед началом этого занятия. Приведем определения обратных тригонометрических функций.

- Арксинусом числа x называется такое число $y=\arcsin x$, которое удовлетворяет двум условиям: $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin y=x$.
- Арккосинусом числа x называется такое число $y = \arccos x$, которое удовлетворяет двум условиям: $y \in [0; \pi]$ и $\cos y = x$.
- Арктангенсом числа x называется такое число $y=\arctan y$, которое удовлетворяет двум условиям: $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $\mathrm{tg}y=x$.
- Арккотангенсом числа x называется такое число $y = \operatorname{arcctg} x$, которое удовлетворяет двум условиям: $y \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} y = x$.

Если тригонометрическое неравенство возникает как дополнительное ограничение (например, ОДЗ) при решении УРАВНЕНИЯ, тогда лучше сначала решить уравнение, а затем произвести отбор полученных корней посредством подстановки в это неравенство. В других задачах тригонометрические неравенства лучше всего решать на тригонометрическом круге.

- 1. (ИСАА-95.1) Найти x, если известно, что числа -1, x+2, $\sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.
- 2. (Ткачук-7.1) Найти $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.
- 3. (Ткачук-7.2) Найти $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$.
- 4. (Ткачук-7.13) Найти arccos(cos 10).
- 5. (Ткачук-7.4) Найти arcsin(sin 14).

- 6. (Ткачук-7.3) Вычислить $2\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23}$.
- 7. (Ткачук-7.5) Доказать, что для любого $x \in [-1;1]$ выполняется равенство π

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

- 8. (Ткачук-7.6) Доказать, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
- 9. (Ткачук-7.7) Доказать, что $\arccos(-x) = \pi \arccos x$.
- 10. (Ткачук-7.8) Решить уравнение $\sin(5\operatorname{arcctg} x) = 1$.
- 11. (Ткачук-7.17) Решить уравнение $\sin(3\arccos x) = \frac{1}{2}$.
- 12. (Ткачук-7.9) Решить уравнение $\arcsin x \operatorname{arcctg} x = 0$.
- 13. (Ткачук-7.10) Решить уравнение

$$\arctan(2+\cos x)-\arctan(1+\cos x)=\frac{\pi}{4}.$$

- 14. (Ткачук-7.16) Решить уравнение $2\arcsin x + \arccos(1-x) = 0$.
- 15. (экон.М-99.4) Решить уравнение

$$x = \frac{1}{6}\arctan(tg6x + \cos 7x).$$

16. (экон.В-99.6) Решить уравнение

$$x + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x) = \frac{\pi}{10}.$$

17. (экон.-99.5) Решить уравнение

$$x+\frac{1}{6}\arccos(\cos 15x+2\cos 4x\sin 2x)=\frac{\pi}{12}.$$

18. (экон.-93.4) Найти периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin((y-1)^2) \le \pi(x+2), \\ 2|y-1|-x \ge 0. \end{cases}$$

19. (экон.-93.4) Найти периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} |x-3|\arccos((y-1)^2) \le \pi(3-x), \\ 3|y-1|+x \ge 0. \end{cases}$$

- 20. (экон.-95.5) Найти все $x \in [-3;1]$, для которых неравенство $x \cdot (\pi(x+1) 4\mathrm{arctg}(3m^2 + 12m + 11)) > 0$ выполняется при любых целых m.
- 21. (ВМиК-96.4) Решить неравенство

$$\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \le \frac{7\pi}{6}$$
.

22. (ВМиК-96.4) Решить неравенство

$$\arccos(2x) + \arccos(1-x) > \arccos\frac{1}{3}$$
.

23. (м/м-98(2).4) Найти все значения параметра k, при которыххотя бы одна общая точка графиков функций

$$y=-rac{2}{3}-rcsin x$$
 и $y=-rac{2}{3}-2rctg k x$

имеет положительную ординату.

24. (экон.-96.6) Найти все значения а, при которых фигура, заданная на координатной плоскости условием

$$|y| \le \left(\sqrt{a-|x|}\right)^2 + \arcsin(\sin(a-|x|)),$$

представляет собой 14-угольник.

- 25. (геол-94.6) Решить неравенство $4\cos x \sin 2x > 0$.
- 26. (хим-92.2) Решить неравенство $\sqrt{2 \sin x} < 1$.
- 27. (хим-98(1).3) Найти все числа x из промежутка $[-\pi;\pi]$, удовлетворяющие неравенствам

$$(4+\sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} + 1 \le \cos 2x \le 5\cos x - 3.$$

28. (почв-96.4) Найти все решения уравнения

$$\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x},$$

удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$.

- 29. (почв-82.2) Решить уравнение $\sqrt{2-3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.
- 30. (псих-87.4) Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{4} \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} \cos 3x}$.
- 31. (экон.К-85.1) Решить уравнение $\sqrt{\sin x} = \sqrt{1 2\sin^2 x}$.
- 32. (хим-88.2) Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x 1 + \sin x} = 0.$
- 33. (м/м-85.1) Решить уравнение $6\sin x \frac{1}{6} = \sqrt{34\sin x \frac{35}{36}}$.
- 34. (геогр-77.5) Решить уравнение $2\sin(3x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$.
- 35. (м/м-98(2).1) Решить уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\sin 2x + (\sqrt{3} + 1)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = 0.$$

- 36. (ВМиК-93.2) На отрезке $0 \le x \le \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{3}\cos x \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x \sqrt{3}\sin 2x}$.
- 37. (фил-92.1) Решить уравнение $\frac{(\sqrt{3}\sin x \cos x)^2}{2\sin 2x \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$
- 38. (ВМиК-97.3) Решить уравнение

$$3+|\sin x-3\cos x|=3\sin x+\cos x.$$

39. (м/м-92.1) Решить уравнение
$$7\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=1.$$

- 40. (физ-95(2).7) При каких значениях x числа $a_1=\sin x, \qquad a_2=\frac{1}{2}\sin 2x, \qquad a_3=\sin 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?
- 41. (м/м-95(1).4) Найти все значения $x \in [0;\pi]$, при которых выражения $\mathrm{tg}x$ и $\frac{1}{\cos 2x} 2\cos 2x$ имеют разные знаки.
- 42. (м/м-97(2).3) Найти ближайший к числу $\frac{13\pi}{4}$ корень уравнения $\sin x \cos 2x + \sin x + \frac{10}{11} \sin 2x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{30}{44}$.
- 43. (ИСАА-94.4) Решить неравенство

$$2\sin x - 1 \le \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}.$$

44. (хим-77.5) Найти все решения уравнения

$$2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos(2x-\frac{\pi}{4})>0.$

45. (м/м-98(1).2) Найти все решения уравнения

$$2\cos\frac{x}{3} + 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} = 2 - \sqrt{5},$$

удовлетворяющие условию $\cos \frac{3x}{4} < 0$.

46. (псих-96.3) Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x - 2\sin 2x \cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

47. (экон.-88.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

 $|3\sin^2x+2a\sin x\cdot\cos x+\cos^2x+a|\leq 3$ выполняется для любых значений x.

48. (экон.-88.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|5\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a + 1| \le 6$$
 выполняется для любых значений x .

- 49. (м/м-94(1).1) Число x удовлетворяет условиям tg2x = -3/4 и $\sin 2x > 0$. Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{tg(\pi/6)} tgx$ и чему оно тогда равно?
- 50. (м/м-83.2) Решить уравнение

$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

- 51. (геогр-96.3) Решить уравнение $\log_{(\cos x)}(\sin x + \cos 2x) = 0$.
- 52. (экон.-95.2) Решить уравнение $2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x} \left(-\frac{|\cos x|}{\sin x} \right) = 0.$
- 53. (хим-89.3) Решить уравнение $\log_2(3\sin x \cos x) + \log_2\cos x = 0$.
- 54. (ВМиК-95.4) Решить неравенство

$$\log_{\cos x} \cos^2 x \ge \log_{\cos x - 1/2} \left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4} \right).$$

55. (ВМиК-89.4) Решить неравенство

$$1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3} \cdot \log_{|\cos x|} \left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

§10. Эквивалентные преобразования в смещанных уравнениях и неравенствах.

В этом параграфе собраны задачи с различными элементарными функциями: тригонометрическими, показательными, логарифмическими и т.д. Никаких новых методов в этом параграфе не будет. Надо аккуратно применить уже известные вам методы и формулы из предыдущих

параграфов. При этом необходимо только следить за равносильностью преобразований.

- 1. (геогр-79.5) Найти все решения неравенства $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geq 0,$ лежащие в интервале -21/5< x<0.
- 2. (геогр-98.1) Решить неравенство $\frac{\sqrt{-4x^2+13x-3}+1}{\log_{2x}7} \geq 0.$
- 3. (фил-80.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y-x=5, \\ zx=(z-4)y+30, \\ 2zx=(2z-4)y. \end{cases}$$

4. (экон.К-80.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

5. (экон.К-79.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5. \end{cases}$$

6. (фил-82.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

- 7. (экон.М-95.2) Решить уравнение $\frac{\sin 3x}{2\cos 2x + 1} = 0$.
- 8. (геол-82.4) Решить уравнение $\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$.
- 9. (псих-98.4) Решить уравнение $tg8x tg6x = \frac{1}{\sin 4x}$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

- 10. (почв-98(1).4) Решить уравнение ctgx + ctg(2x) = -tg(3x).
- 11. (м/м-87.1) Решить уравнение $\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}$.
- 12. (м/м-94(2).1) Решить уравнение $\frac{4\sin x 2\cos 2x 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x 2} = 0.$
- 13.) $_{\rm A/M}$ -84.2) Среди корней уравнения $\frac{\cos 2\pi x}{1+{\rm tg}\pi x}=0$ найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.
- 14. (экон.-94.3) Решить уравнение $\log_3((x+10)\cos x) = \log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right)$.
- 15. (м/м-82.4) Найти все значения x, для каждого из которых выражение $\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin(\pi(2x+16x^2))$

имеет смысл и не обращается в нуль.

- 16. (м/м-77.3) Решить уравнение $3^{\frac{1}{2} + \log_3 \cos x} + 6^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2} + \log_9 \sin x}$
- 17. (м/м-90.2) Решить уравнение $2^{|x-2|\sin x} = \left(\sqrt{2}\right)^{x\cdot |\sin x|}$.
- 18. (м/м-98.3) Решить уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1 - \sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0.$$

19. (соц-97.5) Решить систему

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2}x - 1| = \sqrt{2}x - 1. \end{cases}$$

20. (экон.-77.3) Найти все положительные числа x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5(y-x/3)}, \\ x^3 = y^{-1}. \end{cases}$$

21. (экон.-97.2) Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \le 1.$$

22. (м/м-84.4) Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{array} \right.$$

- 23. (ВМиК-95(1).3) Найти все корни уравнения $2^{\cos x} + 5 \cdot 2^{-\cos x} = 2\sqrt{6}$, удовлетворяющие неравенствам $\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$.
- 24. (экон.К-78.3) Решить уравнение $3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} (\frac{75x}{4} \frac{11}{x}).$
- 25. (экон.-78.1) Решить уравнение $\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$.
- 26. (био-81.1) Решить уравнение $3\log_8(x-2) = \log_2\sqrt{2x-1}$.
- 27. (фил-78.4) Решить уравнение

$$\log_9(x^2 - 5x + 6)^2 = 2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\frac{x - 1}{2} + \log_3|x - 3|.$$

28. (физ-90.5) Определить, при каких значениях a уравнение

$$\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2$$

имеет решение, и найти эти решения.

- 29. (геол-78.3) Решить неравенство $\log_3 \log_{9/16}(x^2 4x + 3) \le 0.$
- 30. (экон.К-83.3) Решить неравенство $\log_3(x^2-2) < \log_3(\frac{3}{2}|x|-1).$
- 31. (био-82.1) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(1+x-\sqrt{x^2-4}) \leq 0.$

32. (геогр-83.2) Решить неравенство

$$\log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + 3) > \log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x + 1} + 1} + 1.$$

- 33. (фил-82.2) Найти все числа x, каждое из которых удовлетворяет одновременно следующим условиям:
 - 1) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{x+6} \le \log_{\frac{1}{4}}(x+4),$
 - $x + 1\frac{1}{2}$ целое число.
- 34. (почв-98(1).3) Решить уравнение

$$\log_{0,5} \left(\log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0.$$

35. (м/м-98(1).3) Решить неравенство

$$\begin{split} \log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\log_3(-2x-x^2) \geq \\ \geq \log_3\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right)\cdot\log_2(-2x-x^2). \end{split}$$

36. (био-84.3) Решить уравнение

$$\sqrt{4 + 2\log_2\left[1 - \frac{8x}{(2x+1)^2}\right]} = \log_2\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) + 2\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- 37. (геогр-92.3) Решить неравенство $(\log_x 9 1) \cdot \log_3(9x) \le 3$.
- 38. (ВМиК-87.3) Решить неравенство $\log_{(x+1)^2} 8 + 3 \log_4(x+1) \ge 9 \frac{1}{4}$.
- 39. (хим-87.2) Решить неравенство

$$4\log_2 x + \log_2\left(\frac{x^2}{8(x-1)}\right) \le 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x.$$

40. (ВМиК-91.3) Решить неравенство $49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2 \ge 0$.

41. (экон.К-79.5) Решить неравенство

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \ge 0.$$

42. (ВМиК-81.2) Решить уравнение
$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{1/26}(2+5x-x^2)}$$
.

43. (почв-96.3) Решить уравнение
$$x^{2 \log_4 x} = \frac{8}{x^2}$$
.

44. (био-93.2) Решить уравнение

$$\log_2(9^x + 2 \cdot 3^x - 5) = 1 + 2\log_4(3^{x+1} - 4).$$

45. (псих-98.2) Какое из двух чисел больше:

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{2401}{36}\right) + 2$$
 или $\operatorname{tg}\left(\frac{226\pi}{17}\right)$?

46. (геол-93.4) Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{\lg(\pi/9)}(x^2) \ge \log_{\lg(\pi/9)}(\sqrt{2x+3}).$$

47. (ВМиК-97(1).1) Решить неравенство
$$\sqrt{\log_{(\lg(3\pi/16))}(x-2)} \ge 1$$
.

48. (ИСАА-96.3) Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{36 - x^2} \log_3(x^2 + 2x - 8)}{2 \sin x - 1}.$$

49. (геогр-97.3) Решить уравнение

$$\log_{|\sin(\pi x/4)|}(9^x - 3^{x+3} + 30) = \log_{|\sin(\pi x/4)|}(3^x + 3).$$

50. (геогр-95(1).6) Найти все значения a, при каждом из которых функция

$$y(x) = \log_{25-a^2}(\cos x + \sqrt{8}\sin x - a)$$

определена при всех значениях переменной x.

51. (физ-96.5) Решить систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_2(2x^2 - y^2) = 2, \\ 6\log_8(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{array} \right.$$

52. (фил-77.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$$

53. (псих-77.2) Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(1+2\log_{|xy|}2\right)\cdot\log_{x+y}|xy|=1,\\ x-y=2\sqrt{3}. \end{array} \right.$$

54. (м/м-89.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

55. (хим-96.3) Решить систему

$$\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$$

56. (псих-91.3) Решить систему

$$\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$$

57. (экон.К-77.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y} = x^{\frac{2}{5}}, \\ 1 + \log_x (1 - \frac{3y}{x}) = \log_x 4. \end{cases}$$

58. (экон-98.1) Решить неравенство $\log_{\frac{4x-1}{11}} (7x-2x^2) \leq 0.$

59. (ИСАА-98.5) Решить неравенство
$$\log_{2x-3}(\sqrt{x+2}+x-3) \le 1$$
.

60. (м/м-91.2) Решить неравенство
$$\frac{\log_3(1-3x/2)}{\log_9 2x} \ge 1.$$

61. (почв-79.2) Решить неравенство
$$\frac{1}{\log_3(x^2-7x+12)} < \frac{1}{\log_3 20}$$
.

- 62. (ИСАА-91.5) Решить неравенство $\log_{\log_{1/2} x} (\log_{1/7} x) > 0$.
- 63. (физ-97(1).7) Найти все значения a, при которых неравенство $\log_a(x^2+4)>1$ выполняется для всех значений x.
- 64. (физ-96(1).7) Для каждого допустимого значения a решить неравенство $2 \log_a x < \log_a (x-1)$.
- 65. (экон.-85.3) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$$

имеет решения, и найти все эти решения.

66. (м/м-97.2) Решить неравенство
$$\left(1-\frac{x}{2}\right) \cdot \log_{13-3\cdot 2^x} 4 \le 1.$$

67. (экон.-87.4) Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3.$$

68. (ВМиК-85.4) Решить неравенство

$$\frac{2\log_{1-3|x|}\left(42x^2 - 14|x| + 1\right)}{\log_{1-3|x|}\left(x - \frac{5}{6}\right)^2} \le 1.$$

- 69. (экон.-99.1) Решить неравенство $\log_{|x|-2} |x-3| \le 0$.
- 70. (м/м-85.4) Из трех значений a:-1,2;-0,67;-0,66 найти все те значения, при каждом из которых уравнение $(2^{a+4}+15(x+a))\cdot \left(1+2\cos\left(\pi\left(a+\frac{x}{2}\right)\right)\right)=0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию 0< x<1.

71. (м/м-98(1).6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - (a+1)x + 3(a-2)) \cdot \log_{(a-x)}(2a - x - 1) = 0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке [-1;2], а вне этого отрезка корней не имеет.

§11. Нестандартные текстовые задачи.

В этом параграфе собраны нестандартные текстовые задачи: задачи, приводящие к недопределенным системам уравнений; задачи, приводящие к неравенствам или системам неравенств; задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения некоторой величины; задачи на оптимальный выбор.

В недопределенных задачах обычно надо найти некоторую комбинацию неизвестных, что часто легко делается. Иногда полезно ввести новые переменные, после этого система уравнений становится определенной.

В задачах, приводящих к неравенствам, зачастую удается использовать целочисленность или неотрицательность некоторых переменных, что, как правило, позволяет выбрать единственное решение неравенства или системы неравенств. Иногда в задаче получается целый промежуток и именно его и надо выписывать в ответ.

В задачах на наибольшее и наименьшее значение не обязательно использовать производные, достаточно вспомнить как ведут себя линейные и квадратичные функции.

 (геол-97.6) В момент, когда два бассейна были пустыми, 4 трубы одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на 1/6 его объема, одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на 1/2 его объема, еще 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найти отношение объемов бассейнов. (Временем на переключения пренебречь).

- 2. (био-87.2) Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.
- 3. (геогр-86.3) Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 100 литров воды в минуту, во вторую 60 и в третью 80. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?
- 4. (почв-78.3) Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.
- 5. (хим-86.2) Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?
- 6. (ВМиК-89.3) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час поэже мотоциклиста?

- 7. (хим-81.3) Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найти расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.
- 8. (почв-97(1).3) Катер и яхта, отправляющиеся из портов A и B навстречу друг другу в 9^{oo} , встречаются в 13^{oo} . Катер и теплоход, отправляющиеся из этих же портов навстречу друг другу в 10^{oo} , также встречаются в 13^{oo} . Определить, на сколько километров отстанет к 19^{oo} яхта от теплохода, если они выйдут из порта A в 10^{oo} в одном направлении. Расстояние между портами A и B равняется 104 км.
- 9. (псих-82.5) Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A, не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B, если бы весь путь от A до B он прошел пешком?
- 10. (почв-83.1) Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого участка и 3/4 второго участка, а третий участок, который составляет четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?
- 11. (м/м-97(2).2) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найти разность арифметической прогрессии.

- 12. (соц-98.5) Найти все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача: "Найти арифметическую прогрессию, если известны её семнадцатый член и сумма n первых членов", не имеет решений или её решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.
- 13. (геогр-88.3) Из пункта А в пункт С, находящийся на расстоянии 20 км от А, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта В, расположенного между А и С на расстоянии 15 км от А, в пункт С вышел пешеход а из С навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом.
- 14. (фил-90.4) От двух сплавов массами 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.
- 15. (псих-86.4) В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятые в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?
- 16. (геол-94.9) Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение четырех месяцев работа не производилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношения времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год 4:1:2:5 и 10 млн.т, во второй год 2:3:2:1 и 7 млн.т,

- в третий год 5 : 2 : 1 : 4 и 14 млн.т. Сколько млн.т сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая все вместе?
- 17. (экон.К-79.3) Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.
- 18. (геогр-97(1).4) Танкер может заполняться через две трубы, причем его заполнение через первую трубу происходит на 5 часов медленнее, чем через вторую. При каких значениях времени заполнения танкера через первую трубу его заполнение через обе трубы одновременно занимает не менее 6 часов?
- 19. (фил-78.1) Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?
- 20. (экон.-85.5) Из пункта А в пункт В вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут вслед за ним вышел еще один пешеход. В пункт В сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг В не раньше, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы прибыли в пункт В с интервалом не более, чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от А до В, если скорость одного из них в 1,5 раза

больше скорости другого

- 21. (геол-87.5) В 7 часов утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, каждая с постоянной скоростью, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка прибыла на место не позднее 9 час 50 мин, а вторая не ранее 10 час 40 мин того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 2 км/час, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75% от скорости первой лодки в стоячей воде?
- 22. (экон.К-85.4) В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.
- 23. (геол-88.5) Путь из А в В проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из А в В и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т.е. менее 168 часов). За время, которое он был при этом в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорости движения автобуса по шоссе и грунтовой дороге.
- 24. (экон.-78.4) Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на пять вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?
- 25. (м/м-93(2).6) Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними

выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 60 км/час. Через 45 минут расстояние между первым и вторым мотоциклистами было в два раза больше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым мотоциклистами было равно расстоянию между первым и третьим, а расстояние, которое осталось проехать третьему мотоциклисту до A, было равно расстоянию между первым и вторым мотоциклистами через 1 час 30 минут после старта, а также было равно 2/5 расстояния между первым и третьим мотоциклистами через 1 час 30 минут после старта. Найти расстояние между пунктами A и B.

- 26. (геол.ОГ-83.5) Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 ч, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v, не превосходила 51,7 мин?
- 27. (геол-83.5) Согласно расписанию катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из A в D длиной 15 км за 1 час. При этом, выходя из пункта A в 12 ч, он прибывает в пункты B и C, отстоящие от A на расстоянии 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч 20 мин и в 12 ч 40 мин. Известно, что если бы катер двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C, D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов находится выше по течению: A или D?
- 28. (псих-84.5) Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.
- 29. (хим-97.4) п насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 2 часа, второй за 4 часа, ..., п-ый - за 2ⁿ часов. Каким должно быть наименьшее число насосов n, чтобы все n насосов,

- работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 1 час и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час?
- 30. (экон.-99.3) Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более, чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее, чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимально возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?
- 31. (экон.М-97.4) Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% в проект Y. В зависимости от обстоятельств проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможный уровень процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.
- 32. (экон.-97.4) Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс.руб., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс.руб. и не больше 60 тыс.руб. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.
- 33. (геол-97(1).7) Стоимость изготовления n банок пропорциональна $24+4n+n^2$. Определить количество банок, при котором стоимость изготовления одной банки минимальна.
- 34. (экон.М-96.3) В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс.руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс.руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес

- комплектующих равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.
- 35. (экон.-94.5) Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 \left| 90 \frac{40500}{n} \right|$ тыс.руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 \frac{3}{10}n$ тыс.руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.
- 36. (геол-94(1).8) Из пункта A в пункт B можно доехать тремя маршрутами: или через пункт C, или через пункт D, или напрямую, минуя промежуточные пункты. Известны расстояния AB=80 км, AC=40 км, AD=30 км, CB=60 км, DB=100 км. Известно, что пункты A и B, A и C, A и D связывают грунтовые дороги, а пункты C и B, D и B шоссейные дороги. Скорость на шоссе на 40 км/ч больше, чем на грунтовой дороге. Какой маршрут следует выбрать, чтобы скорейшим образом добраться из пункта A в пункт B, если скорость на грунтовой дороге более 15 км/ч, но не превышает 30 км/ч?
- 37. (ВМиК-95.5) Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью ровно 2500 кв.м. Стоимость одного дома площадью а кв.м складывается из стоимости материалов p₁a^{3/2} тыс.руб., стоимости строительных работ p₂a тыс.руб. и стоимости отделочных работ p₃a^{1/2} тыс.руб. Числа p₁, p₂, p₃ являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?
- 38. (экон.-92.3) Цех получил заказ на изготовление 5000 деталей первого типа и 3000 деталей второго типа. Каждый из 187 рабочих цеха затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он мог бы изготовить 3 детали второго типа. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы

выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

- 39. (экон.К-83.5) В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 коп., синий карандаш 13 коп. На покупку карандашей можно затратить не более 4 руб. 95 коп. При покупке число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на пять. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей, при этом красных карандашей нужно купить как можно меньше. Сколько красных и сколько синих карандашей можно купить на указанных условиях?
- 40. (м/м-81.3) В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во 2-й 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в 1-м сосуде увеличилось в p раз, а во 2-м сосуде в q раз. Известно, что pq = 9. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?
- 41. (псих-87.3) Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причем площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?
- 42. (хим-97(1).4) Из сосуда, содержащего чистый спирт, отлили 1/3 часть и добавили такое же количество воды. Потом отлили 1/3 часть смеси и добавили такое же количество воды. Так проделали k раз (включая первое переливание). Каково наименьшее значение k, при котором процентное содержание спирта в сосуде после сделанных переливаний станет меньше 10%?
- 43. (экон.К-78.4) Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй 10% меди и 90% марганца, третий 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить

новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

- 44. (хим-92.4) Даны три сплава. Состав первого сплава: 55% хрома и 45% никеля; второго 60% никеля, 25% хрома и 15% кобальта; третьего 70% хрома и 30% кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20% кобальта. Какие значения может принимать процентное содержание никеля в этом новом сплаве?
- 45. (ВМиК-87.5) С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомащинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.
- 46. (экон.К-84.5) Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир было наибольшим?

