**Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ
ЗАДАЧИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ**

3-е изд., перераб. и доп. - М.: факультет ВМиК МГУ, 2000 - 132 с.

Настоящее пособие составлено для подготовительных курсов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова. Может быть полезно абитуриентам при подготовке к поступлению как на факультет ВМиК, так и на другие факультеты МГУ, где есть устный экзамен по математике.

Содержание

Часть I. Задачи по алгебре

§ 1 Действительные числа	7
п. 1.1. Целые числа. Делимость	7
п. 1.2. Рациональные и иррациональные числа	12
п. 1.3. Сравнение чисел	15
§2. Квадратный трехчлен и его свойства. Теорема Виета	18
§3. Тригонометрические задачи	23
§4. Логарифмические и показательные задачи	26
§5. Решение уравнений и неравенств	27
п. 5.1. Рациональные уравнения и неравенства	29
п. 5.2. Иррациональные уравнения и неравенства	34
п. 5.3. Тригонометрические уравнения и неравенства	37
п. 5.4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства	49
п. 5.5. Решение уравнений и неравенств в целых числах	45
§6. Решение систем уравнений и неравенств	50
§7. Доказательства неравенств и тождеств	57
§8. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии	62
§9. Функции и их графики	63
§10. Изображение множества точек на плоскости	72
§11. Многочлены	75
§12. Задачи последних лет	75
п. 12.1. Факультет ВМиК МГУ (1997 - 1999 гг.)	76
п. 12. 2. Геологический факультет МГУ (1997 - 1999 гг.)	78
п. 12.3. Механико-математический факультет МГУ (1998- 1999гг.)	80
Ответы	111

Часть II. Задачи по геометрии

§1. Задачи, связанные с треугольниками	82
§2. Задачи, связанные с четырехугольниками	90
§3. Задачи, связанные с окружностью	94
§4. Площади фигур	99
§5. Задачи на построение	105
Ответы	127

Настоящее пособие составлено для подготовительных курсов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова. Может быть полезно абитуриентам при подготовке к поступлению как на факультет ВМиК, так и на другие факультеты МГУ, где есть устный экзамен по математике.

Содержание.

Часть I

Задачи по алгебре

§1. Действительные числа.	7
п.1.1. Целые числа. Делимость.	7
п.1.2. Рациональные и иррациональные числа.	12
п.1.3. Сравнение чисел.	15
§2. Квадратный трехчлен и его свойства. Теорема Виета.	18
§3. Тригонометрические задачи.	23
§4. Логарифмические и показательные задачи.	26
§5. Решение уравнений и неравенств.	27
п.5.1. Рациональные уравнения и неравенства	29
п.5.2. Иррациональные уравнения и неравенства.	34
п.5.3. Тригонометрические уравнения и неравенства.	37
п.5.4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.	42
п.5.5. Решение уравнений и неравенств в целых числах. ..	45
§6. Решение систем уравнений и неравенств.	50
§7. Доказательства неравенств и тождеств.	57
§8. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии. .	62
§9. Функции и их графики.	63

§10. Изображение множества точек на плоскости.	72
§11. Многочлены.	75
§12. Задачи последних лет.	75
п.12.1. Факультет ВМиК МГУ (1997 - 1999 гг.)	76
п.12.2. Геологический факультет МГУ (1997 - 1999 гг.) ..	78
п.12.3. Механико-математический факультет МГУ (1998 - 1999 гг.)	80
Ответы.	111

Часть II

Задачи по геометрии

§1. Задачи, связанные с треугольниками.	82
§2. Задачи, связанные с четырехугольниками.	90
§3. Задачи, связанные с окружностью.	94
§4. Площади фигур.	99
§5. Задачи на построение.	105
Ответы.	127

Часть I

Задачи по алгебре

При составлении предлагаемых ниже задач была использована следующая литература:

- 1 В.В.Рождественский, Е.В.Панкратьев, И.И.Мельников, В.В.Вавилов. Математический тренинг. М., 1997.
- 2 Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1976.
- 3 В.М.Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Миронин, С.Ф.Смирнова. Сборник конкурсных задач по математике. М., 1986.
- 4 В.В.Ткачук. Математика - абитуриенту. М., 1995.
- 5 А.Б.Будак, Б.М.Щедрин. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. М., 1997.
- 6 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1994 г.). - М., Механико-математический факультет МГУ, 1994.
- 7 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1995 г.). М., Механико-математический факультет МГУ, 1995.
- 8 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1996 г.). М., Механико-математический факультет МГУ, 1996.
- 9 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1997 г.). М., Механико-математический факультет МГУ, 1997.
- 10 О.С.Игудисман. Математика на устном экзамене. М., 1995.
- 11 В.Г.Чирский, Е.Т.Шавгулидзе. Уравнения элементарной математики. М., 1992.
- 12 М.К.Потапов, С.Н.Олезник, Ю.В.Нестеренко. Конкурсные задачи по математике. М., 1992.
- 13 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1998 г.). М., Механико-математический факультет МГУ, 1998.

-
- 14 *Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1999 г.). М., Механико-математический факультет МГУ, 1999.*
 - 15 *Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1997 - 1998 гг.). М., факультет ВМиК МГУ, 1999.*
 - 16 *Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1999 г.). М., факультет ВМиК МГУ, 1999.*

§1. Действительные числа.

п.1.1. Целые числа. Делимость.

Для успешного решения задач о числах из этого пункта необходимо знать следующие факты. Во-первых, любое натуральное число m может быть единственным образом представлено в виде произведения степеней простых чисел

$$m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_l^{n_l},$$

где n_i - натуральные числа, а p_i - различные простые числа. Во-вторых, при делении натурального числа p на натуральное число q возможны q различных остатков $0, 1, 2, \dots, (q - 1)$. Полезно также помнить, что происходит с квадратами чисел. Например, при делении числа n на 3 возможны остатки 0, 1, 2, а при делении n^2 на 3 возможны остатки 0 и 1. В-третьих, признаки делимости натуральных чисел, записанные как признаки величины остатков от деления на заданные числа:

- число при делении на 3 и на 9 дает такой остаток, какой дает сумма его цифр. Поэтому, если сумма цифр делится на 3 или на 9, то и само число делится на 3 или на 9;
- число при делении на 5 и на 10 дает такой же остаток, как и последняя его цифра;
- число при делении на 4, 25, 50 и на 100 дает такой же остаток, как и число, записанное последними двумя цифрами.

Наконец, при изучении делимости чисел достаточно работать не с самими числами, а с остатками от деления этих чисел. Следует помнить, что все арифметические действия с остатками, кроме деления, повторяют действия с числами. А именно, при сложении чисел складываются остатки, при возведении в степень в эту степень возводятся остатки и т.д.

Перечислим теперь наиболее характерные типы задач этого пункта.

- Требуется установить, что какое-то выражение, зависящее от натурального числа n , делится или не делится при всех n на заданное натуральное число или на зависящее от n выражение. Решение осуществляется либо применением метода математической

индукции, описанного в параграфе 7, либо разложением исходного выражения на сумму слагаемых, которые по разным причинам будут делиться или не делиться на заданное число или выражение при всех n . При этом часто используется следующий факт: произведение k последовательных натуральных чисел делится на k .

- Задачи, связанные с исследованием сократимости или несократимости дробей, зависящих от целого n . При их решении предполагается сократимость дроби на натуральное q , $q \neq 1$. После чего, этот факт переписывается в виде двух равенств для числителя и знаменателя. Затем исключается исходная переменная n , получается равенство для q . Анализируя последнее, находят возможные значения q . Отсюда делают выводы, диктуемые условием задачи.
- Задачи, связанные с поиском целого числа n , при котором заданная дробь $\frac{a(n)}{b(n)}$ является также целым числом. При решении этой задачи сначала выделяют целую часть таким образом, чтобы

$$\frac{a(n)}{b(n)} = c(n) + \frac{d}{b(n)},$$

где $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ — выражения от n , а d — целое число. После чего отыскивают n , при которых $b(n)$ является делителем числа d . Эти значения n и требуются.

- Задачи, связанные с натуральными числами, состоящими из одинаковых цифр. При их решении полезно следующее преобразование таких чисел:

$$\underbrace{m \dots m}_{n \text{ цифр}} = m \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ цифр}} = m \cdot \overbrace{99 \dots 9}^{n \text{ цифр}} = m \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$

Другие задачи на целые и натуральные числа приведены в пункте 5 параграфа 5.

1.[1] Найти НОД (a , b):

а) $a = 144, b = 120$;

б) $a = 372, b = 156$;

в) $a = 333, b = 243$;

г) $a = 100001, b = 9999$;

д) $a = 2^3 3^2, b = 2^2 3^3$;

е) $a = 2^5 \cdot 25^2, b = 4^3 \cdot 35^2$.

- 2.[1] Найти наименьшее общее кратное (НОК (a, b)):
а) $a = 48, b = 36$; б) $a = 35, b = 25$; в) $a = 2^3 \cdot 3^2, b = 2^2 \cdot 3^3$.
- 3.[1] Доказать, что $\text{НОД}(n_1, n_2) \cdot \text{НОК}(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2$.
- 4.[1] Пусть $\text{НОД}(a, c) = 1$ и $a \cdot b$ делится на c . Доказать, что b делится на c .
- 5.[4] Цифры трехзначного числа переписаны в обратном порядке. Доказать, что разность между исходным и полученным числом делится на 9.
- 6.[1] Доказать, что признак делимости на 11: "число n кратно 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр с чередующимися знаками кратна 11".
- 7.[1] Доказать, что число $\underbrace{11 \dots 1}_{81}$ делится на 81.
- 8.[10] При каких n число $M = \underbrace{1313 \dots 13}_{2n \text{ цифр}}$ делится на 63?
- 9.[10] При каких n число $M = \underbrace{1717 \dots 17}_{2n \text{ цифр}}$ делится на 33?
- 10.[1] Остатки от деления на 3 чисел m и n равны 1 и 2 соответственно. Каковы остатки от деления на 3:
а) суммы $m + n$;
б) произведения $m \cdot n$?
- 11.[1] На какую цифру оканчивается число 2^{1995} ?
- 12.[2] Найти последнюю цифру числа 3^{1976} .
- 13.[1] Найти остаток от деления:
а) 3^{1995} на 5;
б) 2^{1995} на 7.
- 14.[10] Какой остаток при делении на 7 дает число 33^{22} ?
- 15.[10] Найдите остаток от деления на 7 числа $222^{555} - 555^{222}$.
- 16.[4] Делится ли на 7 число $1991^{1917} + 1917^{1991}$?

- 17.[10] Докажите, что $43^{43} - 17^{17}$ делится на 10.
- 18.[1] Доказать, что число $n^5 - n$ делится на 30.
- 19.[1] Доказать, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каких целых n .
- 20.[1] Сумма $k^2 + m^2 + n^2$ делится на 4. Доказать, что числа k, m, n - четные.
- 21.[1] Сумма $m^2 + n^2$ делится на 3. Доказать, что она делится на 9.
- 22.[2] Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 + 2n$ делится на 3.
- 23.[4] Доказать, что $k^3 + 5k$ делится на 3 для любого $k \in \mathbb{Z}$.
- 24.[10] Доказать, что $n^3 + 6n^2 - 4n + 3$ делится на 3 при любом натуральном n .
- 25.[4] Числа p и q - простые, $p, q > 3$. Доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 24.
- 26.[4] Найти все натуральные n , при которых число $n \cdot 2^n + 1$ делится на 3.
- 27.[5] Доказать, что сумма кубов трех последовательных чисел делится на 9.
- 28.[1] Определить p , если $p, p + 10, p + 14$ - простые числа.
- 29.[3] Пусть p и q - два последовательных простых числа. Может ли их сумма быть простым числом?
- 30.[1] Доказать, что если число n не является степенью двойки, то число $k^n + l^n$ - составное (n, k, l - натуральные числа).
- 31.[1] Доказать, что $2^{3^{1995}} + 3^{1995^3}$ - составное число.
- 32.[1] При каких натуральных n число $n^4 + 4$ простое?
- 33.[1] Доказать, что число $n^4 + 64$ составное при любом $n \in \mathbb{N}$.
- 34.[1] Доказать, что следующие дроби несократимы ни при каком n :
- а) $\frac{2n^2 - 1}{n + 1}$; б) $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$.

35.[1] При каких n сократимы дроби

а) $\frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + n + 3}$; б) $\frac{n^3 - n^2 - 3n}{n^2 - n + 3}$?

36.[3] Докажите, что дробь $\frac{14n + 3}{21n + 4}$ несократима. $n \in \mathbb{Z}$.

37.[4] Найти все числа, на которые может быть сократима дробь $\frac{5l + 6}{8l + 7}$ при целых значениях l .

38.[10] При каких натуральных n дробь $\frac{2n + 1}{n^2 - 1}$ несократима?

39.[10] Найти все целые n , при которых дробь $\frac{22n + 3}{26n + 4}$ сократима.

40.[10] При каких $n \in \mathbb{Z}$ выражение $\frac{3n + 2}{n - 1}$ является целым числом?

41.[4] Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

42.[5] Доказать, что для всех натуральных n выражение $(n^3 + 3n^2 + 2n)$ делится на 6.

43.[10] Доказать, что если m - целое число, то число $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ также является целым.

44.[1] Доказать, что число $n^3 - 7n$ делится на 6.

45.[1] Доказать, что число $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ делится на 24.

46.[1] При каких n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 120?

47.[1] Доказать, что $n^9 - 6n^7 + 9n^5 - 4n^3$ делится на 8640.

48.[10] При каких целых q существует целое решение уравнения $x^3 + 2qx + 1 = 0$?

49.[1] Доказать, что число $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ ни при каком натуральном n не является точным квадратом.

50.[1] Доказать, что число $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ является точным квадратом при любом натуральном n .

- 51.[2] Доказать, что удвоенная сумма квадратов двух натуральных чисел есть также сумма квадратов двух натуральных чисел.
- 52.[3] Покажите, что всякое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.
- 53.[4] Известно, что a, b, c - целые числа, и $a + b = c$. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.
- 54.[1] Доказать, что число, состоящее из n ($n > 1$) одинаковых цифр, не является точным квадратом.
- 55.[10] Является ли полным квадратом число $M = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\dots2}_n$?
- 56.[5] Доказать, что для всех натуральных n выражение $(8^{2n-1} - 1)$ делится на 7.
- 57.[1] Доказать, что
- $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечетном n ;
 - $7^n + 12n + 17$ делится на 18;
 - $5^n - 3^n + 2n$ делится на 4.
- 58.[1] Пусть a - действительное число, причем $a + 1/a$ - целое. Доказать, что при любом натуральном n число $a^n + 1/a^n$ также целое.

п.1.2. Рациональные и иррациональные числа.

При решении задач данного пункта следует помнить определения рационального и иррационального чисел. Именно, рациональным числом называется действительное число, представимое в виде $\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ - несократимая дробь, p - целое число, q - натуральное число. Собственно, иррациональным числом называется действительное число, непредставимое в виде $\frac{p}{q}$.

Необходимо напомнить, что любое рациональное число представляется также в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а любое иррациональное число - в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Кроме того, сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел есть всегда рациональное число. Подобное нельзя сказать об иррациональных числах.

При обосновании факта, что какое-то число является иррациональным, часто используется следующий прием. Предполагается противное, то есть, что исследуемое число является рациональным. Получается некоторое выражение. После чего, путем несложных алгебраических преобразований это выражение приводится к противоречивому виду. Особо следует рассмотреть ситуацию, когда изучается тригонометрическое выражение. Подобным образом предполагается противное, после чего, используя различные тригонометрические формулы, выражение относительно исходного угла приводится к выражению относительно известных углов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. Учитывая рациональность или иррациональность последнего, получается требуемое противоречие.

- 1.[2] а) Может ли сумма двух рациональных чисел быть иррациональной? б) Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональной?
- 2.[1] Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?
- 3.[1] Доказать, что между любыми двумя различными действительными числами есть как рациональные, так и иррациональные.
- 4.[1] При каких натуральных a и b число $\log_a b$ рационально, а при каких иррационально?
- 5.[10] Могут ли числа 11, 12, 13 быть членами, не обязательно последовательными, одной геометрической прогрессии?
- 6.[1] Доказать иррациональность чисел:
а) $\sqrt{241}$; б) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; в) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}$.
- 7.[10] Доказать, что числа $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ иррациональные.
- 8.[8] Является ли рациональным число:
а) $\operatorname{tg} 5^\circ$; б) $\sin 25^\circ$;
в) $\sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$?
- 9.[4] Доказать, что $\cos 10^\circ$ иррационально.

- 10.[4] Доказать, что $\sin 10^\circ$ иррационально.
- 11.[10] Доказать, что $\cos 1^\circ$ и $\sin 1^\circ$ есть иррациональные числа.
- 12.[5] Определить первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$.
- 13.[5] Определить первые 4 знака после запятой у числа $\sqrt{0,9999}$.
- 14.[5] Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что $|\sin 81^\circ - a| < 0,01$.
- 15.[5] Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что
 а) $\left| \frac{10}{\sqrt{18} - \sqrt{17}} - a \right| < 0,1$; б) $\left| (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} - a \right| < 1$.
- 16.[2] Вычислить без помощи таблиц:
 а) $\log_{1/\sqrt{3}}(81\sqrt{3})$; б) $2^{\frac{1}{5 \log_{88} 2}}$; в) $0,001^{\lg 2}$; г) $3^{\log_{\sqrt{3}} 41} + 2^{\frac{1}{2 \log_{841} 4}}$.
- 17.[1] Проверить равенство $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.
- 18.[4] Известно, что $\sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ - целое число. Найти это число.
- 19.[1] Пусть p и q - рациональные числа, причем $q^2 = 16p^2 + 12pq$. Доказать, что $p = q = 0$.
- 20.[10] Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найти p и q , если известно, что они рациональные.
- 21.[10] Доказать, что уравнение $x^3 + x^2y + y^3 = 0$ не имеет ненулевых рациональных решений.
- 22.[10] Существуют ли такие иррациональные числа p и q , что оба корня уравнения $x^2 + px + q = 0$ различны и
 а) рациональные;
 б) иррациональные?
- 23.[11] Решить в рациональных числах уравнение: $2^x = 3^y$.
- 24.[11] Решить в рациональных числах уравнение: $(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}$.

п.1.3. Сравнение чисел.

В задачах этого пункта требуется уметь сравнивать различные числовые выражения. Возможно использование следующих приемов.

- В случае сравнения однотипных числовых выражений следует алгебраическими преобразованиями (возведение в соответствующую степень, выравнивание оснований логарифмов с последующим их отбрасыванием и т.д.) привести исходную задачу к сравнению двух целых чисел.
- Используя особенности сравниваемых числовых выражений следует ввести некоторую вспомогательную функцию $f(x)$ и заменить исходную задачу сравнения на сравнение значений функции $f(x)$ при заданных значениях аргумента. Последняя задача решается исследованием функции $f(x)$ на возрастание и убывание.
- При сравнении разнотипных числовых выражений a и b подбирают такое число c , которое сравнимо и с a и с b . Например, для обоснования неравенства $a > b$ находят число c такое, что $a > c$ и $c > b$. Тогда уже делается вывод о соотношении между числами a и b .
- Для сравнения числовых выражений могут быть использованы следующие известные неравенства:
 - а) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ при $x, y \geq 0$;
 - б) $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x > -1$ и $n \in N$;
 - в) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \pi/2$.

1.[1] Доказать, что

$$\text{а) } \sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 2\sqrt[3]{3}.$$

2.[1] Что больше:

$$\text{а) } \sqrt[3]{40} + 1 \text{ или } \sqrt[3]{88}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{2} + 3 \text{ или } \sqrt[3]{81}?$$

3.[10] Доказать, что $\sqrt{1993} + \sqrt{1994} > \sqrt{1992} + \sqrt{1995}$.

4.[10] Сравнить числа: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{19}$.

5.[10] Сравнить числа: $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \frac{11}{1000}$.

- 6.[5] Какое из чисел больше: $\sqrt{2 \cos 2 + 4 \cos 1 + 3} - 2 \cos 1$ или $\frac{1}{2}$?
- 7.[10] Сравнить числа: $\sqrt[3]{60}$ и $2 + \sqrt[3]{7}$.
- 8.[10] Сравнить числа: $\log_3 10 + 4 \lg 3$ и 4.
- 9.[4] Определить знак числа $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5$.
- 10.[1] Положительно или отрицательно число:
 а) $\sin 100$; б) $\cos 100/19$; в) $\sin 355$
 ($\pi = 3,1415926 \dots$ - все цифры верные)?
- 11.[10] Расположить в порядке возрастания числа:
 $\sin 10^\circ$, $\cos 275^\circ$, $\operatorname{tg} 190^\circ$ и $\operatorname{ctg} 100^\circ$.
- 12.[1] Найти наименьшее натуральное k , для которого выполнены неравенства
 $\sin k < \sin(k+1) < \sin(k+2) < \sin(k+3)$.
- 13.[1] Что больше:
 а) $\cos 1$ или $\cos(3/2)$; б) $\sin 3$ или $\sin 3^\circ$;
 в) $\sin \cos 1^\circ$ или $\cos \sin 1^\circ$; г) $\sin \cos 1$ или $\cos \sin 1$?
- 14.[2] Что больше:
 а) $\cos 3$ или 0; б) $\sin 1$ или $\sin 1^\circ$; в) $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{arctg} 1$?
- 15.[4] Что больше $\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$?
- 16.[5] Расположить в порядке возрастания числа:
 $\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\sin \frac{\pi}{7}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$.
- 17.[4] Какой знак имеет число $\lg(\operatorname{arctg} 2)$?
- 18.[10] Сравнить числа: $\operatorname{tg} 55^\circ$ и 1.4.
- 19.[10] Сравнить числа: $\sin 31^\circ$ и $\operatorname{tg} 30^\circ$.
- 20.[2] Сравнить числа: $10^{\log_3 3}$ и $7^{\log_4 2}$.
- 21.[5] Сравнить числа 3^{400} и 4^{300} .
- 22.[5] Сравнить числа: 3^{500} и 4^{400} .

23.[10] Сравнить числа: 2^{300} и 3^{200} .

24.[10] Сравнить числа: $\left(\frac{1}{6}\right)^{1/6}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}$.

25.[1] Что больше: $\sqrt[9]{9!}$ или $\sqrt[8]{8!}$?

26.[4] Что больше $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

27.[1] Выяснить, что больше:

- а) $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$; б) $\sqrt[30]{30}$ или $\sqrt[50]{50}$; в) 3^{40} или 4^{30} ;
г) 33^{44} или 44^{33} ; д) $10^{\sqrt{11}}$ или $11^{\sqrt{10}}$; е) $(10^{-1})^{10^{-2}}$ или $(9^{-1})^{9^{-2}}$?

28.[1] Что больше:

- а) $(1,1)^{10}$ или 2; б) $\sqrt[200]{2}$ или 1,01?

29.[10] Сравнить числа: $\sqrt[200]{2}$ и 1.006.

30.[10] Сравнить числа: $\log_2 \pi + \log_{\pi} 2$ и 2.

31.[10] Сравнить числа: 1990^{1991} и 1991^{1990} .

32.[1] Сравнить числа:

- а) $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$; б) $\log_2 3$ и $\sqrt{3}$;
в) $\log_2 14$ и $\sqrt{15}$; г) $\log_2 240$ и $\sqrt{63}$.

33.[5] Имеет ли смысл выражение $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - \log_3 5)$?

34.[2] Что больше:

- а) $\log_2 3$ или $\log_3 2$; б) $\log_4 7$ или $\log_{1/3} 2$; в) $\log_2 5$ или $\log_3 5$?

35.[10] Сравнить числа: $\log_{11} 119$ и $\log_{15} 227$.

36.[1] Что больше:

- а) $\log_3 4$ или $\log_2 3$; б) $\log_4 5$ или $\log_{1/2} 1/3$?

37.[1] Сравнить логарифмы:

- а) $\log_2 3$ и $\log_3 5$; б) $\log_2 5$ и $\log_5 32$;
в) $\log_2 3$ и $\log_5 28$; г) $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

38.[5] Имеет ли смысл выражение:

- а) $\sqrt{\log_2 3 - \log_5 11}$; б) $\arcsin\left(\sqrt{32} \sin \frac{\pi}{11}\right)$?

39.[10] Сравнить числа: $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

40.[10] Сравнить числа: $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

41.[4] Что больше: $\log_{11} 12$ или $\log_{12} 13$?

42.[5] Расположить в порядке возрастания числа:

$$\text{а) } \log_9 10; \quad \frac{6}{5}; \quad \lg 11; \quad \text{б) } \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{1/5}; \quad \frac{1}{\sqrt[12]{6}}; \quad \sqrt[15]{0,1}.$$

43.[4] Сравнить два числа: $\frac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 80}{2 \log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \dots \cdot \log_3 79}$ и 1.

§2. Квадратный трехчлен и его свойства. Теорема Виета.

Квадратным трехчленом называется выражение $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, а графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$, вниз при $a < 0$.

