

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО- НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ, т. 1

Двухтомная монография А. Исимару представляет собой подробное и полное введение в статистическую теорию распространения волн — один из важнейших разделов современной оптики, радиофизики, "акустики".

В первом томе рассматриваются теория однократного рассеяния и распространение волн в облаке случайно распределенных рассеивателей, а также феноменологическая теория переноса излучения.

Книга рассчитана на научных работников в области атмосферной оптики, локации, связи, радиоастрономии и акустики. Она может служить учебным пособием для аспирантов и студентов старших курсов.

Содержание

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	6
От автора	9
Глава 1. Введение	11
ЧАСТЬ I. РАССЕЯНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В РАЗРЕЖЕННЫХ ОБЛАКАХ ДИСКРЕТНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ	
Глава 2. Рассеяние и поглощение волны отдельной частицей	17
2.1. Сечение рассеяния и амплитуда рассеяния	17
2.2. Общие свойства сечений	20
2.3. Оптическая теорема	23
2.4. Интегральные представления амплитуды рассеяния и сечения поглощения	23
2.5. Рэлеевское рассеяние	27
2.6. Борновское приближение (рассеяние Рэлея — Дебая)	31
2.7. ВКБ-приближение для поля внутри частицы	34
2.8. Решение Ми	3У
2.9. Эллиптически-поляризованные волны и параметры Стокса	40
2.10. Частичная поляризация и естественный свет	42
2.11. Сложение независимых волн	43
2.12. Матрица рассеяния и матрица Стокса	43
2.13. Преобразование параметров Стокса при повороте системы координат	45
2.14. Распределение частиц по размерам	47
2.15. Акустические волны	48
2.16. Рассеяние акустических волн	50
Глава 3. Характеристики дискретных рассеивателей в атмосфере, океане и биологических средах	52
3.1. Метеорологические радиолокаторы, шумы и помехи	52
3.2. Аэрозоль и гидрометеоры	54
3.3. Рассеяние света в морской воде (гидрооптика)	64
3.4. Рассеяние звука в воде (гидроакустика)	66

3.5. Рассеяние на биологических средах	74
Глава 4. Рассеяние волн в разреженных облаках частиц	82
4.1. Средняя мощность рассеянного поля в приближении однократного рассеяния	84
4.2. Мощность рассеянного поля в первом порядке теории многократного рассеяния	86
4.3. Случай узкой диаграммы направленности	88
4.4. Когерентное и некогерентное поле	91
4.5. Сечение рассеяния движущейся частицы с учетом временной корреляции	94
4.6. Временная корреляционная функция и частотный спектр рассеянного поля	99
4.7. Пространственная корреляция рассеянного поля	101
4.8. Корреляция поля, принимаемого движущимся приемником	103
4.9. Распределение вероятности рассеянного поля	104
Глава 5. Рассеяние импульсных волн в случайном облаке частиц	108
5.1. Общая формулировка проблемы распространения и рассеяния импульсов в нестационарной случайной среде	108
5.2. Двухчастотная функция когерентности и смешанной момент выходного импульса	111
5.3. Время когерентности и полоса когерентности	113
5.4. Рассеяние узкополосного импульса	114
5.5. Обратное рассеяние импульса, излучаемого остронаправленным излучателем	118
5.6. Обратное рассеяние последовательности коротких импульсов	123
5.7. Обратное рассеяние импульса, излучаемого передатчиком с широкой диаграммой направленности	125
5.8. Бистатистическое рассеяние импульса	126
5.9. Представление через функцию неопределенности	128
5.10. Импульсно доплеровский радиолокатор	130
Глава 6. Распространение в пределах прямой видимости через разреженное облако частиц	184
6.1. Когерентная и некогерентная интенсивности и пространственная корреляция флуктуации в плоской волне	136
6.2 Временная корреляция и частотный спектр плоской волны	141
6.3. Распространение плоской импульсной волны в пределах прямой видимости	143
6.4. Распространение между излучателем и приемником в пределах прямой видимости	145
6.5. Распространение импульса между излучателем и приемником	151
6.6. Приближение Рытова для флуктуации амплитуды и фазы	153
6.7. Приближение Рытова для плоской волны	155
6.8. Временная корреляция и частотные спектры флуктуации уровня и фазы плоской волны	159

6.9. Приближение Рытова с учетом направленных свойств излучателя и приемника	161
ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНОМ ОБЛАКЕ РАССЕИВАТЕЛЕЙ	
Глава 7. Теория переноса излучения в случайном облаке частиц	163
7.1. Лучевая интенсивность, поток и плотность энергии	165
7.2. Лучевая интенсивность в свободном пространстве и на границах раздела однородных сред	169
7.3. Дифференциальное уравнение для лучевой интенсивности	173
7.4. Ослабленная падающая интенсивность, диффузная интенсивность, граничное условие и функция источника	176
7.5. Интегральная форма уравнения переноса	178
7.6. Эффективная площадь антенны и принимаемая мощность	181
7.7. Уравнение переноса для частично поляризованной электромагнитной волны	183
7.8. Связь лучевой: интенсивности с вектором Пойнтинга	185
Глава 8. Приближенные решения для разреженной среды	187
8.1. Лучевая интенсивность в приближении первого порядка теории многократного рассеяния	188
8.2. Падение плоской волны на плоскопараллельную среду	189
8.3. Падение коллимированного пучка на плоскопараллельную среду	192
Глава 9. Диффузионное приближение	195
9.1. Вывод диффузионного уравнения	195
9.2. Граничные условия	199
9.3. Падение коллимированного пучка на слой рассеивающих частиц	201
9.4. Решение для случая плоской волны, падающей на слой рассеивающих частиц	202
9.5. Решение для случая коллимированного пучка конечной ширины, падающего на слой рассеивающих частиц	204
9.6. Диффузия от точечного источника	206
9.7. Измерение отражения с помощью двух волоконных световодов	206
9.8. Волоконнооптический оксиметрический катетер	208
Глава 10. Двухпотоковая и четырехпотоковая теории	212
10.1 Двухпотоковая теория Кубелки и Мунка	212
10.2. Коэффициенты K и S в двухпотоковой теории	216
10.3. Четырехпотоковая теория	217
Приложение 10А	220
Глава 11. Плоскопараллельная задача	224
11.1 Нормальное падение плоской волны на плоскопараллельный слой	225
11.2. Типичные фазовые функции	227
11.3. Квадратурная формула Гаусса	228
11.4. Общее решение	231
11.5. Полубесконечная среда	238
11.6. Наклонное падение и другие методы.	238

11.7. Слоистая плоскопараллельная среда	239
11.8. Некоторые смежные проблемы	242
Глава 12. Изотропное рассеяние	243
12.1. Метод преобразования Фурье для изотропного рассеяния	244
12.2. Диффузия и явления ближнего поля	249
12.3. Излучение при произвольной падающей интенсивности	251
12.4. Излучение в случае направленной сферической падающей волны	252
12.6. Излучение при произвольном распределении источников	254
12.6. Изотропное рассеяние в конечном объеме и проблема Милна	256
Глава 18. Приближение для больших частиц	258
13.1. Вывод дифференциального уравнения в малоугловом приближении	258
13.2. Общее решение	260
13.3. Приближенное решение для случая медленного углового изменения диффузной интенсивности	263
Литература	268
Предметный указатель	274

Предметный указатель

Альбедо поверхности и дна океана 192	Граничные условия для двухпоточковой теории 214
— частицы 20, 174, 189	— — — диффузной интенсивности 176, 199
Аэрозоль 54	— — — лучевых интенсивностей на границе однородных сред 171
Биоакустика 79	— — — четырехпоточковой теории 219
Биооптика 75	Двухпоточковая теория 212
Биоэлектродинамика 62	Диаграмма направленности по мощности 84
Ближнего поля явления 249	— неопределенности 129
Видимость 62	Диаграммы ширины на уровне половинной мощности 89
— оптическая 62	Диаметр медианный дождевых капель 56
ВКБ-приближение 34	Диатермия 74
Волна неполяризованная 43	Дисперсия флуктуации интенсивности 93
— плоская импульсная 143	Диффузии длина 246
— сферическая падающая 252	Диффузия от точечного источника 206
Волновод акустический 68	Диэлектрическая проницаемость жировой, мышечной и мозговой тканей 75
Волны акустические 48	
— частично поляризованные 183	
Время когерентности 113, 150	
Гамма-распределение модифицированное 57	
Гематокрит 76, 79, 207	
Герца вектор 24	
Гидроакустика 66	
Гидрометеоры 54	
Гидрооптика 64	
Град, оптические и СВЧ-свойства 63	

- Длина свободного пробега для изотропного рассеяния 247
- Доплеровский сдвиг 97
- Дымка, оптические и СВЧ-свойства 62
- Естественный свет 42
- Закон диффузного отражения 191
 - затенения 225
 - *Кирхгофа* излучения черного тела 178
 - *Ламберта* 169
 - *Ламберта* — *Вири* 76
 - *Юнга* 65
- Затухание в дожде 59
- Зона *Френеля* 157
- Излучатель остронаправленный 118
- Излучение диска 255
 - изотропное 169
- Измерение отражения 207
- Изобестические точки 77
- Импеданс акустический характеристический 51
- Импульс, распространение и рассеяние 108
 - — — — между передатчиком и приемником 151
 - узкополосный 109
 - уширение 113
- Инвариантное погружение 239
- Индикатор дальность—высота (ИДВ) 53
 - движущихся целей (ИДЦ) 133
 - кругового обзора (ИКО) 53
 - типа А 53
- Интенсивность диффузная 176, 188
 - когерентная 92, 137
 - коллимированная 177
 - некогерентная 92
 - падающая ослабленная 179, 188
 - поверхностная 166
 - поля 165
 - средняя 169
- Канал звуковой 68
 - с некоррелированным рассеянием 114
 - стационарный 114
 - — с некоррелированным рассеянием 114, 117, 129
 - SOFAR 68
- Катетер волоконнооптический 206, 209
 - оксиметрический 208
- Кирхгофа* закон 178
 - Когерентности полоса 113
- Концентрация 84
 - бактерий 192, 194
- Корреляционная функция временная 99, 141, 159
- Корреляция рассеянного поля пространственная 101
- Косинус угла рассеяния средний 197
- Коэффициент использования апертуры 90
 - поглощения 64
 - полного затухания 64
 - усиления 90
- Красные кровяные тельца 76
- Кровь гемолизованная 76
 - ультразвуковые свойства 80
 - характеристики и сечения 78
- Лагранжев подход, описание акустических волн 48
- Локаатор акустический 52, 68
 - лазерный 52
- Лучевая интенсивность 165
 - — измерение 167
 - — коллимированного пучка 193
 - — на плоской границе 171
 - — постоянство в свободном пространстве 169
- Малоугловое приближение 258
 - Метод перевала 150
- Ми* решение 37
- Милна* проблема 201, 256
- Многократного рассеяния теория 181
 - — — *Тверского* 163, 181

- Множественное рассеяние 84, 163
- Насыщенность кислородом 76, 78, 207
- Нефть, акустические свойства 70
- Облака, оптические и СВЧ-характеристики 62
- Огибающая комплексная модулированного сигнала 110
- Океаническое дно, альбедо 192
- — площадь 67
- Оксиметрия 78
- Оптическая плотность 77
- теорема 23
- Оптический путь 86, 135, 179
- Осадки, интенсивность выпадения 55
- Освещенность 168
- Отражение диффузное 191
- — и прохождение 224
- от облаков при оптической локации 121
- Первый порядок теории множественного рассеяния 82, 86, 187
- Плоскопараллельная среда 189, 224
- Плотность потока, распространяющегося назад 167
- — — вперед 167
- энергии 165, 168
- Площадь эффективная приемной апертуры 85
- Поглощение света в чистой воде 64
- Пойнтинга* вектор 185
- Показатель преломления воды и льда 59
- Поле когерентное 92
- некогерентное 92
- среднее 92, 137
- флуктуационное 92, 137
- Поляризация частичная 42
- эллиптическая 40
- Поперечное сечение пучка среднеквадратичное 267
- Потенциал скоростей 49
- Поток в теории переноса 165
- Приближение борцовское 31, 86
- диффузионное 83
- однократного рассеяния 82, 84
- Приемник движущийся 103
- Принцип инвариантности 239
- Пуанкаре* сфера 42
- Пузырьки воздушные 70
- Пучок коллимированный 192, 201, 204, 217
- оптический, флуктуации в дожде 160
- размер 193
- Радиолокатор доплеровский 130
- — импульсный 53, 130, 133
- когерентный 53, 130
- метеорологический 52
- некогерентный 53
- обычный 53
- однопозиционный 86
- Разреженная среда 187
- Распределение вероятностей рассеянного поля 104
- дождевых капель по размерам 55, 123
- *Лоу* и *Парсонса* 56
- *Маршалла* и *Палмера* 55, 160
- по размерам 47, 55, 123
- *Рэля* 105
- угловое 263
- частиц по размерам 47
- Распространение волн в облаке больших частиц 258
- — — пределах прямой видимости 134
- Рассеиватели в атмосфере 32
- — биологических средах 54
- — океане 52
- Рассеяние акустических волн 50
- звука в воде 66
- изотропное 243
- импульса бистатическое 126
- — обратное 118
- — — для передатчика с широкой диаграммой направленности 120

- на биологических средах 74—81
- — воздушных пузырьках 70
- — круглом диске 33
- — однородной сфере 32
- — случайно ориентированной частице 34
- обратное от дождя 91
- рэлеевское 27, 28
- — на сфероидальном диэлектрическом теле 30
- *Рэля* — *Дебая* 31
- Рассеяния амплитуда 18, 25
- — большой сферы 140
- коэффициент 64
- Расходимость угловая 266
- Рытова* приближение 153
- Светимость энергетическая 168
- СВЧ-излучение, максимальная безопасная плотность мощности 74, 75
- — обратное рассеяние от дождя 91
- нагреватель 74
- Сечение 17
- геометрическое 20
- дифференциальное рассеяния 19
- крови 78
- обратного рассеяния частицы 19
- — — слоя 91
- поглощения 20, 26
- полное 19
- рассеяния 17
- — бистатическое 85
- — единичного объема морской воды (свет) 65
- — зависящее от времени 94
- Сжимаемость 49
- Скорость звука в воде, воздухе и нефти 67, 70
- «слепая» доплеровского радиолокатора 132
- установившаяся дождевых капель 57
- частицы 95

- Среда слоистая плоскопараллельная 239
- случайная нестационарная 108
- Смешанный момент, двухчастотный 111
- Смог 62
- Снег 63
- Собственное значение 233
- Собственный вектор 233
- Сохранение энергии 175
- Спектр угловой 263
- уширение 113
- частотный 93, 99, 142
- — волны, распространяющейся в дожде 143, 160
- — флуктуации волн 159
- Среда полубесконечная 238
- Стационарная случайная функция 93
- Стокса* матрица 43, 184
- — параметры 40, 183
- — преобразование при повороте системы координат 45
- Теория двухпотоковая *Кубелки* и *Мунка* 212
- переноса излучения 164, 173
- — нейтронов 164
- четырехпотоковая 217
- Тепловое излучение 242
- Термоклин 67
- Ткани мышечные, диэлектрическая проницаемость 75
- Туман, оптические и СВЧ-свойства 62
- Угол ориентационный дождевой капли 55
- Узкая диаграмма направленности 88
- Уравнение *Больцмана* 164, 173
- волновое акустическое 49
- диффузионное 199, 250
- интегральное *Шварцшильда*—*Милна* 257
- *Максвелла* — *Больцмана* со столкновениями 164
- переноса 164, 173

— — интегральная форма 178
— радиолокации 85
— — бистатическое 85
— *Дайсона и Бете — Солпитера* 181
Фаза комплексная в методе *Рытова*
153
Фазовая матрица 184
Флуктуации интенсивности 93
— фазы 153
Формула интерполяционная
Лагранжа 229
— квадратурная 229
— — *Гаусса* 228, 230
— *Хени — Гринстейна* 198
Функция взаимной когерентности
164
— — — двухчастотная 111
— источника 175
— корреляционная 93
Функция неопределенности 128, 129
— передачи 110
— — нестационарная 110
— фазовая 19, 174, 227

— — *Рэля* 223
— фильтрующая по углам 157
— характеристическая флуктуации
скорости 96
Характеристики рассеяния и
поглощения дождя 55
Центральная предельная теорема 104
Частицы в морской воде 64, 65
— вращательное движение 98
— движущиеся 94
Частота повторения импульсов 53,
124
— резонансная воздушных
пузырьков в воде 71
Число *Кристофеля* 229
Ширина луча передающей антенны
89
Эйлерово описание акустических
волн 48
Экстинкции парадокс 20
Эритроциты 76
Ядра *Айткена* 54

Предисловие к русскому изданию

Исследование флуктуационных явлений при распространении волн в случайно-неоднородных средах привлекает все большее внимание специалистов самых разных областей современной науки и техники, таких как оптика, акустика, радиофизика, астрономия, техника связи, радиолокация и радионавигация, биология. Поэтому в настоящее время ощущается острая потребность в таком пособии по распространению и рассеянию волн в случайно-неоднородных средах, которое с одной стороны было бы доступно для неспециалистов в этой области, а с другой — давало бы достаточно полное и строгое представление о предмете.

Двухтомная монография А. Исимару, на наш взгляд, вполне удовлетворяет этим требованиям. В ней рассматриваются все основные понятия теории, подробно анализируются все наиболее полезные с точки зрения приложений теоретические методы и детально описываются эффекты, возникающие при распространении электромагнитных и акустических волн в случайно-неоднородных средах и при рассеянии на шероховатых поверхностях. Существенным достоинством монографии является то, что наряду с традиционными вопросами в ней затронуты и последние достижения в этой области, в частности теория сильных флуктуаций. В целом монография Исимару является основательным и квалифицированным введением в статистическую теорию распространения и рассеяния волн и охватывает все основные разделы этой теории.

В отличие от большинства книг подобного рода автор уделяет большое внимание практическим приложениям. Так, весьма подробно анализируется распространение и рассеяние направленных волновых пучков и импульсных сигналов, излагаются принципы дистанционного зондирования в биологии и геофизике, рассматриваются вопросы адаптивной оптики и т. д.

Единый подход к изложению материала делает монографию методически стройной и удобной для эффективного изучения предмета. В немалой степени этому способствует и весьма полная библиография, включающая большое число работ как зарубежных, так и советских авторов.

Предлагаемый перевод монографии Исимару на русский язык, по нашему мнению, будет полезным для научных работников и инженеров, а также для аспирантов и студентов таких специальностей, как атмосферная оптика, астрономия, геофизика, радиолокация, связь, метеорология, океанология и др.

Член-корр. АН СССР В. И. Татарский

Предисловие

Проблема распространения и рассеяния волн в атмосфере, океане и биологических средах в последние годы становится все более важной, особенно в таких областях науки и техники как связь, дистанционное зондирование и обнаружение. Свойства указанных сред, вообще говоря, подвержены случайным изменениям в пространстве и времени, в результате чего амплитуда и фаза распространяющихся в них волн также могут претерпевать пространственно-временные флуктуации. Эти флуктуации и рассеяние волн играют важную роль во многих проблемах, представляющих практический интерес. При рассмотрении вопросов связи приходится сталкиваться с амплитудно-фазовыми флуктуациями волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере и турбулентном океане, а также с такими понятиями, как время когерентности и полоса когерентности волн в среде. Рассеянные турбулентной средой волны можно использовать для установления загоризонтной связи. Диагностика турбулентности прозрачного воздуха, основанная на рассеянии волн, дает существенный вклад в решение вопроса о безопасной навигации. Геофизики интересуются флуктуациями волн, возникающими при их распространении через атмосферы планет, и таким способом получают информацию о турбулентности и динамических характеристиках этих атмосфер. Биологи могут использовать флуктуации и рассеяние акустических волн с диагностическими целями. В радиолокации могут возникать мешающие эхосигналы от ураганов, дождя, снега или града. Зондирование геологических сред с помощью электромагнитных и акустических волн требует знания характеристик рассеяния случайно распределенных в пространстве неоднородностей. Упомянем, наконец, недавно возникшую область океанографии — радиоокеанографию (исследование свойств океана по рассеянию радиоволн). Центральным пунктом этой методики является знание характеристик волн, рассеянных на шероховатой поверхности.

Все перечисленные проблемы отличаются статистическим описанием волн и сред распространения. Эта характерная черта позволяет ввести основные понятия, общие для всех указанных проблем. В данной книге мы намерены дать единое и систематическое изложение основных вопросов распространения и рассеяния волн в случайных средах. Это непростая задача, но мы надеемся, что читатели смогут уловить общие идеи, несмотря на

различіе формулировок и обилие областей, охваченных в этой книге. Следует подчеркнуть, что в связи с различіем природы проблем для получения полезных результатов приходится использовать разные приближенные методы. Поэтому мы дадим систематическое описание используемых приближенных методов, применимых для широкого класса задач.

Дистанционное зондирование геофизических и метеорологических параметров методами, основанными на распространении и рассеянии волн, стало чрезвычайно важным и полезным средством изучения структуры и динамики атмосферы. Получаемые таким образом сведения используются для улучшения качества прогноза погоды, для разработки методов искусственного воздействия на погоду, для исследования загрязнений атмосферы и для повышения безопасности воздушного сообщения. Обзор современного состояния исследований в этой области служит введением для последующего изучения более общих методов дистанционного зондирования.

Таким образом, предлагаемая книга предназначена для инженеров и научных работников, интересующихся вопросами распространения и рассеяния оптического, акустического и СВЧ излучения в атмосферах планет, в океанах и в биологических средах, особенно для тех из них, кто занимается проблемами связи в таких средах и вопросами дистанционного зондирования свойств этих сред. Данную книгу можно рассматривать как введение в круг основных понятий и результатов статистической теории распространения волн. Включенное в книгу систематическое описание теории переноса излучения и теории многократного рассеяния представляет интерес также для химиков, геофизиков и специалистов в области ядерной физики. Предварительная подготовка, необходимая для понимания книги, предполагает некоторое знакомство с методами решения волновых уравнений, уравнений Максвелла, с векторным исчислением, рядами и интегралами Фурье.

Рассматриваемые в книге вопросы можно разбить на три группы: волны в случайных облаках дискретных рассеивателей, волны в сплошных случайных средах и рассеяние волн на шероховатой поверхности. Случайные облака дискретных рассеивателей представляют собой случайное распределение в пространстве множества частиц. Их примерами являются дождь, туман, смог, град, частицы в океане, красные кровяные тельца в крови, молекулы полимеров и другие частицы, совершающие броуновское движение. Сплошные случайные среды — это среды, свойства которых меняются случайно и непрерывно во времени и в пространстве. В качестве примеров приведем турбулентность чистого воздуха, выхлопные струи двигателей, тропосферную и ионосферную турбулентность, турбулентность океана

и биологические среды, такие как биологические ткани и мышцы. Примерами шероховатых поверхностей являются поверхность океана, поверхности планет, границы раздела между различными биологическими средами и негладкие поверхности световодов.

В первом томе монографии (части I и II) рассматриваются теория однократного рассеяния и теория переноса излучения. Теория однократного рассеяния применима для описания рассеяния волн в разреженных облаках рассеивателей. Она охватывает большое число встречающихся на практике ситуаций, включая радиолокацию, а также лазерную и акустическую локацию в различных средах. Относительная математическая простота этой теории позволяет без излишних трудностей ввести большинство фундаментальных понятий, таких как полоса когерентности, время когерентности, временная частота, и рассмотреть движение рассеивателей и распространение импульсов. Мы приводим также некоторые оценочные значения характеристик частиц в атмосфере, океане и в биологических средах. Теория переноса излучения, которую также называют кратко теорией переноса, имеет дело с изменением интенсивности волны, распространяющейся через случайное облако рассеивателей. Эта теория используется при решении многих задач рассеяния оптического и СВЧ излучения в атмосфере и биологических средах. В книге описываются различные приближенные способы решения, включая диффузионное приближение, метод Кубелки — Мунка, плоскостное приближение, приближение изотропного рассеяния и малоугловое приближение.

Во втором томе (части III, IV и V) приводится большое количество новых результатов, полученных в последнее время в теории распространения и рассеяния волн в случайных средах. Часть III посвящена теории многократного рассеяния волн в случайных облаках рассеивателей. Часть IV охватывает теорию слабых и сильных флуктуаций волн в сплошных случайных средах и в турбулентности. В части V даны основы теории рассеяния волн на шероховатой поверхности и дистанционного зондирования свойств случайных сред, включая некоторые важные вопросы решения обратных задач.

От автора

В основу этой книги положен курс лекций, подготовленный автором для аспирантов первого года обучения по специальности «Волны в случайных средах» и читавшийся им на электротехническом факультете Вашингтонского университета на протяжении нескольких последних лет. Материалы этой книги использовались также при чтении в 1973 и 1974 г. недельного курса лекций по теории волн в случайных средах и ее применениям в Университетском колледже Лос-Анджелеса.

Автор выражает признательность своим коллегам и аспирантам, сделавшим много полезных замечаний. Особую благодарность он приносит Зигельману и Карлсону из Вашингтонского университета, Ричарду Ву из Лаборатории реактивного движения, Кавуру Йе из Университетского колледжа Лос-Анджелеса, Курту Джонсону из Университета штата Юта, Виктору Тверскому из Иллинойского университета (Чикагское отделение), Маркувицу из Нью-Йоркского политехнического института и Келлеру из Нью-Йоркского университета (Курантовский институт) за полезные обсуждения, советы и поддержку. Значительная часть работы над этой книгой выполнялась при поддержке Электротехнического общества (ранее Кембриджская исследовательская лаборатория ВВС), Национального научного фонда и Национального института здоровья. Автор признателен также миссис Эйлин Флюэллинг за оказанную помощь при подготовке рукописи и квалифицированную перепечатку.

Введение

Во многих задачах распространения и рассеяния волн среду, в которой проходит волна, можно рассматривать либо как детерминированную, либо как случайную. По детерминированным задачам проведено большое количество исследований; сюда относятся, например, теория антенн различного типа, теория дифракции и рассеяния, направленные волны. В отличие от этих задач многие природные и биологические среды испытывают случайные изменения во времени и в пространстве. Поэтому волны в таких средах претерпевают случайные изменения амплитуды и фазы, так что их описание должно проводиться на языке статистических средних величин и распределений вероятности. В данной книге мы обращаемся к следующим вопросам: как волна взаимодействует со случайной средой, как эти взаимодействия формулируются и выражаются математически и как получить решения большого класса практически важных задач.

Монография разделена на пять частей. Первый том содержит части I и II. В части I (гл. 2—6) рассматривается рассеяние и распространение волн в разреженных случайных облаках рассеивателей. Здесь для объяснения фундаментальных понятий теории флуктуаций волн в случайных средах используется теория однократного рассеяния и ее незначительное обобщение, что позволяет избежать излишних математических сложностей. Кроме того, эта теория охватывает широкий круг важных для практики задач распространения и рассеяния волн в атмосфере, океане и других случайных средах. Часть II (гл. 7—13) посвящена теории переноса излучения. Второй том включает части III—V. В части III (гл. 14 и 15) рассматривается теория многократного рассеяния волн в случайных облаках рассеивателей. Часть IV (гл. 16—20) охватывает теорию слабых и сильных флуктуаций в сплошной случайной среде и в турбулентности. В части V (гл. 21 и 22) описаны рассеяние на шероховатой поверхности и дистанционное зондирование случайных сред.

Случайные среды можно разбить на три группы: случайные облака дискретных рассеивателей, сплошные случайные среды и шероховатые поверхности. Случайные облака дискретных рассеивателей представляют собой случайное распределение в пространстве множества частиц. Примерами могут служить дождь,

туман, смог, град, аэрозоль, частицы в океане, красные кровяные тельца, молекулы полимеров, молекулы. Анализ распространения и рассеяния волн в таких случайных средах может быть осуществлен в два этапа. Сначала мы рассматриваем характеристики рассеяния и поглощения отдельной частицы, а затем переходим к рассмотрению характеристик волны при наличии большого числа случайно распределенных рассеивателей.

Первый этап обсуждается в гл. 2. Она начинается с определения амплитуды рассеяния и сечений рассеяния и поглощения. Кратко описаны рэлеевское рассеяние, приближение Рэлея — Дебая (борновское), приближение ВКБ и теория Ми. Включено также обсуждение поляризационных эффектов и параметров Стокса. Дано краткое описание всех определений для случая акустических волн.

В гл. 3 приведены примеры характеристик рассеяния и поглощения для некоторых практических задач. Обсуждаются свойства частиц в атмосфере и океане, к которым относятся аэрозоль, гидрометеоры, воздушные пузырьки и рыбы. Кроме того, рассматриваются оптические и акустические свойства красных кровяных телец в крови.

При низкой плотности частиц, когда эффектами многократного рассеяния можно пренебречь, применима теория однократного рассеяния. В гл. 4—6 на основе теории однократного рассеяния даны решения некоторых прикладных задач. Задача рассеяния рассматривается в гл. 4, а гл. 5 посвящена распространению и рассеянию импульсного излучения. Здесь дано общее описание распространения и рассеяния импульса в случайной среде с изменяющимися во времени свойствами. Гл. 6 посвящена флуктуациям волны в облаке дискретных рассеивателей применительно к задаче распространения в пределах прямой видимости.

В гл. 7—13 излагается теория переноса излучения, а в гл. 14 и 15 — теория многократного рассеяния. Исторически задача распространения волн в облаке случайных рассеивателей исследовалась с двух различных точек зрения. Одна из них — теория переноса излучения, или просто теория переноса, другая — теория многократного рассеяния. Теория переноса имеет дело с интенсивностями распространяющихся волн. Она опирается на феноменологические и эвристические закономерности поведения интенсивности волны при распространении и впервые была предложена Шустером в 1905 г.¹⁾ в его работе по распространению излучения в загрязненной атмосфере. Основное диф-

¹⁾ Уравнение переноса излучения ранее было предложено известным русским физиком О. Д. Хвольсоном (см. Известия Петербургской Академии наук, т. 33, с. 221, 1890 г.). — *Прим. перев.*

ференциальное уравнение этой теории называется уравнением переноса, оно эквивалентно уравнению Больцмана в кинетической теории газов и уравнению переноса нейтронов. Это уравнение успешно применялось при исследовании видимости в атмосфере и под водой, в морской биологии, при разработке фотографических эмульсий и при исследовании распространения лучистой энергии в атмосферах планет, звезд и в галактиках. В гл. 7 даются определения таких фундаментальных величин, как лучевая интенсивность, поток и плотность энергии. Выводятся дифференциальные и интегральные уравнения, которым подчиняются эти величины, и приводятся граничные условия общего вида и соотношения, выражающие закон сохранения энергии.

Точных общих решений уравнений, выведенных в гл. 7, до сих пор не найдено. Тем не менее имеется ряд частных случаев, для которых удастся получить простые и полезные приближенные решения. В гл. 8 и 9 рассматриваются два таких предельных случая: разреженное и плотное облака дискретных рассеивателей. Для разреженных облаков может быть использовано первое приближение теории многократного рассеяния, а для плотных — диффузионное приближение. Эти два метода применимы для решения широкого круга прикладных задач. Примерами могут служить распространение и рассеяние СВЧ и оптических волн в аэрозолях и гидрометеорах, рассеяние оптического излучения на бактериях и диффузия света в крови.

В гл. 10 и 11 обсуждается распространение волн в среде, ограниченной параллельными плоскостями. Такая простая геометрия отвечает большому числу физических ситуаций (атмосферы планет, слои в океане, слой крови или тонкий слой краски) и допускает довольно простые решения. В гл. 10 рассматриваются двух- и четырехпотоковая теории, которые широко использовались до последнего времени. Этот метод был развит эвристически Кубелкой и Мунком в 1931 г. В гл. 10 мы включили его вывод на основе теории переноса излучения, обеспечивающий новое теоретическое обоснование двух- и четырехпотоковой теорий. Гл. 11 посвящена описанию многопотоковой теории, удобной для численных расчетов на ЭВМ, в ней также дается общий формализм решения задач для многослойных сред.

В гл. 12 и 13 рассматриваются два других предельных случая малых и больших частиц. Если размер частицы мал по сравнению с длиной волны, то рассеяние почти изотропно (равномерно во всех направлениях), за исключением дипольного рассеяния в электромагнитном случае. При изотропном рассеянии амплитуда рассеяния постоянна, и это приводит

к существенным математическим упрощениям. Эти упрощения рассматриваются в гл. 12; они указывают на ясную связь с диффузионным приближением, обсуждаемым в гл. 9. В гл. 13 представлено приближение для больших частиц. Если размер частицы велик по сравнению с длиной волны, то рассеяние происходит в основном вперед, и уравнение переноса может быть решено точно методом преобразования Фурье. Это приближение применимо во многих задачах распространения оптических пучков в воде и атмосфере.

В отличие от теории переноса в аналитической теории (или теории многократного рассеяния) исходят из волнового уравнения, получают решения для отдельной частицы, вводят эффекты взаимодействия многих частиц и уже затем рассматривают статистически усредненные величины. Один из наиболее употребительных вариантов теории многократного рассеяния был развит Тверским. Детальное изложение его теории дано в гл. 14. Там же рассматривается связь теории переноса с теорией многократного рассеяния Тверского.

В гл. 15 рассматривается задача о флуктуациях волн и распространении импульсного излучения в облаке случайных рассеивателей, которая важна с точки зрения проблем связи и дистанционного зондирования. Однако ввиду математических трудностей в этом направлении было получено очень мало результатов. В данной главе делается попытка ввести читателя в круг основных понятий, описывающих флуктуации волн и распространение импульсного излучения в облаке случайных рассеивателей, включая влияние рассеивателей на полосу когерентности, форму импульса и разрешение изображений.

Термин «сплошная случайная среда» обозначает среду, показатель преломления которой меняется случайно и непрерывно во времени и в пространстве. Примерами могут служить тропосферная и ионосферная турбулентность, атмосферы планет, солнечная корона, турбулентность жидкости, турбулентные следы и факелы самолетов и ракет, турбулентность чистого воздуха и биологические среды. Если в данной точке случайной среды флуктуации ее свойств ниже определенного уровня, то флуктуации волны малы. В этом случае обычно говорят о «слабых флуктуациях». Если же флуктуации свойств среды велики, то этот случай относится к так называемым «сильным флуктуациям». Для слабых флуктуаций возможен ряд упрощений и приближений. Этому случаю посвящены гл. 16—19.

В гл. 16 рассматривается рассеяние монохроматических волн и импульсов на объеме сплошной случайной среды. Здесь учитывается влияние движения среды и вводятся такие характеристики, как двухчастотные корреляционные функции, полоса ко-

герентности и время когерентности, которые приобретают все большее значение в теории связи.

Гл. 17 посвящена задаче распространения волн в случайной среде в пределах прямой видимости. Эта задача находит применение при анализе распространения СВЧ и оптических волн в атмосфере. Изложение этих вопросов ведется на основе спектрального представления флуктуационных характеристик волн и показателя преломления среды. Вводятся понятия спектральной и пространственной фильтрующих функций; учитывается влияние изменения свойств случайной среды вдоль пути распространения.

В гл. 18 рассматривается распространение сферической волны и волнового пучка. Понятие сферической волны используется в большинстве задач распространения СВЧ-излучения. Понятие волнового пучка необходимо при анализе распространения в случайных средах волн оптического и миллиметрового диапазона. В гл. 19 обсуждаются временные флуктуации и спектры волны, распространяющейся в случайной среде с меняющимися во времени свойствами. Эти характеристики находят применение в дистанционном зондировании атмосфер планет и солнечной короны, а также полезны при дистанционном определении скорости ветра.

Гл. 20 посвящена сложной проблеме сильных флуктуаций. Интенсивные исследования в этом направлении проводятся в США, СССР, Японии, Нидерландах и других странах. В данной главе предпринята попытка дать введение в теорию сильных флуктуаций и общий обзор этой теории. Подробно рассматриваются взаимная функция когерентности в случайной среде, временные частотные спектры и двухчастотные корреляционные функции. Затрагиваются также вопросы флуктуаций интенсивности, теория тонкого экрана, модуляционная передаточная функция случайной среды и адаптивная оптика.

В гл. 21 дается введение в теорию рассеяния волн на шероховатых поверхностях. Обсуждаются два основных подхода — метод малых возмущений и метод Кирхгофа, а также кратко перечисляются последние достижения в области рассеяния волн на поверхности океана. Для указанных двух приближений вводится понятие сечения рассеяния единичной площадки шероховатой поверхности. Рассматриваются когерентная и некогерентная (диффузная) составляющие интенсивности и их временные частотные спектры с учетом движения шероховатой поверхности.

В последние годы заметно возрос интерес к дистанционному зондированию таких метеорологических параметров, как скорость ветра и интенсивность турбулентности методами, основанными на распространении и рассеянии волн. Недавно было

предложено несколько новых методов дистанционного зондирования. Гл. 22 посвящена описанию современного состояния исследований в этой интересной и важной области. Рассматриваются три общих метода решения обратных задач: метод регуляризации, метод статистического обращения и метод обращения Бакуса — Гильберта.

В приложениях дана сводка полезных формул для спектральных представлений случайных функций. Включены также краткие сведения о параметрах турбулентности и о флуктуациях показателя преломления.

Рассеяние и распространение волн в разреженных облаках дискретных рассеивателей.

Приближение однократного рассеяния

Глава 2

Рассеяние и поглощение волны отдельной частицей

Основной интерес для нас представляют характеристики прохождения и рассеяния волны при наличии облака случайно распределенных частиц. Анализ этой задачи мы проведем в два этапа. Сначала рассмотрим отдельную частицу и изучим ее характеристики рассеяния и поглощения. На втором этапе мы учтем вклады большого числа частиц и выведем общие соотношения для волны, распространяющейся в облаке случайно распределенных частиц. В данной главе описывается первый из этих этапов — анализ характеристик отдельной частицы. Этот вопрос исчерпывающе освещен в ряде книг¹⁾, поэтому здесь приводится лишь краткая сводка основных результатов.

2.1. Сечение рассеяния и амплитуда рассеяния

При освещении частицы волной часть падающей мощности рассеивается, а часть поглощается. Эти два явления — рассеяние и поглощение — удобнее всего описывать, предположив, что частица освещается плоской падающей волной.

¹⁾ Подробный анализ дан в работах [87, 162] (см. также [86, 127]). В работе [42] приведены таблицы характеристик рассеяния частиц в атмосфере и распределение частиц по размерам. Проводящие тела и акустически твердые и мягкие объекты описаны в работе [22]. См. также работу [128], где приведено много примеров сечений рассеяния, и обзор по рассеянию света в химии [90]. Более полная теория рассеяния изложена в работах [55, 94, 111].

Рассмотрим линейно-поляризованную плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 и магнитной проницаемостью μ_0 ; электрическое поле такой волны имеет вид

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_i \exp(ik\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.1)$$

Здесь амплитуда поля $|\mathbf{E}_i|$ выбрана равной 1 В/м, $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны в среде, $\hat{\mathbf{i}}$ — единичный вектор в направлении распространения, а $\hat{\mathbf{e}}_i$ — единичный вектор, задающий направление поляризации.

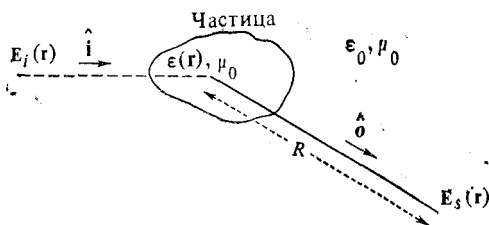


Рис. 2.1. Плоская волна $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ падает на диэлектрический рассеиватель; рассеянная волна $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ наблюдается на расстоянии R в направлении $\hat{\mathbf{o}}$.

Эта волна падает на частицу (рис. 2.1) с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_r(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \epsilon'_r(\mathbf{r}) + i\epsilon''_r(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

которая, вообще говоря, является комплексной и зависит от координат, так как частица может обладать поглощением и быть неоднородной. Поле на расстоянии R , отсчитываемом от некоторой точки внутри частицы в направлении единичного вектора $\hat{\mathbf{o}}$, равно сумме поля падающей волны $\mathbf{E}_i$ и поля рассеянной на частице волны $\mathbf{E}_s$. На расстояниях $R < D^2/\lambda$ (D — характерный размер частицы, например ее диаметр) вследствие интерференции волн от различных точек частицы амплитуда и фаза поля $\mathbf{E}_s$ меняются сложным образом. В этом случае говорят, что точка наблюдения $\mathbf{r}$ находится в ближней зоне частицы. При $R > D^2/\lambda$ рассеянное поле $\mathbf{E}_s$ ведет себя как сферическая волна и может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R > D^2/\lambda, \quad (2.3)$$

где амплитуда рассеяния $f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$ описывает амплитуду, фазу и поляризацию рассеянной волны в дальней зоне в направлении

$\hat{\mathbf{0}}$ при условии, что на частицу падает плоская волна, распространяющаяся в направлении $\hat{\mathbf{i}}$. Следует отметить, что даже в случае линейной поляризации падающей волны рассеянная волна, вообще говоря, имеет эллиптическую поляризацию.

Рассмотрим плотность потока мощности S_s рассеянной в направлении $\hat{\mathbf{0}}$ волны на расстоянии R от частицы при падении на нее волны с плотностью потока мощности S_i . Дифференциальное сечение рассеяния частицы определяется следующим образом:

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \lim_{R \rightarrow \infty} [(R^2 S_s / S_i)] = |\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 = (\sigma_t / 4\pi) p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}), \quad (2.4)$$

где S_i и S_s — амплитуды векторов плотности потока мощности падающей и рассеянной волн:

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*) = \frac{|E_i|^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{S}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) = \frac{|E_s|^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{0}}, \quad (2.5)$$

а $\eta_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$ — характеристический импеданс среды. Видно, что σ_d имеет размерность площади, деленной на телесный угол. Сечение рассеяния σ_d имеет следующий физический смысл. Предположим, что в пределах телесного угла 1 стерадиан вблизи направления $\hat{\mathbf{0}}$ плотность потока мощности рассеянной волны постоянна и равна значению для направления $\hat{\mathbf{0}}$. Тогда поперечное сечение частицы, от которой рассеивается такая мощность, равно σ_d ; отсюда ясно, что σ_d меняется в зависимости от $\hat{\mathbf{0}}$. Безразмерная величина $p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ в (2.4) называется фазовой функцией и широко используется в теории переноса лучистой энергии¹⁾. Величина σ_t — это полное сечение, которое определено ниже [формула (2.9)].

В радиолокационных приложениях часто используются бистатическое радиолокационное сечение рассеяния σ_{bi} и сечение обратного рассеяния σ_b . Они связаны с σ_d соотношениями

$$\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = 4\pi\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}), \quad \sigma_b = 4\pi\sigma_d(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}). \quad (2.6)$$

Величину σ_b называют также радиолокационным сечением рассеяния. Физический смысл σ_{bi} можно выяснить аналогично тому, как это сделано для σ_d . Предположим, что в пределах полного телесного угла 4π плотность потока мощности постоянна и равна значению плотности для направления $\hat{\mathbf{0}}$. Тогда поперечное сечение площадки, от которой рассеивается такая мощность, равно значению σ_d для направления $\hat{\mathbf{0}}$ умноженному на 4π .

¹⁾ Фазовая функция описывает рассеянную мощность и не имеет никакого отношения к фазе волны. Название «фазовая функция» возникло в астрономии и связано с фазами Луны.

Рассмотрим теперь полный поток мощности, рассеянный частицей *во всех направлениях*. Сечение частицы, дающей такое количество рассеянной мощности, называется сечением рассеяния σ_s ; оно определяется формулой

$$\sigma_s = \int_{4\pi} \sigma_d d\omega = \int_{4\pi} |\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 d\omega = \frac{\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) d\omega, \quad (2.7)$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла. Отношение W_0 сечения рассеяния к полному сечению называется *альбедо* отдельной частицы и определяется выражением

$$W_0 = \frac{\sigma_s}{\sigma_t} = \frac{1}{\sigma_t} \int_{4\pi} |\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) d\omega. \quad (2.8)$$

Рассмотрим далее полную мощность, *поглощаемую* частицей. Поперечное сечение частицы, отвечающее этому количеству мощности, называется сечением поглощения σ_a .

Сумма сечений рассеяния и поглощения называется полным сечением σ_t :

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a. \quad (2.9)$$

2.2. Общие свойства сечений

Прежде чем перейти к детальному математическому описанию определенных выше сечений, целесообразно, по-видимому, дать общее представление о том, как эти сечения связаны с геометрическим сечением частицы, длиной волны и диэлектрической проницаемостью.

Если размер частицы во много раз превосходит длину волны, полное сечение σ_t с увеличением размера частицы приближается к удвоенному геометрическому сечению частицы σ_g ¹⁾. Для объяснения этого факта рассмотрим падающую волну с плотностью потока мощности S_i (рис. 2.2). Полный поток мощности в пределах геометрического сечения σ_g , равный $S_i \sigma_g$, либо рассеивается, либо поглощается частицей. Позади частицы имеется область тени, где поля практически нет. В области тени рассеянная частицей волна по амплитуде в точности равна падающей, но фаза ее отличается на 180° , так что амплитуда потока рассеянной волны равна $S_i \sigma_g$. Таким образом, общий поток, рассеянный и поглощенный частицей, приближается к $S_i \sigma_g + S_i \sigma_g$, так что полное сечение σ_t стремится к

$$\sigma_t \rightarrow 2S_i \sigma_g / S_i = 2\sigma_g. \quad (2.10a)$$

¹⁾ Это явление называется парадоксом экстинкции (см. [162]).

Видно также, что полная мощность, поглощаемая очень большой частицей, не может превосходить значения $S_i \sigma_g$, так что сечение поглощения σ_a стремится к некоторому постоянному значению, несколько меньшему, чем геометрическое сечение:

$$\sigma_a \leq \sigma_g. \quad (2.106)$$

Если размер частицы много меньше длины волны, то сечение рассеяния σ_s обратно пропорционально четвертой степени длины волны и прямо пропорционально квадрату объема частицы. Чтобы продемонстрировать это [87] (см. также разд. 2.5), за-

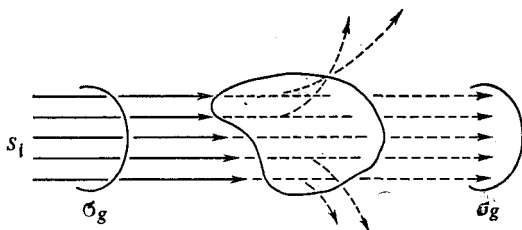


Рис. 2.2. Связь полного сечения большой частицы с ее геометрическим сечением.

метим, что рассеянное поле E_s порождается полем внутри частицы, так что поле E_s на расстоянии R пропорционально падающему полю E_i и объему V рассеивателя:

$$|E_s| = |E_i| [(\text{const}) V/R].$$

Константа в этом уравнении должна иметь размерность (длина) $^{-2}$, а поскольку она зависит только от длины волны, она должна быть пропорциональна λ^{-2} . Сопоставляя этот результат с (2.3), получаем

$$|E_s| \sim |E_i| \frac{V}{R\lambda^2} \sim |E_i| \frac{|f(\hat{0}, \hat{1})|}{R}.$$

Таким образом, $\sigma_s \sim |f(\hat{0}, \hat{1})|^2 \sim V^2/\lambda^4$. Рассеяние на малой частице, обладающее указанным свойством, обычно называют рэлеевским рассеянием. Сечение поглощения σ_a малого рассеивателя обратно пропорционально длине волны и прямо пропорционально его объему. Сравнивая с геометрическим сечением [см. (2.21) и (2.32)], имеем

$$\sigma_s/\sigma_g \sim (\text{размер}/\lambda)^4 [(\epsilon'_r - 1)^2 + \epsilon''_r{}^2], \quad (2.11a)$$

$$\sigma_a/\sigma_g \sim (\text{размер}/\lambda) \epsilon''_r. \quad (2.116)$$

Кривые таких нормированных сечений в зависимости от относительного размера частицы приведены на рис. 2.3.

Для большой частицы можно определить также характер поведения сечения обратного рассеяния σ_b . Рассмотрим точку зеркального отражения на поверхности частицы (рис. 2.4). Падающая волна с плотностью потока мощности S_i освещает малую площадку $\Delta l_1 \Delta l_2 = (a_1 \Delta \theta_1) (a_2 \Delta \theta_2)$. Поскольку радиусы кривизны поверхности велики, поверхность частицы можно считать

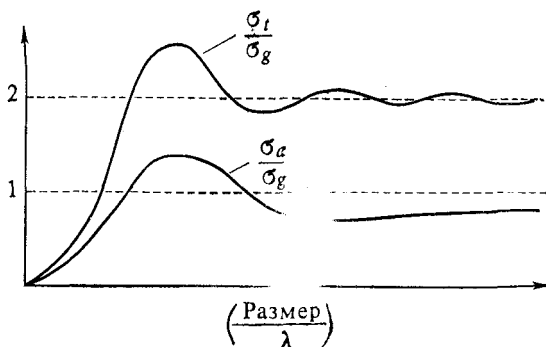


Рис. 2.3. Полное сечение σ_t и сечение поглощения σ_a , нормированные на геометрическое сечение σ_g .

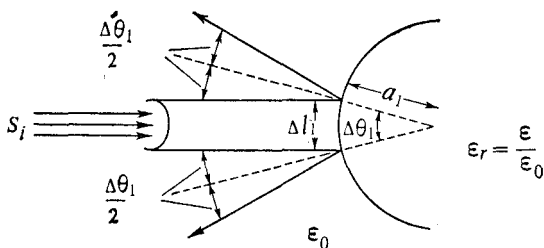


Рис. 2.4. Обратное рассеяние от большой частицы.

локально плоской. Используя поэтому коэффициент отражения при нормальном падении на плоскую границу, получаем для плотности потока отраженной мощности вблизи поверхности выражение

$$S_r = |(\sqrt{\epsilon_r} - 1)/(\sqrt{\epsilon_r} + 1)|^2 S_i.$$

На большом расстоянии R от частицы поток, исходящий от рассматриваемой малой площадки $\Delta l_1 \Delta l_2$, распределяется на площади $R^2 (2\Delta \theta_1) (2\Delta \theta_2)$, в силу чего плотность потока рассеянного излучения S_s на расстоянии R связана с S_r соотношением

$$S_s R^2 (2\Delta \theta_1) (2\Delta \theta_2) = S_r (a_1 \Delta \theta_1) (a_2 \Delta \theta_2).$$

Отсюда получаем для сечения обратного рассеяния σ_b выражение

$$\begin{aligned}\sigma_b &= 4\pi\sigma_d(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) = \lim_{R \rightarrow \infty} (4\pi R^2 S_s/S_i) = \\ &= \pi a_1 a_2 |(\sqrt{\epsilon_r} - 1)/(\sqrt{\epsilon_r} + 1)|^2. \quad (2.12)\end{aligned}$$

Полученное выражение представляет собой предельное значение σ_b при стремлении размера частицы к бесконечности, поэтому при любом конечном размере частицы сечение σ_b может иметь значение, существенно отличающееся от (2.12) [42].

2.3. Оптическая теорема

Полное сечение σ_t описывает полные потери мощности в падающей волне, обусловленные рассеянием и поглощением волны в частице. Эти потери тесно связаны с поведением рассеянной волны в направлении вперед, и соответствующее общее соотношение является содержанием оптической теоремы, или теоремы о рассеянии вперед.

Оптическая теорема утверждает, что полное сечение σ_t связано с мнимой частью амплитуды рассеяния в направлении вперед $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})$, и эта связь имеет вид

$$\sigma_t = (4\pi/k) \operatorname{Im} [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})] \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (2.13)$$

где Im означает «мнимая часть», а $\hat{\mathbf{e}}_i$ — единичный вектор, характеризующий направление поляризации падающей волны (доказательство этой теоремы приведено в работе [21]).

Эта теорема используется для расчета полного сечения в тех случаях, когда амплитуда рассеяния известна. Она используется также при определении ослабления когерентного поля.

2.4. Интегральные представления амплитуды рассеяния и сечения поглощения

Математическое описание амплитуды рассеяния и сечений рассеяния и поглощения можно осуществить одним из двух способов. Для тел простой формы, подобных сфере или бесконечному цилиндру, удастся найти точные выражения для этих величин. Точное решение для сферы из диэлектрика, которое называют решением Ми, рассмотрено в разд. 2.8. Однако в большинстве практически важных случаев форма частиц не является простой. Поэтому нужен метод определения приближенных значений сечений рассеяния и поглощения, пригодный для

частиц сложной формы (рассеяние на телах произвольной формы рассмотрено в работе [100]). Такой метод можно разработать, исходя из интегральных представлений амплитуды рассеяния. Простота вычислений делает этот метод полезным и для частиц простой формы.

Рассмотрим диэлектрическое тело, относительная диэлектрическая проницаемость которого является функцией пространственных координат:

$$\epsilon_r(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \epsilon'_r(\mathbf{r}) + i\epsilon''_r(\mathbf{r}) \text{ в объеме } V. \quad (2.14)$$

Тело занимает объем V и окружено средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 .

Запишем уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (2.15a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}. \quad (2.15b)$$

Здесь принимается, что магнитная проницаемость μ_0 постоянна и одинакова как внутри, так и вне тела. Если уравнение (2.15b) записать в виде

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J}_{eq}, \quad (2.15b')$$

где

$$\mathbf{J}_{eq} = \begin{cases} -i\omega\epsilon_0[\epsilon_r(\mathbf{r}) - 1]\mathbf{E} & \text{в объеме } V, \\ 0 & \text{вне объема } V, \end{cases}$$

то слагаемое $\mathbf{J}_{eq}$ можно рассматривать как эквивалентный источник тока, порождающий рассеянную волну. Решение уравнений (2.15a) и (2.15b') имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_s(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

где $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{H}_i$ — электрическое и магнитное поля первичной (или падающей) волны, которые существовали бы в отсутствие частицы, а $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ — электрическое и магнитное поля рассеянной этой телом волны. Используя вектор Герца $\mathbf{\Pi}_s$, запишем¹⁾

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0 \nabla \times \mathbf{\Pi}_s(\mathbf{r}), \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_s(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \int_V G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') dV' = \\ &= \int_V [\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV', \end{aligned} \quad (2.17b)$$

где $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ — функция Грина свободного пространства.

¹⁾ Уравнение (2.17b) справедливо только при $\mathbf{r} \notin V$.

Для нахождения амплитуды рассеяния рассмотрим поле $E_s(\mathbf{r})$ в дальней зоне частицы. Из рис. 2.5 видно, что $\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{o}}$, так что в дальней зоне амплитудный множитель $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ функции Грина можно приближенно заменить на $1/R$. В фазе величину $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ заменить на R нельзя, так как эта разность может

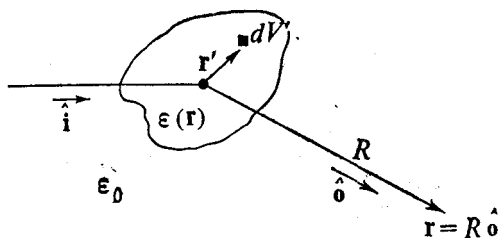


Рис. 2.5. Геометрическое положение точки внутри частицы $\mathbf{r}'$ и точки наблюдения $\mathbf{r}$.

значительно превосходить длину волны. Разлагая $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в биномиальный ряд и ограничиваясь первым членом разложения, получаем

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + \mathbf{r}'^2 - 2R\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{o}})^{1/2} \simeq R - \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{o}}.$$

В результате при больших R функция Грина принимает вид

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ikR - i\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{o}})}{4\pi R}. \quad (2.18)$$

Отметим также, что в дальней зоне

$$\nabla(e^{ikR}/R) \simeq (e^{ikR}/R)(ik\nabla R) = (ik\hat{\mathbf{o}})(e^{ikR}/R), \quad (2.19)$$

и, следовательно, оператор ∇ эквивалентен $ik\hat{\mathbf{o}}$. Подставляя (2.18) и (2.19) в (2.17), находим¹⁾

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{\exp(ikR)}{R}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \{-\hat{\mathbf{o}} \times [\hat{\mathbf{o}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \} \{e_r(\mathbf{r}') - 1\} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{o}}) dV'.$$

Это точное выражение для амплитуды рассеяния $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$ через полное электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ внутри частицы. Поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$,

¹⁾ Отметим, что $\{-\hat{\mathbf{o}} \times [\hat{\mathbf{o}} \times \mathbf{E}]\} = \mathbf{E} - \hat{\mathbf{o}}(\hat{\mathbf{o}} \cdot \mathbf{E})$, где $\hat{\mathbf{o}}(\hat{\mathbf{o}} \cdot \mathbf{E})$ — компонента $\mathbf{E}$ вдоль $\hat{\mathbf{o}}$. Поэтому $\{\hat{\mathbf{o}} \times [\hat{\mathbf{o}} \times \mathbf{E}]\}$ представляет собой компоненту $\mathbf{E}$, перпендикулярную к $\hat{\mathbf{o}}$.

вообще говоря, неизвестно, поэтому выражение (2.20) не дает замкнутого описания амплитуды рассеяния через известные величины. Однако во многих практически важных случаях поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ можно приближенно заменить некоторой известной функцией и, таким образом, получить полезное приближенное выражение для $f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$. Это будет осуществлено в разд. 2.5—2.7.

Сечение поглощения σ_a диэлектрического тела представляет собой объемный интеграл от потерь внутри частицы:

$$\sigma_a = \left(\int_V \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' |\mathbf{E}|^2 dV \right) / S_i. \quad (2.21)$$

Если амплитуда падающей волны выбрана равной единице ($|E_i| = 1$), то сечение поглощения равно

$$\sigma_a = \int_V k \epsilon_r''(\mathbf{r}') |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 dV'. \quad (2.22)$$

Выражения (2.20) и (2.22) являются точными интегральными выражениями для амплитуды рассеяния и сечения поглощения через неизвестное полное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ внутри частицы.

Заметим здесь же [130], что можно вывести другое интегральное уравнение — не для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, а для магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Из уравнений Максвелла для электрического поля $\mathbf{E}$ находим векторное волновое уравнение вида

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 [\epsilon_r(\mathbf{r}) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.23)$$

Для магнитного поля $\mathbf{H}$ получается волновое уравнение, содержащее член с градиентом $\epsilon_r(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 [\epsilon_r(\mathbf{r}) - 1] \mathbf{H}(\mathbf{r}) - i \omega \epsilon_0 [\nabla \epsilon_r(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \quad (2.24)$$

Поэтому интегральное уравнение для $\mathbf{H}$ содержит два слагаемых:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times \Pi_{ms}(\mathbf{r}),$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ms}(\mathbf{r}) = & \int_V [\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') dV' - \\ & - \frac{1}{\omega \mu_0} \int_V G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \epsilon_r(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV', \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\nabla' \epsilon_r(\mathbf{r}')$ — градиент по переменной $\mathbf{r}'$. Второе слагаемое в выражении для Π_{ms} описывает влияние деполяризации волн и неоднородности диэлектрической проницаемости тела. В случае

однородного шара $\nabla' \epsilon_r(\mathbf{r}')$ равен дельта-функции, сосредоточенной на его поверхности, и второе слагаемое превращается в поверхностный интеграл.

2.5. Рэлеевское рассеяние¹⁾

В разд. 2.2 мы уже отмечали общие свойства рассеяния на малых частицах. Рассеяние на малых частицах обычно называют рэлеевским рассеянием. В данном разделе мы приводим подробный анализ рассеяния на некоторых телах простой формы.

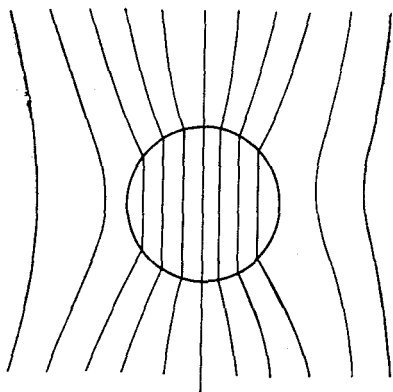


Рис. 2.6. Электростатическое поле внутри диэлектрического шара.

Рассмотрим диэлектрический шар, размер которого много меньше длины волны. Из-за малости размера шара электрическое поле внутри него и вблизи от его поверхности должно быть практически таким же, как в электростатике. Из электростатики известно, что поле внутри диэлектрического шара, помещенного в постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_i$, однородно и равно [153] (рис. 2.6)

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = E_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (2.26)$$

где $\hat{\mathbf{e}}_i$ — единичный вектор в направлении поляризации падающей волны. Подставляя (2.26) в (2.20), находим

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^2}{4\pi} [3(\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)] V [-\hat{\mathbf{0}} \times (\hat{\mathbf{0}} \times \hat{\mathbf{e}}_i)]. \quad (2.27)$$

Отметим, что $|[-\hat{\mathbf{0}} \times (\hat{\mathbf{0}} \times \hat{\mathbf{e}}_i)]| = \sin \chi$, где χ — угол между $\hat{\mathbf{e}}_i$ и $\hat{\mathbf{0}}$ (рис. 2.7).

¹⁾ См. [49, 80], где приведены решения для сферических тел в низкочастотном приближении.

Указанная угловая зависимость рассеянного поля совпадает с угловой зависимостью поля электрического диполя, ориентированного в направлении $\mathbf{E}$ в диэлектрике. Этого следовало ожидать, поскольку рассеянное поле возбуждается эквивалентным источником тока

$$\mathbf{J}_{eq} = -i\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}, \quad (2.28)$$

который можно рассматривать как набор электрических диполей с дипольным моментом $\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$. Выражение (2.27) справедливо даже в том случае, когда частица обладает поглоще-

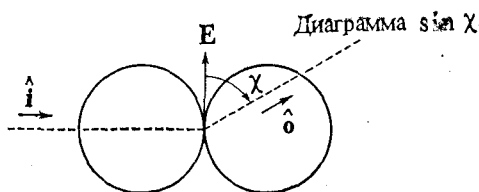


Рис. 2.7. Диаграмма направленности диполя при рэлеевском рассеянии.

нием и ее относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r комплексна.

Дифференциальное сечение рассеяния $\sigma_d(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$ равно ¹⁾

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \right|^2 V^2 \sin^2 \chi, \quad (2.29)$$

где $\sin^2 \chi = 1 - (\hat{\mathbf{o}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i)^2$.

Отметим, что сечение рассеяния обратно пропорционально четвертой степени длины волны и прямо пропорционально квадрату объема рассеивателя. Эти два свойства малых рассеивателей были получены Рэлеем из теории размерностей (как это показано в разд. 2.1).

Голубой цвет неба может быть объяснен тем, что голубая часть спектра белого света рассеивается сильнее красной из-за наличия зависимости типа λ^{-4} . Далее, как видно из рис. 2.7, излучение неба под прямым углом к направлению на Солнце должно быть линейно-поляризованным. Эти два свойства — голубой цвет неба и поляризация излучения — в прошлом веке представляли собой большую научную загадку и были окончательно объяснены Рэлеем ²⁾. Рэлей обратил внимание на то, что рассеивателями не обязательно должны быть капли воды

¹⁾ Заметим, что $[-\hat{\mathbf{o}} \times (\hat{\mathbf{o}} \times \hat{\mathbf{e}}_i)] = \hat{\mathbf{e}}_i - \hat{\mathbf{o}}(\hat{\mathbf{o}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i)$.

²⁾ Ньютон полагал, что голубой цвет неба обусловлен интерференцией лучей, отраженных от передней и задней поверхностей водяных капель, подобно тому как это происходит при отражении от тонких пленок и при наблюдении интерференционной картины ньютоновых колец, но он не смог дать удовлетворительного объяснения цвета и поляризации [87].

или льдинки, как это обычно предполагалось; он указал, что сами молекулы воздуха могут давать вклад в это рассеяние.

Рассмотрим теперь сечение рассеяния σ_s малой диэлектрической частицы:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \int_{4\pi} \sigma_d d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma_{bt} d\omega = \\ &= \frac{k^2}{(4\pi)^2} \left| \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \right|^2 V^2 \int_0^\pi \sin \chi d\chi \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \chi = \\ &= \frac{24\pi^3 V^2}{\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 = \frac{128\pi^5 a^6}{3\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Часто бывает желательно сравнить сечение рассеяния с реальным геометрическим сечением πa^2 . Отсюда мы получаем уравнение Рэлея

$$\frac{\sigma_s}{\pi a^2} = \frac{8(ka)^4}{3} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2. \quad (2.31)$$

Уравнение Рэлея справедливо только при малых значениях ka . Обычно в качестве верхнего предела радиуса частицы принимают значение $a = 0,05\lambda$. При этом значении уравнение Рэлея (2.31) приводит к ошибке, меньшей 4% [87].

Сечение поглощения σ_a получается из выражения (2.22), если подставить в него (2.26):

$$\sigma_a = k\epsilon_r'' \left| \frac{3}{\epsilon_r + 2} \right|^2 V, \quad \frac{\sigma_a}{\pi a^2} = k\epsilon_r'' \left| \frac{3}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \frac{4}{3}. \quad (2.32)$$

Полное сечение σ_t равно сумме (2.31) и (2.32). Отметим, что значение σ_t не может быть получено из (2.27) с помощью оптической теоремы, поскольку из (2.27) следует, что при $\epsilon_r'' = 0$ $\sigma_t = 0$. И вообще при любой заданной аппроксимации $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ внутри частицы сумма сечения рассеяния, получаемого интегрированием $|f|^2$ в (2.20) по всему телесному углу 4π , и сечения поглощения (2.22) дает значительно более точное значение полного сечения, чем значение, получаемое при непосредственном применении оптической теоремы к (2.20).

Если частица представляет собой эллипсоид

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, \quad (2.33)$$

а падающее поле $\mathbf{E}_i$ имеет компоненты E_{ix} , E_{iy} и E_{iz} в направлениях x , y и z , то компоненты поля внутри частицы равны [153, 162]

$$E_x = E_{ix} / [1 + (abc/2)(\epsilon_r - 1)A_x], \quad (2.34)$$

где
$$A_x = \int_0^\infty (s + a^2)^{-1} [(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)]^{-1/2} ds.$$

(Компоненты E_y и E_z получаются соответствующей заменой a , b и c .) Подставив (2.34) в (2.20) и (2.22), легко найдем сечения рассеяния и поглощения. Нетрудно видеть, что функции $L_1 = \frac{1}{2} abc A_x$, $L_2 = \frac{1}{2} abc A_y$ и $L_3 = \frac{1}{2} abc A_z$ зависят только от отношений b/a и c/a и не зависят от абсолютных значений a , b и c . Известно также, что $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. Для вытянутого сфероида ($a > b = c$)

$$e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad L_1 = \frac{1-e^2}{e^2} \left(-1 + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e}\right), \quad (2.35a)$$

а для сплюснутого сфероида ($a < b = c$)

$$f^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1, \quad L_1 = \frac{1+f^2}{f^2} \left(1 - \frac{1}{f} \operatorname{arctg} f\right). \quad (2.35b)$$

В качестве примера рассмотрим плоскую волну единичной амплитуды ($|E_i| = 1$), поляризованную в направлении x и распространяющуюся в направлении z . Пусть эта волна падает на малую диэлектрическую сферу радиуса a . В дальней зоне по отношению к этой сфере компоненты электрического поля даются формулами

$$E_\theta = \frac{\hat{\theta} \cdot \mathbf{f}(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}})}{R} \exp(ikR), \quad E_\phi = \frac{\hat{\phi} \cdot \mathbf{f}(\hat{\theta}, \hat{\mathbf{i}})}{R} \exp(ikR).$$

Замечая, что

$$[-\hat{\theta} \times (\hat{\theta} \times \hat{\mathbf{e}}_i)] = -[\hat{\theta}(\hat{\theta} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) - \hat{\mathbf{e}}_i],$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = \hat{\phi} \cdot \hat{\theta} = 0, \quad \hat{\theta} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos \theta \cos \phi, \quad \hat{\phi} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\sin \theta,$$

находим

$$E_\theta = E_0 (\cos \theta \cos \phi) \exp(ikR), \quad E_\phi = E_0 (-\sin \phi) \exp(ikR),$$

где

$$E_0 = \frac{k^2}{4\pi} \left[\frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \right] \frac{V}{R}.$$

Отметим, что $\sin^2 \chi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi$.

В качестве другого примера рассмотрим сфероидальное диэлектрическое тело, форма которого описывается уравнением (2.33), где $a < b = c$. Предположим, что падающая волна поляризована в направлении x и распространяется в направлении z . Тогда множитель $3/(\epsilon_r + 2)$ в формуле для сферы мы

должны заменить на $[1 + L_1(\epsilon_r - 1)]^{-1}$. В результате найдем

$$\sigma_s = \frac{8\pi^3 V^2}{3\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{1 + L_1(\epsilon_r - 1)} \right|^2, \quad \sigma_a = k\epsilon_r'' \left| \frac{1}{1 + L_1(\epsilon_r - 1)} \right|^2 V,$$

где L_1 определено формулой (2.356), а $V = \frac{4}{3}\pi a b^2$.

2.6. Борновское приближение (рассеяние Рэлея—Дебая)

Рассмотрим теперь характеристики рассеивателя, относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r которого близка к единице. В этом случае приближенно можно считать, что поле внутри рассеивателя совпадает с полем падающей волны:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_i \exp(ik\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{i}}). \quad (2.36)$$

Подставляя это выражение в (2.20), получаем

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\hat{\mathbf{0}} \times (\hat{\mathbf{0}} \times \hat{\mathbf{e}}_i)] VS(\mathbf{k}_s), \quad (2.37a)$$

$$S(\mathbf{k}_s) = \frac{1}{V} \int_V [\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1] \exp(ik_s \cdot \mathbf{r}') dV', \quad (2.376)$$

где $\mathbf{k}_s = k\hat{\mathbf{i}}_s = k(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}})$, $|\hat{\mathbf{i}}_s| = 2\sin(\theta/2)$, а θ — угол между $\hat{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{0}}$ (рис. 2.8).

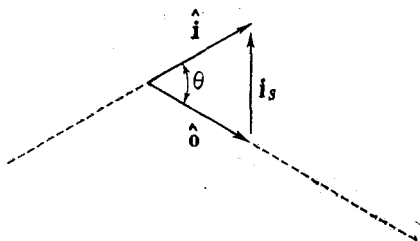


Рис. 2.8. Связь между вектором $\hat{\mathbf{i}}_s$ и углом θ .

Такое приближение справедливо при

$$(\epsilon_r - 1) kD \ll 1, \quad (2.38)$$

где D — характерный размер частицы, например ее диаметр. Заметим, что (2.376) представляет собой фурье-образ от $\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1$ в направлении $\hat{\mathbf{i}}_s$. Поэтому амплитуда рассеяния $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ пропорциональна фурье-образу от $\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1$ при значении волнового числа $\mathbf{k}_s$. Если разность $\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1$ отлична от нуля лишь в малой по сравнению с длиной волны области, то сечение рассеяния слабо зависит от $\mathbf{k}_s$ и потому практически изотропно по углу θ . Если размер частицы во много раз превосхо-

длит длину волны, то рассеяние в основном сконцентрировано в узком телесном угле в направлении вперед, $\theta \approx 0$. Это явление аналогично соотношению между протяженностью функции во времени и шириной ее спектра: если протяженность функции равна T , то ее спектр перекрывает частотный диапазон шириной $1/T$.

Сечение поглощения в борновском приближении получается из выражения (2.22):

$$\sigma_a = k \int_V \epsilon_r''(\mathbf{r}) dV. \quad (2.39)$$

Рассмотрим несколько примеров.

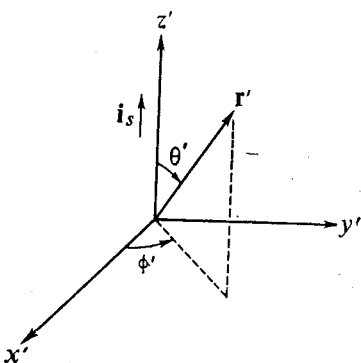


Рис. 2.9. Система координат, используемая при вычислении (2.41).

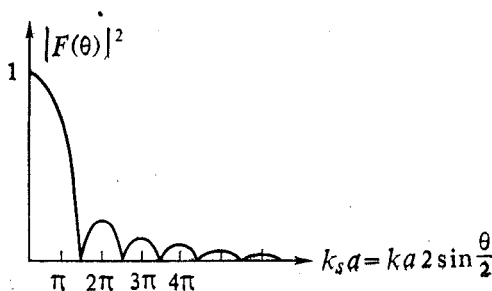


Рис. 2.10. Диаграмма рассеяния (2.41) однородного шара радиуса a .

а) *Рассеяние на однородной сфере радиуса a .* Воспользовавшись сферической симметрией задачи, направим ось z' по направлению $\mathbf{i}_s$ (рис. 2.9). Тогда получим

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\hat{\mathbf{0}} \times (\hat{\mathbf{0}} \times \hat{\mathbf{e}}_i)] (\epsilon_r - 1) VF(\theta), \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{1}{V} \int_V \exp(ik\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{r}') dV' = \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^a r'^2 dr' \exp(ik_s r' \cos \theta') = \\ &= \frac{3}{k_s^3 a^3} (\sin k_s a - k_s a \cos k_s a), \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $k_s = 2k \sin(\theta/2)$. График $|F(\theta)|^2$ приведен на рис. 2.10.

б) *Рассеяние на круглом диске.* Рассмотрим диск радиуса a и толщины d (рис. 2.11).

Выразив декартовы компоненты векторов направления распространения падающей волны $\hat{\mathbf{i}}$ и рассеянной волны $\hat{\mathbf{o}}$ через

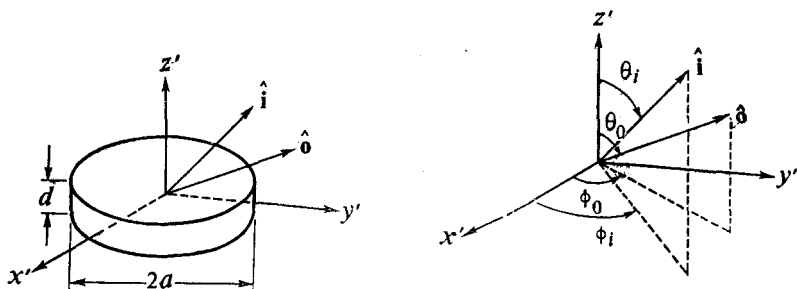


Рис. 2.11. Диск радиуса a и толщины d и направления $\hat{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{o}}$ в (2.42).

сферические координаты, найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_s &= k_{s1}\hat{\mathbf{x}} + k_{s2}\hat{\mathbf{y}} + k_{s3}\hat{\mathbf{z}}, \\ k_{s1} &= k(\sin \theta_i \cos \phi_i - \sin \theta_0 \cos \phi_0), \\ k_{s2} &= k(\sin \theta_i \sin \phi_i - \sin \theta_0 \sin \phi_0), \\ k_{s3} &= k(\cos \theta_i - \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Используя замену переменных интегрирования $x' = \rho' \cos \phi'$ и $y' = \rho' \sin \phi'$, получаем¹⁾

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{V} \int_V \exp[i(k_1 x' + k_2 y' + k_3 z')] dx' dy' dz' = \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \rho' d\rho' \int_{-d/2}^{d/2} dz' \exp[i(k_1 \rho' \cos \phi' + k_2 \rho' \sin \phi' + k_3 z')] = \\ &= \frac{2}{a \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} J_1(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} a) \left(\frac{\sin k_3 (d/2)}{k_3 d/2} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

¹⁾ Пусть $k_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos \phi_1$ и $k_2 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \sin \phi_1$. Тогда имеют место формулы $\int_0^{2\pi} d\phi' \exp[i\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \rho' \cos(\phi' - \phi_1)] = 2\pi J_0(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \rho')$ и $\int J_0(x) x dx = x J_1(x)$.

где k_1 , k_2 и k_3 равны соответственно k_{s1} , k_{s2} и k_{s3} . Отметим также, что

$$k_{s1}^2 + k_{s2}^2 = k^2 [\sin^2 \theta_i + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_i \sin \theta_0 \cos (\phi_i - \phi_0)]. \quad (2.44)$$

Если волна падает перпендикулярно поверхности диска ($\theta_i = 0$), то

$$F = \frac{2J_1(ka \sin \theta_0)}{ka \sin \theta_0} \frac{\sin [kd \sin^2 (\theta_0/2)]}{kd \sin^2 (\theta_0/2)}. \quad (2.45)$$

Характеристики рассеяния произвольной частицы с аксиальной симметрией можно найти из (2.43), выбрав соответствующим образом пределы интегрирования.

в) *Рассеяние на случайно ориентированной частице с аксиальной симметрией* [160, 162]. Обратим внимание, что в выражении (2.43) $\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ и k_3 представляют собой соответственно поперечную и продольную компоненты (по отношению к оси z) вектора $k\hat{i}_s = k(\hat{i} - \hat{0})$. Обозначив через β угол между $\hat{i}_s$ и осью z , запишем $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = k_s \sin \beta$ и $k_3 = k_s \cos \beta$.

Для случайно ориентированной частицы интенсивность рассеянной волны нужно усреднить по всем возможным ориентациям частицы. Из-за стохастичности необходимо усреднять не поле, а интенсивность:

$$\begin{aligned} |F|_{cp}^2 &= \frac{1}{4\pi} \int |F|^2 d\omega, \quad d\omega = \sin \beta d\beta d\phi; \\ |F|_{cp}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |F|^2 d\mu, \quad \mu = \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.46)$$

В частном случае диска выражение (2.43) для F дает

$$F = \left(\frac{2}{k_s a \sin \beta} \right) J_1(k_s a \sin \beta) \frac{\sin [k_s (d/2) \cos \beta]}{k_s (d/2) \cos \beta}. \quad (2.47)$$

Подставив это выражение в (2.46), найдем характеристики рассеяния случайно ориентированного диска (см. также [142]).

2.7. ВКБ-приближение для поля внутри частицы

Оптическая теорема применима для рассеивателя произвольной формы и размера. Однако мы отмечали, что в рэлеевском и борновском приближениях, рассмотренных выше, применение оптической теоремы не дает правильного значения полного сечения рассеяния. Действительно, в указанных приближениях амплитуда рассеяния $f(\hat{0}, \hat{i})$ непоглощающей частицы вещест-

венна. Это связано с тем, что амплитуда рассеяния $f(\hat{0}, \hat{i})$ практически вещественна, и эта вещественная функция описывает общие угловые характеристики рассеяния. С другой стороны, мнимая часть $f(\hat{0}, \hat{i})$ в этих приближениях мала, а именно она описывает полную убыль мощности, обусловленную как рассеянием, так и поглощением, и потому связана с сечением экстинкции. В связи с этим рэлеевское и борновское приближения хорошо описывают угловые характеристики рассеяния, но недостаточно точно определяют мнимую часть амплитуды рассеяния. Тем не менее полное сечение рассеяния в этих приближениях можно получить, проинтегрировав амплитуду рассеяния по полному телесному углу, подобно тому как это делалось в предыдущем разделе.

Если бы мы располагали более точным решением, то для вычисления сечения экстинкции можно было бы использовать оптическую теорему. Кроме того, такое решение лучше описывало бы характеристики рассеяния. Такое улучшенное приближение можно найти, используя для нахождения поля внутри частицы метод ВКБ¹⁾. Отметим, что приближение Рэля пригодно для малых частиц ($kD \ll 1$), а борновское приближение справедливо при $(\epsilon_r - 1)kD \ll 1$. В последнем случае величина kD может быть большой. В противоположность этому, ВКБ-приближение справедливо при

$$(\epsilon_r - 1)kD \gg 1, \quad \epsilon_r - 1 < 1. \quad (2.48)$$

Таким образом, ВКБ-приближение дает решение в тех случаях, когда рэлеевское и борновское приближения становятся непригодными.

В ВКБ-приближении поле $E(\mathbf{r})$ внутри частицы аппроксимируется распространяющейся волной с волновым вектором, соответствующим веществу частицы. Кроме того, предполагается, что, поскольку $\epsilon_r - 1 < 1$, угол преломления равен углу падения, так что волна внутри частицы движется в том же направлении, что и падающая волна. Коэффициент пропускания T через поверхность частицы заменяется коэффициентом пропускания при нормальном падении на плоскую границу раздела. Таким образом, если падающая волна имеет вид

$$E_i(\mathbf{r}) = E_i e^{ikz} \hat{e}_i, \quad (2.49)$$

то поле $E(\mathbf{r})$ в точке B (рис. 2.12) принимается равным

$$E(\mathbf{r}) = TE_i \exp[ikz_1 + ikn(z - z_1)] \hat{e}_i, \quad z_1 < z < z_2. \quad (2.50)$$

¹⁾ ВКБ — первые буквы фамилий авторов этого метода — Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна [130, 133].

Здесь $n = \sqrt{\epsilon_r}$ — показатель преломления частицы, а T — коэффициент пропускания, который принимается равным

$$T = 2/(n + 1). \quad (2.51)$$

Подставляя (2.50) в (2.20), находим

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\hat{\mathbf{0}} \times (\hat{\mathbf{0}} \times \hat{\mathbf{e}}_i)] VS(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{z}}), \quad (2.52)$$

где

$$S(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{V} \int_V 2[n(\mathbf{r}') - 1] \exp[ikz_1 + ikn(z' - z_1) - ikr' \cdot \hat{\mathbf{0}}] dV'.$$

Полное сечение рассеяния σ_t дается оптической теоремой

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}})] \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \\ &= k \operatorname{Im} \int_V 2(n - 1) \exp[-ik(n - 1)z_1 + ik(n - 1)z'] dV'. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Сечение поглощения σ_a определяется выражением (2.22). Используя (2.50), получаем

$$\sigma_a = \int_V k\epsilon_r''(\mathbf{r}') \frac{4}{|n(\mathbf{r}) + 1|^2} \exp[-2kn_i(z - z_1)] dV', \quad (2.54)$$

где $kn = k(n_r + in_i)$.

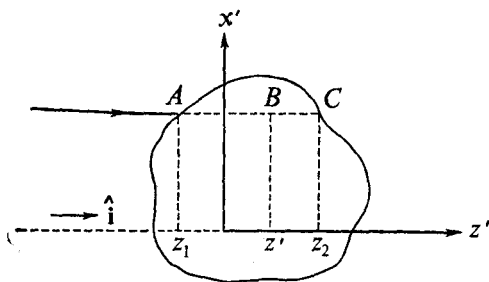


Рис. 2.12. Пределы интегрирования при использовании ВКБ-приближения (2.52).

В качестве примера рассмотрим однородную сферическую частицу радиуса a . Замечая, что $z_1 = -\sqrt{a^2 - \rho'^2}$ и $dV' = dz' \rho' d\rho' d\phi'$, получаем

$$\frac{\sigma_t}{\pi a^2} = 2 \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{i \exp(i2Z)}{Z} + \frac{1 - \exp(i2Z)}{2Z^2} \right\}, \quad (2.55a)$$

$$\frac{\sigma_a}{\pi a^2} = \left\{ \frac{4n_r}{(n_r + 1)^2 + n_i^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{2 \exp(-Y)}{Y} + \frac{2}{Y^2} [\exp(-Y) - 1] \right\}, \quad (2.55b)$$

где $Z = k(n - 1)a$, $Y = 4kn_i a$.

Следует отметить, что, вообще говоря, ВКБ-приближение дает значения, несколько превышающие истинные сечения. При малых значениях $k(n-1)a$ получаемые значения неточны, и в этой области следует использовать рэлеевское или борновское приближение.

2.8. Решение Ми

Точное решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на изотропном однородном шаре было получено в 1908 г. Ми, и обычно о нем говорят как о решении или о теории Ми. В этом разделе мы приведем краткое описание решения Ми. Более подробное изложение можно найти в большинстве учебников (см., например, [87]). В работах [173, 174] рассмотрены случаи сферических частиц и тел произвольной формы.