§12. Расположение параболы в зависимости от параметра. Теорема Виета.

В этом параграфе собраны задачи на расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра и задачи на теорему Виета.

 $Tеорема \ 1. \ ($ Виета $). \ Если \ x_1 \ и \ x_2 \ являются корнями квадратного уравнения$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
, тогда $\left\{ egin{array}{l} x_1 + x_2 = -rac{b}{a} \ x_1 \cdot x_2 = rac{c}{a}. \end{array}
ight.$

 $\it Teopema~2.$ (обратная к теоpeme Виета). Если данные числа x_1 и x_2 таковы, что

$$x_1 + x_2 = -p$$
 in $x_1 \cdot x_2 = q$, (4)

то x_1 и x_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

 $\it 3$ амечание. Важно отметить, что система уравнений (4) должна иметь решение.

Приведем основные свойства параболы $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

- Прямая $x=x_{\mathfrak{s}}=-\frac{b}{2a}$ ось симметрии параболы. Точка $(x_{\mathfrak{s}},y_{\mathfrak{s}})$ является вершиной параболы, где $y_{\mathfrak{s}}=f(x_{\mathfrak{s}}).$
- Знак числа a показывает направление ветвей параболы: вверх при a>0, вниз при a<0.
- Дискриминант $D=b^2-4ac$ показывает, пересекается ли парабола с осью абсцисс.

Если a > 0, D < 0, то парабола лежит выше оси Ox.

Если a > 0, D = 0, то парабола касается сверху оси Ox.

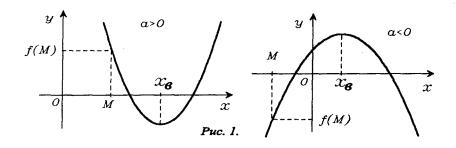
Если a>0, D>0, то парабола пересекает ось Ox в двух точках, задающих корни соответствующего квадратного трехчлена.

Случай a < 0 рассматривается аналогично.

Перечисленные свойства парабол позволяют доказать много полезных фактов, касающихся расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси, при этом не надо находить сами корни. Приведем некоторые из них без доказательств.

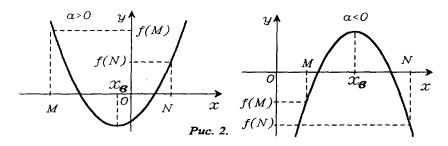
• Оба корня квадратного трехчлена f(x) больше некоторого числа M (см. рис. 1).

$$\iff \begin{cases} D \geq 0, \\ x_o > M, \\ a \cdot f(M) > 0. \end{cases}$$



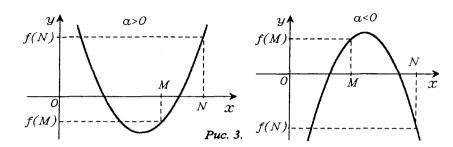
• Оба корня квадратного трехчлена f(x) лежат на отрезке [M,N] (см. рис. 2).

$$\iff \begin{cases} D \geq 0, \\ x_o \in [M, N], \\ a \cdot f(M) \geq 0, \\ a \cdot f(N) \geq 0. \end{cases}$$



• Один корень квадратного трехчлена f(x) лежит на отрезке [M, N], а другой левее M (см. рис. 3).

$$\iff \begin{cases} a \cdot f(M) < 0, \\ a \cdot f(N) > 0. \end{cases}$$



Мы выписали не все возможные случаи расположения корней квадратного трехчлена относительно точек, отрезков, интервалов и т.д. Вам важно понять принцип составления подобных систем, тогда вы сможете решить любую задачу на расположение корней квадратного трехчлена.

- 1. (псих-78.5) Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства f(-1) < 1, f(1) > -1, f(3) < -4. Определить знак коэффициента a.
- 2. (геогр-92.2) Найти три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение x = 2.
- 3. (ВМиК-80.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ имеет два различных корня.
- 4. (хим-82.5) Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $(x-p)^2 \cdot (p(x-p)^2 p 1) = -1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.
- 5. (м/м-91.5) Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство $|x^2+px+q|>2$ не имеет решений на отрезке $[1;\ 5].$
- 6. (экон-98.5) Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу (-1; 2).

- 7. $(\mathsf{m/m}\text{-}96.6)$ При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-x+a^2+2)^2=4a^2(2x^2-x+2)$ имеет ровно три различных решения?
- 8. (физ-93.7) Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где a < 0, имеет одним из своих корней число x = 3. Решить уравнение $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.
- 9. (ИСАА-92.6) При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?
- 10. (физ-89.5) Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение $(2x)^2-4x(m\cdot 3^m)^{1/2}+3^{m+1}+m-3=0$ имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m.
- 11. (физ-91.5) При каких значениях a все корни уравнения $3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$ удовлетворяют условию |x|<1?
- 12. (экон.-91.6) Найти все значения параметра q, при которых уравнение $\sin^2 x + (q-2)^2 \cdot \sin x + q \cdot (q-2) \cdot (q-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня.
- 13. (физ-94(2).7) Найти все значения a, для каждого из которых система

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \ge 0, \\ x \le 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

- 14. (геол-96(1).8) Найти все значения a, при которых неравенство $ax^2+1>4x-3a$ выполняется для всех x из интервала (-1;0).
- 15. (экон.М-95.6) Найти все значения p, при которых уравнение $x-2=\sqrt{-2(p+2)x+2}$ имеет единственное решение.
- 16. (псих-93.5) Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a$

- 1) Найти все a, при которых $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$.
- 2) Найти все b, для каждого из которых величина $(x_1-b)(x_2-b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых она определена.
- 17. (хим-81.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2})x^2+2(a^2-2)x+a>-\sqrt{2}$ выполняется для любого x>0.
- 18. (геол-77.5) Найти все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств $x^2+4kx+3k^2>1+2k$ и $x^2+2kx\leq 3k^2-8k+4$.
- 19. (био-77.5) Найти все те значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \frac{3x}{s} + 2s = 0$ и $x^2 + \frac{12x}{s} s = 0$ не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.
- 20. (ВМиК-88.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\cdot \lg a)\cdot \lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right)=0$ имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит (-1).
- 21. (псих-81.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ на отрезке $0 \le x \le 2$ равно 3.
- 22. (геогр-92.5) Найти все значения параметра c, при которых уравнение $|x^2-2x|+|x^2-3x+2|=x^2-4x+c \qquad \text{имеет ровно три различных решения.}$
- 23. (экон.-77.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет котя бы одно отрицательное решение.

24. (геогр-90.5) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a+1) \cdot x^2 + (|a+2| - |a+10|) \cdot x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня.

- 25. (фил-83.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$ имеет только один корень.
- 26. (геогр-84.5) Найти все значения параметра α , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(\alpha x + 1) + 13x - \alpha(1+y) = 0, \\ x - xy + |2+y| = 0 \end{cases}$$

имеет решения.

27. (геол-97(1).8) При каких α система

$$\begin{cases} \alpha(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения?

28. (ИСАА-91.6) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

29. (физ-94(1).7) При каких значениях а уравнение

$$2a \cdot (x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения?

30. (экон.-80.5) Найти все целые значения параметра ${\pmb k}$, при каждом из которых уравнение

 $5-4\sin^2x-8\cos^2\frac{x}{2}=3k$ имеет решения. Найти все эти решения.

31. (экон.К-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется для любого числа x.

- 32. (геол-88.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y=\frac{\sin x+2(1-a)}{a-\cos^2 x}$ содержит отрезок [1; 2].
- 33. (геол-89.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-6a+9)\cdot(2+2\sin x-\cos^2 x)+(12a-18-2a^2)\cdot(1+\sin x)+a+3=0$ не имеет решений.
- 34. (био-83.5) Найти все значения параметра b, при каждом из которых оба неравенства $2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0$, $x^2+y^2+1>2bx+2y+b-b^2$ выполняются при любых x и y.
- 35. (м/м-93(2).2) Найти все значения a, при которых уравнение $4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x + 9 a^2 = 0$ не имеет решений.
- 36. (ВМиК-96.3) При каждом значении a решить уравнение $25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$ и указать, при каких a оно имеет единственное решение.
- 37. (экон.К-77.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два решения.

§13. Полезные преобразования и замены переменных.

В этом параграфе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращенного умножения, теорема Безу, выделение полного квадрата, домножение на сопряженное выражение, введение новых переменных.

Полезно знать и уметь применять следующие формулы:

$$a^{2} - b^{2} = (a - b) \cdot (a + b), \quad a^{3} \mp b^{3} = (a \mp b) \cdot (a^{2} \pm ab + b^{2}),$$

 $(a \pm b)^{2} = a^{2} \pm 2ab + b^{2}, \quad (a \pm b)^{3} = a^{3} \pm 3a^{2}b + 3ab^{2} \pm b^{3}.$

Теорема Безу. Если уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет рациональные корни, т.е. корни вида $x = \frac{p}{q}$, то a делится нацело на q, а d делится нацело на p.

В других задачах параграфа полезно вводить новые переменные (одну или несколько). На возможность введения таких замен обычно указывает наличие повторяющихся выражений в уравнении или неравенстве.

Во многих задачах с параметрами полезно сначала выяснить, какая из переменных является параметром по существу условия, а какая — независимой переменной. Часто по смыслу задачи x, y, z, \ldots играют роль параметров, в то время, как a, b, c, \ldots играют роль переменных.

Напоминаем вам, что после решения задачи в новых переменных НЕОБХОДИМО ВОЗВРАЩАТЬСЯ К СТАРЫМ ПЕРЕМЕННЫМ.

1. (почв-96.1) Доказать, что число

$$((\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27})^2 + 7) \cdot ((\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27})^2 - 7)$$

целое, и найти это число.

2. (геол-94(1).2) Упростить до численного значения выражение

$$\frac{7\sqrt{3}\sqrt{a} - 7\sqrt{5}\sqrt{b}}{6\sqrt{3}\sqrt{a} + 6\sqrt{5}\sqrt{b}} : \frac{3a - 5b}{9a + 15b + 6\sqrt{15ab}}.$$

3. (почв-98(1).1) Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

4. (геол-98.1) Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2-16b^2}{4b+3a}-\frac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2:\left(6ab-\frac{8a^3-b^3}{2a-b}\right).$$

5. (м/м-78.1) Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

6. (почв-80.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$$

7. (экон.М-96.2) Решить систему

$$\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$$

8. (экон.-96.1) Решить систему

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$$

9. (м/м-90.3) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \le x$$
.

10. (м/м-96(1).2) Решить неравенство

$$\frac{x^3 - 8 + 6x \cdot (2 - x)}{|3 - 4x|} \le \sqrt{4x - 3}.$$

11. (геогр-95(1).1) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x+3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x+y) = 28. \end{cases}$$

- 12. (псих-88.2) Решить уравнение $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.
- 13. (почв-93.2) Решить уравнение $\sin^3 x \cos^3 x + \sin x \cos x = 0$.
- 14. (геогр-80.4) Решить уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x \frac{1}{2}$.
- 15. (геогр-98.2) Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

16. (геогр-91.5) Найти все действительные значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$x^2 + y^2 < a^2.$$

17. (геол-94.2) Упростить до целого числа выражение

$$3 \cdot \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \cdot \sqrt{2}.$$

- 18. (хим-82.3) Решить неравенство $(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le (\sqrt{2}-1)^{-x}$.
- 19. (геол-85.5) Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

- 20. (ВМиК-93.1) Решить неравенство $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x-x^2-2)\geq 0$.
- 21. (M/M-96(2).2) Вычислить $\log_{x/y}^2 x + \log_{y/x}^2 y$, если $\log_{x/y}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x}$.
- 22. (почв-95(1).5) Найти все значения a, при которых уравнение $2\cos 2x 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет решений.
- 23. (физ-95(1).7) Найти наименьшее значение произведения *xy*, где *x* и *y* удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases}$$

24. (хим-95.5) Решить систему

$$\begin{cases} 2^{-x} \cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \le 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

25. (экон.-79.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4, 5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$$

26. (соц-98.6) Две кривые на плоскости (x;y), заданные уравнениями

$$y = x^2 - 2x$$
 $y = x^2 - 2x$ $y = x^2 - 2x$ $y = x^2 - 2x$

соответственно, пересекаются в четырех точках. Доказать, что:

- 1) существуют, по крайней мере, две различные параболы, каждая из которых проходит через эти четыре точки;
- 2) эти четыре точки лежат на одной окружности, и найти радиус этой окружности.
- 27. (хим-83.5) Найти все целые значения n, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + \frac{5}{2}. \end{cases}$$

имеет решения. При найденных значениях n решить эту систему.

- 28. (био-93.4) Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых 161. Найти сумму шестых членов прогрессий.
- 29. (ИСАА-95.6) Найти все значения a, при которых неравенство $x^2 + 4x + 6a|x+2| + 9a^2 \le 0$ имеет не более одного решения.
- 30. (хим-98.3) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

31. (почв-79.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

32. (ИСАА-94.6) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2x^2+2a(\sqrt{2}-1)x+\sqrt{x-2}=2\sqrt{2}-3$ имеет решение.

33. (фил-78.2) Число α подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x - \sqrt{3}} + \alpha^2 x^2 + 2\alpha x (\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 9$$

имеет решение. Найти это решение.

34. (псих-87.6) Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2 - 1}$$
.

35. (геол-98(1).7) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$\cos x + 4\cos\frac{x}{2} + 7\cos\frac{x}{4} + 6\cos\frac{x}{8}.$$

36. (геол.ОГ-82.6) Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} 8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0, \\ x+y=z. \end{cases}$$

- 37. (геол-90.5) Найти все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение $(3x^2-2m^2+mn)^2+(3m^2-mn+2n^2-12x)^2+4=4x-x^2$. имеет хотя бы одно решение.
- 38. (хим-78.5) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3,\\ (2z-y)(y+2)=9+4y,\\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию z>0.

39. (био-84.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin(5\pi x) - \sqrt{x(x-6) + 13} \cdot \cos\pi \left(y^2 + 2x + \frac{1}{2}\right) + \sin\pi(2y^2 - x) = 0. \end{cases}$$

40. (м/м-89.6) Найти наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^{2} + 2y^{2} + z^{2} + xy - xz - yz = 1.$$

41. (фил-89.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам

$$x + y + z = x^2 + 4y^2$$
 w $x + 2y + 3z = a$.

42. (био-87.5) Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

- 43. (экон.К-83.1) Решить уравнение $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.
- 44. (ВМиК-89.2) Решить уравнение $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.
- 45. (геол-94.3) Решить уравнение $y^2 + 2\sqrt{y^2 + 3y 4} 4 + 3y = 0$.
- 46. (ВМиК-96(1).1) Решить неравенство

$$\sqrt{(2x+1)^4 - (2x+1)^2} + (2x+1)^2 \ge 0.$$

- 47. (геогр-97.1) Решить неравенство $\frac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2$.
- 48. (почв-98.3) Решить неравенство $\frac{1}{|x+1|-1} \ge \frac{2}{|x+1|-2}$.

49. (геол-98(1).6) Решить неравенство

$$\left| \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - 3x + 3\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left| \frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2} \right|.$$

50. (почв-96(1).3) Решите неравенство
$$\frac{2}{2-\sqrt{x+3}} \le 1$$
.

51. (геол-91.3) Решить неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} \ge \frac{2}{4-\sqrt{x}}$$
.

52. (био-93.3) Решить неравенство
$$5\sqrt{1-\frac{1}{z}} > \frac{7z-1}{z}$$
.

53. (экон-98.3) Решить неравенство

$$\sqrt{x+8(3-\sqrt{8+x})} < \frac{x+16}{2\cdot\sqrt{8+x}-10}.$$

54. (хим-94.3) Решить уравнение
$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$$
.

(ВМиК-96(1).3) Решить уравнение

$$\sqrt{12\sin x - \frac{9}{2}\cos 2x + \frac{17}{2}} = \frac{9}{8} + 4\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x.$$

56. (физ-80.3) Решить уравнение
$$3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$$
.

57. (физ-93.3) Решить уравнение
$$\sqrt{\log_2 x} = 2\log_2 \sqrt{x} - 1$$
.

58. (ИСАА-93.4) Решить уравнение

$$\log_x(3x-2)-2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}.$$

59. (экон.-79.5) Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(21+23x+6x^2)=4.$$

60. (геогр-78.4) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2).$$

61. (ИСАА-98.2) Решить уравнение
$$2^{-2x^2+1}-12\cdot 2^{-x^2}+5=0$$
.

62. (экон.М-98.4) Решить уравнение
$$3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0$$
.

63. (физ-97.2) Решить уравнение
$$7 \cdot \frac{4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} = 1 + 3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x$$
.

64. (псих-86.3) Решить неравенство
$$\frac{6 - \lg(x^4)}{3 + 2\lg(x^2)} < 2.$$

65. (геогр-90.3) Решить неравенство
$$\frac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8} > 1.$$

66. (экон.-99.2) Решить неравенство
$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \le 14 \cdot \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x - 1}}$$
.

67. (ВМиК-83.5) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$$

и найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение имеет только один корень.

68. (м/м-94(2).6) При каждом значении а решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

69. (м/м-97.5) Для всех значений параметра а решить уравнение

$$\left|x^4 + \frac{2a-1}{3}x^2 + \frac{2a^2+a+2}{12}\right| = \frac{a}{2} \cdot \left|x^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{6}\right| + \frac{a+1}{6}.$$

70. (reorp-95(1).5) Решить уравнение
$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{19-x} = 3$$
.

71. (ВМиК-90.4) Решить неравенство

$$\sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \le |3v - 6|.$$

72. (псих-81.4) Решить уравнение

$$\frac{4}{3}(\log_3(5x-6)^3)^2 - (\log_3(5x-6)^3)\log_3x^6 = -6\left(\log_3\frac{1}{x}\right)^2.$$

73. (м/м-80.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$$

74. (хим-91.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

75. (геол-98.7) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(1+y) = y+7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

76. (псих-89.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0, 2)^3 + y = 1. \end{cases}$$

77. (ВМиК-95.2) Решить систему

$$\begin{cases} x + 3xy + y = 3 + 10\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 11. \end{cases}$$

78. (ВМиК-97.4) Найти все решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{array} \right.$$

79. (псих-92.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 400 \cdot 5^{y} \cdot 50^{x} \cdot 100^{x+y} = 1, \\ \log_{0,5x+0,4y} (8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y}) \cdot \log_{41} (0,5x+0,4y) = 1. \end{cases}$$

80. (хим-85.5) Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-y| - \log_2^2(|x|+y+1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6(x-y)\log_2(|x|+y+1) + 5\log_2^2(|x|+y+1) = 0. \end{array} \right.$$

- 81. (био-77.3) Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада в 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в 1 час делала каждая бригада?
- 82. (ВМиК-94(1).5) Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 удовлетворяют при n=2,3,4. соотношению

$$\log_2 a_n \cdot \log_2(a_{n-1} \cdot a_{n+1}) = \log_2 a_{n-1} \cdot \log_2 a_{n+1} \cdot \log_2(4a_n^2)$$

Известно, что $a_1=2, a_5=2^{1/25}$. Найти $\log_2(a_2+2a_3-a_4^4)$.

83. (био-85.5) Сколько корней на отрезке [0;1] имеет уравнение $8x(2x^2-1)\cdot(8x^4-8x^2+1)=1?$

84. (геол-81.6) Решить уравнение
$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$$

85. (экон.K-85.5) Среди всех решений (x, y, z, v) системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \ge 6 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение x+z принимает наибольшее значение.

86. (м/м-92.6) Найти все значения x, при каждом из которых неравенство

$$(2-a)\cdot x^3 + (1-2a)\cdot x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0$$

выполняется хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку [-1;2].

87. (ВМиК-84.5) Найти все решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0, \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z + 2yz - 26) + y + z - 3yz - 2 = 0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку [4; 7].

88. (почв-92.5) Найти все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка [1; 5] удовлетворяют неравенству

$$3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0.$$

89. (экон.-91.4) Определить наименьшее значение функции

$$F(r) = (r-2) \cdot (4 + (r-1) \cdot (r-4)) \cdot (r-3), \ r \in \mathbb{R}.$$

90. (м/м-83.4) Найти все значения параметра а, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} |12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 5| - |12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 7| + |24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} + 13| = \\ = 11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x - 2y - 1)}{3}}, \\ 2(x^2 + (y - a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y - a)^2 - \frac{3}{4}}. \end{cases}$$

91. (ВМиК-86.6) Найти все значения c и d, при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left| 4 \cdot \frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + (c + 2d) \cdot 2 \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2c + d \right|$$

на отрезке [-1;1] является наименьшим.

92. (хим-97.6) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

93. (псих-86.6) Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение x + 3y, если x и y удовлетворяют неравенству

$$x^2 + xy + 4y^2 < 3.$$

94. (био-89.5) Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение 2x + y - z?

§14. Использование графических иллюстраций.

В этом параграфе приведены задачи, при решении которых вам помогут графические иллюстрации. Однако, ПОМНИТЕ: ВСЕ, ЧТО ВАМ ПРИВИДЕЛОСЬ ИЗ ГРАФИКА, НЕОБХОДИМО СТРОГО ОБОСНОВАТЬ.

- 1. (ВМиК-86.2) Найти координаты точки, лежащей на прямой 3x 5y = 17 и наименее удаленной от начала координат.
- 2. (хим-93.5) Найти число решений уравнения

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2.$$

3. (геогр-93.5) При каких значениях а четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-5) \cdot x^2 + (a+2)^2 = 0.$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

- 4. (почв-96.6) Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длины 2|a|.
- (м/м-97(2).6) Найти все значения а, при каждом из которых среди решений неравенства

$$\sqrt{(a-x^2)\cdot(x^2+a)}+a>x$$

есть ровно два различных целочисленных решения.

6. (геол-93.6) Найти все значения параметра k, при которых ровно одна точка графика функции

$$y = 2x + (\lg k) \cdot \sqrt{\cos(2k\pi x) + 2\cos(k\pi x) - 3} + 1$$

лежит в области $(2x-7)^2 + 4(y-3)^2 \le 25$.

- 7. (био-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение x|x+2a|+1-a=0 имеет единственное решение.
- 8. (м/м-96(2).6) Найти все значения k, при каждом из которых хотя бы для одного числа b уравнение $|x^2-1|+kx=|x^2-8x+15|+b$ имеет
 - а) более 5 корней; б) ровно 5 корней.
- 9. (экон.-83.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x-a=2|2|x|-a^2|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.
- 10. (экон.-95.6) Найти наименьшее значение выражения

$$a^2 + (b-1)^2$$

среди тех а и в, для которых уравнение

$$||x-4|-2|-ax+4a-b=0$$

имеет ровно три различных корня. Указать, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

11. (экон.-92.6) Найти все значения параметра b, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства

$$|x^2 + 3x + 3|x + b| - b \le 0$$

максимально.

12. (почв-95.5) Найти все значения b, при которых система

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два решения.

13. (геогр-94(1).6) Найти все значения а, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = a$$

существуют и принадлежат отрезку [2; 17].