Из тождества

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

следует, что график квадратного трехчлена получается из графика функции $y = ax^2$ путем параллельного переноса, при котором вершина параболы смещается в точку

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Если дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$, то график функции пересекает ось X в двух точках. Это означает, что соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

В случае, когда $D = 0$, график функции касается оси X , а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет ровно один корень x_0 . Наконец, если $D < 0$, то график функции лежит выше оси X при $a > 0$ или ниже оси X

при $a < 0$. Значит, корней у соответствующего квадратного уравнения нет, и функция знакопостоянна (ее знак совпадает со знаком a).

При решении ряда задач будет полезно помнить теорему Виета.

Теорема 1. Пусть x_1, x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Тогда $D \geq 0$ и справедливы соотношения:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Значит, применяя формулы сокращенного умножения, можно получить полезные выражения для различных комбинаций корней:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}; \\ x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2) \left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right) = -\frac{b}{a} \left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a} \right); \\ x_1^4 + x_2^4 &= \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \right)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} \right)^2 - 2\frac{c^2}{a^2}. \end{aligned}$$

При решении многих задач с параметрами важно знать утверждение о расположении корней квадратного трехчлена.

Теорема 2. Для того, чтобы оба корня x_1, x_2 квадратного трехчлена были меньше некоторого числа M , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{при } a > 0: & \quad D > 0; \quad x_0 < M; \quad y(M) > 0; \\ \text{при } a < 0: & \quad D > 0; \quad x_0 < M; \quad y(M) < 0. \end{aligned}$$

Теорема 3. Для того, чтобы некоторое число M лежало между корнями квадратного трехчлена, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{при } a > 0: & \quad y(M) < 0; \\ \text{при } a < 0: & \quad y(M) > 0. \end{aligned}$$

Теорема 4. Для того, чтобы оба корня x_1, x_2 квадратного трехчлена были больше некоторого числа M , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{при } a > 0: & \quad D > 0; \quad x_0 > M; \quad y(M) > 0; \\ \text{при } a < 0: & \quad D > 0; \quad x_0 > M; \quad y(M) < 0. \end{aligned}$$

1.[1] Найти необходимое и достаточное условие на параметры p и q для того, чтобы уравнение $x^2 + px + q = 0$ имело ровно один корень.

- 2.[10] Составить уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.
- 3.[3] Докажите, что корни квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ взаимно обратны.
- 4.[10] При каких значениях q уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет решение при любом p ?
- 5.[1] Найти все такие b , что при любом a уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два действительных корня.
- 6.[1] На координатной плоскости Oab найти множество точек (a, b) , для которых уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $ax^2 + x + b = 0$ имеют равное число корней.
- 7.[1] Доказать, что при любых допустимых значениях a, p, q уравнение $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a}$ имеет вещественные корни.
- 8.[3] Найти наименьшее значение, принимаемое z , если $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4$.
- 9.[1] Известно, что для квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ имеют место неравенства $y(-2) > 1, y(2) < -1$. Определить знак коэффициента b .
- 10.[3] Известно, что для $y = ax^2 + bx + c$ имеет место $y(-1) > -4, y(1) < 0, y(3) > 5$. Определите знак коэффициента a .
- 11.[1] Пусть $4a + 2b + c > 0$ и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Каков знак c ?
- 12.[1] Как выглядит график функции $y = ax^2 + bx + c$, если $a + b + c > 0, ac > 0, 0 < b < 2\sqrt{ac}$?
- 13.[1] На плоскости (p, q) изобразить множество точек таких, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет одним из корней фиксированное число a .
- 14.[1] Найти коэффициенты квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, если известно, что p и q - целые числа и $1 + \sqrt{2}$ - корень данного трехчлена.

- 15.[1] Коэффициенты p и q квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ нечетны. Доказать, что он не может иметь целых корней.
- 16.[3] Докажите, что если значение квадратного трехчлена $ax^2 - bx + c$ является целым числом при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$, то при любом целом x значение данного трехчлена является целым числом.
- 17.[10] Докажите, что если значение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ является целым числом при всех целых x , то a, b, c есть целые числа.
- 18.[1] При каких значениях a один из корней уравнения $2x^2 + (3a - 1)x + (a^2 - 4a + 4) = 0$ вдвое больше другого?
- 19.[4] При каких значениях k корни уравнения $x^2 - (2k + 1)x + k^2 = 0$ относятся как 1:4?
- 20.[10] При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 6x + a = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 = x_2$?
- 21.[1] Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются сумма квадратов и сумма кубов корней данного уравнения.
- 22.[1] Составить квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
- 23.[1] Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $3x^2 - 5x - 4 = 0$. Найти:
а) $x_1^4 x_2 + x_1 x_2^4$; б) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.
- 24.[1] Решить уравнение $x^2 + px + 35 = 0$ при условии, что сумма квадратов корней равна 74.
- 25.[5] Пусть x_1, x_2 - корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^3 + x_2^3$, не вычисляя этих корней.
- 26.[5] Пусть x_1, x_2 - корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.
- 27.[10] При каких a сумма корней уравнения: $x^2 - 2ax + (2a - 1) = 0$ равна сумме квадратов корней?

- 28.[10] Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.
Найти $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, $x_1^3 + x_2^3$, $x_1^4 + x_2^4$.
- 29.[4] Известно, что $\begin{cases} x + y = a, \\ x^4 + y^4 = b^4. \end{cases}$ Найти xy .
- 30.[1] Для квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ известно, что оба корня больше единицы и что $a + b + c > 0$. Определить знак коэффициентов.
- 31.[1] Известно, что корни x_1 и x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют неравенству $x_1 < -1 < x_2$. Доказать, что $a^2 + ac < ab$.
- 32.[1] При каких a уравнение $4x^2 - 2x + a = 0$ имеет два корня, причем $x_1 < 1, x_2 > 1$?
- 33.[10] При каких значениях a один из корней уравнения $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 5) = 0$ больше 1, а другой меньше 1?
- 34.[10] При каких значениях a оба корня уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $1/2$?
- 35.[10] Найти все значения a , при которых оба корня уравнения $(a + 1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1.
- 36.[1] На координатной плоскости Oab найти множество точек (a, b) , для которых уравнение $x^2 + ax + b = 0$:
- не имеет корней;
 - имеет два положительных корня;
 - имеет два корня на отрезке $[-1; 1]$;
 - имеет два корня, причем $x_1 < -1, x_2 > 1$.
- 37.[10] Найти все значения m , при которых неравенство $mx^2 - 4x + (3m + 1) > 0$ выполняется для всех $x > 0$.
- 38.[10] При каком положительном значении p уравнения:
 $3x^2 - 4px + 9 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имеют общий корень?
- 39.[1] При каком целом p уравнения $3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имеют общий корень?
- 40.[10] При каких a уравнения: $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

§3. Тригонометрические задачи.

При решении задач этого параграфа важно помнить следующие формулы тригонометрических преобразований:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}, \quad \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)), \quad \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)).$$

Полезно также знать формулы приведения.

Кроме того, необходимо помнить свойства и вид графиков тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Важно знать свойства и вид графиков обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, а также следующие формулы обратных тригонометрических преобразований:

$$\begin{array}{lll} \arcsin x + \arccos x = \pi/2, & |x| \leq 1, & \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2, \\ \cos(\arccos x) = x, & \sin(\arcsin x) = x, & |x| \leq 1, \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, & \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, & \\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, & \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, & |x| \leq 1, \\ \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, & |x| < 1, & \\ \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, & |x| \leq 1, \quad x \neq 0. & \end{array}$$

Для получения в конкретных задачах подобных формул следует комбинировать необходимые формулы из первой и второй групп.

Также особо следует выделить свойства и графики функций

$$y = \arcsin(\sin x), \quad y = \arccos(\cos x), \quad y = \arctg(\operatorname{tg} x), \quad y = \operatorname{arcc}tg(\operatorname{ctg} x),$$

которые легко выводятся из свойств тригонометрических функций:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x \text{ и им обратных } y = \arcsin x, \\ y = \arccos x, \quad y = \arctg x, \quad y = \operatorname{arcc}tg x.$$

1.[1] Вычислить: $\sin \left(\arccos \left(-\frac{1}{3} \right) \right)$.

2.[1] Вычислить: $\sin(\arctg 3)$.

3.[1] Вычислить: $\sin(2\arctg 6)$.

4.[1] Вычислить: $\cos(2\arctg(-5))$.

5.[1] Вычислить: $\cos \left(\arcsin \left(\frac{1}{3} \right) + \arctg(-2) \right)$.

6.[5] Вычислить: $\cos \left(\arcsin \frac{5}{13} + \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$.

7.[1] Вычислить: $\sin \left(\arccos \left(-\frac{1}{3} \right) - \arctg 2 \right)$.

8.[2] Вычислить: а) $\operatorname{tg} \left(\arccos \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$; б) $\sin \left(\arctg \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{2} \right)$.

9.[1] Вычислить: а) $\arccos \left(\cos \frac{5\pi}{4} \right)$; б) $\arccos \left(\sin \frac{5\pi}{4} \right)$.

10.[3] Вычислить: $\arcsin \left(\sin \frac{8\pi}{7} \right)$.

11.[3] Вычислить: $\arccos \left(\cos \frac{8\pi}{7} \right)$.

12.[3] Вычислить: $\arctg \left(\operatorname{tg} \frac{8\pi}{7} \right)$.

13.[1] Вычислить: $\arccos(\cos 10)$.

14.[4] Найти: $\arccos(\cos 13)$.

15.[1] Определить знак числа $\cos \frac{100\pi}{19}$.

16.[3] Выяснить, какое число больше: $\sin 1980^\circ$ или $\cos 1980^\circ$?

17.[3] Выяснить, какое число больше: $\sin 2$ или $\cos 3$?

18.[4] Что больше $\frac{\pi}{4}$ или $\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{2}{3}$?

19.[1] Доказать, что $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{5}$.

20.[1] Вычислить: $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

21.[1] Доказать, что

$$\sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{5} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{5} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{6\pi}{5} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{8\pi}{5} \right) = 0.$$

22.[1] Доказать, что $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

23.[1] Доказать равенство: $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

24.[1] Доказать равенство: $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

25.[1] Дано $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Найти $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x$.

26.[1] Найти наибольшее значение $\cos x + \cos y$, если $x + y = \frac{\pi}{2}$; $x, y > 0$.

27.[2] Найти $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \sqrt{7}/2$.

28.[2] При каких значениях α и β справедливо равенство $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$?

29.[4] Известно, что $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\pi}{n}$, где n - натуральное число.

Найти n .

30.[1] Доказать, что $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.

31.[1] Доказать, что $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2$.

32.[1] Доказать, что $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

33.[1] Доказать, что $\frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$.

34.[1] Доказать, что $\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{4}$.

35.[1] Доказать равенство $\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3$.

36.[1] Доказать, что если $0 \leq x \leq 1$, то $x \sin x + \cos x \geq 1$.

37.[5] При всех значениях $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) доказать неравенство: $3(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 8(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) + 10 \geq 0$.

38.[5] При всех значениях $\beta \neq \frac{\pi k}{2}$, ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) доказать неравенство:

$$\frac{3(1 + \cos^2 2\beta)}{\sin^2 2\beta} - \frac{8}{\sin 2\beta} + 5 \geq 0.$$

39.[9] Зная, что $\sin \alpha > 0$ и $\sin 3\alpha > \frac{1}{4}$, доказать, что $\sin \alpha > \frac{109}{1296}$.

§4. Логарифмические и показательные задачи.

При решении задач этого параграфа следует помнить формулы для степеней и логарифмов:

$$\begin{array}{ll} a^\alpha \cdot b^\beta = a^{\alpha+\beta} & a^{\log_a b} = b \\ \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} & \log_a b + \log_a c = \log_a bc \\ (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} & \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \\ a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha & \log_a b^c = c \cdot \log_a b \\ \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha & \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{array}$$

Также необходимо знать свойства и вид графиков логарифмической и показательной функций.

1.[1] При каких значениях x определено выражение:

$$\left(\dots \left((\log_a x)^{\log_a x} \right) \dots \right)^{\log_a x} ?$$

2.[3] Упростите выражение $\lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 9^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 87^\circ$.

3.[1] Упростить $2^{\frac{1}{\log_{125} 8}}$.

4.[1] Вычислить без таблиц число $4^{\sqrt{\log_4 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

5.[1] Доказать, что при целом $k > 1$ $n = -\log_k \log_k \sqrt[k]{\sqrt[k]{\dots \sqrt[k]{k}}}$ (n корней).

6.[1] Найти $\log_{xyz} u$, если $\log_x u = a$, $\log_y u = b$, $\log_z u = c$.

7.[1] Дано $\lg 2 = a$. Найти $\lg(1/80)$.

8.[1] Дано $\log_2 20 = a$. Найти $\log_5 4$.

9.[5] Известно, что $\log_3 18 = a$, $\log_5 15 = b$. Вычислить $\log_2 10$.

10.[1] Дано $\lg 2 = a$. Найти:

а) $\log_4 20$; б) $\log_{125} 50$; в) $\log_{2^{k_5}}(2^m \cdot 5^n)$.

11.[1] Найти все натуральные n , для которых

$$\log_2 n < \sqrt{15} < \log_2(n+1).$$

§5. Решение уравнений и неравенств.

При решении уравнений и неравенств, собранных в этом параграфе, помимо стандартных методов, например замены переменной, могут использоваться и следующие приемы.

- Область определения уравнения или неравенства разбивается на подобласти, на каждой из которых анализ исходной задачи проще, чем на всей области определения в целом.

- Может быть использовано графическое решение уравнения или неравенства, заключающееся в том, что исходная задача трактуется как задача поиска либо точек пересечения графиков некоторых вспомогательных функций, либо областей, где график одной функции лежит выше графика другой. При этом широко используются свойства введенных вспомогательных функций, описанные в параграфе 9.
- При решении уравнения $f(x) = 0$ полезно бывает домножить его на некоторую вспомогательную функцию $g(x)$ для того, чтобы новое уравнение $g(x) \cdot f(x) = 0$ стало проще исходного. При этом следует помнить, что если $g(x)$ знакопостоянна, то уравнение $g(x) \cdot f(x) = 0$ равносильно исходному. Если же в некоторых точках функция $g(x)$ обращается в нуль, то уравнение $g(x) \cdot f(x) = 0$ наряду с корнями уравнения $f(x) = 0$ обладает еще и корнями уравнения $g(x) = 0$. Поэтому, после решения уравнения $g(x) \cdot f(x) = 0$ следует среди его корней отобрать те, для которых $f(x) = 0$.
- Для решения некоторых уравнений полезно воспользоваться свойством монотонной функции. Суть этого приема состоит в том, что если надо решить уравнение $f(x) = g(x)$ и при этом $f(x)$ является возрастающей функцией, а $g(x)$ - убывающей функцией, то при наличии решения $x = x_0$ оно единственное. При этом корень x_0 легко подбирается, например, из вида графиков. Кроме того, в качестве одной из функций может выступать и функция $y = const$. Наконец, описанный подход применяется и при решении неравенств.
- Для решения некоторых уравнений привлекаются оценки левой и правой части. Пусть имеется уравнение $f(x) = g(x)$ и оно стандартными приемами не решается. Тогда может оказаться, что $f(x) \leq c_1$, а $g(x) \geq c_2$. При этом, если $c_1 = c_2$, то исходное уравнение может иметь решение - корень уравнения $f(x) = c_1$, который должен быть и корнем уравнения $g(x) = c_1$. Если же $c_1 < c_2$, то у исходного уравнения корней нет. Таким образом, решение исходной задачи сводится к доказательству некоторых неравенств. Этот процесс может основываться либо на свойствах ограниченности входящих в уравнение функций, либо на применении известных

неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy}, & x, y &\geq 0 \text{ и равенство достигается при } x = y; \\ \left|x + \frac{1}{x}\right| &\geq 2, & x &\neq 0 \text{ и равенство достигается при } |x| = 1; \\ |x| &\geq x & |x| &\geq -x; \\ \sin x &< x < \operatorname{tg} x, & x &\in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \\ |\sin x| &\leq x. \end{aligned}$$

Заметим, что этот прием применяется и при решении неравенств.

- Отдельно выделим однородные уравнения:

$$a_0 (f(x))^n + a_1 (f(x))^{n-1} \cdot g(x) + \dots + a_{n-1} f(x) \cdot (g(x))^{n-1} + a_n (g(x))^n = 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - произвольные выражения от x , а $a_0, a_1, \dots, a_n$ - заданные целые числа. Сначала рассматривается система

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

и отыскиваются ее решения, являющиеся решениями исходного уравнения. Затем уравнение делится на $(g(x))^n$ и выполняется замена

переменной $z = \frac{f(x)}{g(x)}$. Получается рациональное уравнение

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$, методы решения которого описаны в пункте 1 этого параграфа. Отыскиваются корни этого уравнения, затем возвращаются к исходной переменной.

п.5.1. Рациональные уравнения и неравенства.

Большинство собранных в этом пункте задач связаны с нахождением корней уравнения вида

$$y(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \neq 0$ и $a_0, a_1, \dots, a_n$ - целые числа. Выражение в левой части равенства называется многочленом. Само уравнение называется рациональным. Поскольку при $n = 1$ получается линейное уравнение $a_0 x + a_1 = 0$, имеющее решение $x_0 = -\frac{a_1}{a_0}$, а при $n = 2$ - квадратное

уравнение $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$, подробно описанное в параграфе 2; подробно следует остановиться на случае $n \geq 3$ и напомнить следующее.

Во-первых, у многочлена нечетной степени один корень существует всегда. Во-вторых, прежде чем заняться непосредственным отысканием корней многочлена, следует изучить вопрос их наличия. Для этого достаточно подбором найти два значения x_1, x_2 , $x_1 < x_2$, для которых $y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$.

Теперь кратко изложим процедуры нахождения корней исходного многочлена.

- Для поиска целого корня x_0 следует выписать все делители числа a_n , а затем по очереди проверить их, подставив в многочлен. Если для какого-то делителя подстановка обратилась в нуль, то корень x_0 найден. Необходимо поделить исходный многочлен на $(x - x_0)$, получить многочлен степени на единицу меньше и продолжить поиск других корней. Если же ни один делитель a_n не обратил подстановку в нуль, то данный многочлен целых корней не имеет.
- Для поиска рационального корня x_0 следует выписать все делители чисел a_0 и a_n , а затем сформировать всевозможные дроби вида $\frac{p}{q}$, где p - делитель a_n , q - делитель a_0 , и дробь $\frac{p}{q}$ - несократимая. После чего по очереди проверить их, подставив в многочлен. Если для какой-то дроби $\frac{p}{q}$ подстановка обратилась в нуль, то корень $x_0 = \frac{p}{q}$ найден. Необходимо поделить исходный многочлен на $(qx - p)$ и далее искать корни многочлена степени на единицу меньшей. Если же ни одна дробь $\frac{p}{q}$ не обратила подстановку в нуль, то данный многочлен рациональных корней не имеет.

Следует помнить, что в случае $a_0 = 1$ все рациональные корни многочлена являются исключительно целыми числами; а в случае $a_n = 1$ все рациональные корни многочлена имеют вид $x_0 = \frac{1}{q}$, где q - делитель a_0 .

- Наконец, для поиска иррационального корня x_0 следует воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, который продемонстрируем для $n = 4$. Будем искать разложение исходного многочлена в виде:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (b_0x^2 + b_1x + b_2) \cdot (c_0x^2 + c_1x + c_2),$$

где b_0, b_1, b_2 и c_0, c_1, c_2 - неизвестные, а a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 - заданные целые числа. Раскрывая скобки в правой части тождества и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , находим систему равенств:

$$\begin{cases} b_0c_0 & = a_0, \\ b_0c_1 + b_1c_0 & = a_1, \\ b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 & = a_2, \\ b_1c_2 + b_2c_1 & = a_3, \\ b_2c_2 & = a_4. \end{cases}$$

В системе следует рассмотреть первое и последнее уравнения как уравнения в целых числах. Перебрать всевозможные пары (b_0, c_0) и (b_2, c_2) , дающие в произведении a_0 и a_4 соответственно. При этих значениях решить в целых числах оставшиеся уравнения системы. Если в результате таких рассуждений не нашлись целые числа b_0, b_1, b_2 и c_0, c_1, c_2 , то необходимо искать иррациональные корни исходного многочлена каким-либо другим способом. Здесь имеет смысл попытаться разложить его на множители либо путем добавления и вычитания некоторого слагаемого, с последующим применением формул сокращенного умножения, либо путем почленного деления на какое-то определенное выражение, либо путем упрощения с помощью замены переменных.

Рациональные уравнения решаются также и при помощи замены переменных. Опишем некоторые из них.

- $(x + \alpha)^4 + (x + \beta)^4 = c$, где α, β, c - заданные числа. Пусть $d = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Замена переменной имеет вид $y = x + d$. Уравнение приобретает симметричный вид $(y + d)^4 + (y - d)^4 = c$ или, после преобразований, $2y^4 + 12d^2y^2 + (2d^4 - c) = 0$. Последнее уравнение является биквадратным и легко решается.
- $(x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma) \cdot (x - \delta) = A$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A$ - заданные числа, удовлетворяющие соотношениям $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ и $\beta - \alpha = \delta - \gamma$. Пусть $d = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4}$. Замена переменной имеет вид $y = x - d$ и также сводит исходное уравнение к биквадратному.
- $(ax^2 + b_1x + c) \cdot (ax^2 + b_2x + c) = Ax^2$, где a, b_1, b_2, c, A - заданные числа, удовлетворяющие неравенству $b_1 \neq b_2$. Уравнение

делится на x^2 , после чего замена переменной $y = ax + \frac{c}{x}$ приводит его к квадратному уравнению вида $(y + b_1) \cdot (y + b_2) = A$.

- $(x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma) \cdot (x - \delta) = Ax^2$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A$ - заданные числа, удовлетворяющие равенству $\alpha\beta = \gamma\delta \neq 0$. Уравнение приводится к виду $(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta) \cdot (x^2 - (\gamma + \delta)x + \gamma\delta) = Ax^2$, после чего решается приемом из пункта 3.
- $a(cx^2 + p_1x + q)^2 + b(cx^2 + p_2x + q)^2 = Ax^2$, где a, b, c, p_1, p_2, q, A - заданные числа, удовлетворяющие неравенству $p_1 \neq p_2$. Уравнение делится на x^2 , после чего замена переменной $y = cx + \frac{q}{x}$ приводит его к квадратному уравнению вида $a(y + p_1)^2 + b(y + p_2)^2 = A$.
- Возвратное уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где a, b, c - заданные числа, решается следующим образом. Уравнение делится на x^2 , после чего преобразуется к виду $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$. Замена переменных $y = x + \frac{1}{x}$ с учетом $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ приводит исходное уравнение к квадратному уравнению вида $ay^2 + by + (c - 2a) = 0$. Подобные рассуждения могут быть проделаны для любого рационального уравнения четной степени с указанным выше свойством коэффициентов. Возвратное уравнение нечетной степени вида $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ путем преобразований приводится к виду $(x+1)(ax^2 + (b-a)x + a) = 0$. Значит, один корень $x = -1$, а оставшееся уравнение является возвратным степени на единицу меньшей, и потому решается описанным выше способом. Аналогичное проделывается с любым возвратным уравнением нечетной степени.

К рациональным уравнениям относят также и уравнения, содержащие рациональные выражения с модулем. Поэтому при решении таких задач важно помнить, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0, \\ -x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{а также } |x| \geq 0 \text{ и } |-x| = |x|.$$

1.[1] Решить уравнение: $||x - 1| - 2| - 1| = 1$.

- 2.[1] Решить уравнение: $|x^3 - x + 1| = x$.
- 3.[1] Решить неравенство: $|x^3 - x + 1| < x + 1$.
- 4.[4] Решить уравнение: $|x|^3 + |x - 1|^3 = 9$.
- 5.[7] Сколько корней имеет уравнение
 $3 - 2|x - 1| = 2 \left(\left| x - \frac{1}{4} \right| - \left| x + \frac{1}{4} \right| - \frac{3}{2} \right)$?
- 6.[7] Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 2|x| + 1| = 3|2 - x| - 1$?
- 7.[10] Сколько корней имеет уравнение: $1 + x - x^2 = |x|^3$.
- 8.[1] Решить неравенство: $x^3 > \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- 9.[1] Решить неравенство: $\frac{3}{x^2} \geq \frac{4}{x} - x^2$.
- 10.[10] При всех значениях a решить уравнение: $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$.
- 11.[10] При всех значениях a решить уравнение: $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 = 0$.
- 12.[1] Решить уравнение $x^4 - 3x^2(x + 1) + 2(x + 1)^2 = 0$.
- 13.[1] Решить неравенство: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- 14.[1] Решить неравенство: $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + x^2 - 5x + 6 < 0$.
- 15.[10] Решить уравнение: $x^2 + \frac{x^2}{(x + 1)^2} = 1$.
- 16.[10] Решить уравнение: $x^2 + \frac{81x^2}{(9 + x)^2} = 40$.
- 17.[10] Решить уравнение: $7 \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.
- 18.[1] Решить уравнение $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 4$.