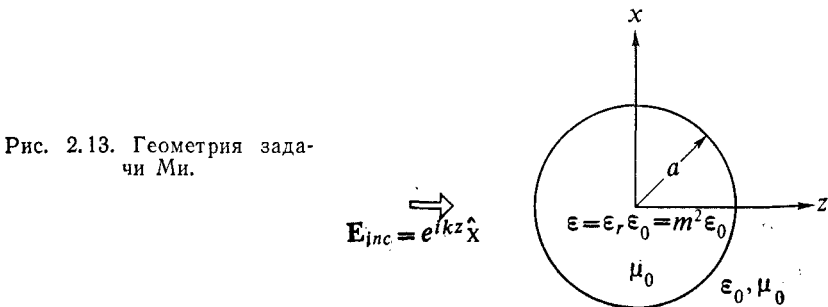


Рис. 2.13. Геометрия задачи Ми.

Рассмотрим шар с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, на который падает распространяющаяся вдоль оси z волна, поляризованная в направлении оси x (рис. 2.13):

$$\mathbf{E}_i = e^{-ikz} \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.56)$$

Любое электромагнитное поле можно выразить в сферической системе координат через две скалярные функции Π_1 и Π_2 — радиальные компоненты электрического и магнитного векторов Герца:

$$\Pi_e = \Pi_1 \hat{\mathbf{r}}, \quad \Pi_m = \Pi_2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.57)$$

Функция Π_1 описывает все ТМ-моды, когда $H_r = 0$, а функция Π_2 все ТЕ-моды с $E_r = 0$. Как Π_1 , так и Π_2 удовлетворяют скалярным волновым уравнениям

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \Pi &= 0 & \text{вне сферы,} \\ (\nabla^2 + k^2 m^2) \Pi &= 0 & \text{внутри сферы.} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Электрическое и магнитное поля определяются через Π_1 и Π_2 выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \nabla \times \nabla \times (r\Pi_1\hat{\mathbf{r}}) + i\omega\mu_0\nabla \times (r\Pi_2\hat{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\nabla \times (r\Pi_1\hat{\mathbf{r}}) + \nabla \times \nabla \times (r\Pi_2\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0$ вне среды и $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ внутри ее.

Падающее поле (2.56) можно описать двумя скалярными функциями Π_1^i и Π_2^i , которые выражаются через сферические гармоники следующим образом:

$$\begin{aligned} r\Pi_1^i &= \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} \psi_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \cos\phi, \\ r\Pi_2^i &= \frac{1}{\eta k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} \psi_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \sin\phi, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где $\psi_n(x) = x j_n(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{n+1/2}(x)$, а $\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. Эти выражения можно получить [153], сравнивая выражения для сферических гармоник с радиальными компонентами $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{E}$, получаемыми из Π_1^i и Π_2^i .

Запишем общие выражения для рассеянных полей при $r > a$, используя два набора произвольных констант a_n и b_n :

$$\begin{aligned} r\Pi_1^s &= \frac{(-1)}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} a_n \xi_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \cos\phi, \\ r\Pi_2^s &= \frac{(-1)}{\eta k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} b_n \xi_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \sin\phi, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где $\xi_n(x) = x h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{n+1/2}^{(1)}(x)$. Для полей внутри сферы при $r < a$, используя наборы констант c_n и d_n , запишем

$$\begin{aligned} r\Pi_1^r &= \frac{1}{(km)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} c_n \psi_n(kmr) P_n^1(\cos\theta) \cos\phi, \\ r\Pi_2^r &= \frac{1}{\eta k^2 m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} d_n \psi_n(kmr) P_n^1(\cos\theta) \sin\phi. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Граничные условия представляют собой требование непрерывности компонент E_θ , E_ϕ , H_θ и H_ϕ на границе $r = a$. Граничные условия в таком виде содержат как Π_1 , так и Π_2 , и для их разделения нужно выбирать подходящие линейные комбинации

полей. Например, комбинация $\sin \theta (\partial/\partial \theta) E_\theta + (\partial/\partial \phi) E_\phi$ дает непрерывность $(\partial/\partial r) (r\Pi_1)$. Такие соображения приводят к граничным условиям для Π_1 и Π_2 , которые формулируются в виде требования непрерывности $m^2\Pi_1$, $(\partial/\partial r) (r\Pi_1)$, Π_2 и $(\partial/\partial r) (r\Pi_2)$.

Используя эти условия, находим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\psi_n(\alpha) \psi'_n(\beta) - m\psi_n(\beta) \psi'_n(\alpha)}{\xi_n(\alpha) \psi'_n(\beta) - m\psi_n(\beta) \xi'_n(\alpha)}, \\ b_n &= \frac{m\psi_n(\alpha) \psi'_n(\beta) - \psi_n(\beta) \psi'_n(\alpha)}{m\xi_n(\alpha) \psi'_n(\beta) - \psi_n(\beta) \xi'_n(\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где $\alpha = ka$ и $\beta = kma$. Рассеянные поля E_ϕ и E_θ вдали от сферы имеют вид

$$\begin{aligned} E_\phi &= -\frac{ie^{ikr}}{kr} S_1(\theta) \sin \phi, \quad E_\theta = \frac{ie^{ikr}}{kr} S_2(\theta) \cos \phi, \\ S_1(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)], \\ S_2(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Здесь

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_n(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta).$$

Полное сечение рассеяния σ_t получается из оптической теоремы

$$\frac{\sigma_t}{\pi a^2} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \{\operatorname{Re}(a_n + b_n)\}. \quad (2.65)$$

Сечение обратного рассеяния σ_b дается формулой

$$\frac{\sigma_b}{\pi a^2} = \frac{1}{\alpha^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (-1)^n (a_n - b_n) \right|^2, \quad (2.66)$$

а сечение рассеяния σ_s — формулой

$$\frac{\sigma_s}{\pi a^2} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (2.67)$$

2.9. Эллиптически-поляризованные волны и параметры Стокса

В предыдущих разделах мы рассматривали линейно-поляризованные волны. Однако в общем случае необходимо проанализировать ситуацию, когда падающая волна имеет эллиптическую поляризацию (см. [21, 31, 117]). Рассмотрим распространяющуюся в направлении оси z плоскую волну, у которой компоненты электрического поля зависят от времени по закону

$$\begin{aligned} E_x &= \operatorname{Re} (E_1 e^{-i\omega t}) = \operatorname{Re} [a_1 \exp(-i\delta_1 + ikz - i\omega t)] = a_1 \cos(\tau + \delta_1), \\ E_y &= \operatorname{Re} (E_2 e^{-i\omega t}) = \operatorname{Re} [a_2 \exp(-i\delta_2 + ikz - i\omega t)] = a_2 \cos(\tau + \delta_2), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$E_z = 0,$$

где $\tau = \omega t - kz$, а E_1 и E_2 комплексные амплитуды E_x и E_y . При эллиптической поляризации общего вида конец вектора

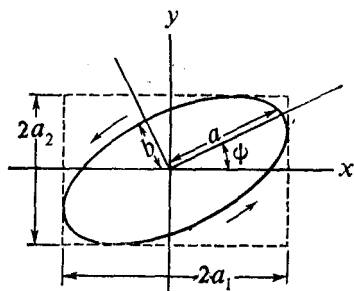


Рис. 2.14. Правая эллиптическая поляризация.

электрического поля $\mathbf{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$ описывает эллипс. Уравнение этого эллипса можно получить, исключив переменную τ из системы (2.68):

$$(E_x/a_1)^2 + (E_y/a_2)^2 - 2(E_x E_y/a_1 a_2) \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (2.69)$$

где $\delta = \delta_2 - \delta_1$ — разность фаз. Из уравнений (2.68) видно, что при $\sin \delta > 0$ имеет место левая поляризация, а при $\sin \delta < 0$ — правая. Как показано на рис. 2.14, поляризацию называют правой, если электрический вектор поворачивается в ту сторону, куда нужно поворачивать буров с правосторонней резьбой, чтобы он завинчивался в направлении распространения волны.

Для описания эллиптически-поляризованной волны (2.68) необходимо три параметра. Ими могут быть, например, a_1 , a_2 и δ . Однако более удобно использовать параметры одинаковой размерности. В 1852 г. Стокс ввел параметры, которые сейчас

носят его имя. Это следующие величины:

$$\begin{aligned} I &= a_1^2 + a_2^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2, & Q &= a_1^2 - a_2^2 = |E_1|^2 - |E_2|^2, \\ U &= 2a_1a_2 \cos \delta = 2 \operatorname{Re}(E_1E_2^*), & V &= 2a_1a_2 \sin \delta = 2 \operatorname{Im}(E_1E_2^*), \end{aligned} \quad (2.70)$$

где $E_1 = a_1 \exp(-i\delta_1 + ikz)$ и $E_2 = a_2 \exp(-i\delta_2 + ikz)$ — комплексные амплитуды компонент E_x и E_y электрического поля. Эти четыре параметра связаны между собой соотношением

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2, \quad (2.71)$$

которое следует из (2.70). Уравнения (2.70) и (2.71) определяют три независимые величины, с помощью которых можно описать любую эллиптически-поляризованную волну.

Например, для линейно-поляризованной волны, плоскость поляризации которой составляет угол ψ_0 с осью x , имеем $a_1 = E_0 \cos \psi_0$, $a_2 = E_0 \sin \psi_0$ и $\delta = 0$. В этом случае параметры Стокса равны

$$I = E_0^2, \quad Q = E_0^2 \cos 2\psi_0, \quad U = E_0^2 \sin 2\psi_0, \quad V = 0. \quad (2.72)$$

Для волны с правой круговой поляризацией $a_1 = a_2 = E_0$, $\delta = -\pi/2$, так что

$$I = 2E_0^2, \quad Q = 0, \quad U = 0, \quad V = -2E_0^2. \quad (2.73)$$

В теории переноса излучения чаще используют так называемые модифицированные параметры Стокса, которые определяются следующим образом:

$$I_1 = |E_1|^2, \quad I_2 = |E_2|^2, \quad U = 2 \operatorname{Re}(E_1E_2^*), \quad V = 2 \operatorname{Im}(E_1E_2^*). \quad (2.74)$$

С другой стороны, эллипс, изображенный на рис. 2.14, можно описать, задав его большую a и малую b полуоси и угол ψ . Выразив параметры Стокса через I , b/a и ψ , получим

$$Q = I \cos 2\chi \cos 2\psi, \quad U = I \cos 2\chi \sin 2\psi, \quad V = I \sin 2\chi, \quad (2.75)$$

где $\operatorname{tg} \chi = \pm b/a$, причем знак плюс отвечает левой, а знак минус — правой поляризации.

Из выражений (2.75) видно, что параметры I и V зависят только от полной интенсивности и от отношения осей и не зависят от ориентации эллипса (угла ψ). Напротив, параметры Q и U зависят от выбора системы координат. Этот факт окажется полезным в дальнейшем, когда мы будем исследовать вопрос об аддитивности параметров Стокса.

Выражениям (2.75) можно поставить в соответствие декартовы координаты (X, Y, Z) точки (r, θ, ϕ) на сфере радиуса

$r = I$ с угловыми координатами $\theta = \pi/2 - 2\chi$ и $\phi = 2\psi$: $X = r \sin \theta \cos \phi$, $Y = r \sin \theta \sin \phi$ и $Z = r \cos \theta$. Эта сфера называется сферой Пуанкаре; ее полюсы отвечают круговым поляризациям волны: северный полюс отвечает левой поляризации,

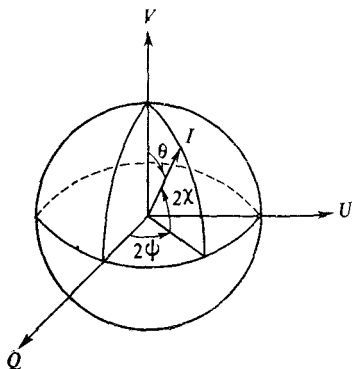


Рис. 2.15. Сфера Пуанкаре.

а южный — правой. Северная и южная полусферы отвечают левой и правой эллиптической поляризацией, а экватор — линейной поляризацией (рис. 2.15).

2.10. Частичная поляризация и естественный свет

В эллиптически-поляризованной волне, рассмотренной в предыдущем разделе, отношение амплитуд a_1 и a_2 и разность фаз $\delta = \delta_2 - \delta_1$ постоянны. Это имеет место в случае чисто монохроматической волны (имеющей единственную частоту). В более общем случае немонохроматической волны, характеризующейся спектром ширины $\Delta\omega$, амплитуды и разность фаз претерпевают непрерывные изменения в пределах полосы $\Delta\omega$ и, следовательно, a_1 , a_2 и δ являются медленно меняющимися функциями времени. Поэтому параметры Стокса, вообще говоря, должны выражаться через усредненные величины. Обозначая усреднение по времени угловыми скобками $\langle \rangle$, получаем

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle = \langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle, \\ Q &= \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle = \langle |E_1|^2 \rangle - \langle |E_2|^2 \rangle, \\ U &= 2 \langle a_1 a_2 \cos \delta \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle E_1 E_2^* \rangle, \\ V &= 2 \langle a_1 a_2 \sin \delta \rangle = 2 \operatorname{Im} \langle E_1 E_2^* \rangle. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Для модифицированных параметров Стокса (I_1 , I_2 , U , V) имеем $I_1 = \langle |E_1|^2 \rangle$, $I_2 = \langle |E_2|^2 \rangle$. В этом случае условие (2.71) долж-

но быть заменено на

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2. \quad (2.77)$$

«Естественный свет» характеризуется тем, что его интенсивность постоянна в любом направлении, перпендикулярном к направлению луча, а также тем, что ортогональные компоненты его поля некоррелированы. Следовательно, для естественного света должны выполняться необходимые и достаточные условия

$$I = 2\langle |E|^2 \rangle, \quad Q = U = V = 0. \quad (2.78)$$

В общем случае волна может быть частично поляризованной. Степень поляризации m определяется отношением

$$m = (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2} / I, \quad (2.79)$$

так что для эллиптической поляризации $m = 1$, для частичной поляризации $0 < m < 1$ и для неполяризованной волны (естественного света) $m = 0$.

2.11. Сложение независимых волн

Наиболее важным свойством параметров Стокса с точки зрения их применения в задачах распространения волн в случайных средах является «аддитивность» этих параметров для независимых волн (см. [31], разд. 14.7).

Если частицы в объеме распределены случайно, то интенсивности волн, рассеянных разными частицами, некоррелированы между собой. Поэтому рассеянные в случайной среде волны считают «независимыми» или «некогерентными».

Можно показать, что при сложении независимых волн параметры Стокса суммарной волны представляют собой соответствующие суммы параметров Стокса отдельных независимых слагаемых. Этот факт используется в дальнейшем при выводе общего уравнения переноса излучения.

Следует отметить, что параметры Стокса — это не что иное, как лучевые интенсивности, которые рассматриваются в разд. 7.7, и только что упомянутая «аддитивность» может быть объяснена более удовлетворительно. Такое объяснение дается в гл. 14.

2.12. Матрица рассеяния и матрица Стокса

В разд. 2.1 амплитуда рассеяния $f(\hat{0}, \hat{i})$ определяется соотношением

$$E_s(r) = f(\hat{0}, \hat{i}) (e^{ikR}/R) \quad (2.80)$$

при условии, что на рассеиватель падает линейно-поляризованная волна

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \exp(ik\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (2.81)$$

Чтобы получить более общее описание рассеянной волны, пригодное для эллиптически-поляризованных, частично поляризованных и неполяризованных волн, удобно перейти к следующей системе координат.

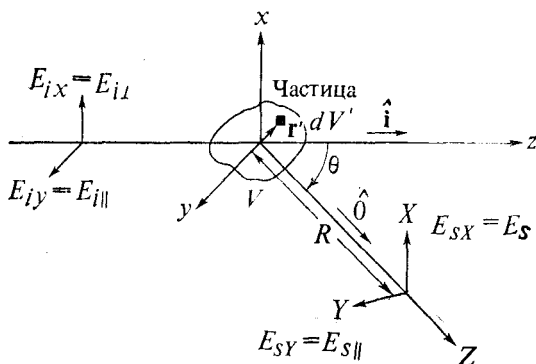


Рис. 2.16. К определению амплитуды рассеяния. Плоскости yz и YZ совпадают с плоскостью рассеяния.

Выберем в качестве оси z направление распространения падающей волны; ось y выберем так, чтобы плоскость yz была «плоскостью рассеяния», т. е. плоскостью, в которой лежат единичные векторы $\hat{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{o}}$ направлений распространения падающей и рассеянной волн (рис. 2.16). Электрическое поле падающей волны имеет две компоненты: $E_{ix} = E_{i\perp}$ и $E_{iy} = E_{i\parallel}$ — перпендикулярную к плоскости рассеяния и параллельную ей. Аналогично этому рассеянная волна тоже имеет две компоненты $E_{sX} = E_{s\perp}$ и $E_{sY} = E_{s\parallel}$.

Ясно, что $E_{s\perp}$ и $E_{s\parallel}$ линейно связаны с $E_{i\perp}$ и $E_{i\parallel}$, так что можно записать [162]

$$\begin{pmatrix} E_{s\perp} \\ E_{s\parallel} \end{pmatrix} = \frac{e^{ikr}}{R} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i\perp} \\ E_{i\parallel} \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Поля $E_{i\perp}$ и $E_{i\parallel}$ вычисляются в начале координат $x = y = z = 0$, а $E_{s\perp}$ и $E_{s\parallel}$ — на расстоянии R от него. Функции f_{11} , f_{12} , f_{21} и f_{22} зависят от угла θ и связаны с функциями рассеяния S_1 , S_2 , S_3 и S_4 , фигурирующими у Ван де Хюлста [162] и в

решении Ми для сферы, соотношениями

$$f_{11} = (i/k) S_1, \quad f_{12} = (i/k) S_4, \quad f_{21} = (i/k) S_3, \quad f_{22} = (i/k) S_2. \quad (2.83)$$

В этом случае оптическая теорема принимает вид

$$\sigma_t = (4\pi/k) \operatorname{Im} f_{11}(0) = (4\pi/k) \operatorname{Im} f_{22}(0). \quad (2.84)$$

Возникает вопрос, каковы будут параметры Стокса рассеянной волны I_{1s} , I_{2s} , U_s и V_s , если известны функции рассеяния и если падающая волна имеет произвольную поляризацию, а ее параметры Стокса равны I_{1i} , I_{2i} , U_i и V_i . Такую связь можно найти, используя уравнения (2.74) и (2.82). Она выражается с помощью матрицы Стокса $\bar{\sigma}$ размера 4×4 [42]:

$$I_s = (1/R^2) \bar{\sigma} I_i, \quad (2.85a)$$

где I_s и I_i — векторы-столбцы 4×1 , а $\bar{\sigma}$ — матрица 4×4 :

$$I_s = \begin{bmatrix} I_{1s} \\ I_{2s} \\ U_s \\ V_s \end{bmatrix}, \quad I_i = \begin{bmatrix} I_{1i} \\ I_{2i} \\ U_i \\ V_i \end{bmatrix}, \quad (2.85b)$$

$\bar{\sigma} =$

$$= \begin{bmatrix} |f_{11}|^2 & |f_{12}|^2 & \operatorname{Re}(f_{11}f_{12}^*) & -\operatorname{Im}(f_{11}f_{12}^*) \\ |f_{21}|^2 & |f_{22}|^2 & \operatorname{Re}(f_{21}f_{22}^*) & -\operatorname{Im}(f_{21}f_{22}^*) \\ 2\operatorname{Re}(f_{11}f_{21}) & 2\operatorname{Re}(f_{12}f_{22}^*) & \operatorname{Re}(f_{11}f_{22}^* + f_{12}f_{21}^*) & -\operatorname{Im}(f_{11}f_{22}^* - f_{12}f_{21}^*) \\ 2\operatorname{Im}(f_{11}f_{21}) & 2\operatorname{Im}(f_{12}f_{22}^*) & \operatorname{Im}(f_{11}f_{22}^* + f_{12}f_{21}^*) & \operatorname{Re}(f_{11}f_{22}^* - f_{12}f_{21}^*) \end{bmatrix}.$$

Такое представление в виде матриц используется ниже при выводе уравнения переноса излучения с учетом поляризации. Отметим, что для сферически-симметричных частиц $f_{12} = f_{21} = 0$, и матрица $\bar{\sigma}$ зависит лишь от четырех величин $|f_{11}|^2$, $|f_{22}|^2$, $\operatorname{Re}(f_{11}f_{22}^*)$ и $\operatorname{Im}(f_{11}f_{22}^*)$.

2.13. Преобразование параметров Стокса при повороте системы координат

В этом разделе мы рассмотрим преобразование параметров Стокса при повороте системы координат (x, y, z) на угол ϕ вокруг оси z (рис. 2.17). Полученные здесь формулы будут затем использованы в гл. 7 при выводе уравнения переноса излучения для частично поляризованных волн.

Обозначим через I_1, I_2, U и V параметры Стокса в системе координат x, y, z , а через I'_1, I'_2, U' и V' — в системе x', y', z' . Компоненты электрического поля $E_x = E_1$ и $E_y = E_2$ связаны с компонентами $E_{x'} = E'_1$, $E_{y'} = E'_2$ линейным преобразованием

$$E'_1 = E_1 \cos \phi + E_2 \sin \phi, \quad E'_2 = -E_1 \sin \phi + E_2 \cos \phi. \quad (2.86)$$

В соответствии с определением (2.76) имеем

$$\begin{aligned} I'_1 &= \langle |E'_1|^2 \rangle = \\ &= \langle |E_1|^2 \rangle \cos^2 \phi + \langle |E_2|^2 \rangle \sin^2 \phi + 2 \operatorname{Re} \langle E_1 E_2^* \rangle \sin \phi \cos \phi = \\ &= I_1 \cos^2 \phi + I_2 \sin^2 \phi + \frac{1}{2} (\sin 2\phi) U. \end{aligned}$$

Аналогичным образом I'_2, U' и V' можно представить в виде линейного преобразования I_1, I_2, U и V вида

$$\mathbf{I}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{x}}') = \bar{\mathbf{L}}(\phi) \mathbf{I}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{x}}), \quad (2.87)$$

где $\mathbf{I}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{x}}')$ — вектор-столбец (I'_1, I'_2, U', V') . Единичный вектор $\hat{\mathbf{z}}$ указывает направление распространения волны, а единич-

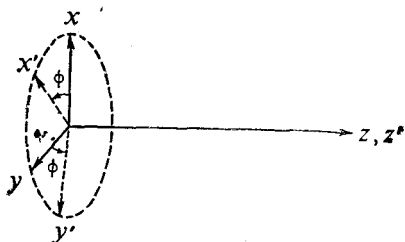


Рис. 2.17. Вращение вокруг оси z .

ный вектор $\hat{\mathbf{x}}'$ — направление поляризации E'_1 . Через $\mathbf{I}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{x}})$ обозначен вектор-столбец (I_1, I_2, U, V) , а $\bar{\mathbf{L}}(\phi)$ представляет собой 4×4 -матрицу

$$\bar{\mathbf{L}}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{1}{2} \sin 2\phi & 0 \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{1}{2} \sin 2\phi & 0 \\ -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

2.14. Распределение частиц по размерам

До сих пор мы рассматривали характеристики отдельной частицы. Однако основная задача состоит в определении взаимодействия волны с большим числом случайно расположенных частиц. Частицы, с которыми приходится иметь дело, не обязательно имеют одинаковый размер, обычно их размеры распределены в некотором диапазоне. Поэтому весьма важно учесть распределение частиц по размерам.

Пусть $n(D)dD$ — число частиц в единичном объеме с размером (например, диаметром) от D до $D + dD$. Тогда полное число частиц в единичном объеме равно

$$\rho = \int_0^{\infty} n(D) dD \quad (2.89)$$

и называется концентрацией или плотностью частиц.

Можно также определить плотность вероятности частиц с размерами от D до $D + dD$:

$$W(D) = \frac{n(D)}{\rho}, \quad \int_0^{\infty} W(D) dD = 1. \quad (2.90)$$

Полное сечение частицы σ_t зависит от ее размера, поэтому среднее значение $\langle \sigma_t \rangle$ и дисперсия полного сечения равны

$$\langle \sigma_t \rangle = \int_0^{\infty} \sigma_t(D) W(D) dD, \quad (2.91)$$

$$\text{var}(\sigma_t) = \int_0^{\infty} [\sigma_t(D) - \langle \sigma_t \rangle]^2 W(D) dD. \quad (2.92)$$

Аналогично можно получить выражения для среднего размера частиц $\langle D \rangle$ и для дисперсии:

$$\langle D \rangle = \int_0^{\infty} DW(D) dD, \quad \text{var}(D) = \int_0^{\infty} (D - \langle D \rangle)^2 W(D) dD. \quad (2.93)$$

Всюду в этой книге при использовании σ_t или какого-либо другого сечения подразумевается, что это определенные выше средние значения.

Например, если распределение частиц по размерам дается формулой

$$n(D) = AD \exp(-D/B),$$

где A и B — постоянные, то средний размер равен $\langle D \rangle = 2B$, а плотность $\rho = AB^2$.

2.15. Акустические волны

Для акустических волн переменное давление $p(\mathbf{r}, t)$ играет ту роль, которую в предыдущих разделах играло электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. В этом разделе мы даем краткое описание распространения акустических волн в упругих средах (см., например, [88, 102, 109, 123]).

Упругие среды можно разделить на жидкие и твердые. К жидким средам относятся как собственно жидкости, так и газы; они могут быть подразделены на вязкие и идеальные (не обладающие вязкостью) жидкости. Вязкие и идеальные жидкости можно подразделить далее на сжимаемые и несжимаемые.

Распространение акустических волн возможно в трех типах сред: в упругих твердых телах, в вязкой сжимаемой жидкости и в идеальной сжимаемой жидкости. В этом разделе мы дадим краткое описание распространения волн в таких идеальных сжимаемых жидких средах, как газы и собственно жидкости. Примерами могут служить капельки тумана в воздухе и воздушные пузырьки в воде.

Поведение жидкости описывается двумя фундаментальными уравнениями: уравнением движения и уравнением сохранения массы. Уравнение движения имеет вид

$$\rho = \frac{dV}{dt} + \text{grad } p = 0, \quad (2.94)$$

где ρ — плотность (кг/м^3), V — скорость (м/с), а p — давление (Н/м^2). Производная d/dt описывает скорость изменения во времени в системе координат, движущейся вместе с некоторой частицей жидкости. Такой подход называют лагранжевым. В отличие от этого в эйлеровом подходе используется производная $\partial/\partial t$, описывающая скорость изменения во времени в фиксированной точке пространства, через которую протекает жидкость.

Эти производные связаны соотношением

$$d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \text{grad}). \quad (2.95)$$

Сохранение массы описывается уравнением

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \partial \rho / \partial t = 0. \quad (2.96)$$

Представим p , ρ и $\mathbf{V}$ в виде суммы средних значений p_0 , ρ_0 и $\mathbf{V}_0$ и малых осциллирующих слагаемых p_1 , ρ_1 и $\mathbf{V}_1$, описывающих акустическую волну.

Предположим сначала, что жидкость покоится ($\mathbf{V}_0 = 0$), а амплитуды акустического давления p_1 и плотности ρ_1 малы по сравнению со средними значениями p_0 и ρ_0 . Тогда уравнения

(2.94) и (2.96) примут вид

$$\rho_0 \partial \mathbf{V}_1 / \partial t + \text{grad } p_1 = 0, \quad (2.97)$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 + \partial \rho_1 / \partial t = 0. \quad (2.98)$$

Давление p , вообще говоря, является функцией плотности ρ . Поэтому для малых p_1 и ρ_1 можно написать

$$p = p_0 + p_1 = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{p_0} \rho_1; \quad (2.99)$$

следовательно, ρ_1 линейно связано с p_1 :

$$p_1 = c^2 \rho_1, \quad c^2 = (\partial p / \partial \rho)_{p_0}. \quad (2.100)$$

Постоянная c зависит от рассматриваемого вещества и представляет собой скорость распространения в нем акустической волны. Используя соотношение (2.100), выразим в уравнении (2.98) ρ_1 через p_1 :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_1 + \frac{1}{c^2 \rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0. \quad (2.101)$$

Применяя к уравнению (2.97) оператор дивергенции и используя затем (2.101), получаем

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) - \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0, \quad (2.102)$$

где $\kappa = (c^2 \rho_0)^{-1}$ — сжимаемость жидкости.

Уравнение (2.102) является основным уравнением распространения акустических волн в неподвижной среде. Отметим, что множитель $1/\rho_0$ стоит под знаком дивергенции. В случае однородной среды его можно вынести за знак дивергенции:

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0. \quad (2.103)$$

Однако если в среде имеются границы или если плотность среды меняется в пространстве, то множитель $1/\rho_0$ в уравнении (2.102) выносить за знак дивергенции нельзя.

В однородной среде, как это видно из уравнения (2.97), $\text{rot } \mathbf{V}_1 = 0$. Поэтому $\mathbf{V}_1$ можно представить в виде градиента скалярной функции Φ :

$$\mathbf{V}_1 = - \text{grad } \Phi. \quad (2.104)$$

Функция Φ называется потенциалом скоростей; она удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad (2.105a)$$

давление p_1 и плотность ρ_1 выражаются через нее посредством соотношений

$$p_1 = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.105б)$$

Граничные условия на поверхности раздела двух сред включают: а) непрерывность давления p_1 и б) непрерывность нормальной компоненты скорости V_1 .

Для потенциала скоростей Φ эти граничные условия требуют: а) непрерывности $\rho_0 \partial \Phi / \partial t$ и б) непрерывности $\partial \Phi / \partial n$.

Для монохроматических волн, зависимость которых от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, имеем

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi = 0, \quad k = \omega/c, \quad V_1 = -\text{grad } \Phi, \quad p_1 = -i\omega\rho_0\Phi. \quad (2.106a)$$

Вектор плотности потока мощности S дается выражением

$$S = \frac{1}{2} p_1 V_1^*. \quad (2.106б)$$

2.16. Рассеяние акустических волн

В этом разделе мы кратко опишем характеристики рассеяния и поглощения волны давления, возникающей при падении

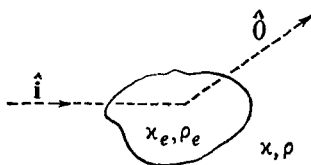


Рис. 2.18. Рассеяние акустических волн на частице.

на частицу акустической волны единичной амплитуды¹⁾ (рис. 2.18)

$$p_i(\mathbf{r}) = \exp(ik\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.107)$$

Амплитуда рассеяния $f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$ в акустическом случае — скалярная функция, так что рассеянное акустическое поле имеет вид

$$p_s(\mathbf{r}) = f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) (e^{ikR}/R), \quad R > D^2/\lambda. \quad (2.108)$$

¹⁾ В этом разделе для краткости индекс 1 для акустических величин опускается. Так, например, вместо p_{11} мы будем писать p_i .

Векторы плотности потока мощности падающей и рассеянной волн равны

$$\mathbf{S}_i = (|p_i|^2/2\eta_0) \hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{S}_s = (|p_s|^2/2\eta_0) \hat{\mathbf{o}}, \quad (2.109)$$

где $\eta_0 = \rho_0 c_0$ — характеристический импеданс, а ρ_0 и c_0 — плотность покоящейся среды и скорость звука в ней. Дифференциальное сечение рассеяния σ_d , сечение рассеяния σ_s , сечение поглощения σ_a и полное сечение σ_t в этом случае также выражаются формулами, приведенными в разд. 2.1. Оптическая теорема здесь принимает вид

$$\sigma_t = (4\pi/k^2) \operatorname{Im} f(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}). \quad (2.110)$$

Интегральное представление амплитуды рассеяния $f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$ несколько отличается от электромагнитного случая из-за наличия в уравнении (2.102) множителя $1/\rho_0$ под знаком дивергенции.

В случае монохроматических волн уравнение (2.102) принимает вид

$$\nabla^2 p + k^2 p = -k^2 \gamma_\kappa p + \operatorname{div} [\gamma_\rho \operatorname{grad} p], \quad (2.111)$$

где $\gamma_\kappa = (\kappa_e - \kappa)/\kappa$, $\gamma_\rho = (\rho_e - \rho)/\rho_e$, $k^2 = \omega^2/c^2 = \omega^2 \kappa \rho$, причем κ и ρ — сжимаемость и плотность среды, окружающей частицу, а κ_e и ρ_e — сжимаемость и плотность частицы.

Члены в правой части уравнения (2.111) являются источниками рассеянной волны, поэтому амплитуда рассеяния $f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$ имеет вид

$$f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \left(\gamma_\kappa p - i\gamma_\rho \frac{\hat{\mathbf{o}}}{k} \nabla' p \right) \exp(-ik\hat{\mathbf{o}} \cdot \mathbf{r}') dV'. \quad (2.112)$$

Следует отметить, что для малой частицы первое слагаемое под знаком интеграла в (2.112), как и в электромагнитном случае, дает изотропное рассеяние, а второе слагаемое описывает рассеяние с индикатрисой, пропорциональной $\hat{\mathbf{o}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \cos \theta$.

Из выражения (2.112) можно получить формулы для рэлеевского, борновского и ВКБ-приближений.

Характеристики дискретных рассеивателей в атмосфере, океане и биологических средах

В гл. 2 мы рассмотрели математическое описание и привели общие характеристики поглощения и рассеяния волн отдельной частицей. В данной главе мы дадим ряд численных примеров таких характеристик для частиц, с которыми чаще всего приходится иметь дело на практике. К ним относятся аэрозоли и гидрометеоры в атмосфере, различные частицы в океане, воздушные пузырьки и рыбы в воде, а также эритроциты в крови. Этот перечень примеров не является исчерпывающим; его цель состоит в том, чтобы дать общее представление о численных значениях величин, встречающихся в практических приложениях. Кроме того, эти примеры используются в последующих главах для иллюстрации различных теоретических методов.

3.1. Метеорологические радиолокаторы, шумы и помехи

Метеорологические радио-, лазерные и акустические локаторы являются важными средствами дистанционного зондирования атмосферы. В этом разделе мы приведем краткое описание метеорологических радиолокаторов. Более подробное описание можно найти в работах [7, 43, 95, 147]. По поводу использования оптического диапазона см. [45, 158].

На частотах ниже 1 ГГц влияние метеорологических явлений на работу радиолокаторов, вообще говоря, пренебрежимо мало. Однако на более высоких частотах становятся существенными отражения от различных частиц, например от дождя, снега или града. Такие радиоотражения от метеорологических образований обычно называют шумами, поскольку они «зашумляют» экран радиолокатора и мешают оператору, который должен выделить на их фоне самолет или какую-либо другую цель. Примерами зашумляющих отражений являются отражения от метеорологических образований, отражения от деревьев и другой растительности, от различных сооружений и от морской поверхности. В некоторых случаях волна, излученная одним радиолокатором и рассеянная на атмосферных частицах, может быть принята другими радиолокаторами. Такой нежелательный сигнал называется помехой.

Шумы и помехи нежелательны для нормальной работы радиолокатора, но те же самые явления имеют значительный интерес для метеорологических исследований и предсказания погоды. Метеорологические радиолокаторы используются для определения и изучения областей, занятых осадками, для изучения гроз, торнадо и ураганов.

Обычно метеорологические радиолокаторы имеют пиковую мощность порядка 25—500 кВт и могут принимать сигналы мощностью порядка 10^{-12} — 10^{-14} Вт. Мощность принято выражать в децибелах по отношению к уровню 1 мВт, и такая величина обозначается дБм. Например, 100 кВт соответствует

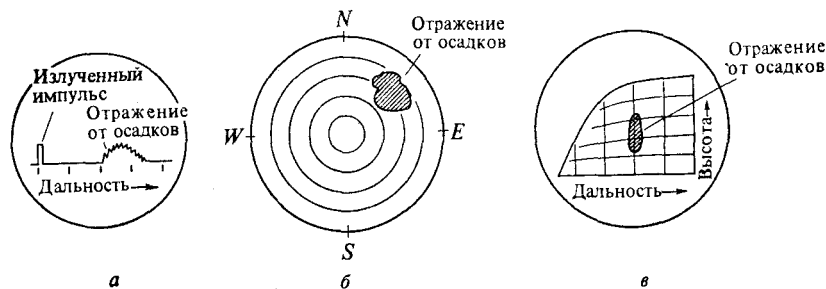


Рис. 3.1. Индикатор типа А (а), индикатор кругового обзора (ИКО) (б), индикатор дальность — высота (ИДВ) (в).

80 дБм, а 10^{-13} Вт — 100 дБм. Длина волны метеорологических радиолокаторов колеблется от 1 до 20 см (частота 30—1,5 ГГц) [7]. В большинстве радиолокаторов передаваемый сигнал имеет форму импульсов длительностью порядка 1 мкс с частотой повторения импульсов PRF порядка 1000 Гц.

Большинство метеорологических радиолокаторов используется для измерения интенсивности отраженного сигнала. Поскольку в них не учитывается информация, заключенная в фазе принимаемого сигнала, такие радиолокаторы называют некогерентными, или обычными. В противоположность этому радиолокатор, с помощью которого можно измерять фазу принимаемого сигнала (по отношению к фазе излученного сигнала), называется когерентным, или импульсно-доплеровским (разд. 5.10).

На практике широко используются радиолокационные индикаторы трех типов. Это индикатор типа А, индикатор кругового обзора (ИКО) и индикатор дальность — высота (ИДВ). В индикаторе типа А горизонтальное отклонение луча пропорционально времени распространения импульса, т. е. дальности. Вертикальное отклонение пропорционально интенсивности принятого сигнала (рис. 3.1, а). ИКО дает изображение принятого

сигнала в полярной системе координат. Сканирование антенны производится с постоянной скоростью по азимуту. Радиус пропорционален дальности, а яркость точки на экране пропорциональна интенсивности принятого сигнала. Индикаторы такого типа широко используются на метеорологических станциях (рис. 3.1, б). В ИДВ используется сканирование антенны в вертикальном направлении. Этот индикатор отображает принимаемый сигнал в системе координат, абсциссой которой является дальность, а ординатой — высота (рис. 3.1, в).

3.2. Аэрозоль и гидрометеоры

Для метеорологических радиолокаторов важную роль играют размеры частиц аэрозоля и гидрометеоров, их состав, форма и ориентация. Мы приведем здесь краткую сводку характеристик аэрозоля и гидрометеоров.

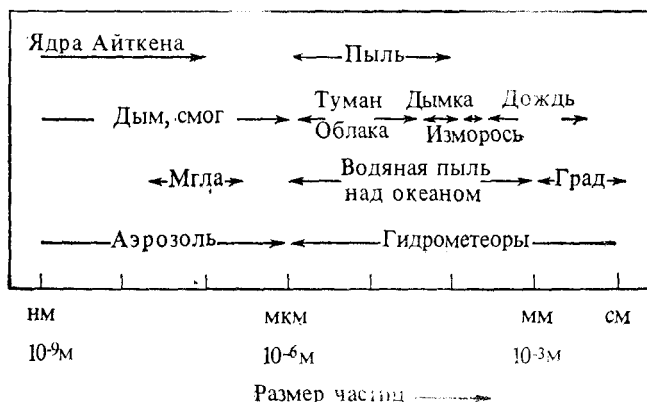


Рис. 3.2. Размеры различных частиц в атмосфере.

Аэрозоль представляет собой взвесь частиц вещества в атмосфере [43, 54]. В качестве примеров упомянем смог, дым, туман, облака, дымку и пыль. Размеры частиц обычно меньше 1 мкм. Гидрометеорами в атмосфере называют частицы воды в жидком или в твердом состоянии. Примерами могут служить частицы дымки, дождя, снега, града, водяной пыли у поверхности океана, облаков и тумана, размеры которых превышают 1 мкм.

Аэрозоль образуется в результате химических реакций между различными газами воздуха и в результате процессов горения — лесных пожаров, извержений вулканов и сжигания

топлива. Для формирования гидрометеоров обычно требуется, чтобы воздух был немного перенасыщен водяными парами и в нем имелись малые частички, известные под названием ядер Айткена, на которых начинается процесс конденсации. Примерные размеры аэрозоля и гидрометеоров приведены на рис. 3.2 [43, 165].

Чтобы изучать влияние этих частиц на распространение волн, важно знать их распределение по размерам, плотность, сечения рассеяния и поглощения и зависимость этих параметров от частоты волны. Ниже мы приводим краткое описание типичных характеристик.

3.2.1. Дождь ¹⁾

Распределение капель дождя по размерам зависит от интенсивности выпадения осадков p , которая обычно выражается в миллиметрах в час. Разумно предположить, что капли дождя имеют сферическую форму. Лишь в очень сильном дожде капли имеют форму сплюсненного эллипсоида (фигуры, получаемой вращением эллипса вокруг малой оси) и падают под определенным ориентационным углом ²⁾ (углом между малой осью эллипсоида и вертикалью). Сферическая капля данного диаметра $2a$ падает с определенной установившейся скоростью $v(a)$. Пусть $n(p, a)$ — число капель в единичном объеме с радиусом от a до $a + da$ при интенсивности осадков p . Тогда интенсивность осадков p (в миллиметрах в час) равна

$$p = 1,51 \cdot 10^4 \int_0^{\infty} v(a) n(p, a) a^3 da, \quad (3.1)$$

где v измеряется в метрах в секунду, n — в обратных кубических метрах, a — в метрах, $1,51 \cdot 10^4 = 3600 \cdot 4\pi/3$. Типичные значения p : 0,25 мм/ч (моросящий дождь), 1 мм/ч (слабый дождь), 4 мм/ч (умеренный дождь), 16 мм/ч (сильный дождь), 100 мм/ч (сильный ливень).

Распределение по размерам капель n можно выразить эмпирической формулой, полученной Маршаллом и Палмером [7, 103],

$$n(p, a) = n_0 e^{-\alpha a}, \quad (3.2)$$

где $n_0 = 8 \cdot 10^6 \text{ м}^{-4}$, $\alpha = 8200 p^{-0.21} (\text{м}^{-1})$, а p измеряется в миллиметрах в час. Эта формула хорошо описывает распределение

¹⁾ Исчерпывающие сведения по поглощению в дожде имеются в работе [104]; см. также [20, 50, 59, 63, 69, 112—114, 138, 139, 152].

²⁾ Ориентационный угол приводит к деполаризации волны, вызывая связь между волнами с ортогональными поляризациями (см. [32, 113, 137]).

при $a > 0,5$ мм; при $a < 0,5$ мм она дает несколько завышенные значения¹⁾). Отметим, что несмотря на то, что в дожде имеется большое число частиц малого радиуса, эти мелкие частицы относительно слабо влияют на распространение и рассеяние волн. Поэтому среднее значение радиуса

$$\langle a \rangle = \int_0^{\infty} a n(p, a) da \quad (3.3)$$

не играет существенной роли. Более важную роль играет медианный радиус (или диаметр), который делит капли большого

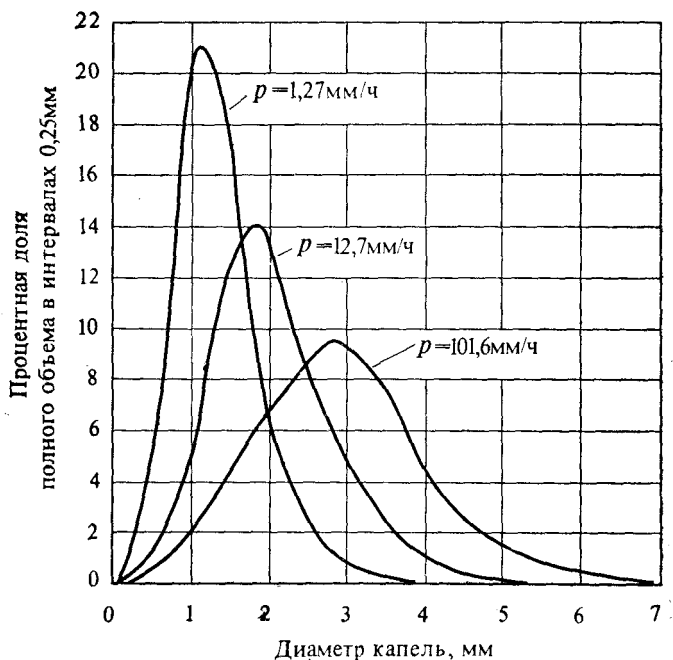


Рис. 3.3. Доля полного объема, занимаемого каплями дождя различных размеров для трех интенсивностей дождя [93].

и малого диаметра на две группы равного объема. Медианный диаметр D_m (в миллиметрах) в соответствии с эмпирической формулой, предложенный Лоу и Парсонсом, равен

$$D_m = 1,238 p^{0,182} \quad (3.4)$$

(p в миллиметрах в час). Распределение дождевых капель по размерам можно выразить также через долю общего объема,

¹⁾ См. экспериментальные распределения [8, 93].

занимаемую каплями соответствующего размера. Эмпирические распределения, полученные Лоу и Парсонсом, приведены на рис. 3.3.

Более общее выражение для распределения капель по размерам было предложено Дейрменджяном [42]. Оно называется модифицированным гамма-распределением и имеет вид

$$n(a) = c_1 a^\alpha \exp(-c_2 a^\gamma), \quad (3.5)$$

где c_1 , c_2 , α и γ — постоянные. Это выражение можно рассматривать как обобщение распределения Маршалла — Палмера (3.2).

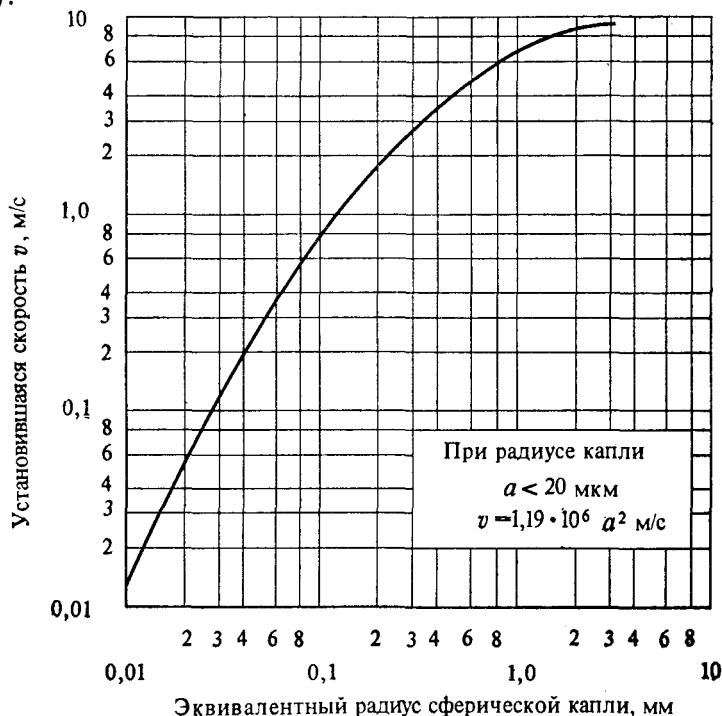


Рис. 3.4. Установившаяся скорость водяных капель в воздухе при давлении 760 мм рт. ст. и температуре 20 °С [56].

Установившаяся скорость дождевых капель зависит от их радиуса. На рис. 3.4 приведены данные Ганна и Кинцера [56]. Движение капель вызывает флуктуации волн во времени и уширение частотных спектров флуктуаций волн. Было показано [7], что при диаметре капель от 1 до 4 мм установившаяся скорость v (в м/с) хорошо аппроксимируется выражением

$$v = 200,8 a^{1/2} \quad (a \text{ в метрах}). \quad (3.6)$$

Сечения рассеяния и поглощения дождевых капель зависят от длины волны. Заметим, что характеристики распространения волн определяются не самими сечениями частиц, а полной суммой сечений всех частиц из единичного объема, т. е. величинами $\rho\langle\sigma_t\rangle$, $\rho\langle\sigma_s\rangle$ и $\rho\langle\sigma_a\rangle$. Ниже мы изучим поведение этих величин в диапазонах СВЧ, миллиметровых и оптических волн.

На частотах ниже 6 ГГц ($\lambda = 5$ см) большая часть дождевых капель удовлетворяет условию $ka \leq 0,1$, так что в этом случае применима теория рэлеевского рассеяния. Даже на частоте 10 ГГц ($\lambda = 3$ см) ka много меньше единицы (за исключением сильного дождя), и рэлеевское рассеяние является хорошим приближением. В рэлеевском приближении имеем (разд. 2.5)

$$\rho\langle\sigma_s\rangle = \frac{128}{3} \frac{\pi^5}{\lambda^4} |K|^2 \int_0^\infty a^6 n(a) da, \quad (3.7a)$$

$$\rho\langle\sigma_a\rangle = \frac{8\pi^2}{\lambda} \text{Im}(K) \int_0^\infty a^3 n(a) da, \quad (3.7б)$$

$$\rho\langle\sigma_t\rangle = \rho\langle\sigma_s\rangle + \rho\langle\sigma_a\rangle, \quad (3.7в)$$

$$\rho\langle\sigma_b\rangle = \frac{64\pi^5}{\lambda^4} |K|^2 \int_0^\infty a^6 n(a) da, \quad (3.7г)$$

где $K = (\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)$, а угловые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по всем размерам частиц.

Величина K зависит от длины волны и температуры. В диапазоне длин волн λ от 3 до 10 см $|K|^2$ почти не меняется при температуре от 0 до 20°C и равно 0,93. Мнимая часть $\text{Im}(K)$ меняется при $\lambda = 10$ см от 0,0074 (при 20°C) до 0,00688 (при 10°C), а при $\lambda = 3,21$ см — от 0,01883 (при 20°C) до 0,0247 (при 10°C). Эти значения можно вычислить, зная показатель преломления воды $n = n' + in'' = (\epsilon_r)^{1/2}$. Некоторые типичные значения n' и n'' приведены на рис. 3.5 (более подробные сведения о показателе преломления воды и льда в оптическом диапазоне имеются в работах [62, 116, 132], см. также [66, 131] и великолепный обзор по поглощению в дожде [70]). Отметим, что мнимая часть показателя преломления воды n'' начинает играть существенную роль при λ больше нескольких микрометров. Она вызывает значительное поглощение волн диапазона СВЧ, миллиметрового и инфракрасного излучения, но практически не играет роли для видимого света. Для льда мнимой частью n'' можно пренебречь при λ больше 100 мкм и при λ меньше нескольких микрометров, откуда следует, что поглоще-

ние пренебрежимо мало как в диапазоне СВЧ, так и в области видимого света.

На частотах больше 10 ГГц расчет сечений следует проводить на основе теории Ми (разд. 2.8). На практике величину $\rho\langle\sigma_t\rangle$ удобно выражать через интенсивность осадков p (мм/ч).

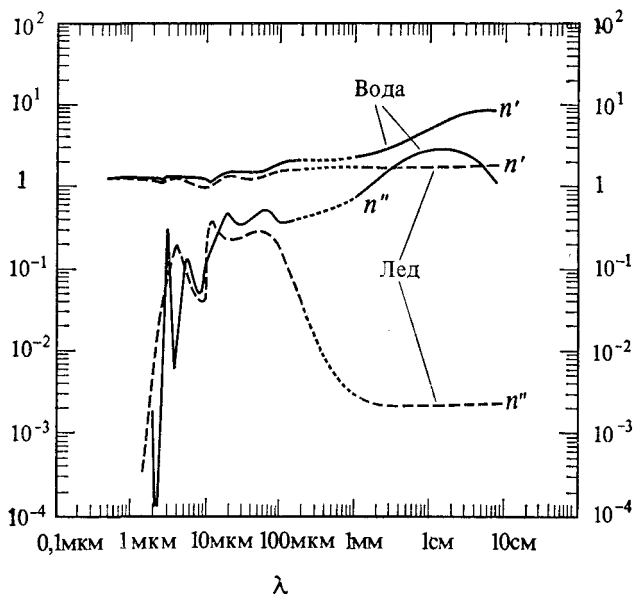


Рис. 3.5. Типичные значения показателя преломления $n = n' + in''$ воды и льда. Данные для воды (при 10 °С) и льда для $\lambda > 1$ мм и $\lambda < 10$ мкм из работы [42] (дождь, град, водяная дымка и водяные облака). Данные для λ от 10 до 200 мкм из работы [33].

Из эксперимента известно, что затухание $\rho\langle\sigma_t\rangle$ примерно пропорционально интенсивности осадков, так что можно положить

$$\rho\langle\sigma_t\rangle = K_t p. \quad (3.8)$$

Коэффициент K_t слабо зависит от p . Некоторые типичные значения K_t показаны на рис. 3.6. Для миллиметровых и оптических волн $K_t \approx 0,4 - 0,8$ при $p < 10$ мм/ч и K_t уменьшается до 0,15—0,3 при $p > 10$ мм/ч. Было показано [33], что при $\lambda = 0,63$ мкм, $\rho\langle\sigma_t\rangle = 0,155p + 2,66$ ($p > 12,5$ мм/ч), (см. также [17]).

На рис. 3.7 приведены кривые полного сечения $\rho\langle\sigma_t\rangle$, сечения обратного рассеяния $\rho\langle\sigma_b\rangle$, альбедо (отношения сечения рассеяния $\rho\langle\sigma_s\rangle$ к полному сечению $\rho\langle\sigma_t\rangle$) и ширины индикатрисы рассеяния на уровне половинной мощности (в градусах) для

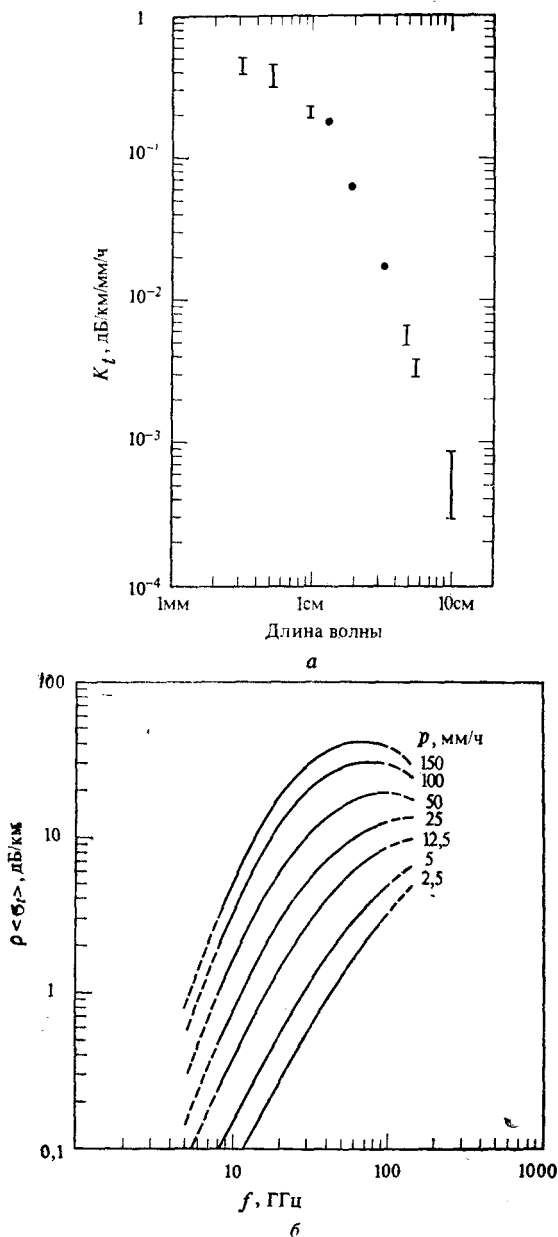


Рис. 3.6. а — типичные значения K_t в зависимости от длины волны. Данные для $\lambda = 1 - 10$ см [7], $\lambda = 0,86$ см [114], $\lambda = 5$ мм [161] и $\lambda = 3$ мм [166] (см. также [96]); б — эмпирическое усредненное затухание в дожде [41]. (Использован параметр $k_e p^a$ и найдены вариации K_t и α в диапазоне частот 8 — 100 ГГц).

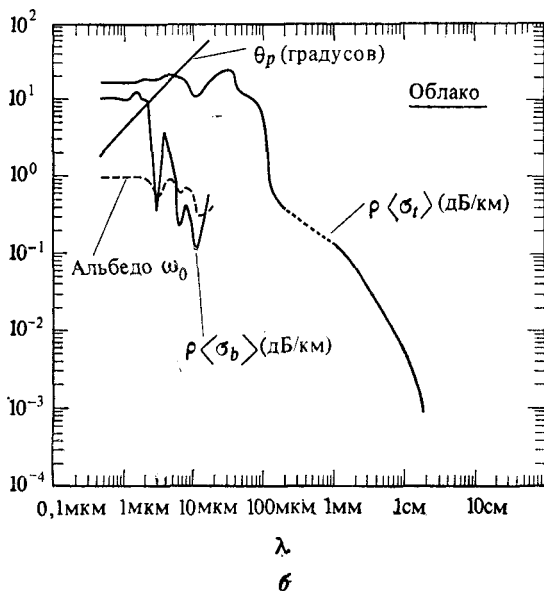
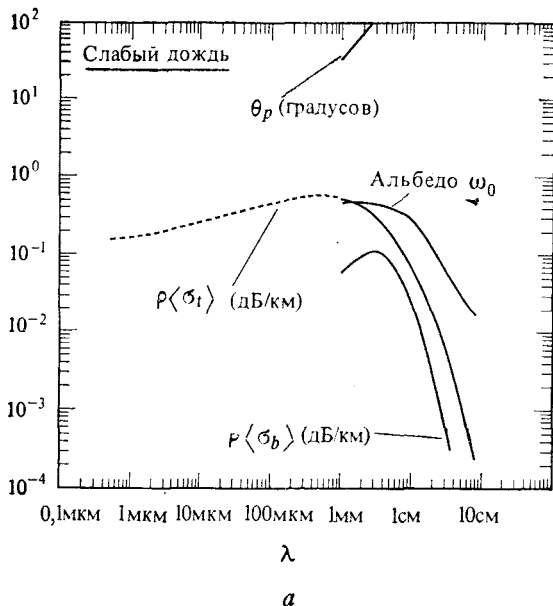


Рис. 3.7. Затухание, обусловленное полным сечением $\rho\langle\sigma_t\rangle$, сечением обратного рассеяния $\rho\langle\sigma_b\rangle$, альбедо [отношением $\langle\sigma_s\rangle$ к $\langle\sigma_t\rangle$], и ширина луча на уровне половинной мощности θ_p в зависимости от длины волны. а — слабый дождь с $p = 1$ мм/ч, б — облако с содержанием воды $0,062$ г/м³ при концентрации 10^8 частиц/м³ [42]. Затухание на оптических частотах основано на данных [33].)

случая слабого дождя с содержанием воды $0,1167 \text{ г/м}^3$, что примерно соответствует интенсивности дождя 1 мм/ч . Отметим, что на оптических частотах затухание несколько меньше. Кроме того, на рис. 3.7 приведены графики всех указанных величин для облака с содержанием воды $0,062 \text{ г/м}^3$. Обратим внимание, что в оптическом диапазоне имеется значительное затухание. Оно связано в основном с рассеянием, так как поглощение мало (альbedo примерно равно единице). Отметим также, что в диапазоне СВЧ при распространении волн в облаках или в тумане сильно сказывается как поглощение, так и затухание, связанное с рассеянием.

Угловые характеристики рассеяния на дождевых каплях вычислены для нескольких типичных случаев [42]. Полуширина индикатрисы рассеяния θ_p оказывается пропорциональной отношению длины волны к размеру капли. Типичный пример приведен на рис. 3.7.

На высоких частотах длина волны может быть во много раз меньше медианного размера частиц, в результате чего рассеянная энергия концентрируется вблизи направления распространения падающей волны. В этом случае часто удобно описывать индикатрису рассеяния гауссовой функцией

$$\langle |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 \rangle = (\gamma/\pi) \langle \sigma_s \rangle \exp(-\gamma \theta^2), \quad (3.9)$$

где $\theta = \arccos(\hat{\mathbf{0}} \cdot \hat{\mathbf{i}})$, а $\gamma = (4 \ln 2)/\theta_p^2$. Выражение (3.9) нормировано так, что интеграл от него по всем углам равен $\langle \sigma_s \rangle$:

$$\langle \sigma_s \rangle = \int_{4\pi} \langle |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 \rangle d\omega \approx 2\pi \int_0^\infty \langle |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 \rangle \theta d\theta. \quad (3.10)$$

3.2.2. Облака¹⁾, туман, дымка и смог

Частицы, из которых состоят облака и туман, представляют собой капли воды или льдинки, размеры которых, как правило, не превосходят 100 мкм . Медианный радиус обычно равен $2,5\text{--}5 \text{ мкм}$, а концентрация ρ может меняться от 10^6 до 10^9 м^{-3} , причем типичным значением является 10^8 м^{-3} . Содержание жидкой воды может колебаться от $0,03 \text{ г/м}^3$ в слабом тумане до 2 г/м^3 — в плотном, а оптическая видимость $(\rho \langle \sigma_t \rangle)^{-1}$ может меняться от 1 км до 30 м . Типичные численные значения $\rho \langle \sigma_t \rangle$, $\rho \langle \sigma_b \rangle$, альbedo и полуширины индикатрисы рассеяния θ_p показаны на рис. 3.7 для случая кучевого облака с концентрацией частиц 10^8 м^{-3} и содержанием воды $0,062 \text{ г/м}^3$.

Типичные значения медианного радиуса частиц дымки лежат в пределах $0,05\text{--}0,5 \text{ мкм}$, а концентрация может достигать зна-

¹⁾ См. исторический обзор по физике облаков [19].

чения 10^8 м^{-3} . На рис. 3.8 показаны типичные значения $\rho\langle\sigma_t\rangle$, $\rho\langle\sigma_s\rangle$, $\rho\langle\sigma_b\rangle$ и θ_p в зависимости от длины волны для дымки с содержанием воды 49 мкг/м^3 и концентрацией 10^8 м^{-3} .

Краткое изложение результатов различных экспериментов по распространению волн через туман, облака и дымку имеется

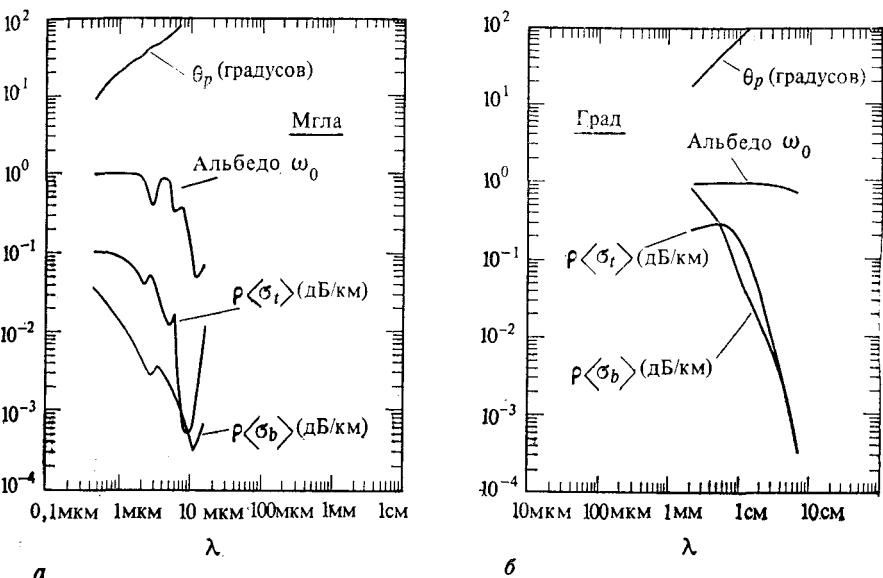


Рис. 3.8. Полное сечение $\rho\langle\sigma_t\rangle$, сечение обратного рассеяния $\rho\langle\sigma_b\rangle$, альbedo $(\langle\sigma_s\rangle/\langle\sigma_t\rangle)$ и ширина пучка на уровне половинной мощности θ_p ; а — дымка с содержанием воды 49 мкг/м^3 и концентрацией 10^8 частиц/м^3 , б — град с содержанием воды $0,3 \text{ г/м}^3$ и концентрацией 10^8 частиц/м^3 [42].

в работе [28]. Опубликован также ряд экспериментальных данных по атмосферным аэрозолям и загрязнениям [27, 68, 96, 164].

3.2.3. Снег и град

Снег, вообще говоря, вызывает значительно меньшие потери, чем вода такого же веса (рис. 3.5), так что затуханием волн диапазона СВЧ в сухом снеге можно пренебречь. Однако в случае мокрого снега затухание существенно возрастает. Известно, что ледяная сфера, покрытая тонким слоем воды, имеет сечение рассеяния, сравнимое с сечением рассеяния сферы, состоящей целиком из воды.

Некоторые типичные значения характеристик рассеяния и поглощения для града с содержанием воды $0,3 \text{ г/м}^3$ и концентрацией частиц 10^8 м^{-3} приведены на рис. 3.8.

При длинах волн от 3 до 10 см можно использовать рэлеевские формулы (3.7). При этом $|K|^2 = 0,197$ для всех температур, а $\text{Im}(K) = 9,6 \cdot 10^{-4}$ при 0°C , $3,2 \cdot 10^{-4}$ при -10°C и $2,2 \cdot 10^{-4}$ при -20°C [7].

3.3. Рассеяние света в морской воде (гидрооптика)

Рассеяние и поглощение света в морской воде вызывается как собственно водой, так и взвешенными в ней частицами [76, 77]. (Имеется прекрасный обзор по распространению света в

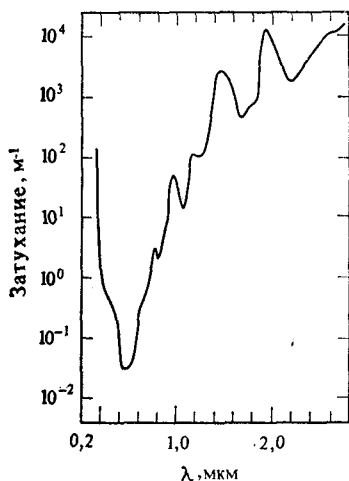


Рис. 3.9. Затухание света в чистой воде в зависимости от длины волны [77].

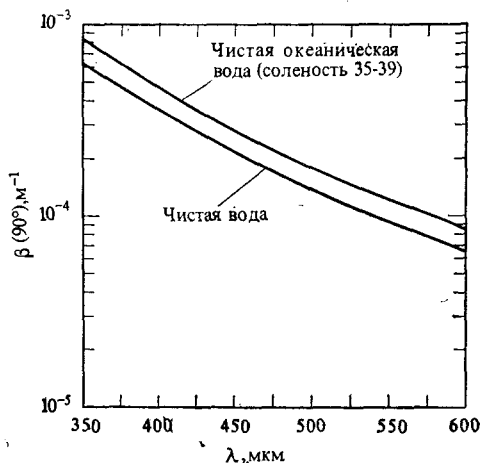


Рис. 3.10. Сечение рассеяния единичного объема $\beta(90^\circ)$ при $\theta = 90^\circ$ для чистой воды и чистой морской воды в зависимости от длины волны.

морской воде [48].) Поглощение света голубой части спектра ($\lambda = 0,4-0,6$ мкм) в чистой воде мало ($0,01-0,05$ м $^{-1}$) и достигает минимального значения при $\lambda = 0,48$ мкм (рис. 3.9). В чистой воде рассеяние света обусловлено случайным движением молекул и описывается сечением рассеяния единичного объема $\beta(\theta)$:

$$\beta(\theta) = \rho \langle |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 \rangle = \beta(90^\circ) (1 + \cos^2 \theta), \quad (3.11)$$

¹⁾ В оптической океанографии для описания рассеяния обычно используют следующие величины: коэффициент поглощения $a = \rho \langle \sigma_a \rangle$, коэффициент рассеяния $b = \rho \langle \sigma_s \rangle$, коэффициент полного затухания $c = a + b$ и сечение рассеяния единичного объема $\beta(\theta) = \rho \langle |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 \rangle$.

где $\theta = \arccos(\hat{0}, \hat{i})$. Это выражение применимо для неполяризованного (естественного) света (рассеяние поляризованного света рассматривается в работе [77]). Коэффициент рассеяния b определяется выражением

$$b = \rho \langle \sigma_s \rangle = (16\pi/3) \beta(90^\circ). \quad (3.12)$$

Характерные значения сечения рассеяния единичного объема при $\theta = 90^\circ$ в зависимости от длины волны показаны на рис. 3.10.

Частицы, взвешенные в морской воде, включают в себя: а) желтое вещество (продукты гниения, возникающие в результате разложения растений и веществ животного происхождения) с размером частиц порядка микрометра или миллиметра и б) дискретное вещество (неорганическое вещество, возникающее при дренировании почвы и при выветривании, а также органическое вещество — планктон и разрушенные клетки с размерами больше нескольких микрометров).

Количество взвешенного вещества в океанической воде колеблется от 0,04 до 18 мг/л. Распределение его по размерам существенно сказывается на характеристиках рассеяния света. Вообще говоря, размеры этих частиц заключены в интервале от 0,01 мкм до нескольких сотен микрометров. Распределение частиц по размерам, по-видимому, хорошо описывается законом Юнга

$$n(a) = Aa^{-\alpha}, \quad (3.13)$$

где A и α — постоянные. Обычно α принимают значения между

Таблица 3.1

Типичные значения $\rho \langle \sigma_t \rangle$, $\rho \langle \sigma_s \rangle$ и $\rho \langle \sigma_a \rangle$ для взвешенных частиц в океане [76]¹⁾

Место	Длина волны, мкм	$\rho \langle \sigma_t \rangle$, м ⁻¹	$\rho \langle \sigma_s \rangle$, м ⁻¹	$\rho \langle \sigma_a \rangle$, м ⁻¹
Карибское море	0,44	0,09	0,06	0,03
	0,655	0,06	0,06	
Океан у берегов Калифорнии	0,522	0,08	0,01	0,07
Южная часть Балтийского моря	0,380	1,15	0,21	0,94
	0,655	0,27	0,20	0,07

¹⁾ Приведенные здесь значения описывают только влияние взвешенных частиц. Для нахождения полного затухания к этим значениям необходимо добавить затухание в чистой воде.

2,25 и 4,5. Показатель преломления, обусловленный наличием различных взвешенных частиц, в 1,02—1,25 раза больше показателя преломления морской воды [176] (см. результаты измерений [26]).

Некоторые типичные значения $\rho\langle\sigma_t\rangle$, $\rho\langle\sigma_s\rangle$ и $\rho\langle\sigma_d\rangle$ приведены в табл. 3.1¹⁾.

На рис. 3.11 показана типичная индикатриса рассеяния $\langle\sigma_d(\theta)\rangle = \langle |f(\theta, i)|^2 \rangle$, нормированная на $\sigma_d(90^\circ)$. На рассеяние вперед сильно влияют крупные частицы. Поскольку распределение по размерам крупных частиц (10—100 мкм) зачастую неизвестно, расчет и измерение индикатрисы рассеяния вблизи $\theta = 0$ сталкивается с трудностями. Однако обычно большая часть из-

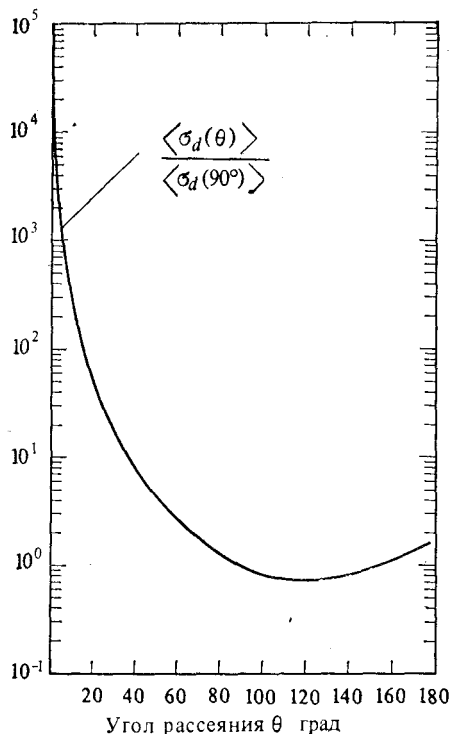


Рис. 3.11. Типичная индикатриса рассеяния дискретных частиц в морской воде [77].

мерений указывает на отличие примерно в 50 дБ между значениями при $\theta = 0$ и $\theta = 90^\circ$.

Было найдено, что отношение $\langle\sigma_d(45^\circ)\rangle$ к полному сечению рассеяния $\langle\sigma_s\rangle$ для океанической воды примерно постоянно и колеблется от $2 \cdot 10^{-2}$ до $3,5 \cdot 10^{-2}$.

3.4. Рассеяние звука в воде (гидроакустика)

Случайные флуктуации акустических волн (это явление называют также реверберацией) в океане обусловлены рассеянием а) на воздушных пузырьках, рыбах, морских животных, органических и неорганических частицах, б) на турбулентных и слоистых нерегулярностях распределений температуры и плот-

¹⁾ Приведенные в таблице значения учитывают только взвешенное вещество. Чтобы получить полное затухание, к приведенным значениям нужно добавить затухание, обусловленное чистой водой.

ности и в) на нерегулярностях поверхности и дна океана [88, 109, 115, 150, 157]. В данном разделе мы сначала приведем краткое описание типичных акустических свойств океана. Затем мы рассмотрим характеристики двух основных видов рассеивателей в воде — воздушных пузырьков и рыб. Турбулентность и характеристики неровных поверхностей рассматриваются в гл. 16—21.

Дно океана [150, 157] условно делится на три части: шельф, склон и абисс. Шельф представляет собой мелководную часть океана, расположенную в прибрежной области в виде полосы, ширина которой колеблется от нескольких километров до 100 км. Наклон дна в этой области мал, так что глубина на границе шельфа может достигать 100 м. Склон характеризуется большими значениями наклона дна (1 к 20 или 30), и глубина здесь достигает нескольких километров; имеются долины и ущелья, которые называют каньонами. Абисс характеризуется меньшими наклонами дна и занимает примерно 80% площади океанического дна. В абиссе обнаружены большие подводные горы и трещины.

Температура верхнего 200-метрового слоя воды в океане относительно постоянна (изотермична), если не принимать во внимание флуктуации температуры, обусловленные турбулентностью. Ниже этого слоя появляется значительный вертикальный градиент температуры, которая примерно на глубине 1000 м достигает своего минимального значения около 4°C. Эта область называется *термоклин*. Далее температура равномерно возрастает вплоть до дна океана.

Скорость звука C (м/с) при атмосферном давлении на поверхности описывается эмпирической формулой [150, 157]

$$C = 1449,2 + 4,623T - 0,0546T^2 + 1,391(S - 35), \quad (3.14)$$

где T — температура в градусах Цельсия, а S — соленость в тысячных долях (по весу). Обычно соленость S имеет значение около 35. Скорость звука возрастает с температурой, соленостью и глубиной со скоростями

$$\Delta C / \Delta T = 2,7 \text{ м/с } ^\circ\text{C}, \quad (3.15a)$$

$$\Delta C / \Delta S = 1,2 \text{ м/с}, \quad (3.15б)$$

$$\Delta C / \Delta H = 0,017 \text{ с}^{-1}, \quad (3.15в)$$

где H — глубина в метрах.

Скорость звука в воде, содержащей несколько объемных процентов воздушных пузырьков, существенно меньше скорости звука в воде без пузырьков и имеет значение порядка 40 м/с. Она уменьшается до 20 м/с в воде с содержанием воздуха 50 объемн. % [150].

Типичные кривые зависимости скорости звука $C(z)$ от глубины приведены на рис. 3.12. На умеренных широтах имеется минимум скорости звука вблизи глубины $z = 1270$ м; в экваториальных областях этот минимум расположен несколько ближе к поверхности. Звук может захватываться окрестностью этого минимума и распространяться в ней без существенного ослабления. Таким образом, область, расположенная на такой глубине, образует акустический волновод, или звуковой канал (канал SOFAR).

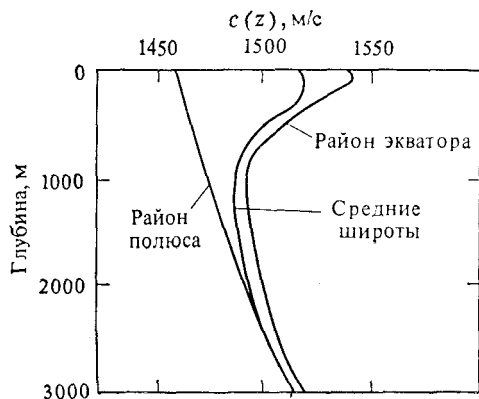


Рис. 3.12. Изменение скорости звука в зависимости от глубины на трех характерных широтах.

Вблизи поверхности океана также возможно появление относительного минимума скорости звука на глубинах в несколько сотен метров. Эта область называется поверхностным звуковым каналом.

Затухание акустических волн в океанической воде обусловлено в основном вязкостью и релаксационным действием сульфата магния. Потери из-за теплопроводности пренебрежимо малы. В диапазоне от нескольких герц до 10 МГц экспериментальные данные хорошо описываются следующей эмпирической формулой для коэффициента затухания α (рис. 3.13):

$$\alpha = 8,686 \cdot 10^{-9} f^2 \left[\frac{2,34 S f_t}{f_t^2 + f^2} + \frac{3,38}{f_t} \right] (1 - 6,54 \cdot 10^{-4} P_s), \quad (3.16)$$

где f — частота (Гц), $f_t = 21,9 \cdot 10^{(9-1520/T)}$ — релаксационная частота (Гц), T — температура (К), S — соленость, P_s — давление (атм)¹.

Акустический локатор, или сонар (SONAR — sound navigation and ranging), представляет собой устройство, используе-

¹) Напомним, что $1 \text{ атм} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$).

мое для посылки акустических импульсов, приема отраженного от целей сигнала и определения характеристик целей. Частота используемых сигналов обычно заключена в пределах 5—300 кГц, а длительность импульсов составляет 100 мкс — 100 мс.

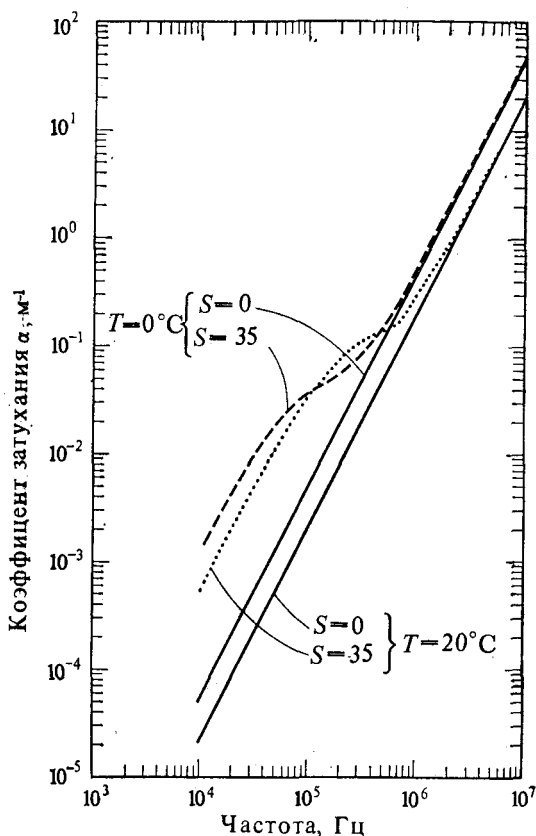


Рис. 3.13. Коэффициенты затухания звука в воде в зависимости от частоты при температуре 0 и 20 °С, солёности $S = 0$ и 35 и нормальном атмосферном давлении (α в дБ/м).

Очевидно, что более высокочастотные сигналы на обычных дистанциях в океане практически непригодны из-за чрезмерного поглощения. Однако в лабораторных условиях для модельных экспериментов или на коротких дистанциях широко используются сигналы с частотами в несколько мегагерц.

В качестве стандартного значения скорости звука в морской воде можно принять 1500 м/с, а в качестве стандартного зна-

чения характеристического импеданса ¹⁾ $\rho_0 C = 1,54 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$. Эти значения отвечают поверхностному слою воды с температурой 13°C , соленостью 35 и плотностью $\rho_0 = 1026 \text{ кг/м}^3$. В отличие от этого в воздухе при температуре 20°C и нормальном атмосферном давлении ($1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$) плотность $\rho_0 = 1,21 \text{ кг/м}^3$, скорость звука $C = 343 \text{ м/с}$, характеристический импеданс $\rho_0 C = 415 \text{ райлов}$. Из-за столь большого различия характеристических импедансов воздуха и воды сигнал, падающий на границу раздела вода — воздух, практически полностью отражается. Нефть имеет плотность $\approx 900 \text{ кг/м}^3$, скорость звука порядка 1300 м/с и характеристический импеданс $1,117 \cdot 10^6 \text{ райлов}$.

Уровень акустического давления обычно выражают в децибелах по отношению к опорному уровню ²⁾ $0,1 \text{ Па} = 1 \text{ мкбар}$. Если акустическое давление равно 1 Па , то это означает, что его уровень на $20 \lg(1/0,1) = 20 \text{ дБ}$ превышает уровень 1 мкбар .

3.4.1. Рассеяние на воздушных пузырьках

Мы описали некоторые общие характеристики акустических волн в океанической воде. Обратимся теперь к описанию двух основных видов рассеивателей в океане — воздушных пузырьков и рыб.

Воздушные пузырьки присутствуют главным образом вблизи поверхности, на глубинах в несколько метров. Их возникновение обусловлено опрокидыванием волн, следами кораблей и подводных лодок, падением снежинок и дождевых капель, а также жизнедеятельностью морских животных, например сифонофор. Размеры пузырьков могут меняться от нескольких микрометров до нескольких сотен микрометров, а их концентрация составляет от нескольких пузырьков в одном литре, до сотен пузырьков в одном кубическом сантиметре.

В поле акустической волны воздушный пузырек начинает пульсировать и его радиус осциллирует около среднего значения с частотой падающей волны. На некоторой частоте эти осцилляции становятся резонансными и амплитуда осцилляций достигает максимума. Мощность, рассеиваемая таким пульсирующим пузырьком, довольно значительна, а сечение рассеяния

¹⁾ Единица характеристического импеданса в системе СИ называется райлом ($1 \text{ райл} = 1 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$).

²⁾ Приведем связь единиц СИ и СГС, широко используемых в акустике. Давление: $1 \text{ Па} = 10 \text{ дин/см}^2 = 10 \text{ мкбар}$; сила: $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$; мощность: $1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг/с}$; энергия $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$. Используется также другой опорный уровень $2 \cdot 10^{-4} \text{ мкбар} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$. Этот опорный уровень обычно используется в воздухе и отвечает пределу слышимости человеком сигнала частоты 1 кГц . Интенсивность соответствующей плоской волны в воздухе приблизительно равна $(2 \cdot 10^{-5})^2 / 400 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ [87, 101].

на резонансной частоте очень велико по сравнению с сечением рассеяния пузырька в нерезонансной области. Отношение этих сечений может достигать 10^3 .

В предположении адиабатичности процесса пульсаций резонансная частота приближенно равна

$$f_r = (2\pi a)^{-1} \sqrt{3\gamma P_0 / \rho_0}, \quad (3.17)$$

где a — радиус пузырька, γ — отношение удельных теплоемкостей газа в пузырьке, P_0 — гидростатическое давление в окружающей среде, а ρ_0 — плотность окружающей среды. Для воздушных пузырьков на уровне моря, приняв $\gamma = 1,4$, $P_0 = 10^5$ Па и $\rho_0 = 1025$ кг/м³ (25°C), получим

$$f_r = 3,22/a \text{ (м)}. \quad (3.18)$$

Если размер воздушного пузырька много меньше длины волны в воде, рассеяние акустической волны на нем почти изотропно. В этом случае сечение рассеяния σ_s воздушного пузырька приближенно равно [102, 109, 135, 150]

$$\sigma_s = \frac{4\pi a^2}{[(\omega_r/\omega)^2 - 1]^2 + (\omega/\omega_r)^2 \delta^2}, \quad (3.19)$$

где $\omega_r = 2\pi f_r$, а $\delta = \delta_r + \delta_t + \delta_v$ — постоянная затухания колебаний пузырька, связанная с переизлучением (рассеянием), тепловыми и вязкими потерями.