14. (геогр-94.5) Найти все значения а, при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

- 15. (хим-87.5) Найти все значения параметра p, при каждом их которых множество всех решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2<1$.
- 16. (геол.ОГ-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

17. (геогр-82.4) Найти все пары чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

18. (фил-91.6) Найти все значения p, при которых неравенство

$$\log_{x-p} x^2 < 2$$

выполняется котя бы для одного числа x, такого что |x| < 0,01.

19. (геол.ОГ-88.6) Найти все пары значений параметров (a;b), при каждой из которых уравнение

$$|x - \sin^2 a| + |x + \cos^2 4a - 2\sin a \cdot \cos^4 4a| = b\left(a + \frac{3\pi}{2}\right)$$

имеет единственное решение.

20. (геогр-95.5) Сколько корней на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$x^2 + a = 3b\cos x,$$

где число b есть наименьшее возможное значение суммы квадратов корней квадратного трехчлена

$$x^2 - x\sqrt{5 - 3c^2} + \frac{3}{2} - c^2?$$

21. (ИСАА-97.5) Найти площадь фигуры, заданной на координатной площади условиями

$$\begin{cases} y \le \sqrt{4-x^2}, \\ y \ge |x-1|-3. \end{cases}$$

- 22. (геол-95(1).8) Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством $x^2+y^2+6(x-|y|)\leq 0$. Найти площадь этой фигуры.
- 23. (м/м-91.3) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4x - 4y - 6, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

24. (почв-96(1).6) Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x,y), удовлетворяющих неравенству

$$\log_{(x^2+y^2)}(x+y) > 1.$$

25. (геол-82.5) Построить на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию

$$y=4-\left|y-\frac{6}{x}\right|-2\left|\frac{3}{x}-1\right|$$

и среди точек этого множества найти те, у которых координата y принимает наибольшее значение.

26. (экон.В-98.6) Множество F состоит из всех точек плоскости, координаты (x,y) которых принимают целочисленные значения и удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{\log_{\frac{2x}{3y}}(|x|+|y|-14)} < 3.$$

Определить точки множества F, наименее удаленные от точки M(2;-2).

27. (экон.М-97.6) Найти все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{2-|ay|}{3}\right)}\left(\frac{a^2+x^2}{2a^2}\right)>0,$$

будет наименьшим.

28. (экон.-97.6) Множество точек, расположенных внутри фигуры F, задано на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{x^2+1039}{1147}\right)}\left(\frac{10y-24-y^2}{850}\right)>0.$$

Множества F(t) получаются из F поворотом вокруг начала координат против часовой стрелки на угол t. Найти площадь фигуры, образованной точками, каждая из которых при некотором $t \in [0;\pi]$ принадлежит множеству F(t).

29. (м/м-96(2).4) При каком значении a сумма различных корней уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a(\operatorname{ctg} x + 2\cos 3x),$$

принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{22\pi}{3}\right]$, максимальна?

30. (м/м-94(1).6) Найти все значения $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - \alpha) = \sin \alpha + \sin(x + \alpha)$$

имеет ровно пять различных корней на отрезке $\left[-\frac{7}{4}\pi;\frac{5}{4}\pi\right]$.

31. (м/м-95(2).6) Пусть x_1 - наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 2a - 1,$$

а x_2 - наименьший положительный корень уравнения

$$2\cos^2 x - 2\sin^2 x = a.$$

Найти все значения a, при каждом из которых $|x_1| < x_2$.

32. (псих-97.6) Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1,y_1) и (x_2,y_2) , удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

33. (ВМиК-96.5) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

34. (reorp-97(1).6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество точек пространства с координатами (x, y, z), удовлетворяющих уравнению

$$|x-2a|+|x+2a|+|y-2a|+|y+2a|+|z-a|+|z+a|=a^2+9$$
,

- 1) содержит шар радиуса $r = \pi/2$,
- 2) имеет ненулевой объем и содержится в сфере радиуса $R=\pi.$

§15. Использование различных свойств функций.

В этом параграфе приведены задачи, при решении которых решающую роль играет применение таких свойств функций, как ограниченность, монотонность, четность и нечетность, периодичность. Поэтому рекомендуем вам, прежде чем приступать к решению задач данного параграфа, повторить свойства элементарных функций.

- 1. (геол.ОГ-82.4) Решить уравнение $\sin(\frac{4}{3}\pi\sin x) = \frac{1}{2}$.
- 2. (экон.-94.2) Найти область значений функции

$$y = -\sqrt{-3x^2 + 12x - 3}.$$

3. (ВМиК-82.2) Найти все значения x, для каждого из которых функция

$$f(x) = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$$

принимает наибольшее значение.

- 4. (почв-90.4) Найти наименьшее значение функции $y=1+4\sin x-2x$ на отрезке $[0;\ \pi].$
- 5. (геол.ОГ-81.6) Показать, что функция

$$y(x) = \sin^2 x - 12\sin x \cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$$

может принимать неотрицательные значения.

6. (псих-80.5) Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t\geq 0,$$

и найти все пары чисел (p,t), для которых это неравенство превращается в равенство.

7. (M/M-96(1).4) При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет хотя бы одно решение?

- 8. (почв-90.6) Решить неравенство $\log_2(2-3x) > 4x+1$.
- 9. (геол.ОГ-85.5) Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)\cdot(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)\cdot(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

10. (био-94.5) Найти все значения ${m x}$ при которых неравенство

$$(4-2a)\cdot x^2+(13a-27)\cdot x+(33-13a)>0,$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию 1 < a < 3.

11. (ИСАА-94.5) Решить неравенство

$$|x-4^{1+\sqrt{3-x}}| \leq \frac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}.$$

12. (м/м-96(2).1) Найти все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3-5x-3}\leq 6-x.$$

13. (м/м-79.4) Решить неравенство
$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(2+x)}{x}$$
.

- 14. (фил-87.5) Решить неравенство $\frac{9}{3x+2} > \frac{1 + \log_3(x+6)}{x}$.
- 15. (псих-82.6) Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

16. (ВМиК-97.6) Найти все значения параметра а, при которых уравнение

$$\sqrt{x^3 - 24x^2 + 118x + 7} = 5 \cdot \sqrt{7x - x^2} + \sqrt{a^2 - 11a + 18}$$

имеет единственное решение

17. (м/м-80.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{1/a}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geq 0$$

имеет одно решение.

18. (ВМиК-92.6) Найти все значения *а*, при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3}<\sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется для всех x из отрезка $[\pi; 2\pi]$.

19. (хим-80.5) Найти все значения параметра а, при каждом из которых число решений уравнения

$$3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$$

не превосходит числа решений уравнения

$$x + (3a - 2)^2 3^x = (8^a - 4) \log_3(3^a - \frac{1}{2}) - 3x^3.$$

- 20. (физ-92.7) Известно, что некоторая нечетная функция при x>0 определяется формулой $f(x)=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$. Найти, какой формулой определяется функция f(x) при x<0. Решить уравнение f(x)=3.
- 21. (хим-89.5) Решить уравнение

$$(2x+1)\cdot \left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\cdot \left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

22. (м/м-90.4) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

23. (экон.-90.6) Найти все значения параметра а, при которых система

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^{y} + (3 + 2\sqrt{2})^{y} - 3a = x^{2} + 6x + 5, \\ y^{2} - (a^{2} - 5a + 6) \cdot x^{2} = 0, \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

24. (ВМиК-79.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4})\sqrt{8 - ax} = 0$$

имеет на отрезке [-2;3] нечетное число различных корней.

25. (экон.-83.2) Решить уравнение tg3x = tg5x.

26. (геогр-96.2) f(x) - периодическая функция с периодом T=1/3. Найти значение f(1), если известно, что

$$f^2(2) - 5f(0) + \frac{21}{4} = 0$$
 m $4f^2(-1) - 4f(\frac{10}{3}) = 35$.

- 27. (экон.М-97.5) Функция f(x) определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4 и на промежутке $0 \le x \le 2$ ее значения вычисляются по правилу f(x) = 1 |x 1|. Решить уравнение $2f(x) \cdot f(x 8) + 5f(x + 12) + 2 = 0$.
- 28. (экон.-97.5) Функция f(x) определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2 \le x \le 0$ ее значения вычисляются по правилу f(x) = 2x(x+2). Решить уравнение $\frac{2 \cdot f(-3-x) 3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \sqrt{2}}} = 0.$
- 29. (псих-96.5) Пусть t_1 и t_2 корни квадратного уравнения

$$t^2 - (5b - 2)^2 t - 3b^2 - 7b + 1 = 0.$$

Найти все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a функция

$$f(x) = \cos(a\pi x) \cdot \cos((t_1^3 + t_2^3) \cdot \pi x)$$

является периодической.

- 30. (хим-88.3) Найти точку графика функции $y=x^2+\frac{1}{2}$, ближайшую к точке $\left(\frac{1}{4};1\right)$.
- 31. (хим-84.3) Найти все точки максимума функции $f(x) = x^2 (6\sin 2x 8\cos 2x) + x \cdot (6\cos 2x + 8\sin 2x) + 3\sin 2x 4\cos 2x.$
- 32. (почв-91.5) Для каждого отрицательного числа а найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{3}(x-a)^3 - \frac{1}{2}(x-a)^2$$

на промежутке $0 \le x \le 1$.

§16. Метод оценок.

В этом параграфе приведены задачи, при решении которых используется ограниченность функций, входящих в уравнения и неравенства.

Полезно помнить следующие факты:

$$ullet$$
 $a+rac{1}{a}\geq 2$, если $a>0$, и $a+rac{1}{a}\leq -2$, если $a<0$;

- $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$;
- Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ ограничена значением $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ снизу при a > 0 и сверху при a < 0.

$$ullet$$
 Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, то $f(x) + g(x) = 0$ \Leftrightarrow $\left\{ egin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}
ight.$

$$ullet$$
 Если $f(x) \geq a$, а $g(x) \leq a$, то $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \left\{egin{array}{l} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{array}
ight.$

- Если $|f(x)| \ge a$, а $|g(x)| \ge b$, a > 0, b > 0, то $f(x) \cdot g(x) = ab \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |f(x)| = a, \\ |g(x)| = b, \end{array} \right.$ причем f(x) и g(x) одного знака.
- Если $|f(x)| \ge a$, а $|g(x)| \le b$, a > 0, b > 0, то $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \iff \begin{cases} |f(x)| = a, \\ |g(x)| = b, \end{cases}$ причем f(x) и g(x) одного знака.

Заметим, что мы выписали здесь не все случаи применения оценок в суммах, произведениях и частных. Однако, если вам понятно все, что написано выше, то вы сможете сами распространить метод оценок и на другие случаи.

1. (псих-97.4) При каких действительных р уравнение

$$4^{x} + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение.

- 2. (био-81.4) Решить неравенство $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x \log_2 (x+6)} > 1$.
- 3. (псих-78.4) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$$

при x > 0.

- 4. (ИСАА-97.4) Решить неравенство $\log_{0.5} |1-x| \log_{x-1} 2 \le 2$.
- 5. (геол-98.8) При каких значениях а уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

6. (псих-79.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2) + \log_{2+y}(x^2-2x+1) = 6, \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1. \end{cases}$$

7. (био-93.6) Найти все решения системы

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)\cdot(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

8. (геогр-81.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

9. (почв-94.4) Найти все значения а и в, при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \le 1, \\ x^2 + ax + 1 \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

10. (хим-94.5) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 2x \sin y + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2 + y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{cases}$$

11. (экон.М-97.2) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} & \left| \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \right| + (x-y-2)^2 \le 0, \\ & 2x+3 \le 2. \end{cases}$$

- 12. (ИСАА-93.5) Решить уравнение $\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0$.
- 13. (м/м-93(1).4) При каких значениях $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, уравнение

$$\sqrt{2\cos(x+a)-1}=\sin 6x-1$$

имеет решения?

14. (физ-96(2).8) Для каждого значения а решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

- 15. (хим-93(1).5) Решить уравнение $2(1+\sin^2(x-1))=2^{2x-x^2}$.
- 16. (геогр-94(1).4) Решить уравнение

$$\log_{0.5}(\mathrm{tg}\pi x + \mathrm{ctg}\pi x) = 8(2x^2 + 3x + 1).$$

- 17. (псих-92.1) Решить неравенство $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \le \frac{\sin x 3}{\sqrt{2}}$.
- 18. (псих-93.3) Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

19. (филол-98.5) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{13 + 3^{(3^{1 - \cos x})}} \le \sqrt{5 \cdot 2^{-2x^2} - 1}.$$

20. (экон.В-98.4) Решить уравнение

$$25 \cdot 3^{|x-5|+|x-3|} + 9 \cdot 5^{|x-4|+|x-6|} = 450.$$

21. (хим-94(1).5) При каких значениях q разрешима система

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \frac{\pi x}{2} + 2^{y^2} = \sin \frac{\pi x}{2}? \end{cases}$$

Найти ее решения.

22. (геогр-96(1).3) Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right)=1.$$

- 23. (ВМиК-92.2) Решить уравнение $\sqrt{1+\cos 4x} \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{4}$.
- 24. (экон.-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0$$

выполняется для всех значений х.

25. (почв-89.5) Решить неравенство

$$(x^2 - 4x + 3) \cdot \log_{1/\sqrt{2}} \left(\cos^2 \pi x + \cos x + 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) \ge 2.$$

26. (геол-95(1).9) Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} \frac{\log_2(|a|x^2 - 3x + 4)}{\log_2(-3x + 4)} = 5^{-|x| \cdot (x+1)^2}, \\ x \le 1. \end{cases}$$

27. (геол-92.6) Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 1 - 2x\sin \pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz) \cdot (\cos 2\pi y + \cos \pi z)^2.$$

28. (био-90.5) Найти все значения a, b, x, y, z, при которых выполняются соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+\operatorname{tg}(bz)\cdot\sin^2(xy)+\cos(2xy)\leq (\cos x+\sin(ay))\cdot|\sin(2xy)|,\\ 2+2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)}\cos(b(y+x))+\cos(2b(y+x))=0. \end{array} \right.$$

29. (м/м-97(1).5) Решить систему

$$\begin{cases} |x+1|-1 \le x, \\ (2^x+2^{x-2}+2^{2-x})\cos\frac{\pi x}{2} + \cos(\pi x) + 3 + 2^{2x-3} = 0. \end{cases}$$

30. (геол-86.6) При каждом значении параметра $p \leq 9$ найти все решения уравнения

$$3\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15}\sin x - \frac{3\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\sin^2 x + \frac{3\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{7}\cos 2x\right) =$$

$$= 6\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{15}\sin x + \frac{2\pi}{5}\right) - p$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

- 31. (хим-91.4) Решить уравнение $\cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x \cdot \cos 8x$.
- 32. (био-98.5) Найти все рещения системы

$$\begin{cases} \cos 10x - 2\sin 5x \ge 3 \cdot 4^t - 3 \cdot 2^{t+2} + \frac{27}{2}, \\ \sqrt{(2 - \sqrt{3})^{4t} + (2 + \sqrt{3})^{4t} + 2} + 14\log_2 \cos 10x + 6\cos 5x \ge (2t+1)^{1.5}. \end{cases}$$

33. (хим-79.5) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right|, \\ (6y^2 + 2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию |y| < 1.

34. (м/м-95.6) Найти все значения α из отрезка $[0;2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x + y + z) - \sin \alpha = 0, \\ (x + 1) \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 \sqrt{x} + \alpha^2 \sqrt{z} + \sin \frac{3}{2} \alpha = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

35. (ВМиК-89.5) Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi) \cdot |x - 2| + 4\pi a} \right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34) \cdot (|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

- 36. (геогр-86.5) Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам 0 < a < 2, найти наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 2a(x+y)$ при условии $\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right) = 1$.
- 37. (геогр-88.5) Доказать, что при каждом x>0 выполнено неравенство $x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \cdot \sin x > 0.$
- 38. (ВМиК-81.4) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие равенству

$$(1 + (a+2)^2) \log_3(2x - x^2) + (1 + (3a-1)^2) \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

39. (почв-83.5) Найти все значения параметра α из интервала (2,5), при каждом из которых существует котя бы одно число x из отрезка [2,3], удовлетворяющее уравнению

$$\log_2(3-|\sin\alpha x|)=\cos(\pi x-\frac{\pi}{6}).$$

40. (геогр-83.4) Найти все пары чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \le 8. \end{array} \right.$$

41. (экон.-99.7) Найти все значения b, при каждом из которых система

$$\begin{cases} b\sin|2z| + \log_5(x\sqrt[8]{2 - 5x^8}) + b^2 = 0, \\ ((y^2 - 1)\cos^2 z - y \cdot \sin 2z + 1)(1 + \sqrt{\pi + 2z} + \sqrt{\pi - 2z}) = 0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определить эти решения.

42. (почв-97(1).6) Найти наибольшее и наименьшее значение выражения

$$\left(-3\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x-1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1-\cos 2y}{2}+\sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y+1\right)$$

43. (ВМиК-83.6) Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию

$$\sqrt{2 - |y|} \cdot (5\sin^2 x - 6\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) =$$

$$= (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5}{4}\pi^2.$$

44. (ВМиК-86.5) Решить уравнение

$$\sin 3x - 2\sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2\cos x.$$

45. (ВМиК-91.5) Проверьте справедливость неравенства $y \le 3, 17$, где y - наименьшее на интервале (0; 1) значение функции

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} + \frac{3}{(1-x)^{0,48}} \right) + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} - \frac{3}{(1-x)^{0,48}} \right|.$$

§17. Получение следствий и логические задачи.

В этом параграфе приведены задачи, которые с помощью различных следствий сводятся к более простым. При этом полезно после каждого упрощения заново формулировать задачу. Это особенно важно в задачах с параметрами. Рассмотрим несколько стандартных случаев.

Если задача формулируется следующим образом: "Найти все значения параметра, при котором уравнение (неравенство, система) имеет единственное решение", то первым делом надо посмотреть, не является ли эта задача четной относительно одной из переменных или симметричной относительно двух каких-нибудь переменных.

Если задача является четной относительно переменной x, то можно рассуждать следующим образом. Предположим, что x_0 - решение нашей задачи, тогда в силу четности относительно x значение $(-x_0)$ тоже будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Поэтому единственным может быть только решение x = 0. Подставим это x = 0 в исходную задачу и найдем значения параметра, при которых x = 0 является решением. Но это еще не значит, что при этих значениях параметра не будет других решений. Поэтому надо каждое найденное значение параметра подставить в исходную задачу и проверить, будет ли соответствующее решение задачи единственным или нет.

Если же задача является симметричной относительно переменных x и y, то можно рассуждать следующим образом. Предположим, что (x,y) - решение нашей задачи, тогда в силу симметричности задачи (y,x) тоже будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то x=y. Следовательно единственным может быть только решение x=y. Подставим это x=y в исходную задачу и найдем значения параметров, при которых x=y является решением. Но это еще не значит, что при этих значениях параметра не будет других решений. Поэтому надо каждое найденное значение параметра подставить в исходную задачу и проверить, будет ли соответствующее решение задачи единственным или нет.

Если задача, начинается словами "Найти все значения параметра, при которых уравнение (неравенство) выполняется для всех значений x", тогда можно рассуждать спедующим образом. Поскольку уравнение должно выполняться для всех x, то и для $x=x_0$. Подставим это x_0 в исходное уравнение и найдем набор "подозрительных" значений параметров, которые затем надо будет обязательно подставить в исходное уравнение для проверки. Если для данного значения параметра

уравнение выполняется при всех x, то это значение параметра подходит. Если же уравнение выполняется не при всех значениях x (при этом достаточно найти хотя бы одно такое x), то рассматриваемое значение параметра не подходит.

1. (хим-96(1).5) Решить систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + 5x + 5} \ge 2, \\ x^2 + 6x + 5 \le 0. \end{array} \right.$$

2. (геол-97.7) Найти все решения уравнения

$$|x + y + 11 - 5xy| + |x^2y + xy^2 - 12| = 0.$$

3. (reorp-97(1).5) Решить систему

$$\begin{cases} 9^{2(1-x)} = 5^{x^2-8x+7}, \\ \frac{\log_{0,2}\sqrt{x+3}}{\log_{0,2}(x+1)} < 1. \end{cases}$$

4. (почв-93.5) Найти все значения a, при которых неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} < 7a - 1$$

не имеет положительных решений x.

5. (хим-83.2) Решить неравенство

$$(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)\leq 0.$$

6. (почв-81.5) Найти все пары чисел (x,y), для каждой из которых выполнено равенство

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2} + \frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

- 7. (хим-98.4) Решить уравнение $\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2$.
- 8. (экон.М-99.6) Для каждого значения b найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению

$$b\sin 2y + \log_4(x\sqrt[6]{1-4x^8}) = b^2.$$

9. (экон.В-98.7) Найти все значения а, при которых уравнения

$$x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0$$

И

$$x^3 - ax^2 - 10a^2x + 10a^3 - 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

10. (ВМиК-85.5) Найти все тройки чисел(x, y, z), удовлетворяющие равенству .

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17} + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos\pi y + \cos\pi z)x + 4} = 0.$$

11. (экон.К-87.6) Найти все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12. (псих-95.5) Найти все значения а, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \le -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение.

13. (хим-88.5) Найти все значения параметра а, при каждом из которых равносильны системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

14. (ВМиК-98(1).5) Найти все значения параметра а, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

15. (фил-84.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \ge x^2 + 2a, \\ x \ge y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

 (био-91.5) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy) \cdot \sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x+y+a\sin^2 z) \cdot ((1-a) \cdot \ln(1-xy) + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. (фил-92.5) Найти все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18. (геогр-97.4) Найти все значения параметра b, при каждом из которых единственное решение имеет система неравенств

$$\begin{cases} by^2 + 4by - 2x + 7b + 4 \le 0, \\ bx^2 - 2y - 2bx + 4b - 2 \le 0. \end{cases}$$

19. (филол-98.6) При каких значениях параметра а уравнение

$$\sin^2(x+6) - (a-1)\sin(x+6) \cdot \sin(\pi x) + (a-1)\sin^2(\pi x) = 0$$

имеет единственное решение?

20. (почв-88.5) Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \le 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \le y \le 2\pi. \end{cases}$$

21. (м/м-88.6) Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{z^2}, \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \frac{2(x+y)}{(a-\pi) \cdot z} \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ if } z > 0.$$

22. (био-95.6) Найти все значения а, при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

23. (хим-84.5) Найти все значения параметра а, при каждом из которых неравенство

$$rac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4|+\left(rac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|
ight)\cdot|x-2|+rac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a|\leq 1$$
 выполняется ровно для двух различных значений x .

24. (ИСАА-98.7) При каких значениях параметра а система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

25. (экон.-85.4) Найти наименьшее значение функции
$$y=rac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}.$$

26. (хим-91.1) Найти максимум и минимум функции

$$f(x) = \frac{3x+1}{(3x+1)^2+1}.$$

27. (фил-80.5) Найти все значения a из промежутка $[1,+\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$$

принимает наибольшее значение.

28. (почв-85.5) Пусть x_0 - больший из корней уравнения

$$x^{2} + 2(a - b - 3)x + a - b - 13 = 0.$$

Найти наибольшее значение x_0 при $a \ge 2, \ b \le 1$.

- 29. (геол.ОГ-84.3) Найти $\sin(\alpha/2)$, если $\cos 2\alpha \le -7/8$ и $\cos \alpha \le -1/4$.
- 30. (геол-84.3) Найти $\sin \alpha$, если $\sin 2\alpha \geq 3/5$ и $tg\alpha \leq 1/3$.
- 31. (геогр-80.5) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left| y + \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{13}{6} + x - y \right| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям x < 0 и y > 0.

32. (псих-84.7) Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \le 2, \\ x + 3y \ge 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

33. (м/м-96.4) Решить систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_2 \sin x - \log_2 2y + |\log_2 \cos x - \log_2 2y| = -2, \\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2y^2} \le 1. \end{array} \right.$$

34. (фил-82.5) Найти все значения параметра γ , при каждом из которых минимально количество пар (n,m) целых чисел n и m, удовлетворяющих условию $\gamma^3|n|<\sqrt{2}(\gamma^2-m^2)$.