19.[4] Решить уравнение: $x^3 - \frac{95}{21}x^2 + \frac{43}{9}x + \frac{7}{9} = 0$.

20.[4] Решить уравнение: $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0$.

21.[10] Решить неравенство: $x^{12} - x^9 + x^6 - x^3 + 1 \geq 0$.

22.[1] Решить неравенство: $x^2 + \frac{x+1}{x^2+x+1} > 0$.

23.[1] Решить уравнение $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.

24.[1] Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

25.[1] Решить уравнение $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$.

26.[1] Решить уравнение $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0$.

27.[1] Решить уравнение $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$.

28.[1] Решить уравнение: $\frac{2a}{x} - \frac{1}{x-1} = 1$.

29.[10] При всех a решить неравенство: $\frac{x}{2a} + \frac{1-x}{6} > \frac{x+1}{8a}$.

30.[10] Для всех a решить неравенство: $ax > \frac{1}{x}$.

31.[2] При каких значениях a неравенство $ax^2 - |x| \leq 0$ справедливо для всех $x \leq 0$?

п.5.2. Иррациональные уравнения и неравенства.

При решении иррациональных уравнений и неравенств следует, прежде всего, помнить об области определения корня, присутствующего в уравнении или неравенстве. Именно, для $\sqrt[n]{f(x)}$ имеем $f(x) \geq 0$. Кроме того, следует не забывать и о следующих фактах:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{f(x)} &\geq 0, \\ \sqrt{f^2(x)} &= |f(x)|, \end{aligned}$$

$$f(x)\sqrt{g(x)} = \begin{cases} \sqrt{g(x)f^2(x)} & \text{при } f(x) \geq 0, \\ -\sqrt{g(x)f^2(x)} & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

А также, что избавление от корня осуществляется возведением обеих частей уравнения или неравенства в эту степень. При этом в случае корня четной степени обе части уравнения или неравенства должны быть неотрицательны.

Полезно также помнить и о том, что решение уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ сводится к решению равносильной системы:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Аналогичный подход применяется и в уравнении $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. Равносильная система имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

в зависимости от того, какое неравенство легче решить.

Следует не забывать и о замене переменной в иррациональном уравнении или неравенстве, которая упрощает исходную задачу.

1.[1] Решить уравнение: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$.

2.[1] Решить неравенство: $\frac{1 - \sqrt{1 - 8x^2}}{2x} < 1$.

3.[1] Решить неравенство: $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 3x} > 3$.

4.[1] Решить неравенство: $\sqrt{9 - 9/x} < x - \sqrt{x - 9/x}$.

5.[4] Решить уравнение: $\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \frac{1}{x} = 5$.

6.[4] Решить неравенство: $\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x+3}} + 1}{x^2 - 5x + 6} > 0$.

7.[4] Решить уравнение: $\sqrt{x^7 + 1} + \sqrt{1 - x^5} = 8$.

8.[4] Найти все $x > 0$, для которых $\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 3} = 5 + \sqrt{7} - x$.

- 9.[4] Решить уравнение: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
- 10.[10] Решить уравнение: $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$.
- 11.[10] Решить уравнение: $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x^2 - 6x + 7$.
- 12.[10] Решить уравнение: $\sqrt{x+7} = x^2 - 7$ при $x > 0$.
- 13.[10] Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.
- 14.[10] Решить уравнение: $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$.
- 15.[10] Решить неравенство: $\sqrt{25-x^2} \leq \frac{12}{x}$.
- 17.[0] Решить уравнение: $\sqrt{x} + x = a$.
- 18.[1] Решить уравнение: $x^2 - a = \sqrt{x+a}$.
- 19.[1] Решить уравнение: $x^2 + 2ax + a = \sqrt{x+a^2}$.
- 20.[1] Решить уравнение: $x^2 - 2 = |x - a|$.
- 21.[1] При каких a уравнение $\sqrt{x-1} = x + a$ имеет решение?
- 22.[1] Найти все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x^2-1} = 2x - a$ имеет единственное решение.
- 23.[1] Решить неравенство: $\sqrt{ax^2} \geq x$.
- 24.[1] Решить неравенство: $\sqrt{x^2-1} \geq ax$.
- 25.[1] Решить неравенство: $\sqrt{1-x^2} < x + a$.
- 26.[1] Решить неравенство: $x - \sqrt{x(a-x)} > 1$.
- 27.[10] Для всех значений a решить уравнение: $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = a$.

При решении уравнений и неравенств этого пункта следует помнить свойства и графики тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; свойства и графики обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctctg} x$. Важно также знать тригонометрические формулы, которые приведены в параграфе 3.

Необходимо рассмотреть следующие приемы решения тригонометрических уравнений.

- $a(x) \sin x + b(x) \cos x = c(x)$, где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - выражения от переменной x и $c(x) \geq 0$. Вводим вспомогательный угол $\varphi(x)$ так, чтобы:

$$\sin \varphi(x) = \frac{b(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}, \quad \cos \varphi(x) = \frac{a(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}.$$

Получается уравнение вида $\sqrt{a^2(x) + b^2(x)} \sin(x + \varphi(x)) = c(x)$. Тогда, если $|c(x)| > \sqrt{a^2(x) + b^2(x)}$, то уравнение не имеет решений. В случае $|c(x)| \geq \sqrt{a^2(x) + b^2(x)}$ возникает система:

$$\begin{cases} |\sin(x + \varphi(x))| = 1, \\ \sqrt{a^2(x) + b^2(x)} = |c(x)|, \end{cases}$$

которая в конкретных задачах легко решается.

- $\sin^k x + \cos^m x = 1$, где k и m - заданные натуральные числа. Нетрудно понять, что решение достаточно искать среди тех x , для которых $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$. В этом случае используются неравенства $\sin^k x \geq \sin^l x$ при $k > l$ и $\cos^m x \geq \cos^n x$ при $m > n$, в которых равенство достигается при $\sin x = 0$, $\sin x = 1$, $\cos x = 0$, $\cos x = 1$ и основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. После чего $\sin^k x$ и $\cos^m x$ сравниваются с $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$. Возникают неравенства вида либо $1 = \sin^k x + \cos^m x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ либо $1 = \sin^k x + \cos^m x \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Равенство возможно при уже указанных значениях $\sin x$ и $\cos x$, которые проверяются в исходном уравнении. Добавляются случаи $\sin x = -1$ или $\cos x = -1$, когда одна из степеней или обе четные. В противном случае уравнение решений не имеет.

1.[10] Решить уравнение: $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$.

- 2.[1] Решить уравнение: $\sin(\cos 3x) = 0$.
- 3.[1] Решить уравнение: $\sin(3 \sin \pi x) = 0, 5$.
- 4.[1] Решить уравнение: $\sin(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 5.[0] Решить уравнение: $4 \sin x \cdot \sin 5x = 1$.
- 6.[1] Решить уравнение: $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$.
- 7.[1] Решить уравнение: $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.
- 8.[1] Решить уравнение: $|\sin x|^{\operatorname{ctg} 2x} = 1$.
- 9.[1] Решить уравнение: $4 \sin x - \cos^{-3} x = 4 \cos x - \sin^{-3} x$.
- 10.[1] Решить уравнение: $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$.
- 11.[1] Решить уравнение: $\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin 5x}$.
- 12.[2] Решить уравнение: $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$.
- 13.[3] Решить уравнение: $\sin 3x + \cos 4x - 4 \sin 7x = \cos 10x + \sin 17x$.
- 14.[3] Сколько корней уравнения $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = 0$ лежит в отрезке $[-\pi; \pi]$?
- 15.[10] Имеет ли решение уравнение: $\cos(\sin 7x) = \frac{\pi}{5}$?
- 16.[1] Решить уравнение: $\sin(\sin x) = \sin(\cos x)$.
- 17.[1] Решить уравнение: $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$.
- 18.[1] Решить уравнение: $\cos(\sin x) = \cos(\cos x)$.
- 19.[4] Решить уравнение $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$.
- 20.[1] Решить уравнение: $\cos \cos x = \sin^2 x$.
- 21.[1] Решить уравнение: $\operatorname{tg}(-\cos x) = -\sin(\pi + \cos x)$.

22.[10] Решить уравнение: $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

23.[1] Решить уравнение: $\sin 2,5x + \cos 2x = 2$.

24.[1] Решить уравнение: $\cos x + \cos \pi x = 2$.

25.[1] Решить уравнение: $\sin x + \sin 7x = 2$.

26.[1] Решить уравнение: $\cos^2 x + \cos^2 \sqrt{3}x = 2$.

27.[1] Решить уравнение: $\cos^4 2x + \sin^4 x = 2$.

28.[1] Решить уравнение: $\cos(\sqrt{2}x) + \cos x = 2$.

29.[1] Решить уравнение: $5 \cos^2 x - 3 \sin^3 x = 5$.

30.[3] Решить уравнение: $\cos 3x + \sin\left(2x - \frac{7\pi}{6}\right) = -2$.

31.[0] Решить уравнение: $\cos 6x + \sin \frac{5x}{2} = 2$.

32.[1] Решить уравнение: $\sin^4 x + \cos^5 x = 1$.

33.[1] Решить уравнение: $\sin^5 x + \cos^3 x = 1$.

34.[1] Решить уравнение: $\sin^{11} x + \cos^5 x = -1$.

35.[1] Решить уравнение: $\sin x + \sqrt{\cos x} = 1$.

36.[5] Решить уравнение: $\sin^3 x - \cos^7 x = 1$.

37.[5] Решить уравнение: $\sin^5 x + \cos^{11} x = -1$.

38.[1] Решить уравнение: $\sin^4 x \cdot \cos^6 x = 0,4$.

39.[1] Решить уравнение: $\sin^{10} x \cdot \cos^6 x = \frac{5}{6}$.

40.[1] Решить уравнение: $\sin^5 x \cdot \cos^6 x = \frac{1}{31}$.

41.[1] Решить уравнение: $\sin^6 x \cdot \cos^{10} x = \frac{7}{8}$.

42.[1] Решить уравнение: $\sin |x| = |\sin x|$.

- 43.[1] Решить уравнение: $|\sin x| = |\cos x|$.
- 44.[3] Решить уравнение $\operatorname{tg}|x| = |\operatorname{tg}x|$.
- 45.[0] Решить уравнение: $\frac{4 \sin x}{(x-3)^2} + |\sin x| = 0$.
- 46.[1] Решить уравнение: $2 \cos \frac{x}{16} = 2^x + 2^{-x}$.
- 47.[1] Решить уравнение: $\cos x = x^2 + 1$.
- 48.[1] Решить уравнение: $\cos^2 x = 0,5 \left(\sqrt{1+4x^2} + \sqrt{1+x^2} \right)$.
- 49.[1] Решить уравнение: $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 1,5(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)$.
- 50.[1] Решить уравнение: $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$.
- 51.[1] Решить уравнение: $2\operatorname{arctg}x + \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \pi$.
- 52.[3] Решить уравнение: $2\pi \cos x = |x| - |x - \pi|$.
- 53.[5] Решить уравнение: $\sin^2(\pi x) + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 0$.
- 54.[5] Решить уравнение: $\cos^2(\pi x) - \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 1$.
- 55.[10] Решить уравнение: $\sin 9x \cdot \sin x + \cos x = \frac{3}{2}$.
- 56.[10] Решить уравнение: $\sin 7x \cdot \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}$.
- 57.[10] Решить уравнение: $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^2 x$.
- 58.[1] Решить неравенство: $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} > 1$.
- 59.[2] Решить неравенство $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.
- 60.[1] Решить неравенство: $\cos x \cdot \cos 2x \geq \frac{1}{4}$.
- 61.[1] Решить неравенство: $\left| \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \right| \leq \sqrt{3}$.

- 62.[1] Решить неравенство: $|\operatorname{tg}^3 x| + |\operatorname{ctg}^3 x| \leq 2 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$.
- 63.[1] Решить неравенство: $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x \geq 0$.
- 64.[1] Решить неравенство: $\sin x + \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 5x + \frac{1}{10} \sin 7x \geq 0$.
- 65.[1] Решить неравенство: $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
- 66.[10] Решить неравенство: $x^2 + (x+1) \cdot \sin \frac{\pi x}{6} \geq \frac{3+x}{2}$ при $x \in [-2; 2]$.
- 67.[10] Решить неравенство: $\cos(x + 3\operatorname{tg} x) + (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)^2 \leq -1$.
- 68.[10] Решить неравенство: $x \leq \sin \pi \left(\frac{x+1}{3}\right) \cdot \sin \pi \left(\frac{1-x}{3}\right)$
при $x \in [0; 1]$.
- 69.[1] Решить неравенство: $\cos(\sin x) > \frac{1}{2}$.
- 70.[1] Решить неравенство: $\cos(\cos x) > 0$.
- 71.[1] Решить неравенство: $\cos(\cos x) > 0,5$.
- 72.[1] Решить неравенство: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.
- 73.[1] Решить неравенство: $\arcsin(\sin x) < \arccos(\cos x)$.
- 74.[1] Решить неравенство: $\arcsin x < \arccos x$.
- 75.[1] Решить неравенство: $\operatorname{arctg} x \geq \operatorname{arcctg} x$.
- 76.[1] При каких a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?
- 77.[1] Найти все значения целочисленного параметра a , при которых разрешимо уравнение: $\sin x - \sin ax = 2$.
- 78.[1] Найти все значения целочисленного параметра a , при которых разрешимо уравнение: $\sin x - \sin ax = -2$.
- 79.[1] Найти все значения целочисленного параметра a , при которых разрешимо уравнение: $|\sin x + \sin ax| = 2$.

- 80.[1] Найти все значения целочисленного параметра a , при которых разрешимо уравнение: $|\sin x - \sin ax| = 2$.
- 81.[10] При каких значениях a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

п.5.4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

При решении уравнений и неравенств этого пункта следует помнить свойства и графики логарифмической и показательной функций, а также формулы, связанные с логарифмами и степенями, которые приведены в параграфе 4.

- 1.[1] Решить уравнение: $3^{\log_2 x} = x^{\log_2 3}$.
- 2.[1] Решить уравнение: $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.
- 3.[1] Решить уравнение: $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$.
- 4.[1] Решить уравнение: $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.
- 5.[1] Решить уравнение: $x^{1-x} = x^2$.
- 6.[1] Решить уравнение: $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.
- 7.[1] Решить уравнение: $2^{\log_5(x-1)} = 5^{\log_2(x-1)}$.
- 8.[1] Решить уравнение: $2^{\log_3 \frac{2^x+3}{4 \cdot 2^x-1}} = 3^{\log_2 \frac{2^x+3}{4 \cdot 2^x-1}}$.
- 9.[1] Решить уравнение: $2^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} = 3$.
- 10.[1] Решить уравнение: $\log_3 8^{x-1} \cdot \log_2 27 = x + 7$.
- 11.[1] Решить уравнение: $\log_{\cos x} 2 \cdot \log_{\cos^2 x} 3 = \log_2 \sqrt{3}$.
- 12.[1] Решить уравнение: $\left(\sqrt{9+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{9-2\sqrt{2}}\right)^x = 18$.
- 13.[2] Решить уравнение $(\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1$.

14.[3] Решить уравнение: $|x - 1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x - 1|^3$.

15.[5] Решить уравнение: $\lg(\arcsin x) = 0$.

16.[5] Решить уравнение:

а) $\lg(\arccos x) = 0$; б) $\arccos(\pi \log_3 \operatorname{tg} x) = 0$.

17.[1] Решить уравнение: $1 + 3^{x/2} = 2^x$.

18.[1] Решить уравнение: $2^x = 3 - x$.

19.[1] Решить уравнение: $x \cdot 2^x = 8$.

20.[1] Решить уравнение: $6^x - 3^x = 3$.

21.[1] Решить уравнение: $\ln x + \frac{1}{\ln x} = 2 \cdot \sin(x + \pi/4)$.

22.[1] Решить уравнение: $\log_{\cos x}(2 \cos x - 1) = 2$.

23.[1] Решить уравнение: $5^x + 12^x = 13^x$.

24.[10] Решить уравнение: $9^x + 4^x = \frac{5}{2}6^x$.

25.[1] Решить уравнение: $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

26.[10] Решить уравнение: $\left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x = (2\sqrt{2})^x$.

27.[3] Решить уравнение: $3^x + 1 - |3^x - 1| = 2 \log_5 |6 - x|$.

28.[3] Решить уравнение: $\lg(2^x + x - 41) = x(1 - \lg 5)$.

29.[3] Сколько корней имеет уравнение $3^{|x|} |2 - |x|| = 1$?

30.[3] Сколько корней имеет уравнение $x^2 - 2x - \log_2 |1 - x| = 3$?

31.[10] Решить уравнение: $2^{1-|x|} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

32.[10] Решить уравнение: $(2 + x)^x = 1$.

33.[10] Решить уравнение: $2 \log_{x+1} 4 = x + 3$.

34.[1] Решить неравенство: $(x^2 - 4x + 3)^{x^2 - 6x + 4} \leq 1$.

35.[1] Решить неравенство: $(x^2 + 3x - 4)^{x^2 - 1} \geq 1$.

36.[1] Решить неравенство: $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-8}} > 25$.

37.[3] Решите неравенство $|x - 2|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} < 1$.

38.[10] Решить неравенство: $(x^2 - 4x + 3)^{x^2 - 5x + 4} \leq 1$.

39.[10] Решить неравенство: $\left| \log_2 \frac{x}{3} \right|^{x^2 - 5x - 6} \leq 1$.

40.[10] Решить неравенство: $(x - 2)^{x^2 - 6x + 8} > 1$.

41.[1] Решить неравенство: $x^x > 2^x$.

42.[1] Решить неравенство: $\log_{(x^2-1)} \operatorname{ctg} x \leq 0$.

43.[1] Решить неравенство: $\log_{\cos x} (\sqrt{3} \sin x - 1) \leq 1$.

44.[1] Решить неравенство: $\log_{|\cos x|} |x| < 0$.

45.[2] Решить неравенство $\log_{\sin x} \cos x < 0$.

46.[5] Решить неравенство: $\log_3(\log_{1/5} x) \leq 0$.

47.[5] Решить неравенство: $\log_{1/4}(\log x) \geq 0$.

48.[10] Решить неравенство: $\log_{3/10} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$.

49.[10] Решить неравенство: $3^{2x/3} \cdot \sin x > \sqrt{2}$ при $x \in \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$.

50.[10] Решить неравенство: $2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.

51.[10] Решить неравенство: $\cos^2(x+1) \lg(9 - 2x - x^2) \geq 1$.

52.[1] Найти число решений уравнения $\log_a x = a^x$ в зависимости от a .

53.[1] При каких значениях a уравнение $\lg ax = 2 \lg(x+1)$ имеет единственное решение?

54.[1] Решить неравенство: $\log_2 x + \log_x 2 + 2 \cos \alpha \leq 0$.

55.[3] При каких a уравнение $3x \lg x = 1 + a \lg x$ имеет:
а) одно решение; б) два решения?

56.[3] Решите неравенство: $\log_a(1 - x^2) \geq 1$.

57.[10] При всех значениях a решить уравнение:
 $\sqrt{\log_x ax} \cdot \log_a x = -\sqrt{2}$.

58.[10] При всех a решить неравенство: $\frac{1}{\log_a x} > 1$.

59.[1] Доказать, что уравнение $(1/16)^x = \log_{1/16} x$ имеет ровно три решения.

60.[3] Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{1/2} \cos x < \log_{1/2} \operatorname{tg} x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

61.[3] Сколько корней имеет уравнение $\log_{5\pi/2} x = \cos x$?

62.[6] Доказать, что уравнение $2^{x^2} \cdot 3^{-x} = \frac{2}{5}$ не имеет решений.

п.5.5. Решение уравнений и неравенств в целых числах.

В данном пункте собраны уравнения вида $f(x, y, z) = 0$, решения которых являются целыми числами. Приведем некоторые основные приемы и методы их решения.

- Разложение на множители.

Пусть каким-либо образом, например, с помощью разложения на множители или формул сокращенного умножения, удалось получить представление исходного уравнения в виде

$$f_1(x, y, z) \cdot f_2(x, y, z) = d,$$

где d - некоторое целое число. После этого следует перебрать всевозможные пары целых чисел (d_1, d_2) такие, что $d_1 \cdot d_2 = d$ и для каждой такой пары решить систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = d_1, \\ f_2(x, y, z) = d_2. \end{cases}$$

Предполагается, что каждое уравнение системы проще исходного уравнения.

Рассмотрим наиболее типичные преобразования к требуемому виду.

1. Пусть $f = (ax)^2 - (by)^2 - d$. Тогда формула разности квадратов приводит к искомому равенству $(ax + by) \cdot (ax - by) = d$.
2. Пусть $f = ax^2 + bxy + cy^2 - d$ и квадратный трехчлен $at^2 + bt + c$ раскладывается на множители с целыми коэффициентами. Это означает, что соответствующий дискриминант является полным квадратом. Тогда легко выписать требуемое представление

$$(a_1x + b_1y) \cdot (a_2x + b_2y) = d.$$

В этих рассуждениях a, b, c, d - целые числа.

- Иногда для решения или доказательства отсутствия решения у исходного уравнения $f(x, y, z) = 0$ прибегают к следующему его представлению:

$$\dots = k \dots + b,$$

где k и b - натуральные числа и $b < k$. Данное соотношение рассматривается как деление выражения левой части, обычно зависящее лишь от одной переменной, на k с остатком b . После чего проверяют возможность такого факта. Для этого переменную левой части выражения заставляют пробегать все целые значения в зависимости от деления на k , т.е. $kl, kl + 1, \dots, kl + (k - 1)$. Из анализа такой проверки и делается окончательный вывод для исходного уравнения.

- Рассматривается уравнение $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, в котором дискриминант квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$ не является полным квадратом. Оно переписывается в виде $ax^2 + bxy + (cy^2 - d) = 0$. Далее, соответствующий дискриминант представляется как $D =$

$(b^2 - 4c)y^2 + 4d = t^2$, $t > 0$. Здесь t - новая целая переменная. Решается последнее вспомогательное уравнение относительно y и t . Если оно имеет целые решения (y_0, t_0) , то отвечающее им целое значение x_0 определяется из равенства

$$x_0 = \frac{-by_0 \pm t_0}{2a}.$$

- Рассматривается уравнение $f_1(x, y, z) + f_2(y, z) + f_3(z) = d$, где f_1, f_2, f_3 - заданные неотрицательные выражения, d - натуральное число. Из уравнения легко получить неравенство:

$$0 \leq f_3(z) = d - f_1(x, y, z) - f_2(y, z) \leq d,$$

откуда определяются возможные значения z . Возьмем одно из них z_0 . При таком z_0 имеем уравнение

$$f_1(x, y, z_0) + f_2(y, z_0) = d - f_3(z_0).$$

Для него аналогичным образом получается неравенство:

$$0 \leq f_2(y, z_0) \leq d - f_3(z_0),$$

откуда для данного z_0 находятся возможные значения y . Возьмем одно из них y_0 . При таких (y_0, z_0) имеем уравнение

$$f_1(x, y_0, z_0) = d - f_2(y_0, z_0) - f_3(z_0),$$

откуда находятся целые значения x_0 , отвечающие (y_0, z_0) , либо делается заключение об отсутствии при данных (y_0, z_0) решений. Перебирая возможные пары (y_0, z_0) , находится ответ задачи.

- При решении исходного уравнения в целых числах возможно использование известных неравенств, например:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 2xy, \\ \left| x + \frac{1}{x} \right| &\geq 2, \quad x \neq 0, \\ \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy}, \quad x, y \geq 0. \end{aligned}$$

- При решении исходного уравнения в целых числах возможно использование свойств входящих в уравнение функций.

1.[1] Имеют ли решения в целых числах уравнения:

а) $2x + 3y = 6$; б) $4x + 18y = 7$; в) $7x - 11y = 17$?

2.[4] Решить в целых числах уравнение $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

3.[10] Решить уравнение: $x^2 = 3y^2 + 2$ в целых числах.

4.[11] Решить в целых числах уравнение: $11x + 7y = 3$.

5.[11] Доказать, что уравнение: $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ не имеет решений в целых числах.

6.[11] Решить в целых числах уравнение: $3x + 5y = 8$.

7.[5] Найти все пары натуральных чисел p и q , для которых $4p^2 = q^2 - 9$.

8.[11] Решить в целых числах уравнение: $xy = x + y$.

9.[11] Решить в целых числах уравнение: $xy + 1 = x + y$.

10.[11] Решить в целых числах уравнение: $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7$.

11.[11] Решить в целых числах уравнение: $12x^2 - 17xy + 6y^2 = 3$.

12.[12] Решить в целых числах уравнение: $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

13.[11] Решить в целых числах уравнение: $2x^3 + xy - 7 = 0$.

14.[12] Решить в целых числах уравнения:

а) $x^2 - 4xy = 4y^2$; б) $x^2 + 23 = y^2$.

15.[4] Решить в целых числах уравнение $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

16.[11] Решить в натуральных числах уравнение: $3^{2x} - 2^y = 1$.