Постоянная затухания δ_r , обусловленная рассеянием, дается формулой $\delta_r = k_r a = 0,013$, где $k_r = \omega_r / C$, C — скорость звука в воде. Тепловые и вязкие потери приближенно пропорциональны $f_r^{1/2}$ и f_r соответственно. Зависимости этих постоянных затухания от f_r приведены на рис. 3.14. Из (3.19) видно, что при резонансе σ_s значительно превосходит геометрическое сечение πa^2 .

Ширина резонансной области на уровне половинной мощности Δf определяется выражением

$$\frac{\Delta f}{f_r} = \delta = \delta_r + \delta_t + \delta_v. \quad (3.20)$$

Сечение обратного рассеяния σ_b , сечение поглощения σ_a и полное сечение σ_t резонансного пузырька приближенно равны

$$\sigma_b = \sigma_s, \quad \sigma_a = \frac{\delta_t + \delta_v}{\delta_r} \sigma_s, \quad \sigma_t = \frac{\delta}{\delta_r} \sigma_s. \quad (3.21)$$

Для частот, существенно отличающихся от резонансной, приближенно имеем

$$\sigma_b = \sigma_s = \sigma_t. \quad (3.22)$$

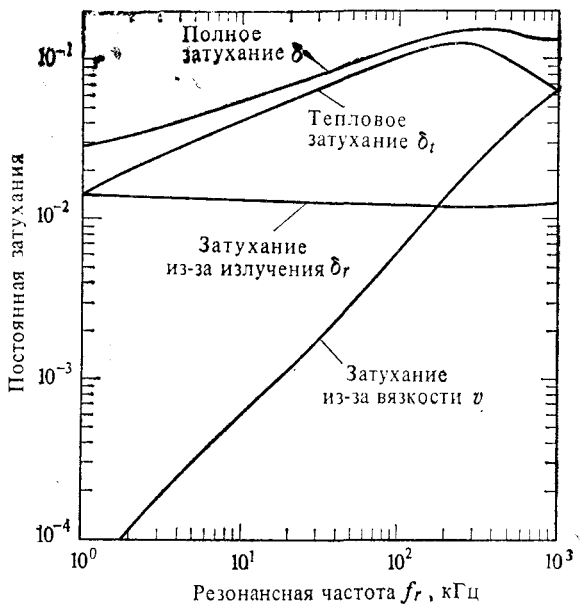


Рис. 3.14. Постоянные затухания, обусловленные излучением (рассеянием) δ_r тепловыми (δ_t) и вязкими (δ_v) потерями для резонансного пузырька в воде [44].

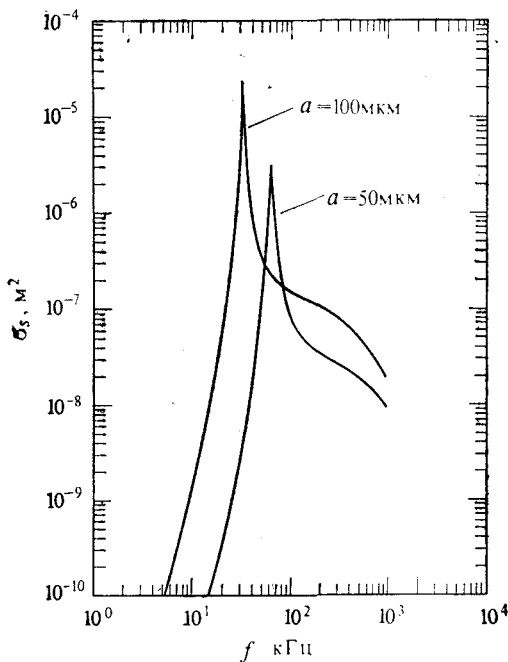


Рис. 3.15. Сечения воздушных пузырьков в зависимости от частоты.

Примеры сечений в зависимости от частоты приведены на рис. 3.15 для $a = 100$ мкм ($f_r = 32,2$ кГц) и $a = 50$ мкм (64,4 кГц).

3.4.2. Рассеяние на рыбах

Частями тела рыбы, которые влияют на рассеяние акустических волн, являются собственно тело рыбы, спинной хребет и плавательный пузырь. Тело рыбы обладает характеристическим

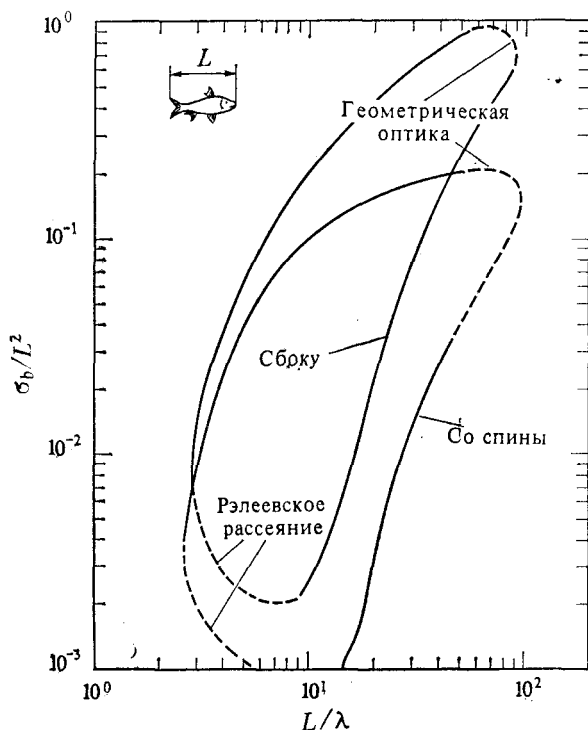


Рис. 3.16. Сечение обратного рассеяния σ_b , нормированное на L^2 , где L — длина рыбы [150].

акустическим импедансом $\rho C = 1,60 \cdot 10^6$ кг/м²·с. Это значение очень близко к характеристическому импедансу морской воды ($1,54 \cdot 10^6$), так что рассеяние от тела рыбы относительно мало. Максимальная высота рыбы составляет приблизительно $0,195 L$, а максимальная ширина $0,112 L$, где L — длина рыбы. Объем рыбы равен $8,3 \cdot 10^{-3} L^3$, а объем ее плавательного пузыря — $3,4 \cdot 10^{-4} L^3$. Тело рыбы можно аппроксимировать эллипсоидом с указанными размерами.

Акустический импеданс спинного хребта составляет $2,5 \cdot 10^6$ кг/м²с, поэтому он дает больший вклад в рассеяние. Спинной хребет можно аппроксимировать цилиндром длины $0,65 L$ и диаметра $0,012 L$. Наиболее существенным для рассеяния акустических волн является плавательный пузырь, так как находящийся внутри него воздух почти полностью отражает звук. Плавательный пузырь можно аппроксимировать цилиндром длины $0,24 L$ и радиуса $0,0245 L$. На рис. 3.16 приведен приблизительный диапазон экспериментальных значений сечения обратного рассеяния по данным работы Хаслетта (см. [150]). Эти данные ограничиваются диапазоном $3 < L/\lambda < 60$, но можно ожидать, что при $L/\lambda > 60$ преобладают геометрикооптические эффекты и σ/L^2 должно быть пропорционально $(L/\lambda)^p$, где p меняется от 0 (эллипсоидальная форма) до 1 (цилиндрическая форма) и далее до 2 (плоская форма). При $L/\lambda < 3$ должно быть применимо рэлеевское приближение. В этом случае $p = 4$.

3.5. Рассеяние на биологических средах

3.5.1. Биоэлектродинамика

Электромагнитные поля в диапазоне частот от 1 МГц до 100 ГГц могут распространяться в биологических средах, испытывая при этом в различной степени поглощение, отражение и рассеяние. Отражение возникает на границах тканей, а рассеяние вызывается неоднородностями с размером порядка длины волны в тканях [79, 81].

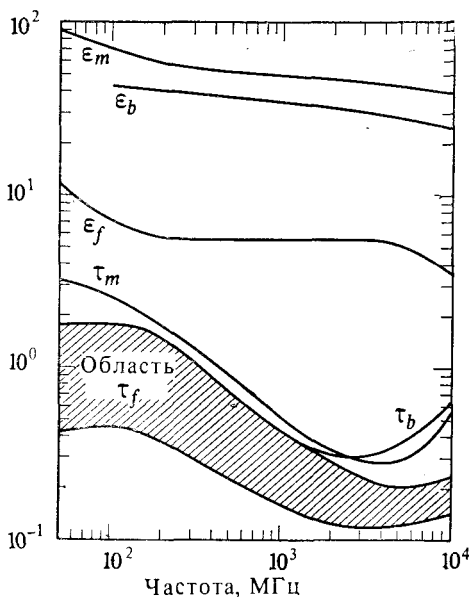
Излучение на частотах 27, 12, 915 и 2450 МГц используется для диатермии в США; в Европе для этой цели используется излучение на частоте 433 МГц. Среди других медицинских приложений СВЧ-излучения упомянем нагревание охлажденной крови до температуры человеческого тела перед переливанием и селективное нагревание раковых или доброкачественных опухолей для управления действием противораковых препаратов. В СВЧ-нагревателях обычно используется частота 2450 МГц, их обычная мощность около 2 кВт, а максимальная — 5,25 кВт.

Влияние СВЧ-излучения на биологические системы может носить как тепловой, так и нетепловой характер. Поглощаемая тканями мощность вызывает повышение температуры, которое зависит от диффузионных механизмов нагревания и охлаждения тканей. Если способность системы к терморегулированию окажется недостаточной, чтобы справиться с подводимым количеством тепла, ткани разрушаются, и может наступить смерть. В США при долговременном облучении человека в качестве безопасной плотности мощности рекомендуется значение

10 мВт/см². По сообщениям советских ученых, центральная нервная система чувствительна к СВЧ-излучению с интенсивностями ниже теплового порога. В СССР принят максимальный уровень плотности мощности 0,01 мВт/см².

Диэлектрическая проницаемость тканей с высоким содержанием воды (таких, как мышцы и кожа) тщательно исследовалась Шваном (см. [135]) и его сотрудниками. Результаты этих

Рис. 3.17. Диэлектрические проницаемости ϵ_f , ϵ_m и ϵ_b и тангенсы угла потерь τ_f , τ_m и τ_b жировых, мышечных и мозговых тканей соответственно в зависимости от частоты.



исследований приведены на рис. 3.17, где показаны также графики диэлектрической проницаемости для тканей с низким содержанием воды, подобных жиру и костям. Значения ϵ и σ меняются с температурой со скоростями $+2$ и $-0,5\%/^{\circ}\text{C}$ соответственно.

3.5.2. Биооптика

При распространении света в биологических средах основную роль играет рассеяние. Это связано с неоднородностью клеточной структуры, причем размеры частиц имеют порядок оптической длины волны. Обычно диаметр клеток составляет несколько микрон. Мышечные клетки могут достигать в длину нескольких миллиметров, а нервные — могут превосходить один метр. Клетка состоит из тонкой, толщиной примерно 75 Å, оболочки, цитоплазмы и ядра. Ткани эпителия состоят из клеток, расположенных в слоистой оболочке. Эти ткани покры-

вают поверхность тела или выстраиваются вдоль нее и осуществляют функции защиты и регулирования секреции. Соединительные ткани поддерживают и связывают клеточные ткани со скелетом. Мышечные ткани состоят из клеток длиной 1—40 мм и диаметром до 40 мкм. Нервные ткани состоят из нервных клеток, называемых нейронами, которые осуществляют передачу информации между центральной нервной системой и мышцами, органами, железами и т. д. [79]. (Рассеяние света на бактериях описано в работе [37]; применение лазеров в медицине рассмотрено в работе [169].)

Свет использовался для определения содержания кислорода в крови. Красные кровяные тельца (эритроциты) имеют форму двояковогнутых дисков с максимальным диаметром около 7 мкм и толщиной около 1 мкм в центре и 2 мкм на краях. Эритроциты непрерывно образуются в костном мозге, переносятся потоком крови и поглощаются и восстанавливаются в печени. Обычно имеется примерно $5 \cdot 10^6$ эритроцитов в 1 мм^3 . Эритроциты составляют примерно 40% всего объема крови. Объемная доля эритроцитов в крови называется гематокритом H . В нормальной крови $H = 0,4$. Остальные 60% объема крови составляет практически прозрачный водный раствор солей, называемый плазмой.

В красных кровяных тельцах имеются молекулы гемоглобина Hb , которые легко окисляются в молекулы оксигемоглобина HbO_2 . Насыщенность кислородом OS определяется как отношение количества оксигемоглобина $[\text{HbO}_2]$ к полному количеству гемоглобина $[\text{HbO}_2] + [\text{Hb}]$. Чтобы найти характеристики поглощения света в самом гемоглобине, оболочку эритроцитов разрушают; при этом гемоглобин находится в растворе. Такой раствор называют гемолизированной кровью. Он представляет собой однородную поглощающую среду. Уменьшение интенсивности света dI в этой среде пропорционально интенсивности I и элементу пути dz :

$$dI = -\alpha I dz. \quad (3.23)$$

Таким образом, интенсивность света уменьшается по экспоненциальному закону

$$I(z) = I(0) \exp(-\alpha z), \quad (3.24)$$

который называется законом Ламберта — Бира. Постоянная поглощения α зависит от концентрации молекул C (моль/см³) и от удельного коэффициента поглощения κ (см²/моль):

$$\alpha = C\kappa. \quad (3.25)$$

На рис. 3.18 приведены кривые удельных коэффициентов поглощения κ_h и κ_0 гемоглобина Hb и оксигемоглобина HbO_2 гемоли-

зованной крови. Оксигемоглобин HbO_2 обладает слабым поглощением в красной области спектра, поэтому кровь, в которой преобладает оксигемоглобин, выглядит красной. Поглощения гемоглобина Hb и оксигемоглобина HbO_2 совпадают при $\lambda = 0,548, 0,568, 0,587$ и $0,805$ мкм. Эти длины волн соответствуют изобестическим точкам.

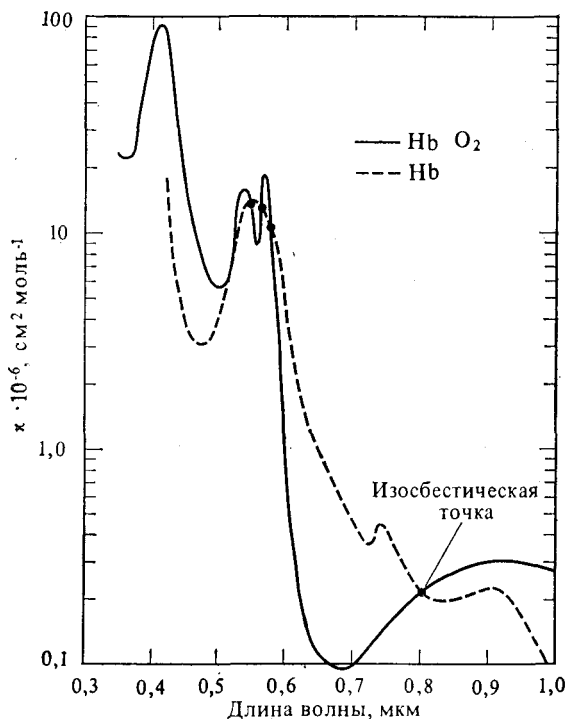


Рис. 3.18. Спектры оптического поглощения гемоглобина $[\text{Hb}]$ и оксигемоглобина $[\text{HbO}_2]$.

Рассмотрим световой пучок, направленный на слой толщины D . Коэффициенты пропускания T и отражения R определяются соответственно как отношение интенсивности прошедшей или отраженной волны к интенсивности падающей волны. Оптическая плотность OD определяется выражением

$$OD = \lg(T^{-1}). \quad (3.26)$$

Оптическая плотность гемолизированной крови с насыщенностью кислородом OS дается формулой

$$OD = 0,4343C\kappa D, \quad (3.27)$$

где $C_k = C_0 x_0 + C_h x_h$ — среднее взвешенное от x_0 и x_h . Через C_0 и C_h обозначены концентрации $[\text{HbO}_2]$ и $[\text{Hb}]$ соответственно, а через x_0 и x_h — удельные коэффициенты поглощения $[\text{HbO}_2]$ и $[\text{Hb}]$. Замечая, что $OS = C_0 / (C_0 + C_h)$, можно также написать

$$C = C_0 + C_h, \quad x = x_h + OS(x_0 - x_h). \quad (3.28)$$

Проведя измерение оптической плотности ОД гемолизованной крови на двух длинах волн и зная из рис. 3.18 значения x_0 и x_h на этих частотах, можно найти насыщенность кислородом OS (см. [81], где описан спектрофотометр для оксиметрии *in vivo*). Если выбрать две длины волны, одна из которых приходится на красную часть спектра (например, $\lambda_1 = 0,66$ мкм, $x_{01} = 0,10 \cdot 10^6$ и $x_{h1} = 0,80 \cdot 10^6$), а другая совпадает с изобестической ($\lambda_2 = 0,805$ мкм, $x_{02} = x_{h2} = 0,20 \cdot 10^6$), то получим

$$OS = \frac{x_{h1}}{x_{h1} - x_{01}} - \frac{x_{h2}}{x_{h1} - x_{01}} \left(\frac{OD_1}{OD_2} \right), \quad (3.29)$$

где OD_1 и OD_2 — оптические плотности при $\lambda_1 = 0,66$ мкм и $\lambda_2 = 0,805$ мкм соответственно.

Оптическая плотность обычной крови существенно отличается от оптической плотности гемолизованной крови из-за того, что в обычной крови гемоглобин находится в эритроцитах, и имеет место значительное рассеяние света. Характеристики рассеяния и поглощения эритроцитов (красных кровяных телец) наиболее удобно описывать сечениями рассеяния и поглощения. Типичные значения этих сечений приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Типичные значения сечения рассеяния σ_s , сечения поглощения σ_a , показателя преломления $n = n' + in''$ по отношению к плазме, среднего косинуса угла рассеяния $\bar{\mu}$ одного красного кровяного тельца, коэффициента переноса ρ_{tr} [разд. 9.5, 9.7 и 9.8] для цельной крови с гематокритом $H = 0,41$ [125]

Насыщен- ние кисло- родом	λ , мкм	n'	n'' ($\times 10^4$)	σ_s , мкм ²	σ_a , мкм ²	$\bar{\mu}$	$\sigma_s (1 - \bar{\mu})$, мкм ²	ρ_{tr} , мм ⁻¹
100%	0,665	1,036	0,240	57,20	0,060	0,9951	0,283	0,747
	0,675	1,036	0,244	56,14	0,060	0,9950	0,281	0,744
	0,685	1,036	0,248	55,09	0,059	0,9949	0,281	0,739
	0,955	1,036	0,111	33,47	0,191	0,9925	0,251	0,666
	0,960	1,036	0,109	33,18	0,187	0,9924	0,251	0,666
	0,965	1,036	0,109	32,90	0,185	0,9924	0,251	0,665
0%	0,665	1,036	2,203	56,58	0,542	0,9951	0,279	0,738
	0,675	1,036	2,207	55,53	0,535	0,9950	0,278	0,735
	0,685	1,036	2,023	54,56	0,484	0,9949	0,278	0,731
	0,955	1,036	0,052	33,54	0,090	0,9925	0,252	0,668
	0,960	1,036	0,049	33,27	0,085	0,9924	0,252	0,667
	0,965	1,036	0,047	32,98	0,080	0,9924	0,252	0,666

Гематокрит H связан с концентрацией эритроцитов ρ и объемом одного эритроцита V_e соотношением

$$\rho = H/V_e. \quad (3.30)$$

Поэтому коэффициент поглощения $\rho\sigma_a$ равен

$$\rho\sigma_a = H\sigma_a/V_e. \quad (3.31)$$

При достаточно малых значениях H ($H < 0,2$) коэффициент рассеяния $\rho\sigma_s$ дается аналогичной формулой

$$\rho\sigma_s = H\sigma_s/V_e. \quad (3.32)$$

При $H > 0,5$ частицы становятся тесно упакованными, а среда становится почти однородной. В этом случае всю кровь можно рассматривать как однородную среду, состоящую из гемоглобина, в которую вкраплены рассеивающие частицы из плазмы, окружающей красные кровяные тельца. В пределе $H \rightarrow 1$ «плазменные частицы» исчезают и коэффициент рассеяния $\rho\sigma_s$ должен стремиться к нулю. Это приводит к следующей приближенной формуле для $\rho\sigma_s$:

$$\rho\sigma_s = H(1 - H)\sigma_s/V_e, \quad (3.33)$$

где множитель $(1 - H)$ учитывает исчезновение рассеяния при $H \rightarrow 1$. Зачастую плотная упаковка ($H = 1$) недостижима, и влияние упаковки нельзя описать простой функцией $(1 - H)$. Например, если частицы представляют собой твердые сферы, H не может превосходить значения 0,64. Тогда следует принять [9]

$$\rho\sigma_s = (H\sigma_s/V_e)f(H), \quad (3.34)$$

где функция $f(H)$ должна монотонно уменьшаться от 1 при $H = 0$ до 0 при некотором определенном значении H .

3.5.3. Биоакустика¹⁾

Акустический коэффициент затухания α на единицу длины пути в тканях, как правило, меняется по закону f^n , где f — частота, а n лежит в пределах от 1 до 2. Коэффициенты затухания α для мышц, печени, почек, мозга и жира примерно пропорциональны частоте f и лежат в интервале от $0,5 \cdot 10^{-6}$ до $2 \cdot 10^{-6}$ f дБ/см. Типичные значения коэффициента затухания α , скорости звука c и плотности ρ_0 приведены в табл. 3.3.

Влияние ультразвука на свойства крови подробно исследовалось. Обычно в биологических средах используются частоты в

¹⁾ См. [135]. Использование ультразвука в медицине описано в работах [154, 167].

Таблица 3.3

Типичные значения коэффициента затухания α , скорости звука C и плотности ρ_0 биологических тканей [135, 167]

Тип ткани	Частота, МГц	α , см $^{-1}$	C , см/с	ρ_0 , г/см 3
Жир	1,0	0,08	$1,44 \cdot 10^5$	0,97
Мышцы	1,0	0,13	$1,57 \cdot 10^5$	1,07
Кости	1,2	1,7	$3,36 \cdot 10^5$	1,7
Мозг	1,0	0,1	$1,54 \cdot 10^5$	
Почки	2,0	0,04	$1,56 \cdot 10^5$	
Печень	2,0	0,19	$1,55 \cdot 10^5$	

диапазоне от нескольких сотен килогерц до 10 МГц, так что длина волны во много раз больше размера красных кровяных телец. Поэтому рэлеевская формула для сферы того же объема, что и у красного кровяного тельца, должна давать хорошее приближение для характеристик рассеяния и поглощения. Амплитуда рассеяния $f(\hat{0}, \hat{i})$ дается формулой

$$f(\hat{0}, \hat{i}) = \frac{k^2 a^3}{3} \left(\frac{\kappa_e - \kappa}{\kappa} + \frac{3\rho_e - 3\rho}{2\rho_e + \rho} \cos \theta \right), \quad (3.35)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны в окружающей среде (плазме), a — радиус эквивалентной сферы, κ_e и ρ_e — адиабатическая сжимаемость и плотность красных кровяных телец, κ и ρ — соответствующие характеристики плазмы, а θ — угол между $\hat{0}$ и $\hat{i}$. Объем обычного кровяного тельца равен $0,87$ мкм 3 , а эквивалентный радиус a составляет $2,75$ мкм. Сжимаемость и плотность красного кровяного тельца равны $\kappa_e = 34,1 \cdot 10^{-12}$ см 2 /дин, $\rho_e = 1,092$ г/см 3 , те же параметры для плазмы составляют $\kappa = 40,9 \cdot 10^{-12}$ см 2 /дин, $\rho = 1,021$ г/см 3 .

Сечение рассеяния σ_s дается формулой

$$\frac{\sigma_s}{\pi a^2} = \frac{4(ka)^4}{9} \left[\left| \frac{\kappa_e - \kappa}{\kappa} \right|^2 + \frac{1}{3} \left| \frac{3\rho_e - 3\rho}{2\rho_e + \rho} \right|^2 \right]. \quad (3.36)$$

Используя приведенные выше численные значения κ_e , ρ_e , κ , ρ и a , находим

$$\sigma_s = 1,1 \cdot 10^{-16} f^4 \text{ см}^2, \quad (3.37)$$

где f — частота в мегагерцах.

Сечение поглощения σ_a пропорционально частоте и равно

$$\frac{\sigma_a}{\pi a^2} = \frac{4ka}{3} \operatorname{Im} \left(\frac{\kappa_e - \kappa}{\kappa} + \frac{3\rho_e - 3\rho}{2\rho_e + \rho} \right), \quad (3.38)$$

где Im означает «мнимая часть выражения». Мнимые части κ_e , ρ_e , κ и ρ неизвестны. Известно однако, что в диапазоне от 0,1 до 10 МГц сечение поглощения σ_a во много раз больше сечения рассеяния σ_s , откуда следует, что затухание в крови обусловлено главным образом поглощением, а не рассеянием. Известно также, что затухание плоской волны в облаке случайных рассеивателей равно $\rho\sigma_a$ Нп/см. Постоянная затухания пропорциональна гематокриту H и частоте f (в мегагерцах) и приближенно равна

$$\alpha = (5 \div 7) \cdot 10^{-2} H f \text{ Нп/см} = 0,3 H f \text{ дБ/см.} \quad (3.39)$$

Поскольку $\alpha = \rho\sigma_a = (H/V_e)\sigma_a$, сечение поглощения отдельного эритроцита равно

$$\sigma_a = 6 \cdot 10^{-12} f \text{ см}^2,$$

где f измеряется в мегагерцах. Характеристики рассеяния и поглощения могут существенно зависеть от вязкости плазмы и эритроцита [3].

Рассеяние волн в разреженных облаках частиц

В гл. 2 и 3 представлены характеристики отдельного рассеивателя и приведены некоторые примеры, с которыми чаще всего приходится иметь дело на практике. Обратимся теперь к главной цели данной книги, а именно к изучению характеристик волны, распространяющейся через облако случайно распределенных рассеивателей. Укажем сразу, что, имея дело с волной в облаке из множества частиц, как правило, рассматривают два предельных случая: разреженные и плотные облака. Если плотность частиц мала, можно использовать приближение однократного рассеяния (рис. 4.1, а). В этом приближении предполагается, что излученная волна приходит к приемному устройству, встретившись лишь с очень небольшим числом частиц. При этом считается, что рассеянная волна порождается однократным рассеянием на какой-либо частице, а рассеяния более высоких кратностей считаются пренебрежимо малыми. Результаты такого приближения чрезвычайно просты и широко используются в приложениях, включая метеорологические радиолокаторы [7] и акустику океана [157]. (Общая теория рассеяния света изложена в работах [16, 36].)

При увеличении концентрации частиц уже нельзя считать, что распространяющаяся в прямом направлении волна не отличается от падающей, и возникает необходимость учитывать затухание волны из-за рассеяния и поглощения вдоль пути распространения (рис. 4.1, б). В таком приближении по-прежнему считается, что рассеянная волна обусловлена однократным рассеянием на частице, но здесь уже учитывается затухание из-за рассеяния и поглощения как падающей, так и рассеянной волн при их распространении. Такой подход частично учитывает многократное рассеяние, и поэтому мы его будем называть первым приближением теории многократного рассеяния. Это приближение широко используется при изучении поглощения в дожде.

Слова «разреженный», «малая плотность частиц» и т. п. использовались выше без соответствующей строгости. Вообще говоря, разграничение различных приближений должно зависеть от таких величин, как оптический путь и альбедо, которые зависят от длины волны, размера частиц и их характеристик рассеяния, а также от свойств излучателя и приемника. Эти вопросы рассматриваются в последующих разделах, посвященных соответствующим приближениям.

Указанные выше два приближения — однократное рассеяние и первое приближение многократного рассеяния — пригодны для описания большинства встречающихся на практике задач. Относительная простота этих методов обусловила их чрезвычайно широкое использование. Однако оба этих приближения пригодны лишь для разреженных облаков частиц. В противоположном

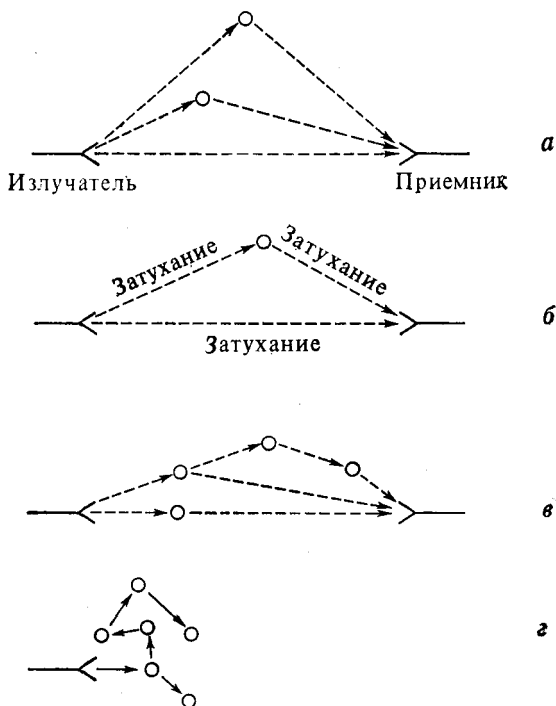


Рис. 4.1. Однократное рассеяние (а), первое приближение многократного рассеяния (б), многократное рассеяние (в) и диффузионное приближение (г).

случае, когда плотность частиц велика, оказывается полезным другой метод, который называется диффузионным приближением (рис. 4.1, г). Этот метод подробно рассматривается в гл. 9.

Существует еще промежуточная область концентраций частиц, лежащая между областями малых плотностей (когда применимо однократное рассеяние и первое приближение теории многократного рассеяния) и больших плотностей (когда справедливо диффузионное приближение), где многократное рассеяние играет важную роль (рис. 4.1, в). В последующих главах мы рассмотрим некоторые методы, разработанные для описания волн в этой сложной для расчетов области. Здесь же мы оста-

новимся на однократном рассеянии и на первом приближении теории многократного рассеяния.

Вообще говоря, при исследовании волн в случайных средах все задачи можно разделить на два типа: а) рассеяние волны в случайной среде и б) распространение волны в случайной среде в пределах прямой видимости. Среди примеров задач рассеяния можно назвать изучение аэрозолей и гидрометеоров с помощью радиолокаторов, лазерных и акустических локаторов, а также рассеяние света и звука в воде. Примеры задач распространения в пределах прямой видимости включают определение флуктуаций амплитуды и фазы волны, вызванных случайной средой, и влияния этих флуктуаций на системы связи. Каждый из этих двух типов задач (рассеяние и распространение) в свою очередь можно разбить на два вида в зависимости от того, является ли излученная волна монохроматической или импульсной.

Данная глава посвящена рассеянию монохроматической волны в случайной среде. Рассеяние импульсных волн рассматривается в гл. 5, а задачи распространения в пределах прямой видимости изучаются в гл. 6. Первые три раздела данной главы посвящены анализу средней мощности рассеянной волны. В остальной части главы обсуждаются флуктуации рассеянной волны, корреляционные функции, спектры и распределения вероятности.

4.1. Средняя мощность рассеянного поля в приближении однократного рассеяния

Рассмотрим объем V со случайно распределенными частицами, на который падает монохроматическая волна от излучателя с диаграммой направленности по мощности $G_t(\hat{i})$. Требуется определить среднюю мощность, которую примет приемник с эффективной площадью апертуры $A_r(\hat{0})$ (рис. 4.2). Возьмем малый объем dV , содержащий ρdV частиц, где ρ — концентрация частиц, т. е. число частиц в единичном объеме. Предполагается, что этот объем достаточно удален как от излучателя, так и от приемника. Пусть R_1 и R_2 — расстояния от dV до излучателя и приемника соответственно, а $\hat{i}$ и $\hat{0}$ — единичные векторы в направлении распространения падающей и рассеянной объемом dV волн.

Плотность падающей мощности S_i на элементе объема dV можно выразить через мощность излучателя P_t и его диаграмму направленности по мощности $G_t(\hat{i})$ в направлении $\hat{i}$:

$$S_i = G_t(\hat{i}) P_t / 4\pi R_1^2. \quad (4.1)$$

Тогда плотность мощности, рассеянной одной частицей, в месте расположения приемника S_r , равна $(|f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2/R_2^2) S_i$. Поскольку частицы расположены в объеме dV случайным образом, интерференцией волн, рассеянных разными частицами можно пренебречь и просто сложить мощности волн, однократно рассеянных всеми частицами из dV . В результате получим плотность мощ-

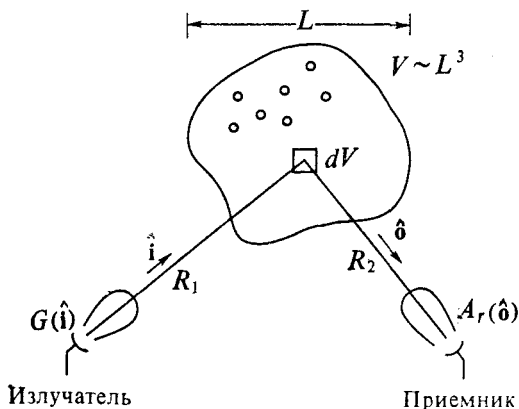


Рис. 4.2. Приближение однократного рассеяния.

ности, рассеянной частицами из dV , в точке расположения приемника S_r :

$$S_r = \frac{\rho |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2}{R_2^2} S_i dV = \frac{\rho \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})}{4\pi R_2^2} S_i dV, \quad (4.2)$$

где $\sigma_{bi} = 4\pi |f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})|^2 = \sigma_i p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ — бистатическое сечение рассеяния отдельной частицы.

Принимаемая мощность P_r равна $A_r(\hat{\mathbf{0}}) S_r$, где $A_r(\hat{\mathbf{0}})$ — эффективная площадь приемной апертуры для волн, приходящих в направлении $\hat{\mathbf{0}}$.

Таким образом, полная принимаемая мощность P_r определяется бистатическим уравнением радиолокации

$$\frac{P_r}{P_t} = \int_V \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{0}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) dV. \quad (4.3)$$

Здесь использовано соотношение $A_r(\hat{\mathbf{0}}) = (\lambda^2/4\pi) G_r(\hat{\mathbf{0}})$, справедливое при использовании согласованного по входному импедансу и поляризации приемника [145]; $G_r(\hat{\mathbf{0}})$ — диаграмма направленности по мощности приемной антенны, λ — длина волны.

В случае однопозиционного радиолокатора, когда передатчик является также и приемником, получаем обычное уравнение радиолокации

$$\frac{P_r}{P_t} = \int_V \frac{\lambda^2 [G_t(\hat{i})]^2 \rho \sigma_b}{(4\pi)^3 R^4} dV, \quad (4.4)$$

где σ_b — сечение обратного рассеяния частицы, а $R_1 = R_2 = R$. Для практического использования уравнения радиолокации (4.3) и (4.4) должны быть видоизменены с учетом рассогласования по импедансу и поляризации и других потерь [146].

Границы применимости приближения однократного рассеяния зависят от глубины проникновения падающей волны в объем V . Наиболее удобно глубину проникновения измерять с помощью оптического пути γ . Приближение однократного рассеяния справедливо, если

$$\gamma = \int_0^L \rho \sigma_t ds \approx \rho \sigma_t L \ll 1, \quad (4.5)$$

где интегрирование проводится вдоль произвольной прямой внутри объема V , а L — линейный размер объема V (рис. 4.2). Однократное рассеяние аналогично борновскому приближению, в котором падающее на частицу поле аппроксимируется полем первичной волны (разд. 2.6).

Используя приближение однократного рассеяния и приближение первого порядка теории многократного рассеяния, которое рассматривается в следующем разделе, можно получить важные формулы, описывающие флуктуации волн, распространение узкополосных и широкополосных импульсов, а также учесть движение частиц. Эти вопросы представляют особый интерес для специалистов, занимающихся проблемами связи, поэтому они подробно рассматриваются в этой и в последующих главах.

4.2. Мощность рассеянного поля в первом порядке теории многократного рассеяния

Как видно на рис. 4.1, б, в первом порядке теории многократного рассеяния учитывается затухание волны, вызванное ее рассеянием и поглощением вдоль пути распространения. Этот метод находит широкое применение при исследовании распространения волн миллиметрового и оптического диапазонов в дожде, тумане, смоге и снеге. Он используется также и при анализе распространения света и акустических волн в воде.

В предыдущем разделе мы обсудили уравнение радиолокации в приближении однократного рассеяния. Рассмотрим теперь это уравнение в первом порядке теории многократного рассеяния. При этом необходимо учесть уменьшение плотности падающей мощности S_i в dV (рис. 4.2), которое характеризуется полным сечением. Таким образом,

$$S_i = \frac{G_t(\hat{\mathbf{i}}) P_t}{4\pi R_1^2} \exp(-\gamma_1), \quad (4.6)$$

где γ_1 — оптический путь от передатчика до элемента объема dV , который равен

$$\gamma_1 = \int_0^{R_1} \rho \sigma_t ds. \quad (4.7)$$

В этом выражении плотность $\rho(s)$ и полное сечение $\sigma_t(s)$ могут зависеть от положения рассеивателя на прямой, соединяющей передатчик с элементом dV .

Аналогичным образом в выражение (4.2) для плотности рассеянной мощности S_r в приближении однократного рассеяния теперь нужно ввести множитель $\exp(-\gamma_2)$, где γ_2 — оптический путь от элемента dV до приемника:

$$\gamma_2 = \int_0^{R_2} \rho \sigma_t ds. \quad (4.8)$$

Используя (4.7) и (4.8), находим, что принятая мощность P_r определяется уравнением радиолокации

$$\frac{P_r}{P_t} = \int_V \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) dV. \quad (4.9)$$

В случае однопозиционной локации имеем

$$\frac{P_r}{P_t} = \int_V \frac{\lambda^2 [G_t(\hat{\mathbf{i}})]^2}{(4\pi)^3 R^4} \rho \sigma_b e^{-2\gamma} dV, \quad (4.10)$$

где $R_1 = R_2 = R$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Выше мы считали, что все частицы имеют одинаковые размеры. Распределение частиц по размерам можно учесть, если в (4.9) и (4.10) использовать среднее полное сечение $\langle \sigma_t \rangle$ и среднее бистатистическое сечение рассеяния $\langle \sigma_{bi} \rangle$, которые определяются следующим образом. Пусть $n(D, \mathbf{r}) dD$ — число частиц с размером от D до $D + dD$ в единичном объеме около точки $\mathbf{r}$.

Тогда γ_1 и γ_2 определяются выражениями

$$\gamma_1 = \int_0^{R_1} \rho \langle \sigma_t \rangle ds \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \int_0^{R_2} \rho \langle \sigma_t \rangle ds, \quad (4.11a)$$

где

$$\rho \langle \sigma_t \rangle = \int_0^\infty n(D, \mathbf{r}) \sigma_t(D) dD, \quad \rho(\mathbf{r}) = \int_0^\infty n(D, \mathbf{r}) dD,$$

а $\rho \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ и $\rho \sigma_b$ нужно заменить на

$$\rho \langle \sigma_{bi} \rangle = \int_0^\infty n(D, \mathbf{r}) \sigma_{bi}(D) dD, \quad (4.11б)$$

$$\rho \langle \sigma_b \rangle = \int_0^\infty n(D, \mathbf{r}) \sigma_b(D) dD. \quad (4.11в)$$

Часто удобно сравнивать рассеянную мощность P_r , определяемую выражением (4.9), с мощностью сигнала излучателя, принимаемого на расстоянии R от него. Эта мощность определяется выражением

$$\frac{P_c}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{i}})}{R^2} e^{-\gamma}, \quad (4.12)$$

где $\hat{\mathbf{i}}$ — единичный вектор, направленный от передатчика к приемнику, а γ дается формулой

$$\gamma = \int_0^R \rho \langle \sigma_t \rangle ds. \quad (4.13)$$

4.3. Случай узкой диаграммы направленности

Во многих практических приложениях диаграммы направленности излучателя и приемника сосредоточены внутри узких телесных углов. В этом случае параметры среды (концентрацию частиц ρ и сечение σ) в пределах общего объема V_c , образуемого пересечением диаграмм (рис. 4.3, а), можно считать постоянными, что позволяет значительно упростить формулу (4.9).

Будем считать, что диаграмма направленности по мощности излучателя $G_t(\hat{\mathbf{i}})$ приближенно описывается гауссовой функцией

$$G_t(\hat{\mathbf{i}}) = G_t(\hat{\mathbf{i}}_0) \exp \{ - (\ln 2) [(2\theta/\theta_1)^2 + (2\phi/\phi_1)^2] \}, \quad (4.14)$$

где $\hat{i}_0$ — единичный вектор, направленный от излучателя в некоторую характерную точку общего объема V_c , θ и ϕ — углы, отсчитываемые от $\hat{i}_0$ в вертикальном и горизонтальном направлениях, а углы θ_1 и ϕ_1 определяют ширину луча в вертикальном и горизонтальном направлениях на уровне половинной мощности

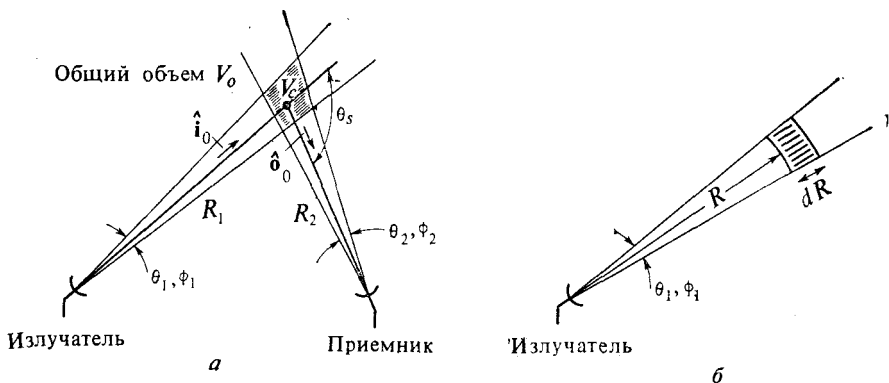


Рис. 4.3. *a* — двухпозиционный (бистатический) радиолокатор с узким лучом; *б* — однопозиционный радиолокатор с узким лучом. Через θ_1 и ϕ_1 обозначены ширины лучей на уровне половинной мощности в вертикальном и горизонтальном направлениях соответственно.

сти. Аналогичным приближением мы воспользуемся и для диаграммы направленности приемной антенны $G_r(\hat{0})$:

$$G_r(\hat{0}) = G_r(\hat{0}_0) \exp \{ -(\ln 2) [(2\theta/\theta_2)^2 + (2\phi/\phi_2)^2] \}, \quad (4.15)$$

где θ_2 и ϕ_2 — ширина приемной диаграммы направленности на уровне половинной мощности в вертикальном и горизонтальном направлениях соответственно.

Подставляя (4.14) и (4.15) в (4.9) и выполняя интегрирование, найдем выражение для принимаемой мощности

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{\lambda^2 G_t(\hat{i}_0) G_r(\hat{0}_0)}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bi}(\hat{0}_0, \hat{i}_0) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) V_c. \quad (4.16)$$

Явное выражение для общего объема V_c можно получить, положив $\theta = y/R_1$ и $\phi = z/R_1$ в (4.14), $\theta = y'/R_2$ и $\phi = z'/R_2$ в (4.15) и используя связи $y' = y \cos \theta_s - x \sin \theta_s$ и $z' = z$. Тогда интегрирование в (4.9) легко выполняется ($dV = dx dy dz$), и для общего объема V_c получаем

$$V_c = 1,206 \frac{R_1^2 R_2^2 \theta_1 \theta_2 \phi_1 \phi_2}{[R_1^2 \phi_1^2 + R_2^2 \phi_2^2]^{1/2}} \frac{1}{\sin \theta_s}, \quad (4.17)$$

где $1,206 = \pi \sqrt{\pi} / 8 (\ln 2)^{1/2}$. Это выражение справедливо, если θ_s значительно превышает сумму $\theta_1 + \theta_2$.

Для однопозиционной локации [уравнение (4.10)] получаем (рис. 4.3, б)

$$V_c = (\pi R^2 \theta_1 \phi_1 / 8 \ln 2) dR. \quad (4.18)$$

Тогда уравнение (4.10) можно записать в виде

$$\frac{P_r}{P_t} = (2,855 \cdot 10^{-4}) \lambda^2 [G_t(\hat{i}_0)]^2 \theta_1 \phi_1 \int_0^\infty \frac{\rho \sigma_b}{R^2} e^{-2\gamma} dR, \quad (4.19)$$

где $2,855 \cdot 10^{-4} = \pi / (4\pi)^3 (8 \ln 2)$.

Диаграммы направленности $G_t(\hat{i}_0)$ и $G_r(\hat{\theta}_0)$ связаны с эффективными площадями A_t и A_r передающей и приемной апертур соотношениями

$$G_t(\hat{i}_0) = \eta_t 4\pi A_t / \lambda^2, \quad G_r(\hat{\theta}_0) = \eta_r 4\pi A_r / \lambda^2, \quad (4.20)$$

где η_t и η_r — коэффициенты использования передающей и приемной апертур, имеющие обычно значения 0,5—0,6. Ширины пучков θ_1 , ϕ_1 и θ_2 , ϕ_2 связаны с размерами апертур. Например, θ_1 определяется размером апертуры D_1 в направлении θ соотношением

$$\theta_1 = \alpha_1 \lambda / D_1 \text{ рад}, \quad (4.21)$$

где константа α_1 обычно принимает значения от 1,3 до 1,6 в зависимости от распределения токов в пределах апертуры. Комбинируя (4.20) и (4.21), можно получить следующую формулу для коэффициента усиления:

$$G_t = (\eta_t \alpha_1 \alpha_2) (\pi^2 / \theta_1 \phi_1) \approx \pi^2 / \theta_1 \phi_1. \quad (4.22)$$

Пример А. Рассеяние света в воде. Рассмотрим рассеяние светового пучка в морской воде. Ширина пучка $\theta_1 = 2^\circ$, а длина волны $\lambda = 0,655$ мкм. Ширина диаграммы направленности приемника $\theta_2 = 2^\circ$. Расстояния до общего объема $R_1 = R_2 = 1$ м, а угол рассеяния $\theta_s = 20^\circ$. Предположим, что коэффициент поглощения воды (рис. 3.9 и табл. 3.1) $\alpha_w = 0,05$ м⁻¹, а величины $\rho\langle\sigma_t\rangle$, $\rho\langle\sigma_s\rangle$ и $\rho\langle\sigma_a\rangle$, обусловленные наличием взвешенных частиц, равны соответственно 0,27, 0,20 и 0,07 м⁻¹ при $\lambda = 0,655$ мкм.

Для вычисления P_r/P_t воспользуемся уравнением (4.16). Из (4.22) находим $G_t = G_r = \pi^2 / \theta_1^2 = 8100$. Параметры γ_1 и γ_2 равны $\gamma_1 = (\alpha_w + \rho\langle\sigma_t\rangle) R_1 = \gamma_2 = 0,32$. Предполагая, что $\sigma_a(45^\circ) / \sigma_s = 3 \cdot 10^{-2}$ и $\sigma_a(20^\circ) / \sigma_a(45^\circ) \sim 25$, получаем $\rho\sigma_{bi} = 4\pi\rho\sigma_a(20^\circ) = 4\pi \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 25 = 1,885$. Из (4.17) находим $V_c = 0,000106$ м³. Таким образом, мы получаем

$$P_r/P_t = 1,495 \cdot 10^{-11} = -108 \text{ дБ}.$$

Принимаемая мощность P_c в случае, когда луч передатчика направлен на расположенный на расстоянии 1 м от него приемник, определяется формулой (4.12). Подставляя значения $\lambda = 0,655$ мкм, $G_t = G_r = 8100$, $R = 1$ м и $\gamma = 0,32$, получаем $P_c/P_t = 1,29 \cdot 10^{-7}$. Рассеянная мощность, отнесенная к P_c , составляет $P_r/P_c = 1,16 \cdot 10^{-4} = -39$ дБ.

Пример Б. Обратное рассеяние СВЧ-излучения от дождя. Рассмотрим мощность обратного рассеяния от слабого дождя (1 мм/ч) на расстоянии 5 км при использовании трехфутовой (≈ 1 м) параболической антенны на длине волны $\lambda = 1$ см. Отношение принимаемой мощности к излучаемой определяется по формуле (4.19). Предположим, что эффективность использования апертуры $\eta_t = 0,55$. Учитывая, что $A_t = \pi D^2/4$, $D = 3 \cdot 12 \cdot 0,0254$ м и $\lambda = 0,01$ м, находим из (4.20) $G_t = 4,538 \cdot 10^4$. Полагая еще $\alpha_1 = 1,5$, находим из (4.21) $\theta_1 = \phi_1 = 1,64 \cdot 10^{-2}$ рад. Из рис. 3.7 определяем $\rho\langle\sigma_b\rangle = 0,035$ и $\rho\langle\sigma_t\rangle = 0,075$. Подставляя эти значения в (4.19) и вспоминая, что $\gamma = \rho\langle\sigma_t\rangle(R - R_0)$, а $R_0 = 5$ км, имеем

$$\frac{P_r}{P_t} = 5,53 \cdot 10^{-4} \int_{R_0}^{\infty} \frac{\exp[-0,15(R - R_0)]}{R^2} dR = 1,37 \cdot 10^{-10} = -98,6 \text{ дБ.}$$

Пример В. Сечение обратного рассеяния единичной площадки слоя толщины d . Рассмотрим слой толщины d со случайно распределенными частицами. Предположим, что этот слой освещается излучателем, расположенным на большом расстоянии $R_0 \gg d$. Тогда в (4.19) под знаком интеграла можно заменить R на R_0 . В результате получим

$$\frac{P_r}{P_t} = (2,855 \cdot 10^{-4}) \lambda^2 G_t^2 \theta_1 \phi_1 \frac{A_b}{R_0^2}, \quad A_b = \int_0^d \rho \sigma_b \exp(-2\gamma) dR.$$

Здесь A_b — сечение обратного рассеяния единичной площадки слоя толщины d . Если концентрация частиц постоянна, то

$$A_b = (\rho \sigma_b d) \{1 - \exp(-2\beta)\}/2\beta, \quad \beta = \rho \sigma_t d.$$

Величина A_b удобна для описания характеристик обратного рассеяния и часто используется для анализа обратного рассеяния от тумана и облаков при исследованиях с помощью лазерных локаторов (разд. 5.5).

4.4. Когерентное и некогерентное поле

В предыдущих разделах мы обсуждали связь рассеянной мощности с характеристиками частиц. Поскольку частицы распределены случайным образом и обычно находятся в непрерыв-

ном движении, рассеянное поле не постоянно: его амплитуда и фаза испытывают случайные флуктуации. Мощность рассеянного поля, рассмотренная в предыдущих разделах, представляет собой «среднюю» мощность и не учитывает флуктуаций.

В данном разделе мы поясним понятия среднего и флуктуационного поля, а также средней и флуктуационной мощности. Существуют различные способы описания флуктуационных характеристик поля. Наиболее важными характеристиками являются: дисперсии, корреляционные функции, функции когерентности, моменты высших порядков, энергетические спектры и функции плотности вероятности. Мы дадим здесь определения этих величин и опишем их взаимосвязь. В дальнейшем эти сведения будут использоваться при решении задачи рассеяния на облаке случайно распределенных частиц.

Рассмотрим квазимонохроматическую волну с несущей частотой ω_0 . При распространении этой волны в случайно неоднородной среде ее амплитуда и фаза испытывают случайные флуктуации во времени и в пространстве. Ее поле $v(\mathbf{r}, t)$ — вещественная функция времени t и координаты $\mathbf{r}$. Это поле можно выразить через комплексную амплитуду $u(\mathbf{r}, t)$, амплитуду $A(\mathbf{r}, t)$ и фазу $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$v(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[u(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)], \quad u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp[i\phi(\mathbf{r}, t)], \quad (4.23)$$

причем $A(\mathbf{r}, t)$ и $\phi(\mathbf{r}, t)$ — медленные функции времени.

Поле $u(\mathbf{r}, t)$ является случайной функцией координаты $\mathbf{r}$ и времени t , поэтому его можно представить в виде суммы среднего поля $\langle u \rangle$ и флуктуационного поля u_f :

$$u(\mathbf{r}, t) = \langle u(\mathbf{r}, t) \rangle + u_f(\mathbf{r}, t), \quad (4.24)$$

$$\langle u_f(\mathbf{r}, t) \rangle = 0. \quad (4.25)$$

Угловыми скобками обозначено усреднение по статистическому ансамблю [39].

Среднее поле $\langle u \rangle$ называют еще когерентным, а флуктуационное — u_f — некогерентным полем. Квадрат амплитуды когерентного поля называют когерентной интенсивностью, а среднее значение квадрата некогерентного поля — некогерентной интенсивностью; эти величины обозначаются I_c и I_i соответственно. Средняя интенсивность $\langle I \rangle$ равна сумме I_c и I_i :

$$\langle I \rangle = \langle |u|^2 \rangle = I_c + I_i, \quad I_c = \langle |u \rangle|^2, \quad I_i = \langle |u_f|^2 \rangle, \quad (4.26)$$

Функция когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$ поля в точке $\mathbf{r}_1$ в момент времени t_1 и поля в точке $\mathbf{r}_2$ в момент времени t_2 определяется следующим образом:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle u(\mathbf{r}_1, t_1) u^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (4.27)$$

Используя (4.24) и (4.25), находим

$$\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_f, \quad (4.28a)$$

$$\Gamma_c = \langle u(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle u^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (4.28б)$$

$$\Gamma_f = \langle u_f(\mathbf{r}_1, t_1) u_f^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (4.28в)$$

где Γ_f описывает корреляцию флуктуаций поля $u_f = u - \langle u \rangle$ и называется корреляционной функцией. Функцию когерентности Γ называют иногда вторым нецентральным моментом, или ковариацией поля. Она играет важную роль в задачах распространения волн в случайно-неоднородных средах.

Интенсивность I можно представить в виде суммы средней интенсивности $\langle I \rangle$ и флуктуаций интенсивности I_f :

$$I = |u|^2 = \langle I \rangle + I_f. \quad (4.29)$$

Дисперсия σ_f^2 флуктуаций интенсивности I_f равна

$$\sigma_f^2 = \langle I_f^2 \rangle = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2, \quad (4.30)$$

где $\langle I^2 \rangle = \langle |u|^4 \rangle = \langle u^2 u^{*2} \rangle$. Очевидно, что $\langle I^2 \rangle$ выражается через четвертый момент поля u .

Второй момент интенсивности $\langle I_1 I_2 \rangle$ равен

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \langle u_1 u_1^* u_2 u_2^* \rangle, \quad (4.31)$$

где

$$I_1 = u_1 u_1^*, \quad I_2 = u_2 u_2^*, \quad u_1 = u(\mathbf{r}_1, t_1), \quad u_2 = u(\mathbf{r}_2, t_2).$$

Во многих задачах, с которыми приходится иметь дело на практике, поле $u(\mathbf{r}, t)$ для конечных интервалов времени можно считать стационарной случайной функцией времени. Например, флуктуации волн в турбулентной атмосфере и в гидрометеорах приближенно можно считать стационарными в пределах нескольких минут. Рассмотрим корреляционную функцию Γ_f , определенную выражением (4.28в) в точке $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ и $t_1 = t_2 = t + \tau$. Если поле стационарно, Γ_f зависит только от $\mathbf{r}$ и τ :

$$\Gamma_f = \Gamma_f(\mathbf{r}, \tau). \quad (4.32)$$

Частотный спектр $W_f(\mathbf{r}, \omega)$ флуктуационного поля u_f в этом случае определяется фурье-образом корреляционной функции Γ_f ¹⁾:

$$W_f(\mathbf{r}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_f(\mathbf{r}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (4.33)$$

$$\Gamma_f(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (4.34)$$

¹⁾ Данный выбор коэффициентов в преобразовании Фурье приводит к обычному спектральному представлению (4.37) корреляционной функции [14, 15, 156].

Отметим, что формула (4.33) описывает поведение частотного спектра вблизи несущей частоты ω_0 , так что истинная частота гармоник равна $\omega_0 + \omega$. Вообще говоря, корреляционная функция $\Gamma_f(\mathbf{r}, \tau)$ комплексна и удовлетворяет соотношению

$$\Gamma_f(\mathbf{r}, \tau) = \Gamma_f^*(\mathbf{r}, -\tau). \quad (4.35)$$

Спектр $W_f(\mathbf{r}, \omega)$ является вещественной положительной функцией [155, 172].

Если корреляционная функция Γ_f вещественна, то она является четной функцией τ , вследствие чего $W_f(\mathbf{r}, \omega)$ также является четной функцией ω . В этом случае приходим к следующим соотношениям:

$$W_f(\mathbf{r}, \omega) = 4 \int_0^{\infty} \Gamma_f(\mathbf{r}, \tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (4.36)$$

$$\Gamma_f(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W_f(\mathbf{r}, \omega) \cos(\omega\tau) d\omega = \int_0^{\infty} W_f(\mathbf{r}, f) \cos(2\pi f\tau) df. \quad (4.37)$$

В последующих разделах мы будем исследовать поведение дисперсий, корреляционных функций и функций когерентности, частотных спектров и функций распределения вероятности поля, рассеянного случайным облаком частиц.

В задаче рассеяния волны, рассеянные случайным облаком частиц, можно считать почти полностью некогерентными, а когерентное поле — практически равным нулю. Однако, если среда не полностью случайна, рассеянное поле включает в себя некоторую когерентную составляющую. Например, отражение СВЧ-излучения от слоя теплого или холодного воздуха в атмосфере часто происходит когерентно, тогда как рассеяние СВЧ-излучения на слое турбулентного воздуха практически полностью некогерентно.

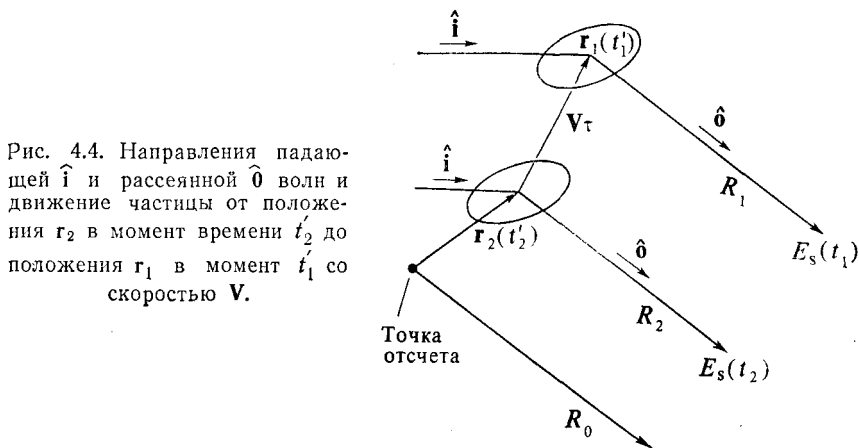
В задаче распространения в области прямой видимости поле на малых расстояниях от излучателя практически когерентно. При увеличении расстояния когерентная часть поля уменьшается, а некогерентная возрастает. На больших расстояниях поле становится полностью некогерентным. Этот вопрос более подробно рассматривается в гл. 6.

4.5. Сечение рассеяния движущейся частицы с учетом временной корреляции

В разделах 4.1—4.3 мы нашли выражения для средней мощности поля, рассеянного на случайном облаке частиц. Здесь мы рассмотрим влияние движения частиц на рассеянное поле. При

перемещении частицы от точки к точке фаза рассеянного на этой частице поля изменяется во времени, что в свою очередь приводит к флуктуациям рассеянного поля. Корреляционная функция полей, рассеянных на множестве случайно распределенных частиц, определяется суммой вкладов от всех частиц.

Чтобы учесть движение частиц, удобно рассмотреть сначала рассеяние на отдельной движущейся частице. Движение частицы можно подразделить на поступательное перемещение центра



тяжести частицы и на вращательное движение частицы вокруг этого центра. Рассмотрим сначала частицу, движущуюся без вращения со скоростью $\mathbf{V}$. Предположим, что скорость $\mathbf{V}$ намного меньше скорости распространения волны, так что можно ограничиться рассмотрением только нерелятивистских эффектов.

Рассмотрим монохроматическую падающую волну

$$E_i(\mathbf{r}) = \exp(k\mathbf{r} \cdot \hat{i}), \quad (4.38)$$

где $k = 2\pi/\lambda = \omega_0/c$ — волновое число, $\hat{i}$ — единичный вектор в направлении распространения и $f_0 = \omega_0/2\pi$ — частота. Рассеянное поле E_s в момент времени t_1 на расстоянии R_0 в направлении $\hat{o}$ вдали от частицы равно

$$E_s(t_1) = \frac{f(\hat{o}, \hat{i})}{R_0} \exp[ik(\hat{i} - \hat{o}) \cdot \mathbf{r}_1 + ikR_0], \quad (4.39)$$

где $\mathbf{r}_1$ — положение частицы в запаздывающий момент времени $t'_1 = t_1 - R_1/c$. Аналогично рассеянное поле в момент времени t_2 равно (рис. 4.4)

$$E_s(t_2) = \frac{f(\hat{o}, \hat{i})}{R_0} \exp[ik(\hat{i} - \hat{o}) \cdot \mathbf{r}_2 + ikR_0], \quad (4.40)$$

где $\mathbf{r}_2$ — положение частицы в момент времени $t'_2 = t_2 - R_2/c$. Положения частицы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ связаны с ее скоростью и моментами времени t'_1 и t'_2 :

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \int_{t'_2}^{t'_1} \mathbf{V} dt, \quad (4.41)$$

где скорость $\mathbf{V}$, вообще говоря, зависит от времени: $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$. Однако в большинстве встречающихся на практике случаев скорость $\mathbf{V}$ можно считать постоянной в пределах интервала временной корреляции поля. Заметим также, что

$$t'_1 - t'_2 = t_1 - t_2 - c^{-1}(R_1 - R_2). \quad (4.42)$$

Поскольку $R_1 - R_2$ порядка $V(t'_1 - t'_2)$, последнее слагаемое в (4.42) при $V \ll c$ пренебрежимо мало, и приближенно можно положить

$$t'_1 - t'_2 \approx t_1 - t_2. \quad (4.43)$$

Поэтому (4.41) приближенно можно представить в более удобном виде

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{V}\tau, \quad \tau = t_1 - t_2. \quad (4.44)$$

Определим теперь дифференциальное сечение рассеяния с учетом временной корреляции $\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$ посредством соотношения

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} (R_0^2 \langle E_s(t_1) E_s^*(t_2) \rangle). \quad (4.45)$$

Используя (4.39), (4.40) и (4.44), получаем

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = \sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \langle \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}\tau) \rangle, \quad \mathbf{k}_s = k(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}}), \quad (4.46)$$

где $\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ — дифференциальное сечение рассеяния неподвижной частицы ($\mathbf{V} = 0$).

Вообще говоря, скорость $\mathbf{V}$ частицы складывается из средней скорости $\langle \mathbf{V} \rangle = \mathbf{U}$ и флуктуационной скорости $\mathbf{V}_f$:

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{V}_f = \mathbf{U} + \mathbf{V}_f, \quad (4.47)$$

так что (4.46) можно представить в следующем виде:

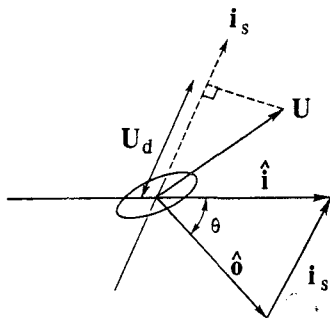
$$\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = \sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \chi(\mathbf{k}_s \tau) \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{U}\tau). \quad (4.48)$$

Здесь $\chi(\mathbf{k}_s \tau)$ — характеристическая функция флуктуаций скорости

$$\chi(\mathbf{k}_s \tau) = \langle \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}_f \tau) \rangle. \quad (4.49)$$

Выражение (4.48) представляет собой фундаментальное выражение для дифференциального сечения рассеяния движущейся без вращения частицы с учетом временной корреляции. Если частица вращается вокруг своего центра тяжести, то нужно проводить дополнительное усреднение по вращательному движению. Обозначив такое среднее через $\langle \sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \rangle_r$, получим вместо

Рис. 4.5. Доплеровский сдвиг частоты (4.54), обусловленный движением частицы.



(4.48) следующее выражение для сечения рассеяния с учетом временной корреляции:

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = \langle \sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \rangle_r \chi(k_s \tau) \exp(ik_s \cdot U \tau). \quad (4.50)$$

Тогда частотный спектр $W_\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$ этого сечения в соответствии с (4.33) будет равен

$$W_\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) e^{i\omega \tau} d\tau. \quad (4.51)$$

Рассмотрим пример. Если частица движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ ($\mathbf{V}_f = 0$) без вращения, то

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = \sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \exp(ik_s \cdot U \tau), \quad (4.52)$$

$$W_\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \omega) = 2\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \delta(\omega + \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{U}). \quad (4.53)$$

Вспоминая, что $\mathbf{k}_s = k(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}})$ и $k = \omega_0/c$, видим, что из (4.53) следует формула для доплеровского сдвига частоты (рис. 4.5)

$$\omega/\omega_0 = -(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}}) \cdot (\mathbf{U}/c). \quad (4.54)$$

Напомним, что в (4.51) через ω обозначено отклонение частоты от несущей частоты ω_0 , так что частота рассеянной волны определяется выражением

$$\omega + \omega_0 = \omega_0 [1 - (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}}) \cdot (\mathbf{U}/c)]. \quad (4.55)$$

Доплеровский сдвиг (4.54) можно представить также в виде

$$\omega/\omega_0 = -2 \sin(\theta/2) (U_d/c), \quad (4.56)$$

где U_d — компонента скорости $\mathbf{U}$ в направлении $\mathbf{i}_s = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}}$.

Если флуктуации скорости $\mathbf{V}_f$ распределены по нормальному закону с дисперсией σ_f^2 каждой из ортогональных компонент, то, используя функцию плотности вероятности

$$p(\mathbf{V}_f) = (2\pi\sigma_f^2)^{-3/2} \exp(-\mathbf{V}_f^2/2\sigma_f^2), \quad (4.57)$$

получаем

$$\chi(\mathbf{k}_s \tau) = \exp(-k_s^2 \sigma_f^2 \tau^2 / 2). \quad (4.58)$$

Тогда частотный спектр W_σ будет иметь вид

$$W_\sigma(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \omega) = 2\sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) [2\pi/k_s^2 \sigma_f^2]^{1/2} \exp[-(\omega + \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{U})^2 / (2k_s^2 \sigma_f^2)]. \quad (4.59)$$

Эта формула дает явное описание уширения спектра, обусловленного флуктуациями скорости, и доплеровского сдвига частоты (рис. 4.6).

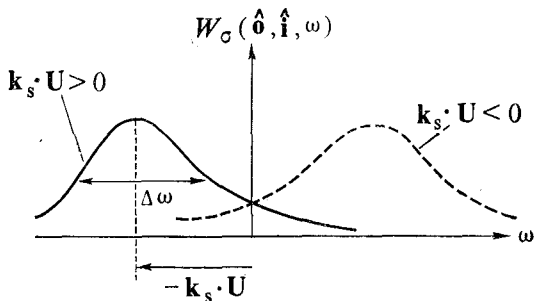


Рис. 4.6. Доплеровский сдвиг $-\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{U}$ и уширение спектра $\Delta\omega = |2k_s \sigma_f|$.

Рассмотрим теперь случай вращающейся частицы (4.50). Примером может служить доплеровский сдвиг, обусловленный вращательным движением молекулы полимера [16, 118]. Предположим, что частица представляет собой тонкий стержень, направление оси которого задается единичным вектором $\hat{\mathbf{s}}$ и непрерывно меняется во времени. Сечение рассеяния тогда является функцией $\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{s}}$. Полагая, что вектор $\hat{\mathbf{s}}$ в моменты времени t_1 и t_2 принимает значения $\hat{\mathbf{s}}_1$ и $\hat{\mathbf{s}}_2$ соответственно, запишем

$$\sigma_d = \sigma_d(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2). \quad (4.60)$$

Обозначим через $p_2(\hat{\mathbf{s}}_2) d\hat{\mathbf{s}}_2$ вероятность того, что в момент времени t_2 вектор $\hat{\mathbf{s}}$ ориентирован в пределах телесного угла $d\hat{\mathbf{s}}_2$ около направления $\hat{\mathbf{s}}_2$, а через $p_1(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2) d\hat{\mathbf{s}}_1$ — условную вероятность того, что в момент времени t_1 он ориентирован в телес-

ном угле $d\hat{s}_1$ около направления $\hat{s}_1$ при условии, что в момент времени t_2 он был ориентирован в направлении $\hat{s}_2$. Тогда получим

$$\langle \sigma_d \rangle_r = \int \int \sigma_d(\hat{0}, \hat{i}, \hat{s}_1, \hat{s}_2) p_1(\hat{s}_1, \hat{s}_2) p_2(\hat{s}_2) d\hat{s}_1 d\hat{s}_2. \quad (4.61)$$

Мы здесь не будем вдаваться в подробности расчета p_1 и p_2 для частных случаев. Отметим лишь, что общая формула (4.61) может быть использована при анализе влияния наклонного падения дождевых капель на распространение СВЧ излучения и при анализе рассеяния света на полимерах. Отметим также, что при полностью хаотической ориентации частиц $p_1 = p_2 = 1/4\pi$ и (4.61) сводится к случаю, рассмотренному в примере «в» раздела 2.6.

В этом разделе мы обсудили эффекты, вызываемые движением отдельной частицы. Вообще говоря, необходимо учитывать взаимодействие частиц, и статистическое усреднение, которое мы проводили в данном разделе, должно учитывать совместную плотность вероятности, т. е. вероятность того, что одна частица в момент времени t_2 находится в точке $\mathbf{r}_2$, а другая в момент времени t_1 находится в точке $\mathbf{r}_1$. Поскольку решение этой задачи дает мало полезной информации при существенном усложнении математических выкладок, мы не рассматриваем здесь этот вопрос [118, 119].

4.6. Временная корреляционная функция и частотный спектр рассеянного поля¹⁾

Временную корреляционную функцию рассеянного поля легко найти, зная сечение рассеяния с учетом временной корреляции, о котором шла речь в предыдущем разделе. Мы предполагаем, что корреляция полей, рассеянных различными частицами, пренебрежимо мала, так что можно просто суммировать вклады отдельных частиц. Такой подход должен привести к простому обобщению соотношения (4.9). Обозначая через $V(t)$ выходное напряжение приемника, пропорциональное рассеянному полю $E_s(t)$, для корреляционной функции $B_V(\tau)$ имеем

$$B_V(\tau) = \langle V(t_1) V^*(t_2) \rangle = c \int \frac{\lambda^2 G_i(\hat{i}) G_r(\hat{0})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bi}(\hat{0}, \hat{i}, \tau) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) dV, \quad (4.62)$$

где $\tau = t_1 - t_2$, $c = \langle V^2 \rangle / (P_r \cdot P_t)$, а $\sigma_{bi}(\hat{0}, \hat{i}, \tau) = 4\pi \sigma_d(\hat{0}, \hat{i}, \tau)$ и определяется формулой (4.48) или (4.50).

¹⁾ Измерения энергетических спектров описаны в работе [18].

Частотный спектр $W_V(\omega)$ выходного напряжения $V(t)$ дается выражением (4.62) с заменой σ_{bi} на $4\pi W_\sigma(\hat{\theta}, \hat{i}, \omega)$, где W_σ определяется формулой (4.51).

В (4.62) легко учесть влияние распределения частиц по размерам; для этого достаточно воспользоваться формулами, аналогичными (4.11). При этом для оптических путей γ_1 и γ_2 можно по-прежнему использовать выражение (4.11a). Что же касается величины $\rho\sigma_{bi}$, то для расчета необходимо дополнительно учесть тот факт, что частицы разного размера могут перемещаться с разными скоростями. Такое явление определенно имеет место в дожде, установившиеся скорости капель которого зависят от их диаметра. Поэтому следует принять

$$\rho\langle\sigma_{bi}\rangle = \int_0^\infty n(D) \sigma_{bi}(\hat{\theta}, \hat{i}, \tau, D) dD, \quad (4.63)$$

где должна учитываться зависимость скорости частицы от ее размера D .

В качестве примера рассмотрим бистатическое рассеяние на дожде в случае, когда излучатель и приемник обладают узкими диаграммами направленности и справедлива формула (4.16). Имеем

$$B_V(\tau) = \frac{c\lambda^2 G_t(\hat{i}_0) G_r(\hat{\theta}_0)}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho\langle\sigma_{bi}(\hat{\theta}_0, \hat{i}_0, \tau)\rangle \exp(\gamma_1 - \gamma_2) V_c. \quad (4.64)$$

Выбрав ось z в вертикальном направлении, запишем установившуюся скорость дождевой капли диаметра D в виде

$$\mathbf{U} = -U(D)\hat{z}. \quad (4.65)$$

Тогда из (4.52) имеем

$$\rho\langle\sigma_{bi}\rangle = \int_0^\infty n(D) \sigma_{bi}(\hat{\theta}, \hat{i}, D) \exp(-ik_s \cdot \hat{z}U(D)\tau) dD. \quad (4.66)$$

При этом частотный спектр определяется равенством

$$\rho\langle 4\pi W_\sigma(\hat{\theta}, \hat{i}, \omega) \rangle = 2 \int_0^\infty n(D) \sigma_{bi}(\hat{\theta}, \hat{i}, D) \delta[\omega - \mathbf{k}_s \cdot \hat{z}U(D)] dD, \quad (4.67)$$

интеграл в котором можно вычислить, используя формулу [162]

$$\delta[f(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|df/dx|}, \quad (4.68)$$

где через x_n обозначены корни функции $f(x)$. В результате получим

$$\rho \langle 4\pi W_\sigma | \hat{0}, \hat{i}, \omega \rangle = \frac{n(D_0) \sigma_{bt}(\hat{0}, \hat{i}, D_0)}{|k_s \cdot \hat{z} \partial U / \partial D|_{D=D_0}}, \quad (4.69)$$

где D_0 удовлетворяет уравнению $\omega = k_s \cdot \hat{z} U(D_0)$.

Из выражения (4.69) следует, что спектр на некоторой частоте ω прямо пропорционален распределению частиц по размерам $n(D)$ при $D = D_0$, поэтому измерения спектра можно использовать для нахождения распределения частиц по размерам $n(D)$ при условии, что известны скорости $V(D)$ частиц и их бистатистическое сечение рассеяния $\sigma_{bt}(\hat{0}, \hat{i}, D)$.

4.7. Пространственная корреляция рассеянного поля

Корреляция значений рассеянного поля в двух различных точках важна для анализа реверберации звука в океане [115]. В данном разделе мы рассмотрим этот вопрос на примере, геометрия которого изображена на рис. 4.7, где показан излучатель, освещающий случайную среду, и два приемника, расположенные в точках $P_1(d/2, 0, 0)$ и $P_2(-d/2, 0, 0)$. Задача состоит в определении корреляции сигналов в точках P_1 и P_2 .

Рассмотрим поле, рассеянное элементом объема dV , окружающим точку (R_2, θ, ϕ) . Разность фаз поля в точках P_1 и P_2 равна $\psi = k(R'_2 - R''_2)$. Предполагая, что объем dV достаточно удален от приемника, приближенно можно написать

$$\psi = k(R'_2 - R''_2) \approx -kd(\hat{0} \cdot \hat{x}) = kd \sin \theta \cos \phi. \quad (4.70)$$

Тогда пространственная корреляционная функция напряжений V_1 и V_2 в точках P_1 и P_2 принимает вид

$$\langle V_1 V_2^* \rangle = c \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{i}) G_r(\hat{0})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bt}(\hat{0}, \hat{i}) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2 + i\psi) dV. \quad (4.71)$$

Если излучатель расположен в начале координат (рис. 4.7), то $\hat{i} = -\hat{0}$ и

$$\langle V_1 V_2^* \rangle = c \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{i}) G_r(-\hat{i})}{(4\pi)^3 R^4} \rho \sigma_b \exp[-\gamma_1 - \gamma_2 + ikd(\hat{i} \cdot \hat{x})] dV. \quad (4.72)$$

Отметим, что $dV = R^2 dR d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, так что при заданном расстоянии R корреляционная функция $\langle V_1 V_2^* \rangle$ пропорциональна фурье-образу от $G_t(\hat{i}) G_r(-\hat{i}) \rho \sigma_b$ по угловой координате с ядром преобразования $\exp[ikd(\hat{i} \cdot \hat{x})]$.

Указанную связь корреляционной функции $\langle V_1 V_2^* \rangle$ с диаграммами направленности антенн $G_t(i)$, $G_r(-i)$, основанную на преобразовании Фурье, можно сравнить с аналогичной связью между функцией взаимной когерентности и распределением в пространстве некогерентных источников [21]. По существу, случайные частицы, освещаемые антеннами с диаграммами направленности G_t и G_r , можно рассматривать как совокупность некогерентных источников.

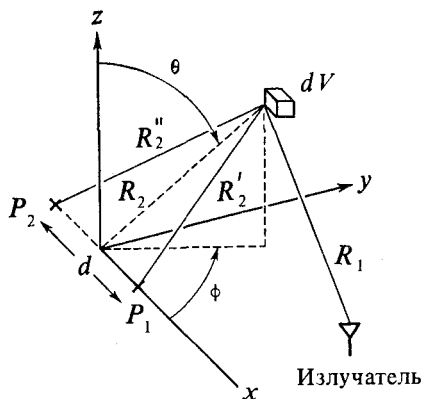


Рис. 4.7. К вычислению пространственной корреляционной функции рассеянных полей в точках P_1 и P_2 .

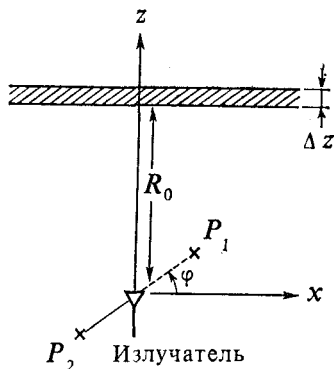


Рис. 4.8. Корреляция полей в точках P_1 и P_2 , обусловленная тонким слоем частиц на расстоянии R_0 .

В качестве примера рассмотрим корреляцию полей в точках P_1 и P_2 , лежащих в плоскости xz . Угол между линией, соединяющей точки P_1 и P_2 , и осью x обозначим через ϕ и будем считать, что рассеивающие частицы сосредоточены в тонком слое толщины Δz на расстоянии R_0 (рис. 4.8), а излучатель с диаграммой направленности

$$G_t(\theta) = G_0 \exp(-\theta^2/\theta_0^2)$$

расположен в начале координат. Предположим также, что диаграмма направленности приемника имеет такой же вид.

Тогда имеем

$$\psi = kd(\sin \theta \cos \phi \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi),$$

$$\langle V_1 V_2^* \rangle \approx c_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \theta d\theta \exp[-(2\theta^2/\theta_0^2) + i\psi], \quad (4.73)$$

где $c_0 \approx (c\lambda^2 G_0^2 \rho \sigma_b / (4\pi)^3 R_0^2) \Delta z$. Замечая, что $|\theta| \ll 1$, имеем

$$\int_0^\pi d\phi \exp(ikd \sin \theta \cos \phi \cos \varphi) = 2\pi J_0(kd \sin \theta \cos \varphi) \approx \approx 2\pi J_0(k d \theta \cos \varphi).$$

В результате приближенно получаем ¹⁾

$$\langle V_1 V_2^* \rangle = (\pi c_0 / A) \exp[ikd \sin \varphi - (kd)^2 / 4A], \quad (4.74)$$

где

$$A = \frac{2}{\theta_0^2} + i \frac{kd \sin \varphi}{2}.$$

При $\varphi = 0$ корреляционная функция $\langle V_1 V_2^* \rangle$ пропорциональна $\exp[-(kd\theta_0)^2 / 8]$, откуда следует, что корреляция уменьшается при увеличении расстояния между точками d и при увеличении ширины пучка θ_0 .

4.8. Корреляция поля, принимаемого движущимся приемником

Рассмотрим приемник, перемещающийся со скоростью $\mathbf{V}_r$ из точки $\mathbf{r}_2$ в момент времени t_2 в точку $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{V}_r \tau$ в момент времени $t_1 = t_2 + \tau$. Корреляция принятых в моменты t_1 и t_2 сигналов совпадает с корреляцией сигналов в моменты t_1 и t_2 , принятых покоящимся приемником при условии, что вся среда вместе с излучателем перемещается со скоростью $-\mathbf{V}_r$. Поэтому можно использовать выражение

$$\langle V(t_1) V^*(t_2) \rangle = c \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{0}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) dV, \quad (4.75)$$

куда нужно подставить сечение $\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$ для частиц, движущихся со скоростью $-\mathbf{V}_r$. Если $|\mathbf{V}_r \tau|$ много меньше R_1 и R_2 , то изменением остальных величин (R_1 , R_2 , G_t и G_r), как правило, можно пренебречь.

Задача о корреляции сигналов, принимаемых движущимся приемником, играет важную роль в акустике океана; имеется ряд экспериментальных и теоретических исследований этой задачи ([115], разд. 31).

¹⁾ При вычислениях использована формула Вебера и Сонина, приведенная в книге [101].

4.9. Распределение вероятности рассеянного поля

Рассмотрим сначала распределения вероятности амплитуды A и фазы ϕ рассеянного поля E_s . Представим E_s в виде «квадратурных компонент» поля X и Y :

$$E_s = A \exp(i\phi) = X + iY, \quad (4.76)$$

где $X = A \cos \phi$, а $Y = A \sin \phi$. Поле E_s является суммой полей, рассеянных множеством различных частиц, так что можно записать

$$E_s = \sum_{n=1}^N A_n \exp(i\phi_n) = \sum_{n=1}^N (X_n + iY_n). \quad (4.77)$$

Далее, «центральная предельная теорема» [10, 39] утверждает, что распределение вероятности суммы N независимых случайных величин при $N \rightarrow \infty$ стремится к нормальному распределению независимо от того, каково распределение вероятностей каждой из этих случайных величин.

Естественно предположить, что каждое слагаемое X_n и Y_n является независимой случайной величиной. Поэтому, применяя центральную предельную теорему к (4.77), приходим к выводу, что величины X и Y распределены по нормальному закону.

Предположим также, что фаза ϕ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Это предположение естественно, поскольку фаза ϕ_n каждого слагаемого $A_n \exp(i\phi_n)$ случайна и можно принять, что она равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, так что сумма (4.77) не должна иметь выделенного значения фазы¹⁾. В этих рассуждениях неявно заключено утверждение о статистической независимости фазы ϕ и амплитуды A . Поэтому плотность вероятности $p(A, \phi)$ амплитуды A и фазы ϕ можно представить в виде

$$p(A, \phi) = p(A) p(\phi), \quad p(\phi) = 1/2\pi, \quad 0 < \phi < 2\pi. \quad (4.78)$$

На основании (4.78) можно легко доказать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \langle A \cos \phi \rangle = \int_0^\infty dA \int_0^{2\pi} d\phi A \cos \phi p(A, \phi) = 0, \\ \langle Y \rangle &= \langle A \sin \phi \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\langle XY \rangle = \langle A^2 \sin \phi \cos \phi \rangle = 0, \quad \langle X^2 \rangle = \langle Y^2 \rangle = \sigma^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty A^2 p(A) dA.$$

¹⁾ Это предположение неверно при наличии когерентной составляющей поля (разд. 21.12).