35. (м/м-77.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

36. (псих-91.5) При каждом значении параметра $a \ge 1/2\pi$ найти все корни уравнения $\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2}\right) = \cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2}\right).$

$$4\cos x \cdot \sin a + 2\sin x \cdot \cos a - 3\cos a = 2\sqrt{7}.$$

38. (био-97.6) Найти решения системы

$$\begin{cases} & \frac{1}{20} \left(\frac{x^2}{\sin x}\right)^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0, \\ & \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 \ge \frac{\pi}{24} \left(\frac{5\pi}{6} - x\right), \\ & x^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} < 0. \end{cases}$$

- 39. (почв-90.5) Найти все значения x, при которых наибольшее из чисел 2x+1 и x+2 больше (-1).
- 40. (м/м-94(1).4) Найти все значения x, при которых наибольшее из чисел 3x-4 и $\log_2(5\cdot 2^{2x-4}-2^{x-1}+1)$ положительно.
- 41. (почв-88.4) Два вида удобрений A и B отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении A азота содержится в 3 раза, а фосфора в 2 раза больше по весу, чем калия. В удобрении B соответственно азота в 5/3 раз больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений A и B приготовить удобрение, в котором азота в 2, а фосфора в 3 раза больше, чем калия?
- 42. (псих-78.3) Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода, в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?
- 43. (геол-95.8) Найти все значения a, при которых неравенство

$$9^x < 20 \cdot 3^x + a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

44. (почв-98(1).6) Определить, при каких значениях a имеет хотя бы одно решение (x,y) система

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{-y^2 - 2x} = ax, \\ y \ge 2.5 + a. \end{array}\right.$$

45. (м/м-78.4) Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \ge \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \le -2 \end{cases}$$

46. (био-86.5) Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

47. (псих-88.6) Найти наибольшее значение параметра *a*, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \le \sqrt[4]{a^3} \cdot |\sin\frac{\pi}{2}x|$$

имеет хотя бы одно решение.

48. (хим-98(1).6) При каких a уравнение

$$(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x +$$

$$+(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x = 2(\sqrt{2})^x$$

имеет единственное решение?

49. (хим-86.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

50. (псих-98.6) Найти все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) - b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} -$$
$$-\left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) + b \cdot 2^{\sin(\pi bx)}\right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

- 51. (геол-97.8) При каких значениях α уравнения $x\alpha^2 \alpha (x^3 5x^2 + 4) = 0$, $(x+1)\alpha^2 + (x^2 x 2)\alpha (2x^3 10x^2 + 8) = 0$ не имеют общего решения?
- $52.~({\rm M/M-95}(2).3)$ Найти все числа k, для которых функция

$$y(x) = k \cdot (2\sin x + \cos^2 x + 1)$$

не принимает значений, больших 3.

53. (м/м-93(1).6) Найти все значения a, для которых неравенство

$$\log_5(a\cos 2x - (1 + a^2 - \cos^2 x)\sin x + 4 - a) \le 1$$

выполняется при всех x.

- 54. (почв-98.6) Определить:
 - а) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение $5\cos x + \sin x + \cos(x b) = a$ имеет решения;
 - б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b.
- 55. (геол-96.8) Найти все значения a, при которых для любого b уравнение

$$\cos(b+ab+bx) + 2\cos b^2x = 3a^2$$

имеет хотя бы одно решение.

56. (геол-98(1).8) При каких a для любого $b \ge 2$ неравенство

$$(b-1)x + 2\sqrt{1-(b-1)^{-2}} < \left(\frac{a+1}{b-1} - b + 1\right)\frac{1}{x}$$

выполняется для всех x < 0?

57. (псих-78.4) Найти множество всех пар чисел (a;b), для каждой из которых при всех значениях x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

58. (ИСАА-96.6) При каких значениях а неравенство

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5}\right) > 0$$

выполняется для всех x?

(ИСАА-93.6) Найти все значения а, при каждом из которых неравенство

$$|x^2+2|x-a|>a^2$$

справедливо для всех x.

60. (ВМиК-90.6) Найти все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left|\log_6\left(\frac{x}{36}\right) + \left(\frac{10a+3b+31}{5}\right) \cdot x^2 - 9b^2 - 9b - 1\right| \leq$$

$$\leq \log_{6}\left(\frac{36}{x}\right) + \left(\frac{10a + 3b + 41}{5}\right)x^{2} - (6b + 2) \cdot x + 9b^{2} + 15b + 3$$

имеет хотя бы одно решение.

61. (м/м-86.5) Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

62. (физ-97(2).7) Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$$

выполняется для всех x из промежутка $1 \le x \le 3$.

63. (ВМиК-97(1).5) Найти все значения x, для которых неравенство

$$\sqrt{x^2+2x+b} > b \cdot x^2 + (1-b) \cdot (2x-1) - 2$$

выполняется для всех b из отрезка [-2; 0].

- 64. (псих-92.4) Найти все значения параметров u, v, при которых существуют два различных корня уравнения $x(x^2+x-8)=u$, являющихся одновременно корнями уравнения $x(x^2-6)=v$.
- 65. (геол-79.6) Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств

$$abx \ge 4a + 7b + x, \qquad a \ge 0, \qquad b \ge 0$$

следует неравенство ab > 5.

66. (ВМиК-98.5) Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} \max(2-3y,y+2) \leq 5, \\ \sqrt{a^2 + \frac{6}{\pi} \cdot \arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2}\arcsin x \cdot (\pi + 2\arcsin x)} \geq \\ \geq y^2 + 2ay + 7. \end{array}\right.$$

- 67. (reorp-87.5) Найти все натуральные значения параметра b, при каждом из которых выражение $\frac{1}{x+y+3}$ имеет смысл для каждой пары чисел (x,y), где x<0;y<0, для которой выражение $\lg(xy-b)$ также имеет смысл.
- 68. (псих-90.5) Считая известным, что при любом a>0 уравнение

$$2x^3 + x^2 - x - a - 1 = 0$$

имеет единственный положительный корень x_0 (зависящий от a), найти все a>0, при которых

$$12x_0^3 - 7x_0 > 6a + 1.$$

69. (экон.К-88.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2\sin x = 0$$

является корнем уравнения

$$\log_{1/2}(3 \mathrm{tg} x - 1) - \log_2(3 \mathrm{tg} x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(5 - \mathrm{tg} x) = 1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

70. (м/м-95(1).3) Найти все значения a, при каждом из которых любое решение системы

$$\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству y > 1 - x.

71. (геогр-85.5) Найти все значения параметра a, удовлетворяющие условию -1 < a < 1, для каждого из которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел $x,\ y.$

72. (геогр-96(1).6) Найти все значения параметра d, при каждом из которых уравнение

$$x^3 - (4+d)x^2 + 5dx - d^2 = 0$$

имеет три корня, которые являются квадратами сторон некоторого неостроугольного треугольника.

73. (ВМиК-93.6) Найти все значения а, при которых область определения функции

$$y = \frac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$$

совпадает с областью определения функции

$$y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}.$$

74. (почв-84.5) Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$$

имеет решение.

75. (экон.-84.4) Пятьдесят два землекопа, работающие с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых вырыла по одинаковому котловану. Обе бригады работали с перерывами на отдых. Первая бригада, закончив работу на 1 час позже второй, отдыхала не менее полутора часов. Вторая

- бригада отдыхала не более 1 часа 20 минут. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая могла бы вырыть котлован в 1,5 раза больше, а вторая в 1,4 раза больше. Определить число землекопов в каждой бригаде.
- 76. (экон.К-80.5) На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении 1 : 2 : 4. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт C обогнали 4 автобуса; известно, что когда он выходил из пункта A, через пункт A не проезжал очередной автобус. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?
- 77. (ВМиК-77.4) Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник ABCD выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD и AC. Их длины соответственно равны 6, 14, 5, 15 и 15 км. Из одного из этих городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на 1/2 км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.
- 78. (геол-78.5) Пункт A стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Чему равно расстояние от A до B?

79. (м/м-86.4) Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 часов утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $1\frac{2}{3}$ раза, а автомобилист - в $1\frac{1}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 часов 15 минут, автомобилист приехал в город в 11 часов, а мотоциклист приехал в село в 12 часов 15 минут. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 часов 15 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью?

§18. Задачи с целыми числами.

В этом параграфе собраны задачи, в которых решающую роль играет целочисленность искомых величин. При решении этих задач полезно использовать такие факты, как делимость целых чисел, разложение на простые сомножители, выделение целой части (деление нацело с остатком).

- 1. (псих-84.6) Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами:
 - первая цифра числа в три раза меньше суммы двух других его цифр;
 - разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.
- 2. (фил-86.5) Имеются два ящика с яблоками, причем в первом ящике 15 яблок, а во втором 16 яблок. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:
 - а) увеличить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 1 их число во втором;
 - б) увеличить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 2 их число во втором;
 - в) уменьшить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором;

г) уменьшить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 1 их число во втором.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы одновременно в первом ящике оказалось 50 яблок, а во втором - 25 яблок? Ответ обосновать.

3. (м/м-90.5) Найти все тройки целых чисел x,y,z, удовлетворяющих неравенству $\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2)>z^2-9z+17.$

4. (био-92.4) Найти все пары целых чисел p,q, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{array} \right.$$

- 5. (фил-77.1) В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?
- 6. (псих-94.5) Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так что число рядов, а также число людей в ряду было бы равно числу используемых аудиторий. Определить минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.
- 7. (геогр-98.6) Найти все пары целых чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению $3x = 5v^2 + 4v 1$

и доказать, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

- 8. (фил-79.5) Пусть m и n натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?
- 9. (псих-77.3) Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.
- 10. (экон.-94.1) Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \le 5. \end{cases}$$

- 11. (экон.К-86.5) В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенству $127 \le k \le 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в два раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?
- 12. (м/м-97(1).3) Считая x и y целыми числами, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = (z+2) \cdot 7^{|y|-1}, \\ \sin \frac{3\pi z}{2} = 1. \end{cases}$$

13. (хим-95(1).5) Найти все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + amn - bn^2 = 0$, где $a = 1953^{100}$, $b = 1995^{100}$.

14. (соц-97.4) В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: "Что Вы предпочитаете, кашу или компот?" - большая часть ответила: "Кашу", меньшая: "Компот", а один респондент: "Затрудняюсь ответить".

Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% - грушевый.

У любителей каши уточнили, какую именно кашу они предпочитают. Оказалось, что 56.25% выбрали манную, а 37.5% - рисовую, и лишь один ответил: "Затрудняюсь ответить".

Сколько детей было опрошено?

- 15. (хим-98(1).4) Определить число студентов, сдавших экзамен, если известно, что шестая часть из них получили оценку "удовлетворительно", 56% получили оценку хорошо, а 14 человек получили оценку "отлично", причем эти отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.
- 16. (ВМиК-86.3) В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?
- 17. (геол-84.5) Трое мальчиков котели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не могли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 копеек. Когда третьему мальчику добавили денег в размере в два раза большем, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 копеек. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 копеек больше, чем у первого?
- 18. (геол.ОГ-84.5) В саду приготовили N ям для посадки деревьев. После того, как посадили имеющиеся яблони, груши и сливы, оказалось, что было использовано менее трети ям, при этом груш было посажено на 6 штук больше, чем яблонь. Если бы яблонь посадили в три раза больше, то остались бы неиспользованными 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено, если известно, что

на оставшиеся места посадили персиковые деревья и их оказалось в три раза больше, чем слив?

- 19. (м/м-88.5) Два мотоциклиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 минуты он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, то они финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.
- 20. (био-97.4) В двух коробках лежат карандаши: в первой красные, во второй синие. Известно, что красных карандашей меньше, чем синих. 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из них составляли синие. После этого красных карандашей в первой коробке оказалось на 26 больше, чем во второй, а общее количество карандашей во второй коробке увеличилсоь по сравнению с первоначальной более, чем на 5%. Найти общее количество синих карандашей.
- 21. (экон-98.7) Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определить цену продажи одной акции видов А и Б.
- 22. (фил-91.1) Представить число 1991 в виде произведения простых чисел.
- 23. (экон.-90.4) Натуральные числа a,b,c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a,b и c, если известно, что при указанных условиях сумма a+b+c максимальна.
- 24. (почв-77.5) Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось,

что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

- 25. (ВМиК-82.4) На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6 480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11 200 деталей. Сколько прессов было первоначально?
- 26. (ВМиК-78.4) Совокупность А состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в А больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из А равно 210. Для любых двух чисел из А их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из А делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит А.
- 27. (экон.-93.5) За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}\%$, потом $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.
- 28. (физ-83.4) После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.
- 29. (ИСАА-91.4) При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении была увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.

- 30. (ИСАА-98.6) При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.
- 31. (фил-88.5) Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на два автомобиля больше, чем вторая бригада. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей п, догнала первую бригаду, работавшую все время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n.
- 32. (экон.-83.5) На факультет от школьников подано на 600 заявлений больше, чем от производственников. Девушек среди школьников в 5 раз больше, чем девушек среди производственников, а юношей среди школьников больше, чем юношей среди производственников, в n раз, причем $6 \le n \le 12$ (n целое число). Определить общее количество заявлений, если среди производственников юношей на 20 больше, чем девушек.
- 33. (экон.-96.4) В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс.руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс.руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс.руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.
- 34. (м/м-92.4) Один рабочий на новом станке производит за 1 час число деталей, большее 8, а на старом станке на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?
- 35. (геогр-79.4) В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

- 36. (хим-97(1).6) Найти все пары целых чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению $(x^2+y^2)\cdot(x+y-3)=2xy.$
- 37. (био-96.5) Найти все пары натуральных чисел (t,u), удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\left\{ \begin{array}{l} 2t + 47 < 22u - 2u^2, \\ 4u > 7t + 14. \end{array} \right.$$

- 38. (экон.-86.5) Линию, связывающую города A и B, обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.
- 39. (м/м-96(1).5) Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?
- 40. (ВМиК-96(1).5) Найти все целочисленные решения уравнения $14x^4 5y^4 3x^2y^2 + 82y^2 125x^2 + 51 = 0$.
- 41. (экон.-89.6) Найти все целые числа x, y, удовлетворяющие равенству $9x^2y^2 + 6xy^2 9x^2y + 2x^2 + y^2 18xy + 7x 5y + 6 = 0$.
- 42. (экон.-89.6) Найти все целые числа x, y, удовлетворяющие равенству $9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0$.
- 43. (ВМиК-79.4) Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})\right) = 1.$$

44. (ИСАА-97.7) Найти все пары целых x и y, удовлетворяющих уравнению

$$3xy - 14x - 17y + 71 = 0.$$

- 45. (геол.ОГ-88.5) В пионерский лагерь отправилась автобусная колонна с 510 пионерами, состоящая из "Икарусов" и "Лиазов", причем количество тех и других нечетно. Число пионеров в каждом из "Лиазов" одинаково и кратно трем, а в каждом "Икарусе" в 1,2 раза больше, чем в одном "Лиазе". Сколько всего автобусов в колонне?
- 46. (псих-79.5) Найти все тройки целых чисел (u, v, w), для каждой из которых выполняется условие $3(u-3)^2 + 6v^2 + 2w^2 + 3v^2w^2 = 33$.
 - §19. Задачи последних лет, не вошедшие в §§1-18.

В этом параграфе собраны задачи последних лет, не вошедшие в $\S1-18$.

- 1. (ВМиК-99(1).1) Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/час и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 час. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.
- 2. (ВМиК-99(1).2) Решить неравенство

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|\geq 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|.$$

3. (ВМиК-99(1).3) Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{8}}=-\sin x\cdot\cos x.$$

4. (ВМиК-99(1).5) При каких значениях параметра а уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два кория, лежащих на отрезке [-4,0]?

5. (ВМиК-99.1) Известно, что $tg\alpha = \sqrt{3}$. Сравнить

$$\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\right)$$
 и $\frac{19\pi}{24}$.

- 6. (ВМиК-99.2) На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 (2 \sqrt{3})x$, пересекает ее в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.
- 7. (ВМиК-99.3) Решить неравенство

$$|\log_{x+1} \sqrt{(x-2)^4} + 2| \ge -3 + \log_{\frac{1}{x+1}} \sqrt{(x-2)^6}.$$

8. (ВМиК-99.5) Решить уравнение

$$tg 14x + 3 ctg 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$$

9. (геол-99(1).1) Решить уравнение

$$\cos (6 \sin x) = -1.$$

10. (геол-99(1).2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5y + 4x = \sqrt{16x^2 - 25y^2}, \\ x^2 + 6x - 7 = 0. \end{cases}$$

11. (геол-99(1).3) Найти наибольшее из значений параметра a, при которых уравнение

$$\arctan\left|9^x + 4^x + a\sqrt{2}\cdot6^x\right| = 0$$

имеет решение.

12. (геол-99(1).4) Найти такое натуральное двузначное число, что сумма квадрата числа его десятков и ушестеренного квадрата числа единиц равна умноженной на пять сумме произведения цифр этого числа и 1.

- 13. (геол-99(1).5) Решить неравенство $2 < |2| \log_{\frac{1}{2}} (3x+1) 4| \le 3$.
- 14. (геол-99(1).7) Решить неравенство

$$\sqrt{4x-x^2-3} \ge \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$$
.

15. (геол-99.1) Найти область определения функции

$$y = \left(\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\right) \cdot \sqrt{\frac{25}{(x+2)^2} - 1}.$$

16. (геол-99.2) Известно, что x_1 , x_2 – корни уравнения

$$2x^2 - (\sqrt{3} + 5)x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 0.$$

Найти значение $A = x_1 + x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или 1,999?

17. (геол-99.3) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости (x,y) системой неравенств

$$\begin{cases} x(x+y-\sqrt{2}) \le 0, \\ x^2+y^2 \le 2. \end{cases}$$

18. (геол-99.5) Решить уравнение

$$|\cot^2 2x + 8\sqrt{-\cot 2x} - 3| = |\cot^2 2x - 8\sqrt{-\cot 2x} - 3|$$
.

- 19. (геол-99.6) Дана арифметическая прогрессия a_1, a_2, \ldots , в которой $a_3 = -13$ и $a_7 = 3$. Определить, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найти значение этой суммы.
- 20. (геол-99.8) Решить неравенство

$$\log_{84-2x-2x^2} \cos x \le \log_{x+19} \cos x.$$

21. (ИСАА-99.1) Решить уравнение

$$\lg^{2}(x-2)^{2} = 3^{(2\log_{3}\sqrt{2})} \left(\frac{\log_{5}(2-x)}{\log_{5}10} \right).$$

22. (ИСАА-99.2) Упростив выражение

$$A = \frac{3ab - b\sqrt{ab} + a\sqrt{ab} - 3b^2}{\sqrt{2^{-2}(ab^{-1} + a^{-1}b) - 0, 5}} - 2ab - 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}},$$

где a>b>0 — действительные числа, выяснить, что больше: A или 0,01.

23. (ИСАА-99.3) Решить уравнение

$$\cos x + 8\cos 3x\sin 2x = -\cos 7x.$$

24. (ИСАА-99.5) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-6}-3}{|x-1|-4} \ge 1.$$

25. (ИСАА-99.7) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2^{y+2} \ge y^4 - 4x + 13, \\ x^2 - y^2 \le 4 - 2^{y+1}. \end{cases}$$

26. (м/м-99(1).1) Решить уравнение

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}}+\sqrt[8]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2}-2x\right)}=0.$$

27. (м/м-99(1).2) Решить систему

$$\begin{cases}
2^{x+2} = \frac{49}{4}x^2 + 4, \\
2^{x+2} - 4 \le x^2 \cdot (14 - 2^{x+2}) \cdot 2^x.
\end{cases}$$

28. (м/м-99(1).3) Известно, что для некоторой тройки чисел $x,y,z(x\neq y)$ выражения

$$\log_{(x^5y^2z)}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z}\right) \text{ if } \log_{(x^2y^5z)}\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$$

равны одному и тому же числу. Найти это число.

29. (м/м-99(1).5) Найти все значения а из промежутка [-2;1], при каждом из которых расстояние на числовой оси между любыми различными корнями уравнения

$$\sin 2x + |2a+1| \cdot \sin x + |a| = 2|a|\cos x + \sin x + |2a^2+a|$$
 не меньше, чем $\frac{\pi}{2}$.

30. (м/м-99(2).1) Решить уравнение

$$(x^2+4)\lg\sin^2 3x + x^2\lg\cos^2 2x = 4\lg(\cos 2x\sin^3 3x).$$

- 31. (м/м-99(2).2) Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый со знаком "плюс", второй со знаком "минус" и т.д.) равна $\frac{20}{27}$. Найти знаменатель прогрессии.
- 32. (M/M-99(2).3) Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3| \cdot (|x-5|-|x-3|) - 6x$$
 и $|x| \cdot (|x|-|x-8|) + 24$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

33. (м/м-99(2).5) Найти все значения *а*, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \ge \frac{5a+5}{2(2^x+3a+3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

- 34. (м/м-99.1) Решить неравенство $3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \le 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}$.
- 35. (м/м-99.2) Решить уравнение

$$|\log_2(2x+7)| = \log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|).$$

36. (м/м-99.3) При каких значениях ϕ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \phi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \phi\right) = \sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

 (м/м-99.5) Найти все значения а, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0,$$

не меньше 1.

- 38. (хим-99(1).1) Решить уравнение $x^2 + 1 + |x 1| = 2|x|$.
- 39. (хим-99(1).2) Решить неравенство $\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}}-\frac{x+1}{2x}\right)^2}\geq 0.$
- 40. (хим-99(1).3) Найти все значения x из отрезка $[0;\pi]$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

41. (хим-99(1).6) Для каждого значения параметра a, принадлежащего отрезку [-1;0], решить неравенство

$$\log_{x+a}(x^2 - (a+1)x + a) \ge 1.$$

42. (хим-99(1).7) Функция f(x) удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}.$$

Найти значение функции f(1999), если f(1) = 1 и f(4) = 7.

43. (хим-99.1) Решить неравенство $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \le 2$.

44. (хим-99.2) Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$$

45. (хим-99.3) Решить неравенство

$$\log_{3-x}(2x+1) \cdot \log_{2x+1} x^2 \le \log_{3-x}(3x+1) \cdot \log_{3x+1}(x+2).$$

46. (хим-99.6) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечётное число решений.

47. (хим-99.7) Последовательность чисел a_1, a_2, \ldots определяется следующим правилом: $a_1 = 0$,

$$a_{n+1} = \left\{ egin{array}{l} a_n + 2, \ {
m e}{
m c}{
m n} \ {
m u}{
m u}{
m c}{
m n} \ {
m n} \ {
m t}{
m e}{
m Thoe}, \end{array}
ight.$$

Найти a_{1999} .

48. (ВКНМ-99(1).1) Решить уравнение

$$(7\sin x - 4\sqrt{3}) \cdot (7\sin x - 5\sqrt{2}) = 0.$$

49. (ВКНМ-99(1).2) Решить систему

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3x}{2}} + \log_3^3 y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1} \cdot \log_{\sqrt{3}} y + \log_3^2 y = 84. \end{cases}$$

50. (ВКНМ-99(1).3) Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход П₁, а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход П₂. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и П₂ некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной 12 км/ч, а П₂ уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и П₂, одновременно пришли оба пешехода. Найти скорость пешехода П₁.

- 51. (ВКНМ-99(1).5) Знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии отрицателен. Найти все целые m, при которых сумма её членов с нечётными номерами больше суммы её членов с чётными номерами на величину, равную произведению её второго члена и числа вида $m^2+10m+20$.
- 52. (био-99.1) Решить уравнение $8\cos 6x 12\sin 3x = 3$.
- 53. (био-99.2) Решить неравенство $\frac{3}{|x-1|} \ge 2x + 5$.
- 54. (био-99.3) Решить уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3-3x^2-\frac{37}{8}x+\frac{55}{8}\right)+2\log_{(8-7x)^2}(x+3)=1.$$

55. (био-99.5) Найти все такие значения $y>\frac{1}{2},$ что неравенство

$$16y^{3} + 6y^{3}x - 4y^{3}x^{2} - 50y^{2} - 11y^{2}x +$$

$$+10y^{2}x^{2} + 52y + 4yx - 8yx^{2} - 18 + x + 2x^{2} > 0$$

выполняется при всех x из интервала 1 < x < 2y.

- 56. (био-99.6) Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы: первый из точки A, второй из точки B и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из первых пятнадцати встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке B. Найти отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.
- 57. (почв-99(1).1) Определить, что больше $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{81}\left(\frac{1}{27}\right)$ или $\sin\frac{43\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$?
- 58. (почв-99(1).2) Решить уравнение $\left|\cos x \frac{1}{2}\right| = \sin x \frac{1}{2}$.
- 59. (почв-99(1).3) Решить неравенство $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

- 60. (почв-99(1).4) Сумма десяти чисел равна нулю, и сумма их попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма кубов этих чисел?
- 61. (почв-99(1).6) Найти все значения параметра $oldsymbol{eta}$, при которых уравнение

$$(x^2+x)(x^2+5x+6)=\beta$$

относительно x имеет ровно три корня.