17.[11] Решить в натуральных числах уравнения:

а) $2^x - 3^y = 1$; б) $3^x - 2^y = 1$.

18.[10] Решить в натуральных числах уравнение: $2xy = x^2 + 2y$.

19.[11] Решить в целых числах уравнение: $x(x + 1) = y^2$.

20.[4] Решить в целых числах уравнение $2x^2 + xy - y^2 - 7x - 4y = 1$.

21.[11] Решить в целых числах уравнение: $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

22.[11] Решить в целых числах уравнение: $\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}$.

23.[11] Решить в целых числах уравнение: $6x^2 + 5y^2 = 74$.

24.[11] Решить в целых числах уравнение: $19x^2 + 28y^2 = 729$.

25.[11] Решить в целых числах уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$.

26.[12] Решить в целых числах уравнение:

$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33.$$

27.[12] Решить в целых числах уравнение: $2x^2 + y^2 + 7z^2 + 2x^2y^2 - 42z + 33 = 0$.

28.[12] Решить в целых числах уравнение: $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

29.[12] Решить в целых числах уравнение: $4x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 24y - 1 = 0$.

30.[4] Решить в натуральных числах уравнение: $2xy + 4z = zx^2 + 4y^2z$.

31.[10] Решить в натуральных числах уравнение: $xz + 4y = yx^2 + z^2y$.

32.[10] Решить в натуральных числах уравнение: $3xy + 9z = 9zx^2 + zy^2$.

33.[11] Решить в натуральных числах уравнение: $x + y + z = xyz$.

34.[1] Решить в целых числах уравнения:

а) $2^x + 1 = y^2$; б) $3^y = 1 + x^2$; в) $2^y = 3^x - 1$; г) $x^3 - 91 = y^3$;
д) $y^2 - x^2 = 21$; е) $x^2 + 7 = y^3$; ж) $6x^2 + 5y^2 = 74$; з) $y^2 = x^3 + 1$.

35.[10] Доказать, что следующие уравнения

а) $x^2 - y^2 = 1982$; б) $x^2 = 3y^2 + 17$;

в) $y^2 = 5x + 6$; г) $2^x - 1 = y^2$, $x > 1$

не имеют решений в целых числах.

36.[4] Решить в целых числах уравнение

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}}_{1992} = y.$$

37.[4] Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

38.[5] Найти все целые числа x и y , которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} -1 < x - y < 2, \\ 2 < 2y + x < 5. \end{cases}$$

39.[1] Доказать, что следующие уравнения не имеют решения в целых числах: а) $x^2 - 9y^2 = 23$; б) $9x = y^2 - 2$.

§6. Решение систем уравнений и неравенств.

В этом параграфе собраны системы уравнений и неравенств. Помимо стандартных приемов их решения, таких, как замена переменных, сложение и вычитание уравнений, умножение и деление уравнений, могут быть использованы и необычные приемы, описанные в параграфе 5, как то: построение графиков, метод оценок, свойство монотонной функции. Следует привести еще ряд систем и методов их решения.

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение однородное, поэтому проверяется, $f(0, 0) = 0$ или нет. Если да, то $(0; 0)$ - решение системы. Далее, в первом уравнении выполняется деление на y^2 и замена переменной $z = \frac{x}{y}$.

Если у уравнения $az^2 + bz + c = 0$ есть корни, то система сводится к одной или двум системам вида

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = z_0, \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

где z_0 - корень соответствующего квадратного уравнения. В противном случае система решений не имеет.

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2, \end{cases}$$

где $d_1, d_2 \neq 0$. Умножается первое уравнение на d_2 , а второе на d_1 и вычитается из одного другое. Получается система

$$\begin{cases} a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2 = 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \end{cases}$$

решение которой описано в пункте 1.

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$$

где функции P и Q обладают следующим свойством: $P(x, y) = P(y, x)$ и $Q(x, y) = Q(y, x)$. Для решения исходной системы применяется замена переменных $x + y = u$, $xy = v$. После ее выполнения исходная система сильно упрощается.

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Для решения такой системы рассмотрим первое уравнение как квадратное по x . Тогда выписывается соответствующий дискриминант, зависящий от y . Возможны следующие два варианта. Во-первых, $D(y) \leq 0$. Тогда из уравнения $D(y) = 0$ находят значения y_0 . Отвечающие им величины x_0 определяются из формул корней квадратного уравнения при равном нулю дискриминанте. Найденные пары (x_0, y_0) затем подставляются во второе уравнение. Во-вторых, $D(y)$ является полным квадратом некоторого выражения от y . Исходная система расщепляется на две, в которых присутствует второе уравнение $f(x, y) = 0$ и формулы корней соответствующего квадратного уравнения, то есть зависимости x через y . Последние легко решаются.

1.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^3 = 1. \end{cases}$$

2.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ (x - 2)^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

3.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz + zx = 12, \\ xyz = 8. \end{cases}$$

4.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \\ 2x + 3y - 6z - 1 = 0. \end{cases}$$

5.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 54, \\ xy + 4y^2 = 115. \end{cases}$$

6.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8. \end{cases}$$

7.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot xy = 78, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$$

8.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$

9.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 1, \\ x^2 + 4y^2 = 20x^2y^2. \end{cases}$$

10.[4] Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x + y^2 = 3? \end{cases}$$

11.[4] Решить систему

$$\begin{cases} 2x - 3|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4. \end{cases}$$

12.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

13.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

14.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$$

15.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

16.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2|x - y| + y = 2, \\ |x - y| - 2y = 6. \end{cases}$$

17.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

18.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

19.[2] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 34, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 23 - \frac{1}{\sqrt{xy}}. \end{cases}$$

20.[2] Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

21.[3] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (3x + y)^{x-y} = 9, \\ x - \sqrt[3]{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2. \end{cases}$$

22.[4] Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(y-1) + \sqrt{y}(x-1) = \sqrt{2}xy, \\ y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} = xy. \end{cases}$$

23.[1] При каких a и b система

$$\begin{cases} x + 3y = 8, \\ ax + by = 4 \end{cases}$$

имеет более одного решения?

24.[1] При каких a и b система

$$\begin{cases} ax - y = b, \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

25.[1] Найти все α , для которых система

$$\begin{cases} 2x + y = \alpha x, \\ 5x - 2y = \alpha y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

26.[1] Найти значения p , при которых система:

$$\begin{cases} x - 2y = a, \\ ax + 3y = p \end{cases}$$

имеет решение для любого a .

27.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} y = (x + 1)^2, \\ y + 1 = ax. \end{cases}$$

28.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

29.[1] При каких a система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = a \end{cases}$$

имеет решение?

30.[1] При каких b система:

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ (x - b)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

имеет решение?

31.[1] При каких a система:

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ (x - a)^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

32.[1] При каких a система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

33.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} + \frac{x+y}{xy} = a + \frac{1}{a}, \\ \frac{xy}{x-y} + \frac{x-y}{xy} = c + \frac{1}{c}. \end{cases}$$

34.[1] Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+a)^2} = x+a, \\ \sqrt{(x-a)^2} = x-a. \end{cases}$$

35.[2] Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ 3y - 6x = -15. \end{cases}$$

36.[3] Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2? \end{cases}$$

37.[3] При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy), \\ 2 + x + y - xy = 0 \end{cases}$$

имеет только одно решение?

38.[10] Найти, при каких k система уравнений:

$$\begin{cases} 3x + (k-1)y = k+1, \\ (k+1)x + y = 3 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

39.[10] Найти все a , при которых имеет решение система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = a. \end{cases}$$

40.[1] Решить уравнение: $\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 2 = \frac{2}{\pi} \arcsin y$.

41.[1] Решить уравнение: $2 \sin x = y + \frac{1}{y}$.

42.[1] Решить уравнение: $x^2 + 4x \cos(xy) + 4 = 0$.

43.[3] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

44.[4] Найти все решения системы

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 1, \\ x^6 + y^6 = 1. \end{cases}$$

45.[10] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

46.[10] Решить неравенство: $\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 0$.

47.[10] Решить неравенство: $\pi y - 2 \cdot \arcsin(x^2 + y) \geq 2\pi$.

48.[10] Решить неравенство: $(3 - \cos^2 x - 2 \sin x) \cdot (\lg^2 y + 2 \lg y + 4) \leq 3$.

49.[10] Решить неравенство: $1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \leq 0$.

50.[10] Решить неравенство: $y - \frac{1}{|\cos x|} - \sqrt{1 - y - x^2} \geq 0$.

§7. Доказательства неравенств и тождеств.

При доказательстве неравенств из этого параграфа полезно помнить следующие основные неравенства:

- $|a + \frac{1}{a}| \geq 2, a \neq 0$; равенство справедливо при $|a| = 1$.
- $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ для $x, y \geq 0$; равенство справедливо при $x = y$. Отсюда следует, что $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
- $|x| + |y| \geq |x + y|$ для произвольных x, y ; равенство достигается, когда $x \cdot y \geq 0$.
- $(1 + x)^n \geq 1 + nx, x > -1$ и $n \in N$. Это неравенство Бернулли.

Кроме того, при доказательствах неравенств и тождеств применяется и метод математической индукции, который заключается в следующем. Пусть есть некое утверждение, зависящее от $n, n \in N$. Проверяется его справедливость при $n = 1$. Предполагается истинность этого утверждения при $n = k$ и на основании этой информации доказывается выполнение утверждения при $n = k + 1$. Тогда данное утверждение справедливо при всех $n, n \in N$.

Наконец, ряд задач на доказательство неравенств и тождеств решается путем введения некоторой вспомогательной функции $f(x)$. После чего исходная задача переформулируется уже либо как задача изучения функции $f(x)$ на возрастание или убывание, либо как задача исследования функции $f(x)$ на наибольшее или наименьшее значения.

1.[1] Доказать равенство

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b})/2}.$$

2.[2] Доказать, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

3.[3] Докажите, что для любого натурального n

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

4.[3] Докажите, что для любого натурального n

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

5.[3] Доказать тождество

$$\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \cos 2\alpha - \frac{1}{16} \cos 4\alpha + \frac{1}{32} \cos 6\alpha.$$

6.[3] Доказать тождество

$$2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0.$$

- 7.[1] Доказать, что при любом натуральном n выполняется неравенство: $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$.
- 8.[1] Доказать, что при любом натуральном n выполняется неравенство: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.
- 9.[1] Доказать, что при любом натуральном n выполняется неравенство: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \leq \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n$.
- 10.[4] Доказать неравенство: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{99}{100}$.
- 11.[4] Доказать неравенство: $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.
- 12.[1] Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство: $x + y + \frac{1}{xy} \geq 3$.
- 13.[1] Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство: $x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{2}$.
- 14.[1] Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство: $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3} \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$.
- 15.[1] Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство: $(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$.
- 16.[1] Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство: $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 8$.
- 17.[1] Доказать, что для любых $a \neq 0, b \neq 0$ выполняется неравенство: $\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2+1}{b}\right)^2 > 15$.
- 18.[1] Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство: $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$.

19.[1] Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство: $\sqrt[n]{\frac{x^n + y^n}{2}} \geq \sqrt[m]{\frac{x^m + y^m}{2}}$; ($n > m$).

20.[1] Доказать неравенство $x^\alpha \cdot y^\beta \leq \alpha x + \beta y$ при условии, что $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0, x > 0, y > 0$.

21.[1] Пусть $a, b \geq 0, a + b = 1$. Доказать, что $a^n + b^n \leq 2(a^{n+1} + b^{n+1})$.

22.[1] Пусть $a + b = 2$. Доказать, что $a^4 + b^4 \geq 2$.

23.[1] Доказать, что если $|x - a| + |y - b| < c$, то $|xy - ab| < (|a| + |b| + |c|)c$.

24.[1] Доказать, что, если $4a^2 + b^2 = 1$, то $ab \leq \frac{1}{4}$.

25.[1] Доказать, что если $a + b + c = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

26.[5] Доказать, что для любых трех положительных действительных чисел a, b, c выполняется неравенство $(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ и указать, в каком случае выполняется равенство.

27.[5] Доказать, что для любых четырех положительных действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$(a + b + c + d) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16$$

и указать, в каком случае выполняется равенство.

28.[10] Доказать неравенство: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$ для произвольных чисел a, b, c, d .

29.[10] Доказать, что: $(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \geq 8abc$ при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

30.[10] Доказать, что: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$ при $a > 0, b > 0, c > 0$.

31.[10] Доказать, что если $a + b \geq 1$, то $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

32.[10] Доказать, что: $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$.

33.[10] Доказать, что если $xy + yz + zx = 1$, то $x + y + z \geq 1$.

34.[10] Доказать, что если $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$, то $|ac - bd| \leq 1$.

35.[10] Доказать, что если $x^2 + y^2 \leq 2$, то $|x + y| \leq 2$.

36.[10] Доказать, что при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$$

37.[10] Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

38.[1] Доказать, что $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

39.[1] Доказать, что $x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

40.[1] Пусть $0 \leq x, y, z \leq \pi$. Доказать, что

$$\sin \frac{x + y + z}{3} \geq \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3}.$$

41.[1] Пусть $0 \leq x, y, z \leq \frac{\pi}{2}$. Доказать, что $\operatorname{tg} \frac{x + y}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2}$.

42.[1] Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\cos \cos x > \sin \sin x$.

43.[5] Доказать справедливость неравенства $\operatorname{arcsin} x \cdot \operatorname{arccos} x \leq \frac{\pi^2}{16}$ и указать при каких значениях x выполняется равенство.

44.[10] Доказать, что: $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta)$
при $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$.

45.[10] Доказать, что: $\frac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1$.

46.[10] Доказать, что при $x > 0$ $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

47.[1] Доказать неравенство: $\lg 8 \cdot \lg 12 < 1$.

48.[10] Доказать, что: $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log_{10} \pi} > 4$.

49.[10] Доказать, что $\log_3^2 x + 2 \log_3 x \cdot \log_3 \frac{3}{x} \leq 1$.

50.[1] Доказать, что для любого значения переменной x выполняется неравенство: $x^{12} - x^9 + x^6 - x^3 + 1 > 0$.

51.[1] Доказать, что для любого значения переменной x выполняется неравенство: $2^x > x$.

52.[1] Что больше при $\alpha > 1$ и при $x > 0$: $(1+x)^\alpha$ или $1+\alpha x$?

53.[1] Сравнить $2^{x-1} + 2^{y-1}$ и $\sqrt{2^{x+y}}$.

§8. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии.

При решении задач этого параграфа следует помнить определения арифметической $\{a_n\}$ и геометрической $\{b_n\}$ прогрессий, формулы общего члена и сумм n последовательных членов этих прогрессий:

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

$$S_n = \frac{q \cdot b_n - b_1}{q-1},$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1},$$

$$d \neq 0 \text{ - разность прогрессии} \quad q \neq 1 \text{ - знаменатель прогрессии.}$$

Кроме того, полезно знать условие, при котором три числа a , b , c образуют в указанном порядке три последовательных члена арифметической прогрессии: $2b = a + c$, соответственно, для геометрической прогрессии: $b^2 = a \cdot c$. Последующее решение задач можно проводить, применяя рассуждения предыдущих параграфов.

1.[1] В арифметической прогрессии $S_m = S_n$ ($m \neq n$). Найти S_{m+n} .

2.[1] В арифметической прогрессии для любых m и n имеет место

$$\text{равенство } \frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}.$$

$$\text{Доказать, что } \frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

3.[1] Пусть a, b, c - различные простые числа, каждое из которых больше 3. Доказать, что они не могут быть последовательными членами арифметической прогрессии.

- 4.[3] Числа a^2 , b^2 , c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.
- 5.[4] Второй член арифметической прогрессии равен 4, а десятый - -4. Найти число членов этой прогрессии, сумма которых равна 12.
- 6.[1] Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые десять членов - целые числа, а остальные - не целые?
- 7.[1] Пусть a, b, c - попарно взаимно простые числа, причем $a \neq 1$. Доказать, что они не могут быть членами одной геометрической прогрессии.
- 8.[1] Могут ли различные числа a_k, a_m и a_n быть одноименными членами как арифметической, так и геометрической прогрессий?

§9. Функции и их графики.

В данном параграфе собраны задачи, связанные с исследованием различных свойств функций, а также с построением графиков функций.

Следует напомнить некоторые основные понятия.

Функцией называется отображение числового множества X на числовое множество Y , при котором каждому значению x из множества X , называемого областью определения, ставится в соответствие единственное значение y из множества Y , называемого множеством значений. Для обозначения функции используется $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если для всех $x \in X$ выполняется соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = f(-x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для всех $x \in X$ имеет место соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = -f(-x)$.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T > 0$, что для всех $x \in X$ выполняются соотношения $(x+T) \in X$, $(x-T) \in X$ и равенства $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. При этом число T называется периодом функции.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множества $D \subset X$, если для произвольных $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множества $D \subset X$, если для произвольных $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Точка $x_0 \in X$ называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует число $\varepsilon > 0$, такое, что $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset X$ и для всех $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точка $x_0 \in X$ называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если существует число $\varepsilon > 0$, такое, что $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset X$ и для всех $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Далее, функцию можно изобразить геометрически с помощью графика. Графическое изображение функции дает наглядное представление об ее основных особенностях.

График функции $y = f(x)$ - это множество точек плоскости с координатами (x, y) , у которых $x \in X$ - допустимые значения аргумента, а $y = f(x) \in Y$ - соответствующие им значения функции.

Тогда уже нетрудно понять, что график четной функции симметричен относительно оси y , а график нечетной функции центральносимметричен относительно начала координат.

Кроме того, важно помнить, как выглядят перечисленные выше свойства и графики для основных элементарных функций:

$$\begin{array}{ll} y = kx + b, & y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \\ y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, & \\ y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}, & y = \log_a x \quad a > 0, \quad a \neq 1, \\ y = \sin x, & y = \operatorname{tg} x, \\ y = \cos x, & y = \operatorname{ctg} x, \\ y = \arcsin x, & y = \operatorname{arctg} x, \\ y = \arccos x, & y = \operatorname{arccot} x. \end{array}$$

Наконец, при построении графиков полезно будет знать основные приемы преобразования графиков функции.

- График функции $y = f(x \pm a)$, $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси x на a единиц влево для $f(x + a)$ и на a единиц вправо для $f(x - a)$.
- График функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией исходного графика $y = f(x)$ вдоль оси x : сжатием в $|k|$ раз при $|k| > 1$ или растяжением в $\frac{1}{|k|}$ раз при $|k| < 1$. При этом, если $k < 0$, то предварительно необходимо симметрично

отобразить график $y = f(x)$ относительно оси y , а затем осуществить необходимую деформацию этого графика.

Отсюда следует, что если $y = f(x)$ - периодическая функция с периодом T , то функция $y = f(kx)$ - периодическая функция с периодом $T_1 = \frac{T}{k}$.

- График функции $y = f(kx + b) = f\left(k\left[x + \frac{b}{k}\right]\right)$ строится как комбинация первых двух пунктов. Именно, $f(x)$ сначала деформируется в k раз, а затем переносится на $\frac{b}{k}$ в нужную сторону.
- График функции $y = f(x) \pm a$, $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом его вдоль оси y на a единиц вверх для $f(x) + a$ и на a единиц вниз для $f(x) - a$.
- График функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией исходного графика $y = f(x)$ вдоль оси y : растяжением в $|k|$ раз при $|k| > 1$ или сжатием в $\frac{1}{|k|}$ раз при $|k| < 1$. При этом, если $k = -1$, то происходит просто симметричное отражение графика $y = f(x)$ относительно оси x , а при $k < 0$ и $k \neq -1$ происходит отражение сначала относительно оси x с последующим необходимым деформированием этого графика.
- График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика, лежащая над осью x , остается без изменения, а часть графика, находящаяся под осью x , отражается симметрично относительно оси x . Таким образом, ниже оси x графика нет.
- Пусть функция $y = f(x)$ является обратной для функции $y = g(x)$. Это означает, что $x = f(g(x))$ для всех $x \in X$ или $y = f(g(y))$ для всех $y \in Y$. Тогда важно помнить, что графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$.
- Пусть заданы функции $y = g(z)$ и $z = f(x)$. Тогда функция $y = F(x) = g(f(x))$ называется сложной функцией. Для построения ее графика следует исследовать свойства и построить графики вспомогательных функции $y = g(z)$ и $z = f(x)$, после чего, используя их, осуществить построение графика $y = F(x)$.

Следует напомнить и особые приемы построения графиков.

- Метод сложения графиков, который заключается в следующем. Чтобы построить график $y = f_1(x) + f_2(x)$, сначала нужно построить вспомогательные графики функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, а затем складывать соответствующие значения y для этих функций в каждой точке x . При этом следует помнить, что число точек, в которых необходимо провести сложение графиков, выбирается таким образом, чтобы получить достаточно полное представление о графике функции $y = f_1(x) + f_2(x)$, используя необходимые закономерности поведения функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.
- Метод умножения графиков, который заключается в следующем. Чтобы построить график $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$, сначала необходимо построить вспомогательные графики функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, а затем перемножить соответствующие значения y для этих функций в каждой точке x .
- Метод деления графиков, который заключается в следующем. Чтобы построить график $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, сначала необходимо построить вспомогательные графики функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, а затем поделить соответствующие значения y для этих функций в каждой точке x . При этом нужно соблюдать следующие правила. Во-первых, через точки x , где $f_2(x) = 0$, проходят вертикальные асимптоты - прямые, к которым график приближается, но не пересекает их. Поэтому в окрестностях таких точек функция стремится к $\pm\infty$, в зависимости от знаков $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Во-вторых, там, где $y = f_2(x)$ стремится к $\pm\infty$, функция $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ стремится к нулю.

Наконец, отметим ряд важных свойств возрастающих и убывающих функций. Во-первых, сумма возрастающих и убывающих функций есть снова возрастающая или убывающая функция. Во-вторых, сложная функция из возрастающих или убывающих функций есть снова возрастающая или убывающая функция. В-третьих, произведение неотрицательных возрастающих или убывающих функций снова есть возрастающая или убывающая функция. В-четвертых, если положительная функция $y = f(x)$ возрастает, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ убывает, и наоборот.

Все перечисленные выше факты позволяют не только эффективно строить графики функций, но и на их основе делать выводы о свойствах этих функций.

Следует заметить лишь, что обоснование неперIODичности функции $y = f(x)$ происходит от противного. Записываются равенства из определения периодичности, а затем, исходя из особенностей рассматриваемой функции, подбираются значения x таким образом, чтобы добиться противоречия.

1.[1] Найти область определения функции:

$$y = \arccos\left(\frac{1}{\cos \pi \lg x}\right) + \arcsin \frac{1}{x}.$$

2.[1] Найти область определения функции: $y = \log_{\sin x}(\cos x + \sin x)$.

3.[1] Найти область определения функции: $y = \sqrt{\lg \cos \pi x} + \sqrt{9 - x^2}$.

4.[1] Найти область определения функции:

$$y = \arcsin(\arcsin x) + \arccos \frac{2 \arccos x}{\pi - 2}.$$

5.[5] Найти область определения функции: $y = \sqrt{\log_3(\sin 2x)}$.

6.[5] Найти область определения функции: $y = \sqrt{\log_7(\cos 2x)}$.

7.[1] Определить множество значений функции: $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$.

8.[1] Определить множество значений функции: $y = \sqrt{x - x^2}$.

9.[1] Определить множество значений функции: $y = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$.

10.[1] Определить множество значений функции: $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

11.[1] Определить множество значений функции: $y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$.

12.[1] Определить множество значений функции: $y = \arccos \frac{1}{x}$.

13.[1] Определить множество значений функции: $y = \log_2(x - x^2)$.

14.[1] Определить множество значений функции: $y = 2^{-1/x^2}$.

- 15.[1] Исследовать на четность функцию: $y = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$.
- 16.[5] Является ли функция $f(x) = (2 + \sqrt{3})^{1/x} - (2 - \sqrt{3})^{1/x}$ четной, нечетной или ни той, ни другой?
- 17.[5] Является ли функция $f(x) = (2 + \sqrt{5})^{1/x} + (\sqrt{5} - 2)^{1/x}$ четной, нечетной или ни той, ни другой?
- 18.[1] Найти наименьший положительный период функции:
 $y = \cos x + 2 \cos 3x$.
- 19.[1] Найти наименьший положительный период функции:
 $y = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$.
- 20.[1] Найти наименьший положительный период функции:
 $y = \sin 2x + \sin^2 3x$.
- 21.[1] Доказать, что функция $y = \sin 2^x$ не является периодической.
- 22.[1] Доказать, что функция $y = \cos x + \cos \pi x$ не является периодической.
- 23.[1] Доказать, что функция $y = \sin x \sin \sqrt{2}x$ не является периодической.
- 24.[1] Исследовать на периодичность функцию: $y = \sin(\pi + \cos x)$.
- 25.[1] Исследовать на периодичность функцию: $y = \sin(\pi x + \cos x)$.
- 26.[1] Исследовать на периодичность функцию: $y = \sin \log_2 |x|$.
- 27.[2] Является ли периодической функция: $y = \cos(x\sqrt{2})$?
- 28.[10] Доказать периодичность функции $y = x - [x]$ и построить ее график. Здесь $[a]$ - есть целая часть числа a .
- 29.[10] Доказать непериодичность функции $y = \sin x^3$.
- 30.[10] Найти наименьший положительный период функций:
а) $y = \sin 2x + \cos 3x$; б) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$; в) $y = \operatorname{tg} \pi x$;
г) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{\pi}$; д) $y = \sin \frac{x}{\sqrt{\pi}}$.