Поскольку X и Y распределены нормально и некоррелированы, они независимы [39], и их совместная плотность вероятности $p(X, Y)$ равна

$$p(X, Y) = p(X) p(Y) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp[-(X^2 + Y^2)/2\sigma^2]. \quad (4.80)$$

Замечая, что

$$p(X, Y) dX dY = p(A, \phi) dA d\phi, \\ dX dY = A dA d\phi, \quad p(A) = \int_0^{2\pi} p(A, \phi) d\phi, \quad (4.81)$$

получаем

$$p(A) = (A/\sigma^2) \exp(-A^2/2\sigma^2). \quad (4.82)$$

Полученное распределение называется распределением Рэлея. Отметим, что оно характеризуется единственным параметром σ . Таким образом, мы делаем вывод, что амплитуда и фаза рассеянной волны статистически независимы, причем амплитуда A подчиняется распределению Рэлея, а фаза распределена равномерно.

Средняя амплитуда $\langle A \rangle$ равна [39]

$$\langle A \rangle = \int_0^{\infty} A p(A) dA = [(\pi/2) \sigma^2]^{1/2}. \quad (4.83)$$

Аналогично для интенсивности $I = A^2$ имеем

$$\langle I \rangle = 2\sigma^2, \quad \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle = 4\sigma^4 = \langle I \rangle^2. \quad (4.84)$$

Отметим, что дисперсия флуктуаций интенсивности $(I - \langle I \rangle)$ равна квадрату средней интенсивности, откуда следует флуктуационный характер всей рассеянной мощности.

Дальнейшее обобщение (4.84) приводит к результату

$$\langle I^N \rangle = \langle I \rangle^N N! \quad (4.85)$$

с помощью которого можно проверить, распределена ли амплитуда A по рэлеевскому закону или нет.

Рассмотрим далее совместную плотность вероятности амплитуд A_1 и A_2 рассеянных полей $E_1 = E_s(\mathbf{r}_1, t_1) = A_1 \exp(i\phi_1)$ и $E_2 = E_s(\mathbf{r}_2, t_2) = A_2 \exp(i\phi_2)$. Прежде всего запишем

$$E_1 = X_1 + iY_1, \quad E_2 = X_2 + iY_2. \quad (4.86)$$

Совместная плотность вероятности $p(A_1, A_2)$ дается формулой

$$p(A_1, A_2) = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 p(A_1, A_2, \phi_1, \phi_2). \quad (4.87)$$

Отметим, что в силу равенства

$$p(A_1, A_2, \phi_1, \phi_2) dA_1 dA_2 d\phi_1 d\phi_2 = p(X_1, Y_1, X_2, Y_2) dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 \quad (4.88)$$

имеет место связь

$$p(A_1, A_2, \phi_1, \phi_2) = p(X_1, Y_1, X_2, Y_2) A_1 A_2. \quad (4.89)$$

Вспоминая, что X_1, Y_1, X_2 и Y_2 — гауссовы случайные величины, запишем $p(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ в виде [39]

$$p(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = \frac{\exp \left[- (1/2 |k|) \sum_{ij} \alpha_{ij} Z_i Z_j \right]}{(2\pi)^2 |k|^{1/2}}, \quad (4.90)$$

где α_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу k_{ij} корреляционной матрицы $k = (\langle Z_i Z_j \rangle)$ размера 4×4 , $Z_1 = X_1$, $Z_2 = Y_1$, $Z_3 = X_2$, $Z_4 = Y_2$, а $|k|$ — детерминант матрицы k .

Предположим, что рассеянные поля E_1 и E_2 наблюдаются вдали от рассеивающей области, что расстояние между точками $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ много больше радиуса корреляции поля и что временной интервал между t_1 и t_2 не превосходит по порядку величины временного радиуса корреляции поля. Именно этот случай наиболее часто встречается в практических приложениях. Тогда можно принять, что

$$\langle X_1 X_1 \rangle = \langle Y_1 Y_1 \rangle = \langle X_2 X_2 \rangle = \langle Y_2 Y_2 \rangle = \sigma^2. \quad (4.91)$$

Кроме того, из (4.79) следует

$$\langle X_1 Y_1 \rangle = \langle X_2 Y_2 \rangle = 0. \quad (4.92)$$

Наконец, можно показать, что приближенно

$$\langle X_1 X_2 \rangle = \langle Y_1 Y_2 \rangle = \alpha, \quad \langle X_2 Y_1 \rangle = -\langle X_1 Y_2 \rangle = \beta. \quad (4.93)$$

Доказательство (4.93) основывается на том факте, что величина $\langle E_1 E_2 \rangle$ представляет собой сумму вкладов от множества частиц, причем фазы этих вкладов пропорциональны полной длине траектории. При суммировании всех этих вкладов от большого объема, содержащего множество рассеивателей, они стремятся погасить друг друга. Поэтому можно утверждать [156], что

$$\langle E_1 E_2 \rangle = \langle (X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) \rangle \approx 0. \quad (4.94)$$

Равенства (4.93) следуют непосредственно из (4.94).

С учетом (4.91), (4.92) и (4.93) получаем следующее выражение для корреляционной матрицы k :

$$k = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \sigma^2 & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \sigma^2 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}. \quad (4.95)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{44} = \sigma^6 (1 - p_0^2), \\ \alpha_{13} &= \alpha_{31} = \alpha_{24} = \alpha_{42} = -\alpha \sigma^4 (1 - p_0^2), \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \alpha_{34} = \alpha_{43} = 0, \\ \alpha_{14} &= -\alpha_{23} = \alpha_{41} = -\alpha_{32} = \beta \sigma^4 (1 - p_0^2), \\ |k| &= \sigma^8 (1 - p_0^2)^2, \quad p_0^2 = (\alpha^2 + \beta^2)/\sigma^4.\end{aligned}\quad (4.96)$$

Подставляя (4.96) в (4.90), получаем следующее выражение для $p(A_1, A_2, \phi_1, \phi_2)$:

$$p = \frac{\exp \left\{ -(2|k|)^{-1} \left[\alpha_{11} (A_1^2 + A_2^2) + 2\alpha_{13} A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\alpha_{14} A_1 A_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \right] \right\}}{(2\pi)^2 |k|^{1/2}}. \quad (4.97)$$

Из (4.97), (4.89) и (4.87) находим окончательное выражение для совместной плотности вероятности $p(A_1, A_2)$:

$$p(A_1, A_2) = \frac{A_1 A_2}{\sigma^4 (1 - p_0^2)} I_0 \left[\frac{p A_1 A_2}{\sigma^2 (1 - p_0^2)} \right] \exp \left[-\frac{A_1^2 + A_2^2}{2\sigma^2 (1 - p_0^2)} \right], \quad (4.98)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

На основании (4.98) найдем смешанный момент амплитуд A_1 и A_2

$$\langle A_1 A_2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty A_1 A_2 p(A_1, A_2) dA_1 dA_2. \quad (4.99)$$

Входящий сюда интеграл можно выразить через эллиптические интегралы. Используя разложения этих интегралов в ряды, для коэффициента корреляции амплитуд b_A получаем

$$\begin{aligned}b_A(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) &= (\langle A_1 A_2 \rangle - \langle A \rangle^2) / (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2) = \\ &= 0,915 p_0^2 + 0,058 p_0^4 + \dots,\end{aligned}\quad (4.100)$$

где $p_0^2 = (\alpha^2 + \beta^2)/\sigma^4$. Из (4.93) замечаем, что

$$\begin{aligned}\langle E_1 E_2^* \rangle &= 2(\alpha + i\beta), \quad \langle |E_1|^2 \rangle = \langle |E_2|^2 \rangle = \langle |E|^2 \rangle = 2\sigma^2, \\ p_0^2 &= \frac{|\langle E_1 E_2^* \rangle|^2}{\langle |E|^2 \rangle^2}.\end{aligned}\quad (4.101)$$

Из (4.100) и (4.101) заключаем, что коэффициент корреляции b_A амплитуд A_1 и A_2 представляется в виде ряда по параметру p_0^2 , равному квадрату амплитуды корреляционной функции $\langle E_1 E_2^* \rangle$. Отметим еще, что при малых значениях p_0^2 коэффициент корреляции b_A приближенно равен $0,915 p_0^2$.

Рассеяние импульсных волн в случайном облаке частиц

В предыдущей главе было рассмотрено рассеяние непрерывной волны в случайном облаке рассеивателей. Здесь мы изучим вопрос о рассеянии импульсной волны в случайном облаке частиц. Характеристики рассеяния импульсного излучения важны для ряда приложений. Например, работа радиолокаторов, лазерных и акустических лоаторов может быть подвержена влиянию со стороны хаотических отражений и реверберации, обусловленных случайными частицами. Кроме того, характеристики рассеянного импульса могут использоваться для дистанционного зондирования плотности частиц и их распределения по размерам.

В этой главе мы дадим сначала введение в общую теорию распространения и рассеяния импульсного излучения в случайных средах. Затем будут рассмотрены результаты, получающиеся в первом приближении теории многократного рассеяния. При этом мы учтем влияние движения частиц в предположении, что скорости рассеивателей малы по сравнению со скоростью распространения волны. Кроме того, мы будем считать, что ширина полосы импульса мала по сравнению с несущей частотой. Эти предположения справедливы для большинства практических приложений. В гл. 15 и 20 рассматриваются более сложные задачи, относящиеся к сильным флуктуациям импульсного излучения, обусловленным многократным рассеянием, а также к распространению и рассеянию широкополосных импульсов.

5.1. Общая формулировка проблемы распространения и рассеяния импульсов в нестационарной случайной среде

Рассмотрим линейную случайную среду, которая может быть нестационарной и диспергирующей. Примером такой среды может служить случайное облако движущихся рассеивателей. Характеристики распространения и рассеяния импульса в такой среде удобно описывать, используя двухчастотную функцию взаимной когерентности. Такое представление позволяет также

выяснить смысл таких понятий, как полоса когерентности и время когерентности. В данном разделе мы рассмотрим эти общие понятия и представления [13, 73, 85, 175].

Рассмотрим поле $v_0(t)$ в приемнике, отвечающее входному импульсу $v_i(t)$, излучаемому передатчиком. Функции $v_0(t)$ и $v_i(t)$ являются вещественными функциями времени. Обычно входной импульс $v_i(t)$ представляет собой заданную функцию времени. Однако в некоторых приложениях в качестве входного сигнала используются шум или случайный сигнал, так что $v_i(t)$ может быть и случайной функцией времени. Поскольку среда нестационарна и линейна, в общем случае можно записать

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^t v_i(t') h(t, t') dt', \quad (5.1)$$

где $h(t, t')$ — импульсный отклик приемника в момент времени t на входной импульс передатчика, излучаемый в момент времени t' . Заметим, что если $v_i(t) = \delta(t - t')$, то $v_0(t) = h(t, t')$.

Импульсный отклик $h(t, t')$, вообще говоря, является вещественной функцией двух переменных t и t' . Только в случае стационарной среды h становится функцией разности $t - t'$. Импульсный отклик h является характеристикой случайной среды и поэтому представляет собой случайную функцию времени.

Запишем функцию $v_i(t)$ в виде интеграла Фурье¹⁾ через ее спектр $V_i(\omega)$:

$$v_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.2)$$

Подставляя это выражение в (5.1), получаем

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_i(\omega) H(\omega, t) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (5.3)$$

где $H(\omega, t)$ определяется выражением

$$H(\omega, t) = \int_0^{\infty} h(t, t - t') e^{i\omega t'} dt'. \quad (5.4)$$

Поскольку $v_0(t)$ и $v_i(t)$ — вещественные функции времени, имеем

$$V_i(\omega) = V_i^*(-\omega), \quad H(\omega, t) = H^*(-\omega, t). \quad (5.5)$$

¹⁾ Это возможно только для детерминированных $v_i(t)$. О спектральном представлении случайных функций см. [155].

Чтобы понять физический смысл функции $H(\omega, t)$, положим

$$v_i(t) = \cos \omega_0 t = \operatorname{Re} [\exp(-i\omega_0 t)]. \quad (5.6)$$

Тогда получим

$$v_0(t) = \operatorname{Re}[H(\omega_0, t) \exp(-i\omega_0 t)]. \quad (5.7)$$

Поэтому функция $H(\omega, t) \exp(-i\omega t)$ представляет собой выходной сигнал в том случае, когда на входе действует гармоническая функция времени $\exp(-i\omega t)$. Функция $H(\omega, t)$, вообще говоря, является комплексной случайной функцией ω и t и называется нестационарной функцией передачи. Заметим, что если среда стационарна, то функция H не зависит от времени.

Во многих практических задачах входной импульс представляет собой модулированный сигнал с несущей частотой ω_0 , который может быть записан в виде

$$v_i(t) = \operatorname{Re} [u_i(t) \exp(-i\omega_0 t)], \quad (5.8)$$

где $f_0 = \omega_0/2\pi$ — несущая частота. Функция $u_i(t)$ комплексна и называется комплексной огибающей сигнала v_i . Мы можем также записать

$$u_i(t) = A_i(t) \exp[i\phi_i(t)], \quad (5.9)$$

где A_i и ϕ_i — меняющиеся во времени амплитуда и фаза соответственно. Для узкополосного входного импульса A_i и ϕ_i являются медленно меняющимися функциями времени.

Выходной импульс $v_0(t)$ может быть представлен в аналогичном виде

$$v_0(t) = \operatorname{Re} [u_0(t) \exp(-i\omega_0 t)], \quad u_0(t) = A_0(t) \exp[i\phi_0(t)], \quad (5.10)$$

где u_0 — комплексная огибающая выходного импульса, а A_0 и ϕ_0 — меняющиеся во времени амплитуда и фаза соответственно.

Запишем теперь общее соотношение (5.3) через комплексные огибающие. Представим комплексную огибающую входного сигнала $u_i(t)$ через ее спектр $U_i(\omega)$ в виде интеграла Фурье

$$u_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.11)$$

Тогда спектр входного сигнала $V_i(\omega)$ для $v_i(t)$ дается выражением

$$V_i(\omega) = \frac{1}{2} [U_i(\omega - \omega_0) + U_i^*(-\omega - \omega_0)]. \quad (5.12)$$

Подставляя выражение (5.12) в формулу (5.3) и используя соотношения (5.5), можно представить $v_0(t)$ в виде (5.10) с функ-

цией $u_0(t)$, определяемой выражением

$$u_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_i(\omega) H(\omega_0 + \omega, t) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.13)$$

Это общее выражение связывает комплексную огибающую выходного сигнала $u_0(t)$ со спектром $U_i(\omega)$ комплексной огибающей входного сигнала $u_i(t)$.

Флуктуационные свойства выходного импульса часто описывают при помощи смешанного момента его комплексной огибающей

$$B_u(t_1, t_2) = \langle u_0(t_1) u_0^*(t_2) \rangle. \quad (5.14)$$

Он используется в задачах распространения СВЧ и оптического излучения, в которых обычно измеряется комплексная огибающая (или флуктуации амплитуды и фазы). В задачах акустики океана часто может наблюдаться экспериментально смешанный момент самого выходного импульса, определяемый как

$$B_v(t_1, t_2) = \langle v_0(t_1) v_0(t_2) \rangle. \quad (5.15)$$

Моменты B_u и B_v связаны с входной функцией через нестационарную функцию передачи H . Эта связь рассматривается ниже.

5.2. Двухчастотная функция когерентности и смешанный момент выходного импульса

Предположим сначала, что входной импульс является детерминированной функцией. Тогда смешанный момент комплексной огибающей (5.14) есть

$$B_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \Gamma \exp(-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2), \quad (5.16)$$

где

$$\Gamma = \Gamma(\omega_0 + \omega_1, \omega_0 + \omega_2, t_1, t_2) = \langle H(\omega_0 + \omega_1, t_1) H^*(\omega_0 + \omega_2, t_2) \rangle.$$

Это общее выражение для смешанного момента комплексной огибающей является основным для дальнейшего анализа в этой главе. Функция Γ описывает корреляцию выходных полей, отвечающих двум падающим монохроматическим волнам с двумя различными частотами $\omega_0 + \omega_1$ и $\omega_0 + \omega_2$, и называется двухчастотным смешанным моментом, или двухчастотной функцией взаимной когерентности. Из формулы (5.16) видно, что решение задач распространения и рассеяния импульсов сводится к нахождению двухчастотной функции когерентности Γ .

Интенсивность $I(t)$ выходного импульса пропорциональна $\langle |u(t)|^2 \rangle$ и дается выражением

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \Gamma_0 \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (5.17)$$

где Γ_0 — значение функции Γ при $t_1 = t_2 = t$:

$$\Gamma_0 = \langle H(\omega_0 + \omega_1, t) H^*(\omega_0 + \omega_2, t) \rangle.$$

Смешанный момент выходного импульса B_v в (5.15) определяется выражением

$$B_v(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_2 V_i(\omega'_1) V_i^*(\omega'_2) \Gamma \exp(-i\omega'_1 t_1 + i\omega'_2 t_2), \quad (5.18)$$

где

$$\Gamma = \Gamma(\omega'_1, \omega'_2, t_1, t_2) = \langle H(\omega'_1, t_1) H^*(\omega'_2, t_2) \rangle, \\ \omega'_1 = \omega_0 + \omega_1 \quad \text{и} \quad \omega'_2 = \omega_0 + \omega_2.$$

Выражение для B_v можно представить через огибающую, если учесть, что

$$v_0 = \frac{1}{2} [u_0 \exp(-i\omega_0 t) + u_0^* \exp(i\omega_0 t)]. \quad (5.19)$$

В результате имеем

$$B_v(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{B_u(t_1, t_2) \exp[-i\omega_0(t_1 - t_2)]\} + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{C_u(t_1, t_2) \exp[-i\omega_0(t_1 + t_2)]\}, \quad (5.20)$$

где функция $C_u(t_1, t_2) = \langle u_0(t_1) u_0(t_2) \rangle$ дается формулой

$$C_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 U_i(\omega_1) U_i(\omega_2) \Gamma_1 \exp(-i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2), \\ \Gamma_1 = \langle H(\omega_0 + \omega_1, t_1) H(\omega_0 + \omega_2, t_2) \rangle. \quad (5.21)$$

Первый член в (5.20) медленно меняется в зависимости от среднего времени $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ и является осциллирующей функцией разностного времени $\tau = t_1 - t_2$ с частотой ω_0 . С другой стороны, второй член представляет собой осциллирующую функцию t с частотой $2\omega_0$ и поэтому может быть легко отфильтрован. Тогда получим

$$B_v(t_1, t_2) \approx \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{B_u(t_1, t_2) \exp[-i\omega_0(t_1 - t_2)]\}. \quad (5.22)$$

На практике обычно несущую частоту понижают до некоторой промежуточной частоты путем смешивания выходного сигнала с сигналом постоянной частоты от местного гетеродина и выделения разностной частоты, так что ω_0 в экспоненте (5.22) может быть такой промежуточной частотой.

5.3. Время когерентности и полоса когерентности

В задачах связи влияние случайной среды на распространение волн часто оказывается удобным описывать с использованием понятий время когерентности и полоса когерентности.

Рассмотрим понятие время когерентности. При прохождении волны с частотой ω через случайную среду волна на выходе, вообще говоря, испытывает флуктуации во времени. Корреляция выходной волны в два различных момента времени t_1 и t_2 убывает с увеличением $\tau = t_1 - t_2$. Разность времен Δt , при которой корреляция практически исчезает или спадает до некоторого заданного уровня, называется временем когерентности. Оно характеризует временную корреляцию волны с частотой ω . Величина, обратная времени когерентности, есть уширение спектра волны, обусловленное случайной средой. Как показано в разд. 4.6, фурье-образ функции взаимной когерентности по разности времен τ представляет собой временной частотный спектр волны.

С другой стороны, можно посылать две волны на различных частотах ω_1 и ω_2 и наблюдать флуктуационные поля в один момент времени. При увеличении разности частот корреляция этих двух флуктуационных полей уменьшается. Разность частот $\Delta f = f_a = (\omega_1 - \omega_2)/2\pi$, при которой корреляция почти исчезает или спадает до некоторого заданного уровня, называется полосой когерентности и является мерой коррелированности волн на двух различных частотах в один момент времени. Величина, обратная полосе когерентности, представляет собой уширение импульса, обусловленное случайной средой.

Эти понятия легко проиллюстрировать при помощи двухчастотной функции когерентности, характеризующей корреляцию между волной с частотой ω_1 в момент времени t_1 и волной с частотой ω_2 в момент времени t_2 . Чтобы наглядно изобразить время когерентности и полосу когерентности, нужно построить график двухчастотной функции когерентности $\Gamma(\omega_0 + \omega_1, \omega_0 + \omega_2, t_1, t_2)$ в пространстве переменных f_a и τ для фиксированных среднего времени $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ и центральной частоты $\omega_0 + \omega_c$, где $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ (рис. 5.1). Время когерентности Δt и полоса когерентности Δf показаны на этом рисунке.

Во многих практических ситуациях двухчастотная функция когерентности Γ является почти стационарной во времени и, следовательно, ее можно считать не зависящей от t . Этот случай отвечает так называемому стационарному в широком смысле каналу. С другой стороны, если Γ не зависит от ω_c , то это соответствует каналу с некоррелированным рассеянием. Если же двухчастотная функция когерентности не зависит ни от ω_c , ни от t , то говорят о стационарном в широком смысле канале с некоррелированным рассеянием.

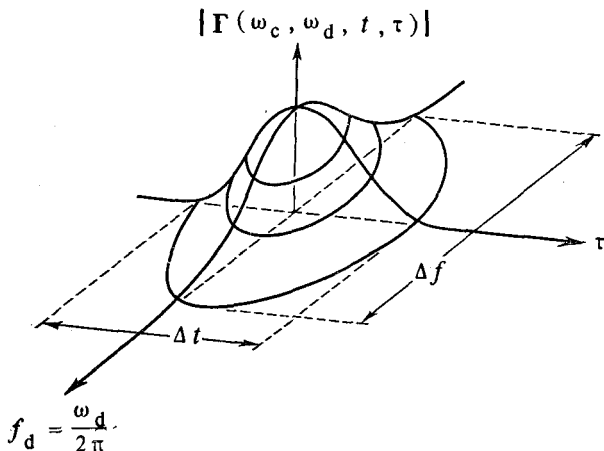


Рис. 5.1. График двухчастотной функции когерентности в зависимости от разностной частоты $f_d = f_1 - f_2$ и разностного времени $\tau = t_1 - t_2$; показаны время когерентности Δt и полоса когерентности Δf .

До сих пор мы рассматривали общие выражения для флуктуационных характеристик выходного импульса, в которые свойства среды входят через двухчастотную функцию когерентности. В последующих разделах эти общие выражения используются для анализа задачи рассеяния.

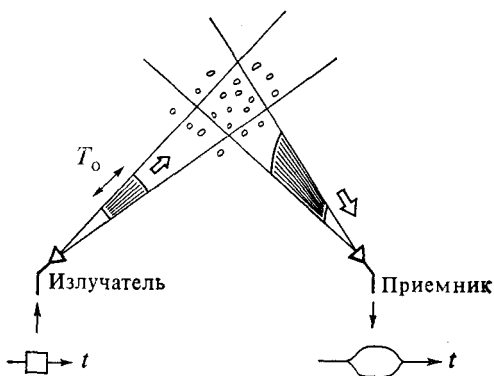
5.4. Рассеяние узкополосного импульса.

Выражения, приведенные в предыдущих разделах, носят общий характер и применимы как в случае широкополосных, так и в случае узкополосных входных сигналов. В этом разделе мы рассмотрим рассеяние узкополосного входного сигнала.

Пусть на входе имеется сигнал с комплексной огибающей $u_i(t)$ вида (5.9) и со спектром $U_i(\omega)$ вида (5.11). Этот сигнал посылается излучателем в направлении облака случайно рас-

пределенных частиц, а рассеянный импульс регистрируется приемником (рис. 5.2). Предположим, что частицы расположены в дальней зоне по отношению к излучателю и приемнику, работающим на несущей частоте. Нас будут интересовать флуктуационные характеристики принимаемого импульса, описываемого его комплексной огибающей $u_0(t)$. Поскольку среда флуктуирует, выходной импульс $u_0(t)$ является случайной функцией времени. Поэтому мы рассмотрим интенсивность выходного импульса $I(t)$, даваемую выражением (5.17), и смешанный момент B_u , определяемый формулой (5.16).

Рис. 5.2. Взаимное расположение излучателя, излучающего импульс в направлении случайного облака частиц, и приемника, регистрирующего рассеянный импульс.



Как обсуждалось в разд. 5.2, выходной импульс $u_0(t)$ выражается через функцию передачи $H(\omega_0 + \omega, t)$ формулой (5.13). Чтобы найти функцию передачи для рассматриваемой задачи рассеяния, заметим, что $H(\omega, t)$ является выходным сигналом в случае, когда входной сигнал имеет вид $\exp(-i\omega t)$.

Для определения $H(\omega, t)$ рассмотрим отдельную частицу, расположенную на расстояниях R_1 от излучателя и R_2 от приемника. Сначала будем считать, что частицы неподвижны. Поле в месте расположения частицы при входном сигнале вида $\exp(-i\omega t)$ определяется выражением

$$f_t(\hat{\mathbf{i}}) \frac{\exp(ikR_1)}{R_1}, \quad (5.23)$$

где $f_t(\hat{\mathbf{i}})$ — диаграмма направленности излучателя по полю, связанная с диаграммой направленности по мощности $G_t(\hat{\mathbf{i}})$ соотношением

$$4\pi |f_t(\hat{\mathbf{i}})|^2 = G_t(\hat{\mathbf{i}}). \quad (5.24)$$

Это соотношение получается из того условия, что квадрат поля в (5.23) должен совпадать с плотностью мощности, определяемой выражением $G_t/4\pi R_1^2$. С учетом затухания, обусловленного

поглощением и рассеянием другими частицами, лежащими на пути от излучателя до данной частицы, выражение (5.23) принимает вид

$$f_t(\hat{\mathbf{i}}) \frac{\exp(ikR_1 - \gamma_1/2)}{R_1}, \quad (5.25)$$

где $\gamma_1 = \int_0^{R_1} \rho \sigma_t dR$ — оптический путь, ρ — плотность частиц, а σ_t — полное сечение частицы, расположенной в точке R (разд. 4.2).

Поле (5.25) падает на частицу. Пусть амплитуда рассеяния этой частицы есть $f_p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$. Введем также приемную диаграмму направленности по полю $f_r(\hat{\mathbf{0}})$ такую, что $|f_r(\hat{\mathbf{0}})|^2$ характеризует эффективную площадь $A_r(\hat{\mathbf{0}})$ приемной антенны. Она связана с приемной диаграммой направленности по мощности $G_r(\hat{\mathbf{0}})$ соотношением

$$(4\pi/\lambda^2) |f_r(\hat{\mathbf{0}})|^2 = G_r(\hat{\mathbf{0}}). \quad (5.26)$$

В результате для функции передачи $H(\omega)$ имеем

$$H(\omega) = f_t(\hat{\mathbf{i}}) f_p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) f_r(\hat{\mathbf{0}}) \frac{\exp[ik(R_1 + R_2) - \gamma_1/2 - \gamma_2/2]}{R_1 R_2}, \quad (5.27)$$

где γ_1 и γ_2 — оптические пути, определяемые формулой (4.11а).

Запишем теперь двухчастотную функцию когерентности Γ (5.16) для случайного распределения частиц, находящихся в элементе объема dV . Заметим, что поля, рассеянные различными частицами, можно считать некоррелированными, вследствие чего вклады от всех частиц просто складываются. Тогда получим

$$\begin{aligned} \Gamma &= \langle H(\omega_0 + \omega_1) H^*(\omega_0 + \omega_2) \rangle = \\ &= F(\omega_0 + \omega_1) F^*(\omega_0 + \omega_2) \frac{\exp[i(\omega_d/c)(R_1 + R_2)]}{R_1^2 R_2^2} \rho dV, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где c — скорость распространения волны, а

$$F(\omega) = f_t(\hat{\mathbf{i}}) f_p(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) f_r(\hat{\mathbf{0}}) \exp[-\gamma_1/2 - \gamma_2/2].$$

В случае узкополосного входного сигнала $|\omega_1| \ll \omega_0$ и $|\omega_2| \ll \omega_0$, поэтому приближенно мы имеем

$$F(\omega_0 + \omega_1) \approx F(\omega_0 + \omega_2) \approx F(\omega_0). \quad (5.29)$$

В результате находим

$$\Gamma = |F(\omega_0)|^2 \frac{\exp[i(\omega_d/c)(R_1 + R_2)]}{R_1^2 R_2^2} \rho dV. \quad (5.30)$$

Укажем, что узкополосное приближение (5.30) соответствует стационарному в широком смысле каналу с некоррелированным рассеянием. Подставим теперь формулу (5.30) в (5.16). Поскольку ω_1 и ω_2 в экспоненту (5.30) входят только в виде разности $\omega_d = \omega_1 - \omega_2$, нетрудно выполнить в (5.16) интегрирование по ω_1 и ω_2 , которое дает

$$B_u(t_1, t_2) = \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) B_i \rho dV, \quad (5.31)$$

где

$$B_i = u_i(t_1 - (R_1 + R_2)/c) u_i^*(t_2 - (R_1 + R_2)/c).$$

Интенсивность $I(t)$ определяется тем же выражением (5.31), но в котором необходимо заменить B_i на I_i :

$$I_i = |u_i(t - (R_1 + R_2)/c)|^2. \quad (5.32)$$

Формулы (5.31) и (5.32) представляют собой общие выражения для функции когерентности и интенсивности выходного импульса $u_0(t)$ в случае узкополосного сигнала, получающиеся в первом приближении теории многократного рассеяния для неподвижных частиц. Отметим, что окончательное выражение (5.31) может быть получено и как обобщение уравнения радиолокации без привлечения двухчастотной функции когерентности. Однако приведенный в этом разделе вывод является более строгим, поскольку предположение об узости полосы было использовано нами, только начиная с формулы (5.29). На самом деле (5.31) легко обобщить на случай широкой полосы, для которого имеем

$$B_u(t_1, t_2) = \int G\left(t_1 - \frac{R_1 + R_2}{c}\right) G^*\left(t_2 - \frac{R_1 + R_2}{c}\right) \frac{\rho dV}{R_1^2 R_2^2}, \quad (5.33)$$

где

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega_0 + \omega) U_i(\omega) e^{-i\omega t}.$$

До сих пор мы предполагали, что частицы неподвижны. Если частицы движутся, то бистатическое сечение $\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}})$ следует заменить на сечение рассеяния с учетом временной корреляции $\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$, определяемое формулой (4.48). В соответствии с предположением, обсуждавшимся в разд. 4.5, разность времен τ есть $\tau = t_1 - t_2$.

Заметим также, что мы рассматривали случай частиц одного размера. Между тем легко учесть распределение частиц по раз-

мерам, для чего нужно заменить $\rho\sigma_{bi}$ и $\rho\sigma_t$ следующими величинами:

$$\rho\sigma_{bi} \rightarrow \int_0^{\infty} \sigma_{bi}(D) n(D) dD, \quad \rho\sigma_t \rightarrow \int_0^{\infty} \sigma_t(D) n(D) dD, \quad (5.34)$$

где $n(D)dD$ — число частиц размера (например, диаметра) D в интервале $(D, D + dD)$.

5.5. Обратное рассеяние импульса, излучаемого остронаправленным излучателем

Рассмотрим теперь на основе общих выражений (5.31) и (5.32) обратное рассеяние импульса от облака случайно распределенных частиц (обратное рассеяние ультразвука см. в работах [143, 144]).

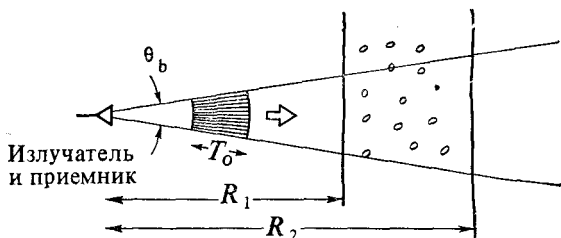


Рис. 5.3. Излучение импульса длительности T_0 остронаправленной передающей антенной с шириной луча по уровню половинной мощности θ_b и прием рассеянного импульса той же антенной.

Будем считать, что для приема сигнала используется передающая антенна, которая имеет ширину луча на уровне половинной мощности θ_b ($\theta_b \ll 1$) (рис. 5.3). Тогда, используя формулу (4.19), получаем

$$I(t) = A \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho\sigma_b e^{-2\gamma}}{R^2} \left| u_i \left(t - \frac{2R}{c} \right) \right|^2 dR, \quad (5.35)$$

где

$$A = \frac{\lambda^2 [G_t(\hat{i}_0)]^2}{(4\pi)^3} \left(\frac{\pi\theta_b^2}{8 \ln 2} \right).$$

Заметим, что пока речь идет об интенсивности $I(t)$, движение частиц можно не учитывать, поскольку разность времен $t_1 - t_2 = \tau$ равна нулю и сечения рассеяния с учетом временной корреляции сводятся к обычным сечениям.

Полагая $t' = 2R/c$ и записывая (5.35) в виде свертки, для импульса произвольной формы получаем

$$I(t) = \int_{t'_1}^{t'_2} f(t') |u_i(t - t')|^2 dt', \quad (5.36)$$

$$f(t') = \frac{A \rho(R) \sigma_b(R) e^{-2\gamma}}{R^2} \left(\frac{c}{2} \right), \quad \gamma = \int_{R_1}^R \rho(R') \sigma_t(R') dR',$$

где $R = (c/2)t'$, $R_1 = (c/2)t'_1$ и $R_2 = (c/2)t'_2$. Заметим, что здесь мы включили вариации плотности $\rho(R)$ и характеристики рассеяния частиц $\sigma_b(R)$ и $\sigma_t(R)$ вдоль трассы распространения.

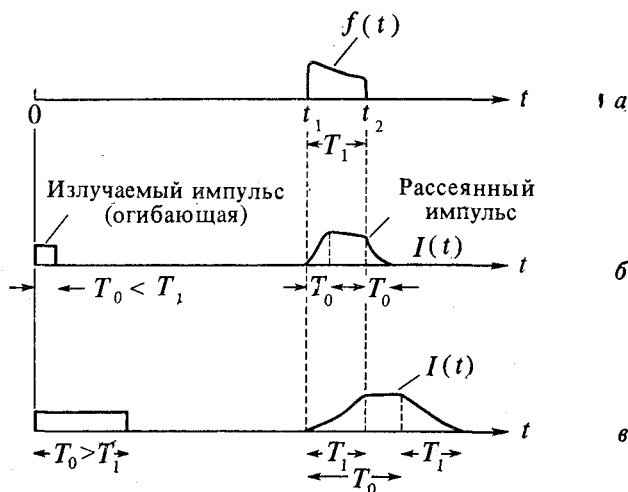


Рис. 5.4. Интенсивность обратного рассеяния $I(t)$ от слоя толщины $R_2 - R_1$, показанного на рис. 5.3. Время распространения в слое туда и обратно равно $T_1 = 2(R_2 - R_1)/c$, длительность импульса T_0 ; а — характеристика среды как функции расстояния $R = ct/2$, б — рассеянный импульс при $T_0 < T_1$, в — рассеянный импульс при $T_0 > T_1$.

Из формулы (5.36) видно, что если длительность импульса T_0 меньше, чем время распространения через слой и обратно $T_1 = 2(R_2 - R_1)/c$, то времена нарастания и спада отраженного импульса приблизительно равны T_0 ; если же T_0 больше, чем $T_1 = 2(R_2 - R_1)/c$, то времена нарастания и спада определяются величиной $T_1 = 2(R_2 - R_1)/c$ (рис. 5.4). Отсюда также следует, что при очень малой длительности импульса форма принимаемого импульса приближенно совпадает с функцией $f(t)$.

В самом деле, если падающий импульс имеет вид дельта-функции:

$$|u_i(t)|^2 = E_0 \delta(t), \quad (5.37)$$

где E_0 — полная энергия, то

$$I(t) = E_0 f(t) = E_0 f(2R/c). \quad (5.38)$$

Поскольку интенсивность в момент времени t пропорциональна функции f , вычисленной на расстоянии $R = ct/2$, интенсивность (5.38) может быть использована для нахождения характеристик частиц, расположенных на расстоянии R . Например, при известных сечениях по измерениям интенсивности $I(t)$ может быть найдена плотность $\rho(R)$. Этот метод применим в таких прикладных задачах, как акустическое обнаружение косяков рыб, а также определение плотности аэрозоля и гидрометеоров.

В более реальном случае, когда импульс имеет прямоугольную форму:

$$|u_i(t)|^2 = \begin{cases} E_0/T_0 & \text{при } 0 < t < T_0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_0, \end{cases} \quad (5.39)$$

имеем

$$I(t) = \frac{E_0}{T_0} \int_{t-T_0}^t f(t') dt' = \frac{E_0}{T_0} \int_{R-\Delta R}^R \frac{A_{\rho}(R) \sigma_b(R) e^{-2\gamma}}{R^2} dR, \quad (5.40)$$

где $\Delta R = cT_0/2$ и $R = ct/2$. Из (5.40) видно, что в некоторый момент времени t интенсивность $I(t)$ представляет собой усредненное по интервалу $(R - \Delta R, R)$ значение величины, стоящей под интегралом. Расстояние ΔR равно половине длины импульса cT_0 , поэтому в любой момент времени t интенсивность дает информацию о свойствах среды внутри объема, глубина которого равна $cT_0/2$, а поперечные размеры определяются шириной передающего луча. Этот объем называется радиолокационным объемом, или объемом разрешения радиолокатора.

Из рис. 5.4 ясно также, что если время прохождения T_1 через среду меньше длительности импульса T_0 , то форма рассеянного импульса в основном повторяет форму входного импульса, за исключением переднего края и хвостовой части. Заметим также, что в этом случае ($T_1 < T_0$) в промежутке между $t'_1 + T_1 = 2R_2/c$ и $t'_1 + T_0 = 2R_1/c + T_0$ рассеянная интенсивность такая же, как в монохроматическом случае.

Вообще говоря, в случае обратного рассеяния от слоя случайной среды толщиной $d = R_2 - R_1$ полоса когерентности приближенно равна $1/T_1 = c/2d$. Поскольку спектр излучаемого импульса длительностью $T_0 > T_1$ сосредоточен в области $|\omega| < 1/T_0 < 1/T_1$, изменение формы импульса не существенно. Од-

нако, если $T_0 < T_1$, рассеянный импульс имеет форму, сильно отличающуюся от формы излучаемого импульса.

В качестве примера рассмотрим слой толщины d , содержащий случайное облако частиц с равномерным распределением в пространстве. (Отражение от облаков при оптической локации рассматривается в работах [5, 25, 34, 106]; см. также обширный обзор [35]. Деполяризационные эффекты рассматриваются в работах [99, 129].) Этот слой расположен на большом расстоянии R_0 ($R_0 \gg d$) от передатчика. Входной импульс имеет прямоугольную форму (5.39). Из формулы (5.40) имеем

$$I(t) = \frac{AE_0}{T_0 R_0^2} \int_{R_1}^R \rho \sigma_b [U(R - R_0) - U(R - R_0 - d)] \exp(-2\gamma) dR,$$

где $R_1 = \frac{1}{2}(ct - cT_0)$, $R_2 = \frac{1}{2}(ct)$, $\gamma = \rho \sigma_t (R - R_0)$, $U(R - R_0)$ — единичная ступенчатая функция, так что $U(R - R_0) - U(R - R_0 - d)$ представляет собой ступеньку ширины d . Этот интеграл легко вычислить. Например, если $T_1 = 2d/c$ больше, чем T_0 , то

$$I(t) = \left(\frac{AE_0}{R_0^2 T_0} \right) (\rho \sigma_b) \frac{1 - \exp(-\rho \sigma_t ct)}{2\rho \sigma_t} \quad \text{при} \quad \frac{2R_0}{c} < t < \frac{2R_0}{c} + T_0,$$

$$I(t) = \left(\frac{AE_0}{R_0^2 T_0} \right) (\rho \sigma_b) \frac{\exp(-\rho \sigma_t ct) [\exp(\rho \sigma_t c T_0) - 1]}{2\rho \sigma_t} \\ \text{при} \quad \frac{2R_0}{c} + T_0 < t < \frac{2R_0}{c} + T_1,$$

$$I(t) = \left(\frac{AE_0}{R_0^2 T_0} \right) (\rho \sigma_b) \frac{\{\exp[-\rho \sigma_t c(t - T_0)] - \exp(-2\rho \sigma_t d)\}}{2\rho \sigma_t} \\ \text{при} \quad \frac{2R_0}{c} + T_1 < t < \frac{2R_0}{c} + T_1 + T_0.$$

Рассмотрим корреляционную функцию $B_u(t_1, t_2)$ рассеянного импульса. Поскольку мы рассматриваем два различных момента времени, необходимо привлечь сечение рассеяния с учетом временной корреляции. Здесь удобно вместо t_1 и t_2 использовать среднее время $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ и разностное время $\tau = t_1 - t_2$. Используя обратное сечение рассеяния с учетом временной корреляции $\sigma_b(\tau) = 4\pi\sigma_d(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$, где σ_d определяется формулой (4.48), и следуя процедуре получения формулы (5.35)

для узкого луча, перепишем (5.31) в виде

$$B_u(t, \tau) = A \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho \sigma_b(\tau) e^{-2\gamma}}{R^2} u_i\left(t_1 - \frac{2R}{c}\right) u_i^*\left(t_2 - \frac{2R}{c}\right) dR. \quad (5.41)$$

Вводя обозначение $t' = 2R/c$, получаем

$$B_u(t, \tau) = \int_{t'_1}^{t'_2} f(t', \tau) u_i(t_1 - t') u_i^*(t_2 - t') dt', \quad (5.42)$$

где

$$f(t', \tau) = \frac{A \rho(R) \sigma_b(R, \tau) e^{-2\gamma}}{R^2} \left(\frac{c}{2}\right),$$

а другие величины определены в (5.36). Формула (5.42) дает общее выражение для корреляционной функции выходного импульса, рассеянного в обратном направлении средой, показанной на рис. 5.3.

Из (5.42) следует, что корреляционные свойства выходного импульса определяются корреляционной характеристикой частиц $\sigma_b(R, \tau)$, учитывающей их движение, и произведением огибающих входного импульса $u_i(t_1 - t') u_i^*(t_2 - t')$. Интервал корреляции T_p , связанный с движением частиц, приближенно равен $(2k|V|)^{-1} = c/(4\pi f_0|V|)$, где V — скорость частиц. Обычно этот интервал корреляции велик по сравнению с длительностью импульса. Предположим, что ширина импульса T_0 намного меньше, чем время распространения T_1 , и наблюдение рассеянного импульса осуществляется в период времени между $t'_1 + T_0$ и t'_2 . Такая ситуация обычно встречается в акустических локационных и радиолокационных исследованиях атмосферы. Предположим также, что ширина импульса T_0 мала по сравнению с интервалом корреляции T_p , связанным с движением частиц. Тогда вид корреляционной функции определяется только формой входного импульса, и она приближенно оказывается равной

$$B_u(t, \tau) = f(t, \tau) \int u_i(t_1 - t') u_i^*(t_2 - t') dt'. \quad (5.43)$$

В случае прямоугольного импульса

$$u_i(t) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 \leq t \leq T_0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_0 \end{cases}$$

получаем

$$B_u(t, \tau) = f(t, \tau) (1 - |\tau|/T_0) E_0, \quad |\tau| < T_0, \quad (5.44)$$

где $|U_0|^2 = E_0/T_0$.

5.6. Обратное рассеяние последовательности коротких импульсов

В радиолокации и в звуковой локации излучаемая мощность обычно имеет вид последовательности коротких импульсов, длительность которых T_0 намного меньше времени распространения T_1 . Свойства среды могут медленно меняться во времени, и отраженный сигнал принимает вид, показанный на рис. 5.5. Кроме того, движение частиц может быть выявлено по корреляционной функции, зависящей от разности времен $\tau = t_1 - t_2$, или, что то же самое, по спектру с доплеровским сдвигом частоты. В этом случае отраженный сигнал можно рассматривать как случайную функцию аргументов t и τ (t описывает изменение в зависимости от расстояния $R = ct/2$, а τ — изменение во времени среды в фиксированной точке R ; рис. 5.6).

Рассмотрим корреляционную функцию $B_u(t_1, t_2)$ отраженного импульса. Как уже отмечалось выше, имеются две корреляционные функции — одна по t , другая по τ . Поскольку корреляция по t описывает временную корреляцию между импульсами, она не отличается от корреляционной функции одного импульса, рассмотренной в предыдущем разделе. Корреляция по τ в фиксированный момент времени t (или при фиксированной дальности) представляет интерес для многих приложений, включая импульсные доплеровские системы.

При фиксированном t корреляционная функция по τ определяется формулой (5.42), взятой при $t_1 = t_2 = t$:

$$B_u(t, \tau) = \int_{t'_1}^{t'_2} f(t', \tau) u_i(t - t') u_i^*(t - t') dt'. \quad (5.45)$$

В случае короткого импульса длительности T_0 имеем

$$B_u(t, \tau) \approx f(t, \tau) E_0 = \frac{A\rho(R) \sigma_b(R, \tau) e^{-2\gamma}}{R^2} \left(\frac{c}{2}\right) E_0, \quad (5.46)$$

где $R = ct/2$. Тогда временной частотный спектр $W_u(t, \omega)$ имеет вид

$$W_u(t, \omega) = \frac{4\pi A\rho(R) W_\sigma(R, \omega) e^{-2\gamma}}{R^2} \left(\frac{c}{2}\right) E_0, \quad (5.47)$$

где $R = ct/2$, а $W_\sigma(R, \omega)$ — спектр сечения (4.51).

Если включить в рассмотрение распределение частиц по размерам, то необходимо заменить $\rho 4\pi W_\sigma$ на $\rho \langle 4\pi W_\sigma \rangle$:

$$\rho \langle 4\pi W_\sigma \rangle = \int_0^\infty n(D) 4\pi W_\sigma(\omega, D) dD. \quad (5.48)$$

Рассмотрим, например, такую задачу, как вертикальное зондирование распределения капель дождя по размерам. Предположим, что установившаяся скорость дождевой капли радиуса a



Рис. 5.5. Излучаемый сигнал в виде последовательности импульсов с периодом повторения $(PRF)^{-1}$, где PRF — частота повторения импульсов. Форма отраженных импульсов медленно меняется от импульса к импульсу.

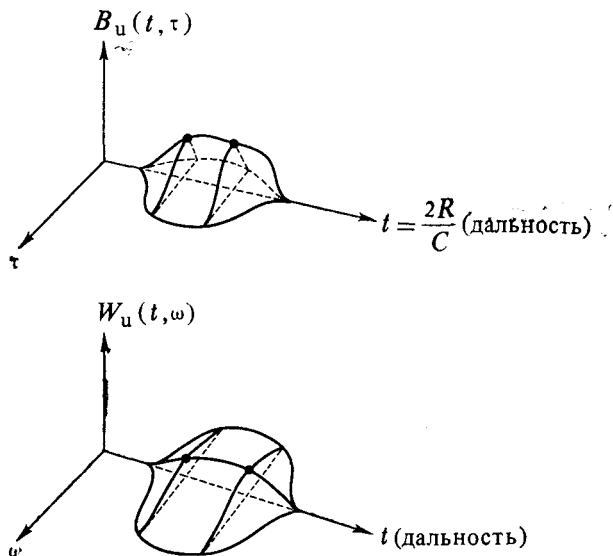


Рис. 5.6. Корреляционная функция $B_u(t, \tau)$ в зависимости от дальности t и времени корреляции τ . Фурье-образ B_u по τ представляет собой временной частотный спектр $W_u(t, \omega)$, где t характеризует дальность, а ω — движение среды (доплеровский сдвиг).

определяется приближенной формулой [см. (3.6) и (4.65)]

$$\mathbf{U} = -U(a)\hat{\mathbf{z}}, \quad U(a) = U_0 a^{1/2} = 200,8 a^{1/2} \text{ (м/с)}, \quad (5.49)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор в вертикальном направлении. Тогда из (4.69) имеем

$$\rho \langle 4\pi W_\sigma(\omega) \rangle = n(a_0) \sigma_b(a_0) \frac{4\omega}{(2kU_0)^2}, \quad (5.50)$$

где $a_0 = \omega^2 / (2kU_0)^2$ и $U_0 = 200,8$. Если мы измеряем частотный спектр $W_u(t, \omega)$ при фиксированной дальности $R = ct/2$, то в соответствии с (5.47) получаем $\rho \langle 4\pi W_\sigma(R, \omega) \rangle$ как функцию ω . Из формулы (5.50) видно, что каждому размеру a_0 отвечает определенная частота ω . Следовательно, зная сечение обратного рассеяния $\sigma_b(a_0)$ как функцию a_0 , из спектральных измерений можно определить распределение частиц по размерам $n(a_0)$.

5.7. Обратное рассеяние импульса, излучаемого передатчиком с широкой диаграммой направленности

В предыдущих разделах мы исследовали характеристики рассеянного импульса в случае остронаправленного излучателя. Если же диаграмма направленности излучателя широкая, то необходимо исходить из общего выражения (5.31). В качестве

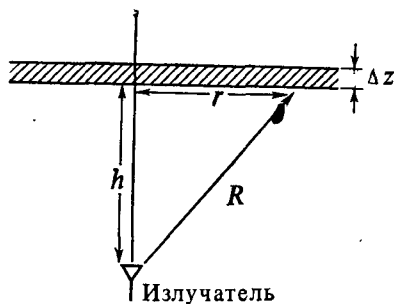


Рис. 5.7. Обратное рассеяние импульса, излучаемого слабонаправленным излучателем. Частицы сосредоточены в тонком слое толщины Δz .

примера рассмотрим обратное рассеяние импульса от тонкого слоя рассеивателей. Для простоты будем считать, что излучатель изотропен ($G_t = \text{const}$; рис. 5.7). Тогда, замечая, что $dV = r dr d\phi dz$, получаем

$$\begin{aligned} B_u(t, \tau) &= \frac{\lambda^2 G_t^2}{(4\pi)^3} \int \frac{\sigma_b e^{-2\gamma}}{R^4} B_i r dr d\phi dz = \\ &= \frac{\lambda^2 G_t^2 (2\pi) \Delta z}{(4\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\rho \sigma_b e^{-2\gamma} B_i}{R^3} dR. \end{aligned} \quad (5.51)$$

В случае когда входной импульс имеет вид δ -функции (5.37), интенсивность $I(t)$ равна

$$\begin{aligned} I(t) &= E_0 f(t) = E_0 f\left(\frac{2R}{c}\right), \\ f\left(\frac{2R}{c}\right) &= \left[\frac{\lambda^2 G_t^2 (2\pi) \Delta z}{(4\pi)^3} \right] \frac{\rho(R) \sigma_b(R) e^{-2\gamma}}{R^3} \left(\frac{c}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Заметим, что в случае тонкого слоя рассеянная интенсивность $I(t)$ убывает как $R^{-3} \sim t^{-3}$, тогда как при объемном рассеянии, рассмотренном в предыдущем разделе, $I(t)$ пропорциональна $R^{-2} \approx t^{-2}$. Отсюда следует, что временная зависимость рассеянной интенсивности позволяет выявить характер пространственного распределения частиц.

5.8 Бистатистическое рассеяние импульса

Общее выражение для случая бистатистического рассеяния дано в (5.31). Поэтому интенсивность $I(t)$ равна

$$I(t) = \int \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{0}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) \left| u_i \left(t - \frac{R_1 + R_2}{c} \right) \right|^2 \rho dV. \quad (5.53)$$

Из (5.53) видно, что все волны, рассеянные из точек, для которых величина $R_1 + R_2$ постоянна, приходят в приемник в один и тот же момент времени. Эти точки расположены на поверхности эллипсоида вращения, фокусы которого совпадают с точками расположения излучателя и приемника [156]. Этот эллипсоид быстро расширяется во времени. Например, скорость расширения $v_b = \partial b / \partial t$ в средней точке ($R_1 = R_2 = R$) может быть получена из условия $R^2 = b^2 + (L/2)^2$:

$$v_b = \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{R}{2b} \frac{\partial (2R)}{\partial t} = \frac{R}{2b} c = \frac{c}{2 \sin(\theta/2)}. \quad (5.54)$$

Если ширина передающего и приемного лучей θ_b мала (рис. 5.8), а длительность импульса велика, так что $T_0 > (t_2 - t_1) = H/v_b$, где H — высота общего объема передающего и приемного лучей, то передний край импульса начинает давать вклад в рассеянную мощность в момент времени $t = t_1$. Хвост импульса достигает общего объема в момент $t_1 + T$ и выходит из него при $t_2 + T$. Поведение принимаемой мощности во времени показано на рис. 5.9, а. Если длительность импульса T_0 меньше, чем $t_2 - t_1$, то принимаемая мощность ведет себя, как показано на рис. 5.9, б.

Время нарастания в случае $T_0 > t_2 - t_1$ равно $t_2 - t_1 = H/v_b$, а скорость v_b примерно равна $c/2 \sin(\theta/2)$. Такому времени нарастания отвечает полоса частот

$$\Delta f \approx \frac{1}{t_2 - t_1} \approx \frac{c}{H 2 \sin(\theta/2)}. \quad (5.55)$$

Если Δf велико по сравнению с полосой излучаемого импульса, то искажение формы импульса несущественно. Это обычно

имеет место при распространении узкополосных импульсов. В случае когда $T_0 < t_2 - t_1$, полоса частот $\Delta f \sim 1/T_0$ и, следовательно, происходит заметное искажение импульса, зависящее от формы общего объема.

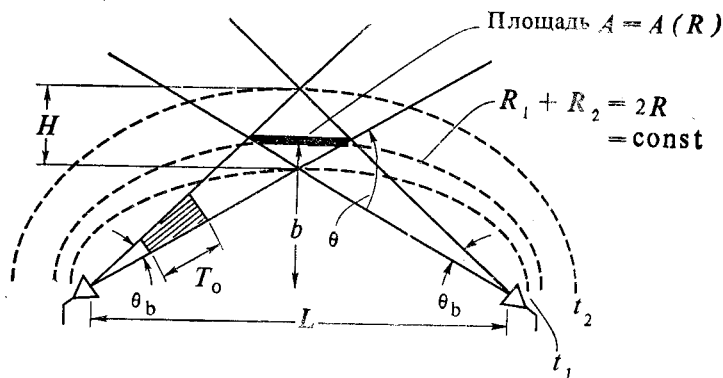


Рис. 5.8. Бистатическое рассеяние импульса. Волны, рассеянные частицами, находящимися на поверхности эллипсоида с постоянным значением $2R = R_1 + R_2$, приходят в приемник в один и тот же момент времени. Действие переднего края импульса на приемник начинается в момент времени t_1 и заканчивается в момент t_2 .

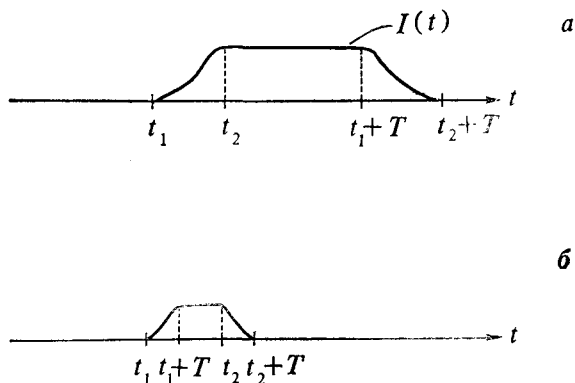


Рис. 5.9. Принимаемая мощность $I(t)$ при бистатическом рассеянии. а — при $T_0 > t_2 - t_1$; б — при $T_0 < t_2 - t_1$.

Строго говоря, интегрирование в (5.53) должно проводиться по общему объему. Элемент объема dV пропорционален $A(R)dR^1$ (рис. 5.8). Следовательно, выражение (5.53) прибли-

¹⁾ Выражение для dV в вытянутых сферических координатах см. в работе [1].

женно представляет собой свертку мощности входного импульса $I_i(t) = |U_i(t)|^2$ с функцией $A(R)$:

$$P_0(t) \sim \int A(R) P_i(t - R/c) dR. \quad (5.56)$$

5.9. Представление через функцию неопределенности

В предыдущем разделе мы получили выражение для корреляционной функции выходного импульса. Другая форма записи статистических характеристик импульса основана на использовании функции неопределенности [170]. Перепишем формулу (5.16), введя среднее время $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, разностное время $\tau = t_1 - t_2$, центральную частоту $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ и разностную частоту $\omega_d = \omega_1 - \omega_2$. Замечая, что

$$\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2 = \omega_d t + \omega_c \tau, \quad d\omega_1 d\omega_2 = d\omega_d d\omega_c, \quad (5.57)$$

запишем

$$B_u(t_1, t_2) = B_u(t, \tau) = \iint W_u(\omega_d, \omega_c, t, \tau) \exp(-i\omega_d t - i\omega_c \tau) d\omega_d d\omega_c, \quad (5.58)$$

где W_u — зависящая от времени спектральная плотность выходного импульса, определяемая выражением

$$W_u = U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \Gamma(\omega_0 + \omega_1, \omega_0 + \omega_2, t_1, t_2). \quad (5.59)$$

Функцию неопределенности $\chi_i(\omega_d, \tau)$ входного импульса определим как

$$\chi_i(\omega_d, \tau) = \int U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \exp(-i\omega_c \tau - i\omega_d t) d\omega_c. \quad (5.60)$$

Поскольку

$$u_i(t_1) u_i^*(t_2) = \iint U_i(\omega_1) U_i^*(\omega_2) \exp(-i\omega_c \tau - i\omega_d t) d\omega_c d\omega_d, \quad (5.61)$$

функцию неопределенности можно представить как фурье-образ:

$$\chi_i(\omega_d, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int u_i(t_1) u_i^*(t_2) \exp(i\omega_d t) dt. \quad (5.62)$$

В общем случае входной импульс $u_i(t)$ может быть случайной функцией времени. Тогда функция неопределенности выражает-

ся через фурье-образ корреляционной функции $B_i(t_1, t_2)$:

$$\chi_i(\omega_d, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int B_i(t, \tau) \exp(i\omega_d t) dt, \quad (5.63)$$

где $B_i(t, \tau) = \langle u_i(t_1) u_i^*(t_2) \rangle$. Из (5.63) следует

$$\iint |\chi_i(\omega_d, \tau)|^2 d\omega_d d\tau = \frac{1}{2\pi} \iint |B_i(t, \tau)|^2 dt d\tau. \quad (5.64)$$

Поскольку $|B_i(t, \tau)|^2 = \langle |u_i(t_1) u_i^*(t_2)|^2 \rangle$, интеграл в правой части (5.64) можно выразить в виде $E_0^2/2\pi$, где E_0 — полная энергия входного импульса

$$E_0 = \int |u_i(t)|^2 dt. \quad (5.65)$$

Таким образом, имеем

$$\iint |\chi_i(\omega_d, \tau)|^2 d\omega_d d\tau = \frac{E_0^2}{2\pi}. \quad (5.66)$$

Из уравнения (5.66) следует, что для импульса с заданной полной энергией весь объем, ограниченный поверхностью $|\chi_i|^2$ и плоскостью время (τ) — частота (ω_d), остается постоянным независимо от формы импульса. Этот вывод называется принципом неопределенности. Это означает, например, что сжатие функции $\chi_i(\omega_d, \tau)$ в направлении τ или ω_d сопровождается соответствующим расширением в направлении другой координаты.

Функцию неопределенности часто представляют графически в виде диаграммы неопределенности. Она представляет собой линию c_0 в плоскости ω_d, τ , на которой значение $|\chi_i|^2$ принимает некоторое постоянное значение. Это значение может быть взято таким, что

$$\iint_{c_0} d\tau d\omega_d = \frac{E_0^2}{2\pi}. \quad (5.67)$$

Перепишем (5.16) через введенную функцию неопределенности для случая стационарного в широком смысле канала с некоррелированным рассеянием. Тогда двухчастотная функция когерентности Γ является функцией ω_d и τ и не зависит от ω_c и t . В результате имеем

$$B_u(t, \tau) = \int \chi_i(\omega_d, \tau) \Gamma(\omega_d, \tau) \exp(-i\omega_d t) d\omega_d. \quad (5.68)$$

Сравнивая это выражение с формулой (5.63), находим, что функция неопределенности выходного импульса равна произведению функции неопределенности входного импульса и двухчастотной функции когерентности Γ .

5.10. Импульсно-доплеровский радиолокатор¹⁾

В предыдущих разделах мы исследовали среднее значение рассеянной мощности, а также корреляционные свойства и спектр рассеянного поля. Среднюю рассеянную мощность $I(t)$ можно регистрировать при помощи традиционного, или некогерентного радиолокатора. Но функцию когерентности и спектр можно измерить только в системе, которая осуществляет регистрацию фазы рассеянного поля по отношению к фазе зондирующей волны.

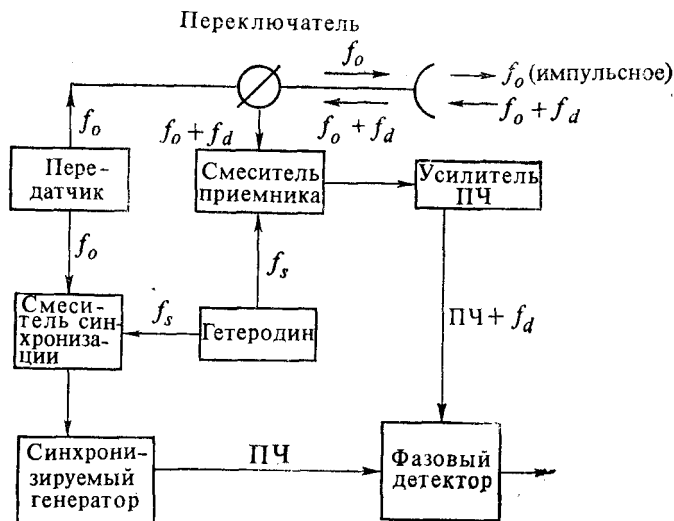


Рис. 5.10. Блок-схема импульсно-доплеровской системы.

щего сигнала. Такая система называется когерентным радиолокатором. Радиолокатор, измеряющий сдвиг частоты, обусловленный движением рассеивателей, называется доплеровским. Доплеровский радиолокатор с непрерывным сигналом может быть использован для измерения доплеровского сдвига частоты, но он не дает информации о дальности. Импульсно-доплеровский радиолокатор позволяет получать информацию как о скорости, так и о дальности рассеивателей. В этом разделе мы даем краткое описание импульсно-доплеровской системы.

В импульсном радиолокаторе передатчик генерирует последовательность коротких импульсов. Пусть f_0 — несущая частота, T_0 — длительность импульса и PRF — частота повторения импульсов (например, $f_0 = 3$ ГГц, $T_0 = 10$ мкс и PRF = 1000).

¹⁾ Применение импульсно-доплеровских систем в медицине рассматривается в работе [6]. См. также прекрасный обзор по использованию ультразвука в медицине [52].

Этот сигнал излучается, а рассеянная в обратном направлении волна принимается антенной. Принятый сигнал смешивается с сигналом стабильного гетеродина и получается сигнал промежуточной частоты (например, 30 МГц), который имеет те же фазовые характеристики, что и рассеянное поле. Этот сигнал

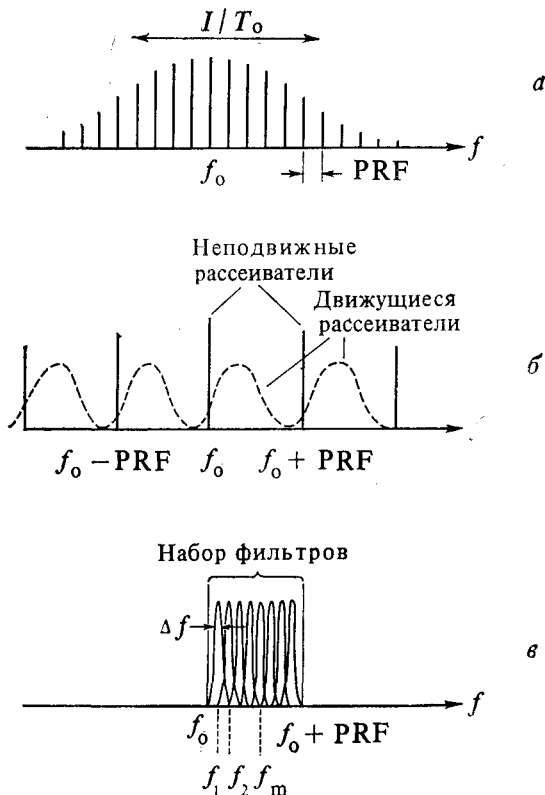


Рис. 5.11. Частотный спектр излучаемого импульса при длительности импульса T_0 и частоте повторения PRF (а); частотный спектр импульса, рассеянного на неподвижных частицах (б); частотная характеристика набора фильтров, каждый из которых имеет узкую полосу Δf (в).

сравнивается с сигналом когерентного генератора, который работает на промежуточной частоте, получаемой путем смешения зондирующего сигнала с сигналом стабильного гетеродина, так что его сигнал имеет ту же фазу, что и зондирующий сигнал (рис. 5.10) [7].

Спектр зондирующего импульса имеет вид отдельных линий, смещенных на величину PRF , и его полная ширина равна $1/T_0$ (рис. 5.11, а). Волна, рассеянная движущимися рассеивателями,

имеет частотный спектр, сдвинутый на доплеровскую частоту и уширенный (рис. 5.11, б).

Чтобы измерить спектр сигнала от движущихся рассеивателей, в импульсно-доплеровской системе используется набор фильтров, каждый из которых имеет узкую полосу (например, 100 Гц) (рис. 5.11, в). Измерение скорости осуществляется по

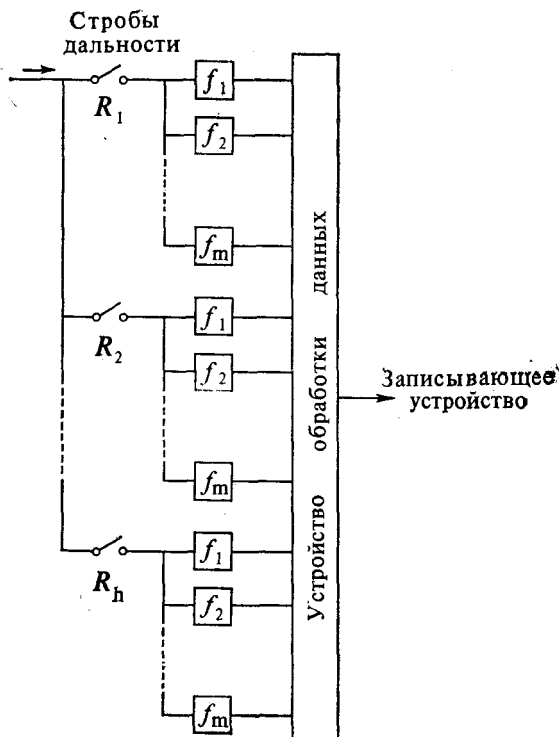


Рис. 5.12. Импульсно-доплеровская система со стробированием по дальности и набором фильтров.

фильтру, на выходе которого сигнал имеет максимальную величину. Доплеровский спектр может быть получен также путем цифровой обработки. Для получения информации о дальности осуществляется стробирование сигнала (рис. 5.12).

Из рис. 5.11, в видно, что если доплеровская частота становится равной частоте повторения импульсов PRF, то доплеровская линия совпадает со спектральной линией неподвижных рассеивателей, и они становятся неразличимыми. Скорость рассеивателей V , отвечающая этому условию, называется «слепой» скоростью. Поскольку доплеровская частота волны, рассеянной

в обратном направлении рассеивателем, движущимся со скоростью V , есть $2V/\lambda$, то «слепая» скорость равна

$$V = (\text{PRF}) \lambda / 2. \quad (5.69)$$

Вторая «слепая» скорость равна удвоенному значению, определяемому формулой (5.69).

Импульсно-доплеровская система используется для наблюдения движений снега, дождя, града и т. п. [7]. Упомянем здесь также систему, называемую индикатором движущихся целей (ИДЦ), которая аналогична импульсно-доплеровской. Эта система обнаруживает движущуюся цель путем сравнения рассеянных волн для различных импульсов и подавления сигналов от неподвижных целей. Это может быть сделано с использованием линий задержки или цифровой обработки. ИДЦ обычно приводит к неопределенности по дальности, тогда как информация по доплеровскому сдвигу однозначна (подробно об ИДЦ и импульсно-доплеровской системе см. в книге [146]).

Распространение в пределах прямой видимости через разреженное облако частиц

В гл. 4 и 5 мы рассмотрели характеристики непрерывных и импульсных волн, рассеянных на облаке случайно распределенных частиц. В этой главе мы исследуем распространение волн через случайную среду в пределах прямой видимости. Задача распространения в пределах прямой видимости представляет особый практический интерес. Например, характеристики миллиметрового и оптического каналов связи через земную атмосферу часто подвержены влиянию дождя, тумана и снега, а наличие различных частиц и рассеивателей оказывает влияние на распространение оптических и акустических волн в воде.

Задачи рассеяния и распространения в пределах прямой видимости удобно рассматривать отдельно, так как поведение волн в этих двух случаях носит совершенно различный характер. В задаче рассеяния волна является почти полностью некогерентной, причем в отсутствие среды рассеянная волна вообще отсутствует. В задаче распространения в пределах прямой видимости исследуемая волна содержит как когерентную, так и некогерентную составляющие, причем в отсутствие среды она переходит в падающую волну.

Прежде чем перейти к детальному анализу характеристик волн, полезно дать приближенное описание поведения волны в задаче распространения в пределах прямой видимости. Рассмотрим пример нормального падения плоской волны на полубесконечную среду, содержащую случайные частицы (рис. 6.1). Как уже говорилось в разд. 4.4, интенсивность когерентной составляющей поля I_c есть квадрат амплитуды когерентного поля $\langle u \rangle$, интенсивность некогерентной составляющей I_i представляет собой средний квадрат амплитуды некогерентного поля u_f , а полная интенсивность I_t есть сумма I_c и I_i :

$$\begin{aligned} I_t &= \langle I \rangle = \langle |u|^2 \rangle = I_c + I_i, \\ I_c &= |\langle u \rangle|^2, \quad I_i = \langle |u_f|^2 \rangle, \quad u = \langle u \rangle + u_f. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Интенсивность когерентной составляющей I_c уменьшается из-за рассеяния и поглощения, поэтому она должна убывать (разд. 4.2) с ростом коэффициента затухания, равного произведению плотности ρ и полного сечения $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$:

$$I_c = \exp(-\rho \sigma_t z). \quad (6.2)$$

Интенсивность излучения, рассеянного в стороны, представляет собой некогерентную интенсивность I_i . Однако это излучение с интенсивностью I_i в свою очередь тоже рассеивается во всех направлениях. Поэтому сумма интенсивностей I_c и I_i должна за-

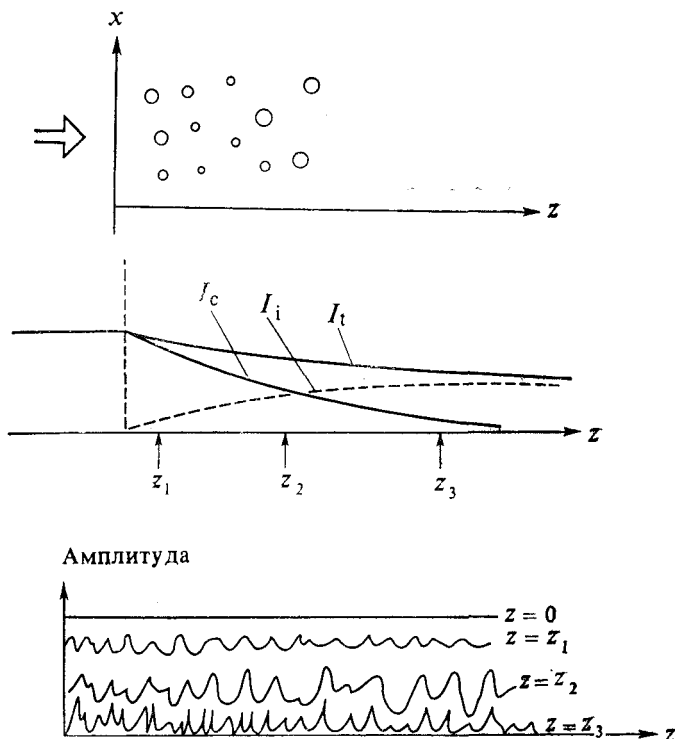


Рис. 6.1. Схематическое изображение когерентной интенсивности I_c , некогерентной интенсивности I_i и полной интенсивности I_t в случае плоской волны, падающей на полупространство ($z > 0$), заполненное частицами. Показаны также схематически амплитуды поля в зависимости от x на различных расстояниях z .

висеть в основном от сечения поглощения частиц, и ее можно приближенно записать в виде

$$I_t \approx \exp(-\rho\sigma_a z). \quad (6.3)$$

Следовательно, интенсивность когерентной составляющей дается выражением

$$I_i \approx \exp(-\rho\sigma_a z) - \exp(-\rho\sigma_t z) \approx \exp(-\rho\sigma_t z) (\exp(\rho\sigma_s z) - 1). \quad (6.4)$$

Эти соотношения иллюстрируются графиками на рис. 6.1. Заметим, что, пока оптический путь $\gamma = \rho\sigma_t z$ намного меньше еди-

ниции, преобладает когерентная составляющая поля ($z = z_1$). При значениях γ , близких к единице, когерентная интенсивность I_c и некогерентная интенсивность I_i сравнимы по величине ($z = z_2$), а при $\gamma \gg 1$ I_c практически обращается в нуль, и полная интенсивность I содержит только некогерентную составляющую ($z = z_3$). Для иллюстрации этого на рис. 6.1 показано поведение флуктуаций амплитуды. Следует заметить, что формулы (6.2)—(6.4) не учитывают эффектов обратного рассеяния, размеров частиц, характеристик приемника и т. д. и поэтому являются приближенными. Тем не менее они дают представление о некоторых общих характеристиках поля в задаче распространения в пределах прямой видимости.

В этой главе мы исследуем поведение поля в области слабых флуктуаций. Это та область, где поле в основном когерентно, так что амплитуда некогерентной составляющей поля намного меньше амплитуды когерентной составляющей. В случае плоской волны, показанном на рис. 6.1, это соответствует малому по сравнению с единицей оптическому пути $\gamma = \rho \sigma_t z$ ($z = z_1$). На рис. 6.1 видно также, что если рассеяние намного меньше поглощения (т. е. альбедо $\sigma_s/\sigma_t \ll 1$), то некогерентное поле мало по сравнению с когерентным даже при оптическом пути порядка или больше единицы. Поэтому данный случай также может быть отнесен к области слабых флуктуаций. Другой часто встречающийся на практике случай слабых флуктуаций имеет место, когда прием излучения осуществляется в узком конусе. В этом случае количество рассеянной энергии, попадающей в приемник, мало по сравнению с энергией когерентного поля и, следовательно, принимаемое поле в основном когерентно. Примером такой ситуации является прохождение СВЧ-излучения через дождь, когда при большом оптическом пути флуктуации могут быть слабыми из-за узости диаграммы направленности приемной антенны.

В этой главе мы рассмотрим как монохроматические, так и импульсные волны. Анализ будет проведен с использованием первого приближения теории многократного рассеяния, обсуждавшегося в гл. 4, и приближения Рытова. Более строгий анализ для случая сильных флуктуаций дается в гл. 15.

6.1. Когерентная и некогерентная интенсивности и пространственная корреляция флуктуаций в плоской волне

В этой главе мы рассматриваем два метода исследования флуктуационных характеристик волны, распространяющейся в пределах прямой видимости, а именно первое приближение тео-

рии многократного рассеяния и метод Рытова. Первый из них удобен при решении задач рассеяния. Что касается распространения в пределах прямой видимости, то здесь метод Рытова применим в более широкой области флуктуаций волны, чем первое приближение теории многократного рассеяния. В то же время последний метод оказывается более удобным при анализе импульсных задач, а также в тех случаях, когда необходимо учитывать направленные свойства приемной и передающей антенн.

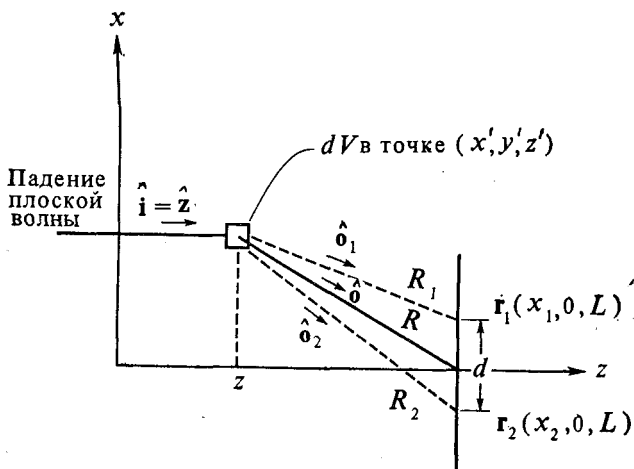


Рис. 6.2. Падение плоской волны на полупространство, заполненное случайными частицами. Точки наблюдения $(x_1, 0, L)$ и $(x_2, 0, L)$, где $x_1 = -x_2 = d/2$.

По этой причине в данном разделе мы воспользуемся первым приближением теории многократного рассеяния. Метод Рытова будет рассмотрен в разд. 6.6.

Рассмотрим плоскую волну, падающую на полубесконечную среду, содержащую большое число случайно распределенных частиц (рис. 6.2). Поле $u(\mathbf{r}_1)$ в точке $\mathbf{r}_1 = (x_1, 0, L)$ состоит из среднего (когерентного) поля $\langle u \rangle$ и флуктуационного поля u_f :

$$u(\mathbf{r}_1) = \langle u(\mathbf{r}_1) \rangle + u_f(\mathbf{r}_1). \quad (6.5)$$

Среднее поле $\langle u \rangle$ и когерентная интенсивность I_c определяются выражениями

$$\begin{aligned} \langle u(\mathbf{r}_1) \rangle &= \exp(ikL - \gamma/2), \\ &= |\langle u(\mathbf{r}_1) \rangle|^2 = \exp(-\gamma), \quad \gamma = \int_0^L \rho \sigma_t dz. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Флуктуационное поле u_f представляет собой сумму полей, рассеянных всеми частицами, находящимися в слое $0 \leq z \leq L$. Вкладом обратного рассеяния из области $z > L$ мы пренебрегаем.

Запишем сначала поле, рассеянное одной частицей из элемента объема dV , расположенной в точке (x', y', z') :

$$u_f(\mathbf{r}_1) = \frac{f(\hat{\mathbf{0}}_1, \hat{\mathbf{z}})}{R_1} \exp\left(ikz' + ikR_1 - \frac{\gamma_0}{2} - \frac{\gamma_1}{2}\right),$$

$$\gamma_0 = \int_0^{z'} \rho \sigma_t dz \quad \text{и} \quad \gamma_1 = \int_0^{R_1} \rho \sigma_t dR, \quad (6.7)$$

где $f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{z}})$ — амплитуда рассеяния частицы, γ_0 и γ_1 — оптические пути, а R_1 — расстояние от точки (x', y', z') до точки $(x_1, 0, L)$. Суммируя вклады от всех частиц, получаем

$$u_f(\mathbf{r}_1) = \int_V \frac{f(\hat{\mathbf{0}}_1, \hat{\mathbf{z}})}{R_1} \exp\left(ikz' + ikR_1 - \frac{\gamma_0}{2} - \frac{\gamma_1}{2}\right) \rho dV. \quad (6.8)$$

Аналогичным образом можно записать флуктуационное поле $u_f(\mathbf{r}_2)$ в точке $\mathbf{r}_2 = (x_2, 0, L)$; для этого нужно лишь заменить в (6.8) R_1 , γ_1 и $\hat{\mathbf{0}}_1$ на R_2 , γ_2 и $\hat{\mathbf{0}}_2$:

$$u_f(\mathbf{r}_2) = \int_V \frac{f(\hat{\mathbf{0}}_2, \hat{\mathbf{z}})}{R_2} \exp\left(ikz' + ikR_2 - \frac{\gamma_0}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\right) \rho dV. \quad (6.9)$$

Корреляционная функция полей $u_f(\mathbf{r}_1)$ и $u_f(\mathbf{r}_2)$ находится путем усреднения по ансамблю произведения этих двух интегралов. Заметим однако, что поля, рассеянные различными частицами, некоррелированы между собой, вследствие чего двукратные интегралы сводятся к однократному интегралу:

$$\left\langle \iint \rho_1 dV_1 \rho_2 dV_2 \right\rangle = \int \rho dV. \quad (6.10)$$

Таким образом, имеем

$$B_u(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle u_f(\mathbf{r}_1) u_f^*(\mathbf{r}_2) \rangle =$$

$$= \int_V \frac{f_1 f_2^*}{R_1 R_2} \exp\left[ik(R_1 - R_2) - \gamma_0 - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\right] \rho dV, \quad (6.11)$$

где $f_1 = f(\hat{\mathbf{0}}_1, \hat{\mathbf{z}})$ и $f_2 = f(\hat{\mathbf{0}}_2, \hat{\mathbf{z}})$. Заметим, что точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ выбраны в плоскости xz при $z = L$, а, поскольку падающая волна является плоской, корреляционная функция $B_u(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ должна быть функцией $|\mathbf{d}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |x_1 - x_2|$.

Укажем, что значение $|\mathbf{d}|$ может быть ограничено величиной порядка радиуса корреляции, так как вне радиуса корреляции B_u практически обращается в нуль. Кроме того, почти во всем объеме V расстояния R_1 и R_2 намного превышают радиус

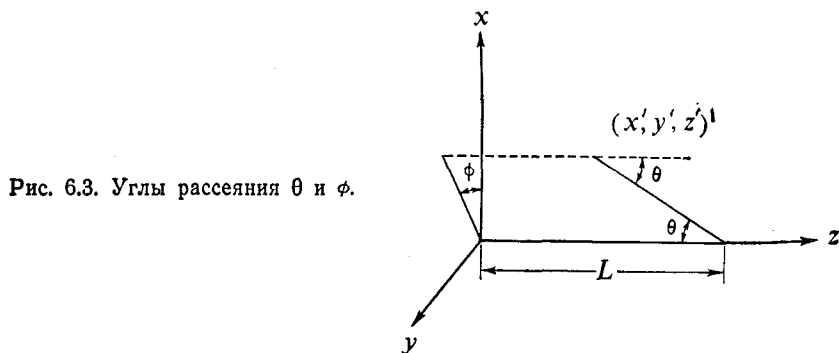


Рис. 6.3. Углы рассеяния θ и ϕ .