- 62. (почв-99.1) Решить уравнение $4^x 2^x = 56$.
- 63. (почв-99.2) Решить уравнение $\cos 2x = \sin x$.
- 64. (почв-99.3) Решить уравнение $\log_{\pi}|x^2-1|=\log_{\sqrt{\pi}}|x|$.
- 65. (почв-99.4) Решить неравенство $\sqrt[5]{y^5} \ge \sqrt[4]{y^4}$.
- 66. (почв-99.5) Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?
- 67. (почв-99.7) Для каждого значения параметра $b \leq 0$ решить неравенство (относительно x)

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \geq b.$$

- 68. (reorp-99(1).1) Решить уравнение $2\cos 4x 4\sin 2x = -1$.
- 69. (геогр-99(1).2) Сумма первых пяти членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15, а их произведение равно 1155. Найти шестидесятый член прогрессии.
- 70. (геогр-99(1).3) Решить уравнение

$$\sqrt{|x^2 + 14x + 47| - 1} = |x + 7| - 1.$$

71. (геогр-99(1).5) При каких значениях параметра а система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3. \end{cases}$$

имеет единственное решение?

- 72. (геогр-99.1) Решить уравнение $\log_{4x-8}(x^2-2x-3)=1$.
- 73. (геогр-99.2) Решить уравнение $\sqrt{2x^2 8x + 5} = x 2$.
- 74. (геогр-99.3) По реке из пункта A в пункт B выплыл катер. Одновременно из пункта B в пункт A выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки.
- 75. (reorp-99.4) Найти все значения параметра а, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3\pi}{2}$.

76. (псих-99.1) Решить неравенство
$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1$$
.

- 77. (псих-99.2) Решить уравнение $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} 4 = 0.$
- 78. (псих-99.3) Решить систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \ge 0. \end{cases}$$

- 79. (псих-99.4) Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции $f(x)=\frac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал (-1;3]. Определить при каждом таком p множество значений функции f(x).
- 80. (псих-99.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно пять различных наборов (x,y,z) натуральных чисел x,y,z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ ayz + axz + axy > xyz. \end{cases}$$

- 81. (соц-99.1) Решить уравнение $\sqrt{y-1} = 6 y$.
- 82. (соц-99.2) Найти первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма првых пяти членов с нечётными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с чётными номерами и равна квадрату первого члена.
- 83. (соц-99.4) Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определить количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если за всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.
- 84. (соц-99.5) Решить неравенство $\frac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2|\leq 0.$
- 85. (соц-99.6) При каких значениях параметра а неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)} \ge$$

$$\ge \left| \log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)} \right|$$

не имеет решений на отрезке [-5;6]?

- 86. (филол-99.1) Расстояние в 160 км между пунктами А и Б автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, со скоростью 20 км/ч. Какое расстояние автомобиль проехал по ровной дороге.
- 87. (филол-99.2) Решить неравенство $\frac{1}{x^2 + 8x 9} \ge \frac{1}{3x^2 5x + 2}.$
- 88. (филол-99.4) Решить уравнение

$$\log_{(1-2\cos z)}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0.$$

89. (филол-99.5) Решить систему

$$\begin{cases} \cos^3\left(z+4y+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sin\left(2z+2y-\frac{\pi}{4}\right)}=0,\\ \cos\left(3z+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sin^3\left(4z-2y-\frac{\pi}{4}\right)}=0. \end{cases}$$

- 90. (физ-98(1).1) Решить уравнение $\sin 3x \sin 2x \cdot \cos x = 0$.
- 91. (физ-98(1).2) Решить уравнение $\sqrt{3x-x^2-2}=2x-3$.
- 92. (физ-98(1).3) Решить неравенство $2^{\frac{6x-4}{x}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.
- 93. (физ-98(1).5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)} = 1, \\ 4^{x+y} - 2^{x+y} = 12. \end{cases}$$

94. (физ-98(1).8) При каких значениях а, система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(y-3) - 2\log_9 x = 0, \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение

- 95. (физ-98(2).1) Решить уравнение $\cos 4x \sin 3x \cdot \cos x + \cos 2x = 0$.
- 96. (физ-98(2).2) Решить неравенство $|x^2 + 2x 8| > 2x$.
- 97. (физ-98(2).3) Решить уравнение $27^{\frac{2}{x}} + 27 \cdot 3^{\frac{3}{x}-1} 36 = 0$.
- 98. (физ-98(2).5) Решить неравенство

$$\log_3\left\{\log_{\frac{1}{8}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-\frac{1}{2}\right)\right\}\leq -1.$$

99. (физ-98(2).7) Найти все значения а, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 1) < 1$$

выполняется для всех x < 0.

100. (физ-98.1) Решить уравнение $4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x$.

101. (физ-98.2) Решить уравнение

$$\log_3(x-2) - \log_9(x^2 - 10x + 25) = \log_3 2.$$

- 102. (физ-98.3) Решить неравенство $9^x 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} 3^{2x-1}$.
- 103. (физ-98.5) Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{array} \right.$$

104. (физ-98.7) Для любых допустимых значений a решить неравенство

$$\log_a(3a^x - 5) < x + 1.$$

- 105. (физ-99(1).1) Решить уравнение $\sin 14x = \cos 4x \sin 6x$.
- 106. (физ-99(1).2) Решить уравнение $2^{2x-5} 4^{x-2} = 32^{\frac{2x}{6}} 66$.
- 107. (физ-99(1).3) Решить неравенство $2\log_4(x+1) \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-5) < 3$.
- 108. (физ-99(1).5) Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2x - 3} - |3y - 1| = 0, \\ 4\sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0. \end{array} \right.$$

109. (физ-99(1).7) Для любых допустимых значений a решить уравнение

$$\log_a(x^2-3a)=\log_a(a^2-3x).$$

- 110. (физ-99(2).1) Решить уравнение $\sin x \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0$.
- 111. (физ-99(2).2) Решить уравнение $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2x+1} = x+4$.
- 112. (физ-99(2).3) Решить неравенство $\frac{2}{\log_3(x+1)} \leq \frac{1}{\log_9(x+5)}$.

113. (физ-99(2).5) Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{\left(\frac{y}{x} + \frac{3x}{y}\right)} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}. \end{array} \right.$$

114. (физ-99(2).7) При каких значениях а уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 < x < 2\pi$?

115. (физ-99.1) Решить уравнение $\cos 7x + \cos 3x + 2\sin^2 x = 1$.

116. (физ-99.2) Решить неравенство
$$\left|2 - \frac{1}{x-4}\right| < 3.$$

117. (физ-99.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \frac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

118. (физ-99.5) Решить уравнение
$$\sqrt{\frac{4}{x-2}+1}=\frac{1}{x-2}$$
.

119. (физ-99.8) Для любого допустимого значения a решить неравенство

$$\log_{2a} \left(\log_3 x^2 \right) > 1$$

и найти, при каком значении a множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6?

Ответы к §1. Стандартные тригонометрические уравнения.

1. (физ-77.1)
$$\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

2. (фил-85.1)
$$-\pi$$
; $-\frac{4\pi}{3}$.

3.
$$(BMиK-80.2) \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$
 $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

5.
$$(BMnK-80.1) \frac{7}{9}$$
.

6.
$$\cos \alpha = -2/3$$
; $tg\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$.

7.
$$x = -\frac{\pi}{4}$$
; $x = -\frac{\pi}{12}$; $x = \frac{\pi}{4}$.

9. (почв-98.2)
$$-\frac{1}{\sqrt{10}}$$
, $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$.

10.
$$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

11.
$$\frac{\pi k}{2}$$
, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

12. (BMuK-94(1).2)
$$-\frac{\sqrt{7}}{4}$$
.

13. (экон.К-80.4)
$$2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
.

14. (почв-96(1).1)
$$\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$$
.

15.
$$\frac{\pi}{14}(2k+1); \quad \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

16. (XMM-96.1)
$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$
.

17.
$$(-1)^n + \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$$
.

18.
$$\frac{5}{4} + \frac{\pi}{2}m; -\frac{5}{6} + \frac{\pi}{3}n, m, n \in \mathbb{Z}.$$

19.
$$\frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

20. (физ-89.1)
$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$
, $k \in \mathbb{Z}$.

21.
$$\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

22.
$$\pi n, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{8}, n, k \in \mathbb{Z}$$

23.
$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n, k \in \mathbb{Z}.$$

24.
$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

25.
$$(\text{хим-78.1}) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$
 $\frac{(-1)^m}{2} \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$

26.
$$90^{\circ} + 180^{\circ}n$$
, $n \in \mathbb{Z}$.

27.
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi m, n, m \in \mathbb{Z}.$$

28. (био-94.3)
$$1\frac{23}{24}$$
; $2\frac{7}{24}$; $2\frac{23}{24}$.

29. (экон.-89.4)
$$x = \pi - \arcsin \frac{\pi}{12}$$
; $x = \pi + \arcsin \frac{\pi}{6}$.

30.
$$\pm \arccos(-1/4) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$
.

31.
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

32.
$$\frac{\pi(12k\pm 5)}{12}$$
, $k \in \mathbb{Z}$.

33.
$$(-1)^n \arcsin(1-\sqrt{3}) + \pi n$$
, $n \in \mathbb{Z}$.

34. (хим-96(1).2)
$$2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

35.
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

36.
$$\frac{(-1)^n}{5} \arcsin(\sqrt{13} - 3) + \frac{\pi}{5}n$$
,

37.
$$x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$

 $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$

38.
$$x = \pm \sqrt{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}, \ k = 0, 1, ...;$$

 $x = \pm \sqrt{-\frac{5\pi}{6} + 2n\pi}, \ n = 1, 2, ...$

39.
$$(BM \mu K-85.3) \frac{-18+\sqrt{8k+2}}{26},$$

 $\frac{-18-\sqrt{8k+2}}{26}, k=0,1,2,\ldots$

40.
$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{17 - \sqrt{385}}{16} + \pi n,$$

 $n \in \mathbb{Z}.$

41.
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

 $x = \frac{1}{3} \operatorname{arcctg} 6 + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

42.
$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

43.
$$\pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{6} + \frac{\pi k}{2}$$
; $k \in \mathbb{Z}$.

44.
$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

45.
$$\pm \arcsin \frac{3}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

46.
$$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \pi k$$
, $k \in \mathbb{Z}$.

47.
$$(M/M-79.1) \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

48.
$$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \neq 0, n \in \mathbb{Z}.$

49.
$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

50.
$$\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.
51. $(-1)^n \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n$,

52. (ncmx-77.1)
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$$
.

53. (био-85.2)
$$\frac{5\pi}{6}$$
.

54. (био-88.1)
$$\frac{4\pi}{2}$$
.

55.
$$(BMuK-83.2) \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z.$$

Ответы к §2. Простейшие уравнения и неравенства с модулями, дробями и радикалами.

- 1. (псих-84.1) 180.
- 2. $(BMnK-92.1) \sqrt[3]{\frac{1991}{1992}} > \sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$.
- 3. (геол-94(1).1) $\sqrt{13} < \sqrt[3]{47}$.
- 4. (геол.OГ-82.1) Первое больше.
- 5. (геол-82.1) Первое больше.
- 6. (экон.-88.1) $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} > 3$.
- 7. $-\infty < a < -2$; $1 < a < +\infty$.
- 8. (геол-79.1) если a=0, то нет x, удовлетворяющих условию задачи; если $a\neq 0$, то $x=\frac{5a}{3}$.
- 9. $(\text{reom.O}\Gamma 79.1) \infty < x \le 3/2$.
- 10. (физ-95.3) -4; 0.
- 11. $(\phi \mu_3-83.2)$ -1, $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 1.
- 12. (reorp-77.1) $-\infty < x < -2$, $2 < x < +\infty$.
- 13. (xим-94.2) $(1; +\infty)$.
- 14. $-2 \le x < -1, x > -1$.
- 15. (геол-78.2) $x \le 6/5$.
- 16. (био-95.2) 2/3; 2.

- 17. (псих-95.1) [-7/2; 15/2].
- 18. (reorp-96(1).1) $(-\infty; 4/7]$.
- 19. (псих-98.1) $-\frac{17}{5}; \frac{11}{3}$.
- 20. (экон.-89.3) x = -2; x = 4.
- 21. $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$; $x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.
- 22. (экон.-84.3) $-\infty < x \le -13/5$, $3 \le x < +\infty$.
- 23. (xum-96(1).3) $(2; \infty)$.
- 24. x = 5/4, $x \ge 5$.
- 25. (ВМиК-82.5) при a=1 решением является любое значение $x \ge 1$; при a=-1 решением является любое значение x из промежутка $-3 \le x \le 1$; при |a| < 1 уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{7+a}{a-1}$ и $x_2 = 1$; при |a| > 1 уравнение имеет один корень x = 1.
- 26. (геол-91.6) x = 4 при a < -1; $x \ge 4$ при a = -1; $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4a 8}{a + 1}$ при -1 < a < 1; -2 < x < 4 при a = 1;
- 27. (физ-84.4) $4/3 \le a \le 2$.

x=4 при a>1.

28. (физ-84.4) $-3 \le a \le -\frac{23}{9}$.

29. (псих-80.2) (3, 1), (5/3, 11/3).

30. $\left(\frac{17}{4}; -\frac{1}{8}\right), \left(-\frac{23}{4}; \frac{39}{8}\right).$

31. (1/2; 11/2), (3/2; 11/2).

32. (физ-97.5) (5/2; -5/2).

33. $-\infty < b < 0, 0 < b < +\infty$.

34. $\left(-3; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

 $n \in Z$. 35. (геол.ОГ-79.3) $(x, \sqrt{2})$, где $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

36. (m/m-79.3) (5; -2).

37. (ВМиК-87.2) не существует.

38. (reorp-80.1) k < 1/2.

39. (хим-95.1) [1; 2].

40. (био-94.1) (4;1), (-2/3;10/3).

41. (физ-81.2) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

42. (био-85.1) x = 0.

43. -4 < x < -3 m 3 < x < 5.

44. (псих-94.2) (1;-1), (-1/5;7/5).

45. (геол-81.1) 2; 3.

46. (геол-90.1) -2.

47. (BMuK-94(1).1) 6/5; 4/5.

48. (био-96.2) 1; 13.

49. (reon-77.2) $-5 < x < 3 + \sqrt{8}$.

50. $x \in [0; 100) \cup (400; +\infty)$.

51. (BMnK-87.1) (9;2).

52. (физ-77.2) a < 6.

 $\cup |\sqrt{8}; +\infty \rangle$.

53. $\left(-\infty; -\sqrt{8}\right] \cup \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \cup$

 $54. \left(-2; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 2\right).$

55. (reos-95.2) $(-\infty; -3] \bigcup [3; +\infty)$.

56. (reorp-87.2) -2 < y < 2.

57. $-\infty < x < 1; \frac{4}{3} \le x < +\infty.$

58. $(\cos -98.1)$ [-6; 0).

59. $(-\infty; 1] \cup (1996; +\infty)$.

60. (M/M-77.1) x < 1 x = 2.

61. (reorp-93.3) $(-2;1) \cup \{2\}$.

62. (био-84.1) $3 + \sqrt{3} < x < +\infty$;

 $1 < x < 3 - \sqrt{3}.$ 63. -1 < x < 0; 2 < x < 4.

64 (+---- 09 1) [2 1)

64. (филол-98.1) [-3;-1).

65. $x \in (-6; -4) \cup (-4; 1)$.

66. $\left(-\frac{9+\sqrt{57}}{4};-2\right)\cup(-2;-1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right).$

67. $(-2; 2) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$.

68.
$$(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{3}; 1 \right) \cup (1; +\infty).$$

69. (физ-93.5)
$$(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$$
.

70.
$$(-\infty; 4) \cup (4; 8) \cup [10; +\infty)$$
.

71.
$$(-\infty; 2) \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$$
.

Ответы к §3. Стандартные текстовые задачи.

- 1. (почв-84.1) 12 га, 9 га, 15 га.
- 2. (почв-94(1).1) 147 ц/га.
- 3. (почв-93.1) 16+24+40+48.
- 4. (соц-98.3) 7.2%.
- 5. (геол-94.7) 78,2%.
- 6. (геол-98.4) 1000 л. 7. (геол-95.6) 9 кг.
- 8. (геол-96(1).5) не менее 1,4 де-
- 9. (экон.-80.4) 170 кг.

калитра.

- 10. (физ-79.2) первый член прогрессии равен 9, разность равна 2.
- 11. (физ-92.5) $a_1 = 2, d = 3.$
- 12. (экон.В-98.2) $311\frac{3}{7}$.
- 13. (MCAA-93.2) 28.
- 14. (экон.-95.4) 210 тыс.руб.
- 14. (экон.-ээ.4) 210 тыс.руо.

15. (геогр-95.2) 16 км/ч.

- 16. (био-95.4) 1085 и 30.
- 17. (экон.-87.2) 5,5 т, 4 т, 2,5 т.
- 18. (геогр-81.3) 1 кг 40% -ного и
 - 2 кг 60% -ного растворов.
- 19. (почв-92.2) 90%.20. (физ-78.2) 15 т.
- 21. (геол-96.6) 1/15.
- (геол-79.4) скорости товарного и скорого поездов равны соответственно 50 км/ч и 100 км/ч.
- 23. (м/м-97.3) 160 км.
- 24. (reon-94.1) $2\sqrt{17} > 8$, (24).
- 25. (BMnK-90.2) 17.
- 26. (геол-80.4) 20 м. 27. (псих-97.3) 162.
- 28. (BMnK-96.1) 70.
- 29. (BMnK-94.5) $5 + \left(\frac{1}{5}\right)^{29}$.
- 30. (экон.М-95.4) 6.
- 31. (геол-98(1).4) Да.
- 32. (ВМиК-97.1) 10 км/час.
- 33. (геол-95(1).5) (0;50].
- 34. (BMuK-96.2) 5.
- 35. (геол-81.5) 3 литра.
- 36. (ИСАА-95.3) 100.

- (геол.ОГ-77.2) скорость второго бегуна равна 20 км/ч.
- 38. (почв-82.1) 80 км/ч.
- (хим-79.3) скорости пароходов
 15 км/ч, скорость реки 3 км/ч.
- 40. (геол-93.3) 8/3 часа.
- 41. (экон.-79.3) глицерина 0,5 л, воды 3,5 л.
- 42. (ВМиК-95(1).1) 9.
- 43. (хим-89.2) 2.
- 44. (ВМиК-88.1) 50.
- 45. (био-91.3) 8 мин 20 с.
- 46. (m/m-93(1).2) 20.
- 47. (ВМиК-79.1) Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии больше суммы первых шести членов арифметической прогрессии.
- 48. (reorp-91.3) $a_1 = a_2 = a_3 = 7$; $a_1 = 7(1 \sqrt{2}), a_2 = 7$, $a_3 = 7(1 + \sqrt{2})$; $a_1 = 7(1 + \sqrt{2}), a_2 = 7$,
- $a_3 = 7(1 \sqrt{2}).$
- 49. (почв-95.1) 50.
- 50. (хим-94(1).3) 5/2.
- 51. (M/M-95(1).1)-2.
- 52. (хим-78.2) 3 часа.

- 53. (экон.К-77.2) скорость мотоциклиста при движении из A в B в 4 раза больше скорости велосипедиста.
- 54. (ВМиК-92.4) 11 часов.
- 55. (фил-79.4) 8 ч.
- рость парохода 11 км/ч. 57. (reorp-77.4) 60 км/ч.

56. (геогр-78.1) собственная ско-

- 58. (м/м-87.4) 50 км/час, 40 км/час.
- 59. (био-86.3) 72 км/час.
- 60. (геогр-89.2) 15 км/час.
- 61. (псих-88.4) 60 часов.
- 62. (геол-85.3) 9 часов.

64. (геол-89.5) 60 л.

- 63. (экон.К-87.2) 6 т, 3 т, 1,5 т.
- Ответы к §4. Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями.
 - 1. (экон.-83.1) 1.
 - 2. (физ-95(2).1) 1.
- 3. (физ-82.4) $3 < x < +\infty$.
- 4. (экон.-89.2) 1.
- 5. (BMuK-84.1) 9/7.
- 6. (физ-82.3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

27. (физ-89.3) x = 4.

30. $(\cos -98.2)$ -3.

31. (физ-94(1).2) 3.

33. (M/M-96(1).1) -3.

35. (геол-96(1).3) 5/4.

36. (BMuK-83.1) $[-4; 2) \cup (3; 4]$.

37. $(-3, -2) \cup (-2, -1] \cup [2, 3)$.

38. $\left[-\frac{6}{5};-1\right)\cup\left(-\frac{1}{5};0\right]$.

39. (псих-80.4) $1 < x \le 3/2$.

41. (BMuK-92.3) [2; 11).

40. (BMnK-86.1) $4 < x < 1 + 2\sqrt{3}$.

42. (геол-83.3) $\left[\frac{1}{2};1\right) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right]$.

43. (M/M-87.2) -3 < x < -1.

34. (xим-97(1).2) 2.

28. $(\text{reon-97}(1).2) \ x = 9/5.$

29. (фил-89.3) $x = \sqrt{17} - 4$.

32. (филол-98.3) $\sqrt{3}-2$.

7. $\frac{p+q+pq}{6(p+q-2pq)}$, npw $p \neq 0, q \neq$ $\frac{1}{6}$ при p = 0, q = 0.

8. (био-98.1) $\frac{2\sqrt{3}-21}{42+10\sqrt{3}}$.

9. $3\log_8 26 > 2\log_{1/2} \frac{1}{5}$.

10. $2^{2 \log_2 5 + \log_{0,5} 9} < \sqrt{8}$.

11. (экон.-90.1) имеют. 12. (reorp-86.2) x = 1/9.

13. (почв-95(1).3) $(0;1) \cup (1;2]$. 14. (физ-83.3) 0 < x < 1/16.

15. $(\text{reom.O}\Gamma\text{-82.3}) - 2 < x < 3.$ 16. $(0;1) \cup (1;4) \cup (64;+\infty)$.

17. (M/M-93(2).1)(-1;0).

18. (био-96.3) (-77;3). 19. $(\phi$ из-97(2).5) -2 < x < -53/27.

20. (reorp-95(1).2) $(1; \sqrt[3]{5})$. 21. (физ-80.4) x > 0.

22. (физ-97(1).5) $(-\infty; 0) \cup (1; 3)$. 23. $(\text{геол-97}(1).4) \ x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5}).$

24. $(M/M-94(2).2) (1 - \log_2 3; 1/6)$.

26. (почв-77.2) 3/2.

25. (xим-83.4) $\sqrt{2}$.

44. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 45. (почв-93.3) $(-2;0) \cup (0;2)$.

46. $\sqrt{11} < 9^{\frac{1}{2}\log_{8}(1+\frac{1}{9})+\frac{5}{2}\log_{8}2}$.

47. $2^{\log_3 5} - 0.1 < 5^{\log_3 2}$

48. $3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3} \log 2} > 5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}$.

- 49. (MCAA-94.2) 0; -2.
- 50. (reoл-97.5) $x \in (1; +\infty)$.
- 51. (экон. K-80.1) $-\infty < x < 0$.
- 52. (физ-81.4) $0 < x < +\infty$.
- 53. (экон. M-97.1) $0; -3 \log_5 3$.
- 54. (физ-97(1).3) -3; -2; 1.
- 55. (xим-98.1) 0.
- 56. (reon-84.1) x = -1.
- 57. (хим-90.1) 2.
- 58. (физ-96(1).3) $\log_{3/5} 2$.
- 59. (хим-92.1) -1.
- 60. (фил-91.2) log₂ 3.
- 61. (физ-96.3) 2.
- 62. (физ-94(1).3) 4.
- 63. (экон.М-99.2) 3.
- 64. $(m/m-78.2) \frac{\pi}{4}$.
- 65. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \mathbb{Z}.$ 66. $\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
- 67. (псих-93.1) 2.
- 68. (псих-93.1) 2.
- 69. При a=0 решений нет;
 - при a < 0 $x = 2 \log_2 |a|$; при a=1 x=0; при a > 0, $a \neq 1$ $x_1 = \log_2 a \text{ if } x_2 = 2 \log_2 a.$

- 70. (физ-96(2).5) $(-\infty; 2)$. 71. (reon-80.1) x < -1.
- 72. (BMnK-77.1) $x > \frac{1}{2} \log_2 3 1$.
- 73. $\left(-\infty; \log_3 \frac{1}{2}\right] \cup \left[\log_3 \frac{3}{5}; \log_3 \frac{5}{3}\right)$.
- 74. $(-\infty; 0) \cup (1/2; +\infty)$.
- 75. при a = 0 решений нет; при a > 0 $x < -2 + \log_3 a$; при a < 0 $x < \log_3(-a)$.
- 76. $(xum-97.2) (-\infty; 0)$.
- 77. (почв-83.3) $(-17, \log_2 10)$. 78. (BMuK-85.1) (1; log₃ 2).
 - 79. $\left(-1; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{3}{2}; 9\right)$.
 - 80. (био-80.2) $2^{5/2}$, $\frac{1}{2}$.
 - 81. (почв-81.2) $\frac{1}{10}$, $10^{\sqrt{2}}$.
 - 82. (xим-98(1).2)16; 4. 83. $(-\infty; 0] \cup \left[1\frac{31}{32}; 2\right)$.
 - 84. $x \in \left(2; \frac{19}{9}\right) \cup \left(3; 2 + \sqrt{3}\right)$.
 - 85. $\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}$; $2 \le x < +\infty$.
 - 86. $0 < x < 2^{-2\sqrt{2}}, x > 2^{2\sqrt{2}}$
 - 87. (M/M-95.1) -2.