31.[10] Доказать непериодичность функций:

а) $y = \cos \sqrt{x}$; б) $y = \operatorname{tg} x^2$; в) $y = \sin \frac{1}{x}$.

32.[2] Выяснить, есть ли наибольшее или наименьшее значение у функций:

а) $y = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2$; б) $y = \frac{2x^2}{x^4+1}$;
в) $y = \sin(\sin x)$; г) $y = 2^{|\sin x|}$.

33.[4] Найти наибольшее значение функции: $y = 3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

34.[4] Найти наименьшее значение выражения:

$$|x - y| + \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2}.$$

35.[4] Найти максимальное значение выражения:

$$|x| \sqrt{16 - y^2} + |y| \sqrt{4 - x^2}.$$

36.[4] Найти наименьшее значение функции: $y = |x - 1| + |x - 3|$.

Построить график функции:

$$37.[1] y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}.$$

$$38.[1] y = \frac{|x| - 2}{|x + 4|}.$$

$$39.[1] y = \frac{|x| + 3}{|x| - 4}.$$

$$40.[3] y = |2x^2 - 3x + |x - 1||.$$

$$41.[3] y = \frac{|x - 1|}{x - 1} (x^2 + 3).$$

$$42.[3] y = \frac{2|x| - 1}{x - 3}.$$

$$43.[1] y = \sqrt{x^2 - 2x}.$$

$$44.[1] y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}.$$

$$45.[1] y = \sqrt{2x - x^2}.$$

$$46.[1] y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}.$$

$$47.[3] y = \frac{|\sin x|}{\sin x}.$$

$$48.[3] y = \frac{\cos(|x| + \frac{\pi}{2})}{\sin x}.$$

$$49.[1] y = 2^{\lg x}.$$

$$50.[1] y = \log_x 2.$$

$$51.[1] y = x^{1/\lg x}.$$

$$52.[3] y = 2^{(|x|+x)/x}.$$

$$53.[3] y = 2^{|1-x|}.$$

$$54.[3] y = 2^{|\log_2 x|}.$$

$$55.[3] y = |\log_{1/4}(x/4)|.$$

$$56.[3] y = \log_x \sqrt{x}.$$

$$57.[3] y = \lg|x| - \lg x^2.$$

$$58.[3] y = \log_2(4x - x^2).$$

$$59.[3] y = \frac{|\log_2 x|}{\log_2 x}.$$

$$60.[3] y = \log_{1/2} \left| \frac{2x-1}{x+1} \right|.$$

$$а) y = |\log_{1/4}(x^2 - 4)|; \quad б) y = (1/2)^{1/x};$$

$$61.[2] в) y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x; \quad г) y = \sqrt{\sin^2 x + 1 - 2 \sin x};$$

$$д) y = \log_{|\sin x|} 1/2.$$

$$62.[3] y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x.$$

$$63.[3] y = \begin{cases} 4^x - 1, & \text{если } x < 0, \\ \sqrt{4x - x^2}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$64.[3] y = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \leq 1, \\ 1 + \log_{1/2} x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$65.[5] \text{ а) } y = |x + 1| \cdot |x - 3|; \quad \text{б) } y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}; \quad \text{в) } y = 1 - \frac{1}{|x|}.$$

$$66.[5] \text{ а) } y = |x - 2|; \quad \text{б) } y = x^2 + 7|x| + 10; \quad \text{в) } y = 3^{\log_{\sqrt{3}}(x-2)}; \\ \text{г) } y = \frac{1}{|x-1|}; \quad \text{д) } y = 1 - \sqrt{|x|}; \quad \text{е) } y = 3 \cos 2x.$$

67.[10] Построить графики функций:

$$\text{а) } y = |x^2 + 5x - 6|; \quad \text{б) } y = x^2 + 5|x| - 6; \quad \text{в) } y = -3 \sin 2|x|;$$

$$\text{г) } y = \lg \sin x; \quad \text{д) } y = \frac{x}{\sin x}; \quad \text{е) } y = \log_{|\sin x|} 1/2;$$

$$\text{ж) } y = x + \sin x; \quad \text{з) } y = \log_{\sin x} \cos x; \quad \text{и) } y = \frac{\sin x}{x};$$

$$\text{к) } y = 2^{\sin x}; \quad \text{л) } y = \frac{1}{x^2 - 6x + 5}; \quad \text{м) } y = \arcsin(\sin x);$$

$$\text{н) } y = \arccos(\cos x);$$

$$\text{о) } y = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{если } x \leq 0, \\ \log_{1/2}(x+1), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

68.[5] Определить, в какой четверти координатной плоскости находится точка пересечения графиков функций: $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ и $y = \log_2 3^x - \log_5 8$.

69.[5] Определить, в какой четверти координатной плоскости находится точка пересечения графиков функций:

$$\text{а) } y = x \sin 226^\circ - \log_2 3 \quad \text{и} \quad y = x \cos 137^\circ - \frac{3}{2};$$

$$\text{б) } y = x \sin \frac{5\pi}{12} + 5^{1/7} \quad \text{и} \quad y = \frac{9x}{10} + 2^{1/3}.$$

70.[6] Для каждого $a > 0$ найти наибольшее значение величины $|x - 2a|$ при условии $2|x| + |x - 3a| \leq 9a$.

71.[6] Для каждого $a > 0$ найти наименьшее значение величины $x^2 - |x - a| + x - a$ на отрезке $[-3; 3]$.

72.[6] Для каждого $a > 0$ найти уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно две общие точки с графиком функции $y = x \cdot |x + 2a| + a^2$.

§10. Изображение множества точек на плоскости.

Для решения задач этого параграфа следует путем алгебраических преобразований привести исходную задачу к одной или нескольким системам равенств и неравенств вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ y = f_1(x), \\ \text{-----} \\ y = f_k(x), \\ y \geq g_1(x), \\ \text{-----} \\ y \geq g_m(x), \\ y \leq h_1(x), \\ \text{-----} \\ y \leq h_l(x). \end{array} \right.$$

В конкретных задачах какие-то группы равенств или неравенств могут и отсутствовать. Знаки нестрогих неравенств могут быть заменены на строгие. После этого в системе координат (x, y) необходимо изобразить множество $[a; b]$ и на нем графики всех функций $y = f_i(x)$, $y = g_i(x)$ и $y = h_i(x)$. Они разбивают координатную плоскость (x, y) на подобласти, на каждой из которых строятся соответствующие множества точек или графики, удовлетворяющие системе. В случае наличия нескольких подобных систем в конце найденные множества точек объединяются.

Изобразить на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

1.[1] $|x - y| + |x + y| = 1$.

2.[1] $||x| - 1| = ||y| - 1|$.

$$3.[1] \frac{x}{2y} > 1.$$

$$4.[1] xy + 1 > 0.$$

$$5.[1] |y| = \frac{1}{||x+1|-3|}.$$

$$6.[1] x^2 + y^2 = x.$$

$$7.[1] |(x-2)(x-4)| + |y| = 1.$$

$$8.[1] x^2 - |y-x| = 2x.$$

$$9.[1] |y-1| = |x^2 - |3x-2||.$$

$$10.[1] |y| = ||x^2-4|-1|.$$

$$11.[1] x^2 + y^2 = x^2y^2 + 1.$$

$$12.[1] x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| < a.$$

$$13.[1] yx^2 - (y^2 + 1) \cdot x + y > 0.$$

$$14.[1] x^2 - \left(y + \frac{1}{y}\right)x + 1 > 0.$$

$$15.[3] (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 4.$$

$$16.[5] \begin{cases} y \leq 2x, \\ 2y - x \geq 0, \\ xy \leq 2. \end{cases}$$

$$17.[5] \text{ а) } |y-1| + |x+3| = 2; \quad \text{ б) } |x-4| + |y+2| = 3.$$

$$18.[1] \sqrt{x+y} > x.$$

$$19.[5] \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

$$20.[1] y = |y - \sin x|.$$

$$21.[1] |y| = |y - \sin x|.$$

$$22.[1] \sin x > \sin y.$$

23.[1] $|\sin y| = \sin x$.

24.[1] $\cos |x| + \sin |y| = 0$.

25.[1] $\sin x = \cos(x + y)$.

26.[1] $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$.

27.[1] $\operatorname{tg}(\sin x + \sin y) = 0$.

28.[1] $\arcsin x = \arccos y$.

29.[3] $\cos(x + y) = \cos(x - y)$.

30.[3] $\sin 2x = \sin 2y$.

31.[1] $x^y > 1$.

32.[1] $\log_x y < 0$.

33.[1] $\log_{x+y}(2x + 3y) > 1$.

34.[1] $|y| = \log_{1/2} ||x + 2| - 1|$.

35.[3] $\log_{(|x|-0.5)}(x^2 + y^2) \leq \log_{(|x|-0.5)} 4$.

36.[6] $\log_{(x-y)}(x + y) \geq 1$.

37.[1] $\min(x, y) = 1$.

38.[1] $|y| > \max\left(x, x^2, \frac{1}{2}\right)$.

39.[10] а) $|y| = \sin |x|$;
 б) $1/y > 1/x$;
 в) $\begin{cases} x^y + (1-x) = 1, \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

б) $|y| = |x^2 + 5x - 6|$;
 г) $|y| = y - \lg |x|$;

40.[2] а) $\log_y x < 0$; б) $y > \sin |x|$.

vspace5mm

Многочленом называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \neq 0$ и $a_0, a_1, \dots, a_n$ - целые числа. Поскольку при $n = 1$ имеем многочлен $a_0x + a_1$, свойства которого хорошо известны, а при $n = 2$ имеем квадратный многочлен, свойства которого описаны в параграфе 2, то считаем далее $n \geq 3$. Большинство задач данного параграфа так или иначе связаны с исследованием корней многочлена. Этот вопрос подробно излагается в пункте 1 параграфа 5.

- 1.[1] Пусть α и β - корни многочлена $P(x) = x^3 + px + q$. Найти третий корень, если известно, что $\alpha + \beta + \alpha\beta = 0$.
- 2.[1] Найти уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- 3.[1] Разложить на множители многочлен: $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$.
- 4.[1] Разложить на множители многочлен: $x^4 + 1$.
- 5.[1] Разложить $x^4 + x^2 + 1$ в произведение двух многочленов.
- 6.[4] Разложить на множители выражение $a^4 + 4b^4$.
- 8.[4] Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1 - 3x + 3x^2)^{743} \cdot (1 + 3x - 3x^2)^{744}$.
- 9.[3] Докажите, что у многочлена $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ не могут быть все корни целыми, если $P(0)$ и $P(-1)$ нечетные.

§12. Задачи последних лет.

В этом параграфе приведены задачи, которые предлагались на устный экзамене по математике в последние годы на трех факультетах МГУ им. М.В.Ломоносова, на которых есть устный экзамен по математике.

1.[15] Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком целом n .

2.[15] Доказать, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 3$ не имеет решений в целых числах.

3.[15] Найти все пары натуральных чисел (x, y) , при которых

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 10.$$

4.[15] Найти все целые значения a , при которых $x^2 - (a + 5)x + 5a + 1$ можно разложить в произведение $(x + b)(x + c)$ двух сомножителей с целыми b и c .

5.[15] Сравнить числа 18^{20} и 63^{13} .

6.[15] Сравнить числа $\cos 5$ и $\frac{1}{2}$.

7.[15] Сравнить числа $\sqrt{\log_3 \frac{9}{5}} + \sqrt{\log_3 5 + \frac{1}{2}}$ и $\frac{1}{2} \sqrt{14}$.

8.[15] Доказать, что при $a \geq 1$ имеет место неравенство $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$.

9.[15] Решить неравенство $\log_4^2(x+y) + \log_4^2(xy) \leq \log_2(x+y) - 1$.

10.[15] Решить уравнение

$$\arcsin(x^3 + x^2 - 2) + \sqrt{6x - x^2 - 5} = 0.$$

11.[15] Решить уравнение $\max(2x; 3 - x) = \min(5 + 2x; 6x)$.

12.[15] Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}.$$

13.[15] При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x - y) + xy = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение ?

14.[15] Действительные x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ x \cdot y = a^2 - 7a + 14 \end{cases} .$$

При каких a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение ?

15.[15] Найти наибольшее значение функции $y = \sin^8 x + \cos^{14} x$.

16.[15] Найти при $x < 0$ наибольшее значение функции

$$y = 4x + \frac{\pi}{x} - \cos(4x^2).$$

17.[15] Найти минимальное и максимальное значение функции

$$y = a \cdot \cos^2 x + 2b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x.$$

18.[15] Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех x соотношению $2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5$?

19.[15] Существует ли квадратичная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех x соотношению $f(x+1) + f(2-x) = (x+1)^2$?

20.[15] Вычислить: $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.[15] Вычислить: $\operatorname{arcsin}(\cos \operatorname{arcsin} x) + \operatorname{arccos}(\sin \operatorname{arccos} x)$.

22.[15] Изобразить множество всех точек на плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству $2y^2 \leq \log_2 x \cdot (3|y| - 2 \log_4 x)$.

23.[15] Построить множество всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $|\sin x| + |\sin y| < 2$.

24.[15] Построить на плоскости Oab геометрическое место точек (a, b) , при которых уравнение $ax^2 + 2(b-1)x - a - 6 = 0$ имеет:

а) два решения разных знаков; б) два положительных решения; в) два отрицательных решения.

25.[16] Доказать, что число $n^3 - n + 3$ составное для любого натурального $n > 1$.

26.[16] Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

- 27.[16] Доказать, что если $a+b+c$ делится нацело на 6, то и $a^3+b^3+c^3$ делится нацело на 6 (a, b, c - целые числа.)
- 28.[16] Решить в целых числах уравнение $9^x = 4y + 1$.
- 29.[16] Сравнить числа a и b , если известно, что $5(a-1) = a^2 + b$.
- 30.[16] Имеет ли смысл выражение $\sqrt{\log_2 3 - \log_5 11}$?
- 31.[16] Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству $|y-x| + |y-x^2| = 2$.
- 32.[16] Построить график функции $y(x) = \arcsin(|\sin x|)$.
- 33.[16] Решить уравнение $\sin x \cdot \sin 3x = 2 \cos^2 x - \cos 2x$.
- 34.[16] Решить уравнение $\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2\cos^2 x} = \sin x + \cos x$.
- 35.[16] При каких a уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = a$ имеет решения?
- 36.[16] Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x + 1$.
- 37.[16] Решить неравенство $\log_2(\sqrt{x} + 1) \cdot \log_3(x + 2) \leq 1$.

п.12.2. Геологический факультет МГУ (1997 - 1999 гг.)

- 1.[15] Решить уравнение $\operatorname{tg}(x^2) = -\operatorname{ctg}30^\circ$.
- 2.[15] Решить уравнение $\operatorname{ctg}5x = \operatorname{ctg}x$.
- 3.[15] Решить уравнение $\operatorname{ctg}2x = \operatorname{tg}4$.
- 4.[15] Решить уравнение $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.
- 5.[15] Решить неравенство $\log_{1-3x^2}(2x^2) > 1$.
- 6.[15] Решить неравенство $7^{4x} < 7^{x^3}$.
- 7.[15] Решить неравенство $(x^2 + 2x + 2)^x \geq 1$.

- 8.[15] Вычислить $\operatorname{tg}(\arcsin(-\frac{1}{3}))$.
- 9.[15] Вычислить $\sin(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3})$.
- 10.[15] Вычислить $\cos(2\operatorname{arctg}(-4))$.
- 11.[15] Построить график функции $y = \sin|x + \pi|$.
- 12.[15] Построить график функции $y = |\cos 2(x + \pi/2)|$.
- 13.[15] Построить график функции $y = (x^2)^{\log_{\sqrt{x}} 2}$.
- 14.[15] Построить график функции $y = x^2 + |x| - 6$.
- 15.[15] Изобразить множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = |y| \cos x$.
- 16.[15] Изобразить множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = |y - \sin x|$.
- 17.[16] Решить уравнение $\cos x = \log_{\operatorname{tg} x} \sqrt{-\frac{\cos x}{|\sin x|}}$.
- 18.[16] Решить уравнение $\sin(x - 1) = \sin x - \sin 1$.
- 19.[16] Решить уравнение $\operatorname{ctg}(2\sqrt{x}) = \operatorname{ctg} x$.
- 20.[16] Для всех значений a решить уравнение $\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = a$.
- 21.[16] Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{x}}$.
- 22.[16] Решить неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{\sqrt{x}}$.
- 23.[16] Решить неравенство $x^3 \geq 3^{5 + \log_{\sqrt{x}} 3}$.
- 24.[16] Решить неравенство $x^4 \leq 5^{3 - \log_{\frac{1}{x}} 5}$.
- 25.[16] Построить график функции $y = |\sin x| \operatorname{ctg} x$.

26.[16] Построить график функции $y = (\sin |x| + \cos |x|)^2$.

27.[16] Построить график функции $y = x^{|\log_x 2|}$.

28.[16] Найти сумму цифр в десятичной записи числа $N = 10^{1999} - 1999$.

п.12.3. Механико-математический факультет МГУ (1998 - 1999 гг.)

1.[13] Сколько различных целочисленных пар (x, y) удовлетворяют уравнению $x^2 = 4y^2 + 20025$?

2.[13] Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится нацело на 2880.

3.[13] При каких значениях a график функции

$$y(x) = (x + a)(|x + 1 - a| + |x - 3|) - 2x + 4a$$

имеет центр симметрии ?

4.[13] Найти количество трехзначных чисел, делящихся на 5 или 7 (возможно, одновременно), но не делящихся на 3.

5.[13] Для каждого значения $a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} \right]$ найти количество корней уравнения $\{x\} - \frac{1}{2} = \log_2 \frac{a}{x}$. Здесь $\{x\}$ означает дробную часть числа x .

6.[14] Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$|ax + 2y - 5| + a|x + 2ay - 2| \leq 3a$$

задает на координатной плоскости параллелограмм с внутренностью.

7.[14] Изобразить на координатной плоскости все точки (p, q) , для каждой из которых уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет на промежутке $[-1; 1)$ ровно одно решение.

8.[14] Вычислить $\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg} \frac{19}{22} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{2} \right)$.

Часть II

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

При составлении предлагаемых ниже задач была использована следующая литература:

- 1 В.В.Рожественский, Е.В.Панкратов, И.И.Мельников, В.В.Вавилов. Математический тренинг. М., 1997.
- 2 Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1976.
- 3 В.М.Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Миронин, С.Ф.Смирнова. Сборник конкурсных задач по математике. М., 1986.
- 4 В.В.Ткачук. Математика - абитуриенту. М., 1995.
- 5 А.Б.Будак, Б.М.Щедрин. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. М., 1997.
- 6 О.С.Игудисман. Математика на устном экзамене. М., 1995.
- 7 Е.В.Якушева, А.В.Попов, А.Г.Якушев. 2000 задач и упражнений по математике. М., 1998.
- 8 О.Ю.Черкасов. Планиметрия на вступительном экзамене. М., 1996.
- 9 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1995 г.). М., 1995.
- 10 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1996 г.). М., 1996.
- 11 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1997 г.). М., 1997.

§1. Задачи, связанные с треугольниками.

При решении задач, связанных с треугольниками, необходимо знать следующие формулы и теоремы.

Условие существования треугольника: если даны три отрезка с длинами a, b, c , то для того, чтобы существовал треугольник со сторонами a, b, c , необходимо и достаточно выполнение следующих требований: $a + b > c, a + c > b, b + c > a$.

Здесь и ниже a, b, c - стороны треугольника, α, β, γ - соответствующие противоположные им углы.

Монотонно-возрастающая зависимость сторон от углов: если даны стороны треугольника a, b, c , то для того, чтобы они удовлетворяли неравенствам $a \geq b \geq c$, необходимо и достаточно выполнение неравенств $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Теорема о сумме углов треугольника: для углов треугольника α, β, γ справедливо равенство $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Теорема о биссектрисах: все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка есть центр вписанной окружности.

Теорема о медианах: все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в соотношении 2:1, считая от вершины.

Теорема о высотах: все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема о средних перпендикулярах: все срединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка есть центр описанной окружности.

Теорема косинусов: для сторон и углов треугольника имеет место равенство:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Теорема синусов: для сторон и углов треугольника имеют место равенства:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R - радиус описанной вокруг треугольника окружности.

Теорема о биссектрисе: биссектриса угла α треугольника делит противолежащую сторону a на прилежащие к сторонам b и c отрезки a_b и a_c , которые пропорциональны b и c :

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$

Приведем теперь формулы для биссектрисы l_a , медианы m_a и высоты h_a , проведенные к стороне a . Именно:

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b \cdot a_c, \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad h_a = \frac{bc}{a} \sin \alpha.$$

Здесь a_b, a_c - отрезки из теоремы о биссектрисе.

Следует также напомнить признаки подобия треугольников. Именно, два треугольника подобны по двум углам, по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам. Особенно важен тот факт, что в подобных треугольниках отношение длин соответствующих сторон, биссектрис, медиан, высот равно k - коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных треугольников равно k^2 .

Наконец, сформулируем следующее часто используемое утверждение.

Теорема Фалеса: если на одной стороне угла отложены равные между собой отрезки и через них проведены параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла, то на этой стороне отложатся также равные между собой отрезки.

1.[1] Пусть α, β, γ - углы треугольника. Доказать, что: $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

2.[1] Пусть A, B, C - углы остроугольного треугольника. Доказать, что:
 $\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} + 2 \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} = 1$.

3.[1] Пусть a, b, c - длины сторон треугольника. Доказать, что:
 $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) > a^4 + b^4 + c^4$.

4.[2] Доказать, что сумма медиан треугольника больше $3/4P$, но меньше P , где P - периметр треугольника.

5.[4] Дан треугольник ABC . Доказать, что $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} \leq \frac{3}{2}$.

6.[6] Доказать, что для любого треугольника справедливы неравенства:

а) $m_a + m_b + m_c > p$;

б) $h_a < \sqrt{p(p-a)}$;

в) $(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \leq \frac{1}{8}abc$;

г) $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

- 7.[6] Какого вида треугольник со сторонами 2, 3, 4?
- 8.[6] Какого вида треугольник, у которого:
а) высоты 3, 4 и 5; б) медианы 3, 4 и 5?
- 9.[7] Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны 10, 14 и 17?
- 10.[7] Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны 7, 9 и 12?
- 11.[6] Существует ли треугольник с углами $\arctg 2$, $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$?
- 12.[1] В прямоугольном треугольнике длины сторон - натуральные взаимно простые числа. Доказать, что длина гипотенузы - нечетное число, а длины катетов имеют разную четность.
- 13.[1] Пусть длины сторон прямоугольного треугольника - натуральные числа. Доказать, что: а) длина одного из катетов кратна трем; б) длина одной из сторон кратна пяти.
- 14.[3] Найдите острый угол между медианами равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенными из вершин его острых углов.
- 15.[4] В треугольнике ABC угол A - прямой. Из вершины A проведены медиана AM , высота AH и биссектриса AL . Доказать, что AL - биссектриса в треугольнике AMH .
- 16.[4] Сумма катетов в прямоугольном треугольнике равна 8. Может ли его гипотенуза равняться 5?
- 17.[5] Доказать, что все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию, подобны "египетскому" треугольнику (длины его сторон равны 3, 4, 5).
- 18.[5] Доказать, что в прямоугольном треугольнике длины всех его сторон не могут быть нечетными числами.
- 19.[7] Определите углы прямоугольного треугольника, гипотенуза которого вдвое больше одного из катетов.

- 20.[7] Стороны прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, не превосходящими 10, и составляют арифметическую прогрессию. Найдите сумму длин сторон этого треугольника.
- 21.[7] В прямоугольном треугольнике отношение произведения длин биссектрис внутренних острых углов к квадрату длины гипотенузы равно $1/2$. Найти острые углы треугольника.
- 22.[7] Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два треугольника с периметрами p_1 и p_2 . Найти стороны треугольника.
- 23.[6] Доказать, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части, то треугольник - прямоугольный.
- 24.[2] Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.
- 25.[2] Доказать, что если в треугольнике справедлива зависимость $a : \cos \hat{A} = b : \cos \hat{B}$, то он равнобедренный.
- 26.[4] Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.
- 27.[4] Две биссектрисы у треугольника равны. Доказать, что он равнобедренный.
- 28.[4] Пусть равнобедренный треугольник ABC имеет углы B и C равные 80° . На отрезке AC взята точка D , а на отрезке AB - точка E так, что $\widehat{DBC} = 60^\circ$ и $\widehat{ECB} = 50^\circ$. Найти угол EDB .
- 29.[6] Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна боковой высоте.
- 30.[6] Доказать, что если у треугольника равны две биссектрисы или две медианы, или две высоты, то он равнобедренный.
- 31.[3] Докажите, что отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон равно $3/4$.
- 32.[3] Докажите, что площадь треугольника меньше единицы, если длины всех биссектрис меньше единицы.