корреляции. Поэтому можно воспользоваться следующими приближениями (рис. 6.3):

$$\frac{f_1 f_2^*}{R_1 R_2} \approx \frac{|f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{z}})|^2}{R^2},$$

$$k(R_1 - R_2) \approx kd \sin \theta \cos \phi, \quad d = x_1 - x_2, \quad (6.12)$$

$$\hat{\mathbf{0}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta,$$

где единичный вектор $\hat{\mathbf{0}}$ записан в сферической системе координат (θ, ϕ) . Заметим также, что $dV = R^2 dR \sin \theta d\theta d\phi$. Интегрирование по ϕ можно провести, воспользовавшись формулой

$$\int_0^{2\pi} \exp(ikd \sin \theta \cos \phi) d\phi = 2\pi J_0(kd \sin \theta). \quad (6.13)$$

В результате имеем

$$B_u(d) = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{L/\cos \theta} dR \rho |f(\theta)|^2 J_0(kd \sin \theta) \exp(-\gamma_0 - \gamma'), \quad (6.14)$$

где $\gamma' = \int_0^R \rho \sigma_t dR$ и $f(\theta) = f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$. Если среда однородна ($\gamma' = \rho \sigma_t R$ и $\gamma_0 = \rho \sigma_t L - \rho \sigma_t R \cos \theta$), легко провести интегри-

рование по R . В этом случае имеем

$$B_u(d) = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \frac{|f(\theta)|^2}{\sigma_t} J_0(kd \sin \theta) g(\gamma, \theta), \quad (6.15)$$

$$g(\gamma, \theta) = \frac{\exp(-\gamma) - \exp(-\gamma/\mu)}{1 - \mu},$$

где $\mu = \cos \theta$ и $\gamma = \rho \sigma_t L$.

Рассмотрим несколько частных случаев. Предположим, что рассеяние изотропно. Тогда

$$|f(\theta)|^2 = \sigma_s/4\pi = \text{const.} \quad (6.16)$$

В этом случае получаем

$$B_u(d) = \frac{\sigma_s}{2\sigma_t} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta J_0(kd \sin \theta) g(\gamma, \theta). \quad (6.17)$$

При изменении θ от 0 до $\pi/2$ множитель $g(\gamma, \theta)$ меняется от $\gamma \exp(-\gamma)$ до $\exp(-\gamma)$. Поскольку основной вклад в интеграл дает область вблизи $\theta = 0$, этот множитель приближенно можно положить равным $\gamma \exp(-\gamma)$. Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta J_0(z \sin \theta) = \frac{\sin z}{z}, \quad (6.18)$$

в этом приближении находим

$$B_u(d) = \rho \sigma_s L \frac{\sin kd}{2kd} \exp(-\gamma). \quad (6.19)$$

Рассмотрим теперь случай, когда размеры частиц намного больше длины волны и, следовательно, рассеянное излучение сосредоточено внутри малого угла θ . В этом случае квадрат модуля амплитуды рассеяния можно записать в виде

$$|f(\theta)|^2 = (\alpha_p/\pi) \sigma_s \exp(-\alpha_p \theta^2), \quad (6.20)$$

где $\alpha_p = 2,77/\theta_{pb}^2$, а θ_{pb} — ширина (в радианах) индикатрисы рассеяния частицы по уровню половинной мощности [формула (3.9)]. Заметим, что амплитуда рассеяния большой сферы радиуса a определяется выражением¹⁾ [162]

$$f(\theta) = \frac{ia}{\sin \theta} J_1(ka \sin \theta). \quad (6.21)$$

Следовательно, ширина индикатрисы рассеяния равна

$$\theta_{pb} = 1,02\lambda/D, \quad D = 2a. \quad (6.22)$$

¹⁾ Отметим, что $f = iS^*/k$.

Подставляя (6.20) в (6.14) и учитывая, что $|\theta| \ll 1$, получаем

$$B_u(d) = \rho \sigma_s L e^{-\gamma} \int_0^{\infty} \theta d\theta 2\alpha_p \exp(-\alpha_p \theta^2) J_0(k d \theta), \quad (6.23)$$

где интегрирование по θ распространено на область от 0 до ∞ , поскольку область $\theta \geq 1$ дает малый вклад в интеграл. Этот интеграл может быть вычислен с использованием формулы

$$\int_0^{\infty} \exp(-p\theta^2) J_0(z\theta) \theta d\theta = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{z^2}{4p}\right). \quad (6.24)$$

В результате находим

$$B_u(d) = \rho \sigma_s L \exp[-\gamma - (kd)^2/4\alpha_p]. \quad (6.25)$$

Некогерентная интенсивность I_i определяется выражением

$$I_i = B_u(0) = \rho \sigma_s L \exp(-\gamma). \quad (6.26)$$

Заметим, что если I_i в формуле (6.4) разложить в ряд по степеням $\rho \sigma_s z$, то первый его член совпадет с выражением (6.26).

Из формул (6.19) и (6.25) видно, что если размеры частиц малы по сравнению с длиной волны, то радиус корреляции порядка длины волны; в противоположном предельном случае он порядка размера частиц D (укажем, что $(\alpha_p)^{1/2}/k \sim D$). Приведенные значения радиуса корреляции применимы в случае приемника, имеющего изотропную диаграмму направленности (точечный приемник). Ниже мы покажем, что диаграммы направленности приемника и излучателя оказывают значительное влияние на радиус корреляции принимаемой волны.

6.2. Временная корреляция и частотный спектр плоской волны

Временная корреляционная функция $B_u(\tau)$ флуктуационного поля u_f в точке $\mathbf{r} = (0, 0, L)$ для двух различных моментов времени t_1 и t_2 получается из формулы (6.11), если положить $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ и использовать для $f_1 f_2^*$ в случае движущихся частиц выражение

$$f_1 f_2^* = |f|^2 \chi(\mathbf{k}_s \tau) \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{U} \tau), \quad (6.27)$$

где $|f|^2 = \sigma_a(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ — дифференциальное сечение рассеяния, $\chi(\mathbf{k}_s \tau)$ — характеристическая функция флуктуаций скорости $\mathbf{V}_f$,

определяемая формулой (4.49), $\mathbf{k}_s = k(\mathbf{i} - \mathbf{0})$, $\mathbf{U}$ — средняя скорость частицы, а $\tau = t_1 - t_2$. В результате находим

$$B_u(\tau) = \langle u_f(\mathbf{r}, t_1) u_f^*(\mathbf{r}, t_2) \rangle = \int_V \frac{f_1 f_2^*}{R^2} \exp(-\gamma_0 - \gamma') \rho dV, \quad (6.28)$$

где γ_0 и γ' определены в (6.7) и (6.14) соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда флуктуации скорости $\mathbf{V}_f$ пренебрежимо малы по сравнению со средней скоростью $\mathbf{U}$, так что $\chi(\mathbf{k}_s \tau) = 1$. Используя сферическую систему координат (6.12), получаем

$$B_u(\tau) = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \frac{|f(\theta)|^2}{\sigma_f} J_0(kU_t \tau \sin \theta) \times \\ \times \exp[ikU_z \tau (1 - \cos \theta)] g(\gamma, \theta), \quad (6.29)$$

где средняя скорость $\mathbf{U}$ записана в виде суммы поперечной скорости $\mathbf{U}_t$ ($U_t = |\mathbf{U}_t|$) и продольной скорости $U_z \mathbf{z}$, а $g(\gamma, \theta)$ определяется формулой (6.15).

Рассмотрим случай частиц с размерами, намного превышающими длину волны. Тогда, пользуясь формулой (6.20) и приближенными равенствами

$$\exp[ikU_z \tau (1 - \cos \theta)] \approx \exp[ikU_z \tau (\theta^2/2)], \quad g(\gamma, \theta) \approx \gamma \exp(-\gamma), \quad (6.30)$$

получаем

$$B_u(\tau) = \frac{\rho \sigma_s L}{A} \exp\left[-\gamma - \frac{(kU_t \tau)^2}{4\alpha_p A}\right], \quad (6.31)$$

где $A = 1 - i(kU_z \tau / 2\alpha_p)$.

Заметим, что если скорость $\mathbf{U}$ перпендикулярна оси z ($U_z = 0$), то формула (6.31) совпадает с формулой (6.25), если в последней d заменить на $U_t \tau$. Такого соответствия между длиной корреляции и временем корреляции в случае поперечной скорости следовало ожидать, поскольку поле в точке $\mathbf{r}$ в момент t совпадает с полем в точке $\mathbf{r} + \mathbf{U}_t \tau$ в момент $t + \tau$ ввиду того, что частицы за время τ смещаются на расстояние $\mathbf{U}_t \tau$.

Рассмотрим теперь временной частотный спектр $W_u(\omega)$ при $U_z = 0$:

$$W_u(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau = (4\rho \sigma_s L) \left[\frac{\pi \alpha}{(kU_t)^2} \right]^{1/2} \exp\left[-\gamma - \frac{\alpha_p \omega^2}{(kU_t)^2}\right]. \quad (6.32)$$

Мы видим, что при $\omega = \omega_t = kU_t / (\alpha_p)^{1/2}$ частотный спектр спадает в e раз по отношению к своему значению в точке $\omega = 0$.

Используя (6.20) и (6.22), получаем

$$\omega_t = 5,29 U_t / D. \quad (6.33)$$

Отсюда следует, что уширение спектра приблизительно равно U_t/D , и время когерентности совпадает со временем, за которое частица проходит расстояние порядка своего размера. Например, капли дождя при интенсивности выпадения 12,7 мм/ч имеют диаметр 2 мм (рис. 3.3) и установившуюся скорость 6 м/с (рис. 3.4). Поэтому уширение спектра составляет примерно 3 кГц.

В некоторых случаях, например при распространении волны в дожде, капли имеют распределение по размерам $n(D)$ и их конечная скорость зависит от размера. Это можно учесть, положив в формуле (6.32) $\sigma_s = \sigma_s(D)$, $\alpha_p = \alpha_p(D) = 2,77 / (1,02 \lambda/D)^2$ и $U_t = U_t(D)$. Тогда получим

$$W_u(\omega) = \int_0^\infty n(D) dD 4\sigma_s(D) L \left[\frac{\pi \alpha_p(D)}{[k U_t(D)]^2} \right]^{1/2} \exp \left[-\gamma - \frac{\alpha_p(D) \omega^2}{[k U_t(D)]^2} \right], \quad (6.34)$$

$$\text{где } \gamma = \rho \langle \sigma_t \rangle L = \int_0^\infty n(D) \sigma_t(D) L dD.$$

6.3. Распространение плоской импульсной волны в пределах прямой видимости

Рассмотрим характеристики плоской импульсной волны, падающей на полупространство, заполненное частицами. Предположим, что излучаемый импульс имеет узкую полосу, сосредоточенную вблизи несущей частоты ω_0 . В этом случае среднее поле в точке наблюдения $\mathbf{r} = (0, 0, L)$ дается формулой

$$\langle u(\mathbf{r}, t) \rangle = u_t(t - L/c_0) \exp(-\gamma/2), \quad (6.35)$$

где $u_t(t)$ — поле падающей волны в плоскости $z = 0$, γ — оптический путь, а c_0 — скорость распространения волны.

Следовательно, корреляционная функция $B_c(t_1, t_2)$ когерентного поля в точке $\mathbf{r}$ и интенсивность когерентной составляющей

$I_c(t)$ равны

$$B_c(t_1, t_2) = \langle u(\mathbf{r}, t_1) \rangle \langle u^*(\mathbf{r}, t_2) \rangle = u_i \left(t_1 - \frac{L}{c_0} \right) u_i \left(t_2 - \frac{L}{c_0} \right) \exp(-\gamma), \quad (6.36)$$

$$I_c(t) = |\langle u(\mathbf{r}, t) \rangle|^2 = \left| u_i \left(t - \frac{L}{c_0} \right) \right|^2 \exp(-\gamma). \quad (6.37)$$

Корреляционная функция некогерентной составляющей поля

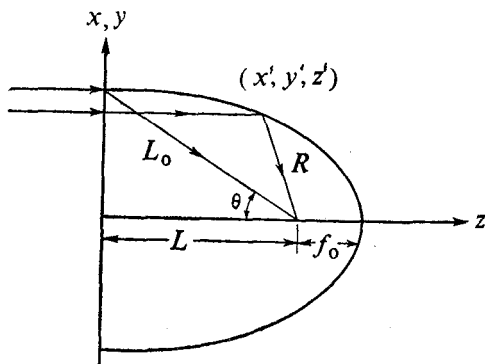


Рис. 6.4. Импульсные волны, рассеянные частицами, лежащими на параболоиде вращения (6.41), которые приходят в точку наблюдения $(0, 0, L)$ в один и тот же момент времени.

$u_f(\mathbf{r}, t)$ находится с использованием процедуры, изложенной в разделе 5.5 (рис. 6.4):

$$B_f(t_1, t_2) = \langle u_f(\mathbf{r}, t_1) u_f^*(\mathbf{r}, t_2) \rangle = \int_V \frac{|f|^2}{R^2} \exp(-\gamma_0 - \gamma') B_i \rho dV, \quad (6.38)$$

$$B_i = u_i \left(t_1 - \frac{z' + R}{c} \right) u_i^* \left(t_2 - \frac{z' + R}{c_0} \right).$$

Некогерентная интенсивность $I_f(t)$ дается формулой

$$I_f(t) = \int_V \frac{|f|^2}{R^2} \exp(-\gamma_0 - \gamma') I_i \rho dV, \quad I_i = \left| u_i \left(t - \frac{z' + R}{c_0} \right) \right|^2. \quad (6.39)$$

Из формулы (6.39) видно, что импульсные волны, рассеянные на поверхности, где

$$z' + R = L_0 = \text{const}, \quad (6.40)$$

приходят в точку наблюдения $\mathbf{r}$ в один и тот же момент времени. Учитывая, что $R = [x^2 + y^2 + (L - z)^2]^{1/2}$, можно показать, что эта поверхность является параболоидом вращения с фокусом, расположенным в точке наблюдения (рис. 6.4):

$$x^2 + y^2 = 4f_0[f_0 + L - z], \quad (6.41)$$

где $f_0 = \frac{1}{2}(L_0 - L)$ — фокусное расстояние. Этот параболоид быстро расширяется со временем. Например, при $z = 0$ скорость

расширения $V_e = \partial x / \partial t$ дается формулой ¹⁾

$$V_0 = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{(L^2 + x^2)^{1/2}}{x} c_0. \quad (6.42)$$

Рассмотрим случай, когда начальный импульс имеет вид дельта-функции:

$$|u_i(t)|^2 = E_0 \delta(t). \quad (6.43)$$

Подставляя это выражение в (6.39) и используя формулу для элемента объема $dV = R^2 dR \sin \theta d\theta d\phi$, получаем

$$I_f(t) = 2\pi \int_{\theta_1}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{L/\cos \theta} dR \rho |f(\theta)|^2 \times \\ \times \exp(-\gamma_0 - \gamma') E_0 \delta\left(t - \frac{z' + R}{c_0}\right), \quad (6.44)$$

где $\gamma_0 = \rho \sigma_t z'$, $\gamma' = \rho \sigma_t R$ и $z' = L - R \cos \theta$. Предел интегрирования θ_1 определяется из того условия, что в момент времени $t = L_0/c_0 \cos \theta_1$ должен быть равен L/L_0 (рис. 6.4). Проводя интегрирование по R , находим

$$I_f(t) = 2\pi \int_{\theta_1}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \rho |f(\theta)|^2 E_0 c_0 \left[\frac{\exp(-\rho \sigma_t c_0 t)}{1 - \cos \theta} \right]. \quad (6.45)$$

Если $|f(\theta)|^2 = \text{const} (= \sigma_s/4\pi)$, то

$$I_f(t) = \begin{cases} \frac{E_0 \rho \sigma_s c_0}{2} \exp(-\rho \sigma_t c_0 t) \ln \left[\frac{c_0 t}{c_0 t - L} \right] & \text{при } t > \frac{L}{c_0}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{L}{c_0}. \end{cases} \quad (6.46)$$

Заметим, что в рассматриваемом приближении некогерентная интенсивность $I_f(t)$ имеет логарифмическую особенность при $t = L/c_0$. Однако полная энергия, получаемая интегрированием выражения (6.46) по времени, конечна.

6.4. Распространение между излучателем и приемником в пределах прямой видимости

Выше мы рассматривали распространение монохроматической и импульсной плоских волн, падающих на полупространство. Теперь мы исследуем распространение волн с учетом направленных свойств излучателя и приемника.

¹⁾ Эта формула получается путем дифференцирования (6.41) по времени с учетом того, что $\partial L_0 / \partial t = c_0$.

Рассмотрим излучатель с диаграммой направленности по мощности $G_t(\hat{\mathbf{i}})$, расположенный в начале координат $(0, 0, 0)$, и приемник с диаграммой направленности по мощности $G_r(\hat{\mathbf{o}})$, расположенный в точке $\mathbf{r} = (0, 0, L)$ (рис. 6.5).

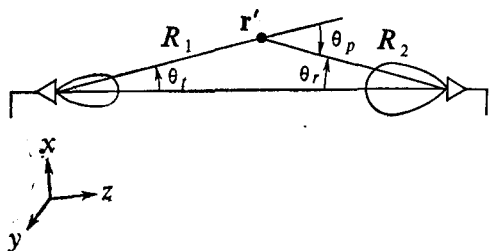


Рис. 6.5. Геометрия распространения в пределах прямой видимости; показаны диаграммы направленности излучателя и приемника и частица, расположенная в точке $\mathbf{r}'$.

Напряжение $V(t)$ на выходе приемника состоит из среднего значения $\langle V(t) \rangle$ и флуктуационной составляющей $V_f(t)$:

$$V(t) = \langle V(t) \rangle + V_f(t). \quad (6.47)$$

Тогда смешанный момент $B_v(t_1, t_2)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} B_v(t_1, t_2) &= \langle V(t_1) V^*(t_2) \rangle = \langle V(t_1) \rangle \langle V^*(t_2) \rangle + B_f(t_1, t_2), \\ B_f(t_1, t_2) &= \langle V_f(t_1) V_f^*(t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Поле у приемника состоит из поля, пришедшего прямо от излучателя, и поля, рассеянного частицами. Поскольку рассеянное поле имеет случайные амплитуду и фазу, среднее значение его равно нулю, тогда как среднее значение поля прямой волны постоянно. Отсюда ясно, что прямая волна дает вклад в среднее выходное напряжение $\langle V \rangle$, а рассеянное поле — в его флуктуационную составляющую $V_f(t)$.

Следовательно, величина $\langle V \rangle \langle V^* \rangle$ в (6.48), представляющая собой когерентную мощность, равна мощности прямой волны P_c , вычисленной уже в (4.12):

$$\frac{P_c}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{G_t(\hat{\mathbf{z}}) G_r(\hat{\mathbf{z}})}{L^2} e^{-\gamma}, \quad (6.49)$$

где P_t — излучаемая мощность и γ — оптический путь, определяемый по формуле (разд. 4.2)

$$\gamma = \int_0^L \rho \langle \sigma_t \rangle dz. \quad (6.50)$$

Корреляционная функция $B_f(t_1, t_2)$ флуктуационного поля найдена в разд. 4.6:

$$B_f(t_1, t_2) = P_t \int_V \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bt}(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) dV, \quad (6.51)$$

где $\tau = t_1 - t_2$ и напряжение нормировано таким образом, что величина $B_f(t, t) = \langle |V_f(t)|^2 \rangle = P_s$ представляет собой рассеянную мощность.

Во многих приложениях ширина излучаемого и приемного лучей мала (доля радиана) и интеграл в (6.51) можно приближенно вычислить следующим образом. Воспользуемся гауссовым представлением для диаграммы направленности, рассмотренным в разд. 4.3:

$$G_t(\hat{\mathbf{i}}) = G_t(\hat{\mathbf{z}}) \exp(-\alpha_t \theta_t^2), \quad G_r(\hat{\mathbf{0}}) = G_r(\hat{\mathbf{z}}) \exp(-\alpha_r \theta_r^2), \quad (6.52)$$

где $\alpha_t = (4 \ln 2)/\theta_{tb}^2 = 2,77/\theta_{tb}^2$, $\alpha_r = (4 \ln 2)/\theta_{rb}^2 = 2,77/\theta_{rb}^2$, а θ_{tb} и θ_{rb} — ширина (в радианах) передающего и приемного лучей на уровне половинной мощности соответственно. Поскольку основной вклад в некогерентное поле дает рассеяние на частицах вблизи направления вперед, для характеристик рассеяния частиц можно использовать также малоугловое приближение. Сечение рассеяния $\sigma_{bi}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$ движущихся частиц определено формулой (4.48). Предположим, что флуктуации скорости распределены по нормальному закону, описываемому формулами (4.57) и (4.58). Тогда $\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau)$ имеет вид

$$\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) = \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) \exp[-(\alpha_p + k^2 \sigma_f^2 \tau^2/2) \theta_p^2 + ikU\tau], \quad (6.53)$$

$$\sigma_{bi}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) = 4\alpha_p \sigma_s,$$

где σ_s — сечение рассеяния [формула (3.9)], $\alpha_p = 2,77/\theta_{pb}^2$, θ_{pb} — ширина (в радианах) индикатрисы рассеяния частицы на уровне половинной мощности, σ_f^2 — дисперсия флуктуаций скорости частиц, а $U = \mathbf{U} \cdot (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{0}})$. Здесь мы положили $k_s = k 2 \sin(\theta_p/2) \approx k\theta_p$, так как θ_p мало.

Если $\mathbf{U}$ выразить в компонентах (U_x, U_y, U_z), то U запишется в виде

$$U = (\sin \theta_t + \sin \theta_r)(U_x \cos \phi + U_y \sin \phi) + U_z(\cos \theta_t - \cos \theta_r), \quad (6.54)$$

где (R_1, θ_t, ϕ) — сферические координаты частицы, находящейся в точке $\mathbf{r}'$ (рис. 6.5). При $\mathbf{U} = U_x \mathbf{x}$ приближенно имеем

$$U = (\theta_t + \theta_r) U_x \cos \phi, \quad (6.55)$$

где мы положили $\sin \theta_t \approx \theta_t$ и $\sin \theta_r \approx \theta_r$. Заметим также, что при $|\theta_r| \ll 1$, $|\theta_t| \ll 1$ имеем

$$R_1 \approx \left(1 + \frac{1}{2} \theta_t^2\right) z', \quad R_2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} \theta_r^2\right) (L - z'), \quad (6.56)$$

$$\theta_t \approx \frac{(L - z')}{z'} \theta_r, \quad \theta_p \approx \frac{L}{z'} \theta_r, \quad \frac{dV}{R_1^2 R_2^2} \approx \frac{dr' \theta_r d\theta_r d\phi}{z'^2}.$$

Подставляя (6.52), (6.53), (6.55) и (6.56) в формулу (6.51), получаем

$$\begin{aligned} \frac{B_f(\tau)}{P_t} &= \frac{\lambda^2 G_t(\hat{z}) G_r(\hat{z})}{(4\pi)^3} \int_0^L dz' \int_0^{\pi/2} \theta_r d\theta_r \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho \sigma_{bt}(\hat{z}, \hat{z})}{z'^2} \exp(\psi), \\ \psi &= -\gamma - \rho \theta_r^2 - q_1 \tau^2 \theta_r^2 + i q_2 \tau \theta_r, \\ \rho &= \alpha_p \left(\frac{L}{z'}\right)^2 + \alpha_t \left(\frac{L - z'}{z'}\right)^2 + \alpha_r + \\ &\quad + \frac{(L - z')^2}{2z'^2} \int_0^{z'} \rho \sigma_t dz + \frac{1}{2} \int_{z'}^L \rho \sigma_t dz, \\ \gamma &= \int_0^L \rho \sigma_t dz, \quad q_1 = \frac{k^2 \sigma_f^2}{2} \left(\frac{L}{z'}\right)^2, \quad q_2 = kU. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Рассмотрим частный случай, когда плотность частиц и их распределение по размерам постоянны вдоль пути распространения волны. Тогда имеем

$$\rho = (L/z')^2 [a + b(z'/L) + c(z'/L)^2], \quad (6.58)$$

где $a = \alpha_p + \alpha_t$, $\beta = \rho \sigma_t L/2 - 2\alpha_t$ и $c = \alpha_t + \alpha_r - \rho \sigma_t L/2$.

Вычислим сначала рассеянную мощность $P_s = B_f(0)$. Для этого положим в (6.57) $\tau = 0$. Кроме того, так как подынтегральное выражение содержит множитель $\exp(-\rho \theta_r^2)$, верхний предел интегрирования по θ_r $\pi/2$ можно заменить на ∞ , не внося существенной погрешности. Тогда получим¹⁾

$$\frac{P_s}{P_t} = \frac{P_c}{P_t} \frac{(2\alpha_p \rho \sigma_s L)}{\sqrt{\Delta}} \left[\arctg \left(\frac{b + 2c}{\sqrt{\Delta}} \right) - \arctg \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}} \right) \right], \quad (6.59a)$$

где $\Delta = 4ac - b^2$ и $\Delta > 0$. Если $\Delta < 0$, то

$$\frac{P_s}{P_t} = \frac{P_c}{P_t} \frac{(2\alpha_p \rho \sigma_s L)}{\sqrt{-\Delta}} \left[\text{Ar th} \left(\frac{b}{\sqrt{-\Delta}} \right) - \text{Ar th} \left(\frac{b + 2c}{\sqrt{-\Delta}} \right) \right]. \quad (6.59б)$$

Было показано [74], что если $\alpha_t = \alpha_r \approx 0$ и $\gamma = \rho \sigma_t L \ll 1$, то формула (6.59б) принимает вид

$$\frac{P_s}{P_t} = \frac{P_c}{P_t} (\rho \sigma_s L), \quad P = P_c + P_s \approx P_t \left[\frac{\lambda^2 G_t(\hat{z}) G_r(\hat{z})}{(4\pi L)^2} \right] \exp(-\rho \sigma_a L). \quad (6.60)$$

¹⁾ Заметим, что $\int (a + bx + cx^2)^{-1} dx = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctg \left(\frac{b + 2cx}{\sqrt{\Delta}} \right)$, $\Delta > 0$.
См. также [60].

Эти формулы согласуются с выражениями (6.2) и (6.3). В более общих случаях вычисления нужно проводить по формулам (6.59). При этом необходимо помнить, что формулы (6.59) получены в первом приближении теории многократного рассеяния, вследствие чего они применимы лишь в тех случаях, когда величина P_s мала по сравнению с P_c .

Рассмотрим теперь временную корреляционную функцию $B_f(\tau)$, определяемую формулой (6.57), для случая, когда характеристики частиц постоянны вдоль пути распространения волны. Для простоты будем считать, что флуктуации скорости частиц пренебрежимо малы ($\sigma_f = 0$), так что в (6.57) можно положить $q_1 = 0$. Предположим также, что средняя скорость U равна U_x , как в формуле (6.55). Тогда, пользуясь соотношениями

$$\int_0^{2\pi} \exp(ix \cos \phi) d\phi = 2\pi J_0(x),$$

$$\int_0^\infty \exp(-p\theta_r^2) J_0(a\theta_r) \theta_r d\theta_r = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{a^2}{4p}\right), \quad (6.61)$$

из формулы (6.57) получаем

$$\frac{B_f(\tau)}{P_t} = \frac{P_c}{P_t} \int_0^L dz' \frac{\alpha_p \rho \sigma_s L^2}{z'^2 p} \exp\left(-\frac{A^2 \tau^2}{4p}\right), \quad (6.62)$$

где p определяется выражением (6.58), а $A^2 = (kU_x)^2 (L/z')^2$.

Временной частотный спектр $W_f(\omega)$ определяется выражением

$$W_f(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau =$$

$$= P_c \int_0^L dz' \frac{(\alpha_p \rho \sigma_s L^2)^4}{A z'^2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(-\frac{p\omega^2}{A^2}\right)^2. \quad (6.63)$$

Интеграл в (6.63) можно вычислить при $\omega \rightarrow 0$. При $c > 0$ и $\Delta > 0$ имеем [60]

$$W_f(0) = \frac{4P_c \alpha_p \rho \sigma_s L}{|kU_x|} \sqrt{\frac{\pi}{c}} \left[\operatorname{Ar sh}\left(\frac{2c+b}{\sqrt{\Delta}}\right) - \operatorname{Ar sh}\left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right) \right], \quad (6.64)$$

где $\Delta = 4ac - b^2$. Аналогичное выражение может быть получено для $\Delta < 0$ и $c < 0$.

При больших ω можно воспользоваться методом перевала, который дает следующее значение интеграла [21]:

$$\int A(z) \exp[-f(z)] dz \approx A(z_s) \exp[-f(z_s)] \left[\frac{2\pi}{f''(z_s)} \right]^{1/2}, \quad (6.65)$$

где z_s — седловая точка, определяемая из условия

$$f'(z_s) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_s} = 0.$$

Тогда при $\Delta/4c > 0$ получаем

$$W_f(\omega) = \frac{4P_c \alpha_p \sigma_s L}{\sqrt{\Delta}} \frac{2\pi}{\omega} \exp \left[-\frac{\omega^2}{(kU_x)^2} \left(\frac{\Delta}{4c} \right) \right]. \quad (6.66)$$

Из формулы (6.66) видно, что время когерентности T_c приближенно равно

$$T_c = \frac{1}{|kU_x|} \left(\frac{\Delta}{4c} \right)^{1/2}. \quad (6.67)$$

Если ширина передающего и приемного лучей θ_{tb} и θ_{rb} и оптический путь $\rho \sigma_t L$ малы, то имеем

$$\alpha_t \sim \alpha_r \gg \alpha_p, \quad \alpha_t \sim \alpha_r \gg \rho \sigma_t L. \quad (6.68)$$

В результате получаем приближенное выражение

$$T_c \sim \left(\frac{2,77}{\theta_{tb}^2 + \theta_{rb}^2} \right)^{1/2} \frac{1}{|kU_x|}. \quad (6.69)$$

Поскольку $\theta_{tb} \sim 1,5\lambda/D_t$ и $\theta_{rb} \sim 1,5\lambda/D_r$, где D_t и D_r — размеры передающей и приемной антенн, имеем

$$T_c \sim \frac{1}{[1/D_t^2 + 1/D_r^2]^{1/2}} \frac{1}{U_x}. \quad (6.70)$$

Отсюда следует, что в случае остронаправленной антенны время когерентности примерно равно времени перемещения частицы на расстояние порядка размера апертуры. Этот результат существенно отличается от полученного выше результата (6.33), согласно которому время когерентности в случае точечного приемника по порядку величины совпадает с временем прохождения частицей расстояния, равного ее размеру. Точечный приемник регистрирует рассеянные волны, приходящие из всего рассеивающего объема, так что время когерентности зависит только от характеристик частиц, тогда как остронаправленная антенна принимает рассеянные волны из узкой конической области, и потому время когерентности зависит главным образом от характеристик антенн и значительно превышает время когерентности в случае точечного приемника.

6.5. Распространение импульса между излучателем и приемником

В предыдущем разделе были рассмотрены флуктуационные характеристики непрерывной (монохроматической) волны, распространяющейся через случайное облако рассеивателей. Здесь мы исследуем распространение импульса в такой среде в первом приближении теории многократного рассеяния. Будем предполагать, что излучаемая волна имеет узкий спектр, сосредоточенный вблизи несущей частоты ω_0 , так что справедливо приближение (5.29).

Рассмотрим прямую волну (среднюю волну), задаваемую $\langle V(t) \rangle$ в формуле (6.47). В предположении узкой полосы имеем

$$\langle V(t_1) \rangle \langle V^*(t_2) \rangle = (P_0/P_t) u_i(t_1 - L/c_0) u_i^*(t_2 - L/c_0), \quad (6.71)$$

где P_c определяется выражением (6.49), а $u_i(t)$ — комплексная огибающая излучаемого импульса (5.9). Ясно, что форма импульса прямой волны не отличается от формы падающего импульса u_i .

Рассмотрим теперь корреляционную функцию флуктуаций выходного импульса. Общее выражение для нее, обсуждавшееся в разд. 5.5, имеет вид (5.31)

$$B_f(t_1, t_2) = P_t \int_V \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{i}}) G_r(\hat{\mathbf{o}})}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2} \rho \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, \tau) \exp(-\gamma_1 - \gamma_2) B_i dV, \quad (6.72)$$

$$B_i = u_i\left(t_1 - \frac{R_1 + R_2}{c_0}\right) u_i^*\left(t_2 - \frac{R_1 + R_2}{c_0}\right),$$

где c_0 — скорость распространения волны. [В этом разделе скорость волны мы обозначаем c_0 , чтобы отличить ее от величины c в формуле (6.58).]

Как уже говорилось в разд. 5.5, импульсы, рассеянные сферической поверхностью с фокусами в точках расположения излучателя и приемника, для которых $R_1 + R_2 = \text{const}$, приходят в приемник в один момент времени.

Если излучатель и приемник имеют узкую полосу, можно воспользоваться упрощениями, сделанными в формуле (6.57). Тогда получим

$$\frac{B_f(t_1, t_2)}{P_t} = \frac{\lambda^2 G_t(\hat{\mathbf{z}}) G_r(\hat{\mathbf{z}})}{(4\pi)^3} \int_0^L dz' \int_0^{\pi/2} \theta_r d\theta_r \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho \sigma_{bi}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}})}{z'^2} \exp(\psi) B_i, \quad (6.73)$$

где ψ определяется формулой (6.57), а величина $R_1 + R_2$, входящая в B_i , определяется выражением

$$R_1 + R_2 = L + \frac{(L - z')}{2} \left(\frac{L}{z'}\right) \theta_r^2, \quad (6.74)$$

Интенсивность $I(t)$ состоит из интенсивности прямой волны $I_c(t)$ и некогерентной интенсивности $I_s(t)$:

$$I(t) = I_c(t) + I_f(t), \quad I_c(t) = (P_c/P_t) I_i(t - L/c_0), \quad (6.75)$$

где $I_i(t - L/c_0) = |u_i(t - L/c_0)|^2$. Из формул (6.73) и (6.74) находим некогерентную интенсивность $I_f(t)$:

$$I_f(t) = \frac{P_c}{P_t} (2\alpha_p \rho \sigma_s L^2) \int_0^L dz' \int_0^{\pi/2} \theta_r d\theta_r \frac{\exp(-p\theta_r^2)}{z'^2} I_i(t, z'), \quad (6.76)$$

где p определяется формулой (6.58), а

$$I_i(t, z') = \left| u_i \left(t - \frac{R_1 + R_2}{c_0} \right) \right|^2 = \left| u_i \left[t - \frac{L}{c_0} - \frac{(L - z')}{2c_0} \left(\frac{L}{z'} \right) \theta_r^2 \right] \right|^2.$$

В качестве примера рассмотрим входной импульс вида

$$|u_i(t)|^2 = E_0 \delta(t), \quad (6.77)$$

где E_0 — полная энергия импульса. Подставляя (6.77) в (6.76) и интегрируя по θ_r , получаем

$$I(t) = I_c(t) + I_f(t), \quad I_c(t) = \frac{P_c}{P_t} E_0 \delta \left(t - \frac{L}{c_0} \right), \quad (6.78)$$

$$I_f(t) = \begin{cases} \frac{P_c}{P_t} (2\alpha_p \rho \sigma_s L^2) \int_0^L dz' \frac{E_0}{2z'^2 Q} \exp \left[-\frac{p(t - L/c_0)}{Q} \right] & \text{при } t > \frac{L}{c_0}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{L}{c_0}, \end{cases}$$

где p дается формулой (6.58), а $Q = [(L - z')/2c_0] (L/z')$.

Из формулы (6.78) видно, что входной импульс содержит когерентную интенсивность $I_c(t)$, которая тоже имеет вид δ -импульса, и некогерентную интенсивность $I_f(t)$, затухающую во времени по экспоненциальному закону. Это затухание обусловлено рассеянием на различных частицах всего рассеивающего объема.

Приближенное вычисление интеграла в (6.78) при больших $t - L/c_0$ можно осуществить методом перевала.

В качестве примера рассмотрим случай широких диаграмм направленности излучателя и приемника, когда $\alpha_t = \alpha_r \approx 0$. При этом имеем

$$= (L/z')^2 [\alpha_p + (\rho \sigma_t L/2) (z'/L) (1 - z'/L)], \quad (6.79)$$

Вычисление интеграла методом перевала дает

$$I_f(t) = \begin{cases} \frac{P_c}{P_t} (2\alpha_p \rho \sigma_s E_0 c_0) \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{c_0}{L} \left(t - \frac{L}{c_0} \right) (8\alpha_p - \rho \sigma_t L) \right] & \text{при } t \gg \frac{L}{c_0}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{L}{c_0}. \end{cases} \quad (6.80)$$

Это выражение справедливо только при условии $8\alpha_p - \rho \sigma_t L > 0$.

Из выражения (6.80) видно, что если оптический путь $\rho \sigma_t L$ мал, то скорость экспоненциального затухания интенсивности $I_f(t)$ зависит от характеристик рассеяния частицы. Так, например, в случае больших по сравнению с длиной волны размеров частиц (D) величина α_p приближенно равна $[(\pi D)/2\lambda]^2$, поэтому постоянная времени затухания T_d дается приближенной формулой

$$T_d = (L/c_0) (\lambda^2/2\pi^2 D^2). \quad (6.81)$$

Полная энергия некогерентной составляющей получается интегрированием выражения (6.78) по времени; по порядку величины она равна $(P_c/P_t) E_0 \rho \sigma_s L$.

6.6. Приближение Рытова для флуктуаций амплитуды и фазы

Выше для описания флуктуационных характеристик монохроматической и импульсной волн мы использовали первое приближение теории многократного рассеяния. В этом приближении поле у приемника $u(\mathbf{r}, t)$ представляет собой сумму когерентного $\langle u(\mathbf{r}, t) \rangle$ и некогерентного $u_f(\mathbf{r}, t)$ полей:

$$u(\mathbf{r}, t) = \langle u(\mathbf{r}, t) \rangle + u_f(\mathbf{r}, t). \quad (6.82)$$

Это соответствует теории слабых флуктуаций, применимой лишь в случае, когда некогерентная интенсивность $\langle |u_f|^2 \rangle$ мала по сравнению с когерентной интенсивностью $|\langle u \rangle|^2$.

В этом разделе мы даем другое возможное представление поля через флуктуации комплексной фазы ψ . Запишем поле в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}, t) e^{i\psi(\mathbf{r}, t)}, \quad (6.83)$$

где $u_0(\mathbf{r}, t)$ — некоторое исходное поле с определенными амплитудой и фазой.

В качестве u_0 можно выбрать поле волны в свободном пространстве, т. е. в отсутствие случайной среды, или какое-либо

другое поле, например среднее поле $\langle u(\mathbf{r}, t) \rangle$. В этом разделе мы используем

$$u_0(\mathbf{r}, t) = \langle u(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (6.84)$$

Функция $\psi(\mathbf{r}, t)$, вообще говоря, комплексна:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \chi(\mathbf{r}, t) + iS_1(\mathbf{r}, t). \quad (6.85)$$

Если u и u_0 записать через амплитуды A и A_0 и фазы S и S_0 , то мы получим

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp[iS(\mathbf{r}, t)], \quad u_0(\mathbf{r}, t) = A_0(\mathbf{r}, t) \exp[iS_0(\mathbf{r}, t)]. \quad (6.86)$$

При этом функции χ и S_1 в (6.85) принимают вид

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \ln(A/A_0), \quad S_1(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) - S_0(\mathbf{r}, t). \quad (6.87)$$

Из формулы (6.87) видно, что вещественная часть $\chi(\mathbf{r}, t)$ комплексной фазы ψ представляет флуктуации логарифма амплитуды A , или уровня, а мнимая часть S_1 — флуктуации фазы.

Оказывается, что выражение (6.83) удобно при исследовании распространения в пределах прямой видимости, тогда как выражение (6.82) более пригодно при анализе рассеяния. Это можно пояснить путем следующих рассуждений. В задаче распространения в пределах прямой видимости волна при прохождении через один тонкий слой испытывает флуктуации амплитуды и фазы. Тогда поле можно записать в виде $u_0 u_1$, где u_0 — поле падающей волны, а u_1 описывает флуктуации. Поле $u_0 u_1$ представляет собой поле волны, падающей на второй слой, на выходе которого поле волны имеет вид $u_0 u_1 u_2$. Таким образом, полное поле на выходе равно произведению $u_0 u_1 u_2 u_3 \dots$ (рис. 6,6, а). Если каждый флуктуационный сомножитель u_n представить в виде экспоненты $\exp \psi_n$, то полное поле будет равно $u = u_0 \exp(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots)$. Это означает, что показатель экспоненты ψ в (6.83) есть результат сложения всех флуктуаций ψ_n вдоль трассы распространения. Поскольку поле на выходе является произведением многих сомножителей, его удобно записать в экспоненциальной форме (6.83).

При анализе рассеяния удобнее рассматривать рассеянное поле как сумму вкладов различных участков рассеивающей среды (рис. 6,6, б). Поэтому в задаче рассеяния обычно используется запись (6.82).

В данном разделе мы рассмотрим флуктуации уровня χ и фазы S_1 в случае распространения в пределах прямой видимости, используя метод Рытова. Этот метод основан на переходе от волнового уравнения для поля u к нелинейному уравнению Риккати для ψ , которое решается методом интегрального уравнения. Подробное изложение метода Рытова дано в гл. 17. Здесь мы приведем без вывода выражение для первой итерации, имею-

щее вид

$$u(\mathbf{r}, t) = \langle u(\mathbf{r}, t) \rangle \exp [u_f(\mathbf{r}, t) / \langle u(\mathbf{r}, t) \rangle], \quad (6.88)$$

где $u_f(\mathbf{r}, t)$ — решение, отвечающее первому приближению теории многократного рассеяния. Заметим, что если величина

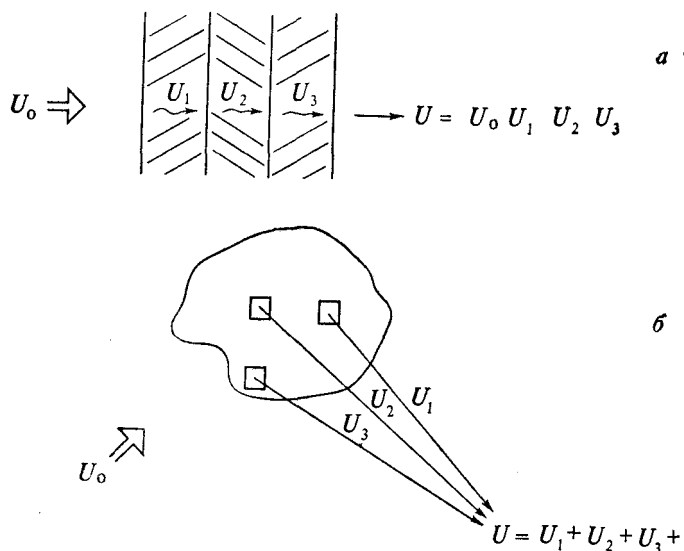


Рис. 6.6. Перемножение вкладов от всех слоев в задачах распространения в пределах прямой видимости (а) и сложение вкладов от различных участков среды в задачах рассеяния (б).

$u_f / \langle u \rangle$ мала по сравнению с единицей, то экспоненту можно разложить в ряд:

$$u = \langle u \rangle [1 + u_f / \langle u \rangle + \dots]. \quad (6.89)$$

Если в этом ряде мы удержим первые два члена, то придем к решению, соответствующему первому приближению теории многократного рассеяния (6.82).

6.7. Приближение Рытова для плоской волны

Рассмотрим комплексную фазу в выражении (6.88):

$$\psi = \chi + iS_1 = u_f(\mathbf{r}, t) / \langle u(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (6.90)$$

Для случая плоской волны мы используем выражение (6.8) для u_f :

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{i(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{z}})}{R_1} \exp \left[\left(ik - \frac{\rho \sigma_t}{2} \right) R_1 (1 - \cos \theta) \right] \rho dV. \quad (6.91)$$

Амплитуда рассеяния $f(\hat{0}, \hat{z})$, вообще говоря, комплексна и имеет вид $f(\hat{0}, \hat{z}) = |f| \exp(i\beta)$. Как было отмечено в (6.21), с увеличением размера частиц β стремится к $\pi/2$. Воспользовавшись также приближениями, сделанными в (6.12), запишем (6.91) в виде

$$\psi(r_1) = \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|}{R} \exp(i\delta_1 - \delta_2 + i\delta_3) \rho dV, \quad (6.92)$$

где $\delta_1 = kR(1 - \cos \theta) + \beta$, $\delta_2 = \frac{1}{2} \rho \sigma_t R(1 - \cos \theta)$, $\delta_3 = \frac{1}{2} kd \times \times \sin \theta \cos \phi$, $dV = R^2 dR \sin \theta d\theta d\phi$, $r_1 = (d/2, 0, L)$. Тогда флуктуации уровня и фазы можно представить в виде

$$\chi(r_1) = \frac{1}{2} [\psi(r_1) + \psi^*(r_1)], \quad S_1(r_1) = \frac{1}{2i} [\psi(r_1) - \psi^*(r_1)]. \quad (6.93)$$

Комплексно-сопряженная функция ψ^* равна

$$\psi^*(r_1) = \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|}{R} \exp(-i\delta_1 - \delta_2 - i\delta_3) \rho dV. \quad (6.94)$$

Введя переменную $\phi' = \pi + \phi$, ее можно переписать в форме, содержащей множитель $\exp(+i\delta_3)$:

$$\psi^*(r_1) = \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|}{R} \exp(-i\delta_1 - \delta_2 + i\delta_3) \rho dV. \quad (6.95)$$

Из формул (6.92) и (6.95) находим

$$\begin{aligned} \chi(r_1) &= \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|}{R} \cos \delta_1 \exp(-\delta_2 + i\delta_3) \rho dV, \\ S_1(r_1) &= \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|}{R} \sin \delta_1 \exp(-\delta_2 + i\delta_3) \rho dV. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Аналогично в точке $r_2 = (-d/2, 0, L)$ имеем

$$\begin{aligned} \chi(r_2) &= \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|}{R} \cos \delta_1 \exp(-\delta_2 - i\delta_3) \rho dV, \\ S_1(r_2) &= \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|}{R} \sin \delta_1 \exp(-\delta_2 - i\delta_3) \rho dV. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Следовательно, корреляционная функция флуктуаций уровня в точках r_1 и r_2 есть

$$\begin{aligned} B_\chi(r_1, r_2) &= B_\chi(d) = \langle \chi(r_1) \chi(r_2) \rangle = \\ &= \int_V \frac{|f(\hat{0}, \hat{z})|^2}{R^2} \cos^2 \delta_1 \exp(-2\delta_2 + i2\delta_3) \rho dV. \end{aligned} \quad (6.98)$$

После интегрирования по ϕ находим

$$B_x(d) = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta |f(\theta)|^2 g_x(L, \theta) J_0(kd \sin \theta), \quad (6.99)$$

где $g_x(L, \theta) = \int_0^{L/\cos \theta} \cos^2 \delta_1 \exp(-2\delta_2) dR$. Таким образом, мы пришли к общему выражению для корреляционной функции $B_x(d)$. Функцию $g_x(L, \theta)$ можно вычислить точно. Поскольку основной вклад во флуктуации дает область малых θ , разложим функцию $g_x(L, \theta)$ в ряд по θ . В результате получим приближенное выражение

$$g_x(L, \theta) = \frac{L}{2} \left[1 + \frac{\exp(-\gamma\theta^2/2) \sin(kL\theta^2 + 2\beta) - \sin 2\beta}{kL\theta^2} \right]. \quad (6.100)$$

Выясним смысл функции $g_x(L, \theta)$. Как видно из формулы (6.99), корреляционная функция получается перемножением под знаком интеграла индикатрисы рассеяния частицы $|f(\theta)|^2$ и функции $g_x(L, \theta)$. Это означает, что функция $g_x(L, \theta)$ вырезает некоторую часть углового распределения (углового спектра) рассеянной мощности. Поэтому ее можно назвать фильтрующей функцией по углам.

Из выражения (6.100) следует, что функция $g_x(L, \theta)$ при $\theta = 0$ равна $(L/2)(1 + \cos 2\beta)$, а при $\theta > (\lambda/L)^{1/2}$ она практически совпадает с $L/2$. Ширина индикатрисы рассеяния $|f(\theta)|^2$ примерно равна λ/D , где D — размер частицы. Поэтому если D намного меньше, чем радиус зоны Френеля $(\lambda L)^{1/2}$, то ширина индикатрисы рассеяния частицы λ/D велика по сравнению с $(\lambda/L)^{1/2}$, и следовательно, $g_x(L, \theta)$ в области углов от $\theta = 0$ до $\theta = (\lambda/L)^{1/2}$ мало влияет на флуктуации. В этом случае можно приближенно принять $g_x(L, \theta) \approx L/2$. В противоположном предельном случае, когда D велико по сравнению с радиусом зоны Френеля $(\lambda L)^{1/2}$, функцию g_x можно аппроксимировать выражением $(L/2)(1 + \cos 2\beta)$.

Рассмотрим часто встречающийся в приложениях случай, когда $D \ll (\lambda L)^{1/2}$. Тогда приближенно имеем

$$B_x(d) = \pi\rho L \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta |f(\theta)|^2 J_0(kd \sin \theta). \quad (6.101)$$

При малых по сравнению с длиной волны размерах частиц $|f(\theta)|^2$ приближенно можно заменить на $\sigma_s/4\pi$ и провести интегрирование [101]. В результате получим

$$B_x(d) = (\rho\sigma_s L/2) [(\sin kd)/kd]. \quad (6.102)$$

Отсюда видно, что радиус корреляции $d \approx \lambda$. Если размер частиц велик по сравнению с длиной волны, используем выражение

$$|f(\theta)|^2 = (\alpha_p \sigma_s / \pi) \exp(-\alpha_p \theta^2). \quad (6.103)$$

Тогда пределы интегрирования можно распространить на область от 0 до ∞ , что дает

$$B_\chi(d) = (\rho \sigma_s L / 2) \exp(-(kd)^2 / 4\alpha_p). \quad (6.104)$$

Отсюда следует, что радиус корреляции порядка размера частиц D .

Дисперсия $\langle \chi^2 \rangle$ флуктуаций уровня определяется выражением

$$\langle \chi^2 \rangle = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta |f(\theta)|^2 g_\chi(L, \theta). \quad (6.105)$$

Как следует из формул (6.102) и (6.104), при $D \ll (\lambda L)^{1/2}$ приближенно находим

$$\langle \chi^2 \rangle = \rho \sigma_s L / 2. \quad (6.106)$$

Полезно выяснить смысл формулы (6.106). Для этого рассмотрим интенсивность $I = \langle |u|^2 \rangle$. Из выражений (6.88) и (6.90) получаем

$$I = \langle |u| \rangle^2 \langle \exp 2\chi \rangle = \exp(-\rho \sigma_t L) \langle \exp 2\chi \rangle. \quad (6.107)$$

Среднее значение $\langle \exp 2\chi \rangle$ связано с дисперсией $\langle \chi^2 \rangle$. Если предположить, что уровень χ имеет нормальное распределение, то получим

$$\langle \exp 2\chi \rangle = \exp[2\langle \chi \rangle + 2\langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle]. \quad (6.108)$$

Поскольку $\langle u_f \rangle = \langle \chi \rangle + i\langle S_1 \rangle = 0$, имеем

$$I = \exp(-\rho \sigma_t L) \exp(2\langle \chi^2 \rangle) = \exp(-\rho \sigma_t L + \rho \sigma_s L) = \exp(-\rho \sigma_a L). \quad (6.109)$$

Заметим, что выражение (6.26), отвечающее первому приближению теории многократного рассеяния, соответствует первому члену разложения (6.4). С другой стороны, приближение Рытова (6.109) приводит к формулам (6.3) и (6.4) и потому его можно считать более точным, чем первое приближение теории многократного рассеяния.

Заметим, что здесь мы пользовались приближенной формулой (6.106). Чтобы найти более точное решение, следует исходить из формулы (6.105). Укажем также, что формула (6.109) основана на предположении о нормальном распределении флуктуаций логарифма амплитуды. Имеется довольно много экспе-

риментальных и теоретических подтверждений этого предположения, поэтому его можно считать вполне оправданным.

Рассмотрим теперь фазовые флуктуации. Корреляционная функция B_s определяется выражением

$$B_s(d) = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta |f(\theta)|^2 g_s(L, \theta) J_0(kd \sin\theta), \quad (6.110)$$

где $g_s(L, \theta) = \int_0^{L/\cos\theta} \sin^2\delta_1 \exp(-2\delta_2) dR$. Фильтрующая функция по углам $g_s(L, \theta)$ для фазы при $\theta = 0$ равна $(L/2)(1 - \cos 2\beta)$, а при $\theta > (\lambda/L)^{1/2}$ практически совпадает с $L/2$. Мы не даем здесь детального анализа фазовых флуктуаций. Укажем лишь, что при $D \ll (\lambda L)^{1/2}$ флуктуации фазы и уровня примерно равны:

$$B_s(d) \approx B_\chi(d), \quad \langle S_1^2 \rangle \approx \langle \chi^2 \rangle. \quad (6.111)$$

6.8. Временная корреляция и частотные спектры флуктуаций уровня и фазы плоской волны

Временная корреляционная функция $B_\chi(\tau)$ флуктуаций уровня в точке $\mathbf{r} = (0, 0, L)$ в два различных момента времени t_1 и t_2 получается из формулы (6.98), если положить в ней $\delta_3 = 0$ и заменить $|f|^2$ выражением (6.27) для $f_1 f_2^*$ с учетом движения частиц:

$$B_\chi(\tau) = \int_V \frac{f_1 f_2^*}{R^2} \cos^2\delta_1 \exp(-2\delta_2) \rho dV. \quad (6.112)$$

Если флуктуационная скорость $\mathbf{V}_f$ пренебрежимо мала по сравнению со средней скоростью $\mathbf{U}$, то, следуя процедуре, использованной при получении формулы (6.29), находим

$$B_\chi(\tau) = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta |f(\theta)|^2 g_\chi(L, \theta) J_0(kU_t\tau \sin\theta) \times \\ \times \exp[ikU_z\tau(1 - \cos\theta)], \quad (6.113)$$

где U_t — поперечная составляющая $\mathbf{U}$ и U_z — составляющая вдоль оси z .

В частном случае $U_z = 0$ и $D \ll (\lambda L)^{1/2}$ имеем

$$B_\chi(\tau) = \begin{cases} \frac{\rho\sigma_s L}{2} \frac{\sin(kU_t\tau)}{kU_t\tau} & \text{при } D \ll \lambda, \\ \frac{\rho\sigma_s L}{2} \exp\left[-\frac{(kU_t\tau)^2}{4\alpha}\right] & \text{при } D \gg \lambda. \end{cases} \quad (6.114)$$

Частотные спектры для этих двух случаев находятся путем преобразования Фурье:

$$W_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (6.115)$$

При $D \ll \lambda$ получаем [60]

$$W_x(\omega) = \begin{cases} 2\rho\sigma_s L/kU_t & \text{при } \omega < |kU_t|, \\ 0 & \text{при } \omega > |kU_t|. \end{cases} \quad (6.116)$$

При $D \gg \lambda$ находим

$$W_x(\omega) = (2\rho\sigma_s L) \left[\frac{\pi\alpha_p}{(kU_t)^2} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\alpha_p \omega^2}{(kU_t)^2} \right]. \quad (6.117)$$

Резкий скачок в (6.116) связан, конечно, с приближением, использованным при нахождении $B_x(\tau)$; более точный расчет должен давать плавный переход. Во всяком случае, ширина спектра приблизительно равна $|U_t|/\lambda$ при $D \ll \lambda$ и $|U_t|/D$ при $D \gg \lambda$.

В полученных формулах нетрудно учесть распределение частиц по размерам $n(D)$. Так, при $D \ll \lambda$ имеем

$$W_x(\omega) = \int_{D_0}^{\infty} \frac{2n(D)\sigma_s(D)L}{kU_t(D)} dD, \quad (6.118)$$

где D_0 определяется из условия $\omega = kU(D_0)$. При $D \gg \lambda$ находим

$$W_x(\omega) = \int_0^{\infty} 2n(D)\sigma_s(D)L \left\{ \frac{\pi\alpha_p(D)}{[kU_t(D)]^2} \right\}^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_p(D)\omega^2}{[kU_t(D)]^2} \right\} dD. \quad (6.119)$$

В качестве примера рассмотрим флуктуации в оптическом пучке, распространяющемся в дожде. Как видно из рис. 3.5, вода практически не поглощает в видимом диапазоне, а размеры частиц дождя велики по сравнению с длиной волны. Поэтому приближенно можно считать, что полное сечение σ_t и сечение рассеяния σ_s равны $\sigma_t \approx \sigma_s \approx 2\pi a^2$. Кроме того, в соответствии с (3.6) установившаяся скорость $U_t(D)$ дождевой капли радиуса $a = D/2$ приблизительно равна $200,8a^{1/2}$ м/с. Воспользуемся также формулой $\alpha_p = 2,77/(1,02\lambda/D)^2$. Распределение частиц по размерам аппроксимируем распределением Маршалла — Палмера (3.2) $n(a) = n_0 \exp(-\alpha a)$, где $n_0 = 8 \cdot 10^6 \text{ м}^{-4}$, $\alpha = 8200 \rho^{-0,21} \text{ м}^{-1}$, а ρ — интенсивность дождя в миллиметрах в час. Подставляя эти значения в (6.119), получаем

$$W_x(\omega) = 4\pi L (\pi A)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{(\alpha + A\omega^2)^{7/2}}, \quad (6.120)$$

где $\alpha_p/(kU_t)^2 = Aa$ и $A = 6,7 \cdot 10^{-6}$. При интенсивности дождя ρ порядка 1 мм/ч спектр $W_x(\omega)$ при $\omega = [(0,2\alpha)/A]^{1/2}$ спадает в два раза по сравнению с его значением в точке $\omega = 0$. Это соответствует примерно 2,5 кГц.

6.9. Приближение Рытова с учетом направленных свойств излучателя и приемника

Рассмотрим задачу о распространении в пределах прямой видимости между излучателем, расположенным в начале координат (0, 0, 0), и приемником, расположенным в точке (0, 0, L) (рис. 6.5). Среднее напряжение $\langle V \rangle$ на выходе приемника, которое пропорционально когерентному полю $\langle u(\mathbf{r}, t) \rangle$, определяется выражением

$$\langle V(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\lambda g_t(\hat{\mathbf{z}}) g_r(\hat{\mathbf{z}})}{4\pi L} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} + ikL\right), \quad (6.121)$$

где $g_t(\hat{\mathbf{z}})$ и $g_r(\hat{\mathbf{z}})$ — диаграммы направленности по полю излучателя и приемника, а γ — оптический путь, определяемый формулой (6.8). Заметим, что $|g_t|^2$ и $|g_r|^2$ — диаграммы направленности по мощности G_t и G_r , а $|\langle V \rangle|^2$ — когерентная мощность, даваемая формулой (6.7):

$$|\langle V \rangle|^2 = \frac{P_c}{P_t} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \frac{G_t(\hat{\mathbf{z}}) G_r(\hat{\mathbf{z}})}{L^2} e^{-\gamma}. \quad (6.122)$$

Флуктуации выходного напряжения V_f пропорциональны флуктуационному полю u_f и равны

$$V_f(t) = \int_V \frac{\lambda g_t(\hat{\mathbf{i}}) g_r(\hat{\mathbf{o}})}{4\pi R_1 R_2} \rho f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, t') \times \\ \times \exp\left[-\frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2} + ik(R_1 + R_2)\right] dV, \quad (6.123)$$

где $f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, t')$ — амплитуда рассеяния частицы, расположенной в точке $\mathbf{r}'$, в момент времени $t - R_2/c$ (рис. 6.5). Из формул (6.123) и (6.121) находим комплексную фазу

$$\psi(t) = \int_V \frac{\lambda g_{tn}(\hat{\mathbf{i}}) g_{rn}(\hat{\mathbf{o}}) \rho f(\hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{i}}, t')}{R_1 R_2} \exp(\eta) dV, \\ \eta = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma}{2} + ik(R_1 + R_2 - L), \quad (6.124)$$

$$g_{tn}(\hat{\mathbf{i}}) = \frac{g_t(\hat{\mathbf{i}})}{g_t(\hat{\mathbf{z}})}, \quad g_{rn}(\hat{\mathbf{o}}) = \frac{g_r(\hat{\mathbf{o}})}{g_r(\hat{\mathbf{z}})}.$$

Выражение (6.124) можно упростить, если использовать приближения (6.52) и (6.56). Поскольку $g_{tn}(\hat{\mathbf{i}})$ и $g_{rn}(\hat{\mathbf{0}})$ — нормированные диаграммы направленности, имеем

$$g_{tn}(\hat{\mathbf{i}}) = \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\alpha_t\right)\theta_t^2\right], \quad g_{rn}(\hat{\mathbf{0}}) = \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\alpha_r\right)\theta_r^2\right], \quad (6.125)$$

где предполагается, что фазы этих диаграмм постоянны. Кроме того,

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma = \frac{(L - z')^2}{2z'^2} \int_0^{z'} \rho \sigma_t dz + \frac{1}{2} \int_{z'}^L \rho \sigma_t dz, \quad (6.126)$$

$$R_1 + R_2 - L = \frac{L(L - z')}{2z'} \theta_r^2.$$

Амплитуда рассеяния $f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}})$ для неподвижных рассеивателей может быть записана в виде

$$f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}) = \sqrt{\frac{\alpha_p \sigma_s}{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha_p}{2} \theta_p^2 + i\beta\right), \quad (6.127)$$

где β — фаза, а амплитуда выбрана таким образом, что

$$\int_{4\pi} |f|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\infty \theta_p d\theta_p |f|^2 = \sigma_s. \quad (6.128)$$

Фаза β меняется от нуля для частиц, малых по сравнению с длиной волны, до $\pi/2$ для частиц, больших по сравнению с длиной волны [162]¹⁾. Рассматривая поведение f вблизи $\theta_p = 0$, приближенно получаем

$$\alpha_p \approx 2,66 (D/\lambda)^2. \quad (6.129)$$

В случае движущихся частиц из (6.53) находим

$$f(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, t_1) f^*(\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{i}}, t_2) = \frac{\alpha_p \sigma_s}{\pi} \exp\left[-\left(\alpha_p + \frac{k^2 \sigma_i^2 \tau^2}{2}\right) \theta_p^2 + ikU\tau\right], \quad (6.130)$$

где $\tau = t_1' - t_2' \approx t_1 - t_2$.

Подставляя формулы (6.125)–(6.127) и (6.130) в (6.124), можно найти флуктуации уровня χ и фазы S_1 . Детального анализа мы здесь не проводим, поскольку он совершенно аналогичен случаю плоской волны. Следует отметить, что подобно тому, как обсуждалось в разд. 6.4, существенное влияние на флуктуации могут оказывать направленные свойства излучателя и приемника.

¹⁾ Заметим, что $f = iS^*/k$, и учтем выражение (6.21).

II Теория переноса излучения в случайном облаке рассеивателей

Глава 7

Теория переноса излучения в случайном облаке частиц

В гл. 4—6 мы обсудили характеристики рассеяния и распространения монохроматических и импульсных волн в разреженном облаке частиц. В этом случае можно было использовать либо приближение однократного рассеяния, либо первое приближение теории многократного рассеяния, либо приближение Рытова. Эти приближения становятся неприменимыми при увеличении плотности числа частиц, когда когерентная интенсивность становится сравнимой с некогерентной интенсивностью или меньше нее. В этих условиях доминирующую роль в определении флуктуационных характеристик волны начинают играть эффекты многократного рассеяния. Исторически в теории многократного рассеяния были развиты два различных подхода. Один из них можно назвать строгой, или аналитической теорией, а другой — теорией переноса.

В строгой теории (см. ссылки на литературу в гл. 14 и 15) исходят из основных дифференциальных уравнений — уравнений Максвелла или волнового уравнения, вводят характеристики рассеяния и поглощения частиц и получают соответствующие дифференциальные или интегральные уравнения для таких статистических величин, как дисперсии и корреляционные функции. Такой подход является математически строгим в том смысле, что при этом в принципе можно учесть как эффекты многократного рассеяния, так и влияние дифракции и интерференции. Однако построить теорию, которая полностью учитывала бы все эти эффекты, практически невозможно, поэтому все теории, дающие приемлемые решения, являются приближенными и справедливы лишь в определенной области значений параметров. Теория Тверского, диаграммный метод и уравнения Дайсона и Бете —

Солпитера представляют собой разновидности строгой теории. Мы опишем эти теории в гл. 14 и 15.

С другой стороны, теория переноса [31, 105, 122, 148] не исходит из волнового уравнения. Эта теория оперирует непосредственно с переносом энергии в среде, содержащей частицы. Такая теория строится эвристически и не является строгой в математическом отношении. Даже если эффекты дифракции и интерференции и учитываются при описании характеристик рассеяния и поглощения одиночной частицы, теория переноса сама по себе не включает дифракционных эффектов. В теории переноса предполагается, что при сложении полей отсутствует корреляция между ними, так что складываются интенсивности, а не сами поля.

Теория переноса, называемая также теорией переноса излучения, берет свое начало с работы Шустера 1903 г. Основное дифференциальное уравнение этой теории называется уравнением переноса и эквивалентно уравнению Больцмана (называемому также уравнением Максвелла — Больцмана со столкновениями), используемому в кинетической теории газов [149] и в теории переноса нейтронов¹⁾. Такая формулировка является гибкой и способна описывать многие физические явления. Она с успехом применялась в задачах атмосферной и подводной видимости, морской биологии, оптики бумаг и фотографических эмульсий, а также при анализе распространения излучения в атмосферах планет, звезд и галактик.

Несмотря на различие исходных предпосылок этих двух подходов, они имеют дело с одними и теми же явлениями, поэтому можно ожидать наличия некоторой фундаментальной связи между ними. Такая связь действительно имеет место, и мы покажем ниже, что лучевая интенсивность, используемая в теории переноса, и функция взаимной когерентности, используемая в строгой теории, связаны преобразованием Фурье. Это означает также, что, хотя теория переноса строится на основе сложения интенсивностей, она содержит информацию о корреляции полей [71, 72].

В теории переноса можно учесть поляризационные эффекты, введя матрицу Стокса. Однако в большинстве случаев из соображений математического удобства поляризацией пренебрегают. В этой главе всюду, за исключением разд. 7.7, поляризационные эффекты не рассматриваются. Об этом нужно помнить, в особенности при интерпретации экспериментальных данных.

В данной главе мы дадим определения важных величин и поясним их свойства для свободного пространства, а также одно-

¹⁾ Благодаря этой эквивалентности теория переноса нейтронов непосредственно применима к теории переноса излучения. По теории переноса нейтронов см. работы [11, 29, 40, 168].

родных и неоднородных сред, содержащих частицы. Затем мы выведем основное дифференциальное уравнение, называемое уравнением переноса для интенсивности в случайном облаке рассеивателей, обсудим закон сохранения энергии в такой среде и поясним граничные условия. Мы выведем также общие интегральные уравнения и дадим их физическую интерпретацию. Анализ частично поляризованных волн на основе уравнения переноса осуществляется путем введения параметров Стокса. В последнем разделе мы рассмотрим связь лучевой интенсивности в теории переноса с вектором Пойнтинга в теории Максвелла.

7.1. Лучевая интенсивность, поток и плотность энергии

Начнем с определений основных величин, используемых в теории переноса. К ним относятся лучевая интенсивность, поток, плотность энергии и средняя интенсивность. Наиболее важной является лучевая интенсивность.

Рассмотрим поток волновой энергии в точке $\mathbf{r}$ в хаотически-неоднородной среде. Частота, фаза и амплитуда волны случайно меняются во времени, поэтому величина и направление связанной с ними плотности потока также непрерывно меняются. Для данного направления, определяемого единичным вектором $\hat{\mathbf{s}}$, можно записать среднюю плотность потока энергии, заключенную в единичном интервале частот вблизи частоты ν и в единичном телесном угле. Эта величина $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ называется лучевой интенсивностью, а также яркостью или энергетической яркостью, и измеряется в единицах $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{стерад}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$. Она является одной из фундаментальных величин в теории переноса излучения. Связь лучевой интенсивности с вектором Пойнтинга и функцией взаимной когерентности рассматривается в разд. 7.8 и 14.7.

Мощность dP , протекающая в единичный телесный угол $d\omega$ через элемент поверхности da , ориентированный в направлении единичного вектора $\hat{\mathbf{s}}_0$ в частотном интервале $(\nu, \nu + d\nu)$, дается выражением (рис. 7.1)

$$dP = I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \cos \theta da d\omega d\nu \quad (\text{Вт}). \quad (7.1)$$

Лучевая интенсивность описывает характеристики поля, излучаемого поверхностью (рис. 7.2, а). Однако можно также выбрать точку $\mathbf{r}$ на воображаемой поверхности A в пространстве и рассматривать поток мощности $I_- da d\omega d\nu$, падающий на элемент поверхности da . Этот поток должен быть равен потоку $I_+ da d\omega d\nu$, исходящему из элемента da в противоположном на-

правления $\hat{s}$ (рис. 7.2, б). Аналогично мы можем рассмотреть поток, падающий на поверхность извне (рис. 7.2, в).

Лучевая интенсивность $I_+(\mathbf{r}, \hat{s})$ описывает излучение, испускаемое поверхностью, независимо от того, является ли эта по-

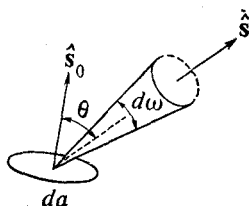


Рис. 7.1. К определению лучевой интенсивности $I(\mathbf{r}, \hat{s})$ и мощности dP согласно (7.1).

верхность действительно излучающей или воображаемой, и называется поверхностной интенсивностью. Интенсивность излучения $I_-(\mathbf{r}, \hat{s})$, падающая на поверхность, которая может быть

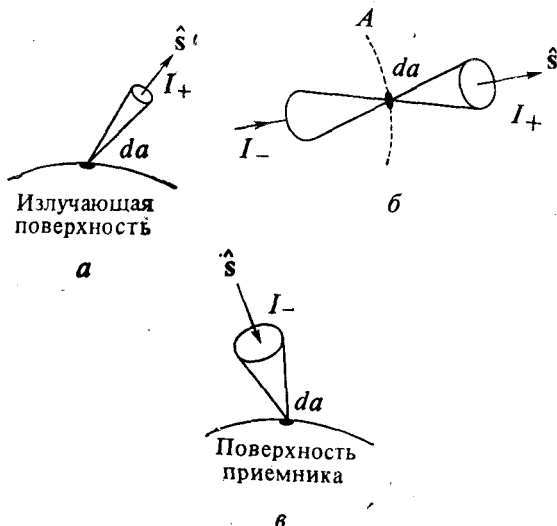


Рис. 7.2. Поверхностная интенсивность I_+ и интенсивность поля I_- .

как реальной, так и воображаемой, называется интенсивностью поля. Эти две величины представляют различные понятия, но численно они тождественны, поэтому нет необходимости различать их математически.

Измерение лучевой интенсивности в точке $\mathbf{r}$ в направлении $\hat{s}$ можно осуществить следующим образом. Возьмем приемник с малой апертурой Δa , принимающий излучение из телесного угла $\Delta\omega$, и ориентируем его в направлении $-\hat{s}$ (рис. 7.3). Пусть фильтр приемника пропускает волны в частотном диапазоне

($\nu, \nu + d\nu$). Тогда лучевая интенсивность будет равна принятой мощности P_r , деленной на $\Delta a \Delta\omega \Delta\nu$, где Δa , $\Delta\omega$ и $\Delta\nu$ выбираются достаточно малыми.

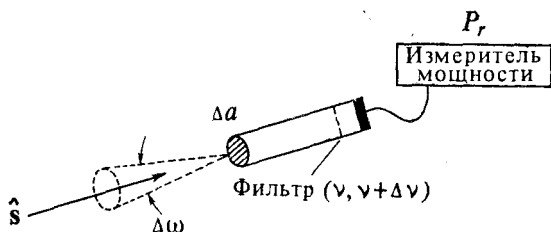


Рис. 7.3. Измерение лучевой интенсивности.

Рассмотрим полный поток, проходящий через элемент da на поверхности A . Пусть $\hat{s}_0$ — единичный вектор, нормальный к поверхности da (рис. 7.4). Тогда поток получается в результате интегрирования (7.1) по телесному углу 2π в направлении вперед ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) и может быть записан как $F_+ da$, где

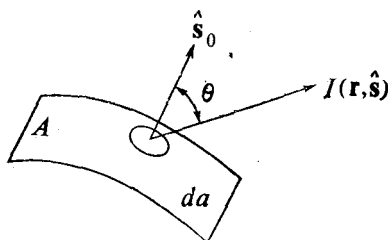


Рис. 7.4. Поток через элемент da поверхности A .

F_+ — плотность потока, распространяющегося вперед, определяемая выражением

$$F_+(\mathbf{r}, \hat{s}_0) = \int_{(2\pi)^+} I(\mathbf{r}, \hat{s}) \hat{s} \cdot \hat{s}_0 d\omega, \quad \hat{s} \cdot \hat{s}_0 = \cos \theta. \quad (7.2)$$

Аналогично можно определить плотность потока в обратном направлении F_- для потока, протекающего через da в направлении $-\hat{s}_0$. Такая плотность дается выражением

$$F_-(\mathbf{r}, \hat{s}_0) = \int_{(2\pi)^-} I(\mathbf{r}, \hat{s}) \hat{s} \cdot (-\hat{s}_0) d\omega, \quad (7.3)$$

где интегрирование по телесному углу 2π проводится в интервале $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. Как F_+ , так и F_- измеряются в единицах

Вт·м⁻²·Гц. Для излучающих поверхностей плотность потока F_+ часто называют энергетической светимостью (рис. 7.5, а). В случае падения излучения на поверхность поток F_- называют освещенностью. В произвольной точке $\mathbf{r}$ можно рассматривать плотность потока F_+ в направлении $\hat{\mathbf{s}}_0$, перпендикулярном некоторой воображаемой поверхности A , и плотность потока F_- в направлении $-\hat{\mathbf{s}}_0$ (рис. 7.5, в). Полная плотность потока в направлении $\hat{\mathbf{s}}_0$ есть векторная сумма F_+ и F_- .



Рис. 7.5. Энергетическая светимость F_+ и освещенность F_- .

Полную плотность потока можно выразить как компоненту вектора плотности потока $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ вдоль $\hat{\mathbf{s}}_0$:

$$F_+(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}_0) - F_-(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega, \quad (7.4)$$

где интегрирование проводится по полному телесному углу 4π . Вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ дает величину и направление полного потока мощности. Он используется в разд. 7.3 в связи с законом сохранения энергии.

Рассмотрим плотность энергии $u(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$. Количество энергии, покидающее за единицу времени dt малый элемент поверхности da по нормали к нему в телесном угле $d\omega$ и частотном интервале $(\nu, \nu + d\nu)$, равно $I da d\omega d\nu dt$. Эта энергия займет объем $da c dt$, где c — скорость распространения волн. Поэтому плотность энергии $du(\mathbf{r})$ в единичном интервале частот равна

$$du(\mathbf{r}) = \frac{I da d\omega d\nu dt}{da c dt d\nu} = \frac{I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega}{c}. \quad (7.5)$$

Складывая энергию, приходящую со всех направлений, получаем плотность энергии

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega. \quad (7.6)$$

В некоторых случаях удобно рассматривать среднюю интенсивность

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega. \quad (7.7)$$

Средняя интенсивность, вообще говоря, не представляет собой поток мощности; она пропорциональна плотности энергии.

Если лучевая интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ не зависит от направления $\hat{\mathbf{s}}$, то излучение называют изотропным. Если лучевая интенсивность излучения от элемента поверхности da изотропна, то мощность P , излученная этим элементом в направлении $\mathbf{s}$, дается выражением

$$P (\text{Вт} \cdot \text{стерад}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}) = (I da) \cos \theta = P_0 \cos \theta, \quad (7.8)$$

где θ — угол между направлением $\hat{\mathbf{s}}$ и нормалью к поверхности da . Соотношение (7.8) называют законом Ламберта [21].

7.2. Лучевая интенсивность в свободном пространстве и на границах раздела однородных сред

Хотя мы рассматриваем распространение волн в случайно-неоднородных средах, тем не менее полезно исследовать поведение введенных в предыдущем разделе величин в свободном пространстве и в однородной среде. Прежде всего мы покажем, что лучевая интенсивность в свободном пространстве постоянна вдоль луча. На первый взгляд это утверждение противоречит обычному представлению о потоке мощности, распространяющемся в свободном пространстве, но на самом деле оно вполне естественно. Докажем это.

Рассмотрим лучевые интенсивности I_1 и I_2 в двух точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, разделенных расстоянием r вдоль направления $\hat{\mathbf{s}}$, и два малых элемента поверхности da_1 и da_2 , перпендикулярные $\hat{\mathbf{s}}$ (рис. 7.6). Выразим двумя способами мощность, падающую на da_2 . Согласно (7.1), эта мощность равна $I_1 da_1 d\omega_1$. С другой стороны, она должна быть равна $I_2 da_2 d\omega_2$. Но $da_1 d\omega_1 = da_2 d\omega_2$, поскольку $da_1 = r^2 d\omega_2$ и $da_2 = r^2 d\omega_1$, что и доказывает постоянство лучевой интенсивности вдоль луча в свободном пространстве. (Более удовлетворительное доказательство см. в разд. 14.7.)

В качестве примера рассмотрим излучение, исходящее в окружающее пространство от сферы радиуса a (рис. 7.7). Предположим, что излучение с поверхности сферы не зависит от направления, т. е. при $r = a$ $I(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = I_0 = \text{const}$, где вектор $\mathbf{s}$ направлен в произвольном направлении наружу, и $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = 0$ при

$\hat{s}$, направленном внутрь сферы. Вычислим лучевую интенсивность на расстоянии r от центра сферы. Вследствие постоянства лучевой интенсивности в свободном пространстве имеем $I(r, \hat{s}) = I_0$ при углах $0 \leq \theta \leq \theta_0$, где $\theta_0 = \arcsin \frac{a}{r}$. Плотность по-

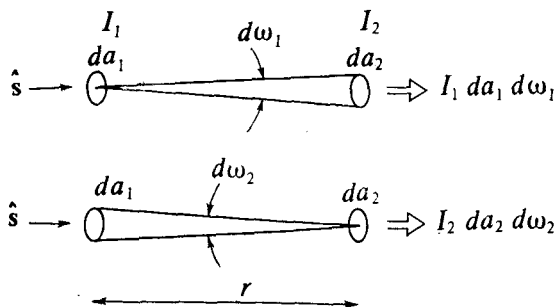


Рис. 7.6. Доказательство инвариантности лучевой интенсивности в свободном пространстве.

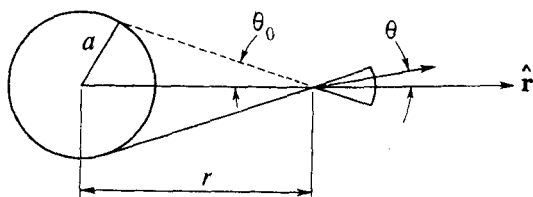


Рис. 7.7. Излучение сферы.

тока в радиальном направлении дается выражением

$$F_r(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \int I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{r}} d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta I_0 \cos \theta = \pi I_0 \left(\frac{a}{r} \right)^2. \quad (7.9)$$

Заметим, что, хотя величина I постоянна, $F_r(\mathbf{r})$ уменьшается как r^{-2} , что и следовало ожидать на основании закона сохранения энергии. Полная излучаемая мощность равна

$$P_t = F_r 4\pi r^2 = 4\pi^2 a^2 I_0 \quad (7.10)$$

и, конечно, не зависит от расстояния r . Плотность энергии $u(\mathbf{r})$ дается выражением

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta I_0 = \frac{2\pi I_0}{c} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2} \right]; \quad (7.11)$$

средняя интенсивность равна

$$U(r) = \frac{I_0}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2} \right]. \quad (7.12)$$

Рассмотрим теперь условие, которому должна удовлетворять лучевая интенсивность на границе раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 7.8).

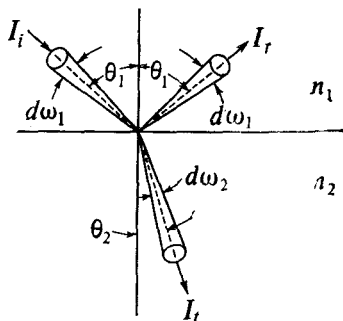


Рис. 7.8. Лучевые интенсивности на плоской границе двух однородных сред.

Для плоской волны, падающей на плоскую границу, коэффициент отражения $R = E_r/E_i$ и коэффициент пропускания $T = E_t/E_i$ даются выражениями

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1}, & T_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \\ R_{\perp} &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, & T_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где $R_{\parallel}$ и $T_{\parallel}$ соответствуют электрическим полям, поляризованным в плоскости падения, а $R_{\perp}$ и $T_{\perp}$ — электрическим полям, поляризованным перпендикулярно плоскости падения.

Очевидно, что отраженная лучевая интенсивность I_r связана с I_i соотношением

$$I_r = |R|^2 I_i, \quad (7.14)$$

где R есть либо $R_{\parallel}$, либо $R_{\perp}$, в зависимости от поляризации. Если волна не поляризована, то $|R|^2$ переходит в $\frac{1}{2}(|R_{\parallel}|^2 + |R_{\perp}|^2)$.

Теперь нужно определить, чему равно отношение I_t/I_i . Из рис. 7.8 видно, что для того, чтобы связать I_t и I_i , нужно учесть связь $d\omega_1$ и $d\omega_2$. Поток мощности, падающий на малый элемент поверхности da на границе раздела, должен быть равен сумме отраженного и прошедшего потоков:

$$I_i da \cos \theta_1 d\omega_1 = I_r da \cos \theta_1 d\omega_1 + I_t da \cos \theta_2 d\omega_2. \quad (7.15)$$

Заметим, что $d\omega_1 = \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$ и $d\omega_2 = \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2$. Из закона Снеллиуса $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ получаем $n_1 \cos \theta_1 d\theta_1 = n_2 \cos \theta_2 d\theta_2$ и, замечая, что $d\varphi_1 = d\varphi_2$, находим

$$\frac{I_i}{n_1^2} = \frac{I_r}{n_1^2} + \frac{I_t}{n_2^2}. \quad (7.16)$$

Мы можем выразить соотношение между I_t и I_i , используя коэффициент пропускания по мощности T_p и коэффициент от-

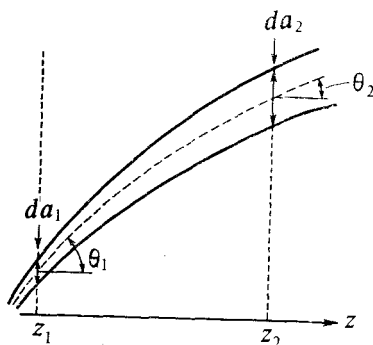


Рис. 7.9. Лучевые интенсивности I_1 и I_2 в двух точках на луче.

ражения по мощности R_p , которые определены как отношения прошедшей и отраженной мощностей к мощности, падающей по нормали к поверхности:

$$T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} |T|^2, \quad R_p = |R|^2, \quad R_p + T_p = 1. \quad (7.17)$$

Из (7.14), (7.16) и (7.17) имеем

$$I_t = \frac{n_2^2}{n_1^2} (1 - R_p) I_i = \frac{n_2^2}{n_1^2} T_p I_i = \frac{n_2^3 \cos \theta_2}{n_1^3 \cos \theta_1} |T|^2 I_i. \quad (7.18)$$

В (7.18) величина $|T|^2$ равна $|T_{\parallel}|^2$ или $|T_{\perp}|^2$ в зависимости от поляризации или равна $\frac{1}{2} (|T_{\parallel}|^2 + |T_{\perp}|^2)$ для неполяризованной волны.

Если показатель преломления медленно меняется вдоль одной из координат: $n(\mathbf{r}) = n(z)$, то отношение лучевых интенсивностей в двух точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ вдоль луча может быть получено обобщением (7.15) и (7.16):

$$I_2 = I_1 \frac{da_1 \cos \theta_1 d\omega_1}{da_2 \cos \theta_2 d\omega_2} = I_1 \frac{n_2^2}{n_1^2}, \quad (7.19)$$

где da_1 и da_2 — поперечные сечения трубки лучей в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, перпендикулярные оси z (рис. 7.9).