88. (био-91.1) $(\log_2 5 - 2)^2$.

89. (почв-92.3) 0.

90. (почв-96(1).2) 1; 3.

91. (BMuK-96(1).2) 1; -15/11.

92. (reorp-94.3) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right)$.

93. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$

94. (фил-92.2) (1; 7/2]. 95. $(-1;0) \cup (0;1) \cup [5;+\infty)$.

96. (экон. M-95.3) $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

97. $(\mathbf{M}/\mathbf{M}-88.2)$ $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

98. (BMuK-98.2) $(-1;0) \cup [1;5)$.

Ответы к §5. Тригонометрия

1. $(\text{геол.O}\Gamma\text{-85.4}) - \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; arctg $5 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg4} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{12} + \pi m,$

4. $\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. $\pm \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. $(xum-79.1)\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

 $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

7. $\frac{\pi(12k+5)}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

8. (экон.-92.1) 1. 9. (экон.-92.1) -1.

10. $\arccos \frac{5}{\sqrt{29}} \pm \arccos \frac{3}{\sqrt{29}} + 2\pi n$,

11. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{34}} + 2\pi k$, 12. $\pi + 2\pi k$; 2arctg $(\frac{\pi}{2}) + 2\pi n$;

 $k, n \in \mathbb{Z}$

13. $(\text{геол-79.3}) - \sqrt{29} < A < \sqrt{29}$.

14. (псих-81.3) $\frac{35\pi}{84}$, $\frac{53\pi}{84}$, $\frac{59\pi}{84}$. 15. (reorp-98.4) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

16. (экон.-90.5) -7/4, 1/4. 17. $(3\kappa0H.-90.5) - \frac{4}{3}; \frac{2}{3}$.

18. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{3} + \pi l, l \in \mathbb{Z}.$

19. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$ 20. $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $-\arctan \frac{1}{2} + \pi m$, $n, m \in Z$.

21. (reorp-94(1).1) $\pi/6$.

22.
$$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

23.
$$\operatorname{arctg}(-4) + \pi k$$
, $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

24.
$$(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

25.
$$\left(\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m\right),$$

 $n, m \in \mathbb{Z}.$

26.
$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi - 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$27. \ \left(\frac{7\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in Z.$$

28.
$$\left(\frac{5\pi}{24}+\pi n,\frac{\pi}{24}-\pi n\right),$$
 $\left(\frac{\pi}{24}+\pi m,\frac{5\pi}{24}-\pi m\right),$ fige $n,m\in Z.$

29.
$$\left(\frac{\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}\right), \left(\frac{5\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}\right).$$

$$\begin{array}{l} 30. \; \left(\frac{\pi}{6} + \pi(k+m), \frac{\pi}{6} + \pi(m-k)\right), \\ \left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+m), \\ -\frac{\pi}{6} + \pi(m-k)\right), \\ \text{free} \; k, m \in Z. \end{array}$$

31.
$$(-\pi, -\pi)$$
; $(\pi, -\pi)$; $(0, -2\pi)$.

32.
$$\left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{5} \right),$$
$$n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$33. \left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}}, \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4} \right),$$

$$\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}}, -\frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4} \right),$$

$$\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 9}}, \frac{\sqrt{\pi^2 + 9}}{3} \right),$$

$$\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 9}}, -\frac{\sqrt{\pi^2 + 9}}{3} \right).$$

34.
$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \ l \in \mathbb{Z}.$$

35.
$$x = \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2\pi k$$
, $k \in \mathbb{Z}$.

36.
$$3 \text{ при } a \in (-\infty; -1) \cup \{0\}$$

 $\cup (1; +\infty);$
 $5 \text{ при } a = \pm 1;$
 $7 \text{ при } a \in (-1; 0) \cup (0; 1).$

37.
$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{18} + 2\pi m,$$

 $\frac{13\pi}{18} + 2\pi k; m, n, k \in \mathbb{Z}.$

38.
$$\frac{3\pi}{\frac{4}{12}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$
 $\frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

39.
$$\pi \pm \operatorname{arctg2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
.

Ответы к §6. Задачи с радикалами.

2.
$$\frac{\pi^2}{9} \cdot (1+6n)^2, n \in \mathbb{Z}$$
.

3. (хим-78.3)
$$\log_5 7 \le x \le 2$$
.

4.
$$(M/M-98.1)$$
 $\left[3; \frac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$.

10. (геол-83.1)
$$-1$$
; 4.

12.
$$(M/M-94(1).2)-15/4; -3; -7/4.$$

13. (reorp-95.3)
$$\pm \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
.

14. (физ-85.2)
$$x = -\sqrt{3}$$
.

16. (почв-98.1)
$$\frac{7}{9}$$
.

18.
$$\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

19.
$$\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

20.
$$\pi k$$
, $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{37} - 1}{6} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

21.
$$\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$$

22. (IICMX-95.3)
$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$
, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

23.
$$2\pi k$$
; $\frac{\pi(8n-1)}{4}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

24. (фил-90.1)
$$\frac{\pi}{3}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

25.
$$(M/M-97(1).1) \ 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

26. $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

27.
$$x = -\frac{11\pi}{9}, \ x = -\frac{21\pi}{16}$$
.

28. (reorp-
$$94(1).3$$
) $(1;3)$.

29. (хим-98.2)
$$-3 \le x < 1$$
.

30. (почв-87.2)
$$-\frac{3}{2} \le x \le 3$$
.

31. (хим-96.2)
$$(4; +\infty)$$
.

$$32. \left(\frac{21-\sqrt{89}}{8}; +\infty\right).$$

33.
$$\left[-\frac{15}{4}; -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$$
.

34. (экон.-95.1)
$$(-\infty; -2]$$
.

35. (псих-88.3)
$$\left[-6; \frac{11+\sqrt{167}}{4}\right)$$
.

36. (био-80.3)
$$3 < x \le 5$$
.

37.
$$x < -7$$
; $2 \le x < +\infty$.

- 38. При $a<-1:x\in[a;-a];$ при $-1\leq a\leq -1/2:$ $x\in[-\sqrt{-(2a+1)};\sqrt{-(2a+1)}];$ при a>-1/2: нет решений.
- 39. (физ-97.7) Если a<1, $-1 \le x < \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 1,$ если $1 \le a < 2, x \ge -1,$ если $a \ge 2, x > \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 1.$
- 40. (физ-97.7) Если a<4, $3\leq x<\left(rac{a-5}{a-4}
 ight)^2+3$, если $4\leq a<5, x\geq3$, если $a\geq5, x>\left(rac{a-5}{a-4}
 ight)^2+3$.
- 41. (M/M-96.2) $x \ge \log_{2/3} \sqrt{17}$.
- 42. $(BMuK-94(1).3) (-\infty; 0].$
- 43. $[-1; +\infty)$ при a<1; $((a-1)^2\log_3^22-1; +\infty)$ при $a\geq 1.$
- 44. (фил-85.3) $-1 \le x < \frac{5}{4}$.
- 45. (MCAA-96.4) $[-1;7] \cup \{-2\}$.
- 46. (физ-97.3) $-1 \le x < 5^{\frac{3+\sqrt{6}}{2}} 2$.
- $47.\ \left(2^{3/8};2^{7/2}\right] \cup \left[-2^{7/2};-2^{3/8}\right).$
- 48. (псих-94.1) да.
- 49. (псих-94.1) да.
- 50. (экон.-93.3) $[-2;-1] \cup \{2\}.$

- 51. (BMuK-94.2) $\{3\} \cup [4;7]$.
- 52. (био-97.3) $\left[-5+\sqrt{23};-\frac{1}{8}\right]\cup\cup\left[\frac{3}{8};3-\sqrt{5}\right]\cup[3+\sqrt{5};+\infty).$
- 53. (псих-93.2) $\left[0; \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.
- $54. \ \ 0 < x \le 1; \ \ 2 \le x < 10.$
- 55. (reon.O Γ -84.2) x = 1, x > 2.
- 56. (физ-97(2).3) $x \le 0, x \ge 7/8$.
- 57. при a < 0 нет решений; при a = 0 $x \in (0; +\infty);$ при a > 0 $x \in \left[-\frac{a}{3}; 0\right) \cup \cup (8a; +\infty).$
- 58. при a<0 нет решений ; при a=0 $x\in(0;+\infty)$; при a>0 $x\in\left[-\frac{4a}{3};-a\right)\cup(0;+\infty).$
- 59. $[-1-\sqrt{52};-5)\cup(1;-1+\sqrt{52}].$
- 60. (MCAA-93.1) [1;3).
- 61. (BMuK-82.3) $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$.
- 62. $\left(-\infty; \frac{-31-\sqrt{265}}{6}\right) \cup (-5; \infty).$
- 63. $(-\infty; -2] \cup [-1; \frac{-1+\sqrt{13}}{6}).$

Ответы к §7. Разложение на множители и расщепление.

1.
$$\{0\} \cup (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$$
.

2.
$$x_1 = -4/3$$
, $x_2 = -2/3$.

3. (геол-88.2)
$$x = -4$$
; $x \ge -3$.

4. (BMnK-78.1)
$$x = -1, x \ge 2$$
.
5. $1/5 \le x \le 1/4$; $x = 2/5$.

6.
$$-2 \le x \le -1, x = 3.$$

7.
$$(M/M-95(1).2) - \sqrt{5}$$
.

7.
$$(M/M-95(1).2) - \sqrt{5}$$
.

9.
$$(\pi c u x-81.1) (4,2), (4/3,-2/3).$$

10.
$$-2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2.$$

8. (reon-95.3) (0; -7/2), (21; 21).

11.
$$\frac{\pi}{\frac{12}{12}} + 2\pi k$$
, $\frac{19\pi}{12} + 2\pi l$, πm , $\frac{2\pi}{3} + \pi n$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

$$2\pi n, (2k+1)\pi; k, n \in Z$$

$$13. (-1)^n \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} + \pi n, n \in Z.$$

12. $\pi + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} +$

13.
$$(-1)$$
 arcsin $\sqrt{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
14. $(-1)^{n+1} \arcsin \sqrt{2/3} + \pi n$,

$$n \in \mathbb{Z}$$
.
$$\frac{7\pi}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{2\pi} \cdot \frac{13\pi}{2\pi}$$

15.
$$-\frac{7\pi}{6}$$
; $-\pi$; 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; π ; 2π ; $\frac{13\pi}{6}$.
16. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, πk , $n, k \in \mathbb{Z}$.

17.
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$
; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$; $k, m \in \mathbb{Z}$.

18. (экон.-96.3)
$$\frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$$
.

19. (MCAA-95.5)
$$[1; \pi/2] \bigcup \{3\}$$
.

20. (MCAA-95.5)
$$\{-2\} \cup [0;1]$$
.

21.
$$\left((-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi m\right),$$

 $k, m \in \mathbb{Z}.$

22.
$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi (n+2l)\right),$$
$$k, n, m, l \in \mathbb{Z}.$$

24. (экон.-91.5)
$$\frac{\pi}{2} + 1$$
.

23. (био-88.5) (1;0).

25.
$$x = -1$$
; $2 \le x < 5$.

27. (геол-88.3)
$$x = 2; x = 1/6$$
.

28. (почв-80.4)
$$\left(3; \frac{7}{2}\right) \cup (4; +\infty)$$
.

29. (xum-84.1)
$$\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1; +\infty)$$
.

30.
$$\{5\} \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty).$$

$$31. \ \left[1-\sqrt{3};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(2;\frac{5}{2}\right).$$

32. (геол-95.5)
$$\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{11}{6}, \pm \sqrt{3}$$
.

33.
$$(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$$
.

34. 2 при
$$b \neq 4a, a > 0, b > 0$$
.

35.
$$(0;0), (5;1), \left(-\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$$
.

36.
$$(-\infty; 2-\sqrt{8}] \cup \{2\} \cup \cup [2+\sqrt{8}; \infty).$$

37.
$$(\pi c \mu x - 90.3) [-1; 2] \cup [3; 4].$$

38.
$$\left[\frac{4\pi}{9}; 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right) \cup \{\log_3 28\}.$$

39.
$$\frac{\pi}{2} + \pi n, (-1)^m \frac{\pi}{4} + \pi m;$$

 $n, m \in \mathbb{Z}.$

40.
$$\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

41.
$$\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \ k, n \in \mathbb{Z}.$$

42.
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$
; $\frac{\pi}{3} + \pi m$; $\frac{2\pi}{3} + \pi k$; $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{l} 43. \; \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\; \log_{3}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\right), \\ k=0,1,2,\ldots, \\ \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\; \log_{3}\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi l\right)\right), \\ l=0,1,2,\ldots, \\ \left(\pi+2\pi m,\; \log_{3}\left(\pi+2\pi m\right)\right), \\ m=0,1,2,\ldots. \end{array}$$

44.
$$\frac{\pi m}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n;$$

 $m, n \in \mathbb{Z}.$

45. (физ-90.3)
$$\frac{\pi n}{3}$$
, $n \in \mathbb{Z}$.

46.
$$\alpha = -10^{\circ} + 90^{\circ} \cdot k, \ k \in \mathbb{Z};$$

 $\alpha = 25^{\circ} + 90^{\circ} \cdot m, m \in \mathbb{Z}.$

47. (reorp-79.2)
$$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

48.
$$\frac{1}{2}(-1)^m \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{\pi m}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; m, n \in \mathbb{Z}.$$

49.
$$(-1)^k \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \pi k$$
,
$$\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}n; n, k \in \mathbb{Z}.$$

50.
$$\frac{\pi}{2} + \pi k$$
; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

51.
$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

52.
$$\frac{\pi n}{2}$$
, $n \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

53.
$$\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,$$

 $n, m \in \mathbb{Z}.$

54.
$$\frac{\pi l}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

55.
$$\frac{5\pi}{4} + 5\pi k, -\frac{5\pi}{12} + 5\pi n,$$

 $-\frac{5\pi}{3} + 5\pi m; k, n, m \in \mathbb{Z}.$

56.
$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, \\ n, m \in \mathbb{Z}.$$

57. (био-82.2)
$$\frac{\pi n}{4}, n \in Z$$
.

$$59. \; ($$
хим- $95.3) $-rac{\pi}{4}+\pi n, \; n \in Z.$ $60. \; 2\pi k; \; -rac{\pi}{4}+\pi n, \; k,n \in Z.$$

58. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7};$

62. (почв-88.3)
$$\log_{2/5} \frac{1}{2}$$
; $\log_{2/5} 2$.

63.
$$\log_{2/9}(1+\sqrt{2}) = \log_{9/2}(\sqrt{2}-1)$$
.

64. (геол-86.3)
$$\log_{3/2} \frac{1+\sqrt{13}}{6}$$
.

64. (геол-86.3)
$$\log_{3/2} \frac{1}{6}$$
.
65. (хим-93(1).4) (6/11; 10/11).

66. (BMnK-98(1).1) $(0;4) \cup \{8\}$.

67.
$$\left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right] \bigcup \left(1; \sqrt[4]{25}\right]$$
.

68. (BMwK-94.3)
$$-2\pi n$$
, $n \in N$.

69. (псих-78.1)
$$\frac{\sqrt{3}}{8}$$
; 1.

70. (физ-93.1)
$$\left(0; \frac{1}{2}\right)$$
.

72. (nove-97(1).4) (-1:0)
$$\cup$$
 (0:2)

72.
$$(\text{почв-97}(1).4) (-1;0) \cup (0;2).$$

73.
$$(\log_7 6; 1) \cup (\log_7 11; +\infty)$$
.
74. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \bigcup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$(0) \cup (0;$$

 $1; +\infty).$

75. $\left[-\frac{1}{3};0\right) \bigcup \left(\frac{1}{5};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

76.
$$\left[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{17+\sqrt{127}}{9}; 8\right)$$
.

77.
$$(-4;1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 11\right)$$
.

79. (reorp-97.2)
$$1 - \sqrt{3}$$
.

78. (фил-77.3) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

80.
$$\frac{\pi}{14}n$$
, $n = 1, 3, 5, 9, 11, 13$.
81. $-\infty < x \le 3 \text{ при } a = 0$; $-\infty < x \le \frac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2a}$,

$$rac{1+\sqrt{1-12a}}{2a} \le x < +\infty$$
при $0 < a < rac{1}{12};$
 $-\infty < x < +\infty$ при $a \ge rac{1}{12}.$

82. (экон.-84.6)
$$a=-1$$
 и $a=\sqrt{2}$.

$$(p;2),\ p\in R.$$
84. (соц-97.6) $\{3\pi/4\}$ [7/2; 9/2).

85. (псих-85.6)
$$-\frac{13}{3} < a \le -\frac{19}{5}$$
.

83. (1;-2); (-1;-2);

85. (псих-85.6)
$$-\frac{13}{3} < a \le -\frac{19}{5}$$

86. (псих-85.6)
$$-\frac{5}{11} < a \le -\frac{1}{3}$$
.

Ответы к §8. Раскрытие модулей в смешанных уравнениях и неравенствах.

- 1. (физ-96(2).3) (-6;6).
- 2. (геол-91.2) 2; 3.
- 3. (экон.К-78.1) $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

4.
$$\left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2}\right)$$
, $\left(\frac{-5+\sqrt{19}}{2}, \frac{6-\sqrt{19}}{2}\right)$.

- 5. (био-98.2) $[-6;-1]\cup[0;+\infty)$.
- 6. (экон.К-84.2) 14/3.
- 7. (фил-84.3) наибольшее значение равно $7\frac{1}{4}$, а наименьшее значение равно 1.
- 8. (псих-85.4) наибольшее значение равно 4, наименьшее значение равно 1,5.
- 9. наименьшее значение функции равно y(-3) = -3, наибольшее y(-3/2) = -3/4.

10.
$$\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \bigcup \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$
.

- 11. (био-83.3) -5 < x < 20.
- 12. $(BM n K-98(1).2) \left[4; \frac{13}{2}\right)$.
- 13. $(BMnK-98(1).2)\left[-\frac{9}{2}; -\frac{13}{4}\right)$.

- 14. Решений нет при a<-5; 0 при a=-5; $[0;(a+5)^2]$ при -5< a<1; $[(a-1)^2;(a+5)^2]$ при $a\geq 1.$
- 15. при $a \ge -1$ $x \in \left(0; -a + \sqrt{a^2 + 1}\right],$ при a < -1 $x \in \left(0; -a \sqrt{a^2 1}\right] \cup \left[-a + \sqrt{a^2 1}; -a + \sqrt{a^2 + 1}\right].$
- 16. при $a \ge -1$ $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; a + \sqrt{a^2 + 1}\right],$ при a < -1 $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; a + \sqrt{a^2 + 1}\right] \cup \left[-a \sqrt{a^2 1}; -a + \sqrt{a^2 1}\right].$
- 17. (геол-86.5) $0 < x < \frac{2a^2b}{a^2 + b^2}$.
- 18. (reorp-78.5) $\{-1\}\cup(1;3)\cup(4;6]$.
- 19. (reorp-78.5) $\{1; 2\} \cup [5; 6]$.
- 20. (xum-92.5) a) (-23;0); 6) $(-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$.
- 21. (геол-81.3) 4.
- 22. (MCAA-96.2) 16.
- 23. (геол.ОГ-81.4) 32.
- 24. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 13$.
- 25. (reon.O Γ -80.5) $\frac{\pi}{8}$.
- 26. (экон.-88.4) 15/2.
- 27. (экон.-88.4) 15.

28. (экон.М-96.6) 6.

29.
$$\pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

30. (геол-89.3)
$$x = \frac{3\pi}{4}$$
.

31.
$$-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

32.
$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -\frac{\pi}{4} + 2\pi m; n, m \in \mathbb{Z}.$$

33.
$$\pi n$$
, $-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

34.
$$2\pi k$$
; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

35.
$$(\text{reorp-97}(1).3) - 28\pi$$
.

36.
$$\pi k, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi s; \ k, s \in \mathbb{Z}.$$

$$37. \ \frac{-\pi+2}{2}, \frac{3\pi+2}{2}, \frac{\pm\pi+2}{6}, \frac{\pm11\pi+2}{6}, \frac{23\pi+2}{6}, \frac{9\pi+2}{6}.$$

38. (экон.K-86.1)
$$x = 1/4$$
.

39. (BM
$$\mu$$
K-79.2) $\frac{7}{5}$.

$$40. \log_{72} 54 \le x \le \log_{8/9} \frac{2}{3}.$$

41.
$$\frac{7 - \log_3 5}{2 \log_3 5 + 3} \le x \le \frac{\log_3 5 - 1}{3 - 2 \log_3 5}$$
.

42.
$$(-\infty; -12) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$$
.

43.
$$(M/M-98(1).1)$$
 0; 1.

44.
$$(M/M-97(2).1)(3;+\infty)$$
.

45.
$$-\frac{1}{3} < x < 0; \ 0 < x < 1.$$

46.
$$(-2; -13/7) \cup (5; +\infty)$$
.

47.
$$\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right)$$
.

48.
$$\left\{\frac{1}{7}; 7^{(-3-\sqrt{2})/7}; 7^{(\sqrt{2}-3)/7}\right\}$$
.

49.
$$\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [1; 2) \cup (3; 6]$$
.

50. (экон.-91.2)
$$\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$$
.

51.
$$[-3; -\frac{17}{7}) \cup (-\frac{17}{7}; -\frac{7}{3}].$$

52.
$$(BMnK-93.3) [log_3 4; 3]$$
.

54. (экон.-97.1)
$$(-1, -3), (1, -1)$$
.

55.
$$(9 \text{ koh.} - 97.1) (-1; -5), (1; -3).$$

56. (экон.-96.2)
$$\left(\frac{3}{4};1\right]$$
.

Ответы к §9. Обратные тригонометрические функции.

Тригонометрические неравенства.

2.
$$(\text{Ткачук-7.1}) \frac{\sqrt{15}}{4}$$
.

3.
$$(\text{Ткачук-7.2}) - \frac{2}{\sqrt{5}}$$
.

4. (Ткачук-7.13)
$$4\pi - 10$$
.

5. (Ткачук-7.4)
$$14 - 4\pi$$
.

6. (Ткачук-7.3)
$$\frac{\pi}{4}$$
.

10. (Ткачук-7.8)
$$0$$
; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$; $\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{10}$.

11.
$$\pm \cos \frac{\pi}{18}$$
; $\pm \cos \frac{5\pi}{18}$.

12. (Ткачук-7.9)
$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$
.

13. (Ткачук-7.10)
$$\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

15.
$$(9 \text{ koh. M-} 99.4) - \frac{\pi}{14}, \frac{\pi}{14}$$
.

16. (экон.В-99.6)
$$\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}$$
.

17. (экон.-99.5)
$$-\frac{\pi}{26}, \frac{\pi}{34}$$
.

18. (экон.-93.4)
$$10 + 2\sqrt{5}$$
.

19. (экон.-93.4)
$$14 + 2\sqrt{10}$$
.

20. (экон.-95.5)
$$[-3; -2) \bigcup \{1\}.$$

21. (BMnK-96.4)
$$\left[\frac{-5-2\sqrt{3}}{26};0\right]$$
.

22.
$$(BMnK-96.4)$$
 $\left[0; \frac{15+2\sqrt{42}}{57}\right]$.

23.
$$(m/m-98(2).4)$$
 $\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{3}};1\right]$.

24. (экон.-96.6)
$$\left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$
.

25.
$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

26.
$$\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \pi(2m+1)\right],$$
$$\left[2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right); k, m \in \mathbb{Z}.$$

27.
$$(xum-98(1).3) -\frac{\pi}{3}$$
.

28. (почв-96.4)
$$0; \pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi$$
.