- 33.[3] Определите длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами, образуют арифметическую прогрессию, а периметр треугольника равен 15.
- 34.[4] В треугольнике стороны составляют геометрическую прогрессию. Доказать, что его высоты тоже составляют геометрическую прогрессию.
- 35.[5] В треугольнике ABC известны длины сторон $BC = a$, $AC = b$ и величина угла между ними $\widehat{ACB} = \gamma$. Вывести формулу длины биссектрисы угла ACB этого треугольника.
- 36.[5] Стороны треугольника образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Что больше, знаменатель q этой прогрессии или число 2?
- 37.[6] В треугольнике дано: a, β, γ . Найти все элементы треугольника.
- 38.[6] В треугольнике дано: b, c, α . Найти все элементы треугольника.
- 39.[6] В треугольнике дано: a, b, c . Найти все элементы треугольника.
- 40.[6] В треугольнике одна сторона равна 5,3, а другая - 0,7. Найти третью сторону, если известно, что она является целым числом.
- 41.[7] Зная угол α при вершине треугольника, определите острый угол между биссектрисами двух других углов треугольника.
- 42.[7] Зная углы α и β при основании треугольника, определите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из угла, противоположного основанию.
- 43.[7] Зная острые углы α и β прямоугольного треугольника, определите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.
- 44.[7] Докажите, что в неравностороннем прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.
- 45.[7] Дан треугольник со сторонами 5, 12 и 13. Найдите угол, лежащий против его наибольшей стороны.

- 46.[7] В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Известно, что $AC = 3, BC = 4$. Найти сторону AB этого треугольника.
- 47.[7] В треугольнике ABC из вершин к противоположным сторонам проведены отрезки AM, BN и CP (M - точка на отрезке BC, N - на AC и P - на AB) так, что $\widehat{BAM} = \frac{1}{3}\widehat{BAC}, \widehat{CBN} = \frac{1}{4}\widehat{CBA}, \widehat{ACP} = \frac{1}{5}\widehat{ACB}$. Найти длины сторон BC и CA , если $AB = 1$, а получившийся в пересечении отрезков AN, BN , и CP треугольник правильный.
- 48.[7] Внутри треугольника ABC взята точка P , являющаяся началом лучей, пересекающих стороны AB и BC в точках Q и R . Известно, что: $\widehat{PQA} = 140^\circ, \widehat{PRC} = 130^\circ, \widehat{A} = 60^\circ, \widehat{C} = 80^\circ$. Найти $\widehat{QPR}$.
- 49.[7] В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что длина $PQ = 3$. Найти AC .
- 50.[7] В треугольнике ABC высота, опущенная из вершины угла A на сторону BC , равна стороне BC . Угол A равен α . Найдите углы B и C , считая, что $\widehat{B} \geq \widehat{C}$. Исследуйте, при каких значениях угла α задача имеет решение.
- 51.[7] В треугольнике ABC длина стороны BC равна среднему арифметическому длин сторон AB и AC . Угол A равен α . Найдите углы B и C , считая, что $\widehat{B} \geq \widehat{C}$. Исследуйте, при каких значениях угла α задача имеет решение.
- 52.[7] В треугольнике ABC из вершины угла A на сторону BC опущена медиана, квадрат длины которой равен площади треугольника ABC . Угол A равен α . Найдите углы A_1 и A_2 , на которые медиана делит угол A , считая, что $\widehat{A}_1 \geq \widehat{A}_2$. Исследуйте, при каких значениях угла α задача имеет решение.
- 53.[7] В треугольнике ABC из вершины угла A на сторону BC опущена медиана, длина которой равна половине среднего арифметического длин сторон AB и AC . Угол A равен α . Найдите углы A_1 и A_2 , на которые медиана делит угол A , считая, что $\widehat{A}_1 \geq \widehat{A}_2$. Исследуйте, при каких значениях угла α задача имеет решение.

- 54.[7] В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC . Угол A равен α . Найдите углы B и C , считая, что $\widehat{B} \geq \widehat{C}$. Исследуйте, при каких значениях угла α задача имеет решение.
- 55.[7] Внутри треугольника ABC взята точка D . Прямые AD, BD и CD пересекают стороны треугольника в точках E, F и G соответственно. Найти соотношение $CF : FA$, если известно, что $\frac{AG}{GB} = p$ и $\frac{BE}{EC} = q$.
- 56.[7] Стороны треугольника равны 5, 7 и 4. Наибольшая сторона подобного треугольника равна 21. Найдите остальные стороны треугольника.
- 57.[7] Треугольник ABC не имеет тупых углов. На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $AD = \frac{3}{4} \cdot AC$. Найти угол BAC , если известно, что прямая BD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.
- 58.[7] В треугольнике ABC дано: $AC = 2\sqrt{3}, AB = \sqrt{7}, BC = 1$. Вне треугольника взята точка K так, что отрезок KC пересекает отрезок AB в точке, отличной от B , и треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найти угол AKC , если известно, что угол KAC - тупой.
- 59.[7] В треугольнике ABC даны углы B и C . Биссектриса внутреннего угла BAC пересекает сторону BC в точке D , а окружность, описанную около треугольника ABC , в точке E . Найти соотношение $AE : DE$.
- 60.[7] В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .
- 61.[6] В треугольнике ABC отрезок CD есть медиана. На стороне DC взята точка E так, что $BE : EC = 1 : 2$. Точка O является точкой пересечения AE и CD . Известно, что $\widehat{AOC} = 120^\circ, AE = 5, OC = 4$. Найти сторону AB .
- 62.[6] В треугольнике ABC сторона $AB = 3$. Из вершины C проведена высота CD . Известно, что $CD = \sqrt{3}$ и $AD = BC$. Найти сторону AC .

- 63.[6] Доказать, что если в треугольнике из одной вершины проведены медиана, биссектриса и высота, то биссектриса лежит между медианой и высотой.
- 64.[6] Стороны треугольника удовлетворяют соотношениям $a^k + b^k = c^k$. При каких k это остроугольный треугольник?
- 65.[6] Доказать, что треугольники с равными периметрами и соответственно равными углами равны.
- 66.[6] В остроугольном треугольнике ABC проведены две высоты CD и AE . Найти длину высоты AE , если известно, что $AD = BC = 4$, $AB = 6$.
- 67.[6] В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты a и b . Найти длину биссектрисы прямого угла.
- 68.[6] В треугольнике ABC даны стороны b и c . Угол α вдвое больше угла β . Найти сторону a .
- 69.[6] Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.
- 70.[6] Из всех треугольников, имеющих данный угол, заключенный между сторонами, сумма которых постоянна, найти тот, который имеет наименьший периметр.
- 71.[6] Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри (или на стороне) треугольника, до трех его сторон заключена между наибольшей и наименьшей его высотами. Найти точку в треугольнике, сумма расстояний от которой до сторон наибольшая.
- 72.[6] Доказать, что если в треугольнике соединить основания всех высот, то в полученном треугольнике высоты будут биссектрисами, и образующиеся при этом треугольники, примыкающие к вершинам исходного, подобны ему.
- 73.[6] В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках B_1 и C_1 . Доказать, что $B_1C_1 = BB_1 + CC_1$.

- 74.[6] Среди всех треугольников с данным основанием a и данным углом α найти треугольник с наибольшей площадью S .
- 75.[5] В треугольнике известны длины двух его сторон b и 3 . Полусумма длин высот, опущенных на эти стороны, равна длине третьей высоты. Найти длину его третьей стороны.

§2. Задачи, связанные с четырехугольниками.

При решении задач, связанных с четырехугольниками, полезны будут следующие утверждения и формулы.

Для параллелограмма:

- во всяком параллелограмме противоположные стороны равны, противоположные углы равны и сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна π ;
- если в четырехугольнике или противоположные стороны равны между собой, или две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник является параллелограммом;
- для того, чтобы произвольный четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам;
- имеет место равенство: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где a, b - стороны параллелограмма, d_1, d_2 - его диагонали.

Для трапеции:

- средняя линия трапеции проходит через середины ее боковых сторон, параллельна основаниям и длина ее равна $\frac{1}{2}(a + b)$, где a, b - основания трапеции;
- в произвольной трапеции сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна π .

Для ромба:

- диагонали ромба являются биссектрисами соответствующих углов и перпендикулярны друг другу.

Для прямоугольника:

- диагонали прямоугольника равны между собой.

Для квадрата:

- диагонали квадрата равны между собой и перпендикулярны друг другу.

Наконец, напомним, что сумма углов в произвольном четырехугольнике равна 2π .

- [3] Доказать, что если соединить середины сторон выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм. Когда этот параллелограмм будет ромбом? Квадратом?
- [3] Найдите углы ромба, в котором диагональ равна стороне.
- [3] Имеется квадрат и равновеликий ему круг. Что больше, длина окружности или периметр квадрата?
- [7] Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.
- [7] В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен $\pi/3$. Точка N делит сторону AB в отношении $AN : BN = 2 : 1$. Определить тангенс угла DNC .
- [6] Доказать, что если в четырехугольнике соединить середины сторон, то получится параллелограмм с периметром, равным $d_1 + d_2$.
- [6] Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырехугольник - параллелограмм.
- [4] Доказать, что если в трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от боковых сторон, то трапеция равнобочная.
- [5] В трапеции $ABCE$ $AB \parallel CE$, $AB = 6$, $CE = 4$. Прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения диагоналей, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и K соответственно. Найти длину отрезка MK .

- 10.[5] В трапеции $ABCD$ с острыми углами при основании AD проведена диагональ AC , которая разбивает его на два подобных треугольника. Длина основания AD равна a , а длина основания BC равна b . Вычислить длину диагонали AC .
- 11.[7] В трапеции с основаниями 3 и 4 диагональ имеет длину 6 и является биссектрисой одного из углов. Может ли эта трапеция быть равнобедренной?
- 12.[7] В равнобедренной трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?
- 13.[7] По основаниям a, b трапеции определить отношение, в котором ее диагонали делят друг друга.
- 14.[7] В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD = 12, BC = 6$, высота равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на две части. Какая из них больше?
- 15.[7] Доказать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции, делит основания пополам.
- 16.[7] В равнобокой трапеции $ABCD$ боковая сторона равна 10, большее основание 24, а высота 8. Определить, что пересекает биссектриса острого угла трапеции: меньшее основание или его продолжение?
- 17.[7] Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной окружности. Найти угол при основании трапеции.
- 18.[6] Основания трапеции равны a и b . Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.
- 19.[6] Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найти ее отрезок, заключенный между боковыми сторонами.
- 20.[6] Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен сумме двух других сторон, то этот четырехугольник - трапеция.

- 21.[6] Доказать, что биссектрисы углов, прилежащих к одной из непараллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции.
- 22.[6] Доказать, что трапеция равнобокая, если: а) диагонали трапеции равны; б) точка пересечения диагоналей трапеции находится на равном расстоянии от боковых сторон.
- 23.[6] Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, у которой сумма углов при основании равна 90° , равен полуразности оснований.
- 24.[5] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с диагоналями AC и BD на стороны CD и AB опущены соответственно высоты AE и DF . Известно, что $AE \geq BD$, $DF \geq AC$, $AD = 2 \cdot AB$. Найти меры углов четырехугольника $ABCD$.
- 25.[5] В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ с диагоналями LN и KM на стороны MN и KL опущены соответственно высоты KP и NQ . Известно, что $KP \geq LN$, $NQ \geq KM$, $KL = 3$, $KN = 5$. Найти KM .
- 26.[7] Два противолежащих угла четырехугольника - прямые. Длина диагонали, проходящей через два другие угла, равна d . Укажите, в каких пределах может изменяться площадь четырехугольника.
- 27.[7] По углам четырехугольника определите углы:
а) между биссектрисами двух соседних углов;
б) между биссектрисами двух противоположных углов;
в) между биссектрисами двух углов, образуемых парами противоположных сторон, продолженных до пересечения (если таковое существует).
- 28.[7] Какой четырехугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь?
- 29.[7] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC . Найти величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD .
- 30.[7] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD равна 1. Если стороны BC и

AD продолжить до их пересечения, то угол, образованный этими прямыми, будет равен 90° . Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

- 31.[6] Внутри выпуклого четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.

§3. Задачи, связанные с окружностью.

При решении задач, связанных с окружностями, необходимо знать следующие факты и утверждения.

Центральный угол равен по величине мере дуги окружности, на которую он опирается.

Вписанный угол равен по величине половине меры дуги окружности, на которую он опирается.

Угол, составленный секущими к окружности, равен полуразности мер дуг, на которые он опирается.

Угол, составленный пересекающимися хордами, равен полусумме мер дуг, на которые он опирается.

Угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной меры дуги, стягиваемой этой хордой.

Приведем некоторые полезные следствия приведенных выше утверждений:

- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;
- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду (или на равные хорды), равны;
- вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым;
- если вписанный угол, является прямым, то он опирается на диаметр окружности.

Необходимо упомянуть и еще ряд важных утверждений:

- произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны;

- отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности;
- квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части;
- произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная для всех секущих, проведенных из одной точки.

Наконец, приведем еще несколько фактов, касающихся взаимного расположения окружности и треугольника, окружности и четырехугольника:

- произвольный треугольник можно вписать в окружность, центром которой является точка пересечения срединных перпендикуляров к сторонам треугольника;
- в произвольный треугольник можно вписать окружность, центром которой является точка пересечения биссектрис треугольника;
- для того, чтобы четырехугольник можно было вписать в окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны π ;
- для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин противоположных сторон были равны;
- в ромб можно вписать окружность, центром которой является точка пересечения диагоналей;
- для того, чтобы вокруг трапеции можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы эта трапеция была равнобокой.

1.[3] Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

2.[4] Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, разбивает один из его катетов на отрезки длины m и n , причем $m < n$. Найти длину другого катета.

- 3.[5] Радиусы описанной около прямоугольного треугольника и вписанной в этот прямоугольный треугольник окружностей соответственно равны R и r . Найти периметр этого треугольника.
- 4.[7] В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 9 и 16. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.
- 5.[5] В равнобедренном треугольнике с величиной угла при вершине 120° длина боковой стороны равна 2. Найти радиус вписанной в него окружности.
- 6.[6] Найти расстояние между центрами окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, и окружности, описанной около него, если основание треугольника a , боковая сторона b .
- 7.[3] Найдите углы треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон треугольника.
- 8.[7] В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE , пересекающиеся в точке O . Известно, что отрезок OE имеет длину 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O . Найти стороны и углы треугольника EDO .
- 9.[7] В треугольник со сторонами $AB = 8, BC = 6, AC = 4$ вписана окружность. Найти длину отрезка DE , где D и E - точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.
- 10.[7] Через вершины вписанного в окружность треугольника проведены касательные к этой окружности. Определить углы треугольника, образованного этими касательными, через углы вписанного треугольника.
- 11.[6] Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AM проведена до пересечения в точке D с окружностью, и $AB = 1, BD = 1$. Найти длину BC .
- 12.[6] Может ли у треугольника со сторонами меньше 1 радиус описанной окружности быть больше 100?
- 13.[6] Доказать, что, если из вершины A треугольника ABC проведена биссектриса, а из середины BC восстановлен перпендикуляр,

то их точка пересечения лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

- 14.[7] Окружность проходит через вершины B , C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B . Найти длину диагонали BD , если длины оснований трапеции равны a и b .
- 15.[3] В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.
- 16.[3] Вычислите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h , а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α .
- 17.[7] Выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C , пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Отрезок BC равен 1. Найти EF .
- 18.[5] В выпуклом четырехугольнике $MNPQ$ с диагоналями MP и NQ на стороны PQ и MN опущены соответственно высоты MK и QL . Известно, что $MK \geq NQ$, $QL \geq MP$, $MQ = 4$. Найти радиус окружности, описанной около четырехугольника $MNPQ$.
- 19.[7] По углам между противоположными сторонами вписанного четырехугольника определить углы этого четырехугольника.
- 20.[6] Доказать, что во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).
- 21.[6] Даны углы α и β между противоположными сторонами вписанного в окружность выпуклого четырехугольника. Определить углы этого четырехугольника.
- 22.[6] Окружность высекает на всех сторонах четырехугольника равные хорды. Доказать, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.
- 23.[2] Даны две окружности одного и того же радиуса R , причем расстояние между их центрами также равно R . В лунку, полученную при пересечении этих окружностей, вписан квадрат. Найти его сторону.

- 24.[7] В какой параллелограмм можно вписать окружность?
- 25.[6] В ромб вписан круг. Каждая сторона ромба в точке касания делится на отрезки, длина которых a и b . Найти площадь круга.
- 26.[7] Найти величину угла между касательными, проведенными к окружности из точки, кратчайшее расстояние от которой до окружности равно радиусу этой окружности.
- 27.[7] Доказать, что расстояние от точки окружности до хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.
- 28.[7] Окружность пересекает одну из сторон угла на расстояниях a и b от вершины и касается другой стороны. Определить расстояние от точки касания до вершины.
- 29.[7] Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям, проведенные из всякой точки продолжения их общей хорды, равны между собой.
- 30.[6] Найти радиус окружности, касающейся двух окружностей радиусов r и R и их общей касательной.
- 31.[6] К двум непересекающимся окружностям проведены две внешние касательные и внутренняя. Точки M и N - точки касания внешней касательной с окружностями, а P и Q - точки пересечения внутренней касательной с внешними. Доказать, что $MN = PQ$.
- 32.[6] Через пересечения двух окружностей P_1 и P_2 проводятся произвольные прямые, пересекающие окружности. Через точки пересечения этих прямых с окружностями проводятся прямые l_1 и l_2 . Доказать, что $l_1 \parallel l_2$.
- 33.[6] К двум окружностям с центрами O_1 и O_2 , касающимся извне в точке A , проведена общая касательная BC (B и C - точки касания). Доказать, что угол BAC - прямой.
- 34.[6] В окружности проведены равные пересекающиеся хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.

§4. Площади фигур.

При решении задач, связанных с площадями, необходимо знать следующие формулы и факты.

Различные формулы площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a, \quad S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \gamma, \quad S = p \cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

Здесь и ниже a, b, c - стороны треугольника, α, β, γ - соответствующие противоположные им углы, h_a, h_b, h_c - высоты, проведенные к сторонам, p - полупериметр треугольника, r - радиус вписанной в треугольник окружности, R - радиус описанной около треугольника окружности.

Из первой формулы вытекают равенства:

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}, \quad \frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}, \quad \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c},$$

согласно которым стороны треугольника обратно пропорциональны высотам.

Кроме того, отметим также, что отношение площадей подобных треугольников равно k^2 , где k - коэффициент подобия.

Формула площади произвольного четырехугольника:

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi,$$

где d_1, d_2 - длины диагоналей четырехугольника, а φ - угол между ними.

Формулы площади параллелограмма:

$$S = a \cdot h_a, \quad S = a \cdot b \cdot \sin \gamma,$$

где a, b - стороны параллелограмма, γ - угол, образованный сторонами a, b , h_a - высота, проведенная к стороне a .

Формула площади трапеции:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h,$$

где a, b - длины оснований трапеции, а h - ее высота.

- 1.[2] Определить стороны прямоугольного треугольника, зная его периметр P и площадь S .
- 2.[7] Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найти площадь треугольника.
- 3.[7] В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен α , сторона AB равна a . Из вершины прямого угла B опущена высота BE . В треугольнике BEA проведена медиана ED . Найти площадь треугольника AED .
- 4.[7] В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, $\hat{A} = \alpha$, $AB = c$. На продолжении гипотенузы AC (в сторону точки C) взята точка D так, что $AD = r$. Найти площадь треугольника BCD .
- 5.[6] Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный треугольник имеет:
а) наибольшую площадь; б) наибольший периметр.
- 6.[3] Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит его боковые стороны?
- 7.[3] Существует ли треугольник, все высоты которого меньше 1, а площадь больше или равна 10?
- 8.[4] Дан треугольник ABC . Из двух вершин проведены медианы длиной 4 и 6. Известно, что площадь треугольника равна 16. Найти угол между вышеупомянутыми медианами.
- 9.[4] Про треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что: $AB > A_1B_1$, $AC > A_1C_1$, $BC > B_1C_1$. Верно ли, что площадь треугольника ABC непременно больше площади треугольника $A_1B_1C_1$?
- 10.[5] В треугольнике ABC проведены биссектриса CE и медиана BD , которые пересекаются в точке O . Длина стороны BC в два раза больше длины стороны AC . Найти отношение длины отрезка BO к длине отрезка OD и отношение площади треугольника DOC к площади треугольника BOC .
- 11.[5] В остроугольном треугольнике длины двух его сторон соответственно равны 4 и 6, а его площадь равна $6\sqrt{3}$. Найти длину третьей стороны.

- 12.[5] В треугольнике ABC заданы длины двух его сторон a и b . Доказать, что для его площади S справедливо неравенство $S \leq \frac{a^2 + b^2}{4}$. В каком случае это неравенство обращается в равенство?
- 13.[6] Дан треугольник ABC . Через точку P проведены прямые, параллельные сторонам. Известны площади треугольников - S_1, S_2, S_3 . Найти площадь S треугольника ABC .
- 14.[7] В тупоугольном треугольнике наибольшая сторона равна 4, а наименьшая - 2. Может ли площадь треугольника быть больше, чем $2\sqrt{3}$?
- 15.[7] В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q - точка пересечения прямых AL и CK . Найти площадь треугольника ABC , если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.
- 16.[7] Найти площадь треугольника ABC , если $AC = 3, BC = 4$, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.
- 17.[7] В остроугольном треугольнике ABC дано: $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{BCA} = \gamma$, проведенная из вершины B медиана равна m . Найти площадь треугольника ABC .
- 18.[7] В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса угла B , равная m ,
 $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{BCA} = \gamma$. Найти площадь треугольника ABC .
- 19.[7] В остроугольном треугольнике ABC дано: $\widehat{BAC} = \alpha, AC = b$, проведенная из вершины B медиана равна m . Найти площадь треугольника ABC .
- 20.[6] Может ли уменьшиться площадь треугольника при увеличении длин всех его сторон?
- 21.[6] Существует ли треугольник, у которого:
а) все высоты меньше 1, а площадь больше 100;
б) две высоты больше 100, а площадь меньше 1?
- 22.[6] Найти отношение площади треугольника ABC к площади другого треугольника, образованного из медиан треугольника ABC .

- 23.[9] В треугольнике ABC известно, что: $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M . На отрезке BM взята точка O так, что $BO : OM = 3 : 1$. Площадь какого из треугольников: ABO , BCO или ACO является наименьшей?
- 24.[9] В треугольнике ABC известно, что: $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 8$. На отрезке AB взята точка K так, что $AK : KB = 2 : 3$, а на стороне BC - точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$. На отрезке KM взята точка O так, что $KO : OM = 4 : 5$. Площадь какого из треугольников: ABO , BCO или ACO является наименьшей?
- 25.[3] Квадрат со стороной a повернут вокруг центра на 45° . Найдите площадь общей части "старого" и "нового" квадратов.
- 26.[5] Периметр ромба равен 20, а сумма длин его диагоналей равна 14. Найти площадь ромба.
- 27.[5] Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне BC выбрана точка E так, что $BE : EC = 3 : 1$, а на стороне AD - точка F так, что $AF : FD = 4 : 1$. На сколько процентов площадь треугольника ABE больше площади треугольника FCD ? На сколько процентов площадь треугольника FCD меньше площади треугольника ABE ?
- 28.[5] Определить величины углов ромба, если его площадь равна 8, а площадь вписанного в него круга равна π .
- 29.[5] Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах BC , AD , AB , CD , соответственно выбраны точки E , H , F , G так, что $BE : EC = 4 : 5$, $AH : HD = 8 : 3$, $AF : FB = 1 : 3$, $CG : GD = 2 : 7$. На сколько процентов площадь треугольника BFE больше площади треугольника GDH ? На сколько процентов площадь треугольника GDH меньше площади треугольника BFE ?
- 30.[7] В параллелограмме даны острый угол α и расстояния m и p от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Определите диагонали и площадь параллелограмма.
- 31.[7] Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$. Найти площадь этого параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна отрезку BE , соединяющему вершину B с серединой отрезка AD .