7.3. Дифференциальное уравнение для лучевой интенсивности

В предыдущем разделе мы определили лучевую интенсивность и другие фундаментальные величины. Мы рассмотрели также характеристики лучевой интенсивности в свободном пространстве и на границе двух однородных сред. В данном разделе мы изучим основные характеристики лучевой интенсивности в среде, содержащей случайные частицы. Такие частицы рассеивают и поглощают энергию волны, и эти характеристики должны учитываться в дифференциальном уравнении, которому удовле-

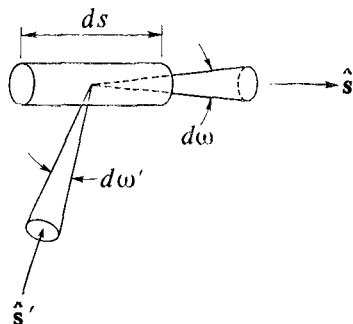


Рис. 7.10. Расстояние лучевой интенсивности, падающей на объем ds , с направления $\hat{s}'$ на направление $\hat{s}$.

творяет лучевая интенсивность. В теории переноса излучения это уравнение называют уравнением переноса. Оно тождественно уравнению Больцмана, используемому в теории переноса нейтронов.

Рассмотрим лучевую интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{s})$, падающую на цилиндрический элементарный объем с единичным поперечным сечением и длиной ds . Объем ds содержит ρds частиц, где ρ — число частиц в единице объема, называемое плотностью числа частиц. Каждая частица поглощает мощность $\sigma_a I$ и рассеивает мощность $\sigma_s I$, поэтому уменьшение лучевой интенсивности $dI(\mathbf{r}, \hat{s})$ в объеме ds выражается в виде

$$dI(\mathbf{r}, \hat{s}) = -\rho ds (\sigma_a + \sigma_s) I = -\rho ds \sigma_t I. \quad (7.20)$$

В то же время лучевая интенсивность должна возрасти вследствие рассеяния в направлении $\hat{s}$ части лучевой интенсивности $I(\mathbf{r}, \hat{s})$, падающей на данный объем с других направлений $\hat{s}'$ и добавляющейся к интенсивности $I(\mathbf{r}, \hat{s})$ (рис. 7.10). Чтобы определить этот вклад, рассмотрим волну, которая падает на частицу в направлении $\hat{s}'$. Плотность падающего в малом телесном угле $d\omega'$ потока $S_i = I(\mathbf{r}, \hat{s}') d\omega'$. Этот поток падает на частицы

в объеме ds . Плотность потока мощности S_r для волны, рассеянной единичной частицей в направлении $\hat{s}$ на расстоянии R от частицы, дается выражением $S_r = [|f(\hat{s}, \hat{s}')|^2 / R^2] S_i$, где $f(\hat{s}, \hat{s}')$ — амплитуда рассеяния, определенная в разд. 2.1. Поэтому обусловленная S_i лучевая интенсивность рассеянной в направлении $\hat{s}$ волны равна

$$S_r R^2 = |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2 S_i = |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2 I(\mathbf{r}, \hat{s}') d\omega'.$$

Добавив падающий поток со всех направлений $\hat{s}'$, для лучевой интенсивности, рассеянной в направлении $\hat{s}$ частицами из объема ds , получим

$$\int_{4\pi} p ds |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2 I(\mathbf{r}, \hat{s}') d\omega', \quad (7.21)$$

где интегрирование выполняется по всем телесным углам ω' , чтобы учесть вклады со всех направлений $\hat{s}'$. Мы можем выразить (7.21), используя фазовую функцию¹⁾ $p(\hat{s}, \hat{s}')$:

$$p(\hat{s}, \hat{s}') = \frac{4\pi}{\sigma_t} |f(\hat{s}, \hat{s}')|^2, \quad \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{s}, \hat{s}') d\omega = W_0 = \frac{\sigma_s}{\sigma_t}, \quad (7.22)$$

где W_0 — альбеда одиночной частицы.

Лучевая интенсивность может возрастать также вследствие излучения из объема ds . Если обозначить через $\epsilon(\mathbf{r}, \hat{s})$ мощность излучения единицы объема в единичный телесный угол в направлении $\hat{s}$, то указанное увеличение интенсивности выразится как

$$ds \epsilon(\mathbf{r}, \hat{s}). \quad (7.23)$$

Объединяя вклады (7.20), (7.21) и (7.23), получаем уравнение переноса:

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \hat{s})}{ds} = -\rho \sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{s}) + \frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{s}, \hat{s}') I(\mathbf{r}, \hat{s}') d\omega' + \epsilon(\mathbf{r}, \hat{s}). \quad (7.24)$$

Левую часть этого уравнения можно выразить также с помощью оператора градиента или дивергенции:

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \hat{s})}{ds} = \hat{s} \nabla I(\mathbf{r}, \hat{s}) = \text{div} [I(\mathbf{r}, \hat{s}) \hat{s}], \quad (7.25)$$

где мы воспользовались тем, что $\hat{s}$ — постоянный вектор, так что $\text{div} \hat{s} = 0$.

¹⁾ Название «фазовая функция» берет свое начало в астрономии, где оно относится к лунным фазам. Оно не имеет никакого отношения к фазе волны. См. разд. 2.1, а также [162].

В этом уравнении размеры частиц, а также плотность числа частиц могут быть различны в разных точках, поэтому $\rho\sigma_t$ и ρ могут быть функциями r . Расстояние иногда удобно выражать через безразмерный оптический путь τ , определенный как ¹⁾

$$\tau = \int \rho\sigma_t ds. \quad (7.26)$$

Оптический путь $\tau = 1$ означает, что вдоль данного участка пути поток мощности уменьшается из-за рассеяния и поглощения, согласно (7.20), до значения, равного $\exp(-1)$ от падающего потока. Учитывая (7.26), можно записать (7.24) в виде

$$\frac{dI(\tau, \hat{s})}{d\tau} = -I(\tau, \hat{s}) + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{s}, \hat{s}') I(\tau, \hat{s}') d\omega' + J(\tau, \hat{s}), \quad (7.27)$$

где функция $J(\mathbf{r}, \hat{s}) = \epsilon(\mathbf{r}, \hat{s})/\rho\sigma_t$ называется функцией источника.

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии. Запишем левую часть уравнения (7.24) с помощью дивергенции в виде (7.25), после чего проинтегрируем обе части (7.24) по полному телесному углу 4π . Вспоминая определения вектора потока $\mathbf{F}$ (7.4) и средней интенсивности $U(\mathbf{r})$ (7.6) и используя (7.22), получаем

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\rho\sigma_a \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{s}) d\omega + \int_{4\pi} \epsilon(\mathbf{r}, \hat{s}) d\omega, \quad (7.28a)$$

где

$$E(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \epsilon(\mathbf{r}, \hat{s}) d\omega \quad (7.28b)$$

— мощность, излучаемая единицей объема в единичном интервале частот ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{Гц}^{-1}$), а

$$E_a(\mathbf{r}) = \rho\sigma_a \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{s}) d\omega = 4\pi\rho\sigma_a U(\mathbf{r}) \quad (7.28b)$$

— полная мощность, поглощаемая единицей объема в единичном интервале частот. Заметим, что в (7.28b) $\sigma_a I$ есть мощность, поглощаемая одиночной частицей при облучении с интенсивностью I , а полная поглощенная мощность дается суммированием $\sigma_a I$ по телесному углу 4π и всем частицам независимо от направления I .

¹⁾ В гл. 4—6 мы использовали обозначения γ для оптического пути и τ для разностей времени. В данной главе, следуя Чандрасекару [31], мы обозначаем оптический путь через τ .

Физически (7.28а) означает, что выходящий из единичного объема поток $\mathbf{F}$ равен мощности, излучаемой единицей объема, минус мощность, поглощаемая единицей объема. В случае среды без потерь $\sigma_a = 0$ и в отсутствие источников выполняется закон сохранения потока мощности:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \quad (7.28г)$$

7.4. Ослабленная падающая интенсивность, диффузная интенсивность, граничное условие и функция источника

Полную интенсивность¹⁾ часто бывает удобно разделить на две части: ослабленную падающую интенсивность I_{ri} и диффузную интенсивность I_d .

При прохождении волны через объем V , содержащий рассеивающие частицы, падающий поток уменьшается в соответствии с (7.20) и возрастает в соответствии с (7.21). Та часть потока, которая уменьшается из-за рассеяния и поглощения, согласно (7.20), называется ослабленной падающей интенсивностью и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})}{ds} = -\rho\sigma_t I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}). \quad (7.29)$$

Другая часть, которая порождается в среде в результате рассеяния, называется диффузной интенсивностью (рис. 7.11). Поскольку полная интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ удовлетворяет уравнению (7.24), диффузная интенсивность удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dI_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})}{ds} = & -\rho\sigma_t I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \\ & + \varepsilon_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}), \end{aligned} \quad (7.30)$$

где ε_{ri} — функция эквивалентного источника:

$$\varepsilon_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega', \quad (7.31)$$

порожденная ослабленной падающей интенсивностью.

Граничное условие на поверхности S среды, содержащей много частиц (рис. 7.11), можно получить, заметив, что диффуз-

¹⁾ В этой книге $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ всюду обозначает лучевую интенсивность, иногда называемую просто интенсивностью.

ная интенсивность порождается только внутри среды. Поэтому нужно потребовать, чтобы на поверхности среды S отсутствовало диффузное излучение, входящее в среду, так что диффузная интенсивность на S всюду должна быть направлена наружу¹⁾. Математически это граничное условие выражается в виде

$$I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = 0 \text{ на } S \text{ при } \hat{\mathbf{s}}, \text{ направленном внутрь } S. \quad (7.32)$$

Для неограниченной среды нужно потребовать, чтобы диффузная интенсивность на бесконечности обращалась в нуль. Это

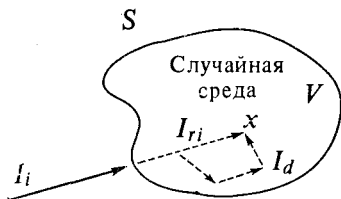


Рис. 7.11. Падающая интенсивность I_i , ослабленная падающая интенсивность I_{ri} и диффузная интенсивность I_d .

условие обсуждается в гл. 11 на нескольких примерах. Уравнение (7.30) вместе с граничным условием (7.32) составляют полное математическое описание задачи.

Ослабленная падающая интенсивность может быть коллимированной или диффузной. Например, падающая волна может быть сильно коллимирована в направлении $\hat{\mathbf{s}}_0$, как в случае лазерного пучка или плоской волны. Такую интенсивность называют коллимированной падающей интенсивностью I_{ci} . Для излучения, падающего в направлении $\hat{\mathbf{s}}_0$, величину $I_{ci}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ можно выразить с помощью дельта-функции:

$$I_{ci}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = F_0 \delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0), \quad (7.33)$$

где F_0 — плотность потока ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$), $\delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0)$ — дельта-функция по телесному углу (стерад^{-1}), а $\hat{\omega}$ и $\hat{\omega}_0$ — единичные векторы, представляющие телесные углы в направлениях $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{s}}_0$. Например, в сферической системе координат

$$\delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0) = \frac{\delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)}{\sin \theta}, \quad \int \delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0) d\omega = 1, \quad d\omega = \sin \theta d\theta d\phi. \quad (7.34)$$

В противоположность коллимированной падающей интенсивности диффузная падающая интенсивность приходит с разных направлений и ее величина различна для разных направлений. В качестве примера рассмотрим падение рассеянного облаком

¹⁾ Строго говоря, это относится только к выпуклым областям, для которых выходящее из рассеивающего объема излучение не может попасть в него снова.

излучения на поверхность океана. В этом случае падающая волна будет не коллимированной, а диффузной. Соответствующую ей интенсивность мы назовем диффузной падающей интенсивностью.

Рассмотрим теперь функцию источника $J(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})/\rho\sigma_t$. Для точечного источника мощности P_0 (Вт/Гц), находящегося в точке $\mathbf{r}_0$ и излучающего изотропно во всех направлениях, имеем

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{P_0}{4\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{стерад}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}). \quad (7.35)$$

Если среда находится в локальном термодинамическом равновесии при температуре T (в кельвинах), то закон Кирхгофа для излучения черного тела дает разумное приближение для излучаемой энергии ([89], гл. 1). При этом можно приближенно записать

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \rho\sigma_a B(T), \quad B(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left(\exp \frac{h\nu}{KT} - 1 \right)}, \quad (7.36)$$

где K и h — постоянные Больцмана и Планка.

7.5. Интегральная форма уравнения переноса

В общем случае существуют два подхода к рассматриваемой задаче. При одном из них исходят из дифференциального уравнения, получают общее решение с неизвестными коэффициентами, а затем с помощью соответствующих граничных условий находят эти коэффициенты. Другой подход состоит в переходе от дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями к интегральным уравнениям для некоторых неизвестных функций. В случае задач с простой геометрией (например, плоскопараллельная атмосфера) широко использовался подход на основе дифференциальных уравнений. Для задач с более сложной геометрией часто удобнее исходить из интегральных уравнений и получать их приближенные решения. Мы рассмотрим здесь общую интегральную постановку задачи.

Пусть имеется объем V , содержащий случайные частицы (рис. 7.12). Будем исходить из дифференциального уравнения (7.24)

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})}{ds} = -\rho\sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}). \quad (7.37)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка по аргументу s . Замечая, что уравнение (7.37) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \quad (7.38a)$$

получаем общее решение

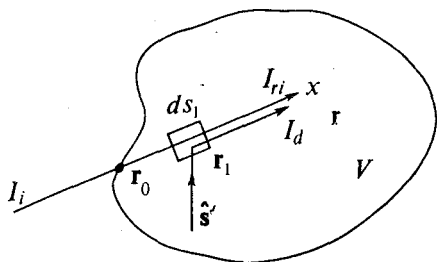
$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = ce^{-\tau} + e^{-\tau} \int Q(\hat{\mathbf{s}}_1) e^{\tau_1} ds_1, \quad (7.386)$$

где $\tau = \int \rho \sigma_t ds$ — оптический путь, c — константа, а

$$Q(s) = \frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}). \quad (7.38\text{в})$$

Теперь используем граничное условие, согласно которому в точке падения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ диффузная интенсивность I_d обращается

Рис. 7.12. Ослабленная падающая интенсивность I_{ri} и диффузная интенсивность I_d .



в нуль, так что полная интенсивность при этом равна падающей интенсивности $I_i(\mathbf{r}_0, \hat{\mathbf{s}})$. Измеряя расстояние s от точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, получаем

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}), \quad I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = I_i(\mathbf{r}_0, \hat{\mathbf{s}}) \exp(-\tau),$$

$$I_d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int_0^s \exp[-(\tau - \tau_1)] \left[\left(\frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \right) \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}) \right] ds_1, \quad (7.39)$$

где I_{ri} — ослабленная падающая интенсивность, I_d — диффузная интенсивность, $\tau = \int_0^s \rho \sigma_t ds$, а $\tau_1 = \int_0^{s_1} \rho \sigma_t ds$. Если объем V , содержащий рассеиватели, характеризуется показателем преломления n , отличным от показателя преломления среды, то падающую интенсивность $I_i(\mathbf{r}_0, \hat{\mathbf{s}})$ нужно заменить на прошедшую интенсивность $I_t(\mathbf{r}_0, \hat{\mathbf{s}})$, причем $\hat{\mathbf{s}}$ есть единичный вектор направления распространения прошедшего поля, рассмотренный в разд. 7.2.

Уравнение (7.39) представляет собой интегральное уравнение для лучевой интенсивности $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ вдоль луча с направлением $\hat{\mathbf{s}}$. Однако, поскольку входящий в него интегральный член

содержит вклады от интенсивностей, которые приходят с разных направлений $\hat{s}'$, это уравнение, очевидно, неполно. Более полное описание должно включать вклады от всех точек объема V .

Чтобы получить такое интегральное уравнение, проинтегрируем (7.39) по полному телесному углу и разделим обе части

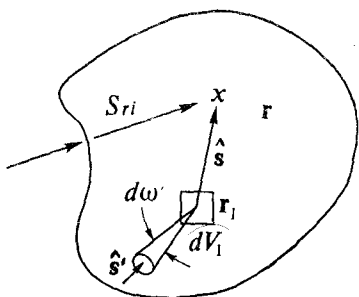


Рис. 7.13. Физический смысл интегрального уравнения (7.41).

полученного соотношения на 4π . При этом левая часть (7.39) перейдет в среднюю интенсивность $U(\mathbf{r})$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega = U(\mathbf{r}). \quad (7.40a)$$

Ослабленная интенсивность даст величину

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_i(\mathbf{r}_0, \hat{\mathbf{s}}) e^{-\tau} d\omega = U_{ri}(\mathbf{r}). \quad (7.40b)$$

Для вычисления интеграла от диффузной интенсивности заметим, что $d\omega = da/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2$ и $da ds_1 = dV_1$. Учитывая это, окончательно получаем

$$U(\mathbf{r}) = U_{ri}(\mathbf{r}) + \int_V \left[\frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} \rho \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}' I(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \right. \\ \left. + \varepsilon(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}) \right] \frac{\exp[-(\tau - \tau_1)]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} dV_1. \quad (7.41)$$

Физический смысл (7.41) можно пояснить, рассмотрев рис. 7.13. Первый член в правой части $U_{ri}(\mathbf{r})$ есть средняя интенсивность, связанная с приходящей со всех направлений ослабленной падающей интенсивностью. Для интерпретации второго члена заметим, что $I(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}')$ есть интенсивность, падающая на объем dV_1 с направления $\hat{\mathbf{s}}'$, поэтому первое слагаемое в интегральном члене есть вклад от $I(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}')$ в направлении $\hat{\mathbf{s}}$, ослабленный сферической расходимостью $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-2}$ и поглощением $\exp[-(\tau - \tau_1)]$;

этот вклад интегрируется по всем телесным углам ω' и по всему объему V . Второе слагаемое в интегральном члене есть вклад в поле в точке $\mathbf{r}$ от функции источника в точке $\mathbf{r}_1$.

Уравнение (7.41) выражает среднюю интенсивность $U(\mathbf{r})$, которая пропорциональна плотности энергии. Вполне аналогично можно получить и уравнение для вектора потока $\mathbf{F}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{ri}(\mathbf{r}) + \int_V \left[\frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}) \right] \frac{\exp[-(\tau - \tau_1)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \hat{\mathbf{s}} dV_1, \quad (7.42)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega$. В гл. 14 будет показано, что эти уравнения фактически согласуются с теорией многократного рассеяния Тверского и с уравнениями Дайсона и Бете — Солпитера.

7.6. Эффективная площадь антенны и принимаемая мощность

В предыдущем разделе мы обсудили общие соотношения для лучевой интенсивности, имеющие вид дифференциальных и интегральных уравнений. Однако при практическом измерении лучевой интенсивности нужно принимать во внимание характери-

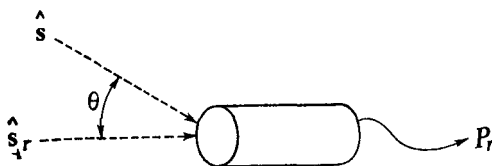


Рис. 7.14. Эффективная поверхность приемника $A_r(\hat{\mathbf{s}}_r, \hat{\mathbf{s}})$ и принимаемая мощность P_r .

стики приемника. Эти характеристики наиболее удобно выразить через эффективную площадь приемной антенны $A_r(\hat{\mathbf{s}}_r, \hat{\mathbf{s}})$. При падении на приемник с направления $\hat{\mathbf{s}}$ волны с плотностью потока мощности $S_i(\hat{\mathbf{s}})$ (Вт/м²) для приемника, ориентированного в направлении $-\hat{\mathbf{s}}_r$ (рис. 7.14), эффективная площадь поверхности антенны определяется как отношение принятой мощности P_r (Вт) к плотности падающего потока $S_i(\hat{\mathbf{s}})$:

$$P_r = A_r(\hat{\mathbf{s}}_r, \hat{\mathbf{s}}) S_i(\hat{\mathbf{s}}). \quad (7.43)$$

Величина A_r имеет размерность площади и зависит от направления падающей волны $\hat{s}$ и ориентации приемника $\hat{s}_r$. Используя падающую на приемник лучевую интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{s})$, получаем

$$P_r = \int_{\Omega} A_r(\hat{s}_r, \hat{s}) I(\mathbf{r}, \hat{s}) d\omega \quad (\text{Вт/Гц}), \quad (7.44)$$

где интегрирование производится по телесному углу, содержащему все падающие на приемник волны. Например, для случая, изображенного на рис. 7.14, интегрирование должно проводиться по области $0 \leq \theta \leq \pi/2$. В общем случае эффективная площадь приемной антенны может соответствовать узкому (малые θ) и широкому углу приема. В частном случае, когда приемник одинаково чувствителен к мощности, приходящей со всех направлений, мы имеем $A_r(\hat{s}_r, \hat{s}) = A_0 \cos \theta$. Такие характеристики приемника можно учесть в общих интегральных выражениях предыдущего раздела. Мощность P_R , принимаемая в точке $\mathbf{r}$ приемником, ориентированным в направлении $-\hat{s}_r$, полностью аналогично (7.41) дается выражением

$$P_R(\mathbf{r}, \hat{s}_r) = P_{Rrl}(\mathbf{r}, \hat{s}_r) + P_{Rd}(\mathbf{r}, \hat{s}_r). \quad (7.45)$$

Здесь $P_{Rrl}(\mathbf{r}, \hat{s}_r)$ — принимаемая мощность, обусловленная ослабленной падающей интенсивностью:

$$P_{Rrl}(\mathbf{r}, \hat{s}_r) = \int_{\Omega} A_r(\hat{s}_r, \hat{s}) I_{rl}(\mathbf{r}, \hat{s}) d\omega, \quad (7.46)$$

а $P_{Rd}(\mathbf{r}, \hat{s}_r)$ — принимаемая мощность, связанная с диффузной интенсивностью:

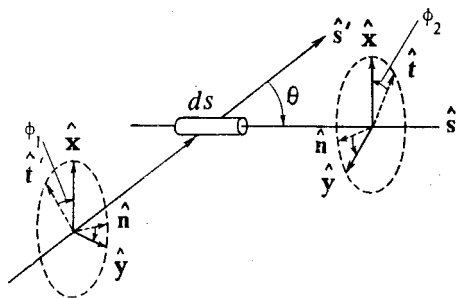
$$P_{Rd}(\mathbf{r}, \hat{s}_r) = \int_V A_r(\hat{s}, \hat{s}_r) \left[\frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{s}, \hat{s}') I(\mathbf{r}_1, \hat{s}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}_1, \hat{s}) \right] \frac{\exp[-(\tau - \tau_1)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} dV_1. \quad (7.47)$$

В большинстве практических приложений эффективную площадь антенны можно считать такой же, как в случае свободного пространства. Однако, строго говоря, все характеристики приема могут зависеть от случайно распределенных рассеивающих частиц. В общем случае флуктуации падающей на приемник волны вызывают уширение средней диаграммы направленности и падение коэффициента усиления антенны. Этот эффект иногда называют потерями, обусловленными связью среда — антенна [140].

7.7. Уравнение переноса для частично поляризованной электромагнитной волны

До сих пор мы не учитывали никаких поляризационных эффектов, что оправдано только для акустических волн. Для электромагнитных волн такое описание может служить лишь некоторым приближением. В данном разделе мы дадим общую формулировку теории переноса электромагнитных волн с учетом поляризации. Электромагнитные волны в случайно-неоднородных средах фактически всегда являются частично поляризованными, поскольку даже для линейно-поляризованной падающей волны

Рис. 7.15. Преобразование параметров Стокса при повороте на угол ϕ_1 , рассеянии с направления $\hat{s}'$ на направление $\hat{s}$ и повороте на угол ϕ_2 .



рассеянная волна будет, вообще говоря, эллиптически-поляризованной, причем ее поляризация будет меняться хаотически из-за случайных неоднородностей среды.

При рассмотрении частично поляризованных волн лучевую интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{s})$ нужно заменить вектором $\mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{s}, \hat{t})$, компонентами которого являются параметры Стокса (I_1, I_2, U, V) для лучевой интенсивности ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{стерад}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$). Параметры Стокса определяются в прямоугольной системе координат, где ось z совпадает с направлением распространения, а I_1 и I_2 — средние интенсивности компонент x и y электрического поля (разд. 2.9 и 2.10). В соответствии с принятыми в этой главе обозначениями единичные векторы в направлениях x и z обозначим $\hat{t}$ и $\hat{s}$ (рис. 7.15). Аналогично (7.24) запишем

$$\frac{d\mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{s}, \hat{t})}{ds} = -\rho\sigma_t \mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{s}, \hat{t}) + \int_{4\pi} \bar{\mathbf{P}}(\hat{s}, \hat{t}; \hat{s}', \hat{t}') \mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{s}', \hat{t}') d\omega' + \mathbf{e}(\mathbf{r}, \hat{s}, \hat{t}). \quad (7.48)$$

Здесь мы использовали принцип аддитивности параметров Стокса для независимых волн. Вектор $\mathbf{I}$ выражается матрицей-столбцом из четырех элементов (I_1, I_2, U, V) , а $\bar{\mathbf{P}}$ — матрица размера

4×4 , называемая фазовой матрицей и связывающая параметры Стокса падающей волны $\mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{t}}')$ с параметрами Стокса рассеянной волны, определенными для направлений $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{t}}$. Через $\mathbf{e}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{t}})$ обозначены параметры Стокса источника, которые описывают излучение в единичном телесном угле вблизи направления $\hat{\mathbf{s}}$.

Фазовую матрицу $\bar{\mathbf{P}}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{t}}; \hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{t}}')$ можно выразить следующим образом. В разд. 2.12 мы ввели матрицу Стокса $\bar{\sigma}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{x}})$, связывающую параметры Стокса рассеянной волны $\mathbf{I}_s(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}})$ с параметрами Стокса падающей волны $\mathbf{I}_i(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{x}})$, причем плоскость, определяемая векторами $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{s}}'$, называется плоскостью рассеяния, а ось $\hat{\mathbf{x}}$ перпендикулярна этой плоскости. Для монохроматической волны эти величины сводятся к плотностям энергии рассеянной и падающей волн (Вт/м^2). Мы можем определить параметры Стокса для лучевой интенсивности ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{стерад}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$) для цилиндрического объема с единичным сечением и длиной ds , содержащего ρds частиц. При этом можно записать

$$\mathbf{I}_s(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}) = \rho ds \bar{\sigma}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{I}_i(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{x}}), \quad (7.49)$$

где $\mathbf{I}_s$ и $\mathbf{I}_i$ — параметры Стокса для лучевой интенсивности. Теперь нам нужно связать $\mathbf{I}_i(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{x}})$ с $\mathbf{I}(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{t}}')$. Такая связь сводится просто к преобразованию параметров Стокса при вращении осей. Это преобразование обсуждалось в разд. 2.13:

$$\mathbf{I}_i(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{L}}(\phi_1) \mathbf{I}(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{t}}'). \quad (7.50)$$

Аналогично имеем

$$\mathbf{I}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{t}}) = \bar{\mathbf{L}}(-\phi_2) \mathbf{I}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}). \quad (7.51)$$

Отсюда следует, что фазовая матрица $\bar{\mathbf{P}}$ имеет вид

$$\bar{\mathbf{P}}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{t}}; \hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{t}}') = \bar{\mathbf{L}}(-\phi_2) \bar{\sigma}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{L}}(\phi_1), \quad (7.52)$$

что соответствует повороту от $\hat{\mathbf{t}}'$ к $\hat{\mathbf{x}}$, рассеянию с направления $\hat{\mathbf{s}}'$ на $\hat{\mathbf{s}}$ и повороту от $\hat{\mathbf{x}}$ к $\hat{\mathbf{t}}$.

Мы не будем здесь останавливаться на дальнейших деталях, поскольку они достаточно подробно описаны в других учебниках. (См., например, [31, 136] о представлении матрицы рассеяния для плоскопараллельной среды с вертикальными и горизонтальными осями отсчета.)

7.8. Связь лучевой интенсивности с вектором Пойнтинга

В разд. 7.1 мы определили лучевую интенсивность как плотность потока мощности, распространяющейся внутри единичного телесного угла в диапазоне частот $(\nu, \nu + d\nu)$. В данном разделе мы дадим другое определение, которое связывает лучевую интенсивность с полями, удовлетворяющими уравнениям Максвелла.

Рассмотрим вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ для волны в диапазоне частот $(\nu, \nu + d\nu)$:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (7.53)$$

В каждой точке $\mathbf{r}$ этот вектор есть случайная функция времени, и, поскольку каждая компонента $\mathbf{S}$ меняется со временем, конец вектора $\mathbf{S}$ движется случайно. Рассмотрим трехмерное пространство, в котором ортогональные координаты есть компоненты $\mathbf{S}$, а именно S_x , S_y и S_z . Пусть $W(S_x, S_y, S_z) dS_x dS_y dS_z$ — вероятность того, что конец вектора $\mathbf{S}$ находится в элементе объема $dS_x dS_y dS_z$. Используя сферические координаты (S, θ, ϕ) , где $S_x = S \sin \theta \cos \phi$, $S_y = S \sin \theta \sin \phi$ и $S_z = S \cos \theta$, мы можем записать эту вероятность в виде

$$W(S_x, S_y, S_z) dS_x dS_y dS_z = W(S, \theta, \phi) S^2 dS d\omega, \quad (7.54)$$

где $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Функция плотности вероятности W удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{4\pi} \int_0^\infty W(S, \theta, \phi) S^2 dS d\omega = 1. \quad (7.55)$$

Теперь мы можем определить лучевую интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ как

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \int_0^\infty S W(S, \theta, \phi) S^2 dS. \quad (7.56)$$

Это означает, что I есть сумма всех векторов Пойнтинга, концы которых локализованы в единичном телесном угле в направлении $\hat{\mathbf{S}}$, определяемом координатами (θ, ϕ) .

Средняя интенсивность U дается выражением

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty S W(S, \theta, \phi) S^2 dS, \quad (7.57)$$

а вектор потока $\mathbf{F}$ равен

$$\mathbf{F} = \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty S \hat{\mathbf{s}} W(S, \theta, \phi) S^2 dS. \quad (7.58)$$

Для акустических волн вектор Пойнтинга нужно заменить на $\mathbf{S} = p\mathbf{V}$ и воспользоваться приведенными выше соображениями.

Определение (7.56) выражает лучевую интенсивность как статистическое среднее от случайно меняющегося вектора Пойнтинга и дает некоторое представление о физической природе лучевой интенсивности.

Лучевая интенсивность в том виде, в котором она определена в данной главе, представляет собой средний поток мощности. При этом флуктуации волны, связанной с этим потоком, не рассматриваются. Возникает вопрос, имеется ли какая-нибудь связь между лучевой интенсивностью и волновыми характеристиками поля?

Поскольку уравнение переноса выведено эвристически на основе энергетических соображений, волновые характеристики поля, по-видимому, не входят в эту эвристическую картину, за исключением разве что характеристик рассеяния и поглощения частиц. Однако, поскольку при вычислении сечений и амплитуд рассеяния использовалось волновое уравнение, лучевая интенсивность не может быть найдена без знания взаимодействия полей со средой. В ряде последних работ рассматривалась связь теории переноса со строгой аналитической теорией; некоторые аспекты этих интересных разработок обсуждаются в гл. 14. Там показано, что соотношение (7.57) можно обобщить, выразив функцию взаимной когерентности как фурье-образ лучевой интенсивности.

Приближенные решения для разреженной среды

В гл. 7 мы развили общую теорию переноса для распространения волн в присутствии случайных частиц и получили уравнение переноса и интегральные уравнения для лучевой интенсивности. Однако точные решения этих уравнений получены лишь для небольшого числа частных случаев. Примерами такого рода, для которых решения найдены и записываются в приемлемой для расчетов форме, являются плоскопараллельные задачи и задачи с изотропным рассеянием, которые рассматриваются в гл. 11 и 12. В большинстве практических случаев уравнение переноса не удастся решить точно и возникает необходимость обратиться к приближенным решениям. Даже в тех случаях, когда точные решения известны, соответствующие выражения часто оказываются настолько сложными, что желательно иметь более простые приближенные решения.

Как уже указывалось в начале гл. 4, имеется два предельных случая — разреженное и плотное распределения, — для которых могут быть получены относительно простые решения. Для разреженного распределения рассеивателей мы можем использовать обобщение уравнения радиолокации и получить решение в первом порядке теории многократного рассеяния. Это сделано в гл. 4—6 и дало полезные результаты, касающиеся флуктуаций и корреляционных характеристик. Можно также исходить из изложенной в гл. 7 теории переноса и получить решение в первом порядке теории многократного рассеяния для разреженного распределения рассеивателей. Эти два подхода эквивалентны и для заданной случайной среды дают одну и ту же принимаемую мощность. Однако теория переноса дает решение, выраженное через лучевую интенсивность, что оказывается удобным для некоторых приложений.

В данной главе мы рассмотрим решение в первом порядке теории многократного рассеяния на основе изложенной в гл. 7 теории переноса. Такой подход дает простые решения для лучевой интенсивности в случаях плоской волны и пучка волн. Приложения этой теории включают оптическое рассеяние в океане и в биологических средах.

8.1. Лучевая интенсивность в приближении первого порядка теории многократного рассеяния

В гл. 4—6 для получения приближения первого порядка мы использовали подход, основанный на уравнении радиолокации, учитывая при этом характеристики излучателя и приемника. В данной главе мы дадим альтернативное представление приближения первого порядка на основе развитой в гл. 7 теории переноса.

Полная лучевая интенсивность в точке $\mathbf{r}$ состоит из ослабленной падающей интенсивности I_{ri} и диффузной интенсивности I_d . Как показано в (7.39), диффузная интенсивность равна сумме всех интенсивностей, рассеянных частицами при облучении полной интенсивностью. Последняя, вообще говоря, неизвестна. Однако в приближении первого порядка мы полагаем, что полная интенсивность, падающая на частицы, приближенно равна ослабленной падающей интенсивности, которая известна. Отсюда получаем решение в приближении первого порядка

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}), \quad (8.1)$$

$$I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \int_0^s \exp[-(\tau - \tau_1)] \left[\frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{ri}(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}) \right] ds_1. \quad (8.2)$$

Интегральное представление для принимаемой мощности, соответствующее соотношениям (7.45) — (7.47), в приближении первого порядка выражается как

$$P_R = P_{Rri} + P_{Rd}, \quad (8.3)$$

$$P_{Rri} = \int A_r(\omega) I_{ri}(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (8.4)$$

$$P_{Rd} = \int_V A_r(\omega) \frac{\exp[-(\tau - \tau')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \\ \times \left[\frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{ri}(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{s}}) \right] dV', \quad (8.5)$$

где приемник находится в точке $\mathbf{r}$, а $A_r(\omega)$ — эффективная площадь приемной апертуры (рис. 8.1).

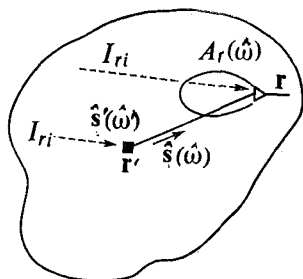
Это приближение первого порядка применимо к большому числу практических задач и очень полезно из-за своей относительной математической простоты. Однако оно пригодно только в том случае, когда плотность рассеивателей настолько мала, что некогерентная мощность существенно меньше когерентной.

Это условие обычно выполняется в следующих двух ситуациях:

а. Для плоской волны, падающей на среду, которая содержит случайные частицы, приближение первого порядка применимо, когда оптическая длина меньше примерно 0,4 ($\tau \leq 0,4$) и частицы в основном поглощают (альбеда $W_0 \leq 0,5$). Этот случай рассматривается в следующем разделе.

б. Для волны, ограниченной малой областью углов, как в случае передатчика с узким лучом, это приближение применимо

Рис. 8.1. Приближение первого порядка для принимаемой мощности P_R (8.3). Мощность P_R содержит вклад от ослабленной интенсивности I_{ri} и вклад от диффузной мощности, просуммированный по всем точкам объема $\mathbf{r}'$.



на значительно больших дистанциях, в особенности когда частицы поглощают ($W_0 \leq 0,9$). Этот случай встречается при распространении микроволнового и оптического излучения в атмосфере.

В следующих разделах мы дадим несколько примеров использования приближения первого порядка для лучевой интенсивности.

8.2. Падение плоской волны на плоскопараллельную среду

Рассмотрим слой толщины d , содержащий случайные частицы (рис. 8.2). Пусть плоская волна с плотностью потока F_i падает на слой под углом θ_i , а ось x выбрана так, что плоскость падения совпадает с плоскостью xz . Показатели преломления среды в областях $z < 0$, $0 < z < d$ и $z > d$ есть n_1 , n_2 и n_3 соответственно. Типичная задача, соответствующая этому случаю, — определение интенсивности света в толще океана при облучении сверху. Тогда $z = 0$ соответствует поверхности океана, а $z = d$ — дну океана [76].

Для плоскопараллельной задачи часто удобнее использовать оптическую длину $\tau = \rho \sigma_i z$ в направлении z , а не оптическую длину в направлении распространения волны $\rho \sigma_i z \sec \theta$. Удобно также вместо угла θ использовать параметр $\mu = \cos \theta$.

В этих обозначениях ослабленную падающую интенсивность можно записать в виде

$$I_{rl}(\tau, \mu, \phi) = F_0 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) \delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0), \quad (8.6)$$

где $\tau = \rho \sigma_t z$, $\mu_0 = \cos \theta_0$, а $F_0 = T_{12} F_i$; T_{12} — коэффициент пропускания для лучевой интенсивности из среды 1 в среду 2, который дается выражением (7.18). Через $\hat{\omega}$ и $\hat{\omega}_0$ обозначены еди-

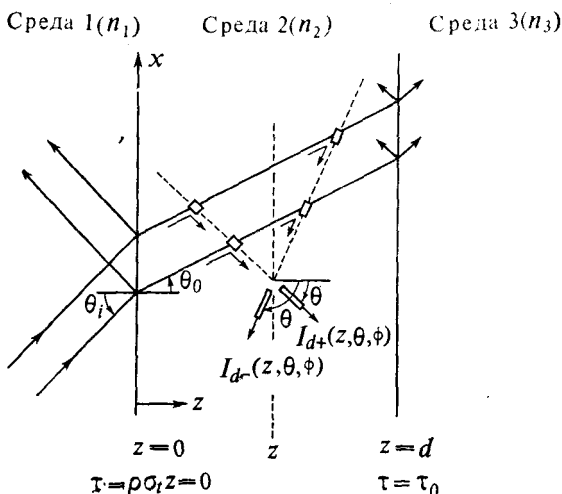


Рис. 8.2. Падение плоской волны на плоскопараллельную среду толщины d , содержащую случайно распределенные частицы.

ничные векторы в направлениях (θ, ϕ) и (θ_0, ϕ_0) соответственно, а через $\delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0)$ — дельта-функция по телесному углу, определяемая выражениями

$$\begin{aligned} \delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0) &= \frac{\delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)}{\sin \theta} = \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0), \\ \int \delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0) d\omega &= \int \frac{\delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)}{\sin \theta} \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \int \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) d\mu d\phi = 1. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Вычислим теперь диффузную интенсивность внутри среды, используя описанное в разд. 8.1 приближение первого порядка. Из рис. 8.2 видно, что интенсивность I_{d+} для $0 \leq \theta < \pi/2$ ($1 \geq \mu > 0$) состоит из вкладов ослабленной падающей интенсивности от области $(0, z)$, тогда как I_{d-} для $\pi/2 < \theta \leq$

$\leq \pi(0 > \mu \geq -1)$ — из вкладов от области (z, d) . Подставляя (8.6) в (8.2) и полагая $\varepsilon(r_1, \hat{s}) = 0$, получаем

$$I_{d+}(\tau, \mu, \phi) = \int_0^{\tau} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_1)}{\mu} - \frac{\tau_1}{\mu_0}\right] \frac{\rho(\mu, \phi; \mu_0, 0)}{4\pi} F_0 \frac{d\tau_1}{\mu} =$$

$$= \frac{\rho(\mu, \phi; \mu_0, 0)}{4\pi} \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)}{(\mu_0 - \mu)} \mu_0 F_0, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (8.8)$$

$$I_{d-}(\tau, \mu, \phi) = \int_{\tau}^{\tau_0} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_1)}{\mu} - \frac{\tau_1}{\mu_0}\right] \frac{\rho(\mu, \phi; \mu_0, 0)}{4\pi} F_0 \frac{d\tau_1}{(-\mu)} =$$

$$= \frac{\rho(\mu, \phi; \mu_0, 0)}{4\pi} \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) - \exp\left[-\frac{\tau_0}{\mu_0} + \frac{\tau_0 - \tau}{\mu}\right]}{(\mu_0 - \mu)} \mu_0 F_0, \quad -1 \leq \mu < 0, \quad (8.9)$$

где $\tau = \rho \sigma_t z$, $\tau_0 = \rho \sigma_t d$, $\mu = \cos \theta$, $\mu_0 = \cos \theta_0$.

Диффузная интенсивность, рассеянная вперед, I_{d+} равна нулю при $z = 0$, увеличивается с ростом z и достигает максимума при

$$\tau_m = \frac{\ln \mu - \ln \mu_0}{1/\mu_0 - 1/\mu} \quad (8.10)$$

независимо от индикатрисы рассеяния $\rho(\mu, \phi; \mu_0, \phi_0)$. При $\theta = \theta_0$ величина I_{d+} равна

$$I_{d+}(\tau, \mu_0, \phi) = \frac{\rho(\mu_0, \phi; \mu_0, 0)}{4\pi} \frac{\tau}{\mu_0} \frac{\exp(-\tau/\mu_0)}{\mu_0} F_0 \quad (8.11)$$

и достигает максимума при $\tau = \mu_0$.

Диффузная интенсивность вне среды может быть легко получена с помощью соотношений (8.8) и (8.9). Для $z > d$ диффузная интенсивность I_d равна $T_{23} I_{d+}(d, \theta, \phi)$, а для $z < 0$ диффузная интенсивность есть $T_{21} I_{d-}(0, \theta, \phi)$, где T_{23} и T_{21} — определенные в разд. 7.2 коэффициенты пропускания лучевой интенсивности из среды 2 в 3 и из 2 в 1 соответственно.

Часто особый интерес представляет диффузная интенсивность для случая, когда содержащая частицы среда является полупространством $z < 0$. Соотношение, выражающее угловую зависимость отраженной диффузной интенсивности, называют законом диффузного отражения. Эту угловую зависимость обычно выражают через угол отражения $\theta_r = \pi - \theta$. Используя $\cos \theta_r = -\mu_r = -\mu$, получаем

$$I_d(\mu_r) = \frac{\rho(\mu, \phi; \mu_0, 0)}{4\pi} \left(\frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_r} \right) T_{12} T_{21} F_i, \quad (8.12)$$

что дает приближение первого порядка ([31], разд. 47.1) для закона диффузного отражения.

В данном анализе мы пренебрегли вкладом от отражения на задней поверхности $z = d$. Если эта поверхность сильно отражающая и гладкая с коэффициентом зеркального отражения R , то к правой части (8.9) нужно добавить следующую диффузную интенсивность:

$$\frac{\rho(\mu, \phi; -\mu_0, 0)}{4\pi} \frac{\exp[(\tau_0 - \tau)/\mu] - \exp[-(\tau_0 - \tau)/\mu_0]}{(-1)(\mu + \mu_0)} \mu_0 R F_0 \exp\left(-\frac{\tau_0}{\mu_0}\right), \quad (8.13)$$

$$-1 \leq \mu < 0.$$

Если поверхность $z = d$ сильно диффузна, так что отраженная интенсивность почти равномерно распределена в пределах телесного угла 2π , то к (8.9) нужно добавить диффузную интенсивность

$$I'_d = \frac{R_d \mu_0 F_0}{\pi} \exp\left(-\frac{\tau_0}{\mu_0} + \frac{\tau_0 - \tau}{\mu}\right), \quad -1 \leq \mu < 0, \quad (8.14)$$

где R_d — альбедо поверхности, определяемое отношением $\pi I'_d / \mu_0 F_0$. Эта ситуация часто встречается в случае песчаного дна океана [76]. Заметим, что полная отраженная мощность равна $\pi I'_d$ (интеграл от $\mu I'_d$ по телесному углу 2π).

Рассмотрим теперь мощность, получаемую приемником с телесным углом приема $\Delta\omega = \Delta\mu \Delta\phi$, где $|\Delta\omega| \ll 1$. Если лучевую интенсивность записать в виде

$$I(\mu, \phi) = F \delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_0) + I_d(\mu, \phi), \quad (8.15)$$

то принимаемая мощность P_R будет равна

$$P_R = F + \Delta\omega I_d(\mu, \phi), \quad (8.16)$$

где μ и ϕ ограничены интервалами

$$\mu_0 - \Delta\mu/2 < \mu < \mu_0 + \Delta\mu/2, \quad \phi_0 - \Delta\phi/2 < \phi < \phi_0 + \Delta\phi/2. \quad (8.17)$$

При значениях μ и ϕ , лежащих вне интервалов (8.17), принимаемая мощность P_R равна $\Delta\omega I_d(\mu, \phi)$.

8.3. Падение коллимированного пучка на плоскопараллельную среду

В некоторых практических ситуациях падающую волну можно представить в виде узкого коллимированного пучка. Примером может служить определение концентрации бактерий в жидкости с помощью лазерного луча [107, 141, 171]. Другой пример — лазерный или высокочастотный ультразвуковой пучок в океанской воде, содержащей органические и неорганические частицы [76].

Рассмотрим коллимированный пучок с гауссовым изменением интенсивности в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения. Предположим, что такой пучок падает нормально на плоскопараллельную среду (рис. 8.3).

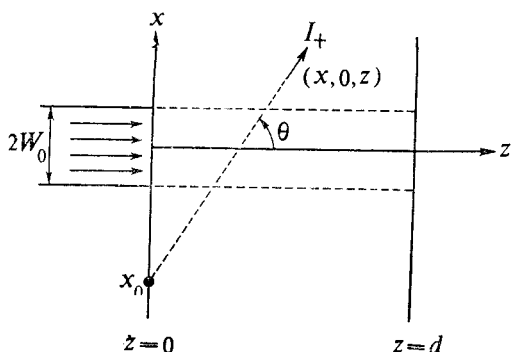


Рис. 8.3. Падение гауссова пучка на случайно распределенные частицы в слое толщины d .

Лучевая интенсивность при $z = 0$ равна

$$I(z=0, \rho, \hat{s}) = F_0 \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W_0^2}\right) \delta(\hat{\omega}), \quad (8.18)$$

где W_0 — размер пучка¹⁾, а F_0 — его интенсивность. Угловая зависимость в (8.18) аппроксимируется дельта-функцией $\delta(\hat{\omega})$. Ниже будет показано²⁾, что лучевая интенсивность есть фурье-образ функции взаимной когерентности, и точная лучевая интенсивность коллимированного пучка дается выражением

$$I(z=0, \rho, \hat{s}) = \left(\frac{k^2 W_0^2}{2\pi}\right) F_0 \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W_0^2} - \frac{k^2 W_0^2 \sin^2 \theta}{2}\right), \quad (8.19)$$

где $\theta = \arccos \hat{s} \cdot \hat{z}$, а $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Более полный анализ выражения (8.19) будет дан ниже. Однако на малых расстояниях при $z < \pi W_0^2/\lambda$ выражение (8.18) дает хорошее приближение к (8.19), поэтому в данном разделе мы используем (8.18).

Используя выражение (8.18), получаем следующее выражение для ослабленной падающей интенсивности I_{ri} :

$$I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{s}) = F_0 \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W_0^2} - \rho \sigma_i z\right) \delta(\hat{\omega}). \quad (8.20)$$

¹⁾ Обозначение W_0 для размера пучка не следует путать с альбедо одиночной частицы в (7.22).

²⁾ См. (13.8в) и разд. 14.7. Заметим, что W_0^2 в (8.19) равно $2W^2$ в (13.8в).

Полная проходящая мощность при $z = 0$ дается выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int d\omega I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{1}{2} \pi W_0^2 F_0. \quad (8.21)$$

Диффузную интенсивность легко вычислить, подставляя (8.20) в (8.2). Например, величина I_{d+} , показанная на рис. 8.3, для точки $(x, 0, z)$ и направления $(\theta, 0)$ равна

$$I_{d+} = \int_0^z \exp[-\rho\sigma_t(z-z_1)\sec\theta] \left(\frac{\rho\sigma_t}{4\pi}\right) p(\theta, 0; 0, 0) F_0 \times \\ \times \exp\left(-\frac{2x_1^2}{W_0^2} - \rho\sigma_t z_1\right) dz_1 \sec\theta, \quad (8.22)$$

где $x_1 = x_0 + z_1 \operatorname{tg} \theta$. Этот интеграл можно выразить через функцию ошибок.

Это решение использовалось при определении концентрации бактерий методом оптического рассеяния [107, 141].

Диффузионное приближение¹⁾

В гл. 8 мы рассмотрели приближение первого порядка теории многократного рассеяния, применимое в случае разреженной среды. В общем случае это приближение справедливо только тогда, когда объемная плотность, равная отношению объема, занятого частицами, к полному объему среды, значительно меньше 0,1%. Если же объемная плотность много больше 1%, то относительно простые и хорошие результаты даются диффузионным приближением. При объемной плотности порядка 1% ни приближение первого порядка, ни диффузионное приближение не могут быть справедливы, и нужно решать полное уравнение переноса. В данной главе мы рассмотрим вывод диффузионного уравнения из уравнения переноса, а также некоторые решения для плоскопараллельной задачи. Диффузионное приближение с успехом использовалось для анализа волоконнооптических оксиметров при исследовании крови [78, 79, 126].

9.1. Вывод диффузионного уравнения

Как мы уже указывали в разд. 7.4, интенсивность излучения в случайно-неоднородной среде можно разделить на две части: ослабленную падающую интенсивность I_{ri} и диффузную интенсивность I_d . Для заданной падающей волны I_{ri} легко вычислить. Диффузная же интенсивность должна удовлетворять уравнению переноса [уравнение (7.30)]

$$\frac{dI_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})}{ds} = -\rho\sigma_t I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' + \epsilon_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \epsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (9.1)$$

где ϵ_{ri} — эквивалентная функция источников, связанная с ослабленной падающей интенсивностью I_{ri} :

$$\epsilon_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega', \quad (9.2)$$

а $\epsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ — функция источников.

¹⁾ Более подробное обсуждение диффузионного приближения см. в книгах [11, 108].

В диффузионном приближении предполагается, что диффузная интенсивность встречает много частиц и рассеивается на них почти равномерно во всех направлениях, поэтому его угловое распределение почти изотропно (рис. 9.1). Но угловая зависимость не может сводиться к константе, так как при этом поток $\mathbf{F}_d$ обращается в нуль и распространение мощности отсутствует. Поэтому диффузная интенсивность должна быть немного больше

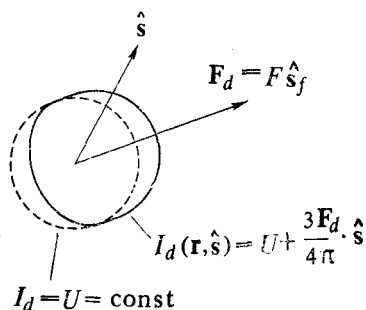


Рис. 9.1. Диффузная интенсивность $I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ в диффузионном приближении.

для направления полного потока, чем для обратного направления. Математически мы выразим это, предположив, что $I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ аппроксимируется выражением

$$I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \approx U_d(\mathbf{r}) + c \mathbf{F}_d(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (9.3)$$

где c — константа, $\mathbf{F}_d(\mathbf{r})$ — вектор диффузного потока, ориентированный вдоль единичного вектора $\hat{\mathbf{s}}_f$ и определяемый выражением

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega = \mathbf{F}_d(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}}_f, \quad (9.4)$$

а $U_d(\mathbf{r})$ — средняя диффузная интенсивность, которая пропорциональна плотности энергии (7.7):

$$U_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega. \quad (9.5)$$

Представление $I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ в виде (9.3) схематически изображено на рис. 9.1. Константу c в (9.3) легко найти, заметив, что

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_d(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}}_f = \int_{4\pi} I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_f d\omega. \quad (9.6)$$

Подставляя (9.3) в (9.6), получаем $c = 3/4\pi$, поэтому диффузионное приближение для диффузной интенсивности дается выражением

$$I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = U_d(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{F}_d(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{s}}. \quad (9.7)$$

Правую часть (9.7) можно рассматривать, как первые два члена разложения I_d в ряд Тейлора по степеням $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$, поэтому второй член в (9.7) должен быть много меньше первого: $U_d \gg |\mathbf{F}_d|$.

Приступим теперь к выводу диффузионного уравнения, которое основано на приближении (9.7). Прежде всего проинтегрируем (9.1) по всему телесному углу 4π и получим общее соотношение, выражающее сохранение мощности (7.28a):

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_d(\mathbf{r}) = -4\pi\rho\sigma_a U_d(\mathbf{r}) + 4\pi\rho\sigma_s U_{ri} + E(\mathbf{r}), \quad (9.8)$$

где $U_{ri}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega$ и $E(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega$. Затем подставим (9.7) в (9.1). В предположении, что фазовая функция $p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ зависит лишь от угла между $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{s}}'$, получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} \cdot \operatorname{grad} U_d + \frac{3}{4\pi} \hat{\mathbf{s}} \cdot \operatorname{grad} (\mathbf{F}_d \cdot \hat{\mathbf{s}}) = \\ = -\rho\sigma_t U_d - \frac{3}{4\pi} \rho\sigma_t \mathbf{F}_d \cdot \hat{\mathbf{s}} + \rho\sigma_s U_d + \frac{3}{4\pi} \rho\sigma_t \mathbf{F}_d \cdot \hat{\mathbf{s}} p_1 + \varepsilon_{ri} + \varepsilon, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где ε то же, что в (9.1), а p_1 дается выражением

$$p_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}' d\omega' \quad (9.10)$$

и описывает усредненное рассеяние вперед ($\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}' > 0$) за вычетом обратного рассеяния ($\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}' < 0$) для отдельной частицы.

Часто бывает удобно записывать p_1 в виде $p_1 = W_0 \bar{\mu}$; здесь W_0 — альбеда единичной частицы, а $\bar{\mu}$ — средний косинус угла рассеяния θ , даваемый выражением

$$\bar{\mu} = \left(\int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \mu d\omega' \right) / \left(\int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega' \right), \quad (9.11)$$

где $\mu = \cos \theta = \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$. Заметим, что, поскольку фазовая функция $p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ зависит лишь от угла рассеяния γ , мы можем разложить эту функцию в ряд по функциям Лежандра:

$$p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = \sum_{n=0}^{\infty} W_n P_n(\cos \gamma), \quad \cos \gamma = \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}', \quad (9.12a)$$

причем p_1 выражается в виде

$$p_1 = \frac{W_1}{3}, \quad \bar{\mu} = p_1/W_0 = W_1/3W_0. \quad (9.12b)$$

Фазовую функцию часто можно аппроксимировать следующим выражением, включающим только W_0 и $\bar{\mu}$:

$$p(\mu) = W_0 (1 - \bar{\mu}^2) (1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\mu}\mu)^{-1/2}. \quad (9.12b)$$

Это формула Хени — Гринштейна, которая часто используется при описании рассеяния на кровяных тельцах [125] и облаках [38, 65].

Умножим обе части (9.9) на $\hat{s}$ и проинтегрируем полученный результат по полному телесному углу 4π ¹⁾

$$\begin{aligned} \text{grad } U_d = & -\frac{3}{4\pi} \rho \sigma_t (1 - p_1) \mathbf{F}_d + \\ & + \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \epsilon_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega + \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \epsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Величина $\sigma_t (1 - p_1)$ называется транспортным сечением σ_{tr} [11]. Оно показывает, что если рассеяние анизотропно, то эквивалентное полное сечение уменьшается на множитель $1 - p_1$ по сравнению с изотропным случаем. Транспортное сечение можно записать также в виде

$$\sigma_{tr} = \sigma_t (1 - p_1) = \sigma_s (1 - \bar{\mu}) + \sigma_a. \quad (9.14)$$

Как показано в (3.33), с ростом плотности числа частиц эквивалентное сечение рассеяния уменьшается на множитель $1 - H$, где H — отношение объема, занимаемого рассеивателями, к полному объему. Это отношение, выраженное через плотность числа частиц ρ и объем единичного рассеивателя V_e , равно величине ρV_e , так что

$$\sigma_s \rightarrow \sigma_s (1 - H). \quad (9.15a)$$

При этом транспортное сечение σ_{tr} для среды с высокой плотностью определяется выражением

$$\sigma_{tr} \rightarrow \sigma_s (1 - H) (1 - \bar{\mu}) + \sigma_a. \quad (9.15b)$$

Уравнение (9.8) выражает $\text{div } \mathbf{F}_d$ через U_d , а уравнение (9.13) — $\text{grad } U_d$ через $\mathbf{F}_d$. Исключим $\mathbf{F}_d$ из этих двух уравнений, выразив $\mathbf{F}_d$ из (9.13) и подставив его в (9.8). В результате получим следующее дифференциальное уравнение для U_d :

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_d(\mathbf{r}) - \kappa_d^2 U_d(\mathbf{r}) = & -3\rho\sigma_s\rho\sigma_{tr}U_{ri}(\mathbf{r}) - \frac{3}{4\pi}\rho\sigma_{tr}E(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{3}{4\pi}\nabla \cdot \int_{4\pi} \epsilon_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega + \frac{3}{4\pi}\nabla \int_{4\pi} \epsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega, \end{aligned} \quad (9.16)$$

где $\kappa_d^2 = 3\rho\sigma_a\rho\sigma_{tr}$. При высокой плотности среды σ_s и σ_{tr} в (9.16) определяются выражениями (9.15a) и (9.15b). Уравнение

¹⁾ Для любого вектора $\mathbf{A}$ имеем

$$\int_{4\pi} \hat{\mathbf{s}} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}) d\omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A} \quad \text{и} \quad \int_{4\pi} \hat{\mathbf{s}} [\hat{\mathbf{s}} \cdot \text{grad} (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}})] d\omega = 0.$$

(9.16) есть основное диффузионное уравнение в стационарном случае¹⁾ для средней диффузной интенсивности $U_d(\mathbf{r})$ и вместе с граничным условием, которое мы рассмотрим в следующем разделе, дает полное математическое описание диффузионного приближения. Если диффузная интенсивность найдена, то поток $\mathbf{F}_d$ можно вычислить с помощью (9.13).

9.2. Граничные условия

Точное граничное условие для диффузной интенсивности I_d состоит в том, что на поверхности рассеивающей среды диффузная интенсивность, входящая в среду снаружи, должна быть равна нулю (7.32):

$$I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = 0 \text{ при } \hat{\mathbf{s}}, \text{ направленном внутрь среды.} \quad (9.17)$$

Но, согласно диффузионному приближению, $I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ имеет простую угловую зависимость, определяемую выражением (9.7),

Рис. 9.2. Направления $\hat{\mathbf{n}}$ и $\hat{\mathbf{s}}$ для граничного условия (9.18).



а в диффузионное уравнение входит единственная скалярная функция $U_d(\mathbf{r})$. Вследствие такого приближенного представления граничное условие (9.17) не может удовлетворяться точно, и нужно рассмотреть некоторое приближенное граничное условие. Одним из таких приближений является условие, что на поверхности среды полный диффузный поток, направленный внутрь, должен обращаться в нуль:

$$\int_{2\pi} I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\omega = 0, \quad (9.18)$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали к поверхности, направленный внутрь среды, а интегрирование проводится по полусфере $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$ (рис. 9.2).

Условие (9.18) может быть выражено через одну лишь среднюю интенсивность U_d . Для этого запишем сначала $\mathbf{F}_d$ в виде

¹⁾ Уравнение диффузии, зависящее от времени, имеет вид $D \nabla^2 u - au = \partial u / \partial t$, где D — коэффициент диффузии, а a описывает абсорбцию ([108], разд. 2.4).

суммы нормальной (F_{dn}) и тангенциальной (F_{dt}) к поверхности компонент:

$$\mathbf{F}_d = F_{dn} \hat{\mathbf{n}} + F_{dt} \hat{\mathbf{t}}. \quad (9.19)$$

Подставим теперь (9.7) и (9.19) в (9.18) и выполним интегрирование, используя сферическую систему координат с $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{n}}$ и $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{t}}$:

$$\int_{2\pi} (F_{dt} \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\omega = F_{dt} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = 0, \quad (9.20)$$

$$\int_{2\pi} (F_{dn} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\omega = F_{dn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{2\pi}{3} F_{dn}.$$

Тогда граничное условие (9.18) примет вид

$$\frac{1}{2} U_d(\mathbf{r}_s) + \frac{F_{dn}(\mathbf{r}_s)}{4\pi} = 0 \text{ на поверхности } \mathbf{r} = \mathbf{r}_s. \quad (9.21)$$

Далее, выразим F_{dn} в (9.21) через U_d , используя (9.13):

$$F_{dn} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_d = -\frac{4\pi}{3\rho\sigma_{tr}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \text{grad } U_d(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q}_1(\mathbf{r}), \quad (9.22)$$

где

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho\sigma_{tr}} \int_{4\pi} [\varepsilon_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})] \hat{\mathbf{s}} d\omega.$$

В отсутствие источников $\varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = 0$, используя (9.2), запишем

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_t}{\sigma_{tr}} \int_{4\pi} d\omega' \left[\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \hat{\mathbf{s}} d\omega \right] I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}'). \quad (9.23)$$

Заметим, что если рассеиватели изотропны, то $p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = \text{const}$, и $\mathbf{Q}_1 = 0$. Поэтому $\mathbf{Q}_1$ описывает влияние анизотропии на картину рассеяния.

Подставив (9.22) в (9.21), получим граничное условие, выраженное через U_d :

$$U_d(\mathbf{r}_s) - \frac{2}{3\rho\sigma_{tr}} \frac{\partial}{\partial n} U_d(\mathbf{r}_s) + \frac{2\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q}_1(\mathbf{r}_s)}{4\pi} = 0, \quad (9.24)$$

где $\partial/\partial n$ — нормальная производная по направлению внутрь среды.

Следует подчеркнуть, что граничное условие (9.24) является лишь приближенным. Фактически диффузионное приближение, как известно, само по себе справедливо лишь для области, достаточно удаленной от границ и источников. Можно получить некоторое представление о том, насколько приближенным яв-

ляется граничное условие (9.24), сравнив его с точным граничным условием для частного случая. Такое сравнение можно провести для задачи изотропных рассеивателей, для которой в случае полубесконечного слоя известно точное решение. Эта задача известна под названием проблемы Милна. Точное решение ее можно разделить на две части, одна из которых удовлетворяет диффузионному уравнению (разд. 12.2 и 12.6). Эта часть удовлетворяет граничному условию

$$U_d(\mathbf{r}_s) = \frac{0,7104}{\rho\sigma_t W_0} \frac{\partial}{\partial n} U_d(\mathbf{r}_s) = 0, \quad (9.25)$$

справедливому с точностью до 0,7% в случае, когда альбедо $W_0 = \sigma_s/\sigma_t$ заключено в интервале $0,6 \leq W_0 \leq 1$. Заметим, что для изотропных рассеивателей $\mathbf{Q}_1 = 0$, а константа $2/3\rho\sigma_{tr}$ в (9.24) сводится к $2/3\rho\sigma_t$. Эту константу нужно сравнить с величиной $0,7104/\rho\sigma_t W_0$ в (9.25). Ясно, что множитель $2/3$ в (9.24) нужно рассматривать лишь как некоторое приближение и что решение в диффузионном приближении должно быть справедливо, только когда альбедо W_0 близко к единице и частицы в основном рассеивают, а не поглощают.

9.3. Падение коллимированного пучка на слой рассеивающих частиц

В качестве примера применения диффузионного уравнения рассмотрим случай коллимированного пучка, падающего нормально на слой со случайными частицами (рис. 9.3).

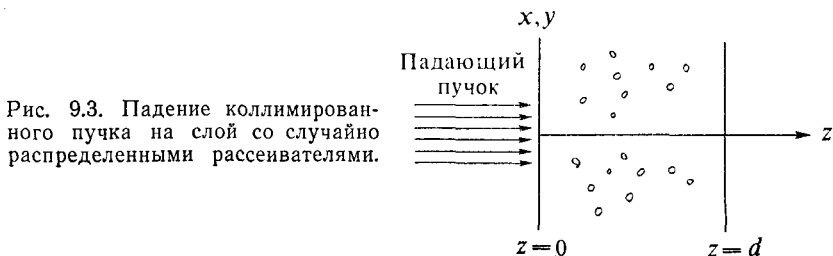


Рис. 9.3. Падение коллимированного пучка на слой со случайно распределенными рассеивателями.

Рассмотрим прежде всего диффузионное уравнение (9.16). Ослабленная падающая интенсивность для коллимированного пучка, изображенного на рис. 9.3, дается выражением (разд. 8.3)

$$I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = F_0(\rho) \exp(-\rho\sigma_t z) \delta(\hat{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{w}}_z), \quad (9.26)$$

где $F_0(\rho)$ — плотность потока (7.33), $\hat{\mathbf{p}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{w}}$ и $\hat{\mathbf{w}}_z$ — единичные векторы в направлениях $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$ соответственно, а

$\delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_z)$ — дельта-функция по телесному углу. При этом другие источники излучения в среде отсутствуют. Поэтому $E(\mathbf{r}) = 0$ и $\varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = 0$. Подставив (9.26) в (9.2) и (9.8), можно выразить член с источниками в правой части (9.16) через F_0 . Заметим, что

$$U_{ri}(\mathbf{r}) = \frac{F_0(\rho)}{4\pi} \exp(-\rho\sigma_t z), \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_{4\pi} \mathbf{e}_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega &= \left[\frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{z}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega \right] \cdot \nabla [F_0(\rho) \exp(-\rho\sigma_t z)] = \\ &= -(\rho\sigma_t)^2 \rho_1 F_0(\rho) \exp(-\rho\sigma_t z), \end{aligned}$$

где учтено, что вектор $\int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{z}}) \hat{\mathbf{s}} d\omega$ направлен вдоль оси z .

Подставив (9.27) в (9.16), получим следующее диффузионное уравнение, применимое к случаю коллимированного падающего пучка:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_d(\mathbf{r}) - \kappa_d^2 U_d(\mathbf{r}) &= -Q(\mathbf{r}), \quad \kappa_d^2 = 3(\rho\sigma_a)(\rho\sigma_{tr}), \\ Q(\mathbf{r}) &= [3\rho\sigma_s\rho\sigma_{tr} + 3\rho\sigma_s\rho\sigma_t\bar{\mu}] \frac{F_0(\rho)}{4\pi} \exp(-\rho\sigma_t z). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Граничные условия для слоя, показанного на рис. 9.3, даются выражением (9.24), которое можно записать в форме

$$\begin{aligned} U_d(\mathbf{r}) - h \frac{\partial}{\partial z} U_d(\mathbf{r}) + \frac{Q_1(\mathbf{r})}{2\pi} &= 0 \quad \text{при } z=0, \\ U_d(\mathbf{r}) + h \frac{\partial}{\partial z} U_d(\mathbf{r}) - \frac{Q_1(\mathbf{r})}{2\pi} &= 0 \quad \text{при } z=d, \end{aligned} \quad (9.29)$$

где $h = 2/3\rho\sigma_{tr}$ и $Q_1(\mathbf{r}) = (\sigma_s\bar{\mu}/\sigma_{tr}) F_0(\rho) \exp(-\rho\sigma_t z)$.

Если средняя диффузная интенсивность $U_d(\mathbf{r})$ найдена, то поток и диффузную интенсивность можно найти из (9.13) и (9.7):

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_s\bar{\mu}F_0(\rho)}{\sigma_{tr}} \exp(-\rho\sigma_t z) \hat{\mathbf{z}} - \frac{4\pi}{3\rho\sigma_{tr}} \text{grad } U_d(\mathbf{r}). \quad (9.30)$$

Для среды с высокой плотностью σ_s и σ_{tr} в (9.28) — (9.30) нужно заменить на соответствующие величины, согласно (9.15а) и (9.15б).

9.4. Решение для случая плоской волны, падающей на слой рассеивающих частиц

Случай плоской волны, падающей на слой рассеивающих частиц, можно проанализировать в рамках теории, развитой в предыдущем разделе. Для плоской волны $F_0(\rho)$ в (9.26) переходит

в константу F_0 , а (9.28) дает

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_d(z) - \kappa_d^2 U_d(z) = -Q_0 \exp(-\rho \sigma_t z), \quad (9.31)$$

где $Q_0 = [3\rho \sigma_s \rho \sigma_{tr} + 3\rho \sigma_s \rho \sigma_t \bar{\mu}] F_0 / 4\pi$. Граничные условия (9.29) принимают вид

$$\begin{aligned} U_d(z) - h \frac{\partial}{\partial z} U_d(z) + \frac{Q_1(z)}{2\pi} &= 0 \quad \text{при } z=0, \\ U_d(z) + h \frac{\partial}{\partial z} U_d(z) - \frac{Q_1(z)}{2\pi} &= 0 \quad \text{при } z=d, \end{aligned} \quad (9.32)$$

где $Q_1(z) = (\sigma_s \bar{\mu} / \sigma_{tr}) F_0 \exp(-\rho \sigma_t z)$ и $h = 2/3\rho \sigma_{tr}$. Общее решение (9.31) есть сумма частного решения U_{dp} и решения однородного уравнения U_{dc} . Для того чтобы найти частное решение, положим

$$U_{dp}(z) = A \exp(-\rho \sigma_t z). \quad (9.33)$$

Подставляя (9.33) в (9.31), находим

$$A = -Q_0 / [(\rho \sigma_t)^2 - \kappa_d^2]. \quad (9.34)$$

Величина U_{dc} удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{dc} - \kappa_d^2 U_{dc} = 0, \quad (9.35)$$

так что

$$U_{dc}(z) = C_1 \exp(\kappa_d z) + C_2 \exp(-\kappa_d z), \quad (9.36)$$

где C_1 и C_2 — неизвестные постоянные, которые определяются с помощью граничных условий (9.32). Подставляя $U_d(z) = U_{dp}(z) + U_{dc}(z)$ в (9.32), получаем два уравнения для двух неизвестных C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} C_1(1 - \kappa_d h) + C_2(1 + \kappa_d h) &= -A(1 + \rho \sigma_t h) - \frac{Q_1(0)}{2\pi}, \\ C_1(1 + \kappa_d h) \exp(\kappa_d d) + C_2(1 - \kappa_d h) \exp(-\kappa_d d) &= \\ &= -A(1 - \rho \sigma_t h) \exp(-\rho \sigma_t d) + \frac{Q_1(0)}{2\pi} \exp(-\rho \sigma_t d). \end{aligned} \quad (9.37)$$

Отсюда легко найти C_1 и C_2 .

Можно показать, что в случае полубесконечной среды ($d \rightarrow \infty$) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} C_1 \rightarrow 0, \quad C_2 \rightarrow -\frac{A(1 + \rho \sigma_t h)}{(1 + \kappa_d h)} - \frac{Q_1}{2\pi(1 + \kappa_d/h)}, \\ U_d(z) = A \exp(-\rho \sigma_t z) + C_2 \exp(-\kappa_d z). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Поток $F_d(z)$ можно вычислить из (9.30). Более того, если рассеиватели не поглощают, то $\sigma_a \rightarrow 0$ и

$$F_d(z) = -F_0 \exp(-\rho \sigma_t z) \hat{z}. \quad (9.39)$$

Это показывает, что в непоглощающей полубесконечной среде диффузный поток F_d равен по величине и противоположен по направлению ослабленному падающему потоку $F_{ri}(z) = F_0 \exp(-\rho \sigma_t z) \hat{z}$. Физически это означает, что, хотя падающий поток F_0 и диффундирует в среде, в конечном итоге весь поток F_0 рассеивается обратно и возвращается в направлении $-z$.

В случае полного отсутствия потерь $\kappa_d = 0$, и (9.35) переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{dc} = 0. \quad (9.40)$$

При этом вместо (9.36) решение можно записать в виде

$$U_{dc}(z) = C_1 z + C_2. \quad (9.41)$$

Используя граничные условия (9.32), легко найти отсюда решение для непоглощающих рассеивателей.

9.5. Решение для случая коллимированного пучка конечной ширины, падающего на слой рассеивающих частиц

Общее решение (9.28) и (9.29) может быть получено с помощью функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \kappa_d^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - h \frac{\partial}{\partial z} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \quad \text{при } z=0, \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + h \frac{\partial}{\partial z} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \quad \text{при } z=d. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Используя вторую формулу Грина

$$\int [u \nabla^2 v - v \nabla^2 u] dV = \int \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] da, \quad (9.43)$$

где $\partial/\partial n$ — производная в направлении внешней нормали, можно получить полное решение U_d :

$$U_d(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') dV' + \int_s \frac{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q_1(\mathbf{r}')}{2\pi h} da', \quad (9.44)$$

где объем V ограничивается условиями $0 \leq z \leq d$ и $-\infty \leq x, y \leq +\infty$. Функция Грина в цилиндрической системе

координат $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, выраженными через (ρ, ϕ, z) и (ρ', ϕ', z') соответственно, имеет вид [101]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[i m(\phi - \phi')]}{2\pi} \frac{Z_n(z) Z_n(z')}{N_n^2} K_m(\lambda_n \rho) I_m(\lambda_n \rho') \quad (9.45)$$

для $\rho > \rho'$. Для $\rho < \rho'$ нужно поменять местами ρ и ρ' в (9.45). Здесь K_m и I_m — модифицированные функции Бесселя [75], а $Z_n(z)$ — собственная функция, удовлетворяющая граничному условию (9.42) и имеющая вид

$$Z_n(z) = \sin(k_n z + \gamma_n), \quad (9.46)$$

где собственное значение k_n удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} k_n d = 2hk_n / [(hk_n)^2 - 1], \quad (9.47)$$

а $\gamma_n = \arctg(hk_n)$. Нормировочный множитель N_n^2 равен

$$N_n^2 = \int_0^d (Z_n(z))^2 dz, \quad (9.48)$$

а λ_n связано с k_n соотношением

$$\lambda_n^2 = k_n^2 + \kappa_d^2. \quad (9.49)$$

Подставив теперь (9.45) в (9.44), мы получим окончательное решение. Если коллимированный пучок симметричен относительно оси z , то $F_0(\mathbf{r})$ становится функцией только от модуля ρ . При этом U_d не зависит от ϕ , так что

$$U_d(\rho, z) = 2\pi \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^d dz' G_0(\rho, z; \rho', z') Q(\rho', z') + \\ + \frac{1}{h} \int_0^\infty \rho' d\rho' G_0(\rho, z; \rho', 0) Q_1(\rho', 0), \quad (9.50)$$

где

$$G_0(\rho, z; \rho', z') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(z) Z_n(z')}{2\pi N_n^2} K_0(\lambda_n \rho) I_0(\lambda_n \rho')$$

при $\rho > \rho'$; при $\rho < \rho'$ нужно поменять местами ρ и ρ' .

Решение, кратко описанное в данном разделе, использовалось при определении диффузионных характеристик крови [78, 79, 126] (об отражении света от крови см. [4]). На основе этой

теории была построена модель волоконнооптического катетера, используемого для спектрофотометрических измерений содержания кислорода (насыщения кислородом) в крови. Теория сравнивалась с данными по отражению в катетерах при физиологических вариациях в крови HbCO , HbO_2 и гематокрита. При этом наблюдалось превосходное согласие предсказаний теории с результатами эксперимента, подтверждающее правильность теоретического подхода, развитого в данной главе [125].

9.6. Диффузия от точечного источника

Рассмотрим диффузию мощности от точечного источника, локализованного в начале координат в неограниченном пространстве, содержащем случайные рассеиватели, и излучающего полную мощность P_0 , которая распределяется равномерно по всем направлениям. Соответствующий такой постановке задачи источник, согласно (7.35), описывается функцией

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{P_0}{4\pi} \delta(\mathbf{r}). \quad (9.51)$$

Диффузионное уравнение (9.16) принимает вид

$$\nabla^2 U_d(\mathbf{r}) - \kappa_d^2 U_d(\mathbf{r}) = -\frac{3}{4\pi} \rho \sigma_{tr} P_0 \delta(\mathbf{r}), \quad (9.52)$$

а решение дается выражениями

$$U_d(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-\kappa_d r)}{4\pi r} \left[\frac{3}{4\pi} \rho \sigma_{tr} P_0 \right], \quad (9.53)$$

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(-\kappa_d r)}{4\pi r} \right] P_0 \hat{\mathbf{r}} = \left[\frac{\kappa_d}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r^2} \right] \exp(-\kappa_d r) P_0 \hat{\mathbf{r}}. \quad (9.54)$$

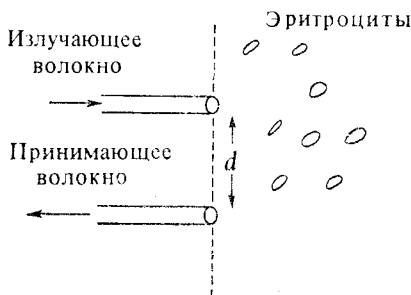
Заметим, что в случае непоглощающих рассеивателей $\kappa_d = 0$, и полный поток $4\pi r^2 F_d$ через сферическую поверхность радиуса r не зависит от r и равен P_0 , как это и должно быть в соответствии с законом сохранения энергии.

9.7. Измерение отражения с помощью двух волоконных световодов

Для измерения относительной отражательной способности в случае однородной среды с дискретными рассеивателями была сконструирована двухволоконная кювета ([125], см. также табл. 3.2, где приведены некоторые характеристики крови). Такая кювета использовалась с целью получения данных для про-

верки описанной в разд. 9.5 теории, на основе которой строится модель волоконнооптического катетера. Кювета состоит из двух параллельных оптических волокон: неподвижного излучающего

Рис. 9.4. Измерение отражения двумя волоконными световодами



волокна диаметром 0,508 мм, которое контактирует с поверхностью рассеивающей среды по нормали к ней, и принимающего

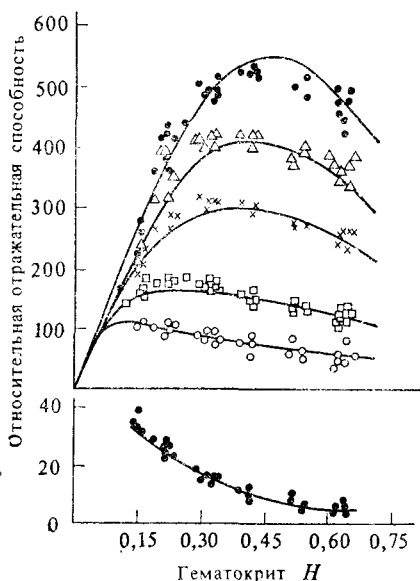


Рис. 9.5. Сравнение теории с экспериментальными результатами для отражательной способности цельной крови человека как функции гематокрита для шести различных расстояний между волокнами при длине волны $\lambda = 0,685$ мкм и насыщении кислородом 98,5%. Радиальные расстояния между волокнами (сверху вниз) 0,54, 0,74, 0,90, 1,27, 1,66 и 2,85 мм.

волокна диаметром 0,127 мм, которое также контактирует с рассеивающей средой, но может непрерывно смещаться вдоль радиуса на расстояние ± 5 мм относительно центра излучающего

волокна. Как излучающая, так и принимающая апертуры во время измерений остаются в одной плоскости (рис. 9.4).

На рис. 9.5 теоретические значения, вычисленные на основе развитой в разд. 9.5 теории и характеристик крови из табл. 3.2, сравниваются с данными эксперимента. Из рис. 9.6 видно, что при расстоянии между катетерами примерно 0,9 мм отражательная способность не зависит от изменений плотности в пределах

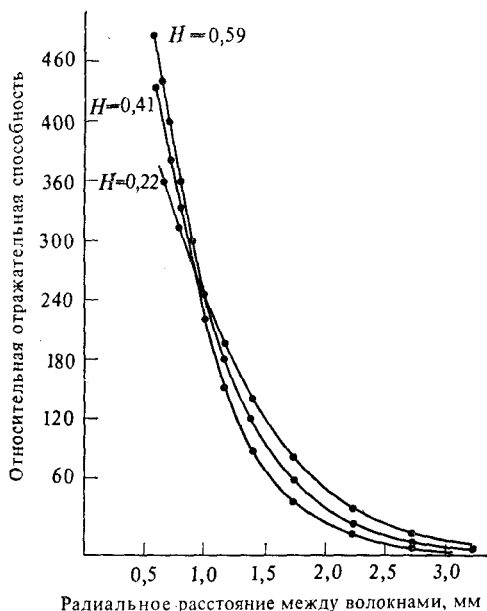


Рис. 9.6. Сравнение диффузионной теории с экспериментальными результатами (точки) для отражательной способности цельной крови человека как функции расстояния между волокнами при трех значениях гематокрита при длине волны $\lambda = 0,685$ мкм и насыщении кислородом 98,5%.

от $H = 0,22$ до $H = 0,59$. Это наводит на мысль, что если волокна фиксировать в оксиметрическом волоконнооптическом катетере на определенном расстоянии друг от друга, то можно исключить влияние изменений гематокрита на измерения насыщения кислородом.

9.8. Волоконнооптический оксиметрический катетер

Волоконнооптический катетер [125] облучает кровь светом, передаваемым на дальний конец катетера при помощи оптических волокон (рис. 9.7). Свет рассеивается обратно красными кровяными тельцами, находящимися вблизи дальнего конца ка-

тетера, и передается по второму пучку оптических волокон на другой конец катетера для определения насыщения крови кислородом. Кольцевая конфигурация волоконного катетера, пока-

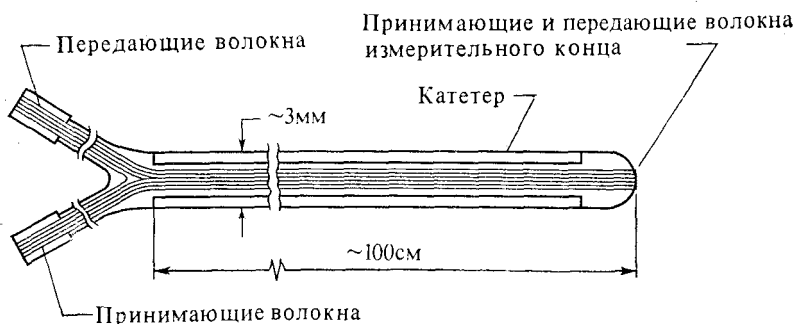


Рис. 9.7. Схема устройства волоконнооптического катетера.

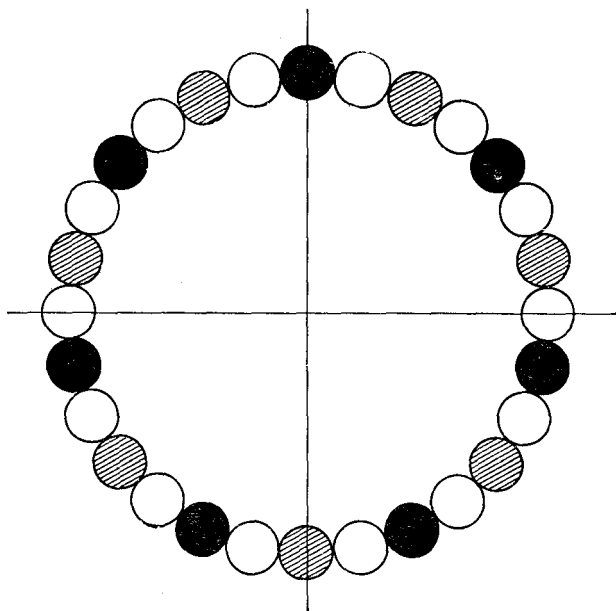


Рис. 9.8. Кольцевая конфигурация катетера. Черные волокна излучают на длине волны 0,686 мкм, заштрихованные — на длине волны 0,925 мкм, светлые волокна принимают отраженное излучение.