29.
$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

30.
$$\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

31.
$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

32. (хим-88.2)
$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

33.
$$(-1)^k \arcsin \frac{3 - \sqrt{8}}{6} + \pi k$$
,
 $(-1)^l \arcsin \frac{3 + \sqrt{8}}{6} + \pi l$;

$$(-1)^{l}\arcsin\frac{1}{6} + \pi l$$

$$k, l \in \mathbb{Z}.$$

34.
$$\frac{\pi}{12} + 2\pi m, \frac{5\pi}{12} + (2l+1)\pi;$$

 $m, l \in \mathbb{Z}.$

35.
$$\pm \frac{11}{12}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

36. (BMnK-93.2)
$$[0; \pi/3]$$
.

37. (фил-92.1)
$$\frac{\pi(6k-1)}{6}$$
, $k \in Z$.

38.
$$\arcsin \frac{3}{\sqrt{20}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi m$$
,
 $\pi - \left(\arcsin \frac{3}{\sqrt{20}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

39.
$$(\text{M/M-92.1}) \frac{\pi(6n+1)}{6}, \quad n \in Z.$$

40.
$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

 $n, k \in \mathbb{Z}.$

41.
$$\frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$$
, $n = 0, 1, 2, 3$.

42.
$$(M/M-97(2).3) 3\pi + \arccos \frac{10}{11}$$
.

43.
$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

44.
$$\frac{5\pi}{48} + \pi m, \frac{17\pi}{48} + \pi n, \frac{7\pi}{24} + \pi l;$$

 $m, n, l \in \mathbb{Z}.$

45.
$$-\pi + 24\pi k, 7\pi + 24\pi n; k, n \in \mathbb{Z}.$$

46. (псих-96.3)
$$(-\infty; +\infty)$$
.

47. (экон.-88.6)
$$-\frac{12}{5} \le a \le 0$$
.

48. (экон.-88.6)
$$-\frac{24}{5} \le a \le 0$$
.

$$50. \ \frac{\pi}{6} + 4\pi l, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; l, n \in \mathbb{Z}.$$

51. (reorp-96.3)
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

52.
$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$
, $n \in \mathbb{Z}$.

53.
$$arctg2+2\pi n, \frac{\pi}{4}+2\pi k; n, k \in \mathbb{Z}.$$

54.
$$[-13; -4\pi) \cup \left(-4\pi; -\frac{11\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{7\pi}{3}; -2\pi\right) \cup \left(-2\pi; -\frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; -1\right].$$

55.
$$x = \frac{3}{2}, \frac{\pi}{4} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi l \leq x < \frac{3\pi}{4} + \pi l;$$

 $k \in N, \ l = 0, 1, 2, \dots$

Ответы к §10. Эквивалентные преобразования в смешанных уравнениях и неравенствах.

1.
$$-2 - \sqrt{4 + \cos \frac{3}{2}} \le x < 0$$
.

2. (reorp-98.1)
$$\left(\frac{1}{3}; 3\right]$$
.

4.
$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$
, $(2, y)$, где $y-$ любое действительное число.

5.
$$(1+\sqrt{2},-1)$$
; $(1-\sqrt{2},-1)$.

6.
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
.

7. (экон. M-95.2)
$$\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

8.
$$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \neq 5m+1, n, m \in \mathbb{Z}.$$

9.
$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$$
, $n = -1, 0, 1, 2$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{10}$, $k = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$.

10.
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}.$$

11.
$$(-1)^n \arcsin\left(\frac{3}{\pi(\pm 1 + 6k)}\right) + \pi n;$$

 $n, k \in \mathbb{Z}.$

12.
$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

13.
$$(M/M-84.2)$$
 13/4.

14. (экон.-94.3)
$$2\pi n$$
, $\pi + 2\pi m$, $n = -1, 0, \ldots, m = -3, -4, \ldots$

15.
$$(\mathbf{m}/\mathbf{m}-82.4) - \sqrt[4]{2} < x < -1 \text{ m}$$

$$x \neq \frac{-1 - \sqrt{1 + 16k}}{16},$$

$$\text{где } k = 15, 16, 17, 18, 19, 20;$$

$$1 < x < \sqrt[4]{2}$$

$$\text{м } x \neq \frac{-1 + \sqrt{1 + 16l}}{16},$$

$$\text{где } l = 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.$$

16.
$$(M/M-77.3) \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

17.
$$(M/M-90.2) \frac{4}{3}$$
; $\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

18.
$$(M/M-98.3)$$
 $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

19.
$$(\cos -97.5) (7/9; +\infty)$$
.

21. (экон.-97.2)
$$x \le -3, x = 5$$
.

22.
$$(\text{M/M-84.4}) \left(0, \log_2 \frac{8}{11}\right),$$
 $\left(\frac{1}{3} \log_2 \frac{3+\sqrt{8}}{2}, \log_2 \frac{4}{3+\sqrt{8}}\right).$

23.
$$2\pi \pm \arccos \log_2(\sqrt{6} - 1)$$
.

24. (экон.К-78.3)
$$\frac{\sqrt{11}}{4}$$
.

28.
$$3 - \sqrt{a+5}$$
 при $a > -4, a \neq -1$.

$$29. \ \left(2-\sqrt{2};\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4};2+\sqrt{2}\right).$$

30.
$$(-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$$
.

31. (био-82.1)
$$x \ge 2$$
.

32. (reorp-83.2)
$$-1 \le x \le 0$$
.

33. (фил-82.2)
$$-3\frac{1}{2}$$
, $-2\frac{1}{2}$.

34. (почв-98(1).3)
$$2^{4-4\sqrt{2}}$$
.

35.
$$\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \{-1\}.$$

36. (био-84.3)
$$x = 3/2$$
.

37. (reorp-92.3)
$$\left[\frac{1}{81}; 1\right) \bigcup [3; +\infty)$$
.

38.
$$(0; \sqrt[6]{2} - 1] \cup [63; +\infty)$$
.

39. (хим-87.2)
$$1 < x < 2$$
.

41.
$$(-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup (6 + \infty)$$
.

42. (BMuK-81.2)
$$2, \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$
.

45. (псих-98.2)
$$\operatorname{tg}\left(\frac{226\pi}{17}\right)$$
.

46. (reon-93.4)
$$[-1;0) \bigcup (0;3]$$
.

47.
$$\left(2; 2 + \lg \frac{3\pi}{16}\right]$$
.

41.
$$\left(2; 2 + \lg \frac{1}{16}\right]$$
.
48. $\left[-6; -11\pi/6\right) \cup \left(-11\pi/6; -4\right) \cup$

 $\cup (2; 5\pi/6) \cup (5\pi/6; 6].$

50.
$$(-5; -\sqrt{24}) \cup (-\sqrt{24}; -3)$$
.

51. (физ-96.5)
$$(-2;\pm 2)$$
.

$$52. \ \left(\frac{1}{2\log_2 3 - 1}, \frac{2}{2\log_2 3 - 1}\right).$$

53.
$$(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}, \frac{3-2\sqrt{3}}{2})$$
.

54.
$$(M/M-89.4)$$
 $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)$.

55. (xим-96.3)
$$x = 32, y = 2$$
.

58.
$$\left(\frac{1}{4}; 3\right) \cup \left[\frac{\sqrt{41} + 7}{4}; \frac{7}{2}\right)$$
.
59. $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

60.
$$(M/M-91.2)$$
 $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} 61. & (-\infty;-1) \cup \left(\frac{7-\sqrt{5}}{2};3\right) \cup \\ & \left(4;\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (8;+\infty). \end{aligned}$$

62. (MCAA-91.5) (0; 1/7); (1/2;1).

63. (физ-97(1).7)
$$1 < a < 4$$
.

64.
$$\left(1; \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right)$$

при
$$a \in (0;1)$$
;
$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2};+\infty\right)$$

при
$$a \in (1; +\infty)$$
.

65. при
$$a > 0$$
, $a \ne 1$, $a \ne 2^{-2/3}$ исходное уравнение имеет решение $x = 2^{\frac{2 \log_2 a}{3 \log_2 a + 2}}$.

66.
$$[\log_2 \frac{1}{3}; 2) \bigcup (2; \log_2 \frac{13}{3}).$$

67.
$$2 < x < \frac{5}{2}$$
; $\frac{5}{2} < x < 3$.

$$68. \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{-7 - \sqrt{7}}{42},$$

$$\frac{-15 + \sqrt{197}}{84} \le x < 0,$$

$$0 < x \le \frac{13 - \sqrt{141}}{84},$$

$$\frac{13 + \sqrt{141}}{84} \le x < \frac{1}{3}.$$

69. (экон.-99.1)
$$(-3; -2) \cup (3; 4]$$
.

70.
$$(M/M-85.4) -1, 2; -0, 67.$$

71.
$$(M/M-98(1).6)$$
 [1; 3] \cup {4}.

Ответы к §11. Нестандартные текстовые задачи.

- 1. (reon-97.6) $V_2: V_1 = 29:18$.
- 2. (био-87.2) $\frac{2}{5}$ пути от A до B.
- 3. (геогр-86.3) в 2 раза.
- 4. (почв-78.3) первый слиток в 2 раза тяжелее второго.
- 5. (хим-86.2) 8 часов.
- 6. (ВМиК-89.3) 48 минут.
- 7. (хим-81.3) 20 км.
- 8. (почв-97(1).3) 78.
- 9. (псих-82.5) в 2 раза.

- (почв-83.1) площадь поля, вспажанного за день, составляет 5/7 от площади всего поля.
- 11. (m/m-97(2).2) 2.
- 12. (соц-98.5) 33.
- 13. (геогр-88.3) 45 минут.
- 14. (фил-90.4) 2,1 кг.
- 15. (псих-86.4) 200 г.
- 16. (геол-94.9) 12 млн.т.
- 17. (экон.К-79.3) 726 ден. ед.
- 18. (reorp-97(1).4) $[15; +\infty)$.
- 19. (фил-78.1) в бригадах было по 9 человек.
- 20. (экон.-85.5) 2/3 часа и 1 час.
- 21. (геол-87.5) 4 км/ч, 3 км/ч.
- 22. (экон.К-85.4) 12 часов.
- 23. (геол-88.5) 40 км/ч скорость по шоссе; 30 км/ч скорость по грунтовой дороге.
- 24. (экон.-78.4) 1750 т.
- 25. (M/M-93(2).6) 90 km.
- 26. (геол.ОГ-83.5) 50 км/ч.
- 27. (геол-83.5) пункт A расположен выше пункта D по течению реки.
- 28. (псих-84.5) 3.
- 29. (хим-97.4) 6; нет.

30. (экон.-99.3) 24 дня.

31. (экон.М-97.4) 10% и 20%.

32. (экон.-97.4) 12,5% и 15%.

33. (геол-97(1).7) n=5.

34. 11000 и 12600 тыс.руб.

35. (экон.-94.5) 300 или 600 телевизоров.

36. (геол-94(1).8) АСВ.

37. (ВМиК-95.5) 156.

38. (экон.-92.3) 133 и 54.

 (экон.К-83.5) 14 красных карандашей и 19 синих.

40. (m/m-81.3) $18\frac{1}{3}$ kr.

(41. (псих-87.3) 10.

42. (xum-97(1).4) 6.

43. (экон.К-78.4) 40%, $43\frac{1}{3}$ %.

44. (хим-92.4) [15; 40] (в процентах).

45. (ВМиК-87.5) 20 рейсов.

46. (экон.К-84.5) 11 домов на 12 квартир и 1 дом на 16 квартир.

Ответы к §12. Расположение параболы в зависимости от параметра. Теорема Виета.

1. $(\pi cux-78.5)$ a < 0.

2. a = 2, b = -8, c = 8.

 $3. \ \frac{9 - \sqrt{17}}{16} < a < \frac{1}{3},$ $\frac{1}{3} < a < \frac{9 + \sqrt{17}}{16}.$

4. (xum-82.5) p > 1.

5. (M/M-91.5) p = -6; q = 7.

6. $c \in (3 - 2\sqrt{3}; -6 + 2\sqrt{15}).$

7. $a \in \left\{ \pm \sqrt{2}; \pm \frac{\sqrt{15} + 1}{4} \right\}$.

8. (физ-93.7) $\pm \sqrt{3}$.

9. (MCAA-92.6) a = -3; S = 18.

10. (физ-89.5) при m=0 уравнение имеет единственный корень, при $m\geq 3$ уравнение имеет положительные корни, при m<0 и 0< m<3 уравнение не имеет корней.

11. $\{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5}).$

12. (экон.-91.6) $0; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

13. (физ-94(2).7) ($-\infty$; 20].

14. $(\text{reom-96}(1).8) [-1/3; +\infty).$

15. (экон. M-95.6) $(-\infty; -3/2]$.

16. 1) $\left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right]$; 2) $\frac{7}{3}$.

17. $-\sqrt{2} < a < 1, \sqrt{2} < a < +\infty$.

18. (геол-77.5)
$$k < 1/2, k > 3/2$$
.

19.
$$(6$$
ио-77.5) $-\sqrt[3]{36} < s \le -3$, $0 < s < \frac{\sqrt[3]{9}}{2}$.

20. (ВМиК-88.5)
$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\} \cup [2; 4)$$
.

21. (псих-81.5)
$$1-\sqrt{2}$$
, $5+\sqrt{10}$.

23. (экон.-77.5)
$$-13/4 < a < 3$$
.

24. (reorp-90.5)
$$5 < a < 7$$
.

26. (reorp-84.5)
$$-\infty < \alpha \le -10$$
; $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$.

$$27. \ \alpha \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 0\right).$$

28. (MCAA-91.6)
$$\{-\sqrt{2}\}\cup(-1;1)$$
.

30. при
$$k=-1$$
 $x_1=2\pi n, n\in Z,$ $x_2=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z;$ при $k=0$ $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l,$ $l\in Z;$ при $k=1$ $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi p, p\in Z.$

31.
$$a < -2 - \sqrt{6}, a > \sqrt{2}$$
.

$$32. \ \frac{1}{3} \le a < \frac{3}{4}; \ \frac{3}{4} < a \le \frac{33}{32}.$$

33.
$$-\infty < a < -3$$
; $1 < a < 6$.

34.
$$b < -1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} < b < 0.$$

35.
$$(M/M-93(2).2)$$
 [-3;3].

36. (ВМиК-96.3)
$$\log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$$
 при $a \in (-\infty; -3/2);$ нет реш. при $a \in [-3/2; 11);$ 1 при $a=11;$
$$\log_5 \frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$$
 при $a \in (11; +\infty).$ Решение единственно при

37. (экон.К-77.4)
$$0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$$
.

 $a \in (-\infty; -3/2) \cup \{11\}.$

Ответы к §13. Полезные преобразования и замены переменных.

1. (почв-96.1) 47.

2.
$$\frac{7}{2}$$
 при $a \ge 0, b \ge 0, a \ne \frac{5}{3}b$.

3.
$$(\text{почв-98}(1).1) \quad 2\sqrt{2}.$$

5.
$$(M/M-78.1)$$
 -10.

6. (почв-80.1)
$$(1,-5), (5,-1)$$
.

7.
$$(3 \times 0.4 - 96.2) (-1; 1)$$
.

8.
$$(3 \text{ koh.-} 96.1) (-2; -2).$$

9.
$$(M/M-90.3)$$
 $[-2; -1) \cup [0; 1]$.

10.
$$(m/m-96(1).2)(3/4;7]$$
.

12.
$$x_1 = 2$$
; $x_2 = -5$; $x_3 = -\frac{4}{5}$.

13. (почв-93.2)
$$\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

14. (reorp-80.4)
$$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$
.

16. (reorp-91.5)
$$|a| \ge \frac{5\sqrt{5}}{4}$$
.

18.
$$(xum-82.3) -1 < x \le 2, x \ge 3.$$

19. (геол-85.5)
$$x = 2$$
.

20.
$$(2-\sqrt{2};1]\cup[3;2+\sqrt{2}).$$

21.
$$(m/m-96(2).2)$$
 5/9.

22.
$$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$
.

24.
$$(xum-95.5)(0;\pm 1)$$
.

26. (соц-98.6)
$$\frac{\sqrt{161}}{9}$$
.

27. (xmm-83.5)
$$\left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$
$$\left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right).$$

28. (био-93.4) 573.

29. (MCAA-95.6)
$$[2/3; +\infty)$$
.

30.
$$(xим-98.3)(-1;1;2),(-1;1;-2).$$

32. (ИСАА-94.6)
$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$
.
33. (фил-78.2) $\sqrt{3}$.

36.
$$(\text{reon.O}\Gamma\text{-}82.6)$$
 $\left(\frac{\pi}{3} + \pi(n_1 + l_1), \frac{\pi}{3} + \pi(n_1 - l_1), 2\pi n_1\right),$
 $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi(n_2 + l_2), \frac{\pi}{3} + \pi(n_2 - l_2), 2\pi n_2\right),$
 $\left(\frac{2}{3}\pi + \pi(m_1 + p_1), \frac{\pi}{3} + \pi(m_1 - p_1), \pi + 2\pi m_1\right),$
 $\left(\frac{\pi}{3} + \pi(m_2 + p_2), \frac{\pi}{3} + \pi(m_2 + p_2), \frac{\pi}{3}\right)$

 $\frac{2\pi}{3} + \pi(m_2 - p_2), \pi + 2\pi m_2$

 $n_1, n_2, l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2 \in Z$.

37.
$$(-2; 2), (2; -2), (2\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}).$$

$$38. ($$
хим- $78.5) (4, -3, 0); (2, -1, 2).$

39.
$$(3; \pm \sqrt{2}); \left(\frac{8-y^2}{2}; y\right), y \in R;$$
 $\left(-3 + \frac{k}{4} - \sqrt{5 + \frac{k}{2}}; 1 + \sqrt{5 + \frac{k}{2}}\right);$ $k \in \mathbb{Z}, k \ge -10;$

$$\left(-3 + \frac{k}{4} + \sqrt{5 + \frac{k}{2}}; \ 1 - \sqrt{5 + \frac{k}{2}}\right);$$

$$k \in \mathbb{Z}, k > -10.$$

40.
$$(\text{m/m-89.6}) - \sqrt{\frac{7}{5}}$$
.

42.
$$\frac{2}{3} - \sqrt{2} \le a \le \frac{2}{3} + \sqrt{2}$$
.

44. (BMuK-89.2)
$$x = 1/2$$
.

46.
$$(-\infty; -1] \cup \{-1/2\} \cup [0; +\infty)$$
.

48.
$$(-3; -2) \cup \{-1\} \cup (0; 1)$$
.

49.
$$\left(-\infty; -1 - \sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{2} + 1}\right)$$

$$\cup \left(-1 + \sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{2} + 1}; +\infty\right).$$

50. (почв-96(1).3)
$$\{-3\} \cup (1; +\infty)$$
.

51. (геол-91.3)
$$\{0\} \cup (16; +\infty)$$
.

53. (экон-98.3)
$$x \in (17; 248)$$
.

54.
$$-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

55.
$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

57. (физ-93.3)
$$2^{\frac{8+\sqrt{6}}{2}}$$
.

58. (MCAA-93.4)
$$\left(\frac{2}{3};1\right) \cup (1;2]$$
.

60.
$$(-1; frac13] \cup \left[1; \frac{7}{3}\right)$$
.

61.
$$x_1 = -1 - \sqrt{2}$$
; $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

62.
$$\pm \sqrt{-\log_2 \frac{6-\sqrt{26}}{2}} = \pm \sqrt{\log_2 \frac{6+\sqrt{26}}{5}}.$$

63. (физ-97.2)
$$(1 - \log_4 5)^{-1}$$
.

64.
$$x < -1$$
; $-10^{-3/4} < x < 0$; $0 < x < 10^{-3/4}$; $x > 1$.

65. (reorp-90.3)
$$[1;5) \cup (10;+\infty)$$
.

67. (ВМиК-83.5)
$$x_1 = 1 - \sqrt{(a-1)^2 + 4},$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{(a+2)^2 + 4}$$
 при $a < -2$;

$$x_1 = 1 - \sqrt{(a-1)^2 + 4},$$

 $x_2 = 1 - \sqrt{(a+2)^2 + 4}$

при
$$-2 \le a < -1/2;$$
 $-3/2$ при $a = -1/2;$
 $x_1 = 1 - \sqrt{(a-1)^2 + 4},$
 $x_2 = 1 - \sqrt{(a+2)^2 + 4}$
при $-1/2 < a \le 1;$
 $x_1 = 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 4},$
 $x_2 = 1 - \sqrt{(a+2)^2 + 4}$
при $a > 1;$
при $a > 1;$
при $a = -1/2$ уравнение имеет только один корень.

68.
$$0$$
; 1 при $a=0$;
$$\frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$$
 при $a\in\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)\cup\left(0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right);$
$$\frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2},$$

$$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-3}}{2}$$
 при $|a|\geq\frac{2}{\sqrt{3}}.$

69. Нет решений при
$$a<-1;$$

$$\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}},\pm\sqrt{\frac{-a}{2}}$$
 при $-1 \le a \le 0;$
$$\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$$
 при $0< a<\frac{1}{2};$
$$\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}},0$$
 при $\frac{1}{2} \le a \le 2;$ 0 при $a>2.$

70. (reorp-95(1).5) 3;18.

71.
$$(BMnK-90.4)$$
 $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9}; \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup$

$$\cup \left[\frac{17 + \sqrt{349}}{6}; \frac{27 + 4\sqrt{66}}{9} \right].$$

72. (псих-81.4) 3/2, 36/25.

73.
$$(M/M-80.4)$$
 $(\sqrt[3]{4}; 9)$.

74. (xим-91.3) (1;1); (5/2;-2).

75.
$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases} \begin{cases} x = 3 + \sqrt{10}, \\ y = -3 + \sqrt{10}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -2, \\ y = -3, \end{cases} \begin{cases} x = 3 - \sqrt{10}, \\ y = -3 - \sqrt{10}. \end{cases}$$

76. (псих-89.3) (5;0), (1/5;2).

77. (BMmK-95.2)
$$(3; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; 3)$$
.

78.
$$x = \log_2 \left(\sqrt{6} - 2 \right),$$

 $y = \log_3 \frac{\sqrt{6} - 2}{2}.$

79.
$$x = 8 \log_5 2 - 6 \log_2 5$$
,
 $y = 8 \log_2 5 - 12 \log_5 2$.

80. (хим-85.5) (5; 2);
$$\left(\frac{93}{2}; \frac{33}{2}\right)$$
.

(био-77.3) первая бригада делала в один час 13 деталей, а вторая - 11 деталей.

82. (ВМиК-94(1).5) 1 или
$$\frac{10}{9}$$
.

83. (био-85.5) 3.

84. (reon-81.6)
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
.

85.
$$x = \frac{4}{\sqrt{13}}$$
; $y = \frac{6}{\sqrt{13}}$; $z = \frac{9}{\sqrt{13}}$; $v = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

86.
$$(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$
.

87.
$$x = 7; y = 6; z = 6.$$

88. (почв-92.5)
$$\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$$
.

89.
$$F_{min} = F(\frac{5}{2}) = -\frac{7}{16}$$
.

90.
$$a = 6l - 1; a = 6l,$$

 $a = 6l + 2, a = 6l + 3,$
 $l \in \mathbb{Z}.$

91. (BMnK-86.6)
$$c = -\frac{1}{3}$$
; $d = \frac{1}{6}$.

92.
$$(xum-97.6)$$
 $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$, $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.

93. (псих-86.6)
$$2\sqrt{2}$$
.

94. (био-89.5)
$$\sqrt{\frac{32}{3}}$$
.

Ответы к §14. Использование графических иллюстраций.

- 1. (BMuK-86.2) (3/2; -5/2).
- 2. (хим-93.5) решений нет.
- 3. (reorp-93.5) -5/13; -5.

4. (почв-96.6) 2;
$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$
.

- 5. $(\mathbf{M}/\mathbf{M}-97(2).6)$ $[-15;-5) \cup \{1\}.$
- 6. (геол-93.6) $[1;2) \cup (2;3)$.

- 7. (био-78.5) $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, a > 1.$
- 8. a) -8; 6) $(-8; -4\sqrt{3})$.
- 9. (экон.-83.6) a=-2, a=-1/2; при a=-2: $x_1=-2, x_2=6/5, x_3=10/3$; при a=-1/2: $x_1=-1/5, x_2=0, x_3=1/3$.
- 10. $\frac{1}{5}$ при $a=\pm\frac{2}{5}, b=\frac{4}{5}$.
- 11. $b=4; \frac{9}{4} \le b \le \frac{5}{2}$.
- 12. (почв-95.5) (-2;0).
- 13. (reorp-94(1).6) [1;3].
- 14. (reorp-94.5) $[2;3) \cup (3;4]$.
- 15. (хим-87.5) $p \le 0, p \ge 3$.
- 16. $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}, 0 < a < \sqrt{2}$.
- 17. любая пара чисел (x,y) таких, что $\frac{3}{2} < x < 2; \ 1 < y < 2.$
- 18. $(-\infty; -0, 99) \cup (-0, 02; 0) \cup \cup (0; 0, 01)$.
- 19. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right), \left(-\frac{3\pi}{2}; p\right),$ $p \in R$.
- 20. Два корня при $-1 \pi^2 \le a < 1$; один корень при a = 1; нет корней при $a \in (-\infty; -1 \pi^2) \cup (1; +\infty)$.