- 32.[4] Известно, что $ABCD$ - трапеция с основаниями AD и BC . Пусть O - точка пересечения диагоналей AC и BD . Известно, что площадь треугольника ABO равна 2, а площадь треугольника AOD равна 3. Найти площадь трапеции.
- 33.[4] Найти высоту равнобокой трапеции, если ее площадь равна S , а острый угол между диагоналями равен 2α .
- 34.[7] В равнобокой трапеции $ABCD$ задана длина a диагонали AC , $\widehat{CAD} = \alpha$. Найти площадь трапеции.
- 35.[7] В трапеции длины диагоналей равны $2\sqrt{61}$ и $3\sqrt{41}$, а длины оснований 10 и 15. Найти площадь трапеции. Можно ли в эту трапецию вписать окружность? Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?
- 36.[6] В трапеции проведены диагонали и площади треугольников, примыкающих к основаниям, равны S_1 и S_2 . Найти площадь трапеции.
- 37.[11] Точка E лежит на диагонали AC трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD . Найти отношение $BC : AD$, если $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle ADE} = 1 : 2$.
- 38.[4] Все стороны выпуклого четырехугольника меньше 7. Доказать, что его площадь строго меньше 50.
- 39.[5] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что для его площади S имеет место неравенство $S \leq \frac{1}{2}(ab+cd)$. В каких случаях это неравенство обращается в равенство?
- 40.[6] Пусть a, b, c, d - последовательные стороны произвольного выпуклого четырехугольника. Доказать, что его площадь $S \leq \frac{1}{2}(ac+bd)$.
- 41.[6] В четырехугольнике проведены диагонали. Известны площади трех треугольников S_1, S_2, S_3 , образованных этими диагоналями. Найти площадь четвертого треугольника.

- 42.[11] В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E . Расстояние от точки B до прямой AD втрое больше, чем расстояние от точки C до прямой AD . Найти отношение площадей треугольников ABE и CDE , если $AE : EC = 3 : 2$.
- 43.[3] Найдите радиус сектора, если его площадь равна 144, а дуга содержит $4/9$ радиана.
- 44.[3] Периметр кругового сектора равен l . Найдите величину центрального угла сектора, при котором его площадь будет наибольшей.
- 45.[7] В треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$, $AC = 3$ вписана окружность. Найти площадь треугольника AMN , где M и N - точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.
- 46.[7] На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону AC в точке P , а сторону AB - в точке Q . Найти отношение площади треугольника APQ к площади треугольника ABC , если $\widehat{BAC} = \alpha$.
- 47.[7] На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15° . Найти меры углов треугольника ABC .
- 48.[7] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1 . Известно, что $AC = 2$, площадь круга, описанного около треугольника BHH_1 , равна $\pi/3$. Найти угол между высотой CH и стороной BC .
- 49.[7] Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120° . Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB . При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC .
- 50.[6] Периметр треугольника ABC равен $2p$. В него вписана окружность. К окружности проведены касательные, отсекающие от треугольника ABC треугольники S_1 , S_2 и S_3 . Найти сумму периметров трех треугольников S_1 , S_2 и S_3 .

§5. Задачи на построение.

При решении задач на построение из этого параграфа следует помнить следующее. Обычно построение геометрических фигур проводится с помощью циркуля и линейки. Линейкой можно проводить только прямые (соединять две заданные точки). Циркулем можно откладывать длины отрезков в виде дуги (взять раствор циркуля, равный длине данного отрезка).

Общая схема решения задач на построение такова.

- Анализ - считаем, что искомая фигура построена, рисуем ее, смотрим и пытаемся придумать, как бы можно было ее построить.
- Построение - после успешного проведения анализа указываем последовательность действий, дающих искомую фигуру.
- Доказательство - иногда оно необходимо для обоснования того, что построено то, что требовалось. Хотя, как правило, из построения все бывает ясно.
- Исследование - возможно, что по исходным данным или при некотором их сочетании существуют две или несколько фигур.

Общая схема решения задач на построение выглядит громоздко, однако на практике достаточно провести анализ и построение.

- 1.[7] Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 1.
- 2.[7] Дан отрезок длины 7. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $\sqrt{7}$.
- 3.[3] Даны отрезки a, b . Построить отрезок $x = \sqrt{ab}$.
- 4.[6] Даны отрезки a, b, c, d . Построить отрезок $x = \sqrt[4]{abcd}$.
- 5.[6] Даны отрезки a, b . Построить отрезок $x = \frac{a^{1995}}{b^{1994}}$.
- 6.[6] Даны отрезки a, b . Построить отрезок $x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$.
- 7.[6] Даны отрезок a . Построить отрезок $x = a \cdot \sqrt{n}$ ($n \in N$).

- 8.[6] Даны отрезок a . Построить отрезок $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$.
- 9.[6] Даны отрезки a, b, c . Построить отрезок $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- 10.[10] Даны два отрезка: длины 1 и длины a . С помощью циркуля и линейки построить отрезки длины:
- а) $\frac{a^2 - 9}{a^2 + a - 2}$; б) $\sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 3a}$.
- 11.[3] Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.
- 12.[6] Внутри угла даны точки A и B . Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежит на стороне угла, а боковые стороны проходят через точки A и B .
- 13.[6] Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.
- 14.[2] Построить треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и медиане другой стороны.
- 15.[2] Построить треугольник по периметру P и двум углам α и β .
- 16.[3] Построить треугольник по двум сторонам и медиане, выходящей из общей вершины данных сторон.
- 17.[5] Построить треугольник по заданным отрезкам медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из одной вершины.
- 18.[5] Построить треугольник по заданной стороне, противолежащему ей углу и проведенной к ней высоте.
- 19.[5] Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.
- 20.[5] Построить треугольник по заданной стороне, противолежащему ей углу и проведенной к ней медиане.
- 21.[5] Построить треугольник по двум углам и: а) высоте, проведенной из третьего угла; б) медиане, проведенной из третьего угла.
- 22.[6] Построить треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

- 23.[6] Построить треугольник по трем его медианам.
- 24.[6] Построить треугольник по следующим данным:
а) α, β, h_c ;	б) a, b, α ;	в) a, h_b, m_b ;
г) a, h_a, m_a ;	д) h_a, h_b, h_c ;	е) α, h_a, l_a ;
ж) P, α, h_a ;	з) β, γ, m_a ;	и) α, a, r ;
к) α, r, R ;	л) $a, h_a, b^2 - c^2$;	м) $\alpha, a, b : c$;
н) $a, m_a, b : c$.		
- 25.[6] Построить треугольник по
а) $\alpha, \beta, a + h_a$;	б) $\alpha, b : a, c - h_a$;	в) α, β, r .
- 26.[6] Построить треугольник ABC , если известна биссектриса BD и отрезки AD и DC , на которые она делит противоположную сторону.
- 27.[9] С помощью циркуля и линейки по трем данным отрезкам a, h , и m построить треугольник ABC со стороной $BC = a$, высотой $BH = h$ и медианой $BM = m$.
- 28.[9] С помощью циркуля и линейки по трем данным отрезкам a, h , и m построить треугольник ABC со стороной $BC = a$, высотой $BH = h$ и медианой $AM = m$.
- 29.[2] Построить окружность, касающуюся данной прямой l и проходящую через две фиксированные точки A и B .
- 30.[3] Дана окружность C и точка A , лежащая вне круга, ограниченного окружностью C . Построить прямые, проходящие через точку A , касательные к окружности C .
- 31.[4] При помощи циркуля и линейки построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через заданную внутри него точку.
- 32.[4] Даны три точки. Построить окружности, попарно касающиеся в этих точках.
- 33.[4] При помощи циркуля и линейки построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.
- 34.[6] Даны прямая и окружность. Построить окружность, касающуюся данной окружности и прямой в данной точке.

- 35.[6] Дан угол в 19° , построить угол в 1° .
- 36.[6] Провести общую внешнюю касательную к двум данным окружностям (т.е. даны их центры и радиусы).
- 37.[6] Провести через точку B пересечения двух окружностей и прямую, отсекающую из окружностей равные хорды.
- 38.[4] Найти геометрическое место центров равносторонних треугольников, описанных около данного произвольного треугольника.
- 39.[6] По данной дуге окружности "бегают" точка M . Хорда AB - фиксирована. Какие кривые при этом пробегают в треугольнике AMB :
- а) точка пересечения биссектрис треугольника;
 - б) точка пересечения высот;
 - в) точка пересечения медиан треугольника?
- 40.[6] По окружности "бегают" дуга данной длины CD , хорда AB - задана, $CD < AB$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD .
- 41.[6] По сторонам прямого угла скользит отрезок заданной длины a . Какую кривую при этом описывает середина этого отрезка?
- 42.[6] По сторонам прямого угла скользит прямоугольный треугольник. Найти геометрическое место вершин прямого угла этого треугольника.
- 43.[6] На сторонах угла даны два отрезка AB и CD и точка M внутри угла. Найти геометрическое место точек N таких, что $S_{\triangle ABN} + S_{\triangle CND} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CMD}$.
- 44.[6] Через точку A внутри окружности проводятся всевозможные хорды. Найти геометрическое место середин этих хорд.
- 45.[6] Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой l точку X такую, что сумма расстояний AX и BX минимальна.
- 46.[6] Внутри угла дана точка A . Найти такое положение точек X и Y на сторонах угла, чтобы периметр треугольника AXY был минимальным.

- 47.[6] В треугольнике найти точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.
- 48.[6] Найти внутри угла точку, из которой данный отрезок AB виден под наибольшим углом.
- 49.[6] Прямая l пересекает отрезок AB в точке C . Найти на l такую точку M , чтобы $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$.
- 50.[6] Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на l такую точку X , чтобы $\widehat{AX}$ составлял с l угол, вдвое больший, чем с BX .
- 51.[10] Дан угол в 45° с вершиной O и треугольник ABC , в котором $AB = 6$, $AC = 3$. Вершины A и B треугольника скользят по сторонам угла так, что точки O и C находятся относительно прямой AB :
- по разные стороны, причем $\widehat{ACB} = 135^\circ$;
 - по одну сторону, причем $\widehat{ACB} = 45^\circ$.
- Какое множество точек пробегает при этом вершина C ?
- 52.[11] На плоскости дан угол в 60° с вершиной A . Рассматриваются такие треугольники ABC , что вершины B, C лежат на сторонах угла и $4 \leq BC \leq 9$. Указать геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников ABC .
- 53.[4] Даны три точки A, B и C , не лежащие на одной прямой. Провести с помощью циркуля и линейки прямую, пересекающую отрезок AC в точке X , а отрезок BC - в точке Y таким образом, что $AX = XY = YB$.
- 54.[4] Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Построить с помощью циркуля и линейки точку A_1 на стороне BC , точку B_1 на стороне AC и точку C_1 на стороне AB так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.
- 55.[4] Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Через вершину A с помощью циркуля и линейки провести такую прямую, что сумма расстояний от точек B и C до этой прямой равна $\sqrt{2}$.
- 56.[6] Через вершину выпуклого четырехугольника провести прямую, которая делит его площадь пополам.

- 57.[6] В данный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю (одна сторона прямоугольника лежит на основании треугольника).
- 58.[6] Через точку A внутри угла провести прямую так, чтобы отрезок, заключенный между сторонами, делился точкой A пополам.
- 59.[6] Даны три параллельные прямые l_1, l_2 , и l_3 . Построить квадрат, три вершины которого лежат на этих прямых.
- 60.[6] Через точку A внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник минимального периметра.
- 61.[6] Построить квадрат по четырем точкам, лежащим на его сторонах (на каждой стороне лежит одна точка).

Ответы к §1. Действительные числа.

**п.1.1. Целые числа.
Делимость.**

1. а) 24; б) 12; в) 9; г) 11;
д) $2^2 \cdot 3^2$; е) $2^5 \cdot 5^2$.
2. а) 144; б) 175; в) $2^3 \cdot 3^3$.
8. $n = 9k, k \in Z$.
9. $n = 33k, k \in Z$.
10. а) 0; б) 2.
11. 8.
12. 1.
13. а) 2; б) 1.
14. 2.
15. 5.
16. Нет, не делится.
26. $n = 6k + 1, n = 6k + 2, k \in Z$.
28. $p = 3$.
29. Да, если одно из них - число 2.
32. $n = 1$.
35. а) $n = 3k + 2, k \in Z$;
б) $n = 3k, n = 3k + 1, k \in Z$.
37. На 13.
38. $n = 3k; n = 3k + 2, k \in Z$.

39. $n = 5k + 1, k \in Z$.

40. -4; 0; 2; 6.

46. $n = 5k + 2, k = 0, 1, 2, \dots$

48. -1; 0.

55. Да.

**п.1.2. Рациональные и
иррациональные числа.**

1. а) Не может; б) может.
2. Да.
4. Рационально, если $b = a^{m/n}$,
иначе - иррационально.
5. Нет.
8. а) нет; б) нет; в) нет.
12. 9.
13. Все знаки - девятки.
14. $a = 0,99$, например.
15. а) $a = 83,7$; б) $a = 2$.
16. а) -9; б) $\sqrt[5]{5}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $41^{\frac{3}{2}} + 41^{\frac{1}{4}}$.
18. 1.
20. $p = -2, q = -2$.
22. а) нет; б) да.
23. (0;0).
24. $\emptyset$.

п.1.3. Сравнение чисел.

2. а) второе число; б) второе число.
 4. $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.
 5. $\frac{\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}}{1000} < \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \frac{11}{1000}$.
 6. $\frac{\sqrt{2 \cos 2 + 4 \cos 1 + 3} - 2 \cos 1}{1} > \frac{1}{2}$.
 7. $\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7}$.
 8. $\log_3 10 + 4 \lg 3 > 4$.
 9. $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5 > 0$.
 10. а) отрицательно; б) положительно; в) отрицательно.
 11. $\operatorname{ctg} 100^\circ < \cos 275^\circ < \sin 10^\circ < \operatorname{tg} 190^\circ$.
 12. $k = 5$.
 13. а) первое число; б) первое; в) второе; г) второе.
 14. а) $\cos 3 < 0$; б) $\sin 1 > \sin 1^\circ$; в) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{arctg} 1$.
 15. $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$.
 16. $\sin \frac{\pi}{7} < \sqrt{\frac{2}{7}} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$.
 17. $\lg(\operatorname{arctg} 2) > 0$.
 18. $\operatorname{tg} 55^\circ > 1.4$.
 19. $\sin 31^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$.
 20. Первое число больше.
 21. $3^{400} > 4^{300}$.
 22. $3^{500} < 4^{400}$.
 23. $2^{300} < 3^{200}$.
 24. $\left(\frac{1}{6}\right)^{1/6} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}$.
 25. Первое число.
 26. $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.
 27. а) первое число; б) первое; в) первое; г) первое; д) первое; е) первое.
 28. а) первое; б) второе.
 29. $200\sqrt{2} < 1.006$.
 30. $\log_2 \pi + \log_\pi 2 > 2$.
 31. $1990^{1991} > 1991^{1990}$.
 32. а) первое число больше; б) второе число больше; в) второе число больше; г) второе число больше.
 33. Выражение смысла не имеет.
 34. а) $\log_2 3 > \log_3 2$; б) $\log_4 7 > \log_{1/3} 2$; в) $\log_2 5 > \log_3 5$.
 35. $\log_{11} 119 < \log_{15} 227$.
 36. а) второе; б) второе.
 37. а) первое число больше; б) первое число больше; в) второе число больше; г) первое число больше.

38. а) имеет; б) не имеет.

39. $\log_3 7 > \log_7 27$.

40. $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.

41. $\log_{11} 12 > \log_{12} 13$.

42. а) $\lg 11 < \log_9 10 < \frac{6}{5}$;

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{1/5} < \sqrt[15]{0,1} < \frac{1}{\sqrt[12]{6}}$.

43. $\frac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 80}{2 \log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \dots \cdot \log_3 79} > 1$.

Ответы к §2. Квадратный трехчлен и его свойства. Теорема Виета.

1. $p^2 - 4q = 0$.

2. $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$.

4. $(-\infty; 0]$.

5. $b < 0$.

8. $z_{\text{наим}} = 1$ при $x = 0, y = -1$.

9. $b < 0$.

10. $a > 0$.

11. $c > 0$.

13. Прямая $q = -ap - a^2$.

14. $p = -2, q = -1$.

18. $a = 7/6$.

19. $k = 2, k = -\frac{2}{9}$.

20. -27; 8.

21. $x^2 - (p^2 - 2q - p^3 + 3pq)x - (p^2 - 2q)(p^3 - 3pq) = 0$.

22. $a^3x^2 + (b^3 - 3abc) \cdot x + c^3 = 0$.

23. а) -1220/81; б) -196/27.

24. $x_1 = 5, x_2 = 7$ или $x_1 = -5, x_2 = -7$.

25. $-p(p^2 + 3q)$ при $p^2 + 4q \geq 0$.

26. $(p^2 + 2q)^2 - 2q^2$ при $p^2 + 4q \geq 0$.

27. 1/2; 1.

28. $\frac{p^2 - 2q}{q}; 3pq - p^3;$
 $p^4 - 4p^2q + 2q^2$.

29. $xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}$.

30. $a > 0, b < 0, c > 0$.

32. $a < -2$.

33. $(-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$.

34. $a \in (16/17; 2)$.

35. $(-16/7; -1)$.

37. $(1; +\infty)$.

38. 3.

39. $p = 3$.

40. -6.

Ответы к §3.

Тригонометрические задачи.

1. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
2. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.
3. 12/37.
4. -12/13.
5. $\frac{2\sqrt{2} + 2}{3\sqrt{5}}$.
6. $-\frac{12 + 5\sqrt{3}}{26}$.
7. $\frac{2\sqrt{2} + 2}{3\sqrt{5}}$.
8. а) $-\sqrt{3}$; б) $\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$.
9. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.
10. $-\frac{\pi}{7}$.
11. $\frac{6\pi}{7}$.
12. $\frac{\pi}{7}$.
13. $4\pi - 10$.
14. $13 - 4\pi$.
15. Знак "минус".
16. $\sin 1980^\circ$.

17. $\sin 2$.

18. $\frac{\pi}{4} < \arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{2}{3}$.

20. 1/8.

25. $\frac{27}{11}$.

26. $\sqrt{2}$.

27. $\frac{3}{\sqrt{7} + 2}$ или $\frac{1}{\sqrt{7} + 2}$.

28. $\alpha = 2\pi n, \beta = 2\pi k,$
 $\alpha + \beta = 2\pi m; \quad m, n, k \in \mathbb{Z}.$

29. 12.

Ответы к §4.

Логарифмические и показательные задачи.

1. Если $0 < a < 1$, то $0 < x < 1$;
если $a > 1$, то $x > 1$.
2. 0.
3. 5.
4. 0.
5. $\frac{abc}{ab + bc + ac}$ при $a \neq 0,$
 $b \neq 0, c \neq 0;$
0 при $a = b = c = 0$.
7. $-1 - 3a$.
8. $\frac{2}{a - 2}$.

$$9. 1 + \frac{1}{(a-2)(b-1)}.$$

$$10. \text{ а) } \frac{a+1}{2a}; \text{ б) } \frac{2-a}{3-3a}$$

$$\text{ ; в) } \frac{ma+n-na}{ka+l-la}.$$

$$11. n = 14.$$

Ответы к §5. Решение уравнений и неравенств.

п.5.1. Рациональные уравнения и неравенства.

1. -3; -1; 1; 3; 5.
2. $1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. $(0; \sqrt{2})$.
4. -1; 2.
5. Два.
6. Два.
7. Два.
8. $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
9. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
10. $x = 0$ при $a = 0$;
 $x = \frac{1}{a}, x = -\sqrt[3]{a}$ при $a \neq 0$.
11. Нет решений при $a < -\frac{1}{4}$;
 $x = -\frac{1}{2}$ при $a = -\frac{1}{4}$;
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$
при $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$;
 $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}$ при $a = \frac{3}{4}$;
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$,
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$ при $a > \frac{3}{4}$.
12. $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 1 \pm \sqrt{3}$.
13. $(-\infty; +\infty)$.
14. Нет решений.
15. $\frac{\sqrt{2}-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.
16. $1 \pm \sqrt{19}$.
17. $1/2; 2$.
18. $-4 \pm \sqrt{-3 + \sqrt{10}}$.
19. $\frac{7}{3}; -\frac{1}{7}$.
20. Нет решений.
21. $(-\infty; +\infty)$.
22. $(-\infty; +\infty)$.
23. $\frac{3}{2}; \frac{2}{3}$.
24. $2 \pm \sqrt{3}$.

25. -1 .

26. $-1 \pm \sqrt{7}$.

27. $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

28. Если $a \in [0; 2)$, то решений нет.

иначе $x = a \pm \sqrt{a^2 - 2a}$.

29. $x > \frac{3 - 4a}{9 - 4a}$ при $a \in (0; \frac{9}{4})$;

$x < \frac{3 - 4a}{9 - 4a}$ при $a \in (-\infty; 0) \cup$

$(\frac{9}{4}; +\infty)$;

x — любое при $a = \frac{9}{4}$.

30. $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{a}}; +\infty\right)$

при $a > 0$;

$x \in (-\infty; 0)$ при $a < 0$;

нет решений при $a = 0$.

31. $a \leq 0$.

п.5.2. Иррациональные уравнения и неравенства.

1. $5/3; 5/4$.

2. $\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

3. $(1; \infty)$.

4. $[3; \infty)$.

5. $1/3$.

6. $x \geq 6$.

7. Нет решений.

8. $x = \sqrt{7}$.

9. $5 \leq x \leq 10$.

10. 2.

11. 3.

12. $\frac{1 + \sqrt{29}}{2}$.

13. 3.

14. 2.

15. $[3; 4]$.

16. При $a \leq 0$ $x = \frac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$;

при $a \geq 4$ $x = \frac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$;

иначе решений нет.

17. Если $a \geq 0$, то $x = \frac{\sqrt{1 + 4a} - 1}{2}$,

иначе решений нет.

18. При $a < -1/4$ решений нет;при $-1/4 \leq a \leq 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$;

при $0 < a < 1$ $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$;

при $a \geq 1$ $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ или

$x = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$.

19. Указание: свести задачу к предыдущей.

20. При $a \geq \sqrt{2}$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4a}}{2}$;

при $a \leq -\sqrt{2}$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4a}}{2}$,

$$\text{иначе } x = \frac{-1 + \sqrt{9 + 4a}}{2} \text{ или}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{9 + 4a}}{2}.$$

нет решений при $a \leq 0$ и $a \geq 1$.

п.5.3. Тригонометрические уравнения и неравенства.

21. $a \leq -3/4$.

22. $a \in (-\infty; -2] \cup \{\sqrt{3}\} \cup [2; +\infty)$.

23. Если $a < 0$, то $x = 0$;
если $0 \leq a < 1$, то $x \leq 0$;
если $a \geq 1$, то x — любое.

24. Если $a \geq 1$, то $x \leq -1$;
если $a \in [0; 1]$, то $x \leq -1$ или
 $x \geq \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$;
если $a \leq -1$, то $x \geq 1$;
если $a \in (-1; 0)$, то $x \geq 1$ или
 $x \leq -\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$.

25. Если $a < -1$, то решений нет;
если $a > \sqrt{2}$, то $|x| \leq 1$;
если $a \in [-1; 1]$

$$\text{то } x \in \left(\frac{\sqrt{2 - a^2} - a}{4}; 1 \right],$$

$$\text{иначе } x \in \left[-1; \frac{-a - \sqrt{2 - a^2}}{4} \right)$$

$$\text{или } x \in \left(\frac{-a + \sqrt{2 - a^2}}{4}; 1 \right].$$

26. Если $a \leq 1$, то решений нет,
иначе $\frac{a + 2 + \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{4} <$
 $x \leq a$.

27. $x = \left(\frac{a^2 + 1}{2a} \right)^2$ при
 $0 < a < 1$;

1. $\frac{2\pi}{15}n$, $n \neq 15k + 15$;

$$\frac{\pi}{17} + \frac{2\pi}{17}m, \quad m \neq 17l + 8.$$

2. $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z \right\}$.

3. $\left\{ (-1)^n \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\pi}{18} + n \right\} \cup$
 $\left\{ (-1)^n \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{5\pi}{18} + n \right\}$,
 $n \in Z$.

4. $\left\{ \pm \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right\}, k \in Z$.

5. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in Z$.

6. $\frac{\pi}{6} + \pi k, \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3} \pm 2) + \pi k;$
 $k \in Z$.

7. $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \right\}, k \in Z$.

8. $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \right\}, k \in Z$.

9. $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \right\}, k \in Z$.

10. $\left\{ \frac{\pi k}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \right\}, k \in Z$.

11. $\left\{ \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9} \right\}$,
 $k \in Z$.

12. $\frac{\pi k}{5}, \pm \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
13. $\frac{\pi n}{7}; \frac{\pi(4k+3)}{2}, n, k \in \mathbb{Z}$.
14. 4.
15. Нет.
16. $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$.
17. Нет решений.
18. $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \right\}, k \in \mathbb{Z}$.
19. Решений нет.
20. $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$.
21. $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$.
22. $-\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z};$
 $-\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
23. $\pi n, n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$.
24. 0.
25. Нет решений.
26. 0.
27. Нет решений.
28. 0.
29. $\{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$.
30. $\left\{ \frac{\pi(6k+1)}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
31. $\pi + 4\pi k.$
32. $\{2\pi k\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}.$
33. $\{2\pi k\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}.$
34. $\{\pi + 2\pi k\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right\},$
 $k \in \mathbb{Z}.$
35. $\{2\pi k\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}.$
36. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; x = \pi + 2\pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}.$
37. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$
 $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
38. Нет решений.
39. Нет решений.
40. Нет решений.
41. Нет решений.
42. $|x| \in [2\pi k, \pi + 2\pi k],$
 $k = 0, 1, 2, \dots$
43. $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \right\}, k \in \mathbb{Z}.$
44. $\left(\frac{-\pi(2k+1)}{2}; -\pi k \right] \cup$
 $\left[\pi k; \frac{\pi(2k+1)}{2} \right); k \in \mathbb{Z}.$
45. $\pi k, k \in \mathbb{Z}; 5.$
46. 0.
47. 0.