занная на рис. 9.8, состоит из чередующейся последовательности оптических волокон. Четвертая часть всех волокон излучает свет с длиной волны $\approx 0,9$ мкм, другая четвертая часть — свет с длиной волны 0,68 мкм; половина волокон используется для приема.

Измерение отношения интенсивностей обратного рассеяния на двух длинах волн, одна из которых более чувствительна к насыщению кислородом (0,6—0,7 мкм), а другая (0,8—0,9 мкм) — относительно нечувствительна, исключает влияние изменений pH и скорости потока крови, которые приблизительно одинаково влияют на отражательную способность крови на обеих длинах волн.

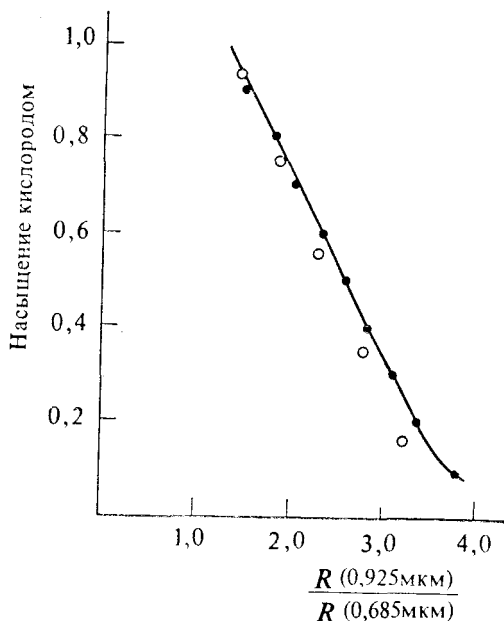


Рис. 9.9. Зависимость насыщения кислородом от отношения отражательных способностей при длине волны 0,925 мкм и при длине волны 0,685 мкм. Черные точки — диффузионная теория, светлые — экспериментальные данные.

Побудительная причина для построения модели волоконно-оптического катетера состоит в необходимости получения теоретического критерия для конструирования конфигурации волокон в измерительном конце катетера, который будет использоваться для определения насыщения крови кислородом. Насыщение кислородом OS определяется отношением количества оксигемоглобина к количеству всего гемоглобина. Эмпирически установлено следующее выражение для насыщения крови кислородом через инфракрасную отражательную способность R_i и отражательную способность в красной области спектра R_r :

$$OS = A - BR_i/R_r, \quad (9.55)$$

где R_i и R_r — интенсивности обратного рассеяния для длин волн 0,960 и 0,685 мкм соответственно, а постоянные A и B (завися-

щие от геометрии пучка волокон) и параметры крови могут быть определены эмпирически. Таким образом, для различных конфигураций постоянные A и B различны, и для точной клинической проверки *in vivo* работоспособности волоконнооптического оксиметра при каждой конфигурации волокон необходима калибровочная кривая. Такая кривая изучалась многими исследователями. На рис. 9.9 сплошной линией показана калибровочная кривая, полученная теоретически для модели катетера, а точки соответствуют экспериментальной калибровке катетера.

Двухпотоковая и четырехпотоковая теории

В теории переноса волна, распространяющаяся в облаке случайных частиц, описывается лучевой интенсивностью $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$, которая в общем случае зависит от положения $\mathbf{r}$ и направления $\hat{\mathbf{s}}$ в трехмерном пространстве. Однако в задачах, связанных с нормальным падением плоской волны на плоскостойкую случайной-неоднородную среду, лучевая интенсивность является функцией одной пространственной переменной z и угла θ : $I = I(z, \theta)$. Общее замкнутое решение при произвольной фазовой функции даже в этом простом случае не найдено. Как описано в гл. 11, для решения общей задачи с успехом используется метод разложения в ряд, и этот метод дает результат, сходящийся к точному решению при увеличении числа членов разложения. Однако такой подход при достаточно большом числе членов разложения требует значительных затрат машинного времени. Вместо метода разложения в ряд ранее широко использовались методы, известные под названием двух- и четырехпотоковой теорий. Они не требуют ничего, кроме простых алгебраических операций, и, как было показано, дают сравнительно хорошее согласие с экспериментом. Недостатки этих методов состоят в том, что некоторые коэффициенты приходится определять эмпирически, границы применимости недостаточно хорошо установлены и нет полного теоретического обоснования [25, 58, 91, 92, 110, 124].

10.1. Двухпотоковая теория Кубелки и Мунка

В 1931 г. Кубелка и Мунк разработали теорию, основанную на модели двух световых потоков, распространяющихся в прямом и обратном направлениях. Впоследствии многие авторы улучшали эту теорию и сравнивали ее выводы с данными эксперимента. Было найдено, что двухпотоковая теория хорошо описывает экспериментальные результаты, если освещение диффузно и среда достаточно замутнена, так что свет рассеивается диффузно. Двухпотоковая теория неприменима для описания падающего на среду коллимированного пучка. В этом случае следует использовать четырехпотоковую теорию (разд. 10.3).

Рассмотрим диффузные потоки $F_+(z)$ и $F_-(z)$, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси z

соответственно. Внутри бесконечно малого элемента dz поток в положительном направлении F_+ уменьшается вследствие поглощения и рассеяния в обратном направлении (рис. 10.1):

$$dF_+ = -(K + S)F_+\rho\sigma_t dz = -(K + S)F_+ d\tau, \quad (10.1)$$

где ρ — число частиц в единице объема, σ_t — полное сечение для отдельной частицы, $K\sigma_t$ — эффективное сечение поглощения для F_+ , K — безразмерный коэффициент поглощения, а $\tau = \rho\sigma_t z$ — оптическая длина. На первый взгляд можно подумать, что $K\sigma_t$ равно сечению поглощения частицы σ_a . Однако это не так, поскольку $K\sigma_t$ описывает поглощение диффузного потока F_+ и отличается от сечения поглощения σ_a , определенного для случая

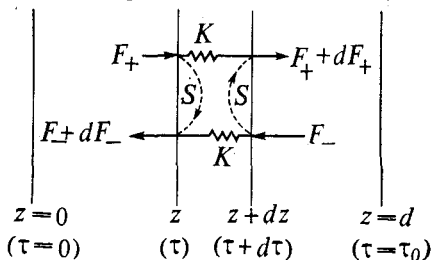


Рис. 10.1. Поток в прямом и обратном направлениях F_+ и F_- . Коэффициенты K и S описывают поглощение и рассеяние.

падения плоской волны. В действительности, как будет показано ниже, $K\sigma_t$ приближенно равно $2\sigma_a$. Можно также было бы подумать, что $S\sigma_t$ равно сечению обратного рассеяния σ_{s-} , которое представляет собой интеграл от дифференциального сечения по телесному углу 2π в обратном направлении. Хотя произведение $S\sigma_t$ каким-то образом связано с σ_{s-} , его величина зависит еще и от того, что F_+ есть диффузный поток. Как видно из приведенных соображений, величины K и S не связаны явно с физическими параметрами отдельной частицы, и в этом состоит одна из слабостей рассматриваемой теории. В разд. 10.2 мы попытаемся связать эти коэффициенты на основе точной формулировки уравнения переноса излучения. Однако в данном разделе мы будем трактовать K и S как коэффициенты поглощения и рассеяния, которые нужно определять экспериментально.

Поток F_+ уменьшается согласно (10.1), но одновременно его величина возрастает из-за вклада от обратного рассеяния потока F_- (рис. 10.1). Поскольку этот вклад описывается тем же коэффициентом обратного рассеяния S , имеем

$$dF_+ = SF_-\rho\sigma_t dz = SF_- d\tau. \quad (10.2)$$

Аналогично F_- уменьшается на величину

$$dF_- = -(K + S)F_-\rho\sigma_t (-dz) = (K + S)F_- d\tau$$

и возрастает на величину

$$dF_- = SF_+\rho\sigma_t (-dz) = -SF_+ d\tau.$$

Отсюда получаем два связанных дифференциальных уравнения:

$$\frac{dF_+}{d\tau} = -(K + S)F_+ + SF_-, \quad \frac{dF_-}{d\tau} = (K + S)F_- - SF_+. \quad (10.3)$$

Решения уравнений (10.3) получаются¹⁾ в предположении экспоненциальной зависимости от τ ($\sim \exp(\alpha\tau)$) потоков F_+ и F_- . Тогда $d/d\tau = \alpha$, и из (10.3) мы получаем

$$[\alpha + (K + S)]F_+ - SF_- = 0, \quad SF_+ + [\alpha - (K + S)]F_- = 0. \quad (10.4)$$

Для получения ненулевых решений F_+ и F_- нужно приравнять нулю определитель, составленный из коэффициентов уравнений (10.4):

$$\begin{vmatrix} \alpha + (K + S) & -S \\ S & \alpha - (K + S) \end{vmatrix} = 0, \quad (10.5)$$

откуда получаются два значения α :

$$\alpha_{\pm} = \pm \sqrt{K(K + 2S)} = \pm \alpha_0. \quad (10.6)$$

При каждом значении α отношение F_-/F_+ дается одним из уравнений (10.4):

$$A_+ = \frac{F_-}{F_+} = \frac{\alpha_+ + (K + S)}{S} = -\frac{S}{\alpha_+ - (K + S)} = \frac{K + 2S + \alpha_0}{K + 2S - \alpha_0} \quad \text{для } \alpha_+, \quad (10.7)$$

$$A_- = \frac{F_-}{F_+} = \frac{1}{A_+} \quad \text{для } \alpha_-.$$

Полные выражения для F_+ и F_- являются линейными комбинациями двух решений для $\alpha_+ = \alpha_0$ и $\alpha_- = -\alpha_0$:

$$F_+(\tau) = C_1 e^{\alpha_+ \tau} + C_2 e^{\alpha_- \tau}, \quad F_-(\tau) = C_1 A_+ e^{\alpha_+ \tau} + C_2 A_- e^{\alpha_- \tau}, \quad (10.8)$$

где C_1 и C_2 — неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий.

Простейшие граничные условия следующие: при $\tau = 0$ поток в положительном направлении F_+ равен падающему потоку F_0 , а при $\tau = \tau_0$ падающий на слой поток в обратном направлении F_- отсутствует:

$$F_+(0) = F_0, \quad F_-(\tau_0) = 0. \quad (10.9)$$

Подставляя (10.8) в эти два граничных условия, получаем

$$\frac{C_1}{F_0} = \frac{A_- \exp(\alpha_- \tau_0)}{\Delta}, \quad \frac{C_2}{F_0} = -\frac{A_+ \exp(\alpha_+ \tau_0)}{\Delta}, \quad (10.10)$$

$$\Delta = A_- \exp(\alpha_- \tau_0) - A_+ \exp(\alpha_+ \tau_0).$$

¹⁾ Общая методика, использующая собственные значения и собственные векторы, изложена в разд. 11.4.

Коэффициент отражения R при $\tau = 0$ дается выражением

$$R = \frac{F_-(0)}{F_0} = C_1 A_+ + C_2 A_- = A_- \left[\frac{1 - \exp(-2\alpha_0 \tau_0)}{1 - A_-^2 \exp(-2\alpha_0 \tau_0)} \right], \quad (10.11)$$

а коэффициент пропускания T при $\tau = \tau_0$ — выражением

$$T = \frac{F_+(\tau_0)}{F_0} = C_1 \exp(\alpha_0 \tau_0) + C_2 \exp(-\alpha_0 \tau_0) = \frac{(1 - A_-^2) \exp(-\alpha_0 \tau_0)}{1 - A_-^2 \exp(-2\alpha_0 \tau_0)}, \quad (10.12)$$

где A_- определяется из (10.7):

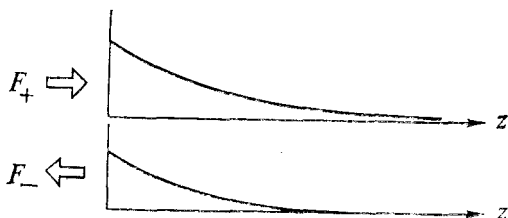
$$A_- = S/(K + S + \alpha_0). \quad (10.13)$$

Если среда полубесконечна ($\tau_0 \rightarrow \infty$), то $C_1 = 0$, $C_2 = F_0$ и

$$F_+(\tau) = F_0 e^{-\alpha \tau}, \quad F_-(\tau) = F_0 A_- e^{-\alpha \tau}. \quad (10.14)$$

Отсюда видно, что поток в положительном направлении F_+ уменьшается с увеличением z , а поток в отрицательном направ-

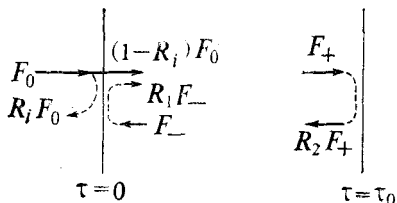
Рис. 10.2. Потоки в прямом и обратном направлениях для случая полубесконечной среды.



лении F_- возрастает с уменьшением z . Полный поток в положительном направлении есть $F_+(\tau) - F_-(\tau)$ (рис. 10.2).

Граничные условия (10.9) не учитывают отражения на границах при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$. Отражение можно учесть следующим

Рис. 10.3. Отражение и прохождение на границах.



образом. Пусть R_i — коэффициент отражения падающей волны при $\tau = 0$, R_1 — коэффициент отражения для потока F_- , падающего справа на поверхность $\tau = 0$, а R_2 — коэффициент отражения для потока F_+ , падающего слева на поверхность $\tau = \tau_0$ (рис. 10.3). Тогда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} F_+(0) &= (1 - R_i) F_0 + R_1 F_-(0) & \text{при } \tau = 0, \\ F_-(\tau_0) &= R_2 F_+(\tau_0) & \text{при } \tau = \tau_0. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Подставляя (10.8) в (10.15), получаем

$$\begin{aligned}\frac{C_1}{(1-R_l)F_0} &= \frac{(A_- - R_2) \exp(\alpha_- \tau_0)}{\Delta}, \\ \frac{C_2}{(1-R_l)F_0} &= - \frac{(A_+ - R_2) \exp(\alpha_+ \tau_0)}{\Delta},\end{aligned}\quad (10.16)$$

$$\Delta = (1 - R_1 A_+) (A_- - R_2) \exp(\alpha_- \tau_0) - (1 - R_1 A_-) (A_+ - R_2) \exp(\alpha_+ \tau_0).$$

Коэффициент отражения при $\tau = 0$ равен

$$R = \frac{R_l + (1 - R_1) F_-(0)}{F_0}, \quad (10.17)$$

а коэффициент пропускания при $\tau = \tau_0$ равен

$$T = (1 - R_2) F_+(\tau_0). \quad (10.18)$$

10.2. Коэффициенты K и S в двухпоточковой теории

Формулировки, приведенные в предыдущем разделе, основаны на упрощенной модели, которая предполагает наличие лишь двух потоков F_+ и F_- , связанных посредством коэффициентов K и S . Предпринимались попытки экспериментально связать эти коэффициенты с характеристиками отдельной частицы. Оказалось [110], что произведение $K\sigma_t$ всегда близко к удвоенному сечению поглощения σ_a , а $S\sigma_t$ близко к $3/4 W_0 - 1/4 W_1$, где W_0 — альбеда, а W_1 — первый коэффициент разложения фазовой функции $p(\mu, \phi; \mu', \phi')$:

$$\begin{aligned}p_0(\mu, \mu') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' p(\mu, \phi; \mu', \phi') = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n P_n(\mu) P_n(\mu'),\end{aligned}\quad (10.19)$$

где $P_n(\mu)$ — функции Лежандра степени n .

Как показано в приложении 10. А, двухпоточковые уравнения (10.3) можно вывести из уравнения переноса. Однако коэффициенты в получаемых таким образом уравнениях непостоянны, а зависят от угловых характеристик лучевых интенсивностей. Более того, коэффициенты K и S первого уравнения (10.3) оказываются отличными от коэффициентов K и S второго уравнения. Эти коэффициенты становятся постоянными, если предположить, что лучевые интенсивности полностью диффузны и

почти изотропны (не зависят от направления). В этом случае имеем

$$K = 2(1 - W_0) = 2(\sigma_a/\sigma_t), \quad (10.20)$$

$$S = W_0 - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ нечетно}}}^{\infty} W_n C_n^2, \quad (10.21)$$

где величины C_n^2 равны $1/4, 1/64, 1/256, \dots$ для $n = 1, 3, 5, \dots$ (приложение 10А). Выражение (10.20) согласуется с экспериментальными данными [110] и с теоретическими предсказаниями Кубелки [91], однако (10.21) слегка отличается от экспериментального значения $3/4 W_0 - 1/4 W_1$ [110].

Поучительно сравнить постоянную поглощения α_0 , даваемую выражением (10.6), с постоянной поглощения κ_d в диффузионной теории (9.16):

$$\kappa_d = \{3\rho\sigma_a\rho[\sigma_s(1 - \bar{\mu}) + \sigma_a]\}^{1/2}. \quad (10.22)$$

Заметив, что $\bar{\mu} = W_1/3W_0$, получим

$$\frac{\kappa_d}{\rho\sigma_t} = \left\{ \frac{\sigma_a}{\sigma_t} \left[3W_0 - W_1 + 3 \frac{\sigma_a}{\sigma_t} \right] \right\}^{1/2}. \quad (10.23)$$

Экспериментальное значение $3/4 W_0 - 1/4 W_1$ [110] дает

$$\alpha_0 = \{(\sigma_a/\sigma_t)[3W_0 - W_1 + 4\sigma_a/\sigma_t]\}^{1/2}. \quad (10.24)$$

Если использовать $S = W_0 - 1/4 W_1$ из (10.21), то мы получим

$$\alpha_0 = (\sigma_a/\sigma_t)[4W_0 - W_1 + 4\sigma_a/\sigma_t]^{1/2}. \quad (10.25)$$

Выражения (10.23) — (10.25) близки, но не тождественны. Это указывает на то, что двухпотоковая теория оказывается близкой к диффузионной теории, если лучевые интенсивности почти полностью диффузны, однако связать коэффициенты из этой теории с характеристиками отдельной частицы сложно, и их необходимо определять экспериментально. Отсюда следует также, что, даже если эти коэффициенты измерены для некоторого определенного значения плотности рассеивателей, они оказываются непостоянными, и их значения могут быть различными для разных плотностей.

10.3. Четырехпотоковая теория

Описанная в предыдущих разделах двухпотоковая теория применима только к распространению диффузных интенсивностей. Но во многих современных приложениях источники излучают коллимированные пучки света с узкой спектральной поло-

сой. Если падающая волна коллимирована, то вследствие сильного различия характеристик диффузного и коллимированного излучения распространение света нельзя уже описывать только двумя диффузными потоками. Интенсивность коллимированного пучка ослабляется из-за рассеяния и поглощения частиц в среде (она называется «ослабленной падающей интенсивностью»). Часть мощности коллимированного пучка, рассеянная частицами, распространяется во всех направлениях в соответствии с характером индикатрисы рассеяния частицы (она называется «диффузной интенсивностью»). В четырехпотоковой теории перенос интенсивности описывается прямым и обратным коллимированными потоками и прямым и обратным диффузными потоками. Коллимированные потоки, характеризующиеся ослабленными интенсивностями, затухают из-за поглощения и рассеяния и, непрерывно рассеиваясь, преобразуются в диффузные. С другой стороны, диффузные потоки ослабляются из-за рассеяния и поглощения, но увеличиваются из-за трансформации коллимированного потока в диффузный. Очевидно, что диффузные потоки не могут преобразовываться в коллимированные.

Основываясь на высказанных соображениях, получим дифференциальные уравнения четырехпотоковой теории. Пусть F_{c+} и F_{c-} — прямой и обратный коллимированные потоки соответственно, а F_+ и F_- — прямой и обратный диффузные потоки. Коэффициенты K и S для диффузной интенсивности определены в предыдущих разделах. Введем еще коэффициент поглощения коллимированных пучков k , коэффициент рассеяния коллимированного пучка в диффузное излучение того же направления S_1 и коэффициент рассеяния коллимированного пучка в диффузное излучение обратного направления S_2 . Пользуясь этими определениями, нетрудно записать систему связанных уравнений для четырех потоков (рис. 10.4):

$$\begin{aligned} \frac{dF_{c+}}{d\tau} &= -(k + S_1 + S_2) F_{c+}, & \frac{dF_{c-}}{d\tau} &= (k + S_1 + S_2) F_{c-}, \\ \frac{dF_+}{d\tau} &= -(K + S) F_+ + S F_- + S_1 F_{c+} + S_2 F_{c-}, \\ \frac{dF_-}{d\tau} &= (K + S) F_- - S F_+ - S_1 F_{c-} - S_2 F_{c+}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Решение этой системы находится так же, как в двухпотоковой теории, и имеет вид

$$\begin{aligned} F_{c+} &= C_1 e^{-\lambda \tau}, & F_{c-} &= C_4 e^{\lambda \tau}, \\ F_+ &= C_1 A_1 e^{-\lambda \tau} + C_2 e^{-\alpha \tau} + C_3 e^{\alpha \tau} + C_4 A_4 e^{\lambda \tau}, \\ F_- &= C_1 B_1 e^{-\lambda \tau} + C_2 A_2 e^{-\alpha \tau} + C_3 A_3 e^{\alpha \tau} + C_4 B_4 e^{\lambda \tau}, \end{aligned} \quad (10.27)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — неизвестные постоянные, а

$$\lambda = k + S_1 + S_2, \quad \alpha_0 = [K(K + 2S)]^{1/2},$$

$$A_1 = B_4 = \frac{SS_2 + (K + S + \lambda)S_1}{\alpha_0^2 - \lambda^2}, \quad A_4 = B_1 = \frac{SS_1 + (K + S - \lambda)S_2}{\alpha_0^2 - \lambda^2},$$

$$A_2 = \frac{1}{A_3} = \frac{K + 2S - \alpha_0}{K + 2S + \alpha_0}.$$

Граничные условия в четырехпотоковой теории можно сформулировать аналогично (10.15). В результате получим

$$F_{c+}(0) = T_1 F_0 + R_1 F_{c-}(0),$$

$$F_+(0) = T_2 F_0 + R_2 F_{c-}(0) + R_3 F_-(0) \quad (\tau = 0),$$

$$F_{c-}(\tau_0) = R_4 F_{c+}(\tau_0), \quad F_-(\tau_0) = R_5 F_{c+}(\tau_0) + R_6 F_+(\tau_0) \quad (\tau = \tau_0).$$

Смысл постоянных $T_1, T_2, R_1, \dots, R_6$ понятен из рис. 10.5. Четыре условия (10.28) необходимы и достаточны для определения четырех неизвестных коэффициентов C_1, C_2, C_3 и C_4 в (10.27).

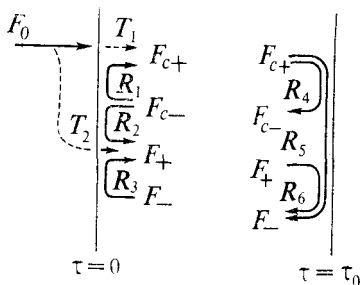
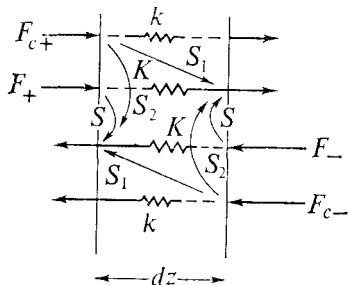


Рис. 10.4. Четырехпотоковая теория.

Рис. 10.5. Граничные условия в четырехпотоковой теории.

Четырехпотоковую теорию можно сравнить с теорией переноса излучения следующим образом. Разделим лучевую интенсивность I на коллимированную интенсивность I_c и диффузную интенсивность I_d . Коллимированная интенсивность имеет вид

$$I_c(\tau, \mu) = F_{c+}(\tau) \delta(\mu - 1) + F_{c-}(\tau) \delta(\mu + 1) \quad (10.29)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\mu \frac{dI_c}{d\tau} = -I_c. \quad (10.30)$$

Подставляя (10.29) в уравнение переноса и учитывая (10.30), получаем

$$\mu \frac{dI_c}{d\tau} = -I_d + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_0(\mu, \mu') I_d(\tau, \mu') d\mu' +$$

$$+ \frac{1}{2} p_0(\mu, 1) F_{c+} + \frac{1}{2} p_0(\mu, -1) F_{c-}. \quad (10.31)$$

Уравнения (10.30) и (10.31) можно записать в виде (10.26) и идентифицировать коэффициенты так же, как показано в приложении 10А. Если принять, что I_+ и I_- не зависят от μ , то о коэффициентах K и S можно сделать те же выводы, что и в (10А.7) и (10А.8). Можно также записать

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 d\mu p_0(\mu, 1), \quad S_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 d\mu p_0(\mu, 1), \quad (10.32)$$

$S_1 + S_2 = W_0$ и $k + S_1 + S_2 = 1$. Таким образом, $k = 1 - W_0$ и $k\sigma_t = \sigma_a$. Используя разложение (10.19), можно записать

$$S_1 = \frac{W_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ нечетно}}}^{\infty} W_n C_n, \quad S_2 = \frac{W_0}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ нечетно}}}^{\infty} W_n C_n, \quad (10.33)$$

где C_n дается выражением (10А.9).

Двух- и четырехпоточная теории нашли широкое применение в лакокрасочной и бумажной промышленности [110] и при оптическом определении содержания кислорода в крови [79].

Приложение 10А

В данном приложении мы выведем коэффициенты K и S из теории переноса излучения. При этом полученные результаты будут иметь интегральный вид и включать неизвестную угловую зависимость лучевых интенсивностей. Поэтому их нелегко использовать для вычисления коэффициентов K и S , однако они поясняют смысл этих коэффициентов.

Запишем уравнение переноса для плоскопараллельной геометрии (разд. 11.1) с учетом того, что $F_0 = 0$:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_0(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu'. \quad (10А.1)$$

Рассмотрим теперь лучевую интенсивность в положительном направлении $I_+(\tau, \mu)$ и лучевую интенсивность в отрицательном направлении $I_-(\tau, \mu)$:

$$\begin{aligned} I_+(\tau, \mu) &= \begin{cases} I(\tau, \mu) & \text{для } \mu > 0, \\ 0 & \text{для } \mu < 0, \end{cases} \\ I_-(\tau, \mu) &= \begin{cases} 0 & \text{для } \mu > 0, \\ I(\tau, \mu) & \text{для } \mu < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10А.2)$$

Запишем (10A.1), используя I_+ и I_- , в виде двух уравнений:

$$\mu \frac{dI_+}{d\tau} = -I_+ + \frac{1}{2} \int_0^1 p_0(\mu, \mu') I_+(\tau, \mu') d\mu' + \\ + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p_0(\mu, \mu') I_-(\tau, \mu') d\mu' \quad (\mu > 0), \quad (10A.3)$$

$$\mu \frac{dI_-}{d\tau} = -I_- + \frac{1}{2} \int_0^1 p_0(\mu, \mu') I_+(\tau, \mu') d\mu' + \\ + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p_0(\mu, \mu') I_-(\tau, \mu') d\mu' \quad (\mu > 0). \quad (10A.4)$$

Для того чтобы преобразовать (10A.3) и (10A.4) в уравнения для потоков, проинтегрируем (10A.3) по μ от 0 до 1, а (10A.4) — от -1 до 0. Замечая, что поток F_+ в положительном направлении и поток F_- в отрицательном направлении определяются выражениями

$$F_+ = 2\pi \int_0^1 I_+(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad F_- = -2\pi \int_{-1}^0 I_-(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad (10A.5)$$

преобразуем (10A.3) и (10A.4) к виду, соответствующему двухпотоковой теории:

$$\frac{dF_+}{d\tau} = -(K + S')_1 F_+ + S'_1 F_-, \quad \frac{dF_-}{d\tau} = (K + S')_2 F_- - S'_2 F_+, \quad (10A.6)$$

где

$$(K + S')_1 = \frac{\int_0^1 I_+(\tau, \mu) d\mu - \frac{1}{2} \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' p_0(\mu, \mu') I_+(\tau, \mu')}{\int_0^1 I_+(\tau, \mu) \mu d\mu}, \\ S'_1 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 d\mu \int_{-1}^0 d\mu' p_0(\mu, \mu') I_-(\tau, \mu')}{-\int_{-1}^0 I_-(\tau, \mu) \mu d\mu},$$

$$(K + S')_2 = \frac{\int_{-1}^0 I_- d\mu - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 d\mu \int_{-1}^0 d\mu' p_0(\mu, \mu') I_-}{0 - \int_{-1}^0 I_- \mu d\mu},$$

$$S'_2 = \frac{\frac{1}{2} \int_{-1}^0 d\mu \int_0^1 d\mu' p_0(\mu, \mu') I_+}{\int_0^1 I_+ \mu d\mu}.$$

Очевидно, что эти коэффициенты непостоянны и зависят от угловых характеристик I_+ и I_- . Более того, в общем случае в (10A.6) $(K + S')_1$ и S'_1 не равны $(K + S')_2$ и S'_2 . Однако эти коэффициенты становятся постоянными, если волна полностью диффузна. В этом случае I_+ и I_- становятся функциями только от τ и не зависят от угла μ , причем $(K + S')_1 = (K + S')_2$ и $S'_1 = S'_2$ и выполняются соотношения

$$(K + S')_1 - S'_1 = K = 2(1 - W_0), \quad (10A.7)$$

$$S'_1 = S'_2 = S = \int_{-1}^0 d\mu \int_0^1 d\mu' p_0(\mu, \mu'). \quad (10A.8)$$

Соотношение (10A.7) было выведено Кубелкой [91]. Оно эквивалентно условию $K\sigma_\tau = 2\sigma_a$ и подтверждает известный экспериментальный результат для диффузного света. Соотношение (10A.8) при учете разложения (10.19) принимает вид [101]

$$S = W_0 - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ нечетно}}}^{\infty} W_n C_n^2,$$

$$C_n = \int_0^1 p_n(\mu) d\mu = \frac{(-1) \cdot (-3) \dots (-n+2)}{(n+1)(n-1) \dots 2} \quad \text{для } n \geq 3, \quad (10A.9)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \quad \text{для } n = 1.$$

Величины C_n^2 равны $1/4$, $1/64$, $1/256$, ... для $n = 1, 3, 5, \dots$. Величина S в (10A.9) несколько отличается от экспериментального значения $3/4 W_0 - 1/4 W_1$ [109]. Это различие частично обусловлено членами с $n > 1$, которые могут объяснять отличие W_2 от $3/4 W_0$. Другая причина этого различия состоит в предположении о независимости I_+ и I_- от μ , использованном при выводе

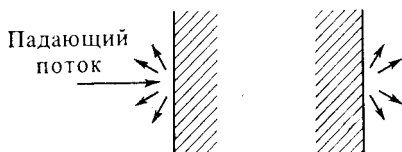
(10A.7) и (10A.8). Следует заметить, что для полностью диффузной волны это предположение не справедливо. Как уже указывалось в гл. 9, диффузная лучевая интенсивность должна иметь несколько большее значение в направлении вперед, чем в обратном направлении. В обозначениях данной главы более точное выражение для лучевой интенсивности можно записать в виде

$$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \frac{3}{4\pi} [F_+(\tau) - F_-(\tau)] \mu. \quad (10A.10)$$

Между тем соотношения (10A.7) и (10A.9) основаны на предположении, что $I(\tau, \mu) = I_+(\tau)$ для $\mu > 0$ и $I(\tau, \mu) = I_-(\tau)$ для $\mu < 0$.

Плоскопараллельная задача

Задача о распространении волн в среде, ограниченной параллельными плоскостями, широко изучалась в последнее время [31, 110, 148], поскольку она описывает множество физических ситуаций. Например, в виде плоскопараллельной среды можно представить атмосферы планет, облака и океан при освещении их солнцем или другими источниками излучения. Другими примерами являются биологические эксперименты, связанные с от-



а

Рис. 11.1. Диффузное отражение и прохождение (а) и закон затенения (б) для плоскопараллельной среды.



б

ражением при прохождении света через мазки крови и биологические ткани. В этих задачах представляет интерес нахождение энергетических характеристик отражения и прохождения (рис. 11.1, а). Если же энергия излучается внутри среды вдали от ее границы, то можно интересоваться угловой зависимостью выходящего из среды излучения (рис. 11.1, б), называемой законом затенения.

Задачу о плоской волне, падающей на плоскопараллельную среду со случайным распределением частиц, можно описать математически с помощью уравнения переноса, используя только две переменные — расстояние z и угол θ . В противоположность этому общая задача с произвольным возбуждением и произвольной средой требует для своего описания уравнения, зависящего

от пяти переменных: x , y , z , θ и ϕ . Точное решение, выраженное через известные функции в замкнутом виде, не найдено даже для задачи с двумя переменными.

В данной главе мы опишем метод, основанный на квадратурной формуле Гаусса ([31], гл. II и III), который позволяет легко получить численные решения на ЭВМ. При этом решение дается в виде ряда, точность которого возрастает с ростом числа его членов. Другое решение в виде ряда, использующее полиномы Лежандра, обсуждается кратко в разд. 11.6. Рассматриваемую задачу можно также сформулировать в виде интегрального уравнения, основываясь на «принципе инвариантности» и «инвариантном погружении». Эти вопросы изложены в превосходных учебниках [2, 12] и здесь не рассматриваются.

11.1. Нормальное падение плоской волны на плоскопараллельный слой

Рассмотрим плоскую волну с потоком мощности F_0 , падающую нормально на слой толщины d (оптическая толщина $\tau_0 = \rho\sigma_t d$; рис. 11.2).

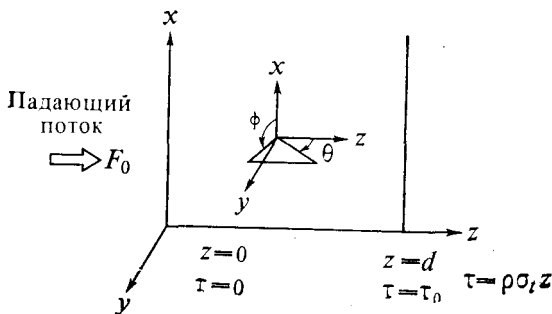


Рис. 11.2. Геометрия плоскопараллельной задачи и углы (θ, ϕ) для лучевой интенсивности.

Будем исходить из уравнения переноса

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})}{ds} = -\rho\sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') d\omega'. \quad (11.1)$$

Заметим прежде всего, что, поскольку геометрия задачи и падающая волна не зависят от x и y , интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ есть функция только от z и θ . Уравнение (11.1) удобно переписать, используя оптический путь $\tau = \rho\sigma_t z$ в направлении z . Разделим также лучевую интенсивность на ослабленную интенсивность I_n

и диффузную интенсивность I_d . Ослабленная интенсивность для коллимированного падающего потока F_0 равна

$$I_{ri}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = F_0 e^{-\tau} \frac{\delta(\theta) \delta(\phi)}{\sin \theta} = F_0 e^{-\tau} \delta(\mu - 1) \delta(\phi), \quad (11.2)$$

где $\mu = \cos \theta$, элемент телесного угла равен $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$, а дельта-функции определяются условиями

$$\int_0^\pi \delta(\theta) d\theta = 1, \quad \delta(\theta) = 0 \quad \text{при} \quad \theta \neq 0,$$

$$\int_{-1}^1 \delta(\mu - 1) d\mu = 1, \quad \delta(\mu - 1) = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \delta(\phi) d\phi = 1, \quad \delta(\phi) = 0 \quad \text{при} \quad \phi \neq 0.$$

Подставляя $I = I_{ri} + I_d$ в (11.1) и используя (11.2), получаем дифференциальное уравнение для $I_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = I_d(\tau, \mu)$:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_d(\tau, \mu)}{d\tau} + I_d(\tau, \mu) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' p(\mu, \phi; \mu', \phi') I_d(\tau, \mu') + \frac{p(\mu, \phi; 1, 0)}{4\pi} F_0 e^{-\tau}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где $d\tau = \rho \sigma_i ds \cos \theta$. Для того чтобы исключить отсюда зависимость от ϕ , проинтегрируем (11.3) по ϕ от нуля до 2π , что дает

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_d(\tau, \mu)}{d\tau} + I_d(\tau, \mu) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' p_0(\mu, \mu') I_d(\tau, \mu') + \frac{1}{4\pi} p_0(\mu, 1) F_0 e^{-\tau}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

где

$$p_0(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' p(\mu, \phi; \mu', \phi').$$

Дифференциальное уравнение (11.4) является основным уравнением, определяющим $I_d(\tau, \mu)$, и вместе с граничными условиями составляет полную математическую постановку задачи. Если среда, содержащая частицы, представляет собой вакуум или свойства этой среды совпадают со свойствами окружающих

сред ($z < 0$ и $z > d$), то граничное условие при $\tau = 0$ заключается в отсутствии диффузного излучения, распространяющегося в положительном направлении:

$$I_d(0, \mu) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (11.5a)$$

а при $\tau = \tau_0$ — в отсутствии диффузного излучения в отрицательном направлении z :

$$I_d(\tau_0, \mu) = 0 \quad \text{для} \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (11.5b)$$

При наличии на границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ отражения условия (11.5a) и (11.5b) нужно модифицировать, включив коэффициенты отражения и пропускания. Но в данной главе мы ограничимся случаем простых граничных условий (11.5a) и (11.5b).

11.2. Типичные фазовые функции

Прежде чем приступить к решению плоскопараллельной задачи, полезно описать некоторые типичные фазовые функции. Простейшая фазовая функция отвечает изотропному рассеянию:

$$p(\mu, \phi; \mu', \phi') = p_0(\mu, \mu') = W_0 = \frac{\sigma_s}{\sigma_t} = \text{альбедо}. \quad (11.6)$$

Для непоглощающих частиц, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, в случае неполяризованной падающей волны применима фазовая функция Рэлея

$$p(\mu, \phi; \mu', \phi') = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \gamma), \quad (11.7a)$$

где γ — угол между направлениями (μ, ϕ) и (μ', ϕ') , определяемый условием

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

Интегрируя (11.7a) по ϕ и ϕ' , получаем

$$p_0(\mu, \mu') = \frac{3}{4} \left[1 + \mu^2 \mu'^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) \right]. \quad (11.7b)$$

Полезное и общее выражение для фазовых функций дается разложением в ряд по полиномам Лежандра $P_n(\mu) = P_n(\cos \theta)$. Если рассеяние симметрично относительно направления падающей волны, то фазовая функция зависит только от γ , и ее можно выразить в виде ряда по функциям Лежандра:

$$p(\mu, \phi; \mu', \phi') = p(\cos \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n P_n(\cos \gamma). \quad (11.8a)$$

Используя известное разложение [75]

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\mu) P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \cos m(\phi - \phi')$$

и интегрируя (11.8a) по ϕ и ϕ' , получаем [см. (9.12a) и (10.19)]

$$p_0(\mu, \mu') = \sum_{n=0}^{\infty} W_n P_n(\mu) P_n(\mu'), \quad (11.8б)$$

где W_0 — альbedo частицы.

Отметим, что во всех рассмотренных только что примерах выполняется соотношение симметрии

$$p_0(\mu, \mu') = p_0(\mu', \mu) = p_0(-\mu, -\mu') = p_0(-\mu', -\mu). \quad (11.9)$$

11.3. Квадратурная формула Гаусса

Общее решение интегро-дифференциального уравнения (11.4), выраженное через известные функции в замкнутом виде, не найдено. Рассмотрим поэтому решение, основанное на приближенном представлении интеграла в (11.4). Это представление называют квадратурной формулой Гаусса [1]. Мы обсудим его кратко в данном разделе, прежде чем приступить к решению уравнения (11.4).

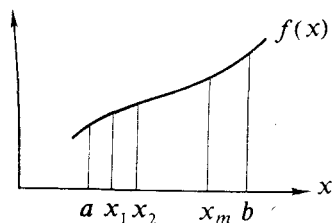


Рис. 11.3. Приближенное представление интеграла (11.10).

Попытаемся представить интеграл от функции $f(x)$ в виде ряда, включающего значения $f(x_j)$ в конечном числе m точек $x = x_j, j = 1, \dots, m$ (рис. 11.3):

$$\int_a^b f(x) \omega(x) dx \approx \sum_{j=1}^m a_j f(x_j), \quad (11.10)$$

где $\omega(x)$ — весовая функция. Вопрос состоит в том, как выбрать точки x_j и определить a_j , чтобы получить наилучшую аппроксимацию интеграла при наименьшем числе членов m . Этот вопрос

можно сформулировать математически, введя погрешность ε :

$$\varepsilon = \int_a^b f(x) \omega(x) dx - \sum_{j=1}^m a_j f(x_j). \quad (11.11)$$

Покажем прежде всего, что если функция $f(x)$ аппроксимируется полиномом степени $m-1$, то даже при произвольном выборе x_j можно полностью устранить погрешность. Для этого выразим $f(x)$ в следующем виде, включающем произвольные x_j :

$$f(x) = \sum_{j=1}^m f(x_j) \frac{F(x)}{(x-x_j)F'(x_j)}, \quad (11.12)$$

где $F(x) = \prod_{j=1}^m (x-x_j) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)$ и $F'(x) = dF(x)/dx$. Заметим, что, поскольку $F(x)$ есть полином степени m , правая часть (11.12) есть полином степени $m-1$. Заметим также, что $F(x)/[(x-x_j)F'(x_j)]$ становится равной единице при $x \rightarrow x_j$ и обращается в нуль при $x \rightarrow x_i$ $i \neq j$. Поэтому (11.12) представляет $f(x)$ в виде полинома степени $m-1$, давая точные значения $f(x_j)$ при $x = x_j$. Соотношение (11.12) называется интерполяционной формулой Лагранжа. Подставляя (11.12) в (11.10), получаем

$$a_j = \frac{1}{F'(x_j)} \int_a^b \frac{F(x) \omega(x)}{(x-x_j)} dx. \quad (11.13)$$

Эту величину называют числом Кристофеля, связанным с $F(x)$. Ясно, что если $f(x)$ есть полином степени $m-1$, то погрешность ε тождественно обращается в нуль; причем это верно при произвольном выборе x_j .

Если изменения функции $f(x)$ таковы, что полином степени $m-1$ недостаточен и для адекватного описания $f(x)$ требуется полином более высокой степени, то погрешность (11.11), вообще говоря, отлична от нуля. Возникает вопрос, можно ли даже и в этом случае устранить погрешность, выбрав точки x_j не произвольно, а некоторым надлежащим образом? Это достигается с помощью описанной ниже «квадратурной формулы». Такая формула дает значение интеграла от функции, представленной в виде полинома степени $2m-1$, согласно (11.10), с нулевой погрешностью. Для получения этой формулы запишем $f(x)$ в виде следующего полинома степени $2m-1$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m f(x_j) \frac{F(x)}{(x-x_j)F'(x_j)} + F(x) \sum_{l=0}^{m-1} C_l x^l, \quad (11.14)$$

где C_l — постоянные. Поскольку $F(x)$ есть полином степени m , второе слагаемое в (11.14) есть полином степени $2m - 1$. Всякую функцию, представленную в виде полинома степени $2m - 1$, можно записать в виде (11.14), выбрав соответствующим образом постоянные C_l . Подставим теперь (11.14) в левую часть (11.10). В результате, помимо ряда, стоящего в правой части (11.10) и возникающего из первой суммы (11.14), мы получим также дополнительный ряд, который возникает из второй суммы в (11.14). Если соответствующим выбором x_j дополнительный ряд окажется возможным обратить в нуль, то тем самым мы достигнем цели, представив интеграл от полинома степени $2m - 1$ в виде суммы m членов, как и в формуле (11.10). Это можно сделать, выбрав x_j , а следовательно, $F(x)$ так, что

$$\int_a^b F(x) x^l \omega(x) dx = 0 \quad \text{для } l = 0, 1, \dots, m-1. \quad (11.15)$$

Это означает, что полином $F(x)$ должен быть ортогонален x^l с весовой функцией $\omega(x)$. Формула (11.10) с коэффициентами (11.13) и полиномом $F(x)$, удовлетворяющим условиям (11.15), называется квадратурной формулой.

Для плоскопараллельной задачи имеем $\omega(x) = 1$, $a = -1$, $b = +1$. В этом случае, учитывая, что полином Лежандра $P_m(x)$ ортогонален всем x^l , $l = 0, 1, \dots, m-1$, можно выбрать

$$F(x) = P_m(x), \quad (11.16)$$

причем x_j должны быть нулями полинома Лежандра $P_m(x)$. Таким образом, можно записать

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^m a_j f(x_j), \quad (11.17)$$

где

$$a_j = \frac{1}{P'_m(x_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_m(x)}{(x - x_j)} dx$$

и x_j выбраны так, что $P_m(x_j) = 0$. Это квадратурная формула Гаусса.

Для рассматриваемой плоскопараллельной задачи m удобно выбрать четным: $m = 2N$. Используя μ вместо x , запишем

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{j=-N}^N a_j f(\mu_j) = \sum_{j=1}^N a_j [f(\mu_j) + f(-\mu_j)], \quad (11.18)$$

где

$$P_{2N}(\mu_j) = P_{2N}(-\mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad a_j = \frac{1}{P'_{2N}(\mu_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_{2N}(\mu)}{(\mu - \mu_j)} d\mu,$$

и мы использовали тот факт, что P_{2N} есть четная функция μ , $a_j = a_{-j}$ и $\mu_j = -\mu_{-j}$. Первые члены последовательностей μ_j и a_j имеют вид

$$\begin{aligned} N=1, \quad \mu_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_1 = 1, \\ N=2, \quad \mu_1 &= 0,3399, \quad a_1 = 0,6521, \\ \mu_2 &= 0,8611, \quad a_2 = 0,3479. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Значения для $N \geq 3$ приведены в книгах [1, 31].

11.4. Общее решение

Вернемся к плоскопараллельной задаче, заданной уравнениями (11.4), (11.5а) и (11.5б). Требуется решить уравнение

$$\mu \frac{dI_d(\tau, \mu)}{d\tau} + I_d(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' [p_0(\mu, \mu') I_d(\tau, \mu')] + \frac{1}{4\pi} p_0(\mu, 1) F_0 e^{-\tau} \quad (11.20a)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} I_d(0, \mu) &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \mu \leq 1, \\ I_d(\tau_0, \mu) &= 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (11.20б)$$

Прежде всего, используя формулу Гаусса (11.18), выразим интеграл из (11.20а) в виде ряда

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' p_0(\mu, \mu') I_d(\tau, \mu') = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^N a_j p_0(\mu, \mu_j) I_d(\tau, \mu_j), \quad (11.21)$$

где $\mu_{-j} = -\mu_j$ (рис. 11.4). Подставим (11.21) в (11.20а) и положим в полученном соотношении $\mu = \mu_i$, $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$:

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{dI_d(\tau, \mu_i)}{d\tau} + I_d(\tau, \mu_i) &= \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^N a_j p_0(\mu_i, \mu_j) I_d(\tau, \mu_j) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} p_0(\mu_i, 1) F_0 e^{-\tau}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Уравнение (11.22) можно записать в более компактной матричной форме

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}_d(\tau) + \mathbf{S} \mathbf{I}_d(\tau) = \mathbf{B} e^{-\tau}, \quad (11.23)$$

где $I_a(\tau) = [I_i(\tau)]$ — матрица-столбец $2N \times 1$, $I_i(\tau) = I_a(\tau, \mu_i)$, $S = [S_{ij}]$ — квадратная матрица $2N \times 2N$, $B = [B_i]$ — матрица-столбец $2N \times 1$, а элементы S_{ij} и B_i определяются выражениями

$$S_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} - \frac{a_i p_0(\mu_i, \mu_i)}{2\mu_i} & \text{при } i = j, \\ -\frac{a_j p_0(\mu_i, \mu_j)}{2\mu_i} & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad B_i = \frac{p_0(\mu_i, 1)}{4\pi\mu_i} F_0, \quad (11.24)$$

Строки и столбцы этих матриц расположены так, что индекс i меняется как $(+N, \dots, +1, -1, \dots, -N)$ сверху вниз, а ин-

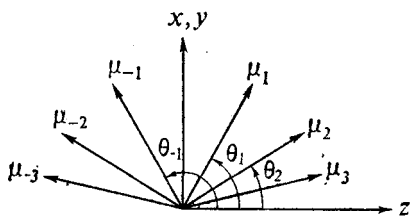


Рис. 11.4. Направления, соответствующие $\mu_j = \cos \theta_j$. Отметим, что $\mu_{-j} = -\mu_j$ при $j = 1, 2, \dots, N$.

декс j — как $(+N, \dots, +1, -1, \dots, -N)$ слева направо [что видно в (11.26)]. Вследствие соотношения симметрии для $p_0(\mu, \mu')$ (11.9) элементы S_{ij} , расположенные симметрично относительно центра матрицы S , одинаковы по величине и противоположны по знаку:

$$S_{ii} = -S_{-i, -i}, \quad S_{ij} = -S_{-i, -j}. \quad (11.25)$$

В качестве примера запишем (11.23) для случая $N = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} I_2(\tau) \\ I_1(\tau) \\ I_{-1}(\tau) \\ I_{-2}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{22} & S_{21} & -S_{-21} & -S_{-22} \\ S_{12} & S_{11} & -S_{-11} & -S_{-12} \\ S_{-12} & S_{-11} & -S_{11} & -S_{12} \\ S_{-22} & S_{-21} & -S_{21} & -S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2(\tau) \\ I_1(\tau) \\ I_{-1}(\tau) \\ I_{-2}(\tau) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \\ B_{-1} \\ B_{-2} \end{bmatrix} e^{-\tau}, \quad (11.26) \end{aligned}$$

где учтено соотношение симметрии (11.25).

Общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка (11.23) дается суммой частного решения $I_p(\tau)$ и решения однородного уравнения $I_c(\tau)$. Частное решение получается подстановкой

$$I_p(\tau) = a e^{-\tau}, \quad (11.27)$$

где $\alpha = (\alpha_i)$ — матрица-столбец $2N \times 1$ с постоянными элементами α_i . Подставив (11.27) в (11.23), получим

$$I_p(\tau) = \alpha e^{-\tau} = (S - U)^{-1} B e^{-\tau}, \quad (11.28)$$

где U — единичная матрица $2N \times 2N$.

Для решения однородного уравнения

$$\frac{d}{d\tau} I_c(\tau) + S I_c(\tau) = 0 \quad (11.29)$$

положим

$$I_c(\tau) = \beta e^{\lambda \tau}, \quad (11.30)$$

где λ — неизвестная постоянная. Подставляя это выражение в (11.29), получим

$$(\lambda U + S) \beta = 0. \quad (11.31)$$

Это матричное уравнение задачи на собственные значения. Для получения ненулевого решения β определитель матрицы $\lambda U + S$ нужно приравнять нулю:

$$|\lambda U + S| = 0. \quad (11.32)$$

Этот определитель есть полином от λ степени $2N$, так что имеется $2N$ значений $\lambda = \lambda_n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, удовлетворяющих уравнению (11.31). Для каждого λ_n матрица-столбец $\beta = \beta_n = [\beta_{ni}]$ определяется из (11.31). Это уравнение определяет только относительные значения элементов β_{ni} , $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Величины λ_n и β_n называются соответственно собственными значениями и собственными векторами матрицы S . Вследствие соотношения симметрии (11.25) λ_n и β_{ni} удовлетворяют условиям

$$\lambda_n = -\lambda_{-n}, \quad \beta_{ni} = \beta_{-n, -i}. \quad (11.33)$$

Формальное доказательство условий (11.33) здесь не дается, но их легко проверить для примера (11.26).

Общее решение однородного уравнения I_c дается линейной комбинацией собственных векторов β_n с произвольными коэффициентами C_n :

$$I_c = \sum_{n=-N}^N C_n \beta_n e^{\lambda_n \tau} = \sum_{n=1}^N C_n \beta_n e^{\lambda_n \tau} + \sum_{n=1}^N C_{-n} \beta_{-n} e^{-\lambda_n \tau}, \quad (11.34)$$

где элементы β_{-n} связаны с β_n посредством (11.33). Полное решение $I_d(\tau)$ равно

$$I_d(\tau) = I_p(\tau) + I_c(\tau), \quad (11.35)$$

где $I_p(\tau)$ определяется согласно (11.28), а $I_c(\tau)$ — в соответствии с (11.34). Имеется $2N$ неизвестных постоянных C_n , $n =$

$= \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, которые определяются граничными условиями (11.206). Подставляя в (11.206) $\mu = \mu_i$, получаем следующие $2N$ условий:

$$I_d(0, \mu_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (11.36a)$$

$$I_d(\tau_0, \mu_i) = 0, \quad i = -1, -2, \dots, -N. \quad (11.36b)$$

Решение I_d (11.35) есть матрица-столбец $2N \times 1$. Интенсивность часто бывает удобно представлять не как матрицу, а как непрерывную функцию $I_d(\tau, \mu)$, зависящую от τ и μ . Это можно сделать, записав $I(\tau, \mu)$ в виде интеграла:

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu) &= I_{ri}(\tau, \mu) + I_d(\tau, \mu) = \\ &= \begin{cases} I_{ri}(\tau, \mu) + \int_0^\tau J(\tau, \mu) \exp\left[-\frac{(\tau - \tau')}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{\mu} & \text{для } \mu > 0, \\ \int_{\tau_0}^\tau J(\tau, \mu) \exp\left[+\frac{(\tau - \tau')}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{(-\mu)} & \text{для } \mu < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.37)$$

где

$$J(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' p_0(\mu, \mu') I_d(\tau, \mu') + \frac{p_0(\mu, 1)}{4\pi} F_0 e^{-\tau}.$$

Выражая интеграл в $J(\tau, \mu)$ по формуле Гаусса и подставляя J в (11.37), получаем для $\mu > 0$

$$\begin{aligned} I_d(\tau, \mu) &= \frac{A_0(\mu)}{1 - \mu} (e^{-\tau} - e^{-\tau/\mu}) + \sum_{n=1}^N \frac{C_n A_n(\mu)}{1 + \lambda_n \mu} (e^{\lambda_n \tau} - e^{-\tau/\mu}) + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{C_{-n} A_{-n}(\mu)}{1 - \lambda_n \mu} (e^{-\lambda_n \tau} - e^{-\tau/\mu}) \end{aligned} \quad (11.38)$$

и для $\mu < 0$

$$\begin{aligned} I_d(\tau, \mu) &= \frac{A_0(\mu)}{1 - \mu} \left[e^{-\tau} - \exp\left(\frac{\tau_0 - \tau}{\mu} - \tau_0\right) + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{C_n A_n(\mu)}{1 + \lambda_n \mu} \left[e^{\lambda_n \tau} - \exp\left(\frac{\tau_0 - \tau}{\mu} + \lambda_n \tau_0\right) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{C_{-n} A_{-n}(\mu)}{1 - \lambda_n \mu} \left[e^{-\lambda_n \tau} - \exp\left(\frac{\tau_0 - \tau}{\mu} - \lambda_n \tau_0\right) \right]. \end{aligned} \quad (11.39)$$

где

$$A_0(\mu) = \frac{p_0(\mu, 1)}{4\pi} F_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=-N}^N a_i p_0(\mu, \mu_i) \alpha_i,$$

$$A_n(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{i=-N}^N a_i p_0(\mu, \mu_i) \beta_{ni}, \quad A_{-n}(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{i=-N}^N a_i p_0(\mu, \mu_i) \beta_{-ni}.$$

Поток в положительном направлении $F_+(\tau)$ дается выражением

$$F_+(\tau) = 2\pi \int_0^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad (11.40)$$

которое можно записать в виде ряда:

$$F_+(\tau) = B_0^+ e^{-\tau} + \sum_{n=1}^N C_n B_n^+ e^{\lambda_n \tau} + \sum_{n=1}^N C_{-n} B_{-n}^+ e^{-\lambda_n \tau}, \quad (11.41)$$

где

$$B_0^+ = 2\pi F_0 + \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i \mu_i, \quad B_n^+ = \sum_{i=1}^N a_i \beta_{ni} \mu_i,$$

$$B_{-n}^+ = \sum_{i=1}^N a_i \beta_{-n, i} \mu_i.$$

Аналогично поток в отрицательном направлении $F_-(\tau)$ дается выражением

$$F_-(\tau) = -2\pi \int_{-1}^0 I(\tau, \mu) \mu d\mu =$$

$$= B_0^- e^{-\tau} + \sum_{n=1}^N C_n B_n^- e^{\lambda_n \tau} + \sum_{n=1}^N C_{-n} B_{-n}^- e^{-\lambda_n \tau}, \quad (11.42)$$

где

$$B_0^- = \sum_{i=1}^N a_i \alpha_{-i} \mu_i, \quad B_n^- = \sum_{i=1}^N a_i \beta_{n, -i} \mu_i,$$

$$B_{-n}^- = \sum_{i=1}^N a_i \beta_{-n, -i} \mu_i.$$

Выражения (11.37)–(11.42) дают лучевую интенсивность и прямой и обратный потоки в точке τ . Из них легко вычислить отраженные и прошедшие лучевые интенсивности и потоки при

$\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$. При $\tau = 0$ диффузная отраженная лучевая интенсивность есть $I(0, \mu)$ в (11.39) для $\mu < 0$, а отраженный поток $F_-(0)$ определяется согласно (11.42). При $\tau = \tau_0$ прошедшая лучевая интенсивность равна $I_{ri}(\tau_0) + I_d(\tau_0, \mu)$, где I_d определяется согласно (11.38), а поток дается выражением (11.41).

Проиллюстрируем рассмотренную процедуру для простого случая $N = 1$ и изотропного рассеяния $\rho_0(\mu, \mu') = W_0$. Для $N = 1$ формула Гаусса имеет простой вид:

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = f(\mu_1) + f(-\mu_1), \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (11.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} I_1(\tau) \\ I_{-1}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_1} \left(1 - \frac{W_0}{2}\right), & \frac{-W_0}{2\mu_1} \\ \frac{+W_0}{2\mu_1}, & \frac{-1}{\mu_1} \left(1 - \frac{W_0}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(\tau) \\ I_{-1}(\tau) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{W_0}{4\pi\mu_1} F_0 e^{-\tau}. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Частное решение (11.28) дается выражением

$$I_p(\tau) = \alpha e^{-\tau} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{-1} \end{bmatrix} e^{-\tau}, \quad (11.45)$$

причем

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_1} \left(1 - \frac{W_0}{2}\right) - 1, & \frac{-W_0}{2\mu_1} \\ \frac{W_0}{2\mu_1}, & \frac{-1}{\mu_1} \left(1 - \frac{W_0}{2}\right) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{W_0}{4\pi\mu_1} F_0,$$

откуда находим

$$\alpha_1 = \frac{1 + \mu_1}{1 - W_0 - \mu_1^2} \left(\frac{W_0}{4\pi} \right) F_0, \quad \alpha_{-1} = \frac{1 - \mu_1}{1 - W_0 - \mu_1^2} \left(\frac{W_0}{4\pi} \right) F_0.$$

Для получения решения соответствующего однородного уравнения вычислим сначала собственное значение λ_n из (11.32):

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{\mu_1} \left(1 - \frac{W_0}{2}\right), & \frac{-W_0}{2\mu_1} \\ \frac{W_0}{2\mu_1}, & \lambda - \frac{1}{\mu_1} \left(1 - \frac{W_0}{2}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (11.46)$$

Из этого уравнения получаем $\lambda_1 = -\lambda_{-1}$:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - W_0}/\mu_1 = -\lambda_{-1}.$$

Собственные векторы β_n даются выражениями

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}, \quad \beta_{-1} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \frac{(1 + \sqrt{1 - W_0})^2}{W_0}.$$

для которых соотношения симметрии (11.33) очевидны. Таким образом, полное решение (11.35) имеет вид

$$\begin{aligned} I_{d1}(\tau) &= \alpha_1 e^{-\tau} + C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_{-1} b e^{-\lambda_1 \tau}, \\ I_{d-1}(\tau) &= \alpha_{-1} e^{-\tau} + C_1 b e^{\lambda_1 \tau} + C_{-1} e^{-\lambda_1 \tau}, \end{aligned} \quad (11.47)$$

где C_1 и C_{-1} — неизвестные постоянные. Используем теперь граничные условия (11.36):

$$\begin{aligned} I_{d1}(0) &= \alpha_1 + C_1 + C_{-1} b = 0, \\ I_{d-1}(\tau_0) &= \alpha_{-1} e^{-\tau_0} + C_1 b \exp(\lambda_1 \tau_0) + C_{-1} \exp(-\lambda_1 \tau_0) = 0, \end{aligned} \quad (11.48)$$

из которых легко определить C_1 и C_{-1} :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-\alpha_1 \exp(-\lambda_1 \tau_0) + b \alpha_{-1} \exp(-\tau_0)}{\exp(-\lambda_1 \tau_0) - b^2 \exp(\lambda_1 \tau_0)}, \\ C_{-1} &= \frac{-\alpha_{-1} \exp(-\tau_0) + b \alpha_1 \exp(\lambda_1 \tau_0)}{\exp(-\lambda_1 \tau_0) - b^2 \exp(\lambda_1 \tau_0)}. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Таким образом, для $\mu > 0$ получаем

$$I(\tau, \mu) = I_{ri}(\tau, \mu) + I_d(\tau, \mu), \quad I_{ri}(\tau, \mu) = F_0 e^{-\tau} \delta(\mu - 1) \delta(\phi), \quad (11.50)$$

$$\begin{aligned} I_d(\tau, \mu) &= \frac{W_0}{2} \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_{-1} + F_0/2\pi}{1 - \mu} (e^{-\tau} - e^{-\tau/\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_1(1+b)}{1 + \lambda_1 \mu} (e^{\lambda_1 \tau} - e^{-\tau/\mu}) + \frac{C_{-1}(1+b)}{1 - \lambda_1 \mu} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\tau/\mu}) \right], \end{aligned} \quad (11.51)$$

а для $\mu < 0$ имеем

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu) &= \frac{W_0}{2} \left\{ \frac{\alpha_1 + \alpha_{-1} + F_0/2\pi}{1 - \mu} \left[e^{-\tau} - \exp\left(\frac{\tau_0 - \tau}{\mu} - \tau_0\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_1(1+b)}{1 + \lambda_1 \mu} \left[\exp(\lambda_1 \tau_0) - \exp\left(\frac{\tau_0 - \tau}{\mu} + \lambda_1 \tau_0\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{-1}(1+b)}{1 - \lambda_1 \mu} \left[\exp(-\lambda_1 \tau_0) - \exp\left(\frac{\tau_0 - \tau}{\mu} - \lambda_1 \tau_0\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Заметим, что члены, содержащие F_0 в первых слагаемых в (11.51) и (11.52), дают решение первого порядка, рассмотренное в гл. 8 [выражения (8.8) и (8.9), где нужно положить $\mu_0 = 1$], а остальные члены описывают эффекты многократного рассеяния.

Этот пример иллюстрирует методику, описанную в данном разделе, однако полученные при этом численные значения нужно рассматривать как очень приближенные, поскольку формула Гаусса (11.43) дает очень грубую аппроксимацию. Фактически

известно, что λ_1 должно быть меньше единицы, если N достаточно велико. Поэтому очевидно, что полученные формулы нельзя использовать при $W_0 > 2/3$, так как при этом $\lambda_1 > 1$.

11.5. Полубесконечная среда

Задачу о нормальном падении плоской волны на полубесконечную среду можно решить, полагая просто $\tau_0 \rightarrow \infty$ в результатах предыдущего раздела. При другом подходе можно использовать граничное условие при $\tau \rightarrow \infty$, когда должна быть только уходящая волна. Это означает, что в общем выражении для I_c (11.34) решение с $\exp(\lambda_n \tau)$ недопустимо, поскольку оно неограниченно возрастает при $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, все C_n , $n = 1, 2, \dots, N$, должны быть равны нулю, и I_c должно иметь вид

$$I_c = \sum_{n=1}^N C_{-n} \beta_{-n} e^{-\lambda_n \tau}. \quad (11.53)$$

Входящие сюда N постоянных C_{-n} определяются из N условий (11.36а) при $\tau = 0$.

Рассмотрим теперь задачу об излучении полубесконечной среды, занимающей область $\tau < 0$. Решение этой задачи называют законом затенения. В этом случае падающая волна порождается при $\tau \rightarrow -\infty$. Если рассмотреть все собственные значения λ_n , то можно заметить, что для больших N только одно из них, λ_1 , меньше единицы, а все другие больше единицы. Поэтому все члены $\exp(-\tau)$ и $\exp(-\lambda_n \tau)$, кроме $\exp(-\lambda_1 \tau)$, при больших τ обращаются в нуль, так что решение дается выражением

$$I = C_{-1} \beta_{-1} e^{-\lambda_1 \tau} + \sum_{n=1}^N C_n \beta_n e^{\lambda_n \tau}. \quad (11.54)$$

Входящие сюда $N + 1$ постоянные C_{-1} и C_n определяются из N граничных условий при $\tau = 0$:

$$I_c(0, \mu_i) = 0, \quad i = -1, -2, \dots, -N, \quad (11.55)$$

и условия, что полный поток F_0 при $\tau = 0$ считается известным.

11.6. Наклонное падение и другие методы

Если исходная волна падает на среду наклонно в направлении (μ_0, ϕ_0) , то лучевая интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ есть функция τ , μ и ϕ ; поэтому ее можно разложить в ряд Фурье

$$I(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^M I_m(\tau, \mu) \cos m(\phi - \phi_0). \quad (11.56)$$

Подставляя этот ряд в уравнение переноса (детали этого метода даны в работе [31]), можно получить $M + 1$ уравнение для I_m .

Описанный в данной главе метод основан на квадратурной формуле Гаусса. Имеются и другие методы, которые оказались также эффективны при решении рассматриваемой задачи. Так, например, лучевую интенсивность можно разложить в ряд по полиномам Лежандра с неизвестными коэффициентами ([11], гл. 3). Можно также рассмотреть общие соотношения между отражением и прохождением для конечного слоя и составить соответствующие интегральные уравнения. Такой метод оказался достаточно эффективным ([31], гл. 7, а также [2, 12]). Основную идею этого метода называют принципом инвариантности и инвариантным погружением. В следующем разделе мы опишем аналогичную методику, применимую к случаю слоистой плоскопараллельной среды.

11.7. Слоистая плоскопараллельная среда

Обобщим теперь результаты предыдущих разделов на случай слоистой структуры, содержащей рассеивающие частицы. Предположим, что частицы в l -м слое характеризуются плотностью ρ_l , полным сечением σ_{il} и фазовой функцией $\rho_{ol}(\mu, \mu')$ (рис. 11.5). Расстояния внутри каждого слоя мы будем измерять в единицах собственной оптической толщины $\tau_l = \rho_l \sigma_{il} z$ и предположим, что на первый слой падает плоская волна с потоком мощности F_0 .

Пусть I_a — матрица-столбец $2N \times 1$, состоящая из диффузных лучевых интенсивностей на поверхности a в направлениях $\mu = \mu_i, i = N, \dots, 1, -1, \dots, -N$ [см. пояснения к (11.23)]. Пусть I_b — матрица-столбец $2N \times 1$ из диффузных интенсивностей на поверхности b .

Если найти $2N \times 2N$ -матрицу $\bar{T}_1$ и $2N \times 1$ -матрицу F_1 для первого слоя между поверхностями a и b , которые связывают I_a и I_b следующим образом:

$$I_b = F_1 + \bar{T}_1 I_a, \quad (11.57)$$

и аналогично для второго и третьего слоев

$$I_c = F_2 + \bar{T}_2 I_b, \quad I_d = F_3 + \bar{T}_3 I_c, \quad (11.58)$$

то, рассмотрев последовательность слоев, нетрудно получить соотношение, связывающее I_a и I_d :

$$I_d = F + \bar{T} I_a, \quad (11.59)$$

где

$$F = F_3 + \bar{T}_3 F_2 + \bar{T}_3 \bar{T}_2 F_1, \quad \bar{T} = \bar{T}_3 \bar{T}_2 \bar{T}_1.$$

Граничные условия для I_a вытекают из отсутствия диффузной лучевой интенсивности, входящей в среду в положительном направлении z . Граничные условия для I_d следуют из отсутствия на поверхности d диффузной интенсивности в отрицательном на-

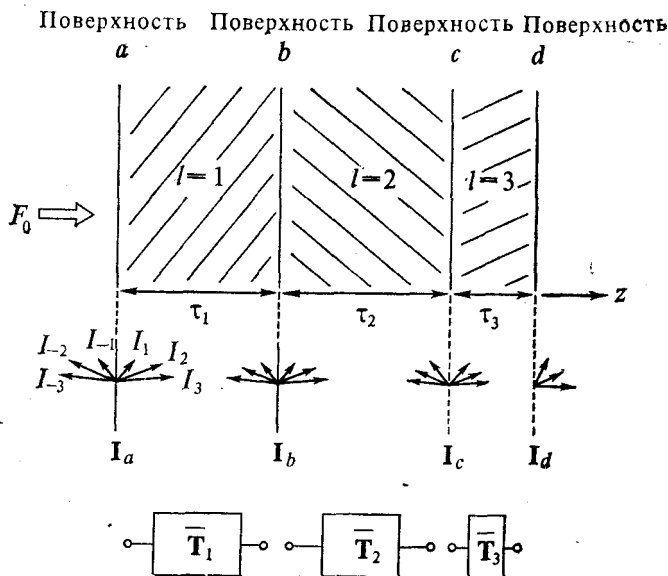


Рис. 11.5. Плоскопараллельная задача со слоями.

правлении z . Выразив эти условия через элементы матриц-столбцов

$$I_a = (I_{ai}) = \begin{pmatrix} I_{aN} \\ \vdots \\ I_{a1} \\ I_{a-1} \\ \vdots \\ I_{a-N} \end{pmatrix}, \quad I_d = (I_{di}) = \begin{pmatrix} I_{dN} \\ \vdots \\ I_{d1} \\ I_{d-1} \\ \vdots \\ I_{d-N} \end{pmatrix}, \quad (11.60)$$

получим

$$\begin{aligned} I_{ai} &= 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, N, \\ I_{di} &= 0 \quad \text{для } i = -1, -2, \dots, -N. \end{aligned} \quad (11.61)$$

Подставляя (11.61) в (11.59), можно записать $2N$ уравнений для $2N$ неизвестных, I_{ai} для $i = -1, -2, \dots, -N$ и I_{di} для $i = 1, 2, \dots, N$ при условии, что F и $\bar{T}$ известны.

Таким образом, задача о слоистой среде, изображенной на рис. 11.5, может быть полностью решена, если мы можем найти F_l и $\bar{T}_l$ для каждого слоя.

Опишем теперь, как получить матрицы F_l и $\bar{T}_l$. Рассмотрим первый слой ($l=1$). Полное общее решение для слоя (11.35) было получено выше. Запишем его в матричной форме¹⁾:

$$I(\tau) = \alpha e^{-\tau} + \bar{\beta} \bar{E}_\tau C, \quad (11.62)$$

где α — матрица-столбец $2N \times 1$ из (11.28), $\bar{\beta}$ — матрица $2N \times 2N$ с элементами β_{ni} , а $\bar{E}_\tau$ — матрица $2N \times 2N$, определяемая соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{E}_\tau &= (E_{ij}), \quad i, j = N, \dots, 1, -1, \dots, -N, \\ E_{ii} &= e^{\lambda_i \tau}, \quad E_{ij} = 0 \quad \text{для } i \neq j. \end{aligned} \quad (11.63)$$

Матрица C есть матрица-столбец $2N \times 1$ с элементами C_n из (11.34).

В (11.62) $I(\tau)$ должно быть равно I_a при $\tau = 0$ и I_b при $\tau = \tau_1$. Поэтому имеем

$$I_a = \alpha + \beta C, \quad I_b = \alpha e^{-\tau_1} + \bar{\beta} \bar{E}_{\tau_1} C. \quad (11.64)$$

Исключая C из этих двух уравнений, получаем

$$\begin{aligned} I_b &= F_1 + \bar{T}_1 I_a, \quad F_1 = \alpha e^{-\tau_1} - \bar{\beta} \bar{E}_{\tau_1} (\bar{\beta})^{-1} \alpha, \\ \bar{T}_1 &= \bar{\beta} \bar{E}_{\tau_1} (\bar{\beta})^{-1}. \end{aligned} \quad (11.65)$$

В этих выражениях $\bar{\beta}$ и $\bar{E}_\tau$ представляют собственные векторы и собственные значения для слоя; α описывает источники и пропорционально F_0 . Эти величины можно получить, зная S_{ij} и B_i в (11.24).

Для второго слоя ($l=2$) можно аналогично найти F_2 и $\bar{T}_2$ по S_{ij} и B_i , характеризующим этот слой. В этом случае F_0 в выражении для B_i нужно, конечно, заменить на $F_0 e^{-\tau_1}$.

Таким образом, в общем случае матрицы F_l и $\bar{T}_l$ можно записать в виде

$$F_l = \alpha_l e^{-\tau_l} - \bar{\beta}_l \bar{E}_{\tau_l} (\bar{\beta}_l)^{-1} \alpha_l, \quad \bar{T}_l = \bar{\beta}_l \bar{E}_{\tau_l} (\bar{\beta}_l)^{-1}.$$

Эти величины вычисляются, если известны плотности ρ_l , полные сечения σ_{il} и фазовые функции $\rho_{0l}(\mu, \mu')$ для каждого слоя.

¹⁾ Диффузная интенсивность I_d из (11.35) обозначена в (11.62) через I , чтобы избежать путаницы с I_d на поверхности d в (11.58) и (11.59).

11.8. Некоторые смежные проблемы

Решения уравнения переноса излучения для плоскопараллельных задач рассматривались в связи с самыми разнообразными проблемами. Например, с помощью уравнения переноса изучалось излучение слоев тумана и рассеяние света на облаках [83, 84, 120, 121]. Рассматривалось также рассеяние оптического излучения в океане и прилегающих слоях воздуха [57, 82]. Плоскопараллельная задача с тепловой функцией источников применялась для описания микроволнового теплового излучения ледников и других приповерхностных образований [51, 61, 151, 159].

Изотропное рассеяние

В предыдущей главе теория переноса излучения использовалась главным образом для решения таких задач, как определение законов затенения, диффузного отражения и прохождения при облучении плоскопараллельной среды плоской волной. Однако во многих приложениях, относящихся к распространению оптических, миллиметровых и акустических волн в атмосфере, океане и биологических средах, необходимо рассматривать характеристики распространения сферических волн и волновых пучков. При этом нужно решать трехмерную задачу в более общей постановке. Она, конечно, значительно сложнее задачи о падении плоской волны на плоскопараллельную среду, и ее точное решение, по существу, еще не найдено. В связи с этим возникает необходимость нахождения приближенных решений. Два таких решения рассматриваются в этой и следующей главах.

Первое решение может использоваться, когда размеры частиц много меньше длины волны, а второе — в противоположном предельном случае. В этих двух случаях математическое описание задачи существенно упрощается, что позволяет относительно легко найти полезные решения. Если размеры частиц много меньше длины волны, то индикатриса рассеяния практически не зависит от угла рассеяния, за исключением случая дипольного рассеяния электромагнитных волн. При этом можно считать, что фазовая функция $p(\hat{s}, \hat{s})$ постоянна и равна альбедо $W_0 = \sigma_s/\sigma_t$. Этот случай называют случаем изотропного рассеяния [11, 30, 31, 40, 98, 105]. Общий случай, когда фазовая функция $p(\hat{s}, \hat{s})$ непостоянна, называют случаем анизотропного рассеяния. Для изотропного рассеяния можно получить некоторые точные решения, выявляющие многие общие характерные черты распространения волн, которые трудно выделить в более общем случае анизотропного рассеяния. Кроме того, имеется возможность проверить приближенные решения, полученные для анизотропного рассеяния, сравнивая их с точными решениями для изотропного случая. Изотропное рассеяние служит также хорошим приближением для многих практических ситуаций, когда размеры частиц много меньше длины волны.

С другой стороны, когда размеры частиц велики по сравнению с длиной волны, рассеяние ограничивается областью малых

углов вблизи направления вперед и поэтому возникает возможность упростить уравнение переноса, используя малоугловое приближение. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

12.1. Метод преобразования Фурье для изотропного рассеяния

Для изотропного рассеяния фазовая функция $\rho(\hat{s}, \hat{s}')$ постоянна и интегральное уравнение (7.41) для средней интенсивности $U(\mathbf{r})$ принимает вид

$$U(\mathbf{r}) = U_{ri}(\mathbf{r}) + \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\rho \sigma_s U(\mathbf{r}') + \epsilon(\mathbf{r}', \hat{s})] dV', \quad (12.1)$$

где $G_0(\mathbf{r}) = [\exp(-\rho \sigma_t r)] / 4\pi r^2$. Уравнение (12.1) применимо как к случаю конечного объема V , так и к случаю неограниченной среды.

Рассмотрим сначала случай точечного источника, расположенного в точке $\mathbf{r}'$ и излучающего полную мощность P_0 . Функция источника в этом случае дается выражением [см. (7.35)]

$$\epsilon(\mathbf{r}) = (P_0/4\pi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (12.2)$$

и (12.1) принимает вид

$$U(\mathbf{r}) = \left(\frac{P_0}{4\pi}\right) G_0(\mathbf{r}) + \rho \sigma_s \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV'. \quad (12.3)$$

Обозначим через $G(\mathbf{r})$ интенсивность $U(\mathbf{r})$ в случае источника, помещенного в начало координат и излучающего полную мощность $P_0/4\pi = 1$. Тогда можно записать

$$G(\mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r}) + \rho \sigma_s \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') G(\mathbf{r}') dV'. \quad (12.4)$$

Входящая сюда функция $G(\mathbf{r})$ представляет собой среднюю интенсивность излучения точечного источника из точки $\mathbf{r} = 0$ и является функцией Грина. Если функция $G(\mathbf{r})$ найдена, то через нее можно выразить решение для случая произвольной ослабленной падающей интенсивности $U_{ri}(\mathbf{r})$. Поэтому в данном разделе мы подробно остановимся на характеристиках $G(\mathbf{r})$.

Если объем V не ограничен, то точное аналитическое выражение для функции Грина $G(\mathbf{r})$ можно получить с помощью преобразования Фурье следующим образом. Возьмем фурье-образ от (12.4):

$$G(\mathbf{K}) = \int G(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV, \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\mathbf{K}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{K}. \quad (12.5)$$

Замечая, что фурье-образ от свертки есть произведение фурье-образов, получаем

$$G(\mathbf{K}) = G_0(\mathbf{K}) + \rho \sigma_s G_0(\mathbf{K}) G(\mathbf{K}), \quad (12.6)$$

откуда находим $G(\mathbf{K}) = G_0(\mathbf{K}) / [1 - \rho \sigma_s G_0(\mathbf{K})]$. Заметим теперь, что, поскольку $G_0(\mathbf{r})$ есть функция только от модуля $\mathbf{r}$ и не зависит от его направления, $G_0(\mathbf{K})$ зависит только от модуля $\mathbf{K}$ и имеет вид

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{K}) &= G_0(K) = \int dV G_0(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr \frac{\exp(-\rho \sigma_t r)}{4\pi r^2} \exp(iKr \cos \theta) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\rho \sigma_t + iK\mu} = \frac{1}{K} \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i(K/\rho \sigma_t)}{1 - i(K/\rho \sigma_t)} = \frac{1}{K} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{K}{\rho \sigma_t} \right). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Возьмем теперь обратное преобразование от (12.6). Это трехмерное обратное преобразование Фурье можно упростить, заметив следующее. Поскольку $G(\mathbf{K})$ есть функция только от модуля $\mathbf{K}$ и не зависит от направления $\mathbf{K}$, мы имеем

$$\int G(K) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{K} = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty G(K) \sin(Kr) K dK. \quad (12.8)$$

Далее, так как $G(K)$ — четная функция K , интегрирование в (12.8) можно распространить на область $(-\infty, +\infty)$:

$$\frac{2\pi i}{r} \int_{-\infty}^{\infty} G(K) e^{iKr} K dK. \quad (12.9)$$

Такой переход оказывается целесообразным, поскольку контур интегрирования теперь можно замкнуть на бесконечности и использовать для вычисления интеграла метод вычетов.

Запишем

$$G(r) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(K/\rho \sigma_t) e^{iKr}}{1 - (\rho \sigma_s/K) \operatorname{arc} \operatorname{tg}(K/\rho \sigma_t)} dK. \quad (12.10)$$

Чтобы в этом выражении контур интегрирования замкнуть на бесконечности и свести интегрирование к вычислению вычетов и вкладов от разреза, как показано на рис. 12.1, нужно, чтобы подынтегральное выражение обращалось в нуль при $|K| \rightarrow \infty$. Но в интеграле (12.10) $\operatorname{arctg}(K/\rho \sigma_t)$ стремится к $\pi/2$ при

$|K| \rightarrow \infty$, поэтому подынтегральное выражение не обращается в нуль на бесконечности.

Чтобы обойти эту трудность, запишем

$$G(r) = -\frac{1}{(2\pi)^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1/K) \operatorname{arctg}(K/\rho\sigma_t) e^{iKr}}{1 - (\rho\sigma_s/K) \operatorname{arctg}(K/\rho\sigma_t)} dK. \quad (12.11)$$

Контур интегрирования теперь можно деформировать, как показано на рис. 12.1. В (12.11) имеются два вида особенностей: полюсы в точках, где $1 - (\rho\sigma_s/K) \operatorname{arctg}(K/\rho\sigma_t) = 0$, и точки ветвления, связанные с арктангенсом.

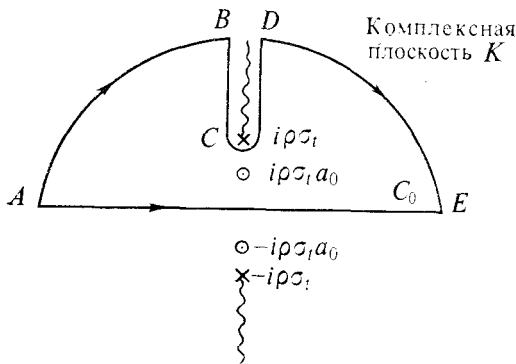


Рис. 12.1. Контур интегрирования в комплексной плоскости K ; локализация полюсов при $\pm i\rho\sigma_t a_0$ и точек ветвления при $\pm i\rho\sigma_t$.

Рассмотрим сначала местоположение полюсов $K = K_p$. Заметим, что, поскольку $\operatorname{tg}(K_p/\rho\sigma_s) = K_p/\rho\sigma_t$ и $\sigma_t \geq \sigma_s$, полюсы не могут быть вещественными. Однако корни K_p могут быть чисто мнимыми. Действительно, полагая $K_p = \pm i\rho\sigma_t a_0$, имеем

$$1 - (W_0/\alpha_0) \operatorname{arctg} \alpha_0 = 0, \quad (12.12)$$

где W_0 — отношение сечения рассеяния к полному сечению, называемое альбедо. Уравнение (12.12) можно записать в виде

$$1 = \frac{W_0}{2\alpha_0} \ln \left(\frac{1 + \alpha_0}{1 - \alpha_0} \right). \quad (12.13)$$

Решение этого уравнения α_0 как функция альбедо W_0 изображено на рис. 12.2. Как будет показано ниже, величина α_0 имеет простой физический смысл. Удобно записать $\rho\sigma_t a_0 = 1/L$, где L — расстояние, на котором связанное с вычетом слагаемое уменьшается в e раз, называемое длиной диффузии.