21. (MCAA-97.5)
$$S = 2\pi + 9$$
.

22.
$$(\text{геол-95}(1).8) 27\pi + 18.$$

23.
$$(M/M-91.3) 1 + \frac{3\pi}{2}$$
.

25.
$$y_{max} = 3$$
 при $2 < x < 3$.

26.
$$(10; 5), (-6; -9), (-5; -10).$$

27.
$$a = \pm \sqrt{2}$$
 $(P_{min} = 8\sqrt{2})$.

28. (экон.-97.6)
$$112\pi - 12\sqrt{3}$$
.

29.
$$(M/M-96(2).4) - \sqrt{3}/2$$
.

$$30. \ \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right) \\ \cup \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}.$$

31.
$$[1/2 - \sqrt{3}; -1] \cup \{2\}.$$

32.
$$a = 4, b \in (-3 - \sqrt{45}; 3 - \sqrt{45}) \cup (-3 + \sqrt{45}; 3 + \sqrt{45}).$$

33.
$$\left(\frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}; \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\right)$$
.

34. 1)
$$\pm$$
 9; 2) \pm 1.

Ответы к §15. Использование различных свойств функций.

1.
$$(-1)^n \arcsin \frac{1}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

 $(-1)^m \arcsin \frac{5}{8} + \pi m, m \in \mathbb{Z};$
 $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{7}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2.
$$(9 \text{ кон.} - 94.2) [-3; 0].$$

3.
$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z;$$
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

4. (почв-90.4)
$$1-2\pi$$
.

6.
$$\left(rac{1}{2}, -rac{\pi}{4} + \pi k
ight)$$
, где $k \in Z$.

7.
$$(M/M-96(1).4)[-1;2)$$
.

8. (почв-90.6)
$$x < 0$$
.

9. (reon.O
$$\Gamma$$
-85.5) $x = 7$.

10.
$$[3-\sqrt{6};2]\cup[5;3+\sqrt{6}].$$

12.
$$(M/M-96(2).1)-1;3.$$

13.
$$(M/M-79.4) - \frac{1}{2} < x < 0.$$

14. (фил-87.5)
$$-\frac{2}{3} < x < 0$$
.

15.
$$1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}$$
, $1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

16.
$$\left[\frac{11-\sqrt{77}}{2};2\right)\cup\left(9;\frac{11+\sqrt{77}}{2}\right]$$
.

17.
$$(m/m-80.5)$$
 2.

18. (BMnK-92.6)
$$a > 2\pi - \frac{1}{8}$$
.

19.
$$(xum-80.5) 2/3$$
.

21. (хим-89.5)
$$x = -1/5$$
.

22.
$$(M/M-90.4)$$
 0; $2\sin 1$.

23. (экон.-90.6)
$$a = -1$$
; $a = 2$.

24.
$$a \le -4, a = 1, \frac{8}{3} \le a < 4,$$

 $a > 4.$

25. (экон.-83.2)
$$\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
.

27.
$$-\frac{3}{2}+4m$$
, $-\frac{1}{2}+4n$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

28.
$$x = -\frac{1}{2} + 8k$$
, $k \in \mathbb{Z}$.

30. (хим-88.3)
$$\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$
.

31.
$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + \pi \frac{2n+1}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$32. \ -rac{a^3}{3} - rac{a^2}{2}$$
 при $a < -1;$ $-rac{1}{6}$ при $-1 \le a < 0.$

Ответы к §16. Метод оценок.

- 1. $(\pi cux-97.4)$ [17; $+\infty$).
- 2. (био-81.4) x > 3.
- 3. (псих-78.4) $12\pi 1$.

- 4. (MCAA-97.4) x = 3/2; x > 2.
- 5. (геол-98.8) a = 0; a = 1.
- 6. $(\pi c \times 79.2) (-2; 1)$.
- 7. (био-93.6) (4; -3; 0), (2; -1; 2).
- 8. (reorp-81.5) (1, -1).

9.
$$\left(2; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z;$$

 $(-2, b) b \in R.$

- 10. (хим-94.5) $(1; -\pi/2)$.
- 11. (-2; -4), (-1; -3).
- 12. $0, \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

13.
$$(\mathbf{M}/\mathbf{M}-93(1).4) - \frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}.$$

14.
$$\frac{-5+\sqrt{3}}{2} \text{ при } a = \frac{1-\sqrt{3}}{2};$$
$$\frac{-5-\sqrt{3}}{2} \text{ при } a = \frac{1+\sqrt{3}}{2};$$
нет решений при $a \neq \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$

- 15. (xим-93(1).5) 1.
- 16. (reorp-94(1).4) -3/4.
- 17. (псих-92.1) $\frac{\pi(8k-3)}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$.
- 18. $(\text{псих-93.3}) \frac{\pi}{12}; 2\pi \frac{\pi}{12}.$
- 19. (филол-98.5) 0.
- 20. (экон.B-98.4) $x \in [4; 5]$.
- 21. (хим-94(1).5) (1;0) при q = -4; (-3;0) при q = 4.

22. (reorp-96(1).3) 0.

$$23. \ \frac{\pi(4k+1)}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 24. (экон.-78.5) a > 3/82.
- 25. (почв-89.5) x=2.
- 26. 0; -1 при a = 0; 0 при $a \neq 0$.
- 27. (геол-92.6) $\left(1; \frac{513}{2}; 128\right)$, $\left(-1; -\frac{513}{2}; -128\right)$.
- 28. (био-90.5) $a = 4\pi k \frac{1+4m}{1+2n}$; $b = 2\pi k \frac{8l \pm 3}{16\pi k^2 + 2n + 1}$; $x = 2\pi k$; $y = \frac{1+2n}{8k}$; $z = \frac{16\pi k^2 + 2n + 1}{2\pi k (8l \pm 3)} (\text{arctg2} + \frac{\pi r}{k})$; $k, l, m, n, r \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.
- 29. (M/M-97(1).5) 2.
- 30. (геол-86.6) при p = 9 имеем $x = \frac{3\pi}{2}$, при p < 9 уравнение решений не имеет.
- 31. (хим-91.4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 32. $t = 1, x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$
- 33. (хим-79.5) система имеет бесконечно много решений (x,-1), где $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad (n\in Z).$

- 34. (M/M-95.6) 0; π ; 2π .
- 35. $2\pi 8$; 2π ; $2\pi 1$.
- 36. $-a^2$, $\text{при } 0 < a < 4 2\sqrt{2};$ $-8(3-2\sqrt{2}), \text{ при } a = 4-2\sqrt{2};$ $8(1-a), \text{ при } 4-2\sqrt{2} < a < 2.$
- 37. (reorp-88.5)
- 38. если a=1/3, то x=1, если $a\neq 1/3$, то нет x, удовлетворяющих данному равенству.
- 39. (почв-83.5) $\frac{9\pi}{13}$, $\frac{15\pi}{13}$.
- 40. (reorp-83.4) (-1, -3), (3, -3).
- 41. (экон.-99.7) При $b=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ единственное решение $(\frac{1}{\sqrt[8]{5}},0,0)$, при $b=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}$ два решения: $(\frac{1}{\sqrt[8]{5}},1,\frac{\pi}{4})$ и $(\frac{1}{\sqrt[8]{5}},-1,-\frac{\pi}{4})$.
- 42. $10-\sqrt{3}$ и $-\left(1+\sqrt{11-\sqrt{3}}\right)^2$.
- 43. (BMuK-83.6) (-1; 2); (-1; -2).
- 44. $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- 45. (ВМиК-91.5) Верно.

Ответы к §17. Получение следствий и логические задачи.

$$\begin{array}{l} 2. \ (\text{геол-97.7}) \ (1;3), (3;1), \\ \left(-\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}; -\frac{15}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}\right), \\ \left(-\frac{15}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}; -\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1141}{5}}\right). \end{array}$$

3. (reorp-97(1).5)
$$7 - 2\log_5 9$$
.

4.
$$(\text{почв-93.5}) [-1; -1/5].$$

6.
$$\left(1, 1 + \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$$

7.
$$(xum-98.4)$$
 $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

8. При
$$b=-1/2$$
 решение $(\frac{1}{\sqrt[3]{8}},-\frac{\pi}{4}+\pi k)), k\in Z,$ при $b=1/2$ решение $(\frac{1}{\sqrt[3]{8}},\frac{\pi}{4}+\pi n), n\in Z,$ при $b\neq \pm 1/2$ решений нет.

9.
$$a = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$
, $a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

$$10. \ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 7; -9\right); \ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 1; 1\right).$$

11. (экон.К-87.6)
$$a = 4/3$$
.

13. (xum-88.5)
$$a = -2$$
; $a = -1$.

14.
$$(BMnK-98(1).5)$$
 $a=-\frac{3}{2}$.

15. (фил-84.5)
$$a = 1/8$$
.

17. (фил-92.5)
$$0; \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
.

20. (почв-88.5)
$$p = -2$$
; $p = 1/2$.

21.
$$-2\pi < a < 0$$
; $2\pi < a < 4\pi$.

23. (xmm-84.5)
$$2 + \sqrt{2}$$
; $2 - \sqrt{2}$.

24. (MCAA-98.7)
$$a=2$$
.

26.
$$(xum-91.1)$$

$$f_{max}(x) = f(0) = \frac{1}{2};$$

$$f_{min}(x) = f(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}.$$

29. (геол.ОГ-84.3)
$$\pm \sqrt{\frac{5}{8}}$$
.

30. (геол-84.3)
$$\pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$
.

31.
$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$$
; $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

32. (псих-84.7)
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_4 3;$$
 $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_4 3.$

33.
$$(M/M-96.4) x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4},$$

 $y \ge \left(2 \cdot \left(1 - \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right)^{-1/2}$

34.
$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \gamma < 1, \sqrt{2} < \gamma < 2.$$

35.
$$(m/m-77.4)$$
 $(3,3,3)$.

36. (псих-91.5) 0;
$$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}a$$
.

$$37.$$
 если $a=\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+2\pi n,$ $n\in Z,$ $ext{ то } x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z;$ если $a=-\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+2\pi n,$ $n\in Z,$ $ext{ то } x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z,$ при остальных значениях a решений нет.

38. (био-97.6)
$$\left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right)$$
.

39. (почв-90.5)
$$(-3; +\infty)$$
.

40.
$$(m/m-94(1).4) (\log_2 8/5, +\infty)$$
.

43. (геол-95.8)
$$(-\infty; -99]$$
.

44.
$$(-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$$
.

45.
$$(M/M-78.4)$$
 $a < -1$.

46. (био-86.5)
$$a \le -1$$
; $a \ge 3$.

47. (псих-88.6)
$$a = 1/16$$
.

48.
$$(\text{хим-98}(1).6)\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$
.

49. (хим-86.5)
$$-\frac{1}{32}$$
; $-\frac{1}{4}$.

50.
$$a = -2, b = 4, 5, \ldots;$$

 $a = -1, b = 3, 4, \ldots$

51.
$$\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{4}{5}; 0\right) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

52.
$$(M/M-95(2).3)[-3;1]$$
.

53.
$$(m/m-93(1).6)$$
 [0; 1).

54. a)
$$[-\sqrt{26} - 1; \sqrt{26} + 1];$$

6) $[-\sqrt{26} + 1; \sqrt{26} - 1];$

56. (reon-98(1).8)
$$a \in (-\infty; 0]$$
.

58. (MCAA-96.6)
$$(15/2; 8) \cup (12; \infty)$$
.

59. (
$$MCAA-93.6$$
) [-1;1].

60. (BMuK-90.6)
$$a \ge -7/2$$
.

61.
$$(M/M-86.5) - \frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{3}$$
.

62.
$$a < -3/2, a > 1/3$$
.

63.
$$x \in (-\infty, -1 - \sqrt{3}] \cup \left[-1 + \sqrt{3}, \frac{7 + \sqrt{22}}{3}\right).$$

64. (псих-92.4)
$$u = 6, v = 4$$
.

65. (геол-79.6) $0 < x < \sqrt{35}$.

66.
$$a \in (-\infty; -\sqrt{13}] \cup \left[\frac{11}{3}; +\infty\right)$$
.

67. (reorp-87.5) $b \ge 3, b \in N$.

68. (ncux-90.5)
$$\left(0; \frac{1}{54}\right)$$
.

69. (экон.К-88.6) a = 1.

70.
$$(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$$
.

71. (reorp-85.5)
$$-\frac{1}{\sqrt{10}} \le a \le \frac{1}{\sqrt{10}}$$
.

72. $(6-2\sqrt{5};2\sqrt{5}-2]\cup\{4\}.$

73.
$$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$
.

74. (почв-84.5)
$$-\frac{1}{4} \le a \le 0$$
.

75. (экон.-84.4) 24 и 28.

76. (экон.К-80.5) 8 автобусов.

77. (ВМиК-77.4)
$$v_1=7$$
 км/ч , $v_2=6\frac{1}{3}$ км/ч, $v_3=6\frac{1}{2}$ км/ч.

78. 8 км
$$\leq |AB| \leq \frac{16}{\sqrt{3}}$$
 км .

79. (м/м-86.4) не сможет.

Ответы к §18. Задачи с целыми числами.

1. (псих-84.6) 233; 466; 699; 390.

2. (фил-86.5) нет.

- 3. x = 5; y = 4; z = 4.
- 4. (био-92.4) (12; -8).
- 5. (фил-77.1) в первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.
- 6. (псих-94.5) 432.
- 7. $(15k^2-6k,3k-1), k \in \mathbb{Z}$.
- 8. (фил-79.5) 11.
- 9. (псих-77.3) 900 и 855.
- 10. (0;0), (3;5), (-3;-5).
- 11. (экон.К-86.5) 11 дней, 19 деталей и 31 деталь.
- 12. (1;-1;-1), (-1;1;-1).
- 13. (хим-95(1).5) (0;0).
- 14. (соц-97.4) 27.
- 15. (хим-98(1).4) 300.
- 16. (ВМиК-86.3) 6.
- 17. (геол-84.5) 70 копеек.
- 18. (геол.ОГ-84.5) 94.
- 19. (M/M-88.5) 0,9 MUHYT.
- 20. (био-97.4) 60.
- 21. (экон-98.7) 426 и 142 рублей.
- 22. (фил-91.1) 11 · 181.
- 23. a = 8, b = 56, c = 392.
- 24. (почв-77.5) 144 человека.

25. (BMnK-82.4) 5.

26. (BMnK-78.4)

 $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}.$

27. (экон.-93.5) 12 месяцев.

28. (физ-83.4) 83.

29. (ИСАА-91.4) 35; 45.

30. (ИСАА-98.6) 49 и 83.

31. (фил-88.5) 23.

32. (экон.-83.5) 832.

33. 10500 и 12600 тыс.руб.

34. (м/м-92.4) 36.

35. (reorp-79.4) 33.

36. (0;0), (2;2), (0;3), (3;0).

37. (био-96.5) (1;6), (1;7), (2;7).

38. (экон.-86.5) 2; 2; 2.

39. (м/м-96(1).5) 8.

40. $(2; \pm 3), (-2; \pm 3)$.

41. (0; 2), (-2; 0), (0; 3), (2; 1).

42. (0;-2), (-2;0), (-1;2), (-3;0).

43. (BMuK-79.4) -31; -7.

44. (4; 3), (6; 13), (14; 5).

45. (геол.ОГ-88.5) 11 "Лиазов" и 5 "Икарусов".

46. (псих-79.5) (6,1,0), (6,-1,0), (0,1,0), (0,-1,0).

Ответы к §19. Задачи последних лет, не вошедшие в §§1-18.

1. (ВМиК-99(1).1) 5 км.

2. $(BMuK-99(1).2) \{3\} \cup [8, +\infty).$

3. $\frac{23\pi}{36} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z};$ $\frac{35\pi}{36} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$

4. $(BM \varkappa K-99(1).5) [1,2) \cup (2,3].$

5. (ВМиК-99.1) Первое меньше.

6. (BMnK-99.2) $\frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

 $7. \ (\mathbf{BMmK-99.3}) \ \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \\ \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right).$

8. $(BMnK-99.5) \frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \ l \in Z;$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \ m \in Z.$

9. $\pm \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

10. $(1; 0); (1; -\frac{4}{5}); (-7; \frac{28}{5}).$

11. (геол-99(1).3) $a_{max} = -\sqrt{2}$.

12. (геол-99(1).4) 74.

13.
$$\left[\frac{\sqrt{2}-16}{48}; -\frac{7}{24}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{2}-2}{6}\right].$$

15. (геол-99.1)
$$(-3; -2) \cup (-2; 3]$$
.

16. (геол-99.2)
$$A = 2 > 1,999$$
.

17. (геол-99.3)
$$1 + \frac{\pi}{2}$$
.

18.
$$(\text{reo}\pi\text{-99.5}) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$
 $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

19. (геол-99.6)
$$n = 6$$
; $S_6 = -66$.

$$20. \ \left(-\frac{1+\sqrt{167}}{2}; \ -\frac{13}{2}\right] \cup \\ \left[5; \ \frac{-1+\sqrt{167}}{2}\right) \cup \{-2\pi\} \cup \{0\} \ .$$

21. (MCAA-99.1) 1;
$$2 - \sqrt{10}$$
.

22. (MCAA-99.2)
$$A = 0 < 0,01$$
.

23.
$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$
, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{2 - \sqrt{6}}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

24.
$$(-3; -\sqrt{6}] \cup \left[\sqrt{6}; \frac{5}{2}\right] \cup (5, +\infty).$$

26.
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, k, n \in \mathbb{Z}.$$

27.
$$(\mathbf{m}/\mathbf{m}-99(1).2) x = 0$$
.

28.
$$(M/M-99(1).3) x = \frac{1}{18}$$
.

29.
$$a \in \left[-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right] \bigcup$$

$$\left\{-2; 0; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

30.
$$\sqrt{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

31.
$$(M/M-99(2).2) \frac{1}{3}$$
.

32.
$$(M/M-99(2).3)$$
 [3;5].

33.
$$(-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$$

34.
$$(M/M-99.1)$$
 $x \le -\frac{11}{6}$, $x = 0$.

35.
$$(M/M-99.2) x = -3$$
.

36.
$$\phi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
.

37.
$$a \in (-\infty; -3] \cup [-4; +\infty)$$
.

39.
$$\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 1\right) \cup (1; 2].$$

40. (хим-99(1).3)
$$\frac{\pi}{12}$$
; $\frac{11\pi}{12}$.

41. При
$$a=-1$$
 $x\in(2;+\infty)$; при $a\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ $x\in(1;a+2]\cup(1-a;+\infty);$ при $a=-\frac{1}{2}$

$$x \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right);$$
при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
 $x \in (1; 1-a) \cup [a+2; +\infty);$
при $a = 0$ $x \in [2; +\infty).$

при
$$a \equiv 0$$
 $x \in [2; +\infty)$.
42. (хим-99(1).7) 3997.

43.
$$(-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$
.

44.
$$(xum-99.2) -5; -6; -\frac{7\pi}{4}$$
.

45.
$$\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;2)\cup(2;3)$$
.

46. (хим-99.6)
$$a = \pm 1$$
 .

47.
$$(xum-99.7) 2^{1001} - 4$$
.

48.
$$(-1)^n \arcsin \frac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

49. (BKHM-99(1).2)
$$\left(3, \frac{1}{9}\right)$$
.

52.
$$\frac{(-1)^n}{3} \arcsin \frac{-3 + \sqrt{29}}{8} + \frac{\pi n}{3}$$
,

53. (био-99.2)
$$(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{-3 + \sqrt{73}}{4}\right].$$

55. (био-99.5)
$$\left[\frac{5}{6};1\right) \cup \left(1;\frac{3}{2}\right]$$
.

58.
$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$
, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

59. (почв-99(1).3)
$$(2 - \log_2^2 3; 2]$$
.

61. (почв-99(1).6)
$$\beta = \frac{9}{16}$$
.

63. (почв-99.2)
$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$$
, $n \in \mathbb{Z}$.

64. (почв-99.3)
$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$
.

65. (почв-99.4)
$$y \ge 0$$
.

67. (почв-99.7) При
$$b \le -1$$
 $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty);$ при $-1 < b \le 0$ $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}; -1\right] \cup [1; +\infty)$

68.
$$(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

70.
$$(\text{reorp-99}(1).3) - 9; -8; -6; -5.$$

71.
$$a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$$
.

73. (reorp-99.2)
$$2 + \sqrt{3}$$
.

75. (reorp-99.4)
$$\pm \frac{1}{6}$$
; $\pm \frac{\sqrt{2}}{6}$.

76. (псих-99.1)
$$\left(\frac{4}{7}; \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$$
.

77. (псих-99.2)
$$7^{\log_2 \frac{\sqrt{41-5}}{2}}$$
.

78.
$$\left(\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; (-1)^{k} \frac{\pi}{4} + \pi k\right),$$

 $\left(\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; (-1)^{k} \frac{\pi}{3} + \pi k\right),$
 $n, k \in \mathbb{Z}.$

79. (псих-99.4)
$$p = 9$$
; $[-1; 3]$.

80. (псих-99.6)
$$a \in \left(\frac{5}{11}; \frac{6}{13}\right]$$
.

81. (соц-99.1)
$$\frac{13-\sqrt{21}}{2}$$
.

82. (соц-99.2) Первый член равен 1 или 4, разность равна
$$-\frac{1}{5}$$
 .

83. (соц-99.4) Сначала следует выступить в газете, а затем в любом порядке 2 раза по радио и 1 раз на телевидении.

84.
$$(-\infty; -4) \cup \{0; 2\} \cup (4; +\infty)$$
.

85.
$$(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$$
.

86. (филол-99.1)
$$106\frac{2}{3}$$
 км.

87.
$$(-\infty; -9) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty\right)$$
.

88.
$$\arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi + 2\pi n,$$

 $n \in \mathbb{Z}.$

89. (филол-99.5)
$$z=-\frac{\pi}{12}+\pi k,$$
 $y=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{6}+\pi n,\ k,n\in Z.$

90.
$$\pi n, \frac{\pi(2k+1)}{4}, n, k \in \mathbb{Z}.$$

91.
$$(\phi \mu 3-98(1).2) \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$$
.

92. (физ-98(1).3)
$$\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (4; +\infty)$$
.

94. (физ-98(1).8)
$$\left[-\frac{7}{3};6\right)$$
.

95.
$$\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{3}, \\ n, k \in \mathbb{Z}.$$

96.
$$(-\infty; -2 + 2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$$
.

99. (физ-98(2).7)
$$a < \sqrt{2}$$
.

100.
$$\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi k}{5}, n, k \in \mathbb{Z}.$$

102. (физ-98.3)
$$x < \frac{3}{2}$$
.

$$104. \ ($$
физ-98.7) При $0 < a < 1$ $x < \log_a \frac{5}{3-a};$ при $1 < a < 3$

$$\log_a \frac{5}{3} < x < \log_a \frac{5}{3-a};$$
 при $a \ge 3$ $x > \log_a \frac{5}{3}.$

105.
$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$$
, $(-1)^k \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{10}$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

107. (физ-99(1).3)
$$(5; 2 + \sqrt{17})$$
.

108. (физ-99(1).5)
$$\left(1, \frac{1}{3}\right)$$
.

109. (физ-99(1).7)
При
$$a \in (0;1) \cup (1;3]$$
 $x = -a - 3;$
при $a > 3$ $x_1 = -a - 3, x_2 = a.$

110.
$$\pi n, \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

111. (физ-99(2).2)
$$\frac{3+\sqrt{65}}{2}$$

112. (физ-99(2).3)
$$(-1;0)$$
.

115.
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$
, $\pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

116.
$$(-\infty;3) \cup \left(\frac{21}{5};+\infty\right)$$
.

117. (физ-99.4)
$$(\log_2 3, \log_3 2)$$
.

118. (физ-99.5)
$$\sqrt{5}$$
.

119. (физ-99.8) 2) При
$$a=1$$
.
1) При $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ $1<|x|<3^a;$ при $a>\frac{1}{2}$ $|x|>3^a.$