48. 0.

49. Нет решений.

50. $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

51. $[1; +\infty)$.

52. $-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; -\frac{2\pi(3n \mp 1)}{3};$
 $\frac{\pi(6k \pm 1)}{3}; n, k \in \mathbb{N}$.

53. $x = -1, x = -2$.

54. $x = 1, x = 4$.

55. Нет решений.

56. Нет решений.

57. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

58. $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$.

59. $(-\infty; +\infty)$.

60. $\left[-\arccos \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 2\pi k; \right.$
 $\left. \arccos \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 2\pi k \right] \cup$
 $\left[\arccos \frac{1-\sqrt{5}}{4} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right] \cup$
 $\left[\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \right.$
 $\left. 2\pi - \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{4} + 2\pi k \right],$
 $k \in \mathbb{Z}$.

61. $(-\infty; +\infty)$.

62. $\{\pi/4\}$.

63. $\left(\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{2}(k+1) \right), k \in \mathbb{Z}$.

64. $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$.

 65. x - любое.

66. $[-2; -1] \cup [1; 2]$.

67. $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

68. $[0; 1/2]$.

 69. x - любое.

 70. x - любое.

 71. x - любое.

 72. x - любое.

73. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi(k+1) \right), k \in \mathbb{Z}$.

74. $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.

75. $[1; +\infty)$.

 76. При иррациональном a .

77. $a = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}$.

78. $a = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}$.

79. $a = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

80. $a = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}$.

81. При иррациональных.

п.5.4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

1. $(0; +\infty)$.

2. 100.

3. 1, -2, $-\log_3 4$.
4. 3, $-\log_5 2$.
5. 0, 1.
6. 1, 4.
7. 2.
8. $2 - \log_2 3$.
9. $\left\{ \frac{\pi k}{2} \right\}, k \in Z$.
10. 2.
11. Нет решений.
12. -2, 2.
13. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.
14. 1/10; 2; 1000.
15. $\sin 1$.
16. а) $\cos 1$;
б) $\operatorname{arctg} 3^{1/\pi} + \pi n,$
 $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$
17. 2.
18. 1.
19. 2.
20. 1.
21. Нет решений.
22. Нет решений.
23. 2.
24. $\pm \log_{3/2} 2$.
25. 2.
26. 2.
27. 1; 11.
28. 41.
29. 4.
30. 4.
31. 0.
32. -1; 0.
33. 1.
34. $[2 - \sqrt{2}; 3 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{5}]$.
35. $(-\infty; -4) \cup [1; +\infty)$.
36. (2, 6).
37. $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.
38. $[2 - \sqrt{2}; 1] \cup [2 + \sqrt{2}; 4]$.
39. $(0; 3/2) \cup \{6\}$.
40. $(2; 3) \cup (4; +\infty)$.
41. $(2; +\infty)$.
42. $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \setminus \left[\frac{\pi}{4}; \sqrt{2} \right],$
 $k \in Z$.
43. $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in Z$.
44. $|x| > 1$ и $x \neq \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.
45. $\left(2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in Z$.
46. $1/5 \leq x < 1$.

47. $1 < x \leq 7$.
48. $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$.
49. $\left[1; \frac{\pi}{3}\right]$.
50. 2.
51. -1.
52. Одно решение при $0 < a < 1$;
нет решений при $a > 1$ и $a \leq 0$.
53. $a < 0$ или $a = 4$.
54. Если $\cos \alpha = -1$, то $x = 2$;
если $\cos \alpha = 1$, то $x = 1/2$;
иначе $0 < x < 1$.
55. а) при всех $a \in (-\infty; 0]$;
б) при всех $a \in (0; +\infty)$.
56. $(-1; -\sqrt{1-a}) \cup (\sqrt{1-a}; 1)$ при
 $a \in (0; 1)$;
нет решений при остальных a .
57. $x = \frac{1}{a^2}$ при $a > 0$, $a \neq 1$;
нет решений при остальных a .
58. $x \in (1; a)$ при $a > 1$;
 $x \in (a; 1)$ при $a \in (0; 1)$.
60. $\left(0; \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.
61. Три.
- п.5.5. Решение уравнений и неравенств в целых числах.**
1. а) да; б) нет; в) да.
2. Нет решений.
3. Нет решений.
4. $(6 + 7k; -9 + 11k)$, $k \in Z$.
6. $(1 + 5k, 1 + 3k)$, $k \in Z$.
7. $p = 2, q = 5$.
8. $(2; 2), (0; 0)$.
9. $(c, 1), (1, d)$ где $c, d \in Z$.
10. $(13; 32), (-5; -16), (-13; -32), (5; 16)$.
11. $(3; 5), (-3; -5), (7; 9), (-7; -9)$.
12. $(5; 2), (-5; -2), (-1; -2), (1; 2)$.
13. $(1; 5), (7; 97), (-1; -9), (-7; -99)$.
14. а) $(0; 0)$;
б) $(-11; 12), (11; -12), (-11; -12), (11; 12)$.
15. $(3; 5), (3; -5), (4; 7), (4; -7), (0; 2), (0; -2)$.
16. $(1; 3)$.
17. а) $(2; 1)$, б) $(1; 1), (2; 3)$.
18. $(2; 2)$.
19. $(0; 0), (-1; 0)$.
20. Нет решений.
21. $(4; 1), (4; -3), (-4; 1), (-4; -3)$.
22. $(1; 2), (2; 1)$.
23. $(3; 2), (-3; 2), (3; -2), (-3; -2)$.
24. Нет решений.

25. $(9;0)$, $(0;9)$, $(1;4)$, $(4;1)$.
 26. $(6;1;0)$, $(6;-1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;-1;0)$.
 27. $(1;0;1)$, $(-1;0;1)$, $(1;0;5)$, $(-1;0;5)$.
 28. $(1;5;0)$, $(1;-5;0)$, $(-1;5;0)$,
 $(-1;-5;0)$.
 29. $(1;4;3)$, $(1;4;-3)$, $(-1;4;3)$,
 $(-1;4;-3)$.
 30. $(2; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$.
 31. $(2;2;1)$, $(1;2;2)$, $(2;1;2)$.
 32. $(1;1;3)$, $(1;3;1)$.
 33. $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(2;3;1)$,
 $(3;1;2)$, $(3;2;1)$.
 34. а) $(3,3)$; б) $(0,0)$; в) $(1,1)$; $(2,3)$;
 г) $(6,5)$, $(-5, -6)$, $(4, -3)$, $(3,-4)$;
 д) $(5,2)$, $(5,-2)$, $(-5, -2)$, $(-5,2)$,
 $(11,10)$, $(11,-10)$, $(-11, -10)$,
 $(-11, 10)$;
 е) $(1,2)$, $(-1,2)$;
 ж) $(3,2)$, $(-3,2)$, $(3,-2)$, $(-3,-2)$;
 з) $(-1, 0)$.
 36. $(0; 0)$.
 37. $(0; 0; 0)$.
 38. $(1; 1)$, $(2; 1)$.
3. $(2;2;2)$.
 4. $(-1;-1;-1)$.
 5. $(3;5)$, $(-3;-5)$, $(36; -23/2)$, $(-36; 23/2)$.
 6. $(2; 1)$, $(-2; -1)$,
 $\left(\frac{7}{2\sqrt{2}}; -\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{7}{2\sqrt{2}}; \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$.
 7. $(-3;-2)$, $(-2; -3)$, $(3;2)$, $(2;3)$.
 8. $(1;2;3)$, $(-1;-2;-3)$.
 9. $(1/2; 1/2)$, $(-1; -1/4)$.
 10. 4 решения.
 11. $(2; 1)$.
 12. $(2; -1)$, $(-1;2)$, $(-2;1)$, $(1;-2)$.
 13. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$,
 $(-3; -2)$, $(3; 2)$.
 14. $(3;1)$, $(1;3)$.
 15. $(2;1)$, $(-2;-1)$.
 16. $(-4; -2)$, $(0;-2)$.
 17. $(2;6)$, $(1;3)$.
 18. $(0;0)$, $(2;-1)$, $(-10/7; -4/7)$.
 19. $\left(\frac{1}{25}; \frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{25}\right)$.
 20. $(0; 0)$.
 21. $(-1/4; -9/14)$, $(5/4; -3/4)$.
 22. $(2; 2)$.

Ответы к §6. Решение систем уравнений и неравенств.

1. $(0;1)$, $(1;0)$.
 2. $(1;0)$, $(2; -1)$.
 21. $(-1/4; -9/14)$, $(5/4; -3/4)$.
 22. $(2; 2)$.

23. $a = 1/2$, $b = 3/2$. $|a| = 1$;
24. $a \neq -4/3$, b — любое. восемь, если $\frac{\sqrt{2}}{2} < |a| < 1$.
25. $\alpha \neq \pm 1$.
26. $p = 9/4$.
27. Если $a \geq 2 + \sqrt{6}$ или $a \leq 2 - \sqrt{6}$,
то $x = \frac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a - 4}}{2}$ и
 $y = ax - 1$;
при остальных a решений нет.
28. Если $a = 1$, то $(t; 1 - t)$,
 $t \in R$;
если $a = -1$, то решений нет;
если $a \neq \pm 1$, то
 $\left(\frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, -\frac{a}{a + 1}\right)$.
29. $|a| \leq 3/2$.
30. $|b| \leq 2$.
31. $|a| = \sqrt{3}$.
32. $a = -1/2$.
33. $\left(\frac{2ac}{c-a}; \frac{2ac}{c+a}\right)$, $\left(\frac{2}{c-a}; \frac{2}{c+a}\right)$,
 $\left(\frac{2a}{1-ac}; \frac{2a}{1+ac}\right)$, $\left(\frac{2c}{ac-1}; \frac{2c}{ac+1}\right)$.
34. $x \geq |a|$.
36. Нет, если $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ или
 $|a| > 1$;
четыре, если $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или
37. $a = \pm 1, a = \pm 2/\sqrt{5}$.
38. $k \neq -2$.
39. $[1/2; 3/2]$.
40. $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, 1\right)$, $k \in Z$.
41. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$, $k \in Z$ или
 $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$, $k \in Z$.
42. $(-2, \pi k)$, $k \in Z$ или
 $\left(2, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.
43. Решений нет.
44. $(0; 1)$, $(1; 0)$.
45. $(1; 1; 0)$.
46. $(0; 1)$.
47. $(0; 1)$.
48. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{1}{10}\right)$.
49. $(1; \pi n)$.
50. $(0; 1)$.

**Ответы к §7. Доказательства
неравенств и тождеств.**

26. Данное неравенство обращается в равенство только в случае $a = b = c$.

27. $a = b = c = d$.

43. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

52. Первое число больше.

53. Если $x = y$, то числа равны, иначе первое число больше.

**Ответы к §8. Задачи на
арифметические и
геометрические прогрессии.**

1. 0.

5. $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

6. Да, например, $u_1 = 2^9, q = 3/2$.

8. Нет.

**Ответы к §9. Функции и их
графики.**

1. $x = 10^{2k}, x = 10^{1+2n},$
 $k \geq 0, n \geq 0, k, n \in Z.$

2. $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup$
 $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$

3. $x \in \{-2; 0; 2\}.$

4. $x = \sin 1.$

5. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

6. $x = \pi n, n \in Z.$

7. $[2/3; 2].$

8. $[0; 1/2].$

9. $[1; \sqrt{2}].$

10. $[-1; 0) \cup [1; +\infty).$

11. $(-\infty; 1/2].$

12. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right].$

13. $(-\infty; -2].$

14. $(0; 1).$

15. Нечетная функция.

16. Нечетная функция.

17. Четная функция.

18. $2\pi.$

19. $2\pi.$

20. $\pi.$

24. Периодическая с периодом $2\pi.$

25. Непериодическая.

26. Непериодическая.

27. Является.

30. а) 2π ; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 1; г) π^2 ;
д) $2\pi\sqrt{\pi}.$

32. а) $y_{\min} = 4, \quad y_{\max} = +\infty;$
 б) $y_{\min} = 0, \quad y_{\max} = 1;$
 в) $y_{\min} = -\sin 1, \quad y_{\max} = \sin 1;$
 г) $y_{\min} = 1, \quad y_{\max} = 2.$

33. 3.

34. $2\sqrt{2}.$

35. 8.

36. 2.

68. В III четверти.

69. а) в IV четверти;

б) в I четверти.

70. $4a.$

71. $\min(-1; -2a).$

72. $y = 0; y = -\frac{a}{2}x; \quad y = 4ax.$

Ответы к §11. Многочлены.

1. $\alpha\beta.$

2. $x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$

3. $(x+2) \cdot (x+6) \cdot (x+4+\sqrt{6}) \cdot$
 $(x+4-\sqrt{6}).$

4. $(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1).$

5. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

6. $(a^2 - 2ab + 2b^2) \cdot (a^2 + 2ab + 2b^2).$

8. 1.

Ответы к §12. Задачи последних лет.

**п.12.1. Факультет ВМиК
 МГУ
 (1997 - 1999 гг.)**

3. (2, 10); (10, 10).

4. $a = 3; 7.$

5. $18^{20} > 63^{13}.$

6. Первое число меньше.

7. Первое число больше.

9. $(2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3});$
 $(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}).$

10. 1.

11. $\frac{3}{7}.$

12. (1;0), (0;1) .

13. $a = 0.$

14. $a = 5.$

15. 1.

16. $1 - 4\sqrt{\pi}.$

17. $y_{\min} = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2};$
 $y_{\max} = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$

18. $y = 2x - \frac{11}{3}.$

19. Не существует.
20. $\frac{\pi}{4}$.
21. $\frac{\pi}{2}$.
23. Искомое множество - плоскость с выколотыми точками
 $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi m\right)$,
 $n, m \in Z$.
26. 7.
28. $\left(k; \frac{9^k - 1}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$
29. $a > b$.
30. Имеет.
33. Решений нет.
34. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.
35. $a \in \left[-1; \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right]$.
36. $\min f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2}$,
 $\max f(x) = 1 + \frac{\pi^2}{16}$.
37. $x \in [0; 1]$.
2. $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z, n \neq 4k$,
 $(k \in Z)$.
3. $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1) - 2$, $n \in Z$.
4. $x = 55$.
5. $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
6. $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
7. $x \in \{-1\} \cup [0, +\infty)$.
8. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.
9. $\frac{3}{5}$.
10. $-\frac{15}{17}$.
15. Множество образовано прямой $y = 0$ и полупрямыми $\{x = 2\pi n, n \in Z; y > 0\}$ и $\{x = \pi + 2\pi n, n \in Z; y < 0\}$.
16. Множество состоит из полупрямых $\{x = \pi n, n \in Z; y \geq 0\}$ и частей синусоиды $\{y = \frac{1}{2} \sin x, y \leq \sin x\}$.

п.12.2. Геологический факультет МГУ (1997 - 1999 гг.)

1. $x = \pm \sqrt{-\frac{\pi}{3} + \pi k}$, $k = 1, 2, \dots$

17. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

18. $2\pi n$, $n \in Z$; $1 + 2\pi k$, $k \in Z$.

19. $(1 + \sqrt{1 + \pi n})^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

20. При $a = 1$ $x = 0$;
 при $a = -1$ $x = 1$;
 при других значениях a ре-
 шений нет.

21. 0.

22. $x \in [0; 4]$.

23. $\left[3^{-\frac{1}{3}}; 1\right) \cup [9; +\infty)$.

24. $\left(0; 5^{-\frac{1}{4}}\right] \cup (1; 5]$.

28. 17964.

п.12.3.

**Механико-математический
 факультет МГУ (1998 - 1999
 гг.)**

1. 30.

3. $-\frac{2}{3}$.

4. 188.

5. 2.

6. $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

8. $\frac{3\pi}{2}$.

**Ответы к §1. Задачи,
 связанные с треугольниками.**

7. Треугольник тупоугольный.

8. а) треугольник тупоугольный;
 б) треугольник тупоугольный.

9. Нет.

10. Есть.

11. Существует.

14. $\arccos(4/5)$.

16. Не может.

19. $30^\circ, 60^\circ$ и 90° .

20. 12 или 24.

$$21. \hat{A} = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\hat{B} = \frac{\pi}{4} \mp \arccos\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$22. \sqrt{2p_1p_2} - p_2; \sqrt{2p_1p_2} - p_1;$$

$$p_1 + p_2 - \sqrt{2p_1p_2}.$$

28. 30° .

33. 3,5,7; 4,5,6; 5,5,5.

$$35. l = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a + b}.$$

36. $2 > q$.

40. 5.

$$41. \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

42. $\frac{|\alpha - \beta|}{2}$.

43. $|\alpha - \beta|$.

45. 90° .

46. $\sqrt{5}$.

47. $AC = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 48^\circ$,

$BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 72^\circ$,

$$\sin 48^\circ = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1) + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

48. $\widehat{QPR} = 230^\circ$.

49. $AC = 10$.

50. $\widehat{B} = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\arccos(2 \sin \alpha - \cos \alpha)}{2}$;

$$\widehat{C} = \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\arccos(2 \sin \alpha - \cos \alpha)}{2}$$
;

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$$
.

51. $\widehat{B} = \frac{\pi - \alpha}{2} + \arccos\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)$;

$$\widehat{C} = \frac{\pi - \alpha}{2} - \arccos\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$
;

$$0 < \alpha \leq \pi/3$$
.

52. $\widehat{A_{1,2}} = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\arccos(\sin \alpha + \cos \alpha)}{2}$;

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$$
.

53. $\widehat{A_{1,2}} = \frac{\alpha}{2} \pm \arccos\left(2 \cos \frac{\alpha}{2}\right)$;

$$\frac{2\pi}{3} \leq \alpha < \pi$$
.

54. $\beta = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\arccos\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha - \cos \alpha\right)}{2}$;

$$\gamma = \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\arccos\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha - \cos \alpha\right)}{2}$$
;

$$0 < \alpha \leq 2 \arctg \frac{2}{\pi}$$
.

55. $\frac{1}{pq}$.

56. 15 и 12.

57. $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

58. $\widehat{AKC} = 30^\circ$.

59. $\cos^2 \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \cdot \sec^2 \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$.

60. $\sqrt{13}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{5}$.

61. $2\sqrt{7}$.

62. $\sqrt{7}$.

64. $k < 0, k > 2$.

66. $3\sqrt{3}$.

67. $\frac{a}{a+b} \sqrt{2}$.

68. $a = \sqrt{b^2 + bc}$.

70. Равнобедренный треугольник.

74. Равнобедренный треугольник.

75. 4.

**Ответы к §2. Задачи,
связанные с
четырёхугольниками.**

1. Ромб, когда диагонали исходного четырёхугольника перпендикулярны. Квадрат, когда они вдобавок равны.
2. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.
3. Периметр квадрата.
5. $\frac{9\sqrt{3}}{11}$.
9. $MK = 4, 8$.
10. $AC = \sqrt{ab}$.
11. Нет.
12. Нет.
13. Диагонали трапеции делят друг друга в отношении оснований.
14. $\widehat{BAC} > \widehat{CAD}$.
16. Меньшее основание.
17. $\alpha = \arcsin(2/\pi)$.
18. $\frac{a-b}{2}$.
19. $\frac{2ab}{a+b}$.
24. $\widehat{A} = \widehat{D} = 60^\circ, \widehat{B} = \widehat{C} = 120^\circ$.

25. $KM = 4$.

26. $\left(0; \frac{d^2}{2}\right]$.

27. а) Угол между биссектрисами двух соседних углов равен полусумме этих углов;
б) Угол между биссектрисами двух противоположных углов равен полуразности двух других углов;
в) Пары вертикальных углов, заключённых между биссектрисами углов, образуемых продолжениями противоположных сторон, равны полусуммам противоположных углов четырёхугольника.
28. Четырёхугольник, у которого диагонали перпендикулярны друг другу.
29. 90° .
30. 1.
31. Точка пересечения диагоналей.

**Ответы к §3. Задачи,
связанные с окружностью.**

2. $\frac{2mn}{n-m}$.
3. $P = 2(r + 2R)$.
4. 5.

5. $r = 2\sqrt{3} - 3$.

6. $\frac{b|b-a|}{\sqrt{4b^2-a^2}}$.

7. $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.

8. $1, 1, \sqrt{3}; 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.

9. $\frac{3\sqrt{10}}{4}$.

10. $x = 2 \cdot (90^\circ - \hat{A})$,

$y = 2 \cdot (90^\circ - \hat{B})$,

$z = 2 \cdot (90^\circ - \hat{C})$,

где A, B, C - углы исходного треугольника, а x, y, z - иско-
мые углы.

11. $\sqrt{2}$.

12. Может.

14. $BD = \sqrt{ab}$.

16. $h^2 \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

17. 1.

18. $R = 2$.

19. $x = \alpha + \beta, y = \alpha - \beta$,

$z = 180^\circ - \alpha + \gamma$,

$u = 180^\circ - \alpha - \gamma$,

$\hat{A} = \frac{1}{2}(y + u) =$

$90^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$,

$\hat{B} = \frac{1}{2}(y + z) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$,

$\hat{C} = \frac{1}{2}(x + z) =$

$90^\circ + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$,

$\hat{D} = \frac{1}{2}(x + u) = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$;

где A, B, C, D - углы четырех-
угольника;

α, β, γ - углы между диагона-
лями и между противополож-
ными сторонами;

x, y, z, u - стягиваемые сто-
ронами четырехугольника ду-
ги.

21. $\hat{A} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \hat{B} = \pi - \angle A$,

$\hat{C} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}, \hat{D} = \pi - \angle C$.

23. $\frac{\sqrt{7} - 1}{2} \cdot R$.

24. Необходимо и достаточно, что-
бы этот параллелограмм был
ромбом.

25. πab .

26. 60° .

28. $\sqrt{ab}$.

30. $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$.

Ответы к §4. Площади фигур.

1. $a = \frac{1}{2}(r \pm \sqrt{r^2 - 4q})$,

$b = \frac{1}{2}(r \mp \sqrt{r^2 - 4q})$,

где $q = 2S, r = \frac{P^2 + 4S}{2P}$;

$c = \frac{P^2 - 4S}{2P}$.

2. 72.
3. $a^2 \frac{\sin 2\alpha}{8}$.
4. $\frac{c \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (r \cos \alpha - c)}{2}$.
6. $(\sqrt{2} - 1) : 1$.
7. Да.
8. 90° .
9. Нет.
10. $BO : OD = 4$,
 $S_{\triangle COD} : S_{\triangle BOC} = 1 : 4$.
11. $2\sqrt{7}$.
12. Равенство выполняется в случае, когда стороны, длины которых заданы, являются катетами равнобедренного прямоугольного треугольника.
13. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.
14. Нет.
15. $7/4$.
16. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{11}$.
17. $\frac{m \sin^2 \alpha \sin \gamma \sin(\alpha + \gamma)}{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma + \sin^2(\alpha - \gamma)}$.
18. $\frac{m^2}{2} \cos^2 \frac{\alpha - \gamma}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma)$.
19. $b \sin 2\alpha + 2b \sin \alpha \sqrt{m^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$.
20. Может.
21. а) существует;
 б) не существует.
22. $4/3$.
23. $\triangle ACO$.
24. $\triangle ABO$.
25. $2(\sqrt{2} - 1)a^2$.
26. 24.
27. Больше на 275%,
 меньше на $73\frac{1}{3}\%$.
28. $30^\circ, 150^\circ$.
29. Больше на $\frac{400}{7}\%$,
 меньше на $\frac{400}{11}\%$.
30. $\frac{2\sqrt{m^2 + p^2 \pm 2mp \cos \alpha}}{\sin \alpha}$;
 $\frac{4mp}{\sin \alpha}$.
31. $\sqrt{35}$.
32. $8\frac{1}{3}$.
33. $\sqrt{\operatorname{Stg} \alpha}$.
34. $\frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$.
35. 150. Можно. Нельзя.
36. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.
37. $1 : 2$.

39. $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

41. $\frac{S_1 \cdot S_2}{S_3}$.

42. 6.

43. $18\sqrt{2}$.

44. 2 рад.

45. $\frac{25}{64}\sqrt{15}$.

46. $\cos^2 \alpha$.

47. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$.

48. 30° .

49. $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

50. 2р.

ИД № 00510 от 01.12.99

Подписано в печать 25.12.2000 Формат 60×88¹/₁₆

Печать офсетная Бумага газетная

Печ. л. 8,25 Тираж 1000 экз. Заказ 7689

ООО "МАКС Пресс"

107066, г. Москва, Елоховский пр. д. 3, стр. 2

Тел. 939-38-90, 939-38-91, 928-10-42. Тел./факс 939-38-91

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ,

140010, г. Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.

Тел. 554-21-86