Точки ветвления можно определить из соотношения

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} Z = n\pi + \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iZ}{1-iZ} \right), \quad (12.14)$$

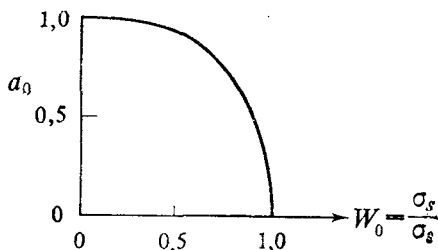
откуда видно, что $\operatorname{arc} \operatorname{tg} Z$ имеет точки ветвления при $Z = \pm i$. Таким образом, точки ветвления $K = K_{br}$ определяются условием

$$K_{br}/\rho\sigma_t = \pm i. \quad (12.15)$$

Найденные полюсы и точки ветвления показаны на рис. 12.1.

Рассмотрим теперь интеграл в (12.11). Поскольку $r > 0$, $\exp(iKr)$ обращается в нуль при $|K| \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости комплексного переменного K , так что интеграл оказы-

Рис. 12.2. Решение уравнения (12.13) (зависимость α_0 от W_0).



вается равным сумме произведения $2\pi i$ на вычет в точке $K_p = i\rho\sigma_t\alpha_0$ и вклада от разреза (рис. 12.1):

$$G(r) = G_{res}(r) + G_{br}(r). \quad (12.16)$$

Слагаемое $G_{res}(r)$, связанное с вычетом, равно

$$G_{res}(r) = \frac{\rho\sigma_t}{4\pi r} P_d \exp(-\rho\sigma_t\alpha_0 r), \quad (12.17)$$

где

$$P_d = \frac{2\alpha_0^2(1-\alpha_0^2)}{W_0(\alpha_0^2 + W_0 - 1)} = \frac{2l^2(L^2 - l^2)}{W_0 L^2 (L^2 W_0 + l^2 - L^2)}.$$

В этом выражении l — полная длина свободного пробега, определяемая из равенства $\rho\sigma_t = 1/l$, а L — введенная выше длина диффузии.

Рассмотрим теперь вклад от разреза $G_{br}(r)$. Заметим, что, полагая $K = i\rho\sigma_t t^1$, для контура CD , показанного на рис. 12.1,

¹⁾ Определение арктангенса см., например, в книге [1]. Заметим, что аргумент величины $K - i\rho\sigma_t$ есть $\pi/2$ для CD и $-3\pi/2$ для BC .

имеем

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{K}{\rho\sigma_t}\right) = \frac{1}{2i} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{\pi}{2} = T_1, \quad (12.18a)$$

а для контура BC —

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{K}{\rho\sigma_t}\right) = \frac{1}{2i} \ln \frac{t-1}{t+1} - \frac{\pi}{2} = T_2, \quad (12.18b)$$

поэтому интегрирование вдоль разреза дает

$$\begin{aligned} G_{br} &= \frac{\rho\sigma_t}{(2\pi)^2 r} \left\{ \int_0^1 \frac{T_2 \exp(-\rho\sigma_t r t)}{1 + i(W_0/t) T_2} dt + \int_1^\infty \frac{T_1 \exp(-\rho\sigma_t r t)}{1 + i(W_0/t) T_1} dt \right\} = \\ &= \frac{\rho\sigma_t}{4\pi r} \int_1^\infty g(t, W_0) \exp(-\rho\sigma_t r t) dt, \end{aligned} \quad (12.19)$$

где

$$g(t, W_0) = \left\{ \left[1 - \frac{W_0}{t} \operatorname{ar} \operatorname{th}\left(\frac{1}{t}\right) \right]^2 + \left(\frac{\pi}{2} \frac{W_0}{t} \right)^2 \right\}^{-1}.$$

Вычисление интеграла можно еще более упростить, положив $u = 1/t$. Тогда

$$G_{br}(r) = \frac{\rho\sigma_t}{4\pi r} \int_0^1 g(u, W_0) \exp\left(-\frac{\rho\sigma_t r}{u}\right) \frac{du}{u^2}. \quad (12.20)$$

Таким образом, полное выражение для средней интенсивности $U(r)$ излучения изотропного источника с полной мощностью P_0 имеет вид

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{P_0}{4\pi} G(r) = U_{res}(r) + U_{br}(r), \\ G(r) &= G_{res}(r) + G_{br}(r) = \\ &= \frac{\rho\sigma_t P_d}{4\pi r} \exp(-\rho\sigma_t \alpha_0 r) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi r} \int_1^\infty g(t, W_0) \exp(-\rho\sigma_t r t) dt. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Графики нормированной интенсивности $4\pi r^2 G(r)$ приведены на рис. 12.3, где параметром является W_0 . Заметим, что, поскольку $G(r)$ представляет собой плотность энергии, а не поток

мощности, $4\pi r^2 G(r)$ может быть больше единицы, как видно из рис. 12.3. Полный поток мощности в радиальном направлении должен быть, конечно, не больше полной мощности источника.

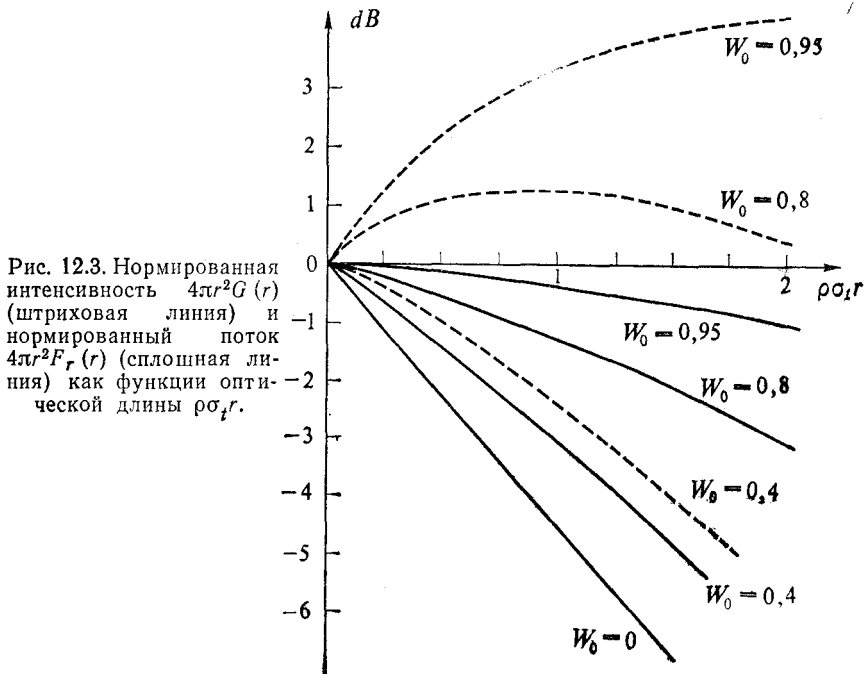


Рис. 12.3. Нормированная интенсивность $4\pi r^2 G(r)$ (штриховая линия) и нормированный поток $4\pi r^2 F_r(r)$ (сплошная линия) как функции оптической длины $\rho\sigma_t r$.

Поскольку вектор потока $\mathbf{F}$ связан со средней интенсивностью соотношением

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r) = -4\pi\rho\sigma_a G(r) (P_0/4\pi), \quad (12.22)$$

мы имеем

$$F_r(r) = \frac{4\pi\rho\sigma_t(1-W_0)P_0}{4\pi r^2} \int_r^\infty r'^2 G(r') dr'. \quad (12.23)$$

Графики этого потока, нормированные на $1/4\pi r^2$, показаны на рис. 12.3.

12.2. Диффузия и явления ближнего поля

В предыдущем разделе получена средняя интенсивность $U(r)$ точечного источника, расположенного в начале координат и излучающего полную мощность P_0 . Как видно из (12.21), она состоит из слагаемого, связанного с вычетом $U_{res}(r)$, и вклада от

разреза $U_{br}(\mathbf{r})$. В данном разделе мы рассмотрим физический смысл этих слагаемых.

Слагаемое $G_{res}(\mathbf{r})$, связанное с вычетом, дается выражением (12.17). Поскольку α_0 всегда меньше единицы и $G_{res}(\mathbf{r})$ содержит множитель $1/r$, этот член спадает медленнее, чем ослабленная интенсивность, которая изменяется как $(1/r^2)\exp(-\rho\sigma_t r)$. Если поглощение мало (W_0 близко к единице), то параметр α_0 близок к нулю и G_{res} спадает очень медленно. Поведение G_{res} тождественно диффузионному процессу, и G_{res} удовлетворяет диффузионному уравнению

$$[\nabla^2 - (\rho\sigma_t\alpha_0)^2] G_{res}(\mathbf{r}) = -\rho\sigma_t P_d \delta(\mathbf{r}). \quad (12.24)$$

Это уравнение можно сравнить с уравнением диффузии (9.16) при $\epsilon(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$:

$$(\nabla^2 - K_d^2) U_d(\mathbf{r}) = -3\rho\sigma_t(1 - p_1)\delta(\mathbf{r}), \quad (12.25)$$

где $K_d^2 = 3\rho\sigma_t\rho\sigma_a(1 - p_1)$. Можно показать, что с уменьшением поглощения ($W_0 \rightarrow 1$) величины $(\rho\sigma_t\alpha_0)^2$ и P_d в (12.24) приближаются соответственно к $3\rho\sigma_t\rho\sigma_a/W_0$ и $3/W_0^2$. Эти величины отличаются от соответствующих постоянных в (12.25) при $p_1 = 0$ (изотропное рассеяние) на W_0 и W_0^2 .

Чтобы показать это, заметим, что при $W_0 \rightarrow 1$ $\alpha_0 \rightarrow 0$, поэтому (12.13) можно разложить в ряд:

$$1 = \frac{W_0}{2\alpha_0} \left(2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_0^3 + \dots \right), \quad (12.26)$$

откуда при $W_0 \rightarrow 1$ получаем $P_d = 3/W_0^2$ и

$$\alpha_0 \approx \sqrt{3} \left(\frac{1 - W_0}{W_0} \right)^{1/2}. \quad (12.27)$$

В общем случае, если частицы в основном рассеивают ($W_0 \rightarrow 1$), то на больших расстояниях, когда оптическая длина больше единицы, слагаемое от вычета больше слагаемого, обусловленного разрезом. Вблизи источника (когда оптическая длина меньше единицы) нужно учитывать оба слагаемых в полной интенсивности. Таким образом, диффузионный процесс оказывается доминирующим при оптических длинах, превышающих единицу.

С другой стороны, если частицы в основном поглощают ($W_0 \ll 1$), то при оптических длинах больше единицы вклад от вычета много меньше вклада от разреза, причем вклад от разреза приближается к $(1/r^2)\exp(-\rho\sigma_t r)$.

12.3. Излучение при произвольной падающей интенсивности

Используя функцию $G(\mathbf{r})$ для излучения точечного изотропного источника, можно описать излучение в неограниченной среде при произвольной падающей интенсивности. Рассмотрим (12.1) при $\epsilon = 0$:

$$U(\mathbf{r}) = U_{ri}(\mathbf{r}) + \rho\sigma_s \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV'. \quad (12.28)$$

Взяв фурье-образ от этого интегрального уравнения, получим

$$U(\mathbf{K}) = \frac{U_{ri}(\mathbf{K})}{1 - \rho\sigma_s G_0(\mathbf{K})}. \quad (12.29)$$

Обратное преобразование Фурье этого выражения дает решение задачи. С другой стороны, можно записать

$$U(\mathbf{K}) = U_{ri}(\mathbf{K}) + \rho\sigma_s \frac{G_0(\mathbf{K})}{1 - \rho\sigma_s G_0(\mathbf{K})} U_{ri}(\mathbf{K}) = U_{ri}(\mathbf{K}) + \rho\sigma_s G(\mathbf{K}) U_{ri}(\mathbf{K})$$

и, проведя обратное преобразование Фурье, получить

$$U(\mathbf{r}) = U_{ri}(\mathbf{r}) + \rho\sigma_s \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U_{ri}(\mathbf{r}') dV', \quad (12.30)$$

где $G(\mathbf{r})$ описывает излучение точечного источника в неограниченной среде, как это было показано в предыдущем разделе. Первый член в (12.30) дает ослабленную интенсивность, второй — диффузную интенсивность.

Выражение (12.30) можно еще упростить, заметив, что $G(\mathbf{r})$ имеет вид (12.21). Запишем это выражение в форме

$$G(\mathbf{r}) = \rho\sigma_t P_d G_d(\beta_1 r) + \rho\sigma_t \int_1^\infty g(t, W_0) G_d(\beta_2, r) dt, \quad (12.31)$$

где $G_d(\beta, r) = e^{-\beta r}/4\pi r$, $\beta_1 = \rho\sigma_t \alpha_0$ и $\beta_2 = \rho\sigma_t t$.

Используя теперь интеграл

$$I(\beta, \mathbf{r}) = \int_V \frac{\exp(-\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} U_{ri}(\mathbf{r}') dV', \quad (12.32)$$

запишем решение в виде

$$U(\mathbf{r}) = U_{ri}(\mathbf{r}) + (\rho\sigma_s)(\rho\sigma_t) \left[P_d I(\beta_1, \mathbf{r}) + \int_1^\infty g(t, W_0) I(\beta_2, \mathbf{r}) dt \right]. \quad (12.33)$$

Здесь второй член соответствует диффузии, а последний — вкладу от разреза. Интеграл в (12.33) иногда бывает удобно выразить через оптическую длину, а не через обычную длину. Так, обозначая через τ вектор оптической длины $\tau = \rho\sigma_t \mathbf{r}$, получаем

$$U(\tau) = U_{ri}(\tau) + W_0 \left[P_d I_N(\alpha, \tau) + \int_1^\infty g(t, W_0) I_N(t, \tau) dt \right], \quad (12.34)$$

где

$$I_N(\alpha, \tau) = \int_{V_\tau} \frac{\exp(-\alpha|\tau - \tau'|)}{4\pi|\tau - \tau'|} U_{ri}(\tau') dV'_\tau,$$

$$dV'_\tau = d\tau'_1 d\tau'_2 d\tau'_3, \quad \tau_1 = \rho\sigma_t x, \quad \tau_2 = \rho\sigma_t y, \quad \tau_3 = \rho\sigma_t z.$$

Заметим, что задача о нахождении излучения при произвольной ослабленной падающей интенсивности $U_{ri}(\mathbf{r}')$ в неограниченной среде теперь сводится к вычислению интеграла $I(\beta, \mathbf{r})$ или $I_N(\alpha, \mathbf{r})$, которые выражаются через $e^{-\alpha\tau}/4\pi\tau$.

12.4. Излучение в случае направленной сферической падающей волны

Сферическая волна, ограниченная определенным телесным углом, представляет большой практический интерес, поскольку миллиметровые, оптические и акустические волны часто направ-

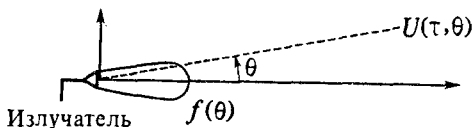


Рис. 12.4. Средняя интенсивность $U(\tau, \theta)$ для направленной сферической волны с угловой зависимостью $f(\theta)$.

ляются большими отражателями, линзами и преобразователями и распространяются в пределах малого конуса (рис. 12.4).

Рассмотрим ослабленную падающую интенсивность

$$U_{ri}(\tau) = (e^{-\tau/4\pi\tau^2}) f(\theta, \phi), \quad (12.35)$$

где $\tau = \rho\sigma_t r$ — радиальная оптическая длина, а $f(\theta, \phi)$ описывает угловую зависимость. Для иллюстрации методики без излишних усложнений будем считать функцию f не зависящей от ϕ : $f(\theta, \phi) = f(\theta)$.

Вычислим теперь величину $I_N(\alpha)$, определяемую выражением (12.34). Для этого разложим $U_{ri}(\mathbf{r})$ и $(4\pi|\tau - \tau'|)^{-1} \times$

$\times \exp(-\alpha|\tau - \tau'|)$ по сферическим гармоникам, используя свойство ортогональности последних:

$$U_{rl}(\tau') = \frac{e^{-\tau'}}{4\pi\tau'^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta'),$$

$$\frac{\exp(-\alpha|\tau - \tau'|)}{4\pi|\tau - \tau'|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ \times P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') R_n(\alpha, \tau, \tau') \exp[im(\phi - \phi')], \quad (12.36)$$

где τ и τ' — векторы, направленные от начала координат к точкам (τ, θ, ϕ) и (τ', θ', ϕ') в сферических координатах. Функция R_n дается равенствами

$$R_n(\alpha, \tau, \tau') = \begin{cases} -\alpha j_n(i\alpha\tau) h_n^{(1)}(i\alpha\tau') & \text{при } \tau < \tau', \\ -\alpha j_n(i\alpha\tau') h_n^{(1)}(i\alpha\tau) & \text{при } \tau > \tau', \end{cases} \quad (12.37)$$

где j_n и $h_n^{(1)}$ — сферические функции Бесселя и Ганкеля соответственно.

Прежде всего выполним интегрирование по θ' и ϕ' . Заметим, что $dV_{\tau'} = \tau'^2 d\tau' \sin \theta' d\theta' d\phi'$ и интегрирование по ϕ' исключает все $m \neq 0$. Заметим также, что

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_n'(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq n', \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } n = n'. \end{cases}$$

Учитывая это, получаем

$$I_N(\alpha, \tau, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\alpha, \tau) a_n P_n(\cos \theta), \\ b_n(\alpha, \tau) = \int_0^{\infty} \tau'^2 d\tau' R_n(\tau, \tau') \left(\frac{e^{-\tau'}}{4\pi\tau'^2} \right) = \\ = -\left(\frac{\alpha}{4\pi} \right) \left[h_n^{(1)}(i\alpha\tau) \int_0^{\tau} j_n(i\alpha\tau') e^{-\tau'} d\tau' + \right. \\ \left. + j_n(i\alpha\tau) \int_{\tau}^{\infty} h_n^{(1)}(i\alpha\tau') e^{-\tau'} d\tau' \right]. \quad (12.38)$$

Окончательно решение дается выражением

$$U(\tau, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\tau'}}{4\pi\tau'^2} + \frac{W_0}{2\pi} \left[P_d b_n(\alpha_0, \tau) + \int_1^{\infty} g(t, W_0) b_n(t, \tau) dt \right] \right\} a_n P_n(\cos \theta). \quad (12.39)$$

Выражение (12.39) является точным, однако в случае узкого пучка сходимость ряда оказывается медленной и нужно использовать какие-либо другие методы. Принимая во внимание, что как τ , так и τ' в (12.34) находятся вблизи оси ($\theta = 0$), для аппроксимации в (12.35) воспользуемся приближениями

$$f(\theta) \approx f(0) \exp\left(-\frac{\theta^2}{\theta_b^2}\right), \quad \theta = \frac{\tau_1}{\tau_3},$$

$$\frac{\exp(-\tau)}{4\pi\tau^2} \approx \frac{\exp[-(\tau_3 + \tau_1^2/2\tau_3)]}{4\pi\tau_3^2}, \quad (12.40)$$

где θ_b^2 равно ширине пучка по уровню половинной мощности, деленной на $4 \ln 2$. Аналогично можно аппроксимировать величину $\exp(-\alpha|\tau - \tau'|)/4\pi|\tau - \tau'|$, что упрощает интегрирование в (12.34).

12.5. Излучение при произвольном распределении источников

Предположим, что источник $\varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ в (12.1) излучает мощность изотропно во всех направлениях, т. е. $\varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ зависит только от $\mathbf{r}$. Пусть $P(\mathbf{r})$ — мощность, генерируемая в единице объема в точке $\mathbf{r}$. Тогда из (12.1) можно получить следующее интегральное уравнение для средней интенсивности $U(\mathbf{r})$:

$$U(\mathbf{r}) = \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{P(\mathbf{r}')}{4\pi} dV' + \rho\sigma_s \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV'. \quad (12.41)$$

Выполнив преобразование Фурье, получим

$$U(\mathbf{K}) = G_0(\mathbf{K}) \frac{P(\mathbf{K})}{4\pi} + \rho\sigma_s G_0(\mathbf{K}) U(\mathbf{K}),$$

откуда находим [см. (12.6)]

$$U(\mathbf{K}) = \frac{G_0(\mathbf{K})}{1 - \rho\sigma_s G_0(\mathbf{K})} \frac{P(\mathbf{K})}{4\pi} = G(\mathbf{K}) \frac{P(\mathbf{K})}{4\pi}. \quad (12.42)$$

Таким образом, решение $U(\mathbf{r})$ выражается через функцию Грина $G(\mathbf{r})$ как

$$U(\mathbf{r}) = \int_{V_\infty} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{P(\mathbf{r}')}{4\pi} dV'. \quad (12.43)$$

Используя (12.31), получаем

$$U(\mathbf{r}) = \rho\sigma_t \left[P_d I_t(\beta_1, \mathbf{r}) + \int_1^\infty g(t, W_0) I_t(\beta_2, \mathbf{r}) dt \right], \quad (12.44)$$

где

$$I_t(\beta, \mathbf{r}) = \int_V \frac{\exp(-\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{P(\mathbf{r}')}{4\pi} dV', \quad \beta_1 = \rho\sigma_t\alpha_0, \quad \beta_2 = \rho\sigma_t t.$$

Используя среднюю интенсивность на единицу сечения, выраженную в оптических длинах, $U(\tau) = U(\mathbf{r})/(\rho\sigma_t)^2$ и мощность

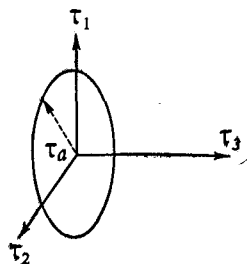


Рис. 12.5. Излучение диска радиуса a .

$P(\tau) = P(\mathbf{r})/(\rho\sigma_t)^3$, генерируемую в единице объема, также выраженную в оптических длинах, формулу (12.44) можно записать через вектор оптической длины $\tau = \rho\sigma_t \mathbf{r}$:

$$U(\mathbf{r}) = P_d I_t(\alpha, \tau) + \int_1^\infty g(t, W_0) I_t(t, \tau) dt, \quad (12.45)$$

где

$$I_t(\alpha, \tau) = \int_{V_\tau} \frac{\exp(-\alpha|\tau - \tau'|)}{4\pi|\tau - \tau'|} \frac{P(\tau')}{4\pi} dV'_\tau.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда источники расположены на диске радиуса a (рис. 12.5). Ось диска совпадает с осью z цилиндрической системы координат. Пусть P_a — мощность, излучаемая единицей поверхности диска, измеренной в единицах оптической длины. Заметив, что

$$P(\tau) dV_\tau = P_a 2\pi r_\tau dr_\tau, \quad (12.46)$$

получим

$$I_t(\alpha, \tau) = \frac{Pa\tau_a}{2} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho_\tau) J_1(\lambda\tau_a) \exp(-Z_\tau \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}}, \quad (12.47)$$

где $\tau_a = \rho\sigma_t a$, а координаты τ равны (ρ_τ, Z_τ) .

12.6. Изотропное рассеяние в конечном объеме и проблема Милна

В предыдущих разделах мы рассматривали излучение в неограниченной среде. Если же рассеивающий объем конечен, то можно сначала рассмотреть излучение в неограниченной среде, используя функцию Грина $G(\mathbf{r})$, а затем ввести распределение воображаемых источников на поверхности объема так, чтобы излучение этих поверхностных источников вместе с излучением в неограниченной среде удовлетворяло граничным условиям на поверхности ([11], разд. 2.5).

При другом подходе исходят из основного интегрального уравнения (12.1). Проиллюстрируем этот подход на следующей задаче. Пусть среда занимает полупространство $z > 0$, а излучение порождается на бесконечности при $z \rightarrow +\infty$. Требуется найти угловую зависимость выходящего из среды при $z = 0$ излучения. Эта задача впервые изучалась Милном [31] и обычно называется проблемой Милна.

Уравнение (12.1) для этой задачи принимает вид

$$U(\mathbf{r}) = \rho\sigma_s \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV', \quad (12.48)$$

где V — полупространство $z > 0$. Замечая, что $U(\mathbf{r})$ есть функция только от z , мы можем проинтегрировать G_0 по x и y . Полагая далее $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$ и замечая, что $dx' dy' = 2\pi R dR$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{2} \int_{|z-z'|}^{\infty} \frac{e^{-\rho\sigma_t R}}{R} dR = \\ &= \frac{1}{2} E_1(\rho\sigma_t |z - z'|), \end{aligned} \quad (12.49)$$

где $E_1(y) = \int_1^\infty (e^{-xy}/x) dx$ — интегральная показательная функция.

Используя (12.49) и оптическую длину $\tau = \rho \sigma_t z$, из (12.48) находим

$$U(\tau) = \frac{W_0}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) U(\tau') d\tau'. \quad (12.50)$$

Это уравнение называют уравнением Шварцшильда — Милна. Мы не станем подробно останавливаться на этой проблеме, так как она детально описана в литературе [31, 40] и, хотя и представляет значительный исторический и теоретический интерес, является лишь частной проблемой, практические приложения которой ограничены. Следует отметить, что точное решение этой проблемы можно разделить на две части, причем одна из них подчиняется диффузионному уравнению и удовлетворяет тому же граничному условию, которое использовалось в диффузионном приближении. Этот вопрос рассматривается в гл. 9.

Приближение для больших частиц

Во введении к гл. 12 описаны два предельных случая, допускающих относительно простые решения. Один из них, когда размеры частиц много меньше длины волны, называется случаем изотропного рассеяния; он рассмотрен в гл. 12. В данной главе мы обсудим другое приближение, соответствующее случаю частиц с размерами, много большими длины волны. Такое приближение оказывается полезным при изучении распространения оптических и акустических пучков в воде и атмосфере, где размеры частиц часто значительно больше длины волны.

Задача о распространении волн в случайном облаке больших частиц тесно связана с задачей о распространении волн в сплошной случайной среде с большим радиусом корреляции. По существу, распространение оптического излучения в турбулентной атмосфере можно описывать аналогично тому, как это делается в данной главе. Мы обсудим эту аналогию ниже (см. также [71]).

13.1. Вывод дифференциального уравнения в малоугловом приближении

Если размеры частиц много больше длины волны, то волна рассеивается частицами главным образом в пределах малого угла вблизи направления вперед, поэтому возникает возможность упрощения уравнения переноса. Уравнение переноса (7.24) вместе с (7.25) можно записать в виде

$$\hat{s} \cdot \text{grad } I(\mathbf{r}, \hat{s}) = -\rho \sigma_t I(\mathbf{r}, \hat{s}) + \frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} \rho(\hat{s}, \hat{s}') I(\mathbf{r}, \hat{s}') d\omega' + \varepsilon(\mathbf{r}, \hat{s}). \quad (13.1)$$

Запишем (13.1) в декартовых координатах, используя обозначение $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, где $\hat{x}$, $\hat{y}$ и $\hat{z}$ — единичные векторы соответствующих направлений. Единичный вектор $\hat{s}$ выражается через направляющие косинусы l , m , n :

$$\hat{s} = l\hat{x} + m\hat{y} + n\hat{z}, \quad (13.2)$$

где $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, причем в сферических координатах (θ, ϕ)

$$l = \sin \theta \cos \phi, \quad m = \sin \theta \sin \phi, \quad n = \cos \theta,$$

а дифференциал $dl dm$, который мы обозначим через ds , связан с дифференциалом телесного угла $d\omega$ соотношением

$$ds = dl dm = \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = n d\omega. \quad (13.3)$$

Выберем ось z так, чтобы излучатель и приемник были локализованы вблизи точек $(x = 0, y = 0, z = 0)$ и $(x = 0, y = 0, z = L)$ соответственно. Поскольку рассеяние ограничивается областью малых углов вблизи направления вперед, приходящая к приемнику рассеянная волна направлена в основном вдоль оси z . Это означает, что угол θ должен быть всегда малым. Поэтому можно использовать следующее приближение. Так как угол θ мал, положим $n = \cos \theta \approx 1$. Далее, хотя пределы интегрирования по l и m ограничены условием $l^2 + m^2 \leq 1$, без существенной ошибки их можно распространить до $\pm \infty$:

$$\int_{4\pi} d\omega \approx \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dm = \int ds, \quad (13.4)$$

поскольку основной вклад в лучевую интенсивность соответствует области малых $|l|$ и $|m|$, а вклад от больших $|l|$ и $|m|$ пренебрежимо мал. Кроме того, будем считать, что фазовая функция $\rho(\hat{s}, \hat{s}')$ зависит только от разности $\hat{s} - \hat{s}'$.

Используя эти приближения, запишем (13.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} I(z, \rho, s) + s \cdot \nabla_t I(z, \rho, s) = \\ = -\rho_n \sigma_t I(z, \rho, s) + \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(s - s') I(z, \rho, s') ds' + \varepsilon(z, \rho, s), \end{aligned} \quad (13.5)$$

где

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho + z\hat{z}, \quad \nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y}, \quad \mathbf{s} = l\hat{x} + m\hat{y}.$$

Здесь плотность числа частиц мы обозначили через ρ_n , чтобы избежать путаницы с радиальным вектором ρ .

Граничное условие можно выбрать вблизи излучателя при $z = 0$:

$$I(0, \rho, s) = I_0(\rho, s). \quad (13.6)$$

Уравнение (13.5) вместе с граничным условием (13.6) дает полную математическую постановку задачи.

В качестве примера рассмотрим коллимированный пучок с гауссовой амплитудой и поперечным размером W . Лучевую интенсивность при $z = 0$ можно получить следующим образом. Как будет показано в гл. 14, функция взаимной когерентности $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ есть фурье-образ от лучевой интенсивности $I(\rho, s)$:

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2) = \Gamma(\rho, \rho_d) = \langle u(\rho_1) u^*(\rho_2) \rangle = \int I(\rho, s) \exp(iks \cdot \rho_d) ds, \quad (13.7)$$

$$I(\rho, s) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \Gamma(\rho, \rho_d) \exp(-iks \cdot \rho_d) d\rho_d, \quad (13.8a)$$

где $\rho = 1/2(\rho_1 + \rho_2)$, $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$, а $u(\rho_1)$ и $u(\rho_2)$ — значения поля в точках ρ_1 и ρ_2 соответственно. Используя это и замечая, что для коллимированного пучка при $z = 0$

$$u(\rho) = u_0 \exp(-\rho^2/2W^2), \quad (13.8б)$$

получаем следующее выражение для лучевой интенсивности коллимированного пучка при $z = 0$:

$$I_0(\rho, s) = (k^2 W^2 I_0 / \pi) \exp(-\rho^2/W^2 - k^2 W^2 s^2), \quad (13.8в)$$

где полная мощность P_t есть

$$P_t = \int |u(\rho)|^2 d\rho = \iint I_0(\rho, s) ds d\rho = \pi W^2 I_0, \quad I_0 = |u_0|^2. \quad (13.8г)$$

13.2. Общее решение

Общее решение уравнения (13.5) можно получить с помощью преобразования Фурье¹⁾. Применим к (13.5) преобразование Фурье по аргументу ρ . Обозначим через I_1 фурье-образ от I по ρ :

$$I_1(z, \kappa, s) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z, \rho, s) \exp(i\kappa \cdot \rho) d\rho, \quad (13.9a)$$

$$I(z, \rho, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} I_1(z, \kappa, s) \exp(-i\kappa \cdot \rho) d\kappa. \quad (13.9б)$$

В результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - is \cdot \kappa + \rho_n \sigma_t \right) I_1(z, \kappa, s) - \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \rho(s - s') I_1(z, \kappa, s') ds' - E(z, \kappa, s) = 0, \quad (13.10)$$

¹⁾ Вместо этого можно использовать метод характеристик для линейных дифференциальных уравнений с частными производными [156].

где E — фурье-образ по ρ от $\varepsilon(z, \rho, s)$. Прежде всего упростим первый член (13.10), полагая

$$I_1(z, \kappa, s) = I_2(z, \kappa, s) \exp \{ (is \cdot \kappa - \rho_n \sigma_t) z \}. \quad (13.11)$$

Тогда (13.10) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} I_2(z, \kappa, s) - \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(s - s') \exp \{ -i\kappa \cdot (s - s') z \} I_2(z, \kappa, s') ds' - \\ - E(z, \kappa, s) \exp \{ -is \cdot \kappa + \rho_n \sigma_t z \} = 0. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Далее, преобразуя по Фурье второй член, представляющий собой интеграл типа свертки, получаем произведение двух функций. Используя соотношения

$$P(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \exp(is \cdot q) ds, \quad (13.13a)$$

$$F(z, \kappa, q) = \int_{-\infty}^{\infty} I_2(z, \kappa, s) \exp(is \cdot q) ds, \quad (13.13b)$$

$$E_0(z, \kappa, q) = \int_{-\infty}^{\infty} E(z, \kappa, s) \exp(is \cdot q) ds, \quad (13.13b)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(z, \kappa, q) - \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} P(q - \kappa z) F(z, \kappa, q) - \\ - E_0(z, \kappa, q - \kappa z) \exp(\rho_n \sigma_t z) = 0. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка для F , которое легко решить.

В отсутствие источников $\varepsilon(z, \rho, s)$ в среде имеем

$$F(z, \kappa, q) = F(0, \kappa, q) \exp \left[\int_0^z \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} P(q - \kappa z') dz' \right]. \quad (13.15)$$

Окончательное решение $I(z, \rho, s)$ получается из (13.96), (13.11) и (13.15):

$$\begin{aligned} I(z, \rho, s) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\kappa \exp \{ -i\kappa \cdot \rho + (is \cdot \kappa - \rho_n \sigma) z \} \times \\ \times \int dq \exp(-is \cdot q) F(z, \kappa, q). \end{aligned} \quad (13.16)$$

При $z = 0$ $I(z, \rho, s)$ должно быть равно $I_0(\rho, s)$ из (13.6), так что

$$F_0(\kappa, q) = F(0, \kappa, q) = \iint I_0(\rho, s) \exp(i\kappa \cdot \rho + is \cdot q) d\rho ds. \quad (13.17)$$

Окончательное выражение можно записать в несколько более простой форме, заменив переменную q на $q' = q - \kappa z$ и опустив затем штрих у q' . Это дает

$$I(z, \rho, s) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\kappa \int dq \exp(-i\kappa \cdot \rho - is \cdot q) F_0(\kappa, q + \kappa z) \times \\ \times K(z, \kappa, q), \quad (13.18)$$

где

$$K(z, \kappa, q) = \exp \left[- \int_0^z \rho_n \sigma_t \left\{ 1 - \frac{1}{4\pi} P(q + \kappa(z - z')) \right\} dz' \right].$$

Выражение (13.18) представляет собой общее решение уравнения (13.5) в отсутствие источников $\varepsilon(z, \rho, s)$. При наличии источников уравнение (13.15) нужно модифицировать так, чтобы удовлетворить уравнению (13.14)

Интегралы, входящие в найденное решение, трудно оценить, и в настоящее время в общем случае произвольной функции рассеяния $p(s - s')$ удобное выражение для I , по-видимому, отсутствует. Однако поучительно рассмотреть частный случай, когда функция рассеяния аппроксимируется дельта-функцией для направления вперед:

$$p(s - s') = 4\pi W_0 \delta(s - s'), \quad (13.19)$$

где W_0 — альbedo отдельной частицы, а $4\pi W_0$ выбрано так, что

$$W_0 = \frac{1}{4\pi} \int p(\hat{s} - \hat{s}') d\omega' \approx \frac{1}{4\pi} \int p(s - s') ds'. \quad (13.20)$$

Подставляя (13.19) в (13.18), получаем

$$I(z, \rho, s) = I(0, \rho - sz, s) \exp(-\rho_n \sigma_a z), \quad (13.21)$$

где σ_a — сечение поглощения частицы. Отсюда видно, что лучевая интенсивность распространяется без изменения направления s , испытывая ослабление, определяемое сечением поглощения частицы.

Рассмотрим другой пример (разд. 15.2 и 15.3). Пусть падающая волна — плоская:

$$I_0(\rho, s) = I_0 \delta(s), \quad (13.22)$$

так что (13.17) принимает вид

$$F_0(q, \kappa) = (2\pi)^2 I_0 \delta(\kappa). \quad (13.23)$$

Фазовую функцию будем считать гауссовой:

$$\rho(s) = 4\alpha_p W_0 \exp(-\alpha_p s^2), \quad (13.24)$$

где α_p пропорционально $(D/\lambda)^2$ (D — диаметр частицы, λ — длина волны). Используя (13.24), для $K(z, \kappa, q)$ в (13.18) получаем выражение

$$K(z, \kappa, q) = \exp \left\{ - \int_0^z \rho_n \sigma_t \left[1 - W_0 \exp \left(- \frac{q^2}{\alpha_p} \right) \right] dz' \right\}. \quad (13.25)$$

Если оптическая длина $\rho_n \sigma_t z$ много больше единицы, то (13.25) можно аппроксимировать выражением

$$K(z, \kappa, q) = \exp \left\{ - \int_0^z \rho_n \sigma_t \left[1 - W_0 + \frac{W_0}{\alpha_p} q^2 \right] dz' \right\}. \quad (13.26)$$

Подставляя (13.23) и (13.26) в (13.18), находим

$$I(z, \rho, s) = \frac{\alpha_p I_0}{\pi \rho_n \sigma_t z W_0} \exp \left[- \rho_n \sigma_a z - \frac{\alpha_p s^2}{\rho_n \sigma_t z W_0} \right]. \quad (13.27)$$

Заметим, что в этом приближении угловое распределение, часто называемое угловым спектром, уширяется, и ширина пучка на уровне половинной мощности растет как $z^{1/2}$. Заметим также, что поток $F(z, \rho)$ дается выражением

$$F(z, \rho) = \int I(z, \rho, s) ds = I_0 \exp(-\rho_n \sigma_a z). \quad (13.28)$$

Это показывает, что уширение углового спектра сопровождается уменьшением амплитуды, причем ослабление полного потока просто пропорционально сечению поглощения.

13.3. Приближенное решение для случая медленного углового изменения диффузной интенсивности

Как показано в предыдущем разделе, несмотря на то, что общее решение уравнения (13.5) известно и в отсутствие в среде источников имеет вид (13.18), интеграл в (13.18) для произвольной фазовой функции вычислить не удастся. В некоторых практических ситуациях, таких, как распространение оптических пучков в воде и атмосфере, ослабленная падающая интенсивность сильно коллимирована, тогда как диффузная интенсивность имеет широкий угловой спектр и медленно меняется при изменении угла рассеяния. В этих условиях можно получить более простое решение следующим способом [46, 53].

Рассмотрим случай, когда в уравнении (13.5) источник $\varepsilon(z, \rho, s)$ отсутствует. Запишем лучевую интенсивность в виде суммы ослабленной падающей интенсивности I_{ri} и диффузной интенсивности I_d .

Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} I_{ri}(z, \rho, s) + s \cdot \nabla_i I_{ri}(z, \rho, s) = -\rho_n \sigma_t I_{ri}(z, \rho, s), \quad (13.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} I_d(z, \rho, s) + s \cdot \nabla_i I_d(z, \rho, s) = & -\rho_n \sigma_t I_d(z, \rho, s) + \\ & + \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} p(s - s') I_d(z, \rho, s') ds' + Q_d(z, \rho, s), \end{aligned} \quad (13.30)$$

где

$$Q_d(z, \rho, s) = \frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} p(s - s') I_{ri}(z, \rho, s') ds'. \quad (13.31)$$

Решение (13.29) легко получить в виде интеграла Фурье, если заметить, что (13.29) совпадает с (13.5), за исключением равенства нулю фазовой функции p и функции источников ε . Поэтому, полагая в (13.18) $P = 0$, получаем

$$\begin{aligned} I_{ri}(z, \rho, s) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\kappa \int d\mathbf{q} \exp(-i\kappa \cdot \rho - is \cdot \mathbf{q}) F_0(\kappa, \mathbf{q} + \kappa z) \times \\ \times \exp(-\rho_n \sigma_t z), \end{aligned} \quad (13.32)$$

где $F_0(\kappa, \mathbf{q} + \kappa z)$ — фурье-образ от падающей лучевой интенсивности при $z = 0$, даваемый выражением (13.17).

Подставив (13.32) в (13.31), получим

$$\begin{aligned} Q_d(z, \rho, s) = \left(\frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d\kappa \int d\mathbf{q} \exp(-i\kappa \cdot \rho - is \cdot \mathbf{q}) P(\mathbf{q}) \times \\ \times F_0(\kappa, \mathbf{q} + \kappa z) \exp(-\rho_n \sigma_t z). \end{aligned} \quad (13.33)$$

Рассмотрим теперь (13.30). Если диффузную интенсивность I_d можно считать медленной функцией углов (т. е. медленной функцией l' и m') и если фазовая функция зависит лишь от угла между направлением падения $\hat{s}'$ и направлением рассеяния $\hat{s}$ [т. е. от $|\hat{s} - \hat{s}'|^2 = (l - l')^2 + (m - m')^2$], то приближенное решение (13.30) можно получить, разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора и удерживая первый член этого ряда. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int \int_{-\infty}^{\infty} p(s - s') I_d(z, \rho, s') ds' = \int \int_{-\infty}^{\infty} p(s') I_d(z, \rho, s' + s) ds', \quad (13.34) \\ I_d(z, \rho, s' + s) = I_d(z, \rho, s) + s' \cdot \nabla_s I_d(z, \rho, s) + \\ + \frac{1}{2} (s' \cdot \nabla_s)^2 I_d(z, \rho, s) + \dots, \end{aligned}$$

где $\nabla_s = (\partial/\partial l)\hat{x} + (\partial/\partial m)\hat{y}$, $s = l\hat{x} + m\hat{y}$, а $s' = l'\hat{x} + m'\hat{y}$. Подставляя (13.34) в (13.30) и замечая, что $p(s')$ есть функция от $l'^2 + m'^2$, и что $l' = \sin \theta' \cos \phi'$, $m' = \sin \theta' \sin \phi'$, $\int_{-\infty}^{\infty} p(|s'|^2) \times \times l' dl' dm' = 0$, а

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(|s'|^2) l'^2 dl' dm' &= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' p(\sin^2 \theta') \sin^2 \theta' \cos^2 \phi' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(|s'|^2) (l'^2 + m'^2) dl' dm', \end{aligned}$$

получаем ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} I_d(z, \rho, s) + s \cdot \nabla_s I_d(z, \rho, s) &= \\ &= -\rho_n \sigma_a I_d(z, \rho, s) + \rho_n \sigma_t W_0 \frac{\langle \theta^2 \rangle}{4} \nabla_s^2 I_d(z, \rho, s) + Q_d(z, \rho, s), \end{aligned} \quad (13.35)$$

где

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(s') (l'^2 + m'^2) dl' dm'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(s') dl' dm'}, \quad (13.36)$$

и мы использовали соотношение

$$\sigma_a = \sigma_t - \sigma_s = \sigma_t (1 - W_0), \quad W_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(s') dl' dm'. \quad (13.37)$$

Уравнение (13.35) можно решить точно с помощью преобразований Фурье (13.9а) и (13.9б), где

$$I_1(z, \kappa, s) = I_2(z, \kappa, s) \exp \{ (is \cdot \kappa - \rho_n \sigma_a) z \}. \quad (13.38)$$

В результате получаем решение ²⁾

$$I_d(z, \rho, s) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\kappa \int dq \exp(-i\kappa \cdot \rho - is \cdot q) F_d(z, \kappa, q + \kappa z), \quad (13.39)$$

¹⁾ Полное разложение в ряд приведено в работе [23].

²⁾ Это решение совпадает с полученным в работе [53].

где

$$F_d(z, \kappa, q + \kappa z) = \left(\frac{\rho_n \sigma_t}{4\pi} \right) F_0(\kappa, q + \kappa z) \int_0^z P(q + \kappa(z - z')) \times \\ \times \exp \left(-\rho_n \sigma_t z' - \int_{z'}^z \lambda dz'' \right) dz', \\ \lambda = \rho_n \sigma_t W_0 \frac{\langle \theta^2 \rangle}{4} |q + \kappa(z - z'')|^2 + \rho_n \sigma_a,$$

а $F_0(\kappa, q)$ — фурье-образ лучевой интенсивности $I_0(\rho, s)$ при $z = 0$, определяемый выражением (13.17).

Полная лучевая интенсивность $I(z, \rho, s)$ есть сумма $I_{ri}(z, \rho, s)$ (13.32) и $I_d(z, \rho, s)$ (13.39).

Рассмотрим теперь мощность, принимаемую апертурой. Если $A_r(\rho, s)$ — нормированная эффективная поверхность приемной апертуры, то полная принимаемая мощность в точке z есть

$$P(z) = \int d\rho \int ds A_r(\rho, s) I(z, \rho, s) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\kappa \int dq \alpha_r(\kappa, q) F_r(z, \kappa, q). \quad (13.40)$$

где α_r и F_r — фурье-образы от A_r и I :

$$F_r(z, \kappa, q) = \int d\rho \int ds \exp(i\kappa \cdot \rho + is \cdot q) I(z, \rho, s), \\ \alpha_r(\kappa, q) = \int d\rho \int ds \exp(-i\kappa \cdot \rho - is \cdot q) A_r(\rho, s). \quad (13.41)$$

Угловая расходимость пучка вблизи аксиального направления есть

$$\langle s^2 \rangle = \frac{\int ds |s|^2 I(z, 0, s)}{\int ds I(z, 0, s)}. \quad (13.42)$$

Среднеквадратичное поперечное сечение пучка равно

$$\langle \pi \rho^2 \rangle = \frac{\int d\rho \int ds (\pi \rho^2) I(z, \rho, s)}{\int d\rho \int ds I(z, \rho, s)}. \quad (13.43)$$

Выражения (13.30), (13.42) и (13.43) оценивались [47, 53] для случая падающего пучка (13.8) и эффективной поверхности апертуры $A_r(\rho, s) = \exp(-\rho^2/W_r^2)$ при гауссовой форме фазовой функции.

Приведем окончательные выражения для этого частного случая, опуская детальные выкладки работ [47, 53]. Пусть фазовая функция имеет вид

$$p(\hat{\mathbf{s}}) = \frac{4W_0}{\langle \theta^2 \rangle} \exp\left(-\frac{l^2 + m^2}{\langle \theta^2 \rangle}\right), \quad (13.44)$$

причем мы использовали соотношение

$$W_0 = \frac{1}{4\pi} \iint p(\hat{\mathbf{s}}) dl dm. \quad (13.45)$$

Падающая интенсивность при $z=0$ дается выражением (13.8в). Тогда для $P(z)$ из (13.40) получаем

$$\frac{P(z)}{P(0)} = \frac{C}{C + 3\beta\tau^2} e^{-\tau/W} + C e^{-\tau/W_0} \int_0^\tau \frac{e^y dy}{C + 3\beta\tau^2 + 3y^2 + y^3}, \quad (13.46)$$

где

$$\tau = \rho_n \sigma_t W_0 z, \quad C = 3(W_r^2 + W^2) \frac{(\rho_n \sigma_t W_0)^2}{\langle \theta^2 \rangle}, \quad P(0) = \frac{P_0 W_r^2}{W_2^2 + W^2}$$

и $P_0 = \pi W^2 I_0$ — полная излучаемая мощность. Угловая зависимость (13.42) имеет вид

$$\langle |\mathbf{s}^2| \rangle = \frac{\left[\frac{\theta_0^2}{\pi} \left(1 + \frac{3\beta\tau^2}{C_3}\right)^{-2} + \langle \theta^2 \rangle C_3 \int_0^\tau e^y R(y, \tau) dy \right]}{\left[\left(1 + \frac{3\beta\tau^2}{C_3}\right)^{-1} + C_3 \int_0^\tau \frac{e^y dy}{C_3 + 3\beta\tau^2 + 3y^2 + y^3} \right]}, \quad (13.47)$$

где

$$C_3 = \frac{3W^2 (\rho_n \sigma_t W_0)^2}{\langle \theta^2 \rangle}, \quad \beta = \frac{\theta_0^2}{\langle \theta^2 \rangle}, \quad \theta_0^2 = \frac{1}{k^2 W^2},$$

$$R(y, \tau) = \frac{(1 + \beta + y)(C_3 + 3\beta\tau^2 + 3y^2 + y^3) - 3(\beta\tau + y + y^2/2)}{(C_3 + 3\beta\tau^2 + 3y^2 + y^3)^2}.$$

Следовательно, среднеквадратичное поперечное сечение пучка (13.43) равно

$$\langle \pi \rho^2 \rangle = \pi W^2 \left(1 + \frac{3\beta\tau^2}{C_3} + \frac{\tau^3}{C_3}\right). \quad (13.48)$$

Литература

1. Abramowitz M., Stegun I. A., Handbook of Mathematical Functions, U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1964.
2. Adams R. N., Denman E. D., Wave Propagation and Turbulent Media, Elsevier, Amsterdam, 1966.
3. Ahuja A. S., JASA, **51**, 182 (1970).
4. Anderson N., Sekelj P., Phys. Med. Biol., **12**, 185 (1967).
5. Anderson R. S., Browell E. V., Appl. Opt. **11**, 6, 1345 (1973).
6. Baker D. W., IEEE Trans. Sonics Ultrasonics, **SU-17**, 170 (1970).
7. Battan L. J., Radar Observation of the Atmosphere, Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1973.
8. Bean B. R., Dutton E. J., Radio Meteorology, Dover, New York, 1968. (Имеется перевод: Бун Б., Даттон Е. Радиометеорология. Пер. с англ. — Л.: Гидрометеиздат, 1971.)
9. Beard C. I., Kays T. H., Twersky V., IEEE Trans. Ant. Prop., **AP-15**, 1, 99 (1967).
10. Beckmann P., Spizzichino A., The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surface, Pergamon, Oxford, 1963.
11. Bell G. I., Glasstone S., Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1970.
12. Bellman R., Wing G. M., An Introduction to Invariant Imbedding, Wiley, New York, 1975.
13. Bello P. A., IEEE Trans. Commun. Syst., **11**, 360 (1963).
14. Bendat J. S., Piersol A. G., Measurement and Analysis of Random Data, Wiley, New York, 1966.
15. Bendat J. S., Piersol A. G., Random Data, Wiley (Interscience), New York, 1971.
16. Berne B. J., Pecora R., Dynamic Light Scattering, Wiley, New York, 1976.
17. Biggs A. W., ed., AGARD Tonf. Proc. no. 107. Telecommunication aspects on frequencies between 10 and 100 GHz. Technical Editing and Reproduction, Ltd., Harford House, London, 1973.
18. Blackman R. B., Tukey J. W., The Measurement of Power Spectra, Dover, New York, 1958.
19. Blanchard D. C., Bentley and Lenard: Pioneers in cloud physics, Am. Sci., **60**, 746 (1972).
20. Blevis B. C., Dohoo R. M., McCormick K. S., IEEE Trans., **AP-15**, 394 (1967).
21. Born M., Wolf E., Principles of Optics, Macmillan, New York, 1964. (Имеется перевод: Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Пер. с англ. — М.: Наука, 1973.)
22. Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E., Electromagnetic and Acoustic Scattering, North-Holland Publ., Amsterdam, 1969.
23. Bremner H., J. Res. Nat. Bur. Std., **68D**, 967 (1964).
24. Brinkworth B. J., Appl. Opt., **11**, 1434 (1972).
25. Brinkworth B. J., Appl. Opt., **12**, 2, 427 (1973).
26. Brown O. B., Gordon H. R., Appl. Opt., **13**, 2874 (1974).
27. Byer R. L., Garbuny M., Appl. Opt., **12**, 1497 (1973).
28. Cantor I., Appl. Opt., **12**, 1482 (1973).
29. Case K. M., Zweifel P. F., Linear Transport Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

30. *Case K. M., Hoffman F. D., Placzek G.*, Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. Vol. 1, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, New Mexico, 1953.
31. *Chandrasekhar S.*, Radiative Transfer, Oxford Univ. Press, London and New York, and Dover, New York, 1950. (Имеется перевод: Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1953.)
32. *Chu T. S.*, Bell Syst. Techn. J., **53**, 8, 1557 (1974).
33. *Chu T. S., Hogg D. C.*, Bell Syst. Techn. J., **47**, 723 (1968).
34. *Cohen A.*, Appl. Opt., **14**, 12, 2873 (1975).
35. *Coulson K., Fraser R.*, Rev. Geophys. Space Phys., **13**, 732, 826 (1975).
36. *Crosignani B., DiPorto P., Bertolotti M.*, Statistical Properties of Scattered Light, Academic Press, New York, 1975.
37. *Cross D. A., Latimer P.*, Appl. Opt., **11**, 5, 1225 (1972).
38. *Danielson R. E., Moor D. R., van de Hust H. C.*, J. Atmos. Sci., **26**, 1078 (1969).
39. *Davenport W. B., Root W. L.*, Random Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1958. (Имеется перевод: Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1960.)
40. *Davison B.*, Neutron Transport Theory, Oxford Univ. Press, London and New York, 1958.
41. *de Buttencourt J. T.*, J. Reprints Raytheon Co., **12**, 1, 2 (1975).
42. *Deirmendjian D.*, Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions, American Elsevier, New York, 1969.
43. *Derr V. E.*, Remote Sensing of the Troposphere, U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1972.
44. *Devin C., Jr.*, JASA, **31**, 12, 1654 (1959).
45. *Divari N. B.*, ed., Atmospheric Optics, Consultant Bureau, New York, 1970.
46. *Долин Л. С.* — Изв. ВУЗов (Радиофизика), 1964, 7, № 2, с. 380.
47. *Долин Л. С.* — Изв. ВУЗов (Радиофизика) 1966, 9, № 1, с. 61.
48. *Duntley S. Q.*, J. Opt. Soc. Am., **53**, 214 (1963).
49. *Durney C. H., Johnson C. C., Massoudi H.*, IEEE Trans. MTT, **23**, 2, 246 (1975).
50. *Easterbrook B. J., Turner D.*, Proc. IEE (London), **114**, 557 (1967).
51. *England A. W.*, Radio Sci., **9**, 447 (1974).
52. *Erickson K. R., Fay F. J., Jones J. P.*, IEEE Trans. Sonics Ultrasonics, **SU-21**, 144 (1974).
53. *Fante R. L.*, IEEE Trans., **AP-21**, 750 (1973).
54. *Fedoseev V. A.*, Advances in Aerosol Physics, Israel Program for Scientific Translation, Ltd., 1971.
55. *Felsen L. B., Marcuvitz N.*, Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973. (Имеется перевод: Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: Пер. с англ. — М.: Мир, 1978.)
56. *Fletcher N. H.*, The Physics of Rain Clouds, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1962.
57. *Funk C. J.*, Appl. Opt., **12**, 301 (1973).
58. *Gate L. F.*, Appl. Opt., **13**, 2, 236 (1974).
59. *Godard S. L.*, IEEE Trans., **AP-18**, 4, 530 (1970).
60. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
61. *Гурвич А. С., Калинин В. И., Матвеев Д. Т.* — Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1973, **9**, с. 712.
62. *Hale G. M., Querry M. R.*, Appl. Opt. **12**, 555 (1973).
63. *Harrold T. W.*, Proc. IEE (London), **114**, 201 (1967).
64. *Hemenger R. P.*, J. Opt. Soc. Am., **64**, 4, 503 (1974).
65. *Heney L., Greenstein J.*, Astrophys. J., **93**, 70 (1941).
66. *Hermann B. M., Browning S. R., Battan L. J.*, Tables of Radar Cross Sections of Water Spheres, Univ. of Arizona, TR No. 9, 1961.

67. *Hildebrand F. B.*, Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1956.
68. *Hodgeson J. A., McClenny W. A., Hanst P. L.*, Science, **182**, 248 (1973).
69. *Hogg D. C.*, Bell Syst. Techn. J., **48**, 2949 (1969).
70. *Hogg D. C., Chu T. S.*, Proc. IEEE, **63**, 1308 (1975). (Имеется перевод: Хогг, Чжу, ТИИЭР, 1975, **65**, с. 52.)
71. *Ishimaru A.*, Radio Sci., **10**, 1, 45 (1975).
72. *Ishimaru A.*, Proc. IEEE, **65**, 1030 (1977). (Имеется перевод: Исимару А., ТИИЭР, 1977, **65**, с. 46.)
73. *Ishimaru A., Hong S. T.*, Radio Sci., **10**, 6, 637 (1975).
74. *Ishimaru A., Lin J. C.*, AGARD Conf. Proc. № 107, Telecommunication aspects on frequencies between 10 and 100 GHz, Technical Editing and Reproduction, Ltd., Harford House, London, 1973.
75. *Jahnke E., Emde F., Losch F.*, Tables of Higher Functions, McGraw-Hill, New York, 1960. (Имеется перевод: Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. Пер. с нем. — М.: Наука, 1977.)
76. *Jerlov N. G.*, Optical Oceanography, Elsevier, Amsterdam, 1968.
77. *Jerlov N. G., Nielsen E. S.*, Optical Aspects of Oceanography, Academic Press, New York, 1974.
78. *Johnson C. C.*, IEEE Trans., **BME-17**, 129 (1970).
79. *Johnson C. C., Guy A. W.*, Proc. IEEE, **60**, 6, 692 (1972). (Имеется перевод: Джонсон, Гай, ТИИЭР, 1972, **60**, с. 49.)
80. *Johnson C. C., Durney C. H., Messoudi H.*, IEEE Trans., **MTT-23**, 9, 739 (1975).
81. *Kapany N. R.*, Fiber Optics, Academic Press, New York, 1967.
82. *Kattawar G. W., Humphreys T. J.*, Appl. Opt., **15**, 1, 273 (1976).
83. *Kattawar G. W., Plass G. N., Catchings F. E.*, Appl. Opt., **12**, 1071 (1973).
84. *Kattawar G. W., Plass G. H., Hitzfelder S. J.*, Appl. Opt., **15**, 632 (1976).
85. *Kennedy R. S., Karp S.*, Proc. of MIT-NASA Workshop, NASA SP-217, US. Govt. Printing Office, Washington, D. C., 1969.
86. *Kerker M.*, ed., ICES Electromagnetic Scattering, Pergamon, Oxford, 1963.
87. *Kerker M.*, The Scattering of Light, Academic Press, New York, 1969.
88. *Kinsler L. E., Frey A. R.*, Fundamentals of Acoustics, John Wiley, New York, 1962.
89. *Кондратьев К. Я.* Лучистый теплообмен в атмосфере. — М. — Л.: Гидрометеониздат, 1956.
90. *Kratohvil J. P.*, Annal. Chem., **38**, 517 (1966).
91. *Kubelka P.*, J. Opt. Soc. Amer., **38**, 448 (1948).
92. *Kubelka P., Munk F.*, Zs. Tech. Phys., **12**, 593 (1931).
93. *Laws J. O., Parsons D. A.*, Am. Geophys. Un. Trans., **24**, 452 (1943).
94. *Lax P. D., Phillips R. S.*, Scattering Theory, Academic Press, New York, 1967.
95. *Lhermitte R.*, Science, **182**, 258 (1973).
96. *Lin C. I., Baker M., Charlson R. J.*, Appl. Opt., **12**, 1356 (1973).
97. *Lin J. C., Ishimaru A.*, Propagation of Millimeter Waves in Rain, Dept. of Elec. Eng., TR No. 144, Univ. of Washington, Seattle, Washington, 1971.
98. *Lin J. C., Ishimaru A.*, JASA, **56**, 6, 1695 (1974).
99. *Liou K., Lahore H.*, J. Appl. Meteorol., **13**, 257 (1974).
100. *Livesay D. E., Chen K. M.*, IEEE Trans. MTT, **22**, 12, 1273 (1974).
101. *Megnus F. W., Oberhettinger F.*, Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics, Chelsea, New York, 1954.
102. *Malecki I.*, Physical Foundations of Technical Acoustics, Oxford Univ. Press (Pergamon), London and New York, 1968.
103. *Marshall J. S., Palmer W. M. K.*, J. Meteorol., **5**, 165 (1948).
104. *Medhurst R. S.*, IEEE Trans., **AP-13**, 550 (1965).

105. Menzel D. H., ed., Selected Papers on the Transfer of Radiations, Dover, New York, 1966.
106. Milton J. E., Anderson R. C., Browell E. V., Appl. Opt., **11**, 3, 697 (1972).
107. Molcho J., Estimation of the Macroscopic Optical Scattering Parameters of Tenuous Solutions, Ph. D. Thesis, Elec. Eng. Dept., Univ. of Washington, Seattle, Washington, 1975.
108. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953. (Имеется перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы математической физики. Пер с англ. — М.: ИЛ, 1960.)
109. Morse P. M., Ingard K. U., Theoretical Acoustics, McGraw-Hill, New York, 1968.
110. Mudgett P. S., Richards L. W., Appl. Opt., **10**, 1485 (1971).
111. Newton R. G., Scattering Theory of Waves and Particles, McGraw-Hill, New York, 1966.
112. Oguchi T., J. Radio Res. Labs., **13**, 141 (1966).
113. Oguchi T., Radio Sci., **8**, 1, 31 (1973).
114. Okamura S. et al., J. Radio Res. Lab., **6**, 255 (1959).
115. Ольшевский В. В. Статистические свойства морской реверберации. — М.: Наука, 1966.
116. Palmor K. F., Williams D., JOSA, **64**, 8, 1107 (1974).
117. Papas C. H., Theory of Electromagnetic Wave Propagation, Plenum Press, New York, 1965.
118. Pecora R., J. Chem. Phys., **40**, 6, 1604 (1964).
119. Pecora R., J. Chem. Phys., **48**, 9, 4126 (1968).
120. Plass G. N., Kattawar G. W., Appl. Opt., **7**, 3, 415 (1968).
121. Plass G. N., Kattawar C. W., Catchings F. E., Appl. Opt., **12**, 314 (1973).
122. Preisendorfer R. W., Radiative Transfer on Discrete Spaces, Oxford Univ. Press (Pergamon), London and New York, 1965.
123. Redwood M. R., Mechanical Waveguides, Oxford Univ. Press (Pergamon), London and New York, 1960.
124. Reichman J., Appl. Opt., **12**, 1811 (1973).
125. Reynolds L., Optical Diffuse Reflectance and Transmittance from an Anisotropically Scattering Finite Blood Medium, Ph. D. Dissertation, Elec. Eng., Univ. of Washington Seattle, 1975.
126. Reynolds L., Johnson C. C., Ishimaru A., Appl. Opt., **15**, 2059 (1976).
127. Rowell R. L., Stein R. S., eds., Electromagnetic Scattering, Gordon and Breach, New York, 1967.
128. Ruck G. T. et al., Radar Cross Section Handbook, Vols. I and II, Plenum Press, New York, 1970.
129. Sassen K., J. Appl. Meteorol., **13**, 923 (1974).
130. Saxon D. S., Lectures on the Scattering of Light, UCLA Dept. of Meteorol. Sci. Rep. № 9, 1955.
131. Saxton J. A., Meteorological Factors in Radio Wave Propagation pp. 292—306, Phys. Soc. London, 1946.
132. Schaaf J. W., Williams D., JOSA, **63**, 726 (1973).
133. Schiff L. I., Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1955. (Имеется перевод: Шифф Л. И. Квантовая механика. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1959.)
134. Schuster A., Astrophys. J., **21**, 1 (1905).
135. Schwan H. P., Biological Engineering, McGraw-Hill, New York, 1969.
136. Sekera Z., JOSA, **56**, 12, 1732 (1966).
137. Semplak R. A., Radio Sci., **5**, 559 (1970).
138. Semplak R. A., Bell Syst. Tech. J., **50**, 8, 2599 (1971).
139. Semplak R. A., Turrin R. H., Bell Syst. Tech. J., **48**, 1767 (1969).
140. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. — М.: Сов. радио, 1970.

141. Shimizu K., Species Identification and Discriminative Concentration Estimation of Microbial Particles by Laser Scattering, M. S. Thesis, Elec. Eng. Dept., Univ. of Washington, Seattle, Washington, 1976.
142. Shimizu K., Ishimaru A., Opt. Eng., **16** (1978).
143. Shung K. K., Sigelmann R. A., Reid J. M., IEEE Trans. Biomed. Eng., **BME-23**, 6, 460 (1976).
144. Sigelmann R. A., Reid J. M., JASA, **53**, 1351 (1973).
145. Silver S., Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill, New York, 1949.
146. Skolnik M. I., Radar Systems, McGraw-Hill, New York, 1962. (Имеется перевод: Сколник М. Введение в технику радиолокационных систем. Пер. с англ. — М.: Наука, 1966.)
147. Skolnik M. I., Radar Handbook, McGraw-Hill, New York, 1970. (Имеется перевод: Сколник М. И. Справочник по радиолокации. Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1976.)
148. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. — М.: Гостехиздат, 1956.
149. Sommerfeld A., Thermodynamics and Statistical Mechanics, Academic Press, New York, 1956. (Имеется перевод: Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. Пер. с нем. — М.: ИЛ, 1955.)
150. Stephens R. W. B., Underwater Acoustics, Wiley (Interscience), New York, 1970.
151. Stogryn A., Radio Sci., **5**, 509 (1974).
152. Stratton J. A., Proc. IRE, **18**, 1064 (1930).
153. Stratton J., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941. (Имеется перевод: Страттон Д. А. Теория электромагнетизма. Пер. с англ. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948.)
154. Stroke G. W. et al., Ultrasonic Imaging and Holography, Plenum Press, New York, 1974.
155. Татарский В. И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. — М.: изд-во АН СССР, 1959.
156. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
157. Tolstoy I., Clay C. S., Ocean Acoustics, McGraw-Hill, New York, 1966.
158. Tricker R. A. R., Introduction to Meteorological Optics, American Elsevier, New York, 1970.
159. Tsang L., Kong J. A., Radio Sci., **10**, 1025 (1975).
160. Turner L., Appl. Opt., **12**, 1085 (1973).
161. Ушков О. Я., Герман В. Л., Ваксер И. Х. — Укр. физ. журн., 1961, **6**, с. 618.
162. Van de Hulst H. C., Light Scattering by Small Particles, Wiley, New York, 1957. (Имеется перевод: Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. — М.: ИЛ, 1961.)
163. Van der Pol B., Bremmer H., Operational Calculus, Cambridge Univ. Press, London, 1959.
164. Ward G. et al., Appl. Opt., **12**, 2585 (1973).
165. Weast R. C., ed., CRC Handbook of Chemistry and Physics, Chemical Rubber Co., Cleveland, Ohio, 1970.
166. Weibel G. E., Dressel H. O., Proc. IEEE, **55**, 497 (1967). (Имеется перевод: Вейбел, Дрессел, ТИИЭР, 1967, **55**, с. 22.)
167. Wells P. N. T., Physical Principles of Ultrasonics Diagnosis, Academic Press, New York, 1969.
168. Williams M. M. R., Mathematical Methods in Particle Transport Theory, Wiley, New York, 1971.
169. Wolbarsht M. L., Laser Application in Medicine and Biology, Vol. I, Plenum Press, New York, 1971.

170. Woodward P. M., Probability and Information Theory with Application to Radar, Oxford Univ. Press (Pergamon), London and New York, 1964. (Имеется перевод: Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Пер. с нем. — М.: Сов. радио, 1955.)
171. Wyatt P. J., Appl. Opt., 7, 1879 (1968).
172. Яглом А. М. — УМН, 1952, № 5, с. 51.
173. Yeh C., Phys. Rev., 135, A1193 (1964).
174. Yeh C., JASA, 46, 797 (1969).
175. Zadeh L. A., Proc. IRE, 38, 291 (1950).
176. Zaneveld J. R. V., Pak H., JOSA, 63, 3, 321 (1973).

Предметный указатель

Альbedo поверхности и дна океана 192
— частицы 20, 174, 189
Аэрозоль 54

Биоакустика 79
Биоптика 75
Биоэлектродинамика 62
Ближнего поля явления 249

Видимость 62
— оптическая 62
ВКБ-приближение 34
Волна неполяризованная 43
— плоская импульсная 143
— сферическая падающая 252
Волновод акустический 68
Волны акустические 48
— частично поляризованные 183
Время когерентности 113, 150

Гамма-распределение модифицированное 57
Гематокрит 76, 79, 207
Герца вектор 24
Гидроакустика 66
Гидрометеоры 54
Гидрооптика 64
Град, оптические и СВЧ-свойства 63
Граничные условия для двухпотоковой теории 214
— — — диффузной интенсивности 176, 199
— — — лучевых интенсивностей на границе однородных сред 171
— — — четырехпотоковой теории 219

Двухпотоковая теория 212
Диаграмма направленности по мощности 84
— неопределенности 129
Диаграммы ширина на уровне половинной мощности 89

Диаметр медианный дождевых капель 56
Диатермия 74
Дисперсия флуктуаций интенсивности 93
Диффузии длина 246
Диффузия от точечного источника 206
Диэлектрическая проницаемость жировой, мышечной и мозговой тканей 75
Длина свободного пробега для изотропного рассеяния 247
Доплеровский сдвиг 97
Дымка, оптические и СВЧ-свойства 62

Естественный свет 42

Закон диффузного отражения 191
— затенения 225
— *Кирхгофа* излучения черного тела 178
— *Ламберта* 169
— *Ламберта — Бира* 76
— *Юнга* 65
Затухание в дожде 59
Зона *Френеля* 157

Излучатель остронаправленный 118
Излучение диска 255
— изотропное 169
Измерение отражения 207
Изобестические точки 77
Импеданс акустический характеристический 51
Импульс, распространение и рассеяние 108
— — — — между передатчиком и приемником 151
— узкополосный 109
— уширение 113
Инвариантное погружение 239
Индикатор дальность—высота (ИДВ) 53
— движущихся целей (ИДЦ) 133
— кругового обзора (ИКО) 53
— типа А 53

Интенсивность диффузная 176, 188
 — когерентная 92, 137
 — коллимированная 177
 — некогерентная 92
 — падающая ослабленная 179, 188
 — поверхностная 166
 — поля 165
 — средняя 169

Канал звуковой 68
 — с некоррелированным рассеянием 114
 — стационарный 114
 — — с некоррелированным рассеянием 114, 117, 129
 — SOFAR 68
 Катетер волоконнооптический 206, 209
 — оксиметрический 208
Кирхгофа закон 178
 Когерентности полоса 113
 Концентрация 84
 — бактерий 192, 194
 Корреляционная функция временная 99, 141, 159
 Корреляция рассеянного поля пространственная 101
 Косинус угла рассеяния средний 197
 Коэффициент использования апертуры 90
 — поглощения 64
 — полного затухания 64
 — усиления 90
 Красные кровяные тельца 76
 Кровь гемолизированная 76
 — ультразвуковые свойства 80
 — характеристики и сечения 78

Лагранжев подход, описание акустических волн 48
 Локатор акустический 52, 68
 — лазерный 52
 Лучевая интенсивность 165
 — — измерение 167
 — — коллимированного пучка 193
 — — на плоской границе 171
 — — постоянство в свободном пространстве 169

Малоугловое приближение 258
 Метод перевала 150
 Ми решение 37
 Милна проблема 201, 256

Множественного рассеяния теория 181
 — — — *Тверского* 163, 181
 Множественное рассеяние 84, 163

Насыщенность кислородом 76, 78, 207
 Нефть, акустические свойства 70

Облака, оптические и СВЧ-характеристики 62
 Огибающая комплексная модулированного сигнала 110
 Океаническое дно, альbedo 192
 — — площадь 67
 Оксиметрия 78
 Оптическая плотность 77
 — теорема 23
 Оптический путь 86, 135, 179
 Осадки, интенсивность выпадения 55
 Освещенность 168
 Отражение диффузное 191
 — — и прохождение 224
 — от облаков при оптической локации 121

Первый порядок теории множественного рассеяния 82, 86, 187
 Плоскопараллельная среда 189, 224
 Плотность потока, распространяющегося назад 167
 — — — вперед 167
 — энергии 165, 168
 Площадь эффективная приемной апертуры 85
 Поглощение света в чистой воде 64
Пойнтинга вектор 185
 Показатель преломления воды и льда 59
 Поле когерентное 92
 — некогерентное 92
 — среднее 92, 137
 — флуктуационное 92, 137
 Поляризация частичная 42
 — эллиптическая 40
 Поперечное сечение пучка среднеквадратичное 267
 Потенциал скоростей 49
 Поток в теории переноса 165
 Приближение борновское 31, 86
 — диффузионное 83
 — однократного рассеяния 82, 84
 Приемник движущийся 103
 Принцип инвариантности 239
Пуанкаре сфера 42

- Пузырьки воздушные 70
 Пучок коллимированный 192, 201, 204, 217
 — оптический, флуктуации в дожде 160
 — размер 193
- Радиолокатор доплеровский** 130
 — — импульсный 53, 130, 133
 — когерентный 53, 130
 — метеорологический 52
 — некогерентный 53
 — обычный 53
 — однопозиционный 86
- Разреженная среда** 187
- Распределение вероятностей рассеянного поля** 104
 — дождевых капель по размерам 55, 123
 — *Лоу и Парсонса* 56
 — *Маршалла и Палмера* 55, 160
 — по размерам 47, 55, 123
 — *Рэлея* 105
 — угловое 263
 — частиц по размерам 47
- Распространение волн в облаке больших частиц** 258
 — — пределах прямой видимости 134
- Рассеиватели в атмосфере** 32
 — — биологических средах 54
 — — океане 52
- Рассеяние акустических волн** 50
 — звука в воде 66
 — изотропное 243
 — импульса бистатическое 126
 — — обратное 118
 — — для передатчика с широкой диаграммой направленности 125
 — на биологических средах 74—81
 — — воздушных пузырьков 70
 — — круглом диске 33
 — — однородной сфере 32
 — — случайно ориентированной частице 34
 — обратное от дождя 91
 — рэлеевское 27, 28
 — на сфероидальном диэлектрическом теле 30
 — *Рэлея — Дебая* 31
- Рассеяния амплитуда** 18, 25
 — — большой сферы 140
 — коэффициент 64
- Расходимость угловая** 266
- Рытова приближение** 153
- Светимость энергетическая** 168
- СВЧ-излучение, максимальная безопасная плотность мощности** 74, 75
 — — обратное рассеяние от дождя 91
 — нагреватель 74
- Сечение** 17
 — геометрическое 20
 — дифференциальное рассеяния 19
 — крови 78
 — обратного рассеяния частицы 19
 — — — слоя 91
 — поглощения 20, 26
 — полное 19
 — рассеяния 17
 — — бистатическое 85
 — — единичного объема морской воды (свет) 65
 — — зависящее от времени 94
- Сжимаемость** 49
- Скорость звука в воде, воздухе и нефти** 67, 70
- «слепая» доплеровского радиолокатора 132
- установившаяся дождевых капель 57
- частицы 95
- Среда слоистая плоскопараллельная** 239
 — случайная нестационарная 108
- Смешанный момент, двухчастотный** 111
- Смог** 62
- Снег** 63
- Собственное значение** 233
- Собственный вектор** 233
- Сохранение энергии** 175
- Спектр угловой** 263
 — уширение 113
 — частотный 93, 99, 142
 — — волны, распространяющейся в дожде 143, 160
 — — флуктуаций волн 159
- Среда полубесконечная** 238
- Стационарная случайная функция** 93
- Стокса матрица** 43, 184
 — — параметры 40, 183
 — — преобразование при повороте системы координат 45
- Теория двухпоточковая** *Кубелки и Мунка* 212
 — переноса излучения 164, 173
 — — нейтронов 164
 — четырехпоточковая 217

- Тепловое излучение 242
Термоклин 67
Ткани мышечные, диэлектрическая проницаемость 75
Туман, оптические и СВЧ-свойства 62
- Угол ориентационный дождевой капли 55
Узкая диаграмма направленности 88
Уравнение *Больцмана* 164, 173
— волновое акустическое 49
— диффузионное 199, 250
— интегральное *Шварцшильда*—*Милна* 257
— *Максвелла* — *Больцмана* со столкновениями 164
— переноса 164, 173
— — интегральная форма 178
— радиолокации 85
— — бистатическое 85
— *Дайсона* и *Бете* — *Солпитера* 181
- Фаза комплексная в методе *Рытова* 153
Фазовая матрица 184
Флуктуации интенсивности 93
— фазы 153
Формула интерполяционная *Лагранжа* 229
— квадратурная 229
— — *Гаусса* 228, 230
— *Хени* — *Гринстейна* 198
Функция взаимной когерентности 164
— — — двухчастотная 111
— источника 175
— корреляционная 93
- Функция неопределенности 128, 129
— передачи 110
— — нестационарная 110
— фазовая 19, 174, 227
— — *Рэлея* 223
— фильтрующая по углам 157
— характеристическая флуктуаций скорости 96
- Характеристики рассеяния и поглощения дождя 55
- Центральная предельная теорема 104
- Частицы в морской воде 64, 65
— вращательное движение 98
— движущиеся 94
Частота повторения импульсов 53, 124
— резонансная воздушных пузырьков в воде 71
Число *Кристофеля* 229
- Ширина луча передающей антенны 89
- Эйлерово описание акустических волн 48
Экстинкции парадокс 20
Эритроциты 76
- Ядра *Айткена* 54

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	6
От автора	9
Глава 1. Введение	11
ЧАСТЬ I. РАССЕЯНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В РАЗРЕЖЕННЫХ ОБЛАКАХ ДИСКРЕТНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ	
Глава 2. Рассеяние и поглощение волны отдельной частицей	17
2.1. Сечение рассеяния и амплитуда рассеяния	17
2.2. Общие свойства сечений	20
2.3. Оптическая теорема	23
2.4. Интегральные представления амплитуды рассеяния и сечения поглощения	23
2.5. Рэлеевское рассеяние	27
2.6. Борновское приближение (рассеяние Рэлея — Дебая)	31
2.7. ВКБ-приближение для поля внутри частицы	34
2.8. Решение Ми	37
2.9. Эллиптически-поляризованные волны и параметры Стокса	40
2.10. Частичная поляризация и естественный свет	42
2.11. Сложение независимых волн	43
2.12. Матрица рассеяния и матрица Стокса	43
2.13. Преобразование параметров Стокса при повороте системы координат	45
2.14. Распределение частиц по размерам	47
2.15. Акустические волны	48
2.16. Рассеяние акустических волн	50
Глава 3. Характеристики дискретных рассеивателей в атмосфере, оке- ане и биологических средах	52
3.1. Метеорологические радиолокаторы, шумы и помехи	52
3.2. Аэрозоль и гидрометеоры	54
3.3. Рассеяние света в морской воде (гидрооптика)	64
3.4. Рассеяние звука в воде гидроакустика)	66
3.5. Рассеяние на биологических средах	74
Глава 4. Рассеяние волн в разреженных облаках частиц	82
4.1. Средняя мощность рассеянного поля в приближении одно- кратного рассеяния	84
4.2. Мощность рассеянного поля в первом порядке теории много- кратного рассеяния	86
4.3. Случай узкой диаграммы направленности	88
4.4. Когерентное и некогерентное поле	91
4.5. Сечение рассеяния движущейся частицы с учетом времен- ной корреляции	94

4.6. Временная корреляционная функция и частотный спектр рассеянного поля	99
4.7. Пространственная корреляция рассеянного поля	101
4.8. Корреляция поля, принимаемого движущимся приемником	103
4.9. Распределение вероятности рассеянного поля	104

Глава 5. Рассеяние импульсных волн в случайном облаке частиц 108

5.1. Общая формулировка проблемы распространения и рассеяния импульсов в нестационарной случайной среде	108
5.2. Двухчастотная функция когерентности и смешанной момент выходного импульса	111
5.3. Время когерентности и полоса когерентности	113
5.4. Рассеяние узкополосного импульса	114
5.5. Обратное рассеяние импульса, излучаемого остронаправленным излучателем	118
5.6. Обратное рассеяние последовательности коротких импульсов	123
5.7. Обратное рассеяние импульса, излучаемого передатчиком с широкой диаграммой направленности	125
5.8. Бистатистическое рассеяние импульса	126
5.9. Представление через функцию неопределенности	128
5.10. Импульсно доплеровский радиолокатор	130

Глава 6. Распространение в пределах прямой видимости через разреженное облако частиц 184

6.1. Когерентная и некогерентная интенсивности и пространственная корреляция флуктуаций в плоской волне	136
6.2. Временная корреляция и частотный спектр плоской волны	141
6.3. Распространение плоской импульсной волны в пределах прямой видимости	143
6.4. Распространение между излучателем и приемником в пределах прямой видимости	145
6.5. Распространение импульса между излучателем и приемником	151
6.6. Приближение Рытова для флуктуаций амплитуды и фазы	153
6.7. Приближение Рытова для плоской волны	155
6.8. Временная корреляция и частотные спектры флуктуаций уровня и фазы плоской волны	159
6.9. Приближение Рытова с учетом направленных свойств излучателя и приемника	161

ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНОМ ОБЛАКЕ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Глава 7. Теория переноса излучения в случайном облаке частиц 163

7.1. Лучевая интенсивность, поток и плотность энергии	165
7.2. Лучевая интенсивность в свободном пространстве и на границах раздела однородных сред	169
7.3. Дифференциальное уравнение для лучевой интенсивности	173
7.4. Ослабленная падающая интенсивность, диффузная интенсивность, граничное условие и функция источника	176
7.5. Интегральная форма уравнения переноса	178
7.6. Эффективная площадь антенны и принимаемая мощность	181
7.7. Уравнение переноса для частично поляризованной электромагнитной волны	183
7.8. Связь лучевой интенсивности с вектором Пойнтинга	185

Глава 8. Приближенные решения для разреженной среды	187
8.1. Лучевая интенсивность в приближении первого порядка теории многократного рассеяния	188
8.2. Падение плоской волны на плоскопараллельную среду	189
8.3. Падение коллимированного пучка на плоскопараллельную среду	192
Глава 9. Диффузионное приближение	195
9.1. Вывод диффузионного уравнения	195
9.2. Граничные условия	199
9.3. Падение коллимированного пучка на слой рассеивающих частиц	201
9.4. Решение для случая плоской волны, падающей на слой рассеивающих частиц	202
9.5. Решение для случая коллимированного пучка конечной ширины, падающего на слой рассеивающих частиц	204
9.6. Диффузия от точечного источника	206
9.7. Измерение отражения с помощью двух волоконных световодов	206
9.8. Волоконнооптический оксиметрический катетер	208
Глава 10. Двухпоточная и четырехпоточная теории	212
10.1. Двухпоточная теория Кубелки и Мунка	212
10.2. Коэффициенты K и S в двухпоточной теории	216
10.3. Четырехпоточная теория	217
Приложение 10А	220
Глава 11. Плоскопараллельная задача	224
11.1. Нормальное падение плоской волны на плоскопараллельный слой	225
11.2. Типичные фазовые функции	227
11.3. Квадратурная формула Гаусса	228
11.4. Общее решение	231
11.5. Полубесконечная среда	238
11.6. Наклонное падение и другие методы	238
11.7. Слоистая плоскопараллельная среда	239
11.8. Некоторые смежные проблемы	242
Глава 12. Изотропное рассеяние	243
12.1. Метод преобразования Фурье для изотропного рассеяния	244
12.2. Диффузия и явления ближнего поля	249
12.3. Излучение при произвольной падающей интенсивности	251
12.4. Излучение в случае направленной сферической падающей волны	252
12.5. Излучение при произвольном распределении источников	254
12.6. Изотропное рассеяние в конечном объеме и проблема Милна	256
Глава 18. Приближение для больших частиц	258
18.1. Вывод дифференциального уравнения в малоугловом приближении	258
18.2. Общее решение	260
18.3. Приближенное решение для случая медленного углового изменения диффузной интенсивности	263
Литература	268
Предметный указатель	274

ОПЕЧАТКА

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
4	10 сн.	1 р. 30 к.	2 р. 60 к.	Изд-ва

Зак. 763